

В.П. Попов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

Рекомендовано Министерством
образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по направлению «Радиотехника»



Москва
«Высшая школа»
2003

УДК 621.3.01
ББК 31.27-01
П58

Рецензент — проф. М.П. Демин (Московский государственный
авиационный институт — ТУ)

Попов, В.П.
П58 Основы теории цепей: Учеб. для вузов/В.П. Попов. — 4-е
изд., испр. — М.: Высш. шк., 2003. — 575 с.: ил.

ISBN 5-06-003949-8

В книге изложены основы теории линейных электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами в установившемся и переходном режимах, а также основы анализа нелинейных резистивных цепей на постоянном токе и при гармоническом воздействии. Рассмотрены цепи с управляемыми источниками, невзаимные четырехполосники, идеальные операционные усилители, преобразователи сопротивления и активные фильтры.

В четвертое издание (3-е — 2000 г.) внесен ряд исправлений.

УДК 621.3.01
ББК 31.27-01

ISBN 5-06-003949-8

© ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2003

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга в отличие от известных учебников по теории цепей рассчитана на студентов специальности «Радиотехника» и максимально учитывает особенности соответствующего учебного плана.

Как известно, в вузах, работающих по типовому учебному плану, курс «Основы теории цепей» (ОТЦ) изучается одновременно с курсами физики, высшей математики и информатики. Это обстоятельство, значительно затрудняющее изучение курса ОТЦ, оказало существенное влияние на выбор структуры учебника и методику изложения отдельных разделов. В частности, рассмотрение материала начато с анализа цепей, находящихся в установившемся режиме под гармоническим внешним воздействием, хотя такой режим не является характерным для радиотехнических цепей. Более того, весь курс ОТЦ можно построить значительно компактнее и менее противоречиво, если изложение материала начать с анализа цепей во временной области. Однако студенты вузов, обучающиеся по типовым учебным планам, не готовы к такому изложению ОТЦ, так как к началу изучения курса они еще не имеют необходимых знаний в области дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного. При выбранной структуре учебника для изучения первых пяти глав достаточно знаний физики и математики в объеме школьных курсов, в частности общего знакомства с методами расчета цепей постоянного тока, понятиями интеграла, производной и комплексного числа. Для изучения остальных глав необходимо знать методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и основы операционного исчисления (гл. 6), численные методы и основы программирования (гл. 10), начала теории функций комплексного переменного (гл. 9).

Второе издание учебника сохраняет в целом структуру и направленность первого, однако отдельные главы книги подверглись значительной переработке и дополнению в соответствии с предложениями и замечаниями, сделанными преподавателями различных вузов страны. Основное внимание уделено рассмотрению цепей с управляемыми источниками и методам анализа цепей, ориентированным на применение в программах автоматизированного схемотехнического проектирования; в книгу включены дополнительные материалы по

независимым четырехполюсникам, преобразователям сопротивления, идеальным операционным усилителям и активным фильтрам. Учитывая тенденцию увеличения роли самостоятельной работы студентов в изучении курса, пересмотрено изложение некоторых трудных для понимания вопросов и введен ряд новых примеров.

Как и в первое, во второе издание книги не включены вопросы, излагаемые в таких смежных курсах, как «Введение в специальность» [1] и «Радиотехнические цепи и сигналы» [2, 3]: история развития радиотехники и теории цепей, анализ цепей, находящихся под периодическим негармоническим воздействием, устойчивость цепей с обратной связью, синтез фильтров, включая вопросы аппроксимации и оптимизации, автогенераторы, параметрические цепи и цепи с нелинейными реактивными элементами. С целью сокращения общего объема книги снято рассмотрение ряда второстепенных вопросов, таких, как K -преобразование гармонических функций, нахождение дуального графа и вариометры с переменной взаимной индуктивностью.

Терминология и условные буквенные обозначения в учебнике соответствуют ГОСТ 19880 — 74 и 1494 — 77. Единицы физических величин приведены по СТ СЭВ 1052 — 78. Однако действующие стандарты не учитывают всех понятий и величин, используемых в современной теории цепей. Так, в стандартах Единой системы конструкторской документации (ЕСКД) приведены условные графические обозначения, а в ГОСТ 1494 — 77 — условные буквенные обозначения, применяемые при построении принципиальных схем электрических цепей, но не даны соответствующие графические и буквенные обозначения для эквивалентных схем электрических цепей, с которыми в основном приходится иметь дело в теории цепей. В связи с этим в учебнике наряду со стандартизированными графическими и буквенными обозначениями использованы установившиеся, но еще не стандартизированные или введены новые обозначения. По предложению рецензентов, поддержанному редакцией, автор отказался от подчеркивания комплексных величин, что позволило упростить набор формул, повысить емкость печатного листа и улучшить внешнее восприятие формул.

Часть материала, включенного в книгу, предназначена для углубленного изучения курса ОТЦ и не является обязательной. Эта часть текста, так же как и некоторые сведения из ранее изученных курсов, например основные свойства преобразования Лапласа, набрана петитом.

Учебник рассчитан на совместное применение с задачником [4] и лабораторным практикумом [5] и поэтому не содержит задач и упражнений. Все три книги полностью согласованы между собой по терминологии, методике преподнесения материала и обозначениям, образуя единый комплекс учебных пособий.

Автор выражает признательность всем лицам, приславшим за-

мечания и рекомендации по переработке первого издания книги, искренне благодарит коллектив кафедры основ радиотехники Московского энергетического института (д-ров техн. наук, проф. С. И. Баскакова, М. П. Демина и В. Г. Карташева, канд. техн. наук доц. В. А. Калинина, В. П. Жукова, В. В. Штыкова) за большой труд по рецензированию рукописи.

Предложения и замечания просьба направлять по адресу: Москва, 127994, ГСП-4, ул. Неглинная, д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Основы теории цепей» является базовым для подготовки специалистов в двух смежных областях знания — *электротехнике* и *радиоэлектронике*. Эти два направления науки и техники имеют между собой много общего, построены на общей физической основе, но нацелены на решение различных технических задач.

Основная задача, решаемая в электротехнике, — это производство и передача электрической энергии, преобразование этой энергии в другие виды энергии, например, в механическую, тепловую или световую. Радиоэлектроника решает широкий круг задач, связанных с использованием электрических явлений для передачи и обработки информации.

К ним в первую очередь относятся задачи связи, радиолокации и радионавигации, телеуправления, телеизмерения, автоматизации различных производственных процессов и многие другие. Не боясь преувеличений, можно сказать, что электротехника и радиоэлектроника являются ведущими отраслями науки и техники, стоящими в авангарде научно-технического прогресса и имеющими исключительно важное значение для дальнейшего повышения производительности труда, улучшения качества продукции и роста материального благосостояния человечества.

Во всех электротехнических и радиоэлектронных устройствах независимо от их назначения и принципа действия имеют место одни и те же электромагнитные процессы, подчиняющиеся одним и тем же физическим законам. Знакомство с основными электрическими явлениями и процессами составляет существенную часть школьного и вузовского курсов физики. Знания, полученные из курса физики, дают общие представления об устройстве и принципе действия различных электротехнических и радиоэлектронных устройств, однако они недостаточны для специалистов, готовящихся к расчету, проектированию и производству таких устройств. Курс «Основы теории цепей», базирующийся на курсах физики и высшей математики, вооружает будущих специалистов инженерными методами исследования процессов в различных электротехнических и радиоэлектронных устройствах и является фундаментом для всех последующих специальных курсов.

Электромагнитные явления и устройства на их основе можно достаточно строго описать *методами теории электромагнитного поля*. В теории электромагнитного поля оперируют с векторными

величинами, такими, как плотности токов, напряженности электрического и магнитного полей. Эта теория позволяет описать процессы в каждой точке электромагнитного поля с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Максвелла). Методы теории поля дают возможность рассмотреть в общем виде самые разнообразные явления в любых электротехнических и радиотехнических устройствах, в том числе в таких сложных, как антенны, волноводы, электровакуумные и полупроводниковые приборы. В то же время эти методы весьма сложны, трудоемки и на практике позволяют решить ограниченное число задач.

Для исследования широкого круга устройств можно применять упрощенные методы, так называемые *методы теории цепей*, основанные на замене реального устройства некоторой упрощенной моделью, процессы в которой описываются скалярными величинами — токами и напряжениями. Отдельные составные части (элементы) устройства при этом заменяют моделями, приближенно отражающими основные (в рамках решаемой задачи) свойства соответствующих элементов.

Разработка инженерных методов исследования процессов в электротехнических и радиоэлектронных устройствах, основанных на замене этих устройств упрощенными моделями, процессы в которых описываются в терминах токов и напряжений, составляет *предмет теории цепей*.

Методы теории электрических цепей вследствие принятых допущений и упрощений менее универсальны, чем методы теории поля, в частности их нельзя применять на достаточно высоких частотах, когда длина волны электромагнитных колебаний становится соизмеримой с размерами исследуемого устройства, а также при исследовании процессов излучения, распространения и приема радиоволн; ограничено использование методов теории электрических цепей в технике высоких напряжений, при определении параметров и построении упрощенных моделей различных элементов цепей. В этих случаях для исследования процессов, а также для оценки пределов применимости результатов, полученных с помощью теории цепей, необходимо использовать методы теории электромагнитного поля.



Основные понятия теории цепей

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

Электрической цепью называется совокупность устройств, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий тока и напряжения. Составные части (элементы) электрической цепи можно разделить на две группы: источники электрической энергии и приемники (нагрузки).

К **источникам** (первичным источникам) электрической энергии относятся различные устройства, в которых происходит преобразование химической, тепловой, механической и других видов энергии в электрическую. Источниками электрической энергии являются, например, гальванические элементы, аккумуляторы, солнечные батареи, гидрогенераторы и т. п.

Приемники электрической энергии — это элементы электрической цепи, в которых происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также ее запасание. Приемниками электрической энергии являются электрические двигатели, лампы накаливания, транзисторы, конденсаторы, индуктивные катушки, резисторы, передающие антенны, громкоговорители и др.

Особый класс электрических устройств представляют собой **вторичные источники энергии**, к которым относятся различные блоки питания, выпрямители, стабилизаторы, приемные антенны. В устройствах этого типа осуществляются различные преобразования электрических токов и напряжений, такие, как преобразование постоянного тока в переменный, выпрямление переменного тока, изменение напряжения и т. п. Вторичные источники получают электрическую энергию от первичных источников и относительно них являются приемниками электрической энергии. В то же время относительно остальной части цепи, которая получает электрическую энер-

гию от вторичных источников, они могут рассматриваться как источники.

Для подключения к остальной части цепи каждый элемент цепи имеет внешние выводы, называемые также зажимами или полюсами. В зависимости от числа внешних выводов различают двухполюсные (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) и многополюсные (транзистор, трансформатор, электронная лампа) элементы.

В теории цепей предполагается, что каждый элемент цепи полностью характеризуется зависимостью между токами и напряжениями на его зажимах, при этом процессы, имеющие место внутри элементов, не рассматриваются.

В соответствии с основным методом теории цепей реальные элементы цепи заменяются их упрощенными моделями, построенными из идеализированных элементов. Используют пять основных типов идеализированных двухполюсных элементов: идеальный резистор, идеальный конденсатор, идеальная индуктивная катушка, идеальный источник напряжения и идеальный источник тока. В простейшем случае модель реального элемента может состоять из одного идеализированного элемента, в более сложных случаях она представляет собой соединение нескольких идеализированных элементов. Кроме двухполюсных используют также многополюсные идеализированные элементы — управляемые источники тока и напряжения, идеальные трансформаторы и др.

Электрическая цепь, которую получают из исходной реальной цепи при замене каждого реального элемента его упрощенной моделью, составленной из идеализированных элементов, называют моделирующей или идеализированной. В теории цепей исследуют процессы, имеющие место именно в таких цепях.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В связи с тем что в теории цепей процессы, имеющие место внутри элементов электрической цепи, не рассматриваются, под электрическим током в теории цепей понимают ток проводимости во внешних выводах этих элементов или в соединительных проводниках.

Таким образом, электрический ток (в дальнейшем, для краткости, просто ток) — это упорядоченное движение свободных носителей заряда в соединительных проводниках и внешних выводах элементов электрической цепи.

В любом проводнике упорядоченное перемещение носителей заряда происходит в одном из двух возможных направлений, в соответствии с этим ток также имеет одно из двух направлений. За направление тока независимо от природы носителей электрического заряда и их типа принимают направление, в котором перемещаются (или могли бы перемещаться) носители положительного заряда. Таким образом, направление электрического тока в наиболее рас-

пространенных проводниковых материалах — металлах — противоположно фактическому направлению перемещения носителей заряда — электронов. О направлении тока судят по его знаку, который зависит от того, совпадает или нет направление тока с направлением, условно принятым за положительное.

Условно-положительное направление тока при расчетах электрических цепей может быть выбрано совершенно произвольно.

Если в результате расчетов, выполненных с учетом выбранного направления, ток получится со знаком плюс, то его направление, т. е. направление перемещения положительных зарядов, совпадает с направлением, выбранным за положительное; если ток будет иметь знак минус, то его направление противоположно условно-положительному.

Количественно ток оценивают зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени. Пусть $q = q(t)$ — это заряд, прошедший через произвольное поперечное сечение проводника к моменту времени t (рис. 1.1, а). Рассмотрим два момента времени t_1 и $t_1 + \Delta t$, которым соответствуют заряды $q(t_1)$ и $q(t_1 + \Delta t)$. По определению, ток в момент времени t_1 равен пределу отношения количества электричества, переносимого свободными носителями электрического заряда через сечение проводника за промежуток времени Δt , к длительности этого промежутка времени при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$i(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t_1 + \Delta t) - q(t_1)}{\Delta t} = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_1}. \quad (1.1)$$

Таким образом, ток в произвольный момент времени t представляет собой скалярную величину, равную производной по времени от электрического заряда, переносимого через рассматриваемое сечение проводника. Иными словами, ток численно равен скорости изменения электрического заряда во времени.

В общем случае значение тока i в произвольный момент времени t (мгновенное значение тока) является функцией времени $i = i(t)$. В частном случае,

если заряд q является линейной функцией t (рис. 1.1, б), то скорость изменения заряда во времени I_- — величина постоянная, равная отношению заряда $q(t)$, перенесенного за промежуток времени t , к длительности этого промежутка:

$$i(t) = dq/dt = q/t = I_- = \text{const.}$$

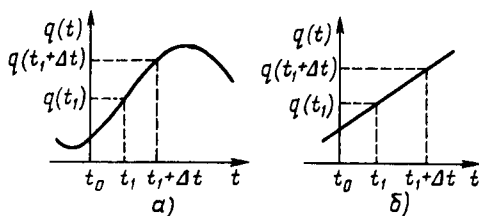


Рис. 1.1. Зависимость заряда, протекающего через поперечное сечение проводника от времени:

а — нелинейная; б — линейная

Таким образом, ток может быть *постоянным* (неизменным во времени) или *переменным*.

В Международной системе единиц (СИ) заряд выражают в *кулонах* (Кл), время — в *секундах* (с), ток — в *амперах* (А). При постоянном токе в 1 А через поперечное сечение проводника за промежуток времени, равный 1 с, переносится заряд в 1 Кл.

НАПРЯЖЕНИЕ

Как известно, на всякий заряд, помещенный в электрическое поле, действует сила, абсолютное значение и направление которой определяются напряженностью электрического поля, а также значением заряда и его знаком. Если носитель заряда является свободным, т. е. не закрепленным в какой-то фиксированной точке, то под действием приложенной силы он перемещается. Перемещение заряда происходит за счет энергии электрического поля. При перемещении единичного положительного заряда между двумя любыми точками *A* и *B* электрического поля силами электрического поля совершается работа, равная разности потенциалов этих точек. Напомним, что потенциал φ_A произвольной точки *A* электрического поля определяется как работа, которая совершается силами электрического поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Разность потенциалов точек *A* и *B* называется **напряжением** между этими точками:

$$u = \varphi_A - \varphi_B.$$

Напряжение между точками *A* и *B* электрической цепи может быть определено как предел отношения энергии электрического поля w , затрачиваемой на перенос положительного заряда q из точки *A* в точку *B*, к этому заряду при $q \rightarrow 0$:

$$u = dw/dq. \quad (1.2)$$

В Международной системе единиц напряжение выражают в *вольтах* (В), а работу — в *джоулях* (Дж). При перемещении электрического заряда в 1 Кл между точками электрической цепи, разность потенциалов которых равна 1 В, совершается работа в 1 Дж.

Напряжение представляет собой скалярную величину, которой приписывается определенное направление.

Обычно под направлением напряжения понимают направление, в котором под действием электрического поля перемещаются (или могли бы перемещаться) свободные носители положительного заряда, т. е. направление от точки цепи с большим потенциалом к точке цепи с меньшим потенциалом.

Очевидно, что на участках цепи, в которых не содержатся источники энергии и перемещение носителей заряда осуществляется за счет энергии электрического поля, направления напряжения и тока совпадают.

Внутри источников энергии носители электрического заряда перемещаются за счет энергии сторонних сил, т. е. сил, которые обусловлены неэлектромагнитными при макроскопическом рассмотрении процессами, такими, как химические реакции, тепловые процессы, воздействие механических сил. Носители заряда через источники перемещаются в направлении, противоположном направлению действия сил электрического поля, в частности, носители положительного заряда — от зажима источника с более низким потенциалом к зажиму с более высоким потенциалом. Таким образом, направление тока через источник противоположно направлению напряжения.

При расчетах электрических цепей направление напряжения сравнивается с направлением, условно выбранным за положительное. Если в результате расчетов напряжение на рассматриваемом участке цепи получится со знаком плюс, то направление напряжения совпадает с направлением, условно принятым за положительное, если напряжение получится со знаком минус, то его направление противоположно условно-положительному.

ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

При перемещении сторонними силами носителей электрического заряда внутри источника энергия процессов, вызывающих эти силы, преобразуется в электрическую энергию. Источники электрической энергии характеризуются электродвижущей силой (ЭДС), которая может быть определена как работа сторонних сил, затрачиваемая на перемещение единичного положительного заряда внутри источника от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом.

Независимо от природы сторонних сил ЭДС источника численно равна напряжению между зажимами источника энергии при отсутствии в нем тока.

Электродвижущая сила — скалярная величина, направление которой совпадает с направлением перемещения положительных зарядов внутри источника, т. е. с направлением тока. Напряжение на участке цепи и ЭДС являются функциями времени либо сохраняют постоянные значения. Постоянные напряжения и ЭДС обозначают соответственно U и E . Переменные напряжения и ЭДС характеризуют мгновенными значениями и обозначают соответственно $u = u(t)$ и $e = e(t)$.

МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ

Пусть разность потенциалов точек A и B электрической цепи равна u . При перемещении элементарного электрического заряда dq через участок цепи, лежащий между этими точками, силы элект-

рического поля совершают элементарную работу, которая в соответствии с (1.2) и (1.1)

$$dw = u dq = u i dt. \quad (1.3)$$

Элементарная работа характеризует изменение энергии электрического поля и количественно равна энергии, поступившей в рассматриваемый участок цепи за промежуток времени dt . Энергию, поступившую к моменту времени $t = t_1$, определяют интегрированием (1.3):

$$w = w(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} u i dt. \quad (1.4)$$

Интегрирование производится начиная с $t = -\infty$ для того, чтобы учесть все возможные поступления энергии в цепь. При этом считают, что энергия, поступившая в цепь к моменту времени $t = -\infty$, равна нулю: $w(-\infty) = 0$. Если для любого момента времени t при любом законе изменения i или u во времени энергия $w(t) > 0$, то рассматриваемый участок цепи является потребителем энергии и называется пассивным. Если хотя бы для какого-то момента времени энергия $w(t) < 0$, то участок цепи содержит источники энергии и называется активным.

Производная энергии по времени представляет собой мгновенную мощность

$$p = dw/dt = ui. \quad (1.5)$$

Как видно из выражения (1.5), мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений напряжения и тока.

Мгновенную мощность p , характеризующую мгновенную скорость поступления энергии в рассматриваемый участок цепи, обычно для краткости называют **мгновенной мощностью участка цепи**. Если в рассматриваемый момент времени направления тока и напряжения совпадают, то мгновенная мощность исследуемого участка цепи положительна. Это означает, что в данный момент времени участок цепи получает электрическую энергию от остальной части цепи. Если направления напряжения и тока не совпадают, то значение мгновенной мощности p отрицательно, т. е. в данный момент времени участок цепи отдает электрическую энергию остальной части цепи.

Подставив выражение (1.5) в (1.4), выразим энергию, поступившую в участок цепи к моменту времени $t = t_1$, через мгновенную мощность:

$$w(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} p dt. \quad (1.6)$$

Очевидно, что энергия W , поступившая в цепь за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, также может быть выражена через мгновенную мощность p :

$$W = w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

В системе единиц СИ работу и энергию выражают в джоулях (Дж), а мощность — в ваттах (Вт).

СХЕМА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Схема электрической цепи (схема) представляет собой условное графическое изображение электрической цепи. В электротехнике и радиоэлектронике встречаются различные типы схем: структурные, принципиальные и схемы замещения.

Структурная схема электрической цепи — это условное графическое изображение реальной цепи, отражающее только важнейшие функциональные части цепи и основные связи между ними. Отдельные функциональные части цепи на структурной схеме могут изображаться в виде прямоугольников или с помощью условных графических обозначений; направление хода процессов указывается стрелками на линиях взаимосвязи (рис. 1.2, а).

Принципиальная схема электрической цепи представляет собой графическое изображение реальной цепи, на котором с помощью условных графических обозначений показаны все элементы цепи и соединения между ними. Каждому реальному элементу электрической цепи (транзистору, резистору, конденсатору, трансформатору и т. п.) соответствуют условное изображение и буквенное обозначение, определяемые действующими стандартами ЕСКД (рис. 1.2, б).

Схемой замещения или эквивалентной схемой электрической цепи называется условное графическое изображение моделирующей цепи, т. е. цепи, составленной из идеализированных элементов, замещающей исследуемую реальную цепь в рамках решаемой задачи. Каждому идеализированному элементу цепи присваиваются определенные условные графическое изображение и буквенное обозначение (они не стандартизированы). Схема замещения цепи может быть получена из принципиальной схемы путем замены каждого изображенного на ней реального элемента его схемой замещения.

Схема замещения реального элемента представляет собой условное графическое изображение идеализированной электрической цепи, моделирующей данный элемент в рамках поставленной задачи.

Следует иметь в виду, что в зависимости от обстоятельств (требуемая точность расчета, диапазон исследуемых частот, исполь-

§ 1.2. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

РЕЗИСТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Резистивным элементом или идеальным резистором называется идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другие виды энергии, например в тепловую, световую или механическую. Запасания энергии электрического или магнитного поля в резистивном элементе не происходит. По своим свойствам к резистивному элементу наиболее близки реальные элементы электрической цепи — резисторы, в которых электрическая энергия в основном преобразуется в тепловую. Важнейшей характеристикой резистора, которая определяет меру преобразования электрической энергии в тепловую, является его сопротивление. Помимо основного процесса — преобразования электрической энергии в тепловую — в резисторе имеют место также другие процессы, например запасание энергии электрического и магнитного полей.

Резистивный элемент можно рассматривать как упрощенную модель резистора, в которой абстрагируется только его основная характеристика — сопротивление. В соответствии с этим резистивный элемент или идеальный резистор в теории цепей часто называют просто сопротивлением*.

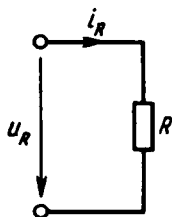


Рис. 1.3. Условное графическое изображение резистивного элемента

Условное графическое изображение резистивного элемента приведено на рис. 1.3. Условно-положительные направления напряжения и тока показаны стрелками. Рядом с условным графическим изображением резистивного элемента ставят его условное буквенное обозначение R .

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) резистора, т. е. зависимость тока от напряжения на его зажимах $u = u(i)$ или $i = i(u)$, в общем случае имеет нелинейный характер. Соответствующие зависимости, полученные для постоянных токов и напряжений, или, точнее, для случая бесконечно медленно изменяющихся токов и напряжений, получили название статических вольт-амперных характеристик (рис. 1.4, $a - в$).

Используя статические ВАХ резистора, можно определить его статическое и дифференциальное сопротивления. Статическое сопротивление — это отношение напряжения и тока на зажимах резистора:

$$R_{ст} = u_R / i_R. \quad (1.7)$$

*Использование термина «сопротивление», а также вводимых далее терминов «емкость» и «индуктивность» не только в качестве характеристик реального и идеализированного элементов, но и в качестве названий идеализированных элементов является не вполне удачным и оправдывается только компактностью изложения.

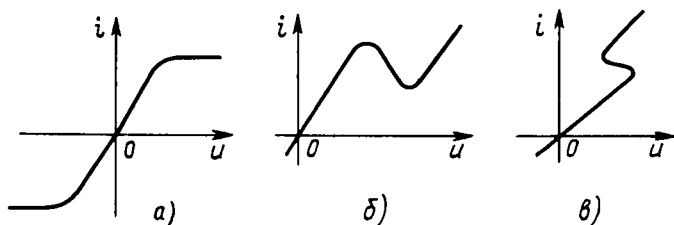


Рис. 1.4. Статические вольт-амперные характеристики различных резистивных элементов

Дифференциальное сопротивление резистора определяется производной напряжения на его зажимах по току:

$$R_{\text{диф}} = d u_R / d i_R. \quad (1.8)$$

В общем случае дифференциальное сопротивление резистора не равно статическому, причем значения обеих величин зависят от положения *рабочей точки*, т. е. от выбора пары значений u_1 и i_1 на характеристике $u = u(i)$ или $i = i(u)$, при которых производится определение $R_{\text{ст}}$ и $R_{\text{диф}}$. Пусть, например, определение $R_{\text{ст}}$ и $R_{\text{диф}}$ производится в рабочей точке $i = i_1$, $u = u_1$ (рис. 1.5, а). Значение $R_{\text{ст}}$ пропорционально $\tan \alpha$, т. е. тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в рабочую точку; значение $R_{\text{диф}}$ пропорционально $\tan \beta$, т. е. тангенсу угла наклона касательной к кривой $u = u(i)$, в точке $i = i_1$, $u = u_1 = u(i_1)$. Очевидно, что для рассматриваемого случая $R_{\text{ст}} > R_{\text{диф}}$. Анализируя рис. 1.4, нетрудно убедиться, что в зависимости от выбора рабочей точки значение $R_{\text{диф}}$ может быть как больше, так и меньше нуля, а в частном случае может равняться нулю, в то время как значение $R_{\text{ст}}$ всегда больше нуля.

Когда зависимость между напряжением и током на зажимах резистора имеет линейный характер (рис. 1.5, б), значения $R_{\text{ст}}$ и $R_{\text{диф}}$ не зависят от выбора рабочей точки и равны между собой: $R_{\text{ст}} = R_{\text{диф}} = R$, где R — сопротивление резистора.

Резистор, для которого зависимость напряжения от тока имеет линейный характер и, следовательно, значения статического и дифференциального сопротивлений равны между собой и не зависят от выбора рабочей точки, называется резистором с линейным сопротивлением. Резистор, для которого зависимость $u = u(i)$ или $i = i(u)$ имеет нелинейный характер, называется резистором с нелинейным сопротивлением. Следует отметить, что для большинства резисторов зави-

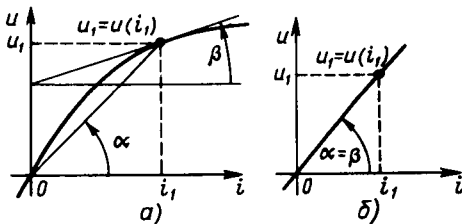


Рис. 1.5. Вольт-амперные характеристики резисторов с нелинейным (а) и линейным (б) сопротивлениями

симость $u=u(i)$ или $i=i(u)$ несколько отличается от линейной, однако в ограниченном диапазоне изменений напряжения этой нелинейностью можно пренебречь и рассматривать сопротивление такого резистора, как линейное.

Резистивный элемент, так же как и резистор, характеризуется зависимостью между током и напряжением на его зажимах и определяемыми по ней значениями статического и дифференциального сопротивлений. Для *линейного резистивного элемента* зависимость между током и напряжением имеет линейный характер, для *нелинейного* — эта зависимость отличается от линейной. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, ограничимся рассмотрением цепей с линейным сопротивлением.

Зависимость между током и напряжением на зажимах линейного сопротивления подчиняется закону Ома, который можно записать в виде

$$u_R = Ri_R \quad (1.9)$$

или

$$i_R = Gu_R, \quad (1.10)$$

где $G=1/R$ — проводимость.

В ряде случаев при исследовании электрических цепей проводимость удобно рассматривать в качестве отдельного идеализированного двухполюсного элемента, имеющего такие же свойства и такое же условное графическое изображение, как сопротивление, и буквенное обозначение G . Идеализированные резистивные элементы электрической цепи сопротивление и проводимость относятся к так называемым *диссипативным* (от латинского *dissipare* — рассеивать); их наличие в цепи приводит к потерям электрической энергии, или, точнее, к необратимому преобразованию ее в другие виды энергии.

Значения сопротивления R и проводимости G не зависят от выбора рабочей точки, причем $R>0$ и $G>0$. В Международной системе единиц сопротивление выражают в *омах* (Ом), а проводимость — в *сименсах* (См).

Очевидно, что при изменении значения сопротивления R (проводимости G) угол наклона ВАХ линейного резистивного элемента (рис. 1.5, б) изменяется, причем при $R=0$ ($G=\infty$) ВАХ совпадает с осью токов ($\alpha=\beta=0$), а при $R=\infty$ ($G=0$) — с осью напряжений ($\alpha=\beta=\pi/2$).

Мгновенная мощность резистивного элемента может быть выражена через сопротивление R или проводимость G :

$$p_R = u_R i_R = Ri_R^2 = Gu_R^2. \quad (1.11)$$

Мгновенная мощность резистивного элемента при выбранных положительных направлениях тока и напряжения (см. рис. 1.3) — неотрицательная величина. Электрическая энергия, поступающая в

резистивный элемент и преобразуемая в нем в другие виды энергии, также всегда положительна (кроме случая $u_R=0, i_R=0$):

$$w_R(t) = \int_{-\infty}^t p_R dt = R \int_{-\infty}^t i_R^2 dt = G \int_{-\infty}^t u_R^2 dt > 0. \quad (1.12)$$

Отметим, что функция $w_R(t)$ является неубывающей функцией времени [поскольку она вычисляется как площадь, заключенная под кривой $p=p(t)>0$].

Таким образом, в любой момент времени резистивный элемент может только потреблять энергию от источников и ни в какие моменты времени он не может отдавать электрическую энергию другим элементам цепи.

ЕМКОСТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Емкостным элементом, идеальным конденсатором или емкостью называется идеализированный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию электрического поля, причем запасаения энергии магнитного поля или преобразования электрической энергии в другие виды энергии в нем не происходит. По свойствам к емкостному элементу наиболее близки реальные элементы электрической цепи — конденсаторы. Основной особенностью конденсатора является его способность запасать энергию электрического поля, однако в отличие от емкостного элемента в конденсаторе имеют место потери энергии в диэлектрике и обкладках, т. е. преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также происходит запасаение энергии магнитного поля.

Так же как и в случае сопротивления, термин «емкость» используется не только для обозначения идеализированного элемента электрической цепи, но и как количественная характеристика способности этого элемента или его прототипа (конденсатора) запасать энергию электрического поля.

Условное графическое изображение емкостного элемента приведено на рис. 1.6, а.

Зависимость заряда q , накопленного в емкостном элементе, от напряжения u_C , называемая кулон-вольтной характеристикой, имеет в общем случае нелинейный характер (кривая 1 на рис. 1.7).

Количественно зависимость накопленного заряда от напряжения оценивают значениями статической и дифференциальной емкостей: $C_{ст} = q/u$ и $C_{диф} = dq/du$.

В общем случае дифференциальная емкость не равна статической, причем обе величины зависят от выбора рабочей точки на характеристике $q=q(u)$. Если зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения имеет линейный характер (кривая 2 на рис. 1.7), то значения дифференциальной и статической емкостей равны и не зависят от напряжения: $C_{диф} = C_{ст} = C$.

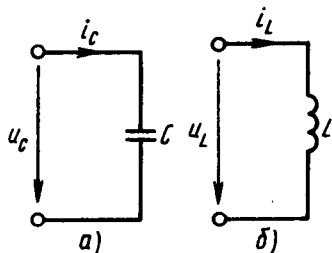


Рис. 1.6. Условные графические изображения емкостного (а) и индуктивного (б) элементов

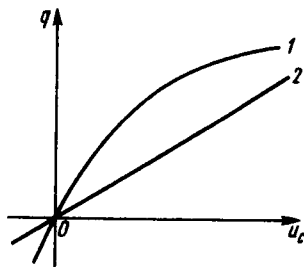


Рис. 1.7. Кулон-вольтные характеристики емкостного элемента:
1 — нелинейная, 2 — линейная

В системе единиц СИ емкости C , $C_{ст}$ и $C_{диф}$ выражают в *фарадах* (Ф).

Емкость, значение которой не зависит от напряжения, называется *линейной*; емкость, значение которой зависит от напряжения, — *нелинейной*. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только цепей с линейной емкостью.

Найдем зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах линейной емкости. Очевидно, что всякое изменение напряжения u_C на зажимах емкости должно в соответствии с видом зависимости $q = q(u)$ привести к изменению заряда q . Производная заряда по времени определяет ток емкости:

$$i_C = dq/dt = (dq/du_C)(du_C/dt).$$

Учитывая, что для линейной емкости производная заряда по напряжению равна C и не зависит от напряжения u_C : $C = dq/du_C = q/u_C$, получаем

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.13)$$

Как следует из выражения (1.13), ток емкости пропорционален скорости изменения приложенного к ней напряжения. Если напряжение на зажимах емкости не изменяется во времени, то ток емкости равен нулю. Таким образом, сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико.

Используя выражение (1.13), находим зависимость напряжения емкости от тока:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt. \quad (1.14)$$

Интегрирование ведется начиная с момента времени $t = -\infty$ для того, чтобы учесть все возможные изменения заряда емкости и,

следовательно, напряжения u_C , причем предполагается, что в момент времени $t = -\infty$ напряжение на зажимах емкости равно нулю.

Пусть наблюдение процессов в емкости началось в момент времени $t = t_0$. Напряжение емкости в начальный момент

$$u_C(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C dt. \quad (1.15)$$

Разбивая интеграл (1.14) на два $\left[u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt \right]$ и используя выражение (1.15), определим напряжение емкости в произвольный момент времени t :

$$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt. \quad (1.16)$$

Мгновенная мощность емкости

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.17)$$

Если напряжение емкости (см. рис. 1.6, а) положительно (т. е. его направление совпадает с условно-положительным направлением, указанным стрелкой) и продолжает возрастать, то мгновенная мощность емкости в соответствии с (1.17) будет положительной. В этом случае энергия поступает в емкость, т. е. она заряжается.

Если напряжение $u_C > 0$ и убывает, т. е. $du_C/dt < 0$, то мгновенная мощность емкости отрицательна. Емкость при этом разряжается, т. е. отдает накопленную энергию во внешнюю цепь.

Энергия электрического поля, запасенная емкостью в произвольный момент времени t , определяется только мгновенным значением напряжения емкости или ее зарядом в данный момент времени

$$w_C = w_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C dt = C \int_0^{u_C} u du = C \frac{u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C} \quad (1.18)$$

и не зависит от того, по какому закону изменялись напряжение или заряд емкости в предшествующие моменты времени. Так как ток емкости не зависит от мгновенного значения напряжения емкости и определяется только скоростью изменения этого напряжения (1.13), приходим к выводу, что энергия, запасенная емкостью в произвольный момент времени t , не зависит от тока емкости.

Из выражения (1.18) следует, что в любой момент времени t энергия, запасенная в емкости, будет неотрицательной величиной.

Таким образом, емкость является пассивным идеализированным элементом электрической цепи, который в зависимости от режима работы может либо запасать энергию электрического поля, получаемую из внешней по отношению к емкости цепи, либо отдавать накопленную энергию во внешнюю цепь.

ИНДУКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Индуктивным элементом, идеальной индуктивной катушкой или индуктивностью называют идеализированный элемент электрической цепи, в котором происходит запасание энергии магнитного поля. Запасания энергии электрического поля или преобразования электрической энергии в другие виды энергии в индуктивном элементе не происходит. Наиболее близким по своим свойствам к индуктивному элементу является реальный элемент электрической цепи — индуктивная катушка. В отличие от индуктивного элемента в индуктивной катушке имеют место также запасание энергии электрического поля и преобразование электрической энергии в другие виды энергии, в частности в тепловую. Количественно способность реального и идеализированного элементов электрической цепи запасать энергию магнитного поля характеризуется параметром, называемым индуктивностью.

Условное графическое обозначение индуктивного элемента приведено на рис. 1.6, б.

Связь между напряжением и током в индуктивной катушке определяется законом электромагнитной индукции, из которого следует, что при изменении магнитного потока, пронизывающего индуктивную катушку, в ней наводится электродвижущая сила e , пропорциональная скорости изменения потокоцепления катушки Ψ и направленная таким образом, чтобы вызываемый ею ток стремился воспрепятствовать изменению магнитного потока:

$$e = -d\Psi/dt. \quad (1.19)$$

Потокоцепление катушки равно алгебраической сумме магнитных потоков Φ_i , пронизывающих ее отдельные витки:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i, \quad (1.20)$$

где N — число витков катушки.

Если магнитный поток, пронизывающий все витки катушки, одинаков ($\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_N = \Phi$), то выражение (1.20) приводится к виду

$$\Psi = N\Phi.$$

В системе единиц СИ магнитный поток и потокосцепление выражают в *веберах* (Вб).

Магнитный поток Φ , пронизывающий каждый виток катушки, в общем случае может содержать две составляющие: магнитный поток самоиндукции $\Phi_{\text{са}}$ и магнитный поток внешних полей $\Phi_{\text{вн}}$:

$$\Phi = \Phi_{\text{са}} + \Phi_{\text{вн}}.$$

Первая составляющая представляет собой магнитный поток, вызванный протекающим по катушке током; вторая — определяется магнитными полями, существование которых не связано с током катушки — магнитным полем Земли, магнитными полями других катушек и постоянных магнитов. Если вторая составляющая магнитного потока вызвана магнитным полем другой катушки, то ее называют магнитным потоком взаимной индукции.

Потокосцепление катушки Ψ , так же как и магнитный поток Φ , может быть представлено в виде суммы двух составляющих: потоко-сцепления самоиндукции $\Psi_{\text{са}}$ и потоко-сцепления внешних полей $\Psi_{\text{вн}}$:

$$\Psi = \Psi_{\text{са}} + \Psi_{\text{вн}}.$$

Наведенная в индуктивной катушке ЭДС e , в свою очередь, может быть представлена в виде суммы ЭДС самоиндукции, вызванной изменением магнитного потока самоиндукции, и ЭДС, вызванной изменением магнитного потока внешних относительно катушки полей:

$$e = e_{\text{са}} + e_{\text{вн}},$$

где $e_{\text{са}}$ — ЭДС самоиндукции; $e_{\text{вн}}$ — ЭДС внешних полей.

Если магнитные потоки внешних относительно индуктивной катушки полей равны нулю и катушку пронизывает только поток самоиндукции, то в катушке наводится только ЭДС самоиндукции

$$e = e_{\text{са}} = -d\Psi_{\text{са}}/dt. \quad (1.21)$$

Потокосцепление самоиндукции $\Psi_{\text{са}}$ зависит от протекающего по катушке тока i_L . Эта зависимость, называемая *вебер-амперной характеристикой* индуктивной катушки, в общем случае имеет нелинейный характер (рис. 1.8, кривая 1). В частном случае, например для катушки без магнитного сердечника, эта зависимость может быть линейной (рис. 1.8, кривая 2). Количественно зависимость потоко-сцепления самоиндукции от тока определяется статической $L_{\text{ст}}$ и дифференциальной $L_{\text{диф}}$ индуктивностями катушки:

$$L_{\text{ст}} = \Psi_{\text{са}}/i_L, \quad L_{\text{диф}} = d\Psi_{\text{са}}/di_L.$$

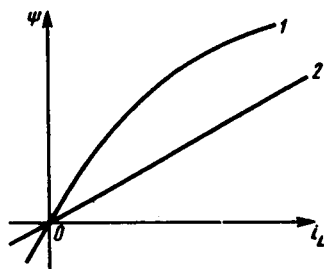


Рис. 1.8. Вебер-амперные характеристики индуктивной катушки:

1 — нелинейная; 2 — линейная

Значения $L_{ст}$ и $L_{диф}$ в общем случае не равны между собой и зависят от выбора рабочей точки (тока i_L). При линейной зависимости потокоцепления самоиндукции от тока статическая и дифференциальная индуктивности катушек равны между собой и не зависят от выбора рабочей точки: $L_{ст} = L_{диф} = L$.

В системе единиц СИ индуктивности $L_{ст}$, $L_{диф}$ и L выражают в генри (Гн). В дальнейшем, если не будет сделано особых оговорок, ограничимся рассмотрением только цепей с линейной индуктивностью.

Для катушки с линейной индуктивностью выражение (1.21) может быть преобразовано к виду

$$e = -\frac{d\Psi_{св}}{dt} = -\frac{d\Psi_{св}}{di_L} \frac{di_L}{dt} = -\frac{\Psi_{св}}{i_L} \frac{di_L}{dt} = -L \frac{di_L}{dt}.$$

Так как наводимая в индуктивной катушке ЭДС e препятствует всякому изменению тока катушки, для прохождения через катушку изменяющегося тока $i_L = i_L(t)$ необходимо, чтобы напряжение u_L , приложенное к зажимам катушки, уравновешивало наводимую в ней ЭДС:

$$u_L = -e = L \frac{di_L}{dt}, \quad (1.22)$$

причем положительные направления напряжения и тока катушки выбирают совпадающими (см. рис. 1.6, б).

Идеализированный элемент электрической цепи — индуктивность — можно рассматривать как упрощенную модель индуктивной катушки, отражающую способность катушки запасать энергию магнитного поля. Для линейной индуктивности напряжение u_L на ее зажимах пропорционально скорости изменения тока i_L и определяется выражением (1.22). Если ток через индуктивность не изменяется во времени, то напряжение на ее зажимах равно нулю, следовательно, сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю.

Зависимость тока индуктивности i_L от напряжения u_L может быть найдена путем интегрирования выражения (1.22):

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Чтобы учесть все изменения напряжения на индуктивности, имевшие место до рассматриваемого момента времени t , интегрирование ведется начиная с $t = -\infty$, причем принимается, что при $t = -\infty$ ток индуктивности равен нулю. В момент времени $t = t_0$

$$i_L(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt.$$

При известном значении $i_L(t_0)$ интегрирование (1.22) в пределах от $-\infty$ до t может быть заменено интегрированием в пределах от t_0 до t :

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt. \quad (1.23)$$

Мгновенная мощность индуктивности p_L определяется произведением мгновенных значений тока i_L и напряжения u_L :

$$p_L = u_L i_L = Li_L \frac{di_L}{dt} \quad (1.24)$$

и положительна в моменты времени, когда индуктивность потребляет энергию от остальной части цепи (i_L и u_L имеют одинаковый знак). В моменты времени, когда i_L и u_L имеют различные знаки, индуктивность отдает запасенную ранее энергию остальной части цепи, при этом $p_L < 0$.

Энергия, запасенная в индуктивности,

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p_L dt = L \int_0^{i_L} i di = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{\Psi_m^2}{2L}. \quad (1.25)$$

Таким образом, энергия, запасенная в индуктивности в произвольный момент времени t , является неотрицательной величиной и определяется только мгновенным значением тока индуктивности или потокосцеплением самоиндукции.

Из выражения (1.25) следует, что энергия индуктивности в произвольный момент времени t не зависит от закона изменения тока или потокосцепления индуктивности в предшествующие моменты времени и, следовательно, не зависит от напряжения индуктивности.

Идеализированные элементы электрической цепи (емкость и индуктивность), способные запасать энергию электрического или магнитного полей, называются энергоемкими или реактивными.

ДУАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ЦЕПИ

Рассматривая полученные ранее соотношения (табл. 1.1), приходим к заключению, что выражения, соответствующие попарно сопротивлению и проводимости, емкости и индуктивности, имеют подобную структуру. Если в выражениях, описывающих основные

соотношения для сопротивления, заменить i_R на u_G , u_R на i_G , R на G , то получатся основные соотношения для проводимости. Аналогично, выражения, описывающие основные соотношения для емкости и индуктивности, могут быть получены одно из другого путем замены u_L на i_C , i_L на u_C , L на C .

Элементы, для которых основные соотношения имеют одинаковую структуру и могут быть получены одно из другого путем таких замен, называются дуальными. Таким образом, емкость и индуктивность, сопротивление и проводимость (попарно) являются дуальными элементами.

Таблица 1.1. Ток, напряжение, мощность и энергия идеализированных пассивных элементов

Тип идеализированного элемента	Основные уравнения для			
	тока	напряжения	мгновенной мощности	энергии
Сопротивление	$i_R = u_R / R$	$u_R = Ri_R$	$p_R = Ri_R^2$	$w_R = \int_{-\infty}^t Ri_R^2 dt$
Проводимость	$i_G = Gu_G$	$u_G = i_G / G$	$p_G = Gu_G^2$	$w_G = \int_{-\infty}^t Gu_G^2 dt$
Емкость	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$	$p_C = Cu_C \frac{du_C}{dt}$	$w_C = Cu_C^2 / 2$
Индуктивность	$i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$p_L = Li_L \frac{di_L}{dt}$	$w_L = Li_L^2 / 2$

Свойством дуальности обладают не только рассмотренные идеализированные пассивные элементы. Из последующих разделов будет видно, что дуальными также могут быть идеализированные активные элементы и электрические цепи, составленные из идеализированных активных и пассивных элементов.

В ряде случаев использование принципа дуальности позволяет облегчить исследование процессов в цепи. Так, если известны основные соотношения, описывающие процессы в некоторой цепи, то соответствующие выражения для дуальной цепи могут быть получены без вывода на основании использования свойства дуальности.

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ РЕАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

При описании идеализированных пассивных элементов электрических цепей подчеркивалось, что каждый из этих элементов отражает только одну существенную особенность электромагнитных процессов, имеющих место в реальных элементах электрических цепей. Каждый из рассмотренных идеализированных элементов имеет в качестве прототипа реальный пассивный элемент: резистор, индуктивную катушку или конденсатор. В то же время отмечалось, что процессы в реальных элементах сложнее, чем в идеализированных, в частности в каждом реальном элементе наряду с основным имеют место также другие, так называемые *паразитные процессы*. Вследствие этого схемы замещения реальных элементов в общем случае состоят из идеализированных элементов различных типов.

На рис. 1.9 в качестве примера приведена схема замещения резистора, в которой наряду с основным элементом — сопротивлением R — содержатся паразитные элементы: сопротивление изоляции $R_{из}$, индуктивность токнесущего слоя L_R , сопротивление контактов R_K , индуктивность выводов L_B , сопротивление выводов R_B и емкость между выводами C_B .

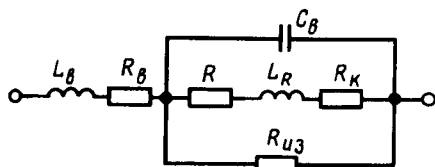


Рис. 1.9. Схема замещения резистора

Вид схемы замещения и параметры входящих в нее идеализированных элементов существенным образом зависят от конструкции реального элемента, технологии его изготовления и особенностей применяемых материалов. Чем выше требуемая точность

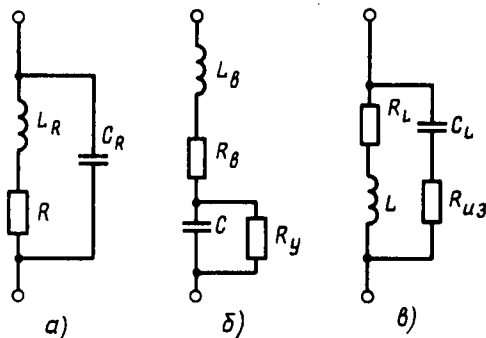


Рис. 1.10. Упрощенные схемы замещения резистора (а), конденсатора (б) и индуктивной катушки (в)

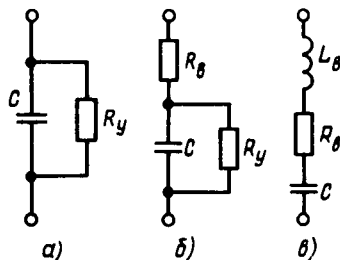


Рис. 1.11. Схемы замещения конденсатора для низких (а), средних (б) и высоких (в) частот

расчетов, тем большее число факторов должно быть принято во внимание и тем более сложный вид будет иметь схема замещения каждого элемента. Вместе с тем излишнее усложнение схем замещения существенно увеличивает трудоемкость расчетов, вследствие чего при исследовании цепей стремятся использовать упрощенные схемы замещения, содержащие минимально допустимое число элементов (рис. 1.10).

Следует отметить, что схемы замещения одного и того же элемента могут иметь различный вид в зависимости от рассматриваемого диапазона частот (рис. 1.11). Так, на довольно низких частотах при невысоких требованиях к точности расчетов схема замещения индуктивной катушки может состоять только из индуктивности, характеризующей способность катушки запасать энергию магнитного поля, и сопротивления, отражающего все виды потерь в ней. При этих же условиях схема замещения резистора может состоять из одного элемента — сопротивления.

§ 1.3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

ИДЕАЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК НАПРЯЖЕНИЯ

Идеальный источник напряжения (источник напряжения, источник ЭДС) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от тока через эти зажимы. Напряжение u на зажимах источника напряжения (его обычно называют задающим напряжением) при любом токе равно напряжению на зажимах этого же источника при отсутствии в нем тока, т. е. равно ЭДС источника:

$$u = e(t), \quad (1.26)$$

и может быть произвольной функцией времени. В частном случае ЭДС $e(t) = E_-$ может не зависеть от времени. Источник такого типа называется источником постоянного напряжения (источником постоянной ЭДС).

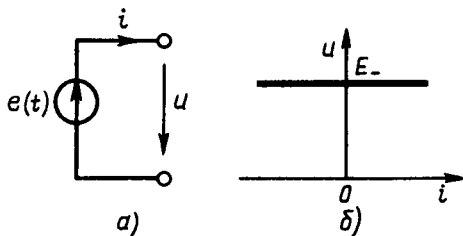


Рис. 1.12. Идеальный источник напряжения:
а — условное графическое изображение;
б — внешняя характеристика источника постоянного напряжения

Условное графическое изображение источника напряжения приведено на рис. 1.12, а. Стрелка внутри кружка на рисунке указывает направление ЭДС. Для источников постоянного напряжения она направлена от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с более высоким потенциалом, в то время как напряжение на внешних зажимах источника направлено от зажи-

ма с более высоким потенциалом к зажиму с меньшим потенциалом.

Внешней характеристикой любого источника электрической энергии называется зависимость напряжения на его зажимах от тока источника. Внешняя характеристика источника постоянного напряжения является прямой линией, параллельной оси токов (рис. 1.12, б), причем при $E_- = 0$ внешняя характеристика источника постоянного напряжения совпадает с осью токов. Другими словами, источник напряжения $E_- = 0$ ведет себя таким же образом, как линейное сопротивление с $R = 0$.

Если подключить к зажимам источника ЭДС нагрузку R_n (рис. 1.13), то, согласно (1.10), (1.11), ток через R_n и выделяемую в нагрузке мощность можно найти из выражений

$$i = u/R_n = (1/R_n)e(t); \quad p = (1/R_n)u^2 = (1/R_n)e^2(t). \quad (1.27)$$

С уменьшением R_n ток нагрузки и выделяемая в ней мощность неограниченно возрастают. Вследствие этого источник напряжения иногда называют источником бесконечной мощности*.

ИДЕАЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК ТОКА

Идеальный источник тока (источник тока) — это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах. Ток источника (задающий ток)

$$i = j(t) \quad (1.28)$$

может быть произвольной функцией времени, в частном случае он может не зависеть от времени: $i(t) = J_-$ (источник постоянного тока). Внешняя характеристика источника постоянного тока показана на рис. 1.14, а.

При $J_- = 0$ внешняя характеристика источника тока совпадает с осью напряжений. Таким образом, внешняя характеристика источника тока $J_- = 0$ совпадает с ВАХ линейного сопротивления $R = \infty$.

Основное графическое изображение источника тока приведено на рис. 1.14, б. Двойная стрелка на рисунке показывает направление тока внутри источника. У источников постоянного тока это

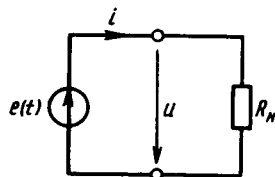


Рис. 1.13. Подключение нагрузки к источнику напряжения

*Предельный случай, когда $R_n = 0$ (режим короткого замыкания источника), исключается из рассмотрения, так как при этом возникает противоречие: с одной стороны, при $R_n = 0$ выводы источника закорочены и, следовательно, напряжение источника должно равняться нулю, с другой стороны, в соответствии с определением напряжение источника ЭДС не зависит от тока источника, и, следовательно, при $R_n = 0$, когда $i = \infty$, напряжение источника должно равняться $e(t)$.

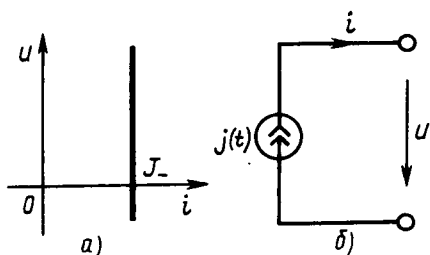


Рис. 1.14. Идеальный источник тока:
а — внешняя характеристика источника постоянного тока; б — условное графическое изображение

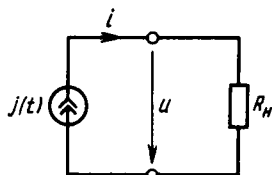


Рис. 1.15. Подключение нагрузки к источнику тока

направление совпадает с направлением перемещения положительных зарядов внутри источника, т. е. с направлением от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом.

Ток источника тока и напряжение источника являются параметрами идеализированных активных элементов подобно тому, как сопротивление, емкость и индуктивность являются параметрами одноименных идеализированных пассивных элементов.

Если к внешним выводам источника тока подключить нагрузку R_n (рис. 1.15), то, согласно (1.9), (1.11), напряжение на нагрузке и выделяемую в ней мощность можно определить из выражений

$$u = R_n i = R_n j(t); p = R_n i^2 = R_n j^2(t). \quad (1.29)$$

С увеличением R_n напряжение на нагрузке и выделяемая в ней мощность неограниченно увеличиваются, поэтому источник тока, так же как и источник напряжения, является источником бесконечной мощности*.

Зависимость тока источника тока от напряжения имеет такой же вид, как и зависимость напряжения источника напряжения от тока, поэтому эти источники являются дуальными элементами.

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ РЕАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Идеальные источники тока и напряжения можно рассматривать как упрощенные модели реальных источников энергии. При определенных условиях, в достаточно узком диапазоне токов и напряжений, внешние характеристики ряда реальных источников энергии

*Предельный случай, когда $R_n = \infty$ (режим холостого хода источника), исключается из рассмотрения, так как при этом возникает противоречие. С одной стороны, при $R_n = \infty$ напряжение на выходе источника бесконечно велико, цепь нагрузки фактически разорвана и ток источника должен равняться нулю, с другой стороны, в соответствии с определением источника тока ток источника не зависит от напряжения на его зажимах и при $u = \infty$ также должен равняться $j(t)$.

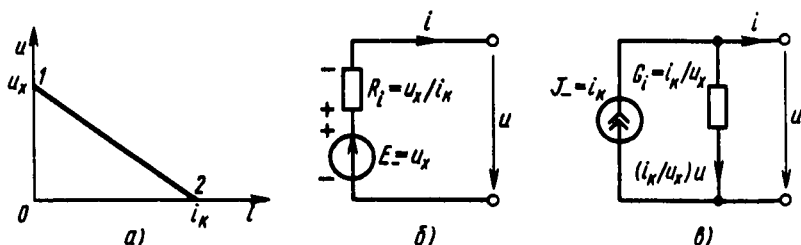


Рис. 1.16. Внешняя характеристика (а), последовательная (б) и параллельная (в) схемы замещения линеаризованного источника

могут приближаться к характеристикам идеализированных активных элементов. Так, внешняя характеристика гальванического элемента в области малых токов имеет вид, близкий к внешней характеристике источника напряжения (см. рис. 1.12, б), а внешняя характеристика выходного каскада на транзисторе в определенном диапазоне напряжений приближается к внешней характеристике источника тока (см. рис. 1.14, а).

В то же время свойства реальных источников энергии значительно отличаются от свойств идеализированных активных элементов. Реальные источники энергии обладают конечной мощностью; их внешняя характеристика, как правило, не параллельна оси токов или оси напряжений, а пересекает эти оси в двух характерных точках, соответствующих режимам холостого хода и короткого замыкания (иногда в источниках энергии применяют специальные виды защиты, исключающие работу в предельных режимах или в одном из них).

С достаточной для практики точностью внешние характеристики большинства реальных источников энергии могут быть приближенно представлены прямой линией, пересекающей оси токов и напряжений в точках 1 и 2 (рис. 1.16, а):

$$u_1 = u_x, i_1 = 0; \quad (1.30)$$

$$u_2 = 0; i_2 = i_k, \quad (1.31)$$

соответствующие режимам холостого хода и короткого замыкания источника. Источники, имеющие линейную внешнюю характеристику, в дальнейшем будем называть **линеаризованными источниками энергии***.

Покажем, что линеаризованный источник энергии может быть представлен моделирующей цепью, состоящей из идеального источника напряжения E_- и внутреннего сопротивления R_i или идеального источника тока J_- и внутренней проводимости G_i . Действи-

*В литературе такие источники обычно называют **реальными**.

тельно, уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами i_1, u_1 и i_2, u_2 , имеет вид

$$(u - u_1)/(u_2 - u_1) = (i - i_1)/(i_2 - i_1). \quad (1.32)$$

Подставляя (1.30), (1.31) в (1.32) и представляя напряжение u как функцию тока i , находим аналитическое выражение для внешней характеристики линейризованного источника:

$$u = u_x - (u_x/i_x) i. \quad (1.33)$$

В соответствии с (1.33) напряжение линейризованного источника состоит из двух составляющих. Первая u_x имеет размерность напряжения и не зависит от тока через источник. Ее можно интерпретировать как напряжение некоторого идеального источника напряжения с ЭДС $E_- = u_x$. Вторая составляющая напряжения источника $(u_x/i_x) i$ прямо пропорциональна току. Ее можно рассматривать как напряжение на некотором сопротивлении $R_i = u_x/i_x$, ток через которое равен току источника i (это сопротивление в дальнейшем будем называть **внутренним сопротивлением источника**). Итак, уравнению (1.33) может быть поставлена в соответствие схема замещения линейризованного источника, изображенная на рис. 1.16, б. Такая схема замещения получила название **последовательной**. Можно убедиться, что зависимость напряжения на зажимах этой цепи от тока определяется уравнением

$$u = E_- - R_i i, \quad (1.34)$$

равносильным уравнению (1.33), и, следовательно, внешняя характеристика цепи имеет вид, показанный на рис. 1.16, а.

Из анализа выражения (1.34) следует, что при фиксированном $E_- = u_x$ с уменьшением внутреннего сопротивления источника R_i внешняя характеристика линейризованного источника приближается к внешней характеристике идеального источника напряжения (рис. 1.17, а). При $R_i = 0$ источник с линейной внешней характеристикой вырождается в идеальный источник напряжения.

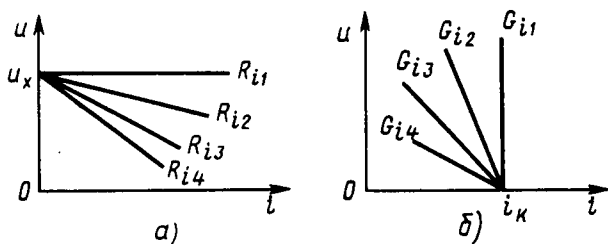


Рис. 1.17. Внешние характеристики источников с $R_{i4} > R_{i3} > R_{i2} > R_{i1} = 0$ (а) и $G_{i4} > G_{i3} > G_{i2} > G_{i1} = 0$ (б)

Таким образом, идеальный источник напряжения можно рассматривать как источник энергии, внутреннее сопротивление которого равно нулю.

Рассмотрим другую схему замещения линейаризованного источника, в которой содержится идеальный источник тока. Для этого, используя (1.32), выразим ток i как функцию напряжения на зажимах источника:

$$i = i_k - (i_k/u_k) u. \quad (1.35)$$

Как следует из выражения (1.35), ток линейаризованного источника состоит из двух составляющих. Первая i_k не зависит от напряжения на зажимах источника. Ее можно рассматривать как ток некоторого идеального источника тока $J_- = i_k$. Вторая составляющая тока (i_k/u_k) прямо пропорциональна напряжению на зажимах источника, поэтому ее можно интерпретировать как ток через некоторую (внутреннюю) проводимость $G_i = R_i^{-1} = i_k/u_k$, к которой приложено напряжение u . Таким образом, выражению (1.35) можно поставить в соответствие схему замещения, изображенную на рис. 1.16, в. Такая схема замещения называется параллельной.

Зависимость между током и напряжением на зажимах соответствующей моделирующей цепи определяется уравнением, равносильным уравнению (1.35):

$$i = J_- - G_i u. \quad (1.36)$$

Из уравнения (1.36) следует, что при неизменном $J_- = i_k$ с уменьшением внутренней проводимости источника G_i внешняя характеристика линейаризованного источника приближается к внешней характеристике идеального источника тока (рис. 1.17 б). В пределе, при $G_i = 0$, линейаризованный источник энергии вырождается в идеальный источник тока.

Таким образом, идеальный источник тока можно рассматривать как источник энергии с бесконечно малой внутренней проводимостью (бесконечно большим внутренним сопротивлением).

Рассмотренные схемы замещения линейаризованного источника были получены из уравнения (1.32), имеют одну и ту же внешнюю характеристику и, следовательно, их поведение относительно внешних зажимов совершенно одинаково. Выбор той или иной схемы замещения может быть сделан совершенно произвольно, однако в процессе исследования цепи может возникнуть необходимость перехода от одной схемы к другой. Используя выражения (1.33) — (1.36), можно найти формулы перехода от последовательной схемы замещения к параллельной

$$J_- = E_-/R_i; G_i = 1/R_i \quad (1.37)$$

и от параллельной схемы к последовательной

$$E_- = J_-/G_i, R_i = 1/G_i. \quad (1.38)$$

Необходимо обратить внимание на то, что *переход от последовательной схемы замещения к параллельной и от параллельной к последовательной возможен только в тех случаях, когда соответственно внутреннее сопротивление R_i или внутренняя проводимость G_i источника не равны нулю.*

Выражения для взаимного преобразования схем замещения источников энергии (1.37) и (1.38) были получены для источников постоянного тока и напряжения. Аналогичные соотношения могут быть найдены и для источников, в которых напряжение u и ток i являются произвольными функциями времени.

Анализируя выражения (1.34), (1.36), можно установить, что цепь, составленная из источника напряжения с последовательно включенным сопротивлением R_i , и цепь, представляющая собой параллельное соединение источника тока и проводимости G_i , являются дуальными.

УПРАВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

Идеальные источники тока и напряжения могут быть неуправляемыми (независимыми) либо управляемыми (зависимыми). Неуправляемый источник представляет собой идеализированный элемент с одной парой выводов, параметр которого (ток или напряжение) не зависит ни от каких других токов или напряжений, действующих в цепи. Управляемый источник — это идеализированный активный элемент, параметр которого является определенной функцией тока или напряжения некоторого участка цепи. В общем случае управляемый источник — это идеализированный элемент с двумя парами выводов. К одной паре выводов (выводы источника) присоединен идеализированный источник, параметр которого является заданной функцией напряжения или тока другой пары выводов (управляющие выводы). Как и для неуправляемых источников, внутреннее сопротивление управляемого источника напряжения равно нулю, а внутреннее сопротивление управляемого источника тока — бесконечности.

Различают четыре типа управляемых источников (рис. 1.18):

а) *источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН).* Напряжение u этого источника является определенной функцией управляющего напряжения $u_{упр}$;

б) *источник напряжения, управляемый током (ИНУТ).* Напряжение этого источника u — функция управляющего тока $i_{упр}$ (в частном случае управляющим током может быть ток источника i , тогда управляемый источник напряжения представляет собой двухполюсный элемент);

в) *источник тока, управляемый напряжением (ИТУН).* Ток i этого источника есть заданная функция управляющего напряжения $u_{упр}$ (в частном случае управляющим напряжением может быть напряжение источника u);

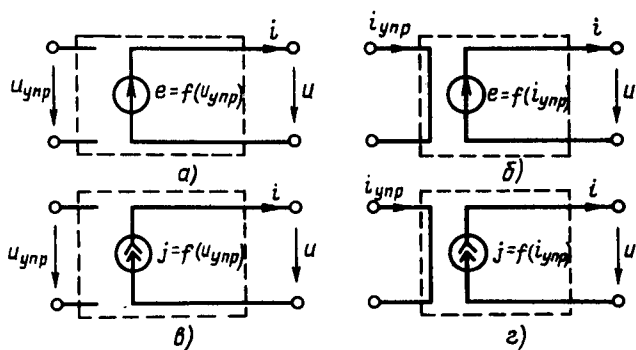


Рис. 1.18. Управляемые источники:
а — ИНУН; б — ИНУТ; в — ИТУН; г — ИТУТ

г) источник тока, управляемый током (ИТУТ). Ток такого источника является определенной функцией управляющего тока i_{ynp} .

В теории цепей к управляемым источникам относят только те, параметр которых зависит от действующих в цепи токов и напряжений.

В частности, регулируемые источники, параметры которых могут изменяться оператором с помощью различных органов управления, не относятся к управляемым.

Вид функциональной зависимости между током или напряжением управляемого источника и управляющим воздействием в принципе может быть произвольным, однако в теории цепей и во всех ее приложениях наибольшее распространение получили *линейно управляемые источники*, параметр которых y прямо пропорционален управляющему воздействию x :

$$y = K_{ynp} x.$$

Коэффициент пропорциональности между параметром источника e или j и управляющим воздействием называется **коэффициентом управления** K_{ynp} . В зависимости от типа источника этот коэффициент может иметь размерность сопротивления (ИНУТ), проводимости (ИТУН) или быть безразмерной величиной (ИНУН и ИТУТ). Если управляющее воздействие линейно управляемого источника равно

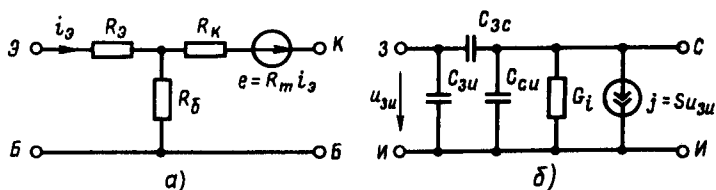


Рис. 1.19. Низкочастотные схемы замещения биполярного (а) и полевого (б) транзисторов

нулю, то параметр источника также равен нулю. Таким образом, *линейно управляемые источники не могут отдавать энергию в отсутствие управляющего воздействия.*

Управляемые источники тока и напряжения широко используют при построении схем замещения различных электровакуумных и полупроводниковых приборов. На рис. 1.19, *а* изображена низкочастотная схема замещения биполярного транзистора, содержащая управляемый ток источник напряжения $e = R_m i_b$. На рис. 1.19, *б* представлена схема замещения полевого транзистора, в которую входит управляемый напряжением источник тока $j = S u_{зв}$.

§ 1.4. ТОПОЛОГИЯ ЦЕПЕЙ

СХЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Схема электрической цепи — это условное графическое изображение электрической цепи. В связи с тем что в теории цепей рассматривают исключительно схемы замещения электрических цепей, в дальнейшем под термином «схема» будем понимать именно схему замещения электрической цепи. Схема электрической цепи определяет таким образом состав идеализированных активных и пассивных элементов моделирующей цепи, замещающей исследуемую цепь в рамках рассматриваемой задачи, параметры этих элементов и способ их соединения между собой. При построении схем замещения электрических цепей предполагается, что изображенные на них соединительные проводники и выводы отдельных элементов или частей цепи не способны запасать электрическую энергию или преобразовывать ее в другие виды энергии, т. е. они не обладают емкостью, индуктивностью или сопротивлением.

Способ изображения идеализированных активных и пассивных элементов и их взаимное расположение на схеме не оказывают влияния на характер электрических процессов в исследуемой цепи. С этой точки зрения приведенные на рис. 1.20, *а*, *б* и *в* различные варианты изображения схемы участка электрической цепи совершенно равноценны.

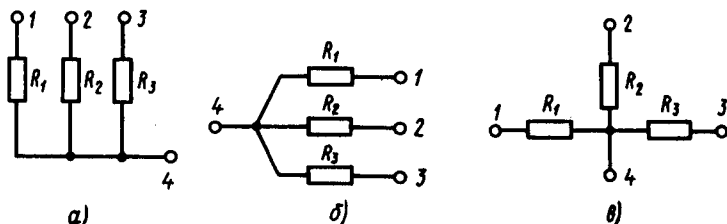


Рис. 1.20. Варианты изображения схемы участка электрической цепи

При необходимости на схеме указывают положительные направления токов и напряжений: для токов через внешние выводы цепи или через ее элементы — стрелками непосредственно на соединительных проводниках или выводах (рис. 1.21, а), для напряжений на отдельных элементах или участках цепи — стрелками между выводами соответствующих элементов или участков цепи (рис. 1.21, б). Положительные направления напряжений на пассивных элементах выбирают совпадающими с положительными направлениями токов соответствующих элементов и на схемах, как правило, не указываются. Положительные направления напряжения на идеализированных активных элементах противоположны направлению стрелок внутри кружков на условных графических изображениях этих элементов и на схемах также, как правило, не указываются.

Рядом со стрелками, указывающими положительные направления токов или напряжений, проставляют их условные буквенные обозначения, например i_R , u_C , u_{L2} , ... или i_1 , i_2 , u_1 , ..., где индексы представляют собой либо буквенные обозначения соответствующих элементов, либо порядковые номера токов и напряжений.

Внешние выводы отдельных участков моделирующей цепи, по аналогии с внешними выводами реальных элементов электрической цепи, называют полюсами. В зависимости от числа полюсов участки цепей делят на двухполюсники и многополюсники (трехполюсники, четырехполюсники, N -полюсники). Двухполюсник может состоять из одного или нескольких идеализированных двухполюсных элементов (см., например, рис. 1.9 — 1.11) или может вообще не содержать идеализированных активных и пассивных элементов (например, короткозамыкающий двухполюсник или перемычка). Важное значение в теории цепей имеют многополюсники с четырьмя выводами — четырехполюсники (см. гл. 7). Отметим, что цепи, моделирующие реальные двухполюсные элементы, всегда являются двухполюсниками, в то время как цепи, моделирующие N -полюсные элементы, могут содержать менее чем N внешних выводов. Например, пятиэлектродным электронным лампам — пентодам, имеющим в зависимости от конструкции 5 — 7 внешних выводов, соответствуют схемы замещения по переменному току с 3 — 4 выводами.

В зависимости от характера соединения идеализированных двухполюсных элементов различают неразветвленные и разветвленные

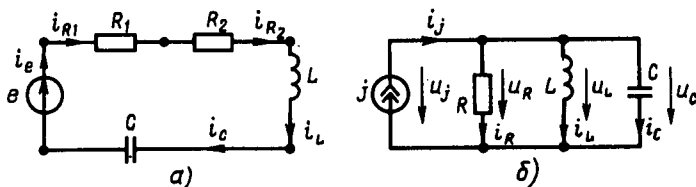


Рис. 1.21. Схемы неразветвленной (а) и разветвленной (б) электрических цепей

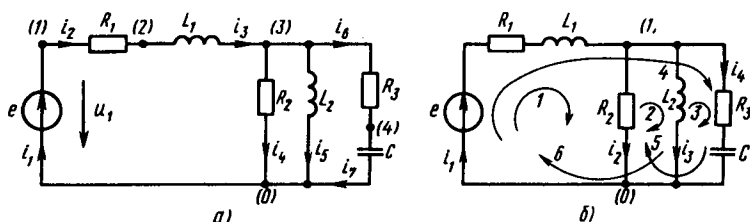


Рис. 1.22. Расширенное (а) и сокращенное (б) топологические описания цепи

цепи. В *неразветвленной цепи* (рис. 1.21, а) один и тот же ток замыкается через все элементы цепи. В *разветвленных цепях* (рис. 1.21, б и 1.22) токи через различные элементы могут иметь различные значения.

Соединение группы идеализированных двухполюсных элементов, при котором через них замыкается один и тот же ток, называется **последовательным**. Например, в неразветвленной цепи, схема которой представлена на рис. 1.21, а, все элементы включены последовательно ($i_{R1} = i_{R2} = i_L = i_C = i_e$), а в разветвленной цепи (рис. 1.22, а) имеется две группы последовательно включенных элементов (источник напряжения e , сопротивление R_1 и индуктивность L_1 , а также сопротивление R_3 и емкость C).

Соединение группы двухполюсных элементов, при котором все элементы находятся под одним и тем же напряжением, называется **параллельным**. Так, в разветвленной цепи, схема которой приведена на рис. 1.21, б, все элементы включены параллельно ($u_j = u_R = u_L = u_C$).

Комбинация последовательного и параллельного соединений элементов называется **смешанным соединением** (рис. 1.22, а). В ряде случаев соединение между входящими в цепь элементами не может быть отнесено ни к последовательному, ни к параллельному, ни к смешанному. К числу таких соединений относятся соединения **треугольником** (рис. 1.23, а) и **звездой** (рис. 1.23, б), которые являются частными случаями соединения N -угольником (рис. 1.24, а) и N -лучевой звездой (рис. 1.24, б).

Характер соединений между идеализированными элементами цепи определяет ее *топологические (структурные)* свойства, для описания которых используют понятия ветви, узла и контура. **Ветвь** представляет собой участок электрической цепи, вдоль которого замыкается один и тот же ток. Она может состоять из одного или нескольких последовательно включенных идеализированных двухполюсных элементов. Например, в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 1.22, б, можно выделить ветви, составленные из одного (ветви, содержащие сопротивление R_2 или индуктивность L_2), двух (ветвь, содержащая сопротивление R_3 и емкость C) и трех

элементов (ветвь с источником напряжения e , сопротивлением R_1 и индуктивностью L_1). Так как каждую ветвь можно рассматривать как двухполюсник, то соединения ветвей можно характеризовать теми же терминами, что и соединения идеализированных двухполюсных элементов (параллельное, последовательное и т. д.). Например, электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 1.22, б, можно рассматривать как параллельное соединение четырех ветвей: $\{e, R_1, L_1\}$, $\{R_2\}$, $\{L_2\}$ и $\{R_3, C\}$.

Место соединения ветвей между собой называется узлом, причем место соединения двух ветвей называют устранимым узлом (при соединении двух ветвей токи через них имеют одинаковые значения, поэтому две такие ветви могут быть заменены одной). В неразветвленной цепи все узлы относятся к устранимым, в разветвленной всегда имеются узлы, являющиеся местом соединения трех ветвей и более.

Иногда, в частности, при автоматизированном составлении уравнений, описывающих процессы в электрических цепях, бывает удобно рассматривать каждый из идеализированных двухполюсных элементов, входящих в моделирующую цепь, в качестве отдельной ветви, при этом необходимо принимать во внимание все узлы, в том числе и устранимые. Будем называть такое топологическое описание цепи расширенным (см. рис. 1.22, а). При сокращенном топологическом описании цепи (см. рис. 1.22, б) группы последовательно включенных элементов рассматриваются в качестве отдельных ветвей и устранимые узлы во внимание не принимаются. Таким образом, число ветвей и, следовательно, число рассматриваемых токов уменьшается (в нашем случае с 7 до 4).

Ветви электрической цепи нумеруют арабскими цифрами, начиная с единицы. Номера ветвей удобно выбирать совпадающими с номерами соответствующих токов, в этом случае номера ветвей на схеме можно не указывать. Узлы электрической цепи нумеруют, начиная с нуля. Порядок нумерации узлов значения

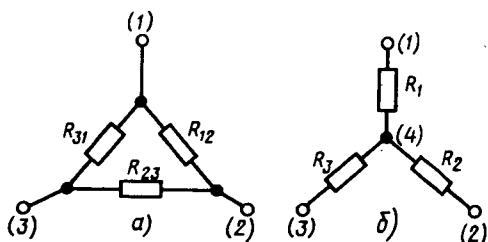


Рис. 1.23. Соединение сопротивлений треугольником (а) и звездой (б)

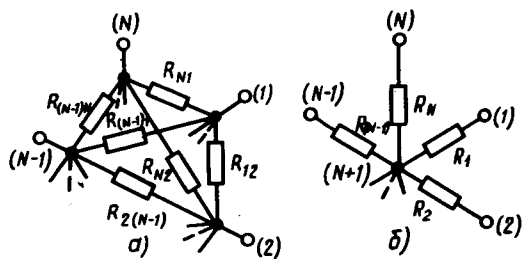


Рис. 1.24. Соединение сопротивлений N -угольником (а) и N -лучевой звездой (б)

не имеет, однако номер «0» удобно присваивать заземленному узлу или узлу, к которому сходится наибольшее число ветвей. Номера узлов условимся обозначать арабскими цифрами в круглых скобках, проставленными около соответствующего узла.

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи так, что ни одна ветвь и ни один узел не встречаются дважды, называется контуром. Например, в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 1.22, б, можно выделить шесть контуров, образованных ветвями $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ и $\{1, 3\}$. Незвездчатая цепь (см. рис. 1.21, а) содержит только один контур. При переходе от расширенного топологического описания к сокращенному число контуров в рассматриваемой цепи не изменяется.

Контур характеризуют направлением обхода (порядком перечисления ветвей), которое выбирают произвольно и указывают изогнутой стрелкой (см. рис. 1.22, б).

В отличие от электрических элементов моделирующих цепей ветви, узлы и контуры называются топологическими элементами. Сложность исследования процессов в электрических цепях во многом определяется числом топологических элементов. В зависимости от их числа различают простые и сложные цепи. К *простым* цепям относятся одноконтурная (см. рис. 1.21, а) и двухузловая (см. рис. 1.21, б) цепи, к *сложным* — цепи с числом узлов более двух и числом контуров более одного.

ПОНЯТИЕ О КОМПОНЕНТНЫХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Математическое описание процессов в электрических цепях базируется на уравнениях двух типов: компонентных и топологических.

Компонентные уравнения (уравнения ветвей) представляют собой математические модели соответствующих ветвей и выражают ток или напряжение каждой ветви через параметры элементов этой ветви. Число таких уравнений равно числу ветвей, а вид каждого из них зависит только от состава ветви, т. е. от входящих в нее идеализированных двухполюсных элементов. При расширенном топологическом описании число ветвей и, следовательно, число компонентных уравнений равны числу идеализированных двухполюсных элементов, а компонентные уравнения имеют наиболее простой вид — они вырождаются в рассмотренные ранее уравнения, связывающие между собой ток и напряжение на зажимах идеализированных активных и пассивных элементов. Таким образом, уравнения, составленные на основании закона Ома (1.9), (1.10), представляют собой компонентные уравнения (математические модели) ветви, содержащей один идеализированный пассивный элемент — сопротивление, выражения (1.26), (1.28) — это компонентные уравнения ветвей, содержащих источник напряжения или тока, а выражения (1.34), (1.36) — компонентные уравнения ветви с линеаризованным

источником. При сокращенном топологическом описании число компонентных уравнений уменьшается в соответствии с уменьшением числа ветвей, но сами уравнения принимают более сложный вид.

Пример 1.1. Запишем компонентные уравнения цепи, схемы которой для расширенного и сокращенного топологических описаний изображены на рис. 1.22, а, б. В первом случае цепь (см. рис. 1.22, а) содержит семь ветвей, компонентные уравнения которых совпадают с компонентными уравнениями входящих в цепь идеализированных двухполюсных элементов:

$$\begin{aligned} u_1 &= \epsilon; & u_5 &= L_2 \frac{di_5}{dt}; \\ u_2 &= R_1 i_2; & u_6 &= R_3 i_6; \\ u_3 &= L_1 \frac{di_3}{dt}; & u_7 &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_7 dt. \\ u_4 &= R_2 i_4; \end{aligned}$$

При переходе к сокращенному топологическому описанию (см. рис. 1.22, б) число компонентных уравнений сокращается до четырех, но вид компонентных уравнений составных ветвей (ветвей, представляющих собой последовательное соединение нескольких идеализированных двухполюсных элементов) значительно усложняется (считаем, что направления напряжения и тока всех ветвей совпадают):

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - \epsilon; \\ u_2 &= R_2 i_2; \\ u_3 &= L_2 \frac{di_3}{dt}; \\ u_4 &= R_3 i_4 + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_4 dt. \end{aligned}$$

По виду компонентных уравнений ветви электрической цепи делятся на вырожденные и невырожденные. Компонентные уравнения *невырожденной ветви* устанавливают связь между ее током и напряжением и могут быть записаны в двух формах: 1) ток ветви определяется через напряжение ветви [см. (1.10), (1.13), (1.23) и (1.36)]; 2) напряжение ветви находится через ток [см. (1.9), (1.16), (1.22) и (1.34)]. Компонентное уравнение *вырожденной ветви* задает напряжение (1.26) или ток (1.28) ветви, но не позволяет по известному напряжению ветви найти ее ток или по заданному току определить напряжение. Другими словами, ток и напряжение вырожденной ветви не зависят друг от друга. Ветви, составленные только из идеализированных пассивных элементов, а также ветви, состоящие из идеализированных пассивных элементов и источников напряжения, являются невырожденными. Ветви, составленные только из идеальных источников напряжения (напряжение такой ветви равно алгебраической сумме задающих напряжений всех источни-

ков), и ветви, содержащие источник тока (ток такой ветви равен задающему току источника), являются вырожденными.

Топологические уравнения устанавливают связь между токами или напряжениями различных ветвей, причем вид и число топологических уравнений не зависят от того, какие именно элементы входят в состав ветвей цепи. К топологическим уравнениям относятся, в частности, уравнения, составленные на основании первого и второго законов Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов моделирующей цепи, в любой момент времени равна нулю.

В соответствии с первым законом Кирхгофа для каждого из узлов идеализированной цепи (как при расширенном, так и при сокращенном топологическом описании) может быть составлено уравнение баланса токов в узле:

$$\sum_{k=1}^p a_{lk} i_k = 0, \quad l=0, 1, 2, \dots, q-1, \quad (1.39)$$

где l, k — номера узлов и ветвей; q и p — число узлов и ветвей. Коэффициент $a_{lk}=1$, если k -я ветвь подключена к l -му узлу и ток ветви направлен от узла; $a_{lk}=-1$, если k -я ветвь подключена к l -му узлу и ток ветви направлен к узлу; $a_{lk}=0$, если k -я ветвь не подключена к l -му узлу. Другими словами, в уравнение баланса токов, составленное для l -го узла, входят только токи ветвей, подключенных к этому узлу, причем токи ветвей, направленных к узлу, берутся со знаком минус, а токи ветвей, направленных от узла, — со знаком плюс.

Такой выбор знаков не носит принципиального характера, а сделан только для удобства последующего изложения, поскольку изменение знаков, приписанных токам, соответствовало бы умножению правой и левой частей (1.39) и на -1 . Токи ветвей, в которых содержатся управляемые или неуправляемые источники тока и напряжения, учитываются в уравнении (1.39) наравне с токами других ветвей.

Пример 1.2. Составим уравнения баланса токов для всех узлов цепи, схема которой изображена на рис. 1.25, а:

для узла (1)	$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0;$
для узла (2)	$-i_3 - i_4 + i_5 - i_7 = 0;$
для узла (3)	$-i_5 + i_6 + i_7 = 0;$
для узла (0)	$i_1 + i_2 - i_6 = 0.$

Если сгруппировать токи, направленные к узлу, и перенести их в правую часть уравнения (1.39), а в левой части оставить токи, направленные от узла, то первый закон Кирхгофа можно сформулировать так: *сумма мгновенных значений токов, направленных*

к любому узлу цепи, в любой момент времени равна сумме токов, направленных от этого узла.

Первый закон Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда (уравнения непрерывности) и отражает тот факт, что в узлах идеализированной электрической цепи заряды не накапливаются и не расходуются.

На основании первого закона Кирхгофа можно составить уравнение баланса токов и для так называемого обобщенного узла, который представляет собой часть моделирующей цепи, охваченную произвольной замкнутой поверхностью. В этом случае в уравнении (1.39) алгебраически суммируются токи ветвей, входящих в обобщенный узел, т. е. токи ветвей, пересекаемых указанной замкнутой поверхностью. Так, для обобщенного узла, выделенного штриховой линией на рис. 1.25, а, уравнение баланса токов $-i_3 - i_4 + i_6 = 0$.

Нетрудно убедиться, что это уравнение вытекает из уравнений баланса токов, составленных для каждого из узлов рассматриваемой цепи (см. пример 1.2).

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в произвольный контур: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, в каждый момент времени равна нулю.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для каждого контура можно составить уравнение баланса напряжений ветвей:

$$\sum_{k=1}^p b_{lk} u_k = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (1.40)$$

где k, l — номера ветвей и контуров; p, N — число ветвей и контуров. Коэффициент $b_{lk} = 1$, если k -я ветвь входит в l -й контур и направление напряжения ветви совпадает с направлением обхода контура; $b_{lk} = -1$, если k -я ветвь входит в l -й контур и направление ее напряжения противоположно направлению обхода контура; $b_{lk} = 0$,

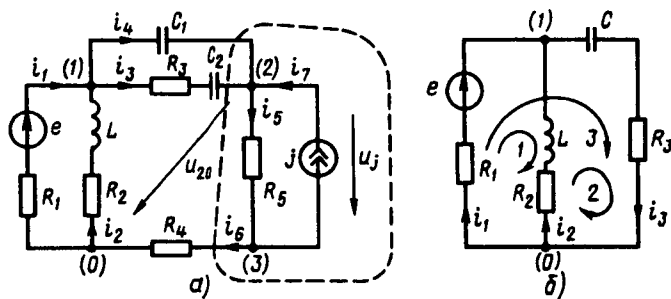


Рис. 1.25. К примерам 1.2 — 1.6

если k -я ветвь не входит в l -й контур. Таким образом, суммирование напряжений производится с учетом их положительных направлений и выбранного направления обхода контура. Если положительное направление напряжения ветви совпадает с направлением обхода контура, то оно входит в (1.40) со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус. Изменение направления обхода контура соответствует умножению левой и правой частей (1.40) на -1 .

Пример 1.3. Составим уравнения баланса напряжений ветвей для всех контуров цепи, схема которой приведена на рис. 1.25, б (номера напряжений ветвей совпадают с номерами соответствующих токов):

$$\begin{array}{ll} \text{для контура 1} & u_1 - u_2 = 0; \\ \text{для контура 2} & u_2 + u_3 = 0; \\ \text{для контура 3} & u_1 + u_3 = 0. \end{array}$$

Уравнения по второму закону Кирхгофа можно составить не только для напряжений ветвей, но и для напряжений элементов, входящих в ветви каждого контура. Представляя напряжение каждой ветви в виде суммы напряжений элементов этой ветви и принимая во внимание, что положительное направление напряжения источника ЭДС противоположно направлению ЭДС, систему уравнений (1.40) можно преобразовать к следующему виду:

$$\sum_i u_i = \sum_j e_j, \quad (1.41)$$

где u_i — напряжения каждого из элементов рассматриваемого контура, за исключением напряжений источников ЭДС; e_j — ЭДС источников напряжения, действующих в контуре.

Используя (1.41), можно несколько видоизменить формулировку второго закона Кирхгофа: *алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на всех элементах любого контура моделирующей цепи, за исключением источников напряжения в каждый момент времени, равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС источников напряжения, действующих в этом контуре.*

Напряжения элементов контура и ЭДС источников напряжения входят в (1.41) со знаком плюс, если положительные направления напряжений элементов и направления ЭДС источников напряжения совпадают с направлением обхода контура. В противном случае соответствующие слагаемые в (1.41) берутся со знаком минус.

Пример 1.4. Запишем уравнения баланса напряжений на элементах всех контуров цепи (рис. 1.25, б):

$$\begin{array}{l} u_{R1} - u_L - u_{R2} = e; \\ u_{R2} + u_L + u_C + u_{R3} = 0; \\ u_{R1} + u_C + u_{R3} = e. \end{array}$$

Второй закон Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии и отражает тот факт, что энергия, затраченная сторонними силами на перенос произвольного заряда внутри источников, входя-

щих в контур, равна энергии, затрачиваемой источниками на перенос этого заряда через пассивные элементы контура.

Следует подчеркнуть, что закон сохранения энергии выполняется при переносе заряда по любому замкнутому пути (не обязательно полностью проходящему через ветви цепи). Поэтому уравнения по второму закону Кирхгофа можно составить для любой совокупности элементов, образующих путь для электрического тока от произвольно выбранного узла (а) электрической цепи к узлу (б) с учетом напряжения между конечными точками этого пути u_{ab} .

Пример 1.5. Для ветвей 2 и 3 (рис. 1.25, а), образующих путь для электрического тока между узлами (2) и (0) электрической цепи, уравнение по второму закону Кирхгофа с учетом напряжения u_{20} между этими узлами запишется в виде

$$u_{R2} + u_L + u_{R3} + u_{C2} + u_{20} = 0.$$

Для контуров, в которых есть источники тока, уравнения баланса напряжений составляют по общему правилу, причем напряжение источника тока учитывается в левой части уравнения (1.41).

Пример 1.6. Для контура, образованного ветвями с сопротивлениями R_1, R_3, R_4 , емкостью C_2 , источником напряжения e и источником тока j (рис. 1.25, а), уравнение баланса напряжений имеет вид

$$u_{R1} + u_{R3} + u_{R4} + u_{C2} + u_j = e.$$

Так как вид и число уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа, не зависят от того, какие элементы входят в состав цепи, а определяются только ее топологическими особенностями, то уравнения баланса токов и напряжений можно применять для математического описания процессов в моделирующих цепях, составленных из двухполюсных элементов любого типа (как линейных, так и нелинейных) при любой форме токов и напряжений независимых источников.

Очевидно, что общее число уравнений баланса токов и напряжений равно сумме числа узлов и числа контуров исследуемой цепи. Можно убедиться, что не все из составленных таким образом уравнений будут линейно независимыми. Например, любое из четырех уравнений примера 1.2 может быть получено как линейная комбинация из трех других уравнений: так, уравнение для узла (0) можно найти, суммируя уравнения, составленные для узлов (1), (2), (3), и умножая правую и левую части полученного уравнения на -1 . Аналогично этому уравнения из примера 1.3 также не являются линейно независимыми.

В то же время на основании законов Кирхгофа для каждой цепи можно составить несколько различных систем линейно независимых топологических уравнений. Например, любые три уравнения в примере 1.2 и любые два уравнения в примере 1.3 образуют систему линейно независимых уравнений.

Системой независимых узлов или системой независимых контуров будем называть любые совокупности узлов и контуров цепи, для которых можно составить системы линейно независимых уравнений по законам Кирхгофа. Определение числа независимых узлов и контуров, а также выделение систем соответствующих узлов и контуров являются основными задачами топологии цепей. Решение этих задач производится с привлечением некоторых понятий теории графов, которая является мощным инструментом исследования топологических свойств различных сложных систем: электроэнергетических, транспортных, информационных и др.

ГРАФЫ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В общем случае граф есть совокупность отрезков произвольной длины и формы, называемых ветвями (ребрами), и точек их соединения, называемых узлами (вершинами). В теории электрических цепей в основном находят применение *направленные*, или *ориентированные*, графы, у которых каждому ребру приписывается определенное направление, указываемое стрелкой. Различают направленные графы схем электрических цепей и направленные графы прохождения сигналов. *Направленный граф* схемы электрической цепи является упрощенной моделью электрической цепи, отражающей только ее топологические (структурные) свойства. *Направленный граф прохождения сигналов* представляет собой наглядное графическое изображение системы уравнений, описывающей процессы в электрической цепи. В дальнейшем будем называть направленный граф прохождения сигналов *сигнальным*, а направленный граф схемы электрической цепи — просто *графом цепи*.

Граф цепи строят по ее схеме замещения. При этом каждую ветвь цепи заменяют отрезком произвольной длины и формы — ветвью графа, а каждый узел цепи преобразуют в узел графа. На ветвях графа стрелками указывают их направления, которые совпадают с положительным направлением токов соответствующих ветвей цепи. Нумерация ветвей и узлов графа та же, что и нумерация

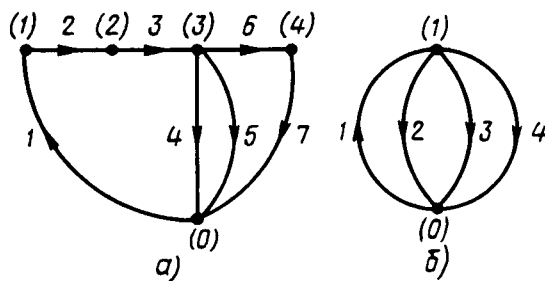


Рис. 1.26. Расширенный (а) и сокращенный (б) графы цепи рис. 1.22

ция ветвей и узлов схемы. Расширенному топологическому описанию цепи (см. рис. 1.22, а) соответствует расширенный граф цепи (рис. 1.26, а), сокращенному топологическому описанию (см. рис. 1.22, б) — сокращенный (рис. 1.26, б).

Свойства графа не зависят от формы и длины ветвей, а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости и определяются только числом ветвей p , числом узлов q и способом соединения ветвей между собой.

Графы, имеющие одно и то же число узлов и ветвей, соединенных между собой одинаковым образом, называются **изоморфными** (рис. 1.27). Изменяя длину и форму ветвей, а также взаимное расположение узлов графа на плоскости, можно получить бесчисленное множество графов, изоморфных исходному. Такие преобразования графа называются **изоморфными**. Каждый из вариантов изображения графа, полученный путем изоморфных преобразований, называется его **геометрической реализацией**.

Если узел i является концом ветви j , то считают, что они **инцидентны** (от англ. incidence — сфера действия, охват). Каждая ветвь графа инцидентна двум узлам. Часть графа, которая наряду с некоторым подмножеством ветвей графа содержит и инцидентные им узлы, называется **подграфом**.

Степень узла графа равна числу ветвей, инцидентных данному узлу. На рис. 1.26, а узлы (1), (2) и (4) имеют вторую степень, узлы (0) и (3) — четвертую.

Графы, изоморфные с точностью до узлов второй степени, называются **гомеоморфными**. После удаления из гомеоморфных графов узлов второй степени и объединения инцидентных этим вершинам ветвей гомеоморфные графы становятся изоморфными.

Таким образом, *графы, соответствующие расширенному и сокращенному топологическому описанию цепи, являются гомеоморфными*.

Примером гомеоморфных графов являются графы, изображенные на рис. 1.26.

Планным (плоским) называется такой граф, который в результате изоморфных преобразований может быть изображен на плоскости без пересечения ветвей. Так, граф, изображенный на рис. 1.28,

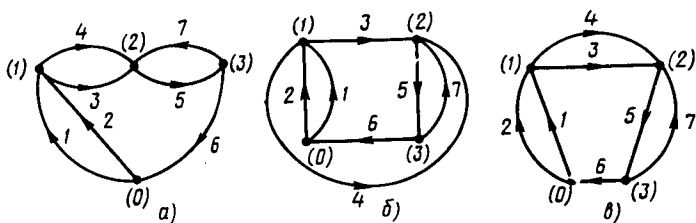


Рис. 1.27. Изоморфные графы

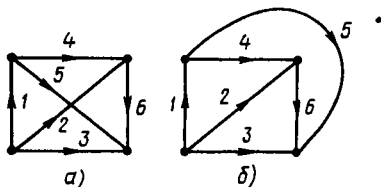


Рис. 1.28. Устранение пересечений ветвей графа с помощью изоморфных преобразований

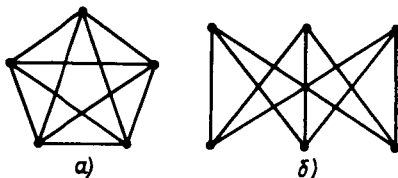


Рис. 1.29. Графы Понтрягина — Куратовского:
а — полный пятиугольник; б — двудольный

а, содержит две пересекающиеся ветви, однако он является планарным, так как существует изоморфный ему граф, не имеющий пересечения ветвей (рис. 1.28, б). Можно убедиться, что все графы, содержащие не более четырех узлов, являются планарными.

Непланарный (объемный) граф не может быть изображен на плоскости без пересечения ветвей (рис. 1.29). При удалении из представленных на рисунке графов любой ветви они становятся планарными. Полный пятиугольник и двудольный граф (рис. 1.29) называют также графами Понтрягина — Куратовского.

Доказано, что произвольный граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных одному из графов Понтрягина — Куратовского.

Электрическая схема, которой соответствует планарный граф, также называется планарной. Неplanарной схеме соответствует неplanарный граф. Таким же образом вводятся понятия планарной и неplanарной идеализированных электрических цепей.

Планарный граф делит плоскость, на которой он изображен, на внешнюю и внутренние области. Внутренние области, ограниченные ветвями графа, называются ячейками или окнами графа. Внешняя

относительно графа часть плоскости называется базисной ячейкой.

Путь — это подграф, являющийся последовательностью соединенных между собой ветвей, выбранных таким образом, что каждому узлу (за исключением двух узлов, называемых граничными) инцидентны две ветви, а граничным узлам инцидентно по одной ветви (рис. 1.30). Каждая ветвь и каждый узел встречаются в пути только один раз.

Замкнутый путь, т. е. путь, у которого начальные и конечные узлы совпадают, называется контуром

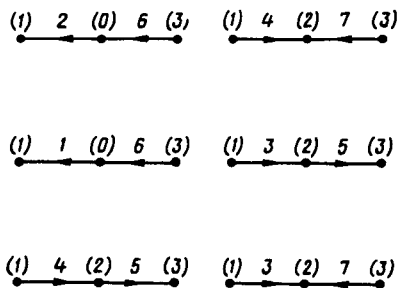


Рис. 1.30. Различные пути между вершинами (1) и (3) графа, изображенного на рис. 1.27

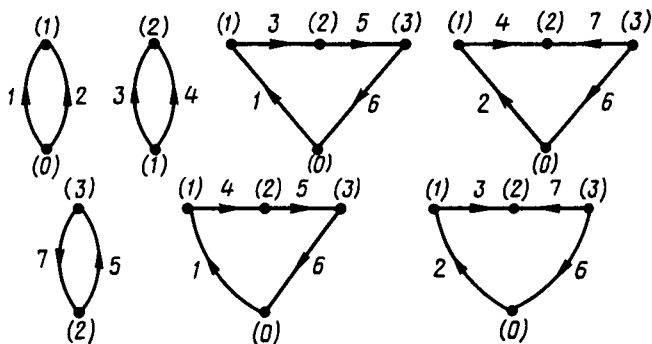


Рис. 1.31. Некоторые из контуров графа, изображенного на рис. 1.27

(рис. 1.31). Каждому из узлов контура инцидентны две ветви. Очевидно, что между контурами графа и контурами исходной цепи существует взаимно однозначное соответствие.

Связный граф — это граф, между любыми двумя узлами которого существует, по крайней мере, один путь (см. рис. 1.26 — 1.29).

Деревом связного графа называется связный подграф, включающий все узлы графа, но не содержащий ни одного контура. Ветви графа, вошедшие в дерево, называются **ветвями дерева**, ветви, не вошедшие в дерево, называются **связями (главными ветвями, хордами)**. Каждому графу может быть поставлено в соответствие несколько деревьев, отличающихся друг от друга составом ветвей дерева (рис. 1.32). Каждое из деревьев графа, содержащего p ветвей и q узлов, имеет $m = q - 1$ ветвей дерева и $n = p - q + 1$ главных ветвей. При построении деревьев графов электрических цепей в число ветвей дерева обычно вносят вырожденные ветви, составленные только из идеальных источников напряжения. Ветви графа, соответствующие вырожденным ветвям цепи, содержащим идеальные источники тока, в число ветвей дерева не включают.

Добавление к дереву графа любой главной ветви образует контур. Контур, образованный поочередным добавлением к дереву

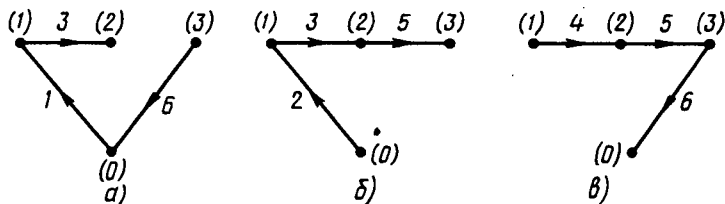


Рис. 1.32. Некоторые из деревьев графа, изображенного на рис. 1.27

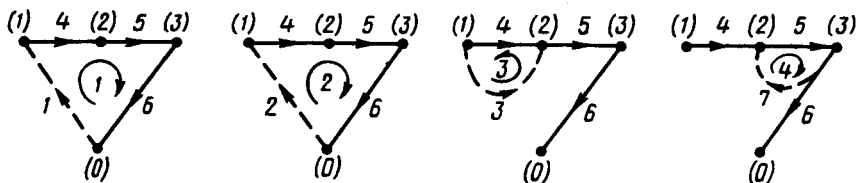


Рис. 1.33. Главные контуры графа (рис. 1.27), соответствующие дереву рис. 1.32, *в*

графа его главных ветвей, называются главными (рис. 1.33). Таким образом, главный контур состоит из ветвей дерева и одной главной ветви*.

Каждому дереву соответствует своя система из $n = p - q + 1$ главных контуров, причем главные контуры, соответствующие определенному дереву, отличаются один от другого по крайней мере одной ветвью, а именно главной ветвью, входящей в каждый из главных контуров.

Каждому главному контуру обычно присваивают номер и приписывают ориентацию (направление обхода), совпадающие с номером и ориентацией соответствующей главной ветви**.

Сечением связного графа называется минимальная совокупность ветвей графа, при удалении которых граф распадается на две изолированные части, одна из которых может быть узлом. Для нахождения ветвей, образующих сечение, граф рассекают на две части

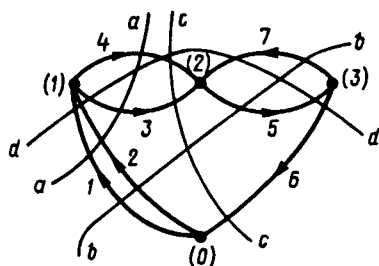


Рис. 1.34. К определению понятия сечения графа

замкнутой линией — линией сечения (в случае планарных графов) или замкнутой поверхностью — поверхностью сечения (в случае непланарных графов), построенными таким образом, что ни одна из ветвей графа не пересекается этой линией (поверхностью) дважды. Совокупности ветвей $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 6\}$, пересекаемых линиями a, b, c (рис. 1.34), образуют сечения, потому что при удалении каждой из этих совокупностей ветвей граф распадается на две части. Ветви, пересекаемые

линией d , не образуют сечения, так как при удалении этих ветвей граф распадается более чем на две части.

Очевидно, что каждая из частей, на которые линия (поверхность) сечения разделяет граф цепи, может рассматриваться как обобщен-

*На рис. 1.33 и последующих рисунков ветви дерева — сплошные линии, главные ветви — штриховые.

**Для большинства задач, рассматриваемых в рамках настоящего курса, нумерация главных контуров может быть выбрана произвольно, независимо от номеров соответствующих главных ветвей.

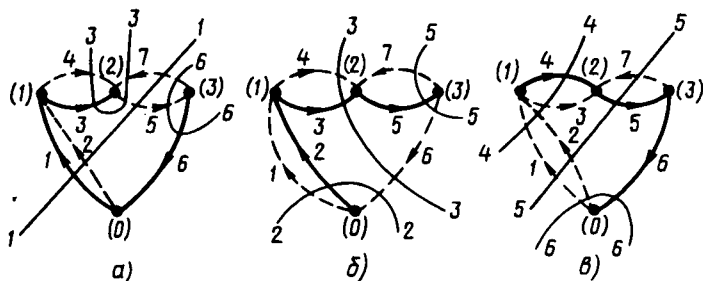


Рис. 1.35. Главные сечения графа рис. 1.27, соответствующие деревьям, приведенным:

a — на рис. 1.32, *а*; *б* — на рис. 1.32, *б*; *в* — на рис. 1.32, *в*

ный узел и, следовательно, для каждого сечения графа можно составить уравнение баланса токов (токи ветвей, одинаковым образом ориентированные относительно линии сечения, берутся с одинаковым знаком).

Главным сечением графа называется такое сечение, в которое входит только одна ветвь выбранного дерева. Остальные ветви, входящие в главное сечение, являются связями (рис. 1.35). Число главных сечений равно числу ветвей дерева: $m = q - 1$.

Каждому дереву может быть поставлена в соответствие своя система главных сечений, причем главные сечения, соответствующие выбранному дереву, отличаются друг от друга по крайней мере одной ветвью — ветвью дерева, входящей в каждое из сечений. Главным сечениям графа присваивают номера и приписывают ориентацию, совпадающие с номером соответствующей ветви дерева и ее ориентацией относительно линии сечения.

Если одна из частей, на которые граф делится линией сечения, представляет собой изолированный узел, то соответствующее сечение называется каноническим (сечения 3 и 6 на рис. 1.35, *a*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ И КОНТУРОВ

Для определения числа независимых узлов и независимых контуров электрической цепи и, следовательно, числа независимых уравнений, составляемых на основании законов Кирхгофа, воспользуемся тем обстоятельством, что для линейной независимости системы уравнений достаточно, чтобы каждое из входящих в систему уравнений отличалось от остальных хотя бы одной переменной. Действительно, если любое из входящих в систему уравнений содержит хотя бы одну переменную, отсутствующую в других уравнениях, то данное уравнение не может быть получено из других входящих в систему уравнений и, следовательно, система уравнений

ляется линейно независимой. Таким образом, для линейной независимости уравнений, составленных на основании первого закона Кирхгофа, достаточно, чтобы каждое из уравнений баланса токов отличалось от других уравнений хотя бы одним током или, что то же самое, чтобы каждый из узлов или каждое из сечений, для которых составляется уравнение баланса токов, отличались бы от других узлов или сечений хотя бы одной ветвью. Этому условию удовлетворяет система главных сечений графа, так как каждое из главных сечений, соответствующих выбранному дереву, отличается от других главных сечений по крайней мере одной ветвью, а именно ветвью дерева, входящей в данное главное сечение. Каждому дереву графа можно поставить в соответствие $m = q - 1$ главных сечений и, следовательно, $m = q - 1$ линейно независимое уравнение баланса токов. Более строгое рассмотрение этого вопроса показывает, что число линейно независимых уравнений баланса токов не изменится, если эти уравнения составлять не для главных сечений графа, а для узлов электрической цепи (напомним, что совокупность ветвей, инцидентных какому-либо узлу графа, представляет собой каноническое сечение графа). Следовательно, любые $q - 1$ узлов электрической цепи образуют систему независимых узлов. Обычно в качестве независимых узлов, для которых составляется система независимых уравнений баланса токов, выбирают узлы с номерами от 1 до $q - 1$. Для узла с номером 0, который будем называть базисным, уравнений баланса токов не составляют.

Для линейной независимости уравнений, составляемых на основании второго закона Кирхгофа, достаточно, чтобы каждое из этих уравнений отличалось от остальных хотя бы одним напряжением. Следовательно, для того чтобы выделенная совокупность контуров была независимой, достаточно, чтобы каждый контур отличался от остальных хотя бы одной ветвью. Этому требованию удовлетворяет система главных контуров, соответствующих какому-либо дереву графа, так как каждый из главных контуров отличается от других по крайней мере соответствующей ему главной ветвью. Так как число главных контуров, соответствующих любому дереву графа, $n = p - q + 1$, то в каждой цепи можно выделить n независимых контуров и составить для них n линейно независимых уравнений баланса напряжений.

Таким образом, общее число линейно независимых уравнений, которые можно составить для произвольной цепи на основании законов Кирхгофа, оказывается равным числу ветвей рассматриваемой цепи:

$$m + n = (q - 1) + (p - q + 1) = p.$$

Пример 1.7. Составим систему линейно независимых уравнений баланса токов и напряжений для цепи, схема которой приведена на рис. 1.25, а (граф цепи изображен на рис. 1.27). При выбранном топологическом описании число ветвей цепи $p = 7$, узлов $q = 4$.

Следовательно, для нее можно составить $m = q - 1 = 3$ независимых уравнения баланса токов и $n = p - q + 1 = 4$ независимых уравнения баланса напряжений. Разумеется, вид системы уравнений будет зависеть от выбора системы независимых узлов (сечений) и системы независимых контуров.

Для дерева графа цепи, изображенного на рис. 1.32, а, соответствующих ему главных сечений (рис. 1.35, а) и главных контуров (см. рис. 1.33) система линейно независимых уравнений баланса токов и напряжений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 &= 0; \\ -i_1 - i_2 + i_5 - i_7 &= 0; \\ -i_1 - i_2 + i_6 &= 0; \\ u_1 + u_4 + u_5 + u_6 &= 0; \\ u_2 + u_4 + u_5 + u_6 &= 0; \\ u_3 - u_4 &= 0; \\ u_5 + u_7 &= 0, \end{aligned}$$

где $i_7 = j$, $u_7 = -u_j$ — ток и напряжение ветви с источником тока.

Три линейно независимых уравнения баланса токов, составленные для главных сечений графа рассматриваемой цепи, можно заменить уравнениями баланса токов, составленными для любых трех узлов цепи. После выбора в качестве независимых узлов с номерами 1, 2 и 3 система независимых уравнений баланса токов примет вид

$$\begin{aligned} -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 &= 0; \\ -i_2 - i_4 + i_5 - i_7 &= 0; \\ -i_5 + i_6 + i_7 &= 0. \end{aligned}$$

В связи с тем что использованное достаточное условие линейной независимости систем уравнений не является необходимым, для каждой электрической цепи можно найти и другие системы независимых контуров и сечений, не совпадающие ни с одной из систем главных контуров и главных сечений графа рассматриваемой цепи. В частности, ячейки плоского графа, число которых оказывается равным $n = p - q + 1$, представляют собой систему независимых контуров (будем называть эти контуры основными), которые могут не совпадать ни с одной из систем главных контуров графа данной планарной цепи.

Пример 1.8. Составим систему уравнений баланса напряжений для основных контуров цепи, граф которой приведен на рис. 1.36 (направление обхода всех контуров выбрано одинаковым — по часовой стрелке):

$$\begin{aligned} -u_6 + u_7 &= 0; \\ -u_2 - u_4 + u_6 &= 0; \\ u_1 + u_2 - u_3 &= 0; \\ u_3 + u_4 - u_5 &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что первое, третье и четвертое из этих уравнений отличаются от остальных одним переменным (u_7 , u_1 и u_5), тогда как во второе уравнение входят только переменные, уже встречающиеся в других уравнениях. В то же время второе уравнение данной системы не может быть получено путем линейных операций над остальными уравнениями. Следовательно, данная система уравнений является независимой. Таким образом, основные контуры рассматриваемой цепи образуют систему независимых контуров, не совпадающих ни с одной из возможных для данной цепи систем главных контуров. В других случаях, например для графа, изображенного на рис. 1.27, система основных контуров может совпадать с одной из систем главных контуров.

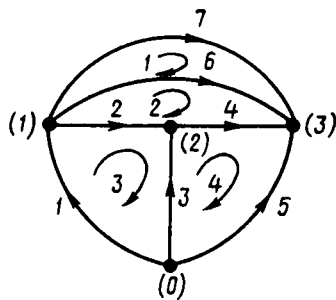


Рис. 1.36. К примеру 1.8

Следует подчеркнуть, что понятие ячейки (окна) графа было введено ранее только для плоских графов и что только для них возможен выбор ячеек графа в качестве независимых контуров.

§ 1.5. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПЕЙ

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Любую электрическую цепь можно рассматривать как систему с одним или несколькими входами и одним или несколькими выходами (рис. 1.37). Если к входам цепи приложить внешнее воздействие $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$, то на выходах можно обнаружить реакцию или отклик $s(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$, где N, M — число входов и выходов. В зависимости от исходных данных и конечной цели исследования в теории цепей различают две группы задач: задачи анализа и задачи синтеза.

Задача анализа цепи состоит в определении реакции цепи $s(t)$ на заданное внешнее воздействие $x(t)$.

Задача синтеза цепи заключается в нахождении цепи по заданной реакции цепи $s(t)$ на некоторое внешнее воздействие $x(t)$.

Исходными данными в задаче анализа являются схема замещения цепи с параметрами всех входящих в нее элементов и описание внешнего воздействия $x(t)$, задаваемого в виде совокупности токов и напряжений идеальных неуправляемых источников тока и напряжения, соответственно. В результате анализа определяется отклик $s(t)$ в виде совокупности токов и напряжений всех или некоторых ветвей цепи. В частном случае задача анализа может сводиться к нахождению соотношений между реакциями цепи на отдельных выходах $s_j(t)$ и воздействиями $x_i(t)$, приложенными к определенным входам. Такие соотношения называются **характеристиками** (системными функциями, функциями) цепи. В зависимости от того, какая величина — частота или время — является аргументом в выражениях, описывающих соотношения между откликом и внешним воздействием, различают *частотные* и *временные* характеристики цепи.

Определение и исследование частотных характеристик представляют собой *задачу анализа цепи в частотной области*; нахождение временных характеристик — *задачу анализа цепи во временной области*.

Исходными данными в задаче синтеза являются описания внешнего воздействия на цепь $x(t)$ и ее отклика $s(t)$. В результате синтеза необходимо определить схему замещения цепи

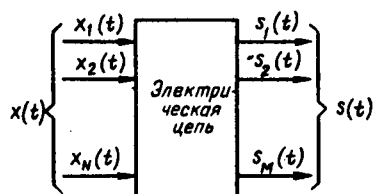


Рис. 1.37. Представление электрической цепи в виде системы с N входами и M выходами

и параметры всех входящих в нее элементов. В частном случае задача синтеза может сводиться к нахождению цепи, обеспечивающей заданные соотношения между внешним воздействием на цепь $x_i(t)$ и ее реакцией $s_j(t)$, т. е. к расчету цепи по ее характеристикам.

Анализ и синтез электрических цепей в определенной степени взаимосвязаны, в частности методы синтеза базируются на использовании общих свойств характеристик различных классов цепей, которые изучаются в процессе анализа. Поэтому изложению методов синтеза цепей будет предшествовать рассмотрение общих методов анализа цепей и знакомство с характеристиками некоторых классов цепей при различных внешних воздействиях.

ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Математически задача анализа электрической цепи сводится к составлению и решению системы линейно независимых уравнений, в которых в качестве неизвестных фигурируют токи и напряжения ветвей исследуемой цепи. Уравнения, решение которых позволяет определить токи и напряжения ветвей электрической цепи, называются уравнениями электрического равновесия цепи. Очевидно, что число уравнений электрического равновесия должно быть равно числу неизвестных токов и напряжений.

Для цепи, не содержащей вырожденных ветвей, общее число неизвестных токов и напряжений равно удвоенному числу ветвей $2r$ (для каждой невырожденной ветви неизвестен ее ток и напряжение). Используя законы Кирхгофа, для такой цепи можно составить $m = q - 1$ независимых уравнений баланса токов и $n = p - q + 1$ независимых уравнений баланса напряжений. В сочетании с r компонентными уравнениями (уравнениями ветвей) получаем $2r$ линейно независимых уравнений, что достаточно для определения неизвестных токов и напряжений ветвей.

Если в рассматриваемой цепи имеется $r_{\text{вт}}$ ветвей, в которых содержатся идеальные источники тока (токи этих ветвей заданы, а напряжения неизвестны), и $r_{\text{нп}}$ ветвей, составленных только из идеальных источников напряжения (напряжения этих ветвей известны), то общее число неизвестных токов и напряжений уменьшается до $2r - r_{\text{вт}} - r_{\text{нп}}$. Для определения этих неизвестных можно составить $2r - r_{\text{вт}} - r_{\text{нп}}$ линейно независимых уравнений ($m + n = r$ уравнений на основании законов Кирхгофа и $r - r_{\text{вт}} - r_{\text{нп}}$ компонентных уравнений для невырожденных ветвей).

Таким образом, используя компонентные уравнения невырожденных ветвей и топологические уравнения, составленные на основании законов Кирхгофа, всегда можно сформировать систему уравнений электрического равновесия, число уравнений в которой достаточно для определения всех неизвестных токов и напряжений.

Будем называть такую систему уравнений основной системой уравнений электрического равновесия цепи (ОСУ).

На практике для анализа цепей используют различные методы составления уравнений электрического равновесия, в частности методы токов ветвей, напряжений ветвей, контурных токов, узловых напряжений, переменных состояния. Все они базируются на использовании различных приемов, позволяющих преобразовать основную систему уравнений электрического равновесия и уменьшить по сравнению с $2p$ или $2p - p_{\text{ит}} - p_{\text{ш}}$ число одновременно решаемых уравнений.

При анализе цепей из рассмотрения исключаются случаи, когда использование топологических уравнений приводит к результатам, противоречащим компонентным уравнениям. Задача анализа цепи в этом случае считается поставленной некорректно. Ранее отмечались два случая возникновения подобных противоречий: применение источника напряжения в режиме короткого замыкания и источника тока в режиме холостого хода. Аналогичные противоречия возникают при параллельном включении источников напряжения с различными задающими напряжениями (рис. 1.38, а), при последовательном включении источников тока с различными задающими токами (рис. 1.38, б), при использовании контуров, составленных только из источников напряжения (рис. 1.38, в), и сечений, образованных только из источников тока (рис. 1.38, г), при подключении источника постоянного напряжения к индуктивности (рис. 1.38, д) или источника постоянного тока к емкости (рис. 1.38, е). Следует отметить, что некорректная постановка задачи анализа цепи возникает, как правило, вследствие применения излишне упрощенных моделей реальных элементов, в частности источников энергии. Задача анализа цепей, содержащих участки типа приведенных на рис. 1.38, обычно становится корректной при использовании более точных моделей элементов. Так, все задачи, рассмотренные на рис. 1.38, становятся корректными при учете внутренних сопротивлений (проводимостей) источников энергии.

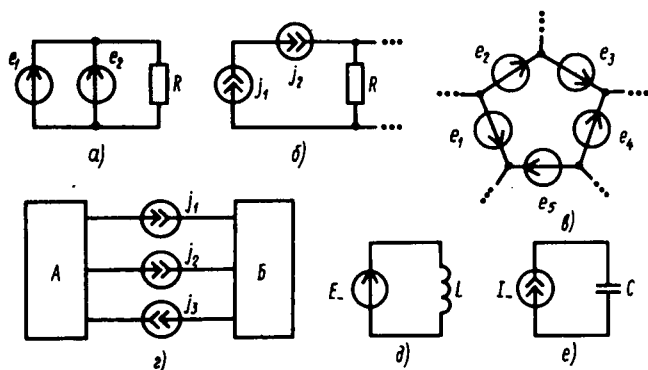


Рис. 1.38. Примеры некорректной постановки задачи анализа

Как было показано ранее, уравнения (1.39) и (1.40) являются алгебраическими, а компонентные уравнения идеализированных пассивных элементов могут быть как алгебраическими (1.9), (1.10), так и дифференциальными (1.13), (1.22) или интегральными (1.16), (1.23). Вследствие этого *уравнения электрического равновесия цепи, составленные любым методом, представляют собой в общем случае систему интегриродифференциальных уравнений.*

Пример 1.9. Составим основную систему уравнений электрического равновесия цепи, схема и граф которой изображены на рис. 1.39, а, б. Для этой цепи $p=6$, $q=4$, $p_{\text{ит}}=1$ и $p_{\text{ин}}=1$. Общее число неизвестных токов и напряжений ветвей $2p-p_{\text{ит}}-p_{\text{ин}}=10$.

Используя законы Кирхгофа, можно составить $m=q-1=3$ уравнения баланса токов:

$$-i_1 + i_2 = 0; \quad -i_2 + i_3 + i_4 = 0; \quad -i_4 + i_5 - i_6 = 0$$

и $n=p-q+1=3$ уравнения баланса напряжений:

$$u_2 + u_3 = e(t); \quad -u_3 + u_4 - u_6 = 0; \quad u_5 + u_6 = 0,$$

где $i_5 = j$, $u_5 = -u_j$ — ток и напряжение ветви с источником тока.

В сочетании с $p-p_{\text{ит}}-p_{\text{ин}}=4$ компонентными уравнениями невырожденных ветвей

$$u_2 = R_1 i_2; \quad u_3 = L \frac{di_3}{dt}; \quad u_6 = R_2 i_6; \quad u_4 = u_4(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_4 dt$$

получаем систему из 10 линейно независимых уравнений для определения 10 неизвестных токов и напряжений: $i_1, u_2, i_2, u_3, i_3, u_4, i_4, u_5, u_6, i_6$.

Система уравнений электрического равновесия цепи, составленная любым методом, может быть путем дифференцирования и последовательного исключения неизвестных сведена к одному дифференциальному уравнению для любого из неизвестных токов и напряжений, называемому **дифференциальным уравнением (уравнением) цепи**. В частном случае это может быть алгебраическое уравнение, которое можно рассматривать как дифференциальное уравнение нулевого порядка. Дифференциальное уравнение цепи содержит

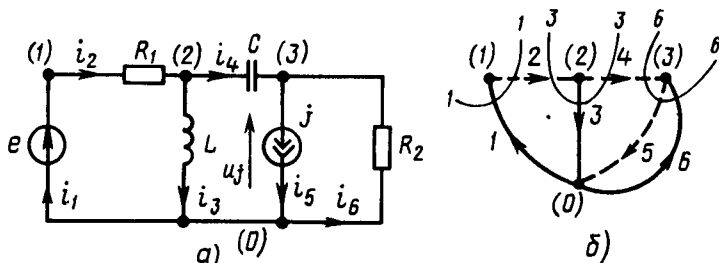


Рис. 1.39. К примеру 1.9

фундаментальную информацию о характере имеющих место в цепи электрических процессов и является основой для классификации электрических цепей. Тип дифференциального уравнения цепи полностью определяется ее топологией и характером входящих в нее идеализированных элементов.

Пример 1.10. Составим дифференциальное уравнение цепи (рис. 1.39, а) относительно напряжения u_3 , применяя указанные преобразования к основной системе уравнений электрического равновесия

$$a_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + a_1 \frac{du_3}{dt} + a_0 u_3 = f(t),$$

где $a_0 = 1/(LC)$; $a_1 = (L + R_1 R_2 C)/(R_1 CL)$; $a_2 = (R_1 + R_2)/R_1$ — постоянные коэффициенты, значения которых зависят от параметров пассивных элементов цепи; $f(t) = -R_2 \frac{d^2 j(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C} \frac{de(t)}{dt}$ — функция времени, определяемая параметрами независимых источников напряжения и тока.

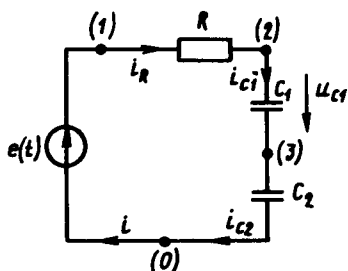
Таким образом, уравнение цепи, изображенной на рис. 1.39, а, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения одной и той же электрической цепи, составленные относительно различных переменных, могут иметь различный порядок и отличаться значениями коэффициентов a_i в левой части и видом функции времени $f(t)$ в правой части.

Пример 1.11. Найдем дифференциальные уравнения цепи, схема которой приведена на рис. 1.40, относительно тока i и напряжения u_{C1} .

Основная система уравнений электрического равновесия цепи содержит семь уравнений:

$$\begin{aligned} -i + i_R &= 0; & u_R &= Ri_R; \\ -i_R + i_{C1} &= 0; & i_{C1} &= C_1 \frac{du_{C1}}{dt}; \\ -i_{C1} + i_{C2} &= 0; & i_{C2} &= C_2 \frac{du_{C2}}{dt}; \\ u_R + u_{C1} + u_{C2} &= e(t); \end{aligned}$$



Дифференцируя уравнение баланса напряжений и выражая производные всех напряжений через токи, получаем дифференциальное уравнение цепи относительно тока i :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} i = \frac{de}{dt}.$$

Выражая в этом уравнении ток i через напряжение u_{C1} :

$$i = i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt},$$

Рис. 1.40. К примеру 1.11

находим дифференциальное уравнение цепи относительно напряжения u_{C1} :

$$RC_1 \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \frac{du_{C1}}{dt} = \frac{de(t)}{dt}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи относительно тока i имеет первый порядок, а относительно напряжения u_{C1} — второй.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Электрические цепи, составленные из идеализированных элементов, могут быть классифицированы по ряду признаков:

— *по топологическим особенностям*: планарные (плоские) и непланарные (объемные), разветвленные и неразветвленные, простые (одноконтурные, двухузловые) и сложные (многоконтурные, многоузловые);

— *по энергетическим свойствам*: активные (содержащие идеализированные активные элементы) и пассивные (не содержащие идеализированных активных элементов);

— *по числу внешних выводов*: двухполюсники и многополюсники.

Фундаментальный характер имеет классификация цепей в зависимости от вида дифференциального уравнения цепи.

Идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, называются цепями с *сосредоточенными параметрами*. Цепи такого типа используют в качестве упрощенных моделей реальных электрических цепей и их элементов на сравнительно низких частотах, когда длина волны электромагнитных колебаний существенно больше размеров исследуемого устройства. При этих условиях в исследуемых устройствах и их элементах удастся выделить конечное число участков, в которых преобладает какой-то один из основных эффектов — запасание энергии электрического или магнитного полей, преобразование электрической энергии в другие виды энергии или преобразование энергии сторонних сил в электрическую. Токи рассматриваемой реальной цепи, являясь функциями времени, имеют одинаковые мгновенные значения в пределах каждого из выделенных участков. Заменяя эти участки идеализированными активными или пассивными элементами, получают идеализированную цепь, содержащую конечное число элементов, значения параметров которых конечны.

Таким образом, *цепи с сосредоточенными параметрами представляют собой идеализированные цепи, моделирующие реальные устройства или их элементы при условиях, когда можно предположить, что каждый из основных электрических эффектов проявляется в конечном числе пространственно локализуемых областей.*

Когда длина волны электромагнитных колебаний соизмерима с размерами исследуемого устройства или его элементов, пространст-

венно локализовать области, в которых проявляются только эффекты одного типа, не удастся. Это связано с тем, что даже при бесконечно малой длине выделяемых участков, в пределах каждого из них одновременно имеют место несколько из перечисленных основных эффектов, причем ток в пределах выделенных участков изменяется от одного сечения к другому. При этих условиях цепи, моделирующие реальные устройства или их элементы, содержат бесконечно большое число идеализированных элементов, параметры которых имеют бесконечно малые значения. Процессы в таких цепях описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называются цепями с распределенными параметрами.

Следует подчеркнуть, что термины «цепь с распределенными параметрами» и «цепь с сосредоточенными параметрами» применимы только к идеализированным (моделирующим) цепям и не должны использоваться для характеристики реальных цепей.

В зависимости от условий и требуемой точности исследования каждый элемент реальной цепи и, следовательно, каждая реальная цепь в целом могут быть заменены моделирующей цепью с сосредоточенными или распределенными параметрами. Например, конденсатор любого типа конструктивно представляет собой две проводящие обкладки 1 и 3, разделенные слоем диэлектрика 2 (рис. 1.41). В области частот, когда длина волны электромагнитных колебаний значительно превышает геометрические размеры обкладок, он может быть представлен одной из моделирующих цепей с сосредоточенными параметрами, схемы которых приведены на рис. 1.11. На более высоких частотах, когда длина волны электромагнитных колебаний сравнима с геометрическими размерами обкладок, но существенно больше расстояния между ними, необходимо учитывать, что процессы запасания энергии электрического и магнитного полей, а также необратимое преобразование электрической энергии в другие виды энергии имеют место вдоль всей длины обкладок конденсатора. В этом случае схема замещения элементарного участка конденсатора длиной dx будет содержать индуктивность L_0 и емкость C_0 , характеризующие процессы запасания энергии магнитного и электрического полей, а также сопротивление R_0 и проводимость утечки G_0 , учитывающие потери энергии в конденсаторе (рис. 1.42, а). Схема замещения всего конденсатора должна состоять из бесконечно большого числа таких секций. Следовательно, идеализированная цепь, моделирующая конденсатор в рассматриваемом диапазоне частот, представляет собой цепь с распределенными параметрами.

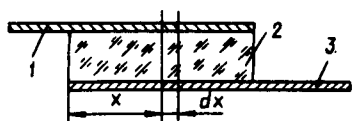


Рис. 1.41. Упрощенная конструкция конденсатора

На примере цепи, схема замещения которой изображена на рис. 1.42, а,

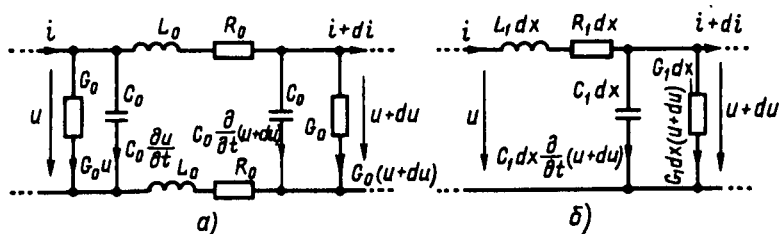


Рис. 1.42. К определению понятия цепи с распределенными параметрами

покажем, что электрические процессы в цепях с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Действительно, ток $i = i(x, t)$ и напряжение $u = u(x, t)$ рассматриваемой цепи являются функциями времени t и координаты x . Приращения тока и напряжения на участке цепи длиной dx

$$di = \frac{\partial i}{\partial x} dx; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Полагая, что параметры элементов моделирующей цепи R_0 , L_0 , C_0 и G_0 не зависят от токов и напряжений, и выражая их через погонные (т. е. приходящиеся на единицу длины) параметры R_1 , L_1 , C_1 и G_1 : $R_0 = (R_1/2) dx$; $L_0 = (L_1/2) dx$; $C_0 = (C_1/2) dx$; $G_0 = (G_1/2) dx$, составим уравнения баланса токов и напряжений элементарного участка цепи:

$$\begin{aligned} -i + \frac{G_1}{2} dx u + \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{G_1}{2} dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \\ + \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx = 0; \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} -u + 2 \frac{R_1}{2} dx \left(i - \frac{G_1}{2} dx u - \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ + 2 \frac{L_1}{2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left(i - \frac{G_1}{2} dx u - \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, уравнения (1.42), (1.43) можно преобразовать к виду

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (1.44)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1.45)$$

Решая уравнения (1.44), (1.45) при соответствующих начальных и граничных условиях, можно определить токи и напряжения цепи, моделирующей конденсатор в рассматриваемом режиме.

Отметим, что уравнениями (1.44), (1.45) может быть поставлена в соответствие более простая схема замещения элементарного участка цепи (рис. 1.42, б). Аналогичный вид имеют высокочастотные схемы замещения и ряда других элементов, входящих в состав радиоэлектронных устройств, в частности двухпроводных и коаксиальных линий передачи.

В зависимости от числа координат, вдоль которых происходит изменение тока и напряжения и вдоль которых «распределены» параметры цепи, различают одномерные, двумерные и трехмерные цепи с распределенными параметрами. В теории цепей рассматривают в основном одномерные цепи с распределенными параметрами, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями типов (1.44), (1.45).

Параметры исследованных ранее идеализированных линейных пассивных элементов не зависят от токов и напряжений соответствующих элементов и, следовательно, от *интенсивности* внешнего воздействия на цепь, определяемой токами действующих в цепи независимых источников тока и напряжениями действующих в цепи независимых источников напряжения. Связь между током и напряжением линейных идеализированных пассивных элементов описывается линейными алгебраическими, дифференциальными или интегральными уравнениями, иными словами, компонентные уравнения этих элементов являются линейными.

Параметры нелинейных пассивных элементов зависят от токов или напряжений соответствующих элементов, а следовательно, и от интенсивности внешнего воздействия. Компонентные уравнения нелинейных идеализированных пассивных элементов — нелинейные.

В зависимости от вида компонентного уравнения идеализированные активные элементы также делятся на линейные и нелинейные. К линейным идеализированным активным элементам относят независимые и линейно управляемые зависимые источники тока и напряжения, к нелинейным — нелинейно управляемые зависимые источники тока и напряжения.

Цепь с сосредоточенными или распределенными параметрами, составленная только из линейных идеализированных элементов, называется **линейной**. Дифференциальное уравнение такой цепи — линейное. Если в состав цепи входит хотя бы один нелинейный пассивный или активный элемент, то она называется **нелинейной**, а процессы в ней описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Параметры линейных идеализированных пассивных элементов и коэффициенты управления линейно управляемых источников могут иметь постоянные значения либо изменяться во времени под действием некоторых факторов, непосредственно не связанных с то-

ками или напряжениями этих элементов (например, емкость конденсатора может изменяться во времени вследствие изменения расстояния между обкладками; индуктивность катушки можно изменять путем перемещения сердечника). Идеализированные элементы первого типа называют **линейными элементами с постоянными параметрами**, элементы второго типа — **линейными элементами с переменными параметрами** или **параметрическими элементами**. Параметрические элементы, у которых изменение параметров происходит с частотой, близкой к частоте токов или напряжений этих элементов, следует отличать от **регулируемых элементов** — конденсаторов переменной емкости, вариометров, подстроечных конденсаторов и др., у которых изменение параметров производится медленно и только в процессе настройки или регулировки соответствующего устройства. При составлении уравнений электрического равновесия параметрам регулируемых элементов приписывают некоторые фиксированные значения, а сами элементы относят к элементам с постоянными параметрами.

Цепи, составленные только из линейных элементов с постоянными параметрами, называются **линейными цепями с постоянными параметрами** или **линейными инвариантными во времени цепями**.

Процессы в линейных инвариантных во времени цепях описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Линейные цепи, содержащие хотя бы один элемент с переменными параметрами, называются **линейными параметрическими цепями**.

Процессы в линейных параметрических цепях описываются линейными уравнениями с переменными коэффициентами.

В общем случае дифференциальное уравнение линейной цепи с сосредоточенными параметрами имеет следующий вид:

$$a_v \frac{d^v s}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} s}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = f(t), \quad (1.46)$$

где $s=s(t)$ — искомая реакция цепи (ток или напряжение какой-либо ветви); $a_0, a_1, \dots, a_v$ — коэффициенты, определяемые параметрами пассивных элементов и коэффициентами управления управляемых источников. В дифференциальном уравнении линейной инвариантной во времени цепи эти коэффициенты постоянны; в дифференциальном уравнении линейной параметрической цепи по крайней мере один из них является функцией времени.

Правая часть уравнения (1.46) есть линейная комбинация функций, описывающих внешнее воздействие на цепь $x=x(t)$, и их производных. При выключении всех источников она становится равной нулю.

Наибольшее значение порядка дифференциального уравнения цепи v характеризует порядок сложности цепи (порядок цепи) и равно числу реактивных элементов (емкостей и индуктивностей),

энергетическое состояние которых может быть задано независимо (подробнее см. гл. 6). Различают цепи нулевого (не содержащие реактивных элементов), первого, второго и более высоких порядков.

Для линейных уравнений вида (1.46) сформулирована теорема наложения (теорема суперпозиции). Если $f(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(t)$, где $\alpha_i = \text{const}$ и $s_i = s_i(t)$ являются решениями уравнений

$$a_v \frac{d^v s_i}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} s_i}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{ds_i}{dt} + a_0 s_i = f_i(t), \quad (1.47)$$

то $s(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i s_i(t)$ является решением уравнения (1.46).

Математически это означает, что решение линейного уравнения (1.46) со сложной правой частью можно выразить через решения уравнений (1.47) с более простой правой частью.

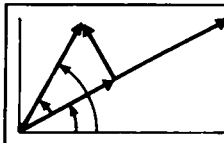
На теореме наложения базируется широко используемый в теории цепей принцип наложения (принцип суперпозиции): реакция $s(t)$

линейной цепи на сложное воздействие $x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)$, представляющее собой линейную комбинацию более простых воздействий $x_i(t)$, равна линейной комбинации реакций $s_i(t)$, вызванных каждым из простых воздействий в отдельности:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i s_i(t).$$

В частности, если внешним воздействиям $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответствуют реакции $s_1(t)$ и $s_2(t)$, то внешнему воздействию $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ соответствует реакция $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$, а внешнему воздействию $x(t) = Ax_1(t)$, где $A = \text{const}$, — реакция $s(t) = As_1(t)$. Применение принципа наложения существенно облегчает исследование процессов в линейных электрических цепях, он лежит в основе многих широко используемых методов анализа.

Состояние теории цепей в значительной степени определяется степенью разработанности теории и методов решения соответствующих дифференциальных уравнений. К настоящему времени известны общие методы решения только линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому наиболее законченный вид имеет теория линейных инвариантных во времени цепей, которые в дальнейшем будем называть просто **линейными**.



Линейные электрические цепи при гармоническом воздействии

§ 2.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

ПОНЯТИЕ О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Знакомство со свойствами электрических цепей и методами их анализа начнем с рассмотрения простейших линейных цепей при гармоническом воздействии. Если значения функции времени $a(t)$ изменяются по синусоидальному или косинусоидальному закону

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) = A_m \sin(\omega t + \psi'), \quad (2.1)$$

где $\psi' = \psi + \pi/2$, то такую функцию будем называть гармонической.

Традиционно в электротехнической литературе используют синусную форму записи гармонической функции, а в радиотехнической — косинусную, которой и будем пользоваться в дальнейшем. Обе формы записи являются равноценными, отличаются только началом отсчета значений функции и их можно проиллюстрировать одной и той же кривой (рис. 2.1, а).

Наибольшее значение гармонической функции A_m называется амплитудой. Ее размерность совпадает с размерностью функции $a(t)$. Наименьшее значение гармонической функции равно $-A_m$. Аргумент $\theta = \omega t + \psi$ функции, записанной в косинусной форме, называется мгновенной фазой (фазой). Если гармоническая функция задана в синусной форме $a(t) =$

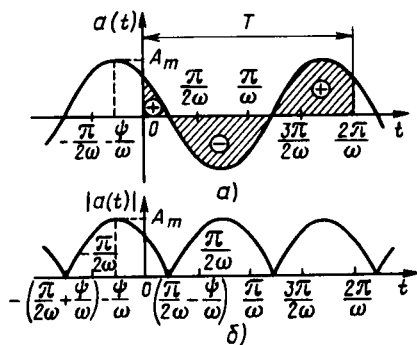


Рис. 2.1. Графики гармонической функции (а) и ее модуля (б)

$= A_m \sin \theta' = A_m \sin (\omega t + \psi')$, то ее фаза находится по формуле $\theta = \theta' - \pi/2$.

Величина ψ , равная значению мгновенной фазы θ при $t=0$, называется **начальной фазой**. Фаза и начальная фаза гармонической функции являются безразмерными величинами и выражаются в *радианах* (рад).

Фаза гармонической функции линейно увеличивается во времени. Скорость ее изменения $\omega = d\theta/dt$ называется **угловой частотой**. Она выражается в *радианах в секунду* (рад/с).

При выполнении практических расчетов начальную фазу гармонической функции ψ бывает удобно выражать в *градусах* ($^\circ$). В этом случае при определении мгновенной фазы θ и мгновенного значения гармонической функции [значения $a(t)$ в произвольный момент времени t] начальную фазу, выраженную в градусах, необходимо пересчитать в радианы:

$$\psi_{\text{рад}} = \frac{\pi}{180} \psi_{\text{град}}.$$

Гармонические функции времени представляют собой один из видов периодических функций. В общем случае функция времени называется **периодической**, если ее значения повторяются через определенные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T , через который наблюдается повторение значений функции, называется **периодом**. Таким образом, если $a(t)$ — периодическая функция времени с периодом T , то для нее должно выполняться равенство

$$a(t) = a(t \pm nT), \quad (2.2)$$

где n — произвольное целое число.

Величина, обратная периоду T , называется **частотой**:

$$f = 1/T. \quad (2.3)$$

Частота выражается в *герцах* (Гц).

Режим работы электрической цепи, при котором напряжения и токи всех ветвей цепи являются периодическими функциями времени или сохраняют неизменные значения, называется **установившимся**. Строго говоря, электромагнитный процесс является периодическим только в том случае, когда *условие периодичности* (2.2) выполняется на неограниченно большом промежутке времени $t \in]-\infty, \infty[$, т. е. если исследуемый процесс существует в цепи неограниченно длительное время. Если процесс возник или прекратился при каком-то конечном значении t , то в этот момент его периодичность нарушается. Постоянные токи и напряжения в ряде случаев также удобно рассматривать как периодические с периодом $T = \infty$ и частотой, равной нулю.

Очевидно, что процессы, имеющие место в реальных цепях, не могут быть бесконечно длительными, поэтому они могут считаться периодическими лишь приближенно. Вследствие этого на практике

принимают, что установившимся является такой процесс, при котором условие периодичности (2.2) выполняется на достаточно большом интервале времени.

Если токи и напряжения цепи изменяются не по периодическому закону, то режим работы цепи называется **неустановившимся**. Частным случаем процессов, протекающих в таком режиме, являются **переходные процессы**, которые имеют место при переходе от одного установившегося режима к другому. Теоретически переходные процессы в цепи затухают бесконечно долго, и новый установившийся режим наступает только при $t \rightarrow \infty$. Как будет показано далее (см. гл. 6), переходные процессы практически прекращаются (или, точнее, затухают до пренебрежимо малого уровня) через конечный промежуток времени, по истечении которого процесс в цепи можно считать установившимся.

Таким образом, *представление токов и напряжений в виде гармонических или других периодических функций времени (в том числе и в виде постоянных величин) следует рассматривать как приближенное математическое описание (математическую модель) реальных процессов, имеющих место в электрической цепи.*

Определим период и частоту гармонической функции времени. Как известно, $\cos \theta$ является периодической функцией θ с периодом, равным 2π . Следовательно, изменение времени на период T соответствует изменению фазы θ на 2π :

$$\omega T = 2\pi. \quad (2.4)$$

Используя (2.3) и (2.4), находим $T = 2\pi/\omega$; $f = \omega/(2\pi)$.

Выражения (2.3), (2.4) позволяют определить также угловую частоту гармонической функции по заданной частоте f или периоду T

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f. \quad (2.5)$$

Интервал времени, в котором значения гармонической функции положительны, например $-\pi/(2\omega) - (\psi/\omega) < t < \pi/(2\omega) - (\psi/\omega)$, называется **положительным полупериодом**; интервал времени, в котором значения функции отрицательны, например $\pi/(2\omega) - (\psi/\omega) < t < 3\pi/(2\omega) - (\psi/\omega)$, — **отрицательным**. Совокупность значений функции на положительном полупериоде называется **положительной**, а совокупность значений функции на отрицательном полупериоде — **отрицательной полувоной**.

При построении *временных диаграмм* (графиков) гармонических функций обычно бывает удобным откладывать по оси абсцисс не время t , а пропорциональную ему величину ωt (рис. 2.2). В этом случае смещение точки $\omega t = 0$ относи-

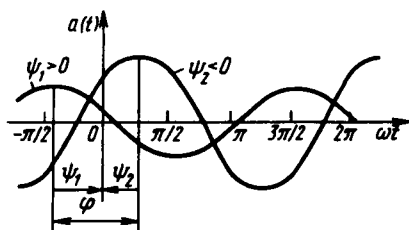


Рис. 2.2. Гармонические функции с положительной и отрицательной начальными фазами

тельно ближайшего максимума функции равно начальной фазе ψ . Если начало координат (точка $\omega t = 0$) смещено вправо относительно ближайшего максимума гармонической функции, то начальная фаза ψ является положительной, если влево — отрицательной. Если фазы θ_1 и θ_2 двух гармонических функций $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ и $a_2(t) = A_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)$ отличаются на

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \psi_1 - \psi_2 > 0, \quad (2.6)$$

то говорят, что эти функции сдвинуты по фазе, причем функция $a_1(t)$ опережает по фазе функцию $a_2(t)$. Как следует из (2.6), разность фаз этих функций равна разности их начальных фаз и не зависит от времени. Две гармонические функции одинаковой частоты совпадают по фазе, если разность их начальных фаз равна нулю, и находятся в противофазе, если $\varphi = \pm \pi$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Важнейшим свойством гармонических функций времени является то, что в результате линейных операций, производимых над ними (умножение на постоянное число, дифференцирование, интегрирование, алгебраическое сложение нескольких гармонических функций одинаковой частоты), получают гармонические функции той же частоты.

Действительно, при умножении гармонической функции $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$ на постоянный множитель α получаем новую гармоническую функцию

$$a(t) = \alpha A_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1) = A_m \cos(\omega t + \psi),$$

угловая частота ω и начальная фаза ψ которой совпадают с угловой частотой ω_1 и начальной фазой ψ_1 исходной функции, а амплитуда $A_m = \alpha A_{m1}$ отличается от амплитуды исходной функции в α раз.

После дифференцирования гармонической функции $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)] &= -\omega A_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) = \\ &= \omega A_{m1} \cos[\omega t + \psi_1 + \pi/2] = A_m \cos(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

т. е. гармоническую функцию той же частоты; ее амплитуда и начальная фаза:

$$A_m = \omega A_{m1}, \quad \psi = \psi_1 + (\pi/2).$$

Интеграл от гармонической функции $a(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$

$$\begin{aligned} \int A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1) dt &= (A_{m1}/\omega) \sin(\omega t + \psi_1) = \\ &= (A_{m1}/\omega) \cos[\omega t + \psi_1 - \pi/2] = A_m \cos(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

представляет собой гармоническую функцию той же частоты; ее амплитуда и начальная фаза определяются выражениями (постоянная интегрирования принята равной нулю): $A_m = A_{m1}/\omega$, $\psi = \psi_1 - (\pi/2)$.

При сложении двух гармонических функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ одинаковой частоты получают новую гармоническую функцию $a(t)$ той же частоты [6]:

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) = A_m \cos(\omega t + \psi), \quad (2.7)$$

где $A_m = \sqrt{A_{m1}^2 + A_{m2}^2 + 2A_{m1}A_{m2} \cos(\psi_1 - \psi_2)}$;

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A_{m1} \sin \psi_1 + A_{m2} \sin \psi_2}{A_{m1} \cos \psi_1 + A_{m2} \cos \psi_2}.$$

Множественно применяя формулу (2.7), можно убедиться, что результат алгебраического суммирования любого числа гармонических функций одинаковой частоты представляет собой гармоническую функцию этой же частоты. Аналогичным образом можно установить, что линейная комбинация любого числа гармонических функций времени одной частоты

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A_{mi} \cos(\omega t + \psi_i) = A_m \cos(\omega t + \psi),$$

где $\alpha_i = \text{const}$, является гармонической функцией этой частоты.

Таким образом, линейные операции, выполняемые над гармонической функцией, приводят лишь к изменению ее амплитуды и начальной фазы; в результате линейных операций, выполняемых над совокупностью гармонических функций одной частоты, получается гармоническая функция той же частоты.

СРЕДНЕЕ, СРЕДНЕВЫПРЯМЛЕННОЕ И ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Токи и напряжения цепи, изменяющиеся по гармоническому или другому периодическому закону, наряду с другими параметрами характеризуются средними за период, средневывпрямленными и действующими значениями.

Среднее значение периодической функции $a(t)$ за период T определяется выражением

$$A_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt. \quad (2.8)$$

Интеграл, входящий в выражение (2.8), численно равен площади, заключенной между кривой $a(t)$, осью времени и ординатами $a(t_0)$ и $a(t_0 + T)$, причем площади, лежащие выше оси времени, берут со знаком плюс, а площади, лежащие под осью времени, — со знаком минус. Значение A_{cp} не зависит от выбора момента времени t_0 , поэтому при его определении можно полагать $t_0 = 0$.

Среднее значение гармонической функции за период равно нулю, так как площадь, ограниченная положительной полуволной и осью времени, равна площади, ограниченной отрицательной полуволной и осью абсцисс (см. рис. 2.1, а). Таким образом, *среднее значение гармонического тока или напряжения за период равно нулю*.

Средневывпрямленным значением периодического тока или напряжения называется среднее значение модуля соответствующей периодической функции $a(t)$ за период:

$$A_{\text{ср.в.}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)| dt.$$

Значение $A_{\text{ср.в.}}$ пропорционально площади, ограниченной частью кривой $|a(t)|$ и осью времени за период T , и не зависит от выбора начального момента времени t_0 .

Средневыпрямленное значение гармонического тока или напряжения равно среднему значению соответствующей гармонической функции $a(t)$ на положительном полупериоде (см. рис. 2.1, б):

$$A_{\text{ср.в.}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |A_m \cos(\omega t + \psi)| dt = \frac{2}{T} \int_{-\left(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\psi}{\omega}\right)}^{\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\psi}{\omega}} A_m \cos(\omega t + \psi) dt.$$

Выполняя интегрирование и полагая $T = 2\pi/\omega$, находим, что средневыпрямленное значение гармонического тока или напряжения в $\pi/2$ раз меньше его амплитуды:

$$A_{\text{ср.в.}} = (2/\pi)A_m = 0,637A_m. \quad (2.9)$$

Действующим значением периодической функции $a(t)$ называется среднеквадратическое значение этой функции за период T :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt}. \quad (2.10)$$

В соответствии с ГОСТ 1494 — 77 мгновенные значения токов и напряжений ветвей, токов источников тока и ЭДС источников напряжения, являющихся гармоническими функциями времени, изображают строчными буквами: $i = i(t)$, $u = u(t)$, $j = j(t)$, $e = e(t)$, действующие значения этих величин — соответствующими прописными буквами I , U , J , E и амплитудные значения — теми же прописными буквами с индексом m : I_m , U_m , J_m , E_m . Размерность средних, средневыпрямленных и действующих значений гармонических токов и напряжений совпадает с размерностью соответствующих функций и, следовательно, с размерностью их амплитуд.

При протекании периодического тока $i(t)$ через линейное сопротивление R в нем в соответствии с выражениями (1.12) и (2.10) за период T выделяется энергия

$$W = \int_{t_0}^{t_0+T} R[i(t)]^2 dt = RI^2T. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) совпадает с выражением для энергии, выделяющейся в сопротивлении при протекании через него постоянного тока $I_{\text{д}} = I$ в течение времени T (закон Джоуля — Ленца).

Таким образом, действующее значение I периодического тока $i(t)$ численно равно значению постоянного тока $I_{\text{д}}$, при протекании которого за время T выделится такое же количество энергии, как и при протекании тока $i(t)$. Аналогично можно определить и действующее значение U периодического напряжения $u(t)$.

Действующее значение A гармонической функции $a(t)$ в $\sqrt{2}$ раз меньше ее амплитуды:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [A_m \cos(\omega t + \psi)]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{A_m^2}{2T} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2(\omega t + \psi) dt \right]} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A_m. \quad (2.12)$$

Учитывая, что большинство электроизмерительных приборов реагируют на действующее, а не на максимальные (пиковые) значения токов и напряжений, при описании гармонических токов и напряжений принято указывать их действующие, а не амплитудные значения. Выражая в (2.1) амплитуду A_m через действующее значение A , получаем еще одну форму записи гармонической функции:

$$a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \psi). \quad (2.13)$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим линейную электрическую цепь с сосредоточенными параметрами, находящуюся под монохроматическим (одночастотным) гармоническим воздействием. Токи всех неуправляемых источников тока и ЭДС всех неуправляемых источников напряжения такой цепи есть гармонические функции времени одной и той же частоты ω . Дифференциальное уравнение этой цепи, составленное для любого из неизвестных токов или напряжений $s = s(t)$, имеет вид (1.46), причем правая часть этого уравнения представляет собой линейную комбинацию гармонических функций и их производных, т. е. является гармонической функцией времени той же частоты, что и внешнее воздействие:

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = A_m \cos(\omega t + \psi). \quad (2.14)$$

Следовательно, задача анализа линейной цепи с сосредоточенными параметрами при гармоническом воздействии сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, правая часть которого является гармонической функцией времени.

Ограничимся пока рассмотрением установившегося режима, т. е. будем считать, что действующие в цепи источники были подключены при $t = -\infty$ и к рассматриваемому моменту переходные процессы в цепи полностью прекратились. Из теории дифференциальных уравнений известно, что в таком режиме уравнение (2.14) имеет единственное периодическое решение

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \psi),$$

которое является гармонической функцией времени той же частоты ω , что и внешнее воздействие.

Таким образом, в установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей линейной цепи, находящейся под гармоническим воздействием, являются гармоническими функциями времени одной частоты и, следовательно, задача анализа цепи сводится к определению начальных фаз и амплитуд (или действующих значений) интересующих токов или напряжений.

§ 2.2. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

ПОНЯТИЕ О СИМВОЛИЧЕСКИХ МЕТОДАХ

Установившиеся значения токов и напряжений линейной цепи, находящейся под гармоническим воздействием, могут быть найдены путем непосредственного решения дифференциального уравнения цепи (2.14) при $t \rightarrow \infty$, однако даже для относительно простых цепей эта задача оказывается весьма трудоемкой. На практике анализ таких цепей обычно выполняют с помощью метода комплексных амплитуд, разработанного в конце XIX века американскими инженерами Ч. П. Штейнметцем и А. Е. Кеннели.

Метод комплексных амплитуд, подобно известному логарифмическому методу, основан на идее функционального преобразования, при котором операции над исходными функциями (*оригиналами*) заменяются более простыми операциями над некоторыми новыми функциями, так называемыми изображениями или символами исходных функций. Методы такого типа будем называть символическими. Независимо от типа используемых функциональных преобразований решение любой задачи символическими методами содержит, как правило, следующие основные этапы:

1) прямое преобразование, в результате которого осуществляется переход от исходных величин (оригиналов) к их символам (изображениям);

2) определение изображений искомых величин путем выполнения по специально установленным правилам операций над изображениями;

3) обратное преобразование, с помощью которого переходят от изображений искомых величин к оригиналам.

В частности, при использовании логарифмического метода исходные величины на первом этапе заменяют их логарифмами. На втором этапе, выполняя необходимые действия над логарифмами исходных величин, находят логарифмы искомых величин; операции над логарифмами оказываются проще, чем соответствующие им операции над исходными величинами (например, умножению исходных величин соответствует сложение их логарифмов, возведению исходной величины в степень m — умножение логарифма этой величины на m и т. д.). На третьем этапе осуществляют обратный переход от логарифмов непосредственно к искомым величинам.

Очевидно, что эффективность каждого из символических методов определяется трудоемкостью прямого и обратного функциональных преобразований и тем, насколько операции над изображениями проще соответствующих им операций над оригиналами.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Символический метод комплексных амплитуд (комплексный метод, иногда просто — символический метод) основан на представлении гармонических функций времени с помощью комплексных чисел или, точнее, на преобразовании исходных функций из *временной* области (области вещественного переменного t) в *частотную* (область мнимого аргумента $j\omega$).

Напомним, что *комплексным числом* A называется выражение вида

$$A = A' + jA'', \quad (2.15)$$

где A' , A'' — действительные числа, называемые вещественной и мнимой составляющими комплексного числа; $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Вещественную и мнимую составляющие комплексного числа иногда обозначают так: $A' = \operatorname{Re}[A]$, $A'' = \operatorname{Im}[A]$. Выражение (2.15) — это *алгебраическая форма* записи комплексного числа.

Комплексное число A изображается на комплексной плоскости в виде точки A , абсцисса которой равна A' , а ордината — A'' (рис. 2.3, а). Ось абсцисс, на которой откладывается вещественная часть комплексного числа, называется *действительной* (Re); ось ординат, на которой откладывается мнимая часть, — *мнимой* (Im).

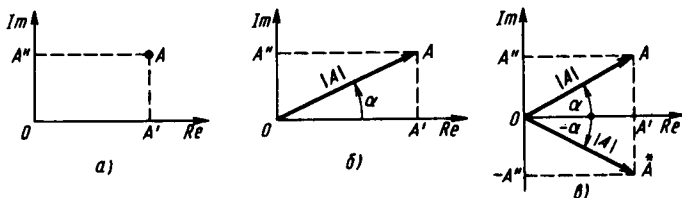


Рис. 2.3. К определению понятия комплексного числа

Каждой точке A комплексной плоскости и, следовательно, каждому комплексному числу A можно поставить в соответствие вектор A , проведенный из начала координат в точку A (рис. 2.3, б). Длину вектора, изображающего комплексное число, называют модулем этого числа:

$$|A| = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}. \quad (2.16)$$

Угол α , образуемый вектором A с положительным направлением вещественной оси, называют аргументом комплексного числа:

$$\operatorname{tg} \alpha = A''/A'. \quad (2.17)$$

Положительное направление отсчета α — против часовой стрелки. Аргумент комплексного числа может иметь бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2\pi n$, где n — целое число. Главное значение аргумента заключено в промежутке $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

Как видно из рис. 2.3, б, вещественная A' и мнимая A'' части комплексного числа A есть проекции вектора A на действительную и мнимую оси:

$$A' = \operatorname{Re}[A] = |A| \cos \alpha; \quad A'' = \operatorname{Im}[A] = |A| \sin \alpha. \quad (2.18)$$

Подставляя соотношения (2.18) в выражение (2.15), можно перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к *тригонометрической*:

$$A = |A| \cos \alpha + j |A| \sin \alpha. \quad (2.19)$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (2.20)$$

где e — основание натурального логарифма, получаем показательную форму записи комплексного числа:

$$A = |A| e^{j\alpha}. \quad (2.21)$$

Комплексные числа $A = A' + jA'' = |A| e^{j\alpha_A}$ и $B = B' + jB'' = |B| e^{j\alpha_B}$ считаются равными, если попарно равны их действительные и мнимые части: $A' = B'$, $A'' = B''$ [или, что то же самое, равны их модули $|A| = |B|$, а аргументы отличаются на $2\pi n$ (n — целое число): $\alpha_A - \alpha_B = \pm 2\pi n$].

Два комплексных числа $A = A' + jA''$ и $A^* = A' - jA''$ называются *сопряженными*, если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком. Точки на комплексной плоскости, изображающие сопряженные комплексные числа, симметричны относительно действительной оси (рис. 2.3, в). Модули сопряженных чисел равны, а главные значения их аргументов отличаются только знаком: $A = |A| e^{j\alpha}$, $A^* = |A| e^{-j\alpha}$.

Понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует.

Арифметические операции над комплексными числами выполняются так же, как над обыкновенными двучленами, имея в виду, что $j^2 = -1$. Операции сложения и вычитания удобнее производить, используя алгебраическую форму записи:

$$\begin{aligned} A + B &= (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + j(A'' + B''), \\ A - B &= (A' + jA'') - (B' + jB'') = (A' - B') + j(A'' - B''). \end{aligned}$$

Очевидно, что сумма двух сопряженных комплексных чисел $A = A' + jA''$ и $A^* = A' - jA''$ представляет собой действительное число:

$$A + A^* = 2A'. \quad (2.22)$$

Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел удобнее проводить в показательной форме:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= |A| e^{j\alpha_A} |B| e^{j\alpha_B} = [|A| |B|] e^{j(\alpha_A + \alpha_B)}; \\ A/B &= |A| e^{j\alpha_A} / [|B| e^{j\alpha_B}] = [|A|/|B|] e^{j(\alpha_A - \alpha_B)}; \\ A^n &= [|A| e^{j\alpha_A}]^n = [|A|^n] e^{jn\alpha_A}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из выражений (2.23) следует, что при умножении вектора $A = |A| e^{j\alpha_A}$ на действительное число m получается новый вектор, модуль которого в m раз больше модуля вектора A :

$$mA = m|A| e^{j\alpha_A}.$$

При умножении вектора $A = |A| e^{j\alpha_A}$ на вектор $e^{j\psi}$, модуль которого равен единице, образуется новый вектор, поворотный относительно вектора A на угол ψ , против часовой стрелки:

$$A e^{j\psi} = |A| e^{j(\alpha_A + \psi)}. \quad (2.24)$$

Из выражения (2.24) и формулы Эйлера следует также, что умножение вектора $A = |A| e^{j\alpha_A}$ на вектор

$$j = j \sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \quad (2.25)$$

равносильно повороту вектора A на угол $\pi/2$ против часовой стрелки:

$$jA = A e^{j\pi/2} = |A| e^{j(\alpha_A + (\pi/2))},$$

а умножение вектора A на вектор

$$-j = -j \sin(\pi/2) = e^{-j\pi/2} \quad (2.26)$$

приводит к повороту вектора A на угол $\pi/2$ по часовой стрелке:

$$-jA = A e^{-j\pi/2} = |A| e^{j(\alpha_A - (\pi/2))}.$$

Наконец, умножение вектора A на $-1 = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pi)$ равносильно изменению аргумента A на $\pm\pi$: $-1A = A e^{\pm j\pi} = |A| e^{j(\alpha_A \pm \pi)}$.

Умножение и деление комплексных чисел можно производить также и в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} AB &= (A' + jA'')(B' + jB'') = (A'B' - A''B'') + j(A'B'' + A''B'); \\ \frac{A}{B} &= \frac{A' + jA''}{B' + jB''} = \frac{(A' + jA'')(B' - jB'')}{(B' + jB'')(B' - jB'')} = \frac{A'B' + A''B''}{|B|^2} + j \frac{A'B'' - A''B'}{|B|^2}, \end{aligned}$$

причем при выполнении деления учитывается, что произведение двух комплексно-сопряженных чисел B и B^* есть действительное число $BB^* = (B' + jB'')(B' - jB'') = (B')^2 + (B'')^2 = |B|^2$.

Суммирование комплексных чисел во многих случаях бывает удобно производить графически, используя правила действий над векторами. Вектор S , равный сумме векторов $A_1 = A_2, \dots, A_n$, может быть построен следующим образом: из начала координат строят вектор A_1 , из его конца, как из начала координат, строят вектор A_2 , из конца вектора A_2 строят вектор A_3 и т. д. Вектор, замыкающий ломаную линию, образованную из слагаемых векторов, представляет их сумму S . Так, вектор D , равный сумме векторов A , B и C (рис. 2.4, а, б), равен замыкающей $OC = D$.

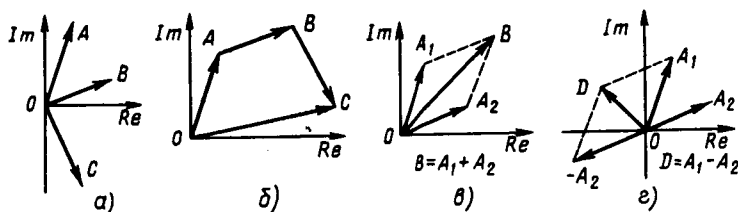


Рис. 2.4. Графическое определение суммы трех векторов (а, б), а также суммы (в) и разности (г) двух векторов

ломаной линией $OABC$, построенной из векторов $A=OA$, $B=AB$, $C=BC$. Вектор B , равный сумме двух векторов A_1 и A_2 , представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на сторонах A_1 и A_2 (рис. 2.4, в). Разность $D=A_1-A_2$ может быть найдена как сумма векторов A_1 и $-A_2$ (рис. 2.4, г).

КОМПЛЕКСНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

Каждой гармонической функции времени $a(t)$ можно поставить в соответствие комплексное число $\underline{a}$, называемое мгновенным или текущим комплексом гармонической функции:

$$\underline{a} = A_m e^{j(\omega t + \psi)} = A_m [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)], \quad (2.27)$$

модуль которого равен амплитуде гармонической функции A_m , а аргумент — ее фазе $\theta = \omega t + \psi$. Как следует из выражения (2.27), вещественная часть мгновенного комплекса $\underline{a}$ равна исходной гармонической функции:

$$\operatorname{Re}[\underline{a}] = A_m \cos(\omega t + \psi) = a(t). \quad (2.28)$$

Пример 2.1. Мгновенные комплексы гармонического тока $i_1 = 50 \cdot 10^{-3} \cos[10^6 t + (\pi/3)]$ А и гармонического напряжения $u_2 = \sqrt{2} \cdot 100 \cos[314 t - (\pi/6)]$ В:

$$\underline{i}_1 = 50 \cdot 10^{-3} e^{j[10^6 t + (\pi/3)]} \text{ А; } \underline{u}_2 = \sqrt{2} \cdot 100 e^{j[314 t - (\pi/6)]} \text{ В.}$$

Вещественные части этих комплексов есть исходные гармонические функции:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\underline{i}_1] &= \operatorname{Re}\{50 \cdot 10^{-3} \cos[10^6 t + (\pi/3)] + j 50 \cdot 10^{-3} \sin[10^6 t + (\pi/3)]\} = \\ &= 50 \cdot 10^{-3} \cos[10^6 t + (\pi/3)] = i_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\underline{u}_2] &= \operatorname{Re}\{\sqrt{2} \cdot 100 \cos[314 t - (\pi/6)] + j \sqrt{2} \cdot 100 \sin[314 t - (\pi/6)]\} = \\ &= \sqrt{2} \cdot 100 \cos[314 t - (\pi/6)] = u_2. \end{aligned}$$

Геометрически мгновенный комплекс $\underline{a}$ может быть представлен в виде вектора $\underline{a} = |\underline{a}| e^{j\theta(t)}$, длина которого $|\underline{a}|$ в определенном масштабе равна амплитуде A_m , соответствующей гармонической функ-

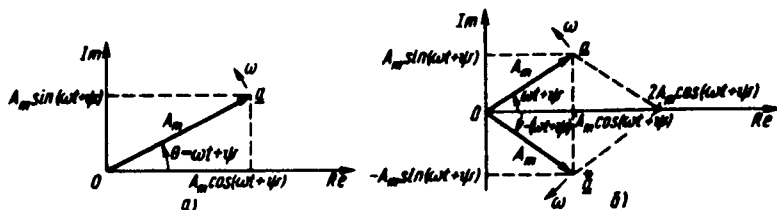


Рис. 2.5. К определению понятия мгновенного комплекса а гармонической функции

ции, а угол с положительным направлением вещественной полуоси $\alpha(t)$ изменяется во времени по такому же закону, как и фаза гармонической функции $\alpha(t) = \theta = \omega t + \psi$. Для того чтобы обеспечить этот закон изменения $\alpha(t)$, вектор a должен вращаться в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью ω (рис. 2.5, а). В момент времени $t=0$ вектор a должен образовывать с положительным направлением вещественной оси угол ψ , равный начальной фазе рассматриваемой гармонической функции. Как видно из рис. 2.5, а, проекция вектора a на вещественную ось в выбранном масштабе равна мгновенному значению исходной гармонической функции времени $a(t) = \text{Re}[a]$.

Используя понятие комплексных сопряженных чисел и выражение (2.22), мгновенное значение гармонической функции $a(t)$ можно определить так же, как полусумму мгновенного комплекса $\underline{a} = A_m e^{j(\omega t + \psi)}$ и сопряженного ему комплексного числа $\underline{a}^* = A_m e^{-j(\omega t + \psi)}$.

$$a(t) = (\underline{a} + \underline{a}^*)/2 = [A_m e^{j(\omega t + \psi)} + A_m e^{-j(\omega t + \psi)}]/2. \quad (2.29)$$

Векторы $\underline{a}$ и $\underline{a}^*$ имеют одинаковую длину, противоположные по знаку начальные фазы и вращаются в комплексной плоскости в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью ω (рис. 2.5, б). Проекции этих векторов на действительную ось равны между собой

$$\text{Re}[\underline{a}] = \text{Re}[\underline{a}^*] = A_m \cos(\omega t + \psi), \quad (2.30)$$

а проекции на мнимую ось имеют различные знаки:

$$\text{Im}[\underline{a}] = A_m \sin(\omega t + \psi), \quad \text{Im}[\underline{a}^*] = -A_m \sin(\omega t + \psi). \quad (2.31)$$

Значение мгновенного комплекса a в момент времени $t=0$ называется комплексной амплитудой $\dot{A}_m$ гармонической функции времени $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$:

$$\dot{A}_m = \underline{a}|_{t=0} = A_m e^{j\psi}. \quad (2.32)$$

Из выражения (2.32) следует, что комплексная амплитуда гармонической функции времени $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$ представляет собой комплексное число, модуль которого равен амплитуде A_m рассматриваемой функции, а аргумент — ее начальной фазе ψ . Геометрически комплексная амплитуда может быть представлена в виде неподвижного вектора, расположенного под углом ψ к вещественной оси (рис. 2.6, а), длина которого в определенном масштабе равна A_m .

Используя понятие комплексной амплитуды, выражение (2.27) для мгновенного комплекса $\underline{a}$ может быть преобразовано к следующему виду:

$$\underline{a} = A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) в выражение (2.29), выразим исходную гармоническую функцию времени $a(t)$ через ее комплексную амплитуду:

$$a(t) = \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}] = (\dot{A}_m e^{j\omega t} + \dot{A}_m^* e^{-j\omega t})/2, \quad (2.34)$$

где $\dot{A}_m^* = A_m e^{-j\psi}$ — комплексное число, сопряженное с комплексной амплитудой.

Сомножитель $e^{j\omega t}$, входящий в выражения (2.33) и (2.34), представляет собой вектор, называемый оператором вращения. Он имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью ω (рис. 2.6, б). Всякий неподвижный вектор, будучи умноженным на оператор вращения $e^{j\omega t}$, начинает вращаться в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью ω .

В установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей электрической цепи, находящейся под гармоническим воздействием, есть гармонические функции времени одной частоты. Каждому из токов и напряжений ветвей электрической цепи $a(t)$ может быть поставлен в соответствие текущий комплекс $\underline{a}$. Текущие комплексы, соответствующие токам и напряжениям различных ветвей, изображаются векторами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью (неподвижными один относительно другого). Каждый из текущих комплексов токов и напряжений ветвей электрической цепи можно представить в виде произведения соответствующей комплексной амплитуды $\dot{A}_m$ на оператор вращения $e^{j\omega t}$. Оче-

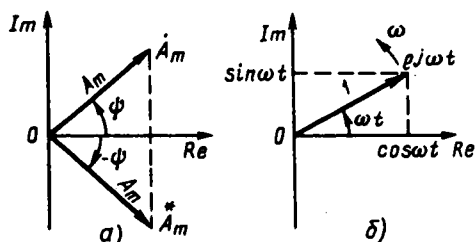


Рис. 2.6. К определению понятий комплексной амплитуды $\dot{A}_m$ и оператора вращения $e^{j\omega t}$

видно, что оператор вращения является общим для мгновенных комплексов токов и напряжений всех ветвей и не несет информации о токах или напряжениях конкретных ветвей.

Токи и напряжения отдельных ветвей отличаются только амплитудами и начальными фазами, поэтому полная информация о них при известной частоте ω содержится в соответствующих комплексных амплитудах. Зная амплитуды и начальные фазы токов или напряжений любой ветви, всегда можно однозначно найти их комплексные амплитуды и обратно по известной комплексной амплитуде можно однозначно установить амплитуду и начальную фазу исходного гармонического колебания.

Пример 2.2. Комплексная амплитуда гармонического тока $i_1 = 5 \cos [10^6 t + (\pi/6)]$ А есть $\dot{I}_{m1} = 5 e^{j\pi/6}$ А, а комплексная амплитуда гармонического напряжения $u = 30 \cos 10^6 t$ В равна $\dot{U}_{m2} = 30 e^{j0} = 30$ В.

При $\omega = 5 \cdot 10^4$ рад/с комплексным амплитудам тока $\dot{I}_{m3} = \sqrt{2} \cdot 30 \cdot 10^{-3} e^{-j\pi/4}$ А и ЭДС $\dot{E}_{m4} = \sqrt{2} \cdot 10$ В соответствуют мгновенные значения тока и ЭДС: $i_3 = \sqrt{2} \cdot 30 \cos [5 \cdot 10^4 t - (\pi/4)]$ мА, $e_4 = \sqrt{2} \cdot 10 \cos (5 \cdot 10^4 t)$ В.

Таким образом, каждой гармонической функции времени $a(t)$ можно единственным образом поставить в соответствие комплексное число $\dot{A}_m$ (комплексную амплитуду), которое можно рассматривать как изображение этой гармонической функции на комплексной плоскости.

Связь между оригиналом и изображением формально записывается в виде выражения

$$a(t) \doteq \dot{A}_m, \quad (2.35)$$

в котором использован знак $\doteq$, означающий взаимное соответствие между функциями, определенными в различных областях.

ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Определим операции над комплексными амплитудами, соответствующие линейным операциям (см. § 2.1) над гармоническими функциями времени.

Пусть необходимо умножить гармоническую функцию $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ на вещественное число α . Найдем комплексную амплитуду функции $a(t) = \alpha a_1(t)$. Очевидно, что

$$a(t) = \alpha \operatorname{Re}[\dot{A}_{m1} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\alpha \dot{A}_{m1} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}],$$

где $\dot{A}_{m1} = A_{m1} e^{j\omega t}$; $\dot{A}_m = \alpha \dot{A}_{m1} = \alpha A_{m1} e^{j\omega t}$ — комплексные амплитуды гармонических функций $a_1(t)$ и $a(t)$.

Таким образом, умножению гармонической функции времени на произвольное число соответствует умножение комплексной амплитуды на это же число:

$$\alpha a(t) \doteq \alpha \dot{A}_m. \quad (2.36)$$

Определим комплексное изображение суммы гармонических функций времени $a_1(t)$, $a_2(t)$, ..., $a_N(t)$ одной частоты ω с комплексными амплитудами $\dot{A}_{m1}$, $\dot{A}_{m2}$, ..., $\dot{A}_{mN}$. В соответствии с (2.34) получаем

$$\begin{aligned} a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_N(t) &= \operatorname{Re}[\dot{A}_{m1} e^{j\omega t}] + \\ &+ \operatorname{Re}[\dot{A}_{m2} e^{j\omega t}] + \dots + \operatorname{Re}[\dot{A}_{mN} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[(\dot{A}_{m1} + \dot{A}_{m2} + \dots + \dot{A}_{mN}) e^{j\omega t}]. \end{aligned}$$

Следовательно, суммированию гармонических функций времени одной частоты соответствует суммирование комплексных амплитуд:

$$a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_N(t) \doteq \dot{A}_{m1} + \dot{A}_{m2} + \dots + \dot{A}_{mN}. \quad (2.37)$$

Из выражений (2.36) и (2.37) следует, что линейной комбинации гармонических функций времени одной частоты соответствует линейная комбинация их комплексных амплитуд:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k a_k(t) \doteq \sum_{k=1}^N \alpha_k \dot{A}_{mk},$$

где α_k — постоянные коэффициенты; N — произвольное целое число.

Найдем комплексное изображение производной гармонической функции времени $a(t)$:

$$\frac{d}{dt} a(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} \left[\frac{d}{dt} \dot{A}_m e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} [j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}].$$

Таким образом, дифференцированию гармонических функций времени соответствует умножение их комплексных амплитуд на $j\omega$:

$$\frac{d}{dt} a(t) \doteq j\omega \dot{A}_m. \quad (2.38)$$

Определим комплексное изображение интеграла от гармонической функции времени $a(t)$:

$$\int a(t) dt = \int \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Re} \left[\int \dot{A}_m e^{j\omega t} dt \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{j\omega} \dot{A}_m e^{j\omega t} \right].$$

Следовательно, интегрированию гармонических функций времени соответствует деление комплексных амплитуд на $j\omega$:

$$\int a(t) dt \doteq \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m. \quad (2.39)$$

Линейным операциям над гармоническими функциями времени соответствуют линейные операции над их комплексными амплитудами, причем операции дифференцирования и интегрирования заменяются операциями умножения и деления. Эти свойства комплексных изображений гармонических функций позволяют существенно упростить анализ линейных цепей, находящихся под гармоническим воздействием, так как дают возможность заменять систему интегродифференциальных уравнений электрического равновесия цепи, составленную для мгновенных значений токов и напряжений ветвей, системой алгебраических уравнений для комплексных амплитуд соответствующих токов и напряжений.

Наряду с комплексной амплитудой $\dot{A}_m$ в качестве изображения гармонической функции $a(t)$ в комплексной плоскости широко используют другую комплексную величину — комплексное действующее значение $\dot{A}$. По определению, комплексное действующее значение гармонической функции $a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \psi)$ представляет собой комплексное число, модуль которого равен действующему значению A гармонической функции, а аргумент — ее начальной фазе ψ

$$\dot{A} = A e^{j\psi}. \quad (2.40)$$

С помощью выражений (2.12) и (2.32) можно установить связь между комплексной амплитудой $\dot{A}_m$ гармонической функции $a(t)$ и ее комплексным действующим значением $\dot{A}$:

$$\dot{A} = \dot{A}_m / \sqrt{2}. \quad (2.41)$$

На комплексной плоскости $\dot{A}$ изображается в виде вектора, совпадающего по направлению с вектором $\dot{A}_m$. Длина вектора $\dot{A}$ в $\sqrt{2}$ раз меньше длины вектора $\dot{A}_m$.

Величины $\dot{I} = I_m / \sqrt{2}$ и $\dot{U} = U_m / \sqrt{2}$ обычно называют комплексными током и напряжением.

Все правила, устанавливающие соответствие между операциями над гармоническими функциями времени и операциями над их комплексными амплитудами, справедливы и для операций над комплексными действующими значениями гармонических функций.

КОМПЛЕКСНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ ПАССИВНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ

Рассмотрим произвольную линейную цепь с сосредоточенными параметрами, находящуюся под гармоническим воздействием. Выделим участок этой цепи, имеющий два внешних зажима и не

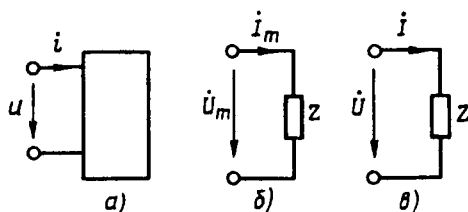


Рис. 2.7. Идеализированный пассивный двухполюсник (а) и его комплексные схемы замещения (б, в)

содержащий источников энергии (рис. 2.7, а). Ток i и напряжение u на зажимах этого участка являются гармоническими функциями времени:

$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i),$$

$$u = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u).$$

По определению, комплексным входным сопротивлением (комплексным сопротивлением) Z пассивного участка цепи называется отношение комплексной амплитуды напряжения на зажимах участка цепи к комплексной амплитуде тока:

$$Z = \dot{U}_m / \dot{I}_m. \quad (2.42)$$

Выражая комплексные амплитуды напряжения и тока через соответствующие комплексные действующие значения $\dot{U}_m = \sqrt{2} \dot{U}$; $\dot{I}_m = \sqrt{2} \dot{I}$, устанавливаем, что комплексное сопротивление пассивного участка цепи может быть также найдено как отношение комплексных действующих значений напряжения и тока:

$$Z = \dot{U} / \dot{I}. \quad (2.43)$$

Комплексное входное сопротивление пассивного участка цепи представляет собой в общем случае комплексное число; поэтому оно может быть представлено в показательной

$$Z = z e^{j\varphi} \quad (2.44)$$

или алгебраической

$$Z = r + jx \quad (2.45)$$

формах. Величины $z = |Z|$ и φ называются соответственно модулем и аргументом комплексного сопротивления, величины r и x — его вещественной (резистивной) и мнимой (реактивной) составляющими (модуль комплексного входного сопротивления цепи z называется также полным входным сопротивлением). Представляя комплексные амплитуды и комплексные действующие значения напряжений и токов в показательной форме, из (2.42) и (2.43) находим

$$Z = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}. \quad (2.46)$$

Сравнивая (2.44) и (2.46), устанавливаем, что модуль комплексного сопротивления z равен отношению амплитуд или дейст-

ющих значений напряжения и тока на зажимах рассматриваемого участка цепи:

$$z = U_m / I_m = U / I, \quad (2.47)$$

а аргумент равен разности начальных фаз напряжения и тока:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (2.48)$$

В зависимости от фазовых соотношений между напряжением и током значение φ может быть больше нуля (напряжение опережает ток по фазе), меньше нуля (напряжение отстает по фазе от тока) или равно нулю (ток и напряжение совпадают по фазе).

Комплексное входное сопротивление может быть представлено в виде вектора, расположенного в комплексной плоскости, длина которого в определенном масштабе равна z , а угол наклона к положительной вещественной полуоси равен φ (рис. 2.8, а). Вещественная r и мнимая x составляющие входного сопротивления Z представляют собой проекции вектора Z на вещественную и мнимую оси:

$$r = \operatorname{Re}[Z] = z \cos \varphi, \quad x = \operatorname{Im}[Z] = z \sin \varphi.$$

Величина, обратная комплексному входному сопротивлению, называется комплексной входной проводимостью участка цепи:

$$Y = 1/Z. \quad (2.49)$$

Комплексная входная проводимость (комплексная проводимость) может быть определена как отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений тока и напряжения на зажимах рассматриваемого участка цепи:

$$Y = \dot{I}_m / \dot{U}_m = \dot{I} / \dot{U}. \quad (2.50)$$

Представляя комплексную проводимость Y в показательной форме

$$Y = 1/Z = e^{-j\varphi} / z = y e^{j\psi}, \quad (2.51)$$

находим, что модуль комплексной входной проводимости $y = |Y|$, называемый **полной входной проводимостью** цепи, является величиной, обратной модулю комплексного входного сопротивления:

$$y = 1/z = I_m / U_m = I / U,$$

а аргумент входной проводимости ψ равен по абсолютному значению и противоположен по знаку аргументу комплексного входного сопротивления $\psi = -\varphi$.

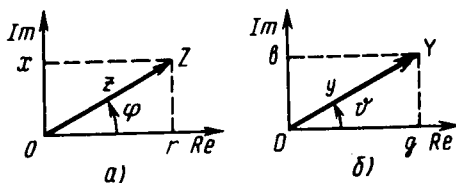


Рис. 2.8. Изображение Z и Y на комплексной плоскости

Комплексная входная проводимость участка цепи может быть также представлена в алгебраической форме: $Y = g + jb$. Здесь g и b — вещественная (резистивная) и мнимая (реактивная) составляющие входной проводимости, которые можно рассматривать как проекции вектора Y на вещественную и мнимую оси комплексной плоскости (рис. 2.8, б): $g = y \cos \varphi$, $b = y \sin \varphi$.

Подставляя в (2.49) $Z = r + jx$ и $Y = g + jb$, определим связь между вещественными и мнимыми составляющими комплексного сопротивления и комплексной проводимости участка цепи:

$$Y = g + jb = 1/(r + jx) = (r - jx)/(r^2 + x^2); \quad (2.52)$$

$$Z = r + jx = 1/(g + jb) = (g - jb)/(g^2 + b^2). \quad (2.53)$$

Из выражений (2.52), (2.53) следует, что резистивные составляющие комплексного входного сопротивления и комплексной входной проводимости имеют одинаковые знаки:

$$g = r/(r^2 + x^2); \quad r = g/(g^2 + b^2), \quad (2.54)$$

а реактивные составляющие — противоположные:

$$b = -x/(r^2 + x^2), \quad x = -b/(g^2 + b^2). \quad (2.55)$$

Отметим, что каждая из составляющих комплексного сопротивления (r и x) зависит как от резистивной g , так и реактивной b составляющей комплексной проводимости, а каждая из составляющих комплексной проводимости (g и b), в свою очередь, зависит от r и x .

КОМПЛЕКСНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ЦЕПИ. ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Комплексные сопротивление и проводимость пассивного участка линейной цепи были введены как отношения комплексных действующих значений или комплексных амплитуд напряжения и тока, приложенных к зажимам этого участка цепи. В то же время комплексные сопротивление и проводимость любого участка линейной цепи, составленного из идеализированных пассивных элементов, не зависят от амплитуд (действующих значений) и начальных фаз токов и напряжений и определяются только параметрами элементов, входящих в рассматриваемый участок цепи, способом их соединения между собой и частотой внешнего гармонического воздействия.

Зная комплексное сопротивление (комплексную проводимость) участка цепи и одну из приложенных к данному участку цепи величин — ток $i \div I_m$ или напряжение $u \div U_m$, можно, используя (2.42), (2.50), найти неизвестное напряжение или неизвестный ток исследуемого участка

$$\dot{U}_m = Z \dot{I}_m; \quad \dot{I}_m = Y \dot{U}_m. \quad (2.56)$$

Аналогично определяют комплексные действующие значения напряжения и тока на зажимах участка цепи:

$$\dot{U} = Z\dot{I}; \dot{I} = Y\dot{U}. \quad (2.57)$$

Выражения (2.56), (2.57) по структуре напоминают соотношения между мгновенными значениями напряжения и тока на зажимах линейного сопротивления (1.9), (1.10) и являются математической записью закона Ома в комплексной форме. В отличие от выражений (1.13), (1.16), (1.22), (1.23) уравнения (2.56), (2.57) являются алгебраическими.

Используя закон Ома в комплексной форме, каждому участку линейной электрической цепи, составленному из идеализированных пассивных элементов и имеющему два внешних вывода (см. рис. 2.7, а), в том числе любому идеализированному пассивному двухполюсному элементу, можно поставить в соответствие комплексную схему замещения, на которой рассматриваемый участок цепи представлен комплексным сопротивлением или проводимостью, а токи и напряжения на его зажимах — комплексными амплитудами (см. рис. 2.7, б) или комплексными действующими значениями (см. рис. 2.7, в).

Представляя все входящие в моделирующую цепь идеализированные пассивные элементы их комплексными схемами замещения, а токи и ЭДС идеализированных источников — их комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями, получаем комплексную схему замещения цепи (схему замещения для комплексных амплитуд или схему замещения для комплексных действующих значений). В отличие от комплексных схем замещения рассмотренные ранее схемы, на которых были изображены идеализированные двухполюсные элементы и указаны мгновенные значения токов i и напряжений u ветвей и идеализированных источников, будем называть схемами замещения для мгновенных значений.

Таким образом, комплексная схема замещения цепи может быть получена из схемы замещения для мгновенных значений заменой всех идеализированных пассивных двухполюсников их комплексными сопротивлениями (проводимостями) и всех токов и напряжений — их комплексными изображениями.

По внешнему виду комплексная схема замещения цепи подобна цепи постоянного тока, составленной только из сопротивлений и идеализированных источников энергии, причем, подобно цепи постоянного тока, компонентные уравнения всех ветвей в комплексной форме являются алгебраическими.

Мгновенные значения токов и напряжений различных ветвей электрической цепи связаны между собой линейными алгебраическими уравнениями баланса токов и напряжений, составляемыми на основании законов Кирхгофа. Учитывая, что суммированию гармонических функций времени соответствует суммирование их

комплексных изображений, перейдем от законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений к законам Кирхгофа для комплексных изображений токов и напряжений, называемых обычно законами Кирхгофа в комплексной форме.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме устанавливает связь между комплексными изображениями токов в каждом из узлов моделирующей цепи: *сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов электрической цепи, равна нулю:*

$$\sum_k I_{mk} = 0; \sum_k I_k = 0, \quad (2.58)$$

где k — номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме определяет связь между комплексными изображениями напряжений ветвей, входящих в произвольный контур электрической цепи: *сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, равна нулю:*

$$\sum_v \dot{U}_{mv} = 0; \sum_v \dot{U}_v = 0, \quad (2.59)$$

где v — номер ветви, входящей в рассматриваемый контур.

В ряде случаев удобно использовать другую формулировку второго закона Кирхгофа в комплексной форме: *сумма комплексных изображений напряжений на всех элементах любого контура моделирующей цепи, кроме источников напряжения, равна сумме комплексных изображений ЭДС всех входящих в контур источников напряжения:*

$$\sum_i \dot{U}_{mi} = \sum_j \dot{E}_{mj}; \sum_i \dot{U}_i = \sum_j \dot{E}_j, \quad (2.60)$$

где $\dot{U}_{mi}$, $\dot{U}_i$ — комплексные изображения напряжений всех элементов контура, за исключением источников напряжения; $\dot{E}_{mj}$, $\dot{E}_j$ — комплексные изображения ЭДС источников напряжения, действующих в рассматриваемом контуре.

В связи с тем что выражения (2.58) — (2.60) непосредственно вытекают из соотношений (1.39) — (1.41), при суммировании комплексных изображений токов и напряжений ветвей электрической цепи в выражениях (2.58) — (2.60) сохраняются те же правила знаков, что и при суммировании мгновенных значений токов и напряжений.

Законы Кирхгофа были сформулированы только для мгновенных значений, комплексных амплитуд и комплексных действующих значений токов и напряжений. Они не выполняются для амплитуд и действующих значений соответствующих величин.

Используя выражения для законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме, можно составить систему уравнений электрического равновесия цепи для комплексных изображений токов и напряжений. В отличие от системы уравнений электрического равновесия для мгновенных значений токов и напряжений *уравнения электрического равновесия для комплексных изображений токов и напряжений являются алгебраическими*. Решение таких уравнений намного проще, чем решение дифференциальных уравнений электрического равновесия, составленных для мгновенных значений токов и напряжений. Таким образом, с использованием комплексных схем замещения и полученных на их основании уравнений электрического равновесия цепи в комплексной форме анализ цепи переменного тока становится не сложнее анализа цепи постоянного тока и может производиться с помощью тех же приемов.

ПОРЯДОК АНАЛИЗА ЦЕПИ МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Наметим порядок анализа линейной электрической цепи в установившемся режиме при гармоническом внешнем воздействии:

1) замена гармонических токов и напряжений всех ветвей их комплексными изображениями (комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями), а схемы замещения цепи для мгновенных значений — комплексной схемой замещения;

2) составление уравнений электрического равновесия цепи для комплексных изображений токов и напряжений на основе законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме;

3) решение системы уравнений электрического равновесия относительно комплексных изображений интересующих токов и напряжений;

4) переход от комплексных изображений интересующих токов и напряжений к их оригиналам.

§ 2.3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

РЕЗИСТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Пусть к резистивному элементу (см. рис. 1.3) приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону (рис. 2.9, а):

$$u_R = \sqrt{2} U_R \cos(\omega t + \psi_u). \quad (2.61)$$

Определим ток резистивного элемента i_R и его комплексное входное сопротивление Z_R , а также построим диаграммы, характеризующие зависимость тока, напряжения и мгновенной мощности от времени.

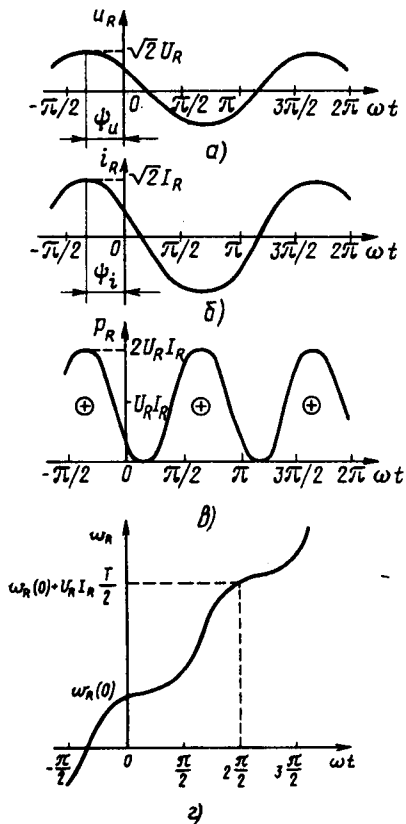


Рис. 2.9. Временные диаграммы напряжения (а), тока (б), мгновенной мощности (в) и энергии (г) резистивного элемента

мощность резистивного элемента определяется произведением мгновенных значений напряжения u_R и тока i_R :

$$p_R = u_R i_R = 2 U_R I_R \cos^2(\omega t + \psi).$$

Выражая $\cos^2(\omega t + \psi)$ через косинус двойного угла, получаем выражение для мгновенной мощности резистивного элемента:

$$p_R = U_R I_R + U_R I_R \cos 2(\omega t + \psi). \quad (2.64)$$

Из выражения (2.64) следует, что мгновенная мощность резистивного элемента содержит две составляющие: постоянную, равную произведению действующих значений напряжения и тока, и переменную, изменяющуюся во времени по гармоническому закону с частотой, удвоенной по сравнению с частотой действующего

Связь между мгновенными значениями тока и напряжения линейного резистивного элемента определяется законом Ома (1.9), (1.10). Подставляя (2.61) в (1.10), находим

$$i_R = u_R / R = [\sqrt{2} U_R \cos(\omega t + \psi_u)] / R. \quad (2.62)$$

Из этого выражения следует, что при гармоническом внешнем воздействии ток резистивного элемента является гармонической функцией времени той же частоты, что и напряжение (рис. 2.9, б):

$$i_R = \sqrt{2} I_R \cos(\omega t + \psi_i). \quad (2.63)$$

Сравнивая выражения (2.62) и (2.63), устанавливаем, что ток и напряжение линейного резистивного элемента совпадают по фазе:

$$\psi_u = \psi_i = \psi.$$

а действующие значения напряжения и тока связаны между собой соотношением $I_R = U_R / R$, подобным закону Ома для мгновенных значений. Мгновенная мощность

напряжения (рис. 2.9, в). Максимальное значение мгновенной мощности резистивного элемента равно $2U_R I_R$, а минимальное — нулю.

В связи с тем что ток и напряжение резистивного элемента имеют одинаковые начальные фазы, они одновременно достигают максимальных значений и одновременно проходят через нуль (рис. 2.9, а, б). Мгновенная мощность резистивного элемента всегда положительна, причем она обращается в нуль в точках, где ток и напряжение равны нулю, и достигает максимума в моменты времени, когда ток и напряжение максимальны по абсолютному значению.

Среднее значение мощности резистивного элемента за период называется **активной мощностью**; оно равно произведению действующих значений напряжения и тока:

$$P_A = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{U_R I_R}{T} \int_0^T [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] dt = U_R I_R.$$

Активная мощность численно равна постоянной составляющей мгновенной мощности и характеризует среднюю за период скорость потребления энергии от источника.

Энергия, поступившая в резистивный элемент к произвольному моменту времени t , может быть найдена как интеграл от мощности (1.12). Подставляя (2.64) в выражение (1.12) и полагая, что энергия, поступившая в элемент к моменту времени $t=0$, равна $w_R(0)$, получаем

$$\begin{aligned} w_R(t) &= w_R(0) + U_R I_R \int_0^t [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] dt = \\ &= w_R(0) + U_R I_R t + \frac{U_R I_R}{2\omega} [\sin 2(\omega t + \psi) - \sin 2\psi]. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, функция $w_R(t)$ является неубывающей функцией времени (рис. 2.9, г), причем в моменты времени, когда мгновенная мощность резистивного элемента принимает нулевые значения, на графике появляется горизонтальный участок («полочка»).

Комплексные ток и напряжение резистивного элемента $\dot{I}_R = I_R e^{j\psi_i} = \frac{U_R}{R} e^{j\psi_u}$ и $\dot{U}_R = U_R e^{j\psi_u}$ имеют одинаковые аргументы и отличаются по модулю в R раз. На комплексной плоскости напряжение $\dot{U}_R$ и ток $\dot{I}_R$ изображаются векторами, которые совпадают по направлению и отличаются только масштабом (рис. 2.10, а).

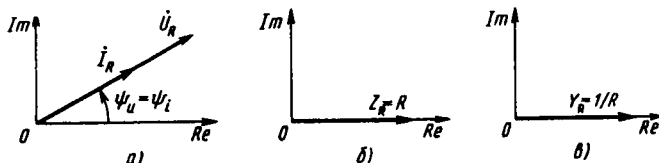


Рис. 2.10. Векторные диаграммы тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б) и комплексной проводимости (в) резистивного элемента

Комплексное сопротивление Z_R резистивного элемента равно отношению комплексных действующих значений напряжения и тока:

$$Z_R = \dot{U}_R / \dot{I}_R = R. \quad (2.65)$$

Представляя комплексное сопротивление Z_R в показательной и алгебраической формах

$$Z_R = z_R e^{j\varphi_R} = r_R + jx_R \quad (2.66)$$

и сравнивая (2.65) с (2.66), устанавливаем, что модуль комплексного сопротивления $z_R = U_R / I_R = R$, его аргумент $\varphi_R = \psi_u - \psi_i = 0$, а комплексное входное сопротивление Z_R резистивного элемента содержит только вещественную составляющую: $r_R = R$, $x_R = 0$.

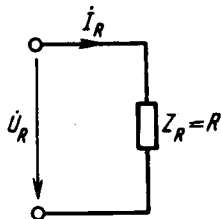


Рис. 2.11. Комплексная схема замещения участка цепи, содержащего резистивный элемент

На комплексной плоскости сопротивление Z_R изображается вектором, направленным вдоль вещественной оси (рис. 2.10, б). Комплексная проводимость резистивного элемента $Y_R = 1/Z_R = 1/R$ также изображается вектором, направление которого совпадает с направлением положительной вещественной полуоси (рис. 2.10, в).

Комплексная схема замещения резистивного элемента (рис. 2.11) имеет такой же вид, как и схема замещения этого элемента для мгновенных значений (см. рис. 1.3), и отличается от последней только тем, что мгновенные значения тока i_R и напряжения u_R заменены их комплексными изображениями $\dot{I}_R$ и $\dot{U}_R$.

ЕМКОСТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Рассмотрим емкость (см. рис. 1.6, а), к которой приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону:

$$u_C = \sqrt{2} U_C \cos(\omega t + \psi_u).$$

Используя выражение (1.13), найдем

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = -\omega C \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2} \omega C U_C \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2). \quad (2.67)$$

Как следует из (2.67), ток емкости изменяется по гармоническому закону:

$$i_c = \sqrt{2} I_c \cos(\omega t + \psi_i),$$

причем начальная фаза тока на $\pi/2$ больше начальной фазы напряжения: $\psi_i = \psi_u + \pi/2$, т. е. ток емкости опережает по фазе напряжение на 90° (рис. 2.12, а).

Действующее значение тока емкости пропорционально действующему значению напряжения: $I_c = \omega C U_c$.

Мгновенная мощность емкости p_c при гармоническом воздействии изменяется по гармоническому закону с частотой, в два раза большей частоты воздействующего напряжения (рис. 2.12, б):

$$\begin{aligned} p_c &= u_c i_c = [\sqrt{2} U_c \cos(\omega t + \psi_u)] [\sqrt{2} I_c \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2)] = \\ &= -2 U_c I_c \cos(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_u) = -U_c I_c \sin 2(\omega t + \psi_u). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Как видно из временных диаграмм (рис. 2.12), в течение половины периода изменения мощности ток и напряжение емкости имеют одинаковый знак (емкость заряжается), при этом мгновенная мощность емкости положительна. В течение второй половины периода емкость отдает запасенную энергию (разряжается), при этом ток и напряжение емкости имеют различные знаки, а мгновенная мощность емкости отрицательна. Среднее значение мощности емкости за период (активная мощность) равно нулю:

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = 0. \quad (2.69)$$

Энергия w_c , запасенная в емкости, определяется в соответствии с выражением (1.18) приложенным к ней напряжением:

$$\begin{aligned} w_c &= C u_c^2 / 2 = C U_c^2 \cos^2(\omega t + \psi_u) = \\ &= C U_c^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)] / 2. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Из выражения (2.70) следует, что энергия, запасенная в емкости, содержит две составляющие: переменную и постоянную, причем переменная составляющая энергии изменяется во времени по гармоническому закону с частотой, равной 2ω (рис. 2.12, в).

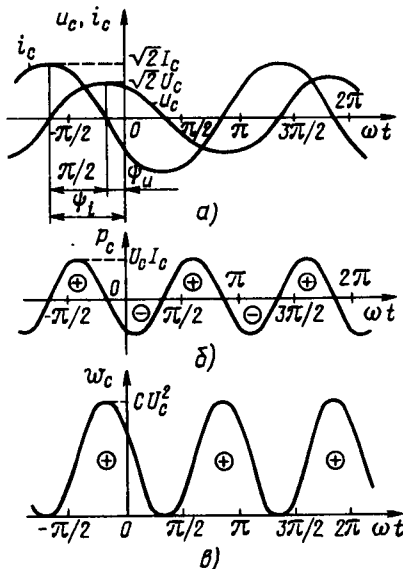


Рис. 2.12. Временные диаграммы напряжения и тока (а), мощности (б) и энергии (в) емкостного элемента

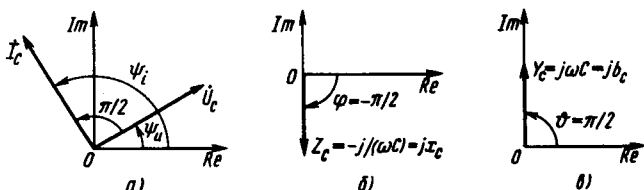


Рис. 2.13. Векторные диаграммы тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б) и комплексной проводимости (в) емкостного элемента

Энергия, запасенная в емкости, достигает максимального значения в те моменты времени, когда напряжение на емкости максимально по абсолютному значению. При уменьшении (по абсолютному значению) напряжения на емкости запасенная в ней энергия уменьшается и становится равной нулю в моменты времени, когда напряжение на емкости равно нулю.

Таким образом, емкость периодически обменивается энергией с остальной частью цепи, причем энергия, запасенная в емкости, является неотрицательной величиной. Емкость не содержит внутренних источников энергии и поэтому в процессе разрядки не может отдать больше энергии, чем она получила от остальной части цепи в процессе зарядки.

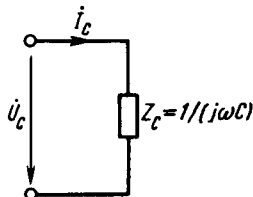


Рис. 2.14. Комплексная схема замещения емкостного элемента

В связи с тем что ток емкости i_c опережает напряжение емкости u_c по фазе на угол $\pi/2$, комплексные ток и напряжение емкости $\dot{I}_c = I_c e^{j\psi_i} = \omega C U_c e^{j(\psi_u + \pi/2)}$; $\dot{U}_c = U_c e^{j\psi_u}$ изображаются на комплексной плоскости в виде двух векторов, расположенных таким образом, что вектор $\dot{I}_c$ повернут относительно вектора $\dot{U}_c$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 2.13, а). Комплексные сопротивление и проводимость емкости

$$Z_c = \frac{\dot{U}_c}{\dot{I}_c} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = 1/(j\omega C) = -j/(\omega C), \quad (2.71)$$

$$Y_c = 1/Z_c = \omega C e^{j\pi/2} = j\omega C. \quad (2.72)$$

Сравнивая (2.71) и (2.72) со стандартными показательной и алгебраической формами записи комплексных сопротивления и проводимости $Z_c = z_c e^{j\varphi_c} = r_c + jx_c$; $Y_c = y_c e^{j\varphi_c} = g_c + jb_c$, находим модули, аргументы, вещественные и мнимые составляющие входных сопротивлений и проводимостей емкости: $z_c = 1/(\omega C)$; $y_c = \omega C$; $\varphi_c = -\pi/2$; $\varphi_c^* = \pi/2$; $g_c = 0$; $r_c = 0$; $x_c = -1/(\omega C)$; $b_c = \omega C$.

На комплексной плоскости Z_C и Y_C изображают векторами, направленными соответственно вдоль отрицательной или положительной мнимых полуосей (рис. 2.13, б, в). Комплексная схема замещения емкости приведена на рис. 2.14.

ИНДУКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Найдем напряжение u_L индуктивности (см. рис. 1.6, б), ток i_L которой изменяется по гармоническому закону:

$$i_L = \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \psi_i). \quad (2.73)$$

Связь между мгновенными значениями тока и напряжения индуктивности определяется выражением (1.22). Подставляя (2.73) в (1.22), получаем

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = -\omega L \sqrt{2} I_L \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \sqrt{2} \omega L I_L \cos(\omega t + \psi_i + \pi/2). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Как следует из (2.74), напряжение индуктивности, находящейся под гармоническим воздействием, является гармонической функцией времени, имеющей ту же частоту, что и воздействующий ток (рис. 2.15, а):

$$u_L = \sqrt{2} U_L \cos(\omega t + \psi_u),$$

причем начальная фаза напряжения на $\pi/2$ больше начальной фазы тока $\psi_u = \psi_i + \pi/2$.

Действующее значение напряжения индуктивности пропорционально действующему значению тока: $U_L = \omega L I_L$.

Так же как и мгновенная мощность емкости, мгновенная мощность индуктивности p_L при гармоническом воздействии изменяется по гармоническому закону с частотой, равной 2ω (рис. 2.15, б):

$$\begin{aligned} p_L &= u_L i_L = [\sqrt{2} U_L \cos(\omega t + \psi_u)] \times \\ &\times [\sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \psi_i)] = \\ &= -U_L I_L \sin 2(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (2.75)$$

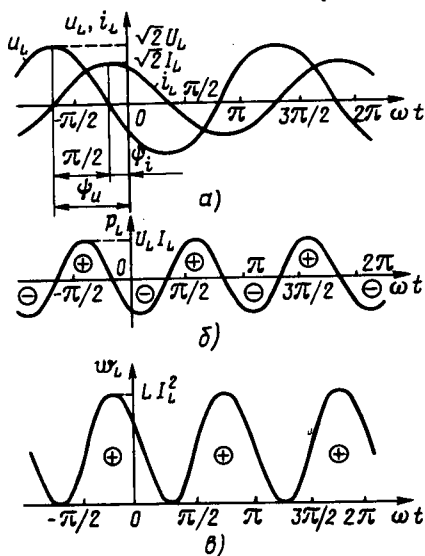


Рис. 2.15. Временные диаграммы тока и напряжения (а), мощности (б) и энергии (в) индуктивного элемента

В связи с тем что в индуктивности отсутствует преобразование электрической энергии в другие виды энергии, активная мощность индуктивности равна нулю:

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0.$$

Энергия w_L , запасенная в магнитном поле индуктивности, определяется мгновенным значением тока индуктивности:

$$w_L = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{LI_L^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)].$$

Так же как и мгновенная энергия емкости, мгновенная энергия индуктивности содержит постоянную и переменную составляющие, причем переменная составляющая изменяется во времени по гармоническому закону с частотой 2ω (рис. 2.15, в).

Вследствие того что емкость и индуктивность являются дуальными элементами, процессы, имеющие место в этих элементах при гармоническом воздействии, описываются подобными по структуре аналитическими выражениями, а временные диаграммы для индуктивности подобны временным диаграммам для емкости и могут быть получены из последних путем замены напряжения на ток, а емкости на индуктивность.

Комплексный ток $\dot{I}_L$ и комплексное напряжение $\dot{U}_L$ индуктивности определяются выражениями

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_i}; \quad (2.76)$$

$$\dot{U}_L = U_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i + \pi/2)}. \quad (2.77)$$

Они изображаются на комплексной плоскости в виде пары векторов, длины которых в определенном масштабе равны действующим значениям напряжения и тока индуктивности, причем вектор $\dot{U}_L$ повернут относительно вектора $\dot{I}_L$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 2.16, а).

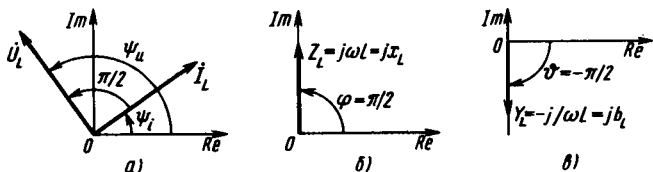


Рис. 2.16. Векторные диаграммы тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б) и комплексной проводимости (в) индуктивного элемента

Используя выражения (2.76), (2.77), находим комплексное сопротивление Z_L и комплексную проводимость Y_L индуктивности:

$$Z_L = \dot{U}_L / \dot{I}_L = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L; \quad (2.78)$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = e^{-j\pi/2} / (\omega L) = 1/(j\omega L) = -j/(\omega L). \quad (2.79)$$

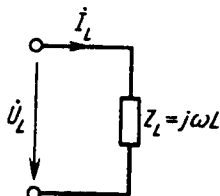


Рис. 2.17. Комплексная схема замещения индуктивного элемента

Сравнивая (2.78) и (2.79) с показательной и алгебраической формами записи комплексных сопротивления и проводимости:

$Z_L = z_L e^{j\varphi_L} = r_L + jx_L$; $Y_L = y_L e^{j\psi_L} = g_L + jb_L$, получаем модули и аргументы, вещественную и мнимую части комплексного сопротивления и комплексной проводимости индуктивности:

$$z_L = \omega L; y_L = 1/(\omega L); \varphi_L = \pi/2; \psi_L = -\pi/2; \\ g_L = 0; r_L = 0; x_L = \omega L; b_L = -1/(\omega L).$$

На комплексной плоскости Z_L и Y_L изображаются векторами, ориентированными соответственно вдоль положительного или отрицательного направления мнимой оси (рис. 2.16, б, в). Комплексная схема замещения индуктивности приведена на рис. 2.17.

Комплексные сопротивления и проводимости идеализированных пассивных элементов линейных цепей не зависят от амплитуды (действующего значения) и начальной фазы внешнего воздействия и определяются только параметрами соответствующих элементов и частотой внешнего воздействия.

§ 2.4. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ RL -ЦЕПЬ

Рассмотрим идеализированную электрическую цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R и индуктивности L (рис. 2.18, а). Пусть напряжение, приложенное к внешним зажимам цепи, изменяется по гармоническому закону

$$u = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u),$$

где U , ω , ψ_u — заданные величины. Используя метод комплексных амплитуд, находим установившееся значение тока i в цепи.

Искомый ток i является гармонической функцией времени той же частоты, что и приложенное напряжение:

$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i),$$

где I , ψ_i — неизвестные действующее значение и начальная фаза тока i .

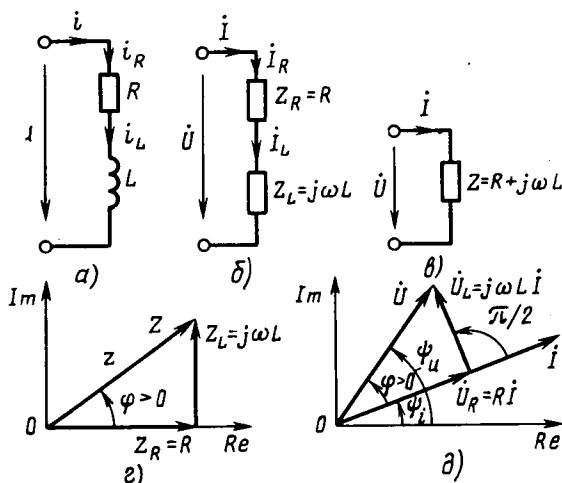


Рис. 2.18. Схемы и векторные диаграммы последовательной RL -цепи

Представляя сопротивление и индуктивность комплексными схемами замещения и переходя от тока i и напряжения u к их комплексным изображениям

$$i \doteq \dot{I} = I e^{j\psi_i}; u \doteq \dot{U} = U e^{j\psi_u}, \quad (2.80)$$

получаем комплексную схему замещения цепи (рис. 2.18, б). Далее, используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L; \quad (2.81)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R = \dot{I}_L; \quad (2.82)$$

$$\dot{U}_R = Z_R \dot{I}_R; \quad (2.83)$$

$$\dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L, \quad (2.84)$$

где $Z_R = R$; $Z_L = j\omega L$ — комплексные сопротивления входящих в рассматриваемую цепь идеализированных элементов.

Подставляя (2.82) — (2.84) в уравнение (2.81), находим соотношение, связывающее комплексные изображения искомого тока и заданного напряжения:

$$\dot{U} = (Z_R + Z_L) \dot{I} = Z \dot{I}. \quad (2.85)$$

Выражение (2.85) представляет собой математическую запись закона Ома в комплексной форме для рассматриваемого участка цепи, причем $Z = Z_R + Z_L = R + j\omega L$ есть комплексное входное сопротивление этого участка цепи. Выражению (2.85) можно поста-

вить в соответствие комплексную схему замещения цепи (рис. 2.18, в). Таким образом, комплексное входное сопротивление цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивлений R и индуктивности L , равно сумме комплексных сопротивлений этих элементов. В дальнейшем убедимся, что аналогично можно найти комплексное сопротивление любого участка цепи, представляющего собой последовательное соединение произвольного числа идеализированных двухполюсных элементов.

Комплексное входное сопротивление рассматриваемой цепи может быть изображено на комплексной плоскости в виде вектора Z , равного геометрической сумме векторов Z_R и Z_L (рис. 2.18, г). Длина этого вектора равна, в выбранном масштабе, модулю комплексного входного сопротивления цепи

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (2.86)$$

а угол наклона к положительной вещественной полуоси — его аргументу

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R). \quad (2.87)$$

Очевидно, что при конечных значениях ω , L и R угол φ лежит в пределах

$$0 < \varphi < \pi/2. \quad (2.88)$$

Когда аргумент комплексного входного сопротивления φ какого-либо двухполюсника равен нулю, то говорят, что его входные сопротивление и проводимость имеют *чисто резистивный* (вещественный) характер, когда $|\varphi| = \pi/2$ имеет *чисто реактивный* (мнимый) характер. Если аргумент комплексного входного сопротивления двухполюсника равен $\pi/2$, то его входные сопротивление и проводимость имеют *индуктивный характер*, если $\varphi = -\pi/2$ — *емкостный*. В рассматриваемом случае значение аргумента φ определяется соотношением (2.88), поэтому входное сопротивление цепи имеет *резистивно-индуктивный характер*.

Используя (2.85), находим комплексное действующее значение искомого тока:

$$\dot{I} = \dot{U}/Z = U e^{j\psi_u} / (z e^{j\varphi}) = U e^{j(\psi_u - \varphi)} / z, \quad (2.89)$$

где z и φ определяются соотношениями (2.86) и (2.87). Из выражений (2.89) и (2.80) можно найти действующее значение и начальную фазу тока:

$$I = U/z, \quad \psi_i = \psi_u - \varphi.$$

Переходя от комплексного изображения тока к оригиналу, окончательно получаем

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{z} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \psi_u - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}\right).$$

В связи с тем что при заданной частоте внешнего воздействия ω установившиеся значения токов и напряжений цепи полностью определяются их действующими значениями и начальными фазами, на практике обычно не возникает необходимости находить оригиналы токов и напряжений. Задача анализа цепи считается решенной, если получены комплексные действующие значения соответствующих функций.

Векторные диаграммы для тока и напряжений RL -цепи приведены на рис. 2.18, д. Так как напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, вектор $\dot{U}_R$ совпадает по направлению с вектором $\dot{I}$, вектор $\dot{U}_L$ повернут относительно вектора $\dot{I}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (напряжение на индуктивности по фазе опережает ток на $\pi/2$). Независимо от начальной фазы напряжения ψ_u вектор $\dot{I}$ повернут относительно вектора $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$ по часовой стрелке на угол φ , т. е. ток отстает по фазе от напряжения на угол φ , равный аргументу комплексного входного сопротивления цепи. Отметим также, что так называемый *треугольник напряжений*, образованный векторами $\dot{U}$, $\dot{U}_R$ и $\dot{U}_L$ (рис. 2.18, д), подобен *треугольнику сопротивлений* (рис. 2.18, з), образованному векторами Z , Z_R и Z_L .

Из векторной диаграммы видно, что действующие значения напряжения на входе цепи U , напряжения на сопротивлении U_R и напряжения на индуктивности U_L , которые определяют длину сторон *треугольника напряжений*, связаны соотношением $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$, т. е. действующее значение напряжения на входе цепи не равно алгебраической сумме действующих значений напряжений на элементах цепи.

Пример 2.3. Найдем комплексное входное сопротивление и ток последовательной RL -цепи (рис. 2.18, а), к зажимам которой приложено напряжение $u = \sqrt{2} \cdot 50 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 60^\circ)$ В. Определим напряжения на элементах цепи ($R = 5$ кОм; $L = 1$ мГн).

Комплексное входное сопротивление цепи Z равно сумме комплексных сопротивлений входящих в нее элементов:

$$Z = R + j\omega L = (5 + j6,28) \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Переходя от алгебраической формы записи к показательной

$$Z = 8,03 e^{j51,5^\circ} \text{ кОм,}$$

вычислим модуль комплексного входного сопротивления $Z = 8,03$ кОм и его аргумент $\varphi = 51,5^\circ$. Комплексный ток цепи

$$\dot{I} = \dot{U}/Z = \frac{50 e^{j60^\circ}}{8,03 \cdot 10^3 e^{j51,5^\circ}} = 6,23 e^{j8,5^\circ} \text{ мА.}$$

Комплексные напряжения на сопротивлении и индуктивности:

$$\dot{U}_R = R\dot{I} = 5 \cdot 10^3 \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} e^{j8,5^\circ} = 31,2 e^{j8,5^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L I = 6,28 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} e^{j8,5^\circ} = 39,1 e^{j98,5^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенные значения соответствующих величин:

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 8,5^\circ) \text{ А;}$$

$$u_R = \sqrt{2} \cdot 31,2 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 8,5^\circ) \text{ В;}$$

$$u_L = \sqrt{2} \cdot 39,1 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 98,5^\circ) \text{ В.}$$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ RC-ЦЕПЬ

Рассмотрим последовательную RC-цепь (рис. 2.19, а), к зажимам которой приложено напряжение u , изменяющееся по гармоническому закону. Найдём комплексный ток цепи и её комплексное входное сопротивление.

Переходя к комплексной схеме замещения цепи (рис. 2.19, б) и используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_C; \quad \dot{U}_R = Z_R I; \\ I &= I_R = I_C; \quad \dot{U}_C = Z_C I, \end{aligned} \quad (2.90)$$

где $Z_R = R$ и $Z_C = 1/(j\omega C)$ — комплексные сопротивления входящих в цепь идеализированных элементов. Решая систему уравнений (2.90) относительно комплексного действующего значения искомого тока, получаем

$$I = \dot{U} / (Z_R + Z_C) = \dot{U} / Z, \quad (2.91)$$

где $Z = Z_R + Z_C$ — комплексное входное сопротивление цепи, которое равно сумме комплексных сопротивлений последовательно

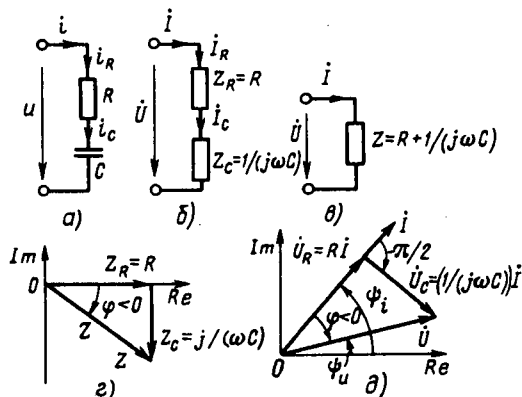


Рис. 2.19. Схемы и векторные диаграммы последовательной RC-цепи

включенных идеализированных элементов. Комплексная схема замещения цепи, соответствующая уравнению (2.91), приведена на рис. 2.19, в. Выразим комплексное сопротивление цепи Z через параметры входящих в цепь элементов:

$$Z = Z_R + Z_C = R - j/(\omega C) = z e^{j\varphi}, \quad (2.92)$$

где $z = \sqrt{R^2 + [1/(\omega C)]^2}$; $\varphi = -\arctg[1/(\omega RC)]$.

Как следует из выражения (2.92), при конечных значениях ω , R и C угол φ лежит в пределах $-\pi/2 < \varphi < 0$, т. е. входное сопротивление цепи имеет резистивно-емкостный характер. Векторная диаграмма для комплексного входного сопротивления цепи приведена на рис. 2.19, г.

Подставляя (2.92) в (2.91), окончательно находим

$$i = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [1/(\omega C)]^2}} e^{j(\psi_u + \arctg[1/(\omega RC)])}. \quad (2.93)$$

Из выражения (2.93) следует, что ток i опережает приложенное напряжение u по фазе на угол φ . Совмещенная векторная диаграмма для тока и напряжений RC -цепи приведена на рис. 2.19, д.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ RLC -ЦЕПЬ

Рассмотрим последовательную RLC -цепь (рис. 2.20, а), находящуюся под гармоническим воздействием, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 2.20, б. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C; \quad \dot{U}_L = Z_L \dot{I}_L; \\ \dot{I} &= \dot{I}_R = \dot{I}_L = \dot{I}_C; \quad \dot{U}_C = Z_C \dot{I}_C; \\ \dot{U}_R &= Z_R \dot{I}_R. \end{aligned} \quad (2.94)$$

где $Z_R = R$; $Z_L = j\omega L$; $Z_C = 1/(j\omega C)$ — комплексные сопротивления входящих в цепь идеализированных элементов. Решая систему (2.94) относительно тока $\dot{I}$, получаем

$$\dot{I} = \dot{U}/(Z_R + Z_L + Z_C) = \dot{U}/Z. \quad (2.95)$$

Комплексное входное сопротивление Z последовательной RLC -цепи равно сумме комплексных сопротивлений входящих в цепь элементов и определяется только параметрами входящих в цепь элементов и частотой внешнего воздействия (рис. 2.20, в):

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j[\omega L - 1/(\omega C)]. \quad (2.96)$$

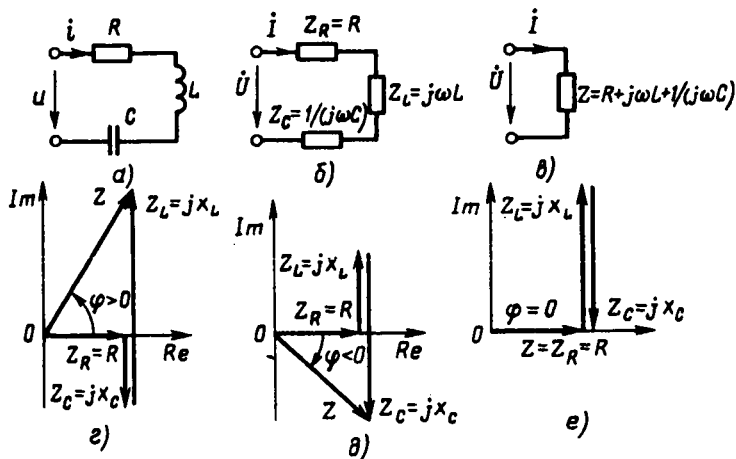


Рис. 2.20. Схемы и векторные диаграммы сопротивлений последовательной RLC -цепи

Переходя от алгебраической формы записи Z к показательной, находим модуль и аргумент комплексного входного сопротивления:

$$z = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (2.97)$$

Из выражений (2.97) следует, что характер входного сопротивления цепи зависит от соотношения между мнимыми составляющими комплексного входного сопротивления емкости $x_C = -1/(\omega C)$ и индуктивности $x_L = \omega L$. При $x_L > |x_C|$ входное сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер ($0 < \varphi < \pi/2$). Векторная диаграмма, построенная на основании уравнения (2.96) и иллюстрирующая данный случай, представлена на рис. 2.20, *г* (для большей наглядности векторы Z_L и Z_C изображены немного смещенными один относительно другого). Если $x_L < |x_C|$, то входное сопротивление цепи имеет резистивно-емкостный характер ($-\pi/2 < \varphi < 0$) (рис. 2.20, *д*). При $x_L = |x_C|$ мнимые составляющие входного сопротивления емкости x_C и индуктивности x_L взаимно компенсируются и входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер ($\varphi = 0$) (рис. 2.20, *е*).

Используя уравнение (2.95), можно по известному напряжению, приложенному к внешним зажимам цепи, найти ток, и наоборот. Векторные диаграммы тока и напряжений цепи, соответствующие различным соотношениям между мнимыми составляющими комплексного сопротивления емкости x_C и индуктивности x_L , приведены на рис. 2.21. Вектор $\vec{U}_R = R\vec{I}$, изображающий напряжение на сопротивлении, совпадает по направлению с вектором $\vec{I}$; вектор $\vec{U}_L = jx_L\vec{I} = j\omega L\vec{I}$ повернут относительно $\vec{I}$ на 90° против часовой

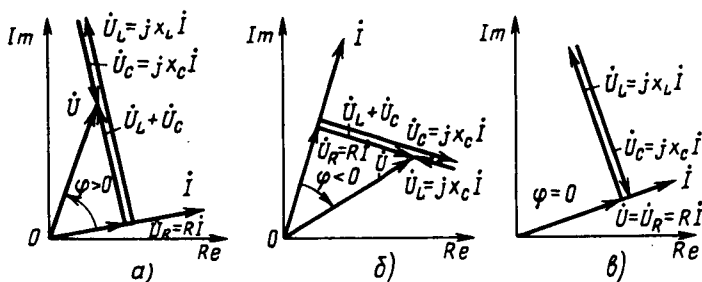


Рис. 2.21. Векторные диаграммы тока и напряжений последовательной RLC -цепи

стрелки; вектор $\dot{U}_C = jx_C \dot{I} = -jI/(\omega C)$ направлен противоположно вектору $\dot{U}_L$. При $x_L > |x_C|$ (рис. 2.21, а) вектор $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ совпадает по направлению с вектором $\dot{U}_L$, ток цепи отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$). При $x_L < |x_C|$ (рис. 2.21, б) вектор $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ совпадает по направлению с вектором $\dot{U}_C$, ток цепи опережает по фазе напряжение ($\varphi < 0$). Если $x_L = |x_C|$ (рис. 2.21, в), то вектор $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$, напряжение на зажимах цепи $\dot{U}$ равно напряжению на сопротивлении $\dot{U}_R$, ток цепи совпадает по фазе с приложенным напряжением ($\varphi = 0$).

Пример 2.4. Определим комплексное входное сопротивление и комплексный ток последовательной RLC -цепи (см. рис. 2.20, а) с параметрами $L = 80$ мкГн; $C = 500$ пФ; $R = 100$ Ом, к зажимам которой приложено напряжение $u = \sqrt{2} \cdot 10 \cos \omega t$ для частот $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^6$ рад/с, $\omega_2 = 8 \cdot 10^6$ рад/с, $\omega_3 = 5 \cdot 10^6$ рад/с.

Комплексное входное сопротивление цепи (2.96) равно сумме комплексных сопротивлений входящих в нее элементов. Подставляя в (2.96) параметры элементов цепи, находим комплексное сопротивление цепи при интересующих значениях частоты внешнего воздействия:

$$Z|_{\omega=\omega_1} = 100 - j600 = 608,3 e^{-j80,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z|_{\omega=\omega_2} = 100 + j390 = 402,6 e^{j75,6^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z|_{\omega=\omega_3} = 100 \text{ Ом}.$$

Таким образом, при $\omega = \omega_1$ входное сопротивление цепи имеет резистивно-емкостный характер, при $\omega = \omega_2$ — резистивно-индуктивный, при $\omega = \omega_3$ — чисто резистивный.

Используя закон Ома в комплексной форме (2.95), находим комплексный ток цепи:

$$\dot{I}|_{\omega=\omega_1} = \frac{10}{608,3 e^{-j80,5^\circ}} = 16,4 e^{j80,5^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}|_{\omega=\omega_2} = \frac{10}{402,6 e^{j75,6^\circ}} = 24,8 e^{-j75,6^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}|_{\omega=\omega_3} = \frac{10}{100} = 100 \text{ мА}.$$

Как и следовало ожидать, согласно характеру комплексного входного сопротивления цепи, при $\omega = \omega_1$ ток опережает напряжение по фазе на угол $80,5^\circ$, при $\omega = \omega_2$ ток отстает по фазе от напряжения на угол $75,6^\circ$, при $\omega = \omega_3$ напряжение и ток совпадают по фазе.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ RLC -ЦЕПЬ

Рассмотрим параллельную RLC -цепь (рис. 2.22, а), к зажимам которой приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону. Комплексная схема замещения цепи, в которой идеализированные двухполюсные элементы представлены их комплексными проводимостями, изображена на рис. 2.22, б.

Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L; \quad \dot{I}_C = Y_C \dot{U}_C; \\ \dot{U} &= \dot{U}_R = \dot{U}_C = \dot{U}_L; \quad \dot{I}_L = Y_L \dot{U}_L; \\ \dot{I}_R &= Y_R \dot{U}_R, \end{aligned} \quad (2.98)$$

где $Y_R = 1/R$; $Y_C = j\omega C$; $Y_L = 1/(j\omega L)$ — комплексные проводимости входящих в цепь идеализированных пассивных элементов.

Решая систему уравнений (2.98) относительно тока $\dot{I}$, получаем

$$\dot{I} = (Y_R + Y_C + Y_L) \dot{U} = Y \dot{U}, \quad (2.99)$$

где $Y = Y_R + Y_C + Y_L$ — комплексная проводимость параллельной RLC -цепи, равная сумме комплексных проводимостей входящих

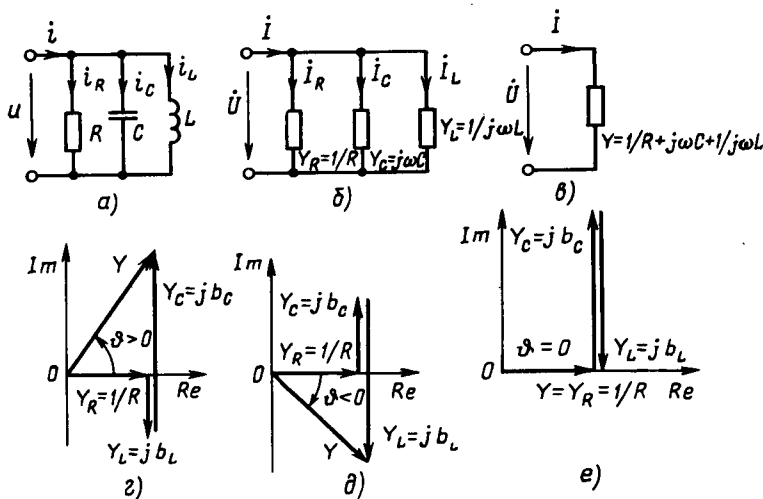


Рис. 2.22. Схемы и векторные диаграммы проводимостей параллельной RLC -цепи

в цепь идеализированных элементов. Далее будет показано, что комплексная проводимость любого участка цепи, состоящего из произвольного числа параллельно включенных ветвей, равна сумме комплексных проводимостей этих ветвей. Комплексная проводимость параллельной RLC -цепи, как и комплексная проводимость любой линейной цепи, не зависит от амплитуды (действующего значения) и начальной фазы внешнего воздействия, а определяется только параметрами входящих в цепь элементов и частотой внешнего воздействия:

$$Y = Y_R + Y_C + Y_L = (1/R) + j[\omega C - 1/(\omega L)]. \quad (2.100)$$

Переходя от алгебраической формы записи к показательной (2.51), находим модуль y и аргумент φ комплексной входной проводимости RLC -цепи:

$$y = \sqrt{(1/R)^2 + [\omega C - 1/(\omega L)]^2}; \quad \varphi = \arctg \{R[\omega C - 1/(\omega L)]\}. \quad (2.101)$$

Анализ выражений (2.101) показывает, что характер входной проводимости, а следовательно, и характер входного сопротивления параллельной RLC -цепи зависят от соотношения между реактивными составляющими входной проводимости емкости $b_C = \omega C$ и индуктивности $b_L = -1/(\omega L)$. Если $b_C > |b_L|$ (рис. 2.22, а), то входная проводимость цепи имеет резистивно-емкостный характер (аргумент комплексной проводимости $\pi/2 > \varphi > 0$, поэтому аргумент комплексного входного сопротивления φ лежит в пределах $-\pi/2 < \varphi < 0$). При $b_C < |b_L|$ (рис. 2.22, б) входная проводимость цепи имеет резистивно-индуктивный характер, а при $b_C = |b_L|$ (рис. 2.22, в) реактивные составляющие входной проводимости емкости b_C и индуктивности b_L взаимно компенсируются и входная проводимость цепи имеет чисто резистивный (вещественный) характер.

Уравнение (2.99) представляет собой математическую запись закона Ома в комплексной форме для параллельной RLC -цепи. Комплексная схема замещения цепи, соответствующая этому выражению, приведена на рис. 2.22, в. Используя уравнение (2.99), можно

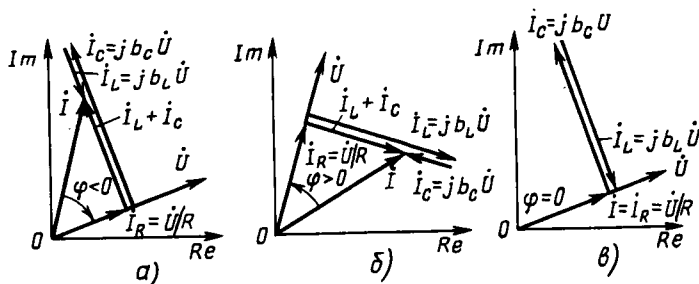


Рис. 2.23. Векторные диаграммы токов и напряжения параллельной RLC -цепи при $b_C > |b_L|$ (а), $b_C < |b_L|$ (б) и $b_C = |b_L|$ (в)

по заданному напряжению определить ток через внешние зажимы цепи и, наоборот, по заданному току вычислить приложенное к цепи напряжение. Векторные диаграммы для токов и напряжения параллельной RLC -цепи приведены на рис. 2.23.

Уравнения (2.98), описывающие процессы в параллельной RLC -цепи, подобны по структуре уравнениям электрического равновесия ранее рассмотренной последовательной RLC -цепи (2.94) и могут быть получены одно из другого путем замены тока на напряжение, проводимости на сопротивление; емкости на индуктивность. Следовательно, параллельная и последовательная RLC -цепи являются дуальными. Векторные диаграммы дуальных цепей также могут быть получены один из других путем упомянутых замен.

ДЕЛИТЕЛИ НАПЯЖЕНИЯ И ТОКА

Найдем напряжения на элементах цепи, представляющей собой последовательное соединение двух идеализированных двухполюсных элементов с комплексными сопротивлениями Z_1 и Z_2 (рис. 2.24, а). Цепи такого типа называют делителями напряжения, а элементы Z_1 и Z_2 — плечами делителя.

Решая основную систему уравнений электрического равновесия данной цепи

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2; \dot{I} = \dot{I}_1 = \dot{I}_2; \\ \dot{U}_1 &= Z_1 \dot{I}_1; \dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2\end{aligned}$$

относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, получаем

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U}, \quad \dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}. \quad (2.102)$$

Таким образом, напряжение на любом плече делителя напряжения равно напряжению на входе делителя, умноженному на некоторый коэффициент (комплексный коэффициент передачи делителя напряжения или коэффициент деления), равный отношению комплексного сопротивления данного плеча делителя к сумме сопротивлений обоих плеч, т. е. напряжение, приложенное к входу делителя, распределяется между его плечами пропорционально комплексным сопротивлениям плеч: $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = Z_1/Z_2$.

Если сопротивления обоих плеч делителя $Z_1 = z_1 e^{j\varphi_1}$ и $Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2}$ отличаются только по модулю ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$), то напряжения обоих плеч совпадают по фазе с напряжением на входе

$$\dot{U}_1 = \frac{z_1}{z_1 + z_2} \dot{U}, \quad \dot{U}_2 = \frac{z_2}{z_1 + z_2} \dot{U},$$

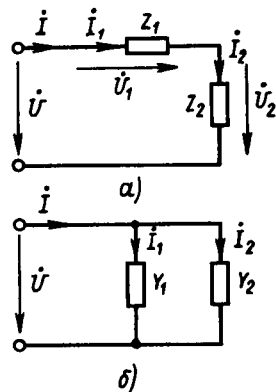


Рис. 2.24. Схемы делителей напряжения (а) и тока (б)

причем действующее значение напряжения на входе делителя будет равно алгебраической сумме напряжений его плеч. В частном случае, при $Z_1 = Z_2$, входное напряжение распределяется поровну между плечами делителя.

В случае, когда комплексные сопротивления плеч делителя имеют различные аргументы ($\varphi_1 \neq \varphi_2$), действующие значения напряжений плеч U_1 и U_2 прямо пропорциональны полным сопротивлениям плеч z_1 и z_2 , причем начальные фазы напряжений $u \div \dot{U}$, $u_1 \div \dot{U}_1$ и $u_2 \div \dot{U}_2$ имеют различные значения, а комплексное действующее значение напряжения на входе делителя $\dot{U}$ определяется геометрической суммой $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ (см., например, рис. 2.18, δ и 2.19, δ).

Делитель тока (рис. 2.24, б) является цепью дуальной по отношению к делителю напряжения, причем токи плеч делителя прямо пропорциональны их комплексным проводимостям

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} I, \quad I_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I. \quad (2.103)$$

Отметим, что выражения (2.103) могут быть получены как из основной системы уравнений рассматриваемой цепи, так и непосредственно из выражений (2.102) путем замены комплексных сопротивлений плеч комплексными проводимостями, а комплексных напряжений — комплексными токами, причем свойства делителей тока (с учетом оговоренных замен) будут совпадать со свойствами делителей напряжения.

Заменяя в выражениях (2.103) комплексные проводимости плеч соответствующими комплексными сопротивлениями $Z_1 = Y_1^{-1}$, $Z_2 = Y_2^{-1}$, получаем часто используемые на практике выражения:

$$I_1 = \frac{Z_1^{-1}}{Z_1^{-1} + Z_2^{-1}} I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I; \\ I_2 = \frac{Z_2^{-1}}{Z_1^{-1} + Z_2^{-1}} I = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I. \quad (2.104)$$

Таким образом, ток любого плеча делителя тока равен входному току, умноженному на некоторый коэффициент (комплексный коэффициент передачи делителя тока, коэффициент деления), равный отношению комплексного сопротивления другого плеча делителя к сумме комплексных сопротивлений обоих плеч.

Пример 2.5. Найдем напряжение на выходе делителя напряжения (рис. 2.25, а) при $C_1 = 10$ пФ, $C_2 = 30$ пФ, $u_{\text{вх}} = \sqrt{2} \cdot 50 \cos(10^6 t - 30^\circ)$ В.

В соответствии с (2.102) комплексные действующие значения напряжений плеч делителя определяются следующими выражениями:

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \dot{U} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \dot{U},$$

$$\dot{U}_2 = \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \dot{U} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \dot{U}.$$

Для заданных числовых значений C_1 , C_2 и $u_{\text{вх}} = \dot{U}$

$$\dot{U}_{\text{вх}} = \dot{U}_2 = \frac{10 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 10^{-12} + 30 \cdot 10^{-12}} 50 e^{-j30^\circ} = 12,5 e^{-j30^\circ} \text{ В};$$

$$u_{\text{вх}} = \sqrt{2} \cdot 12,5 \cos(10^6 t - 30^\circ) \text{ В}.$$

Интересно отметить, что в емкостном делителе напряжения (рис. 2.25, а) напряжения его плеч обратно пропорциональны их емкостям (прямо пропорциональны комплексным сопротивлениям плеч). В емкостном делителе тока (рис. 2.25, б) токи плеч будут прямо пропорциональны их комплексным проводимостям (2.103) и, следовательно, прямо пропорциональны емкостям плеч.

Пример 2.6. Определим напряжение на выходе делителя напряжения (рис. 2.26) для трех различных значений угловой частоты ω_1 , ω_2 и ω_3 (числовые значения частоты, параметров элементов цепи и входного напряжения взять из примера 2.4).

Комплексное напряжение на выходе делителя напряжения на любой частоте согласно (2.102)

$$\dot{U}_{\text{вх}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}_{\text{вх}} = R \dot{I}_{\text{вх}},$$

где $Z_1 = j[\omega L - 1/(\omega C)]$, $Z_2 = R$, $I_{\text{вх}} = i_{\text{вх}}$.

Используя полученные в примере 2.4 значения тока делителя $I_{\text{вх}}$, определяем искомые значения комплексного напряжения на выходе:

$$\dot{U}_{\text{вх}}|_{\omega=\omega_1} = R \dot{I}_{\text{вх}}|_{\omega=\omega_1} = 1,64 e^{j80,5^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{\text{вх}}|_{\omega=\omega_2} = R \dot{I}_{\text{вх}}|_{\omega=\omega_2} = 2,48 e^{-j75,6^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{\text{вх}}|_{\omega=\omega_3} = R \dot{I}_{\text{вх}}|_{\omega=\omega_3} = 10 \text{ В}.$$

Таким образом, на частоте $\omega = \omega_1$, когда комплексное сопротивление первого плеча делителя имеет емкостный характер ($x_L < |x_C|$), напряжение на его выходе опережает по фазе напряжение на входе (ток $i_{\text{вх}}$ опережает по фазе напряжение на входе $u_{\text{вх}}$, а напряжение на выходе $u_{\text{вх}}$ совпадает по фазе с током $i_{\text{вх}}$). На частоте

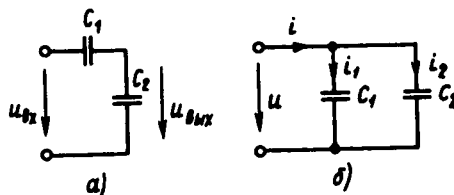


Рис. 2.25. К примеру 2.5

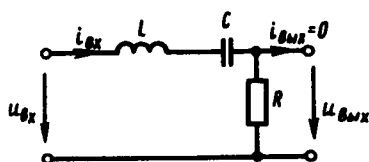


Рис. 2.26. К примеру 2.6

$\omega = \omega_2$, когда комплексное сопротивление первого плеча делителя имеет индуктивный характер ($x_L > |x_C|$), напряжение на выходе отстает по фазе от напряжения на входе (ток отстает по фазе от входного напряжения, а напряжение на выходе совпадает по фазе с током). На частоте $\omega = \omega_2$ комплексное сопротивление первого плеча делителя равно нулю ($x_L = |x_C|$), и входное напряжение оказывается полностью приложенным к сопротивлению Z_2 , при этом напряжение на выходе совпадает с напряжением на входе как по фазе, так и по действующему значению.

§ 2.5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЯХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Рассмотрим произвольный линейный двухполосник, не содержащий источников энергии. Напряжение и ток на зажимах двухполосника изменяются по гармоническому закону: $u = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u)$, $i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i)$ (рис. 2.27, а). Найдем мгновенную мощность двухполосника:

$$p = ui = 2UI \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i), \quad (2.105)$$

где $\varphi = \psi_u - \psi_i$ — сдвиг фаз между напряжением и током.

Как следует из выражения (2.105), мгновенная мощность пассивного двухполосника содержит постоянную составляющую $UI \cos \varphi$, значение которой зависит от сдвига фаз между током и напряжением, и переменную составляющую $UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$, амплитуда которой UI не зависит от φ . Среднее значение мгновенной мощности двухполосника за период (активная мощность) численно

равна постоянной составляющей мгновенной мощности:

$$P_A = UI \cos \varphi. \quad (2.106)$$

Анализ выражения (2.105) показывает, что особенности энергетических процессов в рассматриваемом двухполоснике полностью определяются характером его входного сопротивления.

Когда входное сопротивление двухполосника имеет чисто резистивный характер

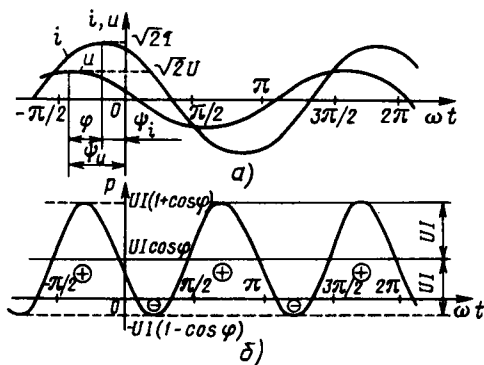


Рис. 2.27. Временные диаграммы напряжения и тока (а), а также мощности (б) произвольного пассивного двухполосника

($\varphi = 0$), постоянная составляющая мгновенной мощности численно равна амплитуде переменной составляющей; мгновенная мощность изменяется от $p_{\min} = 0$ до $p_{\max} = 2UI$, принимая только неотрицательные значения. Относительно внешних зажимов двухполюсник ведет себя подобно резистивному элементу (сопротивлению). В каждый момент времени он только потребляет электрическую энергию от источника, необратимо преобразуя ее в другие виды энергии; обмен энергией между двухполюсником и источником энергии отсутствует. Если внутри рассматриваемого двухполюсника имеются энергоемкие элементы (емкости и индуктивности), то они могут обмениваться энергией между собой, обмена же энергией между этими элементами и источником в установившемся режиме не происходит (более подробно см. гл. 3). Нетрудно убедиться, что при $\varphi = 0$ уравнение (2.105) вырождается в уравнение (2.64), поэтому временные диаграммы двухполюсника полностью совпадают с временными диаграммами для сопротивления (см. рис. 2.9).

Если входное сопротивление двухполюсника имеет чисто реактивный характер $|\varphi| = \pi/2$, то постоянная составляющая мгновенной мощности равна нулю ($P_A = 0$), мгновенная мощность изменяется по гармоническому закону с частотой, вдвое превышающей частоту внешнего воздействия. В данном случае двухполюсник ведет себя подобно емкости или индуктивности, в течение одной половины периода изменения мощности запасая энергию от источника, в течение другой половины периода полностью отдавая ее источнику. При $\varphi = +\pi/2$ уравнение (2.105) может быть преобразовано к виду (2.75), а временные диаграммы совпадут с временными диаграммами для индуктивности (см. рис. 2.15). Если $\varphi = -\pi/2$, то уравнение (2.105) совпадает с (2.68), а временные диаграммы цепи имеют такой же вид, как и временные диаграммы емкости (см. рис. 2.12).

Когда входное сопротивление двухполюсника имеет резистивно-емкостный или резистивно-индуктивный характер ($0 < |\varphi| < \pi/2$), постоянная составляющая мгновенной мощности меньше амплитуды переменной составляющей, а мгновенная мощность двухполюсника изменяется от $p_{\min} = -UI(1 - \cos \varphi)$ до $p_{\max} = UI(1 + \cos \varphi)$. В течение большей части периода мгновенная мощность положительна, в остальной части периода — отрицательна (рис. 2.27, б). В двухполюснике имеет место как процесс запасания энергии, так и процесс необратимого преобразования ее в другие виды энергии. Как видно из рис. 2.27 б, площадь, ограниченная участком кривой $p(t)$ с положительными ординатами (численно равная энергии, потребляемой двухполюсником от источника), больше площади, ограниченной участком кривой $p(t)$ с отрицательными ординатами (соответствующей энергии, возвращаемой цепью источнику). Характер энергетических процессов в цепи одинаков как при $0 < \varphi < \pi/2$,

так и при $-\pi/2 < \varphi < 0$ (временные диаграммы, приведенные на рис. 2.27, соответствуют $0 < \varphi < \pi/2$).

Ни при каких значениях φ энергия, отдаваемая пассивным двухполюсником во внешнюю по отношению к нему цепь, не может превышать энергию, потребляемую этим двухполюсником от внешней цепи.

АКТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ, ПОЛНАЯ И КОМПЛЕКСНАЯ МОЩНОСТИ

Активная мощность, которая была определена как среднее значение мгновенной мощности за период, характеризует среднюю за период скорость поступления энергии в двухполюсник и численно равна постоянной составляющей мгновенной мощности (2.106).

По знаку активной мощности можно судить о направлении передачи энергии: при $P_A > 0$ двухполюсник потребляет энергию, при $P_A < 0$ — отдает энергию остальной части цепи.

Очевидно, что для двухполюсников, не содержащих источников энергии, активная мощность не может быть отрицательной.

Полной мощностью P_S называется величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения на зажимах цепи:

$$P_S = UI. \quad (2.107)$$

Полная мощность численно равна амплитуде переменной составляющей мгновенной мощности. Активная мощность двухполюсника может быть выражена через полную мощность:

$$P_A = P_S \cos \varphi. \quad (2.108)$$

Из выражения (2.108) следует, что полная мощность есть максимально возможное значение активной мощности цепи, которое имеет место при $\varphi = 0$.

Комплексное число $\underline{P}_S$, модуль которого равен полной мощности цепи P_S , а аргумент — углу сдвига фаз между током и напряжением φ , называется **комплексной мощностью** цепи:

$$\underline{P}_S = P_S e^{j\varphi}. \quad (2.109)$$

Переходя от показательной формы записи $\underline{P}_S$ к тригонометрической

$$\underline{P}_S = P_S \cos \varphi + jP_S \sin \varphi, \quad (2.110)$$

устанавливаем, что вещественная часть комплексной мощности равна активной мощности цепи:

$$\operatorname{Re}[\underline{P}_S] = P_S \cos \varphi = P_A. \quad (2.111)$$

Мнимая часть комплексной мощности представляет собой так называемую **реактивную мощность** цепи

$$\operatorname{Im}[\underline{P}_S] = P_S \sin \varphi = P_Q. \quad (2.112)$$

Реактивная мощность характеризует процессы обмена энергией между цепью и источником, она численно равна максимальной скорости запасания энергии в цепи [7].

В зависимости от знака угла φ реактивная мощность цепи может быть либо положительной, либо отрицательной. Таким образом, по знаку реактивной мощности можно судить о характере запасаемой энергии: при $P_Q > 0$ энергия запасается в магнитном поле цепи, при $P_Q < 0$ — в электрическом; при $P_Q = 0$ в цепи отсутствует обмен энергией с источником.

С учетом (2.111) и (2.112) выражение (2.110) можно записать следующим образом:

$$\underline{P}_S = P_A + jP_Q. \quad (2.113)$$

Следовательно, комплексная мощность представляет собой комплексное число, вещественная часть которого равна активной мощности цепи P_A , а мнимая — реактивной P_Q .

Комплексному числу $\underline{P}_S$ можно поставить в соответствие вектор $\underline{P}_S$, проекции которого на вещественную и мнимую оси равны P_A и P_Q (рис. 2.28, а). Прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной P_S , и катетами P_A и P_Q называется **треугольником мощностей**. Из рисунка видно, что полная, активная и реактивная мощности связаны между собой соотношением

$$P_S^2 = P_A^2 + P_Q^2. \quad (2.114)$$

В связи с тем что треугольник мощностей цепи подобен треугольнику сопротивлений этой же цепи (рис. 2.28, б), комплексная мощность $\underline{P}_S$ и ее компоненты P_S , P_A , P_Q могут быть выражены через комплексное сопротивление цепи Z и его компоненты z , r , x :

$$\begin{aligned} P_S &= UI = I^2 z; \quad P_Q = P_S \sin \varphi = UIx/z = I^2 x; \\ P_A &= P_S \cos \varphi = UIr/z = I^2 r; \quad \underline{P}_S = P_S e^{j\varphi} = I^2 z e^{j\varphi} = I^2 Z. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Найдем связь между комплексной мощностью и комплексными действующими значениями тока и напряжения на зажимах цепи. Подставляя в (2.109) выражения (2.107) и (2.48), получаем

$$\underline{P}_S = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = \dot{U} \dot{I}^*, \quad (2.116)$$

где $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$ — число, комплексно-сопряженное с током I (комплексно-сопряженный ток).

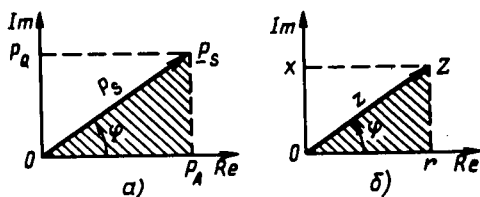


Рис. 2.28. Треугольники мощностей (а) и сопротивлений (б) произвольного пассивного двухполюсника

Таким образом, комплексная мощность цепи равна произведению комплексного напряжения цепи $\dot{U}$ на комплексно-сопряженный ток $\dot{I}$.

Активная, реактивная, полная и комплексная мощности имеют одинаковую размерность [Дж/с]. Однако, для того чтобы подчеркнуть различный физический смысл, который вкладывается в эти понятия, единицам измерения данных величин присвоены различные названия. Активная мощность, так же как и мгновенная, выражается в *ваттах* [Вт], полная и комплексная мощности — в *вольт-амперах* [В·А], реактивная мощность — в *вольт-амперах реактивных* [вар].

Пример 2.7. Напряжение и ток на зажимах произвольного двухполосника изменяются по гармоническому закону:

$$u = \sqrt{2} \cdot 120 \cos(314t + 20^\circ) \text{ В};$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,8 \cos(314t - 51^\circ) \text{ мА}.$$

Рассчитаем полную, активную, реактивную и комплексную мощности двухполосника.

Определим комплексный ток $\dot{I}$, комплексное напряжение $\dot{U}$ и сдвиг фаз φ между током и напряжением на зажимах двухполосника:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = 6,8 \cdot 10^{-3} e^{-j51^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = 120 e^{j20^\circ} \text{ В};$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 71^\circ.$$

Подставляя эти величины в (2.107), (2.108), (2.112) и (2.109), находим искомые мощности:

$$P_S = IU = 120 \cdot 6,8 \cdot 10^{-3} = 0,816 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$P_A = P_S \cos \varphi = 0,816 \cos 71^\circ = 0,266 \text{ Вт};$$

$$P_Q = P_S \sin \varphi = 0,816 \sin 71^\circ = 0,772 \text{ вар};$$

$$\underline{P}_S = P_S e^{j\varphi} = 0,816 e^{j71^\circ} \text{ В} \cdot \text{А}.$$

В связи с тем что входное сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер ($0 < \varphi < \pi/2$), реактивная мощность цепи положительна.

БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Рассмотрим произвольную электрическую цепь, содержащую N идеальных источников напряжения, M идеальных источников тока и H идеализированных пассивных элементов. Пусть i_k , u_k — ток и напряжение k -го элемента цепи. Из закона сохранения энергии следует, что сумма мгновенных мощностей всех элементов цепи в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{N+M+H} p_k = \sum_{k=1}^{N+M+H} u_k i_k = 0. \quad (2.117)$$

Группируя члены, соответствующие идеализированным активным ($p_{k \text{ ист.}}$) и идеализированным пассивным ($p_{k \text{ потр.}}$) элементам, уравнение (2.117) можно преобразовать к виду

$$-\sum_{k=1}^{N+M} p_{k \text{ ист.}} = \sum_{k=1}^H p_{k \text{ потр.}} \quad (2.118)$$

Уравнение (2.118) называют **уравнением (условием) баланса мгновенных мощностей**. Принимая во внимание, что мгновенная мощность любого элемента характеризует скорость потребления энергии этим элементом (потребляемая мощность), а мгновенная мощность, взятая со знаком минус, — скорость отдачи энергии этим элементом (отдаваемая мощность), условие баланса мгновенных мощностей может быть сформулировано следующим образом: *сумма мгновенных мощностей, отдаваемых всеми источниками, равна сумме мгновенных мощностей, потребляемых всеми приемниками энергии* (необходимо иметь в виду, что потребляется и отдается не мощность, а электрическая энергия).

Можно показать, что условие, аналогичное (2.118), выполняется и для комплексных мощностей всех элементов:

$$-\sum_{k=1}^{N+M} \underline{P}_{Sk \text{ ист.}} = \sum_{k=1}^H \underline{P}_{Sk \text{ потр.}} \quad (2.119)$$

Уравнение (2.119) называется **уравнением (условием) баланса комплексных мощностей**.

Таким образом, *сумма комплексных мощностей, отдаваемых всеми идеализированными активными элементами, равна сумме комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов*.

Для практических расчетов электрических цепей условие баланса мощностей удобно представить в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^N \dot{E}_k \dot{I}_k^* + \sum_{k=1}^M \dot{U}_k \dot{J}_k^* = \sum_{k=1}^H \dot{I}_k^2 Z_k. \quad (2.120)$$

Левая часть выражения (2.120) представляет собой алгебраическую сумму комплексных мощностей, отдаваемых всеми активными элементами. Слагаемое $\dot{E}_k \dot{I}_k^*$ есть произведение комплексного действующего значения ЭДС источника напряжения на комплексно-сопряженный ток этого источника; слагаемое $\dot{U}_k \dot{J}_k^*$ равно произведению комплексного напряжения на источнике тока на комплексно-сопряженный ток этого источника. Слагаемые, стоящие в левой части выражения (2.120), берут со знаком плюс, если направления токов и напряжений источников выбраны в соответствии с рис. 2.29. В противном случае эти слагаемые берут со знаком минус. Правая

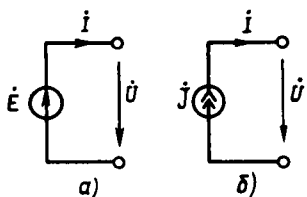


Рис. 2.29. К определению знака комплексной мощности, отдаваемой источниками напряжения (а) и тока (б)

часть уравнения (2.120) есть сумма комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов, причем каждое слагаемое вида $I_k^2 Z_k$ равно произведению квадрата действующего значения тока k -го идеализированного пассивного элемента на его комплексное сопротивление.

Из условия баланса комплексных мощностей следуют условия баланса активных и реактивных мощностей: активная мощность, отдаваемая всеми источниками, равна активной мощности всех потребителей:

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[\dot{E}_k \dot{I}_k^*] + \sum_{k=1}^M \operatorname{Re}[\dot{U}_k \dot{J}_k^*] = \sum_{k=1}^H I_k^2 r_k;$$

реактивная мощность всех источников равна реактивной мощности всех потребителей:

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Im}[\dot{E}_k \dot{I}_k^*] + \sum_{k=1}^M \operatorname{Im}[\dot{U}_k \dot{J}_k^*] = \sum_{k=1}^H I_k^2 x_k,$$

где r_k , x_k — вещественная и мнимая составляющие комплексного сопротивления k -го элемента.

Пример 2.8. Определим комплексный ток последовательной RL -цепи (см. рис. 2.18, а) с параметрами элементов $R=8$ кОм, $L=4$ мГн, к зажимам которой подключен источник ЭДС $e=\sqrt{2} \cdot 30 \cdot \cos(10^6 t + 45^\circ)$ В. Проверим выполнение условия баланса мощностей.

Находим комплексное входное сопротивление цепи:

$$Z = R + j\omega L = 8 \cdot 10^3 + j4 \cdot 10^3 = 8,94 e^{j26,6^\circ} \text{ кОм.}$$

Используя закон Ома в комплексной форме, определяем комплексный ток цепи:

$$\dot{I} = \dot{E}/Z = 30 e^{j45^\circ} / 8,94 \cdot 10^3 e^{j26,6^\circ} = 3,36 \cdot 10^{-3} e^{j18,4^\circ} \text{ А.}$$

Комплексная мощность, отдаваемая источником напряжения,

$$-P_{S \text{ шт}} = \dot{E} \dot{I}^* = 30 e^{j45^\circ} \cdot 3,36 \cdot 10^{-3} e^{-j18,4^\circ} = 0,1 e^{j26,6^\circ} \text{ В} \cdot \text{А}$$

равна комплексной мощности, потребляемой сопротивлением и индуктивностью:

$$P_{S \text{ потр}} = I^2 (R + j\omega L) = (3,36 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 8,94 \cdot 10^3 e^{j26,6^\circ} = 0,1 e^{j26,6^\circ} \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Таким образом, условие баланса комплексных мощностей выполняется.

КОЭФФИЦИЕНТ МОЩНОСТИ

При проектировании электроэнергетических систем важное народнохозяйственное значение имеет обеспечение передачи максимальной активной мощности в нагрузку при заданных действующих значениях токов и напряжений. Из выражения (2.106) следует, что повышение мощности P_A при неизменных действующих значениях токов и напряжений может быть достигнуто путем увеличения $\cos \varphi$, т. е. путем уменьшения сдвига фаз между током и напряжением. Максимально возможное значение P_A равно полной мощности P_S и достигается при $\cos \varphi = 1$. При уменьшении $\cos \varphi$ для получения заданной активной мощности в нагрузке требуется увеличивать действующие значения токов и напряжений, что ведет к росту потерь энергии в системе и требует увеличения мощности источников энергии.

Величина $\cos \varphi = P_A/P_S$, характеризующая степень приближения активной мощности нагрузки к максимальному значению, называется коэффициентом мощности.

Очевидно, что наивысшее значение коэффициент мощности ($\cos \varphi = 1$) имеет при чисто резистивном характере нагрузки. Если нагрузка имеет резистивно-емкостный или резистивно-индуктивный характер $Y_n = g_n + jb_n$, то параллельно ей подключают компенсирующий элемент, проводимость которого выбирают равной по абсолютному значению и противоположной по знаку мнимой составляющей проводимости нагрузки:

$$Y_c = jb_c = -jb_n. \quad (2.121)$$

Комплексное входное сопротивление Z участка цепи, представляющего собой параллельное соединение нагрузки и компенсирующего элемента, будет иметь чисто резистивный характер $Z = 1/(Y_n + Y_c) = \frac{1}{g_n}$, что обеспечит максимально возможное значение коэффициента мощности.

Комплексное сопротивление большинства реальных приемников энергии (электродвигателей, электронагревательных элементов, осветительных приборов) имеет резистивно-индуктивный характер: $b_n < 0$.

Для компенсации мнимой составляющей проводимости нагрузки параллельно ей должны подключаться компенсирующие конденсаторы, емкость которых рассчитывают в соответствии с условием (2.121):

$$C_c = -b_n/\omega. \quad (2.122)$$

Пример 2.9. В качестве нагрузки некоторого электротехнического устройства используется двухполюсник, рассмотренный в примере 2.7. Определим тип компенсирующего элемента и рассчитаем его основной параметр (емкость C_c или индуктивность L_c).

Комплексная проводимость нагрузки

$$Y_n = I/\dot{U} = 56,7 \cdot 10^{-6} e^{-j71^\circ} = (18,4 - j53,6) \cdot 10^{-6} \text{ См}$$

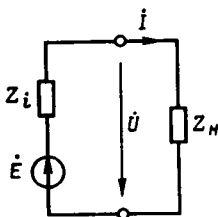
в данном случае имеет резистивно-индуктивный характер ($b_n < 0$), следовательно, в качестве компенсирующего элемента необходимо использовать конденсатор. Емкость компенсирующего конденсатора может быть рассчитана по формуле (2.122):

$$C_x = -b_n/\omega = 53,6 \cdot 10^{-6}/314 = 0,17 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

СОГЛАСОВАНИЕ ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ С НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника энергии и нагрузки. Пусть источник энергии представлен последовательной схемой замещения (рис. 2.30), причем его внутреннее сопротивление имеет комплексный характер: $Z_i = r_i + jx_i$.

Задача согласования источника энергии с нагрузкой заключается в выборе такого сопротивления нагрузки $Z_n = r_n + jx_n$, при котором в цепи будут выполняться некоторые условия, называемые критериями согласования. Рассмотрим согласование источника с нагрузкой по критерию наибольшей активной мощности, передаваемой в нагрузку, и по критерию наибольшего КПД.



Активная мощность нагрузки в соответствии с (2.115)

$$P_A = I^2 r_n = E^2 r_n / [(r_i + r_n)^2 + (x_i + x_n)^2]. \quad (2.123)$$

Рис. 2.30. Схема замещения источника энергии с нагрузкой

Как следует из (2.123), мощность P_A является функцией двух переменных r_n и x_n . В связи с тем что вещественная r_n и мнимая x_n составляющие сопротивления нагрузки не зависят одна от другой, выбор значения каждой из этих величин, соответствующего максимуму P_A , можно производить в отдельности.

Величина x_n входит только в знаменатель выражения (2.123). Очевидно, что максимальное значение активной мощности по этой переменной $P_{A\max}$ будет достигнуто, если

$$x_n = -x_i. \quad (2.124)$$

При этом $P_{A\max} = P_A|_{x_n = -x_i} = E^2 r_n / (r_i + r_n)^2$.

Для определения значения r_n , соответствующего максимально возможному значению (максимум максимум) активной мощности нагрузки $P_{A\max\max}$, продифференцируем $P_{A\max}$ по r_n и приравняем нулю полученное выражение

$$\frac{dP_{A\max}}{dr_n} = \frac{(r_i + r_n)^2 - 2r_n(r_i + r_n)}{(r_i + r_n)^4} E^2 = 0,$$

откуда

$$(r_i + r_n)^2 - 2r_n(r_n + r_i) = 0. \quad (2.125)$$

Решая уравнение (2.125), находим значение вещественной составляющей сопротивления нагрузки:

$$r_n = r_i, \quad (2.126)$$

при котором активная мощность P_A достигает максимально возможного значения (рис. 2.31, а):

$$P_{A \max \max} = P_{A \max} |_{r_n = r_i} = P_A \Big|_{\substack{r_n = r_i \\ x_n = -x_i}} = \frac{E^2}{4r_i}. \quad (2.127)$$

Объединяя условия (2.124) и (2.126), находим, что максимально возможное значение активной мощности нагрузки $P_{A \max \max}$ соответствует случаю

$$Z_n = r_n + jx_n = r_i - jx_i$$

или

$$Z_n = \bar{Z}_i, \quad (2.128)$$

где $\bar{Z}_i$ — величина, сопряженная с комплексным внутренним сопротивлением источника.

Таким образом, для согласования источника энергии с нагрузкой по критерию максимума активной мощности, передаваемой в нагрузку, сопротивление нагрузки должно быть величиной, комплексно-сопряженной с внутренним сопротивлением источника.

В частном случае, когда внутреннее сопротивление источника имеет чисто резистивный характер ($Z_i = r_i$), сопротивление нагрузки должно выбираться равным внутреннему сопротивлению источника: $Z_n = \bar{Z}_i = r_i$.

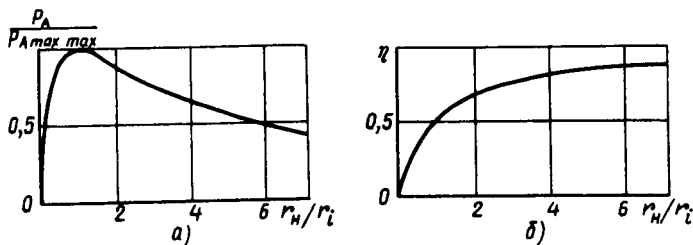


Рис. 2.31. Зависимости активной мощности нагрузки (а) и коэффициента полезного действия (б) от отношения r_n/r_i при $x_n = -x_i$

Коэффициент полезного действия цепи (см. рис. 2.30) равен отношению активной мощности, потребляемой нагрузкой P_A , к суммарной активной мощности, потребляемой в цепи:

$$\eta = r_n I^2 / (r_n I^2 + r_i I^2) = r_n / (r_n + r_i).$$

Зависимость КПД от резистивной составляющей сопротивления нагрузки показана на рис. 2.31, б. Из рисунка видно, что КПД цепи монотонно возрастает с ростом r_n/r_i , приближаясь к $\eta=1$ при $r_n/r_i \rightarrow \infty$.

Следовательно, для согласования источника с нагрузкой по критерию максимума КПД необходимо, чтобы резистивная составляющая сопротивления нагрузки была намного больше резистивной составляющей внутреннего сопротивления источника ($r_n \gg r_i$).

Рассмотренные критерии согласования источника энергии с нагрузкой являются несовместимыми, т. е. не могут выполняться одновременно. В частности, при согласовании источника с нагрузкой по критерию максимальной активной мощности, передаваемой в нагрузку, КПД цепи будет равен 0,5. Очевидно, что мощные электроэнергетические системы не могут работать с КПД, при котором половина выработанной энергии теряется на внутреннем сопротивлении источника, поэтому в электроэнергетике обычно стремятся к достижению максимально возможного значения КПД, выбирая $r_n \gg r_i$. Согласование по критерию максимальной активной мощности, передаваемой в нагрузку, широко используется в мало-мощных радиоэлектронных устройствах, когда независимо от потерь необходимо добиться выделения максимальной мощности сигнала в нагрузке.

Следует отметить, что приведенные рассуждения справедливы только для источников с конечным внутренним сопротивлением. Для источников с $R_i=0$ или $G_i=0$ $\eta=1$ при любом конечном значении резистивной составляющей сопротивления нагрузки, а выделяемая в нагрузку мощность неограниченно возрастает с уменьшением (при питании от источника напряжения) или увеличением (при питании от источника тока) сопротивления нагрузки $Z_n = R_n$.

Пример 2.10. Приемная антенна любого радиотехнического устройства на фиксированной частоте f может рассматриваться как линеаризованный источник энергии, последовательная схема замещения которого содержит источник напряжения $\dot{E}$ и внутреннее сопротивление Z_i . Согласование антенны с нагрузкой, как правило, выполняется по критерию наибольшей активной мощности, передаваемой в нагрузку, так как в данном случае независимо от потерь энергии на внутреннем сопротивлении антенны необходимо добиться максимальной мощности сигнала, поступающего в приемник. Для обеспечения этого условия комплексное сопротивление нагрузки антенны (входное сопротивление соответствующего радиотехнического устройства) должно представлять собой величину, комплексно-сопряженную с внутренним сопротивлением антенны: $Z_n = \dot{Z}_i$. Отметим, что принятый критерий согласования источника с нагрузкой выполняется при этом только на одной частоте f ,

на которой выполняется условие (2.128). Согласование любого источника энергии с нагрузкой (в том числе согласование антенны со входом радиоприемного устройства) в широком диапазоне частот представляет собой достаточно сложную задачу и требует, чтобы условие (2.128) выполнялось во всем рассматриваемом диапазоне частот.

§ 2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ПОНЯТИЕ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Анализ процессов в электрических цепях во многих случаях может быть существенно упрощен за счет использования различных преобразований, в результате которых отдельные участки идеализированных цепей заменяются другими участками, более удобными для анализа.

Два участка идеализированной электрической цепи называются **эквивалентными**, если при замене одного из этих участков другим токи и напряжения остальной части цепи не изменяются. Преобразования электрических цепей, в результате которых некоторые участки электрической цепи заменяются эквивалентными им участками, называются эквивалентными. Из определения эквивалентных участков следует, что они должны иметь одинаковое число внешних выводов, причем в процессе эквивалентных преобразований токи этих выводов и напряжения между ними должны оставаться неизменными.

Эквивалентные участки электрических цепей обладают свойствами *симметричности* (если цепь А эквивалентна цепи Б, то цепь Б эквивалентна цепи А), *рефлексивности* (цепь А является эквивалентной самой себе) и *транзитивности* (если цепь А эквивалентна цепи Б, а цепь Б эквивалентна цепи В, то цепи А и В являются эквивалентными). Если эквивалентность двух участков электрической цепи выполняется при любых значениях внешних воздействий, то такие участки являются **полностью эквивалентными**. Различия между ними не могут быть установлены с помощью каких-либо измерений, проводимых на внешних выводах. Если эквивалентность двух участков соблюдается только при определенном значении внешних воздействий, то такие участки являются **частично эквивалентными** (эквивалентными при заданных условиях). Так, два участка линейной электрической цепи, находящейся под гармоническим воздействием, могут быть либо полностью, либо частично эквивалентными при заданной частоте внешнего воздействия.

Эквивалентные преобразования электрических цепей основаны на эквивалентных (равносильных) преобразованиях соответствующих систем уравнений электрического равновесия.

Каждое равносильное преобразование системы уравнений электрического равновесия исходной цепи (приведение подобных членов,

исключение неизвестных, замена переменных и т. д.) приводит к эквивалентному преобразованию моделирующей цепи.

Соответственно изменяется и условное графическое изображение моделирующей цепи — схема цепи. На практике преобразования электрических цепей проводят без составления систем уравнений электрического равновесия, путем непосредственного преобразования схем по определенным правилам. Систему уравнений электрического равновесия цепи записывают для уже преобразованной цепи, схема которой имеет достаточно простой вид.

УЧАСТКИ ЦЕПЕЙ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрим неразветвленную электрическую цепь (рис. 2.32, а), содержащую N сопротивлений, M емкостей, K индуктивностей и ν неуправляемых источников напряжения (*обобщенная одноконтурная цепь*). Так как через все элементы цепи протекает один и тот же ток i , то уравнение электрического равновесия, составленное на основе второго закона Кирхгофа и компонентных уравнений, может быть записано в следующем виде:

$$R_1 i + \dots + R_N i + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt + \dots + \frac{1}{C_M} \int_{-\infty}^t i dt + \\ + L_1 \frac{di}{dt} + \dots + L_K \frac{di}{dt} = u - [e_1 + \dots + e_\nu]. \quad (2.129)$$

После приведения подобных членов (2.129) принимает вид

$$R_{\text{эк}} i + \frac{1}{C_{\text{эк}}} \int_{-\infty}^t i dt + L_{\text{эк}} \frac{di}{dt} = u - e_{\text{эк}}, \quad (2.130)$$

где $R_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^N R_i$; $1/C_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^M 1/C_i$; $L_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^K L_i$; $e_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^{\nu} e_i$.

Уравнению (2.130) соответствует преобразованная цепь, схема которой изображена на рис. 2.32, б. Таким образом, ток и напряжение на зажимах обобщенной одноконтурной цепи не изменятся, если каждую из групп последовательно включенных однотипных элементов заменить одним эквивалентным элементом, параметр которого $R_{\text{эк}}$, $C_{\text{эк}}$, $L_{\text{эк}}$ и $e_{\text{эк}}$ рассчитывается в соответствии с (2.130).

Из выражения (2.130) следует, что при последовательном включении сопротивлений, индуктивностей и источников напряжения параметры эквивалентного элемента $R_{\text{эк}}$, $L_{\text{эк}}$ и $e_{\text{эк}}$ равны сумме параметров последовательно включенных элементов соответствующего типа.

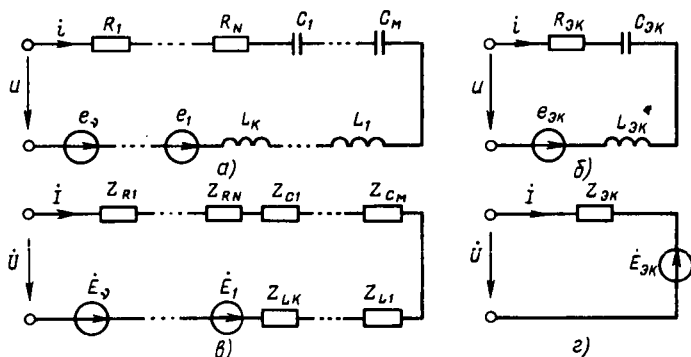


Рис. 2.32. Преобразование участка цепи с последовательным соединением элементов

При этом суммирование ЭДС источников напряжения производится алгебраически с учетом их знаков, которые определяются тем, совпадает или не совпадает направление ЭДС с направлением обхода контура. Очевидно, что значения $R_{эк}$ и $L_{эк}$ будут превышать сопротивление и индуктивность любого из последовательно включенных элементов. При последовательном соединении N одинаковых сопротивлений R или индуктивностей L параметр эквивалентного элемента $R_{эк}$ или $L_{эк}$ будет в N раз больше, чем параметр каждого из последовательно включенных элементов.

При последовательном включении емкостей значение величины, обратной $C_{эк}$, определяется как сумма величин, обратных каждой из последовательно включенных емкостей C_i . Очевидно, что эквивалентная емкость $C_{эк}$ будет меньше любой из последовательно включенных емкостей. При последовательном включении N одинаковых емкостей эквивалентная емкость $C_{эк}$ в N раз меньше каждой из последовательно включенных емкостей.

Если обобщенная одноконтурная цепь находится под гармоническим воздействием, то от эквивалентной схемы для мгновенных значений (рис. 2.32, а) удобнее перейти к эквивалентной схеме для комплексных действующих значений (рис. 2.32, в). Уравнение электрического равновесия такой цепи, составленное на основании закона Ома и второго закона Кирхгофа в комплексной форме, имеет следующий вид:

$$Z_{R1}I + \dots + Z_{RN}I + Z_{C1}I + \dots + Z_{CM}I + Z_{L1}I + \dots + Z_{LK}I = \dot{U} - [\dot{E}_1 + \dots + \dot{E}_v].$$

После преобразований получаем

$$Z_{эк}I = \dot{U} - \dot{E}_{эк}, \quad (2.131)$$

$$\text{где } Z_{эк} = \sum_{i=1}^N Z_{Ri} + \sum_{i=1}^M Z_{Ci} + \sum_{i=1}^K Z_{Li}; \quad \dot{E}_{эк} = \sum_{i=1}^v \dot{E}_i.$$

Комплексная схема замещения цепи, соответствующая уравнению (2.131), приведена на рис. 2.32, г.

Таким образом, любой участок электрической цепи, представляющий собой последовательное соединение произвольного числа идеализированных неуправляемых источников напряжения и пассивных двухполюсников, при гармоническом воздействии может быть заменен ветвью, содержащей один источник напряжения, ЭДС которого равна алгебраической сумме ЭДС всех последовательно включенных источников, и один пассивный двухполюсник, комплексное сопротивление которого равно сумме комплексных сопротивлений всех последовательно включенных пассивных двухполюсников.

УЧАСТКИ ЦЕПЕЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть электрическая цепь (рис. 2.33, а) состоит из параллельно соединенных N сопротивлений, M емкостей, K индуктивностей и v неуправляемых источников тока (*обобщенная двухузловая цепь*). Все элементы цепи находятся под одним и тем же напряжением u , поэтому уравнение электрического равновесия, составленное на основании первого закона Кирхгофа, может быть записано в виде

$$i = \frac{1}{R_1} u + \dots + \frac{1}{R_N} u + C_1 \frac{du}{dt} + \dots + C_M \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u dt + \dots + \frac{1}{L_K} \int_{-\infty}^t u dt - [j_1 + \dots + j_v]. \quad (2.132)$$

После приведения подобных членов получаем

$$i = \frac{1}{R_{\text{эк}}} u + C_{\text{эк}} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_{\text{эк}}} \int_{-\infty}^t u dt - j_{\text{эк}}, \quad (2.133)$$

где $\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$; $C_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^M C_i$; $\frac{1}{L_{\text{эк}}} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{L_i}$; $j_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^v j_i$.

Уравнению (2.133) соответствует преобразованная цепь, схема которой приведена на рис. 2.33, б. Очевидно, что ток и напряжение на зажимах обобщенной двухузловой цепи не изменятся, если каждую из групп параллельно включенных однотипных элементов заменить одним эквивалентным элементом, параметры которого $R_{\text{эк}}$, $C_{\text{эк}}$, $L_{\text{эк}}$ и $j_{\text{эк}}$ рассчитываются в соответствии с (2.133).

Из выражения (2.133) следует, что при параллельном включении емкостей и источников тока параметры эквивалентного элемента $C_{\text{эк}}$, $j_{\text{эк}}$ равны сумме параметров параллельно включенных элементов соответствующего типа. При этом суммирование токов источников тока производится алгебраически с учетом их знаков, опреде-

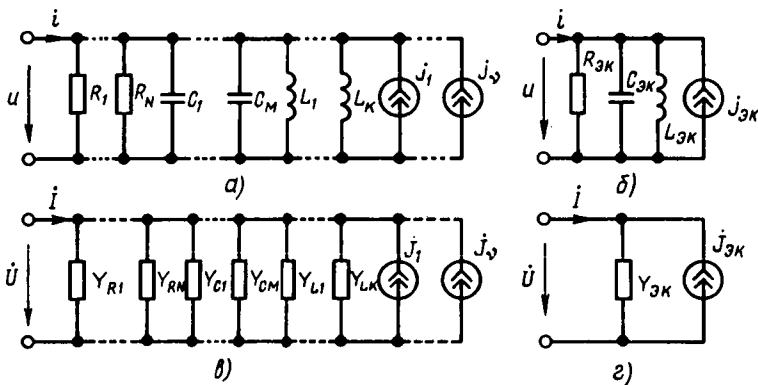


Рис. 2.33. Преобразование участка цепи с параллельным соединением элементов

ляемых ориентацией источников относительно узла, для которого составляется уравнение (2.133). Очевидно, что $C_{эк}$ превышает по значению любую из параллельно включенных емкостей $C_1, \dots, C_M$. При параллельном соединении N одинаковых емкостей $C_{эк} = NC$.

При параллельном включении сопротивлений или индуктивностей значения величин, обратных $R_{эк}$ и $L_{эк}$, определяются как сумма значений всех величин, обратных параллельно включенным сопротивлениям R_i или индуктивностям L_i .

Очевидно, что значения $R_{эк}$ и $L_{эк}$ будут меньше, чем сопротивление или индуктивность любого из параллельно включенных элементов соответствующего типа. При параллельном включении N одинаковых сопротивлений R или индуктивностей L $R_{эк} = R/N$, а $L_{эк} = L/N$.

Для рассмотрения параметров обобщенной двухузловой цепи при гармоническом воздействии воспользуемся комплексной схемой замещения этой цепи (рис. 2.33, в). Уравнение электрического равновесия цепи в комплексной форме может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} I = Y_{R1}\dot{U} + \dots + Y_{RN}\dot{U} + Y_{C1}\dot{U} + \dots + Y_{CM}\dot{U} + Y_{L1}\dot{U} + \dots \\ \dots + Y_{LK}\dot{U} - [J_1 + \dots + J_v] \text{ или } I = Y_{эк}\dot{U} - J_{эк}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

где $Y_{эк} = \sum_{i=1}^N Y_{Ri} + \sum_{i=1}^M Y_{Ci} + \sum_{i=1}^K Y_{Li}$; $J_{эк} = \sum_{i=1}^v J_i$.

Комплексная схема замещения цепи, соответствующая уравнению (2.134), изображена на рис. 2.33, г.

Таким образом, любой участок электрической цепи, представляющий собой параллельное соединение произвольного числа идеализированных пассивных двухполюсников, может быть заменен одним пассивным двухполюсником, комплексная проводимость которого равна сумме комплексных проводимостей всех параллельно включенных двухполюсников. Произвольное число параллельно включенных идеализированных источников тока может быть заменено одним источником, комплексное действующее значение тока которого равно алгебраической сумме комплексных действующих значений токов всех параллельно включенных источников.

Переходя в (2.134) от комплексных проводимостей к комплексным сопротивлениям, находим эквивалентное комплексное входное сопротивление $Z_{\text{вх}}$ группы параллельно включенных идеализированных пассивных двухполюсников:

$$\frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_{Ri}} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{Z_{Ci}} + \sum_{i=1}^K \frac{1}{Z_{Li}}. \quad (2.135)$$

Выражения, подобные (2.134) и (2.135), можно получить для комплексной проводимости и комплексного сопротивления любого участка цепи, являющегося параллельным соединением произвольного числа идеализированных пассивных двухполюсников с заданным комплексным входным сопротивлением Z_i или комплексной входной проводимостью Y_i :

$$Y_{\text{вх}} = \sum_{i=1}^N Y_i; \quad \frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i}, \quad (2.136)$$

где N — число параллельно включенных двухполюсников.

Используя (2.136), получим выражение для комплексного входного сопротивления участка цепи, представляющего собой параллельное соединение двух элементов с комплексными сопротивлениями Z_1 и Z_2 :

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2). \quad (2.137)$$

УЧАСТКИ ЦЕПЕЙ СО СМЕШАННЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Правила преобразования участков цепей с параллельным или последовательным соединением элементов могут быть применены и для преобразования пассивных участков цепей со смешанным соединением элементов. Преобразование таких участков, представляющих собой сочетание групп параллельно или последовательно включенных элементов, обычно производят в несколько этапов, на каждом из которых группу параллельно включенных элементов заменяют одним двухполюсником, комплексная проводимость которого равна сумме комплексных проводимостей параллельно включенных элементов, а группу последовательно включенных элементов — одним двухполюсником, комплексное сопротивление которого равно сумме комплексных сопротивлений всех последовательно включенных элементов.

Пример 2.11. Рассмотрим преобразование участка идеализированной цепи со смешанным соединением элементов (рис. 2.34, а), содержащего группу параллельно включенных элементов Z_3 , Z_4 и группу последовательно включенных элементов Z_1 , Z_2 .

Заменяя параллельно включенные элементы Z_3 и Z_4 одним элементом с комплексным сопротивлением $Z_{\text{эк1}} = Z_3 Z_4 / (Z_3 + Z_4)$, получим преобразованную схему цепи (рис. 2.34, б) с тремя последовательно включенными элементами Z_1 , Z_2 и $Z_{\text{эк1}}$. Вводя вместо этих элементов один с комплексным сопротивлением $Z_{\text{эк2}} = Z_1 + Z_2 + Z_{\text{эк1}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 Z_4 / (Z_3 + Z_4)$, приходим к простейшей преобразованной схеме рассматриваемого участка цепи с одним элементом $Z_{\text{эк2}}$ (рис. 2.34, в).

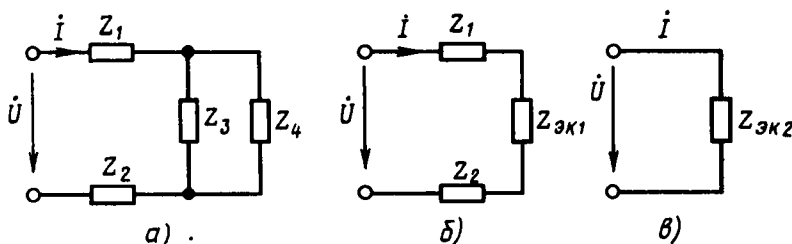


Рис. 2.34. К примеру 2.11

Пример 2.12. Определим эквивалентную индуктивность цепи при $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 300$ мкГн (рис. 2.35).

Участок цепи с тремя параллельно включенными одинаковыми индуктивностями $L_2 = L_3 = L_4$ обладает эквивалентной индуктивностью, в три раза меньшей, чем каждая из параллельно включенных индуктивностей: $L_{\text{эк1}} = 100$ мкГн. Этот участок включен последовательно с индуктивностью L_1 , поэтому искомая эквивалентная индуктивность $L_{\text{эк2}} = L_1 + L_{\text{эк1}} = 400$ мкГн.

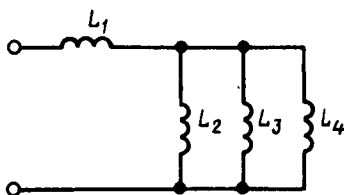


Рис. 2.35. К примеру 2.12

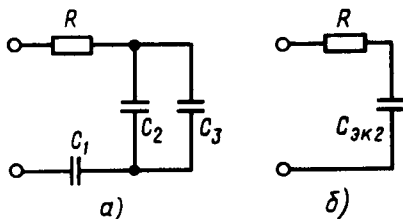


Рис. 2.36. К примеру 2.13

Пример 2.13. Найдем комплексное входное сопротивление участка цепи с параметрами элементов $R = 1,5$ кОм, $C_1 = 40$ пФ, $C_2 = 10$ пФ, $C_3 = 50$ пФ на частоте $f = 1,2$ МГц (рис. 2.36, а).

Параллельно включенные емкости C_2 и C_3 могут быть заменены одной эквивалентной емкостью $C_{\text{эк1}} = C_2 + C_3 = 60$ пФ.

Емкости C_1 и $C_{\text{эк1}}$, включенные последовательно, заменим одной емкостью $C_{\text{эк2}} = C_1 C_{\text{эк1}} / (C_1 + C_{\text{эк1}}) = 24$ пФ. Получаем преобразованную цепь (рис. 2.36, б), комплексное входное сопротивление которой на частоте $f = 1,2$ МГц

$$Z = R - j / (2\pi f C_{\text{эк2}}) = 1,5 - j 5,53 \text{ кОм.}$$

Таким образом, в результате объединения групп последовательно и параллельно включенных элементов происходит постепенное «сворачивание» цепи, причем участок со смешанным соединением пассивных элементов, имеющий два внешних вывода (пассивный двухполюсник), в конечном счете может быть заменен одним элементом, комплексное сопротивление которого равно входному сопротивлению данного участка цепи.

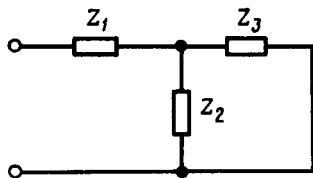


Рис. 2.37. Схема простейшей лестничной цепи

К цепям со смешанным соединением элементов относятся цепные, или лестничные, цепи, входное сопротивление или входная проводимость которых могут быть представлены в виде цепной (непрерывной) дроби, т. е. с помощью выражения типа

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + 1/(a_3 + \dots 1/a_N)}. \quad (2.138)$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_N$ называются элементами цепной дроби. Число элементов дроби N может быть конечным (конечная цепная дробь) или бесконечным (бесконечная цепная дробь).

Для удобства изображения условимся записывать цепную дробь (2.138) в виде

$$[a_1; a_2; a_3; \dots; a_N]. \quad (2.139)$$

Рассмотрим простейшую лестничную цепь (рис. 2.37). Нетрудно установить, что входное сопротивление этой цепи

$$Z = Z_1 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 + Z_3} = Z_1 + \frac{1}{1/Z_2 + 1/Z_3}.$$

Заменяя в этом выражении сопротивление элемента Z_2 его проводимостью $Y_2 = 1/Z_2$, окончательно получаем

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + 1/Z_3}$$

или в форме (2.139)

$$Z = [Z_1; Y_2; Z_3].$$

Таким образом, входное сопротивление рассматриваемой цепи может быть представлено в виде конечной цепной дроби, элементы которой a_1, a_2, a_3 равны соответственно Z_1, Y_2, Z_3 . Используя аналогичные преобразования, можно представить в виде цепной дроби и входное сопротивление лестничной цепи более общего вида (рис. 2.38, а):

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \dots + \frac{1}{Y_{N-1} + 1/Z_N}}} = [Z_1; Y_2; Z_3; \dots; Y_{N-1}; Z_N]. \quad (2.140)$$

Как следует из (2.140), число элементов цепной дроби равно числу идеализированных двухполюсных элементов, образующих лестничную цепь, причем элементами дроби являются комплексные сопротивления двухполюсников, образующих продольные ветви лестничной цепи ($Z_1, Z_3, \dots, Z_N$) и комплексные проводимости двухполюсников, входящих в поперечные ветви ($Y_2, Y_4, \dots, Y_{N-1}$).

Если лестничная цепь содержит поперечную ветвь, подключенную непосредственно к внешним зажимам цепи (рис. 2.38, б), то в виде цепной дроби может быть представлена входная проводимость:

$$Y = [Y_1; Z_2; Y_3; \dots; Y_{N-1}; Z_N]. \quad (2.141)$$

Таким образом, для того чтобы выражения для входных сопротивлений или входных проводимостей лестничных цепей могли быть записаны в виде цепных дробей типов (2.140), (2.141), необходимо элементы, образующие продольные ветви, представить их комплексными сопротивлениями, а элементы, входящие в поперечные ветви, — их комплексными проводимостями.

Для определения тока или напряжения произвольной ветви лестничной цепи (рис. 2.38) по заданному значению напряжения $\dot{U}$ или тока $\dot{I}$ на входе этой цепи можно воспользоваться простым приемом, известным из литературы как метод пропорциональных величин (метод пропорционального пересчета, метод единичного тока, метод подобия). В соответствии с этим методом ток N -й ветви (наиболее удаленной от входных зажимов) обозначим, например, $\dot{I}_N$. Выразим через $\dot{I}_N$ напряжение N -й ветви $\dot{U}_N = Z_N \dot{I}_N$, напряжение и ток $N-1$ ветви $\dot{U}_{N-1} = \dot{U}_N = Z_N \dot{I}_N$, $\dot{I}_{N-1} = Y_{N-1} \dot{U}_{N-1} = Y_{N-1} Z_N \dot{I}_N$, ток и напряжение $N-2$ ветви $\dot{I}_{N-2} = \dot{I}_{N-1} + \dot{I}_N = (1 + Y_{N-1} Z_N) \dot{I}_N$, $\dot{U}_{N-2} = Z_{N-2} \dot{I}_{N-2} = Z_{N-2} (1 + Y_{N-1} Z_N) \dot{I}_N$.

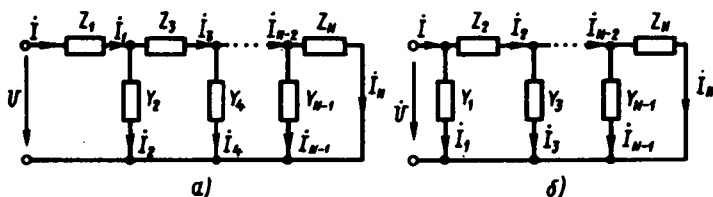


Рис. 2.38. Схема лестничных цепей общего вида

и т. д. вплоть до напряжения и тока первой ветви. Так как рассматриваемая цепь является линейной, то напряжения и токи всех ветвей окажутся прямо пропорциональными $\dot{I}_N$. В том случае, когда заданным является напряжение на $\dot{U}$ входе цепи, ток $\dot{I}_N$ определим, приравняв напряжение $\dot{U}$ сумме напряжений первой и второй ветвей (рис. 2.38, а) или напряжению первой ветви (рис. 2.38, б). Если задано комплексное действующее значение тока на входе двухполюсника $\dot{I}$, ток $\dot{I}_N$ находим, приравняв ток $\dot{I}$ току первой ветви (рис. 2.38, а) или сумме токов первой и второй ветвей (рис. 2.38, б). Подставляя полученное значение $\dot{I}_N$ в выражение для тока или напряжения интересующей ветви, выражаем искомую величину через напряжение или ток на входе цепи.

Пример 2.14. Найдем ток i через входные зажимы цепи, схема которой приведена на рис. 2.39. Параметры элементов:

$$e = \sqrt{2} \cdot 50 \cos 10^6 t \text{ В}; C_1 = C_2 = 500 \text{ пФ}; L_1 = L_2 = L_3 = 4 \text{ мГн}.$$

Задача может быть решена двумя способами.

1. Определим комплексную входную проводимость цепи с помощью (2.141):

$$\begin{aligned} Y &= \left[\frac{1}{j\omega L_1}; \frac{1}{j\omega C_1}; \frac{1}{j\omega L_2}; \frac{1}{j\omega C_2}; \frac{1}{j\omega L_3} \right] = \\ &= \left[-j0,25 \cdot 10^{-3}; -j2 \cdot 10^3; -j0,25 \cdot 10^{-3}; -j2 \cdot 10^3; -j0,25 \cdot 10^{-3} \right] = \\ &= j1,25 \cdot 10^{-3} \text{ См}. \end{aligned}$$

Комплексное действующее значение тока находим, используя закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = Y\dot{U} = Y\dot{E} = j1,25 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 62,5 e^{j90^\circ} \text{ мА},$$

откуда

$$i = \sqrt{2} \cdot 62,5 \cos(10^6 t + 90^\circ) \text{ мА}.$$

2. Обозначим комплексное действующее значение тока пятой ветви $\dot{I}_5 \doteq i_5$. Комплексное действующее значение напряжения этой ветви

$$\dot{U}_5 = j\omega L_3 \dot{I}_5 = j4 \cdot 10^3 \dot{I}_5.$$

Выражаем через $\dot{I}_5$ комплексные ток и напряжение:

четвертой ветви

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_5; \dot{U}_4 = \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_4 = -j2 \cdot 10^3 \dot{I}_5;$$

третьей ветви

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_4 + \dot{U}_5 = j2 \cdot 10^3 \dot{I}_5;$$

$$\dot{I}_3 = \frac{1}{j\omega L_2} \dot{U}_3 = 0,5 \dot{I}_5;$$

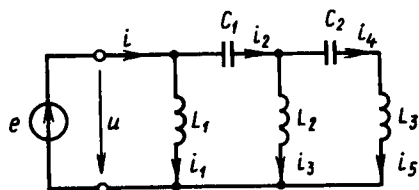


Рис. 2.39. К примеру 2.14

второй ветви

$$I_2 = I_3 + I_4 = 1,5I_5; \dot{U}_2 = \frac{1}{j\omega C_1} I_2 = -j3 \cdot 10^3 I_5;$$

первой ветви

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = -j \cdot 10^3 I_5; I_1 = \frac{1}{j\omega L_1} \dot{U}_1 = -0,25I_5$$

и комплексные напряжение и ток на входе цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_1 = -j \cdot 10^3 I_5; I = I_1 + I_2 = 1,25I_5.$$

Принимая во внимание, что комплексное действующее значение напряжения на входе цепи известно ($\dot{U} = \dot{E} = 50 \text{ В}$), определяем комплексное действующее значение тока пятой ветви:

$$I_5 = \dot{E}/(-j \cdot 10^3) = j50 \text{ мА}.$$

Подставляя значение I_5 в найденные ранее выражения, получаем комплексные ток и напряжение любой ветви рассматриваемой цепи. В частности, комплексное действующее значение входного тока цепи

$$I = 1,25I_5 = j62,5 \cdot 10^{-3} = 62,5 e^{j90^\circ} \text{ мА},$$

откуда

$$i = \sqrt{2} \cdot 62,5 \cos(10^6 t + 90^\circ) \text{ мА}.$$

ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА СОПРОТИВЛЕНИЙ В ЗВЕЗДУ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Найдем условия эквивалентности двух участков электрической цепи (рис. 2.40, а, б), которые представляют собой соединение пассивных идеализированных двухполюсников треугольником и звездой. По определению, эти участки цепи эквивалентны, если при замене одного участка другим токи выводов I_1, I_2, I_3 и напряжения между выводами $\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}, \dot{U}_{31}$ останутся неизменными. Учитывая, что из трех напряжений между выводами только два являются независимыми (третье может быть получено из уравнения баланса напряжений), для эквивалентности треугольника сопротивлений звезде достаточно потребовать, чтобы любая пара из трех напряжений между выводами одной цепи была равна

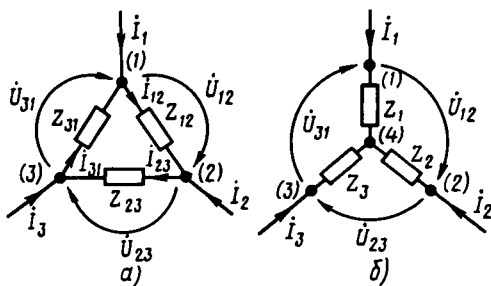


Рис. 2.40. Эквивалентные преобразования треугольник — звезда и звезда — треугольник

соответствующей паре напряжений другой цепи (при одинаковых значениях токов внешних выводов).

Выразим токи сопротивлений Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} , образующих стороны треугольника сопротивлений, через токи внешних выводов I_1 , I_2 , I_3 . Составляя на основании законов Кирхгофа систему уравнений электрического равновесия этого участка цепи

$$\begin{aligned} I_1 + I_{31} - I_{12} &= 0; \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0; \\ I_2 + I_{12} - I_{23} &= 0; \quad Z_{12}I_{12} + Z_{23}I_{23} + Z_{31}I_{31} = 0 \end{aligned}$$

и решая ее относительно токов I_{12} , I_{23} , I_{31} , находим

$$\begin{aligned} I_{12} &= (Z_{31}I_1 - Z_{23}I_2) / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}); \\ I_{23} &= (Z_{12}I_2 - Z_{31}I_3) / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}); \\ I_{31} &= (Z_{23}I_3 - Z_{12}I_1) / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}). \end{aligned} \quad (2.142)$$

Используя выражения (2.142), определяем напряжения между внешними выводами треугольника сопротивлений:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12} &= Z_{12}I_{12} = Z_{12}(Z_{31}I_1 - Z_{23}I_2) / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}); \\ \dot{U}_{23} &= Z_{23}I_{23} = Z_{23}(Z_{12}I_2 - Z_{31}I_3) / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}). \end{aligned}$$

Соответствующие напряжения между внешними выводами звезды (рис. 2.40, б) $\dot{U}_{12} = Z_1I_1 - Z_2I_2$; $\dot{U}_{23} = Z_2I_2 - Z_3I_3$.

Приравнявая напряжения $\dot{U}_{12}$ и $\dot{U}_{23}$ между внешними выводами рассматриваемых участков цепи, получаем

$$\begin{aligned} \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} I_1 - \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} I_2 &= Z_1I_1 - Z_2I_2; \\ \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} I_2 - \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}} I_3 &= Z_2I_2 - Z_3I_3. \end{aligned} \quad (2.143)$$

В соответствии с изложенным равенства (2.143) должны выполняться при любых значениях токов внешних выводов. Полагая в (2.143) сначала $I_2 = 0$, а затем $I_3 = 0$, определяем соотношения между сопротивлениями, при которых рассматриваемые участки цепей (рис. 2.40, а, б) эквивалентны:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{12}Z_{31} / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}); \\ Z_2 &= Z_{12}Z_{23} / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}); \\ Z_3 &= Z_{23}Z_{31} / (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}). \end{aligned} \quad (2.144)$$

Рассчитав сопротивления Z_1 , Z_2 , Z_3 по заданным Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} , можно осуществить эквивалентную замену треугольника сопротивлений звездой (преобразование треугольник — звезда). Из рис. 2.40 видно, что при этом преобразовании из цепи устраняется контур,

образуемый сопротивлениями Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} , и появляется новый узел — место соединения сопротивлений Z_1 , Z_2 , Z_3 .

Решая систему уравнений (2.144) относительно Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} , получаем соотношения, позволяющие производить эквивалентную замену звезды сопротивлений треугольником (*преобразование звезда — треугольник*):

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_3; \\ Z_{23} &= Z_2 + Z_3 + Z_2 Z_3 / Z_1; \\ Z_{31} &= Z_3 + Z_1 + Z_3 Z_1 / Z_2. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Преобразование звезда — треугольник приводит к уменьшению числа узлов преобразуемой цепи (за счет устранения узла, являющегося местом соединения сопротивлений Z_1 , Z_2 , Z_3), однако при этом появляется новый контур, образуемый сопротивлениями Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} .

Заменим в выражениях (2.145) комплексные сопротивления элементов их проводимостями. Проведя преобразования, установим, что выражения для комплексных проводимостей элементов, образующих стороны треугольника,

$$\begin{aligned} Y_{12} &= Y_1 Y_2 / (Y_1 + Y_2 + Y_3); \\ Y_{23} &= Y_2 Y_3 / (Y_1 + Y_2 + Y_3); \\ Y_{31} &= Y_3 Y_1 / (Y_1 + Y_2 + Y_3) \end{aligned} \quad (2.146)$$

имеют такую же структуру, как и выражения для комплексных сопротивлений, входящих в лучи звезды (2.144). Подобным образом можно получить выражения для комплексных проводимостей лучей звезды Y_1 , Y_2 , Y_3 , которые оказываются аналогичными выражениям для комплексных сопротивлений сторон треугольника (2.145).

Выражения (2.146) могут быть обобщены и для преобразования N -лучевой звезды (см. рис. 1.24, б) в N -угольник (см. рис. 1.24, а):

$$Y_{kl} = Y_k Y_l / (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N),$$

где Y_{kl} — проводимость стороны N -угольника, соединяющей узлы k и l ; Y_1 , Y_2 , ..., Y_N — проводимости элементов, образующих лучи звезды.

Обратное преобразование полного N -угольника в N -лучевую звезду в общем случае невозможно.

Применение преобразований треугольник — звезда и звезда — треугольник в ряде случаев позволяет существенно упростить анализ цепей, в частности иногда с помощью этих преобразований удается приводить сложные участки цепей к более простым, представляющим собой параллельное, последовательное или смешанное соединение элементов.

Пример 2.15. Для цепи с параметрами элементов $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $R_4 = 25$ Ом, $R_5 = 30$ Ом, $\dot{E} = 1,3$ В (рис. 2.41, а) определим ток ветви, содержащей источник напряжения $\dot{E}$.

Ток $\dot{I}$ можно найти, решив основную систему уравнений электрического равновесия цепи, однако этот путь весьма трудоемок. Учитывая, что по условию задачи требуется вычислить только ток независимого источника $\dot{E}$, целесообразно остальную часть цепи, к которой подключен этот источник, заменить ее комплексным входным сопротивлением. Непосредственное нахождение входного сопротивления пассивного двухполюсника, к которому подключен идеальный источник напряжения, постепенным «сворачиванием» по правилам преобразования участков

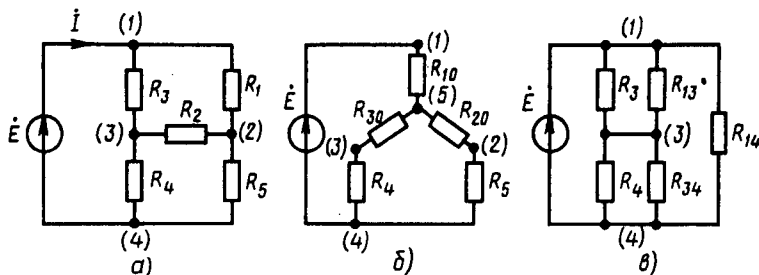


Рис. 2.41. К примеру 2.15

цепей с параллельным и последовательным соединением элементов невозможно, так как в данном двухполюснике отсутствуют последовательно или параллельно включенные элементы.

Заменяем треугольник сопротивлений R_1, R_2, R_3 звездой сопротивлений R_{10}, R_{20}, R_{30} (рис. 2.41, б). Используя формулы (2.144), находим

$$R_{10} = R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{20} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3) = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{30} = R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 15 \text{ Ом}.$$

Преобразуя полученную цепь с помощью правил преобразования участков цепей со смешанным соединением элементов, определяем входное сопротивление пассивного двухполюсника и искомый ток: $R = 26$ Ом; $\dot{I} = 50$ мА.

К этому же результату можно прийти, если использовать преобразование звезда — треугольник. В частности, заменяя сопротивления R_1, R_2, R_5 (рис. 2.41, а) сопротивлениями

$$R_{13} = R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_5 = 103,3 \text{ Ом};$$

$$R_{14} = R_1 + R_5 + R_1 R_5 / R_2 = 62 \text{ Ом};$$

$$R_{34} = R_2 + R_5 + R_2 R_5 / R_1 = 155 \text{ Ом},$$

переходим к цепи (рис. 2.41, в), которая легко поддается дальнейшим преобразованиями.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ И ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ПАССИВНОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Два различных линейных пассивных двухполюсника с одинаковыми комплексными сопротивлениями (комплексными проводимостями) эквивалентны, так как при замене одного из них другим токи

и напряжения внешних выводов, соединяющих двухполюсники с остальной частью цепи, не изменяются. Следовательно, условием эквивалентности линейных пассивных двухполюсников является равенство их комплексных сопротивлений (проводимостей).

Комплексное сопротивление любого пассивного двухполюсника $Z = r + jx$ можно представить как сумму комплексных сопротивлений двух последовательно включенных двухполюсников. Комплексное сопротивление одного из них имеет чисто резистивный $Z_a = r$, а другого $Z_p = jx$ — чисто реактивный характер. Комплексную проводимость этого двухполюсника $Y = 1/Z = g + jb$ можно рассматривать как комплексную проводимость цепи из двух параллельно соединенных элементов с проводимостями $Y_a = g$ и $Y_p = jb$. Поэтому произвольному линейному пассивному двухполюснику, находящемуся под гармоническим воздействием, можно поставить в соответствие две схемы замещения — последовательную (рис. 2.42, а) и параллельную (рис. 2.43, а), причем каждая из них содержит один реактивный элемент и один элемент, входное сопротивление которого имеет чисто резистивный характер.

В общем случае вещественные r , g и мнимые x , b составляющие комплексного входного сопротивления и комплексной входной проводимости пассивного двухполюсника являются сложными функциями частоты: $r = r(\omega)$, $x = x(\omega)$, $g = g(\omega)$, $b = b(\omega)$. При изменении частоты r и g могут изменяться только по абсолютному значению, а x и b — как по абсолютному значению, так и по знаку. При фиксированном значении угловой частоты $\omega = \omega_1$ вещественные и мнимые составляющие входных сопротивлений и проводимости двухполюсника, а следовательно, Z_a , Z_p , а также Y_a , Y_p элементов

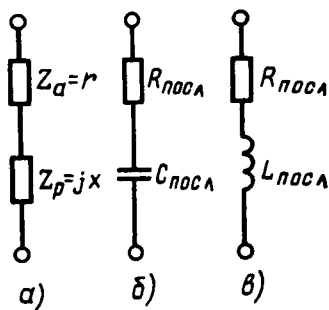


Рис. 2.42. Последовательные схемы замещения пассивного двухполюсника

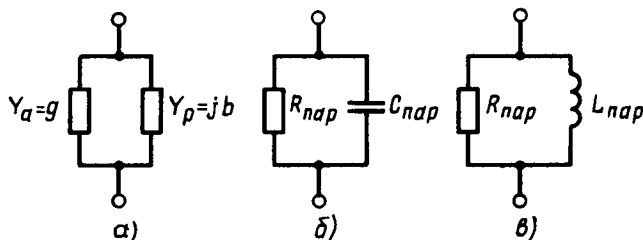


Рис. 2.43. Параллельные схемы замещения пассивного двухполюсника

последовательной и параллельной схем замещения принимают определенные значения: $Z_s = r(\omega_1)$, $Z_p = jx(\omega_1)$, $Y_s = g(\omega_1)$, $Y_p = jb(\omega_1)$. Постоянное вещественное число $Z_s = r(\omega_1)$ можно считать комплексным сопротивлением резистивного элемента, входящего в последовательную схему замещения двухполюсника (см. рис. 2.42, б, в):

$$R_{\text{пос}} = r(\omega_1). \quad (2.147)$$

Мнимое число $Z_p = jx(\omega_1)$ в зависимости от знака $x(\omega_1)$ можно рассматривать либо как комплексное сопротивление емкости ($x(\omega_1) < 0$)

$$C_{\text{пос}} = -1/[\omega_1 x(\omega_1)], \quad (2.148)$$

либо как комплексное сопротивление индуктивности ($x(\omega_1) > 0$)

$$L_{\text{пос}} = x(\omega_1)/\omega_1, \quad (2.149)$$

входящих в эту же схему замещения.

Параллельная схема замещения двухполюсника (рис. 2.43, б, в) содержит сопротивление

$$R_{\text{пар}} = 1/g(\omega_1) \quad (2.150)$$

и либо емкость ($b(\omega_1) > 0$)

$$C_{\text{пар}} = b(\omega_1)/\omega_1, \quad (2.151)$$

либо индуктивность ($b(\omega_1) < 0$)

$$L_{\text{пар}} = -1/[\omega_1 b(\omega_1)]. \quad (2.152)$$

В частном случае, когда входное сопротивление двухполюсника имеет чисто резистивный или чисто реактивный характер, обе схемы замещения вырождаются в одну, содержащую единственный идеализированный пассивный элемент (сопротивление, емкость или индуктивность).

Таким образом, при фиксированном значении частоты внешнего воздействия каждому линейному пассивному двухполюснику независимо от числа входящих в него элементов и способа их соединения можно поставить в соответствие эквивалентную схему, содержащую не более двух идеализированных пассивных элементов. Разумеется, такое преобразование будет эквивалентным только при $\omega = \omega_1$. Изменение частоты внешнего воздействия может вызывать изменение не только значений параметров элементов последовательной и параллельной схем замещения двухполюсника, но и характера соответствующих реактивных элементов.

Последовательная и параллельная цепи, схемы которых приведены на рис. 2.42, а и 2.43, а, обладают одинаковыми комплексными сопротивлениями (проводимостями) и поэтому являются эквива-

лентными. Выбор той или иной цепи и соответственно той или иной схемы замещения двухполосника при заданной частоте внешнего воздействия производится исходя только из удобства последующего анализа.

При необходимости последовательная и параллельная схемы замещения двухполосника могут быть преобразованы одна в другую. Соотношения между параметрами их элементов однозначно устанавливаются с помощью выражений (2.52) — (2.55) и (2.147) — (2.152). Анализ этих выражений показывает, что *при взаимных преобразованиях последовательной и параллельной схем характер реактивного элемента, входящего в схему замещения, не изменяется* (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Формулы для взаимного преобразования параллельной и последовательной схем замещения пассивного двухполосника

Параметры исходной цепи	Параметры преобразованной цепи
$R_{\text{послед}}, C_{\text{послед}}$	$R_{\text{пар}} = R_{\text{послед}} [1 + 1/(\omega_1 R_{\text{послед}} C_{\text{послед}})^2];$ $C_{\text{пар}} = C_{\text{послед}} / [1 + (\omega_1 C_{\text{послед}} R_{\text{послед}})^2]$
$R_{\text{послед}}, L_{\text{послед}}$	$R_{\text{пар}} = R_{\text{послед}} [1 + (\omega_1 L_{\text{послед}} / R_{\text{послед}})^2];$ $L_{\text{пар}} = L_{\text{послед}} \{1 + [R_{\text{послед}} / (\omega_1 L_{\text{послед}})]^2\}$
$R_{\text{пар}}, C_{\text{пар}}$	$R_{\text{послед}} = R_{\text{пар}} / [1 + (\omega_1 C_{\text{пар}} R_{\text{пар}})^2];$ $C_{\text{послед}} = C_{\text{пар}} [1 + 1/(\omega_1 C_{\text{пар}} R_{\text{пар}})^2]$
$R_{\text{пар}}, L_{\text{пар}}$	$R_{\text{послед}} = R_{\text{пар}} / \{1 + [R_{\text{пар}} / (\omega_1 L_{\text{пар}})]^2\};$ $L_{\text{послед}} = L_{\text{пар}} / \{1 + [\omega_1 L_{\text{пар}} / R_{\text{пар}}]^2\}$

Выражения, приведенные в таблице, можно использовать для взаимных преобразований произвольных участков цепей с параллельными и последовательным включением элементов. Например, при заданной частоте внешнего воздействия $\omega = \omega_1$ участок цепи, представляющий собой последовательное соединение сопротивления R_1 и емкости C_1 , может быть заменен эквивалентным участком цепи с параллельно включенными сопротивлением R_2 и емкостью C_2 . Несмотря на то что в данном случае параметры элементов исходной цепи не являются функциями частоты, параметры элементов преобразованной цепи R_2, C_2 зависят от частоты внешнего воздействия. При этом изменение частоты внешнего воздействия приводит только к изменению значений параметров элементов преобразованной цепи; характер реактивных элементов в данном случае не меняется.

Пример 2.16. Построим последовательную и параллельную схемы замещения последовательной RLC -цепи (см. пример 2.4) при частоте внешнего воздействия $\omega = \omega_1 = 2,5 \cdot 10^6$ рад/с.

Комплексное сопротивление цепи при $\omega = \omega_1$ имеет резистивно-емкостный характер

$$Z = r(\omega_1) + jx(\omega_1) = (100 - j600) \text{ Ом},$$

поэтому последовательная и параллельная схемы замещения цепи на данной частоте содержат сопротивление и емкость (см. рис. 2.42, б, 2.43, б). Параметры элементов последовательной схемы замещения в соответствии с выражениями (2.147), (2.148) $R_{\text{посл}} = r(\omega_1) = 100 \text{ Ом}$; $C_{\text{посл}} = -1/[\omega_1 x(\omega_1)] = 666,7 \text{ пФ}$.

Параметры элементов параллельной схемы замещения найдем, используя формулы, приведенные в табл. 2.1:

$$R_{\text{пар}} = R_{\text{посл}} [1 + (\omega_1 R_{\text{посл}} C_{\text{посл}})^2] = 3,7 \text{ кОм};$$

$$C_{\text{пар}} = C_{\text{посл}} [1 + (\omega_1 R_{\text{посл}} C_{\text{посл}})^2] = 649 \text{ пФ}.$$

КОМПЛЕКСНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ

Ранее были рассмотрены последовательная и параллельная схемы замещения линеаризованных источников постоянного тока и напряжения (см. рис. 1.16, б, в) и получены соотношения для их взаимного преобразования (1.37), (1.38). Покажем, что аналогичные соотношения выполняются и для линеаризованных источников гармонических токов и напряжений, т. е. для источников, комплексные схемы замещения которых содержат идеальный источник напряжения $\dot{E}$ и комплексное внутреннее сопротивление Z_i (рис. 2.44, а) или идеальный источник тока $\dot{J}$ и комплексную внутреннюю проводимость Y_i (рис. 2.44, б).

В соответствии с последовательной схемой замещения (рис. 2.44, а) комплексное действующее значение напряжения на зажимах линеаризованного источника

$$\dot{U} = \dot{E} - Z_i \dot{I}. \quad (2.153)$$

В то же время из параллельной схемы замещения (рис. 2.44, б) получаем

$$\dot{U} = (\dot{J} - \dot{I})/Y_i = \dot{J}/Y_i - \dot{I}/Y_i. \quad (2.154)$$

Сравнивая выражения (2.153) и (2.154), находим условия эквивалентности последовательной и параллельной комплексных схем замещения линеаризованного источника:

$$\dot{E} = \dot{J}/Y_i; \quad Z_i = 1/Y_i. \quad (2.155)$$

Выражения (2.155) имеют такой же вид, как и условия эквивалентности последовательной и параллельной схем замещения линеаризованных источников постоянного тока и напряжения (1.37) и (1.38); они могут быть получены из последних путем замены вещественных внутреннего сопротивления R_i и внутренней проводимости G_i соответственно комплексным внутренним сопротивле-

нием Z_i и комплексной внутренней проводимостью Y_i , а также постоянных тока J_i и ЭДС E_i — комплексными действующими значениями задающего тока J и напряжения E . Как отмечалось, взаимные преобразования параллельной и последовательной схем замещения возможны только для линеаризованных источников с конечными внутренним сопротивлением и внутренней проводимостью ($Z_i \neq 0, Y_i \neq 0$).

В ряде случаев при анализе цепей возникает необходимость преобразовывать источники, т. е. заменить идеализированный источник одного типа другим. Для линеаризованных источников с конечным внутренним сопротивлением (проводимостью) эта задача решается путем преобразования последовательной схемы замещения источника в параллельную или наоборот с помощью выражений (2.155). Если в схеме замещения реального источника содержится только идеальный источник напряжения, однако в цепи, внешней по отношению к нему, имеется произвольный пассивный двухполюсник, включенный последовательно с источником, то его комплексное сопротивление Z можно рассматривать как внутреннее сопротивление линеаризованного источника Z_i , что дает возможность воспользоваться для преобразования источника выражениями (2.155). Аналогично, если параллельно идеальному источнику тока включена любая ветвь, составленная из пассивных элементов, то ее комплексную проводимость Y можно представить как внутреннюю проводимость линеаризованного источника Y_i . Идеальные источники тока и напряжения, которые могут быть преобразованы один в другой таким образом, называются невырожденными.

Формулы (2.155) справедливы и для взаимного преобразования невырожденных управляемых источников тока и напряжения. Разумеется, при этом характер управляющего воздействия (ток или напряжение) не изменяется.

Если в анализируемую цепь включены идеальный источник напряжения и последовательно с ним не введены элементы, сопротивление которых можно рассматривать как внутреннее сопротивление линеаризованного источника, или идеальный источник тока, параллельно которому не включены ветви, проводимость которых можно трактовать как внутреннюю проводимость соответствующего источника, то такие источники называют вырожденными. Вырожденные источники напряжения и тока не могут быть преобразованы один в другой непосредственно с помощью

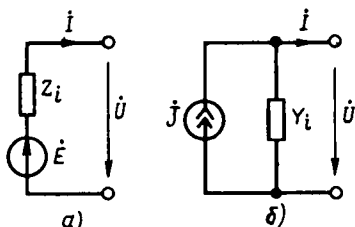


Рис. 2.44. Последовательная (а) и параллельная (б) комплексные схемы замещения источников энергии

выражений (2.155), однако они могут быть устранены из цепи с помощью преобразований, получивших название переноса источников.

ПЕРЕНОС ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим участок идеализированной электрической цепи, содержащей вырожденный источник напряжения (рис. 2.45, а). Покажем, что данный участок цепи может быть заменен эквивалентным участком, не содержащим вырожденных источников (рис. 2.45, б, в). Идеальный источник напряжения $\dot{E}$ из ветви, подключенной между узлами (6) и (7) (рис. 2.45, а), в первом случае перенесен во все ветви, подключенные к узлу (6) (рис. 2.45, б), а во втором случае — во все ветви, подключенные к узлу (7) (рис. 2.45, в). В обоих случаях перенос источника напряжения произведен без изменения ЭДС источника и его ориентации относительно направлений обхода контуров 1 и 4.

Ветвь, ранее содержавшая источник $\dot{E}$, после преобразования исчезает, причем узлы (6) и (7), к которым она была подключена, объединяются в один узел (7) (рис. 2.45, б) или (6) (рис. 2.45, в).

Процессы во всех трех идеализированных цепях описываются решениями одной и той же системы уравнений электрического равновесия, составленной на основании законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 + \dot{I}_5 &= 0; & -Z_3 \dot{I}_3 + Z_4 \dot{I}_4 + \dot{U}_{34} &= 0; \\ -Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_{12} &= 0; & -Z_4 \dot{I}_4 + Z_5 \dot{I}_5 + \dot{U}_{45} &= 0; \\ -Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 + \dot{U}_{23} &= \dot{E}; & -Z_5 \dot{I}_5 + Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_{51} &= -\dot{E}. \end{aligned}$$

Следовательно, при замене цепи рис. 2.45, а любой из цепей рис. 2.45, б, в токи внешних выводов и напряжения между ними не изменяются, т. е. участки этих цепей эквивалентны. В результате переноса источника вырожденный источник напряжения заменен

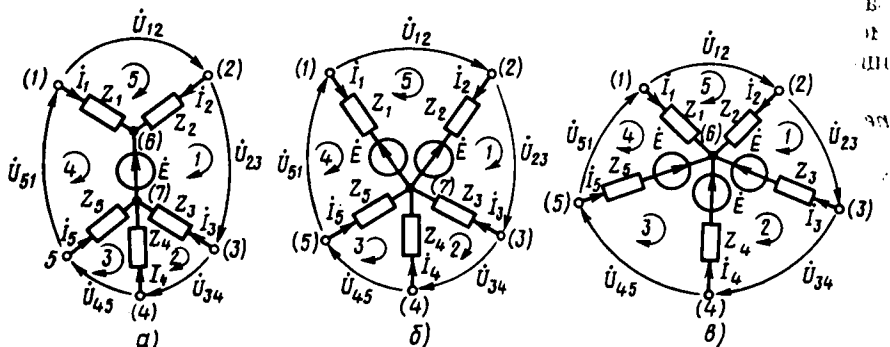


Рис. 2.45. Перенос идеального источника напряжения

несколькими невырожденными источниками напряжения, которые при необходимости могут быть преобразованы в источники тока с помощью рассмотренных ранее преобразований.

Вырожденный источник тока, включенный между узлами (k) и (l) произвольной электрической цепи, может быть за-

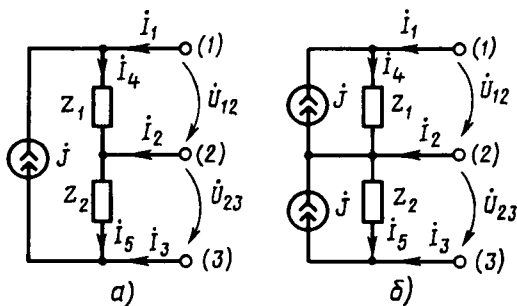


Рис. 2.46. Перенос идеального источника тока

менен несколькими источниками тока, включенными параллельно любым ветвям электрической цепи, образующим путь между узлами (k) и (l) . Например, вырожденный источник тока J , включенный между узлами (1) и (3) электрической цепи (рис. 2.46, а), может быть заменен двумя источниками тока, подключенными параллельно ветвям с комплексными сопротивлениями Z_1 и Z_2 , образующими путь между этими же узлами (рис. 2.46, б). Источник тока переносится без изменения значения задающего тока J и его ориентации относительно узлов (1) и (3) . Эквивалентность цепей рис. 2.46 следует из того, что процессы в них описываются одной и той же системой уравнений электрического равновесия, составленной на основании законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_1 - i_4 + J &= 0; & Z_1 i_4 - \dot{U}_{12} &= 0; \\ i_2 + i_4 - i_5 &= 0; & Z_2 i_5 - \dot{U}_{23} &= 0. \\ i_3 + i_5 - J &= 0; \end{aligned}$$

В результате переноса источника тока вырожденный источник заменяется несколькими невырожденными, которые при необходимости могут быть преобразованы в источники напряжения с помощью выражений (2.155).

Ветвь, ранее содержавшая вырожденный источник тока, после переноса источника исчезает.

Перенос источников тока и напряжения, используемый совместно с другими преобразованиями, значительно расширяет возможности этих преобразований. В частности, перенос источников совместно с рассмотренными ранее преобразованиями треугольник — звезда и звезда — треугольник позволяет осуществлять преобразование активного треугольника (рис. 2.47, а) в активную звезду (рис. 2.47, б) и обратно.

Преобразование активного треугольника в активную звезду выполняется в несколько этапов:

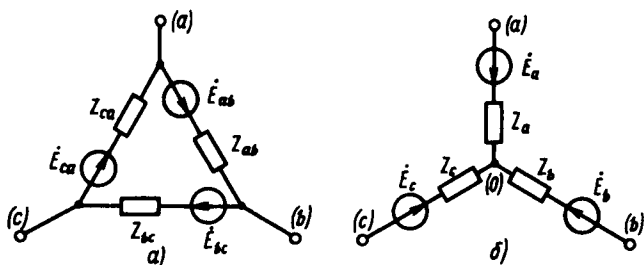


Рис. 2.47. Активные треугольник (а) и звезда (б)

1) источники напряжения $\dot{E}_{ab}$, $\dot{E}_{bc}$ и $\dot{E}_{ca}$ (рис. 2.47, а) заменяются источниками тока (рис. 2.48, а):

$$j_{ab} = \dot{E}_{ab}/Z_{ab}; j_{bc} = \dot{E}_{bc}/Z_{bc}; j_{ca} = \dot{E}_{ca}/Z_{ca};$$

2) треугольник сопротивлений (рис. 2.48, а) заменяется звездой сопротивлений (рис. 2.48, б):

$$Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}};$$

$$Z_b = \frac{Z_{bc}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}};$$

$$Z_c = \frac{Z_{ca}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}};$$

3) источники тока (рис. 2.48, б), включенные между узлами (а), (б) и (с), заменяются источниками тока, подключенными параллельно сопротивлениям Z_a , Z_b , Z_c (рис. 2.48, в);

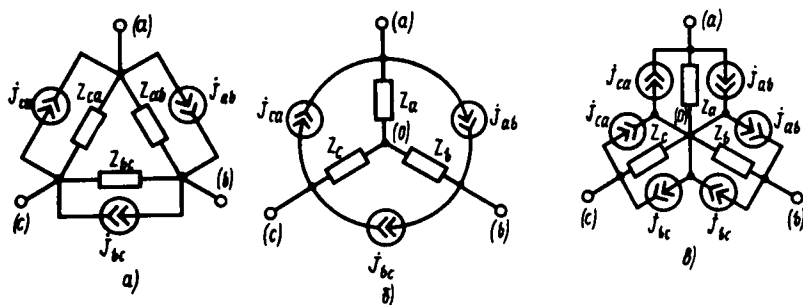


Рис. 2.48. К преобразованию активного треугольника в активную звезду

4) источники тока, включенные параллельно сопротивлениям Z_a, Z_b, Z_c (рис. 2.48, в), заменяются источниками напряжения (см. рис. 2.47, б):

$$\dot{E}_a = (j_{ab} - j_{ca})Z_a = \frac{\dot{E}_{ab}Z_{ca} - \dot{E}_{ca}Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}};$$

$$\dot{E}_b = (j_{bc} - j_{ab})Z_b = \frac{\dot{E}_{bc}Z_{ab} - \dot{E}_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}};$$

$$\dot{E}_c = (j_{ca} - j_{bc})Z_c = \frac{\dot{E}_{ca}Z_{bc} - \dot{E}_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}.$$

Преобразование активной звезды в активный треугольник также осуществляется в несколько этапов:

1) звезда сопротивлений (см. рис. 2.47, б) заменяется треугольником сопротивлений (рис. 2.49, а):

$$Z_{ab} = Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c};$$

$$Z_{bc} = Z_b + Z_c + \frac{Z_b Z_c}{Z_a};$$

$$Z_{ca} = Z_c + Z_a + \frac{Z_c Z_a}{Z_b};$$

2) источники напряжения $\dot{E}_a, \dot{E}_b, \dot{E}_c$ (рис. 2.49, а) переносятся в ветви треугольника (рис. 2.49, б);

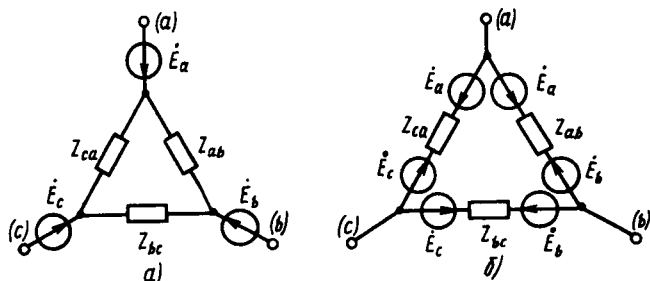


Рис. 2.49. К преобразованию активной звезды в активный треугольник

3) источники напряжения $\dot{E}_a, \dot{E}_b, \dot{E}_c$, попарно включенные в ветви треугольника, заменяются эквивалентными источниками (см. рис. 2.47, а):

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_a - \dot{E}_b;$$

$$\dot{E}_{bc} = \dot{E}_b - \dot{E}_c;$$

$$\dot{E}_{ca} = \dot{E}_c - \dot{E}_a.$$

Используя аналогичные преобразования, активная N -лучевая звезда может быть преобразована в активный N -угольник.

§ 2.7. ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

ПОНЯТИЕ О ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Две или более индуктивных катушек называются связанными, если изменение тока одной из катушек вызывает появление ЭДС в остальных. Напомним, что явление наведения ЭДС в какой-либо индуктивной катушке при изменении тока другой катушки называется взаимоиндукцией, а наведенная ЭДС — ЭДС взаимоиндукции.

Рассмотрим две индуктивные катушки, расположенные таким образом, что магнитный поток, вызванный током одной из катушек, пронизывает витки другой катушки (рис. 2.50). Пусть i_1 и i_2 — токи первой и второй катушек; Φ_{11} и Φ_{22} — магнитные потоки самоиндукции этих катушек, т. е. магнитные потоки, пронизывающие каждую из катушек и вызванные протекающим по ней током. Часть магнитного потока самоиндукции первой катушки Φ_{21} , которая пронизывает витки второй катушки, называют потоком взаимоиндукции второй катушки. Часть магнитного потока самоиндукции первой катушки Φ_{s1} , которая не пронизывает витки второй катушки,

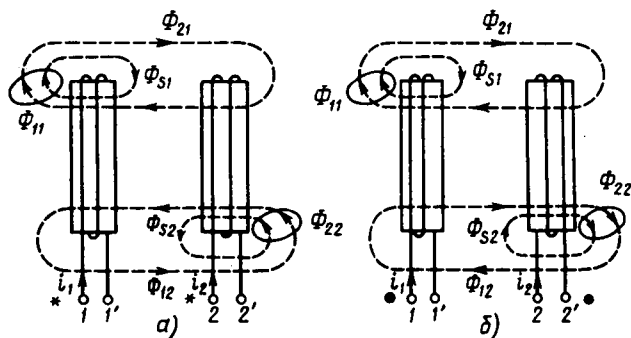


Рис. 2.50. Связанные катушки индуктивности:
а — согласное включение; б — встречное включение

называют магнитным потоком рассеяния первой катушки, часть магнитного потока самоиндукции второй катушки Φ_{12} , которая пронизывает витки первой, — потоком взаимоиндукции первой катушки, а часть магнитного потока самоиндукции второй катушки Φ_{22} , которая пронизывает только витки второй катушки, — потоком рассеяния второй катушки (на рис. 2.50 изображено только по одной силовой линии каждого из магнитных потоков). Таким образом, магнитный поток самоиндукции каждой катушки содержит по две составляющие:

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{s1}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{s2}. \quad (2.156)$$

Полный магнитный поток, пронизывающий каждую из катушек, складывается из магнитных потоков самоиндукции и взаимоиндукции:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}; \quad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}. \quad (2.157)$$

Потокосцепление каждой из катушек так же, как и магнитный поток, имеет две составляющие — *потокосцепление самоиндукции* Ψ_{11} , Ψ_{22} и *потокосцепление взаимоиндукции* Ψ_{21} , Ψ_{12} :

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}; \quad \Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21}. \quad (2.158)$$

Когда все витки каждой катушки пронизываются одинаковыми магнитными потоками, выражения (2.158) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= N_1 \Phi_1 = N_1 \Phi_{11} \pm N_1 \Phi_{12}; \\ \Psi_2 &= N_2 \Phi_2 = N_2 \Phi_{22} \pm N_2 \Phi_{21}, \end{aligned} \quad (2.159)$$

где N_1 , N_2 — число витков первой и второй катушек.

Знак плюс в выражениях (2.157) — (2.159) берется в том случае, когда магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции каждой катушки совпадают по направлению (предполагается, что катушки расположены соосно). Такое включение катушек индуктивности называется *согласным* (рис. 2.50, а). Знак минус в выражениях (2.157) — (2.159) ставят в том случае, когда магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции имеют противоположные направления. Такое включение катушек называют *встречным* (рис. 2.50, б).

В соответствии с законом электромагнитной индукции (1.19) ЭДС, наводимые в каждой из связанных катушек индуктивности,

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{d\Psi_1}{dt} = -\left(\frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{dt}\right); \\ e_2 &= -\frac{d\Psi_2}{dt} = -\left(\frac{d\Psi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt}\right). \end{aligned} \quad (2.160)$$

Первое слагаемое в выражениях (2.160) представляет собой ЭДС самоиндукции, второе — ЭДС взаимной индукции. Преобразуем выражения (2.160), формально умножив и разделив каждое из слагаемых на di_1 или di_2 :

$$\begin{aligned} e_1 &= -\left(\frac{d\Psi_{11}}{di_1} \frac{di_1}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{di_2} \frac{di_2}{dt}\right); \\ e_2 &= -\left(\frac{d\Psi_{22}}{di_2} \frac{di_2}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{di_1} \frac{di_1}{dt}\right). \end{aligned} \quad (2.161)$$

В индуктивных катушках без ферромагнитных сердечников магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции пропорциональны вызывающим их токам, поэтому производные потокоцеплений по токам могут быть заменены отношением соответствующих величин. Индуктивность каждой катушки L_1 или L_2 есть отношение потокоцепления самоиндукции к вызвавшему его току:

$$L_1 = \frac{d\Psi_{11}}{di_1} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{d\Psi_{22}}{di_2} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{N_2\Phi_{22}}{i_2}. \quad (2.162)$$

Взаимные индуктивности между катушками M_{12} и M_{21} — это отношение потокоцепления взаимной индукции к вызвавшему его току:

$$M_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{di_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2}; \quad M_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{di_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}. \quad (2.163)$$

Связанные индуктивные катушки, у которых потоки самоиндукции и взаимной индукции пропорциональны вызвавшим их токам и, следовательно, величины L_1 , L_2 , M_{12} и M_{21} не зависят от i_1 и i_2 , называются катушками с линейной индуктивностью. Для них всегда выполняется условие $\Psi_{12}/i_2 = \Psi_{21}/i_1$, поэтому

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (2.164)$$

Взаимную индуктивность выражают в генри (Гн).

С учетом введенных обозначений (2.161) — (2.164) ЭДС, наводимые в каждой катушке:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}\right); \\ e_2 &= -\left(L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}\right). \end{aligned}$$

ях (2.165), (2.166). Если конструкции индуктивных катушек, в частности направления их намотки, известны, а направления токов заданы, то для выбора знака в выражениях (2.165), (2.166) или (2.157) — (2.161) достаточно, воспользовавшись *правилом буравчика* (правоугового винта), определить направления магнитных потоков самоиндукции каждой из катушек. Например, применяя правило буравчика, устанавливаем, что у катушек, изображенных на рис. 2.50, а, направления магнитных потоков самоиндукции и взаимоиנדукции у каждой катушки одинаковы, а у катушек, изображенных на рис. 2.50, б, — противоположны.

При вычерчивании принципиальных электрических схем цепей с взаимной индуктивностью условные графические обозначения индуктивных катушек не отражают особенностей их конструкции. Для выяснения, является ли данное включение катушек согласным или встречным, вводят понятие одноименных зажимов связанных индуктивных катушек.

Одноименными зажимами двух связанных индуктивных катушек называется пара зажимов, выбранных таким образом, что при одинаковых относительно этих зажимов направлениях токов катушек магнитные потоки самоиндукции и взаимоиנדукции в каждой из них суммируются. Одноименные зажимы индуктивных катушек помечают одинаковыми значками (буквами и, к, точками, звездочками, треугольниками и т. п.), проставляемыми в непосредственной близости к соответствующим зажимам. Так, на рис. 2.50, а звездочками отмечены одноименные зажимы 1 и 2. Вторую пару одноименных зажимов этих катушек образуют зажимы 1' и 2', специально необозначенные, так как для решения вопроса о том, является ли заданное включение согласным или встречным, достаточно обозначить одну пару одноименных зажимов. На рис. 2.50, б точками указаны одноименные зажимы 1 и 2'.

Аналогично поступают и при построении схем замещения электрических цепей с взаимными индуктивностями. Условное графическое изображение связанных индуктивностей, используемое при построении таких схем, показано на рис. 2.51, а. Когда общим магнит-

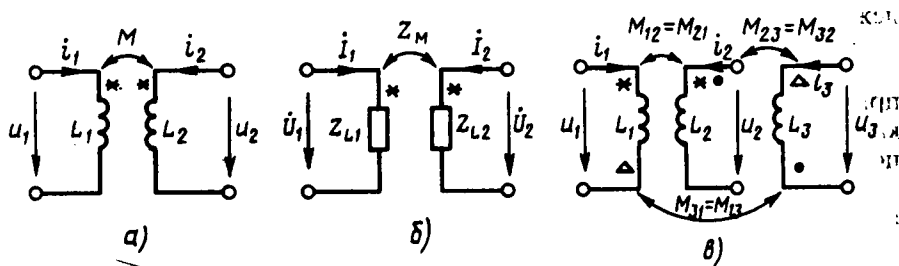


Рис. 2.51. Условные графические изображения связанных индуктивностей на схемах замещения

ным потоком связано не две, а большее число индуктивностей, одноименные зажимы каждой из пар обозначают с помощью различных значков (рис. 2.51, *в*).

Таким образом, если токи связанных индуктивностей одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов, то такое включение является согласным и в выражениях (2.165) следует взять знак плюс; в противном случае включение является встречным и необходимо использовать знак минус (величина M при этом считается положительной). Например, индуктивности L_1 и L_2 на рис. 2.51, *а* и L_1 и L_2 на рис. 2.51, *в* включены согласно, а индуктивности L_2 и L_3 , L_1 и L_3 (рис. 2.51, *в*) — встречно.

КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ МЕЖДУ ИНДУКТИВНЫМИ КАТУШКАМИ

Из качественного рассмотрения процессов в связанных индуктивных катушках следует, что чем сильнее связаны катушки, т. е. чем большая часть магнитного потока, создаваемого током каждой из них, пронизывает другую катушку, тем выше взаимная индуктивность. Однако при этом неясно, как связана взаимная индуктивность с индуктивностями катушек и чем определяется максимальное значение M . Введем новую величину, количественно характеризующую степень связи между катушками, — коэффициент связи. Коэффициент связи представляет собой среднее геометрическое отношений потока взаимной индукции к потоку самоиндукции каждой из катушек:

$$k_M = \sqrt{\Phi_{12}\Phi_{21}/(\Phi_{11}\Phi_{22})}. \quad (2.167)$$

Представляя магнитный поток самоиндукции каждой катушки в виде суммы потока рассеяния этой катушки и потока взаимной индукции другой катушки (2.156), получаем

$$k_M = \sqrt{\Phi_{12}\Phi_{21}/(\Phi_{21} + \Phi_{s1})(\Phi_{12} + \Phi_{s2})}. \quad (2.168)$$

Из выражения (2.168) следует, что значения коэффициента связи лежат в пределах

$$0 \leq k_M \leq 1, \quad (2.169)$$

причем $k_{M_{\max}} = 1$ только в том случае, когда потоки рассеяния обеих катушек равны нулю, или, другими словами, когда магнитный поток, создаваемый током одной катушки, полностью пронизывает другую катушку. Коэффициент связи зависит от конструкции катушек и на практике всегда $k_M < 1$.

Коэффициент связи k_M можно выразить через индуктивности связанных катушек и их взаимную индуктивность. Подставляя в (2.167) выражения для потоков самоиндукции Φ_{11} , Φ_{22} и взаимной индукции Φ_{12} , Φ_{21} , полученные из (2.162), (2.163), находим

$$k_M = \sqrt{\frac{M_{12}I_2/N_1}{L_1I_1/N_1} \frac{M_{21}I_1/N_2}{L_2I_2/N_2}} = \sqrt{\frac{M_{12}M_{21}}{L_1L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}},$$

откуда

$$M = k_M \sqrt{L_1L_2}. \quad (2.170)$$

Из выражения (2.170) с учетом (2.169) можно определить пределы, в которых изменяется взаимная индуктивность:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2}. \quad (2.171)$$

Таким образом, *максимальное значение взаимной индуктивности катушек не может превышать среднего геометрического их индуктивностей.*

ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Для анализа цепей с взаимной индуктивностью при гармоническом воздействии можно воспользоваться изученным ранее методом комплексных амплитуд. Переходя в выражениях (2.165) от мгновенных значений токов и напряжений к их комплексным изображениям и принимая во внимание, что дифференцированию гармонических функций времени соответствует умножение их изображений на $j\omega$, получаем компонентные уравнения связанных индуктивностей в комплексной форме:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2; \quad \dot{U}_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1. \quad (2.172)$$

Комплексное действующее значение напряжения на каждой из связанных индуктивностей помимо напряжения на комплексном сопротивлении индуктивности $Z_L = j\omega L$, вызванного ее током, содержит также дополнительный член, который можно рассматривать как напряжение на некотором комплексном сопротивлении $Z_M = j\omega M$, называемом сопротивлением связи, вызванное током другой индуктивности:

$$\dot{U}_1 = Z_L I_1 + Z_M I_2; \quad \dot{U}_2 = Z_L I_2 + Z_M I_1. \quad (2.173)$$

Комплексная схема замещения пары связанных индуктивностей приведена на рис. 2.51, б (другие варианты комплексных схем замещения связанных индуктивностей см. далее). Если индуктивной связью охвачено n индуктивностей, то комплексные действующие значения напряжений на их зажимах определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{L1} I_1 + Z_{M12} I_2 + \dots + Z_{M1n} I_n; \\ \dot{U}_2 &= \pm Z_{M21} I_1 + Z_{L2} I_2 + \dots + Z_{M2n} I_n; \\ &\vdots \\ \dot{U}_n &= \pm Z_{Mn1} I_1 + Z_{Mn2} I_2 + \dots + Z_{Ln} I_n. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Напряжения на сопротивлениях связи $Z_{Mij}=Z_{Mji}$ имеют знак плюс при согласном и минус — при встречном включении индуктивностей.

Система уравнений электрического равновесия цепи с взаимными индуктивностями так же, как и системы основных уравнений ранее рассмотренных цепей, не содержащих взаимных индуктивностей, формируется из компонентных уравнений (уравнений ветвей), а также уравнений баланса токов и напряжений, составленных на основании законов Кирхгофа. При произвольном внешнем воздействии соответствующие уравнения составляются для мгновенных значений токов и напряжений, при гармоническом воздействии — для их комплексных изображений. Напомним, что вид и число уравнений, составляемых на основании законов Кирхгофа, определяются только топологией цепи и не зависят от входящих в нее элементов. В связи с этим уравнения баланса токов и напряжений цепи, содержащей связанные индуктивности, имеют точно такой же вид, как и уравнения соответствующей цепи в отсутствие связи между индуктивностями, т. е. при $M=0$, а в число компонентных уравнений наряду с уравнениями других элементов входят компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.165), (2.166) или (2.173), (2.174).

Пример 2.17. Составим основную систему уравнений электрического равновесия цепи, схема замещения которой для мгновенных значений приведена на рис. 2.52, а.

На основании первого и второго законов Кирхгофа может быть составлено три независимых уравнения:

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_3 &= 0; \\ u_{L1} + u_{L2} + u_C &= e; \\ u_R + u_{L3} - u_C - u_{L2} &= 0. \end{aligned}$$

В сочетании с пятью компонентными уравнениями

$$\begin{aligned} u_R &= Ri_3; \\ u_C &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt; \\ u_{L1} &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt}; \\ u_{L2} &= -M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt}; \\ u_{L3} &= M_{31} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} \end{aligned}$$

получаем восемь уравнений для определения восьми неизвестных величин: i_1 ; i_2 ; i_3 ; u_R ; u_C ; u_{L1} ; u_{L2} ; u_{L3} .

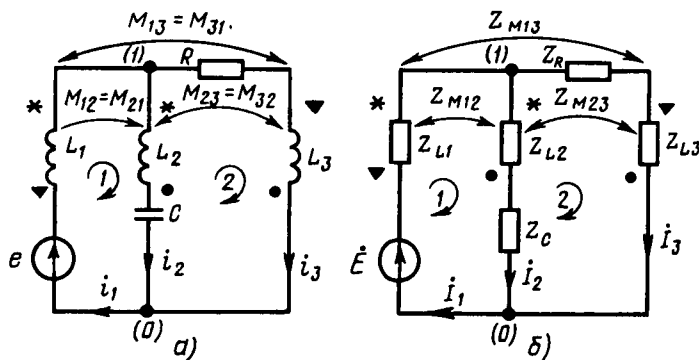


Рис. 2.52. К примеру 2.17

Схема замещения рассматриваемой цепи для комплексных токов и напряжений изображена на рис. 2.52, б. Основная система уравнений электрического равновесия цепи в комплексной форме имеет следующий вид:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$\dot{U}_{L1} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_C = \dot{E};$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_{L3} - \dot{U}_C - \dot{U}_{L2} = 0;$$

$$\dot{U}_R = RI_3;$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} I_2;$$

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 I_1 - j\omega M_{12} I_2 + j\omega M_{13} I_3;$$

$$\dot{U}_{L2} = -j\omega M_{21} I_1 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M_{23} I_3;$$

$$\dot{U}_{L3} = j\omega M_{31} I_1 + j\omega M_{32} I_2 + j\omega L_3 I_3.$$

Выражая напряжения на всех элементах через соответствующие токи, получаем систему из трех уравнений для определения неизвестных токов I_1, I_2, I_3 :

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$(j\omega L_1 I_1 - j\omega M_{12} I_2 + j\omega M_{13} I_3) + (-j\omega M_{21} I_1 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M_{23} I_3) + \frac{1}{j\omega C} I_2 = \dot{E};$$

$$RI_3 + (j\omega M_{31} I_1 + j\omega M_{32} I_2 + j\omega L_3 I_3) - \frac{1}{j\omega C} I_2 - (-j\omega M_{21} I_1 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M_{23} I_3) = 0.$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЧАСТКОВ ЦЕПЕЙ СО СВЯЗАННЫМИ ИНДУКТИВНОСТЯМИ

Рассмотрим эквивалентные преобразования участков цепей, содержащих связанные индуктивности. В частности, покажем возможность замены их участками, не содержащими связанных индуктивностей. Начнем с наиболее простых случаев, когда связанные индук-

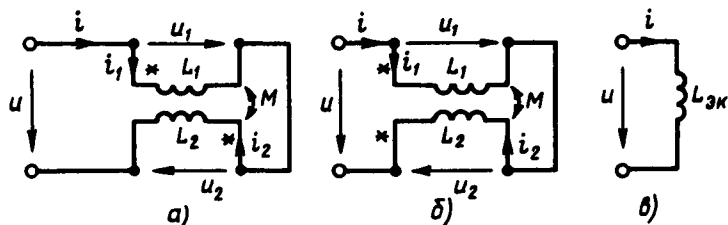


Рис. 2.53. Последовательное соединение связанных индуктивностей

тивности включены последовательно (рис. 2.53, а, б) или параллельно (рис. 2.54, а, б). В этих случаях участок цепи, содержащий связанные индуктивности, имеет два внешних вывода, т. е. представляет собой двухполюсник. Определим его комплексное входное сопротивление и схему замещения.

При последовательном соединении связанных индуктивностей их токи равны, а напряжение на входе данного участка цепи есть сумма напряжений на каждой из индуктивностей:

$$i = i_1 = i_2; u = u_1 + u_2. \quad (2.175)$$

Используя выражения (2.175) и компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.165), определяем зависимость между током и напряжением на зажимах участка цепи:

$$u = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = L_{\text{эк}} \frac{di}{dt}. \quad (2.176)$$

Как следует из выражения (2.176), участок цепи, содержащий последовательно включенные связанные индуктивности, может быть заменен эквивалентной индуктивностью (см. рис. 2.53, в)

$$L_{\text{эк}} = L_1 + L_2 \pm 2M, \quad (2.177)$$

где верхний знак (плюс) соответствует согласному включению, а нижний (минус) — встречному. Таким образом, при согласном включении связанных индуктивностей эквивалентная индуктивность

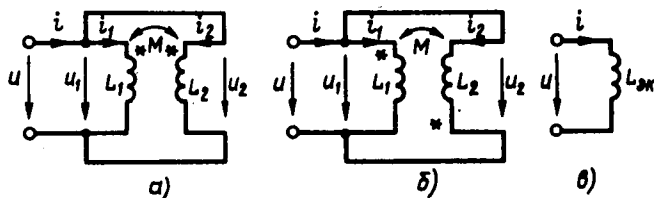


Рис. 2.54. Параллельное соединение связанных индуктивностей

получается больше, а при встречном — меньше, чем эквивалентная индуктивность участка цепи, содержащего последовательно включенные несвязанные индуктивности.

На использовании выражения (2.177) основан простой метод измерения взаимной индуктивности, в соответствии с которым сначала производят измерение эквивалентной индуктивности катушек при согласном $L_{\text{эк соглас}} = L_1 + L_2 + 2M$ и встречном $L_{\text{эк встреч}} = L_1 + L_2 - 2M$ включениях, а затем по формуле $M = (L_{\text{эк соглас}} - L_{\text{эк встреч}})/4$ рассчитывают M .

При параллельном соединении связанных индуктивностей (рис. 2.54, а, б) к их зажимам прикладывается одинаковое напряжение u , а входной ток рассматриваемого участка цепи складывается из токов обеих индуктивностей:

$$u = u_1 = u_2; \quad i = i_1 + i_2. \quad (2.178)$$

С учетом (2.178) и компонентных уравнений связанных индуктивностей (2.165) составляем систему уравнений

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$

$$u = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt};$$

$$i = i_1 + i_2,$$

решая которую находим зависимость между напряжением и током на зажимах участка цепи:

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \frac{di}{dt} = L_{\text{эк}} \frac{di}{dt}. \quad (2.179)$$

В соответствии с (2.179) участок цепи, представляющий собой две параллельно включенные связанные индуктивности, обладает эквивалентной индуктивностью (рис. 2.54, в)

$$L_{\text{эк}} = (L_1 L_2 - M^2) / (L_1 + L_2 \mp 2M), \quad (2.180)$$

причем верхний знак (минус) соответствует согласному включению, а нижний знак (плюс) — встречному.

При $L_1 = L_2 = L$ выражение (2.180) приводится к виду

$$L_{\text{эк}} = L(1 - k_M^2) / [2(1 \mp k_M)] = L(1 \pm k_M) / 2,$$

откуда следует, что $\lim_{k_M \rightarrow 1} L_{\text{эк}} = L$ при согласном и $\lim_{k_M \rightarrow 1} L_{\text{эк}} = 0$ при встречном включении индуктивностей.

При коротком замыкании одной из связанных индуктивностей,

например индуктивности L_2 (рис. 2.55, а), участок цепи, содержащий эти индуктивности, также представляет собой двухполюсник, напряжение и ток на входе которого совпадают с напряжением и током на зажимах индуктивности L_1 . Решая систему уравнений, описывающую процессы в данном участке цепи,

$$L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = u;$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = 0;$$

$$i = i_1,$$

находим

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di}{dt} = L_{\text{эк}} \frac{di}{dt}, \quad (2.181)$$

где $L_{\text{эк}} = (L_1 L_2 - M^2) / L_2$ — эквивалентная индуктивность участка цепи.

Таким образом, все рассмотренные идеализированные двухполюсники, содержащие связанные индуктивности, при любом воздействии могут быть заменены одной индуктивностью $L = L_{\text{эк}}$. Комплексное сопротивление этих двухполюсников имеет чисто реактивный характер: $Z = j\omega L_{\text{эк}}$.

Определим схему замещения участка цепи, содержащего две связанные индуктивности, включенные таким образом, что они имеют одну общую точку (рис. 2.56, а, б). Используя в качестве исходных компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.165), добавим к первому уравнению и вычтем из него член

$$\pm M \frac{di_1}{dt}, \text{ а ко второму уравнению — член } \pm M \frac{di_2}{dt}:$$

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt};$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt}.$$

После приведения подобных членов эти уравнения принимают вид

$$u_1 = (L_1 \mp M) \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt};$$

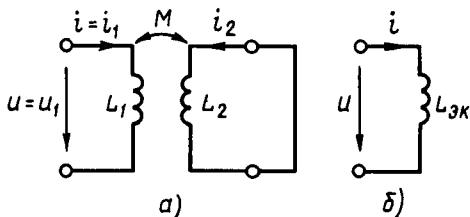


Рис. 2.55. Короткое замыкание одной из связанных индуктивностей

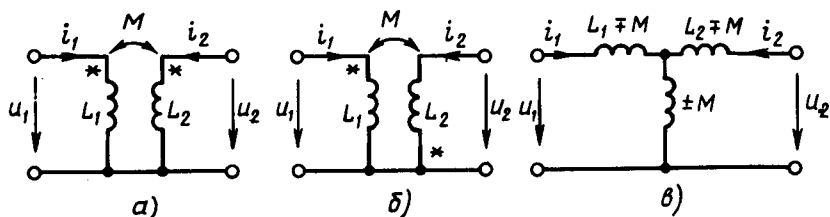


Рис. 2.56. Связанные индуктивности с общей точкой:
а — согласное включение; б — встречное включение; в — схема замещения без связанных индуктивностей

$$u_2 = (L_2 \mp M) \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}. \quad (2.182)$$

Здесь, как и в полученных ранее выражениях, верхний знак соответствует согласному, а нижний знак — встречному включению связанных индуктивностей.

Системе (2.182) может быть поставлена в соответствие схема замещения участка цепи, не содержащая связанных индуктивностей (рис. 2.56, в). Анализ уравнений (2.182) и схемы рис. 2.56, в показывает, что только при согласном включении и достаточно малом коэффициенте связи ($M < L_1$, $M < L_2$) все три индуктивности этой схемы положительны. При встречном включении или при согласном включении и большом коэффициенте связи ($M > L_1$ или $M > L_2$) одна из индуктивностей оказывается отрицательной. Очевидно, что такой схеме нельзя поставить в соответствие моделирующую цепь, состоящую из идеализированных элементов — индуктивностей. Эта схема является чисто расчетной: ее применение во многих случаях существенно упрощает анализ цепей со связанными индуктивностями.

В общем случае, когда участок цепи содержит связанные индуктивности, не имеющие общих точек, его можно заменить участком цепи без взаимных индуктивностей, но с управляемыми источниками (рис. 2.57, а и 2.58, а). В первом случае эквивалентная схема

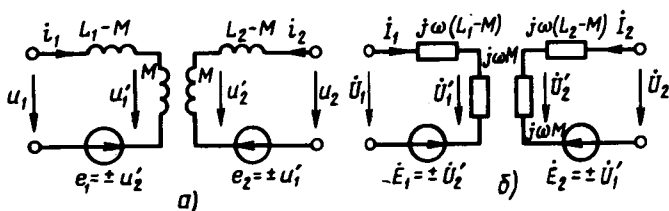


Рис. 2.57. Схема замещения связанных индуктивностей с источниками напряжения, управляемыми напряжением

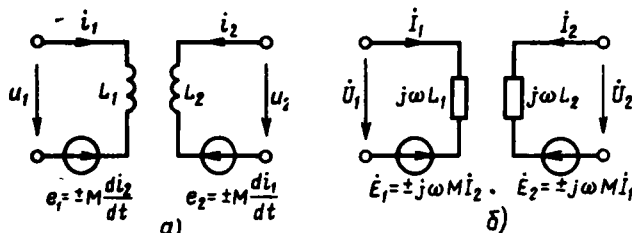


Рис. 2.58. Схемы замещения связанных индуктивностей с источниками напряжения, управляемыми производными токов

содержит источники напряжения, ЭДС которых равна напряжению на сопротивлении связи; во втором — управляемые источники напряжения, ЭДС которых пропорциональна производным токов цепи. Комплексные схемы замещения преобразованных цепей изображены на рис. 2.57, б и 2.58, б. В справедливости предлагаемых схем можно убедиться, составив по ним систему уравнений электрического равновесия преобразованной цепи и приведя ее к виду (2.165).

Используя приемы, подобные рассмотренным, можно построить также ряд других схем замещения участков цепей со связанными индуктивностями.

ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ ТРАНСФОРМАТОРАХ

Трансформатором называется устройство для передачи энергии из одной части электрической цепи в другую, основанное на использовании явления взаимной индукции. Трансформатор состоит из нескольких связанных индуктивных катушек (обмоток), которые для повышения их индуктивности и уменьшения потоков рассеяния размещены на общем ферромагнитном сердечнике (магнитопроводе). Одну из обмоток трансформатора обычно подключают к источнику энергии, а к остальным обмоткам подсоединяют различные нагрузки. Обмотка, подключенная к источнику энергии, называется **первичной**, остальные обмотки — **вторичными**.

В связи с тем что свойства магнитных материалов существенно зависят от напряженности пронизывающих их магнитных полей и, следовательно, от создающих эти поля токов, трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой в общем случае устройство с *нелинейными характеристиками*. Процессы в нем описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

В трансформаторе без ферромагнитного сердечника электрические процессы могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями, поэтому такой трансформатор называется **линейным**.

Линейный двухобмоточный трансформатор можно рассматри-

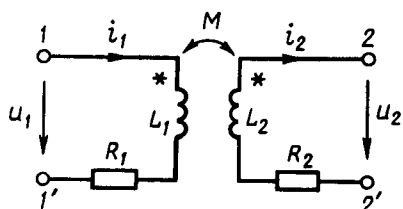


Рис. 2.59. Схема замещения линейного трансформатора

вать как две связанные катушки с линейной индуктивностью (рис. 2.59).

Сопротивления R_1 и R_2 учитывают потери энергии в обмотках трансформатора. При необходимости в эквивалентной схеме можно учесть также межвитковые и межобмоточные емкости, которые, как правило, не оказывают существенного влияния на работу трансформатора в рабочем диапазоне частот.

Понятие линейного трансформатора оказывается полезным не только при анализе процессов в трансформаторах без ферромагнитного сердечника. В ряде случаев, когда нелинейность магнитных материалов не оказывает существенного влияния на характеристики трансформатора с ферромагнитным сердечником, его приближенно рассматривают как линейный и представляют при анализе цепей с помощью линейной схемы замещения.

Используя компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.165), составим уравнения баланса напряжений идеализированной цепи, схема которой изображена на рис. 2.59:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \\ -u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (2.183)$$

Ограничивая рассмотрение случаем гармонического внешнего воздействия, перейдем в (2.183) от мгновенных значений токов и напряжений к их комплексным изображениям:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Система уравнений (2.184) при сделанных допущениях описывает соотношения между токами и напряжениями на зажимах трансформаторов различных типов, которые можно приближенно считать линейными, она служит основой для анализа различных цепей с трансформаторами при гармоническом внешнем воздействии.

Пусть в линейном двухобмоточном трансформаторе ток вторичной обмотки $I_2 = 0$ (режим холостого хода на выходе). Как следует из выражений (2.184), ток первичной обмотки I_1 в этом случае не равен нулю:

$$\dot{I}_1|_{I_2=0} = \dot{U}_1 / (R_1 + j\omega L_1) = \dot{I}_{10}. \quad (2.185)$$

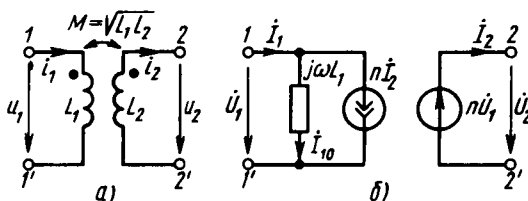


Рис. 2.60. Совершенный трансформатор (а) и его комплексная схема замещения (б)

Ток I_{10} , потребляемый трансформатором от источника в режиме холостого хода на выходе, называется током намагничивания. При заданной угловой частоте и конечной амплитуде напряжения первичной обмотки ток намагничивания уменьшается с ростом индуктивности первичной обмотки L_1 и обращается в нуль при $L_1 = \infty$.

В теории цепей большое значение имеют понятия «совершенного» и «идеального» трансформатора.

Совершенным трансформатором называется идеализированный четырехполюсный элемент, представляющий собой две связанные индуктивности с коэффициентом связи, равным единице. Из определения следует, что в таком трансформаторе (рис. 2.60, а) отсутствуют потоки рассеяния и не происходит запасаения энергии в электрическом поле или преобразования электрической энергии в другие виды энергии. Полагая в уравнениях (2.184) $R_1 = R_2 = 0$ и $M = \sqrt{L_1 L_2}$ и решая их относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, получаем уравнения, определяющие зависимости между токами и напряжениями обмоток совершенного трансформатора:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \sqrt{L_1/L_2} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{L_2/L_1} \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1}.\end{aligned}\quad (2.186)$$

Величина

$$n = \sqrt{L_2/L_1} = L_2/M = M/L_1, \quad (2.187)$$

входящая в уравнения (2.186), получила название коэффициента трансформации. Подставляя в (2.187) выражения для индуктивностей катушек (2.162) и их взаимных индуктивностей (2.163), находим, что коэффициент трансформации равен отношению числа витков вторичной обмотки N_2 к числу витков первичной обмотки N_1 :

$$n = \frac{N_2 \Phi_{21} / I_1}{N_1 \Phi_{11} / I_1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{21} + \Phi_{S1}} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (2.188)$$

(Напомним, что потоки рассеяния совершенного трансформатора равны нулю, т. е. $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$.)

Используя выражения (2.185) и (2.187), преобразуем уравнения (2.186) к виду

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 / n; \quad \dot{I}_1 = n \dot{I}_2 + \dot{I}_{10}, \quad (2.189)$$

где $\dot{I}_{10} = \dot{U}_1 / (j\omega L_1)$ — ток намагничивания совершенного трансформатора.

Согласно выражениям (2.189), отношение напряжения на вторичной обмотке совершенного трансформатора к напряжению на первичной обмотке равно коэффициенту трансформации и не зависит от сопротивления нагрузки. Выражениям (2.189) соответствует комплексная схема замещения совершенного трансформатора, приведенная на рис. 2.60, б.

Совершенный трансформатор, ток намагничивания которого равен нулю, называется идеальным. Из выражений (2.189) следует, что ток намагничивания совершенного трансформатора равен нулю только при $L_1 = \infty$. Подставляя в (2.189) $\dot{I}_{10} = 0$, получаем компонентные уравнения идеального трансформатора:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{n} \dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = n \dot{I}_2. \quad (2.190)$$

Аналогичный вид имеют и соотношения между мгновенными значениями токов и напряжений идеального трансформатора:

$$u_1 = \frac{1}{n} u_2; \quad i_1 = n i_2. \quad (2.191)$$

Комплексная схема замещения идеального трансформатора и его условное графическое изображение приведены на рис. 2.61, а, б.

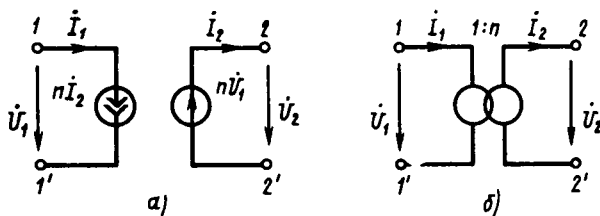


Рис. 2.61. Комплексная схема замещения (а) и условное графическое изображение (б) идеального трансформатора

Из компонентных уравнений (2.190) и (2.191) следует, что при любом сопротивлении нагрузки отношение напряжения вторичной обмотки к напряжению первичной обмотки идеального трансформатора равно отношению токов первичной и вторичной обмоток:

$$u_2/u_1 = i_1/i_2 = n; \dot{U}_2/\dot{U}_1 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = n. \quad (2.192)$$

В связи с тем что коэффициент трансформации n является действительным числом, напряжение и ток первичной обмотки имеют такие же начальные и мгновенные фазы, как соответственно напряжение и ток вторичной обмотки, и отличаются от них только по амплитуде (действующему значению).

Из выражений (2.192) следует, что мгновенная и комплексная мощности, потребляемые первичной обмоткой, равны мгновенной и комплексной мощностям, отдаваемым идеальным трансформатором в нагрузку:

$$u_1 i_1 = u_2 i_2; \dot{U}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{I}_2.$$

Очевидно, что КПД идеального трансформатора равен единице.

Если к зажимам 2 — 2' идеального трансформатора подключена нагрузка $Z_n = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, то его входное сопротивление со стороны зажимов 1 — 1'

$$Z = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/(n^2 \dot{I}_2) = Z_n/n^2. \quad (2.193)$$

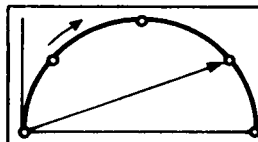
Таким образом, входное сопротивление идеального трансформатора имеет такой же характер, как и сопротивление нагрузки, и отличается от него по модулю в n^2 раз.

Способность трансформаторов преобразовывать сопротивления по модулю широко используется в радиоэлектронных устройствах для согласования сопротивления источника энергии с нагрузкой.

Пример 2.18. Рассмотрим применение трансформаторов для согласования источника энергии с нагрузкой. Пусть оптимальное (по какому-либо критерию) сопротивление нагрузки источника энергии $R_{н\text{ опт}}$. Сопротивление нагрузки, например динамического громкоговорителя, равно R_n и не подлежит регулировке. Если эту нагрузку подключить к источнику энергии через согласующий трансформатор с коэффициентом трансформации $n = \sqrt{R_n/R_{н\text{ опт}}}$, свойства которого близки к свойствам идеального трансформатора, то в соответствии с (2.193) входное сопротивление трансформатора $Z = R_n/n^2 = R_{н\text{ опт}}$ и, следовательно, источник энергии окажется нагруженным на сопротивление, равное оптимальному.

В отличие от идеального реальный трансформатор обладает потерями энергии, он характеризуется в ряде случаев значитель-

ными паразитными емкостями, индуктивность его обмоток имеет конечное значение, а потоки рассеяния не равны нулю. Как правило, при разработке конструкции трансформатора предпринимается ряд мер, направленных на приближение его свойств к свойствам идеального трансформатора. С этой целью, в частности, обмотки трансформатора размещают на ферромагнитном сердечнике с высокой эффективной магнитной проницаемостью. Применение сердечника увеличивает индуктивность обмоток и коэффициент связи, приводит к снижению тока намагничивания. Рациональным выбором материалов и конструкции трансформатора добиваются также уменьшения межвитковых и межобмоточных емкостей и снижения всех видов потерь энергии. В зависимости от степени приближения свойств реального трансформатора к свойствам идеального при анализе цепей его можно представлять одной из схем замещения (рис. 2.59 — 2.61) или привлекать более сложные, например нелинейные схемы замещения.



Частотные характеристики и резонансные явления

§ 3.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ПОНЯТИЕ О КОМПЛЕКСНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Задача анализа электрической цепи была сформулирована ранее как задача определения реакции цепи на заданное внешнее воздействие. Пусть для некоторой линейной электрической цепи это воздействие задано в виде токов и напряжений нескольких независимых источников тока и напряжения, а искомая реакция (отклик) цепи представляет собой совокупность токов или напряжений отдельных элементов (нагрузок). Вынесем из рассматриваемой цепи ветви, содержащие независимые источники тока и напряжения, а также ветви, токи или напряжения которых подлежат определению. Оставшуюся часть цепи, содержащую идеализированные пассивные элементы и, возможно, управляемые источники, представим в виде многополюсника (рис. 3.1, а).

Уточним понятия входов и выходов цепи. **Входными** будем называть пару зажимов (полюсов), к которым подключается каждый из независимых источников, задающих внешнее воздействие на цепь. Зажимы, служащие для подключения нагрузки, т. е. ветви, ток или напряжение которой необходимо определить, назовем **выходными**.

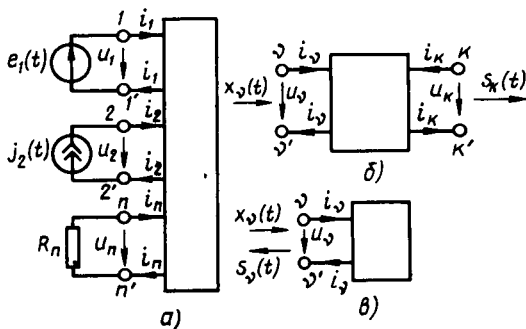


Рис. 3.1. К определению понятий входа и выхода цепи

Пары входных и выходных зажимов образуют соответственно входы и выходы цепи, точнее, входы и выходы многополюсника, который получается из цепи при вынесении из нее источников внешнего воздействия и нагрузок.

Деление зажимов на входные и выходные является в некоторой степени условным, так как одна и та же пара зажимов может одновременно быть и входной, и выходной (например, когда внешнее воздействие на цепь задается некоторым независимым источником напряжения и требуется определить ток ветви, содержащей этот источник). В связи с этим наряду с понятиями входа и выхода в теории цепей широко используется понятие стороны многополюсника.

Стороной многополюсника или портом называется пара зажимов, которые служат входом, выходом или и входом, и выходом одновременно.

Из определений входных и выходных зажимов следуют важные особенности зажимов, образующих порт многополюсника:

1) ток, протекающий через один зажим порта, равен току, вытекающему через другой зажим этого же порта;

2) между парами полюсов, принадлежащих к разным портам, не должно быть никаких внешних по отношению к многополюснику соединений (внутри многополюсника соединения естественно могут быть).

Зажимы, образующие одну сторону многополюсника, обозначим одинаковыми цифрами (со штрихом и без штриха) $1 — 1'$, $2 — 2'$, ..., $n — n'$ (рис. 3.1). В зависимости от числа сторон различают односторонние, двусторонние и n -сторонние многополюсники.

Пусть внешнее воздействие на цепь задано только на одной паре полюсов $v — v'$: $x(t) = x_v(t)$ и необходимо найти реакцию цепи также только на одной паре полюсов $k — k'$ (рис. 3.1, б): $s(t) = s_k(t)$. Поскольку процессы на остальных полюсах в данном случае интереса не представляют, их можно не выделять из цепи. Исследуемую цепь удобно рассматривать как двусторонний четырехполюсник. Если $v = k$, то цепь становится односторонней, т. е. превращается в двухполюсник (рис. 3.1, в).

Ограничимся рассмотрением случая гармонического внешнего воздействия; при этом от соотношений между мгновенными значениями реакции цепи $s_k(t)$ и внешнего воздействия $x_v(t)$ можно перейти к соотношениям между их комплексными изображениями.

По определению, комплексной частотной характеристикой (частотным коэффициентом передачи) цепи называется отношение комплексных изображений отклика и воздействия:

$$H_{kv}(j\omega) = \dot{S}_{mk} / \dot{X}_{mv} = \dot{S}_k / \dot{X}_v, \quad (3.1)$$

где $\dot{S}_{mk} \doteq s_k(t)$; $\dot{S}_k = \dot{S}_{mk}/\sqrt{2}$ — комплексные амплитуда и действующее значение реакции цепи; $\dot{X}_{mv} \doteq x_v(t)$; $\dot{X}_v = \dot{X}_{mv}/\sqrt{2}$ — комплексные амплитуда и действующее значение внешнего воздействия; k — номер выходных зажимов; v — номер входных зажимов.

Размерность комплексной частотной характеристики (КЧХ) равна отношению размерностей отклика цепи и внешнего воздействия. В зависимости от того, какие величины (токи или напряжения) рассматриваются в качестве откликов и внешних воздействий, КЧХ может иметь размерность сопротивления (внешнее воздействие — i_v , реакция цепи — u_k), проводимости (внешнее воздействие — u_v , реакция цепи — i_k) или быть безразмерной (внешнее воздействие — u_v и реакция цепи — u_k либо внешнее воздействие — i_v и реакция цепи — i_k).

Как и всякое комплексное число, КЧХ цепи может быть записана в показательной

$$H_{kv}(j\omega) = H_{kv}(\omega) e^{j\psi_{kv}(\omega)} \quad (3.2)$$

или алгебраической

$$H_{kv}(j\omega) = H'_{kv}(\omega) + jH''_{kv}(\omega) \quad (3.3)$$

форме. Представляя комплексные изображения отклика и воздействия в показательной форме

$$\begin{aligned} \dot{X}_{mv} &= \sqrt{2} \dot{X}_v = X_{mv} e^{j\psi_x} = \sqrt{2} X_v e^{j\psi_x}; \\ \dot{S}_{mk} &= \sqrt{2} \dot{S}_k = S_{mk} e^{j\psi_s} = \sqrt{2} S_k e^{j\psi_s} \end{aligned} \quad (3.4)$$

и подставляя (3.4) в выражение (3.1), определяем модуль и аргумент КЧХ:

$$\begin{aligned} H_{kv}(\omega) &= S_{mk}/X_{mv} = S_k/X_v; \\ \psi_{kv}(\omega) &= \psi_s - \psi_x. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, модуль КЧХ равен отношению амплитуд или действующих значений отклика цепи и внешнего воздействия, а ее аргумент представляет собой разность начальных фаз отклика и внешнего воздействия.

Если $\dot{X}_{mv} \equiv 1$, КЧХ определяется выражением

$$H_{kv}(j\omega)|_{\dot{X}_{mv}=1} = \dot{S}_{mk} e^{j\psi_s}, \quad (3.6)$$

следовательно, КЧХ цепи численно равна комплексной амплитуде реакции цепи на воздействие, описываемое *единичной гармонической функцией* $x_v(t) = \cos \omega t$, т. е. на воздействие гармонического тока или напряжения с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой.

Зависимости модуля $H_k(\omega)$ и аргумента $\psi_k(\omega)$ комплексной частотной характеристики от частоты ω называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристиками цепи. Из сравнения выражений (3.2) и (3.6) следует, что АЧХ и ФЧХ цепи характеризуют зависимости от частоты соответственно амплитуды и начальной фазы отклика цепи на внешнее воздействие с $X_{mv}=1$ и $\psi_x=0$. Таким образом, КЧХ сочетает в себе амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики цепи.

При графическом представлении комплексных частотных характеристик цепи обычно строят отдельно АЧХ и ФЧХ либо изображают зависимости от частоты вещественной $H'_k(\omega)$ и мнимой $H''_k(\omega)$ составляющих КЧХ, которые однозначно выражаются через $\psi_k(\omega)$ и $H_k(\omega)$:

$$H'_k(\omega) = H_k(\omega) \cos \psi_k(\omega); \quad H''_k(\omega) = H_k(\omega) \sin \psi_k(\omega).$$

Комплексную частотную характеристику можно изобразить и в виде одной зависимости — годографа КЧХ, построенного в комплексной плоскости. Годограф КЧХ представляет собой геометрическое место концов вектора $H_k(j\omega)$, соответствующих изменению частоты от $\omega=0$ до $\omega=\infty$ (рис. 3.2). На годографе указывают точки, соответствующие некоторым значениям частоты ω , и стрелкой показывают направление перемещения конца вектора $H_k(j\omega)$ при увеличении частоты. Как видно из рисунка, годограф КЧХ позволяет одновременно судить как об АЧХ и ФЧХ, так и о зависимости вещественной $H'_k(\omega)$ и мнимой $H''_k(\omega)$ составляющих КЧХ от частоты. Годограф КЧХ иногда называют амплитудно-фазовой характеристикой цепи.

Комплексные частотные характеристики цепи делятся на входные и передаточные. Когда отклик и внешнее воздействие рассматриваются на одних и тех же зажимах цепи (см. рис. 3.1, а), КЧХ называется входной. Если отклик и внешнее воздействие задаются на разных зажимах цепи (см. рис. 3.1, б), КЧХ называется передаточной. Различают два вида входных и четыре вида передаточных характеристик.

Если внешнее воздействие на цепь является током $x_v(t) = i_v(t) \div I_v$, а реакция — напряжением $s_v(t) = u_v(t) \div \dot{U}_v$, то КЧХ цепи представляет собой комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов $v-v'$:

$$H_{vv}(j\omega) = Z_{vv}(j\omega) = \dot{U}_v / I_v.$$

К входным характеристикам цепи относится также комплексная входная проводимость $Y_{vv}(j\omega) = I_v / \dot{U}_v$. При этом

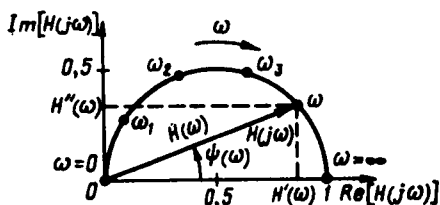


Рис. 3.2. Годограф КЧХ цепи

внешнее воздействие — напряжение $u_k(t) \doteq \dot{U}_k$, а реакция — ток $i_k(t) \doteq \dot{I}_k$.

Передаточными характеристиками цепи являются:
 комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_{kv}(j\omega) = \dot{U}_k / \dot{U}_v,$$

комплексный коэффициент передачи по току

$$G_{kv}(j\omega) = \dot{I}_k / \dot{I}_v,$$

комплексное передаточное сопротивление

$$Z_{kv}(j\omega) = \dot{U}_k / \dot{I}_v,$$

комплексная передаточная проводимость

$$Y_{kv}(j\omega) = \dot{I}_k / \dot{U}_v.$$

Очевидно, что комплексное входное сопротивление $Z_v(j\omega)$ и комплексное передаточное сопротивление $Z_{kv}(j\omega)$ имеют размерность сопротивления, комплексная входная проводимость $Y_v(j\omega)$ и комплексная передаточная проводимость $Y_{kv}(j\omega)$ — размерность проводимости. Комплексные коэффициенты передачи по току $G_{kv}(j\omega)$ и напряжения $K_{kv}(j\omega)$ являются безразмерными величинами.

В дальнейшем будет показано, что *КЧХ линейных цепей не зависят от амплитуды и начальной фазы внешнего воздействия, а определяются структурой цепи и параметрами входящих в нее элементов*. Знание КЧХ позволяет определить реакцию цепи $s_k(t) \doteq S_k$ на заданное гармоническое воздействие $x_v(t) \doteq \dot{X}_v$:

$$\dot{S}_k = H_{kv}(j\omega) \dot{X}_v.$$

В общем случае каждая линейная цепь характеризуется большим числом комплексных частотных характеристик, так как любая из рассмотренных разновидностей КЧХ может быть определена для различных сочетаний пар входных и выходных зажимов и при различных значениях сопротивлений нагрузки.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИДЕАЛИЗИРОВАННЫХ ДВУХПОЛЮСНЫХ ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Идеализированные пассивные элементы (сопротивление, емкость и индуктивность) являются двухполюсниками и поэтому обладают только входными комплексными частотными характеристиками: комплексным входным сопротивлением и комплексной входной проводимостью. В связи с тем что у данных элементов имеется только одна пара внешних выводов, нумерация выводов в обозначениях КЧХ может быть опущена.

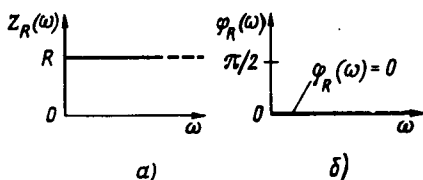


Рис. 3.3. АЧХ (а) и ФЧХ (б) комплексного сопротивления резистивного элемента

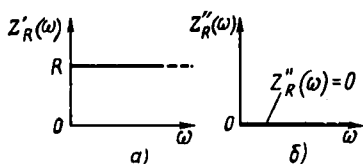


Рис. 3.4. Зависимости от частоты вещественной (а) и мнимой (б) составляющих $Z_R(j\omega)$

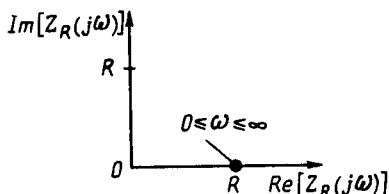


Рис. 3.5. Годограф $Z_R(j\omega)$

Для комплексного входного сопротивления индуктивности $Z_L(j\omega) = Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2}$ можно найти модуль комплексного входного сопротивления $Z_L(\omega) = \omega L$, его аргумент $\varphi_L(\omega) = \pi/2$, а также вещественную $Z'_L(\omega) = 0$ и мнимую $Z''_L(\omega) = \omega L$ составляющие (рис. 3.6).

Из АЧХ и ФЧХ входного сопротивления индуктивности (рис. 3.7) видно, что модуль входного сопротивления индуктивности линейно возрастает с ростом частоты, а аргумент равен $\pi/2$ и не зависит от частоты. Так как комплексное входное сопротивление индуктивности является чисто мнимой величиной, то при изменении частоты конец вектора $Z_L(j\omega)$ перемещается вдоль положительной

Сопротивление. Комплексное входное сопротивление резистивного элемента определяется выражением

$$Z_R(j\omega) = Z_R = R.$$

Модуль комплексного входного сопротивления $Z_R(\omega)$ и его аргумент $\varphi_R(\omega)$ не зависят от частоты:

$$Z_R(\omega) = R; \varphi_R(\omega) = 0,$$

поэтому АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления имеют вид прямых линий с постоянной ординатой (рис. 3.3, а, б). Зависимости от частоты вещественной и мнимой составляющих комплексного входного сопротивления

$$Z'_R(\omega) = R; Z''_R(\omega) = 0$$

представлены на рис. 3.4. Поскольку $Z_R(j\omega)$ не зависит от частоты, годограф входного сопротивления вырождается в точку на комплексной плоскости (рис. 3.5).

Индуктивность. Из выраже-

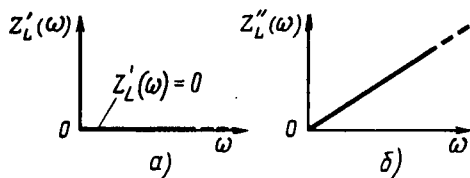


Рис. 3.6. Зависимости от частоты вещественной (а) и мнимой (б) составляющих $Z_L(j\omega)$

мнимой полуоси (рис. 3.8).

Емкость. Комплексное входное сопротивление емкости, как известно, определяется выражением

$$Z_C(j\omega) = Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно, модуль комплексного входного сопротивления емкости $Z_C(\omega) = 1/(\omega C)$, аргумент $\varphi_C(\omega) = -\pi/2$; его вещественная составляющая $Z_C'(\omega) = 0$, мнимая $Z_C''(\omega) = -1/(\omega C)$.

Как видно из рис. 3.9, с увеличением частоты модуль входного сопротивления емкости уменьшается и стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Аргумент комплексного входного сопротивления емкости равен

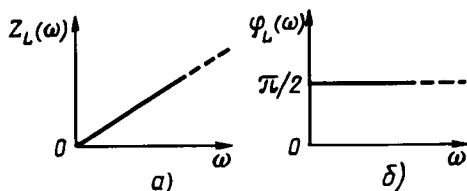


Рис. 3.7. АЧХ (а) и ФЧХ (б) комплексного сопротивления индуктивного элемента

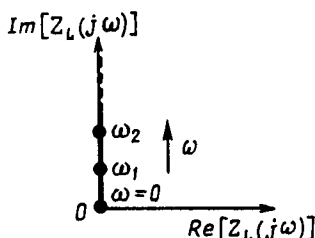


Рис. 3.8. Годограф $Z_L(j\omega)$

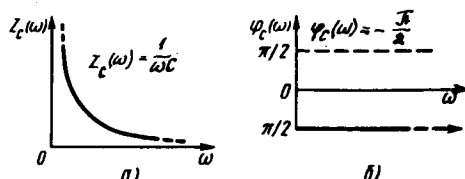


Рис. 3.9. АЧХ (а) и ФЧХ (б) комплексного сопротивления емкостного элемента

$-\pi/2$ и от частоты не зависит. Зависимости $Z_C'(\omega)$ и $Z_C''(\omega)$ приведены на рис. 3.10, годограф $Z_C(j\omega)$ изображен на рис. 3.11.

Аналогичным образом можно построить и частотные характеристики комплексной входной проводимости идеализированных пассивных элементов, причем в связи с тем, что емкость и индуктивность являются дуальными элементами, КЧХ входной

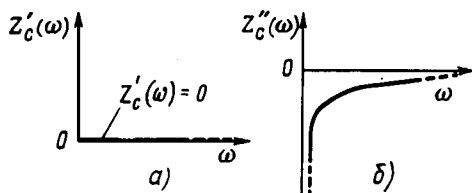


Рис. 3.10. Зависимости от частоты вещественной (а) и мнимой (б) составляющих $Z_C(j\omega)$

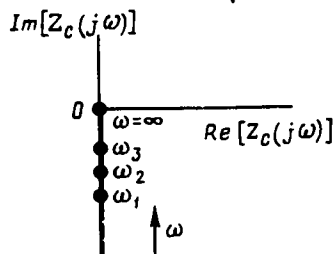


Рис. 3.11. Годограф $Z_C(j\omega)$

проводимости индуктивности имеют такой же вид, что и КЧХ входного сопротивления емкости (см. рис. 3.9 — 3.11), а КЧХ входной проводимости емкости — такой же вид, как и КЧХ входного сопротивления индуктивности (см. рис. 3.6 — 3.8).

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ С ОДНИМ РЕАКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рассмотрим комплексные частотные характеристики делителей напряжения с одним реактивным элементом (рис. 3.12). Цепи этого типа являются двусторонними и поэтому обладают как входными, так и передаточными характеристиками. Обобщенная комплексная схема замещения делителей напряжения рис. 3.12 приведена на рис. 3.13, а. Для определения произвольной комплексной частотной характеристики этих, как и любых других цепей, необходимо, используя уравнения электрического равновесия цепи в комплексной форме, выразить соответствующую реакцию цепи $\dot{S}_k \doteq s_k(t)$ через заданное внешнее воздействие $\dot{X}_v \doteq x_v(t)$, а затем из полученного соотношения найти $H_{kv}(j\omega) = \dot{S}_k / \dot{X}_v$.

Найдем, например, комплексное входное сопротивление делителя со стороны зажимов 1 — 1' при произвольной резистивной нагрузке R_n , подключенной к зажимам 2 — 2' (рис. 3.13, б). В данном случае внешним воздействием на цепь является ток $x_v(t) \doteq \dot{X}_v = \dot{I}_1 \doteq i_1(t)$, а реакцией цепи — напряжение $s_k(t) \doteq \dot{S}_k = \dot{U}_1 \doteq u_1(t)$, измеренные на вход-

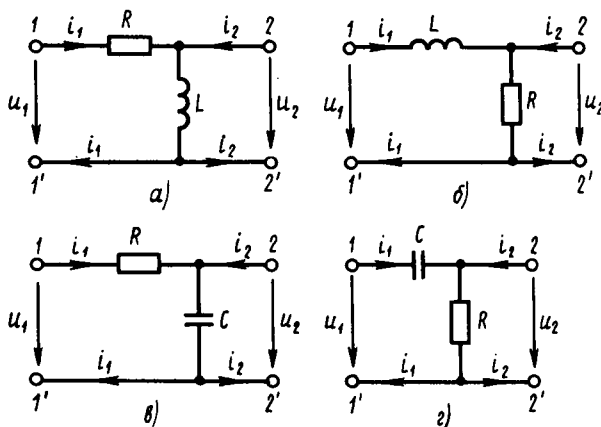


Рис. 3.12. Резистивно-индуктивные (а, б) и резистивно-емкостные (в, г) делители напряжения с одним реактивным элементом

ных зажимах цепи. Составив уравнения электрического равновесия рассматриваемой цепи в комплексной форме

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0; \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_3 - \dot{U}_1 &= 0; \\ Z_2 \dot{I}_3 + R_n \dot{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

и исключив из них токи $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$, выразим комплексное изображение напряжения на входе цепи через комплексное изображение входного тока:

$$\dot{U}_1 = \left(Z_1 + \frac{Z_2 R_n}{Z_2 + R_n} \right) \dot{I}_1,$$

откуда

$$H_k(j\omega) = Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_1 + \frac{Z_2 R_n}{Z_2 + R_n}. \quad (3.7)$$

Наибольший интерес представляют случаи, когда сопротивление нагрузки равно нулю (режим короткого замыкания на зажимах 2 — 2'):

$$Z_{11x}(j\omega) = Z_{11}(j\omega)|_{R_n=0} = Z_1,$$

или бесконечно велико (режим холостого хода на выходе):

$$Z_{11x}(j\omega) = Z_{11}(j\omega)|_{R_n=\infty} = Z_1 + Z_2. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом можно найти комплексные частотные характеристики цепи при любом варианте задания $x_k(t)$ и $s_k(t)$ при произвольной внешней нагрузке. Пусть внешнее воздействие на цепь задано в виде напряжения $u_2 \doteq \dot{U}_2$, а в качестве реакции цепи рассматривается напряжение $u_1 \doteq \dot{U}_1$ (рис. 3.13, в). Очевидно, что комплексная частотная характеристика цепи в данном случае будет представлять собой комплексный коэффициент передачи цепи по

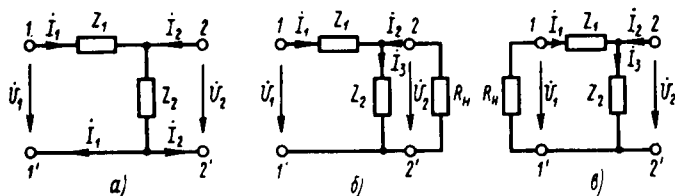


Рис. 3.13. К определению комплексных частотных характеристик делителей напряжения

напряжению от зажимов 2 — 2' к зажимам 1 — 1' при произвольной резистивной нагрузке R_n на зажимах 1 — 1':

$$H_{12}(j\omega) = K_{12}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{U}_2.$$

Используя уравнения электрического равновесия цепи

$$\begin{aligned} -\dot{U}_1 + Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_2 &= 0; \\ -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0; \\ \dot{U}_1 &= -R_n \dot{I}_1; \quad \dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_3, \end{aligned}$$

выразим комплексное изображение реакции цепи $\dot{U}_1$ через комплексное изображение внешнего воздействия $\dot{U}_2$:

$$\dot{U}_1 = \frac{R_n}{R_n + Z_1} \dot{U}_2,$$

откуда

$$K_{12}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 = R_n / (R_n + Z_1).$$

Интересно отметить, что при $Z_2 \neq 0$ напряжение на зажимах 1 — 1' определяется коэффициентом деления делителя напряжения, составленного из сопротивлений R_n и Z_1 , и не зависит от сопротивления Z_2 . В режиме холостого хода на зажимах 1 — 1' ($R_n = \infty$) комплексный коэффициент передачи цепи равен единице, а в режиме короткого замыкания ($R_n = 0$) — нулю.

Подставляя в выражения для комплексных частотных характеристик делителей напряжения значения сопротивлений Z_1 , Z_2 и представляя полученные выражения в показательной форме, можно определить АЧХ и ФЧХ всех рассматриваемых цепей. При построении АЧХ и ФЧХ необходимо каждый раз пытаться чисто качественно, без математических выкладок, на основе физических представлений объяснить ход соответствующих характеристик. Умение проводить такой анализ имеет важное значение в деятельности радиоинженера, так как позволяет во многих случаях избежать грубых ошибок в расчетах и сэкономить время, которое могло бы уйти на анализ заранее неудачных схемных решений.

Построим АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления делителя напряжения (см. рис. 3.12, а) со стороны зажимов 1 — 1' при холостом ходе на зажимах 2 — 2'. Подставляя в выражение (3.8) $Z_1 = R$, $Z_2 = j\omega L$ и переходя от алгебраической формы записи $Z_{112}(j\omega)$ к показательной

$$Z_{112}(j\omega) = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg(\omega L/R)}, \quad (3.9)$$

находим аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ входного сопротивления:

$$Z_{11x}(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi_{11x}(\omega) = \arctg(\omega L/R). \quad (3.10)$$

Непосредственное использование выражений (3.10) для построения АЧХ и ФЧХ весьма неудобно, так как для каждой пары значений параметров R и L необходимо строить отдельную кривую. Построение существенно упрощается при замене абсолютных значений частоты ω , комплексного сопротивления $Z_{11x}(j\omega)$ и полного сопротивления $Z_{11x}(\omega)$ относительными (*нормированными*) значениями:

$$\bar{\omega} = \omega L/R; \quad \bar{Z}_{11x}(j\bar{\omega}) = Z_{11x}(j\omega)/R; \quad \bar{Z}_{11x}(\bar{\omega}) = Z_{11x}(\omega)/R. \quad (3.11)$$

Из выражений (3.11) следует, что нормированная частота $\bar{\omega}$, нормированное комплексное сопротивление $\bar{Z}_{11x}(j\bar{\omega})$ и нормированное полное сопротивление $\bar{Z}_{11x}(\bar{\omega})$ являются безразмерными величинами. С учетом (3.11) найдем выражения для нормированных АЧХ и ФЧХ входного сопротивления рассматриваемой цепи (рис. 3.14):

$$\bar{Z}_{11x}(\bar{\omega}) = \sqrt{1 + \bar{\omega}^2}; \quad \varphi_{11x}(\bar{\omega}) = \arctg \bar{\omega}. \quad (3.12)$$

Годограф нормированного комплексного сопротивления этой цепи изображен на рис. 3.15.

Аналогичный вид имеют нормированные частотные характеристики входного сопротивления цепи, схема которой изображена на рис. 3.12, б.

Анализ полученных результатов показывает, что в области сравнительно низких частот, когда полное сопротивление индуктивности мало по сравнению с R ($\omega L \ll R$ или $\bar{\omega} \ll 1$), входные сопротивления цепей (см. рис. 3.12, а, б) определяются только значением R . Сопротивление индуктивности постоянному току равно

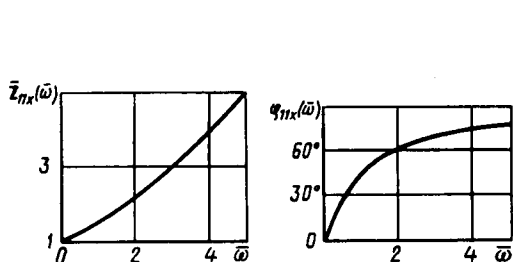


Рис. 3.14. Нормированные АЧХ и ФЧХ входного сопротивления цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а

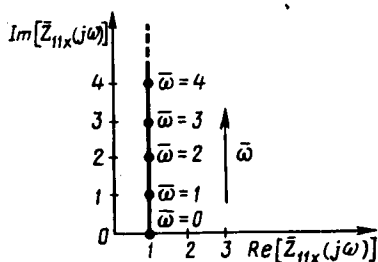


Рис. 3.15. Годограф $Z_{11x}(j\omega)$

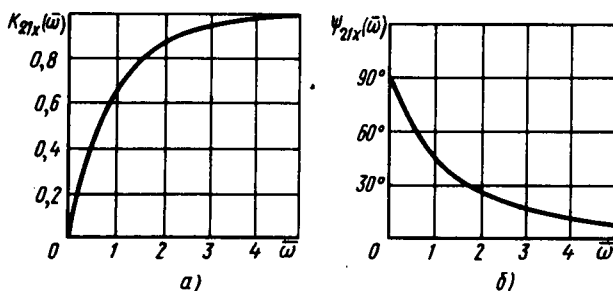


Рис. 3.16. АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению цепи, схема которой представлена на рис. 3.12, а

нулю, поэтому на нулевой частоте входное сопротивление цепей имеет чисто резистивный характер $[Z_{11x}(\omega) = R; \varphi_{11x}(\omega) = 0]$. С ростом частоты модуль и аргумент входного сопротивления плавно увеличиваются, причем на достаточно высоких частотах $\omega \gg 1$, входное сопротивление цепи определяется только сопротивлением индуктивности $[Z_{11x}(\omega = \infty) = \omega L = \infty, \varphi_{11x}(\omega = \infty) = \pi/2]$.

Найдем комплексную частотную характеристику цепи (см. рис. 3.12, а) в режиме холостого хода на зажимах 2 — 2' для случая, когда внешнее воздействие на цепь представляет собой напряжение на зажимах 1 — 1', а в качестве реакции цепи рассматривается напряжение на зажимах 2 — 2'.

Очевидно, что комплексная частотная характеристика цепи в данном случае имеет физический смысл комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению от зажимов 1 — 1' к зажимам 2 — 2' в режиме холостого хода на выходе:

$$H_{kv}(j\omega) = K_{21x}(j\omega) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.13)$$

Подставляя в выражение (3.13) $Z_1 = R$ и $Z_2 = j\omega L$, получаем

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - jR/(\omega L)}. \quad (3.14)$$

Переходя в (3.14) к показательной форме записи, находим аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи цепи по напряжению (рис. 3.16):

$$K_{21x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [R/(\omega L)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^{-2}}}; \quad (3.15)$$

$$\Psi_{21x}(\omega) = \arctg[R/(\omega L)] = \arctg \bar{\omega}.$$

Годограф комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению изображен на рис. 3.17.

На сравнительно низких частотах ($\bar{\omega} \ll 1$), когда полное сопротивление индуктивности существенно меньше R , входное сопротивление цепи имеет характер, близкий к чисто резистивному, а входной ток цепи I_1 совпадает по фазе с напряжением $\bar{U}_1$. Распределение

напряжения между плечами делителя пропорционально сопротивлению этих плеч, поэтому напряжение на индуктивности $\bar{U}_2$ весьма мало, т. е. модуль коэффициента передачи по напряжению близок к нулю. Напряжение на индуктивности $\bar{U}_2$ опережает по фазе ток индуктивности I_1 , а следовательно, и входное напряжение $\bar{U}_1$ на угол, близкий к $\pi/2$. С ростом частоты сопротивление индуктивности увеличивается и вследствие этого распределение напряжений между плечами делителя изменяется. На достаточно высоких частотах ($\bar{\omega} \gg 1$) практически все входное напряжение оказывается приложенным к индуктивности, поэтому модуль коэффициента передачи по напряжению $K_{21x}(\omega)$ в этом случае близок к единице, а аргумент $\Psi_{21x}(\omega)$ — к нулю.

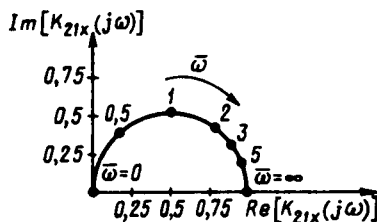


Рис. 3.17. Годограф $K_{21x}(j\omega)$

ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При исследовании частотных характеристик различных радиотехнических цепей нередко встречаются ситуации, когда частота и модуль КЧХ изменяются в очень широких пределах. В этих случаях для построения АЧХ удобно использовать логарифмические масштабы по осям $\bar{\omega}$ и $\bar{H}(\bar{\omega})$. По оси абсцисс при этом откладываются значения $\lg \bar{\omega}$, а по оси ординат — значения величины

$$H_{\text{дб}} = 20 \lg [\bar{H}(\bar{\omega})], \quad (3.16)$$

которую будем называть логарифмическим модулем КЧХ или модулем КЧХ в децибелах. Здесь, как и ранее, ω — нормированная угловая частота; $\bar{H}(\bar{\omega})$ — нормированный по какому-либо своему характерному значению (часто по максимальному) модуль комплексной частотной характеристики. Нормированные АЧХ-цепи, построенные в логарифмическом масштабе, называются логарифмическими амплитудно-частотными характеристиками цепи (ЛАЧХ).

Десятичный логарифм модуля нормированной, а следовательно, и безразмерной величины является также безразмерным. Для того чтобы выделить логарифмический модуль КЧХ в ряду других безразмерных величин, его условились измерять в специальных логарифмических единицах (единицах отношения) — децибелах.

Подробнее различные логарифмические единицы рассмотрены в гл. 7, а сейчас отметим лишь, что нормированному модулю КЧХ 10^N соответствует логарифмический модуль КЧХ $H_{\text{дБ}} = 20N$ (табл. 3.1). В тех случаях, когда модуль КЧХ принимает значение, относительно которого производилось нормирование, т. е. когда $\bar{H}(\bar{\omega}) = 1$,

Таблица 3.1. Значения логарифмического модуля КЧХ

Нормированный модуль КЧХ	Модуль КЧХ в децибелах
0,01	-40
0,1	-20
0,707	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
10	20
100	40
1000	60

модуль КЧХ в децибелах $H_{\text{дБ}} \approx 0$. При возрастании КЧХ относительно этого уровня модуль КЧХ в децибелах $H_{\text{дБ}}$ принимает положительные значения, а при уменьшении — отрицательные.

Логарифмические АЧХ комплексного входного сопротивления $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ и комплексного коэффициента передачи по напряжению $K_{\text{пн}}(j\omega)$ цепи (см. рис. 3.12, а) приведены на рис. 3.18. Сравнение рис. 3.18, а

и 3.14, а, 3.18, б и 3.16, а показывает, что применение логарифмического масштаба позволяет в компактной форме представить графики АЧХ в очень широком диапазоне частот; изображение таких графиков в линейном масштабе было бы крайне ненаглядным. В связи с тем что $\lg 0 = -\infty$, на ЛАЧХ не могут быть показаны значения $\bar{\omega} = 0$ и $\bar{H}(\bar{\omega}) = 0$. В области малых значений $\bar{\omega}$ и $\bar{H}(\bar{\omega})$ изображения по осям растягиваются, а в области больших значений — сжимаются.

Применение ЛАЧХ позволяет выявить некоторые общие свойства АЧХ-цепей с одним реактивным элементом. Так, анализ выражения (3.12) для нормированного значения модуля комплексного входного сопротивления цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, позволяет утверждать, что в области низких частот ($\bar{\omega} < 1$) зависимость логарифмического модуля КЧХ от логарифма нормированной частоты $\lg \bar{\omega}$

$$Z_{\text{дБ}} = 20 [\lg \bar{Z}_{\text{вх}}(\bar{\omega})] = 20 \lg \sqrt{1 + \bar{\omega}^2}$$

может быть приближенно представлена прямой $Z_{\text{дБ}} \approx 20 \lg 1 = 0$, а в области высоких частот ($\bar{\omega} > 1$) — прямой $Z_{\text{дБ}} \approx 20 \lg \bar{\omega}$. При изменении частоты в два раза (такой диапазон изменения частот называется октавой) значение $Z_{\text{дБ}}$ в области $\bar{\omega} > 1$ изменится на $20 \lg 2 \approx 6$ дБ. При изменении частоты в 10 раз (такой диапазон называется декадой) значение $Z_{\text{дБ}}$ изменится на $20 \lg 10 = 20$ дБ. Таким образом, ЛАЧХ входного сопротивления рассматриваемой цепи может быть приближенно представлена отрезками двух прямых: прямой, параллельной оси $\lg \bar{\omega}$, при $\bar{\omega} < 1$ и прямой, имеющей наклон 6 дБ/окт или 20 дБ/дек, при $\bar{\omega} > 1$ (на рис. 3.18, а показаны

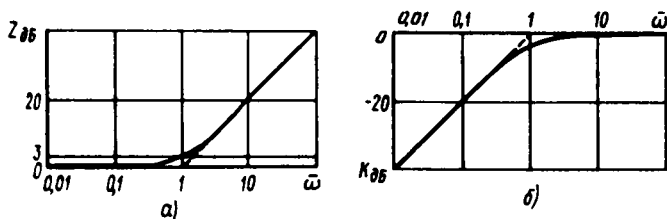


Рис. 3.18. ЛАЧХ комплексного входного сопротивления (а) и комплексного коэффициента передачи по напряжению (б) цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а

штриховой линией). Максимальная ошибка при приближенной замене ЛАЧХ двумя отрезками прямых достигается при $\omega = 1$, она составляет $20 \lg \sqrt{2} = 3$ дБ. Аналогичным образом, с помощью отрезков прямых, параллельных оси частот или имеющих наклон ± 6 дБ/окт (± 20 дБ/дек), могут быть представлены ЛАЧХ любых цепей с одним реактивным элементом. В частности, график ЛАЧХ комплексного коэффициента передачи цепи рис. 3.12, а по напряжению, приведенный на рис. 3.18, б, в области низких частот может быть приближенно заменен прямой, имеющей наклон 6 дБ/окт, а в области высоких частот — прямой, параллельной оси частот.

ПОНЯТИЕ О РЕЗОНАНСЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Амплитудно-частотные характеристики пассивных линейных цепей с одним реактивным элементом имеют вид монотонно изменяющихся кривых, поэтому амплитуда отклика этих цепей монотонно изменяется при увеличении или уменьшении частоты внешнего воздействия. Более сложный характер имеют процессы в электрических цепях, содержащих реактивные элементы различных типов. Амплитуда отклика этих цепей может резко изменяться, когда частота внешнего воздействия достигает некоторых определенных значений. Явление резкого возрастания амплитуды отклика цепи при приближении частоты внешнего воздействия к определенному значению называется резонансом.

Такое определение резонанса заимствовано из механики и называется неудобным для применения в теории цепей в связи с тем, что в общем случае различные величины, характеризующие процессы в электрической цепи, достигают максимальных значений при различных, хотя, возможно, и очень близких частотах. Возникает вопрос о том, какую именно из этих частот считать резонансной, или, другими словами, закон изменения какой величины следует наблюдать для решения вопроса о том, находится ли цепь в режиме резонанса. В отличие от принятых в механике амплитудных критериев резонанса в теории цепей, как правило, применяют фазовый критерий резонанса, при этом под *резонансом понимают такой*

режим работы электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором ее комплексное входное сопротивление имеет чисто резистивный характер, и, следовательно, сдвиг фаз между током и напряжением на входе равен нулю.

Частота, соответствующая фазовому критерию резонанса, может совпадать с частотой, соответствующей одному из амплитудных критериев резонанса. В частности, амплитуда тока последовательного колебательного контура принимает максимальное значение на частоте, когда ток и напряжение на входе контура совпадают по фазе, причем эта частота будет несколько выше частоты, на которой амплитуда напряжения на емкости достигает максимального значения и несколько ниже частоты, соответствующей максимуму амплитуды напряжения на индуктивности.

Для устранения неоднозначности при определении резонанса в дальнейшем будем использовать только фазовый критерий резонанса, и под резонансной частотой цепи будем понимать только значение частоты, соответствующее этому критерию, т. е. частоту, при которой входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер.

Электрические цепи, в которых имеют место явления резонанса, называют резонансными или колебательными.

Простейшей электрической цепью, в которой наблюдается явление резонанса, является одиночный колебательный контур, представляющий собой замкнутую цепь, состоящую из конденсатора и индуктивной катушки (рис. 3.19). В зависимости от способа подключения источника энергии различают

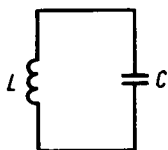


Рис. 3.19. Принципиальная электрическая схема одиночного колебательного контура

последовательный (рис. 3.20, а) и параллельный (рис. 3.20, б) колебательные контуры. Ранее, при изучении последовательной RLC -цепи, было установлено, что ее входное сопротивление может иметь чисто резистивный характер, когда мнимая составляющая входного сопротивления емкости по абсолютному значению равна мнимой составляющей входного сопротивления индуктивности ($x_L = |x_C|$). В этом случае напряжение на емкости равно по амплитуде и противоположно по фазе напряжению на индуктивности

($\dot{U}_C = -\dot{U}_L$), а напряжение на входе цепи $\dot{U}$ равно напряжению на сопротивлении $\dot{U}_R$ и совпадает по фазе с входным током $\dot{I}$ (см. рис. 2.21, в). Такая разновидность резонанса получила название **резонанса напряжений**.

В параллельной RLC -цепи входная проводимость может иметь чисто резистивный характер, когда мнимые составляющие входных проводимостей емкости и индуктивности равны по абсолютному значению ($b_C = |b_L|$). В этом случае ток индуктивности равен по амплитуде и противоположен по фазе току емкости ($\dot{I}_L = -\dot{I}_C$), а входной ток цепи $\dot{I}$ равен току через сопротивление $\dot{I}_R$ и совпадает

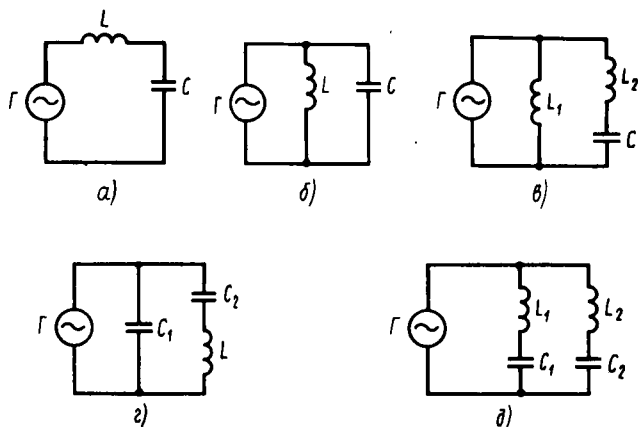


Рис. 3.20. Способы подключения источника энергии к одиночному колебательному контуру

по фазе с входным напряжением $\dot{U}$ (см. рис. 2.23, в). Такая разновидность резонанса называется **резонансом токов**.

Если каждый из реактивных элементов одиночного колебательного контура (конденсатор или индуктивную катушку) представить в виде последовательного соединения двух элементов соответствующего типа, то число вариантов подключения источника энергии к контуру увеличивается (рис. 3.20, в — д). Параллельные колебательные контуры, построенные таким методом, получили названия: *контур с разделенной индуктивностью* (рис. 3.20, в), *контур с разделенной емкостью* (рис. 3.20, г) и *контур с разделенными емкостью и индуктивностью* (рис. 3.20, д). В отличие от сложных параллельных колебательных контуров (рис. 3.20, в — д) колебательный контур, изображенный на рис. 3.20, б, обычно называют **параллельным контуром основного вида** или **простым параллельным контуром**.

§ 3.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНТУРА И ИХ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

Последовательный колебательный контур представляет собой электрическую цепь, содержащую индуктивную катушку и конденсатор, включенные последовательно с источником энергии (рис. 3.20, а). Для анализа процессов, протекающих в контуре, необходимо перейти от его принципиальной схемы к схеме замещения путем замены каждого реального элемента его схемой замещения.

Воспользуемся простейшими последовательной и параллельной схемами замещения индуктивной катушки (рис. 3.21, а, б) и конденсатора (рис. 3.22, а, б), содержащими наряду с индуктивностью

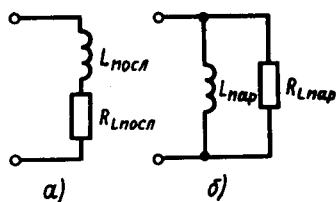


Рис. 3.21. Последовательная (а) и параллельная (б) схемы замещения индуктивной катушки

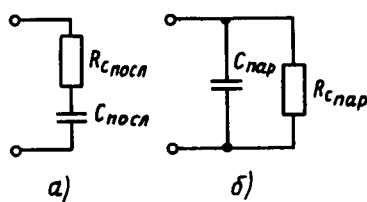


Рис. 3.22. Последовательная (а) и параллельная (б) схемы замещения конденсатора

$L_{\text{посл}}$, $L_{\text{пар}}$ или емкостью $C_{\text{посл}}$, $C_{\text{пар}}$ сопротивления $R_{L \text{ посл}}$ и $R_{C \text{ посл}}$ или $R_{L \text{ пар}}$ и $R_{C \text{ пар}}$, учитывающие все виды потерь в индуктивной катушке и конденсаторе. Соотношения между параметрами элементов таких схем приведены в табл. 2.1.

Рассмотрим векторные диаграммы, иллюстрирующие фазовые соотношения между токами и напряжениями последовательных RL - и RC -цепей, моделирующих индуктивную катушку и конденсатор (см. рис. 2.18, з, д; 2.19, з, д). Из диаграмм видно, что вследствие потерь сдвиг фаз между током и напряжением на зажимах индуктивной катушки и конденсатора меньше $\pi/2$. Очевидно, что чем ближе к $\pi/2$ будет сдвиг фаз $|\varphi|$ между током и напряжением, тем ближе будут свойства этих реальных элементов к свойствам индуктивности и емкости. Количественно степень приближения свойств реальных элементов к свойствам идеализированных элементов оценивается их добротностью, которая определяется как модуль тангенса сдвига фаз между током и напряжением на зажимах соответствующего элемента:

$$Q = |\operatorname{tg} \varphi| = \operatorname{tg} |\varphi|.$$

Из рис. 2.18, з и 2.19, з видно, что добротность индуктивной катушки

$$Q_L = x_L / R_{L \text{ посл}} = \omega L_{\text{посл}} / R_{L \text{ посл}}, \quad (3.17)$$

а добротность конденсатора

$$Q_C = |x_C| / R_{C \text{ посл}} = 1 / (\omega R_{C \text{ посл}} C_{\text{посл}}). \quad (3.18)$$

Обычно в колебательных контурах радиотехнических устройств стремятся использовать элементы с высокой добротностью, причем добротность индуктивных катушек лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен, а добротность конденсаторов — от нескольких сотен до нескольких тысяч. Таким образом, между параметрами рассматриваемых элементов последовательных схем замещения выполняются соотношения

$$\omega L_{\text{посл}} / R_{L \text{ посл}} \gg 1; \quad \omega C_{\text{посл}} R_{C \text{ посл}} \ll 1. \quad (3.19)$$

Экспериментально установлено, что величины $L_{\text{посл}}$ и $R_{L \text{ посл}}$ в достаточно широком диапазоне частот можно приближенно считать не зависящими от частоты.

В соответствии с формулами, приведенными в табл. 2.1, параметры элементов параллельной схемы замещения индуктивной катушки могут быть выражены через параметры элементов последовательной схемы замещения:

$$L_{\text{пар}} = L_{\text{посл}} \left[1 + \left(\frac{R_{L \text{ посл}}}{\omega L_{\text{посл}}} \right)^2 \right]; \quad R_{L \text{ пар}} = R_{L \text{ посл}} \left[1 + \left(\frac{\omega L_{\text{посл}}}{R_{L \text{ посл}}} \right)^2 \right].$$

С учетом соотношений (3.19) эти выражения можно упростить:

$$L_{\text{пар}} \approx L_{\text{посл}} = L; \quad R_{L \text{ пар}} \approx \omega^2 L^2 / R_{L \text{ посл}}. \quad (3.20)$$

Таким образом, у индуктивных катушек с высокой добротностью индуктивности параллельной и последовательной схем замещения приблизительно одинаковы и могут считаться не зависящими от частоты; сопротивление в параллельной схеме замещения обратно пропорционально сопротивлению последовательной схемы замещения и сильно зависит от частоты.

Аналогичным образом находим соотношения между параметрами элементов параллельной и последовательной схем замещения конденсатора:

$$C_{\text{пар}} = C_{\text{посл}} / [1 + (\omega C_{\text{посл}} R_{C \text{ посл}})^2] \approx C_{\text{посл}} = C; \quad (3.21)$$

$$R_{C \text{ пар}} = R_{C \text{ посл}} [1 + 1/(\omega C_{\text{посл}} R_{C \text{ посл}})^2] \approx 1/(\omega^2 C^2 R_{C \text{ посл}}).$$

Экспериментально установлено, что параметры $R_{C \text{ пар}}$ и $C_{\text{пар}}$ можно приближенно считать не зависящими от частоты.

Из соотношений (3.21) следует, что у конденсаторов с высокой добротностью емкости в последовательной и параллельной схемах замещения приблизительно одинаковы и могут считаться не зависящими от частоты. Сопротивление $R_{C \text{ посл}}$ обратно пропорционально сопротивлению $R_{C \text{ пар}}$:

$$R_{C \text{ посл}} \approx 1/(\omega^2 C^2 R_{C \text{ пар}}) \quad (3.22)$$

и зависит от частоты.

Между параметрами сопротивлений потерь индуктивной катушки R_L и конденсатора R_C , как правило, выполняются соотношения

$$R_{L \text{ посл}} \gg R_{C \text{ посл}}; \quad R_{L \text{ пар}} \ll R_{C \text{ пар}}. \quad (3.23)$$

Для анализа процессов в последовательном колебательном контуре удобно воспользоваться последовательными схемами замеще-

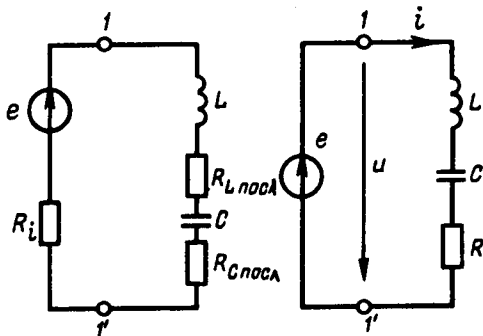


Рис. 3.23. Схемы замещения последовательного колебательного контура

источника на характеристики контура) и заменить сопротивление потерь конденсатора $R_{C \text{ посл}}$ и индуктивной катушки $R_{L \text{ посл}}$ сопротивлением потерь контура

$$R = R_{L \text{ посл}} + R_{C \text{ посл}} \approx R_{L \text{ посл}}, \quad (3.24)$$

которое можно считать практически не зависящим от частоты (рис. 3.23, б).

Таким образом, с учетом принятых допущений исследование процессов в последовательном колебательном контуре сводится к исследованию последовательной RLC -цепи, к зажимам которой подключен идеальный источник напряжения. Ток, отдаваемый этим источником, назовем током контура; напряжение, создаваемое источником на зажимах $1 - 1'$, — напряжением контура. Под входным сопротивлением контура будем понимать входное сопротивление последовательной RLC -цепи относительно зажимов $1 - 1'$, определяемое выражением (2.96).

РЕЗОНАНСНАЯ ЧАСТОТА, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ДОБРОТНОСТЬ КОНТУРА

В соответствии с определением резонансной частоты мнимая составляющая входного сопротивления последовательного колебательного контура

$$\text{Im}[Z] = \text{Im}\{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]\} = \omega L - 1/(\omega C) = x_L + x_C \quad (3.25)$$

должна быть равна нулю, когда угловая частота внешнего воздействия ω равна резонансной частоте контура ω_0 . Полагая в выражении (3.25) $\omega = \omega_0$, получаем уравнение для нахождения резонансной частоты последовательного колебательного контура:

$$\text{Im}[Z]_{\omega=\omega_0} = [x_L + x_C]_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L - 1/(\omega_0 C) = 0, \quad (3.26)$$

откуда

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}; f_0 = \omega_0/(2\pi) = 1/(2\pi\sqrt{LC}). \quad (3.27)$$

На резонансной частоте полное сопротивление емкости

$$z_C|_{\omega=\omega_0} = |x_C|_{\omega=\omega_0} = 1/(\omega_0 C) = \rho \quad (3.28)$$

равно полному сопротивлению индуктивности

$$z_L|_{\omega=\omega_0} = |x_L|_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L = \rho. \quad (3.29)$$

Величину ρ , равную полному сопротивлению емкости или индуктивности контура на резонансной частоте, называют характеристическим сопротивлением контура. Подставляя в (3.28) и (3.29) выражение для резонансной частоты контура, убеждаемся, что значение ρ не зависит от частоты и определяется только параметрами реактивных элементов контура:

$$\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{L/C}. \quad (3.30)$$

На резонансной частоте входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и равно сопротивлению потерь контура $Z|_{\omega=\omega_0} = R$.

Амплитуда тока контура на резонансной частоте

$$I_m = U_m/R, \quad (3.31)$$

где U_m — амплитуда напряжения на контуре. Амплитуды напряжений на реактивных элементах контура на резонансной частоте определяются произведением характеристического сопротивления на амплитудное значение тока:

$$U_{Cm}|_{\omega=\omega_0} = U_{Lm}|_{\omega=\omega_0} = \rho I_m.$$

Отношение амплитуды напряжения на реактивном элементе контура к амплитуде напряжения на контуре на резонансной частоте называется добротностью контура:

$$Q = U_{Cm}/U_m|_{\omega=\omega_0} = U_{Lm}/U_m|_{\omega=\omega_0} = \rho/R. \quad (3.32)$$

Используя выражение (3.30), добротность колебательного контура Q можно выразить через параметры его элементов:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.33)$$

Как правило, добротность колебательных контуров современной радиотехнической аппаратуры лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен, поэтому в режиме резонанса напряжение на реактивных элементах контура может во много раз превы-

шать приложенное к контуру напряжение. Как следует из выражения (3.32), при неизменной резонансной частоте ω_0 добротность контура растет с увеличением характеристического сопротивления контура и с уменьшением сопротивления потерь.

Добротность колебательного контура может быть выражена через добротности его элементов. Действительно, рассматривая величину $d=1/Q=R/\rho$ и учитывая, что сопротивление потерь контура равно сумме сопротивлений потерь индуктивной катушки и конденсатора в последовательных схемах замещения, находим

$$1/Q = [R_L \text{ посл.}/(\omega_0 L)] + \omega_0 C R_C \text{ посл.} \quad (3.34)$$

Сравнивая это выражение с соотношениями (3.17), (3.18), устанавливаем, что величины $\omega_0 L/R_L \text{ посл.}$ и $1/(\omega_0 C R_C \text{ посл.})$ равны добротностям индуктивной катушки и конденсатора на резонансной частоте:

$$Q_{L_0} = \omega_0 L/R_L \text{ посл.}; \quad Q_{C_0} = 1/(\omega_0 C R_C \text{ посл.}). \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в (3.34), получаем простое выражение, связывающее добротность контура с добротностями его элементов на резонансной частоте:

$$1/Q = 1/Q_{L_0} + 1/Q_{C_0}. \quad (3.36)$$

Анализ выражения (3.36) показывает, что *добротность контура не может превышать добротности его элементов на резонансной частоте*. Как правило, $Q_{C_0} \gg Q_{L_0}$, поэтому добротность контура в основном определяется добротностью индуктивной катушки на резонансной частоте.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Пусть последовательный колебательный контур настроен на частоту источника энергии, т. е. параметры реактивных элементов контура выбраны таким образом, что резонансная частота ω_0 совпадает с частотой внешнего воздействия ω . Определим мгновенные значения энергии, запасаемой реактивными элементами контура, и энергию, потребляемую им от источника.

Как было установлено, на резонансной частоте напряжение и ток контура совпадают по фазе (рис. 3.24, а): $u = \sqrt{2} U \cos(\omega_0 t + \psi)$, $i = \sqrt{2} I \cos(\omega_0 t + \psi)$, а их амплитуды связаны между собой соотношением (3.31). Мгновенное значение энергии, запасаемой в индуктивности, определяется ее током

$$i_L = i = \sqrt{2} I \cos(\omega_0 t + \psi), \quad (3.37)$$

а мгновенное значение энергии, запасаемой в емкости, — напряжением емкости (рис. 3.24, б)

$$u_c = \sqrt{2} I \frac{1}{\omega_0 C} \cos\left(\omega_0 t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} I \rho \sin(\omega_0 t + \psi). \quad (3.38)$$

Подставляя (3.37), (3.38) в выражения (1.25) и (1.18), получаем

$$\begin{aligned} w_L &= Li_L^2/2 = LI^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi) = LI^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \psi)]/2, \\ w_C &= Cu_C^2/2 = CI^2 \rho^2 \sin^2(\omega_0 t + \psi) = LI^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \psi)]/2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Зависимости мгновенных значений энергии, запасаемой в реактивных элементах контура, от времени приведены на рис. 3.24, в. Как видно из временных диаграмм и выражений (3.39), энергия, запасаемая в емкости и индуктивности, имеет две составляющие: постоянную $LI^2/2$ и переменную, изменяющуюся во времени по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$. Переменные составляющие энергий емкости и индуктивности находятся в противофазе так, что максимальным значениям энергии, запасаемой в емкости, соответствуют нулевые значения энергии, запасенной в индуктивности, и наоборот. Несмотря на то что w_C и w_L являются функциями времени, суммарная энергия, запасенная в реактивных элементах цепи, постоянна:

$$W_{\text{зпп}} = w_L + w_C = LI^2 = \text{const.} \quad (3.40)$$

Емкость и индуктивность контура при резонансе непрерывно обмениваются энергией. Обмен энергией происходит без участия источника энергии: сдвиг фаз между током и напряжением в этом режиме равен нулю, поэтому реактивная мощность, отдаваемая источником, также равна нулю, и обмена энергией между контуром и источником не происходит.

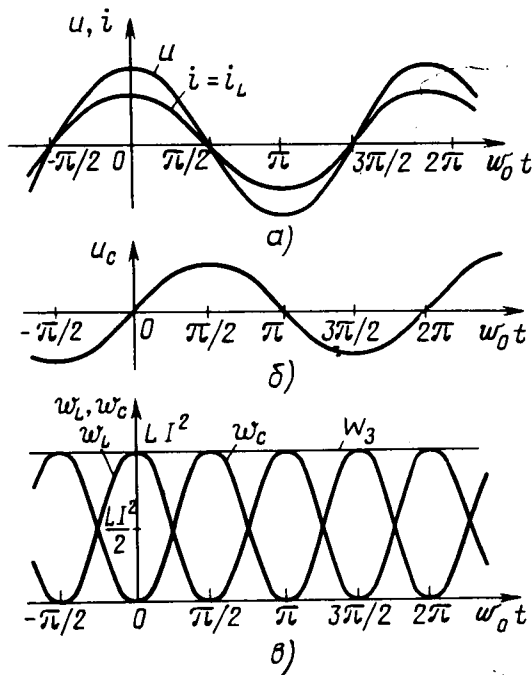


Рис. 3.24. Временные диаграммы последовательного колебательного контура при $\omega = \omega_0$

Энергия, потребляемая контуром от источника за промежуток времени, равный периоду внешнего гармонического воздействия T :

$$W_{\pi} = \int_0^T u i dt = 2RI^2 \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \psi) dt = RI^2 T. \quad (3.41)$$

Из выражения (3.41) следует, что энергия, потребляемая контуром от источника, равна энергии, необратимо теряемой в сопротивлении потерь контура R . В идеальном случае, при отсутствии потерь в контуре ($R=0$), энергия, потребляемая контуром от источника, равна нулю, колебательный процесс в таком контуре будет продолжаться неограниченно долго и при отключении контура от источника (при закорачивании зажимов $I - I'$). Таким образом, *колебательный процесс в контуре без потерь должен иметь незатухающий характер*. На практике при отключении контура от источника колебательный процесс в нем затухает, так как при каждом цикле колебаний часть электрической энергии, запасенной в контуре, необратимо преобразуется в другие виды энергии. Если контур с потерями подключить к источнику энергии, то амплитуда колебаний в установившемся режиме будет неизменной, так как потери энергии в контуре компенсируются поступлением энергии от источника, и суммарная энергия, связанная с контуром, сохраняет неизменное значение.

Отношение энергии, запасаемой в реактивных элементах контура, к энергии, потребляемой контуром от источника за период T ,

$$W_{\text{зап}}/W_{\pi} = LI^2/(RI^2 T) = L/(RT).$$

Принимая во внимание, что при резонансе период внешнего гармонического воздействия $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$, получаем

$$W_{\text{зап}}/W_{\pi} = \omega_0 L/(2\pi R) = Q/(2\pi),$$

откуда

$$Q = 2\pi W_{\text{зап}}/W_{\pi}. \quad (3.42)$$

Таким образом, добротность последовательного колебательного контура равна отношению энергии, запасаемой в контуре, к энергии, потребляемой контуром за период колебаний, умноженному на 2π . Выражение (3.42) носит общий характер и может применяться для оценки добротности колебательных систем самых различных типов (в том числе и неэлектрических).

ВХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При исследовании комплексных частотных характеристик последовательный колебательный контур удобно представлять в виде многополюсника с тремя парами выводов (рис. 3.25, а, б). Внешнее

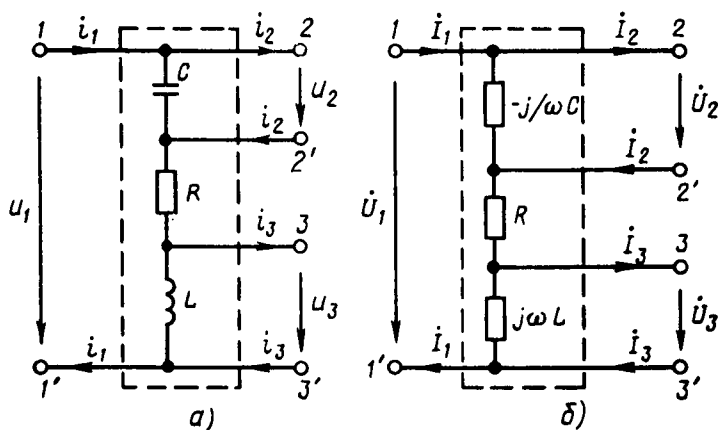


Рис. 3.25. К определению входных и передаточных характеристик последовательного колебательного контура

воздействие на контур обычно задают в виде напряжения $u_1 \doteq \dot{U}_1$, приложенного к зажимам $1 - 1'$, а в качестве отклика цепи рассматривают входной ток цепи $i_1 \doteq \dot{I}_1$, напряжение на емкости $u_2 \doteq \dot{U}_2$ или напряжение на индуктивности $u_3 \doteq \dot{U}_3$. Таким образом, последовательный колебательный контур обладает как входными, так и передаточными характеристиками.

В качестве входной характеристики контура будем рассматривать его комплексную входную проводимость в режиме холостого хода на зажимах $2 - 2'$ и $3 - 3'$:

$$Y(j\omega) = [Y_{11}(j\omega)]_{i_2=i_3=0} = \frac{i_1}{U_1} \Big|_{i_2=i_3=0}, \quad (3.43)$$

а в качестве передаточных характеристик — комплексные коэффициенты передачи контура по напряжению для случаев, когда напряжение снимается с емкости или индуктивности:

$$K_C(j\omega) = [K_{21}(j\omega)]_{i_2=i_3=0} = \frac{U_2}{U_1} \Big|_{i_2=i_3=0}; \quad (3.44)$$

$$K_L(j\omega) = [K_{31}(j\omega)]_{i_2=i_3=0} = \frac{U_3}{U_1} \Big|_{i_2=i_3=0}. \quad (3.45)$$

Рассмотрим АЧХ и ФЧХ входной проводимости $Y(j\omega)$ последовательного колебательного контура:

$$Y(j\omega) = 1/Z = 1 \Big/ \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (3.46)$$

Представляя $Y(j\omega)$ в показательной форме

$$Y(j\omega) = Y(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \arctg \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right]}, \quad (3.47)$$

найдем аналитические выражения для АЧХ (рис. 3.26, а) и ФЧХ (рис. 3.26, б) входной проводимости:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right]^2}} = \frac{1}{R \sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}; \quad (3.48)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right] = -\arctg [Q (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]. \quad (3.49)$$

Для удобства приведем также АЧХ и ФЧХ входного сопротивления контура (рис. 3.27), построенные в соответствии с выражениями:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= 1/Y(\omega) = R \sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}; \\ \varphi(\omega) &= -\varphi^*(\omega) = \arctg [Q (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

При выводе выражений (3.48) — (3.50) каждое из слагаемых, стоящих в круглых скобках $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, умножалось и делилось на ω_0 , после чего за скобки выносился общий множитель $\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = RQ$:

$$\omega L = \omega_0 L \frac{\omega}{\omega_0} = \rho \frac{\omega}{\omega_0} = RQ \frac{\omega}{\omega_0};$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega} = \rho \frac{\omega_0}{\omega} = RQ \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Если контур настроен на частоту источника, то мнимые составляющие входного сопротивления емкости $x_C = -1/(\omega_0 C)$ и индуктивности $x_L = \omega_0 L$ взаимно компенсируются, входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и минимально по модулю, а полная входная проводимость $Y(\omega)$ достигает максимального значения и равна $1/R$. Векторные диаграммы, соответствующие этому случаю, изображены на рис. 2.20, е. Всякое отклонение частоты внешнего воздействия от резонансной приводит к нарушению баланса между мнимыми составляющими входного сопротивления емкости и индуктивности, что, в свою очередь, вызы-

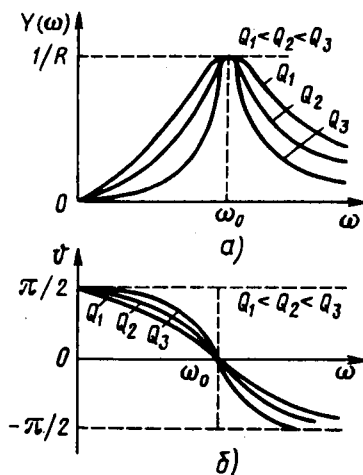


Рис. 3.26. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входной проводимости последовательного колебательного контура

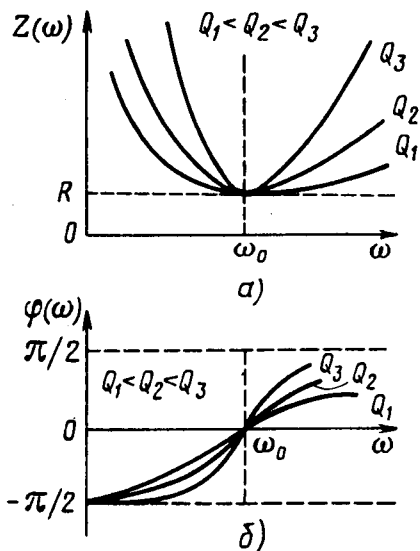


Рис. 3.27. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления последовательного колебательного контура

вает увеличение модуля входного сопротивления $Z(\omega)$, уменьшение модуля входной проводимости $Y(\omega)$ и отклонение аргумента входной проводимости $\psi(\omega)$ от нулевого значения. Из рис. 3.26 видно, что чем выше добротность контура Q , тем более заметно выражен максимум $Y(\omega)$ на резонансной частоте и более резко изменяется $\psi(\omega)$ вблизи ω_0 .

При частоте внешнего воздействия ω ниже резонансной мнимая составляющая входного сопротивления емкости по абсолютному значению превышает мнимую составляющую входного сопротивления индуктивности ($|x_c| > x_L$) и входное сопротивление контура имеет резистивно-емкостный характер ($-\pi/2 < \varphi < 0$). В пределе, при $\omega=0$, входное сопротивление контура имеет чисто емкостный характер ($\varphi = -\pi/2$), полное сопротивление контура $Z(\omega)$ бесконечно велико, а модуль входной проводимости $Y(\omega)$ равен нулю. Векторные диаграммы для $\omega < \omega_0$ и $|x_c| > x_L$ приведены на рис. 2.20, д.

На частоте выше резонансной ($\omega > \omega_0$) мнимая составляющая входного сопротивления емкости по абсолютному значению меньше мнимой составляющей входного сопротивления индуктивности ($|x_c| < x_L$), входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер ($0 < \varphi < \pi/2$). С увеличением частоты аргумент входного сопротивления контура $\varphi(\omega)$ стремится к $\pi/2$ (аргумент входной проводимости $\psi(\omega)$ стремится к $-\pi/2$), модуль входного

сопротивления контура $Z(\omega)$ неограниченно возрастает, а модуль входной проводимости $Y(\omega)$ стремится к нулю (см. рис. 2.20, з).

Комплексные частотные характеристики входной проводимости $Y(j\omega)$, приведенные на рис. 3.26, имеют чисто качественный характер и неудобны для практического использования, так как содержат большое число параметров, причем для каждого сочетания R , Q и ω_0 необходимо строить отдельные кривые. Поэтому на практике обычно применяют нормированные входные характеристики, которые позволяют в обобщенной форме построить кривые для всех возможных сочетаний значений параметров. В качестве аргумента нормированных характеристик удобно использовать так называемую обобщенную расстройку

$$\xi = x/r = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} = Q \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] = Q \left[\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right]. \quad (3.51)$$

На резонансной частоте $\xi=0$, на частотах ниже резонансной $\xi < 0$, причем нулевому значению ω соответствует $\xi = -\infty$. На частотах выше резонансной $\xi > 0$, а при $\omega = \infty$ значение обобщенной расстройки также равно бесконечности.

В ряде случаев в качестве аргумента нормированных частотных характеристик удобно использовать абсолютную расстройку $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, относительную расстройку $\delta = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ или нормированную частоту $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$.

Данные величины легко выражаются одна через другую:

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta\omega/\omega_0 = \bar{\omega} - 1; \quad \bar{\omega} = 1 + \delta = 1 + \Delta\omega/\omega_0; \\ \Delta\omega &= \delta\omega_0 = \omega_0(\bar{\omega} - 1); \quad \xi = Q(\bar{\omega} - 1/\bar{\omega}) = \frac{2+\delta}{1+\delta} \delta Q, \end{aligned}$$

причем на частотах, близких к резонансной ($\bar{\omega} \approx 1$), последнее выражение может быть заменено следующим приближенным соотношением:

$$\xi \approx 2\delta Q = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} Q = 2 \frac{\Delta f}{f_0} Q, \quad (3.52)$$

широко применяемым при решении различных практических задач*.

Комплексная входная проводимость $Y(j\omega)$ и ее модуль $Y(\omega)$ обычно нормируются по значению, которое они принимают на резонансной частоте [$Y(j\omega_0) = Y(\omega_0) = 1/R$]:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(j\omega) &= Y(j\omega)/Y(j\omega_0) = RY(j\omega); \\ \bar{Y}(\omega) &= Y(\omega)/Y(\omega_0) = RY(\omega). \end{aligned} \quad (3.53)$$

*При $|\delta| < 0,1$ погрешность приближенного выражения (3.5) не превышает $\pm 10\%$.

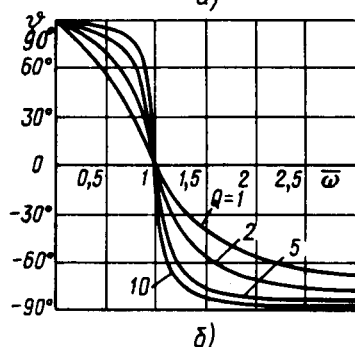
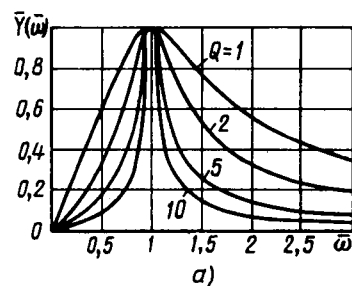


Рис. 3.28. Нормирование АЧХ (а) и ФЧХ (б) входной проводимости последовательного колебательного контура

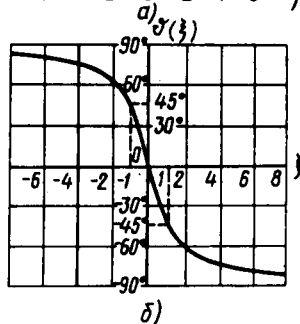
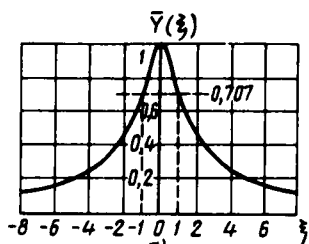


Рис. 3.29. Обобщенные АЧХ (а) и ФЧХ (б) входной проводимости последовательного колебательного контура

При использовании (3.51), (3.53) выражения (3.46), (3.48), (3.49) преобразуются к виду

$$\bar{Y}(j\omega) = \bar{Y}(j\xi) = \bar{Y}(\xi) e^{j\varphi(\xi)} = 1/(1+j\xi);$$

$$\bar{Y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \bar{Y}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad (3.54)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)] = \varphi(\xi) = -\arctg \xi.$$

Нормированные АЧХ и ФЧХ входной проводимости последовательного колебательного контура приведены на рис. 3.28 и 3.29 (в последнем случае комплексные частотные характеристики цепи называют обобщенными). Годограф нормированной комплексной входной проводимости последовательного колебательного контура $\bar{Y}(j\xi)$ имеет вид окружности (рис. 3.30).

Используя входные характеристики, найдем зависимость входного тока контура от частоты. Пусть к зажимам 1 — 1' контура (см. рис. 3.23, б) подключен идеальный источник напряжения

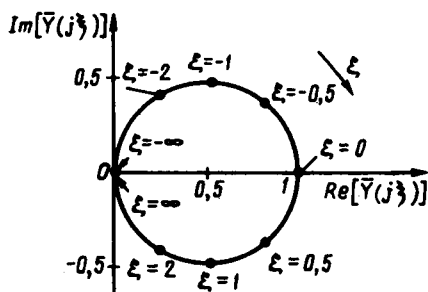


Рис. 3.30. Годограф нормированной комплексной проводимости последовательного колебательного контура

$e(t) \doteq E = E e^{j\psi_e}$, частота которого изменяется в широких пределах, а действующее значение E и начальная фаза ψ_e постоянны. Комплексный ток контура I_1 определяется произведением комплексной входной проводимости контура на комплексное действующее значение ЭДС:

$$I_1 = Y(j\omega)E = Y(\omega) e^{j\vartheta(\omega)} E e^{j\psi_e} = EY(\omega) e^{j[\vartheta(\omega) + \psi_e]} = I_1 e^{j\psi_i}. \quad (3.55)$$

Из выражения (3.55) находим действующее значение входного тока контура и его начальную фазу как функции угловой частоты ω :

$$I_1 = EY(\omega) = \frac{E}{R\sqrt{1 + [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]^2}};$$

$$\psi_i = \vartheta(\omega) + \psi_e = \psi_e - \arctg [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)].$$

Нормируя ток I_1 по его максимальному значению $I_0 = E/R$, которое достигается, когда $\omega = \omega_0$, и переходя от угловой частоты ω к обобщенной расстройке ξ , окончательно получаем

$$\bar{I}_1 = I_1/I_0 = \bar{Y}(\omega) = \bar{Y}(\xi) = 1/\sqrt{1 + \xi^2};$$

$$\psi_i = \psi_e - \arctg \xi. \quad (3.56)$$

Таким образом, зависимость нормированного входного тока контура $\bar{I}_1$ от частоты совпадает с нормированной АЧХ входной проводимости контура, а зависимость начальной фазы ψ_i от частоты совпадает с нормированной ФЧХ входной проводимости контура, смещенной на ψ_e .

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Найдем коэффициент передачи контура по напряжению $K_C(j\omega)$ для случая, когда напряжение снимают с емкости (см. рис. 3.25). При холостом ходе на зажимах 2 — 2' и 3 — 3' ток контура $I_1 = Y(j\omega)\dot{U}_1$ где $Y(j\omega)$ — комплексная входная проводимость контура, определяемая выражениями (3.46) и (3.47). Выходное напряжение контура

$$\dot{U}_2 = Z_C I_1 = -jY(j\omega)\dot{U}_1/(\omega C). \quad (3.57)$$

Подставляя (3.57) в (3.44), получаем выражение для коэффициента передачи контура по напряжению

$$K_C(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{I}_2 = \dot{I}_1 = 0} = -j \frac{1}{\omega C} Y(j\omega). \quad (3.58)$$

Умножая числитель и знаменатель (3.58) на ω_0 и используя соотношения (3.33), (3.53), преобразуем (3.58) к виду

$$K_C(j\omega) = K_C(\omega) e^{j\psi_C(\omega)} = Q \frac{\omega_0}{\omega} \bar{Y}(\omega) e^{j[\psi_Y(\omega) - \pi/2]},$$

откуда можно определить модуль (рис. 3.31, а) и аргумент (рис. 3.31, б) комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению:

$$K_C(\omega) = \omega_0 Q \bar{Y}(\omega) / \omega; \quad \psi_C(\omega) = \psi_Y(\omega) - \pi/2, \quad (3.59)$$

где $\bar{Y}(\omega)$, $\psi_Y(\omega)$ — нормированные АЧХ и ФЧХ входной проводимости последовательного колебательного контура, определяемые выражениями (3.54).

Используя аналогичный подход, находим модуль (рис. 3.31, а) и аргумент (рис. 3.31, б) комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению для случая, когда напряжение снимают с индуктивности:

$$K_L(j\omega) = K_L(\omega) e^{j\psi_L(\omega)},$$

где

$$K_L(\omega) = Q\omega \bar{Y}(\omega) / \omega_0; \quad \psi_L(\omega) = \psi_Y(\omega) + \pi/2. \quad (3.60)$$

Как следует из определения добротности, на резонансной частоте ($\omega = \omega_0$) действующее значение напряжения емкости равно действующему значению напряжения индуктивности и в Q раз превышает напряжение на входе контура, поэтому $K_L(\omega_0) = K_C(\omega_0) = Q$. При $\omega = 0$ сопротивление емкости бесконечно велико, напряжение на емкости $\dot{U}_2 = \dot{U}_1$, напряжение на индуктивности равно нулю. Поэтому $K_L(\omega = 0) = 0$, $K_C(\omega = 0) = 1$. На высоких ча-

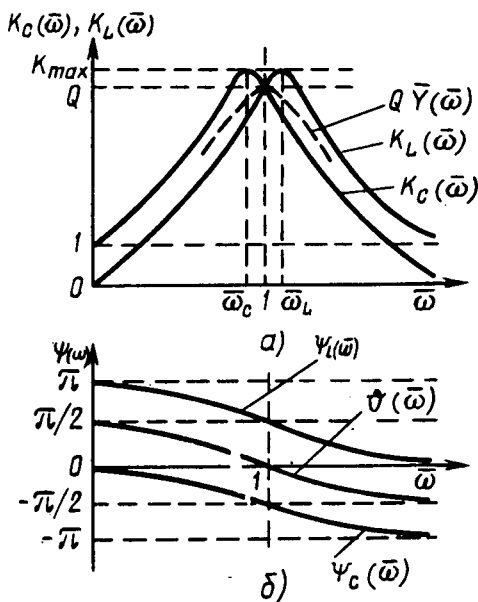


Рис. 3.31. АЧХ (а) и ФЧХ (б) коэффициента передачи последовательного колебательного контура по напряжению

стотах ($\omega = \infty$) сопротивление индуктивности бесконечно велико, поэтому напряжение $\bar{U}_1$ оказывается практически полностью приложенным к индуктивности, а напряжение на емкости равно нулю. Таким образом, $K_L(\omega = \infty) = 1$, $K_C(\omega = \infty) = 0$.

Максимум зависимости $K_C(\omega)$ соответствует частоте, несколько более низкой, а максимум $K_L(\omega)$ — частоте, несколько более высокой, чем резонансная. Однако эти смещения максимумов $K_C(\omega)$ и $K_L(\omega)$ относительно резонансной частоты очень малы и на практике ими можно пренебречь. Действительно, исследуя кривые $K_C(\omega)$ и $K_L(\omega)$ на экстремум, легко установить, что функция $K_C(\omega)$ имеет максимум на частоте

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}, \quad (3.61)$$

а функция $K_L(\omega)$ — на частоте

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (3.62)$$

Подставляя (3.61) и (3.62) в выражения (3.59) и (3.60), находим, что максимальные значения обеих функций одинаковы:

$$K_L(\omega_L) = K_C(\omega_C) = Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = K_{\max}. \quad (3.63)$$

Рассматривая выражения (3.61) — (3.63), нетрудно прийти к заключению, что при $Q \geq 5$ отличие частот, соответствующих амплитудному критерию резонанса ω_L и ω_C от ω_0 , не превышает $0,01\omega_0$, а $K_{\max} - Q < 0,005Q$, поэтому во всех практически важных случаях можно считать, что функции $K_L(\omega)$ и $K_C(\omega)$ имеют максимум на резонансной частоте, причем $K_{\max} = Q$. Следовательно, в случае высокой добротности резонансные частоты, соответствующие амплитудному и фазовому критериям резонанса, совпадают.

На рис. 3.31, а, который носит чисто качественный характер, смещение кривых $K_L(\omega)$ и $K_C(\omega)$ относительно друг друга преувеличено с тем, чтобы показать, что максимумы кривых $K_L(\omega)$ и $K_C(\omega)$ находятся на разных частотах. В действительности в узком диапазоне частот, близких к резонансной, когда можно положить $\omega/\omega_0 \approx 1$, эти зависимости почти совпадают друг с другом и с зависимостью $Q\bar{Y}(\omega)$, т. е. $K_L(\omega) \approx K_C(\omega) \approx Q\bar{Y}(\omega)$.

Если к входу последовательного колебательного контура подключить источник напряжения $e(t) \doteq \bar{E}e^{j\psi_e}$, частота ω которого изменяется в широких пределах, а действующее значение ЭДС $\bar{E}$ и начальная фаза ψ_e сохраняют неизменные значения, то зависимость нормированного выходного напряжения $\bar{U}$ от частоты при

$Q \geq 5$ будет совпадать с нормированной АЧХ входной проводимости контура:

$$\bar{U} = U_2/(EQ) \approx U_3/(EQ) \approx \bar{Y}(\omega).$$

Напомним, что такой же вид имеет зависимость нормированного входного тока контура $\bar{I}_1$ от частоты ω (3.56).

Таким образом, нормированную входную проводимость контура $\bar{Y}(\omega)$ можно рассматривать как нормированную реакцию последовательного колебательного контура на воздействие источника ЭДС с изменяющейся частотой и неизменной амплитудой в режиме холостого хода на зажимах 2 — 2' и 3 — 3'.

ИЗБИРАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Важнейшая особенность последовательного колебательного контура заключается в том, что амплитуда реакции контура на гармоническое воздействие существенно зависит от частоты. На резонансной частоте и в узком диапазоне частот около нее амплитуда отклика достигает наибольшего значения; на частотах, значительно отличающихся от резонансной, амплитуда отклика во много раз меньше максимального значения. Если на вход такого контура подать сумму гармонических колебаний различных частот, имеющих одинаковые амплитуды, то на выходе можно обнаружить, что амплитуда колебаний, частота которых близка к резонансной, значительно превышает амплитуду колебаний, частота которых существенно отличается от резонансной. Контур как бы «пропускает» колебания одних частот и «не пропускает» колебания других частот. Способность электрической цепи выделять колебания отдельных частот из суммы колебаний различных частот называется **избирательностью**.

В идеальном случае отклик избирательной цепи должен иметь постоянное значение в пределах определенного диапазона частот, называемого **полосой пропускания цепи**, и быть равным нулю за пределами этого диапазона. Нормированная АЧХ идеальной избирательной цепи должна иметь прямоугольную форму (кривая I на рис. 3.32). АЧХ реальных избирательных цепей, в том числе и АЧХ последовательного колебательного контура (кривая II на рис. 3.32), отличаются от характеристик идеальной избирательной цепи отсутствием резкой границы между диапазонами пропускаемых и задерживаемых (подавляемых) частот. Очевидно, избирательные свойства реальных цепей тем выше, чем ближе к прямоугольной форма их нормированной АЧХ.

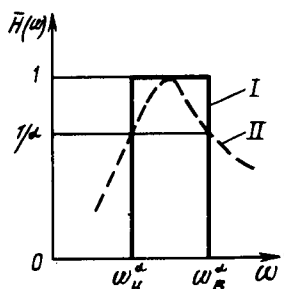


Рис. 3.32. Нормированные АЧХ избирательной цепи

Полоса пропускания (ширина полосы пропускания) реальных избирательных устройств на уровне $1/\alpha$

$$\Pi_f^{\alpha} = f_{\alpha}^{\alpha} - f_{\alpha}^{\alpha}$$

или

$$\Pi_{\omega}^{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\alpha} - \omega_{\alpha}^{\alpha}$$

условно определяется как диапазон частот, в пределах которого амплитуда отклика цепи не падает больше, чем в α раз, относительно своего максимального значения. На границах полосы пропускания, т. е. на частотах f_{α}^{α} и f_{α}^{α} или $\omega_{\alpha}^{\alpha} = 2\pi f_{\alpha}^{\alpha}$ и $\omega_{\alpha}^{\alpha} = 2\pi f_{\alpha}^{\alpha}$, амплитуда отклика в α раз меньше своего максимального значения. Чаще всего полосу пропускания избирательной цепи находят на уровне, когда амплитуда отклика составляет $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ от максимального значения, а $H_{\text{дб}} \approx -3$ дБ (см. табл. 3.1). Полосу пропускания цепи на уровне $1/\sqrt{2}$ обозначим Π_f или Π_{ω} .

Для оценки избирательных свойств реальной избирательной цепи используют различные параметры, которые оценивают степень отклонения формы ее АЧХ от прямоугольной, в том числе определяют характер изменения АЧХ (неравномерность АЧХ) в пределах полосы пропускания и скорость уменьшения модуля коэффициента передачи (крутизну склонов АЧХ) за пределами или на границе полосы пропускания. В частности, избирательные свойства цепи можно достаточно полно охарактеризовать с помощью коэффициента прямоугольности АЧХ, который находится как отношение значений полосы пропускания, измеренных на уровнях $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$:

$$K_{\Pi} = \Pi_f^{\alpha_1} / \Pi_f^{\alpha_2} = \Pi_{\omega}^{\alpha_1} / \Pi_{\omega}^{\alpha_2}, \quad (3.64)$$

где $\alpha_2 < \alpha_1$.

Значения $\Pi_f^{\alpha_1}$ или $\Pi_{\omega}^{\alpha_1}$ обычно рассчитывают на уровне $1/100$ (-40 дБ), а значения $\Pi_f^{\alpha_2}$ или $\Pi_{\omega}^{\alpha_2}$ — на уровне $1/\sqrt{2}$ (-3 дБ). Нетрудно убедиться, что для идеальной избирательной цепи коэффициент прямоугольности АЧХ равен единице при любом выборе α_1 и α_2 , а для реальной избирательной цепи он всегда больше единицы. Очевидно, что избирательные свойства цепи тем выше, чем ближе к единице значения K_{Π} .

Избирательные свойства последовательного колебательного контура определяются формой нормированной АЧХ входной проводимости контура $\bar{Y}(\xi)$. Полагая в выражении (3.54) $\xi = \xi_{\text{гр}}^{\alpha}$, $\bar{Y}(\xi_{\text{гр}}^{\alpha}) = 1/\alpha$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\xi_{\text{гр}}^{\alpha})^2}} = \frac{1}{\alpha},$$

откуда

$$|\xi_{\text{гр}}^{\alpha}| = \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (3.65)$$

Как следует из выражения (3.65), абсолютное значение обобщенной расстройки на границах полосы пропускания на уровне $1/\sqrt{2}$, т. е. при $\alpha = \sqrt{2}$, равно единице; при этом на нижней границе полосы пропускания $\xi^{\sqrt{2}}_{\pi} = \xi^{\sqrt{2}}_{\text{гр}1} = -1$, а на верхней $\xi^{\sqrt{2}}_{\pi} = \xi^{\sqrt{2}}_{\text{гр}2} = 1$. Из выражений (3.51), (3.54) и (3.65) следует, что на границах полосы пропускания на уровне $1/\sqrt{2}$ аргумент входной проводимости контура равен $\nu_{\text{гр}} = \pm \pi/4$ (см. рис. 3.29), а реактивная составляющая входного сопротивления контура $x = \omega L - 1/(\omega C)$ по абсолютному значению — сопротивлению потерь R .

Используя полученные результаты, найдем полосу пропускания последовательного колебательного контура на произвольном уровне $1/\alpha$ и коэффициент прямоугольности АЧХ входной проводимости контура. Полагая в выражении (3.51) $\xi = -|\xi_{\text{гр}}^{\alpha}|$, $\omega = \omega_{\pi}^{\alpha}$ и $\xi = |\xi_{\text{гр}}^{\alpha}|$, $\omega = \omega_{\pi}^{\alpha}$, получим

$$Q \left[\frac{\omega_{\pi}^{\alpha}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\pi}^{\alpha}} \right] = -\sqrt{\alpha^2 - 1};$$

$$Q \left[\frac{\omega_{\pi}^{\alpha}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\pi}^{\alpha}} \right] = \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

откуда

$$\omega_{\pi}^{\alpha} = \omega_0 \left[\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{4Q^2} + 1} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2Q} \right]; \quad (3.66)$$

$$\omega_{\pi}^{\alpha} = \omega_0 \left[\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{4Q^2} + 1} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2Q} \right]; \quad (3.67)$$

$$\Pi_{\omega}^{\alpha} = \omega_{\pi}^{\alpha} - \omega_{\pi}^{\alpha} = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{\alpha^2 - 1} = \frac{R}{L} \sqrt{\alpha^2 - 1}. \quad (3.68)$$

Из выражений (3.66) — (3.68) следует, что полоса пропускания контура при фиксированном значении резонансной частоты ω_0 обратно пропорциональна его добротности и не зависит от емкости C , а полоса пропускания последовательного колебательного контура на уровне $1/\sqrt{2} = 0,707$ в Q раз меньше его резонансной частоты:

$$\Pi_{\omega} = \Pi^{\sqrt{2}}_{\omega} = \omega_0/Q, \quad (3.69)$$

$$\Pi_f = \Pi^{\sqrt{2}}_f = f_0/Q. \quad (3.70)$$

Согласно выражению (3.68), полоса пропускания последовательного колебательного контура на уровне $1/100$

$$\Pi_{\omega}^{100} = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{100^2 - 1} \approx 100 \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.71)$$

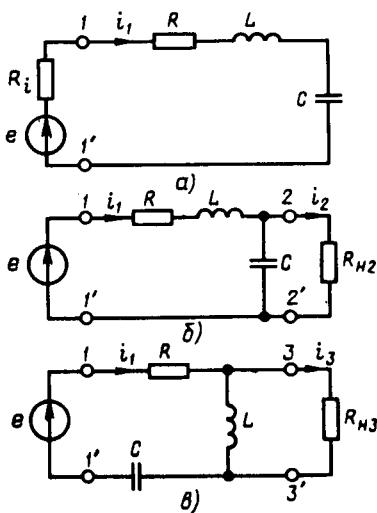


Рис. 3.33. К учету влияния внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки на избирательные свойства последовательного колебательного контура

и коэффициент прямоугольности АЧХ его входной проводимости

$$K_{\Pi} = \Pi_{\omega}^{100} / \Pi_{\omega}^{\sqrt{2}} \approx 100.$$

Таким образом, коэффициент прямоугольности АЧХ контура оказывается намного большим единицы, что свидетельствует о том, что избирательные свойства последовательного колебательного контура далеки от свойств идеальной избирательной цепи.

В связи с тем что $\bar{Y}(\omega)$ — это нормированный отклик контура в режиме холостого хода на зажимах 2 — 2' и 3 — 3' на внешнее гармоническое воздействие, задаваемое источником напряжения, подключенным к зажимам 1 — 1', выражения (3.68) — (3.71) позволяют определить избирательность колебательного контура только в том случае,

когда внутреннее сопротивление источника энергии равно нулю, а входное сопротивление нагрузки, подключенной к зажимам 2 — 2' или 3 — 3', бесконечно велико. Рассмотрим влияние внутреннего сопротивления источника энергии и сопротивления нагрузки на избирательные свойства последовательного колебательного контура.

Пусть контур подключен к источнику энергии с конечным внутренним сопротивлением R_i (рис. 3.33, а). Очевидно, что включенные последовательно сопротивления R_i и R можно заменить сопротивлением $R_{\Sigma} = R_i + R$. При этом рассматриваемая схема преобразуется в схему, приведенную на рис. 3.23, б; она может быть описана соотношениями, полученными на основании анализа этой схемы при замене R на R_{Σ} . В частности, добротность такого контура (будем называть ее эквивалентной добротностью последовательного колебательного контура) определяется выражением

$$Q_{\Sigma 1} = \rho / R_{\Sigma} = \rho / (R + R_i) = Q \left/ \left(1 + \frac{R_i}{R} \right) \right., \quad (3.72)$$

где $Q = \rho / R$ — добротность контура без учета сопротивления источника.

Ширина полосы пропускания контура с учетом внутреннего сопротивления источника энергии может быть найдена из выражения (3.69) при замене Q на $Q_{\Sigma 1}$:

$$\Pi_{\omega} = \omega_0 / Q_{\text{эк1}} = \omega_0 \left(1 + \frac{R_i}{R} \right) / Q. \quad (3.73)$$

Как следует из выражений (3.72), (3.73), наличие внутреннего сопротивления источника энергии уменьшает эквивалентную добротность контура и увеличивает ширину его полосы пропускания. Поэтому для повышения эквивалентной добротности контура желательно, чтобы источник энергии, к которому подключен контур, имел как можно меньшее внутреннее сопротивление, т. е. по свойствам приближался к идеальному источнику напряжения.

Пусть к зажимам 2 — 2' или 3 — 3' последовательного колебательного контура подключена нагрузка (рис. 3.33, б, в) так, что ток I_2 или I_3 не равен нулю. Очевидно, что сопротивление нагрузки, подключенное параллельно емкости или индуктивности, влияет на работу контура таким же образом, как сопротивления $R_{C \text{ пар}}$ и $R_{L \text{ пар}}$, входящие в параллельные схемы замещения конденсатора и индуктивной катушки. Ранее отмечалось, что параллельные схемы замещения элементов могут быть заменены последовательным, причем при высокой добротности элементов $C_{\text{пар}} \approx C_{\text{посл}} = C$, $L_{\text{пар}} \approx L_{\text{посл}} = L$, а сопротивления $R_{C \text{ посл}}$ и $R_{L \text{ посл}}$ обратно пропорциональны сопротивлениям $R_{C \text{ пар}}$ (3.22) и $R_{L \text{ пар}}$ (3.20). Таким образом, сопротивление нагрузки $R_{\text{н2}}$, подключенное параллельно емкости, и $R_{\text{н3}}$, подключенное параллельно индуктивности, могут быть заменены последовательно включенными сопротивлениями

$$R'_{\text{н2}} \approx 1/(\omega^2 C^2 R_{\text{н2}}); \quad R'_{\text{н3}} \approx \omega^2 L^2 / R_{\text{н3}}.$$

Сопротивления $R'_{\text{н2}}$ и $R'_{\text{н3}}$, учитывающие влияние нагрузки на работу контура, назовем внесенными в контур сопротивлениями нагрузки. Если $R_{\text{н2}} = R_{\text{н3}} = R_{\text{н}}$, то на частотах, близких к резонансной ($\omega \approx \omega_0$), внесенные в контур сопротивления нагрузки

$$R'_{\text{н2}} \approx R'_{\text{н3}} \approx \rho^2 / R_{\text{н}} = R'_{\text{н}}. \quad (3.74)$$

Влияние сопротивления $R'_{\text{н}}$ на параметры контура аналогично влиянию внутреннего сопротивления источника R_i , т. е. с увеличением $R'_{\text{н}}$ снижается эквивалентная добротность контура и увеличивается ширина его полосы пропускания.

Используя (3.74), найдем выражения для эквивалентной добротности контура и ширины полосы пропускания:

$$Q_{\text{эк2}} = \frac{\rho}{R + R'_{\text{н}}} = \frac{\rho}{R + \rho^2 / R_{\text{н}}} = \frac{Q}{1 + Q\rho / R_{\text{н}}};$$

$$\Pi_{\omega} = \frac{\omega_0}{Q_{\text{эк2}}} = \frac{\omega_0}{Q} \left(1 + \frac{Q\rho}{R_{\text{н}}} \right). \quad (3.75)$$

Из выражений (3.75) следует, что для увеличения эквивалентной добротности контура необходимо, чтобы сопротивление нагрузки контура R_n было бы как можно большим, т. е. чтобы на зажимах 2 — 2' и 3 — 3' был обеспечен режим работы, близкий к режиму холостого хода.

§ 3.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

Параллельным колебательным контуром называется электрическая цепь, в которой индуктивные катушки и конденсаторы размещены в двух ветвях, подключенных параллельно источнику энергии. Принципиальные электрические схемы параллельных колебательных контуров различных видов приведены на рис. 3.20, б — д.

Знакомство с параллельными колебательными контурами начнем с простого параллельного контура (см. рис. 3.20, б). В соответствии с основным методом теории цепей реальные элементы заменим упрощенными моделирующими цепями, а принципиальную электрическую схему контура — его схемой замещения. Используя параллельные схемы замещения источника энергии, индуктивной катушки и конденсатора, получаем один из вариантов схемы замещения контура (рис. 3.34, а). Ограничим рассмотрение случая, когда элементы контура имеют высокую добротность, при этом зависимость $L_{\text{пар}}$ от частоты ω можно пренебречь и в соответствии

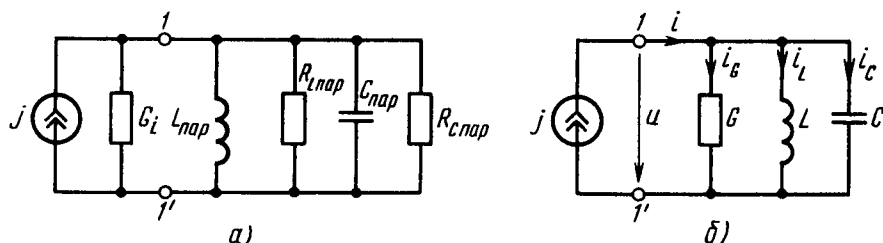


Рис. 3.34. Схемы замещения параллельного колебательного контура основного вида, полученные при использовании параллельных схем замещения элементов

с (3.20), (3.21) считать, что параметры реактивных элементов параллельной и последовательной схем замещения индуктивной катушки и конденсатора одинаковы:

$$L_{\text{пар}} = L_{\text{посл}} = L; C_{\text{пар}} = C_{\text{посл}} = C. \quad (3.76)$$

Заменяя сопротивления потерь одним элементом

$$G = 1/R_{C \text{ пар}} + 1/R_{L \text{ пар}} \quad (3.77)$$

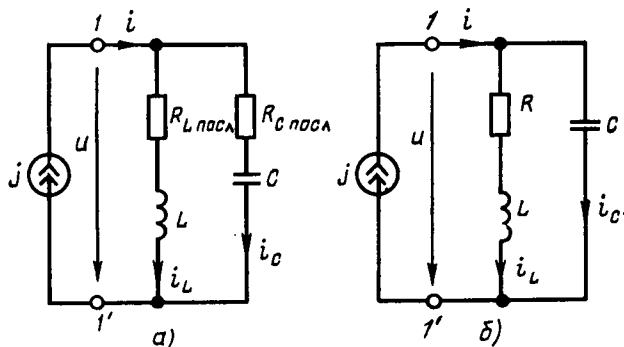


Рис. 3.35. Схема замещения параллельного колебательного контура основного вида, полученные при использовании последовательных схем замещения элементов

и пренебрегая внутренней проводимостью источника энергии, получаем простейшую схему замещения параллельного контура основного вида (рис. 3.34, б).

Если каждый из пассивных элементов контура заменить последовательной схемой замещения, то при тех же допущениях получим несколько более сложную схему замещения контура (рис. 3.35, а). В теории цепей в зависимости от характера решаемой задачи нашли применение оба варианта схем замещения.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР ОСНОВНОГО ВИДА

Ранее было установлено, что идеализированные цепи, схемы которых приведены на рис. 3.23, б и 3.34, б, являются дуальными, поэтому при рассмотрении процессов в параллельном колебательном контуре основного вида с помощью простейшей схемы замещения (рис. 3.34, б) можно использовать все выражения, полученные для последовательного колебательного контура, произведя в них взаимные замены токов и напряжений, сопротивлений и проводимостей, емкостей и индуктивностей. Действительно, выражения для комплексной входной проводимости параллельной RLC -цепи (2.100) и комплексного входного сопротивления последовательной RLC -цепи (2.96) имеют одинаковую структуру и могут быть получены одно из другого путем упомянутых замен. На резонансной частоте ($\omega = \omega_p$) мнимая составляющая входной проводимости параллельной RLC -цепи должна быть равна нулю:

$$\text{Im} [Y]_{\omega=\omega_p} = \text{Im} \{G + j[\omega C + 1/(\omega L)]\}_{\omega=\omega_p} = \omega_p C - 1/(\omega_p L) = 0. \quad (3.78)$$

Решая уравнение (3.78), находим, что резонансная частота параллельного колебательного контура ω_p совпадает с резонансной

частотой последовательного контура ω_0 , составленного из тех же элементов:

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

На резонансной частоте полные проводимости емкости

$$y_C|_{\omega=\omega_p} = b_C|_{\omega=\omega_p} = (\omega_p C) = \sqrt{C/L} = \rho^{-1} = \sigma$$

и индуктивности

$$y_L|_{\omega=\omega_p} = b_L|_{\omega=\omega_p} = 1/(\omega_p L) = \sqrt{C/L} = \rho^{-1} = \sigma$$

равны характеристической проводимости параллельного колебательного контура σ , которая является величиной, обратной характеристическому сопротивлению контура ρ (выражения для характеристических сопротивлений параллельного и последовательного колебательных контуров совпадают). Как видно из векторных диаграмм параллельной RLC -цепи (см. рис. 2.23, в), при $\omega = \omega_p$ действующее значение тока емкости равно действующему значению тока индуктивности: $I_C = I_L = \sigma U$, а входной ток контура (ток неразветвленной части параллельной RLC -цепи) равен току проводимости: $I = I_G = GU$.

Отношение действующего значения тока реактивного элемента к входному току параллельного колебательного контура на резонансной частоте называется добротностью параллельного колебательного контура:

$$Q = I_C/I|_{\omega=\omega_p} = I_L/I|_{\omega=\omega_p} = \sigma/G. \quad (3.79)$$

Выражение (3.79) имеет такую же структуру, как и выражение (3.32), и может быть получено из него заменой сопротивления потерь R и характеристического сопротивления ρ последовательного контура на проводимость потерь G и характеристическую проводимость σ параллельного контура.

Из выражения (3.79) следует, что с увеличением проводимости потерь добротность параллельного колебательного контура падает. Таким же образом на добротность контура влияют внутренние

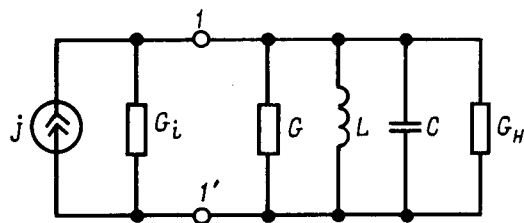


Рис. 3.36. К определению эквивалентной добротности параллельного колебательного контура

проводимость источника энергии G_i и проводимость нагрузки G_n , подключенная к зажимам контура 1 — 1' (рис. 3.36). Добротность параллельного колебательного контура с учетом внутренней проводимости источника G_i и проводимости нагрузки G_n определяется выражением

$$Q_{\Sigma} = \frac{\sigma}{G + G_i + G_{\Sigma}} = \frac{Q}{1 + G_i/G + G_{\Sigma}/G}, \quad (3.80)$$

где Q — добротность параллельного контура без учета G_i и G_{Σ} .

Таким образом, для повышения эквивалентной добротности параллельного колебательного контура желательно, чтобы проводимости источника энергии и нагрузки были бы близки к нулю, т. е. чтобы свойства источника энергии, к которому подключен контур, приближались к свойствам идеального источника тока, а сопротивление нагрузки контура было бы бесконечно большим.

При исследовании комплексных частотных характеристик параллельного контура внешнее воздействие на контур обычно задают в виде тока идеального источника тока, подключенного к зажимам $1 - 1'$, а в качестве реакции контура рассматривают напряжение $u \doteq \dot{U}$ на этих же зажимах (см. рис. 3.34, б). В ряде случаев в качестве реакции контура рассматривают ток емкости $i_C \doteq \dot{I}_C$ или ток индуктивности $i_L \doteq \dot{I}_L$. Следовательно, параллельный колебательный контур, подобно последовательному, обладает как входными, так и передаточными характеристиками.

К входным характеристикам параллельного колебательного контура относится его комплексное входное сопротивление в режиме холостого хода ($G_{\Sigma} = 0$)

$$Z(j\omega) = \left. \frac{\dot{U}}{i} \right|_{G_{\Sigma}=0} = \frac{1}{G + j[\omega C - 1/(\omega L)]} = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.81)$$

Выражения для нормированного модуля и аргумента комплексного входного сопротивления параллельного колебательного контура

$$\bar{Z}(\omega) = \bar{Z}(\xi) = GZ(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (3.82)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(\xi) = -\arctg [Q(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)] = -\arctg \xi$$

полностью совпадают с выражениями (3.54) для нормированного модуля и аргумента комплексной входной проводимости последовательного колебательного контура. Следовательно, нормированные АЧХ и ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура совпадают с соответствующими характеристиками входной проводимости последовательного колебательного контура (см. рис. 3.28, 3.29).

На частоте резонанса токов $\omega = \omega_p$ входное сопротивление параллельного колебательного контура имеет чисто резистивный характер ($\varphi = 0$), а модуль входного сопротивления достигает максимального значения:

$$R_0 = Z(\omega_p) = 1/G. \quad (3.83)$$

На частотах ниже резонансной входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер ($0 < \varphi < \pi/2$), а на частотах выше резонансной — резистивно-емкостный ($-\pi/2 < \varphi < 0$).

Можно показать, что выражения для коэффициентов передачи параллельного колебательного контура по току $G_C(\omega)$ и $G_L(\omega)$ совпадают с выражениями для коэффициентов передачи последовательного контура по напряжению $K_L(\omega)$ и $K_C(\omega)$:

$$G_C(\omega) = I_C/I = Q\omega\bar{Z}(\omega)/\omega_p;$$

$$G_L(\omega) = I_L/I = Q\omega_p\bar{Z}(\omega)/\omega$$

и иллюстрируются теми же кривыми (см. рис. 3.31, а). (При этом напряжению емкости последовательного контура соответствует ток индуктивности параллельного контура, а напряжению индуктивности последовательного контура — ток емкости параллельного.) Все, что ранее говорилось о передаточных характеристиках последовательного контура, справедливо и для передаточных характеристик параллельного контура. В частности, при высокой добротности контура на частотах, близких к резонансной, $G_L(\omega) \approx G_C(\omega) \approx Q\bar{Z}(\omega)$.

В связи с тем что нормированные входные и передаточные характеристики последовательного и параллельного колебательных контуров совпадают, их избирательные свойства одинаковы. Положа пропускания параллельного колебательного контура, если пренебречь внутренней проводимостью источника и проводимостью нагрузки, определяется выражением (3.69). Если необходимо учесть влияние проводимости нагрузки и внутренней проводимости источника энергии на избирательные свойства контура, то вместо Q в выражение (3.69) подставляют эквивалентную добротность Q_{Σ} , рассчитываемую с помощью выражения (3.80).

Таким образом, применение простейшей схемы замещения параллельного колебательного контура позволяет существенно упростить процесс рассмотрения его свойств путем использования соответствующих выражений, полученных при исследовании последовательного колебательного контура. Однако непосредственное применение этих выражений на практике, в частности выражений (3.79), (3.80) и (3.83), в значительной степени затруднено в связи с тем, что в них входит проводимость потерь контура G , которая зависит от частоты. [Напомним, что проводимость потерь контура G определяется выражением (3.77), причем с учетом соотношений (3.23) она практически совпадает с величиной, обратной сопротивлению потерь индуктивной катушки в параллельной схеме замещения (3.20).] Этого недостатка лишены выражения для сопротивления контура на резонансной частоте и добротности, полученные с помощью схемы замещения рис. 3.35, а, в которой индуктивная катушка и конденсатор представлены последовательными схемами замещения.

Используя эту схему, найдем комплексное входное сопротивление параллельного колебательного контура:

$$Z(j\omega) = (R_{L \text{ посл}} + j\omega L) \left(R_{C \text{ посл}} - j \frac{1}{\omega C} \right) / \left[(R_{L \text{ посл}} + j\omega L) + \left(R_{C \text{ посл}} - j \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (3.84)$$

Ограничимся, как и ранее, случаем, когда элементы контура имеют высокую добротность $[\omega_p L \gg R_{L \text{ посл}}, 1/(\omega_p C) \gg R_{C \text{ посл}}]$, а частота внешнего воздействия ненамного отличается от резонансной. Тогда выражение (3.84) можно преобразовать:

$$Z(j\omega) \approx \rho^2 / \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right], \quad (3.85)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ и $R = R_{L \text{ посл}} + R_{C \text{ посл}}$ — характеристическое сопротивление и сопротивление потерь последовательного контура, составленного из тех же элементов, что и рассматриваемый параллельный контур, или, точнее, характеристическое сопротивление и сопротивление потерь одиночного колебательного контура (см. рис. 3.19). С учетом соотношений (3.23) можно считать, что сопротивление R практически равно $R_{L \text{ посл}}$ и не зависит от частоты. Таким образом, эквивалентная схема, приведенная на рис. 3.35, а, в большинстве важных для практики случаев может быть заменена более простой схемой (см. рис. 3.35, б), в которую входят те же элементы, что и в эквивалентную схему последовательного колебательного контура, причем параметры элементов можно считать не зависящими от частоты.

На резонансной частоте мнимая составляющая комплексного входного сопротивления контура должна быть равна нулю, что возможно только в том случае, когда мнимая составляющая знаменателя выражения (3.85) равна нулю:

$$[\omega L - 1/(\omega C)]_{\omega=\omega_p} = (x_C + x_L)_{\omega=\omega_p} = 0. \quad (3.86)$$

Из выражения (3.86) следует, что *условие резонанса токов в параллельном колебательном контуре при высокой добротности элементов имеет такой же вид, как условие резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре* (3.26), и, следовательно, частота резонанса токов совпадает с резонансной частотой последовательного контура, составленного из тех же элементов:

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.87)$$

Если элементы контура имеют невысокую добротность, для определения частоты резонанса токов необходимо приравнять ну-

лю мнимую составляющую входного сопротивления, определяемую из выражения (3.84). При этом частота резонанса токов несколько отличается от резонансной частоты последовательного контура:

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{(\rho^2 - R_L^2 \text{ посл}) / (\rho^2 - R_C^2 \text{ посл})},$$

однако при $\rho \gg R_L \text{ посл}$ и $\rho \gg R_C \text{ посл}$ этим различием можно пренебречь.

Как отмечалось, характеристическое сопротивление параллельного контура, равное абсолютному значению мнимых составляющих сопротивлений ветвей контура на резонансной частоте, определяется тем же выражением, что и характеристическое сопротивление последовательного контура:

$$\rho = |x_C|_{\omega=\omega_p} = x_L|_{\omega=\omega_p} = \omega_p L = 1/(\omega_p C) = \sqrt{L/C}.$$

Входное сопротивление параллельного колебательного контура на резонансной частоте R_0 (резонансное сопротивление контура) имеет чисто резистивный характер и, как следует из (3.85), может быть найдено с помощью выражения

$$R_0 = [Z(j\omega)]_{\omega=\omega_p} = \rho^2 / R. \quad (3.88)$$

Следовательно, ток i и напряжение u на зажимах $I - I'$ (см. рис. 3.35, б) на резонансной частоте совпадают по фазе, а их действующие значения $I_0 = I|_{\omega=\omega_p}$, $U_0 = U|_{\omega=\omega_p}$ связаны между собой соотношением $U_0 = R_0 I_0 = \rho^2 I_0 / R$.

Действующие значения токов ветвей контура на резонансной частоте одинаковы:

$$I_C|_{\omega=\omega_p} \approx I_L|_{\omega=\omega_p} \approx U_0 / \rho = \rho I_0 / R. \quad (3.89)$$

Используя выражение (3.89), находим добротность параллельного колебательного контура:

$$Q = \left[\frac{I_C}{I_0} \right]_{\omega=\omega_p} = \left[\frac{I_L}{I_0} \right]_{\omega=\omega_p} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.90)$$

Таким образом, добротность параллельного колебательного контура основного вида совпадает с добротностью последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов.

Аналогичный результат может быть получен и из соотношения (3.42), пригодного для определения добротности любых колебательных систем.

С учетом выражений (3.88) и (3.90) представим комплексное сопротивление параллельного контура в следующем виде:

$$Z(j\omega) = \frac{R_0}{1 + j \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}} = \frac{R_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)} = \frac{R_0}{1 + j\xi} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = R_0 \bar{Y}(\xi) e^{j\varphi(\xi)}. \quad (3.91)$$

Из сравнения выражений (3.54), (3.81), (3.82) и (3.91) следует, что зависимость комплексного входного сопротивления параллельного колебательного контура от частоты определяется обобщенными АЧХ и ФЧХ входной проводимости последовательного колебательного контура $Y(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, составленного из тех же элементов, что и рассматриваемый параллельный контур.

Применение последовательных схем замещения элементов позволяет получать более удобные выражения для добротности и резонансного сопротивления параллельного колебательного контура, не содержащие частотно-зависимых членов.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С РАЗДЕЛЕННОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Конструктивной особенностью колебательного контура этого вида является наличие в нем индуктивной катушки с отводом или со скользящим контактом, разделяющим катушку на две секции (рис. 3.37), секция с индуктивностью L_1 образует одну ветвь колебательного контура (см. рис. 3.20, а), а секция с индуктивностью L_2 и конденсатор C — другую (для упрощения анализа пренебрегаем взаимной индуктивностью между секциями катушки). При перемещении скользящего контакта вдоль катушки или при изменении места расположения отвода изменяется коэффициент включения индуктивности p_L , определяющий, какая часть суммарной индуктивности катушки $L = L_1 + L_2$ включена в первую ветвь:

$$p_L = L_1 / (L_1 + L_2) = L_1 / L. \quad (3.92)$$

Коэффициент включения индуктивности может изменяться в пределах от нуля (на рисунке при крайнем нижнем положении подвижного контакта) до единицы (при крайнем верхнем положении). В последнем случае рассматриваемый контур вырождается в параллельный контур основного вида.

В связи с тем что одна из ветвей параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью представляет собой последовательное включение конденсатора C и индуктивной катушки L_2 , в контуре этого вида наряду с резонансом токов имеет место резонанс напряжений. Очевидно, что частота резонанса

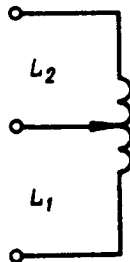


Рис. 3.37. Упрощенная конструкция индуктивной катушки с отводом

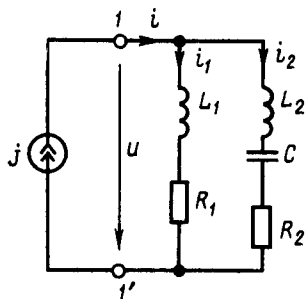


Рис. 3.38. Схема замещения параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью

схемами замещения (рис. 3.38). Сопротивления $R_1 = R_{L1 \text{ посл}}$ и $R_2 = R_{L2 \text{ посл}} + R_{C \text{ посл}}$ представляют собой соответственно сопротивление потерь индуктивной катушки L_1 , а также суммарное сопротивление потерь индуктивной катушки L_2 и конденсатора C .

Комплексное входное сопротивление контура в точках 1 — 1' определяется выражением

$$Z(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega L_1)[R_2 + j\omega L_2 + 1/(j\omega C)]}{(R_1 + j\omega L_1) + [R_2 + j\omega L_2 + 1/(j\omega C)]}. \quad (3.93)$$

Когда элементы контура обладают высокой добротностью, а частота внешнего воздействия близка к частоте резонанса токов, выражение (3.93) можно привести к более простому виду:

$$Z(j\omega) \approx \frac{\omega L_1 [1/(\omega C) - \omega L_2]}{(R_1 + R_2) + j[\omega L_1 + \omega L_2 - 1/(\omega C)]}. \quad (3.94)$$

На частоте резонанса токов мнимая составляющая $Z(j\omega)$ должна равняться нулю, что возможно только при выполнении условия

$$[\omega L_1 + \omega L_2 - 1/(\omega C)]_{\omega = \omega_{\text{рт}}} = 0 \quad (3.95)$$

или

$$\omega_{\text{рт}} L_1 = [1/(\omega_{\text{рт}} C)] - (\omega_{\text{рт}} L_2). \quad (3.96)$$

Решая уравнение (3.95), находим выражение для частоты резонанса токов:

$$\omega_{\text{рт}} = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C} = 1/\sqrt{LC} = \omega_0.$$

напряжений $\omega_{\text{рт}}$ должна быть выше частоты резонанса токов, так как для выполнения условия резонанса токов необходимо, чтобы сопротивление ветви, содержащей L_2 и C , носило емкостный характер, а это, как известно, имеет место только на частотах ниже частоты резонанса напряжений.

Рассмотрим особенности частотных характеристик параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью и влияние коэффициента включения индуктивности p_L на его параметры. Для анализа используем схему замещения контура, в которой индуктивные катушки и конденсатор представлены их последовательными

Таким образом, частота резонанса токов сложного параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью в случае высокой добротности не зависит от коэффициента включения индуктивности и совпадает с резонансной частотой последовательного колебательного контура, построенного из тех же элементов, что и рассматриваемый контур.

В то время как частота резонанса токов $\omega_{\text{рт}}$ зависит от суммарной индуктивности контура $L = L_1 + L_2$, частота резонанса напряжений $\omega_{\text{рн}}$ определяется только индуктивностью второй ветви L_2 и, следовательно, зависит от коэффициента включения индуктивности:

$$\omega_{\text{рн}} = 1/\sqrt{L_2 C} = 1/\sqrt{LC \left(\frac{L-L_1}{L} \right)} = \omega_0/\sqrt{1-p_L}.$$

С уменьшением коэффициента включения индуктивности частота $\omega_{\text{рн}}$ снижается, оставаясь большей, чем $\omega_{\text{рт}} = \omega_0$.

Подставляя выражение (3.96) в (3.94), найдем сопротивление контура на частоте резонанса токов:

$$R_0(p_L) = Z(\omega_{\text{рт}}) = \frac{(\omega_{\text{рт}} L_1)^2}{R_1 + R_2} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R} \left(\frac{L_1}{L} \right)^2 = \frac{\rho^2 p_L^2}{R} = R_0 p_L^2, \quad (3.97)$$

где $R = R_1 + R_2$; $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$ — суммарное сопротивление потерь и характеристическое сопротивление рассматриваемого контура, равные соответственно сопротивлению потерь и характеристическому сопротивлению последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов; $R_0 = \rho^2/R$ — резонансное сопротивление параллельного контура основного вида. Таким образом, резонансное сопротивление контура с разделенной индуктивностью $R_0(p_L)$ меньше, чем резонансное сопротивление контура основного типа R_0 , причем при $p_L \rightarrow 1$ $R_0(p_L) \rightarrow R_0$.

АЧХ и ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура данного типа приведены на рис. 3.39. На частотах ниже $\omega_{\text{рт}}$ входное сопротивление контура определяется в основном сопротивлением первой ветви и имеет резистивно-индуктивный характер. На частоте резонанса токов сопротивление контура достигает максимального значения $R_0(p_L)$ и имеет чисто резистивный характер. На частотах выше

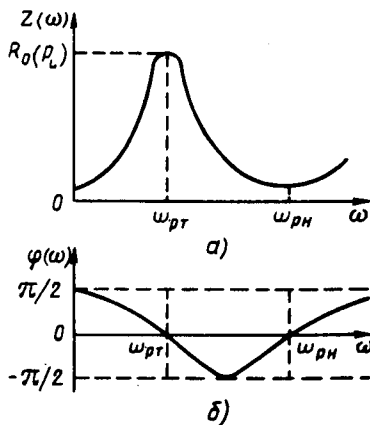


Рис. 3.39. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью

$\omega_{\text{рт}}$ сопротивление контура определяется в основном параметрами второй ветви, причем при $\omega_{\text{рт}} < \omega < \omega_{\text{м}}$ сопротивление контура имеет резистивно-емкостный характер, а на частотах выше частоты резонанса напряжений — резистивно-индуктивный. На частоте резонанса напряжений входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и достигает минимального значения, определяемого сопротивлением потерь второй ветви.

Покажем, что добротность параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью не зависит от коэффициента включения и равна добротности последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов. Пусть контур настроен на частоту источника сигнала, а напряжение и ток на его входе определяются соотношениями

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} I_0 \cos(\omega_{\text{рт}} t); \\ u &= \sqrt{2} U_0 \cos(\omega_{\text{рт}} t) = \sqrt{2} R_0(p_L) I_0 \cos(\omega_{\text{рт}} t). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Токи ветвей контура i_1 и i_2 на резонансной частоте имеют одинаковые действующие значения

$$I_{10} = I_{20} \approx U_0 / (\omega_{\text{рт}} L_1) \quad (3.99)$$

и отличаются по фазе на угол π , а напряжение емкости u_C отстает по фазе от тока второй ветви на угол $\pi/2$:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} I_{10} \cos(\omega_{\text{рт}} t - \pi/2) = \sqrt{2} I_{10} \sin(\omega_{\text{рт}} t); \\ i_2 &= \sqrt{2} I_{20} \cos(\omega_{\text{рт}} t + \pi/2) = -\sqrt{2} I_{10} \sin(\omega_{\text{рт}} t); \\ u_C &= \sqrt{2} I_{20} \cos(\omega_{\text{рт}} t) / (\omega_{\text{рт}} C) = \sqrt{2} \rho I_{10} \cos(\omega_{\text{рт}} t). \end{aligned}$$

Энергия, запасаемая реактивными элементами контура,

$$\begin{aligned} W_s &= (L_1 i_1^2 / 2) + (L_2 i_2^2 / 2) + (C u_C^2 / 2) = (L_1 + L_2) \times \\ &\times I_{10}^2 \sin^2(\omega_{\text{рт}} t) + C \rho^2 I_{10}^2 \cos^2(\omega_{\text{рт}} t) = L I_{10}^2. \end{aligned} \quad (3.100)$$

энергия, потребляемая контуром за период T ,

$$W_{\text{н}} = (R_1 I_{10}^2 + R_2 I_{20}^2) T = (R_1 + R_2) I_{10}^2 T = R I_{10}^2 T. \quad (3.101)$$

Подставляя выражения (3.100) и (3.101) в (3.42), получаем выражение для добротности параллельного контура с разделенной индуктивностью:

$$Q = 2\pi W_s / W_{\text{н}} = 2\pi L / (RT) = \omega_{\text{рт}} L / R = \rho / R, \quad (3.102)$$

которое совпадает с выражением для добротности параллельного контура основного типа и соответственно с выражением для до-

бротности последовательного контура, построенного из тех же элементов. Далее, используя (3.97), (3.99) и (3.102), находим, что на резонансной частоте действующие значения токов ветвей контура превышают действующее значение входного тока контура в $p_L Q$ раз:

$$I_{10}/I_0 = I_{20}/I_0 = R_0(p_L)/(\omega_{\text{рт}} L_1) = \rho^2 p_L^2 L/(R \omega_{\text{рт}} L L_1) = p_L Q.$$

Таким образом, важнейшие параметры сложного параллельного колебательного контура с разделенной индуктивностью (частота резонанса токов, характеристическое сопротивление и добротность) не зависят от коэффициента включения индуктивности p_L . В то же время его резонансное сопротивление и частота резонанса напряжений являются функциями p_L .

Указанная особенность параллельного колебательного контура широко применяется на практике при согласовании его с источником энергии. Согласование осуществляют путем надлежащего выбора коэффициента включения, причем при изменении p_L настройка контура, т. е. значение частоты резонанса токов, не изменяется.

Наличие ярко выраженного минимума в АЧХ контура с разделенной индуктивностью может быть использовано для подавления колебаний, частота которых близка к частоте $\omega_{\text{рн}}$ рассматриваемого контура.

Разделение индуктивности контура может применяться также для уменьшения влияния внутреннего сопротивления источника или сопротивления нагрузки на избирательные свойства параллельного контура. Пусть к зажимам $I - I'$ контура (см. рис. 3.38) подключено некоторое сопротивление $R_{\text{н}}$ (это может быть сопротивление нагрузки или внутреннее сопротивление источника энергии). С учетом $R_{\text{н}}$ входное сопротивление контура на резонансной частоте

$$R_{0\text{ эк}}(p_L) = \frac{R_0(p_L) R_{\text{н}}}{R_0(p_L) + R_{\text{н}}} = \frac{R_0(p_L)}{1 + R_0(p_L)/R_{\text{н}}} = \frac{\rho^2 p_L^2}{R[1 + R_0(p_L)/R_{\text{н}}]}. \quad (3.103)$$

Это соотношение аналогично выражению (3.97) при условии замены сопротивления потерь контура R на эквивалентное сопротивление потерь $R_{\text{эк}} = R[1 + R_0(p_L)/R_{\text{н}}]$.

Выражение для эквивалентной добротности контура с учетом сопротивления $R_{\text{н}}$ может быть получено из (3.102) путем замены R на $R_{\text{эк}}$:

$$Q_{\text{эк}} = \frac{\rho}{R_{\text{эк}}} = \frac{Q}{1 + R_0(p_L)/R_{\text{н}}} = \frac{Q}{1 + R_0 p_L^2 / R_{\text{н}}}, \quad (3.104)$$

где $Q = \rho/R$, $R_0(p_L) = R_0 p_L^2$ — добротность и резонансное сопротивление контура без учета сопротивления $R_{\text{н}}$. Как следует из выражения (3.104), эквивалентная добротность контура снижается

с уменьшением сопротивления R_n . Влияние изменения R_n на эквивалентную добротность контура Q_n может быть ослаблено путем уменьшения значения коэффициента включения p_L (при $p_L \rightarrow 0$ изменение R_n не влияет на $Q_n \approx Q$).

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С РАЗДЕЛЕННОЙ ЕМКОСТЬЮ

Колебательный контур этого типа по своим свойствам в значительной степени подобен параллельному колебательному контуру с разделенной индуктивностью. Используя схему замещения контура, приведенную на рис. 3.40, нетрудно показать, что частота резонанса

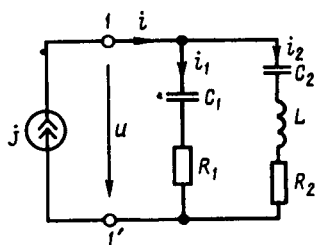


Рис. 3.40. Схема замещения параллельного колебательного контура с разделенной емкостью

токов $\omega_{\text{рт}}$, характеристическое сопротивление ρ и добротность Q параллельного колебательного контура с разделенной емкостью совпадают с резонансной частотой, характеристическим сопротивлением и добротностью последовательного колебательного контура, построенного из тех же элементов и, следовательно, обладающего теми же суммарной емкостью $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ и суммарным сопротивлением $R = R_1 + R_2$.

Частота резонанса напряжений рассматриваемого контура определяется параметрами элементов второй ветви $\omega_{\text{рн}} = 1/\sqrt{LC_2} = \omega_0 \sqrt{C/C_2} = \omega_0 \sqrt{1 - p_c}$ и зависит от коэффициента включения емкости

$$p_c = C/C_1 = C_2/(C_1 + C_2).$$

Резонансное сопротивление контура с разделенной емкостью так же, как и резонансное сопротивление контура с разделенной индуктивностью, пропорционально квадрату коэффициента включения:

$$R_0(p_c) = \rho^2 p_c^2 / R = R_0 p_c^2,$$

где $R_0 = \rho^2 / R$ — резонансное сопротивление параллельного контура основного вида, обладающего той же индуктивностью L , суммарной емкостью C и суммарным сопротивлением R , что и анализируемый контур.

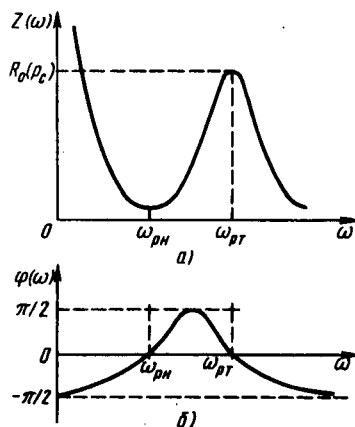


Рис. 3.41. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления параллельного колебательного контура с разделенной емкостью

АЧХ и ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура с разделенной емкостью приведены на рис. 3.41. На частотах ниже $\omega_{\text{рн}}$ входное сопротивление обеих ветвей контура имеет резистивно-емкостный характер; на частоте резонанса напряжений входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и достигает минимального значения, определяемого в основном сопротивлением потерь второй ветви; на частотах $\omega_{\text{рн}} < \omega < \omega_{\text{рт}}$ входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер; при $\omega = \omega_{\text{рт}}$ входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и его модуль достигает максимального значения $R_0(p_c)$, на частотах выше частоты резонанса токов входное сопротивление контура определяется в основном параметрами элементов первой ветви и имеет резистивно-емкостный характер.

§ 3.4. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Два контура называются связанными, если возбуждение электрических колебаний в одном из них приводит к возникновению колебаний в другом. Каждый из связанных контуров может быть либо *колебательным* (если он содержит индуктивные катушки и конденсаторы), либо *апериодическим* (если он содержит реактивные элементы только одного типа). Наибольший практический интерес представляют связанные колебательные контуры, так как их избирательные свойства лучше, чем избирательные свойства одиночных колебательных контуров.

В зависимости от типа элемента, с помощью которого осуществляется взаимодействие между контурами, различают контуры с *трансформаторной, индуктивной, емкостной и комбинированной (индуктивно-емкостной) связями*. По способу включения элемента связи связанные контуры подразделяются на контуры с внешней и внутренней связями. Принципиальные электрические схемы связанных колебательных контуров некоторых типов приведены на рис. 3.42.

Внешнее воздействие на связанные колебательные контуры обычно задается в виде напряжения источника энергии Γ , включенного в один из контуров, называемый *первичным*. В качестве реакции связанных контуров на внешнее действие рассматривают ток или напряжение одного из элементов другого контура, называемого *вторичным*.

Каждому типу связанных колебательных контуров можно поставить в соответствие так называемый *четыреполюсник связи* (рис. 3.43), который получается из исходных контуров при их размыкании и устранении из них всех элементов, имеющих другой характер по сравнению с элементом связи.

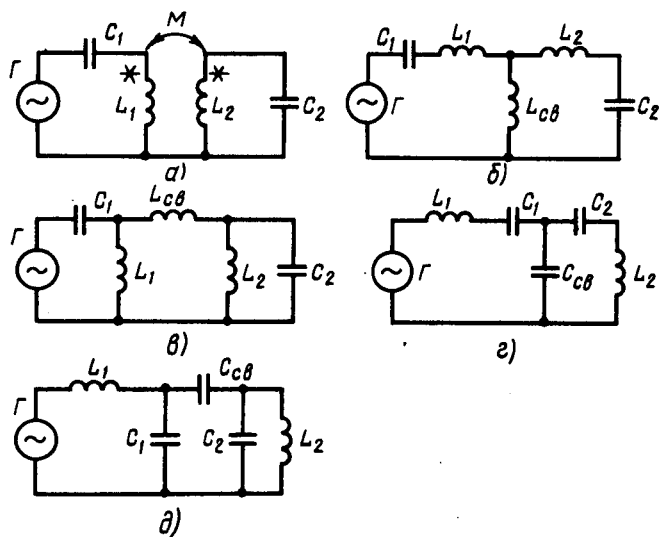


Рис. 3.42. Принципиальные электрические схемы связанных колебательных контуров:

а — с трансформаторной связью; б — с внутренней индуктивной (автотрансформаторной) связью; в — с внешней индуктивной связью; г — с внутренней емкостной связью; д — с внешней емкостной связью

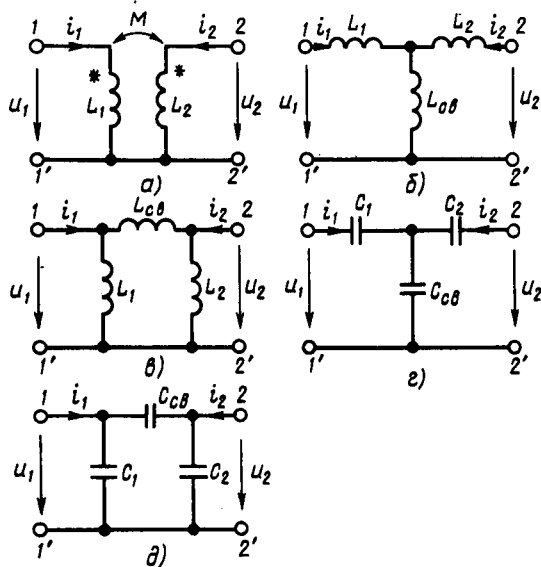


Рис. 3.43. Четырехполюсники связи, соответствующие контурам, приведенным на рис. 3.42

Назовем коэффициентом передачи из первичного контура во вторичный K_{21} комплексный коэффициент передачи соответствующего четырехполосника связи по напряжению от зажимов $1 - 1'$ к зажимам $2 - 2'$ (при холостом ходе на зажимах $2 - 2'$)

$$K_{21} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 |_{I_2=0},$$

а коэффициентом передачи из вторичного контура в первичный — комплексный коэффициент передачи четырехполосника связи по напряжению от зажимов $2 - 2'$ к зажимам $1 - 1'$ (при холостом ходе на зажимах $1 - 1'$)

$$K_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 |_{I_1=0}.$$

Нетрудно убедиться, что коэффициенты передачи K_{12} и K_{21} связанных контуров, схемы которых приведены на рис. 3.42, а — б, а соответствующие четырехполосники связи — на рис. 3.43, а — б, являются действительными числами и не зависят от частоты.

Среднее геометрическое из коэффициентов передачи K_{12} и K_{21} называется коэффициентом связи между контурами

$$k_{cs} = \sqrt{K_{12} K_{21}}. \quad (3.105)$$

Коэффициент связи не зависит от частоты и используется для количественной оценки степени связи между контурами.

Для контуров с трансформаторной связью (см. рис. 3.42, а) при определении коэффициентов передачи K_{12} и K_{21} можно воспользоваться компонентными уравнениями связанных индуктивностей (2.172):

$$K_{12} = j\omega M / (j\omega L_2) = M / L_2; \quad K_{21} = j\omega M / (j\omega L_1) = M / L_1. \quad (3.106)$$

Подставляя выражение (3.106) в (3.105), можно установить, что коэффициент связи между контурами с трансформаторной связью равен коэффициенту связи между входящими в эти контуры индуктивностями:

$$k_{cs} = M / \sqrt{L_1 L_2} = k_M. \quad (3.107)$$

Анализируя четырехполосники связи, получим выражения для коэффициентов связи между контурами:

с внутренней индуктивной (автотрансформаторной) связью (см. рис. 3.42, б)

$$k_{cs} = L_{cs} / \sqrt{(L_1 + L_{cs})(L_2 + L_{cs})}, \quad (3.108)$$

с внешней индуктивной связью (см. рис. 3.42, в)

$$k_{cs} = \sqrt{L_1 L_2 / (L_1 + L_{cs})(L_2 + L_{cs})}, \quad (3.109)$$

с внутренней емкостной связью (см. рис. 3.42, з)

$$k_{\text{св}} = \frac{1/C_{\text{св}}}{\sqrt{(1/C_1 + 1/C_{\text{св}})(1/C_2 + 1/C_{\text{св}})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_{\text{св}}/C_1)(1 + C_{\text{св}}/C_2)}} \quad (3.110)$$

и с внешней емкостной связью (см. рис. 3.42, д)

$$k_{\text{св}} = \sqrt{\frac{1/(C_1 C_2)}{(1/C_1 + 1/C_{\text{св}})(1/C_2 + 1/C_{\text{св}})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_1/C_{\text{св}})(1 + C_2/C_{\text{св}})}} \cdot (3.111)$$

Из выражений (3.107) — (3.111) следует, что значение коэффициента связи между контурами $k_{\text{св}}$ не может превышать единицы, причем с увеличением параметра элемента связи (M , $L_{\text{св}}$, $C_{\text{св}}$) возрастает коэффициент $k_{\text{св}}$ между контурами с трансформаторной, автотрансформаторной и внешней емкостной связями и уменьшается коэффициент связи между контурами с внешней индуктивной и внутренней емкостной связями.

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

Для изучения процессов в связанных контурах различных типов воспользуемся их обобщенной комплексной схемой замещения (рис. 3.44), на которой Z_1 — комплексное сопротивление элементов, входящих только в первичный контур; Z_2 — комплексное сопротивление элементов, входящих только во вторичный контур; Z_{12} — комплексное сопротивление связи. Соответствие между элементами обобщенной схемы замещения и элементами контуров с внутренними индуктивной и емкостной связями устанавливается из сравнения рис. 3.44 с рис. 3.42, б и з: сопротивление Z_1 включает в себя внутреннее сопротивление источника энергии Γ , а также комплексные сопротивления индуктивной катушки L_1 и конденсатора C_1 ; сопротивление Z_2 равно сумме комплексных сопротивлений индуктивной катушки L_2 и конденсатора C_2 , а сопротивление Z_{12} представляет собой комплексное сопротивление элемента связи (индуктивной катушки $L_{\text{св}}$ или конденсатора $C_{\text{св}}$).

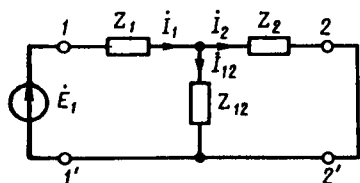


Рис. 3.44. Обобщенная комплексная схема замещения связанных контуров

Чтобы обобщенную схему замещения можно было применять для анализа контуров с внешней индуктивной или емкостной связью, эти контуры должны быть (с помощью преобразования треугольник — звезда) заменены эквивалентными контурами с внутренней индуктивной или емкостной связью. Контуры с трансформаторной связью также можно преобразовать

в эквивалентные им контуры с внутренней индуктивной связью, используя рассмотренную ранее схему замещения связанных индуктивностей (см. рис. 2.56, в).

Воспользуемся обобщенной схемой замещения (рис. 3.44) для определения токов первичного и вторичного контуров. Уравнения баланса токов и напряжений цепи имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_{12} &= \dot{E}_1; \\ Z_2 \dot{I}_2 - Z_{12} \dot{I}_{12} &= 0; \\ \dot{I}_{12} - \dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Исключая из уравнений (3.112) ток сопротивления связи $\dot{I}_{12}$, преобразуем их к более удобному виду

$$Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2 = \dot{E}_1; \quad Z_{22} \dot{I}_2 - Z_{12} \dot{I}_1 = 0, \quad (3.113)$$

где $Z_{11} = Z_1 + Z_{12}$; $Z_{22} = Z_2 + Z_{12}$ — собственные сопротивления первичного и вторичного контуров, равные сумме всех сопротивлений, входящих в каждый из контуров. Решая уравнения (3.113) относительно токов первичного и вторичного контуров, получаем

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{11} - Z_{12}^2/Z_{22}}; \quad (3.114)$$

$$\dot{I}_2 = Z_{12} \dot{I}_1 / Z_{22} = \frac{Z_{12} Z_{22} \dot{E}_1 / (Z_{22} Z_{11})}{(Z_{11} - Z_{12}^2/Z_{22}) Z_{22} / Z_{11}} = \frac{Z_{12} \dot{E}_1 / Z_{11}}{Z_{22} - Z_{12}^2 / Z_{11}}. \quad (3.115)$$

Рассмотрим более подробно структуру полученных выражений. Величина, стоящая в знаменателе выражения (3.114), имеет физический смысл входного сопротивления системы связанных контуров относительно точек $I - I'$. Эта величина отличается от собственного сопротивления первичного контура Z_{11} на некоторую величину $-Z_{12}^2/Z_{22}$, учитывающую влияние вторичного контура на процессы, протекающие в первичном. Нетрудно убедиться, что при размыкании вторичного контура $-Z_{12}^2/Z_{22}$ будет равно нулю и ток первичного контура будет равен $\dot{E}_1/Z_{11}$. Аналогичным образом, величина $-Z_{12}^2/Z_{11}$, стоящая в знаменателе выражения (3.115), отражает влияние первичного контура на процессы, протекающие во вторичном контуре. Величины

$$-Z_{12}^2/Z_{22} = Z_{\text{вх1}}; \quad -Z_{12}^2/Z_{11} = Z_{\text{вх2}} \quad (3.116)$$

получили название **вносимых сопротивлений**.

Влияние первичного контура на процессы во вторичном контуре учитываются не только введением в него некоторого дополнительного сопротивления $Z_{\text{вх2}}$. По аналогии с величиной, стоящей в числителе

выражения (3.114), числитель выражения (3.115) может рассматриваться как ЭДС некоторого источника

$$\dot{E}_{\text{вн}2} = Z_{12}\dot{E}_1/Z_{11} = Z_{12}\dot{E}_1/(Z_{11} + Z_{12}), \quad (3.117)$$

внесенного во вторичный контур под влиянием первичного. Напряжение вносимого источника $\dot{E}_{\text{вн}2}$ численно равно напряжению на сопротивлении связи Z_{12} при разомкнутом вторичном контуре.

С учетом (3.116), (3.117) выражения для токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ могут быть записаны в единообразной форме:

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1/(Z_{11} + Z_{\text{вн}1}); \quad \dot{I}_2 = \dot{E}_{\text{вн}2}/(Z_{22} + Z_{\text{вн}2}). \quad (3.118)$$

Этим выражениям можно поставить в соответствие схемы замещения первичного и вторичного контуров, изображенные на рис. 3.45.

Представляя собственные сопротивления контуров в алгебраической форме

$$\begin{aligned} Z_{11} &= r_{11} + jx_{11}; \\ Z_{22} &= r_{22} + jx_{22} \end{aligned} \quad (3.119)$$

и полагая, что комплексное сопротивление связи имеет чисто реактивный характер

$$Z_{12} = jx_{12}, \quad (3.120)$$

преобразуем выражения (3.116) к виду

$$\begin{aligned} Z_{\text{вн}1} &= r_{\text{вн}1} + jx_{\text{вн}1} = x_{12}^2/(r_{22} + jx_{22}) = (x_{12}^2 r_{22} - jx_{12}^2 x_{22})/(r_{22}^2 + x_{22}^2); \\ Z_{\text{вн}2} &= r_{\text{вн}2} + jx_{\text{вн}2} = x_{12}^2/(r_{11} + jx_{11}) = (x_{12}^2 r_{11} - jx_{12}^2 x_{11})/(r_{11}^2 + x_{11}^2), \end{aligned} \quad (3.121)$$

откуда

$$\begin{aligned} r_{\text{вн}1} &= x_{12}^2 r_{22}/(r_{22}^2 + x_{22}^2); \quad r_{\text{вн}2} = x_{12}^2 r_{11}/(r_{11}^2 + x_{11}^2); \\ x_{\text{вн}1} &= -x_{12}^2 x_{22}/(r_{22}^2 + x_{22}^2); \quad x_{\text{вн}2} = -x_{12}^2 x_{11}/(r_{11}^2 + x_{11}^2). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Из выражений (3.122) следует, что вещественные составляющие вносимых сопротивлений всегда положительны, а знаки реактивных составляющих вносимых сопротивлений $x_{\text{вн}1}$ и $x_{\text{вн}2}$ противоположны знакам реактивных составляющих собственных сопротивлений

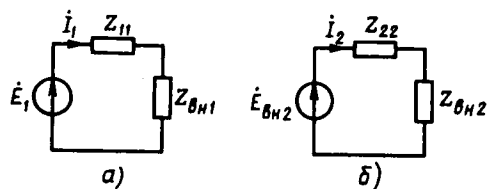


Рис. 3.45. Схема замещения первичного (а) и вторичного (б) контуров

вторичного и первичного контуров x_{22} и x_{11} . Если, например, при каком-то значении частоты внешнего воздействия собственное сопро-

тивление первичного контура Z_{11} имеет резистивно-емкостный характер, то на этой же частоте сопротивление, вносимое во вторичный контур $Z_{вн2}$, будет иметь резистивно-индуктивный характер.

Используя (3.119) — (3.122), выразим токи первичного и вторичного контуров через вещественные и мнимые составляющие сопротивлений элементов обобщенной схемы замещения связанных контуров:

$$I_1 = \frac{E_1}{[r_{11} + x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2)] + j[x_{11} - x_{12}^2 x_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2)]}; \quad (3.123)$$

$$I_2 = \frac{jx_{12} E_1 / (r_{11} + jx_{11})}{[r_{22} + x_{12}^2 r_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2)] + j[x_{22} - x_{12}^2 x_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2)]}. \quad (3.124)$$

НАСТРОЙКА СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

Настройка связанных колебательных контуров заключается в таком выборе параметров реактивных элементов контуров, при котором ток вторичного контура достигает максимального значения при заданных частоте и амплитуде напряжения источника энергии. Различают следующие способы настройки связанных контуров:

- настройка на частные резонансы;
- настройка на индивидуальный резонанс;
- настройка на сложный резонанс;
- настройка на полный резонанс.

Настройку на первый или второй частный резонанс осуществляют путем изменения параметров реактивных элементов, входящих только в первичный или только во вторичный контур. При настройке на первый частный резонанс добиваются выполнения условия

$$x_{11} + x_{вн1} = x_{11} - x_{12}^2 x_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2) = 0, \quad (3.125)$$

а при настройке на второй частный резонанс — условия

$$x_{22} + x_{вн2} = x_{22} - x_{12}^2 x_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2) = 0. \quad (3.126)$$

При настройке на *индивидуальный резонанс* параметры реактивных элементов, входящих только в первичный и только во вторичный контур, выбирают таким образом, чтобы обеспечить равенство нулю мнимой составляющей собственного сопротивления каждого контура при размыкании другого контура:

$$x_{11} = x_{22} = 0. \quad (3.127)$$

Очевидно, что при выполнении условия (3.127) одновременно выполняются и условия настройки на первый (3.125) и второй (3.126) частные резонансы.

Подставляя условие (3.127) в выражение (3.124), находим действующее значение тока вторичного контура при настройке на индивидуальный резонанс:

$$I_2 \max = \frac{|x_{12}|E_1/r_{11}}{r_{22} + x_{12}^2/r_{11}} = \frac{|x_{12}|E_1}{r_{11}r_{22} + x_{12}^2}. \quad (3.128)$$

Настройка связанных контуров на первый и второй частные или на индивидуальный резонансы позволяет получить максимальное значение тока вторичного контура, соответствующее некоторому заданному значению сопротивления связи $Z_{12} = jx_{12}$, однако не дает возможности достигнуть максимально возможного значения (максимума максимума) тока I_2 .

Если настройка связанных контуров на первый или второй частный резонанс сопровождается последующим выбором оптимального значения сопротивления связи, то происходит настройка контуров на *сложный* (оптимальный) резонанс. Анализируя выражение (3.124) при выполнении (3.125) или (3.126), можно показать, что *максимально возможное значение тока вторичного контура при настройке на сложный резонанс*

$$I_2 \max \max = E_1 / (2 \sqrt{r_{11}r_{22}}) \quad (3.129)$$

не зависит от того, какой из контуров был предварительно настроен на частный резонанс.

Наибольший практический интерес представляет настройка связанных контуров на *полный резонанс*, которая, как и настройка на сложный резонанс, выполняется в два этапа. На первом этапе связанные контуры настраивают на индивидуальный резонанс, а на втором этапе выбирают оптимальное сопротивление связи между ними $Z_{12 \text{ опт}} = jx_{12 \text{ опт}}$. Анализируя выражение (3.128), находим, что максимально возможное значение тока вторичного контура при настройке на полный резонанс также определяется выражением (3.129) и достигается при

$$|x_{12 \text{ опт}}| = \sqrt{r_{11}r_{22}}. \quad (3.130)$$

Таким образом, *при настройке на сложный резонанс, как и при настройке на полный резонанс, достигается одно и то же значение тока вторичного контура $I_2 = I_2 \max \max$.*

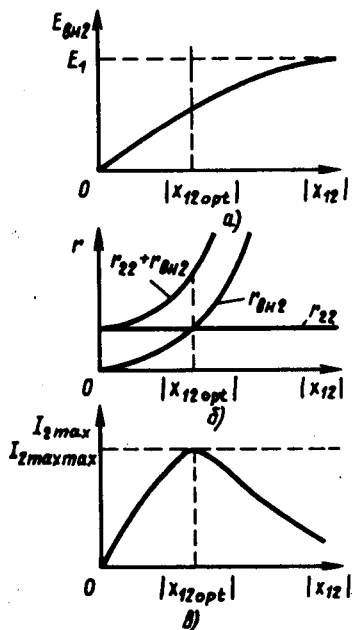


Рис. 3.46. Зависимости вносимой ЭДС (а), резистивной составляющей вносимого сопротивления, суммарного сопротивления (б) и тока (а) вторичного контура от сопротивления связи

Зависимость тока вторичного контура от абсолютного значения сопротивления связи при настройке на полный или сложный резонанс иллюстрируется кривыми, приведенными на рис. 3.46. Как следует из (3.117) и (3.122), с ростом сопротивления связи ЭДС, вносимая во вторичный контур, растет несколько медленнее, чем по линейному закону (рис. 3.46, а), а вещественная составляющая вносимого во вторичный контур сопротивления — по закону, близкому к квадратичному (рис. 3.46, б). При сопротивлении связи, меньшем оптимального, суммарное сопротивление вторичного контура $r_{22} + r_{\text{вн}2}$ зависит в основном от собственного сопротивления вторичного контура r_{22} , поэтому с ростом сопротивления связи происходит увеличение тока вторичного контура (рис. 3.46, в). При сопротивлении связи, большем оптимального, суммарное сопротивление вторичного контура определяется в основном сопротивлением, вносимым во вторичный контур $r_{\text{вн}2}$, которое с увеличением $|x_{12}|$ растет быстрее, чем вносимая в контур ЭДС. Вследствие этого при сопротивлении связи, большем $|x_{12\text{опт}}|$, дальнейший рост $|x_{12}|$ приводит к уменьшению тока вторичного контура.

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим зависимость тока вторичного контура от частоты для случая, когда параметры обоих контуров одинаковы:

$$x_{11} = x_{22} = x; r_{11} = r_{22} = r; \\ \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0; \rho_1 = \rho_2 = \rho; Q_1 = Q_2 = Q.$$

Собственные сопротивления первичного и вторичного контуров при этом могут быть представлены в следующем виде:

$$Z_{11} = Z_{22} = r + jx = r(1 + j\xi), \quad (3.131)$$

где $\xi = x/r$ — обобщенная расстройка.

Подставляя (3.120), (3.131) в (3.115), найдем выражения для комплексного действующего значения и действующего значения тока вторичного контура:

$$\dot{I}_2 = \frac{jx_{12}E_1}{r^2(1+j\xi)^2 + x_{12}^2} = \frac{jx_{12}E_1/r^2}{[1 - \xi^2 + (x_{12}/r)^2] + 2j\xi}; \\ I_2 = \frac{2|x_{12}|/r}{\sqrt{[1 - \xi^2 + (x_{12}/r)^2]^2 + 4\xi^2}} \frac{E_1}{2r}. \quad (3.132)$$

Принимая во внимание, что $E_1/(2r)$ есть максимально возможное значение тока вторичного контура

$$I_{2\text{ макс макс}} = E_1/(2\sqrt{r_{11}r_{22}}) = E_1/(2r),$$

выражение (3.132) можно записать в более компактном виде:

$$I_2 = 2AI_2 \max \max / \sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}, \quad (3.133)$$

где $A = k_{\omega} Q \approx |x_{12}|/r$ — постоянный коэффициент, называемый параметром (фактором) связи.

Очевидно, что экстремумы функции $I_2 = I_2(\xi)$ совпадают с экстремумами знаменателя выражения (3.133). Приравнивая нулю первую производную знаменателя по ξ , получаем $-4\xi(1 - \xi^2 + A^2) + 8\xi = 0$ или

$$\xi(\xi^2 + 1 - A^2) = 0. \quad (3.134)$$

Уравнение (3.134) имеет три решения:

$$\xi_1 = 0; \xi_2 = -\sqrt{A^2 - 1}; \xi_3 = \sqrt{A^2 - 1}.$$

Первое из них соответствует настройке контуров на индивидуальный резонанс, т. е. случаю, когда $\omega = \omega_0$. Второе и третье решения имеют физический смысл только при $A^2 - 1 \geq 0$, т. е. когда параметр связи A не меньше некоторого критического значения $A_{кр} = 1$, и соответствуют так называемым верхней (более высокой) и нижней (более низкой) частотам связи.

Таким образом, при больших значениях параметра связи ($A > A_{кр}$) функция $I_2 = I_2(\xi)$ имеет три экстремума, а при малых значениях параметра связи ($A < A_{кр}$) — один. При $A = A_{кр}$ все три решения уравнения (3.134) совпадают и функция $I_2 = I_2(\xi)$ имеет один экстремум.

Отметим, что критическое значение параметра связи соответствует оптимальной связи между контурами при настройке на полный резонанс.

Зависимость нормированного тока вторичного контура

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= I_2 / I_2 \max \max = \\ &= 2A / \sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2} \end{aligned}$$

от обобщенной расстройки ξ показана на рис. 3.47. При слабой связи между контурами ($A < A_{кр}$) частотные характеристики $\bar{I}_2$ имеют вид «одногогорбых» кривых, причем максимальное значение тока вторичного контура, достигаемое на резонансной частоте ($\xi = 0$), будет меньше максимально возможного значения $I_2 \max \max$. С увеличением пара-

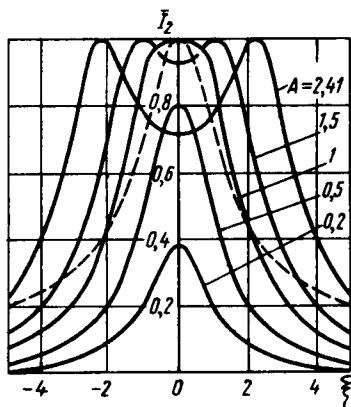


Рис. 3.47. Зависимость нормированного тока вторичного контура от обобщенной расстройки при различных значениях параметра связи (пунктиром показана частотная характеристика одиночного колебательного контура)

метра связи, вплоть до $A = A_{\text{кр}} = 1$, значения тока $\bar{I}_2$ в максимуме увеличиваются, кривые остаются «одногогорбыми». При $A = A_{\text{кр}}$ ток вторичного контура на резонансной частоте ($\xi = 0$) равен $I_{2 \text{ макс макс}}$. При дальнейшем увеличении связи между контурами ток вторичного контура на резонансной частоте ($\xi = 0$) начнет уменьшаться и частотные характеристики $\bar{I}_2$ приобретут вид «двугорбых» кривых. Максимальное значение тока $I_2 = I_{2 \text{ макс макс}}$ достигается на частотах связи, соответствующих обобщенным расстройкам $\xi = \pm \sqrt{A^2 - 1}$. С ростом параметра связи A при сильной связи между контурами ($A > A_{\text{кр}}$) максимальное значение тока вторичного контура, достигаемое на частотах связи, остается равным $I_{2 \text{ макс макс}}$, расстояние между максимумами увеличивается, а ток I_2 на резонансной частоте ($\xi = 0$) в соответствии с кривой, изображенной на рис. 3.46, в, уменьшается.

При $A > 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$ значение тока $\bar{I}_2$ на резонансной частоте падает ниже $0,707 I_{2 \text{ макс макс}}$, при этом полоса пропускания связанных контуров распадется на два участка.

Физически существование максимумов тока на частотах связи объясняется тем, что на этих частотах реактивная составляющая собственного сопротивления каждого контура компенсируется реактивной составляющей вносимого сопротивления. Действительно, как следует из выражений (3.122), мнимая составляющая сопротивления, вносимого в каждый из связанных контуров, противоположна по знаку мнимой составляющей собственного сопротивления другого контура. Так, на частотах ниже частоты настройки на индивидуальный резонанс мнимые составляющие собственных сопротивлений каждого из контуров отрицательны, а мнимые составляющие вносимых сопротивлений — положительны. Аналогичным образом при $\xi > 0$ x_{11} и x_{22} положительны, а $x_{\text{вн}1}$ и $x_{\text{вн}2}$ — отрицательны. Очевидно, что при достаточно больших значениях сопротивления связи, т. е. при $A > A_{\text{кр}}$, мнимые составляющие собственного и взаимного сопротивлений каждого контура на каких-то частотах, отличных от частоты индивидуального резонанса, могут взаимно скомпенсироваться. При этом комплексное входное сопротивление каждого контура имеет чисто резистивный характер, токи контуров достигают максимально возможного значения, а зависимости тока вторичного контура от частоты будут «двугорбыми». При малых значениях сопротивлений связи ($A < A_{\text{кр}}$) мнимые составляющие вносимых сопротивлений каждого из контуров на всех частотах остаются меньшими по абсолютному значению, чем мнимые составляющие собственных сопротивлений соответствующих контуров. При этих условиях взаимная компенсация мнимых составляющих собственного и взаимного сопротивлений каждого контура на частотах, отличных от частоты индивидуального резонанса, становится невозможной и зависимости $I_2(\xi)$ будут «одногогорбыми».

Для оценки избирательных свойств связанных контуров, используя (3.133), определим полосу пропускания на уровне $1/\sqrt{2}$:

$$\Pi_{\omega}^{\sqrt{2}} = \Pi_{\omega} = \begin{cases} \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{\sqrt{2(1+A^4)} - (1-A^2)} & \text{при } A \leq 1, \\ \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{A^2 + 2A - 1} & \text{при } 1 \leq A \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

и коэффициент прямоугольности АЧХ связанных контуров с одинаковыми параметрами

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{\omega}^{100}}{\Pi_{\omega}} = \begin{cases} 10 \sqrt{\frac{1+A^2}{\sqrt{2(1+A^4)} - (1-A^2)}} & \text{при } A \leq 1, \\ 10 \sqrt{\frac{2A}{A^2 + 2A - 1}} & \text{при } 1 \leq A \leq 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Зависимости коэффициента прямоугольности АЧХ K_{Π} и нормированной полосы пропускания связанных контуров на уровне $1/\sqrt{2}$

$$\tilde{\Pi} = \Pi_{\omega} Q / \omega_0 = \Pi_f Q / f_0$$

от параметра связи A приведены на рис. 3.48 (полоса пропускания связанных контуров нормируется по полосе пропускания одиночного контура). При изменении параметра связи от $A=0$ до $A=1+\sqrt{2} \approx 2,41$ полоса пропускания связанных контуров изменяется примерно в 5 раз: при $A \approx 0$ полоса пропускания связанных контуров составляет 0,64 от полосы пропускания одиночного контура; при $A=0,67$ полоса пропускания связанных контуров равна полосе пропускания одиночного контура ($\tilde{\Pi}=1$); при $A=2,41$ полоса пропускания связанных контуров в 3,1

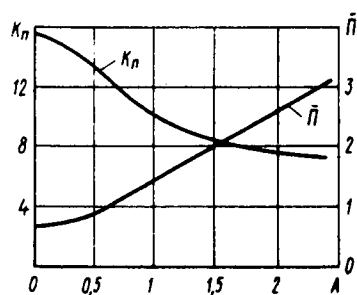


Рис. 3.48. Зависимости коэффициента прямоугольности АЧХ и нормированной полосы пропускания связанных контуров от параметра связи

пропускания связанных контуров в 3,1 раза превосходит полосу пропускания одиночного колебательного контура. При настройке на полный резонанс ($A=1$) нормированная полоса пропускания равна $\sqrt{2}$.

По сравнению с формой АЧХ одиночного колебательного контура форма АЧХ связанных колебательных контуров значительно ближе к прямоугольной: коэффициент прямоугольности связанных контуров изменяется в пределах от 15,5 при $A \approx 0$ до 7,1 при $A=2,41$ (напомним, что для одиночного колебательного контура $K_{\Pi}=100$,

а для идеальной избирательной цепи $K_D = 1$). Из анализа выражений (3.54) и (3.133) следует, что за пределами полосы пропускания нормированный отклик одиночного колебательного контура уменьшается обратно пропорционально ξ (6 дБ/окт), а отклик системы из двух связанных колебательных контуров с одинаковыми параметрами — обратно пропорционально ξ^2 (12 дБ/окт).

Таким образом, по сравнению с одиночными колебательными контурами связанные контуры обладают лучшими избирательными свойствами: АЧХ связанных контуров имеют форму, более близкую к прямоугольной, и характеризуются большой крутизной склонов за пределами полосы пропускания.



Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии

§ 4.1. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

До сих пор рассмотрение ограничивалось только простыми, одноконтурными и двухузловыми цепями, а также цепями, которые приводятся к простым с помощью элементарных преобразований. Для анализа таких цепей использовалась основная система уравнений электрического равновесия, включающая в себя $p - p_{\text{ит}} - p_{\text{ял}}$ компонентных и p топологических уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа. С помощью основной системы уравнений электрического равновесия можно производить анализ и сложных цепей, однако с ростом числа ветвей он усложняется, так как для определения токов и напряжений цепи, содержащей p ветвей, приходится решать систему из $2p - p_{\text{ит}} - p_{\text{ял}}$ уравнений.

Число одновременно решаемых уравнений может быть сокращено путем исключения из основной системы уравнений (ОСУ) электрического равновесия части переменных, однако наименьшая трудоемкость анализа достигается, если вообще отказаться от составления ОСУ и формировать систему уравнений цепи сразу же в сокращенной форме относительно меньшего по сравнению с $2p - p_{\text{ял}} - p_{\text{ит}}$ числа переменных. В этом случае неизвестные токи и напряжения ветвей электрической цепи разбиваются на две группы: *независимые*, относительно которых составляется сокращенная система уравнений электрического равновесия цепи (ССУ), и *зависимые*, которые выражаются через независимые с помощью компонентных или топологических уравнений.

Далее рассмотрены наиболее распространенные методы формирования сокращенных систем уравнений электрического равновесия цепи, основанные на различных вариантах выбора независимых переменных: метод токов ветвей, метод напряжений ветвей, метод контурных токов и метод узловых напряжений. Уравнения электрического равновесия, сформированные каждым из указан-

ных методов, вытекают из основной системы уравнений электрического равновесия цепи и могут быть получены путем исключения из нее соответствующих зависимых переменных. Все четыре метода являются весьма универсальными и позволяют анализировать как линейные, так и нелинейные цепи, находящиеся под произвольным внешним воздействием. В рамках данной главы мы ограничимся изложением указанных методов только применительно к линейным цепям, находящимся под гармоническим внешним воздействием.

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА НЕПОСРЕДСТВЕННОМ ПРИМЕНЕНИИ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

К методам формирования уравнений электрического равновесия цепей, основанным на непосредственном применении законов Кирхгофа, относятся метод токов ветвей и метод напряжений ветвей. В методе токов ветвей (ТВ) в качестве независимых переменных, относительно которых составляется сокращенная система уравнений электрического равновесия, используют неизвестные токи ветвей исследуемой цепи.

Метод ТВ основан на том, что ток и напряжение каждой ветви, за исключением ветвей, содержащих идеализированные источники тока, а также ветвей, составленных только из идеализированных источников напряжения, связаны между собой однозначной зависимостью, которая определяется компонентным уравнением данной ветви.

Пусть линейная электрическая цепь состоит только из идеализированных двухполюсных пассивных элементов: сопротивлений, емкостей, индуктивностей, а также неуправляемых источников напряжения. Основная система уравнений электрического равновесия такой цепи содержит $q-1$ уравнение баланса токов, $p-q+1$ уравнение баланса напряжений и $p-p_{\text{нл}}$ компонентных уравнений для определения p неизвестных токов и $p-p_{\text{нл}}$ неизвестных напряжений ветвей (напряжения $p_{\text{нл}}$ ветвей, состоящих только из источников напряжения, заданы). Если каким-либо образом найти токи всех ветвей, то неизвестные напряжения могут быть получены с помощью $p-p_{\text{нл}}$ компонентных уравнений. Для определения p неизвестных токов ветвей можно воспользоваться $q-1$ уравнением баланса токов и $p-q+1$ уравнением баланса напряжений, выразив в последних напряжения ветвей через соответствующие токи. Таким образом, для цепи, не содержащей источников тока, применение метода ТВ позволяет уменьшить число уравнений, входящих в систему уравнений электрического равновесия, от $2p-p_{\text{нл}}$ до p .

Пример 4.1. Составим систему уравнений электрического равновесия по методу ТВ для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 4.1, а. Граф этой цепи, соответствующий сокращенному топологическому описанию, изображен на рис. 4.1,

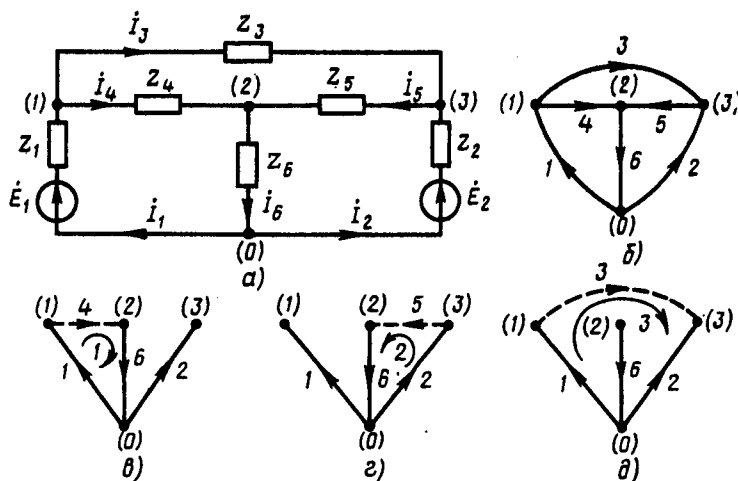


Рис. 4.1. К примеру 4.1

б. Как видно из рисунка, для данного топологического описания число ветвей $p=6$, число узлов $q=4$, причем ни одна из ветвей не содержит источников тока ($p_{\text{ит}}=0$) и не составлена только из источников напряжения ($p_{\text{ин}}=0$). Выбирая дерево графа и систему независимых контуров в соответствии с рис. 4.1, а - д, составим основную систему уравнений электрического равновесия, которая будет включать в себя 12 уравнений, в том числе $q-1=3$ уравнения баланса токов

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 + I_4 &= 0; \\ -I_4 - I_5 + I_6 &= 0; \\ -I_2 - I_3 + I_5 &= 0, \end{aligned}$$

$p-q+1=3$ уравнения баланса напряжений

$$\begin{aligned} U_1 + U_4 + U_6 &= 0; \\ U_2 + U_5 + U_6 &= 0; \\ U_1 - U_2 + U_3 &= 0 \end{aligned}$$

и $p-p_{\text{ин}}-p_{\text{ит}}=6$ компонентных уравнений

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_1 I_1 - E_1; & U_4 &= Z_4 I_4; \\ U_2 &= Z_2 I_2 - E_2; & U_5 &= Z_5 I_5; \\ U_3 &= Z_3 I_3; & U_6 &= Z_6 I_6. \end{aligned}$$

Подставляя компонентные уравнения в уравнения баланса напряжений, получаем в сочетании с уравнениями баланса токов сокращенную систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 + I_4 &= 0; & Z_1 I_1 + Z_4 I_4 + Z_6 I_6 &= E_1; \\ -I_4 - I_5 + I_6 &= 0; & Z_2 I_2 + Z_5 I_5 + Z_6 I_6 &= E_2; \\ -I_2 - I_3 + I_5 &= 0; & Z_1 I_1 - Z_2 I_2 + Z_3 I_3 &= E_1 - E_2. \end{aligned}$$

Таким образом, число одновременно решаемых уравнений уменьшилось с 12 до 6.

Рассмотрим более общий случай, когда исследуемая цепь помимо указанных ранее элементов включает в себя $p_{\text{вт}}$ ветвей, содержащих неуправляемые источники тока (токи этих ветвей заданы, а напряжения неизвестны и не могут быть выражены через токи соответствующих ветвей с помощью компонентных уравнений). Выберем дерево графа цепи таким образом, чтобы ветви, содержащие источники тока, не входили в число ветвей дерева, т. е. являлись главными ветвями. Тогда напряжения этих ветвей будут фигурировать только в $p_{\text{вт}}$ уравнениях баланса напряжений, составленных для главных контуров, замыкаемых ветвями, содержащими источники тока. Выражая в остальных $p - p_{\text{вт}} - q + 1$ уравнениях, составленных на основании второго закона Кирхгофа, напряжения ветвей через токи этих же ветвей, получим в сочетании с $q - 1$ уравнениями, составленными на основании первого закона Кирхгофа, $p - p_{\text{вт}}$ уравнений для определения $p - p_{\text{вт}}$ неизвестных токов ветвей.

Таким образом, при использовании метода ТВ сокращенная система уравнений электрического равновесия цепи включает в себя $q - 1$ уравнений баланса токов и $p - q + 1 - p_{\text{вт}}$ уравнений баланса напряжений, составленных для главных контуров, не содержащих ветвей с источниками тока, причем все входящие в эти уравнения напряжения ветвей должны быть выражены через соответствующие токи.

Решая данную систему уравнений любым методом, можно найти $p - p_{\text{вт}}$ неизвестных тока ветвей. Далее, с помощью компонентных уравнений невырожденных ветвей определяют $p - p_{\text{вт}} - p_{\text{ин}}$ неизвестные напряжения этих ветвей. Для расчета оставшихся $p_{\text{вт}}$ неизвестных напряжений ветвей с источниками тока используют $p_{\text{вт}}$ уравнений баланса напряжений, составленных для главных контуров, содержащих ветви с источниками тока.

Пример 4.2. Составим систему уравнений электрического равновесия цепи по методу ТВ. Схема замещения цепи для мгновенных значений приведена на рис. 1.39, а, комплексная схема замещения — на рис. 4.2, а.

Как было показано в примере 1.9, основная система уравнений электрического равновесия этой цепи включает в себя четыре компонентных уравнения и шесть уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа. Если дерево графа выбрано таким образом, что ветвь, содержащая источник тока, вошла в число главных ветвей (рис. 4.2, б), то напряжение этой ветви будет фигурировать только в одном уравнении, составленном на основании второго закона Кирхгофа. Это уравнение после нахождения токов всех ветвей можно использовать для нахождения неизвестного напряжения на источнике тока. Выражая в оставшихся уравнениях, составленных на основании законов Кирхгофа, напряжения ветвей через соответствующие токи, получаем систему из пяти уравнений для определения пяти неизвестных токов ветвей:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 &= 0; & Z_2 I_2 + Z_3 I_3 &= E; \\ -I_2 + I_3 + I_4 &= 0; & -Z_3 I_3 + Z_4 I_4 - Z_6 I_6 &= 0. \\ -I_4 + I - I_6 &= 0; \end{aligned}$$

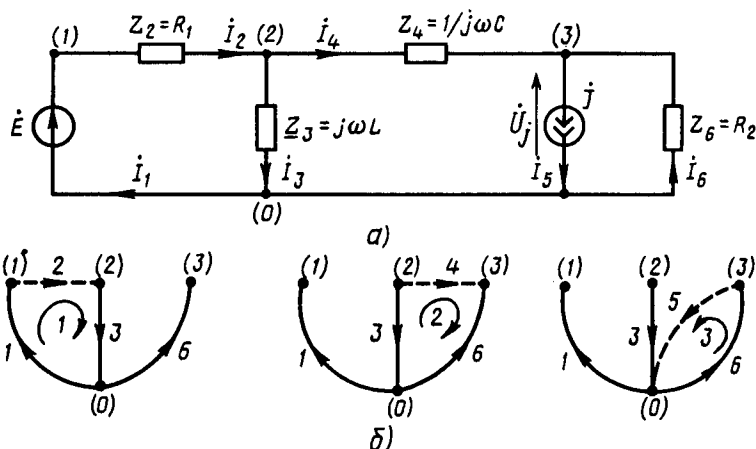


Рис. 4.2. К примеру 4.2

Далее будет показано, что число ветвей цепи, токи которых могут быть заданы независимо, не может превышать числа главных контуров цепи $p - q + 1$. Когда $p_{\text{ит}} = p - q + 1$, число неизвестных токов ветвей будет равно $q - 1$ и они могут быть определены из $q - 1$ уравнения баланса токов.

В связи с тем что напряжения на связанных индуктивностях выражаются через токи этих индуктивностей, метод ТВ может быть применен и для составления уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями (см. пример 2.17).

Дуальным по отношению к методу ТВ является метод напряжений ветвей НВ. При составлении системы уравнений электрического равновесия цепи с помощью этого метода в качестве независимых переменных используют неизвестные напряжения $p - p_{\text{ин}}$ ветвей. Система уравнений электрического равновесия в этом случае включает в себя $p - q + 1$ уравнений баланса напряжений и $q - p_{\text{ин}} - 1$ уравнений баланса токов, составленных для главных сечений, не содержащих ветвей, состоящих только из источников напряжения, причем неизвестные токи ветвей, входящие в эти уравнения, должны быть выражены через напряжения этих же ветвей. Число ветвей, напряжения которых могут быть заданы независимо, не может превышать числа независимых узлов $q - 1$. Когда число ветвей, состоящих только из независимых источников напряжения, равно числу независимых узлов ($p_{\text{ин}} = q - 1$), число неизвестных напряжений ветвей равно числу независимых контуров $p - q + 1$ и напряжения всех ветвей могут быть определены из $p - q + 1$ уравнений баланса напряжений.

Пример 4.3. Для цепи, рассмотренной в примере 4.2, составим уравнения электрического равновесия по методу НВ.

Число ветвей цепи $p = 6$, число узлов $q = 4$, причем одна ветвь составлена только из источников напряжения ($p_{\text{ин}} = 1$).

Для определения $p - p_{\text{нл}} = 5$ неизвестных напряжений ветвей составим $p - q + 1 = 3$ уравнения баланса напряжений

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 + \dot{U}_3 &= E; \\ -\dot{U}_3 + \dot{U}_4 - \dot{U}_6 &= 0; \\ \dot{U}_6 - \dot{U}_7 &= 0 \end{aligned}$$

и $q - p_{\text{нл}} - 1 = 2$ уравнения баланса токов для главных сечений, соответствующих третьей и шестой ветвям дерева (см. рис. 1.39, б)

$$\begin{aligned} -\dot{U}_2/Z_2 + \dot{U}_3/Z_3 + \dot{U}_4/Z_4 &= 0; \\ \dot{U}_4/Z_4 + \dot{U}_6/Z_6 - \dot{J} &= 0 \end{aligned}$$

(в последних уравнениях неизвестные токи ветвей выражены через напряжения соответствующих ветвей).

Метод НВ в общем случае нельзя использовать для формирования уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями, так как токи таких индуктивностей могут быть выражены через соответствующие напряжения только при коэффициенте связи между индуктивностями, меньшем единицы. Действительно, используя компонентные уравнения двух связанных индуктивностей (2.172), выразим токи этих индуктивностей через напряжения

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (L_2 \dot{U}_1 \mp M \dot{U}_2) / [j\omega (L_1 L_2 - M^2)]; \\ \dot{I}_2 &= (L_1 \dot{U}_2 \mp M \dot{U}_1) / [j\omega (L_1 L_2 - M^2)]. \end{aligned}$$

Очевидно, что полученные выражения имеют смысл только при $M \neq \sqrt{L_1 L_2}$, т. е. при $k_M < 1$. Таким образом, метод напряжений ветвей является менее общим, чем метод токов ветвей.

Таким образом, методы формирования уравнений электрического равновесия цепей, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа, позволяют уменьшить число одновременно решаемых уравнений от $2p - p_{\text{нл}} - p_{\text{нл}}$ до $p - p_{\text{нл}}$ или $p - p_{\text{нл}}$.

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов (КТ) основан на важной топологической особенности электрических цепей, заключающейся в том, что токи всех ветвей цепи связаны между собой $q - 1$ уравнением баланса токов, и, следовательно, из p токов ветвей только $p - q + 1$ ток может быть задан независимо.

Такое число токов в точности равно числу главных контуров рассматриваемой цепи, поэтому с каждым главным контуром можно связать некоторый ток (его называют контурным током), который может быть задан независимо. В качестве контурных токов будем выбирать токи главных ветвей, число этих ветвей равно числу главных контуров и они не связаны между собой уравнениями баланса токов, т. е. могут быть заданы независимо (в уравнение

баланса токов, составленное для любого узла или сечения электрической цепи, помимо токов главных ветвей обязательно входят токи ветвей дерева, инцидентных соответствующему узлу).

Иногда в качестве контурных токов выбирают не токи главных ветвей, а некоторые фиктивные токи, замыкающиеся в основных контурах цепи, т. е. контурах, соответствующих ячейкам планарного графа (напомним, что число основных контуров электрической цепи также равно $p - q + 1$). Во многих случаях этот подход является удобным, так как не требует привлечения топологических представлений и, в частности, построения дерева графа рассматриваемой цепи, однако его применение ограничено только цепями, граф которых является планарным.

Если токи главных ветвей цепи каким-либо способом определены или заданы, то, используя $q - 1$ уравнение баланса токов, можно найти $q - 1$ неизвестных токов ветвей дерева и далее, применяя компонентные уравнения и уравнения баланса напряжений, составленные для главных контуров, содержащих ветви с источниками тока, найти неизвестные напряжения всех ветвей. Таким образом, неизвестные токи и напряжения всех ветвей цепи могут быть выражены через токи главных ветвей. Для цепи, не содержащей источников тока, токи всех $p - q + 1$ главных ветвей являются неизвестными. Для их определения можно составить $p - q + 1$ уравнение баланса напряжений, выразив в последних неизвестные напряжения ветвей через контурные токи. Если в рассматриваемой цепи имеется $p_{\text{ит}}$ ветвей, содержащих источники тока, то число неизвестных токов главных ветвей уменьшается до $p - q + 1 - p_{\text{ит}}$ (напомним, что источники тока могут входить только в главные ветви графа). В этом случае для нахождения неизвестных контурных токов используют $p - q + 1 - p_{\text{ит}}$ уравнений баланса напряжений, составленных для контуров, не содержащих источников тока, выразив в них неизвестные напряжения ветвей через токи главных ветвей.

Как следует из изложенного, метод КТ можно считать дальнейшим развитием метода ТВ, при этом число одновременно решаемых уравнений уменьшается с $2p - p_{\text{ит}} - p_{\text{ит}}$ (при использовании ОСУ) или с $p - p_{\text{ит}}$ (метод ТВ) до $p - q + 1 - p_{\text{ит}}$.

Сокращенная система уравнений электрического равновесия цепи, составленная относительно неизвестных контурных токов, называется системой контурных уравнений цепи.

Такая система уравнений может быть сформирована двумя способами:

- 1) получена из основной системы уравнений электрического равновесия цепи или из уравнений, составленных по методу ТВ путем исключения всех неизвестных, кроме токов главных ветвей. Этот способ является трудоемким и на практике почти не используется. В дальнейшем воспользуемся им лишь один раз для обоснования второго способа;

2) составлена непосредственно по схеме цепи, минуя этап составления ОСУ. При этом запись уравнений осуществляют с помощью простого алгоритма, который можно сформулировать, если проанализировать системы контурных уравнений, полученных первым способом, и привести их к некоторой стандартной (канонической) форме, введя ряд новых понятий и обозначений.

Рассмотрим методику формирования контурных уравнений на примере простой цепи, не содержащей независимых источников тока и управляемых источников тока или напряжения (см. рис. 4.1, а). Выберем в качестве ветвей дерева ветви 1, 2, 6. Для соответствующей этому дереву системы главных контуров (см. рис. 4.1, в — д) составим уравнения баланса напряжений, выразив в них неизвестные напряжения всех ветвей через соответствующие токи:

$$\begin{aligned} Z_1 \dot{I}_1 + Z_4 \dot{I}_4 + Z_6 \dot{I}_6 &= E_1; \\ Z_2 \dot{I}_2 + Z_5 \dot{I}_5 + Z_6 \dot{I}_6 &= E_2; \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 - Z_2 \dot{I}_2 &= E_1 - E_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Используя уравнения баланса токов

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 &= 0; \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= 0; \\ -\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 &= 0, \end{aligned}$$

токи ветвей дерева $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_6$ можно выразить через токи главных ветвей $\dot{I}_3, \dot{I}_4, \dot{I}_5$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_3 + \dot{I}_4; \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_5 - \dot{I}_3; \\ \dot{I}_6 &= \dot{I}_4 + \dot{I}_5. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя выражения (4.2) в (4.1), получаем систему из $p - q + 1 = 3$ уравнений для определения трех неизвестных токов главных ветвей:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_4 + Z_6) \dot{I}_4 + Z_6 \dot{I}_5 + Z_1 \dot{I}_3 &= E_1; \\ Z_6 \dot{I}_4 + (Z_2 + Z_5 + Z_6) \dot{I}_5 - Z_2 \dot{I}_3 &= E_2; \\ Z_1 \dot{I}_4 - Z_2 \dot{I}_5 + (Z_1 + Z_2 + Z_3) \dot{I}_3 &= E_1 - E_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Разумеется, систему контурных уравнений (4.3) решить легче, чем приведенную в примере 4.1 основную систему уравнений этой же цепи (двенадцать уравнений) или систему уравнений, составленную по методу ТВ (шесть уравнений).

Для того чтобы выявить структуру контурных уравнений цепи (4.3) и сформулировать алгоритм их составления непосредственно по схеме цепи, введем ряд новых понятий и обозначений.

Собственным сопротивлением $Z_{(ii)}$ i -го контура назовем сумму сопротивлений всех ветвей, входящих в этот контур. В рассматрива-

емой цепи (см. рис. 4.1, а) выделено три независимых контура (см. рис. 4.1, в — д); их собственные сопротивления

$$Z_{(11)} = Z_1 + Z_4 + Z_6; \quad Z_{(22)} = Z_2 + Z_5 + Z_6; \quad Z_{(33)} = Z_1 + Z_2 + Z_3. \quad (4.4)$$

В каждом из уравнений (4.3) имеется член, равный произведению собственного сопротивления i -го контура на ток главной ветви, входящей в данный контур. Этот член можно рассматривать как падение напряжения на собственном сопротивлении i -го контура, которое вызвал бы ток, соответствующий главной ветви, если бы проходил через ветви, входящие в данный контур, т. е. замыкался бы в i -м контуре (отсюда происхождение термина «контурный ток»). Контурный ток i -го контура обозначим $\dot{I}_{ii}$. Направление контурного тока во всех элементах контура совпадает с направлением обхода этого контура, т. е. с направлением соответствующей главной ветви. Для цепи, схема которой представлена на рис. 4.1, а,

$$\dot{I}_{11} = \dot{I}_4; \quad \dot{I}_{22} = \dot{I}_5; \quad \dot{I}_{33} = \dot{I}_3. \quad (4.5)$$

Общим, или взаимным, сопротивлением i -го и j -го контуров назовем сопротивление $Z_{(ij)}$, равное сумме сопротивлений ветвей, общих для этих контуров. Общее сопротивление $Z_{(ij)}$ берется со знаком плюс, если контурные токи рассматриваемых контуров протекают через общие для этих контуров ветви в одинаковом направлении; если контурные токи в общих ветвях имеют противоположные направления, то общее сопротивление берут со знаком минус. Если контуры не имеют общих ветвей, то их общее сопротивление равно нулю. Общие сопротивления контуров цепи (см. рис. 4.1, а)

$$Z_{(12)} = Z_{(21)} = Z_6; \quad Z_{(23)} = Z_{(32)} = -Z_2; \quad Z_{(13)} = Z_{(31)} = Z_1. \quad (4.6)$$

Контурная ЭДС $\dot{E}_{ii}$ i -го контура — алгебраическая сумма ЭДС всех идеализированных источников напряжения, входящих в данный контур. Если направление ЭДС какого-либо источника, входящего в i -й контур, совпадает с направлением контурного тока этого контура, то соответствующая ЭДС входит в $\dot{E}_{ii}$ со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус. Контурные ЭДС цепи (см. рис. 4.1)

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1; \quad \dot{E}_{22} = \dot{E}_2; \quad \dot{E}_{33} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2. \quad (4.7)$$

Используя обозначения (4.4) — (4.7), представляем контурные уравнения (4.3) в канонической форме записи:

$$\begin{aligned} Z_{(11)}\dot{I}_{11} + Z_{(12)}\dot{I}_{22} + Z_{(13)}\dot{I}_{33} &= \dot{E}_{11}; \\ Z_{(21)}\dot{I}_{11} + Z_{(22)}\dot{I}_{22} + Z_{(23)}\dot{I}_{33} &= \dot{E}_{22}; \\ Z_{(31)}\dot{I}_{11} + Z_{(32)}\dot{I}_{22} + Z_{(33)}\dot{I}_{33} &= \dot{E}_{33}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Анализируя выражения (4.8), нетрудно установить, что все контурные уравнения имеют одинаковую структуру: левая часть уравнения, составленного для i -го контура, представляет собой сумму членов, один из которых равен произведению контурного тока i -го контура на его собственное сопротивление, а остальные — произведением контурных токов других контуров на общие сопротивления i -го контура и этих контуров; правая часть уравнения i -го контура содержит только один член — контурную ЭДС этого контура.

Полученные результаты могут быть обобщены для произвольной линейной цепи, составленной из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников напряжения:

$$\begin{aligned} Z_{(11)}\dot{I}_{11} + Z_{(12)}\dot{I}_{22} + \dots + Z_{(1n)}\dot{I}_{nn} &= \dot{E}_{11}; \\ Z_{(21)}\dot{I}_{11} + Z_{(22)}\dot{I}_{22} + \dots + Z_{(2n)}\dot{I}_{nn} &= \dot{E}_{22}; \\ \vdots & \\ Z_{(n1)}\dot{I}_{11} + Z_{(n2)}\dot{I}_{22} + \dots + Z_{(nn)}\dot{I}_{nn} &= \dot{E}_{nn} \end{aligned} \quad (4.9)$$

или в матричной форме

$$Z_{(ij)}\dot{I}_{ii} = \dot{E}_{ii}, \quad (4.10)$$

где $n = p - q + 1$ — число независимых контуров рассматриваемой цепи;

$$Z_{(ij)} = \begin{bmatrix} Z_{(11)} & Z_{(12)} & \dots & Z_{(1n)} \\ Z_{(21)} & Z_{(22)} & \dots & Z_{(2n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{(n1)} & Z_{(n2)} & \dots & Z_{(nn)} \end{bmatrix}$$

— матрица контурных сопротивлений;

$$\dot{I}_{ii} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \vdots \\ \dot{I}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\dot{E}_{ii} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \vdots \\ \dot{E}_{nn} \end{bmatrix}$$

— матрицы-столбцы контурных токов и контурных ЭДС.

Для линейных цепей, состоящих только из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников напряжения, ма-

трица контурных сопротивлений квадратная, причем вследствие того, что для таких цепей всегда выполняется условие $Z_{ij} = Z_{ji}$, матрица Z_{ij} симметрична относительно главной диагонали.

Таким образом, зная структуру контурных уравнений и выделив главные контуры рассматриваемой линейной цепи, нетрудно сформировать систему контурных уравнений, не прибегая к составлению основной системы уравнений электрического равновесия цепи. Рекомендуемый порядок составления контурных уравнений:

- 1) построение графа цепи, выбор дерева графа, выделение соответствующей выбранному дереву системы главных контуров;
- 2) определение числа контурных уравнений n (числа главных контуров) и запись контурных уравнений в виде (4.9) или (4.10);
- 3) нахождение элементов матриц контурных сопротивлений и контурных ЭДС в соответствии с определениями собственного сопротивления Z_{ij} и контурной ЭДС E_{ii} i -го контура, а также общего сопротивления i -го и j -го в Z_{ij} .

Решая систему уравнений (4.10) любым из методов, можно найти неизвестные контурные токи цепи. Например, применяя формулы Крамера, запишем выражение для контурного тока k -го контура:

$$I_{kk} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} E_{11} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} E_{22} + \dots + \frac{\Delta_{nk}}{\Delta} E_{nn} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} E_{ii}, \quad (4.11)$$

где Δ — определитель системы уравнений (4.10); Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента Z_{ik} этого определителя. В аналогичной форме могут быть записаны выражения для контурных токов всех остальных контуров. Следует отметить, что формулы Крамера, позволяющие получить в явной форме аналитические выражения для контурных токов, нашли применение лишь при теоретическом исследовании свойств электрических цепей. Вычисление контурных токов при $n > 3$ с помощью формул Крамера является весьма трудоемким. Поэтому на практике обычно используют более экономичные методы, такие, например, как метод исключения Гаусса или LU -преобразование [8, 9].

Если электрическая цепь помимо сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников напряжения содержит также независимые источники тока, то последние с помощью рассмотренных в § 2.6 преобразований можно заменить независимыми источниками напряжения. Однако систему контурных уравнений такой цепи можно составить и не прибегая к преобразованию источников.

Пусть в состав исследуемой цепи входит $p_{\text{н}}$ ветвей, включающих независимые источники тока. Выберем дерево цепи таким образом, чтобы ветви с источниками тока вошли в состав главных ветвей. Очевидно, что контурные токи контуров, которые замыкаются главными

ветвями, содержащими источники тока, равны токам соответствующих независимых источников. Эти токи заданы и не требуют определения. Таким образом, число неизвестных контурных токов становится меньше числа независимых контуров $n = p - q + 1$ на $p_{\text{ит}}$. Для нахождения неизвестных контурных токов необходимо составить систему из $p - p_{\text{ит}} - q + 1$ контурных уравнений для контуров, не содержащих ветвей с источниками тока. Контурные уравнения такой цепи могут быть записаны в такой же форме, как и контурные уравнения цепи, не имеющей источников тока (4.9), (4.10), однако матрица контурных сопротивлений в этом случае будет не квадратной: число столбцов равно числу независимых контуров $n = p - q + 1$, а число строк — числу неизвестных контурных токов $p - p_{\text{ит}} - q + 1$. Матрица-столбец контурных токов включает в себя все контурные токи — как известные, так и неизвестные. После формирования контурных уравнений в форме (4.9), (4.10) входящие в каждое уравнение члены, содержащие известные контурные токи, переносят в правую часть соответствующих уравнений и матрица контурных сопротивлений становится квадратной.

Пример 4.4. Составим систему контурных уравнений для цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а. Число ветвей этой цепи $p = 6$, число узлов $q = 4$, число ветвей, содержащих источники тока, $p_{\text{ит}} = 1$.

Выберем дерево графа цепи таким образом, чтобы ветвь с источником тока вошла в число главных ветвей. Соответствующая выбранному дереву система независимых контуров изображена на рис. 4.2, б. В связи с тем что число независимых контуров цепи равно $p - q + 1 = 3$, а число неизвестных контурных токов $p - p_{\text{ит}} - q + 1 = 2$, система контурных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{(11)}\dot{I}_{11} + Z_{(12)}\dot{I}_{22} + Z_{(13)}\dot{I}_{33} &= E_{11}; \\ Z_{(21)}\dot{I}_{11} + Z_{(22)}\dot{I}_{22} + Z_{(23)}\dot{I}_{33} &= E_{22}, \end{aligned}$$

где $\dot{I}_{11} = \dot{I}_2$; $\dot{I}_{22} = \dot{I}_4$ — неизвестные контурные токи первого и второго контуров; $\dot{I}_{33} = \dot{I}_5 = \dot{I}$ — известный контурный ток третьего контура; $Z_{(11)} = Z_2 + Z_3$; $Z_{(22)} = Z_3 + Z_4 + Z_6$ — собственные сопротивления первого и второго контуров; $Z_{(12)} = Z_{(21)} = -Z_3$; $Z_{(23)} = -Z_6$, $Z_{(13)} = 0$ — общие сопротивления; $E_{11} = E$, $E_{22} = 0$ — контурные ЭДС первого и второго контуров.

Переносим члены, содержащие известный контурный ток, в правую часть уравнений и выражая собственные и взаимные сопротивления контуров через параметры элементов цепи, окончательно получаем

$$\begin{aligned} (Z_2 + Z_3)\dot{I}_{11} - Z_3\dot{I}_{22} &= E; \\ -Z_3\dot{I}_{11} + (Z_3 + Z_4 + Z_6)\dot{I}_{22} &= Z_6\dot{I}. \end{aligned}$$

Таким образом, система контурных уравнений рассматриваемой цепи содержит два уравнения, позволяющие определить два неизвестных контурных токов.

Метод КТ можно использовать и для составления уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями, однако алгоритм формирования матрицы контурных сопротивлений при этом усложняется.

При анализе цепей со взаимной индуктивностью целесообразно либо заменять связанные индуктивности участками цепей, не содержащими связанных индуктивностей, либо формировать уравнения электрического равновесия с помощью метода ТВ.

МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

При составлении уравнений электрического равновесия цепи по методу напряжений ветвей в качестве независимых переменных были использованы $p - p_{\text{ин}}$ неизвестных напряжений. Принимая во внимание, что напряжения ветвей связаны $p - q + 1$ уравнениями баланса напряжений, число независимых напряжений, относительно которых формируется система уравнений электрического равновесия цепи, может быть уменьшено до $q - p_{\text{ин}} - 1$. Эти независимые напряжения могут быть выбраны различным образом. Если дерево графа цепи выбрано так, что вырожденные ветви, содержащие только независимые источники напряжения, вошли в число ветвей дерева, то в качестве независимых переменных можно принять неизвестные $q - p_{\text{ин}} - 1$ напряжения ветвей дерева. Такой метод формирования сокращенной системы уравнений электрического равновесия цепи называется методом напряжений ветвей дерева (НВД).

В качестве независимых переменных, относительно которых формируют уравнения электрического равновесия цепи, можно использовать также так называемые узловые напряжения, т. е. напряжения независимых узлов цепи относительно базисного. Нетрудно показать, что *напряжения всех ветвей электрической цепи могут быть выражены через ее узловые напряжения.*

Действительно, напряжение некоторой ветви, включенной между i -м и базисным узлами, равно узловому напряжению i -го узла $\dot{U}_i$, взятому со знаком плюс (рис. 4.3, а) или минус (рис. 4.3, б) в зависимости от направления напряжения этой ветви, а напряжение ветви, включенной между i -м и j -м узлами (рис. 4.3, в), — разности узловых напряжений этих узлов $\dot{U}_i - \dot{U}_j$.

Если исследуемая цепь не содержит вырожденных ветвей, составленных только из независимых источников напряжения, то все

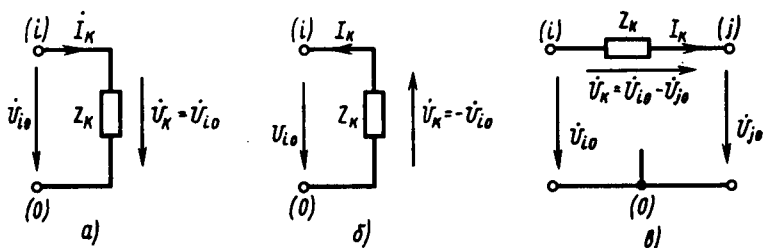


Рис. 4.3. К определению понятия узлового напряжения

$q-1$ неизвестные узловые напряжения независимы. Если цепь содержит $p_{\text{нз}}$ ветвей, состоящих только из независимых источников напряжения, то узловые напряжения $p_{\text{нз}}$ узлов могут быть выражены через $q-p_{\text{нз}}-1$ неизвестных узловых напряжений, выбранных в качестве независимых, и $p_{\text{нз}}$ напряжения ветвей, состоящих только из независимых источников напряжения. Для определения неизвестных узловых напряжений составляется $q-p_{\text{нз}}-1$ уравнений электрического равновесия цепи, называемых узловыми. Метод формирования уравнений электрического равновесия цепи, в котором в качестве независимых переменных используются неизвестные напряжения независимых узлов относительно базисного, называется методом узловых напряжений (УН).

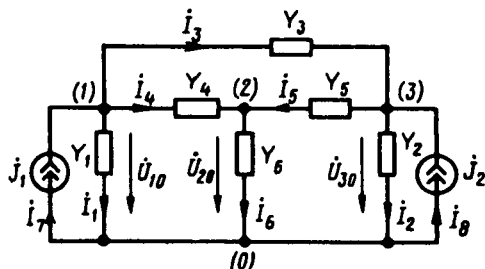


Рис. 4.4. К составлению уравнений электрического равновесия методом УН

Несмотря на то что число независимых переменных и, следовательно, число одновременно решаемых уравнений для методов НВД и УН получается одинаковым, метод узловых напряжений получил более широкое распространение на практике, так как при построении сокращенной системы уравнений электрического равновесия цепи этим методом не требуется привлечения топологических представлений, в частности, выполнения трудоемкой для сложных цепей операции построения дерева.

Рассмотрим методику формирования узловых уравнений на примере цепи, не содержащей источников напряжения (рис. 4.4). Исследуемая цепь получена из цепи, схема которой изображена на рис. 4.1, а, путем преобразования источников напряжения в источники тока и замены комплексных сопротивлений ветвей их комплексными проводимостями. Она имеет три независимых узла, для которых можно составить уравнения баланса токов:

$$\begin{aligned} i_1 + i_3 + i_4 - j_1 &= 0; \\ -i_4 - i_5 + i_6 &= 0; \\ i_2 - i_3 + i_5 - j_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Выразим неизвестные токи ветвей цепи через напряжения этих ветвей, а напряжения ветвей — через соответствующие узловые напряжения:

$$\begin{aligned} i_1 &= Y_1 U_1 = Y_1 \dot{U}_{10}; & i_4 &= Y_4 U_4 = Y_4 (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}); \\ i_2 &= Y_2 U_2 = Y_2 \dot{U}_{30}; & i_5 &= Y_5 U_5 = Y_5 (\dot{U}_{30} - \dot{U}_{20}); \\ i_3 &= Y_3 U_3 = Y_3 (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}); & i_6 &= Y_6 U_6 = Y_6 \dot{U}_{20}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляя выражения (4.13) в (4.12), получаем систему уравнений для определения трех неизвестных узловых напряжений:

$$\begin{aligned}(Y_1 + Y_3 + Y_4)\dot{U}_{10} - Y_4\dot{U}_{20} - Y_3\dot{U}_{30} &= J_1; \\ -Y_4\dot{U}_{10} + (Y_4 + Y_5 + Y_6)\dot{U}_{20} - Y_5\dot{U}_{30} &= 0; \\ -Y_3\dot{U}_{10} - Y_5\dot{U}_{20} + (Y_2 + Y_3 + Y_5)\dot{U}_{30} &= J_2.\end{aligned}$$

Введем ряд новых понятий.

Собственной проводимостью $Y_{(ii)}$ i -го узла назовем сумму проводимостей всех ветвей, подключенных к данному узлу. Для рассматриваемой цепи

$$Y_{(11)} = Y_1 + Y_3 + Y_4; \quad Y_{(22)} = Y_4 + Y_5 + Y_6; \quad Y_{(33)} = Y_2 + Y_3 + Y_5. \quad (4.14)$$

Общая (взаимная) проводимость i -го и j -го узлов — это сумма проводимостей всех ветвей, включенных непосредственно между этими узлами, взятая с противоположным знаком. Если в цепи отсутствуют ветви, включенные непосредственно между i -м и j -м узлами, то $Y_{(ij)} = 0$. Для цепи, схема которой приведена на рис. 4.4,

$$Y_{(12)} = Y_{(21)} = -Y_4; \quad Y_{(23)} = Y_{(32)} = -Y_5; \quad Y_{(13)} = Y_{(31)} = -Y_3. \quad (4.15)$$

Узловым током J_{i0} i -го узла называется алгебраическая сумма токов всех источников тока, подключенных к данному узлу. Если ток какого-либо источника тока направлен к i -му узлу, то он входит в выражение для J_{i0} со знаком плюс, если ток направлен от i -го узла, то — со знаком минус. Для рассматриваемой цепи

$$J_{10} = J_1; \quad J_{20} = 0; \quad J_{30} = J_2. \quad (4.16)$$

Используя обозначения (4.14) — (4.16), представим узловые уравнения исследуемой цепи в канонической форме записи:

$$\begin{aligned}Y_{(11)}\dot{U}_{10} + Y_{(12)}\dot{U}_{20} + Y_{(13)}\dot{U}_{30} &= J_{10}; \\ Y_{(21)}\dot{U}_{10} + Y_{(22)}\dot{U}_{20} + Y_{(23)}\dot{U}_{30} &= J_{20}; \\ Y_{(31)}\dot{U}_{10} + Y_{(32)}\dot{U}_{20} + Y_{(33)}\dot{U}_{30} &= J_{30}.\end{aligned} \quad (4.17)$$

Таким образом, левая часть узлового уравнения, составленного для i -го независимого узла, есть сумма членов, один из которых равен произведению узлового напряжения i -го узла на его собственную проводимость, а остальные — произведениям узловых напряжений других независимых узлов на взаимные проводимости i -го узла и этих узлов. Правая часть каждого уравнения равна узловому току соответствующего узла.

Для линейной электрической цепи, имеющей $m = q - 1$ независимых узлов и состоящей только из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников тока, система узловых уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 Y_{(11)}\dot{U}_{10} + Y_{(12)}\dot{U}_{20} + \dots + Y_{(1m)}\dot{U}_{m0} &= J_{10}; \\
 Y_{(21)}\dot{U}_{10} + Y_{(22)}\dot{U}_{20} + \dots + Y_{(2m)}\dot{U}_{m0} &= J_{20}; \\
 \vdots &\vdots \\
 Y_{(m1)}\dot{U}_{10} + Y_{(m2)}\dot{U}_{20} + \dots + Y_{(mm)}\dot{U}_{m0} &= J_{m0}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

или

$$Y_{(ij)}\dot{U}_{j0} = J_{i0}, \tag{4.19}$$

где

$$Y_{(ij)} = \begin{bmatrix} Y_{(11)} & Y_{(12)} & \dots & Y_{(1m)} \\ Y_{(21)} & Y_{(22)} & \dots & Y_{(2m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{(m1)} & Y_{(m2)} & \dots & Y_{(mm)} \end{bmatrix}$$

— матрица узловых проводимостей цепи;

$$\dot{U}_{j0} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{m0} \end{bmatrix};$$

$$J_{i0} = \begin{bmatrix} J_{10} \\ J_{20} \\ \vdots \\ J_{m0} \end{bmatrix}$$

— матрицы-столбцы узловых напряжений и узловых токов.

Можно убедиться, что для цепей рассматриваемого типа всегда выполняется условие $Y_{(ij)} = Y_{(ji)}$, поэтому матрица узловых проводимостей таких цепей квадратная и симметричная относительно главной диагонали.

Таким образом, составление узловых уравнений, так же как и составление контурных уравнений, может производиться непосредственно по схеме электрической цепи, не прибегая к составлению основной системы уравнений электрического равновесия. При этом запись уравнений электрического равновесия цепи по методу УН дополнительно упрощается вследствие того, что в этом случае не возникает необходимость в определении системы независимых контуров и построении дерева графа исследуемой цепи.

Рекомендуемый порядок составления узловых уравнений:

1) преобразование исходной электрической цепи (замена сопротивлений ветвей их проводимостями, переход от последовательных схем замещения источников к параллельным);

2) выбор независимых узлов преобразованной цепи;

3) определение числа узловых уравнений (числа независимых узлов) и запись узловых уравнений в форме (4.18) или (4.19);

4) нахождение элементов матриц узловых проводимостей и узловых токов в соответствии с определениями собственной проводимости $Y_{(ij)}$ и узлового тока $\dot{J}_{i0}$ i -го узла, а также общей проводимости i -го и j -го узлов $Y_{(ij)}$.

Решая систему узловых уравнений любым из методов, определяющих неизвестные узловые напряжения. Так, используя формулы Крамера, найдем узловое напряжение k -го узла:

$$\dot{U}_{k0} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \dot{J}_{10} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \dot{J}_{20} + \dots + \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} \dot{J}_{m0} = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \dot{J}_{i0}, \quad (4.20)$$

где Δ — определитель системы уравнений (4.19); Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента $Y_{(ik)}$ этого определителя.

Если в рассматриваемой цепи наряду с перечисленными элементами содержатся также вырожденные источники напряжения, которые не могут быть заменены на источники тока непосредственно путем преобразования комплексных схем замещения источников, то они должны быть удалены из схемы, используя преобразования переноса источников (см. § 2.6). В то же время узловые уравнения могут быть составлены и для цепи, содержащей источники напряжения.

В простейшем случае исследуемая цепь может содержать $p_{\text{нн}}$ источников напряжения, имеющих общую точку. Выберем в качестве базисного узел, к которому подключены все источники напряжения. Тогда узловые напряжения $p_{\text{нн}}$ узлов, к которым подключены вторые полюсы источников напряжения, будут равны ЭДС этих источников, взятым со знаком плюс или минус; при этом число неизвестных узловых напряжений уменьшается до $q - 1 - p_{\text{нн}}$. Узловые уравнения такой цепи формируются только для узлов, к которым не подключены источники напряжения; в левой части узловых уравнений, так же как и в (4.18), (4.19), учитываются все узловые напряжения, как известные, так и неизвестные. Матрица узловых проводимостей цепи, содержащей независимые источники напряжения, будет не квадратной: число столбцов этой матрицы равно числу независимых узлов $m = q - 1$, а число строк — числу неизвестных узловых напряжений $q - p_{\text{нн}} - 1$. После формирования системы уравнений электрического равновесия цепи в виде (4.18), (4.19) члены, содержащие известные узловые напряжения, переносят в правую часть соответствующих уравнений, в результате чего матрица узловых проводимостей становится квадратной.

Пример 4.5. Используя метод узловых напряжений, составим уравнения электрического равновесия цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а. Эта цепь содержит $q-1=3$ независимых узла и имеет один источник напряжения $\dot{E}$, включенный между базисным узлом и узлом 1. Узловое напряжение этого узла $\dot{U}_{10}$ известно и равно $\dot{E}$. Для определения неизвестных узловых напряжений $\dot{U}_{20}$ и $\dot{U}_{30}$ составляем два узловых уравнения:

$$\begin{aligned} Y_{(21)}\dot{U}_{10} + Y_{(22)}\dot{U}_{20} + Y_{(23)}\dot{U}_{30} &= 0; \\ Y_{(31)}\dot{U}_{10} + Y_{(32)}\dot{U}_{20} + Y_{(33)}\dot{U}_{30} &= -\dot{J}, \end{aligned}$$

где $Y_{(22)}=1/Z_2+1/Z_3+1/Z_4$; $Y_{(33)}=1/Z_4+1/Z_6$ — собственные проводимости узлов

2 и 3; $Y_{(31)}=0$; $Y_{(21)}=-1/Z_2$; $Y_{(23)}=Y_{(32)}=-\frac{1}{Z_4}$ — взаимные проводимости узлов.

Переносим члены, содержащие известное узловое напряжение $\dot{U}_{10}=\dot{E}$, в правую часть уравнений и выражая собственные и взаимные проводимости узлов через параметры элементов цепи, находим

$$\begin{aligned} (1/Z_2+1/Z_3+1/Z_4)\dot{U}_{20}-\dot{U}_{30}/Z_4 &= \dot{E}/Z_2; \\ -\dot{U}_{20}/Z_4+(1/Z_4+1/Z_6)\dot{U}_{30} &= -\dot{J}. \end{aligned}$$

Аналогичная система уравнений электрического равновесия цепи получается и в том случае, когда источник напряжения $\dot{E}$ заменяют источником тока $\dot{E}/Z_2$, подключенным между узлом 2 и базисным узлом (узел 1 в этом случае устраняется).

Если цепь содержит несколько вырожденных источников напряжения, не имеющих общей точки, то формирование узловых уравнений проводится следующим способом:

— строится дерево графа цепи так, чтобы все $p_{\text{нн}}$ вырожденных ветвей, составленных только из источников напряжения, вошли в состав ветвей дерева;

— выбирается $q-1-p_{\text{нн}}$ независимых узлов, узловые напряжения которых являются неизвестными; напряжения остальных $p_{\text{нн}}$ независимых узлов выражаются через неизвестные узловые напряжения и напряжения $p_{\text{нн}}$ ветвей, состоящих только из источников напряжения;

— для $q-1-p_{\text{нн}}$ главных сечений, соответствующих невырожденным ветвям дерева, составляются уравнения баланса токов;

— неизвестные токи ветвей, входящих в уравнения баланса токов, выражаются через $q-1-p_{\text{нн}}$ неизвестных узловых напряжений.

Пример 4.6. Составим узловые уравнения цепи (рис. 4.5, а), не применяя переноса источников.

Выберем дерево графа рассматриваемой цепи так, чтобы в него вошли обе ветви, составленные только из источников напряжения (рис. 4.5, б). Данная цепь содержит $q-1=4$ независимых узла, причем узловое напряжение первого узла известно ($\dot{U}_{10}=\dot{E}_1$), а узловые напряжения второго и третьего узлов связаны между собой уравнением баланса напряжений: $\dot{U}_{30}-\dot{U}_{20}=-\dot{E}_2$. Таким образом, только два узловых напряжения могут быть выбраны независимыми. Выберем в качестве независимых неизвестных узловые напряжения второго и четвертого узлов $\dot{U}_{20}$ и $\dot{U}_{40}$. В этом

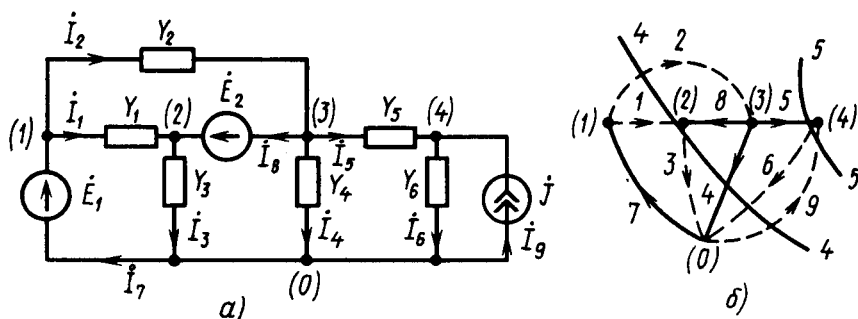


Рис. 4.5. К примеру 4.6

случае $\dot{U}_{30} = \dot{U}_{20} - \dot{E}_2$. Для главных сечений 4 и 5, не содержащих вырожденных ветвей дерева, составим уравнения баланса токов:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 + \dot{I}_6 - \dot{J} &= 0; \\ \dot{I}_5 - \dot{I}_6 + \dot{J} &= 0. \end{aligned}$$

Выражая входящие в эти уравнения неизвестные токи через неизвестные узловые напряжения

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_1(\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}) = Y_1(\dot{E}_1 - \dot{U}_{20}); \\ \dot{I}_2 &= Y_2(\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}) = Y_2(\dot{E}_1 - \dot{U}_{20} + \dot{E}_2); \\ \dot{I}_3 &= Y_3\dot{U}_{20}; \\ \dot{I}_4 &= Y_4\dot{U}_{30} = Y_4(\dot{U}_{20} - \dot{E}_2); \\ \dot{I}_5 &= Y_5(\dot{U}_{30} - \dot{U}_{40}) = Y_5(\dot{U}_{20} - \dot{E}_2 - \dot{U}_{40}); \\ \dot{I}_6 &= Y_6\dot{U}_{40}, \end{aligned}$$

получаем два уравнения для определения двух неизвестных узловых напряжений:

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)\dot{U}_{20} + Y_6\dot{U}_{40} &= \dot{J} + (Y_1 + Y_2)\dot{E}_1 + (Y_2 + Y_4)\dot{E}_2; \\ -Y_5\dot{U}_{20} + (Y_5 + Y_6)\dot{U}_{40} &= \dot{J} - Y_3\dot{E}_2. \end{aligned}$$

Как и метод НВ, метод УН не может быть использован для анализа цепей со взаимной индуктивностью при $k_M = 1$.

ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПЕЙ С ЗАВИСИМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Основная проблема, возникающая при формировании уравнений электрического равновесия цепей с управляемыми источниками, заключается в том, что в этих уравнениях могут появляться новые переменные, представляющие собой управляющие токи или напряжения. Обычно эта проблема решается одним из двух способов:

- 1) введением дополнительных уравнений, выражающих управляющие токи или напряжения через величины, выбранные в используемом методе анализа в качестве независимых переменных;
- 2) преобразованием исходной цепи, направленным на замену заданных управляемых источников другими, управляемыми токами

или напряжениями, выбранными в качестве независимых переменных.

При формировании уравнений различают зависимые источники, управляемые током или напряжением какой-либо невырожденной, т. е. не содержащей источников тока и не составленной только из источников напряжения, ветви, и источники, у которых управляющее воздействие не является током или напряжением какой-либо невырожденной ветви.

Рассмотрим сначала методику формирования уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники первого типа. Особенностью таких цепей является возможность преобразования источников, управляемых напряжением какой-либо ветви, в источники, управляемые током этой же ветви, и наоборот.

Пусть в исследуемой цепи имеются источники напряжения и тока, управляемые напряжением a -й ветви:

$$\dot{E} = K\dot{U}_a; \dot{J} = S\dot{U}_a, \quad (4.21)$$

где K, S — коэффициенты управления источников.

Используя компонентное уравнение a -й ветви, напряжение $\dot{U}_a$ в соотношениях (4.21) можно выразить через ток этой ветви $\dot{I}_a$, при этом источник, управляемый напряжением, преобразуется в источник, управляемый током. В простейшем случае связь напряжения и тока a -й ветви описывается законом Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_a = Z_a \dot{I}_a. \quad (4.22)$$

Подставляя (4.22) в (4.21), получаем

$$\dot{E} = (KZ_a)\dot{I}_a; \dot{J} = (SZ_a)\dot{I}_a.$$

Аналогичным образом можно преобразовать источники, управляемые током какой-либо ветви, в источники, управляемые напряжением этой же ветви.

При составлении основной системы уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники напряжения или тока рассматриваемого типа, эти источники учитывают в уравнениях, составленных на основании законов Кирхгофа, наряду с независимыми источниками, а затем токи и ЭДС зависимых источников выражают через соответствующие управляющие воздействия. В связи с тем что управляющие воздействия представляют собой токи и напряжения ветвей цепи, в основной системе уравнений электрического равновесия цепи не появится новых неизвестных токов или напряжений. При формировании уравнений электрического равновесия цепи по методу ТВ задающие токи и ЭДС управляемых источников должны быть выражены через неизвестные токи ветвей, а при формировании таких уравнений по методу НВ — через неизвестные напряжения ветвей.

Пример 4.7. Используя метод токов ветвей, составим уравнения электрического равновесия цепи (см. рис. 4.2, а) при условии, что ток источника тока является функцией напряжения ветви, содержащей индуктивность: $J = S\dot{U}_3$.

Задача решается в два этапа. На первом формируют систему уравнений по методу ТВ, в которой ток источника J учитывается так же, как если бы это был ток независимого источника (см. пример 4.2):

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 &= 0; & Z_2 I_2 + Z_3 I_3 &= E; \\ -I_2 + I_3 + I_4 &= 0; & -Z_3 I_3 + Z_4 I_4 - Z_6 I_6 &= 0. \\ -I_4 - I_6 + J &= 0; \end{aligned}$$

На втором этапе ток управляемого источника выражают через ток третьей ветви $J = S\dot{U}_3 = Z_3 I_3$ и подставляют в полученную систему уравнений:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 &= 0; & Z_2 I_2 + Z_3 I_3 &= E; \\ -I_2 + I_3 + I_4 &= 0; & -Z_3 I_3 + Z_4 I_4 - Z_6 I_6 &= 0. \\ Z_3 S I_3 - I_4 - I_6 &= 0; \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему из пяти уравнений для определения пяти неизвестных токов ветвей, после решения которой и расчета тока I_3 находят ток управляемого источника и напряжения всех ветвей.

Метод контурных токов позволяет сформировать систему уравнений электрического равновесия цепи, содержащей зависимые источники напряжения, управляемые током. Если в цепь входят также зависимые источники других типов, то они должны быть преобразованы в источники напряжения, управляемые током. При составлении контурных уравнений ЭДС таких источников учитываются наравне с ЭДС независимых источников, а затем переносятся в левую часть уравнений и выражаются через соответствующие контурные токи. Таким образом, наличие в исследуемой цепи источников ЭДС, управляемых током, приводит к изменению коэффициентов перед некоторыми из контурных токов и может обусловить несимметричность матрицы контурных сопротивлений относительно главной диагонали.

Пример 4.8. Составим систему контурных уравнений цепи (см. рис. 4.2) при условии, что ток источника тока является функцией напряжения на сопротивлении Z_3 : $J = S\dot{U}_3$.

Преобразуем схему цепи таким образом, чтобы управляемый напряжением источник тока был заменен на управляемый током источник напряжения (рис. 4.6, а):

$$E_2 = Z_6 J = (Z_6 S) \dot{U}_3 = (Z_6 S Z_3) I_3 = Z_m I_3.$$

Выбрав систему независимых контуров (рис. 4.6, б), составим систему контурных уравнений цепи, в которой ЭДС источника учтена так, как будто этот источник независимый:

$$\begin{aligned} (Z_2 + Z_3) I_{11} - Z_3 I_{22} &= E_1; \\ -Z_3 I_{11} + (Z_3 + Z_4 + Z_6) I_{22} &= E_2, \end{aligned}$$

где $I_{11} = I_2$; $I_{22} = I_4$.

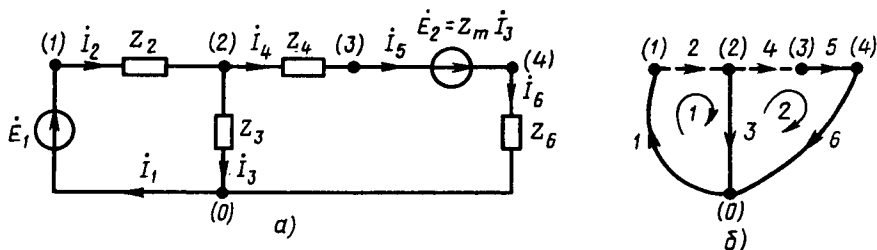


Рис. 4.6. К примеру 4.8

Переносим ЭДС $\dot{E}_2$ в левую часть контурных уравнений и выражая ее через контурные токи $\dot{E}_2 = Z_m \dot{I}_3 = Z_m (\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22})$, получаем

$$\begin{aligned} (Z_2 + Z_3) \dot{I}_{11} - Z_3 \dot{I}_{22} &= \dot{E}_1; \\ -(Z_3 + Z_m) \dot{I}_{11} + (Z_3 + Z_4 + Z_6 + Z_m) \dot{I}_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Матрица контурных сопротивлений данной цепи несимметрична относительно главной диагонали:

$$Z_{(ij)} = \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3; & -Z_3 \\ -(Z_3 + Z_m); & Z_3 + Z_4 + Z_6 + Z_m \end{bmatrix}.$$

Метод узловых напряжений позволяет составить систему уравнений электрического равновесия цепей, содержащих управляемые напряжением источники тока. Если цепь содержит зависимые источники других типов, то они должны быть заменены на источники тока, управляемые напряжением. При составлении узловых уравнений токи таких источников учитывают наравне с токами независимых источников, а затем выражают через соответствующие узловые напряжения. Наличие в рассматриваемой цепи управляемых источников, как правило, приводит к тому, что матрица узловых проводимостей цепи становится несимметричной относительно главной диагонали.

Пример 4.9. Составим узловые уравнения цепи (см. рис. 4.2, а) при условии, что ЭДС источника напряжения является функцией тока $\dot{I}_4$: $\dot{E} = Z_n \dot{I}_4$.

Преобразуем схему цепи таким образом, чтобы управляемый ток источник ЭДС $\dot{E}$ был заменен на управляемый напряжением источник тока $\dot{J}_2$ (рис. 4.7):

$$\dot{J}_2 = \dot{E}/Z_2 = Z_n \dot{I}_4 / Z_2 = Z_n \dot{U}_4 / (Z_2 Z_4) = Y_n \dot{U}_4.$$

Составляем узловые уравнения преобразованной цепи, учитывая ток управляемого источника $\dot{J}_2$ наравне с током независимого источника $\dot{J}_1$:

$$\begin{aligned} (Y_2 + Y_3 + Y_4) \dot{U}_{20} - Y_4 \dot{U}_{30} &= \dot{J}_2; \\ -Y_4 \dot{U}_{20} + (Y_4 + Y_6) \dot{U}_{30} &= -\dot{J}_1. \end{aligned}$$

Переносим ток управляемого источника $\dot{J}_2$ в левую часть узловых уравнений и выражая его через узловые напряжения $\dot{J}_2 = Y_n \dot{U}_4 = Y_n (\dot{U}_{20} - \dot{U}_{30})$, получаем

$$\begin{aligned} (Y_2 + Y_3 + Y_4 - Y_n) \dot{U}_{20} - (Y_4 - Y_n) \dot{U}_{30} &= 0; \\ -Y_4 \dot{U}_{20} + (Y_4 + Y_6) \dot{U}_{30} &= -\dot{J}_1. \end{aligned}$$

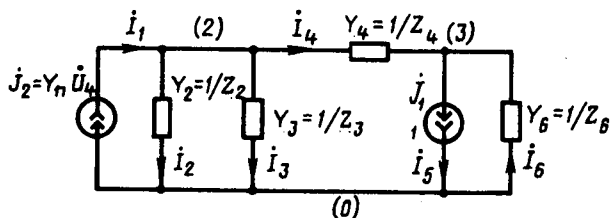


Рис. 4.7. К примеру 4.9

Очевидно, что матрица узловых проводимостей цепи несимметрична относительно главной диагонали:

$$Y_{(ij)} = \begin{bmatrix} (Y_2 + Y_3 + Y_4 - Y_n) & -(Y_4 - Y_n) \\ -Y_4 & (Y_4 + Y_6) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим особенности формирования уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники, у которых управляющее воздействие не является током или напряжением какой-либо невырожденной ветви. Можно выделить три случая: 1) источники, управляемые токами независимых источников тока или напряжениями независимых источников напряжения; 2) источники, управляемые токами независимых источников напряжения и напряжениями независимых источников тока; 3) источники, у которых управляющие токи или напряжения не являются токами или напряжениями каких-либо ветвей цепи.

Наличие в цепи источников, управляемых токами источников тока и напряжениями источников напряжения, не приводит к появлению в уравнениях электрического равновесия новых переменных, поскольку управляющие воздействия у таких источников являются заданными величинами. Источники такого типа учитываются в уравнениях электрического равновесия так же, как и независимые источники.

Если исследуемая цепь содержит источники, управляемые напряжением ветви, содержащей источники тока, то вследствие отсутствия непосредственной зависимости между током и напряжением вырожденной ветви они не могут быть преобразованы в источники, управляемые током этой же ветви. Аналогично этому, источники, управляемые током ветви, составленной только из источников напряжения, не могут быть преобразованы в источники, управляемые напряжением этой же ветви. В этом случае для изменения вида управляющего воздействия это воздействие сначала должно быть выражено через токи или напряжения невырожденных ветвей. (Напомним, что напряжение на источнике тока может быть выражено через напряжения ветвей дерева, входящих в главный контур, замыкаемый ветвью с этим источником, а ток ветви, составленной

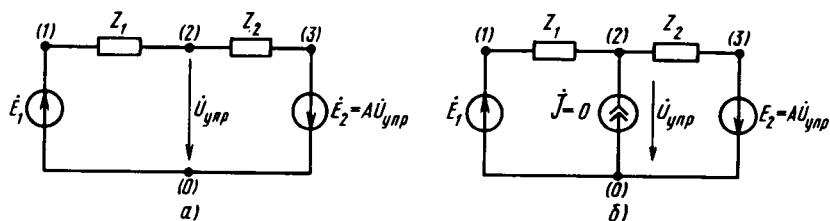


Рис. 4.8. Введение в цепь вырожденной ветви, соответствующей управляющему напряжению

только из источников напряжения, — через токи главных ветвей, входящих в соответствующее главное сечение.)

Если цепь содержит зависимые источники, управляющие токи или напряжения которых не являются токами или напряжениями ветвей этой цепи, то при составлении системы уравнений электрического равновесия обязательно появятся дополнительные неизвестные — соответствующие управляющие токи или напряжения. Для того чтобы получить достаточное число уравнений для определения всех неизвестных токов и напряжений, в состав рассматриваемых цепей обычно включают дополнительные вырожденные ветви, соответствующие управляющим воздействиям зависимых источников. Так, если в цепи (рис. 4.8, а) имеется источник напряжения, ЭДС которого зависит от напряжения U_{ynp} , не являющегося напряжением какой-либо ветви, то для составления основной системы уравнений электрического равновесия эту цепь дополняют вырожденной ветвью (рис. 4.8, б), содержащей независимый источник тока $J=0$, напряжение которого равно U_{ynp} . Если электрическая цепь содержит зависимый источник тока J , управляемый током I_{ynp} , не являющимся током какой-либо ветви (рис. 4.9, а), то для составления основной системы уравнений электрического равновесия эту цепь следует дополнить вырожденной ветвью, содержащей независимый источник напряжения $E_2=0$ (рис.

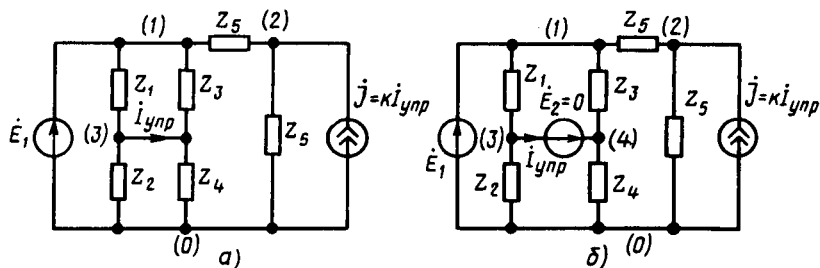


Рис. 4.9. Введение в цепь вырожденной ветви, соответствующей управляющему току

4.9, б), ток которого равен $I_{\text{упр}}$. После введения дополнительных вырожденных ветвей основную систему уравнений электрического равновесия преобразованных цепей составляют по изложенным ранее правилам.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Как следует из рассмотренного материала, все изложенные методы формирования уравнений электрического равновесия цепей обладают примерно одинаковыми возможностями, но имеют различную трудоемкость. Наибольшие возможности для анализа цепей предоставляет использование основной системы уравнений электрического равновесия, которая может быть сформирована для любой цепи, однако в этом случае требуется решение наибольшего числа уравнений. Методы КТ и УН обладают наименьшей трудоемкостью и позволяют сократить число одновременно решаемых уравнений с $2p - p_{\text{вт}} - p_{\text{ит}}$ до $p - p_{\text{ит}} - q + 1$ или $q - p_{\text{вт}} - 1$ соответственно. Единственным ограничением, накладываемым на применение метода КТ, является невозможность его использования для формирования уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники, которые не преобразованы в управляемые током источники напряжения. Метод УН не может применяться при анализе цепей, содержащих зависимые источники, которые не преобразованы в управляемые напряжением источники тока, и цепей со связанными индуктивностями при $k_M = 1$.

На практике для формирования уравнений электрического равновесия используется тот из методов (узловых напряжений или контурных токов), который позволяет обойтись меньшим числом независимых переменных. При $p - p_{\text{ит}} - q + 1 > q - p_{\text{вт}} - 1$ рекомендуется метод УН, в противном случае — метод КТ. Если число одновременно решаемых уравнений примерно одинаково, то предпочтение отдается методу УН, который не требует применения достаточно трудоемкой (особенно в случае сложных, в частности непланарных, цепей) операции по выбору системы независимых контуров.

Во всех рассмотренных методах формирования сокращенной системы уравнений электрического равновесия цепей в качестве независимых переменных выбирались величины, имеющие одинаковую размерность, — токи либо напряжения. В ряде случаев при анализе цепей оказывается более эффективным применение других совокупностей независимых переменных, в число которых входили бы одновременно и токи, и напряжения. С одним из таких методов — методом переменных состояния — мы познакомимся в гл. 10.

§ 4.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ

Сформулированный в гл. 1 принцип наложения (суперпозиции) отражает важнейшее свойство линейных электрических цепей.

Это свойство состоит в том, что реакция линейных электрических цепей на произвольное внешнее воздействие, представляющее собой линейную комбинацию более простых воздействий, равна линейной комбинации реакций, вызванных каждым из простых воздействий в отдельности.

Из принципа наложения следует, что ток или напряжение любой ветви линейной электрической цепи, содержащей наряду с пассивными элементами зависимые и независимые источники тока и напряжения, равны сумме частичных токов или напряжений, вызванных действием каждого из независимых источников в отдельности.

Пусть цепь содержит независимые источники только одного типа, например источники напряжения. Контурный ток произвольного контура этой цепи может быть определен из выражения (4.11). Представляя все входящие в это выражение контурные ЭДС $\dot{E}_{ii}$ в виде алгебраической суммы ЭДС входящих в контур источников напряжений $\dot{E}_j$ и приводя подобные члены, получаем

$$\dot{I}_{kk} = Y_{k1}\dot{E}_1 + Y_{k2}\dot{E}_2 + \dots + Y_{kN}\dot{E}_N = \sum_{j=1}^N Y_{kj}\dot{E}_j,$$

где N — число независимых источников ЭДС, входящих в состав цепи; Y_{kj} — коэффициенты, представляющие собой алгебраические суммы слагаемых вида Δ_{ik}/Δ .

Так как Δ и Δ_{ik} определяются только параметрами матрицы контурных сопротивлений, т. е. параметрами пассивных элементов цепи и коэффициентами управления зависимых источников, то значения Y_{kj} не зависят от ЭДС независимых источников напряжения. Каждое слагаемое вида $Y_{kj}\dot{E}_j$ можно рассматривать как частичный ток k -го контура, вызванный действием источника ЭДС $\dot{E}_j$.

Действительно, если все входящие в цепь независимые источники ЭДС, кроме $\dot{E}_j$, выключены (заменены короткозамыкающими перемычками), то ток k -го контура

$$\dot{I}_{kk}^0 = Y_{kj}\dot{E}_j. \quad (4.23)$$

Следовательно, контурный ток любого контура линейной электрической цепи, содержащей независимые источники напряжения, равен сумме частичных токов, вызванных действием каждого независимого источника напряжения в отдельности:

$$\dot{I}_{kk} = \sum_{j=1}^N Y_{kj}\dot{E}_j = \sum_{j=1}^N \dot{I}_{kk}^0. \quad (4.24)$$

Этот вывод можно распространить также на токи и напряжения любой ветви линейной электрической цепи, поскольку данные величины выражаются в виде линейных комбинаций контурных токов.

Из анализа выражений (4.23), (4.24) вытекает физический смысл коэффициентов Y_{kj} — они представляют собой комплексные передаточные проводимости цепи от зажимов j — j' , к которым подключен независимый источник напряжения $\dot{E}_j$, к зажимам k — k' , к которым подключена ветвь с током $\dot{I}_{kk}$, причем каждая комплексная передаточная проводимость определяется в режиме, когда все независимые источники напряжения, кроме $\dot{E}_j$, выключены.

Если линейная электрическая цепь содержит независимые источники тока, то, используя выражение (4.20), можно показать, что узловое напряжение каждого узла такой цепи равно сумме частичных узловых напряжений, вызванных каждым из источников тока в отдельности. При определении частичного узлового напряжения k -го узла, вызванного действием j -го источника тока, остальные источники тока выключаются, т. е. ветви, содержащие эти источники, разрываются.

Пусть в рассматриваемой цепи имеется l независимых источников напряжения и m независимых источников тока. Присвоим ветвям, содержащим независимые источники напряжения, номера от 1 до l , а ветвям, содержащим независимые источники тока, — номера от $l+1$ до $l+m$. Составляя уравнения электрического равновесия такой цепи методом КТ или УН и решая их с помощью формул Крамера, находим ток и напряжение k -й ветви:

$$\dot{I}_k = \sum_{j=1}^{l+m} \dot{I}_k^{\varphi} = \sum_{j=1}^l Y_{kj} \dot{E}_j + \sum_{j=l+1}^{l+m} G_{kj} \dot{J}_j,$$

$$\dot{U}_k = \sum_{j=1}^{l+m} \dot{U}_k^{\varphi} = \sum_{j=1}^l K_{kj} \dot{E}_j + \sum_{j=l+1}^{l+m} Z_{kj} \dot{J}_j,$$

где $G_{kj} = G_{kj}(j\omega)$, $K_{kj} = K_{kj}(j\omega)$ — комплексные коэффициенты передачи цепи по току и напряжению; $Y_{kj} = Y_{kj}(j\omega)$, $Z_{kj} = Z_{kj}(j\omega)$ — комплексные передаточные проводимости и сопротивления. Каждая из величин G_{kj} , K_{kj} , Y_{kj} и Z_{kj} определяется в режиме, когда все независимые источники, кроме источника, находящегося в j -й ветви, выключены, т. е. представлены своими внутренними сопротивлениями.

На принципе наложения основан широко используемый на практике метод анализа цепей — *метод наложения*. Его удобно применять в тех случаях, когда по условиям задачи требуется найти ток или напряжение одной из ветвей цепи, в состав которой входит несколько независимых источников. В соответствии с принципом наложения искомый ток (напряжение) представляют в виде суммы

частичных токов (напряжений). Для определения частичных токов (напряжений) используют схемы замещения цепи, получаемые из исходной схемы путем выключения всех независимых источников, кроме одного, вызывающего соответствующий частичный ток (напряжение). Таким образом, задача анализа сложной цепи, содержащей несколько независимых источников энергии, заменяется рядом более простых задач исследования цепей с одним независимым источником.

Следует обратить внимание на то, что при определении частичных токов выключаются только независимые источники тока или напряжения. Параметры зависимых источников учитываются в матрице узловых проводимостей или контурных сопротивлений и при нахождении частичных токов (напряжений) эти источники не выключаются.

Пример 4.10. Используя метод наложения, определим ток I_6 электрической цепи, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 4.2, а.

В соответствии с принципом наложения представим ток I_6 в виде суммы двух частичных токов $I_6^{(1)}$ и $I_6^{(2)}$, вызванных действием источника напряжения E и источника тока J соответственно. Схемы замещения для расчета частичных токов приведены на рис. 4.10, а, б. Осуществляя эквивалентные преобразования участков цепей со смешанным соединением элементов, найдем частичные токи:

$$I_6^{(1)} = -Z_3 E / [Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)];$$

$$I_6^{(2)} = [Z_2 Z_3 + Z_4(Z_2 + Z_3)] J / [Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)].$$

Суммируя эти токи, получим искомый ток:

$$I_6 = I_6^{(1)} + I_6^{(2)} = \{-Z_3 E + [Z_2 Z_3 + Z_4(Z_2 + Z_3)] J\} / [Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)].$$

Из полученных выражений следует, что комплексный коэффициент передачи цепи по току от зажимов 5 — 5' к зажимам 6 — 6' и комплексная передаточная

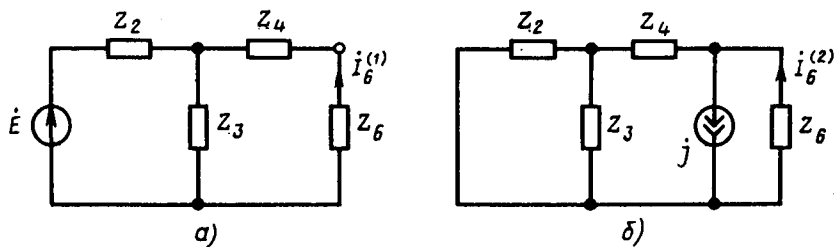


Рис. 4.10. К примеру 4.10

проводимость этой цепи от зажимов 1 — 1' к зажимам 6 — 6' (номера зажимов совпадают с номерами ветвей) имеют вид

$$G_{65}(j\omega) = [Z_2 Z_3 + Z_4(Z_2 + Z_3)] / [Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)];$$

$$Y_{61}(j\omega) = -Z_3 / [Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)].$$

Метод наложения оказывается весьма эффективным и при анализе линейных цепей, находящихся под воздействием колебаний сложной формы. В этом случае сложное внешнее воздействие представляют в виде конечной или бесконечной суммы колебаний более простой формы, реакция цепи на воздействие которых может быть получена с помощью известных методов (подробнее см. гл. 6).

Необходимо отметить, что принцип наложения применим только для определения токов или напряжений линейной электрической цепи и не может быть использован для нахождения величин, которые не являются линейными функциями токов или напряжений. В частности, мощность, потребляемая каким-либо участком линейной электрической цепи, находящейся под воздействием нескольких независимых источников, не равна сумме мощностей, потребляемых этим же участком при воздействии каждого независимого источника в отдельности.

ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

При изучении методов формирования уравнений электрического равновесия было установлено, что матрицы контурных сопротивлений и узловых проводимостей линейных цепей, составленных только из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников тока или напряжения, являются симметричными относительно главной диагонали. Можно показать, что симметричность этих матриц не нарушится и в том случае, когда в цепи имеется произвольное число связанных индуктивностей. На симметричности матриц узловых проводимостей и контурных сопротивлений основано важное свойство линейных пассивных электрических цепей, которое формулируется в виде *теоремы взаимности*, или *обратимости*.

Рассмотрим линейную пассивную электрическую цепь, составленную из сопротивлений, емкостей и индуктивностей (в том числе и связанных).

В соответствии с теоремой взаимности контурный ток k -го контура цепи, вызванный действием единственного независимого источника напряжения, помещенного в i -й контур, равен контурному току i -го контура, вызванному действием того же источника напряжения, перенесенного из i -го контура в k -й, причем ориентация источника напряжения, помещенного в какой-либо контур, относительно контурного тока этого же контура в обоих случаях принимается одинаковой.

Для доказательства теоремы выделим из исследуемой цепи главные ветви k -го и i -го контуров, а остальную часть цепи изобразим в виде четырехполосника. Если независимый источник напряжения $\dot{E}$ помещен в i -й контур (рис. 4.11, а), то в соответствии с выражением (4.11) контурный ток k -го контура

$$\dot{I}_{kk} = \Delta_{ik} \dot{E}_{ii} / \Delta = \Delta_{ik} \dot{E} / \Delta. \quad (4.25)$$

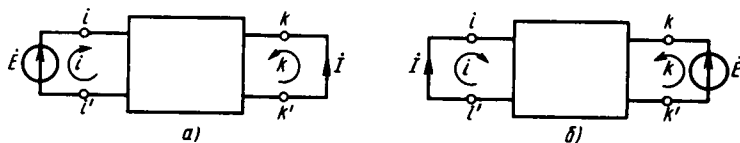


Рис. 4.11. К доказательству теоремы взаимности (внешнее воздействие задается в виде источника напряжения)

Аналогичным образом находим контурный ток i -го контура, вызванный действием того же источника напряжения E , перенесенного из i -го контура в k -й (рис. 4.11, б):

$$I_{ii} = \Delta_{ki} E_{kk} / \Delta = \Delta_{ki} E / \Delta. \quad (4.26)$$

Выражения (4.25) и (4.26) отличаются только порядком индексов в алгебраических дополнениях Δ_{ik} и Δ_{ki} . Учитывая симметричность матрицы контурных сопротивлений анализируемой цепи относительно главной диагонали, нетрудно прийти к выводу, что $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$, а следовательно, $I_{kk} = I_{ii}$.

Для случая, когда внешнее воздействие на цепь задается в виде независимого источника тока, теорема взаимности может быть сформулирована следующим образом.

Если независимый источник тока J , подключенный к какой-либо паре зажимов линейной пассивной цепи, вызывает на другой паре зажимов напряжение U (рис. 4.12, а), то этот же источник тока, подключенный ко второй паре зажимов (рис. 4.12, б), вызовет на первой паре зажимов то же напряжение U (ориентация источника тока относительно напряжения на зажимах, к которым он подключен, в обоих случаях принимается одинаковой).

Доказательство этой теоремы производится так же, как это было сделано при питании цепи от независимого источника напряжения.

Если электрическая цепь удовлетворяет теореме взаимности (в любой формулировке), то говорят, что она обладает взаимностью (обратимостью). Электрические цепи, обладающие взаимностью, называются **взаимными (обратимыми)**. Если электрическая цепь не обладает взаимностью, то она является **невзаимной (необратимой)**. К необратимым цепям относятся, в частности, нелинейные цепи

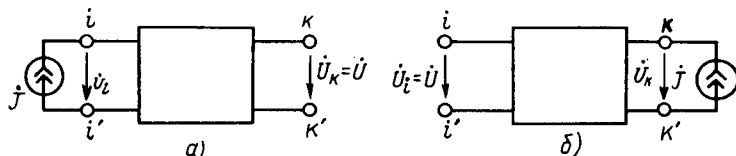


Рис. 4.12. К доказательству теоремы взаимности (внешнее воздействие задается в виде источника тока)

(элементы матриц контурных сопротивлений и узловых проводимостей таких цепей зависят от токов или напряжений ветвей) и цепи, содержащие зависимые источники (матрицы контурных сопротивлений и узловых проводимостей таких цепей, как правило, несимметричны относительно главных диагоналей).

Применение теоремы взаимности в сочетании с принципом наложения позволяет в ряде случаев существенно упростить расчет тока или напряжения какой-либо ветви электрической цепи, содержащей несколько независимых источников напряжения или тока.

Пример 4.11. Рассмотрим линейную электрическую цепь, содержащую N независимых источников напряжения $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_N$, размещенных соответственно в ветвях $1, 2, \dots, i, \dots, N$. Определим ток k -й ветви, не содержащей источников энергии. Найдем сначала токи $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \dots, I_i^{(k)}, \dots, I_N^{(k)}$ ветвей $1, 2, \dots, i, \dots, N$, вызванные действием некоторого дополнительного источника ЭДС E_k , помещенного в k -ю ветвь, при выключенных источниках $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_N$. Далее в соответствии с теоремой взаимности найдем частичные токи $I_i^{(k)}$, вызываемые в k -й ветви действием каждого источника E_i в отдельности. Если бы ЭДС источника E_i , расположенного в i -й ветви, была равна E_k , то согласно теореме взаимности частичный ток k -й ветви был бы равен $I_i^{(k)}$. Если $E_i \neq E_k$, то частичный ток k -й ветви, вызванный действием ЭДС E_i , пропорционален $I_i^{(k)}$:

$$I_k^{(i)} = E_i I_i^{(k)} / E_k.$$

Суммируя частичные токи, вызванные действием всех независимых источников напряжения, находим

$$I_k = \sum_{i=1}^N I_k^{(i)} = \sum_{i=1}^N E_i I_i^{(k)} / E_k.$$

Таким образом, анализ сложной электрической цепи, содержащей N независимых источников напряжения, свелся к определению токов ветвей более простой цепи, содержащей один независимый источник напряжения.

ТЕОРЕМА КОМПЕНСАЦИИ

Теорема компенсации формулируется следующим образом: *токи и напряжения ветвей произвольной электрической цепи не изменятся, если любую ветвь этой цепи заменить идеальным источником ЭДС, напряжение которого равно напряжению данной ветви и имеет одинаковое с ним направление, либо идеальным источником тока, ток которого равен току рассматриваемой ветви и совпадает с ним по направлению.*

Напомним, что направление напряжения на зажимах источника ЭДС противоположно направлению ЭДС, т. е. противоположно направлению стрелки в условном графическом изображении источника (см. рис. 1.12, а).

Теорема компенсации базируется на общих свойствах основной системы уравнений электрического равновесия цепи и не накладывает ограничений на тип исследуемой цепи или характер внешнего

воздействия. Рассмотрим, например, линейную электрическую цепь, находящуюся под гармоническим воздействием. Выделим в данной цепи произвольную ветвь, комплексное сопротивление которой равно Z_k (рис. 4.13, а). Напряжение и ток этой ветви связаны уравнением, составленным на основании закона Ома в комплексной форме $\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$. В соответствии с теоремой компенсации выделенную ветвь можно заменить идеальным источником ЭДС (рис. 4.13, б), напряжение которого равно напряжению данной ветви $E = \dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$ и имеет одинаковое с ним направление (ЭДС источника направлена навстречу напряжению ветви), либо идеальным источником тока, ток которого равен току рассматриваемой ветви $J = \dot{I}_k = \dot{U}_k / Z_k$ и совпадает с ним по направлению (рис. 4.13, в). Составляя основную систему уравнений электрического равновесия каждой из цепей (рис. 4.13, б, в), убедимся, что она совпадает с основной системой уравнений электрического равновесия исходной цепи. Действительно, при формировании уравнений электрического равновесия исходной цепи напряжение $\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$ выделенной ветви учитывается со знаком плюс в левой части уравнений баланса напряжений, составленных для контуров, содержащих эту ветвь (предполагается, что направление обхода этих контуров совпадает с направлением тока $\dot{I}_k$). При составлении уравнений электрического равновесия цепи (рис. 4.13, б) член $\dot{U}_k = Z_k \dot{I}_k$ в левой части соответствующих уравнений отсутствует, однако в правой части этих уравнений появляется член $-E = -\dot{U}_k = -Z_k \dot{I}_k$. Следовательно, замена комплексного сопротивления Z_k идеальным источником напряжения $E = Z_k \dot{I}_k$ соответствует переносу члена $Z_k \dot{I}_k$ из левой части уравнений баланса напряжений в правую.

При составлении уравнений электрического равновесия исходной цепи (рис. 4.13, а) ток $\dot{I}_k$ выделенной ветви учитывается в левой части уравнений баланса токов; соответствующие уравнения преобразованной цепи (рис. 4.13, в) вместо тока $\dot{I}_k$ через комплексное сопротивление Z_k содержат равный ему ток $J = \dot{I}_k = \dot{U}_k / Z_k$ идеального источника тока. Таким образом, цепи, схемы которых приведены на рисунке, являются эквивалентными.

Необходимо отметить, что источники напряжения и тока, заменившие согласно теореме компенсации сопротивление ветви Z_k , зависимые: ЭДС источника напряжения E прямо пропорциональна

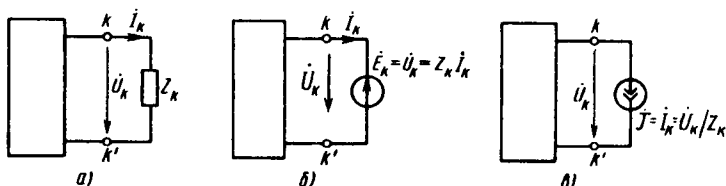


Рис. 4.13. К доказательству теоремы компенсации

току ветви, содержащей этот источник, а ток источника тока J прямо пропорционален напряжению этой ветви. Из эквивалентности цепей следует, что идеальный источник напряжения, ЭДС которого пропорциональна отдаваемому току ($\dot{E} = Z_k \dot{I}_k$), и идеальный источник тока, ток которого прямо пропорционален напряжению на зажимах источника ($J = \dot{U}_k / Z_k$), могут быть заменены комплексным сопротивлением $Z_k = \dot{E} / \dot{I}_k = \dot{U}_k / J$.

Теорема компенсации расширяет возможности эквивалентных преобразований электрических цепей, в частности ее применение совместно с переносом источников тока или напряжения позволяет производить перенос любых двухполюсных элементов электрической цепи.

Пример 4.12. Применим теорему компенсации для переноса сопротивления Z_3 (см. рис. 4.2, а). Последовательность выполняемых преобразований показана на рис. 4.14, а — в. На первом шаге преобразований сопротивление Z_3 в соответствии с теоремой компенсации заменяется источником напряжения $\dot{E}_3 = Z_3 \dot{I}_3$ (рис. 4.14, а). Далее источник напряжения $\dot{E}_3$ переносится из третьей ветви во вторую и четвертую, управляющий источником ток $\dot{I}_3$ при этом выражается через токи второй и четвертой ветвей: $\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - \dot{I}_4$. Источник $\dot{E}_3$ во второй и четвертой ветвях заменяется двумя источниками: $\dot{E}_3 = Z_3 \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_4$, а узел 2 из цепи исключается (рис. 4.13, б).

Источники напряжения $Z_3 \dot{I}_2$ во второй и $Z_3 \dot{I}_4$ в четвертой ветвях представляют собой управляемые источники, напряжения которых пропорциональны токам источников и, следовательно, каждый из них может быть заменен сопротивлением Z_3 , включенным во второй и четвертой ветвях (рис. 4.14, в). В результате проведенных преобразований третья ветвь оказалась исключенной из схемы, ее сопротивление Z_3 перенесено во вторую и четвертую ветви. Кроме того, в этих ветвях появились источники напряжения $Z_3 \dot{I}_4$ и $Z_3 \dot{I}_2$, управляемые токами четвертой и второй ветвей.

Преобразование переноса сопротивлений представляет собой частный случай универсальных преобразований переноса, разработанных проф. М. А. Шакировым [10].

Переноса сопротивление Z_6 из шестой ветви в четвертую и пятую, из полученной схемы цепи (рис. 4.14, в) можно исключить шестую ветвь (рис. 4.14, г). Далее, переноса источник ЭДС $\dot{E}$ во вторую ветвь и учитывая, что элементы, включенные последовательно с источником тока, не влияют на ток пятой ветви, получаем схему замещения исходной цепи, представляющую собой три замкнутые ветви (рис. 4.14, д), токи которых равны токам главных ветвей исходной цепи (см. рис. 4.2, а), а их компонентные уравнения

$$\begin{aligned} (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2 - Z_3 \dot{I}_4 &= \dot{E}; \\ -Z_3 \dot{I}_2 + (Z_3 + Z_4 + Z_6) \dot{I}_4 &= Z_6 J; \\ \dot{I}_5 &= J \end{aligned}$$

совпадают с контурными уравнениями исходной цепи (см. пример 4.4) при $\dot{I}_{11} = \dot{I}_2$, $\dot{I}_{22} = \dot{I}_4$, $\dot{I}_{33} = \dot{I}_5 = J$.

АВТОНОМНЫЕ И НЕАВТОНОМНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

Рассмотрим произвольный активный линейный двухполюсник, содержащий наряду с идеализированными пассивными элементами управляемые и неуправляемые источники тока или напряжения. Представляют интерес два предельных режима работы такого двух-

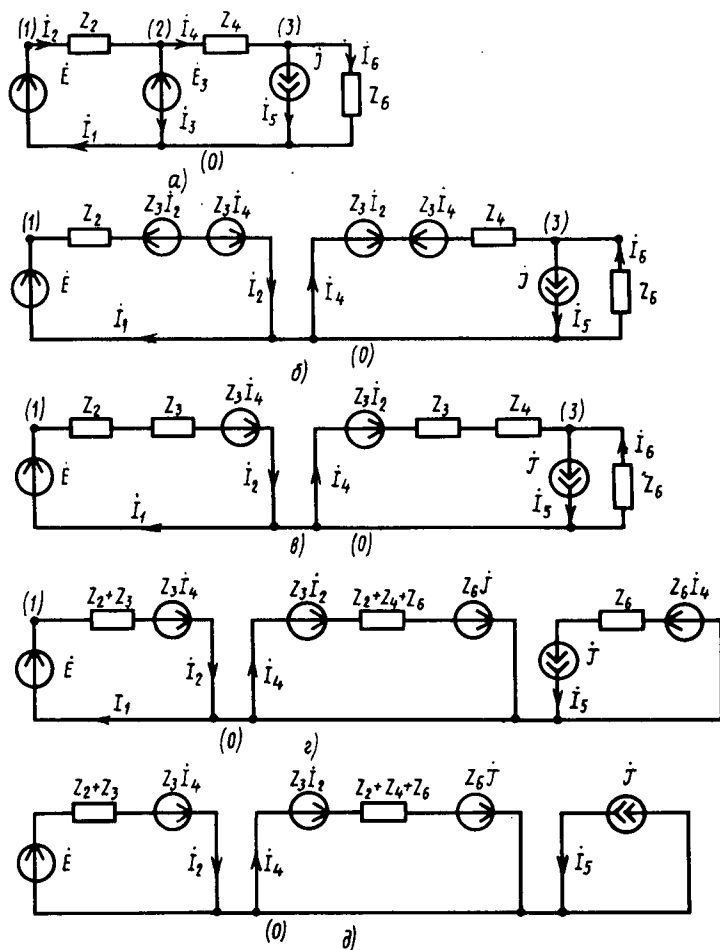


Рис. 4.14. К примеру 4.12

полюсника: *режим холостого хода*, когда ток внешних выводов двухполюсника равен нулю, и *режим короткого замыкания*, при котором напряжение между внешними выводами двухполюсника равно нулю. Напряжение между выводами двухполюсника в режиме холостого хода называется **напряжением холостого хода**, а ток между выводами двухполюсника в режиме короткого замыкания — **током короткого замыкания**.

Двухполюсник, напряжение холостого хода или ток короткого замыкания которого не равны нулю, назовем **автономным**. Очевидно, что автономный двухполюсник должен содержать один или несколько некомпенсированных независимых источников, т. е. та-

ких источников, сумма частичных реакций на воздействие которых на внешних зажимах двухполосника не равна тождественно нулю.

Если напряжение холостого хода и ток короткого замыкания двухполосника тождественно равны нулю, то такой двухполосник будем называть *неавтономным*. Неавтономный двухполосник не может содержать некомпенсированных независимых источников, т. е. в его состав могут входить только идеализированные пассивные элементы и управляемые источники тока или напряжения. Таким образом, активные двухполосники могут быть автономными или неавтономными, а пассивные двухполосники представляют собой частный случай неавтономных.

Комплексным входным сопротивлением Z неавтономного двухполосника называется отношение комплексной амплитуды напряжения на его зажимах к комплексной амплитуде тока (заметим, что данное ранее определение комплексного входного сопротивления пассивного двухполосника естественным образом вытекает из этого определения). Если неавтономный двухполосник не содержит управляемых источников, т. е. является пассивным, то его комплексное входное сопротивление может быть найдено, например, путем постепенного сворачивания схемы двухполосника с использованием методов преобразования пассивных цепей. В общем случае комплексное входное сопротивление неавтономного двухполосника находят *методом пробного источника*, в соответствии с которым к входу исследуемого двухполосника подключают произвольный независимый источник напряжения или тока (пробный источник) и определяют отношение комплексных действующих значений напряжения и тока на внешних зажимах двухполосника.

Пример 4.13. Определим комплексное входное сопротивление неавтономного двухполосника, схема которого изображена на рис. 4.15, а (задачи такого типа часто встречаются на практике, например при расчете комплексного входного сопротивления усилительного каскада на полевом транзисторе).

Подключим к входным зажимам исследуемой цепи пробный источник напряжения $\dot{e} = E$ (рис. 4.15, б) и найдем комплексное действующее значение входного тока двухполосника:

$$\dot{I} = j\omega C_1 \dot{E} + j\omega C_2 (\dot{E} - \dot{U}_{C3}).$$

Для определения комплексного действующего значения напряжения на емкости C_3 составим уравнение электрического равновесия цепи (рис. 4.15, б) по методу узловых напряжений:

$$(1/R + j\omega C_2 + j\omega C_3) \dot{U}_{C3} - j\omega C_2 \dot{E} = -S \dot{E},$$

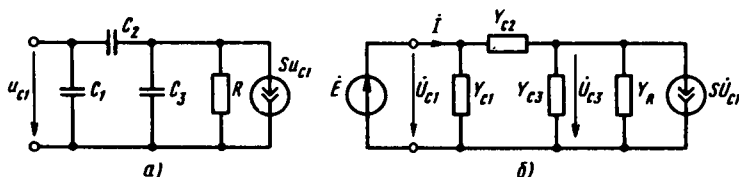


Рис. 4.15. К примеру 4.13

откуда

$$\dot{U}_{C3} = \frac{j\omega C_2 - S}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} E.$$

Таким образом, входной ток цепи прямо пропорционален ЭДС пробного источника

$$I = j\omega \left[C_1 + C_2 + \frac{S - j\omega C_2}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} C_2 \right] E$$

и, следовательно, комплексное входное сопротивление двухполосника не зависит от значения этой ЭДС:

$$Z = \frac{\dot{U}_{C1}}{I} = \frac{E}{I} = \frac{1}{j\omega \left[C_1 + C_2 + \frac{S - j\omega C_2}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} C_2 \right]}.$$

В области низких частот ($\omega \rightarrow 0$) входное сопротивление двухполосника имеет емкостный характер

$$Z|_{\omega \rightarrow 0} = 1/[j\omega \{C_1 + C_2 + RSC_2\}] = 1/(j\omega C_{\Sigma}),$$

причем эквивалентная входная емкость двухполосника $C_{\Sigma} = C_1 + (1 + RS)C_2$.

Аналогичный результат получается и в том случае, когда в качестве пробного используют произвольный независимый источник тока $j \neq J$.

Каждому автономному двухполоснику можно поставить в соответствие некоторый неавтономный двухполосник, который получается из исходного путем выключения всех входящих в него независимых источников тока и напряжения. Комплексным входным сопротивлением автономного двухполосника называется комплексное входное сопротивление соответствующего ему неавтономного двухполосника. Таким образом, комплексное входное сопротивление автономного двухполосника может быть определено как отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока на зажимах неавтономного двухполосника, который получается из заданного автономного двухполосника путем выключения всех входящих в него независимых источников тока и напряжения. Комплексное входное сопротивление линейного автономного двухполосника может быть также найдено как отношение комплексных изображений напряжения холостого хода и тока короткого замыкания этого двухполосника.

Подобно комплексному входному сопротивлению, комплексная входная проводимость автономного двухполосника определяется как комплексная входная проводимость соответствующего ему неавтономного двухполосника. Она также может быть найдена как величина, обратная комплексному входному сопротивлению автономного двухполосника, или как отношение комплексных изображений тока короткого замыкания и напряжения холостого хода этого двухполосника.

Пример 4.14. Определим напряжение холостого хода u_x , ток короткого замыкания i_x и комплексное входное сопротивление Z активного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 4.16, а.

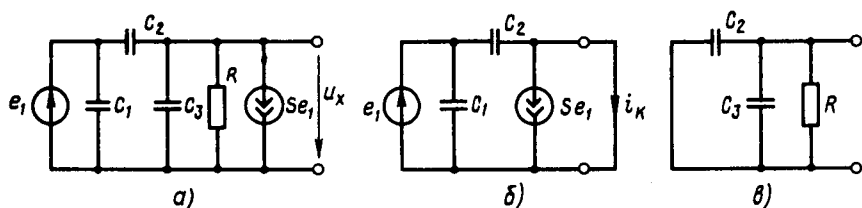


Рис. 4.16. К примеру 4.14

Для нахождения напряжения холостого хода двухполюсника $u_x \doteq \dot{U}_x$ составим уравнение электрического равновесия рассматриваемой цепи по методу узловых напряжений:

$$(1/R + j\omega C_2 + j\omega C_3)\dot{U}_x - j\omega C_2 \dot{E}_1 = -S\dot{E}_1,$$

откуда

$$\dot{U}_x = \frac{j\omega C_2 - S}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} \dot{E}_1,$$

где $\dot{E}_1 \doteq e_1$.

При коротком замыкании зажимов двухполюсника (рис. 4.16, б) выполняется соотношение $-j\omega C_2 \dot{E}_1 + S\dot{E}_1 + \dot{i}_x = 0$ и, следовательно,

$$\dot{i}_x \doteq \dot{i}_x = (j\omega C_2 - S)\dot{E}_1.$$

При выключении независимого источника ЭДС e_1 двухполюсник превращается в пассивный (рис. 4.16, в), поэтому его комплексное входное сопротивление

$$Z = \frac{1}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)}.$$

Аналогичный результат получается и в том случае, когда комплексное входное сопротивление исследуемого автономного двухполюсника определяется как отношение комплексных действующих значений напряжения холостого хода $\dot{U}_x$ и тока короткого замыкания $\dot{i}_x$.

ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ИСТОЧНИКЕ

Рассмотрим линейную электрическую цепь, которая наряду с идеализированными пассивными элементами содержит управляемые и неуправляемые источники тока и напряжения. Выделим в этой цепи произвольную ветвь $a - a'$ (рис. 4.17, а), а остальную часть цепи, к которой подключена эта ветвь, представим в виде автономного двухполюсника АД.

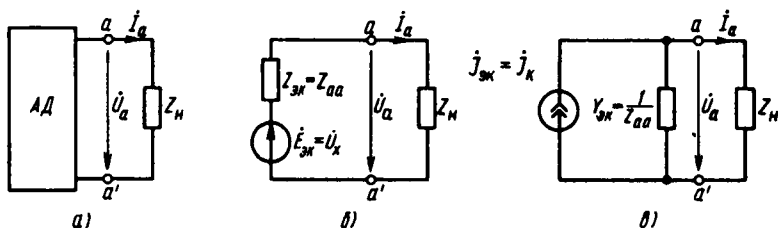


Рис. 4.17. Теорема об эквивалентном источнике

В соответствии с теоремой об эквивалентном источнике ток произвольной ветви линейной электрической цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линейризованным источником, который может быть представлен последовательной или параллельной схемами замещения.

ЭДС источника напряжения $\dot{E}_{\text{эк}}$ в последовательной схеме замещения (рис. 4.17, б) равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление $Z_{\text{эк}}$ равно его комплексному входному сопротивлению. Ток идеального источника тока $j_{\text{эк}}$ в параллельной схеме замещения (рис. 4.17, в) равен току короткого замыкания автономного двухполюсника, а внутренняя проводимость $Y_{\text{эк}}$ — его комплексной входной проводимости.

Теорему об эквивалентном источнике часто называют теоремой Гельмгольца, теоремой Тевенена (применительно к схеме замещения с источником напряжения) или теоремой Нортона (применительно к схеме замещения с источником тока).

Для доказательства теоремы введем в выделенную ветвь $a - a'$ два вспомогательных независимых источника напряжения $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$, ЭДС которых равны по абсолютному значению, но противоположны по направлению (рис. 4.18, а). Очевидно, что введение двух скомпенсированных источников ЭДС не нарушает режима работы цепи, поэтому ток ветви $a - a'$ преобразованной цепи равен току $\dot{I}_a$ исходной цепи (см. рис. 4.17, а). Используя принцип наложения, представим ток рассматриваемой ветви преобразованной цепи в виде суммы двух составляющих $\dot{I}_a = \dot{I}_a^{(1)} + \dot{I}_a^{(2)}$, где $\dot{I}_a^{(1)}$ — частичный ток a -й

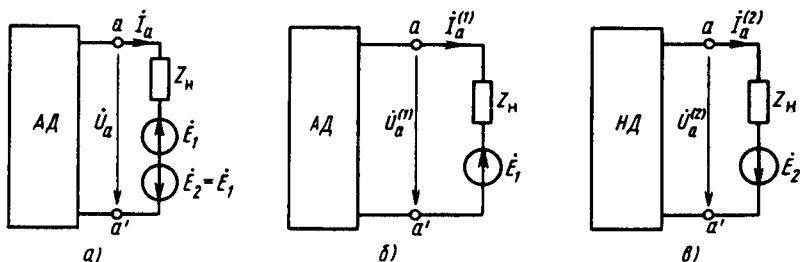


Рис. 4.18. К доказательству теоремы об эквивалентном источнике: АД — автономный двухполюсник; НД — неавтономный двухполюсник

ветви, создаваемый действием независимого источника напряжения E_1 , и всех независимых источников, входящих в состав автономного двухполюсника AD ; $I_a^{(2)}$ — частичный ток a -й ветви, вызываемый действием независимого источника напряжения E_2 (рис. 4.18, б, в).

Из эквивалентной схемы, изображенной на рис. 4.18, б, видно, что

$$I_a^{(1)} = (\dot{U}_a^{(1)} - E_1) / Z_n, \quad (4.27)$$

где $\dot{U}_a^{(1)}$ — напряжение на зажимах $a - a'$ автономного двухполюсника в режиме, когда отдаваемый им ток равен $I_a^{(1)}$. До сих пор не накладывалось никаких ограничений на ЭДС вспомогательных источников напряжения. Выберем теперь $E_1 = E_2$ таким образом, чтобы $I_a^{(1)} = 0$. Очевидно, что в этом случае напряжение на внешних зажимах AD равно напряжению холостого хода автономного двухполюсника $\dot{U}_x$.

Согласно выражению (4.27), ЭДС, при которой частичный ток a -й ветви $I_a^{(1)} = 0$,

$$E_1 = E_2 = \dot{U}_x. \quad (4.28)$$

Таким образом, если ЭДС вспомогательных источников выбрать равными напряжению холостого хода автономного двухполюсника $\dot{U}_x$, то ток ветви I_a будет равен частичному току $I_a^{(2)}$, создаваемому действием источника напряжения E_2 при выключении независимых источников, входящих в состав автономного двухполюсника, и выключении источника напряжения E_1 .

Используя эквивалентную схему для определения частичного тока $I_a^{(2)}$, находим

$$\dot{I}_a = I_a^{(2)} = \dot{U}_x / (Z_{aa} + Z_n) = E_{xx} / (Z_{xx} + Z_n), \quad (4.29)$$

где Z_{aa} — комплексное входное сопротивление исходного автономного двухполюсника, равное комплексному входному сопротивлению приведенного на рис. 4.18, в неавтономного двухполюсника HD . Как следует из выражения (4.29), ток a -й ветви исходной цепи (см. рис. 4.17, а) равен току некоторой цепи, содержащей помимо сопротивления Z_n источник напряжения $E_{xx} = \dot{U}_x$ и комплексное сопротивление $Z_{xx} = Z_{aa}$ (см. рис. 4.17, б). Итак, ток выделенной ветви I_a не изменился при замене автономного двухполюсника эквивалентным источником энергии, ЭДС которого равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление — его комплексному входному сопротивлению.

Переходя от последовательной схемы замещения эквивалентного источника к параллельной, можно показать, что ток I_{xx} независимого источника тока (см. рис. 4.17, в) равен току короткого замыкания автономного двухполюсника, а внутренняя проводимость Y_{xx} — его комплексной входной проводимости $Y_{aa} = 1/Z_{aa}$.

Воспользовавшись теоремой об эквивалентном источнике, можно найти последовательную или параллельную схему замещения любого сколь угодно сложного линейного активного двухполюсника, поэтому данную теорему часто называют теоремой об активном двухполюснике. Эта теорема позволяет существенно упростить анализ цепей, особенно в тех случаях, когда требуется определить ток или напряжение только одной ветви сложной цепи, содержащей большое число управляемых и неуправляемых источников тока и напряжения. В связи с тем что параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения активного двухполюсника легко поддаются измерениям, выполняемым на внешних зажимах, теорему об эквивалентном источнике применяют и для построения схем замещения активных двухполюсников по результатам их экспериментального исследования.

Пример 4.15. Используя теорему об эквивалентном источнике, определим ток $\dot{I}_6$ цепи, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 4.2, а.

Выделим из цепи ветвь, содержащую сопротивление Z_6 , и представим оставшуюся часть цепи, которую можно рассматривать как автономный двухполюсник, последовательной схемой замещения (рис. 4.19, а). ЭДС источника напряжения $\dot{E}_{эк}$ опре-

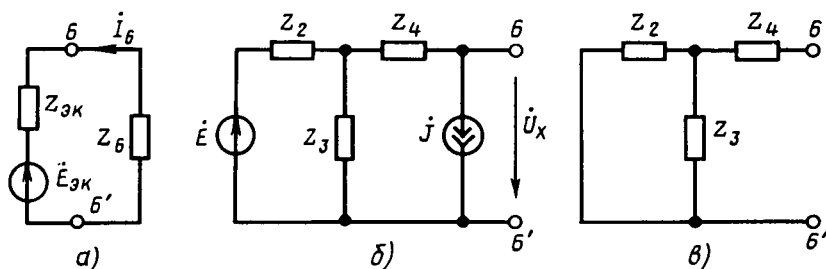


Рис. 4.19. К примеру 4.15

деляется как напряжение холостого хода на зажимах автономного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 4.19, б:

$$\dot{E}_{эк} = \dot{U}_x = \{Z_3 \dot{E} - [Z_2 Z_3 + Z_4 (Z_2 + Z_3)] j\} / (Z_2 + Z_3).$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного источника равно входному сопротивлению неавтономного двухполюсника (рис. 4.19, в):

$$Z_{эк} = Z_4 + Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3).$$

Зная параметры элементов $Z_{эк}$ и $\dot{E}_{эк}$ преобразованной схемы цепи (рис. 4.19, а), находим искомый ток:

$$\dot{I}_6 = \frac{-\dot{E}_{эк}}{Z_6 + Z_{эк}} = \frac{[Z_2 Z_3 + Z_4 (Z_2 + Z_3)] j - Z_3 \dot{E}}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}.$$

§ 4.3. МЕТОД СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Решение уравнений электрического равновесия сложных цепей даже в численном виде весьма трудоемко. Задача анализа цепи становится особенно сложной в том случае, когда неизвестны токи и напряжения или комплексные частотные характеристики должны быть найдены в виде аналитических соотношений. При этом полезным может оказаться применение метода сигнальных графов, который позволяет упростить решение уравнений электрического равновесия линейных электрических цепей в аналитическом виде (символьной форме).

Как отмечалось в § 1.4, **сигнальный граф** или **направленный граф** прохождения сигналов, представляет собой наглядное графическое изображение системы уравнений, описывающей процессы в электрической цепи. Узлы (вершины) такого графа соответствуют входящим в эту систему неизвестным величинам (токам и напряжениям ветвей, контурным токам, узловым напряжениям) и величинам, характеризующим внешние воздействия на цепь (токам независимых источников тока, ЭДС независимых источников напряжения, контурным ЭДС, узловым токам). Ветви сигнального графа отображают причинно-следственные связи между величинами, соответствующими отдельным узлам. В рамках метода сигнальных графов эти величины называются **сигналами**. Каждой ветви сигнального графа присписывается определенное направление и присваивается весовой коэффициент, который называется **передачей ветви**. Узлы сигнального графа обозначают теми же буквами, что и соответствующие узлам величины; направления ветвей показывают стрелками, около которых указывают передачу ветви.

Если ветвь с передачей A направлена от узла x_i к узлу x_j (рис. 4.20, а), то

$$x_j = A x_i. \quad (4.30)$$

Следовательно, при прохождении через ветвь сигнал умножается на передачу ветви. Разрешим уравнение (4.30) относительно x_i :

$$x_i = x_j / A. \quad (4.31)$$

Рис. 4.20. Сигнальные графы, соответствующие выражениям (4.30) и (4.31)

Сигнальный граф, соответствующий этому уравнению (рис. 4.20, б), отличается от сигнального графа, соответствующего уравнению (4.30), направлением и передачей ветви. Таким образом, вид сигнального графа зависит от того, относительно какой из величин разрешено заданное уравнение, т. е. от того, какая из величин рассматривается как причина, а какая — как следствие.

Если в узле x_k сходится несколько ветвей (рис. 4.21, а), то значение сигнала в этом узле равно сумме сигналов всех входящих в него ветвей:

$$x_k = \sum_{i=1}^N A_{ki} x_i, \quad (4.32)$$

где N — число ветвей, направленных к узлу x_k ; A_{ki} — передача ветви, направленной от узла x_i к узлу x_k . Ветви, направленные от узла x_k , не влияют на его сигнал и при подсчете x_k не учитываются. В число ветвей, направленных к исследуемому узлу, могут входить и ветви, начинающиеся в данном узле (рис. 4.21, б). Такие ветви называются петлями. Значение переменной в узле, к которому подключена одна или несколько петель, находится по общему правилу (4.32), например для рис. 4.21, б,

$$x_4 = A_{41} x_1 + A_{42} x_2 + A_{44} x_4. \quad (4.33)$$

Из выражения (4.33) следует, что при наличии петель, подключенных к какому-либо узлу, переменная, соответствующая этому узлу, входит и в левую, и в правую части уравнения (4.32).

Рассмотрим некоторые понятия, относящиеся к сигнальным графам.

Источком называется узел сигнального графа, от которого направлены все примыкающие к нему ветви. Узел сигнального графа, к которому направлены все примыкающие к нему ветви, называется **стоком**. Узлы, которые имеют как входящие, так и исходящие ветви, называются **смешанными**. Например, в графе рис. 4.20, *а* узел x_i — источник, узел x_j — сток; в графе рис. 4.21, *б* узлы x_1 и x_2 — источники, узел x_3 — сток, узел x_4 — смешанный.

Если сигнал, соответствующий некоторому узлу сигнального графа, не выражается через сигналы других узлов, то такой узел является **независимым**. Если сигнал, соответствующий какому-либо узлу, выражается через сигналы других узлов, то такой узел является **зависимым**. К независимым узлам относятся истоки, к зависимым — стоки и смешанные узлы. Очевидно, что уравнения вида (4.32) могут быть составлены только для зависимых узлов.

Пример 4.16. Построим систему уравнений, соответствующую сигнальному графу (рис. 4.22). В этом графе узлы x_6, x_7 — источники, узел x_5 — сток, узлы x_1, x_2, x_3 и x_4 — смешанные. Для зависимых узлов $x_1 — x_5$ можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}x_1 &= ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_6; \\x_2 &= ex_1 + fx_2 + hx_7; \\x_3 &= gx_1; \\x_4 &= kx_3 + mx_3 + nx_2; \\x_5 &= px_4.\end{aligned}$$

Путь между узлами x_i и x_j сигнального графа — это непрерывная последовательность однонаправленных ветвей, связывающая узел x_i с узлом x_j и проходящая через каждый узел графа не более одного раза. Произведение передач ветвей, образующих путь между узлами x_i и x_j , называется **передачей пути** P_{ji} . Так, между узлами x_6 и x_5 сигнального графа (рис. 4.22) можно указать три пути с передачами $P_{56}^{(1)} = dgkpr$ (ветви d, g, k и p), $P_{56}^{(2)} = dgmp$ и $P_{56}^{(3)} = denp$.

Последовательность ветвей d, c, m и p не образует пути от вершины x_6 к вершине x_5 , так как направление ветви c не совпадает с направлением пути.

Замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одном узле, называется **контуром**. Очевидно, что петля есть частный вид контура, в который входит одна ветвь. Произведение передач всех ветвей, входящих в j -й контур, называется **передачей контура** L_j . На рис. 4.22

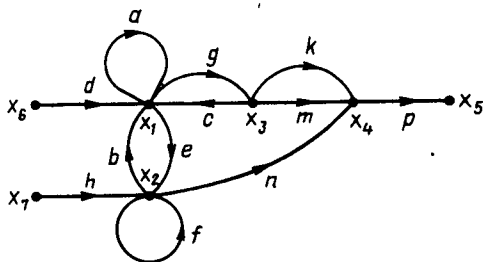


Рис. 4.22. К примеру 4.16

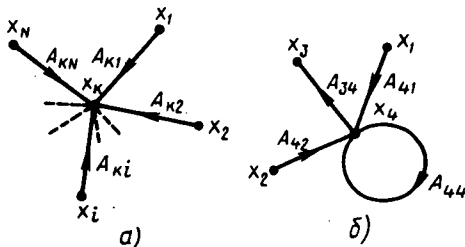


Рис. 4.21. Суммирование сигналов в узле сигнального графа

можно выделить четыре контура с передачами $L_1 = be$ (ветви b и e), $L_2 = gc$ (ветви g и c), $L_3 = a$ (петля a) и $L_4 = f$ (петля f). Ветви k и m не образуют контура, так как они не представляют собой замкнутой последовательности однонаправленных ветвей. Такие ветви называются параллельными.

Два контура или контур и путь называются соприкасающимися, если они имеют общие узлы. Если два контура или контур и путь не имеют общих узлов, то они являются несоприкасающимися. На рис. 4.22 контуры с передачами $L_2 = gc$ и $L_4 = f$; $L_3 = a$ и $L_4 = f$ — несоприкасающиеся, а контуры с передачами $L_1 = be$ и $L_2 = gc$; $L_1 = be$ и $L_4 = f$; $L_1 = be$ и $L_3 = a$ — соприкасающиеся. Контур с передачей $L_4 = f$ не соприкасается с путями $P_{56}^{(1)}$ и $P_{56}^{(2)}$, но соприкасается с путем $P_{56}^{(3)}$.

Как видно из примера 4.16, каждому сигнальному графу можно однозначным образом поставить в соответствие систему линейных алгебраических уравнений, составленных относительно сигналов зависимых узлов. Для решения обратной задачи — построения сигнального графа, соответствующего заданной системе уравнений, эта система уравнений должна быть приведена к причинно-следственной форме, т. е. каждое из входящих в систему уравнений должно быть разрешено относительно одной из переменных (различных для каждого из уравнений). Далее определяется общее число узлов графа N , которое равно сумме числа неизвестных переменных и числа ненулевых свободных членов уравнений. Построение сигнального графа начинается с нанесения точек, соответствующих его узлам. Затем узлы графа в соответствии с системой уравнений, приведенной к причинно-следственной форме, соединяются между собой ветвями так, чтобы сумма сигналов всех ветвей, сходящихся в каждом узле, равнялась бы сигналу этого узла. Для повышения наглядности изображения рекомендуется истоки располагать в левой части чертежа, стоки — в правой, а остальные узлы — между ними.

В связи с тем что одну и ту же систему уравнений можно различными способами привести к причинно-следственной форме, каждой системе уравнений можно поставить в соответствие некоторое множество графов. Различные графы, соответствующие одной и той же исходной системе уравнений, называются равносильными.

Рассмотрим несколько примеров построения графов, соответствующих заданной системе уравнений.

Пример 4.17. Построим сигнальный граф, соответствующий системе уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Приведем данную систему уравнений к причинно-следственной форме, для чего разрешим первое уравнение относительно x_1 , второе — относительно x_2 , а третье — относительно x_3 :

$$x_1 = -a_{12}x_2/a_{11} - a_{13}x_3/a_{11} + b_1/a_{11};$$

$$x_2 = -a_{21}x_1/a_{22} - a_{23}x_3/a_{22} + b_2/a_{22};$$

$$x_3 = -a_{31}x_1/a_{33} - a_{32}x_2/a_{33}.$$

Число независимых переменных в этой системе уравнений равно трем, число ненулевых свободных членов — двум, следовательно, общее число узлов сигнального графа равно пяти. Располагая в левой части чертежа независимые узлы, соответствующие свободным членам b_1 и b_2 , а в правой части узлы, соответствующие неизвестным величинам x_1 , x_2 , x_3 , и соединяя их ветвями в соответствии с системой уравнений, преобразованной к причинно-следственной форме, получаем сигнальный граф, изображенный на рис. 4.23, а.

Исходная система уравнений может быть приведена к причинно-следственной форме и другим способом. Прибавляя к правой и левой частям первого уравнения x_1 , второго x_2 , третьего x_3 и выполняя очевидные преобразования, находим

$$\begin{aligned}x_1 &= (a_{11} + 1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1; \\x_2 &= a_{21}x_1 + (a_{22} + 1)x_2 + a_{23}x_3 - b_2; \\x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} + 1)x_3.\end{aligned}$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 4.23, б.

Графы (рис. 4.23, а, б) имеют различную структуру и передачи ветвей, однако они соответствуют одной и той же исходной системе уравнений и поэтому являются равносильными. Очевидно, что если первое уравнение, входящее в исходную систему, разрешить не относительно x_1 , а относительно x_2 или x_3 , то получатся другие варианты представления исходной системы уравнений в причинно-следственной

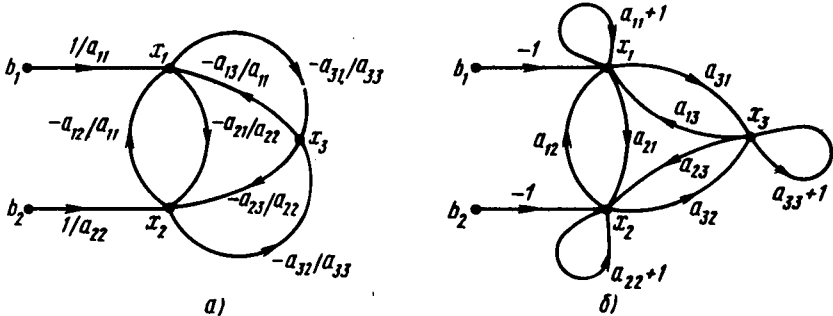


Рис. 4.23. К примеру 4.17

форме, каждому из которых можно поставить в соответствие сигнальные графы, равносильные графам, изображенным на рис. 4.23.

Пример 4.18. Составим сигнальный граф, соответствующий узловым уравнениям цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а.

Узловые уравнения данной цепи были составлены при рассмотрении примера 4.5. Разрешая первое из этих уравнений относительно $\dot{U}_{30}$, а второе — относительно $\dot{U}_{20}$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{U}_{20} &= Z_4(1/Z_4 + 1/Z_6)\dot{U}_{30} + Z_4 j; \\ \dot{U}_{30} &= Z_4(1/Z_2 + 1/Z_3 + 1/Z_4)\dot{U}_{20} - Z_4 E/Z_2.\end{aligned}$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, приведенный на рис. 4.24.

Пример 4.19. Используя метод контурных токов, составим систему уравнений для определения тока I_6 цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а. Построим сигнальный граф, соответствующий этой системе уравнений.

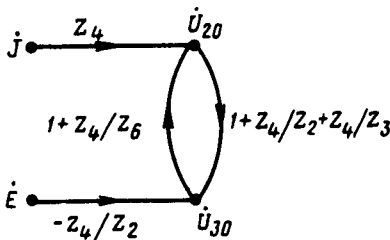


Рис. 4.24. К примеру 4.18

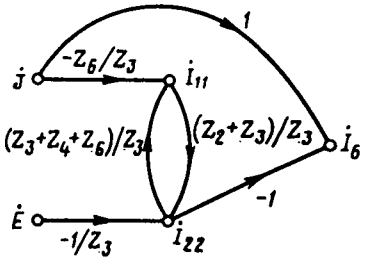


Рис. 4.25. К примеру 4.19

Контурные уравнения исследуемой цепи были сформированы при рассмотрении примера 4.4. Дополняя эти уравнения соотношением, связывающим ток I_6 с контурными токами I_{11} и I_{22} , получаем

$$\begin{aligned}(Z_2 + Z_3)I_{11} - Z_3I_{22} &= E; \\ -Z_3I_{11} + (Z_3 + Z_4 + Z_6)I_{22} &= Z_6J; \\ I_6 - J + I_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Разрешим каждое из этих уравнений относительно одной из неизвестных величин:

$$\begin{aligned}I_{22} &= (Z_2 + Z_3)I_{11}/Z_3 - E/Z_3; \\ I_{11} &= (Z_3 + Z_4 + Z_6)I_{22}/Z_3 - Z_6J/Z_3; \\ I_6 &= J - I_{22}.\end{aligned}$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 4.25.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Используя правила построения сигнальных графов, можно убедиться, что каждому равносильному преобразованию исходной системы уравнений соответствует некоторое преобразование сигнального графа и, наоборот, каждому преобразованию сигнального графа соответствует определенное преобразование исходной системы уравнений. На практике оказывается, что преобразования сигнальных графов выполняются проще и в более наглядной форме, чем преобразование уравнений. Поэтому при анализе цепей во многих случаях преобразование уравнений электрического равновесия заменяется преобразованием соответствующих сигнальных графов.

Рассмотрим основные преобразования сигнальных графов.

Объединение параллельных ветвей. Две параллельные ветви с передачами A и B могут быть заменены одной ветвью с передачей $A + B$. Действительно, в соответствии с рис. 4.26, а сигнал в узле x_j , к которому сходятся ветви с передачами A и B , исходящие из узла x_i ,

$$x_j = Ax_i + Bx_i, \text{ или } x_j = (A + B)x_i.$$

Последнему уравнению соответствует сигнальный граф, имеющий одну ветвь с передачей $A + B$, направленную от узла x_i к узлу x_j (рис. 4.26, б). Правило объединения параллельных ветвей обобщается на любое число параллельно включенных ветвей, его можно применять для объединения петель, подключенных к одному узлу (рис. 4.27).

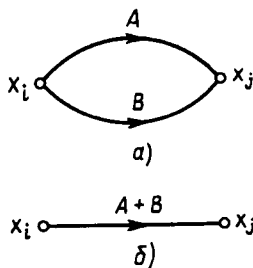


Рис. 4.26. Объединение параллельных ветвей

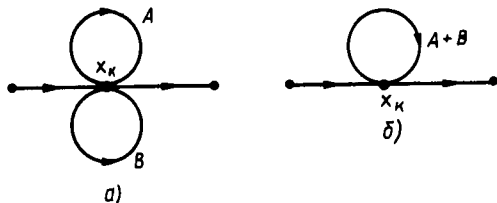


Рис. 4.27. Объединение петель

Объединение последовательности однонаправленных ветвей. Две последовательно включенные однонаправленные ветви с передачами A и B могут быть заменены одной ветвью с передачей AB . Действительно, графу, приведенному на рис. 4.28, а, может быть поставлена в соответствие система уравнений

$$\begin{aligned}x_j &= Ax_i; \\x_k &= Bx_j.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Исключая из (4.34) переменную x_j , получаем

$$x_k = ABx_i. \quad (4.35)$$

Уравнению (4.35) соответствует сигнальный граф, содержащий одну ветвь с передачей AB (рис. 4.28, б). Данное преобразование представляет собой частный случай устраниения смешанного узла сигнального графа.

Устранение промежуточного узла. Смешанный узел, к которому подключено несколько не образующих контуров ветвей, причем только одна из ветвей направлена к узлу (рис. 4.29, а) или от него (рис. 4.29, в), называется промежуточным. Для устраниения промежуточного узла первого типа составим систему уравнений

$$\begin{aligned}x_2 &= Ax_1; & x_4 &= Cx_2; \\x_3 &= Bx_2; & x_5 &= Dx_2\end{aligned}$$

и исключим из нее переменную x_2 :

$$\begin{aligned}x_3 &= ABx_1; \\x_4 &= ACx_1; \\x_5 &= ADx_1.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Системе уравнений (4.36) соответствует граф, не содержащий промежуточного узла x_2 (рис. 4.29, б). Аналогичным образом устраниается промежуточный узел, в который входит несколько ветвей, а выходит только одна (рис. 4.29, в, г).

Устранение контура. Сигнальному графу, изображенному на рис. 4.30, а, может быть поставлена в соответствие система уравнений

$$\begin{aligned}x_2 &= Ax_1 + Cx_3; \\x_3 &= Bx_2.\end{aligned}$$

Подставляя первое из этих уравнений во второе, находим

$$x_3 = ABx_1 + BCx_3. \quad (4.37)$$

Уравнению (4.37) соответствует преобразованный граф, приведенный на рис. 4.30, б.

Исключение петли. Исключение петли с передачей A , подключенной к какому-либо узлу сигнального графа, сопровождается умножением передач ветвей, входящих в этот узел, на $1/(1-A)$.

Действительно, для сигнального графа, приведенного на рис. 4.31, а, можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned}x_3 &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3; \\x_4 &= Dx_3.\end{aligned}$$

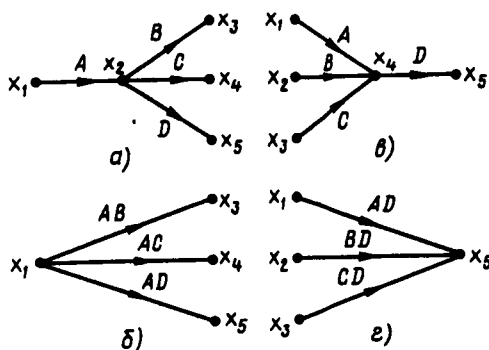


Рис. 4.29. Устранение промежуточного узла, из которого исходит (а, б) или в который входит (в, г) несколько ветвей

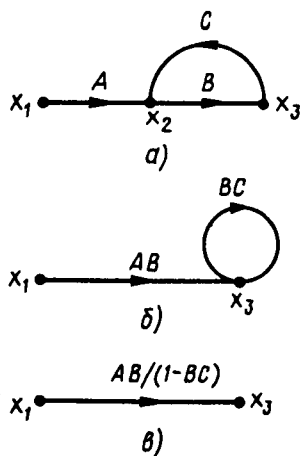


Рис. 4.30. Устранение контура

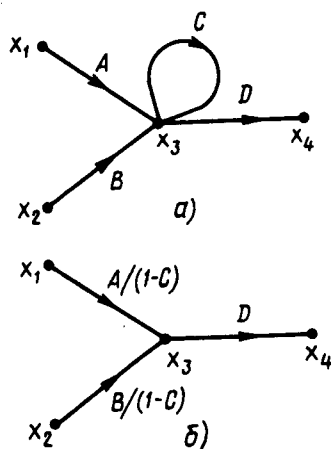


Рис. 4.31. Устранение петли

Приводя в первом из этих уравнений подобные члены и разрешая его относительно x_3 , получаем

$$\begin{aligned} x_3 &= Ax_1/(1-C) + Bx_2/(1-C); \\ x_4 &= Dx_3. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Как видно из соответствующего системе уравнений (4.38) сигнального графа (рис. 4.31, б), после устранения петли передачи ветвей, входящих в узел x_3 , оказались умноженными на $1/(1-C)$, а передача ветви, выходящей из узла x_3 , осталась без изменения.

Применяя операцию устранения петли, преобразованный граф (см. рис. 4.30, б) можно заменить одной ветвью (см. рис. 4.30, в).

Инверсия (изменение направления) ветви, выходящей из истока. Рассмотрим некоторый граф (рис. 4.32, а), которому соответствует система уравнений

$$\begin{aligned} x_4 &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4; \\ x_5 &= Ex_4. \end{aligned} \quad (4.39)$$

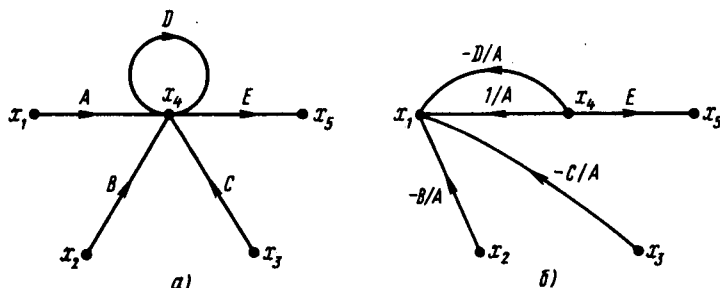


Рис. 4.32. Инверсия ветви, выходящей из истока

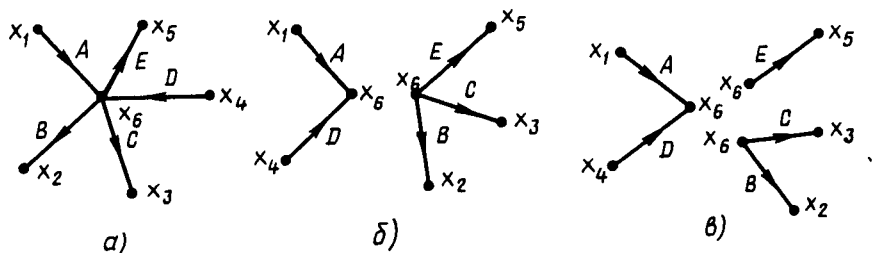


Рис. 4.33. Расщепление узла

Пусть необходимо изменить направление какой-либо ветви, выходящей из истока, например направленной из вершины x_1 в вершину x_4 . С этой целью разрешим первое из уравнений (4.39) относительно x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4/A - Bx_2/A - Cx_3/A - Dx_4/A; \\ x_5 &= Ex_4. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Системе уравнений (4.40) соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 4.32, б. Как видно из сравнения рис. 4.32, а, б, инвертирование ветви, направленной от узла x_i к узлу x_j , сопровождается изменением передач и точек подключения всех ветвей, ранее направленных к узлу x_j . Ветвь с передачей A , направленная от узла x_i к узлу x_j , заменяется ветвью, направленной от узла x_j к узлу x_i , с передачей $1/A$. Ветви, ранее направленные к узлу x_j , заменяются ветвями, направленными к узлу x_i , передачи этих ветвей умножаются на $-1/A$. Ветви, не направленные ранее к узлу x_j , при инвертировании ветви, направленной к x_j , остаются без изменений.

Расщепление узла. В связи с тем что сигнал в каждом узле сигнального графа определяется только сигналами входящих в него ветвей, любой узел сигнального графа может быть расщеплен на два: один — содержащий все ветви, направленные к узлу, другой — направленные от узла. Так, узел x_6 графа, изображенного на рис. 4.33, а, может быть расщеплен на два узла (рис. 4.33, б). Узел, который содержит только исходящие из него ветви (исток), может быть расщеплен на произвольное число узлов, не превышающее числа исходящих из него ветвей (рис. 4.33, в).

Удлинение узла. В ряде случаев возникает необходимость во введении в сигнальный граф дополнительного узла, сигнал в котором совпадает с сигналом в одном из узлов x_i сигнального графа. Такая операция называется удлинением узла x_i . Для удлинения узла x_i этот узел должен быть соединен с вновь вводимым узлом x_j ветвью, передача которой равна единице. Например, для удлинения узла x_4 (рис. 4.34, а) введем новый узел x'_4 и соединим его с узлом x_4 ветвью, передача которой равна единице (рис. 4.34, б).

Совместное проведение описанных преобразований позволяет, как правило, существенно упростить структуру сигнального графа. Конечной целью преобразований обычно является получение наиболее простого графа, не допускающего дальнейших упрощений. Такой граф называется конечным. Конечный граф не содержит смешанных узлов, а включает в себя только стоки и истоки.

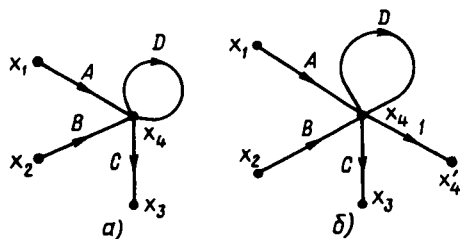


Рис. 4.34. Удлинение узла

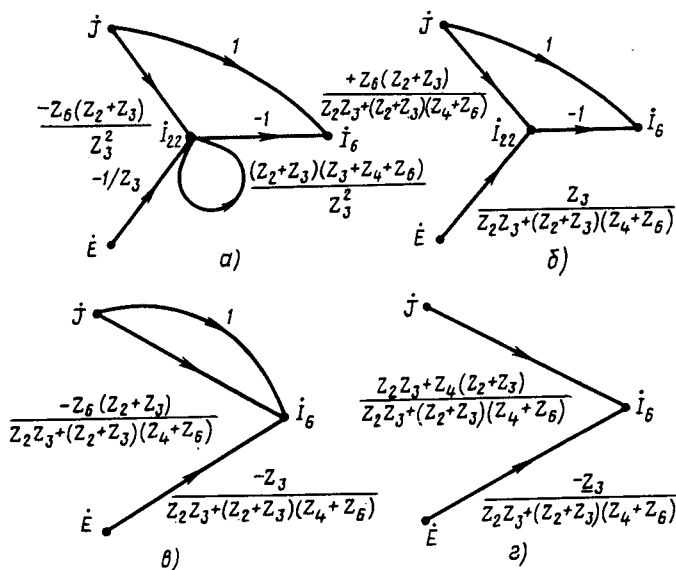


Рис. 4.35. К примеру 4.20

Пример 4.20. Упростим сигнальный граф, изображенный на рис. 4.25. Для этого последовательно исключим контур (рис. 4.35, а), петлю (рис. 4.35, б), промежуточный узел (рис. 4.35, в) и объединим параллельные ветви (рис. 4.35, г). Преобразованный граф (рис. 4.35, г) не содержит смешанных узлов и не подлежит дальнейшему упрощению. Этот граф является конечным.

ПРИМЕНЕНИЕ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ К АНАЛИЗУ ЦЕПЕЙ

Применение метода сигнальных графов при анализе цепей оказывается эффективным в тех случаях, когда требуется определить ток или напряжение только одной ветви цепи или найти ее комплексные частотные характеристики.

Как отмечалось, используя различные преобразования, исходный сигнальный граф можно привести к конечному. Если истоками графа являются узлы, сигналы которых X_i есть комплексные изображения величин, характеризующих внешние воздействия на зажимах $i - i'$, а стоками — узлы, сигналы которых S_j представляют собой комплексные изображения искомых токов или напряжений ветвей, подключенных к зажимам $j - j'$, то с учетом конечного графа можно записать соотношения, в явной форме выражающие зависимость искомых неизвестных токов и напряжений от величин, характеризующих внешние воздействия. Передача ветви A_{ji} конечного графа, связывающей исток X_i со стоком S_j , равна комплексной частотной характеристике цепи $H_{ji}(j\omega)$, измеренной в режиме, когда все источники внешнего воздействия, за исключением X_i , выключены.

Трудоемкость преобразования сигнального графа к конечному во многом определяется выбором исходной системы уравнений электрического равновесия и тем, каким образом осуществлен переход от исходной системы уравнений к сигнальному графу. Для уменьшения числа узлов сигнального графа в качестве исходной системы уравнений рекомендуется применять систему уравнений электрического равновесия

цепи, составленную по методу узловых напряжений или контурных токов, дополнив ее уравнениями, связывающими искомые токи и напряжения с контурными токами или узловыми напряжениями.

Пример 4.21. Определим ток I_6 цепи, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 4.2, а, преобразуя сигнальный граф этой цепи (см. рис. 4.25) в конечный.

Граф, показанный на рис. 4.25, соответствует контурным уравнениям рассматриваемой цепи, дополненным уравнением, выражающим связь искомого тока с контурными токами I_{11} , I_{22} и $I_{33} = J$ (см. пример 4.19). Преобразование этого графа в конечный было проведено в примере 4.20. Непосредственно по виду конечного графа записываем выражение для искомого тока

$$I_6 = \{[Z_2 Z_3 + Z_4(Z_2 + Z_3)]J - Z_3 E\} / [Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)],$$

которое совпадает с выражениями для этого тока, полученными с использованием метода наложения (см. пример 4.10) и теоремы об эквивалентном источнике (см. пример 4.15).

Передача ветви, связывающей исток J и сток I_6 , равна комплексному коэффициенту передачи цепи по току $G_{65}(j\omega)$ от зажимов $5-5'$ к зажимам $6-6'$ (номера зажимов совпадают с номерами ветвей) в режиме, когда источник E замкнут:

$$G_{65}(j\omega) = \frac{I_6}{I_5} \bigg|_{E=0} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_4(Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}.$$

Передача ветви, направленной от истока E к стоку I_6 , равна передаточной проводимости цепи $Y_{61}(j\omega)$ в режиме, когда ветвь с источником тока J разомкнута:

$$Y_{61}(j\omega) = \frac{I_6}{E_1} \bigg|_{J=0} = \frac{-Z_3}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}.$$

Следует отметить, что сведение исходного сигнального графа к конечному, особенно для сложных цепей, может оказаться трудоемким. Кроме того, если необходимо определить несколько неизвестных величин, эту процедуру приходится выполнять несколько раз. Поэтому в таких случаях для нахождения комплексных частотных характеристик цепи и неизвестных токов и напряжений целесообразно воспользоваться *формулой Мейсона* [9], которая позволяет вычислять передачи ветвей конечного графа $A_{ji} = H_{ji}(j\omega)$ непосредственно по исходному сигнальному графу, не прибегая к его преобразованиям.

Формула Мейсона имеет вид

$$A_{ji} = H_{ji}(j\omega) = \left(\sum_k P_{ji}^{(k)} \Delta_k \right) / \Delta, \quad (4.41)$$

где Δ — определитель сигнального графа, численно равный определителю исходной системы уравнений; $P_{ji}^{(k)}$ — передача k -го пути от истока X_i к стоку S_j ; Δ_k — алгебраическое дополнение k -го пути. Суммирование производится по всем возможным путям из узла X_i в узел S_j .

Определитель сигнального графа

$$\Delta = 1 - \sum_l L_l + \sum_{l, j} L_l L_j - \sum_{l, j, m} L_l L_j L_m + \dots, \quad (4.42)$$

где $\sum_l L_l$ — сумма передач всех контуров сигнального графа; $\sum_{l, j} L_l L_j$ — сумма произ-

ведений передач всех возможных пар непересекающихся контуров; $\sum_{l, j, m} L_l L_j L_m$ —

сумма произведений передач всех несовприкасающихся троек контуров и т. д. Алгебраическое дополнение k -го пути также вычисляется по формуле (4.42), но при этом учитываются только контуры, не касающиеся пути $P_{j,r}^{(k)}$.

Пример 4.22. Используя формулу Мейсона, определим передаточную проводимость $Y_{61}(j\omega)$ цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а.

Сигнальный граф этой цепи изображен на рис. 4.25 (см. пример 4.19). Данный граф содержит единственный контур, передача которого $L = (Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4 + Z_6)/Z_3^2$.

Согласно выражению (4.42) определитель сигнального графа

$$\Delta = 1 - L = 1 - \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4 + Z_6)}{Z_3^2} = -\frac{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}{Z_3^2}.$$

Между узлами E и I_6 существует единственный путь, проходящий по ветвям с передачами $-1/Z_3$ и -1 . Передача этого пути $P_{61}^{(1)} = 1/Z_3$. Единственный контур сигнального графа имеет общую вершину I_{22} с данным путем, поэтому $\Delta_1 = 1$.

Подставляя полученные значения $P_{61}^{(1)}$, Δ и Δ_1 в формулу Мейсона, найдем

$$Y_{61}(j\omega) = \left. \frac{I_6}{E} \right|_{j=0} = \frac{-Z_3}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}.$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с выражениями для $Y_{61}(j\omega)$, полученными другими методами (см. примеры 4.10, 4.15, 4.21).

Пример 4.23. Используя формулу Мейсона, определим комплексный коэффициент передачи по току $G_{65}(j\omega)$ цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а.

Сигнальный граф рассматриваемой цепи изображен на рис. 4.25. Выражение для определителя Δ этого графа было получено в примере 4.22.

Между узлами J и I_6 существуют два пути с передачами $P_{65}^{(1)} = 1$; $P_{65}^{(2)} = Z_6(Z_2 + Z_3)/Z_3^2$.

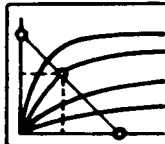
Алгебраическое дополнение первого пути

$$\Delta_1 = 1 - \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4 + Z_6)}{Z_3^2} = -\frac{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}{Z_3^2} = \Delta.$$

Алгебраическое дополнение второго пути равно единице. По формуле Мейсона,

$$G_{65}(j\omega) = \left. \frac{I_6}{J} \right|_{j=0} = \frac{P_{65}^{(1)} \Delta_1 + P_{65}^{(2)} \Delta_2}{\Delta} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_4(Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}.$$

Нетрудно убедиться, что данное выражение совпадает с выражениями для $G_{65}(j\omega)$, найденными другими методами (см. примеры 4.10, 4.15 и 4.21).



Нелинейные резистивные цепи

§ 5.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Процессы, протекающие в нелинейных электрических цепях, намного сложнее и разнообразнее, чем процессы в линейных цепях и в то же время они менее исследованы. В нелинейных цепях могут иметь место явления, которые не наблюдаются в цепях, содержащих только линейные элементы. Например, реакция нелинейной цепи на внешнее воздействие может содержать гармонические колебания таких частот, которые отсутствуют во внешнем воздействии. При приложении к нелинейной цепи только постоянных токов и напряжений в ней при определенных условиях могут возникать незатухающие колебания, так называемые автоколебания. Интенсивность реакции нелинейной цепи на определенное воздействие, как правило, нелинейно зависит от интенсивности воздействия, причем плавные изменения частоты или интенсивности внешнего воздействия могут приводить к скачкообразным изменениям частоты и интенсивности реакции; во многих случаях реакция нелинейной цепи на заданное воздействие не определяется однозначно; при одних и тех же воздействиях нелинейная цепь может иметь несколько установившихся режимов, называемых состояниями равновесия, причем некоторые из этих состояний могут оказаться неустойчивыми.

Явления, имеющие место в нелинейных элементах, положены в основу функционирования большинства радиоэлектронных устройств, причем важнейшие для радиоэлектроники процессы генерирования колебаний, модуляции, детектирования, выпрямления, ограничения, умножения и преобразования частоты и многие другие в принципе не могут быть реализованы с помощью линейных электрических цепей.

Как отмечалось, характеристики всех реальных элементов в той или иной степени нелинейны. В одних случаях нелинейность характеристик невелика и при построении упрощенной модели ею можно пренебречь, в других нелинейностью характеристик реальных элементов пренебречь нельзя и при построении упрощенных моделей таких цепей приходится использовать идеализированные элементы с нелинейными характеристиками. Нелинейность характеристик реальных элементов обычно считается несущественной, если ее наличие не является принципиальным для функционирования устройства, а ее влияние приводит лишь к появлению некоторых второстепенных эффектов, которыми в рамках решаемой задачи можно пренебречь.

На практике нелинейностью характеристик реального элемента, как правило, можно пренебречь, если характеристика элемента практически линейна в рабочем диапазоне токов и напряжений, а функционирование устройства не построено на использовании нелинейности соответствующей характеристики.

Рассмотрим основные особенности и методы расчета цепей, содержащих нелинейные резистивные элементы (нелинейные резисторы, транзисторы, диоды и т. п.). Более детально процессы в нелинейных цепях, в том числе и в цепях, содержащих нелинейные энергоемкие элементы (нелинейные конденсаторы и индуктивные катушки), изучаются в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы».

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В соответствии с основным методом теории цепей при изучении нелинейных резистивных цепей не будем рассматривать физические процессы, имеющие место в реальных элементах, а ограничимся представлением этих элементов с помощью упрощенных моделей, описывающих связь между мгновенными значениями токов и напряжений на внешних зажимах элементов. Более того, в рамках данной главы будем пренебрегать всеми эффектами, связанными с запасанием энергии электрического и магнитного полей, а также считать, что зависимости между мгновенными значениями токов и напряжений на зажимах резистивного элемента (*динамические ВАХ*) совпадают с его статическими, т. е. с соответствующими зависимостями, снятыми для случая бесконечно медленно изменяющихся токов и напряжений (на постоянном токе). Для каждого реального элемента динамические ВАХ будут совпадать со статическими только в том случае, если частота изменения токов и напряжений на внешних зажимах элемента не превышает некоторого предельного значения. При этом нелинейный резистивный элемент можно рассматривать как *безынерционный*. Если рабочая частота элемента близка к предельной или превышает ее, то статические ВАХ не отражают зависимости между мгновенными значениями

токов и напряжений на зажимах элемента. При таких условиях нелинейный элемент следует считать *инерционным*.

В зависимости от числа внешних выводов различают нелинейные двухполюсные элементы (резисторы с нелинейным сопротивлением, электровакуумные и полупроводниковые диоды) и нелинейные многополюсные элементы (транзисторы различных типов, электровакуумные триоды и пентоды). При принятых ранее положительных направлениях токов и напряжений ВАХ нелинейных пассивных двухполюсных элементов должны располагаться в первом и третьем квадрантах координатной плоскости $u-i$ и проходить через начало координат. Если ВАХ нелинейного резистивного двухполюсника хотя бы частично располагается во втором или четвертом квадрантах либо не проходит через начало координат, то потребляемая таким элементом мощность может быть отрицательной и, следовательно, такой элемент не является пассивным.

ВАХ нелинейного двухполюсного элемента может быть симметричной (см. рис. 1.4, а) или несимметричной (см. рис. 1.4, б, в) относительно начала координат. Очевидно, что режим работы нелинейной цепи не изменится, если выводы нелинейного резистивного элемента с симметричной характеристикой поменять местами.

Различают нелинейные резистивные элементы с монотонной (см. рис. 1.4, а) и немонотонной (см. рис. 1.4, б, в) ВАХ. У элементов с монотонной ВАХ увеличение приложенного к элементу напряжения приводит к росту (или хотя бы не уменьшению) тока и, наоборот, увеличение тока приводит к возрастанию напряжения на элементе. Напряжение и ток на зажимах такого элемента связаны между собой однозначной зависимостью, причем производные du/di и di/du во всех точках ВАХ принимают только неотрицательные значения. Если хотя бы в ограниченном диапазоне изменения токов и напряжений рост напряжения на зажимах элемента приводит к уменьшению тока или, наоборот, увеличение тока приводит к снижению напряжения, то ВАХ такого элемента — немонотонна. Ток и напряжение нелинейного резистивного элемента с немонотонной ВАХ не связаны между собой взаимно однозначной зависимостью.

Различают немонотонные ВАХ *N*- и *S*-типов. У элементов с *N*-образной ВАХ (см. рис. 1.4, б) каждому значению напряжения на зажимах элемента соответствует определенное значение тока, однако в определенном диапазоне изменения токов одному и тому же значению тока может соответствовать несколько различных значений напряжения. Элементы с *S*-образной ВАХ отличаются тем, что в некотором диапазоне изменения напряжений заданному значению напряжения соответствует несколько различных значений тока (см. рис. 1.4, в).

ВАХ безынерционного нелинейного резистивного двухполюсного элемента может рассматриваться как зависимость мгновенного значения реакции данного элемента $s=s(t)$ на некоторое воздействие от мгновенного значения воздействия $x=x(t)$. Для

однозначного определения этой зависимости ВАХ N -типа должна быть представлена в виде функции $i=i(u)$, а ВАХ S -типа — в виде $u=u(i)$. При таком представлении ВАХ исследуемых элементов содержат как восходящие, так и нисходящие участки. На восходящих участках ds/dx положительна, на нисходящих — отрицательна. В связи с тем что дифференциальные сопротивления нелинейных резистивных элементов на падающих участках ВАХ отрицательны, нелинейные двухполюсные элементы с немонотонной ВАХ называют элементами с отрицательным сопротивлением.

Зависимость между токами и напряжениями элементов с монотонной ВАХ может быть представлена как в виде $u=u(i)$, так и в виде $i=i(u)$. Дифференциальное сопротивление элементов с монотонной ВАХ не принимает отрицательных значений.

Вид ВАХ нелинейного резистивного двухполюсника может зависеть от некоторой величины, не связанной непосредственно с токами или напряжениями цепи, в которую включен данный элемент, в частности от температуры, освещенности, давления и др. Такие элементы относятся к *неэлектрически управляемым двухполюсникам*. Так как каждому значению управляющей величины соответствует своя кривая, характеризующая зависимость между током и напряжением на зажимах неэлектрически управляемого резистивного двухполюсника, то такие двухполюсники характеризуются не одной ВАХ, а семейством ВАХ (рис. 5.1).

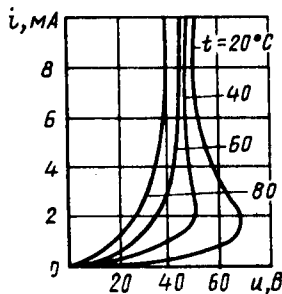


Рис. 5.1. Типовые ВАХ термистора

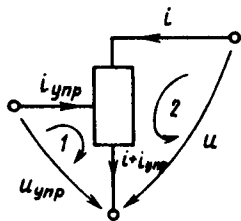


Рис. 5.2. Электрически управляемый нелинейный трехполюсник

Важнейший класс нелинейных резистивных элементов составляют *электрически управляемые элементы* (транзисторы различных типов, вакуумные и газоразрядные трехэлектродные и многоэлектродные приборы). Элементы этого типа содержат два основных электрода (катод и анод у электронных ламп, эмиттер и коллектор у биполярных транзисторов, сток и исток у полевых транзисторов), сопротивление между которыми изменяется под действием тока или напряжения одного или нескольких управляющих электродов (сетки у электронных ламп, базы у биполярных транзисторов, затвора или подложки у полевых транзисторов). В частности, ток i нелинейного резистивного трехполюсника (рис. 5.2), имеющего два основных и один управляющий электроды, является функцией напряжения между основными электродами u и тока $i_{упр}$ или напряжения $u_{упр}$ управляющего электрода:

$$i=i(u, i_{упр}) \text{ или } i=i(u, u_{упр}). \quad (5.1)$$

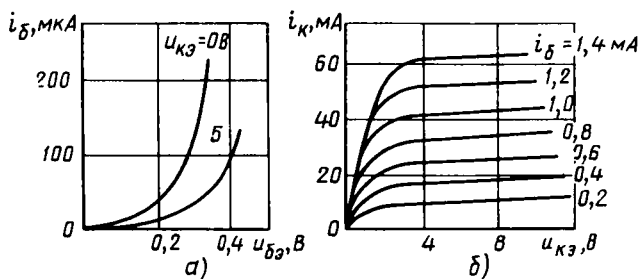


Рис. 5.3. Типовые входные (а) и выходные (б) характеристики биполярного транзистора в схеме с общим эмиттером:
 i_b — ток базы; i_k — ток коллектора; $u_{кэ}$ — напряжение коллектор — эмиттер; $u_{бэ}$ — напряжение база — эмиттер

Как видно из рис. 5.2, электрически управляемый нелинейный резистивный трехполюсник имеет две стороны: входную (управляющую) и выходную (управляемую), причем один из выводов трехполюсника является общим для обеих сторон.

Электрически управляемые нелинейные резистивные элементы могут быть охарактеризованы различными семействами ВАХ. *Выходные* ВАХ отображают зависимость между выходным током i и выходным напряжением u при различных значениях входного тока $i_{уп}$ или напряжения $u_{уп}$ (рис. 5.3, б; 5.4, а), *входные* ВАХ — зависимость между входным током и входным напряжением при различных значениях выходного напряжения (рис. 5.3, а), *проходные* ВАХ — зависимость выходного тока от входного тока или напряжения при различных значениях выходного напряжения (рис. 5.4, б).

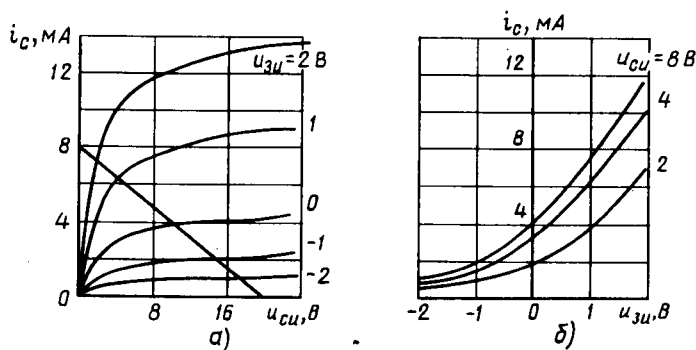


Рис. 5.4. Типовые выходные (а) и проходные (б) характеристики полевого транзистора с изолированным затвором в схеме с общим истоком:

i_c — ток стока; $u_{зш}$ — напряжение затвор — исток; $u_{сш}$ — напряжение сток — исток

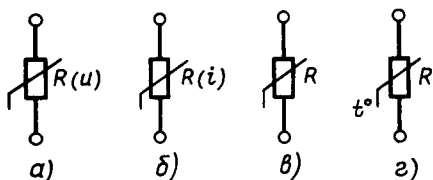


Рис. 5.5. Условные графические изображения нелинейных сопротивлений:

a — с *N*-образной ВАХ; *б* — с *S*-образной ВАХ; *в* — с монотонной ВАХ; *г* — неэлектрически управляемого

ных стандартами ЕСКД условных графических обозначений (см. рис. 1.2, б). При построении схем замещения цепей нелинейных резистивных элементы либо изображают в виде двухполюсников или многополюсников (см. рис. 5.2), либо представляют схемами замещения, содержащими наряду с другими элементами идеализированные нелинейные сопротивления (рис. 5.5). Для неэлектрически управляемых сопротивлений рядом с «полочкой» на условном графическом изображении сопротивления указывают буквенное обозначение соответствующей управляющей величины (рис. 5.5, г).

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Как и в случае линейных электрических цепей, задача анализа нелинейной резистивной цепи заключается в общем случае в определении токов и напряжений всех или части ветвей при заданных параметрах независимых источников энергии. Если нелинейная цепь включает в себя p ветвей, из которых $p_{\text{ит}}$ ветвей содержат независимые источники тока, а $p_{\text{нп}}$ состоят только из независимых источников напряжения, то для нахождения $2p - p_{\text{ит}} - p_{\text{нп}}$ неизвестных токов и напряжений можно воспользоваться p уравнениями, составленными на основании законов Кирхгофа, и $p - p_{\text{ит}} - p_{\text{нп}}$ компонентными уравнениями невырожденных ветвей.

При построении дерева графа нелинейной электрической цепи в качестве ветвей дерева необходимо выбирать вырожденные ветви, составленные только из источников напряжения, и ветви, содержащие элементы с *S*-образными ВАХ, а в качестве главных ветвей — вырожденные ветви, содержащие источники тока, и ветви, содержащие элементы с *N*-образными ВАХ. В этом случае напряжения ветвей дерева и токи главных ветвей или заданы, или могут быть однозначно определены, а, зная эти величины, через них можно однозначно выразить все остальные токи и напряжения. Нелинейные резистивные элементы с монотонной ВАХ могут входить как в состав ветвей дерева, так и в состав главных ветвей.

Вид ВАХ нелинейного управляемого резистивного элемента существенным образом зависит от схемы включения элемента, т. е. от того, какой из электродов является общим для входной и выходной сторон.

На принципиальных электрических схемах реальные нелинейные резистивные элементы изображают с помощью установленных

Очевидно, что все уравнения основной системы уравнений электрического равновесия нелинейной резистивной цепи будут алгебраическими, причем по крайней мере одно из компонентных уравнений будет нелинейным. Аналитическое решение таких уравнений возможно только в исключительных случаях, при некоторых специально подобранных видах нелинейности. Как правило, эти уравнения решают приближенными численными, графическими или графоаналитическими методами. В ряде случаев исследование процессов в простейших нелинейных резистивных цепях удастся провести без составления уравнений электрического равновесия — путем выполнения различных преобразований исходной цепи. Для проведения этих преобразований, а также для определения рабочих точек нелинейных резистивных элементов и реакции этих элементов на различные внешние воздействия широко используются рассмотренные далее графические методы анализа нелинейных электрических цепей.

§ 5.2. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим простейшие эквивалентные преобразования, которые можно применять при анализе безынерционных нелинейных резистивных цепей, находящихся под произвольным внешним воздействием.

Пусть участок цепи (рис. 5.6, а) содержит два последовательно включенных нелинейных сопротивления R_1 и R_2 , ВАХ которых представлены на рис. 5.6, б. Очевидно, что при любом значении тока $i_{\text{вх}} = i_1 = i_2$ напряжение $u_{\text{вх}}$ на зажимах данного участка цепи равно сумме напряжений на каждом из нелинейных сопротивлений: $u_{\text{вх}} = u_1(i_1) + u_2(i_2)$.

Суммируя ординаты зависимостей $u_1(i_1)$ и $u_2(i_2)$, получаем зависимость между напряжением $u_{\text{вх}}$ и током $i_{\text{вх}}$ на зажимах рассматриваемого участка цепи (рис. 5.6, б). Таким образом, участок цепи,

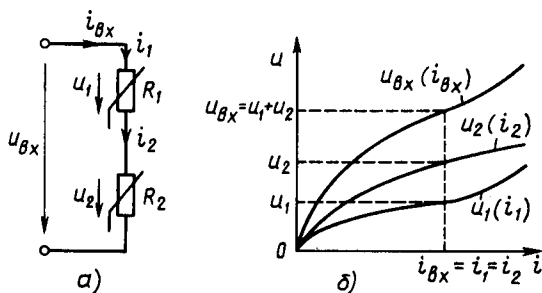


Рис. 5.6. Схема участка цепи с последовательно включенными нелинейными сопротивлениями (а) и их ВАХ (б)

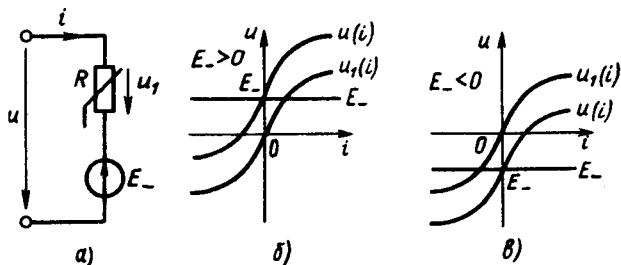


Рис. 5.7. Последовательное соединение нелинейного сопротивления и источника постоянной ЭДС (а), ВАХ нелинейного сопротивления и ВАХ участка цепи при $E_- > 0$ (б) и $E_- < 0$ (в)

содержащий два последовательно включенных нелинейных сопротивления, может быть заменен одним нелинейным сопротивлением, ВАХ $u_{\Sigma}(i_{\Sigma})$ которого получается путем суммирования ординат ВАХ $u_1(i_1)$ и $u_2(i_2)$ сопротивлений. Аналогичным образом можно заменить участок цепи, содержащий последовательно включенные линейное и нелинейное сопротивления, а также участок цепи, представляющий собой последовательное соединение произвольного числа линейных и нелинейных сопротивлений или последовательное соединение нелинейного сопротивления и источника постоянного напряжения E_- . В последнем случае ВАХ рассматриваемого участка цепи $u(i)$ получается путем смещения ВАХ нелинейного сопротивления $u_1(i)$ вдоль оси напряжения на $\pm E_-$ (рис. 5.7).

Пример 5.1. Найдём зависимость между током и напряжением участка цепи (рис. 5.8, а), представляющего собой последовательное соединение нелинейного R_1 и линейного R_2 сопротивлений, ВАХ $u_1(i_1)$ и $u_2(i_2)$ которых приведены на рис. 5.8, б. Определим изменение напряжения Δu_2 на линейном сопротивлении R_2 , соответствующее приращению напряжения на зажимах цепи u_{Σ} на Δu_{Σ} .

ВАХ $u_{\Sigma}(i_{\Sigma})$ исследуемого участка цепи получаем, суммируя ординаты ВАХ $u_1(i_1)$ и $u_2(i_2)$ последовательно включенных элементов. Используя эту характеристи-

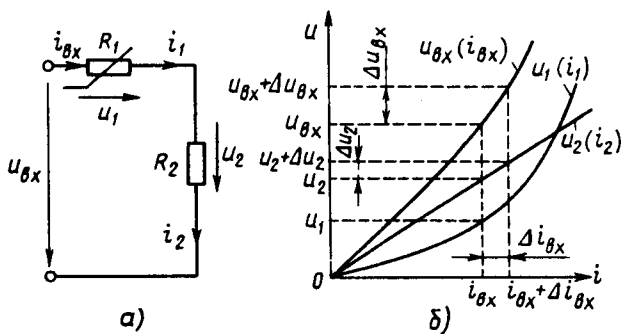


Рис. 5.8. К примеру 5.1

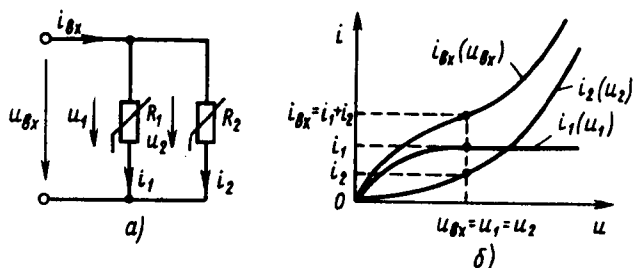


Рис. 5.9. Схема участка цепи с параллельно включенными нелинейными сопротивлениями (а) и их ВАХ (б)

ку (рис. 5.8, б), можно найти приращение тока цепи $\Delta i_{вх}$, соответствующее изменению входного напряжения на $\Delta u_{вх}$. По зависимости $u_2(i_2)$ определяем соответствующее данному приращению тока приращение напряжения Δu_2 на линейном сопротивлении. Как видно из рис. 5.8, б, приращение напряжения на линейном сопротивлении оказалось значительно меньше вызвавшего его изменения входного напряжения $\Delta u_{вх}$.

Рассмотрим участок цепи (рис. 5.9, а), представляющий собой параллельное включение двух нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 , ВАХ $i_1(u_1)$ и $i_2(u_2)$ которых приведены на рис. 5.9, б. Как следует из первого закона Кирхгофа, входной ток $i_{вх}$ данного участка цепи при любом напряжении $u_{вх} = u_1 = u_2$ равен сумме токов нелинейных сопротивлений: $i_{вх} = i_1(u_1) + i_2(u_2)$.

Суммируя ординаты зависимостей $i_1(u_1)$ и $i_2(u_2)$, получаем ВАХ $i_{вх}(u_{вх})$ нелинейного сопротивления, которым можно заменить исследуемый участок цепи. Используя аналогичный прием, можно определить ВАХ участка цепи, содержащего произвольное число параллельно включенных линейных и нелинейных сопротивлений или представляющего собой параллельное соединение нелинейного

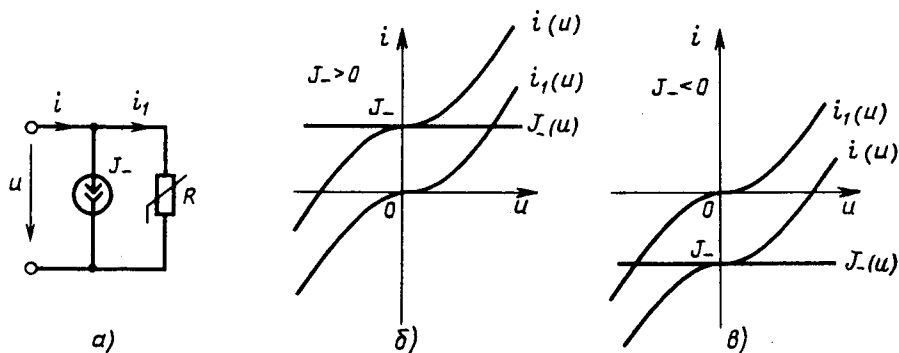


Рис. 5.10. Параллельное соединение нелинейного сопротивления и источника постоянного тока (а), ВАХ нелинейного сопротивления и ВАХ участка цепи при $J_- > 0$ (б) и $J_- < 0$ (в)

сопротивления и источника постоянного тока J_- [в последнем случае ВАХ участка цепи $i(u)$ получается путем смещения ВАХ нелинейного сопротивления $i_1(u)$ вдоль оси токов на $\pm J_-$ (рис. 5.10)].

Поочередное применение правил эквивалентного преобразования участков с последовательным и параллельным соединением элементов позволяет постепенно «свертывать» участки цепей со смешанным соединением линейных и нелинейных сопротивлений с монотонными ВАХ.

Пример 5.2. Найдем зависимость между током и напряжением на входе участка цепи со смешанным соединением элементов (рис. 5.11, а). ВАХ $u_1(i_1)$, $u_2(i_2)$ и $u_3(i_3)$ сопротивлений R_1 , R_2 и R_3 приведены на рис. 5.11, б. Определим приращение напряжения на сопротивлении R_2 , соответствующее изменению входного напряжения на $\Delta u_{вх}$.

Суммируя абсциссы кривых $u_2(i_2)$ и $u_3(i_3)$, получаем ВАХ $u_2(i_{вх})=u_3(i_{вх})$ участка цепи, представляющего собой параллельное соединение сопротивлений R_2 и R_3 . Далее, суммируя ординаты кривых $u_1(i_1)$ и $u_2(i_{вх})=u_3(i_{вх})$, строим зависимость $u_{вх}(i_{вх})$ на входе рассматриваемого участка цепи.

Пусть напряжение на входе цепи изменилось на $\Delta u_{вх}$. Используя зависимость $u_{вх}(i_{вх})$, находим приращение тока $\Delta i_{вх}$, соответствующее этому изменению входного напряжения, и далее с помощью кривой $u_2(i_{вх})=u_3(i_{вх})$ определяем приращение

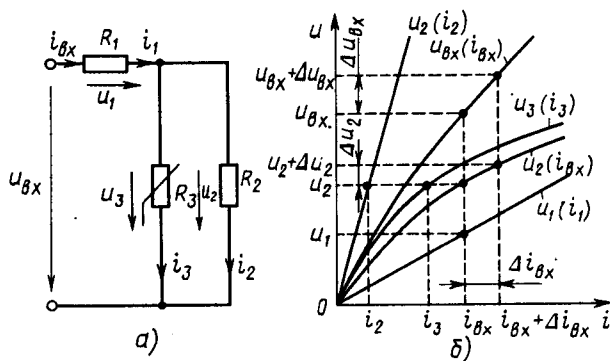


Рис. 5.11. К примеру 5.2

напряжения на линейном сопротивлении R_2 . Как и для цепи, исследованной в примере 5.1, приращение напряжения u_2 оказывается значительно меньшим, чем вызвавшее его изменение входного напряжения $u_{вх}$.

Цепи, рассмотренные в примерах 5.1 и 5.2, можно использовать для стабилизации напряжения. Отношение относительного приращения напряжения на входе таких цепей к относительному приращению выходного напряжения называется коэффициентом стабилизации:

$$k_{ст} = \frac{\Delta u_{вх}/u_{вх}}{\Delta u_{вых}/u_{вых}}. \quad (5.2)$$

Очевидно, что для цепи, схема которой приведена на рис. 5.8, а, $k_{\text{ст}} > 1$, если ВАХ нелинейного элемента [кривая $u_1(i_1)$ на рис. 5.8, б] будет иметь нарастающую крутизну (будет вогнутой), а для цепи, схема которой приведена на рис. 5.11, а, в том случае, когда ВАХ нелинейного элемента [кривая $u_3(i_3)$ на рис. 5.11, б] будет обладать убывающей крутизной (будет выпуклой).

Следует подчеркнуть, что эффект стабилизации напряжения в принципе не может иметь места в цепях, составленных из элементов с линейными ВАХ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧИХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Задача анализа нелинейной цепи постоянного тока обычно сводится к определению *рабочих точек* нелинейных резистивных элементов, т. е. к нахождению токов и напряжений на зажимах этих элементов, соответствующих заданным значениям ЭДС независимых источников постоянного напряжения и токов независимых источников постоянного тока. Эта задача во многих случаях легко решается графическими методами.

Рассмотрим простейшую цепь, состоящую из идеального источника постоянного напряжения E_- и нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 (рис. 5.12, а), ВАХ которых приведены на рис. 5.12, б [кривые $i_1(u_1)$ и $i_2(u_2)$]. Для нахождения рабочих точек сопротивлений R_1 и R_2 воспользуемся методикой преобразования участка цепи с последовательным соединением нелинейных элементов. Суммируя абсциссы кривых $i_1(u_1)$ и $i_2(u_2)$, получаем ВАХ участка цепи, представляющего собой последовательное соединение сопротивлений R_1 и R_2 [кривая $i(u)$]. Используя эту зависимость, определяем постоянный ток I_- , протекающий через данный участок цепи, а следовательно, и через каждое из сопротивлений, если напряжение на зажимах этого участка цепи равно напряжению независимого источника E_- . Далее по ВАХ $i_1(u_1)$ и $i_2(u_2)$ каждого из сопротивлений определяем падения напряжения на этих сопротивлениях U_{1-} и U_{2-} ,

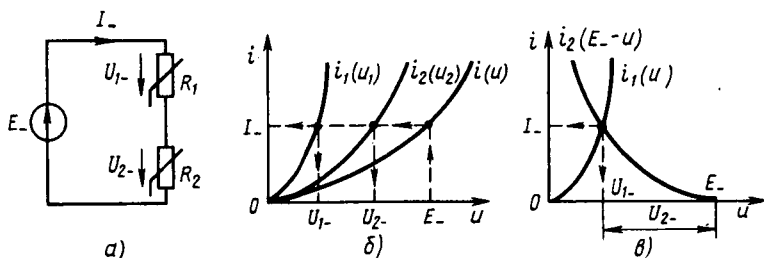


Рис. 5.12. Определение рабочих точек нелинейных сопротивлений

вызванное током I_- . Аналогично можно найти рабочие точки произвольного числа последовательно включенных нелинейных и линейных сопротивлений, соответствующие различным значениям ЭДС независимого источника постоянного напряжения.

В простейшем случае, когда цепь содержит только два последовательно включенных сопротивления, а ЭДС независимого источника имеет одно заданное значение E_- , для определения рабочих точек сопротивлений можно воспользоваться более простым приемом, позволяющим обойтись без построения суммарной ВАХ сопротивлений. С этой целью на оси напряжений (рис. 5.12, а) откладывают отрезок, соответствующий заданному значению ЭДС источника напряжения, и из конца этого отрезка строят зеркальное отображение ВАХ одного из элементов, например сопротивления R_2 [кривая $i_2(E_- - u)$ на рис. 5.12, а]. В точке пересечения $i_1(u)$ и $i_2(E_- - u)$ выполняются условия электрического равновесия цепи $I_1 = I_2 = I_-$; $U_1 + U_2 = E_-$. Следовательно, точка пересечения $i_1(u)$ и $i_2(E_- - u)$ и есть искомая рабочая точка нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 . Сопротивление R_2 , ВАХ которого представляется в виде $i_2(E_- - u)$, обычно рассматривается как сопротивление нагрузки нелинейного элемента R_1 , а кривая $i_2(E_- - u)$ называется нагрузочной кривой.

Задача определения рабочей точки нелинейной цепи с последовательным соединением двух сопротивлений особенно упрощается, если одно из сопротивлений, например R_2 , является линейным (рис. 5.13, а). В этом случае для определения рабочей точки нелинейного сопротивления R_1 необходимо найти точку пересечения ВАХ $i_1(u)$ этого сопротивления с нагрузочной прямой $i_2(E_- - u) = (E_- - u)/R_2$, проведенной через точку $u = E_-$ на оси напряжений и точку $i = E_-/R_2$ на оси токов (рис. 5.13, б). Аналогичным образом определяют рабочие точки управляемых нелинейных резистивных элементов.

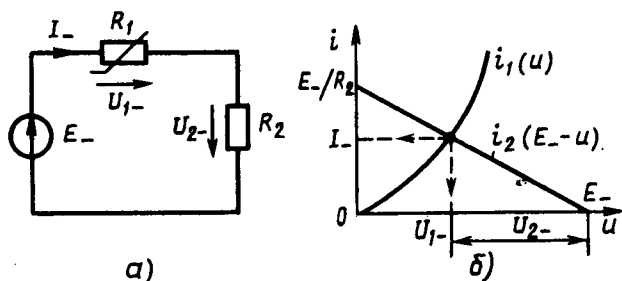


Рис. 5.13. Определение рабочей точки нелинейного сопротивления с линейной нагрузкой

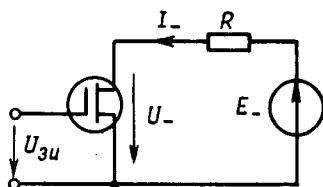


Рис. 5.14. К примеру 5.3

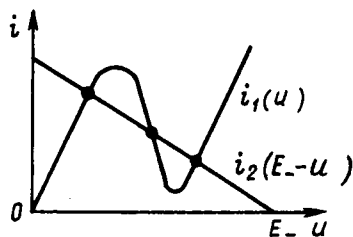


Рис. 5.15. К определению рабочих точек нелинейного сопротивления с немонотонной ВАХ

Пример 5.3. Определим ток стока I_- и напряжение сток-исток U_- полевого транзистора с изолированным затвором, входящего в электрическую цепь, схема которой приведена на рис. 5.14 ($R=2,5$ кОм, $E_-=20$ В, $U_{зи}=1$ В). Выходные ВАХ транзистора приведены на рис. 5.4, а.

Рабочая точка транзистора определяется пересечением ВАХ транзистора, соответствующей напряжению затвор-исток $U_{зи}=1$ В, и нагрузочной прямой, проведенной через точки $E_-=20$ В и $E_-/R=8$ мА (см. рис. 5.4, а). Искомые значения тока стока и напряжения сток-исток: $I_-=6,4$ мА, $U_-=4$ В.

Используя графические построения, можно убедиться, что в тех случаях, когда ВАХ нелинейного резистивного элемента монотонна, эта ВАХ пересекается с нагрузочной прямой только в одной точке, т. е. имеется единственная рабочая точка (единственное состояние равновесия).

Немонотонная ВАХ может пересекаться с нагрузочной прямой в нескольких точках (рис. 5.15), и, следовательно, нелинейный резистивный элемент с немонотонной ВАХ может иметь несколько рабочих точек (несколько состояний равновесия)*.

Если в состав сложной цепи, содержащей произвольное число источников энергии и линейных сопротивлений, входит только один нелинейный элемент, то для определения его рабочей точки можно воспользоваться теоремой об эквивалентном источнике. С этой целью нелинейный элемент выделяют из цепи, а оставшуюся ее часть представляют в виде линейного автономного двухполюсника АД (рис. 5.16, а). Заменяя двухполюсник последовательной схемой

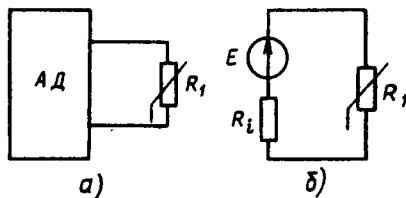


Рис. 5.16. К применению теоремы об эквивалентном источнике для анализа цепи с одним нелинейным элементом

*Более подробно вопросы, связанные с определением рабочих точек элементов с немонотонной ВАХ, в том числе с исследованием устойчивости состояний равновесия цепей с такими элементами, будут рассмотрены в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы».

замещения (рис. 5.16, б), задачу анализа сложной цепи сводят к рассмотренной ранее задаче определения рабочей точки нелинейного элемента с линейной нагрузкой (см. рис. 5.13, а).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ БЕЗЫНЕРЦИОННОГО НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗИСТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Графические методы позволяют определить реакцию произвольного безынерционного нелинейного элемента на заданное внешнее воздействие. Пусть $s(x)$ — ВАХ некоторого нелинейного сопротивления (рис. 5.17, а), причем x — величина, принятая в качестве внешнего воздействия, а s — величина, рассматриваемая как реакция нелинейного сопротивления на это воздействие. Построим на этом же рисунке зависимости внешнего воздействия $x=x(t)$ и реакции $s=s(t)$ от времени. График $x(t)$ расположим в нижней части рисунка так, чтобы ось x этого графика была параллельна оси x ВАХ, а ось времени — направлена вниз и являлась продолжением оси s графика $s(x)$. Зависимость $s=s(t)$ построим в правой части рисунка так, чтобы ось времени была направлена вправо и являлась продолжением оси x графика $s(x)$, а ось $s(t)$ была расположена параллельно оси s ВАХ.

Для определения реакций цепи на заданное внешнее воздействие необходимо для каждого момента времени t_1 выполнить следу-

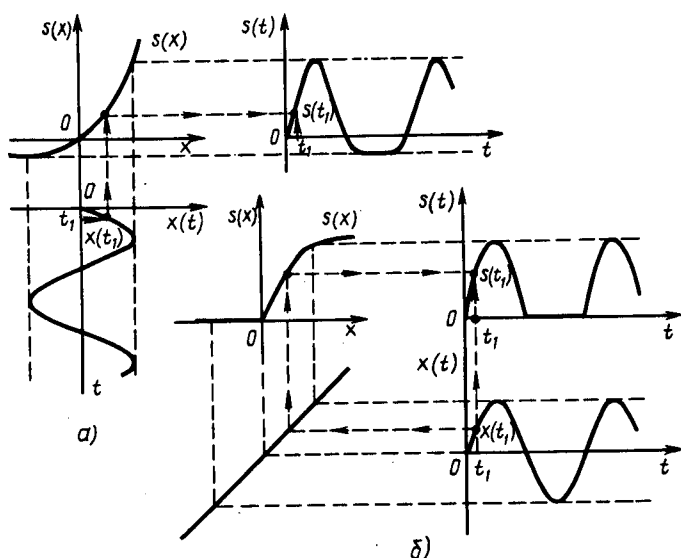


Рис. 5.17. К определению реакции безынерционного нелинейного резистивного элемента на заданное внешнее воздействие

ющие графические построения: по графику функции $x(t)$ найти мгновенное значение внешнего воздействия $x(t_1)$, затем по ВАХ определить соответствующее этому внешнему воздействию мгновенное значение реакции $s(t_1)$ и построить точку с ординатой $s(t_1)$ на графике $s=s(t)$. Очевидно, что при увеличении числа точек на временной оси, для которых выполняются такие построения, точность нахождения реакции элемента на заданное внешнее воздействие возрастает.

Недостатком рассмотренного приема является то, что графики $x(t)$ и $s(t)$ построены в разных местах чертежа, а это неудобно при определении взаимно соответствующих точек на временных осях и затрудняет сравнение формы кривых $x(t)$ и $s(t)$.

Этот недостаток может быть устранен, если график $x(t)$ построить непосредственно под графиком $s(t)$ (рис. 5.17, б). В этом случае линии, проецирующие точки графика $x=x(t)$ на ВАХ $s(x)$, перегинутся под углом 90° , причем точки перегиба расположатся на некоторой вспомогательной прямой, проведенной под углом 45° к координатным осям через точку пересечения оси s ВАХ и оси времени зависимости $x=x(t)$.

Как видно из рисунка, реакция нелинейной цепи на гармоническое воздействие в общем случае не является гармонической функцией времени.

Графические построения, приведенные на рис. 5.17, б, можно использовать и для решения обратной задачи — определения вида ВАХ безынерционного нелинейного резистивного элемента по известной реакции этого элемента на заданное внешнее воздействие.

Например, на рис. 5.18 показано, как с помощью описанных графических построений найти вид ВАХ нелинейных резистивных элементов, обеспечивающих двустороннее ограничение гармонических колебаний (рис. 5.18, а), однополупериодное (рис. 5.18, б) и двухполупериодное (рис. 5.18, в) выпрямление переменного тока.

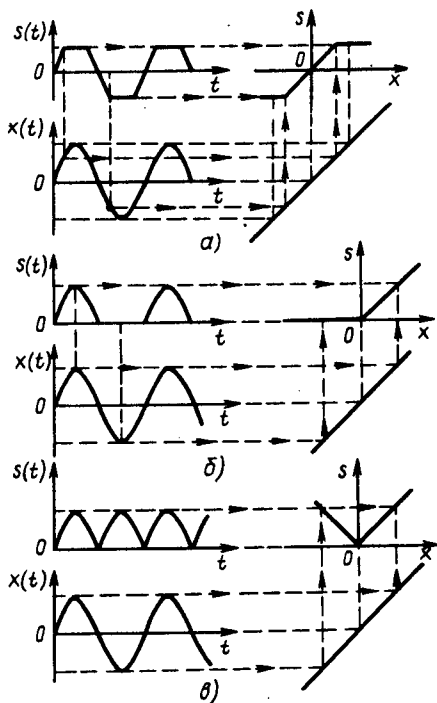


Рис. 5.18. К определению вида ВАХ по известной реакции безынерционного резистивного элемента на заданное внешнее воздействие

§ 5.3. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ

Вольт-амперные характеристики реальных элементов электрических цепей обычно имеют сложный вид и представляются в виде графиков или таблиц экспериментальных данных. В ряде случаев непосредственное применение ВАХ, задаваемых в такой форме, оказывается неудобным и их стремятся описать с помощью достаточно простых аналитических соотношений, хотя бы качественно отражающих характер рассматриваемых зависимостей. Замена сложных функций приближенными аналитическими выражениями называется аппроксимацией (от лат. *approximare* — приближаться).

Аналитические выражения, аппроксимирующие ВАХ нелинейных резистивных элементов, для повышения точности и достоверности анализа должны как можно более точно описывать ход реальных характеристик. Однако повышение точности аппроксимации приводит, как правило, к усложнению аппроксимирующих выражений, что затрудняет как определение значений входящих в эти выражения коэффициентов, так и применение этих выражений для анализа цепи. В связи с тем что характеристики однотипных нелинейных резистивных элементов отличаются друг от друга за счет производственного разброса параметров и погрешности измерений, нецелесообразно стремиться получить аппроксимирующие выражения, точность которых превышает точность определения характеристик отдельных элементов и пределы их производственного разброса.

Таким образом, *при решении задачи аппроксимации так же, как и при решении любой задачи, связанной с выбором расчетной модели, необходимо идти на компромисс между точностью и сложностью модели.*

Успешное решение задачи аппроксимации в значительной степени зависит от ширины аппроксимируемой области ВАХ, т. е. от диапазона, в котором могут изменяться токи и напряжения исследуемого элемента. Как правило, чем уже область аппроксимации, тем более простой функцией может быть описана соответствующая ВАХ.

Задача аппроксимации ВАХ включает в себя две самостоятельные задачи: выбор аппроксимирующей функции и определение значений входящих в эту функцию постоянных коэффициентов.

ВЫБОР АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Функцию, аппроксимирующую ВАХ какого-либо нелинейного резистивного элемента, выбирают либо исходя из физических представлений о работе данного элемента, либо чисто формально, ос-

новываясь на внешнем сходстве ВАХ с графическим изображением той или иной функции. Для аппроксимации ВАХ используют как элементарные, так и различные трансцендентные функции, а также степенные, экспоненциальные и тригонометрические полиномы и кусочно-линейные функции.

Так как внешнее сходство ВАХ с графическим изображением функции, выбранной в качестве аппроксимирующей, может оказаться обманчивым, перед тем, как перейти к определению значений коэффициентов соответствующей функции, желательно проверить возможность ее применения, используя *метод выравнивания*. Сущность этого метода заключается в том, что для проверки гипотезы о виде функциональной зависимости $s=s(x)$, заданной множеством значений $\{x_j, s_j\}$, переменные x и s заменяют некоторыми новыми переменными $X=f_1(x, s)$; $S=f_2(x, s)$, которые выбирают так, чтобы при сделанных допущениях о виде функции $s=s(x)$ переменные S и X были связаны между собой линейной зависимостью

$$S=K_1X+K_0. \quad (5.3)$$

Следовательно, если проверяемая гипотеза о виде функции $s=s(x)$ справедлива, то точки $\{X_j=f_1(x_j, s_j), S_j=f_2(x_j, s_j)\}$ должны располагаться на одной прямой.

Если предполагается, что заданная зависимость описывается степенной функцией

$$s=ax^b, \quad (5.4)$$

то, логарифмируя левую и правую части выражения (5.4) $\lg s=\lg a+b \lg x$, нетрудно прийти к выводу о том, что зависимость между вспомогательными переменными $S=\lg s$ и $X=\lg x$ должна иметь линейный характер:

$$S=\lg a+bX. \quad (5.5)$$

Если зависимость между величинами s и x аппроксимируется показательной функцией

$$s=ae^{bx}, \quad (5.6)$$

то линейной зависимостью

$$S=\ln a+(b \ln e)x=\ln a+bX \quad (5.7)$$

будут связаны между собой переменные $S=\ln s$ и $X=x$.

Для степенного полинома второй степени

$$s=a_0+a_1x+a_2x^2 \quad (5.8)$$

линейный вид должна иметь зависимость $S=\Delta s$ от $X=x$, где $\Delta s=s_j-s_{j-1}$ — разность значений функции $s(x)$, соответствующих двум соседним значениям аргумента x_j и x_{j-1} (предполагается, что значения аргумента образуют арифметическую прогрессию с шагом h).

Если заданная зависимость $s=s(x)$ аппроксимируется экспоненциальным полиномом вида

$$s = a e^{bx} + c, \quad (5.9)$$

то линейной зависимостью

$$S = \lg a + (b \lg e)X \quad (5.10)$$

должны быть связаны вспомогательные функции $S = \lg(s - c)$ и $X = x$. Для определения c выбирают три значения аргумента $x_1, x_2, x_3 = (x_1 + x_2)/2$ и соответствующие им три значения функции s_1, s_2, s_3 , которые затем подставляют в выражение

$$c = (s_1 s_2 - s_3^2) / (s_1 + s_2 - 2s_3). \quad (5.11)$$

Если при проверке гипотезы о виде аппроксимирующей функции методом выравнивания окажется, что зависимость между вспомогательными переменными X и S имеет линейный характер только в определенном диапазоне изменения X , то, следовательно, данная гипотеза справедлива только для этого диапазона изменения аргумента исследуемой функции $s_j(x_j)$.

Пример 5.4. На рис. 5.19, а изображена прямая ветвь ВАХ полупроводникового диода. Проверим, можно ли аппроксимировать эту характеристику полиномом второй степени (5.8).

Выбираем шаг изменения аргумента $h = 0,2$ В, рассчитываем значения вспомогательной переменной $S = \Delta s = y_j - y_{j-1}$, соответствующие выбранным значениям аргумента (рис. 5.19, б). Как видно из рисунка, зависимость S от X практически совпадает с линейной при изменении $X = x = u$ в пределах от 0 до 1 В. Следовательно, в этой области рассматриваемая ВАХ может быть аппроксимирована полиномом второй степени.

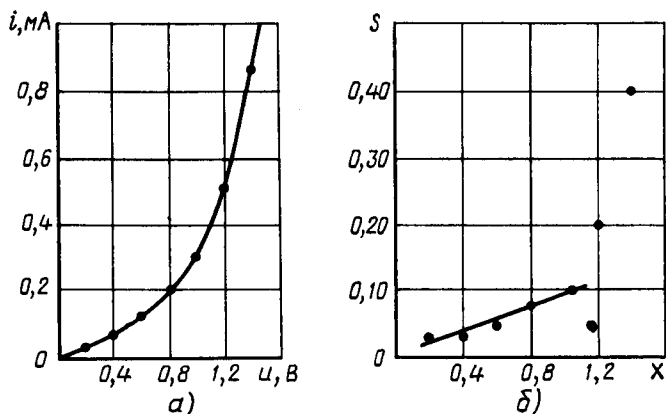


Рис. 5.19. К примеру 5.4

Пример 5.5. Проверим, можно ли аппроксимировать ВАХ диода (рис. 5.19, а) с помощью экспоненциального полинома вида (5.9).

Для определения константы c выберем три значения аргумента $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0,5$ и найдем соответствующие им значения функции: $s_1=0$, $s_2=0,3$ и $s_3=0,095$. Подставляя эти значения в выражение (5.11), получаем $c=-0,082$. Далее строим зависимость вспомогательной функции $S=\lg(s-c)$ от $X=x$ (рис. 5.20). Как видно из рисунка, в пределах от $X=0$ до $X=1$ зависимость $S(X)$ практически совпадает с линейной, следовательно, в этой области ВАХ может быть аппроксимирована экспоненциальным полиномом рассматриваемого типа.

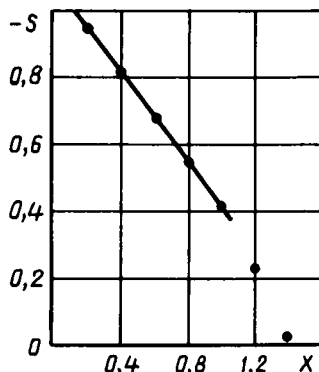


Рис. 5.20. К примеру 5.5

Из приведенных примеров следует, что задача выбора аппроксимирующей функции не имеет единственного решения.

Выбор той или иной функции во многом зависит от опыта и интуиции исследователя и в значительной степени определяется простотой нахождения коэффициентов функции и удобством ее применения для анализа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим кратко основные методы определения коэффициентов аппроксимирующей функции. Наиболее часто для этой цели используют *метод выбранных точек*, в соответствии с которым коэффициенты аппроксимирующей функции находят, исходя из совпадения значений этой функции со значениями аппроксимируемой функции в ряде заранее выбранных точек, называемых узлами интерполяции (от лат. *interpolare* — подновлять). Если для аппроксимации ВАХ, задаваемой множеством точек $\{x_j, s_j\}$, выбрана функция

$$s=s(x, a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (5.12)$$

имеющая $n+1$ неизвестных постоянных коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$, то для определения этих коэффициентов выбирают $n+1$ наиболее характерных точек ВАХ, лежащих в пределах рабочей области. Подставляя значения x_j и s_j в каждой из выбранных точек в выражение (5.12), получают систему из $n+1$ уравнений $s_j=s(x_j, a_0, a_1, \dots, a_n)$, решая которую находят неизвестные коэффициенты. Очевидно, что такой выбор коэффициентов действительно обеспечивает совпадение значений аппроксимируемой и аппроксимирующей функций в узлах интерполяции, однако в промежутках между ними погрешность аппроксимации может быть весьма существенной (информация о ходе аппроксимирующей функции в них не учитывается), что является недостатком этого метода.

где $X_1, S_1; X_2, S_2$ — координаты двух любых точек, через которые проходит данная прямая. Выбирая $X_1 = 0,2, S_1 = -0,95$ и $X_2 = 1, S_2 = -0,42$, получаем уравнение прямой в следующем виде:

$$S = 0,66X - 1,08.$$

Сравнивая это выражение с (5.10), находим соотношения для определения неизвестных значений коэффициентов a и b :

$$\lg a = -1,08; b \lg e = 0,66,$$

откуда $a = 0,082, b = 1,52$.

Таким образом, в диапазоне от 0 до 1 В данная ВАХ может быть аппроксимирована выражением

$$i = 0,082 (e^{1,52u} - 1) \text{ мА.}$$

На практике для аппроксимации характеристик нелинейных элементов в основном используют степенные полиномы

$$s = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (5.14)$$

и кусочно-линейные функции. Аппроксимация с помощью степенного полинома универсальна и позволяет повышать точность расчета путем увеличения степени полинома. Любые аппроксимирующие функции могут быть разложены в степенные ряды и приведены к виду (5.14). Поскольку сложность определения коэффициентов аппроксимирующей функции возрастает с увеличением числа членов полинома, для аппроксимации ВАХ обычно используют полиномы низких степеней.

Аппроксимация с помощью кусочно-линейных функций заключается в разбиении рабочей области аппроксимируемой функции на несколько участков (интервалов) и замене функции на каждом из них отрезком прямой. С увеличением числа интервалов точность аппроксимации возрастает, однако для упрощения анализа цепи желательно использовать кусочно-линейные функции с минимальным числом интервалов. Примеры кусочно-линейной аппроксимации ВАХ представлены на рис. 5.21.

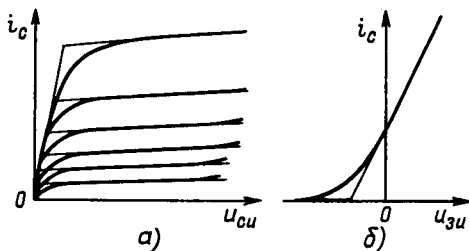


Рис. 5.21. Кусочно-линейная аппроксимация выходных (а) и проходных (б) характеристик полевого транзистора

АПРОКСИМАЦИЯ ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ОКРЕСТНОСТИ РАБОЧЕЙ ТОЧКИ

На практике часто приходится иметь дело с рабочей областью ВАХ настолько узкой, что можно считать, что изменение токов и напряжений происходит только в окрестности некоторой рабочей

точки. В таких случаях нет необходимости аппроксимировать ВАХ в широком диапазоне токов и напряжений, а достаточно ограничиться аппроксимацией лишь в окрестности выбранной рабочей точки.

Пусть ток и напряжение некоторого нелинейного резистивного элемента в рабочей точке равны i_p и u_p . Выражение для тока i этого элемента, соответствующее некоторому новому значению напряжения $u = u_p + \Delta u$, можно представить в виде ряда Тейлора:

$$i = i(u_p) + \frac{1}{1!} i'(u_p) \Delta u + \frac{1}{2!} i''(u_p) (\Delta u)^2 + \dots \quad (5.15)$$

Здесь $i(u_p) = i_p$ — значение тока в рабочей точке; $i'(u_p)$, $i''(u_p)$ — значения производных тока по напряжению в рабочей точке, определяемые либо по заданной функции $i = i(u)$, аппроксимирующей ВАХ в широком диапазоне токов и напряжений, либо по табличным значениям функции $i_j(u_j)$ с помощью формул численного дифференцирования:

$$i'(u_j) = \frac{i(u_{j+1}) - i(u_{j-1}))}{u_{j+1} - u_{j-1}};$$

$$i''(u_j) = \frac{i(u_{j+1}) - 2i(u_j) + i(u_{j-1}))}{(u_{j+1} - u_j)^2}.$$

Вводя обозначения $a_0 = i(u_p) = i_p$; $a_1 = \frac{1}{1!} i'(u_p)$; $a_2 = \frac{1}{2!} i''(u_p)$, ..., выражение (5.15) можно представить в виде полинома относительно приращения напряжения

$$i = a_0 + a_1 \Delta u + a_2 (\Delta u)^2 + \dots \quad (5.16)$$

Рассмотренная методика может быть использована и для аппроксимации ВАХ электрически управляемых нелинейных резистивных элементов. Пусть, например, ток нелинейного резистивного трехполосника (см. рис. 5.2) является функцией напряжений u и $u_{уп}$:

$$i = i(u, u_{уп}), \quad (5.17)$$

причем в рабочей точке $u = u_p$, $u_{уп} = u_{уп p}$ и $i = i_p = i(u_p, u_{уп p})$. Значения тока этого элемента при $u = u_p + \Delta u$ и $u_{уп} = u_{уп p} + \Delta u_{уп}$ могут быть найдены из разложения функции (5.17) в ряд Тейлора:

$$i = i(u_p + \Delta u, u_{уп p} + \Delta u_{уп}) = i_p + \frac{1}{1!} \left\{ \frac{\partial i}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial i}{\partial u_{уп}} \Delta u_{уп} \right\}_{\substack{u = u_p \\ u_{уп} = u_{уп p}}} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} (\Delta u)^2 + 2 \frac{\partial^2 i}{\partial u \partial u_{упр}} (\Delta u \Delta u_{упр}) + \frac{\partial^2 i}{\partial u_{упр}^2} (\Delta u_{упр})^2 \right\}_{u=u_p, u_{упр}=u_{упр p}} + \dots \quad (5.18)$$

Вводя обозначения

$$a_0 = i_p = i(u_p, u_{упр p}); \quad a_{11} = \frac{1}{1!} \frac{\partial i}{\partial u} \bigg|_{u=u_p, u_{упр}=u_{упр p}}; \\ a_{12} = \frac{1}{1!} \frac{\partial i}{\partial u_{упр}} \bigg|_{u=u_p, u_{упр}=u_{упр p}}; \quad a_{21} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} \bigg|_{u=u_p, u_{упр}=u_{упр p}}; \\ a_{22} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 i}{\partial u \partial u_{упр}} \bigg|_{u=u_p, u_{упр}=u_{упр p}}; \quad a_{23} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 i}{\partial u_{упр}^2} \bigg|_{u=u_p, u_{упр}=u_{упр p}}; \dots,$$

получаем выражение

$$i = a_0 + [a_{11} \Delta u + a_{12} \Delta u_{упр}] + [a_{21} (\Delta u)^2 + a_{22} (\Delta u \cdot \Delta u_{упр}) + a_{23} (\Delta u_{упр})^2] + \dots, \quad (5.19)$$

аппроксимирующее ВАХ управляемого нелинейного резистивного трехполусника в окрестности рабочей точки.

Как правило, при аппроксимации ВАХ нелинейных резистивных элементов в окрестности рабочей точки используются полиномы низких степеней, причем в большинстве случаев, когда приращения напряжений и токов весьма малы, можно ограничиться полиномом первой степени

$$i = a_0 + a_1 \Delta u \quad (5.20)$$

или

$$i = a_0 + [a_{11} \Delta u + a_{12} \Delta u_{упр}]. \quad (5.21)$$

Таким образом, ВАХ нелинейных резистивных элементов могут быть линеаризованы в окрестности выбранной рабочей точки.

§ 5.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

НЕЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ранее, при рассмотрении графических методов анализа нелинейных цепей, было показано, что реакция нелинейного резистивного элемента на гармоническое внешнее воздействие в общем случае не

является гармонической функцией времени. Так как графические методы анализа позволяют установить только качественное соответствие между видом ВАХ нелинейного резистивного элемента и реакцией этого элемента на заданное гармоническое воздействие, для получения количественных соотношений необходимо воспользоваться аналитическими методами.

Пусть ВАХ некоторого нелинейного сопротивления может быть аппроксимирована полиномом n -й степени

$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (5.22)$$

а внешнее воздействие $x = x(t)$ является гармонической функцией времени

$$x = X_m \cos \omega t. \quad (5.23)$$

Подставляя (5.23) в (5.22) и выражая слагаемые вида $a_k [X_m \cos \omega t]^k$ через гармонические функции кратных частот

$$\begin{aligned} a_2 [X_m \cos \omega t]^2 &= \frac{a_2 X_m^2}{2} [1 + \cos 2\omega t]; \\ a_3 [X_m \cos \omega t]^3 &= \frac{a_3 X_m^3}{4} [3 \cos \omega t + \cos 3\omega t]; \\ a_4 [X_m \cos \omega t]^4 &= \frac{a_4 X_m^4}{8} [3 + 4 \cos 2\omega t + \cos 4\omega t]; \\ a_5 [X_m \cos \omega t]^5 &= \frac{a_5 X_m^5}{16} [10 \cos \omega t + 5 \cos 3\omega t + \cos 5\omega t] \text{ и т. д.,} \end{aligned} \quad (5.24)$$

получаем

$$s = S_- + \sum_{k=1}^n S_{mk} \cos k\omega t, \quad (5.25)$$

где

$$\begin{aligned} S_- &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 X_m^2 + \frac{3}{8} a_4 X_m^4 + \frac{5}{16} a_6 X_m^6 + \dots; \\ S_{m1} &= a_1 X_m + \frac{3}{4} a_3 X_m^3 + \frac{5}{8} a_5 X_m^5 + \dots; \\ S_{m2} &= \frac{1}{2} a_2 X_m^2 + \frac{1}{2} a_4 X_m^4 + \frac{15}{32} a_6 X_m^6 + \dots; \\ &\vdots \\ S_{mn} &= \frac{1}{2^{n-1}} a_n X_m^n. \end{aligned}$$

Как следует из выражения (5.25), реакция нелинейного сопротивления на гармоническое внешнее воздействие определенной частоты ω представляет собой сумму постоянной составляющей S_- и гармонических составляющих (гармоник) с частотами, кратными частоте внешнего воздействия. Гармоническая составляющая, частота которой равна частоте внешнего воздействия ($k=1$), называется первой гармоникой, гармоническая составляющая, частота которой в два раза превышает частоту внешнего воздействия ($k=2$), — второй гармоникой и т. д. Номер высшей гармонической составляющей $k=n$ равен степени полинома n , аппроксимирующего ВАХ рассматриваемого нелинейного сопротивления. Амплитуда k -й гармоники S_{mk} зависит только от членов полинома k -й и более высоких степеней, причем амплитуды четных гармоник и постоянная составляющая определяются только членами полинома четных степеней, а амплитуды нечетных гармоник — членами полинома нечетных степеней. Следовательно, если ВАХ нелинейного сопротивления аппроксимируется четным полиномом, то реакция нелинейного сопротивления не будет содержать нечетных гармоник, а если ВАХ аппроксимируется нечетным полиномом, то реакция нелинейного сопротивления на гармоническое воздействие не будет содержать постоянной составляющей и четных гармоник. Выражение (5.25) иллюстрирует важнейшее свойство нелинейных цепей, заключающееся в том, что их реакция на гармоническое воздействие содержит колебания различных частот (в том числе и нулевой), т. е. нелинейная цепь выступает в роли генератора колебаний, частота которых отличается от частоты внешнего воздействия.

ПОНЯТИЕ О РЕЖИМАХ МАЛОГО И БОЛЬШОГО СИГНАЛА

Как следует из изложенного ранее, реакция безынерционного нелинейного резистивного элемента на гармоническое внешнее воздействие полностью определяется видом полинома, аппроксимирующего ВАХ рассматриваемого элемента. В свою очередь, степень аппроксимирующего полинома и его коэффициенты зависят от формы ВАХ элемента, а также от ширины и местоположения рабочей области ВАХ. На практике для выбора местоположения рабочей области ВАХ нелинейного резистивного элемента, находящегося под гармоническим внешним воздействием, на зажимы этого элемента наряду с гармоническим воздействием подают некоторое постоянное напряжение или постоянный ток, так называемые напряжение или ток смещения.

Пусть напряжение u на зажимах некоторого нелинейного сопротивления $R(u)$ содержит постоянную составляющую U_- (напряжение смещения) и переменную составляющую, изменяющуюся во времени по гармоническому закону:

$$\Delta u = U_m \cos \omega t. \quad (5.26)$$

Для определения тока сопротивления i воспользуемся выражением (5.16), аппроксимирующим ВАХ сопротивления в окрестности рабочей точки $u_p = U_-$. Подставляя (5.26) в (5.16) и используя формулы (5.24), (5.25), получаем

$$i = I_- + \sum_{k=1}^n I_{mk} \cos k\omega t, \quad (5.27)$$

здесь I_- — постоянная составляющая тока сопротивления; I_{m1} , I_{m2} , ..., I_{mn} — амплитуды 1, 2, ..., n -й гармоник, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} I_- &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \frac{5}{16} a_6 U_m^6 + \dots; \\ I_{m1} &= a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots; \\ I_{m2} &= \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \frac{15}{32} a_6 U_m^6 + \dots; \\ &\dots \dots \dots \\ I_{mn} &= \frac{1}{2^{n-1}} a_n U_m^n. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Рассмотрим случай, когда амплитуда переменной составляющей напряжения $U_m = 0$. Тогда ток через сопротивление будет иметь постоянное значение

$$I_-|_{U_m=0} = a_0 = i_p, \quad (5.29)$$

называемое током покоя.

Из определения статического сопротивления (см. § 1.2) следует, что ток покоя и напряжение смещения $u_p = U_-$ связаны между собой соотношением

$$i_p = u_p / R_{ст} = U_- / R_{ст}, \quad (5.30)$$

т. е. статическое сопротивление можно рассматривать как сопротивление нелинейного элемента постоянному току в выбранной рабочей точке.

Обратимся к так называемому режиму малого сигнала, при котором амплитуда переменной составляющей настолько мала, что в пределах рабочей области ВАХ может быть приближенно заменена отрезком прямой линии. Это означает, что в разложении (5.16) можно пренебречь всеми членами, содержащими Δi в степенях выше первой. Как следует из выражений (5.27), (5.28), ток нелинейного сопротивления в рассматриваемом режиме содержит две составляющие: постоянную I_- , равную току покоя, и переменную Δi , частота которой совпадает с частотой переменной составляющей приложенного напряжения:

$$\Delta i = I_{m1} \cos \omega t = a_1 U_m \cos \omega t. \quad (5.31)$$

Подставляя выражение (5.26) в (5.31) и используя определение дифференциального сопротивления (см. § 1.2), находим, что переменные составляющие тока и напряжения сопротивления связаны между собой соотношением

$$\Delta i = a_1 \Delta u = \Delta u / R_{\text{диф}}.$$

Таким образом, дифференциальное сопротивление нелинейного резистивного двухполюсного элемента можно рассматривать как сопротивление этого элемента для малых приращений, или, другими словами, как сопротивление переменному току в режиме малого сигнала.

Из выражений (5.29), (5.31) следует, что в режиме малого сигнала постоянная составляющая тока нелинейного сопротивления зависит только от постоянной составляющей приложенного напряжения, а амплитуда переменной составляющей тока прямо пропорциональна амплитуде переменной составляющей напряжения.

Следовательно, в режиме малого сигнала сопротивление ведет себя подобно линейному, а нелинейность его проявляется только в том, что значения $R_{\text{ст}}$ и $R_{\text{диф}}$ зависят от выбора рабочей точки.

Аналогичным образом определяется режим малого сигнала и для управляемых нелинейных резистивных элементов: ВАХ этих элементов в пределах рабочей области приблизительно заменяются отрезками прямых линий, а в разложениях вида (5.19) пренебрегают всеми членами, содержащими приращения токов или напряжений в степенях выше первой. Постоянные составляющие токов выводов управляемых нелинейных резистивных элементов в этом режиме равны токам покоя и не зависят от переменных составляющих токов и напряжений, в то время как амплитуды переменных составляющих токов и напряжений связаны между собой линейными зависимостями.

Пример 5.7. Найдем выражения для постоянной и переменной составляющих токов выводов полевого и биполярного транзисторов в режиме малого сигнала и построим схемы замещения этих элементов по переменному току.

На достаточно низких частотах ток стока полевого транзистора, включенного по схеме с общим истоком (рис. 5.22, а), определяется напряжениями затвор — исток $u_{\text{зш}}$ и сток — исток $u_{\text{сш}}$, а ток затвора равен нулю:

$$\begin{aligned} i_c &= i_c(u_{\text{зш}}, u_{\text{сш}}); \\ i_z &= 0. \end{aligned}$$

Раскладывая функцию двух переменных $i_c(u_{\text{зш}}, u_{\text{сш}})$ в ряд Тейлора при $u_{\text{зш}} = U_{\text{зш}} = u_{\text{зшр}}$, $u_{\text{сш}} = U_{\text{сш}} = u_{\text{сшр}}$ и отбрасывая члены ряда, содержащие приращения напряжений $\Delta u_{\text{зш}}$ и $\Delta u_{\text{сш}}$ в степенях выше первой, находим выражения для постоянной и переменной составляющих тока стока:

$$I_c = i_{cp} = i_c(U_{3u}, U_{cu});$$

$$\Delta i_c = S \Delta u_{3u} + G_i \Delta u_{cu},$$

где

$$S = \left. \frac{\partial i_c}{\partial u_{3u}} \right|_{u_{3u} = U_{3u}, u_{cu} = U_{cu}}$$

— крутизна полевого транзистора,

$$G_i = \left. \frac{\partial i_c}{\partial u_{cu}} \right|_{u_{3u} = U_{3u}, u_{cu} = U_{cu}}$$

— его внутренняя проводимость.

Полученные выражения в сочетании с ранее введенным условием $i_3 = 0$ позволяют построить схемы замещения полевого транзистора по постоянному (рис. 5.22, б) и переменному (рис. 5.22, в) току. Рассмотренная ранее схема замещения полевого транзистора (см. рис. 1.19, б) может быть получена из схемы, приведенной на рис. 5.22, в, если учесть межэлектродные емкости транзистора C_{3u} , C_{3c} , C_{cu} и опустить знак Δ в обозначениях переменных составляющих токов и напряжений.

Используя аналогичную методику, находим уравнения, связывающие между собой переменные составляющие напряжений и токов на зажимах биполярного транзистора, включенного по схеме с общей базой (рис. 5.22, г):

$$\Delta u_{3c} = \frac{\partial u_{3c}}{\partial i_3} \Delta i_3 + \frac{\partial u_{3c}}{\partial i_k} \Delta i_k;$$

$$\Delta u_{kc} = \frac{\partial u_{kc}}{\partial i_3} \Delta i_3 + \frac{\partial u_{kc}}{\partial i_k} \Delta i_k,$$

где все частные производные берутся в рабочей точке транзистора, т. е. при $i_3 = i_{3p}$, $i_k = i_{kp}$.

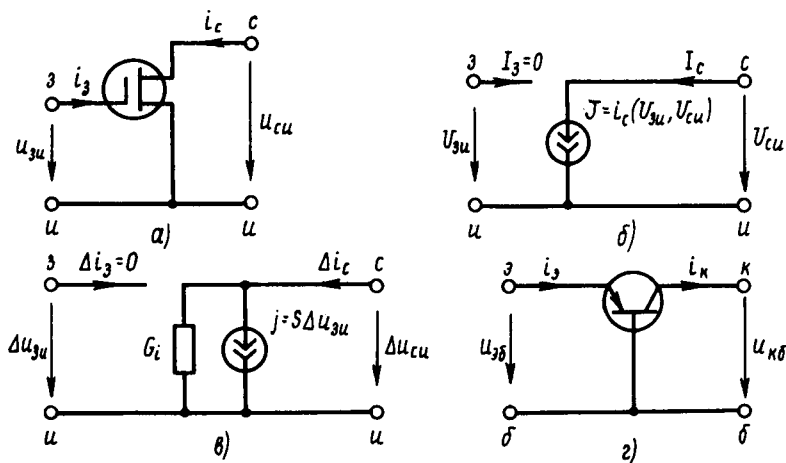


Рис. 5.22. К примеру 5.7

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{\text{зб}}}{\partial i_{\text{з}}} &= R_{\text{з}} + R_{\text{б}}; & \frac{\partial u_{\text{зб}}}{\partial i_{\text{х}}} &= -R_{\text{б}}; \\ \frac{\partial u_{\text{хб}}}{\partial i_{\text{з}}} &= R_{\text{м}} + R_{\text{б}}; & \frac{\partial u_{\text{хб}}}{\partial i_{\text{х}}} &= -(R_{\text{б}} + R_{\text{х}}),\end{aligned}$$

преобразуем полученную систему уравнений к следующему виду:

$$\begin{aligned}\Delta u_{\text{зб}} &= R_{\text{з}} \Delta i_{\text{з}} + R_{\text{б}} (\Delta i_{\text{з}} - \Delta i_{\text{х}}); \\ \Delta u_{\text{хб}} &= R_{\text{м}} \Delta i_{\text{з}} - R_{\text{х}} \Delta i_{\text{х}} + R_{\text{б}} (\Delta i_{\text{з}} - \Delta i_{\text{х}}).\end{aligned}$$

Этой системе уравнений соответствует схема замещения биполярного транзистора по переменному току, изображенная на рис. 1.19, а.

Анализ нелинейных резистивных цепей в режиме малого сигнала обычно выполняют в два этапа. На первом этапе анализируют нелинейную цепь по постоянному току, при этом все нелинейные резистивные элементы представляют схемами замещения по постоянному току (в частности, двухполюсные нелинейные резистивные элементы представляют статическими сопротивлениями). На втором этапе выполняют анализ цепи по переменному току и все элементы цепи заменяют схемами замещения по переменному току (двухполюсные нелинейные резистивные элементы представляются дифференциальными сопротивлениями). Окончательно реакцию цепи находят как суперпозицию решений, полученных в процессе анализа по постоянному и переменному току.

В режиме большого сигнала ВАХ нелинейного резистивного элемента в пределах рабочей области не может быть заменена отрезком прямой и в полиноме (5.16), аппроксимирующем ВАХ в окрестности рабочей точки, приходится учитывать члены, содержащие Δu в степенях выше первой. В этом случае, как следует из выражений (5.28), переменная составляющая тока включает в себя гармонические составляющие, частота которых кратна частоте переменной составляющей приложенного напряжения, постоянная составляющая тока отличается от тока покоя:

$$I_- = i_p + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots,$$

а амплитуда первой гармоники I_{m1} не прямо пропорциональна амплитуде переменной составляющей напряжения.

Таким образом, в режиме большого сигнала постоянная составляющая тока в амплитуды всех гармоник зависит как от напряжения смещения, так и от амплитуды переменной составляющей напряжения U_m , поэтому раздельное исследование цепи по постоянному и переменному току становится невозможным.

НЕЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Найдем реакцию нелинейного сопротивления на внешнее воздействие $x(t)$, представляющее собой сумму двух гармонических колебаний различных частот:

$$x(t) = X_{m1} \cos \omega_1 t + X_{m2} \cos \omega_2 t. \quad (5.32)$$

Пусть ВАХ нелинейного сопротивления аппроксимирована полиномом второй степени

$$s = a_1 x + a_2 x^2. \quad (5.33)$$

Подставляя (5.32) в (5.33) и выполняя очевидные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} s = s^{(1)} + s^{(2)} + a_2 X_{m1} X_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \\ + a_2 X_{m1} X_{m2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Здесь $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ — реакции рассматриваемого нелинейного сопротивления на воздействие каждой из составляющих $x(t)$ в отдельности:

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= \frac{1}{2} a_2 X_{m1}^2 + a_1 X_{m1} \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 X_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t; \\ s^{(2)} &= \frac{1}{2} a_2 X_{m2}^2 + a_1 X_{m2} \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 X_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Из выражений (5.34), (5.35) следует, что реакции нелинейного сопротивления на одновременное воздействие двух гармонических колебаний различных частот не равна сумме реакций на воздействие каждого из гармонических колебаний в отдельности и содержит помимо постоянной составляющей и гармонических составляющих с частотами ω_1 , ω_2 , $2\omega_1$, $2\omega_2$ колебания суммарной $\omega_1 + \omega_2$ и разностной $\omega_1 - \omega_2$ частот, которые называются колебаниями комбинационных частот.

Способность нелинейных резистивных элементов преобразовывать частоту воздействующих колебаний с образованием постоянной составляющей и колебаний кратных и комбинационных частот широко применяется на практике для построения различных радиотехнических устройств, таких, как преобразователи частоты, смесители, модуляторы и демодуляторы.

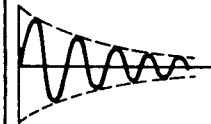
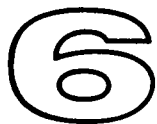
Если функционирование устройства не связано с использованием нелинейных преобразований воздействующих колебаний, то нели-

нейность ВАХ реальных элементов приводит к искажению формы воздействующих колебаний. Такие искажения называются **нелинейными**.

Количественно нелинейные искажения оцениваются с помощью **коэффициента гармоник**

$$k_T = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{A_1},$$

определяемого как отношение корня квадратного из суммы квадратов действующих значений всех гармонических составляющих $A_2, A_3, A_4, \dots$, кроме первой, к действующему значению первой (основной) гармоники A_1 .



Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами

§ 6.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ. ПОНЯТИЕ О КОММУТАЦИИ

Как отмечалось ранее, в установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей электрической цепи изменяются по периодическому закону или в частном случае сохраняют неизменные значения. Всякое изменение как топологии цепи, так и параметров входящих в нее элементов (подключение или отключение отдельных ветвей, изменение параметров пассивных элементов или параметров источников энергии) нарушает периодический характер изменения токов и напряжений ветвей, т. е. приводит к тому, что режим работы цепи становится неустановившимся. Любое скачкообразное изменение в цепи, нарушающее установившийся режим, будем называть коммутацией. Если внешнее воздействие на цепь и после коммутации имеет периодический характер, то с течением времени (теоретически через бесконечно большой промежуток времени) цепь перейдет в новый установившийся режим. Неустановившиеся процессы, которые имеют место в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются **переходными**.

При анализе переходных процессов в цепи, как правило, можно пренебречь длительностью процесса коммутации, т. е. считать, что коммутация осуществляется практически мгновенно. Начало отсчета времени переходного процесса обычно совмещают с моментом коммутации, причем через $t=0_-$ обозначают момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, а через $t=0_+$, или $t=0$, — момент времени, следующий непосредственно за коммутацией (начальный момент времени после коммутации).

Переходные процессы, связанные с изменением топологии цепи или различными коммутациями пассивных элементов, присущи в основном устройствам производства, передачи и преобразования электрической энергии.

Для радиотехнических устройств более характерен режим, ког-

да топология цепи и параметры пассивных элементов неизменны, а внешнее воздействие на цепь изменяется по произвольному (чаще всего непериодическому) закону.

При анализе неустановившихся процессов в радиотехнических цепях начало отсчета времени выбирают, исходя из постановки задачи, независимо от того, находилась ли цепь до этого момента времени в установившемся режиме или нет. Для единства терминологии начало отсчета времени неустановившихся процессов, имеющих место в радиотехнических цепях, обычно также называют моментом коммутации.

ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

Переход реальной электрической цепи от одного установившегося режима к другому не может происходить мгновенно, скачком. Это объясняется тем, что каждому установившемуся состоянию соответствует определенное значение энергии, запасенной в электрическом и магнитном полях. Скачкообразный переход от одного установившегося режима к другому потребовал бы скачкообразного изменения запасенной энергии, что, учитывая выражение (1.5), возможно только если источники энергии обладают бесконечно большой мощностью, т. е. отдаваемые ими токи или напряжения могут принимать бесконечно большие значения. В связи с тем что любой реальный источник энергии может отдавать только конечную мощность, суммарная энергия, запасенная в цепи, может изменяться только плавно, т. е. представляет собой непрерывную функцию времени.

Следовательно, возникновение переходных процессов при переходе электрической цепи от одного установившегося состояния к другому связано с тем, что энергия, запасенная реактивными элементами цепи, не может изменяться скачком, а изменяется только плавно, т. е. с конечной скоростью.

Отсюда следует, что в резистивной цепи (в цепи, не содержащей реактивных элементов) процесс перехода от одного установившегося состояния к другому должен происходить мгновенно. Таким образом, переходные процессы в безреактивных цепях отсутствуют. Очевидно, что такие цепи можно рассматривать только в качестве очень упрощенных моделей реальных цепей, поэтому в любой реальной цепи переход от одного установившегося режима к другому всегда сопровождается переходными процессами.

Как известно, энергия, запасенная реактивными элементами цепи, определяется токами индуктивностей и напряжениями емкостей. Исходя из того, что запасенная энергия является непрерывной функцией времени, приходим к заключению о непрерывности во времени токов индуктивностей и напряжений емкостей. Этот вывод имеет исключительно важное значение в теории цепей и формулируется в виде законов (правил) коммутации.

Первый закон коммутации:

в начальный момент времени после коммутации ток индуктивности сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), \quad (6.1)$$

а затем плавно изменяется начиная с этого значения.

Второй закон коммутации:

в начальный момент времени после коммутации напряжение на емкости сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad (6.2)$$

а затем плавно изменяется начиная с этого значения.

Законы коммутации не накладывают ограничений на характер изменения токов емкостей, напряжений индуктивностей и токов или напряжений сопротивлений, которые могут изменяться произвольным образом, в том числе и скачкообразно.

Как известно, в теории цепей рассматриваются процессы, имеющие место в идеализированных цепях при идеализированных внешних воздействиях. Применение чрезмерно упрощенных моделей элементов цепей и внешних воздействий может привести к нарушению предпосылок, использованных при формулировании законов коммутации, и вследствие этого к нарушению самих законов. Так, представляют интерес случаи, когда идеализированные источники энергии в течение бесконечно короткого промежутка времени могут отдавать бесконечно большой ток или напряжение, т. е. развивать бесконечно большую мощность. При таких внешних воздействиях законы коммутации нарушаются и токи индуктивностей или напряжения емкостей изменяются скачкообразно (см. § 6.5).

Законы коммутации могут не выполняться и при некоторых коммутациях, затрагивающих ветви, содержащие реактивные элементы. Коммутации такого типа называются **некорректными**. Анализ процессов в цепях при некорректных коммутациях производят с использованием принципов непрерывности потокосцепления и электрического заряда, которые имеют более общий характер, чем законы коммутации:

алгебраическая сумма потокосцеплений индуктивностей в любом замкнутом контуре электрической цепи и алгебраическая сумма зарядов емкостей, подключенных к любому узлу электрической цепи, являются непрерывными функциями времени

$$\sum \psi(0_+) = \sum \psi(0_-); \quad \sum q(0_+) = \sum q(0_-). \quad (6.3)$$

Следует подчеркнуть, что **некорректность коммутации возникает вследствие излишне упрощенного рассмотрения процесса ком-**

мутации или в результате применения чрезмерно упрощенных моделей элементов и может быть устранена при более строгом анализе.

Таким образом, термин «некорректная коммутация» является не вполне удачным: правильнее говорить не о некорректной коммутации, а о некорректной постановке задачи коммутации.

Пример 6.1. Рассмотрим процесс зарядки конденсатора от гальванического элемента. Если использовать последовательные схемы замещения конденсатора и источника энергии (рис. 6.1, а), то переключение ключа S из положения 1 в положение 2 (или наоборот) является корректной коммутацией.

Действительно, пусть в исходном состоянии ключ находится в положении 1 и емкость C полностью разряжена, а в момент времени $t=0$ ключ перебрасывается в положение 2. Если бы в результате коммутации напряжение на емкости возросло скачком, то в соответствии с компонентным уравнением емкости [см. (1.13)] ток цепи достиг бы бесконечно большого значения, а это привело бы к тому, что левая часть уравнения баланса напряжений для цепи, получающейся после коммутации, $u_C + (R_C + R_i)i = E$, не равнялась бы правой части.

Таким образом, предположение о том, что в цепи нарушается второй закон коммутации, приводит к явно неправильному результату. Следовательно, в начальный момент времени после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, а затем плавно увеличивается, стремясь в пределе к новому установившемуся значению, равному ЭДС источника напряжения (в установившемся режиме ток через емкость равен нулю, и из уравнения баланса напряжений следует, что $u_C = E$).

Если в исходном состоянии ключ находится в положении 2, а емкость C заряжена до напряжения E , то при перебросе ключа в положение 1 напряжение на емкости в начальный момент времени после коммутации сохраняет значение, которое было в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, напряжение на сопротивлении R_C изменяется скачком и становится равным $-u_C(0_+) = -E$, а ток сопротивления скачком возрастает до значения $-i_C(0_+) = -E/R_C$. Затем напряжение и ток емкости плавно уменьшаются, стремясь к нулю.

Если упростить схему замещения конденсатора и исключить из нее сопротивление потерь R_C (рис. 6.1, б), то перевод ключа из положения 1 в положение 2 будет по-прежнему оставаться корректной коммутацией, в то время как перевод ключа из положения 2 в положение 1 станет некорректной коммутацией (некорректность коммутации объясняется тем, что рассматриваемая схема замещения цепи не учитывает потерь энергии в конденсаторе и соединительных проводах, а также энергию, выделяющуюся вместе с искрой между контактами ключа. В зависимости от требуемой точности анализа необходимо либо принять, что напряжение на емкости

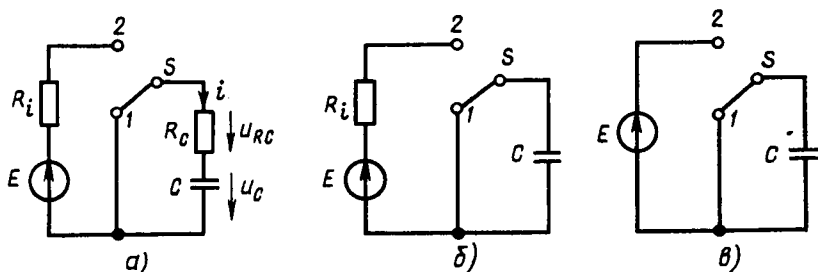


Рис. 6.1. К примеру 6.1

скачком изменилось от $u_C(0_-) = E$ до 0, либо применить более сложную схему замещения конденсатора, ключа и соединительных проводников).

Если и далее упрощать схему замещения цепи (исключив из нее внутреннее сопротивление источника R_0) (рис. 6.1, в), то перевод ключа из одного положения в другое всегда будет представлять собой некорректную коммутацию.

Пример 6.2. Рассмотрим идеализированную цепь (рис. 6.2). Пусть в исходном состоянии ключ S находится в положении 1, ток через индуктивность L_1 имеет постоянное значение $i_{L1}(0_-) = E/R$, а ток индуктивности L_2 — $i_{L2}(0_-) = 0$.

Если в момент времени $t = 0$ ключ S перебросить из положения 1 в положение 2, то индуктивности L_1 и L_2 окажутся включенными последовательно и их токи должны мгновенно уравниваться (для соблюдения баланса токов). Очевидно, что такая коммутация некорректна, причем начальное значение тока индуктивностей $i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = i_L(0_+)$ после коммутации может быть определено из принципа непрерывности потокосцепления: $L_1 i_{L1}(0_+) + L_2 i_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) i_L(0_+) = L_1 i_{L1}(0_-)$, откуда

$$i_L(0_+) = L_1 i_{L1}(0_-) / (L_1 + L_2) = L_1 E / [(L_1 + L_2) R].$$

При анализе такой цепи обычно принимается, что токи индуктивностей L_1 и L_2 скачком изменяются до уровня $i_L(0_+)$, а затем плавно увеличиваются (начиная с этого уровня) до установившегося значения $i_L = E/R$.

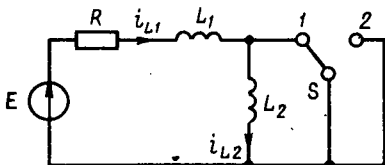
Можно убедиться, что энергия данной цепи непосредственно после коммутации

$$\begin{aligned} w_{L1}(0_+) + w_{L2}(0_+) &= (L_1 + L_2) i_L^2(0_+) / 2 = \\ &= L_1^2 E^2 / [2(L_1 + L_2) R^2] \end{aligned}$$

меньше энергии, запасенной в индуктивности L_1 до коммутации: $w_{L1}(0_-) = L_1 i_{L1}^2(0_-) / 2 = L_1 E^2 / 2R^2$, причем разность между этими величинами равна энергии коммутационных потерь, т. е. потерь, связанных с образованием дуги или искры между контактами. Рассмотренная коммутация может быть сделана корректной, если при анализе принять

во внимание конечное время коммутации, применять более точные модели индуктивных катушек, содержащие не только сопротивления потерь, но и паразитные емкости, и учесть явления, имеющие место в дуге между контактами. Разумеется, учет этих явлений существенно усложняет анализ.

Рис. 6.2. К примеру 6.2



ОБЩИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Задача анализа переходных процессов заключается в общем случае в определении мгновенных значений токов и напряжений всех или части ветвей электрической цепи в произвольный момент времени после коммутации. Для этого необходимо найти общее решение основной системы уравнений электрического равновесия цепи или системы уравнений электрического равновесия, составленной любым другим способом, при $t > 0$. Исключая из системы уравнений все неизвестные величины, кроме одной, получают дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно этой величины. Таким образом, задача анализа переходных процессов может быть сведена к решению дифференциального уравнения цепи при $t > 0$. В частности, задача анализа переходных процессов в линейной инвариантной во времени цепи с сосредоточенными параметрами

трами ν -го порядка сводится к нахождению общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения ν -го порядка вида (1.46).

Общее решение такого уравнения содержит ν произвольных постоянных, для нахождения которых необходимо задать значения искомой функции s и ее $\nu-1$ первых производных в начальный момент времени после коммутации, т. е. при $t=0_+$. Эти величины определяют с помощью законов коммутации на основании анализа процессов, имеющих место в цепи перед коммутацией. В результате анализа цепи до коммутации рассчитывают токи всех индуктивностей и напряжения всех емкостей в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации. Далее, используя законы коммутации (в более общем случае — принципы непрерывности потока сцепления и электрического заряда), находят токи индуктивностей и напряжения емкостей в начальный момент времени после коммутации. Очевидно, что для определения ν начальных условий требуется применить законы коммутации к ν независимо включенным реактивным элементам, т. е. ко всем реактивным элементам, включенным таким образом, что их энергетическое состояние может быть задано независимо. Совокупность начальных значений токов независимо включенных индуктивностей и напряжений независимо включенных емкостей представляет собой независимые начальные условия цепи. Используя независимые начальные условия и уравнения электрического равновесия цепи после коммутации, находят зависимые начальные условия, т. е. токи и напряжения любых ветвей и их производные в момент времени $t=0_+$.

Если энергия, запасенная в цепи в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, равна нулю, то цепь анализируется при нулевых начальных условиях. Если начальный запас энергии не равен нулю, то цепь анализируется при ненулевых начальных условиях (в первом случае все независимые начальные условия равны нулю, во втором хотя бы одно из них имеет ненулевое значение).

Следует обратить внимание на то, что независимые начальные условия, а следовательно, токи и напряжения ветвей цепи после коммутации определяются исходя из энергетического состояния цепи только в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ($t=0_-$), и не зависят от характера процессов, имеющих место в цепи до коммутации (при $t<0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА СЛОЖНОСТИ ЦЕПИ

В некоторых случаях порядок сложности электрической цепи ν желательно выяснить еще до составления уравнений электрического равновесия. Очевидно, что значение ν не может превышать общего числа реактивных элементов цепи p_{LC} .

Если в цепи имеется *емкостный контур*, т. е. контур, образованный только емкостями или емкостями и независимыми источниками напряжения, то напряжение любой из емкостей такого контура может быть выражено через напряжения других емкостей с помощью уравнения баланса напряжений, составленного для данного емкостного контура. Таким образом, наличие в цепи емкостного контура уменьшает на единицу число независимо включенных емкостей и снижает порядок сложности цепи. Частный случай емкостного контура представляют собой две параллельно включенные емкости, которые при определении порядка сложности цепи можно заменить одной эквивалентной емкостью. В то же время энергетическое состояние двух и более последовательно включенных емкостей, не входящих в емкостный контур, можно задать независимо, поэтому каждая из таких емкостей должна учитываться при подсчете v (см. пример 1.11).

Число независимо включенных реактивных элементов снижается и при наличии в цепи *индуктивного сечения*, т. е. сечения, в которое входят только индуктивности или индуктивности и независимые источники тока. Частным случаем индуктивного сечения является индуктивный узел (узел, к которому подключены только индуктивности или индуктивности и независимые источники тока). Ток, а следовательно, и энергия любой из индуктивностей, входящей в индуктивное сечение, могут быть выражены через токи других индуктивностей на основании уравнений баланса токов, составленного для данного сечения. Две последовательно включенные индуктивности образуют индуктивное сечение, поэтому при подсчете v их можно заменить одной.

Если в состав цепи входит несколько емкостных контуров или индуктивных сечений, то при оценке числа независимо включенных реактивных элементов учитывают только независимые емкостные контуры и независимые индуктивные сечения, т. е. такие контуры и сечения, уравнения баланса напряжений и токов которых независимы.

Таким образом, порядок сложности линейной цепи, составленной только из идеализированных пассивных элементов и независимых источников тока или напряжения,

$$v = p_{LC} - n_{\text{ек}} - q_{\text{ис}}, \quad (6.4)$$

где p_{LC} — число реактивных элементов; $n_{\text{ек}}$ — число независимых емкостных контуров; $q_{\text{ис}}$ — число независимых индуктивных сечений.

Следует отметить, что при определении порядка сложности цепи v не учитываются емкостные сечения и индуктивные контуры — топологические особенности такого типа не приводят к уменьшению числа независимо включенных реактивных элементов. Отметим также, что соотношение (6.4) получено в предположении, что ком-

понентные уравнения элементов не вносят дополнительных зависимостей между напряжениями различных емкостей или токами различных индуктивностей. Это условие всегда выполняется для цепей, составленных из пассивных двухполюсных элементов и независимых источников тока или напряжения, однако оно может не выполняться для цепей, содержащих управляемые источники. В этом случае выражение (6.4) позволяет оценить только максимально возможное значение порядка сложности цепи.

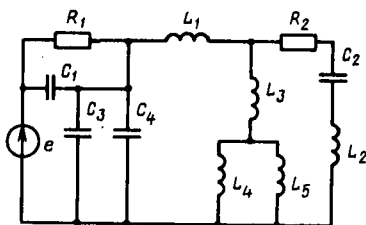


Рис. 6.3. К примеру 6.3

Пример 6.3. Определим порядок сложности цепи, схема которой приведена на рис. 6.3.

Общее число реактивных элементов цепи $p_{LC}=9$, в цепи имеются два емкостных контура $\{C_1, C_3, e\}$, $\{C_3, C_4\}$ и два индуктивных сечения $\{L_1, L_2, L_3\}$, $\{L_3, L_4, L_5\}$. Порядок сложности цепи $\nu = p_{LC} - n_{\text{ек}} - n_{\text{ис}} = 9 - 2 - 2 = 5$.

§ 6.2. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Классический метод анализа переходных процессов в линейных инвариантных во времени цепях с сосредоточенными параметрами основан на классическом методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [см. (1.46)]

$$a_v \frac{d^v s}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} s}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = f(t)$$

равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения

$$a_v \frac{d^v s}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} s}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = 0, \quad (6.5)$$

которое получается из (1.46) при $f(t)=0$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения (6.5) характеризует так называемые **свободные процессы** в цепи, т. е.

процессы в цепи после коммутации в отсутствие внешних источников энергии [напомним, что функция $f(t)$ обращается в нуль при выключении всех независимых источников тока и напряжения].

Таким образом, *характер свободных процессов не зависит от вида внешнего воздействия на цепь, а определяется только параметрами пассивных элементов и линейно управляемых источников, а также топологией цепи после коммутации.*

Свободные процессы в цепи протекают за счет разности энергий, соответствующих установившимся режимам работы цепи до и после коммутации. В связи с тем что эта разность имеет конечное значение, свободные процессы в цепях с потерями с течением времени затухают (в идеализированных цепях без потерь свободные процессы имеют незатухающий характер).

Частное решение уравнения (1.46) определяет **вынужденный режим** работы цепи, т. е. режим, задаваемый действующими в цепи независимыми источниками энергии. Так как при анализе переходных процессов внешнее воздействие на цепь после коммутации изменяется по периодическому закону или сохраняет неизменное значение, в качестве частного решения (1.46) обычно выбирается установившееся значение реакции цепи s после коммутации.

Очевидно, что *вынужденная составляющая не зависит от режима работы цепи до коммутации и, следовательно, от начальных значений токов и напряжений.*

Таким образом, при использовании классического метода анализа переходных процессов искомая реакция цепи s (ток или напряжение какой-либо ветви после коммутации) представляется в виде суммы свободной $s_{св}$ и вынужденной (принужденной) $s_{вын}$ составляющих:

$$s = s_{св} + s_{вын}.$$

Для определения вынужденной составляющей реакции цепи можно воспользоваться рассмотренными ранее методами анализа линейных цепей в установившемся режиме. Если после коммутации токи независимых источников тока и напряжения независимых источников напряжения не изменяются, то с течением времени в цепи после коммутации установится режим постоянного тока. Очевидно, что в этом случае вынужденная составляющая реакции цепи будет являться постоянным током или напряжением.

Если после коммутации цепь находится под гармоническим воздействием определенной частоты, то вынужденная составляющая реакции цепи также будет гармонической функцией времени и для расчета $s_{вын}$ можно воспользоваться методом комплексных амплитуд.

Если цепь после коммутации находится под воздействием нескольких источников гармонических колебаний различной частоты, то, используя принцип наложения, мгновенное значение $s_{вын}$ можно

определить как сумму мгновенных значений частичных токов или напряжений, вызванных в установившемся после коммутации режиме каждым источником в отдельности. Применяя принцип наложения, можно найти вынужденную составляющую реакции цепи и в том случае, когда внешнее воздействие на цепь $x(t)$ описывается периодической функцией более сложного вида, удовлетворяющей условиям Дирихле, т. е. имеющей на конечном интервале конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов первого рода. При этом функция $x(t)$ может быть разложена в ряд Фурье (представлена в виде суммы гармонических колебаний кратных частот), а мгновенное значение $s_{\text{вн}}$ может быть получено как сумма мгновенных значений частичных токов или напряжений, вызванных в установившемся после коммутации режиме каждой из гармонических составляющих внешнего воздействия в отдельности.

Для определения свободной составляющей $s_{\text{св}}$ реакции цепи необходимо найти ν корней p_i характеристического уравнения

$$a_\nu p^\nu + a_{\nu-1} p^{\nu-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (6.6)$$

соответствующего однородному уравнению (6.5). Когда все корни уравнения (6.6) простые (различные), свободная составляющая реакции имеет вид

$$s_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_\nu e^{p_\nu t} = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{p_i t}, \quad (6.7)$$

т. е. каждому простому корню p_i соответствует слагаемое свободной составляющей вида $s_{\text{св}}^{(i)} = A_i e^{p_i t}$, где A_i — постоянная интегрирования.

Если какой-либо корень p_k характеристического уравнения (6.6) имеет кратность n , то этому корню соответствует слагаемое свободной составляющей вида

$$s_{\text{св}}^{(k)} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_n t^{n-1}) e^{p_k t} = e^{p_k t} \sum_{j=1}^n A_j t^{j-1}. \quad (6.8)$$

Характеристическое уравнение (6.6) может иметь вещественные или комплексно-сопряженные корни, причем все корни p_i характеристического уравнения линейной цепи, составленной из идеализированных пассивных элементов и независимых источников энергии, расположены в левой полуплоскости комплексного переменного p (включая и мнимую ось): $\text{Re}[p_i] \leq 0$, так как только в этом случае свободные процессы в цепи имеют затухающий (точнее, не нарастающий) характер.

ПОРЯДОК АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Наметим основные этапы классического метода анализа переходных процессов в линейных инвариантных во времени цепях с сосредоточенными параметрами.

Анализ цепи до коммутации. В результате этого анализа определяют токи индуктивностей и напряжения емкостей в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ($t=0_-$).

Определение независимых начальных условий. Независимые начальные условия представляют собой токи индуктивностей и напряжения емкостей в момент времени ($t=0_+$). Независимые начальные условия находят с помощью законов коммутации или принципов непрерывности потокоцепления и электрического заряда.

Составление дифференциального уравнения цепи после коммутации (при $t \geq 0$). Дифференциальное уравнение цепи получают из системы уравнений электрического равновесия цепи, составленной любым методом, путем исключения всех неизвестных величин, кроме одной, представляющей собой ток или напряжение какой-либо ветви.

Анализ установившегося процесса в цепи после коммутации. В результате анализа установившегося процесса в цепи после коммутации находят вынужденную составляющую реакции цепи (частное решение дифференциального уравнения цепи).

Определение свободной составляющей реакции цепи. На этом этапе составляют характеристическое уравнение цепи, находят его корни и определяют общий вид свободной составляющей реакции цепи (общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению цепи после коммутации).

Нахождение общего вида реакции цепи. Общий вид реакции цепи (общее решение дифференциального уравнения цепи) находят путем суммирования свободной и вынужденных составляющих реакции цепи.

Определение постоянных интегрирования. Постоянные интегрирования находят по зависимым начальным условиям (значениям искомых токов или напряжений и их $v-1$ первых производных в начальный момент времени после коммутации). Для определения зависимых начальных условий используют независимые начальные условия и уравнения электрического равновесия цепи при $t=0_+$.

Определение реакции цепи, соответствующей заданным начальным условиям. Подставляя постоянные интегрирования в общее решение дифференциального уравнения цепи после коммутации, находят частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, т. е. искомый ток или напряжение одной из ветвей при $t > 0$.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RC -ЦЕПИ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ ИЗМЕНЕНИИ ЭДС

Рассмотрим переходные процессы в последовательной RC -цепи (рис. 6.4, *а*) при скачкообразном изменении ЭДС идеализированного источника постоянного напряжения:

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0; \\ E_2 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Такое изменение ЭДС источника напряжения происходит, например, когда в цепи, схема которой приведена на рис. 6.4, *б*, ключ S в момент времени $t=0$ перебрасывают из положения 1 в положение 2. Очевидно, что в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, напряжение на емкости равнялось напряжению на зажимах источника энергии при $t < 0$ (предполагается, что до коммутации цепь находилась в установившемся режиме). Исполни-

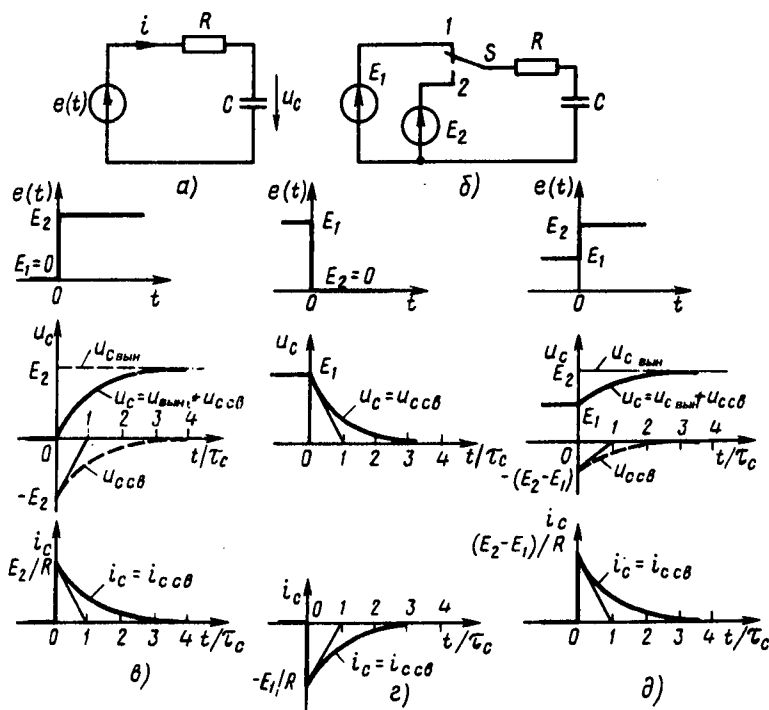


Рис. 6.4. К исследованию переходных процессов в последовательной RC -цепи:

а, б — схемы цепи; *в* — переходные характеристики цепи при $E_1 = 0$; *г* — переходные характеристики цепи при $E_2 = 0$; *д* — переходные характеристики цепи при $E_2 - E_1 > 0$

зую второй закон коммутации, находим единственное независимое начальное условие:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E_1. \quad (6.9)$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи можно составить относительно любой из неизвестных величин (напряжения на сопротивлении u_R , напряжения на емкости u_C , тока сопротивления i_R , тока емкости i_C), однако, учитывая, что для данной цепи известно начальное значение напряжения на емкости, целесообразно составить уравнение относительно этого напряжения.

Исключая из основной системы уравнений электрического равновесия цепи при $t \geq 0$

$$u_R + u_C = E_2;$$

$$i_C = i_R = i;$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt};$$

$$u_R = Ri_R$$

все неизвестные величины, кроме u_C , получаем

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2.$$

Напряжение на емкости при $t \geq 0$ представим в виде суммы вынужденной и свободной составляющих

$$u_C = u_{C \text{ вкл}} + u_{C \text{ св}}. \quad (6.10)$$

Очевидно, что с течением времени после коммутации в цепи должен установиться режим постоянного тока, причем установившееся значение тока емкости равно нулю (сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико), а установившееся значение напряжения емкости — напряжению источника энергии после коммутации. Таким образом, вынужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C \text{ вкл}} = E_2. \quad (6.11)$$

Характеристическое уравнение цепи $RCp + 1 = 0$ имеет единственный корень

$$p_1 = -1/(RC) = -1/\tau_C,$$

где $\tau_C = RC$ — постоянная времени последовательной RC -цепи, поэтому свободная составляющая напряжения на емкости $u_{C \text{ св}}$ содержит один экспоненциальный член:

$$u_{C \text{ св}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau_C}. \quad (6.12)$$

Используя выражения (6.10) — (6.12), находим напряжение на емкости после коммутации при произвольных начальных условиях:

$$u_c = E_2 + A_1 e^{-t/\tau_c}. \quad (6.13)$$

Для определения постоянной интегрирования A_1 воспользуемся независимым начальным условием (6.9). Полагая в (6.13) $t=0$, $u_c = u_c(0_+) = E_1$, получаем $E_1 = E_2 + A_1$, откуда $A_1 = E_1 - E_2$.

Таким образом, при заданных начальных условиях напряжение на емкости после коммутации ($t \geq 0$) описывается выражением

$$u_c = E_2 - (E_2 - E_1) e^{-t/\tau_c}. \quad (6.14)$$

Зависимость напряжения на емкости от времени при различных соотношениях между E_1 и E_2 показана на рис. 6.4, $\vartheta - \delta$, здесь же дана зависимость от времени тока емкости i_c , которая при $t \geq 0$ определяется путем дифференцирования выражения (6.14) по времени и умножения результата на C :

$$i_c = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-t/\tau_c}. \quad (6.15)$$

Как видно из рис. 6.4, $\vartheta - \delta$, в начальный момент после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и до коммутации, а затем плавно изменяется, стремясь в пределе к E_2 . Ток емкости в начальный момент скачком изменяется от нуля до начального значения:

$$i_c(0_+) = (E_2 - E_1)/R, \quad (6.16)$$

а затем плавно уменьшается, стремясь к нулю. В связи с тем что установившееся значение тока емкости до и после коммутации равно нулю, ток рассматриваемой цепи содержит только свободную составляющую.

Анализ выражения (6.16) показывает, что начальное значение тока емкости $i_c(0_+)$ численно равно постоянному току, который протекал бы в цепи после коммутации, если бы емкость C была заменена идеальным источником напряжения E_1 .

Следовательно, в начальный момент времени после коммутации емкость ведет себя подобно источнику напряжения, ЭДС которого равна начальному значению напряжения на емкости. Если начальное значение напряжения на емкости равно нулю, то в начальный момент после коммутации ветвь с емкостью можно считать короткозамкнутой, т. е. сопротивление емкости при $t=0_+$ равно нулю.

Далее (см. пример 6.4) будет показано, что в начальный момент времени после коммутации индуктивность ведет себя подобно источнику тока, ток которого равен начальному значению тока через индуктивность. При $i_L(0_-) = 0$ ветвь с индуктивностью в начальный

момент времени можно считать разомкнутой, т. е. сопротивление индуктивности при $t=0_+$ имеет бесконечно большое значение.

Как следует из выражений (6.12) и (6.15), скорость затухания свободных составляющих тока и напряжения емкости не зависит от значений ЭДС идеализированного источника напряжения до и после коммутации, а определяется только *постоянной времени цепи* τ_c , которая численно равна *промежутку времени, в течение которого свободные составляющие тока и напряжения уменьшаются в $e \approx 2,718$ раз*. Можно показать, что при любом $t \geq 0$

$$\tau_c = \left| \frac{u_{C\text{св}}}{du_{C\text{св}}/dt} \right| = \left| \frac{i_{C\text{св}}}{di_{C\text{св}}/dt} \right|.$$

Таким образом, постоянная времени рассматриваемой цепи численно равна длине подкасательной к кривой $u_{C\text{св}}$ или $i_{C\text{св}}$ при любом значении $t \geq 0$, т. е. длине отрезка временной оси, заключенного между какой-либо точкой $t=t_1 \geq 0$ и точкой пересечения временной оси касательной, проведенной к кривой $u_{C\text{св}}$ или $i_{C\text{св}}$ в точке $u_{C\text{св}}(t_1)$ или $i_{C\text{св}}(t_1)$. Для определения постоянной времени цепи касательную к кривым $i_{C\text{св}}$ или $u_{C\text{св}}$ наиболее удобно проводить при $t_1=0$. В этом случае она пересекает ось времени в точке $t=\tau_c$ (рис. 6.4, в — δ).

Чем больше постоянная времени цепи, тем медленнее затухают свободные составляющие токов и напряжений, а следовательно, токи и напряжения цепи медленнее приближаются к установившимся значениям.

Теоретически процесс установления нового режима длится бесконечно долго. Однако, учитывая, что к моменту времени, равному $3\tau_c$ после коммутации, свободные составляющие уменьшаются до уровня менее 0,05 от начального значения, а к моменту времени, равному $5\tau_c$, — до уровня менее 0,01 от начального значения, переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися через промежуток времени $(3 - 5)\tau_c$ после коммутации.

ПОДКЛЮЧЕНИЕ К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RL -ЦЕПИ ИСТОЧНИКА ГАРМОНИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим переходные процессы в последовательной RL -цепи, содержащей идеализированный источник, ЭДС которого изменяется во времени по закону:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E_m \cos(\omega t + \psi) & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Временная диаграмма $e(t)$ при $\psi > 0$ приведена на рис. 6.5, а.

В этом случае ток индуктивности в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, $i_L(0_-) = 0$.

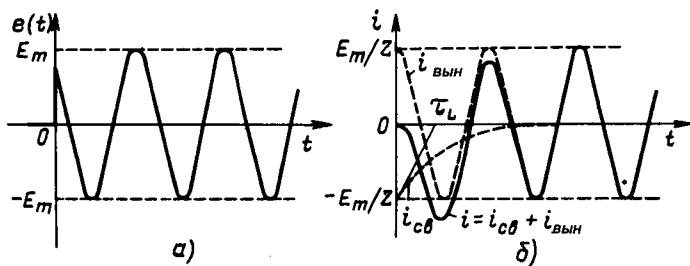


Рис. 6.5. К исследованию переходных процессов при включении источника гармонического напряжения в последовательную RL -цепь

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно тока $i=i_L$, при $t \geq 0$ имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \cos(\omega t + \psi). \quad (6.18)$$

Вынужденная составляющая тока может быть найдена с помощью метода комплексных амплитуд:

$$i_{\text{вын}} = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

где $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L/R)$ — модуль и аргумент комплексного входного сопротивления цепи.

Характеристическое уравнение цепи

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень $p_1 = -R/L$, поэтому свободная составляющая тока содержит один экспоненциальный член:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-t/\tau_L},$$

где $\tau_L = L/R$ — постоянная времени последовательной RL -цепи.

Суммируя свободную и вынужденную составляющие, находим общее решение дифференциального уравнения цепи (6.18) после коммутации:

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{-t/\tau_L}. \quad (6.19)$$

Для определения постоянной интегрирования A_1 воспользуемся первым законом коммутации, в соответствии с которым начальное значение тока рассматриваемой цепи должно равняться нулю:

$$i(0_+) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (6.20)$$

Подставляя (6.20) в выражение (6.19), получаем

$$\frac{E_m}{z} \cos(\psi - \varphi) + A_1 = 0, \text{ откуда}$$

$$A_1 = -\frac{E_m}{z} \cos(\psi - \varphi). \quad (6.21)$$

С учетом (6.21) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{E_m}{z} [\cos(\psi - \varphi)] e^{-t/\tau_L}.$$

Характер переходных процессов зависит от соотношения между начальной фазой ψ ЭДС идеализированного источника напряжения и аргументом φ входного сопротивления цепи. Если ψ выбирают таким образом, что начальные значения вынужденной $i_{\text{вын}}(0_+)$ и свободной $i_{\text{св}}(0_+)$ составляющих равны нулю ($\psi = \varphi \pm \pi/2$), то свободная составляющая тока тождественно равна нулю. Переходные процессы в цепи в этом случае отсутствуют, т. е. установившийся режим наступает сразу же после коммутации. При $\psi = \varphi$ или $\psi = \varphi \pm \pi$ начальные значения свободной и принужденной составляющих максимальны, и отличие в форме кривых $i = i(t)$ и $i_{\text{пр}} = i_{\text{пр}}(t)$ выражено наиболее резко (рис. 6.5, б).

Как и для последовательной RC -цепи, скорость затухания свободной составляющей тока последовательной RL -цепи не зависит от характера внешнего воздействия, а определяется только постоянной времени τ_L . За промежуток времени $t = \tau_L$ свободная составляющая тока уменьшается в e раз и к моменту времени $t = (3 \div 5)\tau_L$ после коммутации переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися.

ПОДКЛЮЧЕНИЕ К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RLC -ЦЕПИ ИСТОЧНИКА ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ*

Последовательная RLC -цепь содержит два независимо включенных реактивных элемента, поэтому процессы в ней описываются дифференциальным уравнением второго порядка, а для определения постоянных интегрирования необходимо задать два независи-

*Приведенные здесь результаты легко использовать для анализа переходных процессов в одиночном колебательном контуре. Так как свободные составляющие тока и напряжения контура определяются при выключенных источниках энергии, нетрудно заключить, что характер свободных процессов в одиночном колебательном контуре не зависит от способа подключения контура к источнику энергии, т. е. от того, является ли данный одиночный контур последовательным или параллельным.

мых начальных условия. Если ЭДС идеального источника напряжения изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E = \text{const} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

то независимые начальные условия цепи имеют нулевые значения

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (6.22)$$

Составим уравнение электрического равновесия цепи по методу токов ветвей для $t \geq 0$:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E. \quad (6.23)$$

Дифференцируя правую и левую части (6.23), получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи после коммутации:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (6.24)$$

Для определения единственного решения этого уравнения, соответствующего заданному режиму работы цепи до коммутации, необходимо найти начальные значения тока цепи и его первой производной по времени. Начальное значение тока цепи совпадает с начальным значением тока индуктивности:

$$i(0_+) = i_L(0_+) = 0, \quad (6.25)$$

а начальное значение первой производной тока цепи по времени может быть найдено с использованием независимых начальных условий (6.22) и уравнения электрического равновесия цепи (6.23) при $t = 0_+ = 0$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{L}. \quad (6.26)$$

В связи с тем что установившееся значение тока этой цепи после коммутации равно нулю, ток при $t \geq 0$ содержит только свободную составляющую: $i = i_{\text{св}}$.

Характеристическое уравнение последовательной RLC -цепи

$$Lp^2 + Rp + 1/C = 0 \quad (6.27)$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (6.28)$$

где $\delta = R/(2L)$ — коэффициент затухания; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота цепи. В зависимости от соотношения между величинами ω_0 и δ , или, что то же самое, в зависимости от добротности цепи,

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

корни характеристического уравнения (6.27) могут быть вещественными различными, комплексно-сопряженными или вещественными одинаковыми (кратными). Рассмотрим каждый из этих случаев.

Вещественные различные корни. При малой добротности последовательной RLC -цепи ($Q < 1/2$, т. е. $R > 2\rho$ и $\delta > \omega_0$) характеристическое уравнение (6.27) имеет два различных вещественных отрицательных корня, а выражение для тока цепи после коммутации ($t \geq 0$) содержит два экспоненциальных члена:

$$i = i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (6.29)$$

Дифференцируя правую и левую части выражения (6.29) $di/dt = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$ и используя зависимые начальные условия (6.25), (6.26), составляем уравнения для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0; \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= E/L, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}; \\ A_2 &= \frac{-E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

С учетом (6.30) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Расположение корней p_1 , p_2 характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного p и зависимость нормированного тока исследуемой цепи от времени

$$\tilde{i} = \frac{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{E} i = e^{p_1 t} - e^{p_2 t} = \tilde{i}^{(1)} + \tilde{i}^{(2)}$$

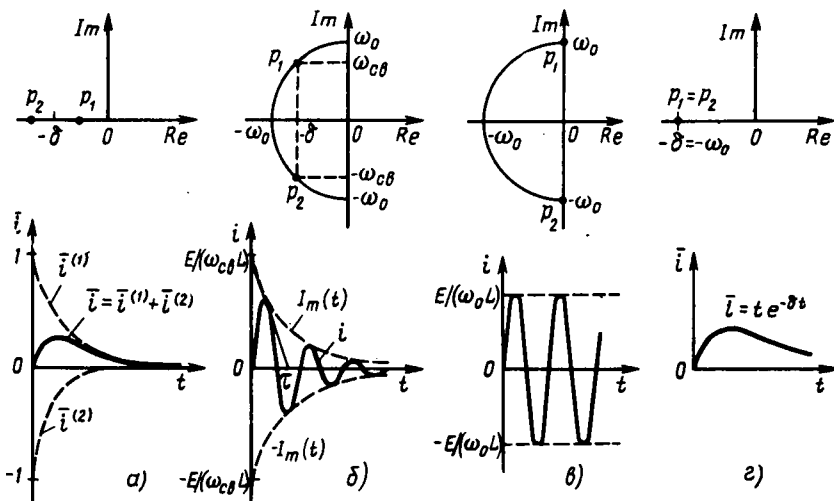


Рис. 6.6. Расположение корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного и зависимость свободной составляющей тока последовательной RLC -цепи от времени дня:

$a - \delta > \omega_0$; $b - \delta < \omega_0$; $c - \delta = 0$; $z - \delta = \omega_0$

приведены на рис. 6.6, a . Переходный процесс в цепи носит *апериодический* (неколебательный) характер, причем вследствие того, что $|p_1| < |p_2|$, вторая составляющая нормированного тока цепи $\bar{i}^{(2)}$ затухает быстрее, чем первая $\bar{i}^{(1)}$.

Комплексно-сопряженные корни. При большой добротности последовательной RLC -цепи ($Q > 1/2$, т. е. $R < 2\rho$ и $\delta < \omega_0$) характеристическое уравнение (6.27) имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}},$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота свободных колебаний в цепи (смысл этого понятия будет ясен из последующего изложения). Ток цепи после коммутации, как и в предыдущем случае, определяется выражением (6.29), которое после нахождения постоянных интегрирования $A_1 = E/(j2\omega_{\text{св}}L)$, $A_2 = -E/(j2\omega_{\text{св}}L)$ может быть с учетом соотношения

$$\frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2j} = \sin \omega_{\text{св}}t$$

преобразовано к виду

$$i = \frac{E}{\omega_{\text{св}}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{св}}t = I_m(t) \cos(\omega_{\text{св}}t - \pi/2),$$

где $I_m(t) = E e^{-\delta t}/(\omega_{\text{св}}L)$.

Таким образом, при включении в последовательную RLC -цепь с высокой добротностью идеального источника постоянного напряжения переходные процессы в ней имеют *колебательный характер*. Ток цепи представляет собой затухающую гармоническую функцию (точнее, *квазигармоническую функцию*), амплитуда которой $I_m(t)$ экспоненциально уменьшается во времени. Колебательный характер переходного процесса в цепи связан с периодическим обменом энергией между емкостью и индуктивностью, а затухание колебаний объясняется потерями энергии в сопротивлении. Расположение корней p_1, p_2 характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного p и зависимость тока цепи от времени показаны на рис. 6.6, б. Корни характеристического уравнения расположены симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости на полуокружности радиусом, численно равным резонансной частоте последовательного колебательного контура ω_0 . Чем меньше коэффициент затухания δ , тем ближе к мнимой оси расположены корни уравнения, меньше различие между $\omega_{\text{св}}$ и ω_0 и медленнее затухание свободных процессов. В пределе, при $\delta=0$, корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси, частота свободных колебаний совпадает с резонансной частотой цепи, а колебательные процессы в цепи носят *незатухающий характер* (рис. 6.6, а). Таким образом, резонансная частота RLC -цепи численно равна частоте свободных колебаний для случая, когда коэффициент затухания $\delta=0$.

Штриховыми линиями на рис. 6.6, б показаны кривые $\pm I_m(t)$, которые характеризуют закон изменения амплитуды тока во времени. Эти кривые называются *огibaющими*. Величина, численно равная длине подкасательной к *огibaющей* тока $I_m(t)$,

$$\tau = 1/\delta = 2L/R = 2Q/\omega_0 \quad (6.31)$$

называется *постоянной времени* последовательной RLC -цепи.

Очевидно, что за промежуток времени $t=\tau$ ордината *огibaющей* тока уменьшается в e раз. Из сравнения выражений (6.31) и (3.69) следует, что постоянная времени последовательной RLC -цепи обратно пропорциональна половине полосы пропускания одиночного колебательного контура на уровне $1/\sqrt{2}$: $\tau = 2Q/\omega_0 = 2/P_{\omega}$.

Таким образом, чем уже полоса пропускания контура, тем медленнее затухают в нем свободные составляющие токов и напряжений.

Скорость затухания свободных процессов в рассматриваемой цепи может быть охарактеризована также логарифмическим декрементом колебаний θ , который равен натуральному логарифму отношения двух максимальных значений тока, взятых через период свободных колебаний $T_{\text{св}} = 2\pi/\omega_{\text{св}} = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Найдя натуральный логарифм отношения ординат *огibaющих* тока для $t_1 \geq 0$ и $t_1 + T_{\text{св}}$, можно прийти к выводу, что логарифмичес-

кий декремент колебаний не зависит от выбора t_1 , а определяется только добротностью цепи Q :

$$\theta = \ln \frac{I_m(t_1)}{I_m(t_1 + T_{\text{св}})} = \delta T_{\text{св}} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - 0,25}}.$$

Анализ данного выражения показывает, что логарифмический декремент колебаний равен нулю при $\delta = 0$ ($Q = \infty$) и обращается в бесконечность при $\delta = \omega_0$ ($Q = 1/2$).

Определим отношение 3τ (промежуток времени, за который свободные составляющие уменьшаются до уровня 5% от начального значения) к периоду свободных колебаний $T_{\text{св}}$:

$$\frac{3\tau}{T_{\text{св}}} = 3 \frac{2L}{R} \frac{\omega_{\text{св}}}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \frac{\omega_{\text{св}} L}{R} \approx Q.$$

Следовательно, добротность одиночного колебательного контура приблизительно равна числу периодов свободных колебаний, укладывающихся на интервале затухания свободных составляющих до уровня 5% от начального.

Кратные корни. При $Q = 1/2$, т. е. при $R = 2\rho$ и $\delta = \omega_0$, характеристическое уравнение последовательной RLC -цепи имеет два одинаковых вещественных корня $p_1 = p_2 = -\delta$, расположенных на отрицательной вещественной полуоси в плоскости комплексного переменного p (рис. 6.6, з). Как следует из выражения (6.8), общее решение дифференциального уравнения (6.24) при $t \geq 0$ в этом случае имеет вид

$$i = i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}. \quad (6.32)$$

Определяя с помощью зависимых начальных условий (6.25) и (6.26) значения постоянных интегрирования $A_1 = 0$, $A_2 = E/L$ и подставляя их в выражение (6.32), окончательно получаем

$$i = E t e^{-\delta t} / L.$$

Как и в случае вещественных различных корней, переходный процесс в цепи при одинаковых вещественных корнях имеет *апериодический характер* (рис. 6.6, з), поэтому условие $Q = 1/2$ является предельным условием существования в цепи апериодических свободных процессов. Режим работы цепи на границе между колебательным и апериодическим переходными процессами называется критическим.

Таким образом, характер переходных процессов в последовательной RLC -цепи полностью определяется расположением корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного.

Зависимость характера переходных процессов от расположения корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного присуща не только последовательной RLC -цепи, она является общим свойством линейных электрических цепей любого порядка сложности.

ПОДКЛЮЧЕНИЕ К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RLC -ЦЕПИ ИСТОЧНИКА ГАРМОНИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим важный для практики случай включения источника гармонического напряжения в последовательную RLC -цепь с высокой добротностью ($Q \gg 1/2$). Свободные процессы в такой цепи, как было установлено, имеют колебательный характер. Пусть идеализированный источник напряжения включен в цепь в момент времени $t=0$ (6.17), причем примем, что мгновенное значение ЭДС этого источника при $t=0$ равно нулю ($\Psi = -\pi/2$). Уравнение электрического равновесия такой цепи после коммутации, составленное по методу токов ветвей, имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E_m \sin \omega t, \quad (6.33)$$

а дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega E_m \cos \omega t. \quad (6.34)$$

Для решения уравнения (6.34) необходимо определить начальные значения тока цепи $i(0_+)$ и его первой производной по времени $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$. Используя независимые начальные условия

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

и уравнение электрического равновесия (6.33), получаем

$$i(0_+) = i_L(0_+) = 0; \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (6.35)$$

Суммируя вынужденную и свободную составляющие тока

$$i_{\text{вын}} = I_m \cos(\omega t + \Psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t - \varphi); \quad (6.36)$$

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-(\delta - j\omega_{\text{св}})t} + A_2 e^{-(\delta + j\omega_{\text{св}})t}, \quad (6.37)$$

находим общее решение уравнения (6.34) при $t \geq 0$:

$$i = I_{m \text{ вын}} \sin(\omega t - \varphi) + [A_1 e^{j\omega_{св}t} + A_2 e^{-j\omega_{св}t}] e^{-\delta t}, \quad (6.38)$$

где $I_{m \text{ вын}} = E_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ — амплитуда вынужденной составляющей тока; $\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — аргумент комплексного входного сопротивления рассматриваемой цепи.

Для определения постоянных интегрирования A_1 , A_2 продифференцируем правую и левую части (6.38):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = & \omega I_{m \text{ вын}} \cos(\omega t - \varphi) - A_1 (\delta - j\omega_{св}) e^{-(\delta - j\omega_{св})t} - \\ & - A_2 (\delta + j\omega_{св}) e^{-(\delta + j\omega_{св})t} \end{aligned} \quad (6.39)$$

и подставим в выражения (6.38) и (6.39) зависимые начальные условия (6.35). Решая полученную таким образом систему уравнений относительно A_1 и A_2 , получаем

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{(\delta + j\omega_{св}) \sin \varphi - \omega \cos \varphi}{2j\omega_{св}} I_{m \text{ вын}}; \\ A_2 = & \frac{\omega \cos \varphi - (\delta - j\omega_{св}) \sin \varphi}{2j\omega_{св}} I_{m \text{ вын}}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

С учетом соотношений (6.40) выражение (6.37) для свободной составляющей тока может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} i_{св} = & \left\{ \frac{e^{j\omega_{св}t} + e^{-j\omega_{св}t}}{2} \sin \varphi + \left[\frac{\delta \sin \varphi}{\omega_{св}} - \frac{\omega \cos \varphi}{\omega_{св}} \right] \frac{e^{j\omega_{св}t} - e^{-j\omega_{св}t}}{2j} \right\} I_{m \text{ вын}} e^{-\delta t} = \\ = & \left\{ \sin \varphi \cos \omega_{св}t + \left[\frac{\delta \sin \varphi}{\omega_{св}} - \frac{\omega \cos \varphi}{\omega_{св}} \right] \sin \omega_{св}t \right\} I_{m \text{ вын}} e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Предположим, что частота ω внешнего воздействия близка к частоте $\omega_{св}$ свободных колебаний, а добротность Q настолько велика, что $\omega_{св}$ практически совпадает с резонансной частотой цепи ω_0 . С учетом этих допущений, которые незначительно уменьшают общность получаемых результатов, выражение (6.41) существенно упрощается:

$$i_{св} = (\sin \varphi \cos \omega_0 t - \cos \varphi \sin \omega_0 t) I_{m \text{ вын}} e^{-\delta t} = -I_{m \text{ вын}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t - \varphi).$$

Таким образом, в последовательной RLC -цепи, удовлетворяющей принятым допущениям, свободная составляющая тока является затухающей гармонической функцией времени. В начальный

момент времени амплитуда свободной составляющей тока равна амплитуде вынужденной составляющей, а затем уменьшается по экспоненциальному закону. Через промежуток времени, равный $(3 \div 5)\tau$ после коммутации, амплитуда свободной составляющей становится пренебрежительно малой по сравнению с амплитудой вынужденной составляющей, и переходный процесс в цепи можно считать практически закончившимся.

Ток цепи после коммутации равен сумме свободной и вынужденной составляющих:

$$i = I_{m \text{ вын}} \sin(\omega t - \varphi) - I_{m \text{ вын}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t - \varphi). \quad (6.42)$$

Если частота внешнего воздействия совпадает с резонансной частотой цепи ω_0 , то входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер ($\varphi = 0$) и выражение (6.42) принимает вид (рис. 6.7, а)

$$i = I_{m \text{ вын}} (1 - e^{-\delta t}) \sin \omega_0 t. \quad (6.43)$$

Как видно из рисунка, амплитуда тока цепи при $\omega = \omega_0$ плавно увеличивается во времени, стремясь в пределе к установившемуся значению $I_{m \text{ вын}}$. Ни при каких значениях t амплитуда тока после коммутации не превышает этого значения.

При включении в последовательную RLC -цепь источника гармонического напряжения, частота которого близка к резонансной, но не равна ей, в цепи наблюдаются биения, заключающиеся в пери-

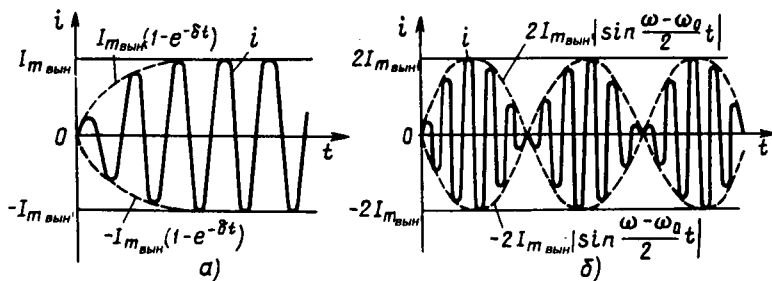


Рис. 6.7. Зависимость тока последовательной RLC -цепи от времени при включении источника гармонического напряжения:

а — $\omega = \omega_0$, $\delta \neq 0$; б — $\omega \neq \omega_0$, $\delta = 0$

одическом увеличении амплитуды тока или напряжения до значения, значительно превышающего амплитуду вынужденной составляющей (рис. 6.7, б). Если пренебречь затуханием свободной составляющей тока ($\delta = 0$), то из выражения (6.42) получаем

$$i = 2I_{m \text{ вын}} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t - \varphi\right) = I_m(t) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t - \varphi\right). \quad (6.44)$$

Как следует из этого выражения, ток цепи имеет частоту, близкую к резонансной, амплитуда тока медленно изменяется во времени:

$$I_m(t) = 2I_{m\text{ макс}} \left| \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right|, \quad (6.45)$$

а максимальное значение тока в переходном режиме в два раза превышает амплитуду вынужденной составляющей.

Возникновение биений при включении источника гармонического напряжения в последовательную RLC -цепь объясняется тем, что вследствие несоответствия частот внешнего воздействия и свободных колебаний фазовые соотношения между свободной и вынужденной составляющими тока непрерывно изменяются, причем разность мгновенных фаз этих колебаний $(\omega - \omega_0)t$ линейно нарастает во времени. В те моменты времени, когда разность мгновенных фаз равна $2k\pi$, где $k=0, 1, 2, \dots$, сумма мгновенных значений $i_{св}$ и $i_{вын}$ минимальна, а в те моменты времени, когда разность фаз равна $(2k+1)\pi$, — максимальна. Частотой биений называют частоту повторения максимумов огибающей тока (6.45). Угловая частота биений таким образом равна абсолютному значению разности угловых частот свободной и вынужденной составляющих:

$$\omega_6 = |\omega - \omega_0|.$$

В реальных колебательных контурах коэффициент затухания имеет малое, но конечное значение. Свободная составляющая тока в таких контурах экспоненциально уменьшается во времени, а биения носят затухающий характер.

§ 6.3. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Классический метод анализа переходных процессов используют в основном в тех случаях, когда исследуемая цепь имеет невысокий порядок сложности, а внешнее воздействие на нее после коммутации является гармонической функцией времени либо постоянно. Если внешнее воздействие на цепь после коммутации имеет более сложный характер, то определение вынужденной составляющей реакции цепи существенно затрудняется, а при повышении порядка цепи усложняется нахождение постоянных интегрирования. Значительно большие возможности представляет операторный метод анализа переходных процессов, основанный на применении

преобразования Лапласа. Подобно ранее рассмотренному методу комплексных амплитуд, операторный метод относится к символическим методам, в которых операции над функциями времени заменяются операциями над их символами (изображениями). Взаимное соответствие между функцией времени $a(t)$ и ее изображением $A(p)$ в операторном методе устанавливается с помощью прямого

$$A(p) = L[a(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} a(t) dt \quad (6.46)$$

и обратного

$$a(t) = L^{-1}[A(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{pt} A(p) dp \quad (6.47)$$

преобразований Лапласа и указывается знаком соответствия $\doteq$:

$$a(t) \doteq A(p).$$

Функция $A(p)$ называется **операторным изображением функции $a(t)$** или **изображением функции $a(t)$ по Лапласу**. Исходная функция времени $a(t)$ по отношению к своему операторному изображению является **оригиналом**. Комплексное число p будем называть **оператором преобразования Лапласа** или **комплексной частотой** (смысл последнего понятия будет пояснен в § 6.4).

Из курса высшей математики известно, что для функций $a(t)$, равных нулю, при $t < 0$, интегрируемых при $t > 0$ и удовлетворяющих неравенству

$$|a(t)| \leq K e^{\sigma_0 t}, \quad (6.48)$$

где K, σ_0 — некоторые постоянные числа, интеграл (6.46) абсолютно сходится при $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$. Изображение $A(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$ является аналитической функцией p , которая стремится к нулю при $\operatorname{Re}(p) \rightarrow \infty$ [6]. На практике к интегрированию по формулам (6.46), (6.47) приходится прибегать сравнительно редко, так как для большинства часто употребляемых функций разработаны таблицы прямого и обратного преобразований Лапласа [11, 12]. Операторные изображения некоторых функций приведены в приложении 1. Следует иметь в виду, что в ряде справочников, в частности в [11], приведены таблицы преобразования Лапласа — Карсона

$A_K(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} a(t) dt = pA(p)$, которое отличается от преобразования Лапласа только наличием множителя p .

Напомним некоторые свойства преобразования Лапласа.

Изображение по Лапласу постоянной величины K равно этой величине, деленной на p : $K \neq K/p$.

Умножению функции времени $a(t)$ на постоянное число K соответствует умножение на это же число ее изображения:

$$Ka(t) \neq KA(p). \quad (6.49)$$

Изображение суммы функций времени равно сумме изображений этих функций:

$$\sum_{i=1}^N a_i(t) \neq \sum_{i=1}^N A_i(p), \quad (6.50)$$

где $a_i(t) \neq A_i(p)$.

Если начальное значение функции $a(t)$ равно нулю: $a(0_+) = 0$, то дифференцированию функции $a(t)$ соответствует умножение изображения этой функции на p (*теорема дифференцирования*):

$$\frac{da(t)}{dt} \neq pA(p). \quad (6.51)$$

При $a(0_+) \neq 0$

$$\frac{da(t)}{dt} \neq pA(p) - a(0_+). \quad (6.52)$$

Повторным применением теоремы дифференцирования можно получить выражения для производных высших порядков:

$$\frac{d^n a(t)}{dt^n} \neq p^n A(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \frac{d^{k-1} a(t)}{dt^{k-1}} \Big|_{t=0_+}$$

Интегрированию функции времени в пределах от 0 до t соответствует деление изображения этой функции на p (*теорема интегрирования*):

$$\int_0^t a(t) dt \neq A(p)/p. \quad (6.53)$$

Смещению функции времени на t_0 соответствует умножение изображения на e^{-pt_0} (*теорема запаздывания*):

$$a(t-t_0) \neq e^{-pt_0} A(p). \quad (6.54)$$

Смещению изображения $A(p)$ в комплексной плоскости на комплексное число λ соответствует умножение оригинала на $e^{-\lambda t}$ (*теорема смещения*):

$$e^{-\lambda t} a(t) \neq A(p+\lambda).$$

Умножению аргумента оригинала на постоянное число $\alpha > 0$ соответствует деление аргумента изображения и самого изображения на это же число (*теорема изменения масштаба, теорема подобия*):

$$f(\alpha t) \neq \frac{1}{\alpha} F(p/\alpha).$$

Функция времени $f(t) \neq F(p)$, изображение которой может быть представлено в виде произведения изображений двух других функций времени $F(p) = F_1(p)F_2(p)$, где

$F_1(p) \doteq f_1(t)$, $F_2(p) \doteq f_2(t)$, может быть найдена с помощью интеграла свертывания (интеграла свертки):

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Таким образом, умножению изображений функций времени соответствует свертывание оригиналов (теорема свертывания):

$$F_1(p) F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Значения функции времени при $t=0$ и $t=\infty$ могут быть найдены с помощью предельных соотношений:

$$a(t=0) = \lim_{p \rightarrow \infty, \operatorname{Re}(p) > 0} p A(p); \quad a(t=\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p A(p)$$

(предполагается, что соответствующие пределы существуют).

Если изображение $A(p)$ может быть представлено в виде отношения двух полиномов от p , не имеющих общих корней

$$A(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (6.55)$$

причем степень полинома $M(p)$ выше, чем степень полинома $N(p)$, а уравнение

$$M(p) = 0 \quad (6.56)$$

не имеет кратных корней, то для перехода от изображения к оригиналу можно воспользоваться теоремой разложения:

$$\frac{N(p)}{M(p)} \doteq \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{\left. \frac{dM}{dp} \right|_{p=p_k}} e^{p_k t}, \quad (6.57)$$

где p_k — корни уравнения (6.56).

Теорема разложения может быть сформулирована также для случая, когда уравнение (6.56) имеет кратные корни, и может быть распространена на случай, когда $A(p)$ является произвольной мероморфной функцией p , т. е. функцией, не имеющей иных особых точек, кроме полюсов [12].

Как известно, преобразование Лапласа лежит в основе операторного метода решения линейных дифференциальных уравнений, разработанного в середине прошлого века русским математиком М. Е. Ващенко — Захарченко. Независимо, но значительно позднее известный английский ученый О. Хевисайд применил операторный метод к анализу переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами.

При использовании операторного метода решения дифференциальных уравнений неизвестные токи и напряжения ветвей электрической цепи, а также заданные токи и напряжения независимых

источников заменяют их операторными изображениями. При этом система интегродифференциальных уравнений электрического равновесия, составленная относительно мгновенных значений токов и напряжений ветвей, преобразуется в систему алгебраических уравнений относительно операторных изображений соответствующих токов и напряжений. Решая эту систему уравнений, можно найти изображения искомых токов и напряжений ветвей электрической цепи после коммутации. Применяя обратное преобразование Лапласа, можно перейти от изображений искомых токов и напряжений к оригиналам.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ. ОПЕРАТОРНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННЫХ ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Как следует из рассмотренного материала, используя преобразование Лапласа, каждому уравнению, входящему в систему уравнений электрического равновесия цепи, можно поставить в соответствие уравнение, составленное относительно операторных изображений токов и напряжений. Уравнениям баланса мгновенных значений токов и напряжений соответствуют уравнения баланса операторных изображений токов и напряжений, а компонентным уравнениям, описывающим соотношения между мгновенными значениями токов и напряжений отдельных ветвей,— уравнения, связывающие операторные изображения токов и напряжений тех же ветвей. Вследствие того что изображение суммы функций времени равно сумме изображений этих функций (6.50), для перехода от уравнений баланса мгновенных значений токов и напряжений ветвей к уравнениям баланса операторных изображений токов и напряжений достаточно в уравнениях (1.39), (1.40) заменить мгновенные значения токов и напряжений их операторными изображениями:

$$\sum_k I_k(p) = 0; \quad (6.58)$$

$$\sum_k U_k(p) = 0. \quad (6.59)$$

Если уравнения баланса напряжений формировались относительно мгновенных значений напряжений отдельных элементов (1.41), то в операторной форме эти уравнения принимают вид

$$\sum_i U_i(p) = \sum_j E_j(p). \quad (6.60)$$

Уравнения (6.58) и (6.59) или (6.60) будем называть **уравнениями баланса токов и напряжений в операторной форме**, а операторные

изображения токов и напряжений — операторными токами и напряжениями.

По аналогии с ранее рассмотренными понятиями комплексного входного сопротивления $Z = Z(j\omega)$ и комплексной входной проводимости $Y = Y(j\omega)$ введем понятия операторного входного сопротивления $Z(p)$ и операторной входной проводимости $Y(p)$.

Операторным входным сопротивлением пассивного линейного двухполюсника называется отношение операторного напряжения на входе двухполюсника к операторному току при нулевых начальных условиях:

$$Z(p) = U(p)/I(p), \quad (6.61)$$

где $I(p) \doteq i(t)$ и $U(p) \doteq u(t)$ — операторные изображения тока и напряжения на зажимах двухполюсника при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях.

Величина, обратная $Z(p)$, называется операторной входной проводимостью

$$Y(p) = 1/Z(p) = I(p)/U(p). \quad (6.62)$$

Операторное входное сопротивление и операторная входная проводимость пассивного линейного двухполюсника, подобно его комплексному входному сопротивлению и комплексной входной проводимости, не зависят от интенсивности внешнего воздействия и определяются только параметрами входящих в двухполюсник идеализированных пассивных элементов и схемой их соединения.

Как следует из выражений (6.61), (6.62), каждому пассивному линейному двухполюснику при нулевых начальных условиях может быть поставлена в соответствие операторная схема замещения, на которой рассматриваемый двухполюсник представляется своим операторным входным сопротивлением или операторной входной проводимостью, а токи и напряжения на его зажимах — их операторными изображениями. Если в рамках решаемой задачи двухполюсник не находится при нулевых начальных условиях, то его операторная эквивалентная схема должна содержать независимый источник тока или напряжения, характеризующий начальные запасы энергии в цепи.

Рассмотрим операторные компонентные уравнения и операторные схемы замещения идеализированных пассивных двухполюсников.

Резистивный элемент. Соотношения между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах резистивного элемента устанавливаются выражениями (1.9), (1.10): $u_R = Ri_R$; $i_R = Gu_R$.

Учитывая, что умножению функции времени на постоянное число соответствует умножение изображения функции на это же число (6.49), для получения компонентных уравнений резистивного элемента в операторной форме достаточно в выражениях (1.9), (1.10) заменить мгновенные значения токов и напряжений их операторными изображениями:

$$U_R(p) = RI_R(p); \quad (6.63)$$

$$I_R(p) = GU_R(p). \quad (6.64)$$

Подставляя соотношения (6.63), (6.64) в (6.61), (6.62), находим выражения для операторного входного сопротивления и операторной входной проводимости резистивного элемента:

$$Z_R(p) = R; \quad Y_R(p) = G = 1/R. \quad (6.65)$$

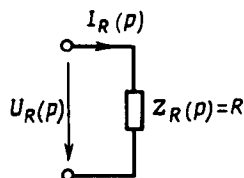


Рис. 6.8. Операторная схема замещения резистивного элемента

Операторная эквивалентная схема резистивного элемента приведена на рис. 6.8.

Емкостный элемент. Напряжение и ток емкостного элемента связаны соотношениями (1.13), (1.16):

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}; \quad u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c dt.$$

Используя теоремы дифференцирования (6.52) и интегрирования (6.53), получаем

$$I_c(p) = pCU_c(p) - Cu_c(0); \quad (6.66)$$

$$U_c(p) = \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{pC} I_c(p). \quad (6.67)$$

Операторные компонентные уравнения емкостного элемента (6.66) и (6.67) являются равносильными и могут быть получены одно из другого с помощью очевидных преобразований. При нулевых начальных условиях ($u_c(0) = 0$) они вырождаются в выражения

$$I_c(p) = pCU_c(p); \quad U_c(p) = I_c(p)/(pC),$$

откуда находим операторное входное сопротивление и операторную входную проводимость емкостного элемента:

$$Z_c(p) = \frac{U_c(p)}{I_c(p)} = \frac{1}{pC};$$

$$Y_c(p) = \frac{1}{Z_c(p)} = pC. \quad (6.68)$$

Операторным компонентным уравнениям (6.66) и (6.67) соответствуют параллельная и последовательная схемы замещения емкостного элемента (рис. 6.9, а, б), содержащие независимый источник тока $Cu_c(0)$ или напряжения $u_c(0)/p$. При нулевых начальных условиях независимые источники тока или напряжения, характери-

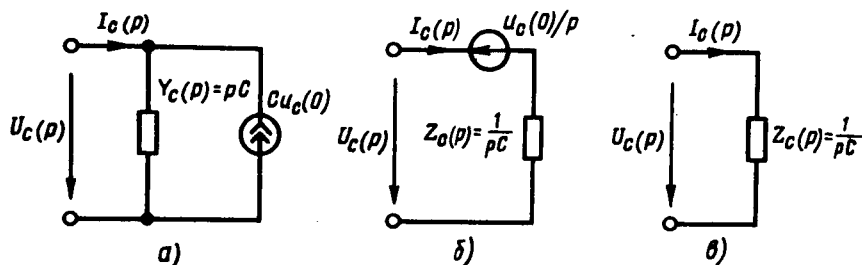


Рис. 6.9. Операторные схемы замещения емкостного элемента:
 а — параллельная при ненулевых начальных условиях; б — последовательная при ненулевых начальных условиях; в — при нулевых начальных условиях

зующие начальный запас энергии в элементе, выключаются, и в операторной эквивалентной схеме емкостного элемента остается только один элемент — операторное входное сопротивление или операторная входная проводимость емкости (рис. 6.9, в).

Индуктивный элемент. Мгновенные значения тока и напряжения индуктивного элемента связаны между собой соотношениями (1.22) и (1.23):

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

Применяя к этим выражениям теоремы дифференцирования (6.52) и интегрирования (6.53), получаем компонентные уравнения индуктивности в операторной форме:

$$U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0); \quad (6.69)$$

$$I_L(p) = i_L(0)/p + U_L(p)/(pL). \quad (6.70)$$

Уравнения (6.69), (6.70) равносильные и могут быть получены одно из другого с помощью элементарных преобразований. Используя их, определяем операторное входное сопротивление и операторную входную проводимость индуктивного элемента:

$$Z_L(p) = pL; \quad Y_L(p) = 1/(pL) \quad (6.71)$$

и строим его последовательную и параллельную схемы замещения (рис. 6.10, а, б). Как и операторные схемы замещения емкостного элемента, операторные схемы замещения индуктивного элемента содержат независимый источник напряжения $Li_L(0)$ или тока $i_L(0)/p$, характеризующий начальный запас энергии в индуктивном элементе. Операторная схема замещения этого элемента при нулевых начальных условиях приведена на рис. 6.10, в.

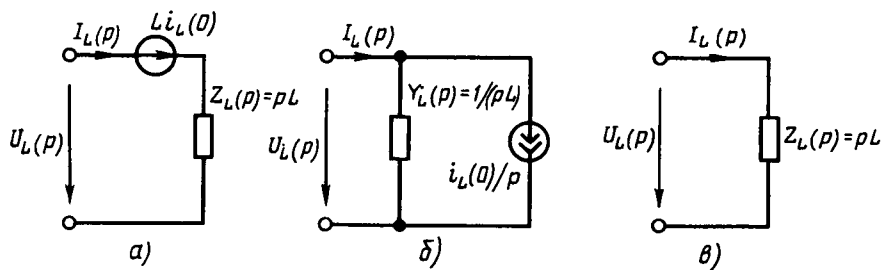


Рис. 6.10. Операторные схемы замещения индуктивного элемента:
 а — последовательная при ненулевых начальных условиях; б — параллельная при ненулевых начальных условиях; в — при нулевых начальных условиях

Выражения для операторных входных сопротивлений (проводимостей) идеализированных пассивных элементов имеют ту же структуру, что и выражения для комплексных входных сопротивлений (проводимостей) этих же элементов; они могут быть получены одно из другого путем замены $j\omega$ на p .

Аналогичным образом может быть найдено выражение для операторного входного сопротивления (проводимости) произвольного линейного двухполюсника, составленного из идеализированных пассивных элементов. Поэтому для преобразования операторных схем замещения линейных пассивных двухполюсников при нулевых начальных условиях можно использовать все рассмотренные ранее (см. гл. 2) правила преобразования линейных пассивных цепей при гармоническом воздействии, а для преобразования операторных схем замещения тех же участков цепей при ненулевых начальных условиях — правила преобразования активных двухполюсников. В частности, последовательная и параллельная схемы замещения емкостного или индуктивного элемента могут быть преобразованы одна в другую с помощью приемов преобразования активных двухполюсников (см. гл. 2).

Используя операторные схемы замещения идеализированных пассивных элементов, можно получить операторную схему замещения произвольного участка линейной цепи или всей цепи в целом. С этой целью каждый идеализированный пассивный элемент, изображенный на схеме замещения цепи для мгновенных значений, должен быть заменен операторной схемой замещения, а токи и напряжения идеализированных источников тока или напряжения — представлены операторными изображениями соответствующих функций.

Операторная схема замещения цепи имеет такую же структуру, что и схема замещения цепи для мгновенных значений, но содержит дополнительные независимые источники энергии, определяющие запасы энергии цепи в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации.

Используя операторную схему замещения цепи, можно с помощью любого из известных методов сформировать систему

уравнений электрического равновесия в операторной форме, которая будет равносильна основной системе уравнений электрического равновесия цепи после коммутации.

Как следует из рассмотренного материала, уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме могут быть построены двумя способами:

1) исходя из уравнений электрического равновесия цепи для мгновенных значений;

2) непосредственно по операторной схеме замещения цепи, минуя этап формирования уравнений электрического равновесия для мгновенных значений.

Второй способ является менее трудоемким и поэтому он нашел более широкое применение на практике. Метод анализа переходных процессов в линейных цепях, основанный на формировании операторных уравнений электрического равновесия цепей по их операторным схемам замещения, получил название **операторного метода анализа переходных процессов**. Этот метод представляет собой дальнейшее развитие операторного метода решения дифференциальных уравнений и позволяет анализировать процессы в цепи после коммутации, минуя этап формирования уравнений электрического равновесия цепи для мгновенных значений токов и напряжений.

ПОРЯДОК АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Наметим основные этапы анализа переходных процессов в линейных цепях с помощью операторного метода.

Анализ цепи до коммутации и определение независимых начальных условий. Выполняются так же, как и при использовании классического метода анализа переходных процессов.

Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации. Составление операторной схемы замещения цепи производится непосредственно по схеме замещения цепи для мгновенных значений путем замены каждого идеализированного пассивного элемента его операторной схемой замещения и представления токов и напряжений идеализированных источников тока или напряжения их операторными изображениями.

Составление уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме. Система уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме может быть сформирована любым из рассмотренных в гл. 4 методов непосредственно по операторной схеме замещения цепи.

Решение уравнений электрического равновесия цепи относительно изображений искомых токов и напряжений. Может производиться любым методом, в том числе с помощью изложенного ранее метода сигнальных графов.

Определение оригиналов искомых токов и напряжений. Как правило, определение оригиналов искомых токов и напряжений производится путем применения таблиц обратного преобразования Лапласа [12] с учетом основных свойств преобразования Лапласа. Если изображение интересующей функции представляет собой отношение двух полиномов p , для выполнения обратного преобразования Лапласа можно воспользоваться теоремой разложения.

Пример 6.4. Для цепи, схема которой приведена на рис. 6.11, а, найдем зависимость тока i_3 и напряжения индуктивности u_3 от времени при $t > 0$. ЭДС идеализированного источника постоянного напряжения $e(t)$ при $t = 0$ скачком изменяется от E_1 до E_2 :

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0; \\ E_2 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Анализируя процессы в цепи до коммутации, определяем начальное значение тока индуктивности:

$$i_3(0) = i_3(0_+) = i_3(0_-) = E_1/R_1.$$

Для построения операторной схемы замещения цепи после коммутации (рис. 6.11, б) заменяем идеализированные пассивные элементы их операторными схемами замещения, а ЭДС идеализированного источника напряжения E_2 — операторной ЭДС $E_2(p) = E_2/p$. Используя метод контурных токов, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_{11}(p) - R_2I_{22}(p) &= E_2/p; \\ -R_2I_{11}(p) + (R_2 + pL)I_{22}(p) &= LE_1/R_1, \end{aligned}$$

где $I_{11}(p) = I_1(p) \neq i_1$; $I_{22}(p) = I_3(p) \neq i_3$. Решая эту систему уравнений, получаем операторные изображения искомого тока

$$I_3(p) = \{R_1 R_2 E_2 + pL(R_1 + R_2)E_1\} / \{pR_1[pL(R_1 + R_2) + R_1 R_2]\}$$

и напряжения

$$U_3(p) = pLI_3(p) - E_1 L/R_1 = [LR_2(E_2 - E_1)] / [pL(R_1 + R_2) - R_1 R_2].$$

Преобразуем полученные выражения к такому виду, при котором для выполнения обратного преобразования Лапласа можно было бы непосредственно воспользоваться таблицами, приведенными в приложениях 1:

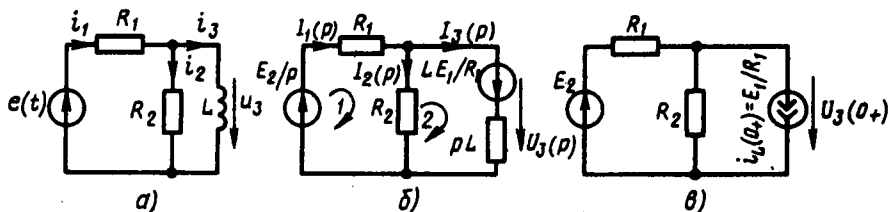


Рис. 6.11. К примеру 6.4

$$I_3(p) = \frac{1}{\{p + R_1 R_2 / [L(R_1 + R_2)]\}} \frac{E_1}{R_1} + \frac{1}{p \{p + R_1 R_2 / [L(R_1 + R_2)]\}} \frac{R_2 E_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$U_3(p) = \frac{1}{\{p + R_1 R_2 / [L(R_1 + R_2)]\}} \frac{R_2 (E_2 - E_1)}{R_1 + R_2}.$$

Учитывая, что $1/(p + \alpha) \doteq e^{-\alpha t}$ и $1/[p(p + \alpha)] \doteq (1 - e^{-\alpha t})/\alpha$, находим выражения для искомого тока и напряжения индуктивности при $t \geq 0$:

$$i_3 = \frac{E_1}{R_1} e^{-t/\tau} + \frac{E_2}{R_1} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E_2}{R_1} - \frac{E_2 - E_1}{R_1} e^{-t/\tau};$$

$$u_3 = \frac{R_2 (E_2 - E_1)}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau},$$

где $\tau = (R_1 + R_2)L/(R_1 R_2)$ — постоянная времени рассматриваемой цепи.

Как следует из полученных соотношений, в начальный момент времени ток индуктивности сохраняет то же значение, что и до коммутации [$i_3(0) = E_1/R_1$], а затем плавно изменяется, стремясь к E_2/R_1 . Напряжение индуктивности в начальный момент времени скачком изменяется от нуля до $u_3(0_+) = R_2(E_2 - E_1)/(R_1 + R_2)$, а затем плавно уменьшается до нуля.

Нетрудно заметить, что в начальный момент времени ($t = 0_+$) ток и напряжение индуктивности принимают такие значения, которые они имели бы в случае, если индуктивность была заменена идеализированным источником тока (рис. 6.11, в), ток которого $i_3(0) = E_1/R_1$. Таким образом, в начальный момент после коммутации индуктивность ведет себя подобно идеализированному источнику тока (при нулевых начальных условиях ток этого источника равен нулю, и, следовательно, ветвь, содержащую индуктивность, в начальный момент времени можно считать разомкнутой).

§ 6.4. ОПЕРАТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

РЕАКЦИЯ ЦЕПИ НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Выясним, какой физический смысл имеет оператор p , входящий в выражения для операторных сопротивлений и проводимостей. С этой целью найдем реакцию цепи на экспоненциальное внешнее воздействие

$$a(t) = \underline{A} e^{rt}, \quad (6.72)$$

где $\underline{A}$ и r — некоторые комплексные числа.

Коэффициент $\underline{A} = A e^{j\psi_A}$ имеет размерность внешнего воздействия, его называют обобщенной комплексной амплитудой. Величина $r = \sigma + j\omega$ — имеет размерность c^{-1} ; ее называют обобщенной (комплексной) частотой.

Заметим, что многие встречающиеся на практике внешние воз-

действия можно рассматривать как частный случай экспоненциального воздействия или как сумму некоторого их числа. Действительно, при $\text{Im } \underline{A} = 0$, $\text{Im } r = 0$ выражение (6.72) описывает экспоненциально затухающее ($\sigma < 0$), экспоненциально нарастающее ($\sigma > 0$) или неизменное ($\sigma = 0$) внешнее воздействие. Полусумма экспоненциальных воздействий с комплексно-сопряженными амплитудами и комплексно-сопряженными частотами представляет собой гармоническое колебание:

$$\begin{aligned} a(t) &= [\underline{A}e^{rt} + \underline{A}^*e^{t^*}]/2 = A e^{\sigma t} [e^{j(\omega t + \psi_A)} + e^{-j(\omega t + \psi_A)}]/2 = \\ &= A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \psi_A), \end{aligned} \quad (6.73)$$

амплитуда которого нарастает ($\sigma > 0$), затухает ($\sigma < 0$) или неизменна во времени ($\sigma = 0$). Как следует из выражения (6.73), мнимую часть комплексной частоты $r = \sigma + j\omega$ можно рассматривать как угловую частоту некоторого гармонического колебания, а вещественную часть — как коэффициент, определяющий характер изменения огибающей этого колебания. Вследствие того что интегрирование и дифференцирование экспоненциальной функции не изменяют ее вида, реакция линейной цепи на экспоненциальное внешнее воздействие определенной комплексной частоты r является экспоненциальной функцией той же частоты, причем отношение реакции цепи к внешнему воздействию в этом случае не зависит от времени.

Пусть напряжение, приложенное к зажимам идеализированного пассивного элемента (сопротивления, емкости, индуктивности), изменяется во времени по закону:

$$u = \underline{U} e^{rt}. \quad (6.74)$$

В этом случае ток сопротивления

$$i_R = R^{-1} u_R = \underline{U} e^{rt} / R, \quad (6.75)$$

ток емкости

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = r C \underline{U} e^{rt}, \quad (6.76)$$

ток индуктивности

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{rL} \underline{U} e^{rt}. \quad (6.77)$$

Входным сопротивлением $Z(r)$ пассивного линейного двухполюсника при экспоненциальном внешнем воздействии называется отношение мгновенного значения напряжения на зажимах этого двухполюсника к мгновенному значению тока:

$$Z(r) = u/i. \quad (6.78)$$

Используя выражения (6.74) — (6.78), находим входные сопротивления идеализированных пассивных элементов при экспоненциальном внешнем воздействии:

$$Z_R(r) = R; Z_C(r) = 1/\underline{r}C; Z_L(r) = \underline{r}L. \quad (6.79)$$

Полагая в выражениях (6.79) $\underline{r} = p$, получаем рассмотренные ранее выражения для операторных входных сопротивлений идеализированных пассивных элементов, а в случае $\underline{r} = j\omega$ — выражения для комплексных входных сопротивлений тех же элементов при гармоническом внешнем воздействии. Таким образом, комплексные сопротивления идеализированных пассивных элементов при гармоническом внешнем воздействии численно равны входным сопротивлениям тех же элементов при экспоненциальном внешнем воздействии $a(t) = \underline{A}e^{j\omega t}$, а операторные входные сопротивления исследуемых элементов — входному сопротивлению этих элементов при экспоненциальном внешнем воздействии

$$a(t) = \underline{A}e^{pt}. \quad (6.80)$$

Следовательно, оператор преобразования Лапласа p , входящий в выражения для операторных входных сопротивлений и проводимостей идеализированных пассивных элементов, можно рассматривать как обобщенную (комплексную) частоту экспоненциального воздействия вида (6.80).

Переходя от идеализированных пассивных элементов к участкам цепей, составленным из таких элементов, и, далее, к произвольным линейным цепям, убеждаемся, что *отношение двух любых токов или напряжений этих цепей при экспоненциальном внешнем воздействии вида (6.80) численно равно отношению операторных изображений соответствующих токов или напряжений при нулевых начальных условиях.*

ПОНЯТИЕ ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Рассмотрим идеализированную линейную цепь, не содержащую независимых источников тока и напряжения, у которой выделены пара входных $v - v'$ и пара выходных $k - k'$ зажимов.

Операторной или обобщенной частотной характеристикой $H_{kv}(p)$ линейной цепи называется отношение операторного изображения реакции цепи $s_k = s_k(t)$ к операторному изображению внешнего воздействия $x_v = x_v(t)$ при нулевых начальных условиях:

$$H_{kv}(p) = S_k(p)/X_v(p), \quad (6.81)$$

где $S_k(p) \doteq s_k(t)$; $X_v(p) \doteq x_v(t)$.

Учитывая, что отношение двух любых токов и напряжений линейной цепи, находящейся под экспоненциальным воздействием

численно равно отношению операторных изображений соответствующих величин при нулевых начальных условиях, устанавливаем, что *операторная характеристика линейной цепи численно равна отношению реакции цепи к внешнему воздействию при внешнем воздействии вида (6.80):*

$$H_{kv}(p) = \frac{s_k}{x_v} \bigg|_{x_v = x_v e^{pt}}$$

Для перехода от операторной характеристики цепи к ее комплексной частотной характеристике $H_{kv}(j\omega)$ достаточно в выражении (6.81) заменить p на $j\omega$. Следовательно, *комплексную частотную характеристику можно рассматривать как частный случай обобщенной характеристики при $\text{Re}(p) = \sigma = 0$.*

Подобно комплексной частотной характеристике, операторная характеристика линейной цепи не зависит от действующих в цепи токов и напряжений, а определяется только топологией цепи и параметрами входящих в нее элементов.

Как и комплексные частотные характеристики, операторные характеристики цепи делятся на *входные* и *передаточные*, причем каждой комплексной частотной характеристике соответствует одноименная операторная. В зависимости от того, какая величина выступает в качестве внешнего воздействия на цепь, а какая в качестве отклика цепи, различают:

операторное входное сопротивление

$$Z_v(p) = U_v(p)/I_v(p); \quad (6.82)$$

операторную входную проводимость

$$Y_v(p) = I_v(p)/U_v(p); \quad (6.83)$$

операторные коэффициенты передачи по напряжению и току

$$K_{kv}(p) = U_k(p)/U_v(p); \quad (6.84)$$

$$G_{kv}(p) = I_k(p)/I_v(p); \quad (6.85)$$

операторное передаточное сопротивление

$$Z_{kv}(p) = U_k(p)/I_v(p) \quad (6.86)$$

и операторную передаточную проводимость

$$Y_{kv}(p) = I_k(p)/U_v(p). \quad (6.87)$$

Операторные коэффициенты передачи по напряжению и току являются безразмерными величинами, операторные входное и передаточное сопротивления имеют размерность сопротивления, а операторные входная и передаточная проводимости — размерность проводимости.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для нахождения операторной характеристики цепи с заданной комплексной частотной характеристикой достаточно в соответствующем аналитическом выражении заменить $j\omega$ на p . В общем случае выражения для любых операторных характеристик сколь угодно сложной линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, могут быть получены из рассмотрения узловых или контурных уравнений цепи, составленных по ее операторной схеме замещения при нулевых начальных условиях.

Пусть необходимо найти операторные входное сопротивление и входную проводимость цепи со стороны зажимов $v - v'$. Подключим к этим зажимам идеализированный источник напряжения $e_v(t)$ и построим операторную схему замещения цепи при нулевых начальных условиях. Выбирая систему независимых контуров таким образом, чтобы ветвь, содержащая источник $e_v(t) \doteq E_v(p)$, явилась главной ветвью v -го контура, составим систему контурных уравнений цепи в операторной форме. Используя формулы Крамера (4.11), находим ток v -й ветви, совпадающий с током v -го контура:

$$I_v(p) = \frac{\Delta_v(p)}{\Delta(p)} E_v(p), \quad (6.88)$$

где $\Delta(p)$ — определитель системы контурных уравнений, составленных в операторной форме; Δ_v — алгебраическое дополнение элемента $Z_{vv}(p)$.

С учетом выражения (6.88) определяем операторное входное сопротивление $Z_{vv}(p)$ и операторную входную проводимость цепи со стороны зажимов $v - v'$:

$$Z_{vv}(p) = E_v(p)/I_v(p) = \Delta(p)/\Delta_v(p);$$

$$Y_{vv}(p) = 1/Z_{vv}(p) = \Delta_v(p)/\Delta(p).$$

Аналогичным образом можно получить и передаточные функции цепи. С этой целью в соответствии с (4.11) определяем ток и напряжение ветви, содержащей сопротивление $Z_k(p)$ и являющейся главной ветвью k -го контура:

$$I_k(p) = \Delta_k(p) E_v(p) / \Delta(p); \quad (6.89)$$

$$U_k(p) = Z_k(p) I_k(p) = \Delta_k(p) Z_k(p) E_v(p) / \Delta(p). \quad (6.90)$$

Подставляя выражения (6.88) — (6.90) в (6.84) — (6.87), находим операторный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K_v(p) = U_k(p)/E_v(p) = \Delta_k(p) Z_k(p) / \Delta(p),$$

операторный коэффициент передачи по току

$$G_{kv}(p) = I_k(p)/I_v(p) = \Delta_{vk}(p)/\Delta_w(p),$$

операторную передаточную проводимость

$$Y_{kv}(p) = I_k(p)/E_v(p) = \Delta_{vk}(p)/\Delta(p)$$

и операторное передаточное сопротивление

$$Z_{kv}(p) = U_k(p)/I_v(p) = \Delta_{vk}(p)Z_k(p)/\Delta_w(p).$$

В связи с тем что определитель $\Delta(p)$ и алгебраические дополнения $\Delta_w(p)$, $\Delta_{vk}(p)$ представляют собой полиномы от собственных и взаимных операторных сопротивлений независимых контуров цепи, а сопротивления контуров являются рациональными функциями p с вещественными коэффициентами, любая операторная характеристика линейной электрической цепи $H_{kv}(p)$, не содержащей независимых источников энергии, также является рациональной функцией p с вещественными коэффициентами, т. е. может быть представлена в виде отношения двух полиномов:

$$H_{kv}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (6.91)$$

где a_i , b_i — вещественные коэффициенты, значения которых определяются параметрами идеализированных пассивных элементов и управляемых источников.

Напомним, что значения аргумента p_{0i} , при которых $N(p) = 0$, $M(p) \neq 0$, называются нулями, а значения аргумента p_{ki} , при которых $M(p) = 0$, $N(p) \neq 0$, — полюсами функции $H_{kv}(p)$. Решая уравнения $N(p) = 0$; $M(p) = 0$ и разлагая полиномы $N(p)$ и $M(p)$ на множители, выражение (6.91) можно преобразовать к виду

$$H_{kv}(p) = K \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_{k1})(p - p_{k2}) \dots (p - p_{km})}, \quad (6.92)$$

где $K = a_n/b_m$ — вещественное число, называемое масштабным коэффициентом.

Из выражения (6.92) следует, что нули и полюсы функции $H_{kv}(p)$ определяют ее значения с точностью до постоянного коэффициента K . Зная расположение нулей и полюсов операторной характеристики цепи в плоскости комплексной частоты p , можно получить полную информацию о свойствах этой цепи, в частности с точностью до постоянного множителя найти реакцию цепи на заданное воздействие или построить ее АЧХ и ФЧХ.

Графическое изображение расположения нулей и полюсов функции в плоскости комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$ называется диаграммой нулей и полюсов или полюсно-нулевой диаграммой функции. При построении полюсно-нулевых диаграмм мнимую и вещественную оси плоскости p обозначают соответственно $j\omega$ и σ , нули изображают кружками, а полюсы — крестиками.

Пример 6.5. Для цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, найдем операторное входное сопротивление $Z_{11x}(p)$ со стороны зажимов 1—1' и операторный коэффициент передачи по напряжению $K_{21x}(p)$ от зажимов 1—1' к зажимам 2—2' в режиме холостого хода на зажимах 2—2'. Построим диаграммы нулей и полюсов функций $Z_{11x}(p)$ и $K_{21x}(p)$.

Ранее были получены выражения для комплексного входного сопротивления (3.9) и комплексного коэффициента передачи (3.14) данной цепи:

$$Z_{11x}(j\omega) = R + j\omega L; \quad K_{21x}(j\omega) = j\omega L / (R + j\omega L).$$

Заменяя в этих выражениях $j\omega$ на p , находим операторное входное сопротивление и операторный коэффициент передачи цепи по напряжению:

$$Z_{11x}(p) = R + pL = L(p + R/L);$$

$$K_{21x}(p) = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{p + R/L}.$$

Нетрудно убедиться, что аналогичные результаты получаются и при рассмотрении операторной схемы замещения цепи (рис. 6.12, а).

Полюсно-нулевые диаграммы функций $Z_{11x}(p)$ и $K_{21x}(p)$ изображены на рис. 6.12, б, в. Функция $Z_{11x}(p)$ имеет один нуль $p_{01} = -R/L$, функция $K_{21x}(p)$ имеет один нуль $p_{01} = 0$ и один полюс $p_{x1} = -R/L$.

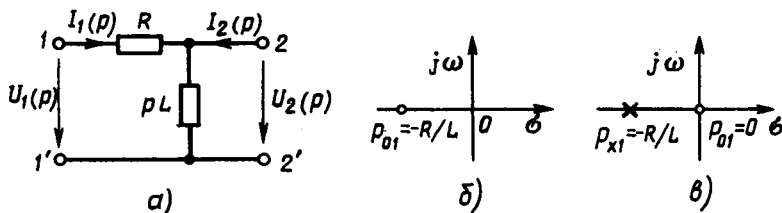


Рис. 6.12. К примеру 6.5

Пример 6.6. Найдем операторное входное сопротивление $Z_{11x}(p)$ последовательного колебательного контура (см. рис. 3.25, а) в режиме холостого хода на выходе. Построим полюсно-нулевую диаграмму функции $Z_{11x}(p)$.

Операторное входное сопротивление последовательного колебательного контура равно сумме операторных сопротивлений входящих в контур элементов:

$$Z_{11x}(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = L \frac{p^2 + pR/L + 1/(LC)}{p}.$$

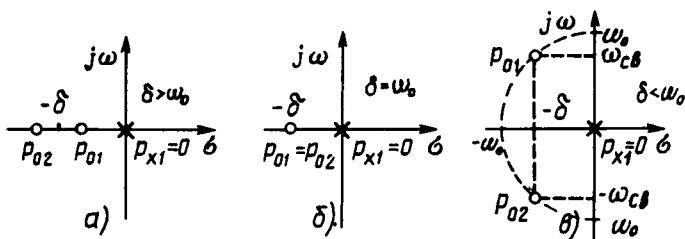


Рис. 6.13. К примеру 6.6

Используя введенные ранее обозначения $\delta = R/(2L)$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, запишем выражение для операторного входного сопротивления контура в виде

$$Z_{11x}(p) = L \frac{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}{p} = L \frac{(p - p_{01})(p - p_{02})}{p - p_{x1}}.$$

В зависимости от соотношения между величинами δ и ω_0 операторное входное сопротивление может иметь:

два различных вещественных нуля

$$p_{01}, p_{02} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

два одинаковых вещественных нуля

$$p_{01} = p_{02} = -\delta$$

или два комплексно-сопряженных нуля

$$p_{01}, p_{02} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_{св}.$$

Во всех случаях функция $Z_{11x}(p)$ имеет один полюс $p_{x1} = 0$.

Диаграммы нулей и полюсов функции $Z_{11x}(p)$ для $\delta > \omega_0$, $\delta = \omega_0$ и $\delta < \omega_0$ изображены на рис. 6.13, а, б, в. Очевидно, что нули функции $Z_{11x}(p)$ являются полюсами функции $Y_{11x}(p)$, а полюсы $Z_{11x}(p)$ — нулями $Y_{11x}(p)$.

Из примеров 6.5 и 6.6 следует, что нули операторного входного сопротивления цепи (полюсы операторной входной проводимости) совпадают с корнями характеристического уравнения, определяющего характер свободных процессов в цепи. Этот результат имеет весьма общий характер и позволяет находить корни характеристического уравнения по выражению для входного сопротивления (входной проводимости) цепи, не прибегая к составлению дифференциального уравнения.

ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ И ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

В радиотехнической практике широко используются устройства, напряжение u_2 на выходе которых практически пропорционально производной или интегралу от входного напряжения u_1 . Такие

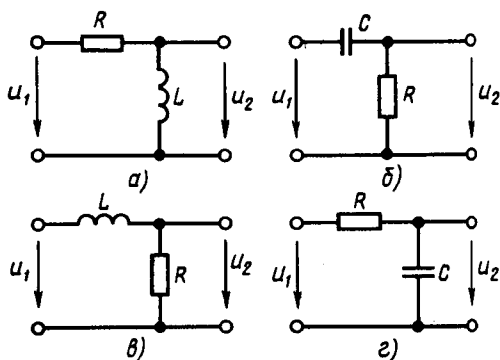


Рис. 6.14. Схемы простейших дифференцирующих (а, б) и интегрирующих (в, г) цепей

устройства называются соответственно дифференцирующими или интегрирующими цепями. В простейшем случае дифференцирование или интегрирование напряжения может производиться с помощью пассивных цепей (рис. 6.14).

Для определения требований к элементам, входящим в состав дифференцирующих и интегрирующих цепей, рассмотрим обобщенную схему замещения таких цепей (рис. 6.15). Если

напряжение на выходе цепи u_2 пропорционально производной от входного напряжения u_1 ($u_2 = \alpha_1 \frac{du_1}{dt}$, где α_1 — некоторое действительное число), то в соответствии с теоремой дифференцирования операторные изображения этих величин $U_2(p) \doteq u_2$ и $U_1(p) \doteq u_1$ при нулевых начальных условиях должны быть связаны соотношением

$$U_2(p) = \alpha_1 p U_1(p).$$

Следовательно, операторный коэффициент передачи по напряжению дифференцирующей цепи должен быть пропорционален p :

$$K_{21}(p) = \alpha_1 p.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что операторный коэффициент передачи по напряжению интегрирующей цепи должен быть пропорционален p^{-1} :

$$K_{21}(p) = \alpha_2 / p,$$

где α_2 — постоянный коэффициент.

Полагая, что сопротивление нагрузки обобщенной цепи столь велико, что током $I_2(p)$ можно пренебречь по сравнению с $I_1(p)$, находим выражения для коэффициента передачи обобщенной цепи по напряжению:

$$K_{21}(p) = \frac{Z_a(p)}{Z_a(p) + Z_b(p)} = \frac{1}{1 + Z_b(p)/Z_a(p)}.$$

Очевидно, что операторный коэффициент передачи обобщенной цепи может быть пропорционален p или p^{-1} только при

$$|Z_b(p)/Z_a(p)| \gg 1. \quad (6.93)$$

В этом случае для дифференцирующей цепи приближенно выполняется соотношение $Z_a(p)/Z_b(p) = \alpha_1 p$, а для интегрирующей цепи — $Z_a(p)/Z_b(p) = \alpha_2/p$.

Для дифференцирующей цепи соблюдение условия (6.93) равносильно тому, что постоянная времени цепи $\tau_L = L/R$ (см. рис. 6.14, а) или $\tau_C = RC$ (см. рис. 6.14, б) намного меньше длительности дифференцируемого сигнала.

Для интегрирующей цепи условие (6.93) означает, что постоянная времени цепи должна быть значительно больше интервала интегрирования. Из (6.93) также вытекает, что напряжение на выходе u_2 простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей оказывается намного меньшим, чем напряжение на входе u_1 этих цепей. Увеличение напряжения u_2 может быть достигнуто путем усложнения схем дифференцирующих и интегрирующих цепей, в частности путем применения цепей, содержащих не только пассивные, но и активные элементы (см. § 7.4).

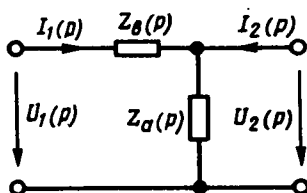


Рис. 6.15. Обобщенная схема замещения простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей

§ 6.5. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

ЕДИНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Важное место в теории линейных цепей занимает исследование реакции этих цепей на идеализированные внешние воздействия, описываемые так называемыми единичными функциями.

Единичной ступенчатой функцией (функцией Хевисайда) называется функция

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (6.94)$$

График функции $1(t-t_0)$ имеет вид ступеньки или скачка, высота которого равна 1 (рис. 6.16, а). Скачок такого типа будем называть

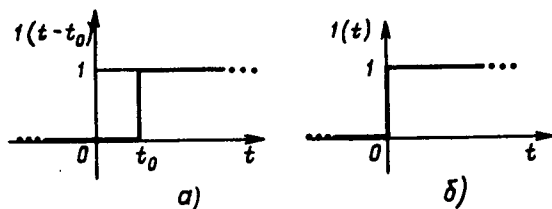


Рис. 6.16. К определению единичной ступенчатой функции

единичным. При $t_0=0$ для единичной ступенчатой функции используют обозначение $1(t)$ (рис. 6.16, б).

В связи с тем что произведение любой ограниченной функции времени $f(t)$ на $1(t-t_0)$ равно нулю при $t < t_0$ и $f(t)$ при $t \geq t_0$:

$$f(t) \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ f(t) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

функцию Хевисайда $1(t-t_0)$ удобно использовать для аналитического представления различных внешних воздействий на цепь, значение которых равно нулю до коммутации и скачкообразно изменяется в момент коммутации.

При подключении цепи к источнику постоянного тока или напряжения внешнее воздействие на цепь

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ X = \text{const} & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (6.95)$$

где t_0 — момент коммутации.

Внешнее воздействие такого вида называется неединичным скачком. Используя функцию Хевисайда, выражение (6.95) можно представить в виде

$$x(t) = X \cdot 1(t-t_0).$$

Если при $t=t_0$ в цепь включается источник гармонического тока или напряжения

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ X_m \cos(\omega t + \psi) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

то внешнее воздействие на цепь можно представить в виде

$$x(t) = 1(t-t_0) \cdot X_m \cos(\omega t + \psi).$$

Если внешнее воздействие на цепь в момент времени $t=t_0$ скачкообразно изменяется от одного фиксированного значения X_1 до другого X_2 , то

$$x(t) = X_1 + (X_2 - X_1) \cdot 1(t-t_0).$$

Внешнее воздействие на цепь, имеющее форму прямоугольного импульса высотой X и длительностью t_n (рис. 6.17, а), можно представить в виде разности двух одинаковых скачков

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X \cdot 1(t-t_0); \\ x_2(t) &= X \cdot 1(t-t_0-t_n), \end{aligned}$$

сдвинутых во времени на t_n (рис. 6.17, б, в):

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = X[1(t-t_0) - 1(t-t_0-t_n)]. \quad (6.96)$$

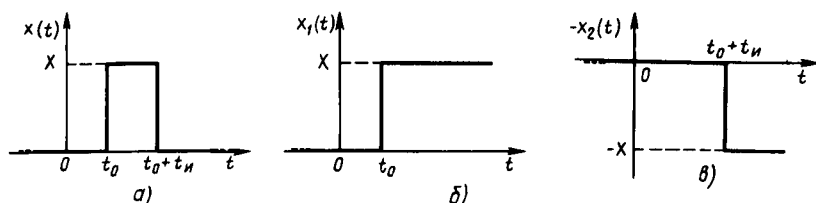


Рис. 6.17. Представление прямоугольного импульса в виде разности двух неединичных скачков

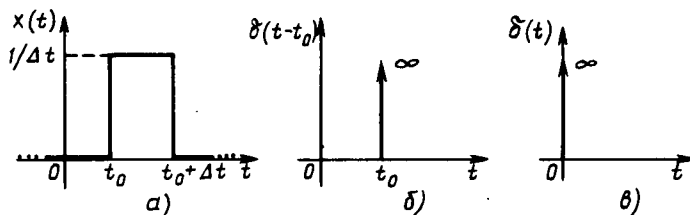


Рис. 6.18. К определению δ -функции

Рассмотрим прямоугольный импульс длительностью Δt и высотой $1/\Delta t$ (рис. 6.18, а). Очевидно, что площадь этого импульса равна 1 и не зависит от Δt . При уменьшении длительности импульса его высота возрастает, причем при $\Delta t \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности, но площадь остается равной 1. Импульс бесконечно малой длительности, бесконечно большой высоты, площадь которого равна 1, будем называть **единичным импульсом**. Функция, определяющая единичный импульс, обозначается $\delta(t - t_0)$ и называется **δ -функцией** или **функцией Дирака***.

Таким образом,

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty & \text{при } t = t_0, \end{cases} \quad (6.97)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (6.98)$$

При $t_0 = 0$ для δ -функции используется обозначение $\delta(t)$. При построении временных диаграмм функции $\delta(t - t_0)$ и $\delta(t)$ будем изображать в виде вертикальной стрелки со значком ∞ около острия (рис. 6.18, б, в).

Для установления связи между δ -функцией и единичной ступенчатой функцией воспользуемся выражением (6.96). Полагая $X = 1/\Delta t$ и устремляя Δt к нулю, получаем

*Более строгое определение δ -функции см., например, в [12].

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t-t_0) - 1(t-t_0-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} 1(t-t_0), \quad (6.99)$$

откуда

$$1(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t-t_0) dt. \quad (6.100)$$

Таким образом, δ -функция представляет собой производную от единичной ступенчатой функции, а единичная ступенчатая функция — интеграл от δ -функции.

Строгое обоснование операций над единичными функциями, в том числе операции дифференцирования единичной ступенчатой функции, дано в теории обобщенных функций. Для качественного обоснования таких операций функции $1(t-t_0)$ и $\delta(t-t_0)$ удобно представить в качестве предельных значений некоторых более простых функций, для которых соответствующие операции являются определенными. Рассмотрим, например, функцию $x_1(t)$ (рис. 6.19, а), удовлетворяющую условиям

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ \frac{1}{\Delta t} (t-t_0) & \text{при } t_0 \leq t < t_0 + \Delta t; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0 + \Delta t. \end{cases}$$

Производная функция $x_1(t)$ по времени (рис. 6.19, б) имеет вид прямоугольного импульса длительностью Δt и высотой $1/\Delta t$:

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1/\Delta t & \text{при } t_0 \leq t < t_0 + \Delta t; \\ 0 & \text{при } t \geq t_0 + \Delta t. \end{cases}$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ функция $x_1(t)$ вырождается в единичную ступенчатую функцию, а функция dx_1/dt — в δ -функцию:

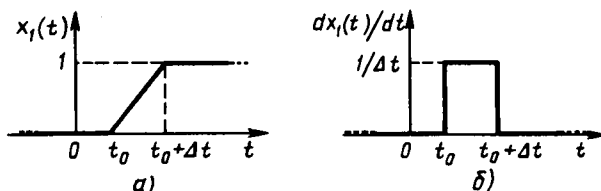


Рис. 6.19. К определению связи между единичными функциями

$$1(t-t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} x_1(t);$$

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx_1(t)}{dt},$$

откуда следует, что

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt} 1(t-t_0);$$

$$1(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t-t_0) dt.$$

При выполнении различных операций над единичными функциями момент коммутации t_0 удобно расчленять на три различных момента: t_{0-} — момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации, t_0 — собственно момент коммутации и t_{0+} — момент времени, следующий непосредственно после коммутации. С учетом этого из условия (6.98) можно получить

$$\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t-t_0) dt = 1. \quad (6.101)$$

В общем случае

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } t_0 \in]t_1, t_2[; \\ 0 & \text{при } t_0 \notin]t_1, t_2[. \end{cases} \quad (6.102)$$

Произведение произвольной ограниченной функции времени $f(t)$ на $\delta(t-t_0)$

$$f(t) \delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ f(t_0) \delta(0) & \text{при } t = t_0. \end{cases} \quad (6.103)$$

Условием (6.103) удовлетворяет также произведение $f(t_0) \delta(t-t_0)$, следовательно,

$$f(t) \delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t-t_0). \quad (6.104)$$

Из выражений (6.102) и (6.104) следует, что интеграл от произведения произвольной ограниченной функции $f(t)$ на $\delta(t-t_0)$ равен либо значению этой функции при $t=t_0$ (если точка t_0 принадлежит интервалу интегрирования), либо нулю (если точка t_0 не принадлежит интервалу интегрирования):

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{при } t_0 \in]t_1, t_2[; \\ 0 & \text{при } t_0 \notin]t_1, t_2[. \end{cases} \quad (6.105)$$

Таким образом, с помощью δ -функции можно выделять значения функции $f(t)$ в произвольные моменты времени t_0 . Эту особенность δ -функции обычно называют фильтрующим свойством.

Для определения реакции линейных электрических цепей на внешнее воздействие в виде единичного скачка или единичного импульса необходимо найти изображения единичных функций по Лапласу. Используя рассмотренные свойства единичных функций, получаем

$$L[1(t-t_0)] = \int_0^{\infty} 1(t-t_0) e^{-pt} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} dt = e^{-pt_0}/p;$$

$$L[\delta(t-t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}. \quad (6.106)$$

При $t_0=0$ операторные изображения единичных функций имеют особенно простой вид:

$$1(t) \doteq 1/p; \delta(t) \doteq 1. \quad (6.107)$$

ЕМКОСТЬ И ИНДУКТИВНОСТЬ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ И СКАЧКООБРАЗНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Пусть к емкости, имеющей нулевое начальное напряжение $u_C(0)=0$, приложено внешнее воздействие в виде импульса тока $i_C = A_n \delta(t)$. Напряжение на емкости в соответствии с (1.16)

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt = \frac{A_n}{C} \cdot 1(t)$$

в момент приложения импульса тока скачком увеличивается от начального значения до A_n/C и далее будет сохранять это значение. Очевидно, что при этом энергия, запасенная в емкости, скачком изменится от $w_C(0_-)=0$ до $w_C(0_+)=A_n^2/(2C)$. Таким образом, несмотря на то что длительность единичного импульса бесконечно мала, он сообщает емкости конечный запас энергии.

Характер зависимостей тока и напряжения от времени не изменится и в том случае, когда на емкость подано внешнее воздействие в виде скачка напряжения

$$u_C = E \cdot 1(t); i_C = C \frac{du_C}{dt} = CE \delta(t),$$

при этом запасенная в цепи энергия скачком изменится от 0 до $CE^2/2$.

Аналогичным образом устанавливаем, что при воздействии на индуктивность импульса напряжения $u_L = A_n \delta(t)$ ток индуктивности

скачком увеличивается от начального значения $i_L(0)$ до уровня $i_L(0) + A_n/L$:

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt = i_L(0) + \frac{A_n}{L} \cdot 1(t)$$

и далее сохраняет неизменное значение, а при подключении индуктивности к источнику тока $i_L = j(t) = J \cdot 1(t)$ напряжение индуктивности имеет вид бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади: $u_L = L \frac{di_L}{dt} = LJ \cdot \delta(t)$.

Скачкообразное (в нарушение законов коммутации) изменение энергии, запасенной в реактивных элементах цепи, в рассмотренных задачах связано с тем, что в самой постановке этих задач не выполняются исходные положения, принятые при выводе законов коммутации, о том, что токи и напряжения источников энергии не могут достигать бесконечно больших значений.

ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим линейную электрическую цепь, не содержащую независимых источников тока и напряжения. Пусть внешнее воздействие на цепь представляет собой неединичный скачок $x(t) = x_1(t) = X \cdot 1(t - t_0)$, а реакция цепи на это воздействие при нулевых начальных условиях равна $s_1(t)$.

Переходной характеристикой $g(t - t_0)$ линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называется отношение реакции этой цепи на воздействие неединичного скачка тока или напряжения к высоте этого скачка при нулевых начальных условиях:

$$g(t - t_0) = s_1(t)/X. \quad (6.108)$$

Из выражения (6.108) следует, что $g(t - t_0) = s_1(t)$, если $X=1$, следовательно, *переходная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока или напряжения*. Размерность переходной характеристики равна отношению размерности отклика к размерности внешнего воздействия, поэтому переходная характеристика может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной величиной.

Пусть внешнее воздействие на цепь имеет форму бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади A_n :

$$x(t) = x_s(t) = A_n \delta(t - t_0).$$

Реакцию цепи на это воздействие при нулевых начальных условиях обозначим $s_s(t)$.

Импульсной характеристикой $h(t-t_0)$ линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называется отношение реакции этой цепи на воздействие бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади к площади этого импульса при нулевых начальных условиях:

$$h(t-t_0) = s_s(t)/A_{\Sigma}. \quad (6.109)$$

Как следует из выражения (6.109), импульсная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного импульса ($A_{\Sigma}=1$). Размерность импульсной характеристики равна отношению размерности отклика цепи к произведению размерности внешнего воздействия на время.

Подобно комплексной частотной и операторной характеристикам цепи, переходная и импульсная характеристики устанавливают связь между внешним воздействием на цепь и ее реакцией, однако в отличие от комплексной частотной и операторной характеристик аргументом переходной и импульсной характеристик является время t , а не угловая ω или комплексная p частота. Так как характеристики цепи, аргументом которых является время, называются временными, а аргументом которых является частота (в том числе и комплексная) — частотными характеристиками, то переходная и импульсная характеристики относятся к временным характеристикам цепи.

Каждой паре «внешнее воздействие на цепь $x_v(t)$ — реакция цепи $s_k(t)$ » можно поставить в соответствие определенную операторную $H_k(p)$, переходную $g_k(t-t_0)$ и импульсную $h_k(t-t_0)$ характеристики.

Для установления связи между этими характеристиками найдем операторные изображения переходной и импульсной характеристик. Используя выражения (6.108), (6.109), запишем $g(t-t_0) \doteq S_1(p)/X$;

$$h(t-t_0) \doteq S_s(p)/A_{\Sigma},$$

где $S_1(p) \doteq s_1(t)$; $S_s(p) \doteq s_s(t)$ — операторные изображения реакции цепи на внешние воздействия. Выражая $S_1(t)$ и $S_s(t)$ через операторные изображения внешних воздействий $X_1(p) = X e^{-pt_0}/p \doteq x_1(t)$; $X_s(p) = A_{\Sigma} e^{-pt_0} \doteq x_s(t)$, получаем

$$\begin{aligned} g(t-t_0) &\doteq H(p)X_1(p)/X = H(p)e^{-pt_0}/p; \\ h(t-t_0) &\doteq H(p)X_s(p)/A_{\Sigma} = H(p)e^{-pt_0}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

При $t_0=0$ операторные изображения переходной и импульсной характеристик имеют особенно простой вид:

$$g(t) \doteq H(p)/p; \quad h(t) \doteq H(p). \quad (6.111)$$

Таким образом, импульсная характеристика цепи $h_{kv}(t)$ — это функция, изображение которой, по Лапласу, представляет собой операторную характеристику цепи $H_{kv}(p)$, а переходная характеристика цепи $g_{kv}(t)$ — функция, операторное изображение которой равно $H_{kv}(p)/p$. Выражения (6.110) и (6.111) устанавливают связь между частотными и временными характеристиками цепи. Зная, например, импульсную характеристику $h_{kv}(t)$, можно с помощью прямого преобразования Лапласа найти соответствующую операторную характеристику цепи

$$H_{kv}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h_{kv}(t) dt,$$

а по известной операторной характеристике $H_{kv}(p)$ с помощью обратного преобразования Лапласа определить импульсную характеристику цепи

$$h_{kv}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{pt} H_{kv}(p) dp.$$

Используя выражения (6.110) и теорему дифференцирования (6.51), нетрудно установить связь между переходной и импульсной характеристиками:

$$h(t - t_0) = \frac{d}{dt} g(t - t_0). \quad (6.112)$$

Следовательно, импульсная характеристика цепи равна первой производной переходной характеристики по времени. В связи с тем что переходная характеристика цепи $g(t - t_0)$ численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка напряжения или тока, приложенного к цепи с нулевыми начальными условиями, значения функции $g(t - t_0)$ при $t < t_0$ равны нулю. Поэтому, строго говоря, переходную характеристику цепи следует записывать как $g(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$, а не $g(t - t_0)$. Заменяя в выражении (6.112) $g(t - t_0)$ на $g(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$ и используя соотношение (6.104), получаем

$$\begin{aligned} h(t - t_0) &= \frac{d}{dt} [g(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)] = \\ &= 1(t - t_0) \frac{d}{dt} g(t - t_0) + g(t - t_0) \delta(t - t_0) = \\ &= 1(t - t_0) \frac{d}{dt} g(t - t_0) + [g(t - t_0)]_{t=t_0} \delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (6.113)$$

Выражение (6.113) известно под названием формулы обобщенной производной. Первое слагаемое в этом выражении представляет

собой производную переходной характеристики при $t > t_0$, а второе слагаемое содержит произведение δ -функции на значение переходной характеристики в точке $t = t_0$. Если при $t = t_0$ функция $g(t - t_0)$ изменяется скачкообразно, то импульсная характеристика цепи содержит δ -функцию, умноженную на высоту скачка переходной характеристики в точке $t = t_0$. Если функция $g(t - t_0)$ не претерпевает разрыва при $t = t_0$, т. е. значение переходной характеристики в точке $t = t_0$ равно нулю, то выражение для обобщенной производной совпадает с выражением для обычной производной.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для определения переходных (импульсных) характеристик линейной цепи в общем случае необходимо рассмотреть переходные процессы, имеющие место в данной цепи при воздействии на нее единичного скачка (единичного импульса) тока или напряжения. Это может быть выполнено с помощью классического или операторного метода анализа переходных процессов. На практике для нахождения временных характеристик линейных цепей удобно использовать другой путь, основанный на применении соотношений, устанавливающих связь между частотными и временными характеристиками. Определение временных характеристик в этом случае начинается с составления операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий. Далее, используя эту схему, находят операторную характеристику $H_k(p)$, соответствующую заданной паре «внешнее воздействие на цепь $x_v(t)$ — реакция цепи $s_k(t)$ ». Зная операторную характеристику цепи и применяя соотношения (6.110) или (6.111), определяют искомые временные характеристики.

При качественном исследовании реакции линейной цепи на воздействие единичного импульса тока или напряжения переходный процесс в цепи разделяют на два этапа. На первом этапе (при $t \in]t_0-, t_0+[$ цепь находится под воздействием единичного импульса, сообщаящего цепи определенную энергию. Токи индуктивностей и напряжения емкостей при этом скачком изменяются на значение, соответствующее поступившей в цепь энергии. На втором этапе (при $t \geq t_{0+}$) действие приложенного к цепи внешнего воздействия закончилось (при этом соответствующие источники энергии выключены, т. е. представлены внутренними сопротивлениями), и в цепи возникают свободные процессы, протекающие за счет энергии, запасенной в реактивных элементах на первой стадии переходного процесса. Таким образом, импульсная характеристика цепи, численно равная реакции на воздействие единичного импульса тока или напряжения, характеризует свободные процессы в рассматриваемой цепи.

Пример 6.7. Для цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, найдем переходную и импульсную характеристики в режиме холостого хода на зажимах 2 — 2'. Внешнее воздействие на цепь — напряжение на зажимах 1 — 1' $x(t) = u_1$, реакция цепи — напряжение на зажимах 2 — 2' $s(t) = u_2$.

Операторная характеристика данной цепи, соответствующая заданной паре «внешнее воздействие на цепь — реакция цепи», была получена в примере 6.5:

$$H_{кр}(p) = K_{21,к}(p) = \frac{p}{p + R/L}.$$

Следовательно, операторные изображения переходной и импульсной характеристик цепи имеют вид

$$g(t) \doteq \frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p + R/L};$$

$$h(t) \doteq H(p) = \frac{p}{p + R/L} = 1 - \frac{1}{p + R/L}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа (см. приложение 1), переходим от изображений искомых временных характеристик к оригиналам (рис. 6.20, а, б):

$$g(t) = e^{-Rt/L}; \quad h(t) = \delta(t) - R e^{-Rt/L}/L.$$

Заменяя в полученных выражениях t на $t - t_0$, находим временные характеристики цепи при $t_0 \neq 0$:

$$g(t - t_0) = e^{-R(t - t_0)/L}; \quad h(t - t_0) = \delta(t - t_0) - R e^{-R(t - t_0)/L}/L.$$

Отметим, что выражение для импульсной характеристики цепи может быть получено и с помощью формулы (6.113), примененной к выражению для переходной характеристики цепи $g(t)$.

Для качественного объяснения вида переходной и импульсной характеристик цепи в данном включении (рис. 6.20, а, б) подсоединим к зажимам 1 — 1' независимый источник напряжения $e(t) = u_1$ (рис. 6.20, в). Переходная характеристика данной цепи численно равна напряжению на зажимах 2 — 2' при воздействии на цепь единичного скачка напряжения $e(t) = 1(t)$ В и нулевых начальных условиях. В начальный момент времени после коммутации сопротивление индуктивности бесконечно велико, поэтому при $t = t_0 = 0$ напряжение на выходе цепи равно напряжению на зажимах 1 — 1: $u_2|_{t=0} = u_1|_{t=0} = 1$ В. С течением времени напряжение

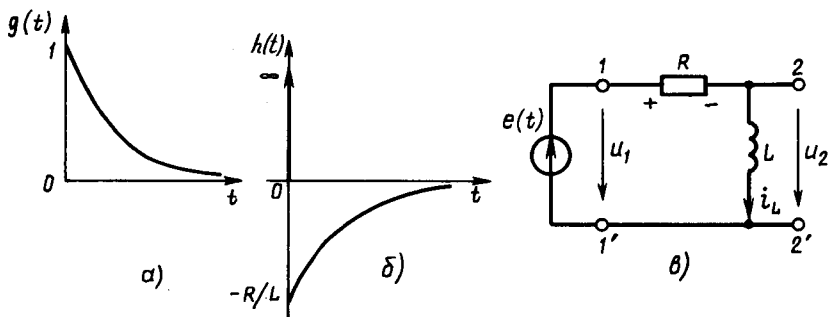


Рис. 6.20. К примеру 6.7

на индуктивности уменьшается, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$. В соответствии с этим переходная характеристика начинается от значения $g(0) = 1$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Импульсная характеристика цепи численно равна напряжению на зажимах 2 — 2' при приложении к входу цепи единичного импульса напряжения $e(t) = 1 \cdot \delta(t)$ В.

При $t \in \mathbb{R}_+$, 0_+ все входное напряжение оказывается приложенным к индуктивности. При этом напряжение на индуктивности принимает бесконечно большое значение (см. рис. 6.20, б при $t = 0$), а ток индуктивности скачком увеличивается от нуля до

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_+} u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{L} \text{ А.}$$

При $t \geq 0_+$ источник напряжения может быть заменен короткозамыкающей перемычкой, а ток индуктивности плавно уменьшается от $i_L(0_+)$ до 0. Напряжение на индуктивности равно напряжению на сопротивлении R , поэтому при $t \geq 0_+$ выходное напряжение цепи изменяется от $u_2(0_+) = -Ri_L(0_+) = -R/L$ до 0 (рис. 6.20, б при $t > 0$).

§ 6.6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАЛОЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Наиболее общий подход к анализу переходных процессов в линейных цепях основан на использовании принципа наложения. Внешнее воздействие на цепь $x = x(t)$ в этом случае представляют в виде линейной комбинации однотипных элементарных составляющих $x_k(t)$:

$$x(t) = \sum_k \alpha_k x_k(t),$$

а реакцию цепи на такое воздействие ищут в виде линейной комбинации частичных реакций $s_k(t)$ на воздействие каждой из элементарных составляющих внешнего воздействия в отдельности:

$$s(t) = \sum_k \alpha_k s_k(t).$$

В качестве элементарных составляющих $x_k(t)$ можно выбирать внешние воздействия, описываемые различными классами функций, реакция цепи на которые может быть найдена с помощью рассмотренных ранее методов. Наиболее широкое распространение получили элементарные (пробные) воздействия в виде гармонической функции времени, единичного скачка и единичного импульса.

Метод анализа переходных процессов в линейных цепях, основанный на представлении внешнего воздействия в виде конечной

или бесконечной суммы гармонических функций времени, получил название спектрального. Подробное рассмотрение этого метода будет сделано при изучении курса «Радиотехнические цепи и сигналы». Далее описаны методы анализа переходных процессов в линейных цепях, основанные на представлении внешнего воздействия на цепь в виде линейной комбинации единичных скачков или единичных импульсов (*методы временных характеристик* или методы, основанные на применении интеграла Дюамеля).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПО ЕЕ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Рассмотрим произвольную линейную электрическую цепь, не содержащую независимых источников энергии, переходная характеристика которой $g(t)$ известна. Пусть внешнее воздействие на цепь задается в виде произвольной функции $x = x(t)$, равной нулю при $t < t_0$ и непрерывной при всех t , за исключением точки $t = t_0$, где $x(t)$ может иметь конечный разрыв (рис. 6.21). Функцию $x(t)$ можно приближенно представить в виде суммы неединичных скачков или, что то же самое, в виде линейной комбинации единичных скачков, смещенных один относительно другого на $\Delta\tau$:

$$x(t) \approx x(t_0)1(t-t_0) + \sum_k \Delta x(\tau_k) \cdot 1(t-\tau_k), \quad (6.114)$$

где $x(t_0)$ — высота начального скачка функции $x(t)$; $\Delta x(\tau_k) \approx \Delta\tau \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau_k}$ — высота скачка, подаваемого в момент времени $t = \tau_k$ (на рис. 6.21 этот скачок заштрихован).

В соответствии с определением переходной характеристики (6.108) реакция цепи на воздействие неединичного скачка, приложенного в момент времени $t = \tau_k$, равна произведению высоты скачка на переходную характеристику цепи $g(t - \tau_k)$. Следовательно, реакция цепи на воздействие, представляемое суммой неединичных скачков (6.114), равна сумме произведений высот скачков на соответствующие переходные характеристики:

$$s(t) \approx x(t_0)g(t-t_0) + \sum_k \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau_k} g(t-\tau_k) \Delta\tau. \quad (6.115)$$

Очевидно, что точность представления входного воздействия в виде суммы неединичных скачков, как и точность представления реакции цепи в виде (6.115), возрастает с уменьшением шага раз-

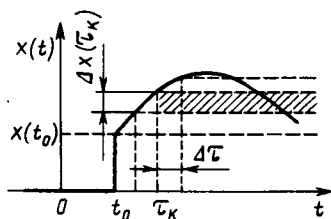


Рис. 6.21. Представление произвольного внешнего воздействия в виде суммы неединичных скачков

бления по времени Δt . При $\Delta t \rightarrow 0$ суммирование заменяется интегрированием:

$$s(t) = x(t_0)g(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau. \quad (6.116)$$

Выражение (6.116) известно под названием **интеграла Дюамеля (интеграла наложения)**. Используя это выражение, можно найти точное значение реакции цепи на заданное воздействие $x=x(t)$ в любой момент времени t после коммутации. Интегрирование в (6.116) осуществляется на промежутке $t_0 < \tau < t$, причем выражения для $x(\tau)$ и $g(t-\tau)$ получаются из выражений для $x(t)$ и $g(t)$ путем замены t на τ и $t-\tau$.

С помощью интеграла Дюамеля можно определить реакцию цепи на заданное воздействие и в том случае, когда внешнее воздействие на цепь описывается кусочно-непрерывной функцией, т. е. функцией, которая имеет конечное число конечных разрывов. В этом случае интервал интегрирования необходимо разбить на несколько промежутков в соответствии с интервалами непрерывности функции $x=x(t)$ и учесть реакцию цепи на конечные скачки функции $x=x(t)$ в точках разрыва.

Пример 6.8. Найдем реакцию цепи на внешнее воздействие, задаваемое функцией $x=x(t)$ вида (рис. 6.22):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ x_1(t) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ x_2(t) & \text{при } t_1 \leq t < t_2; \\ 0 & \text{при } t \geq t_2. \end{cases}$$

Разбиваем ось времени на четыре промежутка в соответствии с интервалами непрерывной функции $x=x(t)$.

При $t < 0$ реакция цепи $s=s(t)$ тождественно равна нулю (реакция цепи не может опережать по времени внешнее воздействие на цепь).

На участке $0 < t < t_1$ функция $x=x(t)$ непрерывна, поэтому реакция цепи определяется непосредственно с помощью выражения (6.116)

$$s(t) = x_1(0)g(t) + \int_0^t \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau.$$

При $t_1 \leq t < t_2$ интервал интегрирования $[0, t]$ содержит одну точку разрыва функции $x(t)$. Разбивая интервал интегрирования на два промежутка $[0, t_1]$, $[t_1, t]$ и учитывая реакцию цепи на воздействие скачка функции $x(t)$ в точке $t=t_1$, получаем

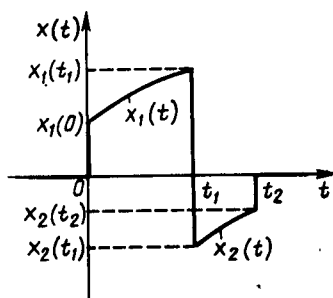


Рис. 6.22. К примеру 6.8

$$s(t) = x_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau + [x_2(t_1) - x_1(t_1)]g(t-t_1) + \int_{t_1}^t \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau.$$

При $t \geq t_2$ интервал интегрирования содержит две точки разрыва функции $x(t)$. Для определения реакции цепи в этом случае необходимо разбить интервал интегрирования на три промежутка $]0, t_1[$, $]t_1, t_2[$, $]t_2, t[$ и учесть реакцию цепи на скачки функции в точках t_1 и t_2 . Принимая во внимание, что при $t \geq t_2$ $\frac{dx}{dt} = 0$, находим

$$s(t) = x_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau + [x_2(t_1) - x_1(t_1)]g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau - x_2(t_2)g(t-t_2).$$

Пример 6.9. Найдем напряжение на зажимах 2 — 2' цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, если напряжение на зажимах 1 — 1' этой цепи изменяется во времени по закону

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U e^{\alpha t} & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ 0 & \text{при } t \geq t_1. \end{cases}$$

Переходная характеристика этой цепи в рассматриваемом включении была определена в примере 6.7: $g(t) = e^{-Rt/L}$

При $t < 0$ напряжение на зажимах 2 — 2' тождественно равно нулю.

При $0 \leq t < t_1$

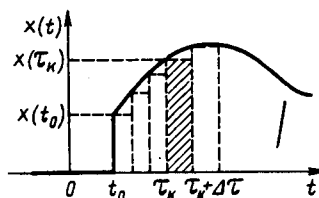
$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0)g(t) + \int_0^t \frac{du_1(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau = U e^{-Rt/L} + \int_0^t U \alpha e^{\alpha \tau} e^{-R(t-\tau)/L} d\tau = \\ &= U e^{-Rt/L} + \frac{U \alpha e^{-Rt/L}}{\alpha + R/L} [e^{(\alpha + R/L)t} - 1] = \frac{\alpha e^{\alpha t} + R e^{-Rt/L}}{\alpha + R/L} U. \end{aligned}$$

При $t \geq t_1$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} \frac{du_1(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau - u_1(t_1)g(t-t_1) = \\ &= U e^{-Rt/L} + \frac{U \alpha e^{-Rt/L}}{\alpha + R/L} [e^{(\alpha + R/L)t_1} - 1] - U e^{\alpha t_1} e^{-R(t-t_1)/L} = \\ &= \frac{U}{\alpha + R/L} \frac{R}{L} e^{-Rt/L} [1 - e^{(\alpha + R/L)t_1}]. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ЦЕПИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПО ЕЕ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Пусть внешнее воздействие на линейную электрическую цепь, импульсная характеристика $h(t-t_0)$ которой известна, описывается произвольной функцией $x=x(t)$, равной нулю при $t < t_0$ и непрерыв-



ной при всех t , за исключением точки $t=t_0$, где функция $x(t)$ может иметь конечный разрыв (рис. 6.23). Функция $x(t)$ может быть приближенно представлена в виде суммы импульсов $x_k(t)$ длительностью $\Delta\tau$, сдвинутых один относительно другого на $\Delta\tau$:

$$x(t) \approx \sum_k x_k(t). \quad (6.117)$$

Рис. 6.23. Представление произвольного внешнего воздействия в виде суммы импульсов

Рассматривая элементарный импульс $x_k(t)$ (на рис. 6.23 заштрихован) как разность двух неединичных скачков высотой $x(\tau_k)$, сдвинутых по времени на $\Delta\tau$, выражение (6.117) можно представить в виде

$$x(t) \approx \sum_k x(\tau_k) [1(t-\tau_k) - 1(t-\tau_k-\Delta\tau)] = \sum_k A_k \frac{1(t-\tau_k) - 1(t-\tau_k-\Delta\tau)}{\Delta\tau}, \quad (6.118)$$

где $A_k = x(\tau_k)\Delta\tau$ — площадь элементарного импульса $x_k(t)$.

Точность представления внешнего воздействия на цепь с помощью выражения (6.118) возрастает с уменьшением шага разбиения по времени $\Delta\tau$.

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1(t-\tau_k) - 1(t-\tau_k-\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \delta(t-\tau_k),$$

внешнее воздействие на цепь при достаточно малом шаге разбиения по времени можно представить в виде линейной комбинации единичных импульсов

$$x(t) \approx \sum_k A_k \delta(t-\tau_k). \quad (6.119)$$

В соответствии с определением импульсной характеристики (6.109) реакция цепи $s_k(t)$ на воздействие одиночного импульса $x_k = A_k \delta(t-\tau_k)$ равна произведению площади импульса A_k на импульсную характеристику цепи $h(t-\tau_k)$:

$$s_k(t) = A_k h(t-\tau_k).$$

Следовательно, реакция цепи на воздействие вида (6.119) равна сумме произведений площадей импульсов A_k на соответствующие импульсные характеристики $h(t - \tau_k)$:

$$s(t) \approx \sum_k A_k h(t - \tau_k) = \sum_k x(\tau_k) h(t - \tau_k) \Delta\tau.$$

Устремляя $\Delta\tau$ к нулю и переходя от суммирования к интегрированию, окончательно получаем

$$s(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.120)$$

Выражение (6.120) представляет собой одну из форм записи интеграла Дюамеля и его можно получить непосредственно из (6.116), используя правило интегрирования по частям и учитывая соотношения между переходной и импульсной характеристиками цепи (6.113). Выражение (6.120) можно использовать для определения реакции цепи и в том случае, когда внешнее воздействие на цепь описывается кусочно-непрерывной функцией, при этом интервал интегрирования разбивается на несколько промежутков в соответствии с интервалами непрерывности функции $x(t)$.

Пример 6.10. Зная импульсную характеристику цепи $h(t - t_0)$, найдем реакцию цепи на внешнее воздействие, описанное в примере 6.8.

Разбиваем ось времени на четыре промежутка в соответствии с интервалами непрерывности функции $x = x(t)$ и, используя выражение (6.120), определяем реакцию цепи на заданное воздействие на каждом промежутке:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \int_0^t x_1(\tau) h(t - \tau) d\tau & \text{при } 0 \leq t < t_1, \\ \int_0^{t_1} x_1(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t x_2(\tau) h(t - \tau) d\tau & \text{при } t_1 \leq t < t_2; \\ \int_0^{t_1} x_1(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} x_2(\tau) h(t - \tau) d\tau & \text{при } t \geq t_2. \end{cases}$$

Пример 6.11. По данным примеров 6.7 и 6.9 найдем реакцию цепи на заданное внешнее воздействие по ее импульсной характеристике:

$$h(t) = \delta(t) - R e^{-Rt/L} / L.$$

Разбиваем ось времени на три интервала в соответствии с интервалами непрерывности функции $x = x(t)$. При $t < 0$ напряжение на зажимах 2 — 2' тождественно равно нулю.

На участке $]0, t_1[$ функция $u_1(t)$ не имеет разрывов, поэтому напряжение на зажимах 2 — 2' находится непосредственно с помощью выражения (6.120):

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \int_0^t u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = U \int_0^t e^{\alpha\tau} \left[\delta(t-\tau) - \frac{R}{L} e^{-R(t-\tau)/L} \right] d\tau = \\
 &= U \int_0^t e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau - \frac{R}{L} U e^{-Rt/L} \int_0^t e^{(\alpha+R/L)\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau = e^{\alpha t}, \text{ а } \int_0^t e^{(\alpha+R/L)\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha+R/L} [e^{(\alpha+R/L)t} - 1],$$

то, выполняя преобразования, получаем выражение для напряжения на зажимах 2 — 2' при $0 \leq t < t_1$:

$$u_2(t) = \frac{U}{\alpha + R/L} \left[\alpha e^{\alpha t} + \frac{R}{L} e^{-Rt/L} \right].$$

При $t > t_1$ интервал интегрирования $[0, t]$ содержит точку разрыва функции $u_1(t)$. Разбивая интервал интегрирования $[0, t]$ на два промежутка $[0, t_1]$, $[t_1, t]$ и принимая во внимание, что $\int_{t_1}^t u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = 0$ и $\int_0^{t_1} e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau = 0$, находим выражение для напряжения на зажимах 2 — 2' при $t > t_1$:

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \int_0^{t_1} u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = \\
 &= U \int_0^{t_1} e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau - \frac{R}{L} U e^{-Rt/L} \int_0^{t_1} e^{(\alpha+R/L)\tau} d\tau = \\
 &= \frac{U}{\alpha + R/L} \frac{R}{L} e^{-Rt/L} [1 - e^{(\alpha+R/L)t_1}].
 \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, выражения для реакции цепи на заданное воздействие, найденные с помощью импульсной характеристики цепи, совпадают с соответствующими выражениями, полученными с использованием переходной характеристики цепи (пример 6.9).

Используя известное из математики [12] свойство интеграла свертки

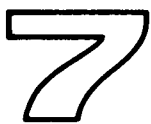
$$\int_{t_0}^{t_1} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{t-t_1}^{t-t_0} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau,$$

из выражений (6.116) и (6.120) можно получить еще две формы записи интеграла Дюамеля:

$$y(t) = x(t_0)g(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} \frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)} g(\tau) d\tau;$$

$$y(t) = \int_0^{t-t_0} x(t-\tau)h(\tau) d\tau.$$

Приведенные формы записи интеграла Дюамеля равноценны в смысле получаемых результатов, поэтому выбор того или иного выражения определяется только удобством вычислений и не носит принципиального характера.



Основы теории четырехполюсников и многополюсников

§ 7.1. МНОГОПОЛЮСНИКИ И ЦЕПИ С МНОГОПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

ЗАДАЧА АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С МНОГОПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Известно два подхода к анализу цепей, содержащих многополюсные элементы (лампы, транзисторы, трансформаторы и др.). *Первый* заключается в замене всех входящих в цепь элементов (в том числе и многополюсных) моделирующими цепями, составленными только из идеализированных двухполюсников, с последующим исследованием процессов в полученной идеализированной цепи с помощью рассмотренных ранее методов. Основной недостаток такого подхода заключается в том, что число неизвестных токов и напряжений моделирующей цепи может значительно превышать число интересующих реакций цепи — токов и напряжений на зажимах реальных элементов.

Второй подход заключается в представлении многополюсных элементов в виде многополюсников. (Аналогичным образом можно рассматривать не только отдельные многополюсные элементы, но и любые участки цепи, имеющие несколько выводов, с помощью которых они соединяются с остальной частью цепи.) Уравнения электрического равновесия идеализированных цепей, содержащих многополюсники, могут быть сформированы на основании соотношений, связывающих токи и напряжения на зажимах многополюсников, причем, как будет показано далее, число этих соотношений определяется только числом внешних выводов многополюсника и не зависит от его внутренней структуры. Очевидно, что такой подход дает возможность устранить из рассмотрения участки идеализированной электрической цепи, токи и напряжения которых не представляют интереса в рамках решаемой задачи, и, следовательно, существенно уменьшить число одновременно решаемых уравнений электрического равновесия. Для реализации такого подхода необходимо разработать методику получения соотношений, связы-

вающих между собой токи и напряжения на зажимах многополюсников, и методику формирования уравнений электрического равновесия идеализированных цепей на основе этих соотношений. Решение указанных задач составляет основное содержание общей теории многополюсников, развитой главным образом в работах Ю. Т. Величко, Р. А. Воронова, Э. В. Зеляха, Г. Е. Пухова, В. П. Сигорского и В. И. Коваленкова. Рассматриваемые далее положения общей теории многополюсников в основном содержат результаты, полученные в работах Э. В. Зеляха и В. П. Сигорского.

КЛАССИФИКАЦИЯ И СХЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Напомним, что многополюсником называется участок идеализированной электрической цепи, соединяющийся с остальной частью цепи с помощью нескольких внешних выводов (полюсов). Будем считать, что схема многополюсника и параметры входящих в него элементов известны, хотя это в общем случае не является обязательным. Более того, теория многополюсников позволяет получать схемы замещения устройств, внутренняя структура которых неизвестна. О таких устройствах обычно говорят, что они представляются в виде «черного ящика». Ограничимся рассмотрением только линейных многополюсников, т. е. многополюсников, в состав которых не входят идеализированные нелинейные пассивные и активные элементы.

В соответствии с классификацией цепей (см. гл. 1) многополюсники делятся на активные и пассивные. Пассивные многополюсники не содержат идеализированных активных элементов, активные включают в себя управляемые или неуправляемые идеализированные источники энергии. Установить, есть ли в рассматриваемом многополюснике некомпенсированные независимые источники тока или напряжения, можно путем измерений, производимых на внешних выводах многополюсника.

Если все выводы многополюсника, содержащего неуправляемые источники энергии, соединены между собой (закорочены), то токи, хотя бы части выводов, будут отличны от нуля. Если внешние выводы этого многополюсника находятся в режиме холостого хода, то напряжения хотя бы между некоторыми парами полюсов не равны нулю. Многополюсники, удовлетворяющие таким условиям, называются автономными. Если в состав многополюсника входят только идеализированные пассивные элементы или идеализированные пассивные элементы и управляемые источники, то токи короткого замыкания всех выводов многополюсника и напряжения холостого хода между его любыми полюсами равны нулю. Многополюсники такого типа называются неавтономными.

Таким образом, к неавтономным многополюсникам относятся все пассивные многополюсники, а также те активные многополюсники, которые не содержат неуправляемых источников тока или напряжений.

Анализ неавтономных многополюсников занимает особое место в теории цепей, так как большинство реальных многополюсных элементов, в частности электронные лампы и транзисторы могут быть представлены как неавтономные многополюсники.

В зависимости от того, удовлетворяет или не удовлетворяет теореме взаимности исследуемый многополюсник, различают *взаимные* и *невзаимные многополюсники*. В соответствии с доказанной ранее теоремой (см. § 4.2) любые линейные многополюсники, составленные только из идеализированных пассивных элементов, являются взаимными. Многополюсники, содержащие идеализированные управляемые источники, как правило, являются неавтономными.

Трудоемкость анализа цепей, содержащих многополюсники, так же как и цепей, составленных только из идеализированных двухполюсных элементов, в значительной степени зависит от выбора системы независимых токов или напряжений. При описании процессов, протекающих в цепях с многополюсными элементами, в систему уравнений электрического равновесия включают только токи или напряжения, которые можно измерить на полюсах многополюсников, т. е. связанные с их внешними выводами.

Систему независимых токов и напряжений многополюсника можно выбрать различными способами в зависимости от схемы включения многополюсника, т. е. от того, каким образом он соединен с остальной частью цепи. Одна из возможных схем включения многополюсника была рассмотрена в гл. 3, когда все внешние выводы были разбиты на пары, образующие стороны (порты) многополюсника. Многополюсник, полюсы которого разбиты на пары, образующие n сторон, называют n -сторонним или $2 \times n$ -полюсником (рис. 7.1, а). Внутри многополюсника отдельные полюсы могут быть соединены между собой так, что они являются общими для различных сторон многополюсника. Например, в многополюснике, схема которого приведена на рис. 3.25, а, соединены между собой полюсы $1'$ и $3'$, а также полюсы 1 и 2 . Многополюсник, у которого один из полюсов является общим для всех n сторон, называется

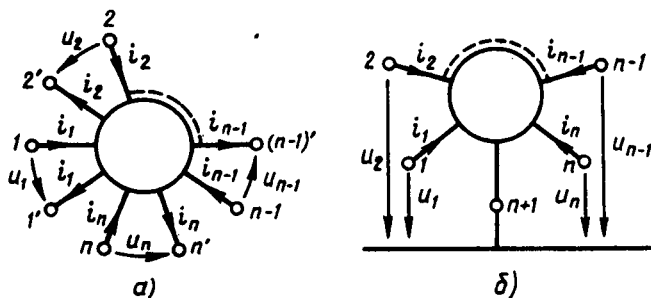


Рис. 7.1. Включение многополюсника в качестве $2 \times n$ -(а) и $n+1$ -(б) полюсников

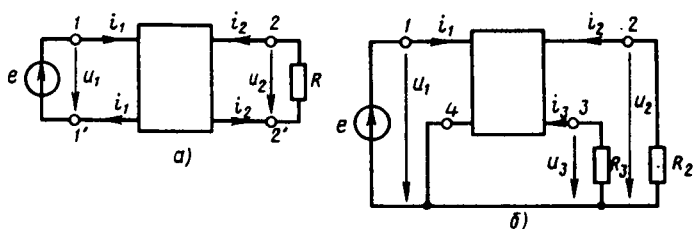


Рис. 7.2. Включение четырехполюсника в качестве 2×2 - (а) и $3 + 1$ - (б) полюсников

$n + 1$ -полюсником (рис. 7.1, б). Заметим, что представление многополюсника в виде $2 \times n$ - или $n + 1$ -полюсников не связано с его внутренней структурой, а определяется только способом соединения многополюсника с остальной частью цепи. Любой многополюсник может быть включен и как $2 \times n$ -, и как $n + 1$ -полюсник. Так, многополюсник с четырьмя внешними выводами (четыреполюсник) может быть включен как 2×2 - или $3 + 1$ -полюсник (рис. 7.2, а, б).

Представление многополюсника в виде $2 \times n$ -полюсника обычно используют, если выводы многополюсника могут образовывать стороны только единственным образом. Если стороны могут быть выделены различными способами, то представление многополюсника в виде $2 \times n$ -полюсника неудобно, так как не позволяет простым способом переходить от системы уравнений, соответствующих одному сочетанию пар полюсов, к уравнениям для другого сочетания. Представление многополюсника в виде $n + 1$ -полюсника также неуниверсально, поскольку один из его полюсов поставлен в неравноправное положение по отношению к другим.

Очевидно, что наиболее общий характер носит такая система задания напряжений и токов многополюсника, при которой все его выводы равноправны по отношению к образованию внешних соединений. Этому условию удовлетворяют два способа задания токов и напряжений (рис. 7.3). В первом (рис. 7.3, а) напряжения всех полюсов многополюсника отсчитываются относительно некоторого базисного узла, находящегося вне многополюсника, а токи всех выводов считаются направленными внутрь многополюсника. Такой выбор токов и напряжений удобен при формировании уравнений электрического равновесия цепи по методу узловых напряжений, поскольку токи и напряжения выводов многополюсника могут быть отождествлены с узловыми токами и узловыми напряжениями тех узлов цепи, к которым подключены соответствующие выводы многополюсника. Второй способ задания токов и напряжений многополюсника (рис. 7.3, б) удобен при использовании метода контурных токов. Процессы в многополюснике характеризуются в этом случае напряжениями между выводами многополюсника и токами контуров, образованных сторонами

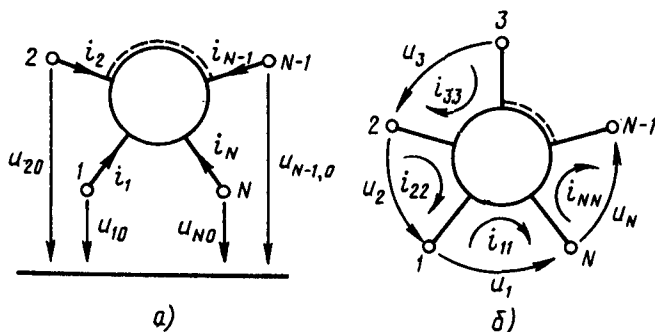


Рис. 7.3. Обобщенные (неопределенные) схемы включения многополюсника

многополюсника и остальной частью цепи. Рассмотренные схемы включения многополюсников будем называть **обобщенными (неопределенными)**.

Анализируя обобщенные схемы, нетрудно установить, что напряжения полюсов многополюсника относительно базисного (u_{10} , u_{20} , ..., u_{N0}) не связаны между собой какими-либо соотношениями и могут задаваться независимо. В то же время из второго закона Кирхгофа следует, что напряжения между выводами многополюсника u_1 , u_2 , ..., u_N выражаются через напряжения полюсов относительно базисного с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} - u_{N0}; \\ u_2 &= u_{20} - u_{10}; \\ &\vdots \\ u_N &= u_{N0} - u_{N-1,0}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Из этих выражений следует, что напряжения между полюсами многополюсника не изменятся, если все напряжения полюсов относительно базисного будут изменены на одно и то же значение, следовательно, напряжения между полюсами не зависят от выбора базисного узла. Суммируя уравнения (7.1), получим, что напряжения между выводами многополюсника связаны соотношением

$$u_1 + u_2 + \dots + u_N = 0. \quad (7.2)$$

Таким образом, только $N-1$ напряжений между выводами многополюсника могут быть заданы независимо.

Аналогично можно установить, что токи выводов многополюсника i_1 , i_2 , ..., i_N не зависят от абсолютных значений контурных токов i_{11} , i_{22} , ..., i_{NN} , а определяются только их разностью:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{11} - i_{22}; \\ i_2 &= i_{22} - i_{33}; \\ &\vdots \\ i_N &= i_{NN} - i_{11}; \end{aligned}$$

токи всех выводов связаны соотношением

$$i_1 + i_2 + \dots + i_N = 0. \quad (7.3)$$

Таким образом, несмотря на то, что все N контурных токов i_{11} , i_{22} , ..., i_{NN} являются независимыми, только $N-1$ токов внешних выводов многополюсника могут быть заданы независимо.

В общем случае каждая пара внешних выводов многополюсника может рассматриваться как его сторона (вход или выход), следовательно, для многополюсника, имеющего N внешних выводов, можно выделить $C_N^2 = N(N-1)/2$ сторон (число сочетаний из N по 2). Стороны многополюсника, напряжения (токи) которых могут быть заданы независимо от напряжений (токов) других сторон, называются независимыми.

Из соотношений (7.2) и (7.3) следует, что у многополюсника, имеющего N внешних выводов, можно выделить не более $N-1$ независимых сторон. В частности, четырехполюсник имеет не более трех независимых сторон (см. рис. 7.2).

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Основными уравнениями многополюсника называются соотношения, определяющие связь между токами и напряжениями на его внешних выводах. Коэффициенты, входящие в основные уравнения, называются **первичными параметрами** многополюсника. В зависимости от схемы включения и того, какие величины выбраны в качестве независимых, а какие — в качестве зависимых переменных, каждому многополюснику можно поставить в соответствие различные системы основных уравнений и соответственно различные системы первичных параметров. Если определитель системы основных уравнений многополюсника не равен нулю, то такая система уравнений называется **определенной**, в противном случае система основных уравнений является **неопределенной**. Матрица коэффициентов системы основных уравнений, определитель которой равен нулю, называется **особенной** или **неопределенной** матрицей первичных параметров многополюсника.

Несмотря на то что число независимых основных уравнений многополюсника равно числу его независимых сторон $N-1$, для описания многополюсников широко используют неопределенные системы основных уравнений, соответствующие обобщенным (неопределенным) схемам включения многополюсников (рис. 7.3), число уравнений в которых равно числу внешних выводов многополюсника N . Это позволяет применять достаточно простые методы формирования уравнений электрического равновесия цепей с многополюсными элементами. В то же время, зная неопределенные матрицы первичных параметров многополюсника, легко получать определенные матрицы в любой схеме включения.

j к полюсу i , определенной в режиме, когда все источники напряжения, кроме E_j , выключены (рис. 7.4, б).

Заменяя в уравнениях (7.4) ЭДС источников соответствующими напряжениями и используя матричную форму записи, получаем

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \dots Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} \dots Y_{2N} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} \dots Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{N0} \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Уравнения (7.7) будем называть основными уравнениями многополюсника в форме Y . Квадратная матрица

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \dots Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} \dots Y_{2N} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} \dots Y_{NN} \end{bmatrix}$$

в правой части уравнений (7.7) называется неопределенной матрицей проводимостей или неопределенной матрицей Y -параметров многополюсника. Ее можно рассматривать как обобщенный параметр многополюсника, устанавливающий связь между вектором токов выводов многополюсника и вектором напряжений этих выводов относительно некоторого базисного узла. Элементы матрицы Y_{ij} определяются в соответствии с их физическим смыслом по результатам опытов короткого замыкания, которые могут проводиться как экспериментальным, так и расчетным путем.

Пример 7.1. Найдем неопределенную матрицу Y -параметров полевого транзистора, схема замещения которого по переменному току в режиме малого сигнала изображена на рис. 1.19, б.

Присвоим выводу затвора полевого транзистора номер 1, стока — 2, истока — 3. Составим комплексную схему замещения (рис. 7.5, а), на которой элементы, входящие в схему замещения для мгновенных значений, представлены их комплексными проводимостями: $Y_1 = j\omega C_{зз}$; $Y_2 = j\omega C_{зс}$; $Y_3 = G_1 + j\omega C_{сз}$.

Основная система уравнений рассматриваемого многополюсника в форме Y :

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix}$$

содержит девять неизвестных коэффициентов (Y -параметров полевого транзистора). Для их нахождения рассчитаем токи транзистора в режимах короткого замыкания на различных парах выводов.

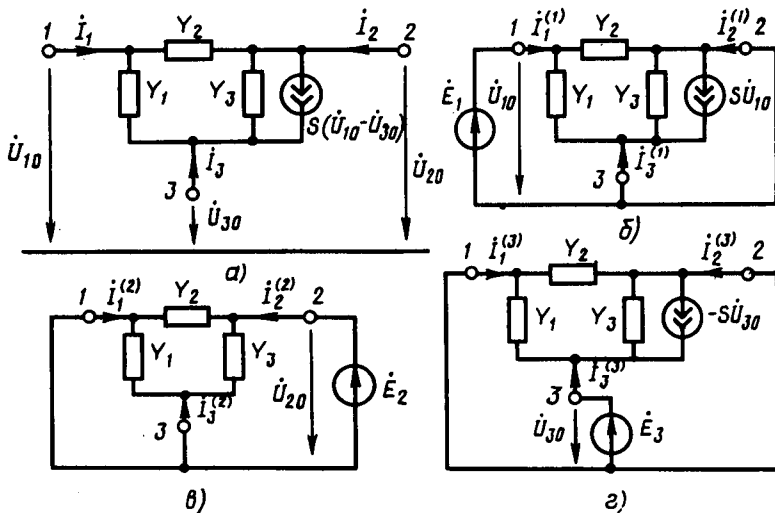


Рис. 7.5. К примеру 7.1

Схема опыта короткого замыкания для определения параметров Y_{11} , Y_{21} , Y_{31} , входящих в первый столбец неопределенной матрицы проводимостей, приведена на рис. 7.5, а. Используя эту схему, найдем частичные токи первого, второго и третьего выводов транзистора, вызванные действием неуправляемого источника напряжения $E_1 = \dot{U}_{10}$, включенного между выводом 1 и соединенными вместе остальными выводами транзистора:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1^{(1)} &= (Y_1 + Y_2)\dot{U}_{10} = (Y_1 + Y_2)\dot{E}_1; \\ \dot{I}_2^{(1)} &= S\dot{U}_{10} - Y_2\dot{U}_{10} = (S - Y_2)\dot{E}_1; \\ \dot{I}_3^{(1)} &= -S\dot{U}_{10} - Y_1\dot{U}_{10} = -(S + Y_1)\dot{E}_1. \end{aligned}$$

Отношения этих частных токов к ЭДС вызвавшего их источника напряжения в соответствии с (7.5) и (7.6) являются Y -параметрами полевого транзистора:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \dot{I}_1^{(1)}/\dot{E}_1 = Y_1 + Y_2; \\ Y_{21} &= \dot{I}_2^{(1)}/\dot{E}_1 = S - Y_2; \\ Y_{31} &= \dot{I}_3^{(1)}/\dot{E}_1 = -(S + Y_1). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, по результатам опытов короткого замыкания (рис. 7.5, б, в, г) определим Y -параметры полевого транзистора, входящие во второй и третий столбцы неопределенной матрицы проводимостей:

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \dot{I}_1^{(2)}/\dot{E}_2 = -Y_2; & Y_{13} &= \dot{I}_1^{(3)}/\dot{E}_3 = -Y_1; \\ Y_{22} &= \dot{I}_2^{(2)}/\dot{E}_2 = Y_2 + Y_3; & Y_{23} &= \dot{I}_2^{(3)}/\dot{E}_3 = -(Y_3 + S); \\ Y_{32} &= \dot{I}_3^{(2)}/\dot{E}_2 = -Y_3; & Y_{33} &= \dot{I}_3^{(3)}/\dot{E}_3 = Y_1 + Y_3 + S. \end{aligned}$$

Таким образом, неопределенная матрица Y -параметров полевого транзистора имеет вид

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & -Y_1 \\ S - Y_2 & Y_2 + Y_3 & -(Y_3 + S) \\ -(S + Y_1) & -Y_3 & Y_1 + Y_3 + S \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Покажем, что не все элементы неопределенной матрицы проводимостей являются независимыми.

Суммируя уравнения (7.7), находим

$$I_1 + I_2 + \dots + I_N = (Y_{11} + Y_{21} + \dots + Y_{N1})\dot{U}_{10} + (Y_{12} + Y_{22} + \dots + Y_{N2})\dot{U}_{20} + \dots + (Y_{1N} + Y_{2N} + \dots + Y_{NN})\dot{U}_{N0}. \quad (7.8)$$

Левая часть уравнения (7.8) в соответствии с выражением (7.3) равна нулю, поэтому

$$(Y_{11} + Y_{21} + \dots + Y_{N1})\dot{U}_{10} + (Y_{12} + Y_{22} + \dots + Y_{N2})\dot{U}_{20} + \dots + (Y_{1N} + Y_{2N} + \dots + Y_{NN})\dot{U}_{N0} = 0. \quad (7.9)$$

В связи с тем что напряжения выводов многополюсника относительно базисного узла можно выбирать независимо, равенство (7.9) должно выполняться при любых значениях $\dot{U}_{10}$, $\dot{U}_{20}$, ..., $\dot{U}_{N0}$. Полагая последовательно равными нулю напряжения всех выводов относительно базисного, кроме одного, заменим уравнение (7.8) системой уравнений

$$\begin{aligned} (Y_{11} + Y_{21} + \dots + Y_{N1})\dot{U}_{10} &= 0; \\ (Y_{12} + Y_{22} + \dots + Y_{N2})\dot{U}_{20} &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ (Y_{1N} + Y_{2N} + \dots + Y_{NN})\dot{U}_{N0} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, сумма элементов каждого столбца неопределенной матрицы проводимостей равна нулю.

Если напряжения всех выводов многополюсника относительно базисного одинаковы и равны $\dot{U}$ (это может быть в том случае, когда все выводы многополюсника закорочены и между ними и базисным узлом включен независимый источник напряжения $\dot{E} = \dot{U}$), то их токи должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} I_1 &= (Y_{11} + Y_{12} + \dots + Y_{1N})\dot{U} = 0; \\ I_2 &= (Y_{21} + Y_{22} + \dots + Y_{2N})\dot{U} = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ I_N &= (Y_{N1} + Y_{N2} + \dots + Y_{NN})\dot{U} = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Из уравнений (7.10) следует, что сумма элементов любой строки неопределенной матрицы проводимостей равна нулю.

Пусть токи контуров, внешних по отношению к многополюснику, задаются с помощью независимых источников тока $J_1, J_2, \dots, J_N$, подключенных между выводами многополюсника (рис. 7.6, а). В соответствии с принципом наложения напряжения между внешними выводами линейного неавтономного многополюсника $\bar{U}$, могут быть представлены в виде суммы частичных напряжений $\bar{U}_j^{(p)}$, вызванных действием каждого независимого источника тока J_j в отдельности:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_1^{(1)} + \dot{U}_1^{(2)} + \dots + \dot{U}_1^{(N)} = Z_{11}J_1 + Z_{12}J_2 + \dots + Z_{1N}J_N; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_2^{(1)} + \dot{U}_2^{(2)} + \dots + \dot{U}_2^{(N)} = Z_{21}J_1 + Z_{22}J_2 + \dots + Z_{2N}J_N; \\ &\vdots \\ \dot{U}_N &= \dot{U}_N^{(1)} + \dot{U}_N^{(2)} + \dots + \dot{U}_N^{(N)} = Z_{N1}J_1 + Z_{N2}J_2 + \dots + Z_{NN}J_N. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Коэффициенты системы уравнений (7.11) называются параметрами холостого хода или Z -параметрами многополюсника и имеют физический смысл входных

$$Z_{ij} = \dot{U}_i^{(j)} / \dot{J}_i \quad (7.12)$$

или передаточных

$$Z_{ij} = \dot{U}_i^{(j)} / \dot{J}_i \quad (7.13)$$

комплексных сопротивлений, определенных в режиме, когда все источники тока, кроме J_s , выключены (рис. 7.6, б). Заменяя в уравнениях (7.11) источники тока контурными токами соответствующих контуров и используя матричную форму записи, получаем основные уравнения многополюсника в форме Z:

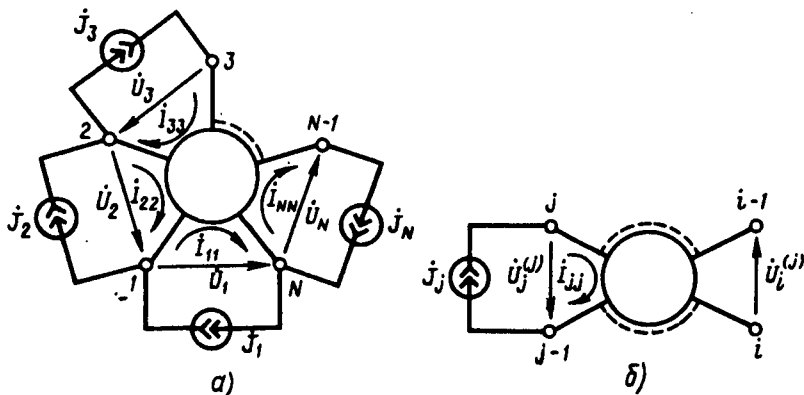


Рис. 7.6. К выводу основных уравнений многополосника в форме Z

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \dots Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} \dots Z_{2N} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} \dots Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dots \\ \dot{I}_{NN} \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Квадратная матрица

$$Z_{ij} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \dots Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} \dots Z_{2N} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} \dots Z_{NN} \end{bmatrix},$$

стоящая в правой части уравнений (7.14), называется **неопределенной матрицей сопротивлений** или **неопределенной матрицей Z-параметров многополюсника**.*

Неопределенную матрицу сопротивлений Z_{ij} можно рассматривать как обобщенный параметр многополюсника, устанавливающий связь напряжений между выводами многополюсника с контурными токами внешних по отношению к нему контуров. Элементы неопределенной матрицы сопротивлений определяются в соответствии с их физическим смыслом по результатам опытов холостого хода, причем сумма элементов каждого столбца и сумма элементов каждой строки матрицы Z_{ij} равны нулю.

Пример 7.2. Найдем неопределенную матрицу сопротивлений биполярного транзистора, низкочастотная схема замещения которого по переменному току в режиме малого сигнала приведена на рис. 1.19, а.

Присвоим выводам эмиттера, коллектора и базы номера 1, 2, 3 и построим комплексную схему замещения транзистора, на которой укажем положительные направления напряжений между выводами и положительные направления контурных токов внешних по отношению к транзистору контуров (рис. 7.7, а). Основная система уравнений рассматриваемого многополюсника в форме Z

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \end{bmatrix}$$

содержит девять неизвестных коэффициентов — Z-параметров транзистора, для определения которых необходимо произвести три опыта холостого хода. Схемы опытов холостого хода, позволяющих найти частичные напряжения между выводами транзистора, вызванные действием каждого из источников тока $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{22}$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_{33}$ в отдельности, приведены на рис. 7.7, б — г. Отношения частичных напряжений к токам, вызвавшим их источники тока согласно (7.12), (7.13), представляют собой искомые параметры:

*Неопределенные матрицы сопротивлений и проводимостей многополюсника Z_{ij} и Y_{ij} не следует путать с матрицами контурных сопротивлений $Z_{(ij)}$ и узловых проводимостей $Y_{(ij)}$.

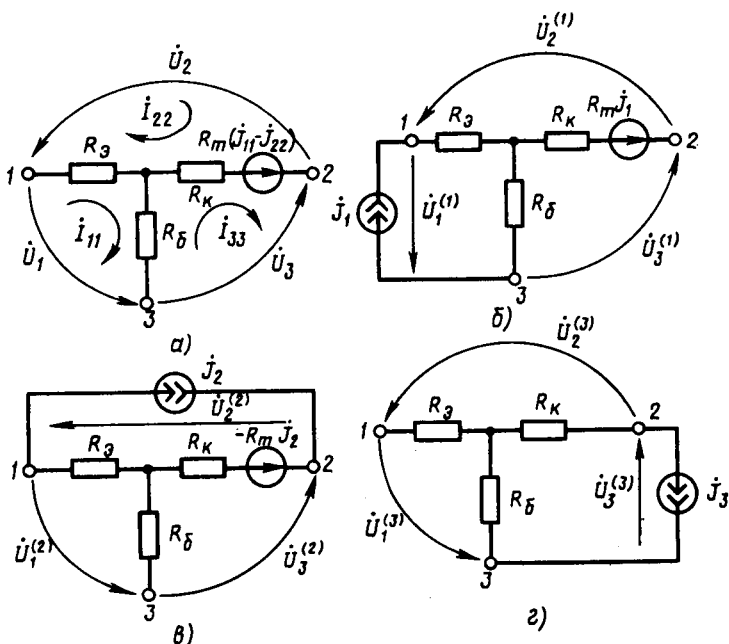


Рис. 7.7. К примеру 7.2

$$\begin{aligned}
 Z_{11} &= U_1^{(1)} / j_1 = R_з + R_б; & Z_{12} &= U_1^{(2)} / j_2 = -R_з; \\
 Z_{21} &= U_2^{(1)} / j_1 = R_м - R_з; & Z_{22} &= U_2^{(2)} / j_2 = R_к + R_з - R_м; \\
 Z_{31} &= U_3^{(1)} / j_1 = -(R_м + R_б); & Z_{32} &= U_3^{(2)} / j_2 = R_м - R_к; \\
 & & Z_{13} &= U_1^{(3)} / j_3 = -R_б; \\
 & & Z_{23} &= U_2^{(3)} / j_3 = -R_к; \\
 & & Z_{33} &= U_3^{(3)} / j_3 = R_б + R_к.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что сумма элементов любой строки, как и сумма элементов любого столбца неопределенной матрицы сопротивлений биполярного транзистора,

$$\mathbf{Z}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_з + R_б & -R_з & -R_б \\ R_м - R_з & R_к + R_з - R_м & -R_к \\ -(R_м + R_б) & R_м - R_к & R_б + R_к \end{bmatrix} \end{matrix}$$

равна нулю.

При построении основных уравнений многополюсника в формах Y или Z в качестве независимых переменных выбирались либо только напряжения, либо только токи, связанные с внешними выво-

дами. В каждом из этих случаев коэффициенты основной системы уравнений имели одинаковую размерность и определялись в одном и том же режиме (короткого замыкания или холостого хода). Системы первичных параметров многополюсника, в которых все параметры имеют одинаковую размерность и определяются в одинаковом режиме, называются однородными.

Если в качестве независимых переменных выбрать токи одних и напряжения других сторон многополюсника, то коэффициенты полученной системы уравнений будут иметь различную размерность и определяться в различных режимах, причем часть недиагональных элементов соответствующей матрицы параметров может оказаться безразмерной. Если на некоторых сторонах многополюсника и ток, и напряжение выбраны в качестве независимых переменных, то безразмерными могут быть и некоторые диагональные элементы. Системы первичных параметров многополюсника, в которые входят параметры, имеющие различную размерность и измеряемые в различных режимах, называются смешанными (гибридными).

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЦ ПРОВОДИМОСТЕЙ И СОПРОТИВЛЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

Первичные параметры многополюсника при любом выборе системы независимых токов и напряжений имеют физический смысл комплексных частотных характеристик многополюсника в режимах короткого замыкания или холостого хода. Как и любые комплексные частотные характеристики линейных цепей, первичные параметры линейного неавтономного многополюсника не зависят от амплитуд и начальных фаз токов и напряжений, действующих на зажимах многополюсника, а определяются только его внутренней структурой, параметрами входящих в него элементов и частотой внешнего воздействия. При произвольном внешнем воздействии основные уравнения многополюсника сохраняют такую же структуру, как и при гармоническом воздействии, причем его токи и напряжения представляются операторными изображениями, а в выражениях для первичных параметров $j\omega$ заменяется на p .

Таким образом, *первичные параметры линейного неавтономного многополюсника в общем случае являются функциями комплексной частоты p .*

В связи с тем что сумма элементов каждой строки и сумма элементов каждого столбца неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей равны нулю, столбцы и строки этих матриц линейно зависимы. Следовательно, определители матриц Z_{ij} и Y_{ij} равны нулю и системы уравнений (7.7) и (7.14) не могут быть разрешены относительно напряжений полюсов $\dot{U}_p$ или токов внешних контуров $\dot{I}_j$ соответственно.

Анализируя структуру основных уравнений многополюсника, нетрудно установить, что k -му полюсу многополюсника соответствует k -я строка и k -й столбец неопределенной матрицы проводимостей, а k -й стороне многополюсника (k -му контуру, образованному одной из сторон многополюсника и остальной частью цепи) k -я строка и k -й столбец неопределенной матрицы сопротивлений.

Изменение нумерации полюсов или сторон многополюсника не вызывает изменения элементов неопределенных матриц, а приводит только к перестановке соответствующих строк и столбцов. Так, при взаимной замене номеров двух каких-либо полюсов многополюсника необходимо поменять местами строки и переставить столбцы

матрицы Y_{ij} , имеющие соответствующие номера. Аналогично при взаимной замене номеров двух каких-либо сторон необходимо произвести перестановки соответствующих строк и перестановки соответствующих столбцов матрицы Z_{ij} .

Пример 7.3. Найдем неопределенную матрицу проводимостей полевого транзистора, рассмотренного в примере 7.1 в том случае, когда выводам затвора, стока и истока присвоены соответственно номера 2, 3 и 1 (напомним, что в примере 7.1 этим выводам были присвоены номера 1, 2 и 3).

Неопределенная матрица проводимостей, соответствующая такой нумерации выводов, может быть получена способом, приведенным в примере 7.1, однако этот способ весьма трудоемок.

В то же время для решения задачи достаточно в матрице проводимостей, полученной в примере 7.1, поставить первый столбец на место второго, второй — на место третьего, третий — на место первого, первую строку перенести на место второй, вторую — на место третьей, а третью — на место первой, причем последовательность выполнения перестановок не имеет значения. В результате получим

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 + S & -(S + Y_1) & -Y_3 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -(Y_3 + S) & S - Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

С помощью неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей линейного неавтономного многополюсника можно получить матрицы первичных параметров, соответствующие различным схемам включения этого многополюсника.

Пусть какой-либо вывод многополюсника, например с номером N , соединен с базисным узлом (выбран в качестве общего или базисного узла). Тогда напряжение N -го вывода относительно базисного $\dot{U}_{N0}$ равно нулю и, следовательно, равны нулю частичные токи всех выводов $\dot{I}_1^{(N)}, \dot{I}_2^{(N)}, \dots, \dot{I}_N^{(N)}$, вызванные действием источника $E_N = \dot{U}_{N0}$. Исключая из системы уравнений (7.7) уравнение для тока вывода N , который равен сумме токов остальных выводов, взятой с противоположным знаком, получаем систему основных уравнений многополюсника в рассматриваемой схеме включения:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1, N-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2, N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N-1, 1} & Y_{N-1, 2} & \dots & Y_{N-1, N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{N-1, 0} \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

Матрица первичных параметров многополюсника в этом случае

$$Y_{ij}^{(N)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1, N-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2, N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N-1, 1} & Y_{N-1, 2} & \dots & Y_{N-1, N-1} \end{bmatrix}$$

получается из неопределенной матрицы проводимостей этого же многополюсника Y_{ij} путем вычеркивания N -го столбца и N -й строки. В общем случае матрица Y -параметров многополюсника, k -й полюс которого выбран в качестве базисного ($Y_{ij}^{(k)}$), формируется из неопределенной матрицы проводимостей этого многополюс-

ника Y_{ij} путем вычеркивания столбца и строки, соответствующих базисному полюсу. Сумма элементов каждой строки и сумма элементов каждого столбца матрицы $Y_{ij}^{(k)}$ не равны нулю. Определитель этой матрицы, как правило, не равен нулю, и, следовательно, система уравнений (7.15) может быть разрешена относительно напряжений полюсов U_{j0} .

Пример 7.4. Найдем матрицы Y -параметров полевого транзистора, включенного по схеме с общим истоком и по схеме с общим затвором.

Неопределенная матрица проводимостей полевого транзистора приведена в примере 7.1. Вычеркивая из этой матрицы третью строку и третий столбец, получаем матрицу Y -параметров транзистора с общим истоком:

$$Y_{ij}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ S - Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Вычеркивая из неопределенной матрицы первую строку и первый столбец, находим матрицу Y -параметров полевого транзистора в схеме с общим затвором:

$$Y_{ij}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & -(Y_3 + S) \\ -Y_3 & Y_1 + Y_3 + S \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Зная матрицу проводимостей многополюсника $Y_{ij}^{(k)}$, включенного по схеме с общим k -м выводом, можно найти неопределенную матрицу проводимостей этого многополюсника Y_{ij} . С этой целью матрица $Y_{ij}^{(k)}$ дополняется k -й строкой и k -м столбцом, элементы которых выбирают из условия равенства нулю суммы элементов каждой строки и каждого столбца неопределенной матрицы проводимостей.

Нетрудно установить, что для перехода от матрицы Y -параметров многополюсника, включенного по схеме с общим k -выводом, к матрице Y -параметров многополюсника с общим l -м выводом необходимо сначала дополнить матрицу $Y_{ij}^{(k)}$ k -й строкой и k -м столбцом, элементы которых выбирают из условия равенства нулю суммы элементов каждого столбца и каждой строки неопределенной матрицы проводимостей, а затем вычеркнуть из полученной матрицы l -й столбец и l -ю строку.

Пример 7.5. Определим матрицу Y -параметров биполярного транзистора $Y_{ij}^{(6)}$, включенного по схеме с общей базой, по известной матрице Y -параметров этого транзистора в схеме с общим эмиттером:

$$Y_{ij}^{(5)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} Б & К \end{matrix} \\ \begin{matrix} Б \\ К \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11}^{(5)} & Y_{12}^{(5)} \\ Y_{21}^{(5)} & Y_{22}^{(5)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Дополняя матрицу $Y_{ij}^{(5)}$ строкой и столбцом, соответствующими выводу эмиттера,

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} Э & Б & К \end{matrix} \\ \begin{matrix} Э \\ Б \\ К \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11}^{(5)} + Y_{12}^{(5)} + Y_{21}^{(5)} + Y_{22}^{(5)} & -(Y_{11}^{(5)} + Y_{21}^{(5)}) & -(Y_{12}^{(5)} + Y_{22}^{(5)}) \\ -(Y_{11}^{(5)} + Y_{12}^{(5)}) & Y_{11}^{(5)} & Y_{12}^{(5)} \\ -(Y_{21}^{(5)} + Y_{22}^{(5)}) & Y_{21}^{(5)} & Y_{22}^{(5)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

и вычеркивая строку и столбец, соответствующие выводу базы, получаем матрицу проводимостей биполярного транзистора в схеме с общей базой:

$$Y_{ij}^{(0)} = \begin{matrix} & \text{Э} & \text{К} \\ \begin{matrix} \text{Э} \\ \text{К} \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11}^{(0)} + Y_{12}^{(0)} + Y_{21}^{(0)} + Y_{22}^{(0)} & -(Y_{12}^{(0)} + Y_{22}^{(0)}) \\ -(Y_{21}^{(0)} + Y_{22}^{(0)}) & Y_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Если два каких-либо вывода многополюсника, например с номерами k и N , объединяются в один полюс, которому присваивается номер k , то напряжение этого полюса относительно базисного узла равно $\dot{U}_{k0}$, а его ток равен сумме токов k -го и N -го выводов. При этом в основной системе уравнений многополюсника (7.7) уравнения для токов k -го и N -го выводов

$$\dot{I}_k = Y_{k1}\dot{U}_{10} + Y_{k2}\dot{U}_{20} + \dots + Y_{kk}\dot{U}_{k0} + \dots + Y_{k, N-1}\dot{U}_{N-1, 0} + Y_{kN}\dot{U}_{N0};$$

$$\dot{I}_N = Y_{N1}\dot{U}_{10} + Y_{N2}\dot{U}_{20} + \dots + Y_{Nk}\dot{U}_{k0} + \dots + Y_{N, N-1}\dot{U}_{N-1, 0} + Y_{NN}\dot{U}_{N0}$$

заменяются одним уравнением

$$\dot{I}_k = (Y_{k1} + Y_{N1})\dot{U}_{10} + (Y_{k2} + Y_{N2})\dot{U}_{20} + \dots + (Y_{kk} + Y_{kN} + Y_{Nk} + Y_{NN})\dot{U}_{k0} + \dots + (Y_{k, N-1} + Y_{N, N-1})\dot{U}_{N-1, 0}.$$

Следовательно, при объединении k -го и N -го полюсов в один k -й полюс k -я и N -я строки неопределенной матрицы проводимостей многополюсника суммируются и становятся k -й строкой, а k -й и N -й столбцы суммируются и образуют k -й столбец.

Пример 7.6. Зная неопределенную матрицу проводимостей многополюсника A , приведенного на рис. 7.8, а,

$$Y_{ijA} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

определяем неопределенную матрицу проводимостей Y_{ijB} нового многополюсника Б, получающегося из исходного в результате объединения полюсов 3 и 4 (рис. 7.8, б). Основные уравнения исходного многополюсника в форме Y имеют вид

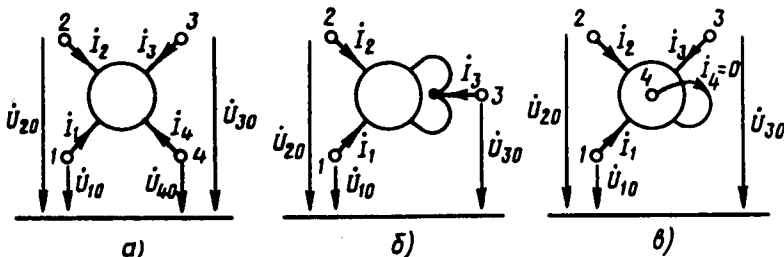


Рис. 7.8. К примерам 7.6 и 7.7

$$\begin{aligned} l_1 &= Y_{11} \dot{U}_{10} + Y_{12} \dot{U}_{20} + Y_{13} \dot{U}_{30} + Y_{14} \dot{U}_{40}; \\ l_2 &= Y_{21} \dot{U}_{10} + Y_{22} \dot{U}_{20} + Y_{23} \dot{U}_{30} + Y_{24} \dot{U}_{40}; \\ l_3 &= Y_{31} \dot{U}_{10} + Y_{32} \dot{U}_{20} + Y_{33} \dot{U}_{30} + Y_{34} \dot{U}_{40}; \\ l_4 &= Y_{41} \dot{U}_{10} + Y_{42} \dot{U}_{20} + Y_{43} \dot{U}_{30} + Y_{44} \dot{U}_{40}. \end{aligned}$$

У многополюсника, полученного из исходного путем объединения выводов 3 и 4, напряжение объединенного вывода равно U_{30} , а ток — сумме токов третьего и четвертого выводов исходного многополюсника:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_{10} + Y_{12} \dot{U}_{20} + (Y_{13} + Y_{14}) \dot{U}_{30}; \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_{10} + Y_{22} \dot{U}_{20} + (Y_{23} + Y_{24}) \dot{U}_{30}; \\ \dot{I}_3 &= (Y_{31} + Y_{41}) \dot{U}_{10} + (Y_{32} + Y_{42}) \dot{U}_{20} + (Y_{33} + Y_{34} + Y_{43} + Y_{44}) \dot{U}_{30}. \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} + Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} + Y_{24} \\ 3 & Y_{31} + Y_{41} & Y_{32} + Y_{42} & Y_{33} + Y_{34} + Y_{43} + Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = Y_{ijB} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, элементы третьей строки и третьего столбца матрицы Y_{ij} действительно равны сумме соответствующих элементов третьей и четвертой строк и третьего и четвертого столбцов неопределенной матрицы проводимостей исходного многополюсника.

Если какой-либо вывод многополосника, например N -й, не используется при его соединении с остальной частью цепи, т. е. является внутренним узлом многополосника, то ток этого вывода

$$Y_N = Y_{N1} \dot{U}_{1,0} + Y_{N2} \dot{U}_{2,0} + \dots + Y_{N, N-1} \dot{U}_{N-1, 0} + Y_{N, N} \dot{U}_{N0} = 0. \quad (7.16)$$

Определяя из уравнения (7.16) напряжение N -го вывода

$$\dot{U}_{N0} = -Y_{N1}\dot{U}_{10}/Y_{NN} - Y_{N2}\dot{U}_{20}/Y_{NN} - \dots - Y_{N, N-1}\dot{U}_{N-1, 0}/Y_{N, N}$$

и исключая напряжение $U_{\text{н0}}$ из основной системы уравнений электрического равновесия исходного многополюсника, получаем

$$\begin{aligned} l_1 &= \left(Y_{11} - \frac{Y_{1N}Y_{N1}}{Y_{NN}} \right) \dot{U}_{10} + \left(Y_{12} - \frac{Y_{1N}Y_{N2}}{Y_{NN}} \right) \dot{U}_{20} + \dots + \left(Y_{1, N-1} - \frac{Y_{1N}Y_{N, N-1}}{Y_{NN}} \right) \dot{U}_{N-1, 0}; \\ l_2 &= \left(Y_{21} - \frac{Y_{2N}Y_{N1}}{Y_{NN}} \right) \dot{U}_{10} + \left(Y_{22} - \frac{Y_{2N}Y_{N2}}{Y_{NN}} \right) \dot{U}_{20} + \dots + \left(Y_{2, N-1} - \frac{Y_{2N}Y_{N, N-1}}{Y_{NN}} \right) \dot{U}_{N-1, 0}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$I_{N-1} = \left(Y_{N-1, 1} - \frac{Y_{N-1, N} Y_{N1}}{Y_{NN}} \right) U_{10} + \left(Y_{N-1, 2} - \frac{Y_{N-1, N} Y_{N2}}{Y_{NN}} \right) U_{20} + \dots$$

$$\dots + \left(Y_{N-1, N-1} - \frac{Y_{N-1, N} Y_{N, N-1}}{Y_{NN}} \right) U_{N-1, 0}.$$

Система уравнений (7.17) может быть представлена в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_{N-1} \end{bmatrix} = Y_U \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \dots \\ U_{N-1, 0} \end{bmatrix},$$

где матрица

$$Y'_U = \begin{bmatrix} Y_{11} - \frac{Y_{1N}Y_{N1}}{Y_{NN}}; & Y_{12} - \frac{Y_{1N}Y_{N2}}{Y_{NN}}; & \dots; & Y_{1, N-1} - \frac{Y_{1N}Y_{N, N-1}}{Y_{NN}} \\ Y_{21} - \frac{Y_{2N}Y_{N1}}{Y_{NN}}; & Y_{22} - \frac{Y_{2N}Y_{N2}}{Y_{NN}}; & \dots; & Y_{2, N-1} - \frac{Y_{2N}Y_{N, N-1}}{Y_{NN}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N-1, 1} - \frac{Y_{N-1, N}Y_{N1}}{Y_{NN}}; & Y_{N-1, 2} - \frac{Y_{N-1, N}Y_{N2}}{Y_{NN}}; & \dots; & Y_{N-1, N-1} - \frac{Y_{N-1, N}Y_{N, N-1}}{Y_{NN}} \end{bmatrix}$$

получается из неопределенной матрицы проводимостей исходного многополюсника путем вычеркивания N -й строки и N -го столбца и замены остальных элементов Y_{ij} новыми Y'_{ij} , определяемыми с помощью соотношения

$$Y'_{ij} = Y_{ij} - Y_{iN}Y_{Nj}/Y_{NN} \quad (7.18)$$

Пример 7.7. Зная неопределенную матрицу проводимостей многополюсника, приведенного на рис. 7.8, а (см. пример 7.6), найдем неопределенную матрицу проводимостей Y'_{ij} многополюсника, который получается из исходного, если полосу 4 становится внутренним (рис. 7.8, б).

Неопределенная матрица проводимостей многополюсника, приведенного на рис. 7.8, б, формируется из неопределенной матрицы проводимостей исходного многополюсника путем вычеркивания строки 4 и столбца 4, а также замены остальных элементов новыми, рассчитанными с помощью выражения (7.18):

$$Y'_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} - \frac{Y_{14}Y_{41}}{Y_{44}} & Y_{12} - \frac{Y_{14}Y_{42}}{Y_{44}} & Y_{13} - \frac{Y_{14}Y_{43}}{Y_{44}} \\ Y_{21} - \frac{Y_{24}Y_{41}}{Y_{44}} & Y_{22} - \frac{Y_{24}Y_{42}}{Y_{44}} & Y_{23} - \frac{Y_{24}Y_{43}}{Y_{44}} \\ Y_{31} - \frac{Y_{34}Y_{41}}{Y_{44}} & Y_{32} - \frac{Y_{34}Y_{42}}{Y_{44}} & Y_{33} - \frac{Y_{34}Y_{43}}{Y_{44}} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Нетрудно убедиться, что сумма элементов любой строки и сумма элементов любого столбца матрицы Y_{ij} равны нулю.

Рассматривая основные уравнения многополюсника в форме Z , можно установить, что при размыкании какого-либо из внешних по отношению к многополюснику контуров, например k -го (контурный ток этого контура I_{kk} становится равным нулю), из неопределенной матрицы сопротивлений многополюсника вычеркивают k -ю строку и k -й столбец. Полученная в результате этого матрица сопротивлений $Z_{ij}^{(k)}$, как правило, не является особенной, поэтому основная система уравнений многополюсника, один из внешних контуров которого разомкнут, может быть разрешена относительно токов остальных контуров.

В отличие от неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей многополюсника матрицы $Z_{ij}^{(k)}$ и $Y_{ij}^{(k)}$, получаемые из матриц Z_{ij} и Y_{ij} путем вычеркивания строки и столбца, будем называть укороченными матрицами сопротивлений и проводимостей многополюсника.

При объединении k -го и N -го выводов многополюсника в один k -й вывод из неопределенной матрицы сопротивлений исходного многополюсника вычеркивают N -ю строку и N -й столбец, а остальные элементы исходной матрицы Z_{ij} заменяют новыми Z'_{ij} , рассчитанными по формуле $Z'_{ij} = Z_{ij} - Z_{iN}Z_{Nj}/Z_{NN}$.

Если какой-либо из полюсов многополюсника, например k -й, являющийся общим для k -го и l -го контуров, становится внутренним, то контуры k и l объединяются в один l -й контур. В этом случае в неопределенной матрице сопротивлений многополюсника вычеркивают k -ю строку и k -й столбец, а к элементам l -й строки и l -го столбца прибавляют соответствующие элементы k -й строки и k -го столбца.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЦ ПРОВОДИМОСТЕЙ И СОПРОТИВЛЕНИЙ МНОГОПОЛЮСНИКА

Основные уравнения произвольного линейного неавтономного многополюсника в формах Y и Z описывают зависимости между токами и напряжениями на зажимах этого многополюсника. Очевидно, что коэффициенты основных уравнений (Y и Z параметры многополюсника) должны быть связаны между собой соотношениями, позволяющими найти элементы одной из неопределенных матриц многополюсника по известным элементам другой. Определить эти соотношения путем сопоставления выражений для одноименных величин, например токов или напряжений полюсов, полученных из уравнений (7.7) и (7.14), невозможно, поскольку матрицы Z_{ij} и Y_{ij} являются особенными и уравнения (7.7) не могут быть разрешены относительно напряжений полюсов, а уравнения (7.14) — относительно токов, внешних по отношению к многополюснику контуров. Однако, как было установлено ранее, укороченные матрицы сопротивлений и проводимостей многополюсника не являются особенными и, следовательно, основные уравнения многополюсника, один из выводов которого выбран в качестве общего или один из внешних по отношению к которому контуров является разомкнутым, могут быть разрешены относительно одноименных величин.

Пример 7.8. Определим соотношения между Y - и Z -параметрами линейного неавтономного трехполюсника (рис. 7.9, а). Пусть неопределенная матрица проводимостей этого трехполюсника известна:

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

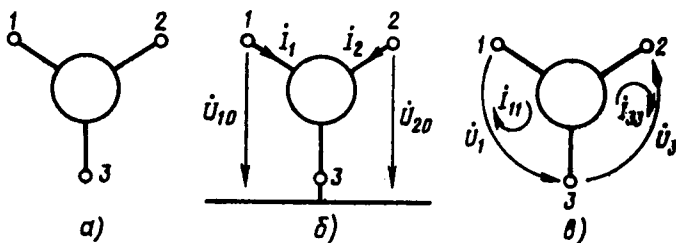


Рис. 7.9. К примеру 7.8

Выберем любой из полюсов трехполюсника, например полюс 3, в качестве общего (рис. 7.9, б) и найдем соответствующую этому случаю укороченную матрицу проводимостей:

$$Y_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

Основная система уравнений трехполюсника в данной схеме включения имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= Y_{11} \dot{U}_{10} + Y_{12} \dot{U}_{20}; \\ \lambda_2 &= Y_{21} \dot{U}_{10} - Y_{22} \dot{U}_{20}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Выразим токи полюсов трехполюсника λ_1, λ_2 через токи внешних контуров $\lambda_{11}, \lambda_{33}$ (рис. 7.9, в):

$$\lambda_1 = \lambda_{11}; \quad \lambda_2 = -\lambda_{33}. \quad (7.20)$$

а напряжения полюсов трехполюсника относительно базисного $\dot{U}_{10}, \dot{U}_{20}$ — через напряжения между полюсами $\dot{U}_1, \dot{U}_3$:

$$\dot{U}_{10} = \dot{U}_1; \quad \dot{U}_{20} = -\dot{U}_3. \quad (7.21)$$

Подставляя соотношения (7.20), (7.21) в (7.19) и решая полученную систему уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= Y_{11} \dot{U}_1 - Y_{12} \dot{U}_3; \\ -\lambda_{33} &= Y_{21} \dot{U}_1 - Y_{22} \dot{U}_3 \end{aligned}$$

относительно $\dot{U}_1, \dot{U}_3$, переходим от основных уравнений трехполюсника с общим полюсом 3 (рис. 7.9, б) к основным уравнениям трехполюсника с разомкнутым внешним контуром 2 (рис. 7.9, в):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Y_{22} \lambda_{11} / (Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}) + Y_{12} \lambda_{33} / (Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}); \\ \dot{U}_3 &= Y_{21} \lambda_{11} / (Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}) + Y_{11} \lambda_{33} / (Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}). \end{aligned}$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = Z_{ij}^{(2)} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$Z_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}} & \frac{Y_{12}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}} \end{bmatrix}$$

— укороченная матрица сопротивлений трехполюсника, внешний контур 2 которого разомкнут.

Дополняя укороченную матрицу еще одной строкой и одним столбцом, соответствующими разомкнутому контуру, и вынося из матрицы общий для всех элементов множитель, находим неопределенную матрицу сопротивлений рассматриваемого трехполюсника:

$$Z_{ij} = \frac{1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{22} & -(Y_{12} + Y_{22}) & Y_{12} \\ -(Y_{21} + Y_{22}) & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} & -(Y_{11} + Y_{12}) \\ Y_{21} & -(Y_{11} + Y_{21}) & Y_{11} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Полученные выражения для Z-параметров могут быть упрощены, если принять во внимание, что суммы элементов любой строки и элементов любого столбца матрицы Y_{ij} равны нулю:

$$Z_{ij} = \frac{1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{32} & Y_{12} \\ Y_{23} & Y_{33} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{31} & Y_{11} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.22)$$

Используя аналогичные преобразования, нетрудно выразить элементы неопределенной матрицы проводимостей трехполюсника через элементы неопределенной матрицы сопротивлений:

$$Y_{ij} = \frac{1}{Z_{11}Z_{33} - Z_{13}Z_{31}} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{33} & Z_{13} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{11} & Z_{21} \\ Z_{32} & Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7.23)$$

Как следует из выражений (7.22) и (7.23), взаимные преобразования неопределенных матриц проводимостей Y_{ij} и сопротивлений Z_{ij} многополюсника возможны только в том случае, когда укороченные матрицы проводимостей $Y_{ij}^{(k)}$ и сопротивлений $Z_{ij}^{(k)}$ не являются особенными.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПЕЙ С МНОГОПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Уравнения электрического равновесия линейных цепей, содержащих неавтономные многополюсники, формируют с помощью предложенных проф. В. П. Сигорским обобщенных методов узловых напряжений и контурных токов. Познакомимся с основными идеями обобщенного метода узловых напряжений на примере линейной цепи, содержащей один неавтономный трехполюсник. Если считать, что неопределенная матрица проводимостей трехполюсника известна

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (7.24)$$

а внешние выводы трехполосника 1, 2 и 3 подключены соответственно к узлам k , l и s цепи (рис. 7.10, а), то при изменении нумерации столбцов и строк матрицы (7.24) в соответствии с нумерацией узлов цепи и выборе в качестве базисного узла для отсчета напряжений внешних выводов трехполосника базисного узла рассматриваемой цепи напряжения внешних выводов трехполосника относительно базисного будут совпадать с узловыми напряжениями соответствующих узлов цепи, а токи внешних выводов трехполосника могут быть выражены через узловые напряжения исследуемой цепи:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} k \\ l \\ s \end{matrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{k0} \\ U_{l0} \\ U_{s0} \end{bmatrix}.$$

Токи и напряжения цепи не изменятся, если вместо выводов трехполосника к узлам k , l и s подключить источники тока J_1 , J_2 и J_3 :

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1 = Y_{11}U_{k0} + Y_{12}U_{l0} + Y_{13}U_{s0}; \\ J_2 &= I_2 = Y_{21}U_{k0} + Y_{22}U_{l0} + Y_{23}U_{s0}; \\ J_3 &= I_3 = Y_{31}U_{k0} + Y_{32}U_{l0} + Y_{33}U_{s0}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Преобразованная цепь содержит только идеализированные двухполосные элементы и для нее можно составить систему узловых уравнений

$$Y_{(ij)} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \vdots \\ U_{k0} \\ \vdots \\ U_{l0} \\ \vdots \\ U_{s0} \\ \vdots \\ U_{m0} \end{bmatrix} = J_{i0}, \quad (7.26)$$

где $m = q - 1$ — число независимых узлов цепи;

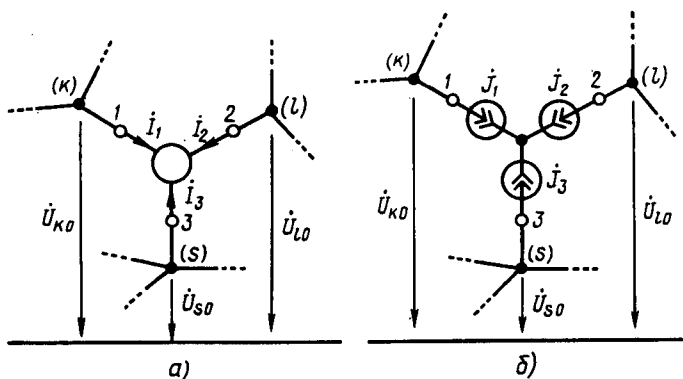


Рис. 7.10. К обоснованию обобщенного метода узловых напряжений

— матрица узловых проводимостей цепи;

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} J_{10} \\ J_{20} \\ \vdots \\ J_{k0} - J_1 \\ \vdots \\ J_{R0} - J_2 \\ \vdots \\ J_{s0} - J_3 \\ \vdots \\ J_{m0} \end{bmatrix}$$

Выражая токи источников тока J_1, J_2, J_3 через узловые напряжения цепи (7.25) и переносим соответствующие члены в левую часть уравнения (7.26), получаем

[illegible]

Как следует из (7.27), система узловых уравнений произвольной линейной цепи, содержащей неавтономный трехполосник, по форме совпадает с системой узловых уравнений вспомогательной цепи, которая получается из рассматриваемой цепи путем исключения этого трехполосника. Матрица-столбец узловых токов исходной цепи полностью совпадает с матрицей-столбцом узловых токов вспомогательной цепи, а матрица узловых проводимостей рассматриваемой цепи получается из матрицы узловых проводимостей вспомогательной цепи Y_{ij} путем добавления к ее элементам, лежащим на пересечении k -, l - и s -й строк и k -, l -, и s -го столбцов, соответствующих элементов неопределенной матрицы проводимостей неавтономного трехполосника.

В общем случае исследуемая цепь может содержать не один, а несколько многополосных элементов с произвольным числом выводов. Формирование уравнений электрического равновесия такой цепи согласно обобщенному методу узловых напряжений производят в следующем порядке:

- 1) выбирают базисный узел и нумеруют независимые узлы цепи;
- 2) изменяют нумерацию столбцов и строк неопределенных матриц проводимостей всех многополосников в соответствии с нумерацией узлов, к которым подключены выводы этих многополосников;
- 3) из неопределенных матриц проводимостей всех многополосников вычеркивают строки и столбцы, соответствующие тем выводам многополосника, которые соединены с базисным узлом (элементы этих столбцов и строк не учитывают при формировании узловых уравнений);
- 4) из исследуемой цепи удаляют все многополосники; для оставшейся вспомогательной цепи, содержащей только идеализированные двухполосные элементы, формируют систему узловых уравнений;
- 5) от узловых уравнений вспомогательной цепи переходят к узловым уравнениям исходной цепи, для чего последовательно рассматривают все входящие в цепь многополосники и элементы неопределенных матриц проводимостей многополосников суммируют с соответствующими элементами матрицы узловых проводимостей вспомогательной цепи.

Число независимых уравнений электрического равновесия, формируемых с помощью обобщенного метода узловых напряжений, не зависит от внутренней структуры входящих в цепь многополосников и определяется только числом независимых узлов внешней по отношению к многополосникам части цепи.

Отметим, что обобщенный метод узловых напряжений является весьма универсальным и не накладывает никаких ограничений на топологию цепи и число входящих в нее многополосных элементов.

Пример 7.9. Составим систему узловых уравнений усилительного каскада на полевом транзисторе, принципиальная электрическая схема которого приведена на рис. 7.11, а. Используем комплексную схему замещения каскада (рис. 7.11, б), где в качестве многополосника представлена модель полевого транзистора по переменному току в режиме малого сигнала.

Изменяя нумерацию столбцов и строк неопределенной матрицы проводимостей полевого транзистора (см. пример 7.1) согласно нумерации узлов рассматриваемой цепи, получаем

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} j\omega(C_{32} + C_{33}) & -j\omega C_{33} & -j\omega C_{30} \\ S - j\omega C_{33} & G_1 + j\omega(C_{33} + C_{30}) & -(S + G_1 + j\omega C_{30}) \\ -(S + j\omega C_{30}) & -(G_1 + j\omega C_{30}) & S + G_1 + j\omega(C_{32} + C_{30}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

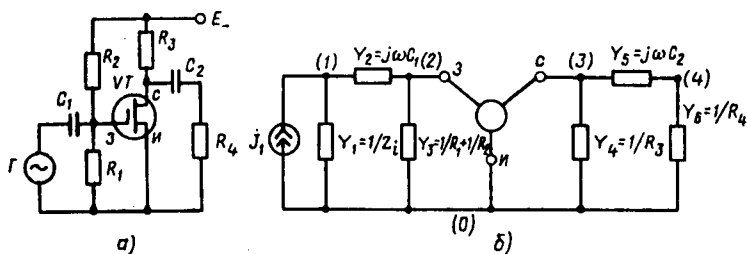


Рис. 7.11. К примеру 7.9

Строка и столбец неопределенной матрицы проводимостей, соответствующие выводу транзистора, соединенному с базисным узлом цепи, могут быть вычеркнуты из матрицы, так как элементы этой строки и этого столбца не учитываются при составлении уравнений электрического равновесия.

Составим систему узловых уравнений вспомогательной цепи, которая получается из исходной цепи (рис. 7.11, б) при удалении из нее многополюсного элемента:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_4 + Y_5 & -Y_5 \\ 0 & 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \\ \dot{U}_{40} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Прибавляя к элементам матрицы узловых проводимостей вспомогательной цепи, расположенным на пересечении столбцов 2, 3 и строк 2, 3, соответствующие элементы неопределенной матрицы проводимостей полевого транзистора, находим систему узловых уравнений рассматриваемой цепи:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + j\omega(C_{3\pi} + C_{3c}) & -j\omega C_{3c} & 0 \\ 0 & S - j\omega C_{3c} & Y_4 + Y_5 + G_i + j\omega(C_{3c} + C_{3\pi}) & -Y_5 \\ 0 & 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \\ \dot{U}_{40} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Пример 7.10. Используя обобщенный метод узловых напряжений, составим систему уравнений электрического равновесия комбинированного усилителя, содер-

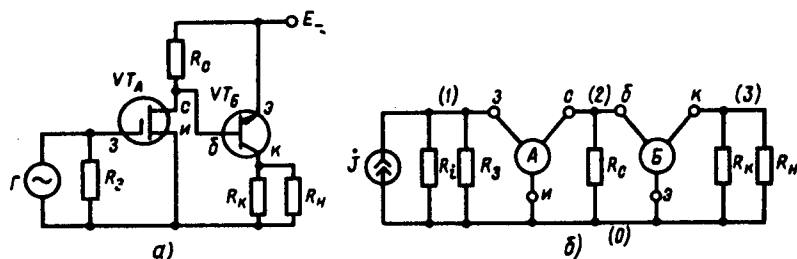


Рис. 7.12. К примеру 7.10

жащего полевой и биполярный транзисторы (рис. 7.12, а). Комплексная схема замещения усилителя в диапазоне низких частот приведена на рис. 7.12, б.

Неопределенная матрица проводимостей полевого транзистора VT_A была найдена в примере 7.1:

$$Y_{ijA} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} j\omega(C_{3\pi} + C_{3c}) & -j\omega C_{3c} & -j\omega C_{3\pi} \\ S - j\omega C_{3c} & G_i + j\omega(C_{3c} + C_{3\pi}) & -(S + G_i + j\omega C_{3\pi}) \\ -(S + j\omega C_{3\pi}) & -(G_i + j\omega C_{3\pi}) & S + G_i + j\omega(C_{3\pi} + C_{3c}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для получения неопределенной матрицы проводимостей биполярного транзистора VT_B воспользуемся неопределенной матрицей сопротивлений этого транзистора (см. пример 7.2) и формулами перехода (7.23):

$$Y_{ijB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 3 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (R_6 + R_K)/\Delta_T & -R_6/\Delta_T & -R_K/\Delta_T \\ -(R_6 + R_m)/\Delta_T & (R_3 + R_6)/\Delta_T & (R_m - R_3)/\Delta_T \\ (R_m - R_K)/\Delta_T & -R_3/\Delta_T & (R_K + R_3 - R_m)/\Delta_T \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где $\Delta_T = (R_K + R_6)R_3 + (R_K - R_m)R_6$. Составляя систему узловых уравнений вспомогательной цепи

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/R_i + 1/R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_K + 1/R_N \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и суммируя элементы неопределенных матриц проводимостей транзисторов с соответствующими элементами матрицы узловых проводимостей этой цепи, получаем окончательно

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1/R_1 + 1/R_3 + & -j\omega C_{zc} & 0 \\ +j\omega(C_{zn} + C_{zc}) & & \\ S - j\omega C_{zc} & 1/R_c + G_1 + j\omega(C_{zc} + C_{cn}) + & -R_2/\Delta_T \\ & + (R_x + R_3 - R_m)/\Delta_T & \\ 0 & (R_m - R_3)/\Delta_T & 1/R_x + 1/R_n + \\ & & + (R_3 + R_6)/\Delta_T \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обобщенный метод контурных токов имеет несколько меньшую универсальность, чем обобщенный метод узловых напряжений, и может применяться только при анализе цепей, схема замещения которых является планарной. Формирование уравнений электрического равновесия произвольной линейной цепи, содержащей один или несколько неавтономных многополюсников, в соответствии с обобщенным методом контурных токов выполняется в такой последовательности:

- 1) нумеруются все контуры, образуемые внутренними ячейками цепи, направление обхода этих контуров выбирают одинаковым — по часовой стрелке;
- 2) изменяют нумерацию столбцов и строк неопределенных матриц сопротивлений многополюсников в соответствии с нумерацией соответствующих контуров цепи; если одна из сторон многополюсника оказывается не связанной ни с одной из внутренних ячеек цепи, то соответствующим строке и столбцу присваивают номер 0, элементы этих строк и столбцов не учитывают при составлении уравнений электрического равновесия цепи;
- 3) из рассматриваемой цепи удаляют все многополюсные элементы, а точки присоединения полюсов каждого из них к остальной части цепи соединяют между собой, образуя один узел: очевидно, что число контуров полученной таким образом вспомогательной цепи равно числу контуров исходной цепи;
- 4) используя метод контурных токов, формируют систему уравнений электрического равновесия вспомогательной цепи, состоящей только из идеализированных двухполюсных элементов;
- 5) от контурных уравнений вспомогательной цепи переходят к контурным уравнениям исследуемой цепи, для чего элементы неопределенных матриц сопротивлений многополюсников суммируют с соответствующими элементами матрицы контурных сопротивлений вспомогательной цепи.

Пример 7.11. Используя обобщенный метод контурных токов, составим систему уравнений электрического равновесия усилительного каскада (см. рис. 7.11, а), комплексная схема замещения которого приведена на рис. 7.13.

Для формирования системы контурных уравнений необходимо определить матрицу Z -параметров полевого транзистора. Воспользуемся для этой цепи неопределенной матрицей проводимостей полевого транзистора (см. пример 7.1) и формулами перехода (7.22):

$$Z_{ij} = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ G_1 + j\omega(C_{zc} + C_{cn}) & -(G_1 + j\omega C_{cn}) & -j\omega C_{zc} \\ -(S + G_1 + j\omega C_{cn}) & S + G_1 + j\omega(C_{cn} + C_{zn}) & -j\omega C_{zn} \\ S - j\omega C_{zc} & -(S + j\omega C_{zn}) & j\omega(C_{zn} + C_{zc}) \end{array} \right],$$

где $\Delta = j\omega C_{zn}(G_1 + j\omega C_{zc} + j\omega C_{cn}) + j\omega C_{zc}(S + G_1 + j\omega C_{cn})$.

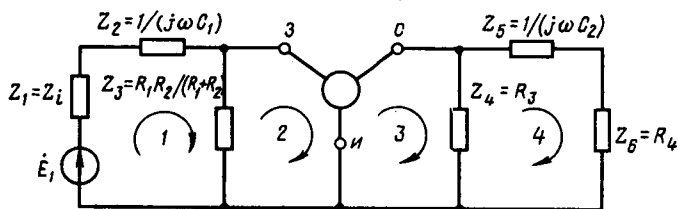


Рис. 7.13. К примеру 7.11

Нумерация сторон многополюсника, а следовательно, и нумерация строк и столбцов неопределенной матрицы сопротивлений произведена в соответствии с рис. 7.5 и 7.9. Выберем нумерацию контуров рассматриваемой цепи, как указано на рис. 7.13, и соответственно изменим нумерацию строк и столбцов неопределенной матрицы сопротивлений полевого транзистора:

$$Z_{ij} = \frac{1}{\Delta} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_i + j\omega(C_{зс} + C_{сн}) & -(G_i + j\omega C_{сн}) & -j\omega C_{зс} \\ -(S + G_i + j\omega C_{сн}) & S + G_i + j\omega(C_{сн} + C_{зп}) & -j\omega C_{зп} \\ S - j\omega C_{зс} & -(S + j\omega C_{зп}) & j\omega(C_{зп} + C_{зс}) \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Удалим из исследуемой цепи многополюсный элемент, точки присоединения его выводов соединим между собой и составим систему контурных уравнений для полученной таким образом вспомогательной цепи

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 & 0 & 0 \\ -Z_3 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_4 & -Z_4 \\ 0 & 0 & -Z_4 & Z_4 + Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \\ \dot{I}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Прибавляя элементы неопределенной матрицы сопротивлений полевого транзистора, расположенные на пересечениях строк 2, 3 со столбцами 2, 3, к соответствующим элементам матрицы контурных сопротивлений вспомогательной цепи, получаем систему контурных уравнений исследуемой цепи:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 & 0 & 0 \\ -Z_3 & Z_3 + [G_i + j\omega \times \\ & \times (C_{зс} + C_{сн})]/\Delta & -j\omega C_{зс}/\Delta & 0 \\ 0 & (S - j\omega C_{зс})/\Delta & Z_4 + [j\omega \times \\ & \times (C_{зп} + C_{зс})]/\Delta & -Z_4 \\ 0 & 0 & -Z_4 & Z_4 + Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \\ \dot{I}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

§ 7.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ПЕРВИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Значительное место в теории цепей занимает исследование многополюсников с двумя сторонами (2×2 -полюсников), которые в отечественной литературе называются **проходными четырехполюсниками**. В виде проходных четырехполюсников могут быть представлены различные устройства, имеющие две пары внешних зажимов, служащих для подключения источника энергии и нагрузки. К исследованию проходных четырехполюсников сводятся задачи определения комплексных частотных и операторных характеристик произвольных цепей, в том числе задача нахождения параметров неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей неавтономных многополюсников. Как и все многополюсники, проходные четырехполюсники подразделяют на линейные и нелинейные, активные и пассивные, автономные и неавтономные, взаимные и невзаимные. Кроме того, различают симметричные и несимметричные, уравновешенные и неуравновешенные проходные четырехполюсники.

К *симметричным* относятся такие проходные четырехполюсники, у которых с помощью внешних измерений невозможно установить различие между входными $1 - 1'$ и выходными $2 - 2'$ зажимами. Токи и напряжения цепи, к которой подключен симметричный четырехполюсник, не изменятся, если пары зажимов $1 - 1'$ и $2 - 2'$ поменять местами. Четырехполюсники, не обладающие такими свойствами, являются *несимметричными*. Очевидно, что все невзаимные четырехполюсники относятся к несимметричным. Достаточным условием симметричности четырехполюсника является симметричность его схемы относительно поперечной (вертикальной) оси $A - A$ (рис. 7.14, а). Так, четырехполюсники, схемы которых приведены на рис. 7.14, б, в, будут симметричными, если $Z_1 = Z_3$, $Y_1 = Y_3$, и несимметричными, если $Z_1 \neq Z_3$, $Y_1 \neq Y_3$.

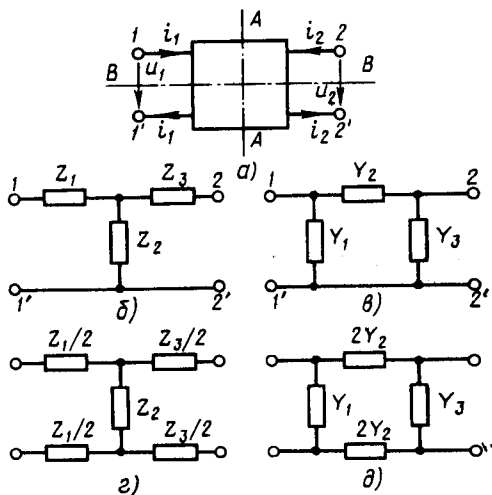


Рис. 7.14. К определению симметричного и несимметричного, уравновешенного и неуравновешенного четырехполюсников (а); примеры симметричных и несимметричных, уравновешенных (б, в) и неуравновешенных (г, д) четырехполюсников

В зависимости от того, изменятся или не изменятся токи и напряжения цепи, к которой подключен четырехполюсник, при взаимной замене зажимов 1 и $1'$, 2 и $2'$, т. е. при «повороте» четырехполюсника относительно продольной (горизонтальной) оси $B-B$ (рис. 7.14, а), различают *уравновешенные* и *неуравновешенные* проходные четырехполюсники.

Достаточным условием уравновешенности четырехполюсника является симметричность его схемы относительно продольной оси. Четырехполюсники, схемы которых приведены на рис. 7.14, г, д, уравновешенные. Если один из внешних зажимов четырехполюсника является общим для обеих сторон, то такой четырехполюсник является *предельно неуравновешенным* (рис. 7.14, б, в).

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ НЕАВТОНОМНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Основные уравнения проходных четырехполюсников составляются в терминах токов и напряжений внешних по отношению к четырехполюсникам ветвей, подключенных к зажимам $1-1'$ и $2-2'$. В зависимости от решаемой задачи положительные направления токов этих ветвей можно выбирать различным образом (рис. 7.15). Будем обозначать $i_1 \doteq I_1$ и $i_2 \doteq I_2$ — токи, втекающие в четырехполюсник через зажимы 1 и 2 , и $i_1' = -i_1 \doteq I_1'$, $i_2' = -i_2 \doteq I_2'$ — токи, вытекающие через эти зажимы. Токи и напряжения, фигурирующие в основных уравнениях проходных четырехполюсников, не совпадают непосредственно с токами и напряжениями, принятыми при рассмотрении неопределенных схем включения многополюсников (см. рис. 7.3, а, б), но могут быть выражены через них с помощью простых соотношений.

В связи с тем что число независимых основных уравнений многополюсника равно числу его независимых сторон, зависимость между токами и напряжениями на зажимах проходного четырехполюсника может быть описана с помощью системы из двух независимых основных уравнений. Вид этих уравнений зависит от того, какие две величины из четырех токов и напряжений рассматриваются в качестве независимых переменных, а какие — в качестве зависимых. Учитывая, что число сочетаний из четырех токов и напряжений по два равно шести, приходим к заключению, что основные уравнения проходного четырехполюсника могут быть записаны в шести различных формах.

Форма Y :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ I_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2, \end{aligned} \quad (7.28)$$

форма Z :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2; \end{aligned} \quad (7.29)$$

форма H :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2, \end{aligned} \quad (7.30)$$

форма G :

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= G_{11} \dot{U}_1 + G_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= G_{21} \dot{U}_1 + G_{22} \dot{I}_2, \end{aligned} \quad (7.31)$$

форма A :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2, \end{aligned} \quad (7.32)$$

форма B :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11} \dot{U}_1 + B_{12} \dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 &= B_{21} \dot{U}_1 + B_{22} \dot{I}_1. \end{aligned} \quad (7.33)$$

При составлении основных уравнений проходного четырехполюсника в формах Y , Z , H и G положительные направления токов и напряжений выбирают в соответствии с рис. 7.15, а, при составлении основных уравнений в форме A — согласно рис. 7.15, б, а при составлении основных уравнений в форме B — в соответствии с рис. 7.15, в.

Коэффициенты основных уравнений (7.28) — (7.33) называются соответственно Y -, Z -, H -, G -, A - и B -параметрами четырехполюсника.

Как и любые первичные параметры линейных неавтономных многополюсников, каждый из этих параметров имеет физический смысл какой-либо комплексной частотной характеристики проходного четырехполюсника, определяемой в режиме короткого замыкания или холостого хода.

Например, параметр $Y_{11} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1 | \dot{U}_2 = 0$ имеет физический смысл комплексной входной проводимости четырехполюсника со стороны зажимов 1 — 1' в режиме короткого замыкания на зажимах 2 — 2', а параметр $A_{11} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 | \dot{I}_2 = 0$ — физический смысл величины, обратной комплексному коэффициенту передачи по напряжению

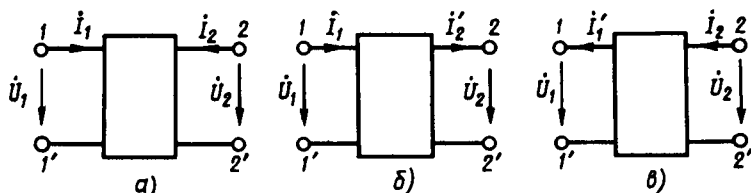


Рис. 7.15. Варианты выбора положительных направлений токов и напряжений проходного четырехполюсника

от зажимов 1 — 1' к зажимам 2 — 2' при холостом ходе на зажимах 2 — 2'.

Математически системы уравнений (7.28) — (7.33) являются равносильными, поэтому коэффициенты уравнений должны быть связаны между собой с помощью элементарных алгебраических соотношений. Для определения этих соотношений соответствующие уравнения должны быть разрешены относительно одних и тех же токов и напряжений. Например, разрешая уравнения (7.28) относительно напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Y_{22}\dot{I}_1/\Delta_Y + (-Y_{12})\dot{I}_2/\Delta_Y; \\ \dot{U}_2 &= -Y_{21}\dot{I}_1/\Delta_Y + Y_{11}\dot{I}_2/\Delta_Y,\end{aligned}\quad (7.34)$$

где $\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ — определитель основной системы уравнений в форме Y и сравнивая коэффициенты уравнений (7.29) и (7.34), Z -параметры неавтономного проходного четырехполюсника можно выразить через Y -параметры того же четырехполюсника:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{22}/\Delta_Y & -Y_{12}/\Delta_Y \\ -Y_{21}/\Delta_Y & Y_{11}/\Delta_Y \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Соотношения типа (7.35) называются **формулами перехода** (см. приложение 2). Определители каждой из систем основных уравнений также могут быть выражены через определители или коэффициенты других систем уравнений (см. приложение 3).

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕАВТОНОМНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Первичные параметры проходных четырехполюсников, как и первичные параметры любых неавтономных многополюсников, могут быть определены в соответствии с их физическим смыслом по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания.

Пример 7.12. Найдем A -параметры Γ -образного четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 7.16, а.

Как следует из основных уравнений четырехполюсника в форме A (7.32), параметры $A_{11} = \dot{U}_1/\dot{U}_2|_{\dot{I}_2=0}$ и $A_{21} = \dot{I}_1/\dot{U}_2|_{\dot{I}_2=0}$ определяются в режиме холостого хода

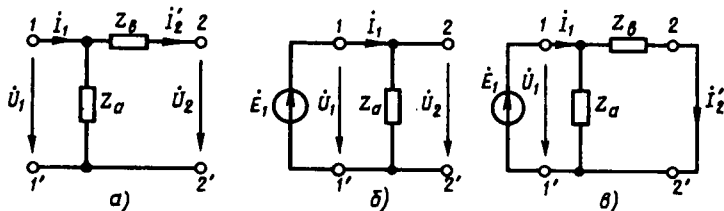


Рис. 7.16. К примеру 7.12

(рис. 7.16, б), а параметры $A_{12} = U_1/I_2|_{U_2=0}$ и $A_{22} = I_1/I_2|_{U_2=0}$ — в режиме короткого замыкания на зажимах 2 — 2' (рис. 7.16, в). Из схем, приведенных на рис. 7.16, б, в, видно, что в режиме холостого хода

$$U_2 = U_1 = E_1; \quad I_1 = U_1/Z_a = E_1/Z_a$$

а в режиме короткого замыкания

$$I_2 = U_1/Z_b = E_1/Z_b; \quad I_1 = U_1(1/Z_a + 1/Z_b) = (Z_a + Z_b)E_1/(Z_a Z_b).$$

Используя полученные соотношения, находим

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = E_1 Z_b / E_1 = Z_b,$$

$$A_{21} = E_1 / (Z_a E_1) = 1/Z_a;$$

$$A_{22} = E_1 (Z_a + Z_b) Z_b / (Z_a Z_b E_1) = 1 + Z_b/Z_a$$

или

$$A = \begin{bmatrix} 1 & Z_b \\ 1/Z_a & 1 + Z_b/Z_a \end{bmatrix}.$$

Пример 7.13. Определим H -параметры Γ -образного четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 7.17, а

Из основных уравнений четырехполюсника в форме H (7.30) следует, что параметры четырехполюсника $H_{11} = U_1/I_1|_{U_2=0}$ и $H_{21} = I_2/I_1|_{U_2=0}$ рассчитываются в ре-

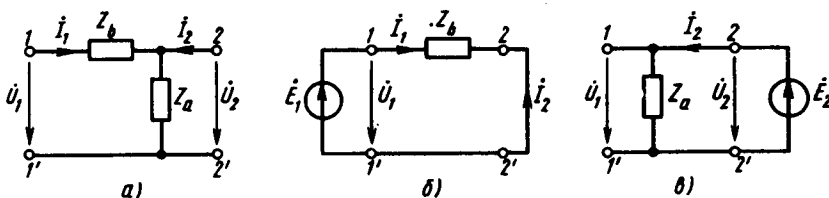


Рис. 7.17. К примеру 7.13

жиме короткого замыкания на зажимах 2 — 2', а параметры $H_{12} = U_1/U_2|_{I_2=0}$ и $H_{22} = I_2/U_2|_{I_2=0}$ — в режиме холостого хода на зажимах 1 — 1'. Выполняя расчетным путем опыты короткого замыкания (рис. 7.17, б) и холостого хода (рис. 7.17, в), находим матрицу H -параметров рассматриваемого четырехполюсника:

$$H = \begin{bmatrix} Z_b & 1 \\ -1 & 1/Z_a \end{bmatrix}.$$

Пример 7.14. Найдем Z -параметры симметричного мостового четырехполюсника (рис. 7.18, а).

Анализируя основную систему уравнений четырехполюсника в форме Z (7.29), нетрудно установить, что параметры $Z_{11} = U_1/I_1|_{I_2=0}$ и $Z_{21} = U_2/I_1|_{I_2=0}$ определяются в режиме холостого хода на зажимах 2 — 2' (рис. 7.18, б), а параметры $Z_{12} = U_1/I_2|_{I_1=0}$ и $Z_{22} = U_2/I_2|_{I_1=0}$ — в режиме холостого хода на зажимах 1 — 1' (рис. 7.18, в). В режиме холостого хода на зажимах 2 — 2'

$$I_1 = 2U_1/(Z_1 + Z_2); \quad U_2 = (Z_2 - Z_1)I_1/2,$$

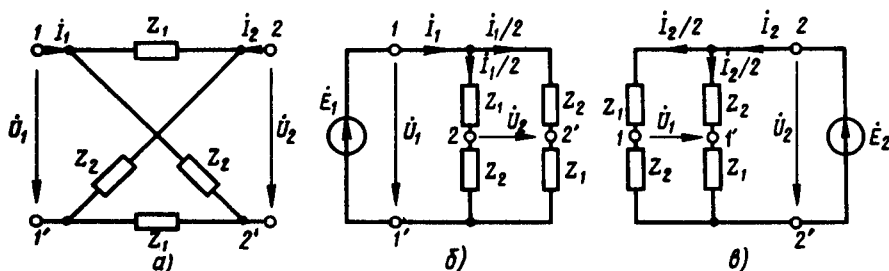


Рис. 7.18. К примеру 7.14

а в режиме холостого хода на зажимах 1 — 1'

$$i_2 = 2\dot{U}_2 / (Z_1 + Z_2); \quad \dot{U}_1 = (Z_2 - Z_1)i_2/2,$$

откуда

$$Z = \begin{bmatrix} (Z_2 + Z_1)/2; & (Z_2 - Z_1)/2 \\ (Z_2 - Z_1)/2; & (Z_2 + Z_1)/2 \end{bmatrix}.$$

Данный метод определения первичных параметров проходных четырехполосников является наиболее универсальным и широко используется на практике. В то же время процесс нахождения первичных параметров проходных четырехполосников во многих случаях может быть существенно упрощен за счет использования ряда других, менее общих методов. В частности, если для рассматриваемого четырехполосника известны первичные параметры, образующие систему любого типа, то для нахождения первичных параметров любого другого типа целесообразно воспользоваться формулами перехода.

Пример 7.15. Определим A -параметры Г-образного четырехполосника (см. рис. 7.17, а).

Используя известные значения H -параметров данного четырехполосника (см. пример 7.13) и применяя формулы перехода (см. приложение 2), находим

$$A_{11} = -\Delta_H / H_{21} = 1 + Z_b / Z_a; \quad A_{12} = -H_{11} / H_{21} = Z_b;$$

$$A_{21} = -H_{22} / H_{21} = 1 / Z_a; \quad A_{22} = -1 / H_{21} = 1.$$

Пример 7.16. Определим A -параметры симметричного мостового четырехполосника, рассмотренного в примере 7.14.

Используя формулы перехода, получаем

$$A_{11} = Z_{11} / Z_{21} = (Z_2 + Z_1) / (Z_2 - Z_1);$$

$$A_{12} = \Delta_Z / Z_{21} = 2Z_1 Z_2 / (Z_2 - Z_1);$$

$$A_{21} = 1 / Z_{21} = 2 / (Z_2 - Z_1);$$

$$A_{22} = Z_{22} / Z_{21} = (Z_2 + Z_1) / (Z_2 - Z_1).$$

Первичные параметры несложных четырехполосников могут быть найдены путем преобразования соответствующих уравнений электрического равновесия непосредственно к одной из форм записи основных уравнений четырехполосника (7.28) — (7.33).

Пример 7.17. Найдем A -параметры идеального трансформатора (см. рис. 2.61).

Токи и напряжения первичной и вторичной обмоток идеального трансформатора связаны соотношениями (2.190), представляющими собой не что иное, как основные уравнения трансформатора в форме A . Сравнивая уравнения (2.190) и (7.32), получаем

$$A = \begin{bmatrix} 1/n; & 0 \\ 0; & n \end{bmatrix}.$$

Пример 7.18. Определим Z -параметры четырехполосника рис. 7.19, a . Подключая к зажимам $1-1'$ и $2-2'$ источники напряжения $E_1 = U_1$, $E_2 = U_2$ и составляя систему уравнений электрического равновесия полученной цепи (рис. 7.19, b) по методу контурных токов

$$(Z_1 + Z_2)I_{11} + Z_2 I_{22} = E_1;$$

$$(Z_2 + Z_3)I_{22} + Z_2 I_{11} = E_2 - Z_4 I_{11},$$

получаем

$$U_1 = (Z_1 + Z_2)I_1 + Z_2 I_2;$$

$$U_2 = (Z_2 + Z_4)I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2,$$

где $I_{11} = I_1$, $I_{22} = I_2$.

Следовательно,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2; & Z_2 \\ Z_2 + Z_4; & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}.$$

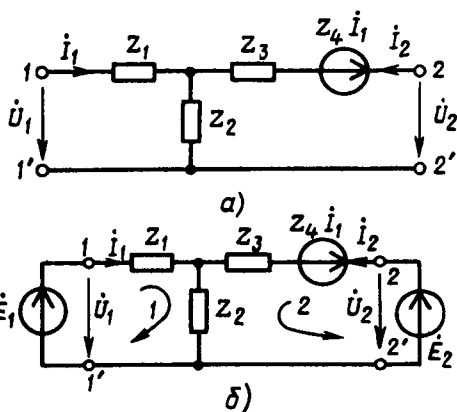


Рис. 7.19. К примеру 7.18

Если для какого-либо многополосника известна неопределенная матрица проводимостей или сопротивлений, то параметры проходного четырехполосника, который получается из данного многополосника при определенном выборе пар входных и выходных зажимов, могут быть получены с использованием ранее рассмотренных свойств неопределенных матриц первичных параметров неавтономных многополосников.

Пример 7.19. Определим Y -параметры проходного четырехполосника, схема которого изображена на рис. 7.20.

Сравнивая схемы, приведенные на рис. 7.20 и 7.5, a , устанавливаем, что проходной четырехполосник исследуемого типа получается из многополосника, рассмотренного в примере 7.1 при $U_{30} = 0$ и $S = Y_4$. Следовательно, матрица Y -параметров проходного четырехполосника может быть найдена из неопределенной матрицы проводимостей многополосника путем вычеркивания строки и столбца, соответствующих выводу 3, и замены S на Y_4 :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ Y_4 - Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}.$$

Пример 7.20. У неавтономного многополюсника (рис. 7.21, а) выделены две пары зажимов: 1 — 5 и 2 — 3. Найдём Z-параметры полученного проходного четырехполюсника (рис. 7.21, б) по известной матрице сопротивлений исходного многополюсника*:

$$Z_{ij}^* = \begin{bmatrix} Z_{11}^* & Z_{12}^* & Z_{13}^* & Z_{14}^* & Z_{15}^* \\ Z_{21}^* & Z_{22}^* & Z_{23}^* & Z_{24}^* & Z_{25}^* \\ Z_{31}^* & Z_{32}^* & Z_{33}^* & Z_{34}^* & Z_{35}^* \\ Z_{41}^* & Z_{42}^* & Z_{43}^* & Z_{44}^* & Z_{45}^* \\ Z_{51}^* & Z_{52}^* & Z_{53}^* & Z_{54}^* & Z_{55}^* \end{bmatrix}.$$

Из сравнения рис. 7.21, а и б видно, что проходной четырехполюсник получается из многополюсника путем размыкания сторон 2, 4 и 5. Матрицу Z-параметров многополюсника с разомкнутыми сторонами найдем из неопределенной матрицы

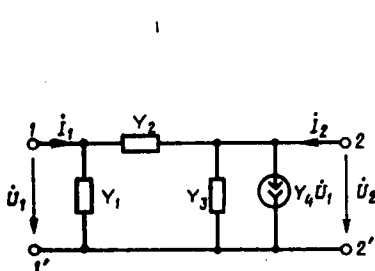


Рис. 7.20. К примеру 7.19

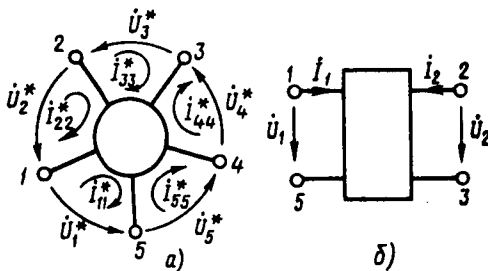


Рис. 7.21. К примеру 7.20

сопротивлений после вычеркивания столбцов и строк, соответствующих разомкнутым сторонам:

$$Z_{ij}^{*(2, 4, 5)} = \begin{bmatrix} Z_{11}^* & Z_{13}^* \\ Z_{31}^* & Z_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Основная система уравнений многополюсника с разомкнутыми сторонами 2, 4, 5 имеет вид

$$\begin{aligned} U_1^* &= Z_{11}^* I_{11}^* + Z_{13}^* I_{33}^*, \\ U_3^* &= Z_{31}^* I_{11}^* + Z_{33}^* I_{33}^*. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения между токами и напряжениями проходного четырехполюсника и исходного многополюсника с разомкнутыми сторонами $U_1^* = U_1$; $U_3^* = -U_2$; $I_{11}^* = I_1$; $I_{33}^* = -I_2$, получаем

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}^* I_1 - Z_{13}^* I_2, \\ U_2 &= -Z_{31}^* I_1 + Z_{33}^* I_2, \end{aligned}$$

*Все величины, относящиеся к исходному многополюснику, выделены звездочкой.

откуда

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11}^* & -Z_{13}^* \\ -Z_{31}^* & Z_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Первичные параметры линейного неавтономного проходного четырехполюсника могут быть выражены через элементы матриц контурных сопротивлений или узловых проводимостей. Рассмотрим произвольный линейный неавтономный проходной четырехполюсник (рис. 7.22). Используя теорему компенсации, заменим ветви, подключенные к зажимам $1-1'$ и $2-2'$, идеальными источниками напряжения $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ и $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$. Выберем дерево полученной цепи таким образом, чтобы ветви, содержащие источники напряжения, не вошли в состав ветвей дерева. Пронумеруем независимые контуры так, чтобы контур, в состав которого входит источник $\dot{E}_1$, был первым, а контур с источником $\dot{E}_2$ — вторым (общее число контуров равно n). В связи с тем что рассматриваемый четырехполюсник неавтономный и, следовательно, не содержит неуправляемых источников энергии, контурные ЭДС всех контуров, кроме первого и второго, равны нулю ($\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$, $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2$, $\dot{E}_{33} = \dot{E}_{44} = \dots = \dot{E}_{nn} = 0$).

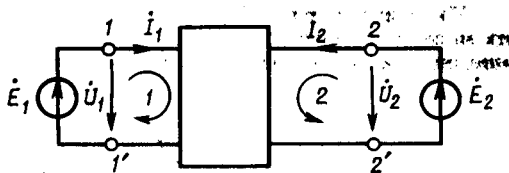


Рис. 7.22. К определению Y -параметров четырехполюсника через элементы матрицы контурных сопротивлений

Составляя систему контурных уравнений цепи и решая ее относительно токов первого $i_{11} = i_1$ и второго $i_{22} = i_2$ контуров, получаем

$$\begin{aligned} i_1 &= \Delta_{11} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{21} \dot{E}_2 / \Delta = \Delta_{11} \dot{U}_1 / \Delta + \Delta_{21} \dot{U}_2 / \Delta; \\ i_2 &= \Delta_{12} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{22} \dot{E}_2 / \Delta = \Delta_{12} \dot{U}_1 / \Delta + \Delta_{22} \dot{U}_2 / \Delta. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Из уравнений (7.36) и (7.28) следует, что Y -параметры произвольного линейного неавтономного проходного четырехполюсника могут быть выражены через определитель Δ и алгебраические дополнения элементов Δ_{ij} системы контурных уравнений четырехполюсника:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \Delta_{11} / \Delta; & Y_{12} &= \Delta_{21} / \Delta; \\ Y_{21} &= \Delta_{12} / \Delta; & Y_{22} &= \Delta_{22} / \Delta. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Аналогичным образом, применяя метод узловых напряжений, Z -параметры неавтономного проходного четырехполюсника могут быть найдены через определитель Δ и алгебраические дополнения элементов Δ_{ij} матрицы узловых проводимостей:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \Delta_{11} / \Delta; & Z_{12} &= \Delta_{21} / \Delta; \\ Z_{21} &= \Delta_{12} / \Delta; & Z_{22} &= \Delta_{22} / \Delta. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Используя соотношения (7.37), (7.38) и формулы перехода (см. приложение 2), любой из первичных параметров проходного четырехполюсника можно выразить либо через элементы его матрицы контурных сопротивлений, либо через элементы его матрицы узловых проводимостей.

Рассмотренный метод не нашел широкого применения для практического определения первичных параметров четырехполюсников, однако является удобным при исследовании общих свойств матриц первичных параметров проходных четырехполюсников. В частности, анализируя выражения (7.37) и (7.38), можно установить, что матрицы Y - и Z -параметров взаимного четырехполюсника ($\Delta_{12} = \Delta_{21}$) симметричны относительно главной диагонали:

$$Y_{12} = Y_{21}; \quad (7.39)$$

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad (7.40)$$

а матрицы Y - и Z -параметров симметричного четырехполюсника — относительно обеих диагоналей:

$$Y_{12} = Y_{21}; \quad Y_{11} = Y_{22}; \quad (7.41)$$

$$Z_{12} = Z_{21}; \quad Z_{11} = Z_{22}. \quad (7.42)$$

С помощью формул перехода и выражений (7.39) — (7.42) аналогичные соотношения устанавливаются между A -, H -, G - и B -параметрами взаимного и симметричного четырехполюсников (см. приложение 4).

Следовательно, из четырех первичных параметров, образующих любую из систем первичных параметров проходного неавтономного четырехполюсника, в случае взаимного четырехполюсника только три, а в случае симметричного четырехполюсника — только два параметра линейно независимы.

ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СОСТАВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Составным называется такой четырехполюсник, который может быть представлен как соединение нескольких более простых (элементарных) четырехполюсников. Если при соединении элементарных четырехполюсников не происходит изменения соотношений между напряжениями и токами на их зажимах, то первичные параметры составного четырехполюсника могут быть выражены через первичные параметры исходных четырехполюсников. Соединение элементарных четырехполюсников, удовлетворяющее такому условию, называется регулярным. При этом токи, втекающие через зажимы 1 и 2 каждого элементарного четырехполюсника, равны токам, вытекающим соответственно через зажимы 1' и 2'. Рассмотрим основные виды соединений элементарных четырехполюсников и получим соотношения между их первичными параметрами и параметрами составных четырехполюсников.

Каскадное соединение. При каскадном, или цепочечном, соединении четырехполюсников A и B (рис. 7.23) выходные зажимы одного из них (в данном случае четырехполюсника A) соединены

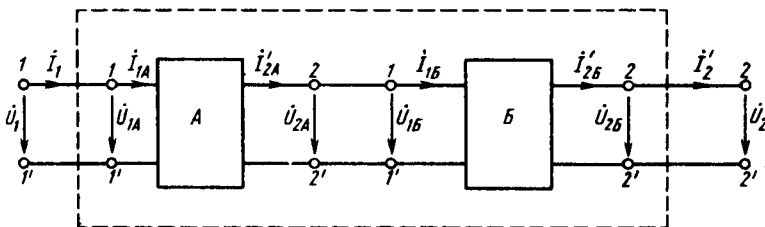


Рис. 7.23. Каскадное соединение проходных четырехполюсников

с входными зажимами другого четырехполюсника (Б). Ток и напряжение на зажимах 2 — 2' четырехполюсника А равны соответственно току и напряжению на зажимах 1 — 1' четырехполюсника Б*:

$$I_{1Б} = I_{2А}; \quad U_{1Б} = U_{2А}. \quad (7.43)$$

Ток I_1 и напряжение U_1 на входе составного четырехполюсника (выделен штриховой линией на рис. 7.23) совпадают с током $I_{1А}$ и напряжением $U_{1А}$:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1А} \\ I_{1А} \end{bmatrix}, \quad (7.44)$$

а ток I'_2 и напряжение U_2 на выходе составного четырехполюсника — с током $I'_{2Б}$ и напряжением $U_{2Б}$:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{2Б} \\ I'_{2Б} \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

Из рис. 7.23 видно, что при каскадном соединении четырехполюсников ток, втекающий через один из зажимов любой из сторон четырехполюсников А и Б, равен току, вытекающему через другой зажим той же стороны. Поэтому каскадное соединение любых четырехполюсников является регулярным.

Предположим, что первичные параметры элементарных четырехполюсников известны, и составим их основные уравнения в форме А:

$$\begin{bmatrix} U_{1А} \\ I_{1А} \end{bmatrix} = A_A \begin{bmatrix} U_{2А} \\ I'_{2А} \end{bmatrix}; \quad (7.46)$$

$$\begin{bmatrix} U_{1Б} \\ I_{1Б} \end{bmatrix} = A_B \begin{bmatrix} U_{2Б} \\ I'_{2Б} \end{bmatrix}. \quad (7.47)$$

*Здесь и в дальнейшем индексы «А» и «Б» присвоены всем величинам, относящимся к элементарным четырехполюсникам А и Б.

Используя соотношения (7.43) — (7.47), выразим ток и напряжение на входе составного четырехполюсника через ток и напряжение на его выходе:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{I}_{1A} \end{bmatrix} = A_A \begin{bmatrix} \dot{U}_{2A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} = A_A \begin{bmatrix} \dot{U}_{1B} \\ \dot{I}_{1B} \end{bmatrix} = A_A A_B \begin{bmatrix} \dot{U}_{2B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = A_A A_B \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (7.48)$$

Сопоставляя выражения (7.48) и (7.32), устанавливаем, что матрица A -параметров составного четырехполюсника равна произведению матриц A -параметров входящих в него элементарных четырехполюсников A и B :

$$A = A_A A_B. \quad (7.49)$$

Выполняя аналогичные преобразования, можно показать, что при каскадном соединении N четырехполюсников матрица A -параметров составного четырехполюсника равна произведению матрицы A -параметров всех входящих в него элементарных четырехполюсников:

$$A = A_1 A_2 \dots A_N. \quad (7.50)$$

В связи с тем что произведение матриц в общем случае не подчиняется переместительному закону, порядок расположения матриц в выражении (7.50) должен соответствовать порядку следования четырехполюсников в цепочке.

Пример 7.21

Пример 7.21. Симметричный Π -образный четырехполюсник (рис. 7.24, а) может быть представлен в виде каскадного соединения двух Γ -образных четырехполюсников A и B (рис. 7.24, б), A -параметры которых были определены в примерах 7.12 и 7.15:

$$A_A = \begin{bmatrix} 1 & Z_1/2 \\ 1/(2Z_2) & 1 + Z_1/(4Z_2) \end{bmatrix};$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 + Z_1/(4Z_2) & Z_1/2 \\ 1/(2Z_2) & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы A -параметров элементарных четырехполюсников, находим матрицу первичных параметров симметричного Π -образного четырехполюсника:

$$A_{\Pi} = A_A A_B = \begin{bmatrix} 1 + Z_1/(2Z_2) & Z_1 \\ (1/Z_2) [1 + Z_1/(4Z_2)] & 1 + Z_1/(2Z_2) \end{bmatrix}.$$

Если элементарные четырехполюсники, включенные каскадно, поменять местами (рис. 7.24, г), то полученный таким образом составной четырехполюсник будет представлять собой симметричный T -образный четырехполюсник (рис. 7.24, е). Мат-

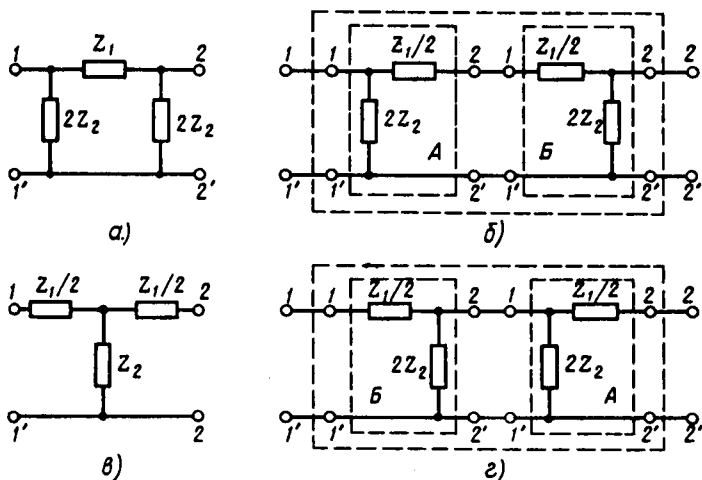


Рис. 7.24. К примеру 7.21

рица A -параметров такого четырехполюсника может быть получена путем умножения матрицы A -параметров четырехполюсника B на матрицу A -параметров четырехполюсника A :

$$A_T = A_B A_A = \begin{bmatrix} 1 + Z_1/(2Z_2); & Z_1 [1 + Z_1/(4Z_2)] \\ 1/Z_2; & 1 + Z_1/(2Z_2) \end{bmatrix}.$$

Параллельное соединение. При параллельном соединении четырехполюсников A и B (рис. 7.25) напряжения на входных и выходных зажимах составного четырехполюсника равны соответственно напряжениям на входных и выходных зажимах элементарных четырехполюсников:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1B} \\ \dot{U}_{2B} \end{bmatrix}, \quad (7.51)$$

а токи его входных и выходных зажимов — сумме токов входных и выходных зажимов элементарных четырехполюсников:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix}. \quad (7.52)$$

Если параллельное соединение четырехполюсников A и B удовлетворяет условию регуля-

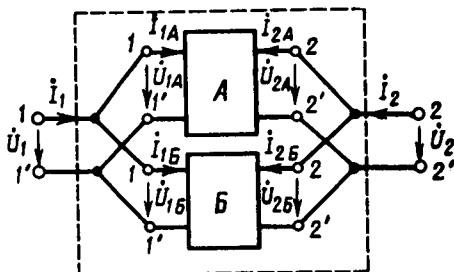


Рис. 7.25. Параллельное соединение проходных четырехполюсников

рности, то матрица Y -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц Y -параметров элементарных четырехполюсников. Действительно, используя основные уравнения элементарных четырехполюсников в форме Y

$$\begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{2A} \end{bmatrix} = Y_A \begin{bmatrix} U_{1A} \\ U_{2A} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} I_{1B} \\ I_{2B} \end{bmatrix} = Y_B \begin{bmatrix} U_{1B} \\ U_{2B} \end{bmatrix}$$

и соотношения (7.51), (7.52), токи входных и выходных зажимов составного четырехполюсника можно выразить через напряжения этих зажимов:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1B} \\ I_{2B} \end{bmatrix} = Y_A \begin{bmatrix} U_{1A} \\ U_{2A} \end{bmatrix} + Y_B \begin{bmatrix} U_{1B} \\ U_{2B} \end{bmatrix} = \{Y_A + Y_B\} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (7.53)$$

откуда

$$Y = Y_A + Y_B. \quad (7.54)$$

Используя аналогичную методику, можно показать, что при *последовательном соединении* элементарных четырехполюсников (рис. 7.26) матрица Z -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц Z -параметров элементарных четырехполюсников:

$$Z = Z_A + Z_B. \quad (7.55)$$

При *параллельно-последовательном соединении* четырехполюсников (рис. 7.27, а) суммируются матрицы G -параметров:

$$G = G_A + G_B, \quad (7.56)$$

а при *последовательно-параллельном соединении* (рис. 7.27, б) — матрицы H -параметров:

$$H = H_A + H_B. \quad (7.57)$$

Формулы (7.54) — (7.57) можно обобщить на случай регулярного соединения произвольного числа четырехполюсников.

Нетрудно убедиться, что попытки выразить первичные параметры составных четырехполюсников (см. рис. 7.23, 7.25 — 7.27) через коэффициенты других систем первичных параметров элементарных четырехполюсников приводят к более сложным по сравнению с (7.49), (7.54) — (7.57) соотношениям.

Таким образом, каждому из рассмотренных основных способов соединения четырехполюсников соответствует определенная система первичных параметров, применяя которую можно получить наиболее простые соотношения между первичными параметрами составного четырехполюсника и первичными параметрами входящих в него элементарных четырехполюсников.

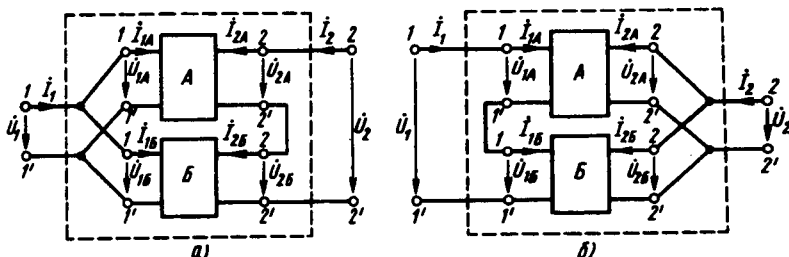


Рис. 7.27. Параллельно-последовательное (а) и последовательно-параллельное (б) соединения проходных четырехполюсников

Наиболее сложным этапом определения первичных параметров составных четырехполюсников является проверка регулярности соединения элементарных четырехполюсников. Заметим, что соединение четырехполюсников будет регулярным, если: а) каждый из параллельно включенных четырехполюсников является уравновешенным; б) при параллельном или последовательном соединении четырехполюсников, имеющих один общий вывод, все общие выводы объединяются; в) произвольный четырехполюсник соединяется любым способом с так называемым разорванным четырехполюсником

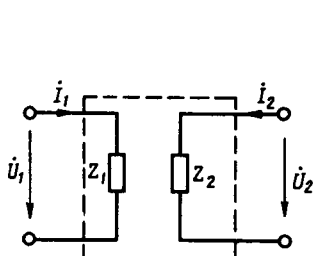


Рис. 7.28. «Разорванный» четырехполюсник

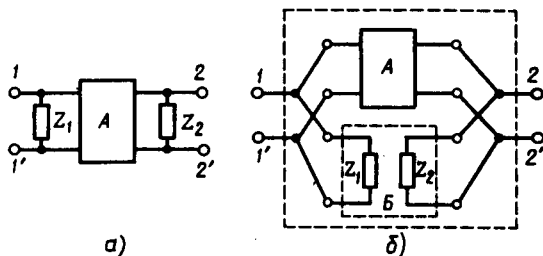


Рис. 7.29. К примеру 7.22

ком (рис. 7.28); г) произвольный четырехполюсник соединяется любым способом с четырехполюсником, ко входу и (или) выходу которого подключен линейный трансформатор (см. рис. 2.59).

Пример 7.22. Определим первичные параметры составного четырехполюсника (рис. 7.29, а), если известна матрица Y -параметров входящего в него элементарного четырехполюсника A (полевой транзистор в схеме с общим истоком):

$$Y_A = \begin{bmatrix} j\omega(C_{31} + C_{3c}) & -j\omega C_{3c} \\ S - j\omega C_{3c} & G_1 + j\omega(C_{3c} + C_{cm}) \end{bmatrix}.$$

Представим составной четырехполюсник в виде параллельного соединения четырехполюсника A и «разорванного» четырехполюсника B (рис. 7.29, б), для которого

$$Y_B = \begin{bmatrix} 1/Z_1; & 0 \\ 0; & 1/Z_2 \end{bmatrix}.$$

В связи с тем что параллельное соединение «разорванного» четырехполосника с любыми четырехполосниками является регулярным, Y -параметры составного четырехполосника находятся суммированием параметров четырехполосников A и B :

$$Y = Y_A + Y_B = \begin{bmatrix} 1/Z_1 + j\omega(C_{33} + C_{3c}); & -j\omega C_{3c} \\ S - j\omega C_{3c}; & G_i + (1/Z_2) + j\omega(C_{3c} + C_{ca}) \end{bmatrix}.$$

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Ранее было установлено, что соотношения между токами и напряжениями на зажимах любого линейного неавтономного проходного четырехполосника независимо от числа входящих в него элементов и способа их соединения могут быть описаны системой из двух уравнений, содержащих в общем случае не более четырех независимых коэффициентов. Такой системе уравнений всегда можно поставить в соответствие идеализированную электрическую цепь, содержащую не более четырех элементов, параметры которых могут быть выражены через независимые коэффициенты основной системы уравнений четырехполосника (условное графическое изображение этой цепи называется эквивалентной схемой или схемой замещения четырехполосника).

Таким образом, каждому линейному неавтономному проходному четырехполоснику может быть поставлена в соответствие эквивалентная схема, содержащая не более четырех элементов.

Для каждого четырехполосника можно построить несколько эквивалентных схем, имеющих различную топологию и отличающихся как типом изображенных на них элементов, так и значениями их параметров. Выбор той или иной эквивалентной схемы определяется удобством ее применения в рамках решаемой задачи и, в частности, простотой нахождения параметров ее элементов по заданным выражениям для первичных параметров четырехполосника. Широкое распространение на практике получили Т-образная (см. рис. 7.19, а) и П-образная (см. рис. 7.20) схемы замещения, получившие название канонических схем замещения линейного неавтономного четырехполосника. Параметры элементов Т-образной схемы замещения связаны с Z -параметрами четырехполосника соотношениями

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{11} - Z_{12}; & Z_2 &= Z_{12}; \\ Z_3 &= Z_{22} - Z_{12}; & Z_4 &= Z_{21} - Z_{12}, \end{aligned} \quad (7.58)$$

а параметры элементов П-образной схемы замещения можно найти по известным значениям Y-параметров

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{11} + Y_{12}; & Y_2 &= -Y_{12}; \\ Y_3 &= Y_{22} + Y_{12}; & Y_4 &= Y_{21} - Y_{12} \end{aligned} \quad (7.59)$$

с помощью соотношений, полученных в примерах 7.18 и 7.19.

Первичные параметры взаимного четырехполосника связаны между собой соотношениями (7.39), (7.40), поэтому коэффициенты управления управляемых источников напряжения (см. рис. 7.19, а) и тока (см. рис. 7.20) в этом случае будут равны нулю ($Z_4=0$, $Y_4=0$). Вследствие этого канонические схемы замещения взаимных четырехполосников (см. рис. 7.14, б, в) не содержат управляемых источников тока или напряжения.

Параметры элементов эквивалентных схем симметричных четырехполосников, кроме того, связаны соотношениями

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_3 = Z_{11} - Z_{12} = Z_{22} - Z_{12}; \\ Y_1 &= Y_3 = Y_{11} + Y_{12} = Y_{22} + Y_{12}. \end{aligned}$$

Т- и П-образные схемы, изображенные на рис. 7.14, б, в, представляют собой канонические схемы замещения взаимных неуравновешенных четырехполосников. Для взаимных уравновешенных четырехполосников используют эквивалентные схемы, приведенные на рис. 7.14, г, д. Параметры элементов этих эквивалентных схем также рассчитываются по формулам (7.58) и (7.59), а выражения для первичных параметров уравновешенных четырехполосников совпадают соответственно с выражениями для первичных параметров неуравновешенных четырехполосников. При решении ряда конкретных задач может оказаться удобным применить эквивалентные схемы четырехполосника, изображенные на рис. 7.30, а — г,

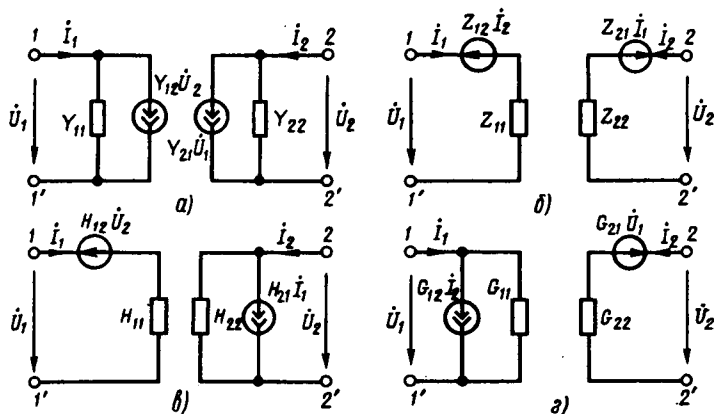


Рис. 7.30. Схемы замещения проходных четырехполосников

параметры элементов которых определяются через Y -, Z -, H - и G -параметры четырехполюсника соответственно.

В теории цепей широко применяют (особенно при решении задач синтеза) мостовую схему замещения симметричного четырехполюсника (см. рис. 7.18, а). Параметры элементов этой эквивалентной схемы весьма просто выражаются через Z -параметры четырехполюсника (см. пример 7.14): $Z_1 = Z_{11} - Z_{12}$; $Z_2 = Z_{11} + Z_{12}$.

Следует иметь в виду, что комплексным схемам замещения четырехполюсников (см. рис. 7.14, б — д, 7.19, а, 7.20 и 7.30) не всегда можно поставить в соответствие идеализированную электрическую цепь, состоящую из элементов с положительными вещественными параметрами (с подобной ситуацией сталкивались при знакомстве с эквивалентными преобразованиями цепей со связанными индуктивностями). Несмотря на это, применение таких эквивалентных схем значительно облегчает изучение процессов в электрических цепях.

АВТОНОМНЫЕ ПРОХОДНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Рассмотрим произвольный линейный автономный проходной четырехполюсник АЧ, схема и параметры элементов которого известны. Заменим внешние по отношению к четырехполюснику ветви источниками напряжения $\dot{E}_1 = \dot{U}_{1A}$, $\dot{E}_2 = \dot{U}_{2A}$ (рис. 7.31, а). Используя метод контурных токов, находим токи входных и выходных зажимов четырехполюсника. Если система независимых контуров цепи выбрана таким образом, что ветвь, содержащая источник напряжения $\dot{E}_1$, входит только в контур 1, а ветвь, включающая источник

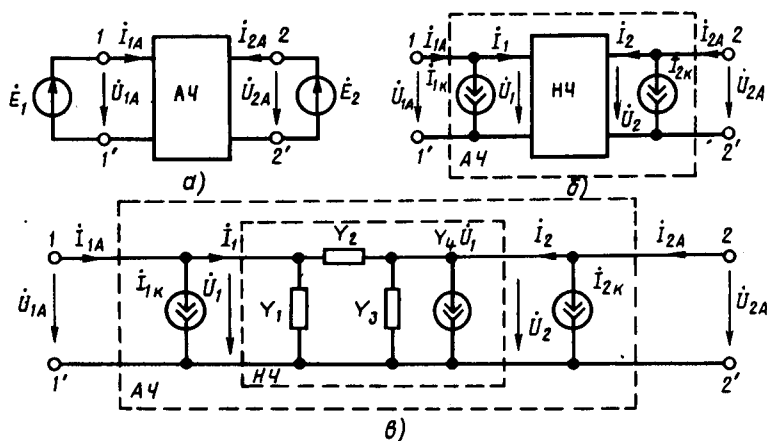


Рис. 7.31. К определению Π -образной схемы замещения автономного проходного четырехполюсника

напряжения $\dot{E}_2$, — только в контур 2, то искомые токи будут равны контурным токам первого и второго контуров:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1A} &= \Delta_{11} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{21} \dot{E}_2 / \Delta + \dot{I}_{1K}; \\ \dot{I}_{2A} &= \Delta_{12} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{22} \dot{E}_2 / \Delta + \dot{I}_{2K},\end{aligned}\quad (7.60)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1K} &= \Delta_{11} (\dot{E}_{11} - \dot{E}_1) / \Delta + \Delta_{21} (\dot{E}_{22} - \dot{E}_2) / \Delta + \sum_{j=3}^n \Delta_{j1} \dot{E}_{jJ} / \Delta; \\ \dot{I}_{2K} &= \Delta_{12} (\dot{E}_{11} - \dot{E}_1) / \Delta + \Delta_{22} (\dot{E}_{22} - \dot{E}_2) / \Delta + \sum_{j=3}^n \Delta_{j2} \dot{E}_{jJ} / \Delta.\end{aligned}$$

— составляющие контурных токов первого и второго контуров, вызванные действием независимых источников, находящихся внутри четырехполюсника АЧ.

Как следует из уравнений (7.60), при одновременном закорачивании источников $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ токи $\dot{I}_{1A}$ и $\dot{I}_{2A}$ равны соответственно $\dot{I}_{1K}$ и $\dot{I}_{2K}$. Следовательно, $\dot{I}_{1K}$ и $\dot{I}_{2K}$ являются токами короткого замыкания внешних выводов автономного четырехполюсника (напомним, что токи короткого замыкания неавтономного четырехполюсника равны нулю). Входящие в уравнения (7.60) коэффициенты Δ_{11}/Δ , Δ_{12}/Δ , Δ_{21}/Δ и Δ_{22}/Δ в соответствии с выражениями (7.37) представляют собой Y-параметры неавтономного четырехполюсника, который получается из исходного автономного при выключении всех входящих в него независимых источников. Переходя в (7.60) от ЭДС $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$ к напряжениям $\dot{U}_{1A}$, $\dot{U}_{2A}$ и используя выражения (7.37), получаем систему основных уравнений автономного четырехполюсника в форме Y:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{1A} &= Y_{11} \dot{U}_{1A} + Y_{12} \dot{U}_{2A} + \dot{I}_{1K}; \\ \dot{I}_{2A} &= Y_{21} \dot{U}_{1A} + Y_{22} \dot{U}_{2A} + \dot{I}_{2K}.\end{aligned}$$

Введем токи, равные разности токов выводов автономного четырехполюсника и соответствующих токов короткого замыкания:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \dot{I}_{1A} - \dot{I}_{1K} = Y_{11} \dot{U}_{1A} + Y_{12} \dot{U}_{2A} = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_{2A} - \dot{I}_{2K} = Y_{21} \dot{U}_{1A} + Y_{22} \dot{U}_{2A} = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2.\end{aligned}\quad (7.61)$$

Система уравнений (7.61) по форме совпадает с системой основных уравнений неавтономного четырехполюсника, полученного из автономного четырехполюсника путем выключения всех входящих в него независимых источников и замены $\dot{U}_{1A}$ и $\dot{U}_{2A}$ на $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$. С учетом этой системы четырехполюснику АЧ можно поставить в соответствие эквивалентную схему, содержащую неавтономный четырехполюсник НЧ, характеризующийся параметрами Y_{11} , Y_{12} ,

Y_{21} , Y_{22} , и два независимых источника тока $J_{1x} = I_{1x}$ и $J_{2x} = I_{2x}$ (рис. 7.31, б). Заменив четырехполосник $HЧ$ канонической Π -образной схемой замещения, получаем полную эквивалентную схему автономного четырехполосника, содержащую в общем случае шесть элементов (рис. 7.31, в).

Если внешние по отношению к автономному четырехполоснику ветви заменить источниками тока $J_1 = I_{1A}$ и $J_2 = I_{2A}$ (рис. 7.32, а), то, анализируя полученную цепь с помощью метода узловых напряжений, можно определить основные уравнения автономного четырехполосника в форме Z :

$$\begin{aligned}\dot{U}_{1A} &= Z_{11}I_{1A} + Z_{12}I_{2A} + \dot{U}_{1x}; \\ \dot{U}_{2A} &= Z_{21}I_{1A} + Z_{22}I_{2A} + \dot{U}_{2x},\end{aligned}\quad (7.62)$$

где Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} — первичные параметры $HЧ$, образованного из $AЧ$ путем выключения всех независимых источников; $\dot{U}_{1x}$ и $\dot{U}_{2x}$ — напряжения холостого хода на входных и выходных зажимах автономного четырехполосника. В соответствии с уравнениями (7.62) $AЧ$ можно поставить в соответствие схему замещения, состоящую из $HЧ$ и независимых источников напряжения $E_{1x} = \dot{U}_{1x}$, $E_{2x} = \dot{U}_{2x}$ (рис. 7.32, б). Представляя неавтономный четырехполосник T -образной канонической схемой замещения, получаем полную эквивалентную схему автономного четырехполосника (рис. 7.32, в).

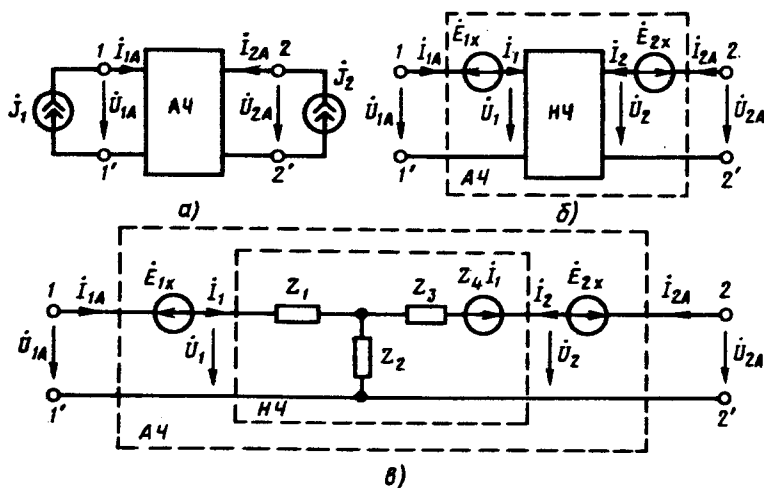


Рис. 7.32. К определению T -образной схемы замещения автономного проходного четырехполосника

В общем случае автономный проходной четырехполюсник характеризуется шестью независимыми параметрами, из которых четыре представляют собой первичные параметры неавтономного четырехполюсника, получающегося из данного автономного путем выключения всех независимых источников, а два параметра являются либо напряжениями холостого хода, либо токами короткого замыкания, измеряемыми при одновременном размыкании или одновременном закорачивании внешних по отношению к автономному четырехполюснику ветвей.

§ 7.3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕАВТОНОМНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКЕ

Несмотря на то что первичные параметры четырехполюсника представляют собой только некоторые комплексные частотные характеристики, измеренные в одном из предельных режимов (холостого хода или короткого замыкания), зная первичные параметры четырехполюсника, образующие любую из систем первичных параметров, можно найти его любые комплексные частотные характеристики при произвольной внешней нагрузке. Для примера покажем, как по известным значениям A -параметров неавтономного проходного четырехполюсника можно определить его комплексное входное сопротивление со стороны зажимов $1-1'$ $Z_{11}(j\omega)$ и комплексные коэффициенты передачи по напряжению $K_{21}(j\omega)$ и току $G_{21}(j\omega)$ от зажимов $1-1'$ к зажимам $2-2'$ при произвольной нагрузке $Z_{н2}$, подключенной к зажимам $2-2'$ (рис. 7.33, а).

Ток и напряжение на выходных зажимах четырехполюсника в рассматриваемом режиме связаны соотношением $I'_2 = \dot{U}_2 / Z_{н2}$, используя которое основные уравнения четырехполюсника в форме A (7.32) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{U}_2/Z_{н2} = (A_{11}Z_{н2} + A_{12})\dot{U}_2/Z_{н2} = (A_{11}Z_{н2} + A_{12})I'_2; \\ I_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{U}_2/Z_{н2} = (A_{21}Z_{н2} + A_{22})\dot{U}_2/Z_{н2} = (A_{21}Z_{н2} + A_{22})I'_2.\end{aligned}\quad (7.63)$$

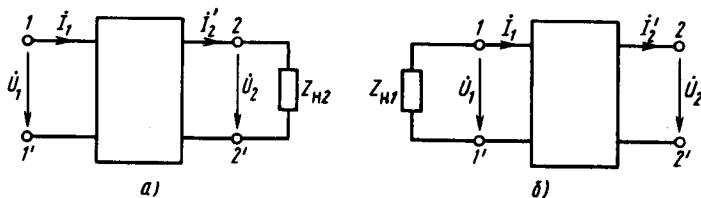


Рис. 7.33. К определению комплексных частотных характеристик проходного четырехполюсника при произвольной нагрузке

Из уравнений (7.63) следует, что

$$Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = (A_{11}Z_{22} + A_{12})/(A_{21}Z_{22} + A_{22}); \quad (7.64)$$

$$K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = Z_{22}/(A_{11}Z_{22} + A_{12}); \quad (7.65)$$

$$G_{21}(j\omega) = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = 1/(A_{21}Z_{22} + A_{22}). \quad (7.66)$$

В режиме холостого хода ($Z_{22} = \infty$) коэффициент передачи четырехполюсника по току равен нулю, а входное сопротивление со стороны зажимов 1 — 1' и коэффициент передачи по напряжению от зажимов 1 — 1' к зажимам 2 — 2' определяются выражениями

$$Z_{11x}(j\omega) = A_{11}/A_{21}; \quad K_{21x}(j\omega) = 1/A_{11}. \quad (7.67)$$

В режиме короткого замыкания ($Z_{22} = 0$) коэффициент передачи по напряжению равен нулю, а входное сопротивление и коэффициент передачи по току характеризуются соотношениями

$$Z_{11x}(j\omega) = A_{12}/A_{22}; \quad G_{21x}(j\omega) = 1/A_{22}. \quad (7.68)$$

Рассмотрим случай так называемого обратного включения, когда сопротивление нагрузки

$$Z_{21} = -\dot{U}_1/\dot{I}_1 \quad (7.69)$$

подключено к зажимам 1 — 1' (рис. 7.33, б). Разрешая основные уравнения четырехполюсника (7.32) относительно $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ и учитывая (7.69), получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= -(A_{22}Z_{21} + A_{12})\dot{I}_1/\Delta_A = (A_{22}Z_{21} + A_{12})\dot{U}_1/(Z_{21}\Delta_A); \\ \dot{I}_2 &= (A_{21}Z_{21} + A_{11})\dot{I}_1/\Delta_A = -(A_{21}Z_{21} + A_{11})\dot{U}_1/(Z_{21}\Delta_A). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Используя (7.70), определяем входное сопротивление четырехполюсника и коэффициенты передачи четырехполюсника по напряжению и току в обратном включении:

$$Z_{22}(j\omega) = \dot{U}_2/(-\dot{I}_2) = (A_{22}Z_{21} + A_{12})/(A_{21}Z_{21} + A_{11}); \quad (7.71)$$

$$K_{12}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{U}_2 = Z_{21}\Delta_A/(A_{22}Z_{21} + A_{12}); \quad (7.72)$$

$$G_{12}(j\omega) = -\dot{I}_1/(-\dot{I}_2) = \Delta_A/(A_{21}Z_{21} + A_{11}). \quad (7.73)$$

В отличие от $Z_{22}(j\omega)$, $K_{12}(j\omega)$ и $G_{12}(j\omega)$ величины $Z_{11}(j\omega)$, $K_{21}(j\omega)$ и $G_{21}(j\omega)$ называются входным сопротивлением и коэффициентами передачи четырехполюсника по напряжению и току в прямом включении. В режиме холостого хода на зажимах 1 — 1' ($Z_{21} = \infty$):

$$Z_{22x}(j\omega) = A_{22}/A_{21}; \quad K_{12x}(j\omega) = \Delta_A/A_{22}, \quad (7.74)$$

в режиме короткого замыкания ($Z_{н1}=0$)

$$\begin{aligned} Z_{22}(j\omega) &= A_{12}/A_{11}; \\ G_{12}(j\omega) &= \Delta_A/A_{11}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

По аналогичной методике выражения для любых комплексных частотных характеристик четырехполосника как в прямом, так и в обратном включении могут быть найдены также в терминах Y -, Z -, H -, G - или B -параметров.

Пусть к входным зажимам четырехполосника подключен линейаризованный источник с внутренним сопротивлением $Z_1 = Z_{н1}$, а к выходным зажимам — сопротивление нагрузки $Z_{н2}$ (рис. 7.34). Отношение напряжения на выходе двусторонне нагруженного четырехполосника $\dot{U}_2$ к ЭДС линейаризованного источника $\dot{E}_1 = \dot{U}_0$

$$K_{21p}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{E}_1 = \dot{U}_2/\dot{U}_0$$

называется рабочим коэффициентом передачи четырехполосника по напряжению. Учитывая, что $\dot{U}_0 = \dot{U}_1 + Z_{н1}\dot{I}_1$ и $\dot{U}_2 = Z_{н2}\dot{I}_2$, получаем

$$\begin{aligned} K_{21p}(j\omega) &= \frac{Z_{н2}\dot{I}_2}{(A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2) + Z_{н1}(A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2)} = \\ &= \frac{Z_{н2}}{(A_{11}Z_{н2} + A_{12}) + Z_{н1}(A_{21}Z_{н2} + A_{22})}. \end{aligned}$$

Найденные выражения для комплексного входного сопротивления и комплексного коэффициента передачи, учитывающие наличие нагрузки и внутреннего сопротивления источника, относятся к *внешним (рабочим)* параметрам четырехполосника.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ПРОХОДНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКА

Характеристическими сопротивлениями четырехполосника называют пару сопротивлений Z_{c1} и Z_{c2} , которые выбраны таким образом, что при подключении к зажимам 2 — 2' сопротивления $Z_{н2} = Z_{c2}$ входное сопротивление четырехполосника со стороны зажимов 1 — 1' равно Z_{c1} , а при подключении к зажимам 1 — 1' сопротивления $Z_{н1} = Z_{c1}$ входное сопротивление четырехполосника со стороны зажимов 2 — 2' равно Z_{c2} . Сопротивление Z_{c1} называется характеристическим входным, а Z_{c2} — характеристическим выходным сопротивлением четырехполосника. Подставляя в выражения

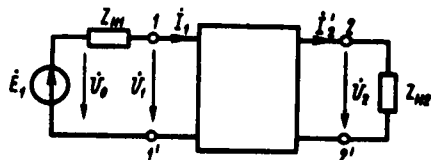


Рис. 7.34. К определению рабочего коэффициента передачи четырехполосника по напряжению

для входных сопротивлений четырехполюсника в прямом (7.64) и обратном (7.71) включениях $Z_{n2} = Z_{c2}$, $Z_{11}(j\omega) = Z_{c1}$; $Z_{n1} = Z_{c1}$, $Z_{22}(j\omega) = Z_{c2}$ и решая полученную систему уравнений:

$$Z_{c1} = (A_{11}Z_{c2} + A_{12}) / (A_{21}Z_{c2} + A_{22});$$

$$Z_{c2} = (A_{22}Z_{c1} + A_{12}) / (A_{21}Z_{c1} + A_{11})$$

относительно Z_{c1} и Z_{c2} , находим

$$Z_{c1} = \sqrt{A_{11}A_{12} / (A_{21}A_{22})}; \quad (7.76)$$

$$Z_{c2} = \sqrt{A_{22}A_{12} / (A_{21}A_{11})}. \quad (7.77)$$

Используя выражения (7.67), (7.68), (7.74) и (7.75), убеждаемся, что характеристическое входное сопротивление четырехполюсника может быть определено как среднее геометрическое из его входных сопротивлений в прямом включении в режимах холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{11x}(j\omega)Z_{11k}(j\omega)},$$

а характеристическое выходное сопротивление — как среднее геометрическое из его входных сопротивлений в обратном включении в режимах холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{22x}(j\omega)Z_{22k}(j\omega)}.$$

Таким образом, характеристические сопротивления четырехполюсника могут быть найдены непосредственно по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания.

Четырехполюсник, к зажимам 2 — 2' которого подключено сопротивление $Z_{n2} = Z_{c2}$, будем называть **четырехполюсником с согласованной нагрузкой на выходе**. В соответствии с (7.65), (7.66) коэффициенты передачи такого четырехполюсника по току и напряжению от зажимов 1 — 1' к зажимам 2 — 2' определяются выражениями

$$K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{Z_{n2} = Z_{c2}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} \frac{1}{\sqrt{A_{11}A_{22} + \sqrt{A_{12}A_{21}}}}; \quad (7.78)$$

$$G_{21}(j\omega) = \frac{I'_2}{I_1} \Big|_{Z_{n2} = Z_{c2}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \frac{1}{\sqrt{A_{11}A_{22} + \sqrt{A_{12}A_{21}}}}, \quad (7.79)$$

откуда

$$K_{21}(j\omega) = A_{22}G_{21}(j\omega)/A_{11} = Z_{c2}G_{21}(j\omega)/Z_{c1}.$$

Для четырехполюсника с согласованной нагрузкой на входе ($Z_{a1} = Z_{c1}$) аналогичным образом находим

$$K_{12}(j\omega) = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{Z_{a1} = Z_{c1}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \frac{\Delta_A}{\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}}; \quad (7.80)$$

$$G_{12}(j\omega) = \left. \frac{-I_1}{-I_2} \right|_{Z_{a1} = Z_{c1}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} \frac{\Delta_A}{\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}} \quad (7.81)$$

Следовательно,

$$K_{12}(j\omega) = A_{11}G_{12}(j\omega)/A_{22} = Z_{c1}G_{12}(j\omega)/Z_{c2}.$$

Если A -параметры четырехполюсника удовлетворяют условию $A_{11} = A_{22}$, то его характеристические входное и выходное сопротивления одинаковы:

$$Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{A_{12}/A_{21}}. \quad (7.82)$$

Коэффициенты передачи такого четырехполюсника по напряжению в прямом и обратном включениях равны соответственно коэффициентам передачи по току в прямом и обратном включениях:

$$K_{21}(j\omega) = G_{21}(j\omega) = 1/(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}); \quad (7.83)$$

$$K_{12}(j\omega) = G_{12}(j\omega) = \Delta_A/(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}). \quad (7.84)$$

Из выражений (7.83), (7.84) следует, что у симметричного четырехполюсника A -параметры которого связаны между собой соотношениями

$$\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1; \quad A_{11} = A_{22}, \quad (7.85)$$

коэффициенты передачи по току и напряжению в прямом и обратном включениях при согласованной нагрузке имеют одинаковые значения:

$$K_{21}(j\omega) = G_{21}(j\omega) = K_{12}(j\omega) = G_{12}(j\omega) = 1/(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}). \quad (7.86)$$

Таким образом, отношение напряжений на зажимах 2 — 2' и 1 — 1' симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой на входе и выходе равно отношению соответствующих токов:

$$\dot{U}_2/\dot{U}_1 = \dot{I}_2/\dot{I}_1.$$

Очевидно, что входные сопротивления симметричного четырехполюсника в прямом и обратном включениях при согласованной нагрузке равны характеристическому сопротивлению четырехполюсника:

$$Z_{11}(j\omega) = Z_{22}(j\omega) = Z_c = \sqrt{A_{12}/A_{21}}.$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ ПЕРЕДАЧИ НЕАВТОНОМНОГО ПРОХОДНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Характеристическими постоянными передачи неавтономного проходного четырехполюсника в прямом и обратном включениях называются два комплексных числа Γ_1 и Γ_2 , определяемые соотношениями

$$\Gamma_1 = -\ln \sqrt{K_{21}(j\omega)G_{21}(j\omega)}; \quad (7.87)$$

$$\Gamma_2 = -\ln \sqrt{K_{12}(j\omega)G_{12}(j\omega)}; \quad (7.88)$$

где $K_{21}(j\omega)$, $G_{21}(j\omega)$ — коэффициенты передачи по напряжению (7.78) и току (7.79) четырехполюсника с согласованной нагрузкой на выходе; $K_{12}(j\omega)$, $G_{12}(j\omega)$ — коэффициенты передачи по напряжению (7.80) и току (7.81) четырехполюсника с согласованной нагрузкой на входе.

Подставляя соотношения (7.78) — (7.81) в (7.87), (7.88) и выполняя несложные преобразования, выражаем характеристические постоянные передачи четырехполюсника через его A -параметры:

$$\Gamma_1 = \ln (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}); \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \ln [(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}})/\Delta_A] = \\ &= -\ln (\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}) \end{aligned} \quad (7.90)$$

или

$$e^{\Gamma_1} = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}, \quad (7.91)$$

$$e^{\Gamma_2} = (\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}})/\Delta_A = 1/(\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}). \quad (7.92)$$

Характеристические сопротивления четырехполюсника Z_{c1} , Z_{c2} и характеристические постоянные передачи Γ_1 , Γ_2 называются его характеристическими (вторичными) параметрами. Подобно первичным, характеристические параметры образуют систему независимых параметров неавтономного проходного четырехполюсника, определяющих соотношения между токами и напряжениями на его зажимах. Зная первичные параметры четырехполюсника и используя соотношения (7.76), (7.77), (7.89), (7.90), можно найти его характеристические параметры Z_{c1} , Z_{c2} , Γ_1 и Γ_2 . В свою очередь, первичные параметры четырехполюсника могут быть однозначно определены через его характеристические параметры. Действительно, используя (7.76), (7.77), получаем

$$\sqrt{A_{12}/A_{21}} = \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}}; \quad \sqrt{A_{22}/A_{11}} = \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}}.$$

Согласно (7.91), (7.92),

$$\sqrt{A_{11}A_{22}} = (e^{\Gamma_1} + e^{-\Gamma_2})/2;$$

$$\sqrt{A_{12}A_{21}} = (e^{\Gamma_1} - e^{-\Gamma_2})/2,$$

откуда

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} (e^{\Gamma_1} + e^{-\Gamma_2})/2;$$

$$A_{12} = \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} (e^{\Gamma_1} - e^{-\Gamma_2})/2;$$

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}}} (e^{\Gamma_1} - e^{-\Gamma_2})/2; \quad (7.93)$$

$$A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} (e^{\Gamma_1} + e^{-\Gamma_2})/2.$$

Неавтономный проходной четырехполюсник в общем случае имеет четыре независимых характеристических параметра Z_{c1} , Z_{c2} , Γ_1 и Γ_2 .

Пример 7.23. Найдем характеристические параметры неавтономного четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 7.35.

Используя данные, полученные из опытов холостого хода и короткого замыкания, проведенных расчетным путем, определяем матрицу первичных параметров четырехполюсника:

$$A = \begin{bmatrix} 1/K; & Z_2/K \\ 1/(Z_1K); & Z_2/(Z_1K) \end{bmatrix}.$$

Применяя соотношения (7.76), (7.77), получаем характеристические входные и выходные сопротивления $Z_{c1} = Z_1$ и $Z_{c2} = Z_2$.

Характеристические постоянные передачи четырехполюсника найдем с помощью соотношений (7.91), (7.92):

$$e^{\Gamma_1} = \frac{2}{K} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}}; \quad e^{-\Gamma_2} = 0,$$

откуда

$$\Gamma_1 = \ln \left(\frac{2}{K} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \right); \quad \Gamma_2 = \infty.$$

Рассматриваемый четырехполюсник имеет два различных по значению характеристических сопротивления и две различные по значению характеристические постоянные передачи.

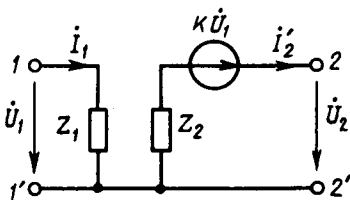


Рис. 7.35. К примеру 7.23

Как видно из приложения 4, определитель матрицы A -параметров взаимного четырехполюсника $\Delta_A = 1$, поэтому *характеристические постоянные передачи взаимного четырехполюсника в прямом и обратном включениях одинаковы*:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma = \ln(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}). \quad (7.94)$$

В общем случае взаимный четырехполюсник имеет три независимых характеристических параметра.

Переходя в (7.93) от экспонент к гиперболическим функциям

$$\operatorname{ch} \Gamma = (e^{\Gamma} + e^{-\Gamma})/2; \operatorname{sh} \Gamma = (e^{\Gamma} - e^{-\Gamma})/2, \quad (7.95)$$

получаем выражения для первичных параметров взаимного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \operatorname{ch} \Gamma; A_{12} = \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} \operatorname{sh} \Gamma; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}}} \operatorname{sh} \Gamma; A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \operatorname{ch} \Gamma. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Исследуя (7.96), устанавливаем важные соотношения между A -параметрами взаимного четырехполюсника

$$\sqrt{A_{11}A_{22}} = \operatorname{ch} \Gamma; \sqrt{A_{12}A_{21}} = \operatorname{sh} \Gamma, \quad (7.97)$$

откуда вытекают удобные и широко используемые на практике формулы для определения его характеристической постоянной передачи

$$\begin{aligned} \Gamma &= \operatorname{Arch} \sqrt{A_{11}A_{22}} = \\ &= \operatorname{Arsh} \sqrt{A_{12}A_{21}}. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Пример 7.24. Найдем характеристические параметры взаимных Γ -образных четырехполюсников A и B , схемы которых приведены на рис. 7.16, а, 7.17, а (см. примеры 7.12 и 7.15).

В связи с тем что четырехполюсник A (см. рис. 7.16, а) может быть получен из четырехполюсника B (см. рис. 7.17, а) путем перемены мест входных и выходных зажимов, характеристические постоянные передачи обоих четырехполюсников одинаковы: $\Gamma_A = \Gamma_B = \operatorname{Arch} \sqrt{A_{11}A_{22}} = \operatorname{Arch} \sqrt{1 + Z_B/Z_A}$, а характеристическое входное сопротивление одного четырехполюсника равно характеристическому выходному сопротивлению другого:

$$\begin{aligned} Z_{c1A} = Z_{c2B} &= \sqrt{\frac{Z_A Z_B}{1 + Z_B/Z_A}}; \\ Z_{c2A} = Z_{c1B} &= \sqrt{Z_A Z_B (1 + Z_B/Z_A)}. \end{aligned}$$

Первичные параметры симметричного четырехполосника связаны соотношениями (7.85), поэтому он имеет только два независимых характеристических параметра Z_c и Γ , определяемых с помощью соотношений (7.82) и (7.94).

Первичные параметры симметричного четырехполосника могут быть выражены через его характеристические параметры:

$$A_{11} = A_{22} = \operatorname{ch} \Gamma; A_{12} = Z_c \operatorname{sh} \Gamma; A_{21} = (\operatorname{sh} \Gamma) / Z_c. \quad (7.99)$$

Пример 7.25. Определим характеристические параметры симметричного П-образного (см. рис. 7.24, а) и симметричного Т-образного (см. рис. 7.24, в) четырехполосников.

Используя выражения для первичных параметров этих четырехполосников, полученные в примере 7.21, и соотношения (7.82) и (7.98), находим

$$Z_{c\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + Z_1 / (4Z_2)}}; \Gamma_{\Pi} = \operatorname{Arch} [1 + Z_1 / (2Z_2)];$$

$$Z_{cT} = \sqrt{Z_1 Z_2 [1 + Z_1 / (4Z_2)]}; \Gamma_T = \operatorname{Arch} [1 + Z_1 / (2Z_2)].$$

Как следует из этих выражений, рассматриваемые четырехполосники имеют одинаковые характеристические постоянные передачи и различные характеристические сопротивления. Сравнивая выражения для характеристических параметров Γ -образных (см. пример 7.24), П- и Т-образных четырехполосников и принимая во внимание, что обратные гиперболические функции связаны между собой соотношением

$\operatorname{Arch} x + \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch} (xy + \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)})$, устанавливаем, что характеристическая постоянная передачи П- или Т-образного четырехполосника равна сумме характеристических постоянных Γ -образных четырехполосников, схемы которых приведены на рис. 7.16, а и 7.17, а (см. пример 7.24) при $Z_a = 2Z_2$ и $Z_b = Z_1/2$:

$$\Gamma_A + \Gamma_B = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{1 + Z_b / Z_a} = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{1 + Z_1 / (4Z_2)} =$$

$$= \operatorname{Arch} [1 + Z_1 / (2Z_2)] = \Gamma_{\Pi} = \Gamma_T.$$

Характеристическое сопротивление П-образного четырехполосника равно характеристическому входному сопротивлению Γ -образного (см. рис. 7.16, а), называемого Γ -образным четырехполосником с П-входом:

$$Z_{c1A} = \sqrt{Z_a Z_b / [1 + Z_b / Z_a]} = \sqrt{Z_1 Z_2 / [1 + Z_1 / (4Z_2)]} = Z_{c\Pi},$$

а характеристическое сопротивление Т-образного четырехполосника равно характеристическому входному сопротивлению Γ -образного (см. рис. 7.17, а) (Γ -образный четырехполосник с Т-входом):

$$Z_{c1B} = \sqrt{Z_a Z_b (1 + Z_b / Z_a)} = \sqrt{Z_1 Z_2 [1 + Z_1 / (4Z_2)]} = Z_{cT}.$$

Ранее было показано, что комплексные частотные характеристики неавтономного проходного четырехполосника с произвольной нагрузкой могут быть выражены через первичные параметры этого четырехполосника. Аналогично комплексные частотные характеристики неавтономного проходного четырехполосника могут быть представлены в терминах его характеристических параметров. Для четырехполосников с согласованной нагрузкой соответствующие

выражения принимают особенно простой вид. Так, для неавтономного проходного четырехполюсника общего вида с согласованной нагрузкой на выходе выражения для коэффициентов передачи по напряжению и току (7.78) (7.79) могут быть представлены в виде

$$K_{21}(j\omega) = \sqrt{Z_{c1}/Z_{c1}} e^{-\Gamma_1}; \quad (7.100)$$

$$G_{21}(j\omega) = \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}} e^{-\Gamma_1}, \quad (7.101)$$

а для четырехполюсника с согласованной нагрузкой на входе

$$K_{12}(j\omega) = \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}} e^{-\Gamma_1}; \quad (7.102)$$

$$G_{12}(j\omega) = \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}} e^{-\Gamma_1}. \quad (7.103)$$

Входное сопротивление этого четырехполюсника в первом случае равно Z_{c1} , а во втором — Z_{c2} .

Выражения для комплексных частотных характеристик взаимного четырехполюсника получаются из (7.100) — (7.103) при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. Для симметричного четырехполюсника ($Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$) выражения (7.100) — (7.103) еще более упрощаются:

$$K_{21}(j\omega) = K_{12}(j\omega) = G_{21}(j\omega) = G_{12}(j\omega) = e^{-\Gamma}. \quad (7.104)$$

Как следует из выражения (7.104), характеристическая постоянная передачи симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой равна натуральному логарифму отношения комплексных действующих значений напряжений (токов) внешних по отношению к четырехполюснику ветвей, содержащих источник энергии и нагрузку. При согласованной нагрузке на выходе

$$\Gamma = \ln(\dot{U}_1/\dot{U}_2) = \ln(I_1/I_2) = A + jB. \quad (7.105)$$

Для определения вещественной A и мнимой B составляющих характеристической постоянной передачи представим напряжения и токи на зажимах четырехполюсника в показательной форме:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \ln \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}}} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}); \\ \Gamma &= \ln \frac{I_1 e^{j\psi_{i1}}}{I_2 e^{j\psi_{i2}}} = \ln \frac{I_1}{I_2} + j(\psi_{i1} - \psi_{i2}). \end{aligned} \quad (7.106)$$

Из выражений (7.105), (7.106) следует, что вещественная составляющая характеристической постоянной передачи симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой на выходе равна

натуральному логарифму отношения действующих значений напряжений (токов) на входе и выходе четырехполюсника: $A = \ln (U_1/U_2) = \ln (I_1/I_2)$, а мнимая составляющая характеристической постоянной передачи — разности начальных фаз этих напряжений (токов): $B = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}$.

В литературе величины A и B называют постоянными ослабления и фазы четырехполюсника. Постоянная ослабления характеризует изменение действующих значений напряжения или тока при передаче энергии от источника к нагрузке. Ее выражают в *неперах* (Нп) или *белах* (Б). Ослаблению в 1 Нп соответствует уменьшение действующего значения напряжения или тока в $e \approx 2,718$ раз. Постоянная ослабления симметричного четырехполюсника, выраженная в белах, определяется десятичным логарифмом отношения полных мощностей на входе и выходе четырехполюсника:

$$\begin{aligned} A_{\text{Б}} &= \lg (P_{\text{н}}/P_{\text{л}}) = \lg \left[\frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right] = \lg (U_1/U_2)^2 = \\ &= \lg (I_1/I_2)^2 = 2 \lg (U_1/U_2) = 2 \lg (I_1/I_2). \end{aligned}$$

На практике для измерения ослабления широко используют *децибелы* (дБ):

$$A_{\text{дБ}} = 10 A_{\text{Б}} = 20 \lg (U_1/U_2) = 20 \lg (I_1/I_2).$$

Для перехода от одних единиц ослабления к другим можно использовать соотношения 1 Нп $\approx 8,686$ дБ; 1 дБ $\approx 0,115$ Нп.

Полезно запомнить, что уменьшению мощности в 2 раза (уменьшению напряжения или тока в $\sqrt{2}$ раз) соответствует $A_{\text{дБ}} \approx 3$ дБ, уменьшению мощности в 10 раз — $A_{\text{дБ}} \approx 10$ дБ, уменьшению напряжения в 10 раз — $A_{\text{дБ}} = 20$ дБ.

Постоянную ослабления четырехполюсника в децибелах $A_{\text{дБ}}$ не следует путать с логарифмическим модулем КЧХ в децибелах $H_{\text{дБ}}$, определяемым выражением (3.16). Первая из этих величин характеризует отношение полных мощностей на входе и выходе четырехполюсника при согласованной нагрузке, вторая — отношение действующих значений или амплитуд реакции и внешнего воздействия при произвольной нагрузке. В частном случае симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой, для которого внешнее воздействие и реакция представляют собой напряжения u_1 и u_2 соответственно, значения $A_{\text{дБ}} = 20 \lg (U_1/U_2)$ и $H_{\text{дБ}} = 20 \lg (U_2/U_1) = -20 \lg (U_1/U_2)$, будут отличаться только знаком.

Постоянная фазы B четырехполюсника характеризует изменение начальной фазы напряжения или тока при передаче энергии от источника к нагрузке. Эту величину выражают в угловых единицах — *радианах* или *градусах*.

СОГЛАСОВАННОЕ КАСКАДНОЕ СОЕДИНЕНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Каскадное соединение четырехполусников A и B (рис. 7.36) называется согласованным, если их характеристические параметры и сопротивление нагрузки выбраны таким образом, что $Z_{c2B} = Z_{c2A}$, $Z_{c2A} = Z_{c1B}$ или $Z_{c1A} = Z_{H1}$, $Z_{c1B} = Z_{H2}$.

Рассмотрим каскадное соединение четырехполусников с согласованной нагрузкой на выходе (рис. 7.36, a). Можно убедиться, что при таком включении каждый четырехполусник имеет согласованную нагрузку на выходе, причем входное сопротивление цепочки четырехполусников со стороны зажимов $1-1'$ четырехполусника A равно характеристическому входному сопротивлению четырехполусника A :

$$Z_{11}(j\omega) = Z_{c1A}. \quad (7.107)$$

Коэффициент передачи рассматриваемой цепочки четырехполусников по напряжению $K_{21}(j\omega)$ равен произведению коэффициентов передачи по напряжению четырехполусников A и B :

$$K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \dot{U}_{2B} / \dot{U}_{1A} = \dot{U}_{2B} \dot{U}_{2A} / (\dot{U}_{1B} \dot{U}_{1A}) = K_{21A}(j\omega) K_{21B}(j\omega). \quad (7.108)$$

Выражая коэффициенты передачи четырехполусников A и B через их характеристические параметры (7.100), получаем

$$K_{21}(j\omega) = \sqrt{\frac{Z_{c2A}}{Z_{c1A}}} e^{-\Gamma_{1A}} \sqrt{\frac{Z_{c2B}}{Z_{c1B}}} e^{-\Gamma_{1B}} = \sqrt{\frac{Z_{c2B}}{Z_{c1A}}} e^{-(\Gamma_{1A} + \Gamma_{1B})}. \quad (7.109)$$

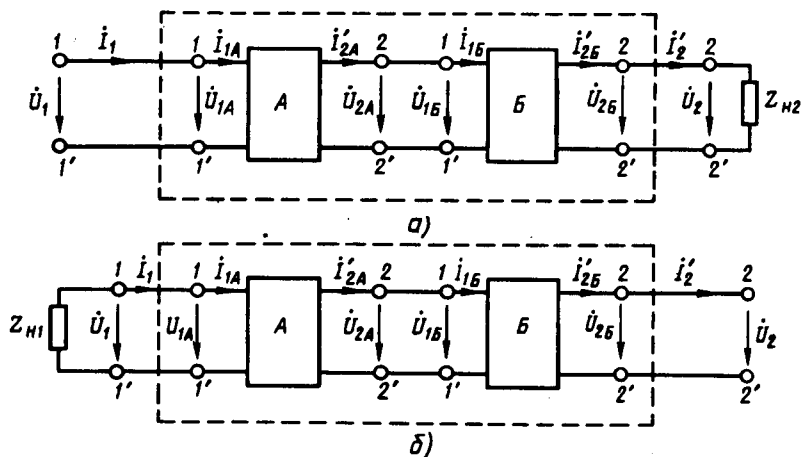


Рис. 7.36. Каскадное соединение четырехполусников:
 a — согласованное на выходе; b — согласованное на входе

Аналогичным образом при каскадном соединении четырехполюсников с согласованной нагрузкой на входе (рис. 7.36, б)

$$Z_{22}(j\omega) = Z_{c\pi}; \quad (7.110)$$

$$K_{12}(j\omega) = \sqrt{Z_{c1A}/Z_{c\pi}} e^{-(\Gamma_{2A} + \Gamma_{2\pi})}. \quad (7.111)$$

Как следует из выражений (7.107), (7.109) — (7.111), цепочка согласованно включенных четырехполюсников может быть заменена одним эквивалентным четырехполюсником, характеристическое входное сопротивление которого $Z_{cl} = Z_{c1A}$, характеристическое выходное сопротивление $Z_{cl} = Z_{c\pi}$, а характеристические постоянные передачи $\Gamma_1 = \Gamma_{1A} + \Gamma_{1\pi}$, $\Gamma_2 = \Gamma_{2A} + \Gamma_{2\pi}$.

При согласованном каскадном соединении произвольного числа N одинаковых симметричных четырехполюсников с характеристическими параметрами Z_{cl} и Γ_0 характеристическое сопротивление эквивалентного четырехполюсника $Z_c = Z_{cl}$, а характеристическая постоянная передачи — $\Gamma = N\Gamma_0$.

§ 7.4. НЕВЗАИМНЫЕ ПРОХОДНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

УПРАВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ КАК НЕВЗАИМНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Напомним, что невзаимными называются четырехполюсники, не удовлетворяющие теореме взаимности.

Невзаимные четырехполюсники отличаются рядом замечательных свойств, отсутствующих у взаимных четырехполюсников, в частности некоторые из них обладают *усилением по мощности*, т. е. мощность, отдаваемая таким четырехполюсником в нагрузку, может превышать мощность, потребляемую им от внешнего источника. Разумеется, при этом не происходит нарушения закона сохранения энергии, так как дополнительная энергия, отдаваемая в нагрузку, потребляется четырехполюсником от внутренних, т. е. входящих в его состав источников энергии. Проходные четырехполюсники, обладающие усилением по мощности, называются *усилителями*. Функционирование многих типов усилителей основано на применении нелинейных управляемых резистивных элементов (электронных ламп и транзисторов), в связи с чем эти элементы обычно называют *усилителями*.

Любой сложный невзаимный четырехполюсник можно представить в виде соединения идеализированных пассивных элементов и одного или нескольких идеализированных невзаимных элементов (идеализированных усилительных элементов). В современной теории цепей используется большое число различных идеализированных невзаимных элементов, наиболее известными из которых

является линейно управляемые источники тока и напряжения, идеальные усилители напряжения и тока, идеальные операционные усилители и идеальные преобразователи сопротивления.

Управляемые источники часто рассматривают как основной тип невзаимных элементов, поскольку невзаимные элементы других типов можно представить схемами замещения, состоящими только из линейно управляемых источников тока и напряжения и, возможно, идеализированных пассивных элементов. Определим первичные параметры и рассмотрим основные свойства этих источников.

Источник напряжения, управляемый напряжением. Напряжение на выходе такого источника (рис. 7.37, а) прямо пропорционально напряжению на входе, а входной ток равен нулю:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= K_{\text{упр}} \dot{U}_1; \\ \dot{I}_1 &= 0.\end{aligned}\quad (7.112)$$

Коэффициент управления источником $K_{\text{упр}}$ является в данном случае безразмерной комплексной величиной и имеет физический смысл комплексного коэффициента передачи четырехполюсника (рис. 7.37, а) по напряжению. Используя основные уравнения ИНУН (7.112), находим матрицы его A - и G -параметров:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K_{\text{упр}}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{\text{упр}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.113)$$

Матриц Y -, H - и Z -параметров ИНУН не существует.

Подставляя значения A -параметров ИНУН в выражения (7.64), (7.71), устанавливаем, что его входное сопротивление со стороны зажимов 1 — 1' при любой нагрузке со стороны зажимов 2 — 2' бесконечно велико (случай короткого замыкания на выходе ИНУН исключается из рассмотрения), а выходное сопротивление (входное

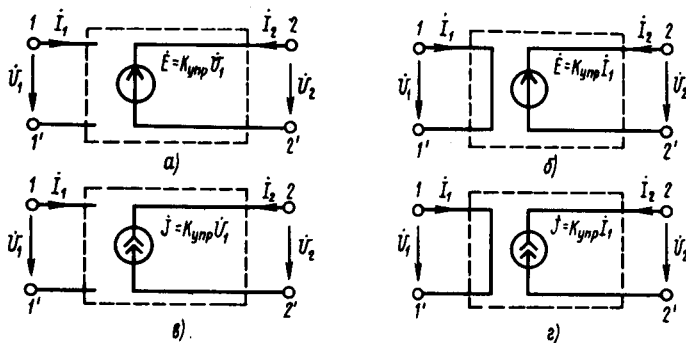


Рис. 7.37. Линейно управляемые источники

сопротивление со стороны зажимов 2 — 2') при любой нагрузке со стороны зажимов 1 — 1' равно нулю.

Мощность P_{A1} , потребляемая ИНУН от источника, подключенного к зажимам 1 — 1', равна нулю, а мощность P_{A2} , отдаваемая в нагрузку при $\operatorname{Re}[Z_n] \neq 0$, имеет конечное значение, поэтому ИНУН является активным четырехполюсником и обладает бесконечно большим усилением по мощности:

$$K_p = \frac{P_{A2}}{P_{A1}} = \frac{\operatorname{Re}[-\dot{U}_2 I_2]}{\operatorname{Re}[\dot{U}_1 I_1]}.$$

Величину K_p будем называть коэффициентом усиления по мощности.

Источник напряжения, управляемый током. Напряжение на выходе такого источника (рис. 7.37, б) пропорционально входному току, а напряжение на входе равно нулю:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= K_{\text{упр}} I_1; \\ \dot{U}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.114)$$

Коэффициент управления источником $K_{\text{упр}}$ имеет в данном случае физический смысл комплексного передаточного сопротивления и измеряется в омах.

Используя основные уравнения ИНУТ (7.114), находим матрицы его A - и Z -параметров:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{\text{упр}}^{-1} & 0 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{\text{упр}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.115)$$

Матриц Y -, H - и G -параметров ИНУТ не существует.

Подставляя выражения (7.115) в (7.64) и (7.71), нетрудно убедиться, что входное и выходное сопротивления ИНУТ равны нулю.

Источник тока, управляемый напряжением (7.37, в). Ток на выходе этого четырехполюсника пропорционален напряжению на входе, а входной ток равен нулю:

$$\begin{aligned} I_2 &= -K_{\text{упр}} \dot{U}_1; \\ I_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.116)$$

Коэффициент управления $K_{\text{упр}}$ ИТУН имеет физический смысл комплексной передаточной проводимости и выражается в сименсах. ИТУН обладает только матрицами A - и Y -параметров:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K_{\text{упр}}^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_{\text{упр}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.117)$$

причем его входное и выходное сопротивления бесконечно велики и не зависят от сопротивления нагрузки (режим холостого хода на зажимах 2 — 2' из рассмотрения исключается).

Источник тока, управляемый током (рис. 7.37, з). Из основных уравнений ИТУТ

$$\begin{aligned} i_2 &= -K_{\text{упр}} i_1; \\ U_1 &= 0 \end{aligned} \quad (7.118)$$

следует, что источник этого типа обладает только матрицами A - и H -параметров:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{\text{упр}}^{-1} \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_{\text{упр}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.119)$$

причем его входное сопротивление равно нулю, а выходное — бесконечно велико. Коэффициент управления ИТУТ имеет физический смысл комплексного коэффициента передачи по току и является безразмерной величиной. Анализируя (7.114), (7.116) и (7.118), нетрудно убедиться, что, подобно ИНУН, все линейно управляемые источники (рис. 7.37) являются активными невзаимными четырехполюсниками, обладающими бесконечно большим усилением по мощности.

Интересно отметить, что при $K_{\text{упр}} \rightarrow \infty$ матрицы A -параметров всех линейно управляемых источников принимают один и тот же вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. все рассмотренные источники вырождаются в некий источник, ток и напряжение на входе которого одновременно равны нулю при любых конечных значениях напряжения и тока на выходе.

ИДЕАЛЬНЫЕ УСИЛИТЕЛИ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

Идеальным усилителем напряжения называется активный невзаимный четырехполюсник, напряжение на выходе которого в любой момент времени прямо пропорционально напряжению на входе, а входной ток равен нулю:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}} &= K_u u_{\text{вх}}; \\ i_{\text{вх}} &= 0. \end{aligned} \quad (7.120)$$

Коэффициент пропорциональности между входным и выходным напряжениями K_u представляет собой вещественное число, называемое коэффициентом усиления по напряжению. При $K_u < 0$ напряжения на входе и выходе усилителя имеют различные знаки (при гармоническом внешнем воздействии напряжения $u_{\text{вх}}$ и $u_{\text{вых}}$ находятся в противофазе). Усилитель напряжения такого типа называется инвертирующим. При $K_u > 0$ напряжения на входе и выходе усили-

теля имеют одинаковые знаки (совпадают по фазе). Такой усилитель называется **неинвертирующим**. При $K_u = 1$ напряжение на выходе усилителя равно напряжению на его входе. Усилитель такого типа называется **идеальным повторителем напряжения**.

Схема замещения идеального усилителя напряжения может быть представлена в виде ИНУН с вещественным коэффициентом управления $K_{упр} = K_u$. Очевидно, что входное сопротивление идеального усилителя напряжения бесконечно велико, а выходное сопротивление равно нулю.

Идеальным усилителем тока называется активный невзаимный четырехполюсник, ток на выходе которого в любой момент времени пропорционален входному току, а напряжение на входе равно нулю:

$$\begin{aligned} i_{\text{вых}} &= -K_i i_{\text{вх}}; \\ u_{\text{вх}} &= 0. \end{aligned} \quad (7.121)$$

Коэффициент пропорциональности между входным и выходным токами K_i представляет собой вещественное число и называется **коэффициентом усиления по току**. Схема замещения идеального усилителя тока содержит ИТУТ с вещественным коэффициентом управления $K_{упр} = K_i$. Входное сопротивление идеального усилителя тока равно нулю, а выходное — бесконечно велико. Из анализа основных уравнений (7.120), (7.121) следует, что *коэффициент усиления по току идеального усилителя напряжения и коэффициент усиления по напряжению идеального усилителя тока бесконечно велики и, следовательно, коэффициенты усиления по мощности обоих усилителей равны бесконечности*.

Помимо идеальных усилителей напряжения и тока в теории цепей известны также *идеальный трансрезистивный (трансимпедансный) усилитель* (преобразователь ток — напряжение), напряжение на выходе которого пропорционально входному току, а входное напряжение равно нулю, и *идеальный транскондуктивный (трансадмитансный) усилитель* (преобразователь напряжение — ток), ток на выходе которого пропорционален входному напряжению, а входной ток равен нулю. Схемы замещения идеального трансрезистивного и идеального транскондуктивного усилителей содержат ИНУТ и ИТУН с вещественными коэффициентами управления. Наиболее широкое применение в теории цепей нашли идеальные усилители напряжения, условное графическое изображение которых приведено на рис. 7.38, а. Иногда, особенно при построении структурных схем, используется упрощенное графическое изображение (рис. 7.38, б).

Бесконечно большое входное и нулевое выходное сопротивления идеального усилителя напряжения позволяют применять его для масштабного (в заданное число раз) усиления напряжения и одно-временного «развязывания», т. е. электрического разделения источника энергии и нагрузки.

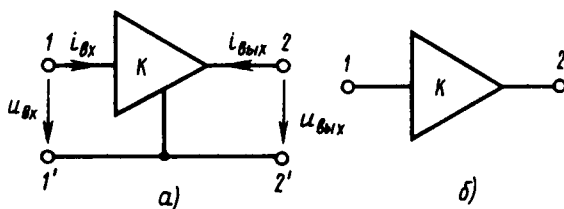


Рис. 7.38. Условное графическое изображение идеальных усилителей напряжения

Пример 7.26. Рассмотрим некоторый источник энергии, представленный на рис. 7.39, а последовательной схемой замещения. Очевидно, что в режиме холостого хода напряжение на зажимах источника численно равно ЭДС источника e , а при подключении к этим зажимам сопротивления нагрузки R_n падает до

$$u_n = \frac{R_n}{R_n + R_i} e = \frac{e}{1 + R_i/R_n}.$$

Таким образом, напряжение на зажимах источника зависит от сопротивления нагрузки, причем чем меньше сопротивление нагрузки R_n , тем меньше напряжение u_n . Если между источником энергии и нагрузкой включить идеальный усилитель напряжения (рис. 7.39, б), то независимо от значения сопротивления нагрузки ток i_1 ,

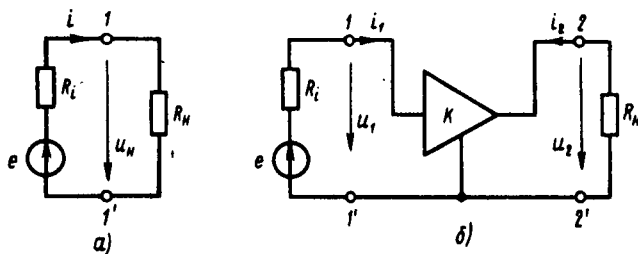


Рис. 7.39. К примеру 7.26

отдаваемый источником энергии, будет равен нулю, а напряжение на его зажимах u_1 — ЭДС e . При этом напряжение на сопротивлении нагрузки будет в $K=K_u$ раз больше напряжения на зажимах источника, т. е. $u_2 = Ku_1 = Ke$.

При $K=1$ напряжение на сопротивлении нагрузки оказывается равным напряжению на зажимах источника в режиме холостого хода: $u_2 = u_1 = e$.

Таким образом, идеальный усилитель напряжения с $K_u = K = 1$ (идеальный повторитель напряжения) устраняет зависимость напряжения на зажимах источника от сопротивления нагрузки, поддерживая в то же время напряжение на нагрузке равным напряжению на зажимах источника.

Развязывание отдельных каскадов с помощью идеальных усилителей напряжения позволяет существенно упростить анализ цепи, так как устраняет взаимное влияние каскадов, оно широко используется при синтезе цепей. Идеальные усилители напряжения также

дают возможность имитировать индуктивные катушки с заданными потерями, производить масштабное умножение емкости и реализовывать участки цепей с отрицательным входным сопротивлением.

Пример 7.27. Рассмотрим цепь, содержащую идеальный усилитель напряжения K , между входным и выходным зажимами которого включено произвольное линейное сопротивление R (рис. 7.40). Очевидно, что входной ток цепи i_1 равен току через сопротивление R :

$$i_1 = i_3 = -\frac{u_1 - u_2}{R} = \frac{1-K}{R} u_1.$$

Следовательно, входное сопротивление цепи

$$R_{\text{вх}} = u_1/i_1 = R/(1-K)$$

будет зависеть от коэффициента усиления усилителя K . При $K < 1$ входное сопротивление цепи будет положительным, а при $K > 1$ — отрицательным.

Пример 7.28. Построим схему замещения активного двухполюсника, содержащего идеальный повторитель напряжения (рис. 7.41).

Составим уравнения баланса токов для узлов a и b :

$$i_1 = i_4; \quad i_4 = i_2 + i_3,$$

откуда

$$i_1 = \frac{u_3}{R_2} + C \frac{d}{dt} (u_3 - u_2).$$

Учитывая, что напряжение на выходе идеального повторителя напряжения u_2 равно входному напряжению u_1 и представляя напряжение u_3 в виде $u_3 = u_1 - R_1 i_4 = u_1 - R_1 i_1$, находим зависимость между током и напряжением на входе двухполюсника:

$$u_1 = (R_1 + R_2)i_1 + R_1 R_2 C \frac{di_1}{dt}$$

или

$$u_1 = R_{\text{эк}} i_1 + L_{\text{эк}} \frac{di_1}{dt}.$$

Таким образом, рассматриваемая цепь может быть представлена последовательной RL -цепью, составленной из элементов $R_{\text{эк}} = R_1 + R_2$; $L_{\text{эк}} = R_1 R_2 C$.

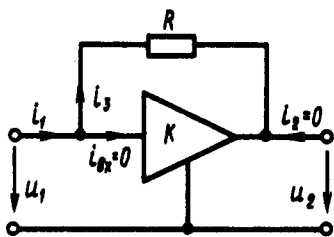


Рис. 7.40. К примеру 7.27

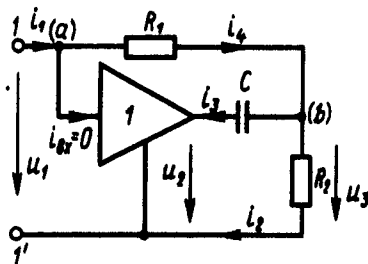


Рис. 7.41. К примеру 7.28

Пример 7.29. Найдем зависимость между током и напряжением на зажимах $I - I'$ цепи, схема которой приведена на рис. 7.42.

Составляя уравнения баланса токов для узлов a и b

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3; \\ i_3 &= i_4 \end{aligned}$$

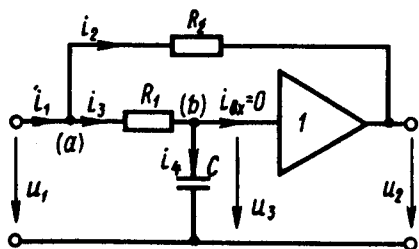
и учитывая, что

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{u_1 - u_2}{R_2}; \quad i_3 = \frac{u_1 - u_3}{R_1}; \\ i_4 &= C \frac{du_3}{dt}; \quad u_2 = u_3, \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} i_1.$$

Пропиентируем левую и правую части этого соотношения в пределах от $-\infty$ до t :



или

$$u_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_1 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} \int_{-\infty}^t i_1 dt$$

$$u_1 = R_{\text{эк}} i_1 + \frac{1}{C_{\text{эк}}} \int_{-\infty}^t i_1 dt.$$

Как следует из полученных выражений, рассматриваемая цепь может быть представлена последовательной схемой замещения, составленной из элементов $R_{\text{эк}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$; $C_{\text{эк}} = (1 + R_1 / R_2) C$, причем емкость $C_{\text{эк}}$ оказывается в $1 + R_1 / R_2$ раз большей, чем емкость C . Таким образом, данная цепь (рис. 7.42) осуществляет умножение емкости.

ОДНОНАПРАВЛЕННЫЕ ЦЕПИ И ЦЕПИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Как следует из основных уравнений управляемых источников (7.112), (7.114), (7.116), (7.118) и идеальных усилителей (7.120), (7.121), эти четырехполюсники обладают следующими основными свойствами:

- выходная (управляемая) величина $\dot{S} \doteq s(t)$ пропорциональна входной (управляющей) величине $\dot{X} \doteq x(t)$: $\dot{S} = K_{\text{упр}} \dot{X}$;
- входная (управляющая) величина не зависит от выходной.

Четырехполюсники, обладающие такими свойствами, называются **однонаправленными**. Они обеспечивают передачу энергии только в одном направлении (от входа к выходу); передача энергии в обратном направлении (от выхода к входу) в однонаправленных четырехполюсниках полностью отсутствует.

Отсутствие передачи энергии с выхода идеальных усилителей

и управляемых источников ко входу объясняется тем, что все элементы матриц первичных параметров этих цепей, кроме одного, предполагаются равными нулю (7.113), (7.115), (7.117) и (7.119), т. е. является следствием идеализации. Все реально существующие устройства не являются полностью однонаправленными: наряду с передачей энергии от входа к выходу в них имеет место также и передача энергии в обратном направлении.

Независимые четырехполюсники, в которых наряду с преимущественной передачей энергии в одном направлении имеет место также передача энергии в противоположном направлении, называются **четырехполюсниками с обратной связью**. Обратная связь (ОС) может возникнуть не только вследствие неидеальности четырехполюсника (такая обратная связь называется **внутренней**), но и благодаря подключению к однонаправленному четырехполюснику внешней цепи — цепи обратной связи (обратная связь такого типа называется **внешней**). В дальнейшем под цепью с обратной связью (рис. 7.43, а) будем понимать, как правило, цепь с внешней обратной связью, т. е. цепь, содержащую однонаправленный четырехполюсник $K(j\omega)$ (будем называть его **основным**) и четырехполюсник обратной связи $\beta(j\omega)$ (будем называть его **вспомогательным**). Четырехполюсник обратной связи, как правило, является пассивным, а его передаточные характеристики являются функцией частоты (**частотно-зависимая ОС**). Если передаточные характеристики четырехполюсника обратной связи предполагаются не зависящими от частоты, то такая ОС называется **частотно-независимой**.

На структурной схеме цепи с обратной связью (рис. 7.43, а) не показано, каким именно способом соединены между собой выходы основного и вспомогательного четырехполюсников [в принципе для этой цели может использоваться любое известное соединение четырехполюсников (параллельное, последовательное, последовательно-параллельное и параллельно-последовательное)].

Рассмотрим последовательно-параллельное соединение четырехполюсников (рис. 7.43, б) и определим комплексный коэффициент передачи по напряжению получившейся цепи с ОС по известным значениям комплексных коэффициентов передачи по напряжению основного $K(j\omega)$ и вспомогательного $\beta(j\omega)$ четырехполюсников.

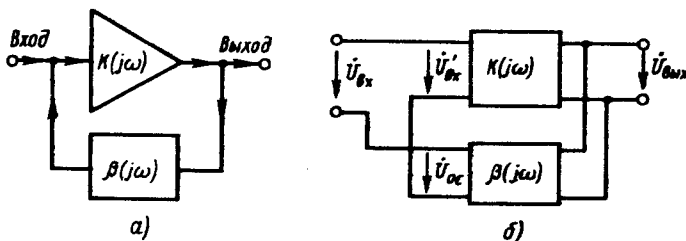


Рис. 7.43. Схемы цепей с обратной связью

Для упрощения анализа будем считать, что вспомогательный четырехполосник, так же как основной, является однонаправленным. Это допущение хорошо выполняется в тех случаях, когда входное сопротивление четырехполосника обратной связи достаточно велико, чтобы не нагружать основной четырехполосник, а выходное сопротивление четырехполосника обратной связи мало по сравнению с входным сопротивлением основного четырехполосника.

При принятых допущениях напряжение на входе основного четырехполосника $\dot{U}'_{\text{вх}}$ складывается из входного напряжения цепи $\dot{U}_{\text{вх}}$ и напряжения на выходе вспомогательного четырехполосника $\dot{U}_{\text{ос}}$:

$$\dot{U}'_{\text{вх}} = \dot{U}_{\text{вх}} + \dot{U}_{\text{ос}} = \dot{U}_{\text{вх}} + \beta(j\omega)\dot{U}_{\text{вых}}, \quad (7.122)$$

а выходное напряжение цепи $\dot{U}_{\text{вых}}$ отличается от напряжения на входе основного четырехполосника на множитель $K(j\omega)$:

$$\dot{U}_{\text{вых}} = K(j\omega)\dot{U}'_{\text{вх}}. \quad (7.123)$$

Подставляя (7.122) в (7.123) и разрешая выражение

$$\dot{U}_{\text{вых}} = K(j\omega) [\dot{U}_{\text{вх}} + \beta(j\omega)\dot{U}_{\text{вых}}]$$

относительно $\dot{U}_{\text{вых}}$, находим

$$K_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{K(j\omega)}{1 - \beta(j\omega)K(j\omega)}. \quad (7.124)$$

Величину $K_{\text{ос}}(j\omega)$ обычно называют общим коэффициентом передачи по напряжению или коэффициентом передачи по напряжению цепи с замкнутым контуром обратной связи. Величину $\beta(j\omega)K(j\omega)$, имеющую смысл коэффициента передачи по напряжению каскадного соединения четырехполосников $K(j\omega)$ и $\beta(j\omega)$, называют коэффициентом передачи по напряжению цепи с разомкнутым контуром обратной связи или петлевым коэффициентом передачи.

Анализ выражения (7.124) показывает, что при одних условиях модуль общего коэффициента передачи $K_{\text{ос}}(\omega)$ может оказаться большим, а при других условиях — меньшим, чем модуль коэффициента передачи по напряжению основного четырехполосника $K(\omega)$. Если введение обратной связи приводит к увеличению модуля коэффициента передачи, то такая обратная связь называется **положительной**, в противном случае обратная связь является **отрицательной**. Если основным четырехполосник представляет собой идеальный усилитель напряжения с коэффициентом усиления K , то обратная связь будет положительной при $|1 - \beta(j\omega)K| < 1$ и отрицательной при $|1 - \beta(j\omega)K| > 1$. При $\beta(j\omega)K = 1$ общий коэффициент усиления $K_{\text{ос}}(j\omega)$ становится бесконечно большим, а это означает, что цепь становится неустойчивой. Колебания на выходе такой цепи

могут возникать в отсутствие внешнего воздействия (самовозбуждение цепи).

Цепи как с отрицательной, так и с положительной обратной связью широко используются в современной радиоэлектронике. Свойства таких цепей, в том числе условия их устойчивости, детально рассматриваются в курсах «Радиотехнические цепи и сигналы» и «Усилительные устройства». В рамках нашего курса отметим только, что характеристики цепей с обратной связью в общем случае зависят как от характеристик основного четырехполюсника (усилителя), так и от характеристик цепи обратной связи, причем при больших по модулю значениях петлевого коэффициента передачи $|\beta(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$, общий коэффициент передачи цепи по напряжению (7.124) определяется только передаточной характеристикой четырехполюсника обратной связи:

$$K_{\text{ос}}(j\omega) \big|_{|\beta(j\omega)K(j\omega)| \gg 1} = -\frac{1}{\beta(j\omega)}. \quad (7.125)$$

К цепям такого типа относятся, в частности, рассматриваемые далее цепи с операционными усилителями.

ИДЕАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ УСИЛИТЕЛИ

Идеальным операционным усилителем (ОУ) называется идеальный усилитель напряжения с бесконечно большим коэффициентом усиления. Идеальный ОУ представляет собой упрощенную модель широкого класса реальных устройств — операционных усилителей, различные типы которых в большом числе выпускаются промышленностью в виде интегральных полупроводниковых микросхем. Первоначально усилители такого типа использовались в основном в аналоговой вычислительной технике для моделирования различных математических операций (умножения, сложения, интегрирования и т. п.), чем и объясняется происхождение термина «операционный усилитель».

Наибольшее распространение получили ОУ с двумя входными зажимами (ОУ с дифференциальным входом), напряжение на выходе которых пропорционально разности напряжений на входных зажимах:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}} &= (u_{\text{вх2}} - u_{\text{вх1}})K; \\ i_{\text{вх1}} &= i_{\text{вх2}} = 0; K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.126)$$

Схема замещения идеального ОУ с дифференциальным входом и его условное графическое обозначение приведены на рис. 7.44, а, б. Условное графическое изображение реального ОУ в соответствии с ГОСТ 2.759 — 82 дано на рис. 7.44, в.

Как следует из выражений (7.126) и рис. 7.44, а, при закорачивании зажимов 2 — 2' ОУ ведет себя как инвертирующий,

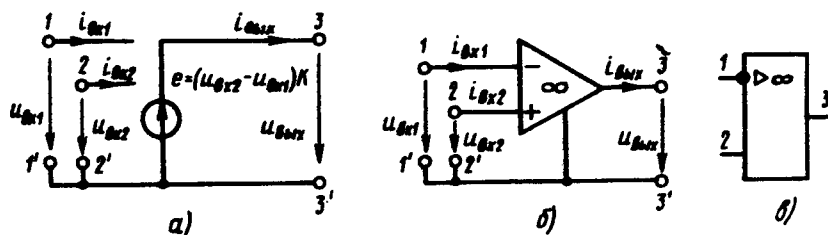


Рис. 7.44. Схема замещения (а), условные графические изображения идеального (б) и реального (в) ОУ

а при закорачивании зажимов 1 — 1' как инвертирующий усилитель напряжения с бесконечно большим коэффициентом усиления, поэтому зажимы 1 — 1' называются **инвертирующими**, а зажимы 2 — 2' — **неинвертирующими** входами. На условном графическом изображении идеального ОУ (рис. 7.44, б) инвертирующий вход обозначен знаком «-», а неинвертирующий — «+». Следует помнить, что знаки «-» и «+» позволяют в данном случае только условно обозначать инвертирующий и неинвертирующий входы и не указывают на полярность соответствующих напряжений. Инвертирующий вход реального ОУ (рис. 7.44, в) обозначается кружком.

Анализ цепей с ОУ можно выполнять двумя способами, равноценными в смысле получаемых результатов:

1) заменяя ОУ схемой замещения (рис. 7.44, а) и составляя уравнения электрического равновесия полученной идеализированной цепи при $K \neq \infty$. После решения этих уравнений относительно интересующих токов и напряжений находят пределы, к которым стремятся значения соответствующих величин при $K \rightarrow \infty$;

2) не прибегая к схеме замещения ОУ (рис. 7.44, а), но учитывая, что при конечном выходном напряжении u_{yx} и бесконечно большом коэффициенте усиления K разность $u_{x2} - u_{x1}$ должна стремиться к нулю, т. е. зажимы 1 и 2 должны иметь одинаковый потенциал. Это допущение, а также учет того, что входные токи ОУ равны нулю, позволяют существенно упростить анализ цепей с ОУ.

Пример 7.30. Найдем напряжение на выходе ОУ, включенного по схеме, изображенной на рис. 7.45, а. Заменив ОУ схемой замещения (см. рис. 7.44, а), получаем эквивалентную схему рассматриваемой цепи (рис. 7.45, б), из анализа которой следует, что при конечном значении K напряжение на выходе цепи u_2 прямо пропорционально разности напряжений $u_1 - u_3$:

$$u_2 = K(u_1 - u_3).$$

Напряжение $u_1 = e_1$ является заданным, а напряжение u_3 может быть найдено как напряжение на выходе цепи обратной связи, представляющей собой делитель напряжения, составленный из сопротивлений R_1 и R_2 :

$$u_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_2 = \frac{KR_2}{R_1 + R_2} (u_1 - u_3).$$

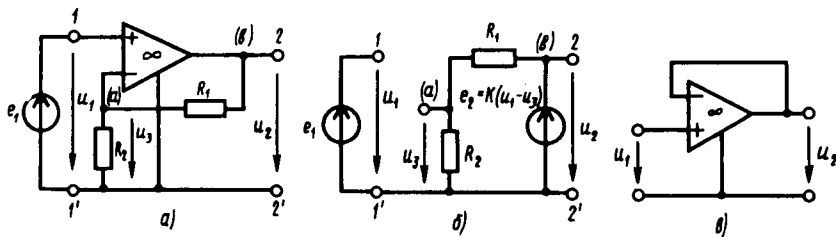


Рис. 7.45. К примеру 7.30

Исключая из полученных выражений напряжение

$$u_3 = \frac{KR_2}{R_1 + R_2 + KR_2} u_1,$$

определяем

$$u_2 = \frac{K(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + KR_2} u_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2 + (R_1 + R_2)/K} u_1.$$

При $K \rightarrow \infty$ напряжение на выходе ОУ зависит только от параметров элементов, входящих в четырехполюсник обратной связи:

$$u_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_1.$$

Учитывая, что входное сопротивление исследуемой цепи (рис. 7.45, а) бесконечно велико, а выходное сопротивление равно нулю, нетрудно прийти к заключению, что данная цепь ведет себя как идеальный неинвертирующий усилитель напряжения с коэффициентом усиления $K = 1 + R_1/R_2$.

При $R_1 = 0$ напряжение на выходе усилителя при любом R_2 равно входному напряжению, т. е. рассматриваемая цепь превращается в идеальный повторитель напряжения. При $R_2 = \infty$ схема повторителя принимает особенно простой вид (рис. 7.45, в).

Аналогичные результаты могут быть получены более простым путем, если учесть, что разность напряжений на инвертирующем и неинвертирующем входах ОУ равна нулю. Действительно, используя рис. 7.45, а и полагая, что напряжения на инвертирующем и неинвертирующем входах равны между собой

$$u_1 = u_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_2,$$

находим

$$u_2 = (1 + R_1/R_2) u_1.$$

Учитывая большую простоту получения результатов при использовании второго способа, дальнейшее рассмотрение ОУ будем производить, не прибегая к схемам замещения ОУ (рис. 7.44, а).

Пример 7.31. Найдем операторный коэффициент передачи по напряжению цепи, схема которой приведена на рис. 7.46, а. Напряжение на неинвертирующем входе ОУ равно нулю, поэтому напряжение на инвертирующем входе $U_2(p)$ также положим равным нулю. (Строго говоря, напряжение $U_3(p)$ не равно нулю, так как узел (а) не

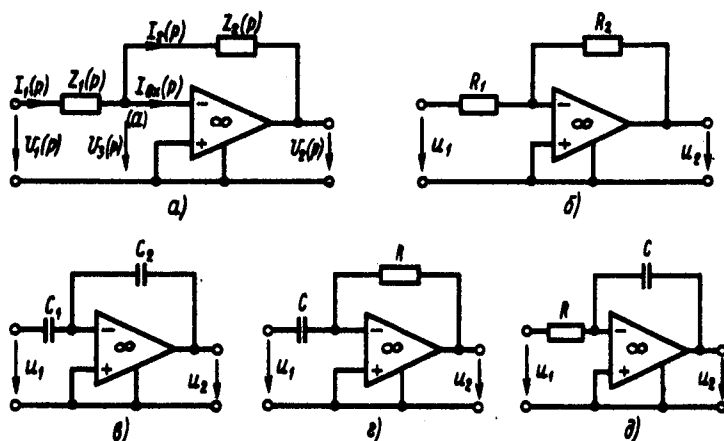


Рис. 7.46. К примеру 7.31

соединен непосредственно с базисным узлом, но вследствие наличия ОУ напряжение $U_3(p)$ практически не отличается от нуля. Такую величину обычно называют виртуальным нулем (от англ. virtual — фактический).

Составляя уравнение баланса токов для узла a

$$-I_1(p) + I_2(p) + I_{вх}(p) = 0$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{U_1(p) - U_3(p)}{Z_1(p)} = \frac{U_1(p)}{Z_1(p)}; \\ I_2(p) &= \frac{U_3(p) - U_2(p)}{Z_2(p)} = \frac{-U_2(p)}{Z_2(p)}; \\ I_{вх}(p) &= 0, \end{aligned}$$

получаем

$$U_2(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} U_1(p),$$

откуда

$$K_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}.$$

Таким образом, операторный коэффициент передачи рассматриваемой цепи по напряжению зависит только от параметров внешних по отношению к ОУ элементов.

При $Z_1(p) = R_1$ и $Z_2(p) = R_2$ (рис. 7.46, б) данная цепь представляет собой инвертирующий масштабный усилитель, коэффициент усиления которого определяется отношением сопротивлений R_2 и R_1 , входное сопротивление равно R_1 , а выходное — нулю. При $Z_1(p) = 1/(pC_1)$ и $Z_2(p) = 1/(pC_2)$ операторный коэффициент передачи цепи по напряжению зависит только от отношения емкостей C_1 и C_2 , а именно $K_{21}(p) = -C_1/C_2$.

Устройство такого типа называют усилителем заряда (рис. 7.46, а). В реальных усилителях заряда параллельно конденсатору C_2 подключают высокоомный резистор, обеспечивающий путь для постоянного тока и, следовательно, для разрядки конденсаторов C_1 и C_2 .

Если $Z_1(p) = 1/(pC)$, $Z_2(p) = R$, то операторный коэффициент передачи цепи по напряжению пропорционален комплексной частоте p :

$$K_{21}(p) = -pRC,$$

т. е. цепь (рис. 7.46, з) осуществляет дифференцирование входного напряжения с изменением его знака: $u_2 = -RC \frac{du_1}{dt}$.

При $Z_1(p) = R$ и $Z_2(p) = 1/(pC)$ коэффициент передачи цепи по напряжению обратно пропорционален p :

$$K_{21}(p) = -1/(pRC),$$

следовательно, данная цепь (рис. 7.46, д) осуществляет интегрирование входного напряжения:

$$u_2 = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_1 dt.$$

Используя ОУ, можно построить также множество других цепей: инвертирующих и неинвертирующих сумматоров, преобразователей сопротивления, компараторов, аттенюаторов и т. п. [13].

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Преобразователями сопротивления называются четырехполюсники, входное сопротивление которых пропорционально сопротивлению или проводимости нагрузки. Различают два основных типа преобразователей сопротивления: конверторы и инверторы.

Идеальный конвертор сопротивления — это четырехполюсник, комплексное входное сопротивление которого пропорционально комплексному сопротивлению нагрузки:

$$Z_{\text{вх}} = K_{\text{конв}} Z_{\text{н}}, \quad (7.127)$$

где $K_{\text{конв}}$ — вещественное число, называемое коэффициентом конверсии. При $K_{\text{конв}} > 0$ конвертор осуществляет преобразование сопротивления без изменения его знака. Конверторы такого типа называют конверторами положительного сопротивления или масштабными преобразователями сопротивления. К конверторам положительного сопротивления относится, в частности, идеальный трансформатор, входное сопротивление которого определяется выражением (2.193), и, следовательно, коэффициент конверсии равен квадрату величины, обратной коэффициенту трансформации:

$$K_{\text{конв}} = 1/n^2.$$

При $K_{\text{конв}} < 0$ конвертор осуществляет преобразование сопротивления с изменением его знака. Конверторы такого типа получили название конверторов отрицательного сопротивления.

Сравнивая выражение (7.127) с соотношением (7.64) для входного сопротивления произвольного четырехполюсника, нагруженного со стороны зажимов 2 — 2' (см. рис. 7.33, а), определяем зависимость между A -параметрами идеального конвертора сопротивления:

$$A_{11} = K_{\text{конв}} A_{22}; A_{12} = 0; A_{21} = 0. \quad (7.128)$$

Очевидно, что у конверторов положительного сопротивления параметры A_{11} и A_{22} имеют одинаковые знаки, а у конверторов отрицательного сопротивления — противоположные.

Используя соотношения (7.128), находим определитель матрицы A -параметров идеального конвертора сопротивлений:

$$\Delta_A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = A_{11} A_{22} = K_{\text{конв}} A_{22}^2 = A_{11}^2 / K_{\text{конв}}. \quad (7.129)$$

Следовательно, идеальный конвертор сопротивления является взаимным четырехполюсником при $A_{11} A_{22} = 1$ (этому условию удовлетворяет, например, идеальный трансформатор, у которого $A_{11} = 1/n$, $A_{22} = n$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$) и невзаимным при $A_{11} A_{22} \neq 1$.

Подключая нагрузку $Z_n = Z_{n1}$ к зажимам 1 — 1' (рис. 7.33, б) и учитывая выражения (7.71) и (7.128), определяем выходное сопротивление конвертора:

$$Z_{\text{вых}} = \frac{A_{22} Z_n + A_{12}}{A_{21} Z_n + A_{11}} = \frac{A_{22} Z_n}{A_{11}} = K_{\text{конв}}^{-1} Z_n. \quad (7.130)$$

Как следует из выражения (7.130), характер преобразования сопротивления не изменится, если входные и выходные зажимы идеального конвертора сопротивления поменять местами, при этом коэффициент конверсии $K_{\text{конв}}$ заменится обратной ему величиной

$$K_{\text{конв}}^{-1}.$$

Если у конвертора сопротивления $A_{11} = 1$ и, следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K_{\text{конв}}^{-1} \end{bmatrix},$$

то такой конвертор называется идеальным конвертором с преобразованием тока. Напряжение на выходе такого конвертора равно напряжению на входе, а токи I_1 и I_2' отличаются в $K_{\text{конв}}$ раз:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2; \\ I_2' &= K_{\text{конв}} I_1. \end{aligned}$$

Если у конвертора сопротивления $A_{22}=1$ и, следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} K_{\text{инв}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то такой конвертор называют **идеальным конвертором с преобразованием напряжения**. Напряжения на входе и выходе такого конвертора отличаются в $K_{\text{инв}}$ раз, а токи I_1 и I_2 имеют одинаковые значения:

$$\begin{aligned} U_1 &= K_{\text{инв}} U_2; \\ I_1 &= I_2. \end{aligned}$$

Идеальным инвертором сопротивления называется четырехполюсник, комплексное входное сопротивление которого пропорционально комплексной проводимости нагрузки:

$$Z_{\text{вх}} = K_{\text{инв}} Y_n = K_{\text{инв}} / Z_n, \quad (7.131)$$

где $K_{\text{инв}}$ — вещественное число, называемое **коэффициентом инверсии**.

Сравнивая выражения (7.64) и (7.131), находим соотношения между A -параметрами идеального инвертора сопротивления:

$$A_{12} = K_{\text{инв}} A_{21}; A_{11} = 0; A_{22} = 0. \quad (7.132)$$

Нетрудно убедиться, что *входное сопротивление инвертора не изменится, если его входные и выходные зажимы поменять местами*:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{A_{22}Z_n + A_{12}}{A_{21}Z_n + A_{11}} = \frac{A_{12}}{A_{21}Z_n} = \frac{K_{\text{инв}}}{Z_n}.$$

Определитель матрицы A -параметров идеального инвертора сопротивления

$$\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = -A_{12}A_{21} = -K_{\text{инв}}A_{21}^2 = -A_{12}^2/K_{\text{инв}}. \quad (7.133)$$

Следовательно, идеальный инвертор сопротивления является взаимным четырехполюсником только в случае $A_{12}A_{21} = -1$. При $A_{12}A_{21} \neq -1$ идеальный инвертор сопротивления является невзаимным четырехполюсником.

В зависимости от знака коэффициента инверсии различают инверторы положительного ($K_{\text{инв}} > 0$) и отрицательного ($K_{\text{инв}} < 0$) сопротивления. Частным случаем инвертора положительного сопротивления является **идеальный гиратор**, представляющий собой идеализированный трехполюсный элемент, комплексные действующие значения напряжений и токов на зажимах которого связаны между собой соотношениями

$$I_1 = gU_2; I_2 = -gU_1, \quad (7.134)$$

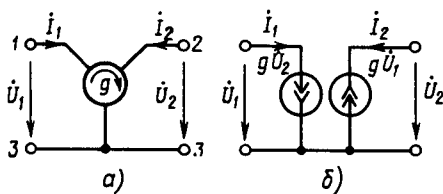


Рис. 7.47. Условное графическое изображение (а) и схема замещения (б) идеального гиратора

7.47, б), и определить матрицы Y -, Z -, A - и B -параметров гиратора, включенного с общим полюсом 3:

$$Y^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}; \quad (7.135)$$

$$Z^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/g \\ 1/g & 0 \end{bmatrix}; \quad (7.136)$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix}; \quad (7.137)$$

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/g \\ -g & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.138)$$

Матриц G - и H -параметров для гиратора не существует.

Как следует из (7.137), идеальный гиратор является невязанным четырехполюсником ($\Delta_A = -1$), его коэффициент инверсии равен квадрату величины, обратной коэффициенту гирации:

$$K_{\text{инв}} = A_{12}/A_{21} = 1/g^2. \quad (7.139)$$

Переходя от выражения (7.135) к неопределенной матрице Y -параметров гиратора

$$Y_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & g & -g \\ -g & 0 & g \\ g & -g & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

нетрудно убедиться, что вид неопределенной матрицы не изменится при изменении нумерации выводов гиратора в направлении по часовой стрелке, т. е. в направлении стрелки, помещенной внутри кружка на его условном графическом изображении.

Таким образом, вид компонентных уравнений гиратора (7.134) не зависит от того, какой из выводов сделать общим, при условии,

где g — вещественное число, называемое коэффициентом гирации или гираторной проводимостью. Условное графическое изображение гиратора приведено на рис. 7.47, а. Используя компонентные уравнения гиратора (7.134), можно построить его схему замещения, содержащую два управляемых напряжением источника тока (рис.

что нумерацию всех выводов изменяют в показанном стрелкой направлении. Следовательно, цифру 3, указывающую номер общего зажима, в выражениях (7.135) — (7.138) можно опустить.

Некоторые свойства гиратора подобны свойствам идеального трансформатора. Так, токи и напряжения на зажимах гиратора связаны соотношением

$$I_1/(-I_2) = \dot{U}_2/\dot{U}_1, \quad (7.140)$$

подобным выражению (2.192)*, а активная мощность, потребляемая гиратором от источника, равна активной мощности, отдаваемой гиратором в нагрузку (комплексная мощность, потребляемая гиратором от источника, является величиной, сопряженной с комплексной мощностью нагрузки).

В то же время в отличие от идеального трансформатора гиратор является невзаимным элементом и обладает рядом свойств, не присущих идеализированным элементам других типов. В частности, любой невзаимный четырехполюсник с вещественными параметрами, представленный своей матрицей Y -параметров

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

где $\text{Im}[Y_{11}] = \text{Im}[Y_{12}] = \text{Im}[Y_{21}] = \text{Im}[Y_{22}] = 0$, $Y_{12} \neq Y_{21}$, может рассматриваться в качестве параллельного соединения некоторого взаимного четырехполюсника A , матрица Y -параметров которого

$$Y_A = \begin{bmatrix} Y_{11} & (Y_{12} + Y_{21})/2 \\ (Y_{12} + Y_{21})/2 & Y_{22} \end{bmatrix},$$

и гиратора с коэффициентом гирации $g = (Y_{12} - Y_{21})/2$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, используя правила определения первичных параметров составных четырехполюсников (7.54).

Рассмотрим каскадное соединение двух гираторов с коэффициентами гирации g_1 и g_2 (рис. 7.48). В соответствии с (7.49) матрица A -параметров такого составного четырехполюсника может быть найдена как произведение матриц A -параметров входящих в него гираторов:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/g_1 \\ g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/g_2 \\ g_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2/g_1 & 0 \\ 0 & g_1/g_2 \end{bmatrix}. \quad (7.141)$$

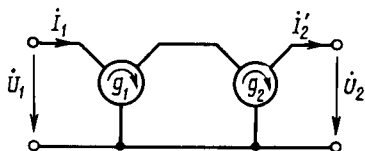


Рис. 7.48. Каскадное соединение гираторов

*При сопоставлении выражений (2.192) и (7.140) необходимо учитывать, что для гиратора и идеального трансформатора выбраны различные направления тока I_2 .

Сравнивая выражение (7.141) с матрицей A -параметров идеального трансформатора (см. пример 7.17), получаем, что каскадное соединение двух гираторов эквивалентно идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации $n = g_1/g_2$.

Входное сопротивление гиратора при произвольной нагрузке на выходе определяем из выражений (7.131) и (7.139):

$$Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = K_{\text{вхн}} / Z_{\text{н}} = 1 / (g^2 Z_{\text{н}}). \quad (7.142)$$

В случае чисто емкостной нагрузки $Z_{\text{н}} = 1 / (j\omega C_{\text{н}})$ входное сопротивление гиратора имеет чисто индуктивный характер:

$$Z_{\text{вх}} = j\omega C_{\text{н}} / g^2 = j\omega L_{\text{эк}}, \quad (7.143)$$

где $L_{\text{эк}} = C_{\text{н}} / g^2$ — эквивалентная входная индуктивность гиратора. При индуктивной нагрузке $Z_{\text{н}} = j\omega L_{\text{н}}$ входное сопротивление гиратора имеет емкостный характер:

$$Z_{\text{вх}} = 1 / (j\omega L_{\text{н}} g^2) = 1 / (j\omega C_{\text{эк}}),$$

где $C_{\text{эк}} = g^2 L_{\text{н}}$ — эквивалентная входная емкость гиратора. Используя выражение (7.142), нетрудно убедиться, что при подключении к выходным зажимам конденсатора емкостью C и достаточно высокой добротностью Q_C гиратор становится эквивалентным катушке с индуктивностью $L_{\text{эк}} \approx C_{\text{н}} / g^2$ и добротностью $Q_L = Q_C$.

Таким образом, в отличие от идеального трансформатора идеальный гиратор, как и любой инвертор положительного сопротивления, преобразует сопротивления не только по модулю, но и по знаку.

Способность гираторов имитировать индуктивные катушки и трансформаторы особенно привлекательна для применения их в микроэлектронике, поскольку реализация индуктивных элементов в составе интегральных микросхем другими методами затруднена.

§ 7.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Электрические цепи, предназначенные для выделения колебаний, лежащих в определенном диапазоне частот, называются **электрическими фильтрами**. Диапазон частот, пропускаемых фильтром, называется **полосой прозрачности** или **полосой пропускания**. Остальная область частот, подавляемая фильтром, называется **полосой задерживания** или **полосой непрозрачности**.

В соответствии с диапазоном частот, пропускаемых фильтром, различают фильтры: **нижних частот** (полоса пропускания от 0 до некоторой частоты f_c , называемой частотой среза), **верхних частот** (полоса пропускания от частоты f_c до ∞), **полосовые** (полоса пропу-

скания от f_{c1} до f_{c2} и *заграждающие* (полоса задерживания от f_{c1} до f_{c2}). Амплитудно-частотные характеристики коэффициента передачи по напряжению идеальных фильтров приведены на рис. 7.49.

В зависимости от типов входящих в них элементов электрические фильтры подразделяют на реактивные (*LC-фильтры*), резистивно-емкостные (*RC-фильтры*), активные (*ARC-фильтры*), а также фильтры, использующие различные физические эффекты в твердых телах (пьезоэлектрические, магнитострикционные, акустооптические и т. п.). Кроме того, электрические фильтры классифицируются по способу соединения элементов (по типу звеньев), числу звеньев, виду математических функций, аппроксимирующих частотные характеристики фильтра (фильтры Чебышева, Баттерворта, Золотарева, Бесселя и др.), а также по типу параметров, применяемых при расчете фильтра (фильтры по характеристическим и рабочим параметрам).

В течение длительного времени в различных радиоэлектронных устройствах использовались в основном реактивные фильтры, методам расчета которых посвящена обширная литература. В настоящее время эти фильтры почти не применяются на практике, однако теория таких фильтров не утратила прикладного значения в связи с тем, что при построении многих типов современных фильтров, в частности активных фильтров с преобразователями сопротивления, цифровых фильтров, фильтров с переключаемыми конденсаторами, реактивные фильтры используются в качестве прототипов.

РЕАКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Рассмотрим основные свойства реактивных фильтров, т. е. фильтров, составленных только из индуктивных катушек и конденсаторов с высокой добротностью. При упрощенном анализе процессов в таких фильтрах потерями в их элементах, как правило, пренебрегают, поэтому в схеме замещения реактивного фильтра содержатся только идеализированные реактивные элементы — емкости и индуктивности.

Реактивные фильтры можно выполнять путем согласованного каскадного соединения отдельных звеньев. Фильтры, построенные по такому принципу, относятся к фильтрам по *характеристическим параметрам*. Простейший тип звена — Г-образное, представляет собой Г-образный четырехполюсник с П- или Т-выходом. При

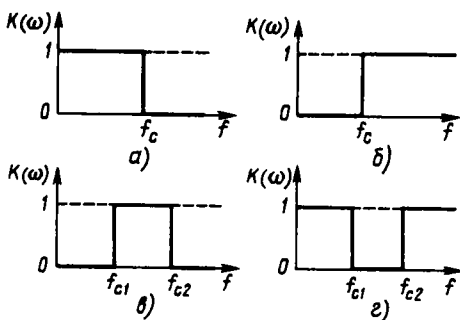


Рис. 7.49. АЧХ идеальных фильтров: а — нижних частот; б — верхних частот; в — полосового; г — задерживающего

согласованном каскадном соединении таких звеньев получают симметричные П- или Т-образные звенья. Как было показано в примере 7.25, характеристическое сопротивление симметричного П-образного четырехполюсника (см. рис. 7.24, а) равно характеристическому входному сопротивлению Г-образного четырехполюсника с П-входом, а характеристическое сопротивление симметричного Т-образного четырехполюсника (см. рис. 7.24, в) — характеристическому входному сопротивлению Г-образного четырехполюсника с Т-входом.

Характеристические постоянные передачи Т- и П-образных симметричных четырехполюсников одинаковы и равны удвоенной характеристической постоянной Г-образного звена (см. пример 7.25):

$$\Gamma_T = \Gamma_P = \Gamma = \text{Arch} [1 + Z_1/(2Z_2)]$$

или

$$\text{ch} \Gamma = 1 + Z_1/(2Z_2). \quad (7.144)$$

Если фильтр образован путем согласованного каскадного соединения N идентичных симметричных звеньев, то коэффициент передачи фильтра по напряжению равен произведению коэффициентов передачи отдельных звеньев (7.108), АЧХ-фильтра определяется только зависимостью постоянной ослабления каждого звена от частоты, $A(\omega) = A = \text{Re} [\Gamma]$:

$$K(\omega) = e^{-NA(\omega)}. \quad (7.145)$$

Из выражения (7.145) следует, что для обеспечения близости АЧХ-фильтра к характеристикам идеальных фильтров необходимо, чтобы в полосе пропускания постоянная ослабления каждого звена была равна нулю, а в полосе задерживания имела по возможности большее значение, причем условия согласования фильтра должны выполняться хотя бы в полосе пропускания. Исходя из этих соображений, рассмотрим требования, которые должны предъявляться к выбору сопротивлений продольной Z_1 и поперечной Z_2 ветвей П- и Т-образных звеньев реактивных фильтров.

В соответствии с принятыми допущениями будем считать, что сопротивления Z_1 и Z_2 имеют чисто реактивный характер $Z_1 = jx_1$, $Z_2 = jx_2$, вследствие чего $\text{ch} \Gamma = 1 + Z_1/(2Z_2)$ должен быть вещественной величиной. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \text{ch} \Gamma &= \text{ch} (A + jB) = \text{ch} A \text{ch} jB + \text{sh} A \text{sh} jB = \\ &= \text{ch} A \cos B + j \text{sh} A \sin B, \end{aligned}$$

уравнение (7.144) можно заменить равносильной ему системой уравнений с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \text{ch} A \cos B &= 1 + x_1/(2x_2); \\ \text{sh} A \sin B &= 0. \end{aligned}$$

В пределах полосы пропускания постоянная ослабления A должна быть равна нулю:

$$A=0, \operatorname{sh} A=0, \operatorname{ch} A=1, \quad (7.146)$$

а постоянная фазы B изменяется по закону:

$$\cos B=1+x_1/(2x_2). \quad (7.147)$$

За пределами полосы пропускания $A \neq 0$ и, следовательно,

$$\sin B=0; \quad (7.148)$$

$$\operatorname{ch} A=|1+x_1/(2x_2)|. \quad (7.149)$$

В связи с тем что $\cos B$ по абсолютному значению не может превышать единицу, соотношение между сопротивлениями Z_1 и Z_2 в пределах полосы пропускания должно удовлетворять условию $-1 \leq 1+x_1/(2x_2) \leq 1$, которое можно преобразовать к виду

$$-2 \leq x_1/(2x_2) \leq 0 \text{ или } -1 \leq x_1/4x_2 \leq 0. \quad (7.150)$$

Неравенство (7.150) называется условием прозрачности фильтра. Очевидно, что для выполнения условия прозрачности, т. е. для обеспечения в определенном диапазоне частот равенства нулю постоянной ослабления A -фильтра, необходимо, чтобы мнимые составляющие сопротивлений Z_1 и Z_2 имели различные знаки или чтобы сопротивления продольной и поперечной ветвей фильтра имели различный характер.

Предельные значения частоты, на которых выполняются условия прозрачности фильтра, являются границами полосы пропускания (частотами среза). На этих частотах сопротивления продольной и поперечной ветвей фильтра связаны соотношениями:

$$Z_1/(4Z_2)=0; Z_1/(4Z_2)=-1$$

или

$$Z_1=0; Z_1=-4Z_2.$$

Таким образом, на одной из частот среза сопротивление продольной ветви фильтра должно быть равно нулю, а на другой полное сопротивление Z_1 продольной ветви должно быть в четыре раза больше, чем полное сопротивление Z_2 поперечной ветви.

Рассматривая выражения для характеристических сопротивлений Π - и T -образных четырехполюсников (см. пример 7.25) с учетом (7.150), устанавливаем, что в пределах полосы пропускания характеристические сопротивления как Γ -, так и T -образного звеньев имеют чисто резистивный характер, а за пределами полосы пропускания — чисто реактивный.

Таким образом, условия, при которых постоянная ослабления $A=0$ (7.150), совпадают с условиями, при которых характеристическое сопротивление фильтра имеет вещественный характер.

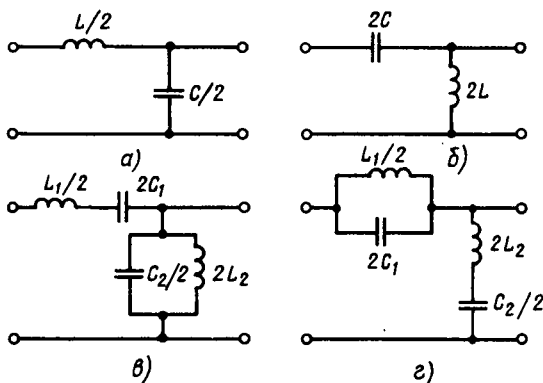


Рис. 7.50. Схемы Г-образных звеньев фильтров типа k :

a — нижних частот; $б$ — верхних частот; $в$ — полосового; $г$ — задерживающего

противлений Z_1 и Z_2 одинаковы, а постоянная ослабления и постоянная фазы Г-образного звена вдвое ниже, чем соответствующие постоянные Т- или П-образных звеньев.

Пусть параметры элементов, образующих продольную и поперечную ветви Г-образного звена, выбраны таким образом, что произведение комплексных сопротивлений ветвей не зависит от частоты и равно квадрату некоторого вещественного числа k :

$$\frac{1}{2} Z_1 2Z_2 = Z_1 Z_2 = k^2.$$

Очевидно, что в этом случае произведение характеристических входного и выходного сопротивлений Г-образного звена, как и произведение характеристических сопротивлений П- и Т-образных звеньев, также равно k^2 :

$$Z_{\text{вх}} Z_{\text{вых}} = Z_1 Z_2 = k^2. \quad (7.151)$$

Реактивные фильтры, собранные из звеньев, параметры элементов которых удовлетворяют условию (7.151), называются фильтрами типа k (рис. 7.50).

Подставляя (7.151) в (7.150), находим условие прозрачности фильтров типа k :

$$-1 \leq k^2 / (4Z_2^2) \leq 0,$$

или

$$-1 \leq Z_1^2 / 4k^2 \leq 0.$$

В пределах полосы пропускания постоянная ослабления П- или Т-образного звена фильтра типа k равна нулю, а за пределами

В связи с тем что характеристические сопротивления симметричных П- и Т-образных звеньев совпадают с характеристическими входным и выходным сопротивлениями Г-образного звена, а характеристическая постоянная передачи П- и Т-образных звеньев равна удвоенной характеристической постоянной передачи Г-образного звена, полосы пропускания Г-, П- и Т-образных звеньев при одних и тех же значениях со-

полосы пропускания плавно нарастает в соответствии с выражением $\text{ch } A = |1 + k^2/(2Z_1^2)| = |1 + Z_1^2/(2k^2)|$. Характеристические сопротивления Π - и T -образных звеньев типа k определяются соотношениями

$$Z_{\text{сП}} = \frac{k}{\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}}; \quad Z_{\text{сТ}} = k \sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}. \quad (7.152)$$

Как следует из выражений (7.152), в пределах полосы пропускания характеристическое сопротивление T -образного звена фильтра типа k изменяется от 0 до k , а характеристическое сопротивление Π -образного звена — от k до ∞ .

Характер зависимости от частоты постоянной ослабления A и постоянной фазы B реактивного фильтра нижних частот типа k при согласованной нагрузке показан на рис. 7.51, а. Сравнительно медленное нарастание постоянной ослабления за пределами полосы пропускания и ярко выраженная зависимость характеристического сопротивления от частоты в пределах этой полосы являются существенными недостатками фильтров типа k . При согласованном каскадном соединении большого числа звеньев ослабление фильтра типа k в полосе задерживания может быть значительно увеличено, однако зависимость характеристического сопротивления фильтра от частоты не позволяет согласовывать фильтр в пределах всей полосы пропускания, вследствие чего характеристики реальных фильтров типа k значительно отличаются от рассмотренных.

Недостатки фильтров типа k в некоторой степени устраняются в фильтрах типа m . Для построения такого фильтра сопротивления продольной и поперечной ветвей фильтра типа k , называемого прототипом, изменяют таким образом, чтобы одно из характеристических сопротивлений полученного звена в пределах полосы пропускания почти не зависело от частоты, а другое — оставалось равным соответствующему характеристическому сопротивлению прототипа. Равенство одного из характеристических сопротивлений

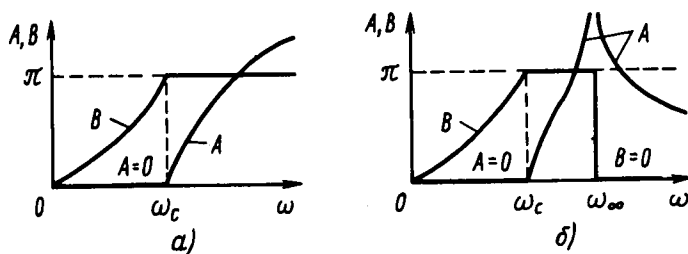


Рис. 7.51. Частотные зависимости постоянной ослабления и постоянной фазы реактивных фильтров нижних частот при согласованной нагрузке:

а — типа k ; б — типа m

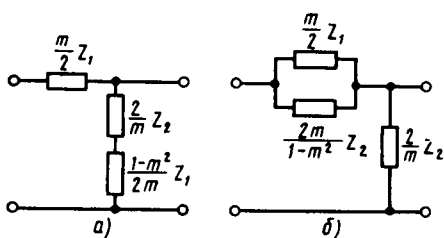


Рис. 7.52. Последовательно-производное (а) и параллельно-производное (б) звенья фильтров типа m

ся звенья называются **последовательно-производными**. Если при переходе от фильтра типа k к фильтру типа m остается неизменным характеристическое сопротивление Z_{Π} , то звенья называются **параллельно-производными** (рис. 7.52).

Характеристики фильтра типа m в значительной степени зависят от выбора значения коэффициента m , которое может изменяться в пределах от 0 до 1. Полоса пропускания рассматриваемого фильтра совпадает с полосой пропускания прототипа, причем за пределами полосы пропускания постоянная ослабления фильтра типа m увеличивается более круто и достигает на отдельных частотах значительно больших значений, чем у соответствующего фильтра типа k (см. рис. 7.51, б).

В связи с тем что исходные предпосылки о согласованном включении фильтра не выполняются даже в пределах полосы пропускания, а свойства фильтров по характеристическим параметрам значительно отличаются от расчетных, фильтры по характеристическим параметрам в настоящее время практически полностью вытеснены фильтрами по рабочим параметрам.

Фильтры по рабочим параметрам могут строиться по тем же схемам, что и звенья фильтров по характеристическим параметрам (см. рис. 7.50, 7.52), однако параметры отдельных элементов находят, исходя из заданных требований к рабочим параметрам фильтров.

АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Активными называются электрические фильтры, в состав которых наряду с пассивными входят также усилительные или невзаимные элементы. Наибольшее распространение получили активные **RC-фильтры** (**ARC-фильтры**), которые не содержат индуктивных элементов и могут быть реализованы в виде интегральных микросхем. Теория активных **RC-фильтров** является одним из наиболее важных и быстро развивающихся направлений современной радиоэлектроники, значительный вклад в развитие которого внесли

Г-образного звена фильтра типа m характеристическому сопротивлению прототипа позволяет каскадно соединять звенья обоих типов.

Различают последовательно-производные и параллельно-производные звенья фильтров типа m . Если при построении фильтра типа m неизменным остается характеристическое сопротивление Z_T , то получившиеся

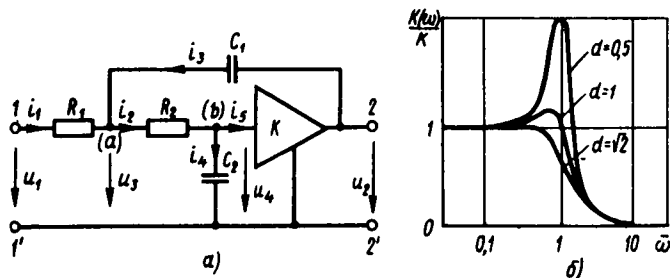


Рис. 7.53. Схема активного фильтра нижних частот на основе усилителя с конечным усилением (а) и его нормированная АЧХ (б)

А. Ф. Белецкий, А. А. Ланне, А. А. Айзинов, А. Е. Знаменский, П. А. Ионкин, В. Г. Миронов, Г. Н. Славский и многие другие.

Известно множество различных разновидностей активных RC -фильтров, отличающихся в основном типом используемых невзаимных элементов. Наибольшее распространение получили ARC -фильтры на основе усилителей с конечным усилением, ОУ и преобразователей сопротивления.

Для ознакомления с характеристиками ARC -фильтров, построенных на основе усилителей с конечным усилением, найдем операторный коэффициент передачи по напряжению ARC -цепи, схема которой приведена на рис. 7.53, а.

Уравнения баланса токов для узлов а и b этой цепи имеют вид

$$\frac{U_1(p) - U_3(p)}{R_1} - \frac{U_3(p) - U_4(p)}{R_2} + pC_1[U_2(p) - U_3(p)] = 0; \quad (7.153)$$

$$\frac{U_3(p) - U_4(p)}{R_2} - pC_2U_4(p) = 0.$$

Принимая во внимание, что $U_2(p) = KU_4(p)$, и исключая из (7.153) напряжения внутренних узлов $U_3(p)$ и $U_4(p)$, получаем

$$KU_1(p) - [R_1R_2C_1C_2p^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 - KR_1C_1)p + 1]U_2(p) = 0,$$

откуда

$$K_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K}{R_1R_2C_1C_2p^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 - KR_1C_1)p + 1}. \quad (7.154)$$

Нетрудно убедиться, что в зависимости от значения коэффициента усиления K передаточная характеристика цепи (7.154) может иметь или вещественные, или комплексно-сопряженные полюсы. Заменяя p на $j\omega$, находим выражение для АЧХ коэффициента передачи цепи по напряжению:

$$K_{21}(\bar{\omega}) = \frac{K}{\sqrt{\bar{\omega}^4 + (d^2 - 2)\bar{\omega}^2 + 1}}, \quad (7.155)$$

$$\text{где } \bar{\omega} = \omega \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}; \quad d = \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2} \left(\frac{1-K}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right).$$

Анализ выражения (7.155) показывает, что рассматриваемая цепь обладает характеристиками фильтра нижних частот (рис. 7.53, б), причем при малых значениях параметра d частотная характеристика цепи имеет выброс, максимум которого соответствует значениям нормированной частоты $\bar{\omega}$, близким к единице.

Примеры схем фильтра верхних частот и полосового фильтра, построенных на основе усилителей с конечным усилением, приведены на рис. 7.54, а, б.

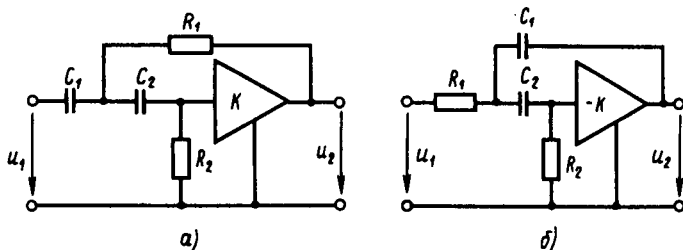


Рис. 7.54. Схемы активных фильтров на основе усилителей с конечным усилением:
а — верхних частот; б — полосового

Схема активного фильтра нижних частот, использующего ОУ, изображена на рис. 7.55. Составляя уравнения баланса токов для узлов a и b этой цепи, получаем

$$\begin{aligned} \frac{U_3(p) - U_1(p)}{R_1} + pC_1 U_3(p) + \frac{U_3(p) - U_2(p)}{R_3} + \frac{U_3(p)}{R_2} &= 0; \\ \frac{U_3(p)}{R_2} + pC_2 U_2(p) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$K_{21}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2 + (R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_3) C_2 p + R_1 / R_3}. \quad (7.156)$$

Выражение (7.156) имеет такую же структуру, как и выражение (7.154), следовательно, данная цепь действительно обладает характеристиками фильтра нижних частот.

Активные фильтры на основе преобразователей сопротивления (конверторов отрицательного сопротивления и гираторов) могут

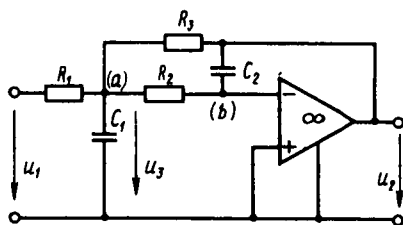


Рис. 7.55. Схема активного фильтра нижних частот на основе идеального ОУ

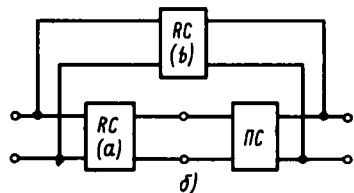
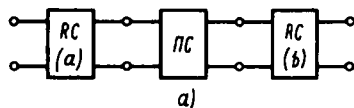


Рис. 7.56. Каскадная (а) и каскадно-параллельная (б) схемы активных фильтров на основе преобразователей сопротивления ПС

быть построены по каскадной или каскадно-параллельной схеме. В первом случае (рис. 7.56, а) преобразователь сопротивления (ПС) включен каскадно с двумя пассивными RC -цепями: $RC(a)$ и $RC(b)$. Во втором случае (рис. 7.56, б) пассивная RC -цепь — $RC(b)$ — включена параллельно четырехполюснику, представляющему собой каскадное соединение преобразователя сопротивления ПС и пассивной RC -цепи — $RC(a)$.

Пример 7.32. Убедимся, что ARC -цепь, схема которой приведена на рис. 7.57, обладает характеристиками фильтра нижних частот.

Данная цепь представляет собой каскадное соединение трех четырехполюсников: гиратора и двух пассивных RC -цепей. Перемножая матрицы A -параметров пассивных RC -цепей

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 + pR_1C_1 & R_1 \\ pC_1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} + pC_2 & 1 \end{bmatrix}$$

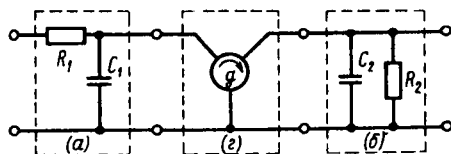


Рис. 7.57. К-примеру 7.32

и матрицу A -параметров гиратора A_r (7.137), находим матрицу A -параметров исследуемой цепи:

$$A = A_a A_r A_b = \begin{bmatrix} \frac{(1 + pR_1C_1)(1 + pR_2C_2)}{gR_2} + R_1g & \frac{1 + pR_1C_1}{g} \\ \frac{pC_1(1 + pR_2C_2)}{gR_2} + g & \frac{pC_1}{g} \end{bmatrix}.$$

Выражение для операторного коэффициента передачи этой цепи по напряжению в режиме холостого хода на выходе

$$K_{21x}(p) = \frac{1}{A_{11}(p)} = \frac{gR_2}{R_1R_2C_1C_2p^2 + (R_1C_1 + R_2C_2)p + (1 + R_1R_2g^2)}$$

имеет ту же структуру, что и выражения (7.154), (7.156). Следовательно, рассматриваемая цепь обладает характеристиками фильтра нижних частот.

Способность гиратора имитировать индуктивные катушки предоставляет еще одну возможность построения безындуктивных фильтров — путем замены индуктивностей, входящих в реактивные фильтры, их гираторными эквивалентами. Фильтры такого типа получили название **фильтров с имитированными индуктивностями**.

Анализируя схемы реактивных фильтров (см. рис. 7.50), нетрудно установить, что в них встречаются индуктивности двух типов: «заземленные», один из выводов которых подключен к общему проводнику, и «незаземленные» или (плавающие), ни один из выводов которых не подключен к общему проводнику. Наиболее просто с помощью гираторов имитируются «заземленные» индуктивности (рис. 7.58, б), которые замещаются гиратором с емкостной нагрузкой (рис. 7.58, а), входное сопротивление которого определяется выражением (7.143). Схема Г-образного звена фильтра верхних частот, полученного из реактивного фильтра (см. рис. 7.50, б) путем

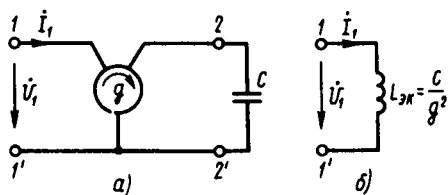


Рис. 7.58. Имитация «заземленной» индуктивности

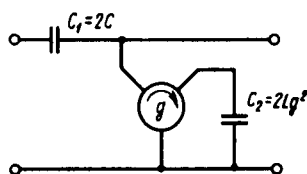


Рис. 7.59. Звено фильтра верхних частот с имитированной индуктивностью

замены индуктивности $2L$ ее гираторным эквивалентом, приведена на рис. 7.59.

Для имитации «незаземленных» индуктивностей используется цепь с двумя гираторами, схема которой приведена на рис. 7.60, а. Сравнивая матрицу A -параметров данной цепи

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega C/g^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

с матрицей A -параметров «незаземленной» индуктивности (рис. 7.60, б)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_{\text{н}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

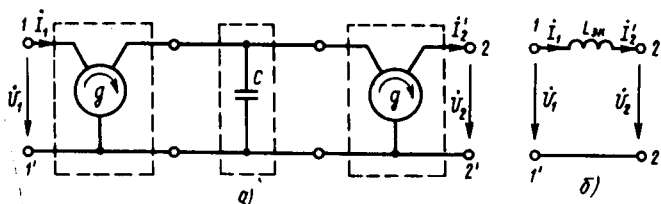


Рис. 7.60. Имитация «незаземленной» индуктивности

убеждаемся, что рассматриваемая цепь (рис. 7.60, а) действительно имитирует незаземленную индуктивность $L_{жк} = C/g^2$. Схема Г-образного звена фильтра нижних частот, полученная из рис. 7.50, а путем замены индуктивности $L/2$ ее гираторным эквивалентом, приведена на рис. 7.61.

В отличие от реальных индуктивных катушек в гираторных эквивалентах индуктивности (рис. 7.58 и 7.60) не происходит запасания энергии магнитного поля. Эти цепи аналогичны индуктивности только в том смысле, что фазовые соотношения между токами и напряжениями на их входных зажимах имеют такой же характер, как на зажимах индуктивных катушек, и, следовательно, входные сопротивления этих цепей имеют индуктивный характер.

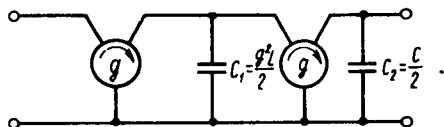
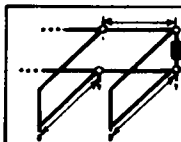
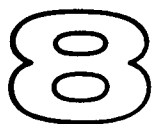


Рис. 7.61. Звено фильтра нижних частот с имитированной индуктивностью

Вопросам анализа и проектирования активных RC -фильтров по рабочим параметрам посвящена обширная литература [14 — 16], в которой приводятся многочисленные варианты схемной реализации фильтров и содержатся таблицы и номограммы, облегчающие выбор параметров элементов фильтров и расчет их характеристик.



Цепи с распределенными параметрами

§ 8.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним, что цепями с распределенными параметрами называются идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Токи и напряжения в одномерной цепи с распределенными параметрами являются функциями двух переменных — времени t и координаты x .

Исторически сложилось так, что первыми в качестве одномерных цепей с распределенными параметрами стали представлять так называемые длинные линии, т. е. линии передачи энергии от источника к нагрузке, длина которых значительно превышает длину волны передаваемых электромагнитных колебаний. Поэтому одномерные цепи с распределенными параметрами часто называют длинными линиями или линиями, а уравнения (1.44), (1.45), описывающие зависимости между токами и напряжениями элементарного участка одномерной цепи с распределенными параметрами, — дифференциальными уравнениями длинной линии или телеграфными уравнениями. Будем использовать термины «длинная линия» или «линия» как синонимы термина «одномерная цепь с распределенными параметрами», помня при этом, что приведенная на рис. 1.42 схема элементарного участка одномерной цепи с распределенными параметрами и соответствующая ей система уравнений электрического равновесия (1.44) и (1.45) носят общий характер и могут быть применены не только для моделирования процессов в реальных линиях передачи, но и для приближенного представления многих других радиотехнических элементов и устройств в области достаточно высоких частот.

Одномерные цепи с распределенными параметрами, применяемые для моделирования различных реальных цепей и их элемен-

тов, отличаются одна от другой в основном значениями погонных параметров R_1 , L_1 , C_1 , G_1 и характером их зависимости от координаты, времени или режима работы цепи. В линейных инвариантных во времени цепях с распределенными параметрами погонное сопротивление R_1 , индуктивность L_1 , емкость C_1 и проводимость утечки G_1 не зависят от времени и режима работы цепи; они могут изменяться вдоль цепи по определенному закону либо иметь одинаковые значения на всех ее участках. Линейные инвариантные во времени цепи с распределенными параметрами, погонные параметры которых постоянны и не зависят от координаты, называются однородными (регулярными). Цепи, погонные параметры которых являются функциями координаты, называются неоднородными (нерегулярными).

В зависимости от того, какие процессы в исследуемой реальной цепи имеют преобладающий характер, а также от степени идеализации схема замещения элементарного участка линии может не содержать тех или иных из показанных на рис. 1.42 элементов. В соответствии с этим цепи с распределенными параметрами подразделяют на цепи без потерь (LC -линии), индуктивно-емкостные с потерями (LCR -линии), резистивно-емкостные (RC -линии), резистивно-индуктивные (RL -линии) и резистивные (RG -линии). Наиболее интересны процессы в линиях без потерь и в линиях общего вида с малыми потерями, которые используются в основном для моделирования реальных линий передачи и колебательных систем сверхвысоких частот. С развитием микроэлектроники возрос интерес к рассмотрению процессов в RC -линиях, которые применяют в качестве моделей различных пассивных элементов интегральных микросхем (пленочных и диффузионных резисторов, конденсаторов, соединительных проводников и перемычек), а также к исследованию резистивных линий, которые служат для моделирования контактов к различным микроэлектронным элементам [17].

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

Задача анализа цепей с распределенными параметрами обычно сводится к определению законов изменения токов и напряжений вдоль цепи и к исследованию частотных или временных характеристик цепи относительно внешних зажимов. С этой целью необходимо найти частные решения дифференциальных уравнений линии (1.44), (1.45) при соответствующих начальных и граничных условиях. В связи с тем что решение данных уравнений в замкнутой форме для неоднородных линий может быть получено только при некоторых частных видах зависимостей погонных параметров от координаты, ограничимся рассмотрением однородной линии длиной l (рис. 8.1).

Для решения дифференциальных уравнений линии воспользуемся операторным методом, который позволяет перейти от решения

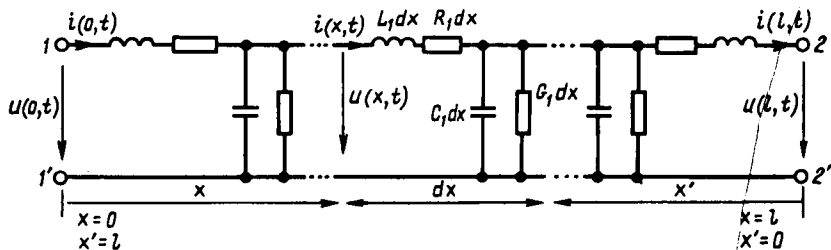


Рис. 8.1. Схема замещения однородной длинной линии

дифференциальных уравнений в частных производных для мгновенных значений токов $i = i(x, t)$ и напряжений $u = u(x, t)$ линии к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, составленных относительно операторных изображений соответствующих токов $I(x, p) \doteq i(x, t)$ и напряжений $U(x, p) \doteq u(x, t)$.

Умножая правую и левую части уравнений (1.44), (1.45) на e^{-pt} и интегрируя в пределах от $t=0$ до $t=\infty$, получаем

$$-\frac{dI(x, p)}{dx} = (G_1 + pC_1)U(x, p) - C_1 u(x, 0); \quad (8.1)$$

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = (R_1 + pL_1)I(x, p) - L_1 i(x, 0), \quad (8.2)$$

где функции $u(x, 0)$, $i(x, 0)$ описывают распределение напряжения и тока вдоль линии при $t=0$, т. е. определяют начальные условия задачи. В связи с тем что в уравнениях (8.1) и (8.2) содержатся производные неизвестных функций $U(x, p)$ и $I(x, p)$ только по одной переменной, частные производные этих функций по x заменены обыкновенными (полными) производными.

При нулевых начальных условиях уравнения (8.1), (8.2) принимают вид

$$\frac{dI(x, p)}{dx} = Y_1(p)U(x, p); \quad (8.3)$$

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = Z_1(p)I(x, p), \quad (8.4)$$

где $Z_1(p) = R_1 + pL_1$, $Y_1(p) = G_1 + pC_1$ — операторные погонное сопротивление и погонная проводимость линии.

Уравнения (8.3), (8.4) путем исключения переменных могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению, составленному относительно тока или напряжения. Продифференцировав правую и левую части уравнения (8.4) по x и подставляя в него значение $dI(x, p)/dx$ из уравнения (8.3), находим

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} = \gamma^2(p) U(x, p). \quad (8.5)$$

Аналогичный вид имеет и операторное уравнение рассматриваемой цепи, составленное относительно тока $I(x, p)$. Входящая в эти уравнения величина

$$\gamma(p) = \sqrt{Z_1(p)Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1)(G_1 + pC_1)} \quad (8.6)$$

называется операторным коэффициентом распространения.

Таким образом, распределение операторных изображений токов и напряжений в линейной однородной инвариантной во времени цепи с распределенными параметрами описывается решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$U(x, p) = A_1(p) e^{-\gamma(p)x} + A_2(p) e^{\gamma(p)x}, \quad (8.7)$$

где $A_1(p)$, $A_2(p)$ — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями задачи, т. е. значениями неизвестных функций $U(x, p)$ и $I(x, p)$ в начале ($x=0$) или в конце ($x=l$) линии. Подставляя (8.7) в уравнение (8.4), находим выражение для операторного изображения тока линии

$$I(x, p) = A_1(p) e^{-\gamma(p)x} / Z_s(p) - A_2(p) e^{\gamma(p)x} / Z_s(p). \quad (8.8)$$

Величина

$$Z_s(p) = Z_1(p) / \gamma(p) = \sqrt{Z_1(p) / Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1) / (G_1 + pC_1)} \quad (8.9)$$

называется операторным волновым сопротивлением линии.

Определяя значения постоянных интегрирования, соответствующие тем или иным граничным условиям, и подставляя их в выражения (8.7), (8.8), можно получить операторные изображения тока и напряжения в любом сечении линии при произвольном внешнем воздействии, а также найти любые частотные и временные характеристики исследуемой цепи.

§ 8.2. ОДНОРОДНАЯ ДЛИННАЯ ЛИНИЯ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОРОДНОЙ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

Распределение комплексных действующих значений напряжения $\dot{U}(x)$ и тока $\dot{I}(x)$ в однородной длинной линии, находящейся под гармоническим внешним воздействием, определяется выражениями

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad (8.10)$$

$$\dot{I}(x) = A_1 e^{-\gamma x} / Z_0 - A_2 e^{\gamma x} / Z_0, \quad (8.11)$$

которые получаются из (8.7) и (8.8) путем замены комплексной частоты p на $j\omega$. Входящие в выражения (8.10) и (8.11) комплексный коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \quad (8.12)$$

и комплексное волновое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1) / (G_1 + j\omega C_1)} \quad (8.13)$$

в дальнейшем для краткости будем называть коэффициентом распространения и волновым сопротивлением линии. Представим коэффициент распространения линии в алгебраической

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (8.14)$$

а волновое сопротивление линии и постоянные интегрирования в показательной

$$\begin{aligned} Z_0 &= z_0 e^{j\varphi}; \\ A_1 &= |A_1| e^{j\psi_1}; \\ A_2 &= |A_2| e^{j\psi_2} \end{aligned}$$

формах и преобразуем каждое из входящих в выражения (8.10), (8.11) слагаемых в показательную форму:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= (|A_1| e^{-\alpha x}) e^{-j(\beta x - \psi_1)} + (|A_2| e^{\alpha x}) e^{j(\beta x + \psi_2)}; \\ \dot{I}(x) &= |A_1| e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \psi_1 + \varphi)} / z_0 - |A_2| e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2 - \varphi)} / z_0. \end{aligned}$$

Переходя от комплексных действующих значений напряжения и тока к мгновенным, получаем

$$u(x, t) = \sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x} \times \cos(\omega t + \beta x + \psi_2); \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} i(x, t) &= \frac{\sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x}}{z_0} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi) - \frac{\sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x}}{z_0} \times \\ &\times \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Как следует из выражений (8.15), (8.16), установившиеся значения напряжения и тока в произвольном сечении линии, находящейся под гармоническим внешним воздействием, можно представить в виде алгебраической суммы двух подобных по структуре,

но отличающихся знаками перед коэффициентами α и β составляющих:

$$u(x, t) = u_{\text{пад}}(x, t) + u_{\text{отр}}(x, t); \quad (8.17)$$

$$i(x, t) = i_{\text{пад}}(x, t) - i_{\text{отр}}(x, t), \quad (8.18)$$

где

$$u_{\text{пад}}(x, t) = \sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1);$$

$$u_{\text{отр}}(x, t) = \sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2);$$

$$i_{\text{пад}}(x, t) = \frac{\sqrt{2} |A_1| e^{-\alpha x}}{z_n} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi);$$

$$i_{\text{отр}}(x, t) = \frac{\sqrt{2} |A_2| e^{\alpha x}}{z_n} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi).$$

При фиксированном x каждая из составляющих тока и напряжения представляет собой гармоническую функцию времени t . В связи с тем что сумма двух гармонических функций времени, имеющих одинаковую частоту, есть гармоническая функций времени той же частоты, напряжение и ток во всех сечениях линии изменяются по гармоническому закону с частотой внешнего воздействия ω . Как видно из рис. 8.2, а, для каждого фиксированного момента времени напряжение $u_{\text{пад}}(x, t)$ изменяется вдоль линии по косинусоидальному закону, причем амплитуда напряжения экспоненциально уменьшается с ростом x . При увеличении t точки функции $u_{\text{пад}}(x, t)$, имеющие одинаковую фазу, смещаются вправо. Аналогичный вид имеют зависимости $i_{\text{пад}}(x, t)$. Следовательно, $u_{\text{пад}}(x, t)$ и $i_{\text{пад}}(x, t)$ представляют собой волны напряжения и тока, распространяющиеся в направлении увеличения x . Эти волны называют падающими волнами напряжения и тока.

Из рассмотрения зависимостей $u_{\text{отр}}(x, t)$ и $i_{\text{отр}}(x, t)$ следует, что $u_{\text{отр}}(x, t)$ и $i_{\text{отр}}(x, t)$ представляют

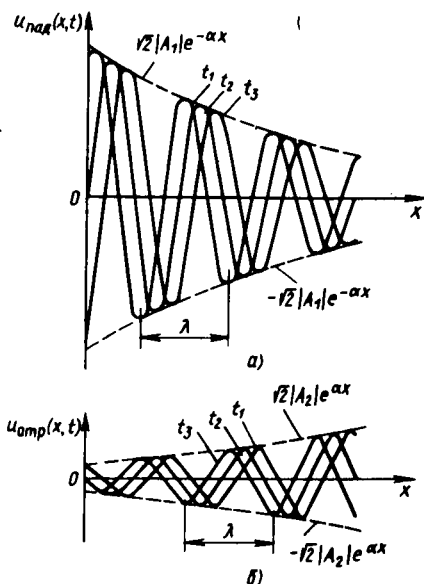


Рис. 8.2. Распределение напряжения падающей (а) и отраженной (б) волн вдоль линии ($t_3 > t_2 > t_1$)

собой волны напряжения и тока, распространяющиеся в направлении уменьшения x , т. е. от конца линии к ее началу (рис. 8.2, б). Эти волны называются **отраженными волнами напряжения и тока**.

Таким образом, мгновенное значение напряжения в любой точке линии определяется суммой падающей и отраженной волн напряжения (8.17), а мгновенное значение тока — разностью падающей и отраженной волн тока (8.18). Положительные направления $u_{\text{пад}}$ и $u_{\text{отр}}$ выбраны одинаково (от верхнего проводника к нижнему), поэтому напряжения $u_{\text{пад}}$ и $u_{\text{отр}}$ суммируются; положительные направления токов $i_{\text{пад}}$ и $i_{\text{отр}}$ противоположны (падающая волна тока направлена от начала линии к концу, а отраженная от конца линии к началу), поэтому ток $i_{\text{отр}}$ вычитается из тока $i_{\text{пад}}$.

Совокупность падающей волны напряжения и падающей волны тока для краткости называют **падающей волной**, а совокупность отраженной волны напряжения и отраженной волны тока — **отраженной волной**.

Как следует из выражений (8.17), (8.18) и рис. 8.2, амплитуды напряжения и тока падающей и отраженной волн уменьшаются в направлении распространения волн. Величина α , характеризующая уменьшение амплитуды (действующего значения) падающей или отраженной волны на единицу длины линии,

$$\alpha = \operatorname{Re} \gamma = \operatorname{Re} [\sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}], \quad (8.19)$$

называется **коэффициентом ослабления**. Убывание амплитуды волны связано с потерями энергии, поэтому для линии без потерь ($R_1 = 0$, $G_1 = 0$) коэффициент ослабления $\alpha = 0$, а коэффициент распространения является чисто мнимым: $\gamma = j\omega \sqrt{L_1 C_1}$.

Амплитуды падающей и отраженной волн напряжения и тока в линиях без потерь не зависят от координаты x и не изменяются вдоль линии.

Мнимая часть комплексного коэффициента передачи линии $\beta = \operatorname{Im} [\gamma] = \operatorname{Im} [\sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}]$, характеризующая изменение фазы прямой и обратной волн на единицу длины линии, называется **коэффициентом фазы**. Для линии без потерь коэффициент фазы прямо пропорционален частоте:

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}. \quad (8.20)$$

Расстояние между двумя точками волны, фазы которых различаются на 2π , называется **длиной волны**. Длина волны в линии λ определяется значением коэффициента фазы. Действительно, изменение фазы падающей или отраженной волны на участке линии длиной λ

$$(\omega t - \beta x + \psi_1) - [\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1] = 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = 2\pi/\beta. \quad (8.21)$$

Для линии без потерь $\lambda = 2\pi/(\omega\sqrt{L_1 C_1}) = 1/(f\sqrt{L_1 C_1})$.

Скорость перемещения вдоль линии точки волны, фаза колебания в которой остается неизменной, называется **фазовой скоростью волны**. Для падающей волны условие постоянства фазы записывается в виде

$$(\omega t - \beta x + \psi_1) = \text{const}, \text{ или } \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0,$$

откуда

$$v_\phi = dx/dt = \omega/\beta. \quad (8.22)$$

Для линии без потерь фазовая скорость падающей и отраженной волн не зависит от частоты:

$$v_\phi = 1/\sqrt{L_1 C_1}. \quad (8.23)$$

Используя выражения (8.21) и (8.22), получаем соотношения между фазовой скоростью и длиной волны в линии:

$$\lambda = 2\pi v_\phi/\omega = v_\phi/f = T v_\phi. \quad (8.24)$$

Из выражения (8.24) следует, что за время, равное периоду внешнего воздействия T , падающая и отраженная волны перемещаются на расстояние, равное длине волны λ .

В связи с тем что напряжение и ток в любом сечении линии можно рассматривать как результат наложения двух волн — падающей и отраженной, нетрудно прийти к заключению, что первое и второе слагаемые, входящие в выражения (8.10), (8.11), представляют собой комплексные действующие значения напряжения или тока падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x); \quad (8.25)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{пад}}(x) - \dot{I}_{\text{отр}}(x), \quad (8.26)$$

где

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) = A_1 e^{-\gamma x}; \quad \dot{U}_{\text{отр}}(x) = A_2 e^{\gamma x};$$

$$\dot{I}_{\text{пад}}(x) = A_1 e^{-\gamma x}/Z_{\text{в}}; \quad \dot{I}_{\text{отр}}(x) = A_2 e^{\gamma x}/Z_{\text{в}}.$$

Из выражений (8.25) и (8.26) следует, что волновое сопротивление однородной линии $Z_{\text{в}}$ является коэффициентом пропорциональности между комплексными напряжением и током падающей или отраженной волны:

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x)/\dot{I}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_{\text{отр}}(x)/\dot{I}_{\text{отр}}(x) = Z_{\text{в}}. \quad (8.27)$$

Таким образом, волновое сопротивление однородной линии можно рассматривать как комплексное сопротивление линии падающей или отраженной волнам в отдельности.

Волновое сопротивление линии без потерь имеет чисто резистивный характер:

$$Z_s = \sqrt{L_1/C_1} = R_s. \quad (8.28)$$

Используя выражения (8.25), (8.26), можно установить и физический смысл коэффициента γ . С этой целью найдем комплексные действующие значения напряжений падающей волны в точках, отстоящих одна от другой на расстоянии Δx :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) = A_1 e^{-\gamma x}; \quad \dot{U}_{\text{пад}}(x + \Delta x) = A_1 e^{-\gamma(x + \Delta x)}.$$

Определяя натуральный логарифм отношения этих величин $\ln [\dot{U}_{\text{пад}}(x)/\dot{U}_{\text{пад}}(x + \Delta x)] = \gamma \Delta x$, получаем

$$\gamma = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{\dot{U}_{\text{пад}}(x + \Delta x)}. \quad (8.29)$$

Аналогичным образом можно записать

$$\gamma = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{I}_{\text{пад}}(x)}{\dot{I}_{\text{пад}}(x + \Delta x)} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x + \Delta x)}{\dot{U}_{\text{отр}}(x)} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{I}_{\text{отр}}(x + \Delta x)}{\dot{I}_{\text{отр}}(x)}.$$

Таким образом, коэффициент распространения однородной длинной линии γ характеризует изменение комплексного действующего значения напряжения или тока падающей и отраженной волн, приходящееся на единицу длины линии.

Представляя комплексное действующее значение напряжения падающей волны в показательной форме

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) = U_{\text{пад}}(x) e^{j\psi_{\text{пад}}(x)}$$

и используя выражения (8.14), (8.29), устанавливаем, что коэффициент ослабления линии α численно равен натуральному логарифму отношения действующих значений напряжений падающей волны, взятых в точках, отстоящих одна от другой на единицу длины линии:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{U_{\text{пад}}(x)}{U_{\text{пад}}(x + \Delta x)},$$

а коэффициент фазы — разности фаз напряжений, измеренных в тех же точках:

$$\beta = \frac{1}{\Delta x} [\psi_{\text{пад}}(x) - \psi_{\text{пад}}(x + \Delta x)].$$

Волновое сопротивление и коэффициент распространения называются волновыми параметрами линии. В общем случае коэффициент распространения и волновое сопротивление линии для падающей и отраженной волн могут иметь различные значения, поэтому линия произвольного вида характеризуется четырьмя волновыми параметрами. У однородной линии коэффициенты распространения и волновые сопротивления для падающей и отраженной волн одинаковы, поэтому однородная линия характеризуется двумя волновыми параметрами.

КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ЛИНИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Распределение токов и напряжений в длинной линии определяется не только волновыми параметрами, которые характеризуют собственные свойства линии и не зависят от свойств внешних по отношению к линии участков цепи, но и коэффициентом отражения линии, который зависит от степени согласования линии с нагрузкой.

Комплексным коэффициентом отражения длинной линии называется отношение комплексных действующих значений напряжений или токов отраженной и падающей волн в произвольном сечении линии:

$$\rho(x) = \dot{U}_{\text{отр}}(x)/\dot{U}_{\text{пад}}(x) = \dot{I}_{\text{отр}}(x)/\dot{I}_{\text{пад}}(x) = A_2 e^{2\gamma x}/A_1. \quad (8.30)$$

Для определения $\rho(x)$ необходимо найти постоянные интегрирования A_1 и A_2 , которые могут быть выражены через токи и напряжения в начале ($x=0$) или конце ($x=l$) линии. Пусть в конце линии (см. рис. 8.1) напряжение линии $u_2 = u(l, t) = u(x, t)|_{x=l}$, а ее ток $i'_2 = i(l, t) = i(x, t)|_{x=l}$.

Обозначая комплексные действующие значения этих величин через $\dot{U}_2 = \dot{U}(l) = \dot{U}(x)|_{x=l} \doteq u_2$ и $\dot{I}'_2 = \dot{I}(l) = \dot{I}(x)|_{x=l} \doteq i'_2$ и полагая в (8.10), (8.11) $x=l$, получаем

$$\dot{U}_2 = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l}; \quad \dot{I}'_2 = A_1 e^{-\gamma l}/Z_n - A_2 e^{\gamma l}/Z_n,$$

откуда

$$A_1 = \frac{\dot{U}_2 + Z_n \dot{I}'_2}{2} e^{\gamma l}; \quad A_2 = \frac{\dot{U}_2 - Z_n \dot{I}'_2}{2} e^{-\gamma l}. \quad (8.31)$$

Подставляя (8.31) в (8.30), выражаем коэффициент отражения через ток и напряжение в конце линии:

$$\rho(x) = \frac{\dot{U}_2 - Z_n \dot{I}'_2}{\dot{U}_2 + Z_n \dot{I}'_2} e^{-2\gamma(l-x)} = \rho_2 e^{-2\gamma x}, \quad (8.32)$$

где $x' = l - x$ — расстояние, отсчитываемое от конца линии; $\rho_2 = \rho(x)|_{x=l} = \dot{U}_{\text{отр}}(x)/\dot{U}_{\text{пад}}(x)|_{x=l} = (\dot{U}_2 - Z_n \dot{I}'_2)/(\dot{U}_2 + Z_n \dot{I}'_2)$ — коэффи-

коэффициент отражения в конце линии, значение которого определяется только соотношением между сопротивлением нагрузки $Z_n = \dot{U}_2 / \dot{I}_2'$ и волновым сопротивлением линии Z_n :

$$\rho_2 = (Z_n - Z_n) / (Z_n + Z_n). \quad (8.33)$$

Как и всякое комплексное число, коэффициент отражения линии может быть представлен в показательной форме:

$$\rho(x) = |\rho(x)| e^{j\psi_\rho(x)}.$$

Анализируя выражение (8.32), устанавливаем, что модуль коэффициента отражения

$$|\rho(x)| = U_{отр}(x) / U_{пад}(x) = |\rho_2| e^{-2\alpha(l-x)} = |\rho_2| e^{-2\alpha x'} \quad (8.34)$$

плавно увеличивается с ростом x и достигает наибольшего значения $\rho_{\max}(x) = |\rho_2|$ в конце линии.

Выражая коэффициент отражения в начале линии ρ_1 через коэффициент отражения в конце линии ρ_2

$$\rho_1 = \rho(x)|_{x=0} = \rho_2 e^{-2\gamma l} = \rho_2 e^{-2(\alpha + j\beta)l}, \quad (8.35)$$

находим, что модуль коэффициента отражения в начале линии в $e^{2\alpha l}$ раз меньше, чем модуль коэффициента отражения в ее конце. Из выражений (8.34), (8.35) следует, что модуль коэффициента отражения однородной линии без потерь имеет одно и то же значение во всех сечениях линии.

С помощью формул (8.31), (8.33) напряжение и ток в произвольном сечении линии можно выразить через напряжение или ток и коэффициент отражения в конце линии:

$$\dot{U}(x) = \frac{e^{\gamma x'} + \rho_2 e^{-\gamma x'}}{1 + \rho_2} \dot{U}_2 = \frac{e^{\gamma x'} + \rho_2 e^{-\gamma x'}}{1 - \rho_2} Z_n \dot{I}_2'; \quad (8.36)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{e^{\gamma x'} - \rho_2 e^{-\gamma x'}}{1 - \rho_2} \dot{I}_2' = \frac{e^{\gamma x'} - \rho_2 e^{-\gamma x'}}{(1 + \rho_2) Z_n} \dot{U}_2. \quad (8.37)$$

Выражения (8.36) и (8.37) позволяют рассмотреть распределение напряжений и токов в однородной длинной линии в некоторых характерных режимах ее работы.

РЕЖИМ БЕГУЩИХ ВОЛН

Режимом бегущих волн называется режим работы однородной линии, при котором в ней распространяется только падающая волна напряжения и тока, т. е. амплитуды напряжения и тока

отраженной волны во всех сечениях линии равны нулю. Очевидно, что в режиме бегущих волн коэффициент отражения линии $\rho(x)=0$. Из выражения (8.32) следует, что коэффициент отражения $\rho(x)$ может быть равен нулю либо в линии бесконечной длины (при $l=\infty$ падающая волна не может достичь конца линии и отразиться от него), либо в линии конечной длины, сопротивление нагрузки которой выбрано таким образом, что коэффициент отражения в конце линии $\rho_2=0$. Из этих случаев практический интерес представляет только второй, для реализации которого, как следует из (8.33), необходимо, чтобы сопротивление нагрузки линии было равно волновому сопротивлению Z_0 (такая нагрузка называется согласованной).

Полагая в выражениях (8.36), (8.37) $\rho_2=0$, выразим комплексные действующие значения напряжения и тока в произвольном сечении линии в режиме бегущих волн через комплексные действующие значения напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ в конце линии:

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_2 e^{\gamma x}; \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{пад}}(x) = \dot{I}_2 e^{\gamma x}.\end{aligned}\quad (8.38)$$

Используя выражение (8.38), найдем комплексные действующие значения напряжения и тока в начале линии:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}(x)|_{x=0} = \dot{U}(x')|_{x'=l} = \dot{U}_2 e^{\gamma l}; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}(x)|_{x=0} = \dot{I}(x')|_{x'=l} = \dot{I}_2 e^{\gamma l}.\end{aligned}\quad (8.39)$$

Подставляя (8.39) в (8.38), выразим напряжение и ток в произвольном сечении линии в режиме бегущих волн через напряжение и ток в начале линии:

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_1 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_1 e^{-\gamma x}.\end{aligned}\quad (8.40)$$

Представим напряжение и ток в начале линии в показательной форме: $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\psi_{u1}}$, $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_{i1}}$. Перейдем от комплексных действующих значений напряжения и тока к мгновенным:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sqrt{2} U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{u1}); \\ i(x, t) &= \sqrt{2} I_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{i1}).\end{aligned}\quad (8.41)$$

Как следует из выражений (8.41), в режиме бегущих волн амплитуды напряжения и тока в линии с потерями ($\alpha > 0$) экспоненциально убывают с ростом x , а в линии без потерь ($\alpha = 0$) сохраняют одно и то же значение во всех сечениях линии (рис. 8.3).

Начальные фазы напряжения $\psi_{u1} - \beta x$ и тока $\psi_{i1} - \beta x$ в режиме бегущих волн изменяются вдоль линии по линейному закону,

причем сдвиг фаз между напряжением и током во всех сечениях линии имеет одно и то же значение $\psi_{u_1} - \psi_{i_1}$.

Входное сопротивление линии в режиме бегущих волн равно волновому сопротивлению линии и не зависит от ее длины:

$$Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}(x) / \dot{I}(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) / \dot{I}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_2 / \dot{I}_2' = Z_{\text{в}}.$$

У линии без потерь волновое сопротивление имеет чисто резистивный характер (8.28), поэтому в режиме бегущих волн сдвиг фаз между напряжением и током во всех сечениях линии без потерь равен нулю ($\psi_{u_1} = \psi_{i_1} = \psi$).

Мгновенная мощность, потребляемая участком линии без потерь, расположенным правее произвольного сечения x (см. рис. 8.1), равна произведению мгновенных значений напряжения и тока в сечении x :

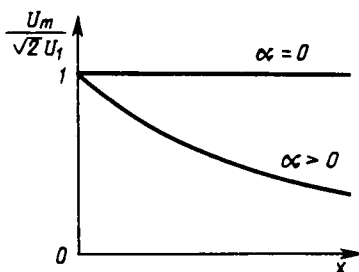


Рис. 8.3. Распределение амплитуд напряжения вдоль линии в режиме бегущих волн

$$p(x, t) = u(x, t)i(x, t) = 2U_1 I_1 \cos^2(\omega t - \beta x + \psi). \quad (8.42)$$

Из выражения (8.42) следует, что мгновенная мощность, потребляемая произвольным участком линии без потерь в режиме бегущих волн, не может быть отрицательной, следовательно, в режиме бегущих волн передача энергии в линии производится только в одном направлении — от источника энергии к нагрузке.

Обмен энергией между источником и нагрузкой в режиме бегущих волн отсутствует и вся энергия, передаваемая падающей волной, потребляется нагрузкой.

РЕЖИМ СТОЯЧИХ ВОЛН

Если сопротивление нагрузки рассматриваемой линии не равно волновому сопротивлению, то только часть энергии, передаваемой падающей волной к концу линии, потребляется нагрузкой. Оставшаяся часть энергии отражается от нагрузки и в виде отраженной волны возвращается к источнику. Если модуль коэффициента отражения линии $|\rho(x)| \equiv 1$, т. е. амплитуды отраженной и падающей волн во всех сечениях линии одинаковы, то в линии устанавливается специфический режим, называемый режимом стоячих волн. Согласно выражению (8.34), модуль коэффициента отражения $|\rho(x)| \equiv 1$ только в том случае, когда модуль коэффициента отражения в конце линии $|\rho_2| = 1$, а коэффициент ослабления линии $\alpha = 0$. Анализируя выражение (8.33), можно убедиться, что $|\rho_2| = 1$ только в трех случаях, когда сопротивление нагрузки равно либо нулю, либо бесконечности, либо имеет чисто реактивный характер.

Следовательно, режим стоячих волн может установиться только в линии без потерь при коротком замыкании или холостом ходе на выходе, а также если сопротивление нагрузки на выходе такой линии имеет чисто реактивный характер.

При коротком замыкании на выходе линии коэффициент отражения в конце линии $\rho_2 = -1$. В этом случае напряжения падающей и отраженной волн в конце линии имеют одинаковые амплитуды, но сдвинуты по фазе на 180° , поэтому мгновенное значение напряжения на выходе тождественно равно нулю. Подставляя в выражения (8.36), (8.37) $\rho_2 = -1$, $\gamma = j\beta$, $Z_2 = R_2$, находим комплексные действующие значения напряжения и тока линии:

$$\dot{U}(x) = \frac{e^{j\beta x'} - e^{-j\beta x'}}{2} R_2 \dot{I}_2' = R_2 \dot{I}_2' \operatorname{sh}(j\beta x') = jR_2 \dot{I}_2' \sin(\beta x');$$

$$\dot{I}(x) = \frac{e^{j\beta x'} + e^{-j\beta x'}}{2} \dot{I}_2' = \dot{I}_2' \operatorname{ch}(j\beta x') = \dot{I}_2' \cos(\beta x').$$

Полагая, что начальная фаза тока $\dot{I}_2'$ на выходе линии равна нулю, и переходя от комплексных действующих значений напряжений и токов к мгновенным

$$u(x, t) = [\sqrt{2} R_2 I_2' \sin(\beta x')] \cos(\omega t + \pi/2);$$

$$i(x, t) = [\sqrt{2} I_2' \cos(\beta x')] \cos(\omega t),$$

устанавливаем, что при коротком замыкании на выходе линии амплитуды напряжения и тока изменяются вдоль линии по периодическому закону

$$U_m(x) = \sqrt{2} R_2 I_2' |\sin(\beta x')|;$$

$$I_m(x) = \sqrt{2} I_2' |\cos(\beta x')|,$$

принимая в отдельных точках линии максимальные значения $U_{m \max} = \sqrt{2} R_2 I_2'$, $I_{m \max} = \sqrt{2} I_2'$ и обращаясь в нуль в некоторых других точках (рис. 8.4).

Очевидно, что в тех точках линии, в которых амплитуда напряжения (тока) равна нулю, мгновенные значения напряжения (тока) тождественно равны нулю. Такие точки называются узлами напряжения (тока).

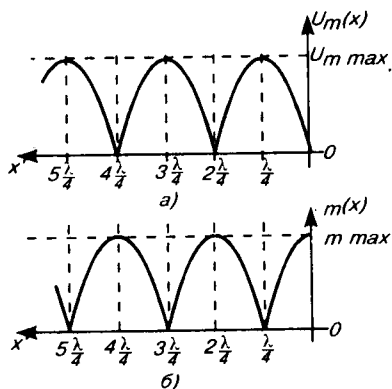


Рис. 8.4. Распределение амплитуд напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме короткого замыкания

Характерные точки, в которых амплитуда напряжения (тока) принимает максимальное значение, называются пучностями напряжения (тока). Как видно из рис. 8.4, узлы напряжения соответствуют пучностям тока и, наоборот, узлы тока соответствуют пучностям напряжения.

Распределение мгновенных значений напряжения и тока вдоль линии подчиняется (рис. 8.5) синусоидальному или косинусоидальному закону, однако с течением времени координаты точек, имеющих одинаковую фазу, остаются неизменными, т. е. волны напряжения и тока как бы «стоят на месте». Именно поэтому такой режим работы линии получил название режима стоячих волн.

Координаты узлов напряжения определяются из условия $\sin \beta x'_k = 0$, откуда

$$x'_k = k\pi/\beta, \quad (8.43)$$

где $k=0, 1, 2, \dots$, а координаты пучностей напряжения — из условия $\cos \beta x'_n = 0$, откуда

$$x'_n = (2n+1)\pi/(2\beta), \quad (8.44)$$

где $n=0, 1, 2, \dots$.

На практике координаты узлов и пучностей удобно отсчитывать от конца линии в долях длины волны λ . Подставляя соотношение (8.21) в выражения (8.43), (8.44), получаем $x'_k = k\lambda/2$, $x'_n = (2n+1)\lambda/4$.

Таким образом, узлы напряжения (тока) и пучности напряжения (тока) чередуются с интервалом $\lambda/4$, а расстояние между соседними узлами (или пучностями) равно $\lambda/2$.

Анализируя выражения для напряжения и тока падающей и отраженной волн, нетрудно убедиться, что пучности напряжения (тока) возникают в тех сечениях линии, в которых напряжения (токи) падающей и отраженной волн совпадают по фазе и, следовательно, суммируются, а узлы располагаются в сечениях, где напряжения (токи) падающей и отраженной волн находятся в противофазе и, следовательно, вычитаются. Мгновенная мощность, потребляемая произвольным участком линии, изменяется во времени по гармоническому закону $p(x, t) =$

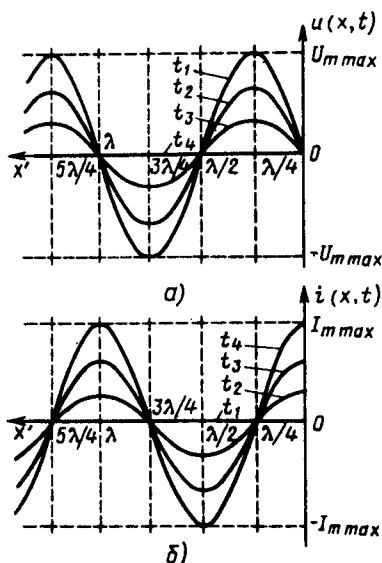


Рис. 8.5. Распределение мгновенных значений напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме короткого замыкания

$=u(x, t)i(x, t) = -[R_0(I'_2)^2 \sin(2\beta x') \sin(2\omega t)]/2$, поэтому активная мощность, потребляемая любым участком линии, равна нулю.

Таким образом, в режиме стоячих волн энергия вдоль линии не передается и на каждом участке линии происходит только обмен энергией между электрическим и магнитным полями.

Аналогичным образом находим, что в режиме холостого хода ($\rho_2 = 1$) распределение амплитуд напряжения (тока) вдоль линии без потерь (рис. 8.6)

$$U_m(x) = \sqrt{2} U_2 |\cos \beta x'|;$$

$$I_m(x) = \sqrt{2} U_2 |\sin \beta x'|/R_0$$

имеет такой же характер, как и распределение амплитуд тока (напряжения) в режиме короткого замыкания (см. рис. 8.4).

Рассмотрим линию без потерь, сопротивление нагрузки на выходе которой имеет чисто реактивный характер:

$$Z_n = jx_n. \quad (8.45)$$

Подставляя (8.45) в (8.33), получаем

$$\rho_2 = (jx_n - R_0)/(jx_n + R_0) = \frac{(x_n^2 - R_0^2) + j2R_0x_n}{R_0^2 + x_n^2} = |\rho_2| e^{j\psi_{\rho_2}}. \quad (8.46)$$

Из выражения (8.46) следует, что при чисто реактивной нагрузке модуль коэффициента отражения на выходе линии $|\rho_2| = 1$, а значения аргумента ψ_{ρ_2} при конечных значениях x_n лежат между 0 и $\pm \pi$.

Используя выражения (8.36), (8.37) и (8.46), найдем комплексные действующие значения напряжения и тока линии:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \sqrt{1 + (R_0/x_n)^2} \cos(\beta x' - \varphi);$$

$$\dot{I}(x) = -\dot{I}'_2 \sqrt{1 + (x_n/R_0)^2} \sin(\beta x' - \varphi), \quad (8.47)$$

где $\varphi = \arctg(R_0/x_n)$. Из выражения (8.47) следует, что амплитуды напряжения и тока изменяются вдоль линии по периодическому закону:

$$U_m(x) = \sqrt{2} U_2 \sqrt{1 + (R_0/x_n)^2} |\cos(\beta x' - \varphi)|;$$

$$I_m(x) = \sqrt{2} I'_2 \sqrt{1 + (x_n/R_0)^2} |\sin(\beta x' - \varphi)|,$$

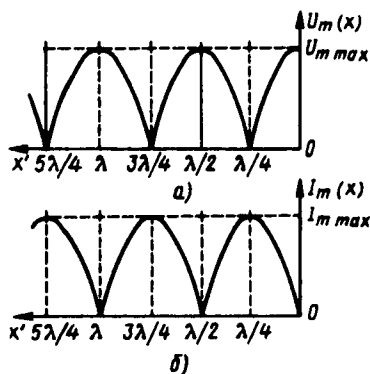


Рис. 8.6. Распределение амплитуд напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме холостого хода

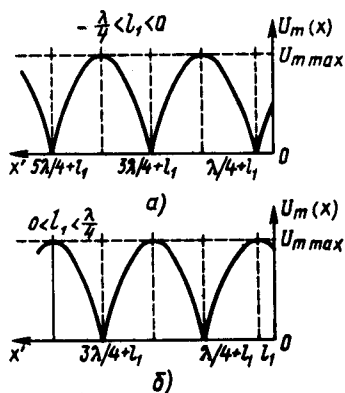


Рис. 8.7. Распределение амплитуд напряжения вдоль линии с емкостной (а) и индуктивной (б) нагрузками

$\lambda/4$ от конца линии (рис. 8.7, а); при индуктивной нагрузке — $0 < l_1 < \lambda/4$ и первый узел будет располагаться на расстоянии, большем $\lambda/4$, но меньшим $\lambda/2$ от конца линии (рис. 8.7, б).

РЕЖИМ СМЕШАННЫХ ВОЛН

Режимы бегущих и стоячих волн представляют собой два предельных случая, в одном из которых амплитуда отраженной волны во всех сечениях линии равна нулю, а в другом — амплитуды падающей и отраженной волн во всех сечениях линии одинаковы. В остальных случаях в линии имеет место режим смешанных волн, который можно рассматривать как наложение режимов бегущих и стоячих волн. В режиме смешанных волн энергия, передаваемая падающей волной к концу линии, частично поглощается нагрузкой, а частично отражается от нее, поэтому амплитуда отраженной волны больше нуля, но меньше амплитуды падающей волны.

Как и в режиме стоячих волн, распределение амплитуд напряжений и тока в режиме смешанных волн (рис. 8.8) имеет четко выраженные максимумы и минимумы, повторяющиеся через $\lambda/2$. Однако амплитуды тока и напряжения

причем координаты узлов напряжения (пучностей тока) $x'_k = (2k+1)\lambda/4 + l_1$, где $l_1 = \varphi\lambda/(2\pi)$; $k=0, 1, 2, 3, \dots$, а координаты пучностей напряжения (узлов тока) $x'_n = \pi\lambda/2 + l_1$, где $n=0, 1, 2, 3, \dots$.

Распределение амплитуд напряжения и тока при чисто реактивной нагрузке в целом имеет такой же характер, как и в режимах холостого хода или короткого замыкания на выходе (рис. 8.7), причем все узлы и все пучности смещаются на величину l_1 так, что в конце линии не оказывается ни узла, ни пучности тока или напряжения.

При емкостной нагрузке $-\lambda/4 < l_1 < 0$, поэтому первый узел напряжения будет находиться на расстоянии, меньшем

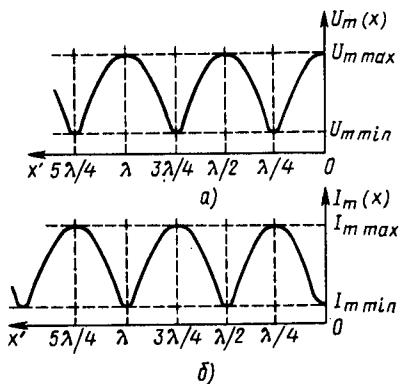


Рис. 8.8. Распределение амплитуд напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме смешанных волн при чисто резистивной нагрузке ($R_n > R_\lambda$)

в минимумах не равны нулю. Чем меньшая часть энергии отражается от нагрузки, т. е. чем выше степень согласования линии с нагрузкой, тем в меньшей степени выражены максимумы и минимумы напряжения и тока, поэтому соотношения между минимальными и максимальными значениями амплитуд напряжения и тока можно использовать для оценки степени согласования линии с нагрузкой. Величина, равная отношению минимального и максимального значений амплитуды напряжения или тока, называется коэффициентом бегущей волны (КБВ)

$$K_6 = U_{\text{min}}/U_{\text{max}} = I_{\text{min}}/I_{\text{max}}. \quad (8.48)$$

КБВ может измениться в пределах от 0 до 1, причем чем больше K_6 , тем ближе режим работы линии к режиму бегущих волн.

Очевидно, что в точках линии, в которых амплитуда напряжения (тока) достигает максимального значения, напряжения (токи) падающей и отраженной волн совпадают на фазе, а там, где амплитуда напряжения (тока) имеет минимальное значение, напряжения (токи) падающей и отраженной волн находятся в противофазе. Следовательно,

$$U_{\text{max}} = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}; \quad U_{\text{min}} = U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}. \quad (8.49)$$

Подставляя выражение (8.49) в (8.48) и принимая во внимание, что отношение амплитуды напряжения отраженной волны к амплитуде напряжения падающей волны представляет собой модуль коэффициента отражения линии $|\rho(x)|$, устанавливаем связь между коэффициентом бегущей волны и коэффициентом отражения:

$$K_6 = (U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}})/(U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}) = [1 - |\rho(x)|]/[1 + |\rho(x)|].$$

В линии без потерь модуль коэффициента отражения в любом сечении линии равен модулю коэффициента отражения в конце линии, поэтому коэффициент бегущей волны во всех сечениях линии имеет одинаковое значение: $K_6 = (1 - |\rho_2|)/(1 + |\rho_2|)$.

В линии с потерями модуль коэффициента отражения изменяется вдоль линии, достигая наибольшего значения в точке отражения (при $x = l$). В связи с этим в линии с потерями коэффициент бегущей волны изменяется вдоль линии, становясь в конце нее минимальным.

Наряду с КБВ для оценки степени согласования линии с нагрузкой широко используется обратная ему величина — коэффициент стоячей волны (КСВ):

$$K_c = 1/K_6 = U_{\text{max}}/U_{\text{min}} = I_{\text{max}}/I_{\text{min}}.$$

В режиме бегущих волн $K_c = 1$, а в режиме стоячих волн $K_c \rightarrow \infty$.

§ 8.3. ОПЕРАТОРНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОРОДНЫХ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

ПРОХОДНОЙ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИК С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Длинную линию конечной длины (отрезок длинной линии), имеющую две пары внешних выводов, можно рассматривать как проходной четырехполосник с распределенными параметрами. Для получения основных уравнений и первичных параметров этого четырехполосника воспользуемся уравнениями (8.10), (8.11), выразив входящие в них постоянные интегрирования через ток I_2 и напряжение $\dot{U}_2$ в конце линии (8.31) и перейдя от показательных к гиперболическим функциям с помощью соотношений (7.95):

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma x') + Z_\bullet I_2' \operatorname{sh}(\gamma x'); \\ I(x) &= \dot{U}_2 \operatorname{sh}(\gamma x')/Z_\bullet + I_2' \operatorname{ch}(\gamma x').\end{aligned}\quad (8.50)$$

Полагая в уравнениях (8.50) $x' = l$, $\dot{U}(x) = \dot{U}_1$, $I(x) = I_1$, находим основные уравнения четырехполосника с распределенными параметрами в форме A :

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + Z_\bullet I_2' \operatorname{sh}(\gamma l); \\ I_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{sh}(\gamma l)/Z_\bullet + I_2' \operatorname{ch}(\gamma l)\end{aligned}\quad (8.51)$$

и его A -параметры

$$\begin{aligned}A_{11} &= \operatorname{ch}(\gamma l); \quad A_{12} = Z_\bullet \operatorname{sh}(\gamma l); \\ A_{21} &= \operatorname{sh}(\gamma l)/Z_\bullet; \quad A_{22} = \operatorname{ch}(\gamma l).\end{aligned}\quad (8.52)$$

Используя формулы перехода (см. приложение 2), можно получить выражения для любых других первичных параметров рассматриваемого четырехполосника, в частности выражения для Y -параметров:

$$\begin{aligned}Y_{11} &= Y_{22} = A_{22}/A_{12} = \operatorname{ch}(\gamma l)/[Z_\bullet \operatorname{sh}(\gamma l)]; \\ Y_{12} &= Y_{21} = -1/A_{12} = -1/[Z_\bullet \operatorname{sh}(\gamma l)].\end{aligned}\quad (8.53)$$

Сравнивая выражения (8.52) и (7.99), убеждаемся, что *отрезок однородной длинной линии можно рассматривать как симметричный пассивный проходной четырехполосник, характеристическое сопротивление которого равно волновому сопротивлению линии $Z_\bullet$, а характеристическая постоянная передачи — произведению коэффициента распространения γ на длину отрезка l .*

Очевидно, что волновое сопротивление и коэффициент распространения линии можно определить как характеристические сопротивления и постоянную передачи отрезка линии, имеющего единичную

длину. Следует отметить, что понятия характеристических сопротивлений и постоянной передачи были первоначально введены в теории цепей с распределенными параметрами, а затем их стали использовать и применительно к четырехполосникам с сосредоточенными параметрами.

Для описания четырехполосников с распределенными параметрами можно использовать не только основные уравнения, связывающие токи и напряжения на его зажимах, но и т. н. волновые уравнения, связывающие напряжения падающей и отраженной волн на входе и выходе четырехполосника. Для получения этих уравнений выразим напряжения и токи в начале и конце линии через напряжения падающей и отраженной волн в начале $\dot{U}_1 \text{ пад.}$, $\dot{U}_1 \text{ отр.}$ и конце $\dot{U}_2 \text{ пад.}$, $\dot{U}_2 \text{ отр.}$ линии:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_1 \text{ пад.} + \dot{U}_1 \text{ отр.}; \\ \dot{I}_1 &= (\dot{U}_1 \text{ пад.} - \dot{U}_1 \text{ отр.})/Z_{\text{в}}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_2 \text{ пад.} + \dot{U}_2 \text{ отр.}; \\ \dot{I}_2 &= (\dot{U}_2 \text{ пад.} - \dot{U}_2 \text{ отр.})/Z_{\text{в}}.\end{aligned}\quad (8.54)$$

Подставляя выражения (8.54) в основные уравнения четырехполосника, получаем два уравнения, связывающих четыре напряжения $\dot{U}_1 \text{ пад.}$, $\dot{U}_1 \text{ отр.}$, $\dot{U}_2 \text{ пад.}$, $\dot{U}_2 \text{ отр.}$. Очевидно, что в зависимости от того, какие из указанных величин рассматриваются в качестве независимых, можно получить шесть различных вариантов записи волновых уравнений. Наиболее часто применяют уравнения в форме T:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 \text{ пад.} &= T_{11} \dot{U}_2 \text{ пад.} + T_{12} \dot{U}_2 \text{ отр.}; \\ \dot{U}_1 \text{ отр.} &= T_{21} \dot{U}_2 \text{ пад.} + T_{22} \dot{U}_2 \text{ отр.}\end{aligned}$$

и в форме S:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 \text{ отр.} &= S_{11} \dot{U}_1 \text{ пад.} + S_{12} \dot{U}_2 \text{ отр.}; \\ \dot{U}_2 \text{ пад.} &= S_{21} \dot{U}_1 \text{ пад.} + S_{22} \dot{U}_2 \text{ отр.}\end{aligned}$$

В матричной форме эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \text{ пад.} \\ \dot{U}_1 \text{ отр.} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \text{ пад.} \\ \dot{U}_2 \text{ отр.} \end{bmatrix}, \quad (8.55)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \text{ отр.} \\ \dot{U}_2 \text{ пад.} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \text{ пад.} \\ \dot{U}_2 \text{ отр.} \end{bmatrix}. \quad (8.56)$$

Матрицы T и S называются волновой матрицей и матрицей рассеяния. Их элементы могут быть выражены через любые первичные параметры четырехполосника. Например, подставляя (8.54) в уравнения (7.32) и преобразуя их к виду (8.55) или (8.56), получаем

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (A_{11} + A_{12}/Z_{\text{в}} + Z_{\text{в}}A_{21} + A_{22}); & (A_{11} - A_{12}/Z_{\text{в}} + Z_{\text{в}}A_{21} - A_{22}) \\ (A_{11} + A_{12}/Z_{\text{в}} - Z_{\text{в}}A_{21} - A_{22}); & (A_{11} - A_{12}/Z_{\text{в}} - Z_{\text{в}}A_{21} + A_{22}) \end{bmatrix}; \\ S &= \frac{1}{A_{11} + A_{12}/Z_{\text{в}} + Z_{\text{в}}A_{21} + A_{22}} \begin{bmatrix} (A_{11} + A_{12}/Z_{\text{в}} - Z_{\text{в}}A_{21} - A_{22}); & 2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\ 2; & -(A_{11} - A_{12}/Z_{\text{в}} + Z_{\text{в}}A_{21} - A_{22}) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Нетрудно также установить связь между элементами матриц T и S :

$$S = \frac{1}{T_{11}} \begin{bmatrix} T_{21}, & T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \\ 1, & -T_{12} \end{bmatrix};$$

$$T = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1, & -S_{22} \\ S_{11}, & -(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) \end{bmatrix}.$$

Используя полученные соотношения, находим волновую матрицу T и матрицу рассеяния S отрезка однородной линии длиной l :

$$T = \begin{bmatrix} e^{\gamma l}; & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{bmatrix}; \quad (8.57)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0; & e^{-\gamma l} \\ -e^{-\gamma l} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.58)$$

Как следует из выражений (8.57), (8.58), у рассматриваемого четырехполюсника с распределенными параметрами не равны нулю только два элемента T_{11} , T_{22} волновой матрицы и два элемента S_{12} , S_{21} матрицы рассеяния.

Используя выражения для первичных параметров (8.52), (8.53), можно определить любые частотные характеристики отрезков однородных длинных линий, а также построить сосредоточенные Π - и T -образные схемы замещения отрезков линии на произвольной фиксированной частоте ω .

ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ОДНОРОДНОЙ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

Найдем комплексное сопротивление Z отрезка однородной длинной линии, нагруженного со стороны зажимов $2 - 2'$ на произвольное сопротивление Z_n :

$$Z = Z_{11}(j\omega) = \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_n \operatorname{ch}(\gamma l) + Z_0 \operatorname{sh}(\gamma l)}{Z_n \operatorname{sh}(\gamma l) + Z_0 \operatorname{ch}(\gamma l)} Z_0. \quad (8.59)$$

Из выражения (8.59) непосредственно следует уже известное свойство однородной линии, заключающееся в том, что при согласованной нагрузке $Z_n = Z_0$ входное сопротивление линии равно волновому и не зависит от длины линии. При $Z_n \neq Z_0$ входное сопротивление линии сложным образом зависит от ее длины, частоты внешнего воздействия и соотношения между Z_n и Z_0 .

Рассмотрим наиболее важные для практики случаи, когда сопротивление нагрузки линии со стороны зажимов $2 - 2'$ равно нулю (режим короткого замыкания на выходе) или бесконечности (режим холостого хода на выходе). Полагая в (8.59) $Z_n = 0$, находим

выражение для комплексного входного сопротивления линии в режиме короткого замыкания на выходе:

$$Z_x = Z|_{Z_x=0} = Z_0 \operatorname{th}(\gamma l). \quad (8.60)$$

Для линии без потерь ($\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$, $Z_0 = R_0 = \sqrt{L_1/C_1}$);

$$Z_x = R_0 \operatorname{th}(j\beta l) = jR_0 \operatorname{tg}(\beta l) = jx_x. \quad (8.61)$$

Из выражения (8.61) следует, что вещественная составляющая комплексного входного сопротивления отрезка длинной линии без потерь в режиме короткого замыкания на выходе равна нулю, а мнимая составляющая

$$x_x = R_0 \operatorname{tg}(\beta l) = R_0 \operatorname{tg}(2\pi l/\lambda)$$

является периодической функцией электрической длины линии l/λ и может принимать любые значения от $-\infty$ до ∞ (рис. 8.9, а). При $0 < l/\lambda < 1/4$ входное сопротивление линии имеет индуктивный характер; при $l/\lambda = 1/4$ оно бесконечно велико; при $1/4 < l/\lambda < 1/2$ входное сопротивление линий имеет емкостный характер, а при $l/\lambda = 1/2$ оно равно нулю. Как видно из рис. 8.9, а, увеличение l/λ на величину, кратную $1/2$, не изменяет входного сопротивления отрезка однородной линии без потерь.

Электрическая длина линии зависит как от физической длины линии l , так и от частоты внешнего воздействия f . Для линии без потерь электрическая длина прямо пропорциональна частоте:

$$l/\lambda = \omega l \sqrt{L_1 C_1} / (2\pi) = f l \sqrt{L_1 C_1},$$

поэтому вид зависимостей мнимой составляющей комплексного входного сопротивления от электрической длины и частоты одинаков и отличается только масштабом изображения по оси абсцисс.

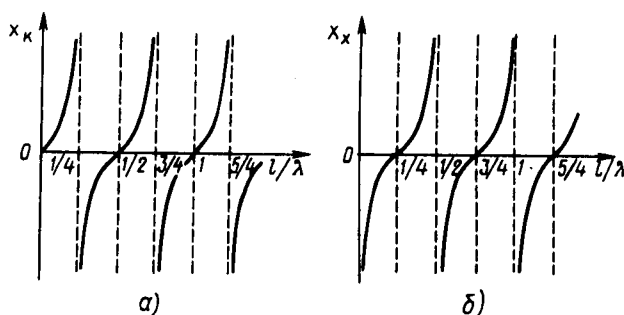


Рис. 8.9. Зависимость мнимой составляющей комплексного входного сопротивления линии без потерь от электрической длины линии:

а — режим короткого замыкания; б — режим холостого хода

Так, входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии без потерь имеет индуктивный характер на частотах $0 < f < 1/(4l \sqrt{L_1 C_1})$, при которых электрическая длина линии меньше $1/4$, и емкостный характер на частотах $1/(4l \sqrt{L_1 C_1}) < f < 1/(2l \sqrt{L_1 C_1})$, при которых электрическая длина лежит в пределах от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$. В окрестностях

частот $f_n = (2n+1)/(4l \sqrt{L_1 C_1})$, где $n=0, 1, 2, \dots$, на которых длина отрезка линии кратна нечетному числу четвертей длин волн, АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления короткозамкнутого отрезка длинной линии подобны соответствующим характеристикам параллельного колебательного контура, а в окрестностях частот $f_k = k/(2l \sqrt{L_1 C_1})$, где $k=1, 2, 3, \dots$, на которых длина отрезка линии кратна четному числу четвертей длин волн, короткозамкнутый отрезок ведет себя подобно последовательному колебательному контуру.

В режиме холостого хода на выходе комплексное входное сопротивление отрезка длинной линии определяется выражением

$$Z_x = Z|_{Z_n = \infty} = Z_0 \operatorname{cth}(\gamma l). \quad (8.62)$$

Как и в режиме короткого замыкания на выходе, комплексное входное сопротивление отрезка длинной линии без потерь в режиме холостого хода на выходе имеет чисто мнимый характер

$$Z_x = -jR_0 \operatorname{ctg}(\beta l) = -jR_0 \operatorname{ctg}(2\pi l/\lambda) = jx_l$$

и является периодической функцией электрической длины линии (рис. 8.9, б). Из сравнения рис. 8.9, а, б, видно, что электрические характеристики разомкнутого на конце отрезка линии длиной l совпадают с электрическими характеристиками короткозамкнутого на конце отрезка линии длиной $l + \lambda/4$.

Рассмотренные свойства короткозамкнутых и разомкнутых отрезков длинных линий позволяют использовать их в качестве колебательных систем в диапазоне сверхвысоких частот, когда добротность колебательных контуров, составленных из дискретных индуктивных катушек и конденсаторов, становится низкой. В отличие от колебательных систем с сосредоточенными параметрами число резонансных частот в колебательных системах с распределенными параметрами бесконечно велико.

Короткозамкнутые отрезки линий широко используются также в качестве реактивных шлейфов, т. е. устройств, подключаемых параллельно какому-либо участку цепи для компенсации мнимой составляющей его входной проводимости. Изменяя длину короткозамкнутого отрезка в пределах от 0 до $\lambda/2$, можно добиться того, чтобы мнимая составляющая входной проводимости шлейфа была равна по абсолютному значению и противоположна по знаку мнимой составляющей входной проводимости параллельно включен-

ного участка цепи. При этом суммарное входное сопротивление участка цепи вместе с шлейфом имеет чисто резистивный характер. Учитывая, что входное сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной $\lambda/4$ бесконечно велико, его можно использовать в качестве «металлического изолятора» для подвески или крепления основной линии передачи.

В связи с тем что комплексное входное сопротивление отрезка длинной линии в общем случае не равно сопротивлению нагрузки, отрезки линий обладают способностью трансформировать сопротивление. Наиболее интересны в этом отношении свойства отрезков линий без потерь длиной $\lambda/2$, $\lambda/4$, и $\lambda/8$.

Полагая в выражении (8.59) сначала $\gamma l = j\beta l = j2\pi l/\lambda$ и $Z_1 = R_1 = \sqrt{L_1/C_1}$

$$Z = \frac{Z_n \cos(2\pi l/\lambda) + jR_n \sin(2\pi l/\lambda)}{R_n \cos(2\pi l/\lambda) + jZ_n \sin(2\pi l/\lambda)} R_n, \quad (8.63)$$

а затем $l/\lambda = 1/2$, устанавливаем, что комплексное входное сопротивление отрезка линии без потерь длиной $\lambda/2$ равно сопротивлению нагрузки. Следовательно, этот отрезок линии как бы повторяет сопротивление нагрузки, т. е. ведет себя подобно идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации $n=1$.

Подставляя в выражение (8.63) $l/\lambda = 1/4$, находим, что входное сопротивление отрезка линии без потерь длиной $\lambda/4$

$$Z = R_n^2/Z_n, \quad (8.64)$$

пропорционально проводимости нагрузки и может изменяться в широких пределах при изменении волнового сопротивления линии. Следовательно, отрезок линии длиной $\lambda/4$ (*четвертьволновый трансформатор*) может преобразовывать большое сопротивление в малое, и наоборот. В предельных случаях входное сопротивление четвертьволнового трансформатора равно нулю при бесконечно большом сопротивлении нагрузки (рис. 8.9, б) и равно бесконечности при коротком замыкании на выходе (рис. 8.9, а). Из выражения (8.64) следует, что если сопротивление нагрузки имеет чисто резистивный характер, то и входное сопротивление четвертьволнового трансформатора имеет чисто резистивный характер.

Как видно из сравнения выражений (7.131) и (8.64), отрезок LC-линии длиной $\lambda/4$ представляет собой идеальный инвертор сопротивления с коэффициентом инверсии $K_{\text{инв}} = R_n^2$.

Из выражения (8.63) можно найти также входное сопротивление отрезка без потерь длиной $\lambda/8$:

$$Z = \frac{(Z_n + jR_n)R_n}{R_n + jZ_n}. \quad (8.65)$$

Если сопротивление нагрузки имеет чисто резистивный характер ($Z_H = R_H$), то модули числителя и знаменателя дроби, входящей в выражение (8.65), одинаковы и, следовательно, модуль входного сопротивления рассматриваемого отрезка линии равен R_0 . Таким образом, отрезок линии длиной $\lambda/8$ преобразует произвольное резистивное сопротивление в сопротивление, модуль которого равен R_0 . Аналогичными свойствами обладает отрезок линии без потерь длиной $3\lambda/8$.

Трансформирующие свойства отрезков длинных линий широко используются на практике для построения устройств согласования реальных линий передачи с нагрузкой. В результате согласования в линии передачи устанавливается режим, близкий к режиму бегущих волн; при этом практически вся передаваемая линией энергия потребляется нагрузкой, а потери энергии, связанные с многократным прохождением отраженных волн вдоль линии, значительно уменьшаются.

Если сопротивление нагрузки реальной линии передачи с малыми потерями имеет чисто резистивный характер, то для согласования линии с нагрузкой можно применять четвертьволновый трансформатор, включенный между линией и нагрузкой (рис. 8.10, а). Погонные параметры отрезка линии, используемой в качестве четвертьволнового трансформатора, выбирают таким образом, чтобы волновое сопротивление трансформатора $R_{втр}$ было равно среднему геометрическому из волнового сопротивления основной (согласуемой) линии $R_{в0}$ и сопротивления нагрузки R_H :

$$R_{втр} = \sqrt{R_{в0} R_H}.$$

В этом случае входное сопротивление четвертьволнового трансформатора в точках 1 — 1' равно $R_{в0}$, и в основной линии установится режим, близкий к режиму бегущих волн. Отрезок линии, используемый в качестве четвертьволнового трансформатора, при этом находится в режиме смешанных волн, однако вследствие малой длины трансформатора потери энергии в нем незначительны.

Если сопротивление нагрузки линии имеет комплексный характер,

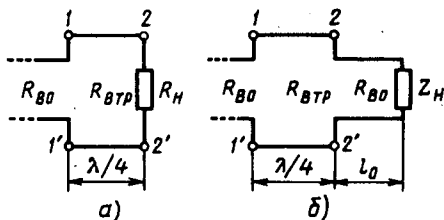


Рис. 8.10. Согласование линии с нагрузкой с помощью четвертьволнового трансформатора

то согласующий трансформатор подключают не в непосредственной близости к нагрузке, а на некотором расстоянии l_0 от нее, выбранном таким образом, чтобы входное сопротивление нагруженного участка линии в точке 2 — 2' имело чисто резистивный характер (рис. 8.10, б). Неудобство рассмотренного метода согласования заключается в необходимости изготовления

специального отрезка линии, волновое сопротивление и, следовательно, погонные параметры которого должны отличаться от волнового сопротивления и погонных параметров согласуемой линии.

Этого недостатка лишен разработанный В. В. Татариновым метод согласования с помощью одного или двух реактивных шлейфов, конструктивно представляющих собой отрезки длинных линий того же типа, что и согласуемая линия (рис. 8.11). В первом случае расстояние от места подключения шлейфа до точки подключения нагрузки l_0 (рис. 8.11, а) выбирают таким образом, чтобы вещественная составляющая входной проводимости линии в точках 1 — 1' была равна $1/R_s$:

$$Y_{11} = 1/R_s + jb, \quad (8.66)$$

а длину шлейфа l_1 — так, чтобы входная проводимость шлейфа равнялась $-jb$. Очевидно, что при этих условиях эквивалентное сопротивление нагрузки основной линии в точках 1 — 1' равно волновому сопротивлению линии R_s : $Z_{эк} = Y_{эк}^{-1} = (Y_{11} + Y_{ш})^{-1} = R_s$.

Во втором случае (рис. 8.11, б) расстояние между шлейфами l_0 выбирают равным $\lambda/8$ или $3\lambda/8$, длина первого шлейфа l_1 подбирается так, чтобы в точках 1 — 1' выполнялось условие (8.66), а длина второго шлейфа l_2 — так, чтобы компенсировать мнимую составляющую Y_{11} .

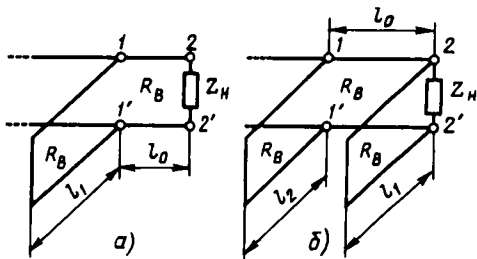


Рис. 8.11. Согласование линии с нагрузкой с помощью одного (а) или двух (б) реактивных шлейфов

§ 8.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Различают два типа задач, связанных с исследованием переходных процессов в одномерных цепях с распределенными параметрами:

- 1) определение токов и напряжений на зажимах линии или в более общем случае токов и напряжений внешних по отношению к линии ветвей при произвольном внешнем воздействии;
- 2) нахождение напряжений и токов в различных сечениях линии при произвольном внешнем воздействии.

Эти задачи обычно решают операторным методом. При

решении задач первого типа операторные изображения искомых токов и напряжений находят с помощью изученных ранее методов анализа сложных цепей, причем линию рассматривают как четырех-полусник, первичные параметры которого считаются известными. При решении задач второго типа операторные изображения токов и напряжений в различных сечениях линии определяют из выражений (8.7), (8.8), причем входящие в эти выражения постоянные интегрирования должны быть найдены исходя из значений токов и напряжений на внешних зажимах линии. *В отличие от цепей с сосредоточенными параметрами операторные изображения токов и напряжений в цепях с распределенными параметрами, как правило, выражаются в терминах трансцендентных функций и обладают бесконечно большим числом полюсов, что в ряде случаев усложняет переход от изображений токов и напряжений к оригиналам.*

НАПРЯЖЕНИЕ НА ВЫХОДЕ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ СОГЛАСОВАННОЙ НАГРУЗКЕ ПОНЯТИЕ О ЛИНИЯХ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

Пусть при $t < 0$ напряжение на входе однородной линии без потерь $u_1 = 0$, при $t \geq 0$ оно изменяется по произвольному закону $u_1(t)$:

$$u_1 = 1(t) u_1(t). \quad (8.67)$$

Найдем напряжение на выходе линии u_2 для случая, когда сопротивление нагрузки линии равно волновому сопротивлению R_1 .

Операторные изображения напряжений на входе $U_1(p)$ и выходе $U_2(p)$ линии связаны соотношением

$$U_2(p) = K_{21}(p) U_1(p),$$

где $K_{21}(p)$ — операторный коэффициент передачи линии по напряжению при согласованной нагрузке. Рассматривая линию как симметричный пассивный проходной четырехполусник, коэффициент передачи по напряжению и первичные параметры которого определяются выражениями (7.86), (8.52), получаем

$$U_2(p) = \frac{1}{\sqrt{A_{11}(p)A_{22}(p)} + \sqrt{A_{12}(p)A_{21}(p)}} U_1(p) = e^{-\gamma(p)l} U_1(p).$$

Для линии без потерь $\gamma(p) = p \sqrt{L_1 C_1}$, поэтому $U_2(p) = e^{-p \sqrt{L_1 C_1} l} U_1(p)$.

Согласно теореме запаздывания (6.54), умножению изображения произвольной функции времени на $e^{-p t_0}$ соответствует смещение функции времени на t_0 . Следовательно,

$$u_2 = u_1(t - l \sqrt{L_1 C_1}) = u_1(t - t_0).$$

Время запаздывания равно времени распространения падающей волны вдоль линии:

$$t_0 = l \sqrt{L_1 C_1} = l/v_\phi. \quad (8.68)$$

Таким образом, напряжение u_2 на выходе линии без потерь при согласованной нагрузке представляет собой смещенное во времени на t_0 напряжение u_1 на входе линии. Ток i_2 на выходе линии повторяет по форме выходное напряжение u_2 и равен смещенному во времени на t_0 току на входе линии: $i_2 = u_2/R_s = [u_1(t - t_0)]/R_s = i_1(t - t_0)$.

Следовательно, линия без потерь, работающая на согласованную нагрузку, осуществляет неискажающую передачу колебаний с входа линии на выход с задержкой на время, требуемое для распространения падающей волны вдоль линии.

Это свойство линии без потерь обусловлено тем, что фазовая скорость, волновое сопротивление и коэффициент ослабления линии не зависят от частоты. Если сложное воздействие на входе такой линии представить в виде суммы гармонических колебаний различных частот, то условия распространения колебаний всех частот будут одинаковы. Поэтому суммы гармонических колебаний на входе и выходе линии также одинаковы.

Можно убедиться, что условия неискажающей передачи выполняются и в линии с потерями, погонные параметры которой удовлетворяют условию

$$R_1/L_1 = G_1/C_1. \quad (8.69)$$

Комплексное волновое сопротивление и коэффициент распространения такой линии

$$\begin{aligned} Z_s &= \sqrt{\frac{L_1(R_1/L_1 + j\omega)}{C_1(G_1/C_1 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}; \\ \gamma &= \sqrt{L_1 C_1 (R_1/L_1 + j\omega)(G_1/C_1 + j\omega)} = \\ &= \sqrt{L_1 C_1 (R_1/L_1 + j\omega)} = \sqrt{L_1 C_1} (G_1/C_1 + j\omega), \end{aligned}$$

причем волновое сопротивление линии, фазовая скорость и коэффициент ослабления не зависят от частоты: $Z_s = \sqrt{L_1/C_1} = R_s$,

$$v_\phi = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_1 C_1}; \quad \alpha = R_1/R_s = R_s/G_1.$$

Если к входу линии, параметры которой удовлетворяют условию (8.69), приложено произвольное напряжение $u_1 = u_1(t) \doteq U_1(p)$, то операторное напряжение на выходе линии при согласованной нагрузке

$$U_2(p) = e^{-\gamma l} U_1(p) = e^{-R_s l/R_s} U_1(p) e^{-p t_0},$$

где t_0 — время распространения падающей волны вдоль линии, определяемое выражением (8.68).

Переходя от операторного изображения напряжения $U_2(p)$ на выходе линии к оригиналу

$$u_2 = e^{-R_1 l / R_2} u_1(t - t_0),$$

устанавливаем, что напряжение на выходе линии с ослаблением в $e^{R_1 l / R_2}$ раз и задержкой на t_0 повторяет напряжение на ее входе.

Линии без потерь, а также линии, погонные параметры которых удовлетворяют условию (8.69), называются линиями без искажений. Рассмотренные свойства линий без искажения используются на практике для построения устройств задержки сигналов (линий задержки), назначение которых сдвигать сигнал во времени без искажения.

ПОДКЛЮЧЕНИЕ РАЗОМКНУТОГО НА КОНЦЕ ОТРЕЗКА ЛИНИИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть в момент времени $t=0$ к входу однородной длинной линии без потерь подключается источник постоянного напряжения E . Найдем напряжение на выходе линии, если сопротивление нагрузки линии бесконечно велико (линия разомкнута на выходе).

Принимая во внимание, что операторный коэффициент передачи линии по напряжению в режиме холостого хода на выходе $K_{21x}(p) = 1/A_{11}(p) = 1/\text{ch}[\gamma(p)l] = 1/\text{ch}[pl\sqrt{L_1 C_1}]$, а операторное изображение напряжения на входе $U_1(p) = E/p$, получаем

$$U_2(p) = K_{21x}(p) U_1(p) = E/[p \text{ch}(pt_0)],$$

$$\text{где } t_0 = l\sqrt{L_1 C_1}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа (см. приложение 1), определяем напряжение на выходе рассматриваемой линии (рис. 8.12)

$$u_2 = \begin{cases} 2E & \text{при } t \in [(4k-3)t_0; (4k-1)t_0]; \\ 0 & \text{при } t \notin [(4k-3)t_0; (4k-1)t_0], \end{cases}$$

Рис. 8.12. Напряжение на выходе разомкнутого отрезка длинной линии без потерь, подключаемой к источнику постоянного напряжения

где $k = 1, 2, 3, \dots$, которое представляет собой бесконечную последовательность прямоугольных импульсов длительностью $2t_0$, удвоенных по высоте по сравнению с напряжением источника энергии. (Физический смысл полученных результатов будет пояснен при рассмотрении распределения напряжения и тока в однородной линии без потерь.)

ПОДКЛЮЧЕНИЕ КОРОТКОЗАМКНУТОГО ОТРЕЗКА ЛИНИИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПЯЖЕНИЯ

Определим ток i_2 на выходе короткозамкнутого отрезка однородной линии без потерь, к входу которой в момент времени $t=0$ подключают источник постоянного напряжения E .

Операторное изображение тока на выходе отрезка линии может быть найдено из основных уравнений четырехполюсника с распределенными параметрами в форме A (8.51):

$$I_2(p) = \frac{U_1(p)}{Z_n(p) \operatorname{sh}[\gamma(p)l]} =$$

$$= \frac{E}{p R_n \operatorname{sh}(pl \sqrt{L_1 C_1})} = \frac{I_0}{p \operatorname{sh}(pt_0)},$$

где $I_0 = E/R_n$, $t_0 = l \sqrt{L_1 C_1}$.

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, переходим от изображения тока к оригиналу:

$$i_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in]0; t_0[; \\ 2kI_0 & \text{при } t \in](2k-1)t_0; (2k+1)t_0[. \end{cases}$$

где $k=1, 2, 3, \dots$

Ток i_2 можно рассматривать как результат наложения бесконечного большого числа конечных скачков тока высотой $2I_0$, сдвинутых во времени на $2t_0$ (рис. 8.13).

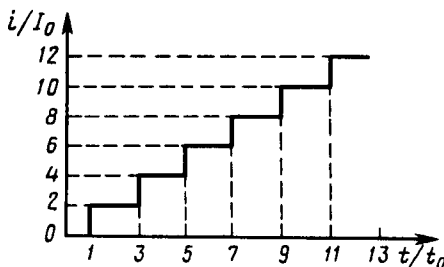


Рис. 8.13. Ток на выходе короткозамкнутого отрезка длинной линии без потерь, подключаемой к источнику постоянного напряжения

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПЯЖЕНИЯ И ТОКА В ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Пусть напряжение u_1 на входе однородной длинной линии без потерь изменится во времени по произвольному закону (8.67). Найдем распределение напряжения и тока в линии, если сопротивление нагрузки линии равно волновому. Для определения операторных изображений напряжений и токов в произвольном сечении линии воспользуемся выражениями (8.7) и (8.8). Очевидно, что первое и второе слагаемые, входящие в каждое из этих выражений, представляют собой операторные изображения падающей и отраженной волн напряжения или тока. Постоянные интегрирования $A_1(p)$ и $A_2(p)$ в рассматриваемом режиме могут быть найдены из условий

$$U(0, p) = U_1(p); \quad U(l, p) = R_n I(l, p). \quad (8.70)$$

Операторные изображения напряжения в начале линии, напряжения и тока в конце линии определяем из выражений (8.7), (8.8) при $x=0$ и $x=l$:

$$\begin{aligned} U(0, p) &= A_1(p) + A_2(p); \\ U(l, p) &= A_1(p) e^{-\gamma(p)l} + A_2(p) e^{\gamma(p)l}; \\ I(l, p) &= \frac{A_1(p)}{R_0} e^{-\gamma(p)l} - \frac{A_2(p)}{R_0} e^{\gamma(p)l}. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Подставляя (8.71) в (8.70), получаем $A_1(p) = U_1(p)$; $A_2(p) = 0$, откуда

$$\begin{aligned} U(x, p) &= U_1(p) e^{-\gamma(p)x} = U_1(p) e^{-p \sqrt{L_1 C_1} x}; \\ I(x, p) &= \frac{U_1(p)}{R_0} e^{-\gamma(p)x} = I_1(p) e^{-p \sqrt{L_1 C_1} x}, \end{aligned} \quad (8.72)$$

где $I_1(p) = I(0, p) = U_1(p)/R_0$ — операторное изображение тока на входе линии.

Применяя к выражениям (8.72) теорему запаздывания, можно установить, что напряжение и ток в произвольном сечении линии $u(x, t) \doteq U(x, p)$; $i(x, t) \doteq I(x, p)$ повторяют напряжение и ток в начале линии $u_1 \doteq U_1(p)$, $i_1 \doteq I_1(p)$ с задержкой на время $t_x = x \sqrt{L_1 C_1} = x/v_\phi$, требуемое для распространения падающей волны от начала линии до рассматриваемого сечения x . Если на вход линии подается, например, скачок напряжения $u_1 = E \cdot 1(t)$, то он распространяется по линии со скоростью v_ϕ и через промежуток времени $t_0 = t_{x=0}$ достигает конца линии, после чего напряжение во всех сечениях линии становится равным E (рис. 8.14).

Если сопротивление нагрузки линии не равно волновому, то падающая волна, достигнув конца линии, полностью или частично отразится от него и начнет распространяться в направлении убывания x . Если линия не согласована с внутренним сопротивлением источника ($Z_i \neq Z_0$), то при $x=0$ волна повторно отразится, и новая волна начнет распространяться

в направлении возрастания x . Таким образом, если линия не согласована с нагрузкой и источником энергии, то распределение напряжения и тока в линии (в частности, на выходе линии) будет определяться как результат наложения волн, распространяющихся в линии после многократных отражений.

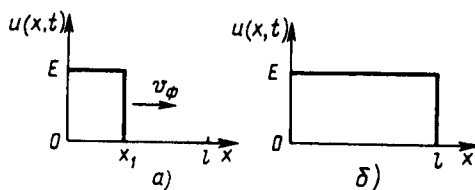


Рис. 8.14. Распространение скачка напряжения вдоль линии без потерь при согласованной нагрузке:
а — $t = t_{x1} + \epsilon$; б — $t > t_0$

Рассмотрим распределение напряжения и тока в разомкнутом на конце отрезке однородной линии без потерь, к входу которого в момент времени $t=0$ подключают источник постоянного напряжения E . Постоянные интегрирования $A_1(p)$ и $A_2(p)$ в этом случае определяются из условий

$$U(0, p) = U_1(p) = E/p; I(l, p) = 0. \quad (8.73)$$

Полагая в выражении (8.7) $x=0$, а в выражении (8.8) $x=l$ и подставляя полученные значения в (8.73), получаем

$$A_1(p) + A_2(p) = E/p; \frac{A_1(p)}{R_s} e^{-\gamma(p)l} - \frac{A_2(p)}{R_s} e^{\gamma(p)l} = 0,$$

откуда

$$A_1(p) = \frac{1}{1 + e^{-2\gamma(p)l}} \frac{E}{p}; \quad A_2(p) = \frac{e^{-2\gamma(p)l}}{1 + e^{-2\gamma(p)l}} \frac{E}{p}.$$

Подставляя значения постоянных интегрирования в (8.7), (8.8), находим операторные изображения напряжения и тока в произвольном сечении линии x :

$$U(x, p) = \frac{e^{-\gamma(p)x} + e^{-(2l-x)\gamma(p)}}{1 + e^{-2\gamma(p)l}} \frac{E}{p} = \frac{e^{-p t_x} + e^{-p(2t_0 - t_x)}}{1 + e^{-2p t_0}} \frac{E}{p}; \quad (8.74)$$

$$I(x, p) = \frac{e^{-\gamma(p)x} - e^{-(2l-x)\gamma(p)}}{1 + e^{-2\gamma(p)l}} \frac{E}{p R_s} = \frac{e^{-p t_x} - e^{-p(2t_0 - t_x)}}{1 + e^{-2p t_0}} \frac{I_0}{p}, \quad (8.75)$$

где $I_0 = E/R_s$, $t_0 = l \sqrt{L_1 C_1}$; $t_x = x \sqrt{L_1 C_1}$.

Если $1/(1 + e^{-2p t_0})$ представить как сумму бесконечной геометрической прогрессии [6]

$$1/(1 + e^{-2p t_0}) = 1 - e^{-2p t_0} + e^{-4p t_0} - e^{-6p t_0} + e^{-8p t_0} - \dots,$$

то выражения (8.74), (8.75) можно переписать в виде, более удобном для выполнения обратного преобразования Лапласа:

$$U(x, p) = \frac{E}{p} [e^{-p t_x} + e^{-p(2t_0 - t_x)} - e^{-p(2t_0 + t_x)} - e^{-p(4t_0 - t_x)} + e^{-p(4t_0 + t_x)} + e^{-p(6t_0 - t_x)} - \dots];$$

$$I(x, p) = \frac{I_0}{p} [e^{-pt_x} - e^{-p(2t_0-t_x)} - e^{-p(2t_0+t_x)} + e^{-p(4t_0-t_x)} + e^{-p(4t_0+t_x)} - e^{-p(6t_0-t_x)} - \dots].$$

Переходя от операторных изображений искомого напряжения и тока к оригиналам, окончательно получаем

$$u(x, t) = E [1(t-t_x) + 1(t-2t_0+t_x) - 1(t-2t_0-t_x) - 1(t-4t_0+t_x) + 1(t-4t_0-t_x) + 1(t-6t_0+t_x) - \dots]; \quad (8.76)$$

$$i(x, t) = I_0 [1(t-t_x) - 1(t-2t_0+t_x) - 1(t-2t_0-t_x) + 1(t-4t_0+t_x) + 1(t-4t_0-t_x) - 1(t-6t_0+t_x) - \dots]. \quad (8.77)$$

Как следует из выражений (8.76) и (8.77), напряжение и ток в произвольной точке линии x представляют собой сумму скачков, каждый из которых появляется в момент прихода в данную точку падающей или отраженной волны. Первый скачок возникает в момент прихода падающей волны, второй — в момент прихода волн,

отраженной от нагрузки, третий скачок соответствует волне, отраженной от источника, четвертый — волне, повторно отраженной от нагрузки, и т. д. При $0 < t < t_x$ напряжение и ток в точке x равны нулю. При $t = t_x$ в нее приходит падающая волна, в результате чего напряжение и ток скачком увеличиваются до уровней E и I_0 (рис. 8.15, а). В момент времени $t = t_0$ падающая волна достигнет конца линии и отражается от него, при этом напряжение и ток волны не изменяют знака (при $Z_n = \infty$ коэффициент отражения в конце линии равен $+1$). При $t_0 < t < 2t_0$ (рис. 8.15, б) отраженная волна распространяется в направлении уменьшения x , при этом напряжения падающей и отраженной волн суммируются, а их токи вычитаются (напряжение линии становится равным $2E$, а ток — 0). В момент времени $t = 2t_0$ волна, распро-

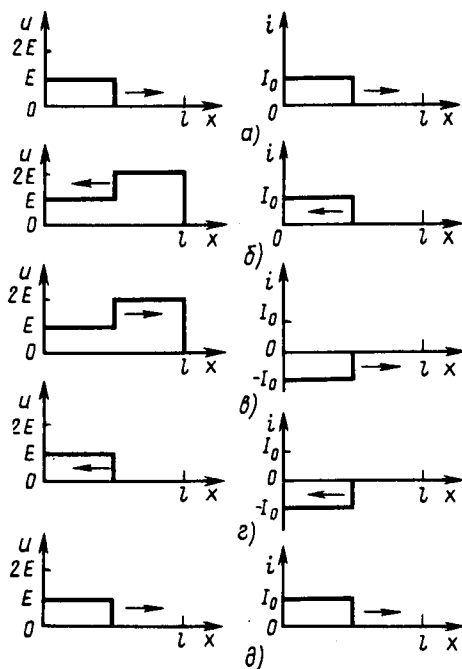


Рис. 8.15. Распределение напряжения и тока в отрезке линии, подключаемой к источнику постоянного напряжения (режим холостого хода на выходе)

страняющаяся от нагрузки, достигает источника и отражается от него, при этом напряжение и ток волны изменяют знак (внутреннее сопротивление источника равно нулю). При $2t_0 < t < 3t_0$ волна, отразившаяся от источника, распространяется в направлении возрастания x , напряжение линии становится равным E , а ток — равным $-I_0$ (рис. 8.15, в). В момент времени $t = 3t_0$, происходит повторное отражение волны от нагрузки. При $3t_0 < t < 4t_0$ волна, повторно отраженная от нагрузки, распространяется в направлении уменьшения x (рис. 8.15, г), а напряжение и ток линии становятся равными нулю. В момент времени $t = 4t_0$ волна повторно отражается от источника, и процессы в линии повторяются (рис. 8.15, д). Итак, ток в конце линии все время равен нулю, а напряжение имеет форму импульса амплитудой $2E$ и длительностью $2t_0$, что полностью соответствует полученным ранее результатам (см. рис. 8.12).

Используя аналогичную методику, можно рассмотреть и переходные процессы в короткозамкнутой на конце линии, подключаемой к источнику постоянного напряжения. В этом режиме коэффициенты отражения линии от источника энергии и нагрузки равны -1 , следовательно, при каждом отражении напряжение и ток волны изменяют знаки. При $0 < t < t_0$ в линии распространяется падающая волна, напряжение и ток линии скачком возрастают до уровней E и I_0 (рис. 8.16, а). Если $t_0 < t < 2t_0$, то в линии распространяется волна, отразившаяся от нагрузки (рис. 8.16, б), при этом напряжения падающей и отраженной волн вычитаются (напряжение линии становится равным нулю), а их токи суммируются (ток линии становится равным $2I_0$). При $2t_0 < t < 3t_0$ в линии распространяется волна, отразившаяся от источника, напряжение линии становится равным E , а ток — равным $3I_0$ (рис. 8.16, в). Таким образом, за каждый проход волны вдоль линии напряжение во всех сечениях линии, за исключением $x=0$ и $x=l$, изменяется либо от 0 до E , либо от E до 0, а ток возрастает на I_0 . В конце линии напряжение все время равно нулю, а ток нарастает скачками, равными $2I_0$ (см. рис. 8.13).

В связи с тем что в линиях без потерь, работающих в режиме холостого хода или короткого замыкания на выходе, отсутствует потребление энергии, переходные процессы в таких линиях имеют характер незатухающих колебаний.

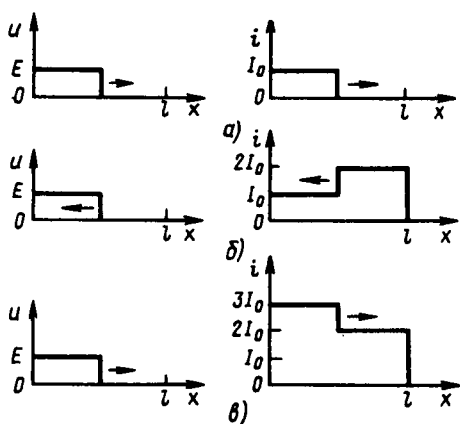


Рис. 8.16. Распределение напряжения и тока в отрезке линии, подключаемой к источнику постоянного напряжения (режим короткого замыкания на выходе)

Наличие потерь ведет к затуханию переходных процессов, поэтому при подключении линии с потерями к источнику постоянного напряжения токи и напряжения в различных сечениях линии постепенно приближаются к тем значениям, которые должны быть в этих сечениях в установившемся режиме постоянного тока. Своеобразный характер зависимостей от времени напряжений и токов на выходе линий без потерь позволяет использовать на практике отрезки реальных линий с малыми потерями в качестве формирователей импульсов различного вида.

§ 8.5. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТИПОВ

РЕЗИСТИВНЫЕ ЛИНИИ

Резистивными или RG -линиями называются одномерные цепи с распределенными параметрами, в которых отсутствуют процессы запасания энергии в электрическом или магнитном поле.

Волновое сопротивление такой линии, как и волновое сопротивление линии без потерь, имеет чисто резистивный характер: $Z_s = \sqrt{R_1/G_1}$, поэтому ток и напряжение падающей волны, так же как и ток и напряжение отраженной волны, в линиях этих типов совпадают по фазе. В отличие от линии без потерь коэффициент распространения резистивной линии является вещественным: $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{R_1 G_1}$.

В связи с тем что коэффициент фазы β резистивной линии равен нулю, сдвига фаз между колебаниями в различных сечениях линии нет. Строго говоря, в линиях такого типа отсутствуют и волновые процессы распространения колебаний, однако понятия «отраженной» и «падающей» волн используют и применительно к резистивным линиям в качестве удобной математической абстракции.

Первичные параметры резистивных линий могут быть получены из выражений (8.52) или (8.53), если положить в них $\gamma = \alpha = \sqrt{R_1 G_1}$, $Z_s = R_s = \sqrt{R_1/G_1}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha l); & R_s \text{sh}(\alpha l) \\ \text{sh}(\alpha l)/R_s; & \text{ch}(\alpha l) \end{bmatrix};$$

$$Y = \frac{1}{R_s \text{sh}(\alpha l)} \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha l); & -1 \\ -1; & \text{ch}(\alpha l) \end{bmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, первичные параметры RG -линии являются чисто вещественными и не зависят от частоты. Вследствие этого аргумент любой входной или передаточной характеристики

резистивной линии при чисто резистивной нагрузке ($Z_n = R_n$) тождественно равен нулю, а модуль не зависит от частоты.

Коэффициент передачи резистивной линии по напряжению при чисто резистивной нагрузке

$$K_{21}(j\omega) = K_{21} = R_n / (R_n A_{11} + A_{12}) = R_n / [R_n \operatorname{ch}(\alpha l) + R_n \operatorname{sh}(\alpha l)] \quad (8.78)$$

монотонно падает с ростом αl . Поскольку при $\alpha l \gg 1$ можно положить

$$\operatorname{ch}(\alpha l) \approx \operatorname{sh}(\alpha l) \approx e^{\alpha l} / 2, \quad (8.79)$$

коэффициент передачи линии по напряжению

$$K_{21} \approx 2R_n e^{-\alpha l} / (R_n + R_s). \quad (8.80)$$

При согласованной нагрузке ($R_n = R_s$) приближенное (8.80) и точное (8.78) соотношения приводят к одинаковому результату:

$$K_{21} = e^{-\alpha l}.$$

Входное сопротивление резистивной линии с чисто резистивной нагрузкой

$$Z_{11}(j\omega) = R_{11} = [R_n \operatorname{ch}(\alpha l) + R_s \operatorname{sh}(\alpha l)] R_n / [R_n \operatorname{sh}(\alpha l) + R_s \operatorname{ch}(\alpha l)]. \quad (8.81)$$

Так как на вещественной оси гиперболические синус и косинус монотонно возрастают, то зависимость R_{11} от длины линии L не имеет периодического характера.

При малых αl справедливы приближенные соотношения $\operatorname{ch}(\alpha l) \approx 1$; $\operatorname{sh}(\alpha l) \approx \alpha l = l \sqrt{R_1 G_1}$, и выражение (8.81) может быть заменено на $R_{11} = (R_n + l R_1) / (1 + R_n l G_1)$.

Подставляя (8.79) в выражение (8.81), устанавливаем, что при $\alpha l \gg 1$ входное сопротивление RG -линии равно волновому $R_{11} \approx R_s = \sqrt{R_1 / G_1}$ и не зависит от длины линии и сопротивления нагрузки.

Очевидно, что переходные процессы в резистивных линиях отсутствуют и новый установившийся режим в них наступает непосредственно после коммутации.

РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНЫЕ ЛИНИИ

Резистивные линии и линии без потерь — это предельные случаи одномерных цепей с распределенными параметрами, в одном из которых полностью пренебрегают явлениями запасания электрической энергии, а в другом — всеми видами потерь. Резистивно-емкостные линии занимают промежуточное положение, поскольку в них одновременно имеют место и процесс запасания энергии

в электрическом поле, и процесс необратимого ее преобразования в другие виды энергии.

В отличие от линий без потерь, коэффициент распространения которых является чисто мнимым, и резистивных линий, коэффициент распространения которых является вещественным, коэффициент распространения резистивно-емкостных линий — комплексное число

$$\gamma = \sqrt{j\omega R_1 C_1} = \sqrt{\omega R_1 C_1}/2 + j\sqrt{\omega R_1 C_1}/2,$$

причем коэффициент фазы β численно равен коэффициенту ослабления α :

$$\beta = \alpha = \sqrt{\omega R_1 C_1}/2.$$

Фазовая скорость в резистивно-емкостной линии зависит от частоты

$$v_\phi = \omega/\beta = \sqrt{2\omega/(R_1 C_1)},$$

поэтому колебания различных частот распространяются в ней с различными скоростями. Очевидно, что неискаженная передача колебаний в резистивно-емкостных линиях невозможна.

Волновое сопротивление однородной резистивно-емкостной линии является комплексным, причем его модуль уменьшается с ростом частоты, а аргумент равен -45° и не зависит от частоты:

$$Z_0 = \sqrt{R_1/(j\omega C_1)} = \sqrt{R_1/(2\omega C_1)} (1-j) = \sqrt{\frac{R_1}{\omega C_1}} e^{-j45^\circ}.$$

Первичные параметры однородной RC -линии могут быть найдены с помощью выражений (8.52), (8.53), если положить в них $Z_0 = \sqrt{R_1/(2\omega C_1)} (1-j)$, $\gamma = \alpha(1+j)$ и принять во внимание, что $\operatorname{ch} [\alpha l(1+j)] = \operatorname{ch}(\alpha l) \cos(\alpha l) + j \operatorname{sh}(\alpha l) \sin(\alpha l)$; $\operatorname{sh} [\alpha l(1+j)] = \operatorname{sh}(\alpha l) \cos(\alpha l) + j \operatorname{ch}(\alpha l) \sin(\alpha l)$.

Используя выражения для первичных параметров однородной RC -линии, можно определить любые операторные или комплексные частотные характеристики этих линий и найти их реакцию на произвольное внешнее воздействие.

В отличие от простейших RC -цепей (см. рис. 3.12, а, з), напряжение на выходе которых не может быть сдвинуто по фазе относительно входного напряжения на угол, больший, чем 90° , сдвиг фаз между напряжениями на входе и выходе RC -цепи с распределенными параметрами может достигать любого сколь угодно большого значения. Действительно, из выражения для коэффициента передачи по напряжению RC -цепи с распределенными параметрами при согласованной нагрузке

$$K_{21}(j\omega) = K_{21}(\omega) e^{N_{21}(\omega)} = e^{-\gamma l} = e^{-(\alpha + j\beta)l}$$

следует, что модуль коэффициента передачи $K_{21}(\omega) = e^{-\alpha l} = e^{-l\sqrt{\omega R_1 C_1/2}}$ монотонно уменьшается, а аргумент $\psi_{21}(\omega) = -\alpha l = -l\sqrt{\omega R_1 C_1/2}$ монотонно возрастает по абсолютному значению с ростом длины линии l или частоты ω . Это свойство резистивно-емкостных линий широко используют в микроэлектронике для построения различных безындуктивных фильтров и фазовращателей.

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНИИ

Неоднородными линиями называют одномерные цепи с распределенными параметрами, погонные параметры которых изменяются вдоль цепи по определенному закону. Коэффициент распространения, волновое сопротивление и фазовая скорость таких линий в общем случае являются функциями координаты, а отраженные волны возникают не только на концах линии, но и во всех ее сечениях. Уравнения, описывающие электрические процессы в неоднородной линии:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1(x)u + C_1(x) \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1(x)i + L_1(x) \frac{\partial i}{\partial t},$$

по внешнему виду совпадают с уравнениями (1.44), (1.45), описывающими процессы в однородной линии, однако входящие в эти уравнения коэффициенты являются функциями координаты. Распределение комплексных действующих значений напряжения и тока в неоднородной линии описывается уравнениями:

$$-\frac{dI(x)}{dx} = Y_1(x)\dot{U}(x); \quad (8.82)$$

$$-\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = Z_1(x)I(x), \quad (8.83)$$

которые путем дифференцирования и исключения переменных могут быть сведены к одному уравнению с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - \frac{1}{Z_1(x)} \frac{dZ_1(x)}{dx} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} - Z_1(x) Y_1(x) \dot{U}(x) = 0. \quad (8.84)$$

Общее решение такого уравнения при произвольном законе изменения погонных параметров вдоль линии неизвестно, поэтому для знакомства со свойствами неоднородных линий необходимо конкретизировать вид зависимости погонных параметров от координаты.

Рассмотрим простой и весьма важный для практики случай, когда погонные параметры неоднородной линии определяются соотношениями

$$G_1(x) = 0; R_1(x) = 0; L_1(x) = L_1(0) e^{-qx}; C_1(x) = C_1(0) e^{qx}, \quad (8.85)$$

где $L_1(0)$, $C_1(0)$ — значения погонных индуктивности и емкости в сечении линии $x=0$; q — постоянный коэффициент, который может быть больше или меньше нуля. Неоднородная линия такого типа называется экспоненциальной линией без потерь. Ее коэффициент распространения не зависит от координаты и является чисто мнимым:

$$\gamma = \sqrt{Z_1(x)Y_1(x)} = j\omega \sqrt{L_1(0)C_1(0)} = j\beta,$$

а волновое сопротивление чисто вещественно и изменяется вдоль линии по экспоненциальному закону

$$Z_\bullet = R_\bullet(x) = \sqrt{L_1(0)/C_1(0)} e^{-qx} = R_\bullet(0) e^{-qx},$$

где $R_\bullet(0) = R_\bullet(x)|_{x=0} = \sqrt{L_1(0)/C_1(0)}$ — значение волнового сопротивления при $x=0$.

Исследование процессов в экспоненциальной линии без потерь облегчается тем, что при выбранном законе зависимости погонных параметров от координаты (8.85) коэффициенты уравнения (8.84) постоянны:

$$\frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} + q \frac{d \dot{U}(x)}{dx} - \gamma^2 \dot{U}(x) = 0. \quad (8.86)$$

Решение уравнения (8.86) имеет вид

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{s_1 x} + A_2 e^{s_2 x},$$

где s_1 , s_2 — корни характеристического уравнения $s^2 + qs - \gamma^2 = 0$. Следовательно,

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-qx/2} e^{-x\sqrt{\gamma^2 + q^2/4}} + A_2 e^{-qx/2} e^{x\sqrt{\gamma^2 + q^2/4}}. \quad (8.87)$$

Подставляя выражение (8.87) в уравнение (8.83), находим комплексное действующее значение тока линии:

$$I(x) = \frac{q/2 + \sqrt{\gamma^2 + q^2/4}}{j\omega L_1(0)} A_1 e^{qx/2} e^{-x\sqrt{\gamma^2 + q^2/4}} + \frac{q/2 - \sqrt{\gamma^2 + q^2/4}}{j\omega L_1(0)} A_2 e^{qx/2} e^{x\sqrt{\gamma^2 + q^2/4}}.$$

Для упрощения анализа ограничимся рассмотрением случая, когда погонные параметры изменяются вдоль линии достаточно медленно — так, что на участке линии, длина которого равна длине волны λ , относительное изменение параметров незначительно. Тогда

$$|\gamma^2| \gg q^2/4; \quad (8.88)$$

$$\sqrt{\gamma^2 + q^2/4} \approx \gamma; \quad (8.89)$$

$$\frac{j\omega L_1(0)}{q/2 + \sqrt{\gamma^2 + q^2/4}} \approx \frac{j\omega L_1(0)}{-q/2 + \sqrt{\gamma^2 + q^2/4}} \approx \frac{j\omega L_1(0)}{\gamma} = \sqrt{\frac{L_1(0)}{C_1(0)}} = R_s(0). \quad (8.90)$$

Используя выражения (8.88) — (8.90), находим упрощенные соотношения для распределения комплексных действующих значений напряжения и тока вдоль рассматриваемой линии:

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-qx/2} e^{-\gamma x} + A_2 e^{-qx/2} e^{\gamma x}; \quad (8.91)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{A_1 e^{qx/2}}{R_s(0)} e^{-\gamma x} - \frac{A_2 e^{qx/2}}{R_s(0)} e^{\gamma x}. \quad (8.92)$$

Первые слагаемые в выражениях (8.91), (8.92) можно интерпретировать как комплексные действующие значения напряжения и тока падающей, а вторые — отраженной волн. Из этих выражений следует, что при $q > 0$ амплитуды напряжения падающей $U_{m \text{ пад}} = \sqrt{2} A_1 e^{-qx/2}$ и отраженной $U_{m \text{ отр}} = \sqrt{2} A_2 e^{-qx/2}$ волн уменьшаются, а амплитуды тока падающей $I_{m \text{ пад}} = \sqrt{2} A_1 e^{qx/2}/R_s(0)$ и отраженной $I_{m \text{ отр}} = \sqrt{2} A_2 e^{qx/2}/R_s(0)$ волн увеличиваются при удалении от начала линии; при $q < 0$ амплитуды напряжения обеих волн увеличиваются, а амплитуды тока уменьшаются с возрастанием x , причем полная мощность каждой из волн, определяемая произведением действующих значений напряжения и тока, остается неизменной.

Соотношения между напряжениями и токами падающей или отраженной волны напоминают соотношения между напряжениями и токами идеального трансформатора, поэтому явление изменения напряжения и тока этих волн в неоднородной линии без потерь получило название **трансформации падающей и отраженной волн**. Количественно изменение амплитуд напряжения и тока оценивается коэффициентом трансформации линии

$$n(x) = \frac{U_{m \text{ пад}}(x)}{U_{m \text{ пад}}(0)} = \frac{U_{m \text{ отр}}(x)}{U_{m \text{ отр}}(0)} = \frac{I_{m \text{ пад}}(0)}{I_{m \text{ пад}}(x)} = \frac{I_{m \text{ отр}}(0)}{I_{m \text{ отр}}(x)} = e^{-qx/2} = \sqrt{\frac{R_s(x)}{R_s(0)}}. \quad (8.93)$$

С учетом (8.93) выражения для комплексных действующих значений напряжения и тока экспоненциальной линии без потерь принимают вид

$$\dot{U}(x) = \sqrt{R_s(x)/R_s(0)} [A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}]; \quad (8.94)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{R_s(0)R_s(x)}} [A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}]. \quad (8.95)$$

Выражая входящие в (8.94), (8.95) постоянные интегрирования A_1 , A_2 через напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}'_2$ в конце линии

$$A_1 = \frac{\sqrt{R_s(0)/R_s(l)} \dot{U}_2 + \sqrt{R_s(0)R_s(l)} \dot{I}'_2}{2} e^{\gamma l};$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{R_s(0)/R_s(l)} \dot{U}_2 - \sqrt{R_s(0)R_s(l)} \dot{I}'_2}{2} e^{-\gamma l}$$

и полагая $x=0$, получаем основную систему уравнений исследуемой линии в форме A :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= [\sqrt{R_s(0)/R_s(l)} \operatorname{ch}(\gamma l)] \dot{U}_2 + [\sqrt{R_s(0)R_s(l)} \operatorname{sh} \gamma l] \dot{I}'_2; \\ \dot{I}_1 &= [\operatorname{sh}(\gamma l)/\sqrt{R_s(0)R_s(l)}] \dot{U}_2 + [\sqrt{R_s(l)/R_s(0)} \operatorname{ch}(\gamma l)] \dot{I}'_2. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Из уравнений (8.96) следует, что экспоненциальную линию без потерь можно рассматривать как взаимный несимметричный четырехполюсник, входное и выходное характеристические сопротивления которого равны соответственно волновому сопротивлению линии в сечении $x=0$ и волновому сопротивлению линии в сечении $x=l$:

$$Z_{c1} = R_s(0) = \sqrt{\frac{L_1(0)}{C_1(0)}}, \quad Z_{c2} = R_s(l) = \sqrt{\frac{L_1(0)}{C_1(0)}} e^{-\gamma l},$$

а характеристическая постоянная передачи — произведению коэффициента распространения на длину линии:

$$\Gamma = \gamma l = j\beta l = j\omega l \sqrt{L_1(0)C_1(0)}.$$

При согласованной нагрузке со стороны зажимов 2 — 2' комплексные коэффициенты передачи линии по напряжению и току в соответствии с (7.100) и (7.101)

$$K_{21}(j\omega) = \sqrt{\frac{R_s(l)}{R_s(0)}} e^{-\beta l} = n(l) e^{-j\beta l};$$

$$G_{21}(j\omega) = \sqrt{\frac{R_s(0)}{R_s(l)}} e^{-j\beta l} = \frac{1}{n(l)} e^{-j\beta l},$$

где $n(l) = n(x)|_{x=l} = e^{-\gamma l/2} = \sqrt{R_s(l)/R_s(0)}$.

Таким образом, действующее значение напряжения на выходе экспоненциальной линии без потерь при согласованной нагрузке равно действующему значению напряжения на входе линии, умноженному на $n(l)$, а действующее значение тока на выходе линии — действующему значению тока на входе, деленному на $n(l)$. При воздействии на вход линии произвольного напряжения $u_1(t) \doteq U_1(p)$ операторное изображение напряжения на выходе линии

$$U_2(p) = K_{21}(p)U_1(p) = n(l) e^{-p \sqrt{L_1(0)C_1(0)}l} U_1(p).$$

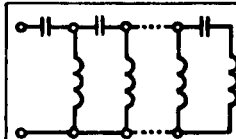
Переходя от изображения к оригиналу, устанавливаем, что напряжение на выходе линии $u_2(t) = n(l)u_1(t - t_0)$ представляет собой входное напряжение, смещенное во времени на время задержки сигнала в линии:

$$t_0 = l \sqrt{L_1(0)C_1(0)} = l/v_\phi,$$

и умноженное на коэффициент трансформации в конце линии $n(l)$.

Таким образом, экспоненциальная линия без потерь может производить задержку и трансформирование сигналов без их искажения.

Следует отметить, что подобными свойствами обладают также и некоторые другие типы неоднородных линий, что обусловило широкое применение на практике отрезков таких линий для задержки и трансформирования сигналов. Отрезки неоднородных линий используют также для согласования источника энергии с нагрузкой и в качестве фильтров и колебательных систем сверхвысоких частот.



Синтез электрических цепей

§ 9.1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ПОНЯТИЕ О ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ

Задача синтеза электрической цепи заключается в построении цепи, обладающей заданной реакцией $s(t)$ на некоторое внешнее воздействие $x(t)$. В связи с тем что реакция линейной цепи на произвольное внешнее воздействие однозначно определяется ее временными или частотными характеристиками, задача синтеза такой цепи обычно сводится к нахождению цепи, обладающей заданными характеристиками. Синтез цепи по ее частотным характеристикам называется **синтезом в частотной области**, а синтез цепи по ее временным характеристикам — **синтезом во временной области**. Методы синтеза цепей в частотной области к настоящему времени более разработаны, поэтому задачу синтеза цепи во временной области, как правило, сводят к задаче синтеза в частотной области, при этом заданные временные характеристики с помощью выражений (6.110), (6.111) заменяются соответствующими обобщенными частотными характеристиками.

Как известно, каждая линейная электрическая цепь обладает вполне определенной реакцией на заданное внешнее воздействие. Следовательно, *задача анализа линейной электрической цепи всегда имеет единственное решение*. В то же время различные по топологии и типу элементов цепи могут обладать одинаковыми характеристиками, поэтому *решение задачи синтеза цепи, если оно существует, как правило, не является единственным*. Часто цепь с заданными характеристиками вообще не может быть реализована с помощью идеализированных элементов заранее заданных типов, образующих так называемый **элементный базис цепи**.

В таких случаях считается, что задача синтеза не имеет решения, а заданная характеристика (точнее, цепь с заданной характеристикой) не является физически реализуемой. В то же время, если цепь,

обладающая какой-либо характеристикой, может быть построена из идеализированных элементов, входящих в заданный элементный базис, то такая характеристика является физически реализуемой.

Одна и та же частотная или временная характеристика цепи может оказаться физически нереализуемой в одном элементном базисе и физически реализуемой в другом. В зависимости от заданного элементного базиса различают задачи синтеза *реактивных* (составленных только из индуктивностей и емкостей), *безындуктивных* (составленных только из сопротивления и емкостей), *пассивных общего вида и активных цепей*.

Цепь можно синтезировать как по входным, так и по передаточным характеристикам, заданным относительно различных пар внешних зажимов. Если синтез производится по входным характеристикам, заданным относительно какой-либо одной пары зажимов, то искомая цепь может быть представлена в виде двухполюсника. Если синтез производится по передаточным характеристикам, заданным относительно двух пар внешних выводов, то синтезируемая цепь представляется в виде проходного четырехполюсника. При большем числе пар выводов, относительно которых задаются характеристики цепи, цепь представляется в виде многополюсника.

Физически реализуемые характеристики цепи удовлетворяют определенным условиям, называемым критериями физической реализуемости. Формулировка этих критериев зависит от элементного базиса цепи и от того, является заданная характеристика входной или передаточной, частотной или временной. Разработка критериев физической реализуемости представляет собой одну из важнейших задач синтеза цепей.

ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ

Входные и передаточные характеристики искомой цепи могут быть заданы в аналитической форме. В этом случае основными этапами синтеза электрической цепи являются проверка физической реализуемости заданных характеристик и непосредственно реализация цепи, т. е. определение схемы замещения цепи и параметров входящих в нее элементов. Переход от схемы замещения к принципиальной электрической схеме, соответствующий переходу от идеализированной электрической цепи к реальной, составляет задачу технической реализации, которая выходит за рамки теории цепей.

На практике частотные и временные характеристики цепей обычно задаются в графической или табличной форме, в связи с чем возникает задача аппроксимации данных зависимостей с помощью приближенных аналитических выражений. В отличие от рассмотренной ранее задачи аппроксимации ВАХ нелинейных резистивных элементов (см. гл. 5) для аппроксимации частотных и временных характеристик могут применяться не любые функции, с требуемой точностью воспроизводящие заданную зависимость,

а только функции, удовлетворяющие критериям физической реализуемости. В дальнейшем будем считать, что аналитические выражения для соответствующих характеристик цепей являются заданными.

В связи с тем что решение задачи синтеза, как правило, не является единственным, процесс синтеза обычно совмещают с *процессом оптимизации цепей* по какому-либо критерию. Такими критериями могут быть минимальное общее число элементов реализуемой цепи; минимальное число элементов какого-либо определенного типа, например индуктивностей; минимальные значения параметров каких-либо элементов и др. Под задачей оптимизации электрической цепи часто понимают также задачу выбора или уточнения значений параметров элементов найденной цепи с учетом влияния паразитных элементов или каких-либо дестабилизирующих факторов (параметрическая оптимизация).

Особенностью современных методов синтеза электрических цепей является совмещение этапов аппроксимации, реализации и оптимизации, при этом для аппроксимации заданных характеристик используются функции, для которых известны оптимальные по каким-либо критериям схемы реализуемой цепи, а в процессе синтеза выбираются значения параметров элементов, обеспечивающие требуемую точность воспроизведения заданных характеристик.

Синтез электрических цепей — один из наиболее сложных практически важных и интенсивно развивающихся разделов теории цепей. Значительный вклад в создание современных методов синтеза цепей внесли ученые М. М. Айзинов, А. Д. Артым, А. Ф. Белецкий, П. А. Ионкин, Н. С. Кочанов, А. А. Ланне, П. Н. Матханов и др. В рамках курса «Основы теории цепей» ограничимся только общим знакомством с условиями физической реализуемости и методами реализации реактивных двухполосников и четырехполосников. Вопросы аппроксимации частотных характеристик и методы реализации четырехполосников, в первую очередь АС-фильтров, рассматриваются в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» [2, 3]. Для дальнейшего знакомства с этой важной темой можно рекомендовать учебники [18 — 20] и монографии [14 — 16].

§ 9.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И КРИТЕРИИ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ВХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

ПОНЯТИЕ О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

Ранее (см. гл. 6) было установлено, что любые операторные характеристики линейных электрических цепей, не содержащих независимых источников энергии, в том числе операторные входные характеристики линейных пассивных цепей, могут быть представ-

лены в виде отношения двух полиномов с вещественными коэффициентами. Возникает вопрос, всякая ли рациональная функция $H(p)$ с вещественными коэффициентами физически реализуема в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи, или, другими словами, всякой ли функции $H(p)$, представляющей собой отношение двух полиномов с вещественными коэффициентами

$$H(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

можно поставить в соответствие линейный пассивный двухполосник, составленный из элементов с положительными вещественными параметрами, операторное входное сопротивление или операторная входная проводимость которого равны $H(p)$. Строгое рассмотрение этого вопроса показывает, что *необходимое и достаточное условие физической реализуемости рациональной функции $H(p)$ в качестве операторной входной функции линейной пассивной цепи заключается в том, чтобы $H(p)$ являлась положительной вещественной функцией комплексной частоты p .*

Положительной вещественной функцией комплексного переменного p называется функция $H(p)$, действительная часть которой неотрицательна при неотрицательных значениях действительной части p :

$$\operatorname{Re} [H(p)] \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} (p) \geq 0, \quad (9.1)$$

а мнимая часть равна нулю при мнимой части p , равной нулю:

$$\operatorname{Im} [H(p)] = 0 \text{ при } \operatorname{Im} (p) = 0. \quad (9.2)$$

Непосредственно по выражениям (9.1), (9.2) трудно определить, является ли заданная рациональная функция $H(p)$ положительной вещественной функцией комплексной частоты p , поэтому обычно проверяют выполнение следующих условий, которые полностью вытекают из этих выражений:

1) все коэффициенты a_i и b_i полиномов $N(p)$ и $M(p)$ должны быть вещественны и неотрицательны;

2) наибольшие и соответственно наименьшие степени полиномов $N(p)$ и $M(p)$ не могут отличаться более чем на единицу [любой пассивный двухполосник при $p \rightarrow 0$ и при $p \rightarrow \infty$ ведет себя либо как емкость $Z_C(p) = kp^{-1}$, либо как индуктивность $Z_L(p) = kp$, либо как сопротивление kp^0];

3) нули p_{0i} и полюсы $p_{\pi i}$ функции $H(p)$ не могут располагаться в правой полуплоскости: $\operatorname{Re} (p_{0i}) \leq 0$, $\operatorname{Re} (p_{\pi i}) \leq 0$ (в противном случае в цепи не выполняются условия затухания свободных процессов);

4) нули и полюсы функции $H(p)$, расположенные на мнимой оси,

должны быть только простыми (некратными), причем производные функции $H(p)$ в нулях и вычеты в полюсах должны быть вещественны и положительны. Если среди нулей или полюсов функции $H(p)$ имелся хотя бы один корень $p_k = j\omega_k$ с кратностью v , то этому корню соответствовала бы нарастающая во времени свободная составляющая решения $s_{\omega}^{(k)} = (A_1 + A_2 t + \dots + A_v t^{v-1}) \cos \omega_k t$;

5) вещественная часть функции $H(p)$ должна быть неотрицательна на мнимой оси: $\operatorname{Re} [H(p)] \geq 0$ при $\operatorname{Re}(p) = 0$ [при гармоническом воздействии ($p = j\omega$) вещественная часть комплексных входного сопротивления или входной проводимости линейной пассивной цепи не может быть отрицательной].

Перечисленные условия являются *необходимыми и достаточными* для того, чтобы заданная рациональная функция комплексного переменного $H(p)$ являлась положительной вещественной функцией p , и поэтому могут рассматриваться как критерии физической реализуемости этой функции в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи. Следует отметить, что не все приведенные условия являются независимыми, в частности условия 1 и 2 вытекают из условий 3 и 4. Такая избыточность является вполне оправданной, так как позволяет в ряде случаев определять физически нереализуемую функцию непосредственно по ее виду, без трудоемких операций, связанных с нахождением корней полиномов $N(p)$ и $M(p)$.

Пример 9.1. Определим, являются ли функции $H_1(p) = (3p - 2)/(3p^2 + p + 1)$, $H_2(p) = 1/(p^2 + p + 2)$ и $H_3(p) = 3p^2/(p^2 + p + 2)$ положительными вещественными функциями комплексного переменного.

Непосредственно по виду функции устанавливаем, что функция $H_1(p)$ не удовлетворяет условию 1 (коэффициент $a_0 < 0$), а функции $H_2(p)$ и $H_3(p)$ — условию 2 [разности наивысших степеней числителя и знаменателя функции $H_2(p)$ и наименьших степеней числителя и знаменателя функции $H_3(p)$ превышают единицу]. Следовательно, заданные функции не являются положительными вещественными функциями p .

Пример 9.2. Определим, является ли функция $H_4(p) = (p^2 + 4)/(p^3 + 9p)$ физически реализуемой в качестве операторной входной функции линейной пассивной цепи.

Непосредственно по виду функции $H_4(p)$ устанавливаем, что все коэффициенты полиномов $N(p) = p^2 + 4$ и $M(p) = p^3 + 9p$ вещественны и положительны, а наибольшие и наименьшие степени этих полиномов отличаются на единицу. Все нули $p_{01} = j2$, $p_{02} = -j2$ и полюсы $p_{x1} = 0$, $p_{x2} = j3$, $p_{x3} = -j3$ функции расположены на мнимой оси и являются простыми. Производные функции в нулях

$$\left. \frac{dH_4(p)}{dp} \right|_{p=\pm j2} = \frac{p^4 + 3p^2 + 36}{-p^2(p^2 + 9)^2} \Big|_{p=\pm j2} = 0,4$$

и вычеты функции в полюсах

$$\frac{\operatorname{Res} H_4(p)}{p=0} = \frac{p^2 + 4}{3p^2 + 9} \Big|_{p=0} = \frac{4}{9}; \quad \frac{\operatorname{Res} H_4(p)}{p=\pm j3} = \frac{p^2 + 4}{3p^2 + 9} \Big|_{p=\pm j3} = \frac{5}{18}$$

вещественны и положительны. Вещественная часть $H_4(p)$ на мнимой оси

$$\operatorname{Re} [H_+(p)]_{p=j\omega} = \operatorname{Re} \left[\frac{4 - \omega^2}{j\omega(9 - \omega^2)} \right] = 0.$$

Таким образом, функция $H_+(p)$ физически реализуема в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи.

Анализируя критерии физической реализуемости и рассматривая приведенные примеры, приходим к выводу, что если некоторая рациональная функция $H(p)$ относится к положительным вещественным функциям и, следовательно, является физически реализуемой в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи, то обратная ей функция $H^{-1}(p)$ также физически реализуема, причем нули функции $H(p)$ соответствуют полюсам функции $H^{-1}(p)$, и наоборот.

УСЛОВИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ И ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ВХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕАКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Цепи, составленные только из реактивных элементов (емкостей и индуктивностей), представляющие собой частный случай линейных пассивных электрических цепей, называются **реактивными цепями**, **LC-цепями** или **цепями без потерь**.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы заданная рациональная функция $H(p)$ могла быть реализована в качестве входной функции реактивной цепи, заключается в том, чтобы $H(p)$ представляла собой положительную вещественную функцию p и, кроме того, либо полином $N(p)$ должен быть четным, а полином $M(p)$ — нечетным, либо наоборот.

Функция, обладающая такими свойствами, называется **реактансной** или **реактивной**.

Пример 9.3. Определим, является ли функция $H_+(p) = (p^2 + 4)/(p^3 + 9p)$ физически реализуемой в качестве операторного входного сопротивления или операторной входной проводимости реактивного двухполюсника.

В примере 9.2 было показано, что такая функция является положительной вещественной функцией комплексного переменного p . В связи с тем что полином $N(p) = p^2 + 4$ четный, а полином $M(p) = p^3 + 9p$ — нечетный, функция $H_+(p)$ относится к реактансным и может быть реализована в качестве операторной входной характеристики реактивного двухполюсника.

Реактансная функция, обладая всеми свойствами положительных вещественных функций, имеет ряд дополнительных особенностей:

- 1) нули и полюсы ее расположены только на мнимой оси;
- 2) нули и полюсы чередуются, причем как в начале координат ($p=0$), так и на бесконечности ($p=\pm\infty$) обязательно находится либо нуль, либо полюс;
- 3) значения реактансной функции на мнимой оси являются чисто мнимыми и увеличиваются с ростом ω (в точках непрерывности).

Рассмотрим операторные входные характеристики некоторых реактивных двухполюсников.

Одноэлементные реактивные двухполюсники. Операторное входное сопротивление индуктивности $Z_L(p) = pL$ имеет нуль в начале координат. При $p \rightarrow \infty$ функция $Z_L(p)$ принимает бесконечно большое значение [функция $Z_L(p)$ имеет полюс на бесконечности]. Нули и полюсы $Z_L(p)$ лежат на мнимой оси (полюс или нуль, находящийся на бесконечности, считается расположенным на мнимой оси). Нули и полюсы чередуются, причем при $p = j\omega$ значение функции $Z_L(p)$ является чисто мнимым: $Z_L(j\omega) = j\omega L = jx_L(\omega)$, и растет с ростом ω : $dx(\omega)/d\omega = L > 0$ (рис. 9.1, а).

Операторная входная проводимость индуктивности $Y_L(p) = 1/(pL)$ имеет полюс при $p = 0$ и нуль при $p = \infty$, т. е. нули функции $Y_L(p)$ соответствуют полюсам функции $Z_L(p)$, и наоборот. Значения функции $Y_L(p)$ на мнимой оси являются мнимыми: $Y_L(j\omega) = 1/(j\omega L) = jb_L(\omega)$, и увеличиваются с ростом ω : $db_L(\omega)/d\omega = 1/(\omega^2 L) > 0$ (рис. 9.1, б).

Поскольку емкость и индуктивность являются дуальными элементами, операторные входные характеристики емкости обладают такими же особенностями, как и операторные входные характеристики индуктивности.

Двухэлементные реактивные двухполюсники. Операторное входное сопротивление последовательной LC-цепи

$$Z(p) = pL + 1/(pC) = L(p^2 + \omega_0^2)/p$$

имеет полюсы в начале координат и на бесконечности и нули, расположенные на мнимой оси: $p_{01} = j\omega_0$, $p_{02} = -j\omega_0$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (рис. 9.2, а) (полюсы и нули, находящиеся на бесконечности, на полюсно-нулевых диаграммах не изображают). Нулям операторного входного сопротивления последовательной LC-цепи соответствуют полюсы операторной входной проводимости этой цепи (рис. 9.2, б)

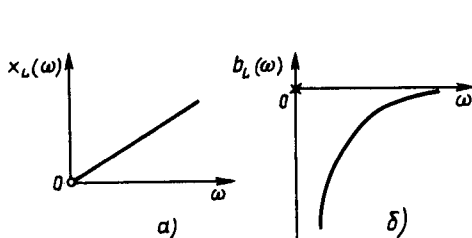


Рис. 9.1. Зависимости от частоты мнимых составляющих комплексного входного сопротивления (а) и комплексной входной проводимости (б) индуктивности

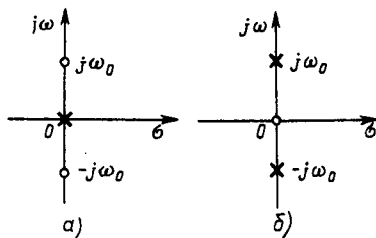


Рис. 9.2. Полюсно-нулевые диаграммы операторного входного сопротивления (а) и операторной входной проводимости (б) последовательной LC-цепи

$$Y(p) = \frac{1}{pL + 1/(pC)} = \frac{p}{L(p^2 + \omega_0^2)},$$

а полюсам операторного входного сопротивления $Z(p)$ — нули $Y(p)$. На мнимой оси значения функций $Z(p)$ и $Y(p)$ являются чисто мнимыми

$$Z(j\omega) = jL(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega = jx(\omega);$$

$$Y(j\omega) = -j\omega/[L(\omega^2 - \omega_0^2)] = jb(\omega)$$

и увеличиваются с ростом ω (рис. 9.3, а, б).

Параллельная LC -цепь является дуальной по отношению к последовательной LC -цепи, поэтому операторное входное сопротивление $Z(p) = p/[C(p^2 + \omega_0^2)]$ и операторная входная проводимость $Y(p) = C(p^2 + \omega_0^2)/p$ параллельной LC -цепи обладают такими свойствами, как и соответствующие им характеристики последовательной LC -цепи.

Многоэлементные реактивные двухполюсники. Анализируя операторные входные характеристики произвольных реактивных двухполюсников, нетрудно убедиться, что общее число нулей и полюсов соответствующих функций на положительной мнимой полуоси, включая и внешние (в начале координат и на бесконечности), равно $N+1$, где N — число независимо включенных реактивных элементов. В зависимости от расположения нулей и полюсов на положительной мнимой полуоси различают операторные характеристики реактивных двухполюсников:

- 1) типа 0 — 0 (нули при $\omega=0$ и $\omega=\infty$);
- 2) типа 0 — х (нуль при $\omega=0$ и полюс при $\omega=\infty$);
- 3) типа х — 0 (полюс при $\omega=0$ и нуль при $\omega=\infty$);
- 4) типа х — х (полюсы при $\omega=0$ и $\omega=\infty$).

Для того чтобы определить, к какому типу относятся операторные характеристики заданного произвольного реактивного двухполюсника, достаточно установить, имеются ли между его внешними выводами пути, проходящие только через индуктивности и только через емкости. Если между выводами двухполюсника можно найти путь, проходящий только через индуктивности (сопротивление двухполюсника постоянному току равно нулю), то операторное входное сопротивление имеет нуль в начале координат. Если между выводами двухполюсника отсутствует путь, проходящий только через индуктивности (сопротивление двухполюсника

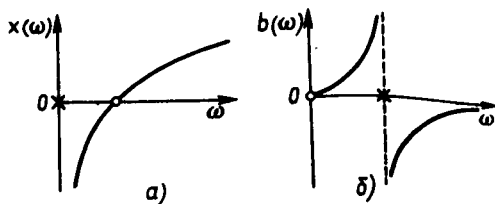


Рис. 9.3. Зависимости от частоты мнимых составляющих комплексного входного сопротивления (а) и комплексной входной проводимости (б) последовательной LC -цепи

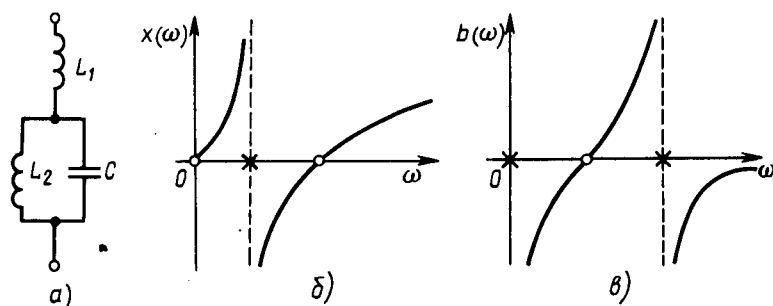


Рис. 9.4. К примеру 9.4

постоянному току бесконечно велико), то операторное входное сопротивление имеет полюс в начале координат. Соответственно если между выводами двухполюсника существует путь, проходящий только через емкости, то сопротивление имеет нуль на бесконечности, в противном случае сопротивление на бесконечности имеет полюс. Зная особенности операторных характеристик реактивных двухполюсников, можно качественно, по виду схемы, построить частотные характеристики произвольного реактивного двухполюсника.

Пример 9.4. Определим тип частотных характеристик и построим качественно зависимости от частоты мнимых составляющих комплексных входного сопротивления и входной проводимости реактивного двухполюсника, схема которого изображена на рис. 9.4, а.

Непосредственно по схеме находим, что между внешними выводами двухполюсника имеется путь, проходящий только через индуктивности, и отсутствует путь, проходящий только через емкости. Следовательно, частотная характеристика входного сопротивления относится к типу $0 \rightarrow x$, а частотная характеристика входной проводимости — к типу $x \rightarrow 0$. Общее число нулей и полюсов, включая внешние, на единицу больше числа реактивных элементов, оно равно четырем. Зависимости от частоты мнимых составляющих комплексных входного сопротивления и входной проводимости рассматриваемого двухполюсника приведены на рис. 9.4, б, в.

ОПЕРАТОРНЫЕ ВХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕЗЫНДУКТИВНЫХ И БЕЗЕМКОСТНЫХ ЦЕПЕЙ

В отличие от реактивных цепей, полюсы и нули операторных входных характеристик которых расположены только на мнимой оси плоскости комплексного переменного p , полюсы и нули операторных входных характеристик *безындуктивных*, или *RC-цепей*, и *беземкостных*, или *RL-цепей*, располагаются только на отрицательной вещественной полуоси. Нули и полюсы операторных входных характеристик чередуются и являются простыми (некратными).

Исходя из физических представлений, нетрудно прийти к выводу, что при частоте, равной нулю, сопротивление *RL-цепи* может быть или равно нулю, или иметь конечное действительное значение;

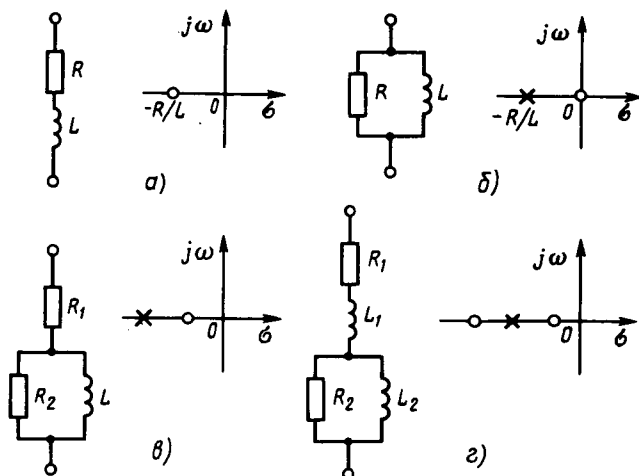


Рис. 9.5. Схемы и полюсно-нулевые диаграммы операторных входных сопротивлений простейших безземкостных цепей

на бесконечно большой частоте сопротивление RL -цепи либо бесконечно велико, либо имеет конечное действительное значение. Следовательно, операторное входное сопротивление безземкостной цепи не может иметь полюса в начале координат и нуля на бесконечности. Соответственно операторная входная проводимость этой цепи не может иметь нуля в начале координат и полюса на бесконечности. Если операторное входное сопротивление (операторная входная проводимость) безземкостной цепи на нулевой частоте имеет конечное действительное значение (между входными зажимами цепи отсутствует путь, проходящий только через индуктивности), то ближайшим к началу координат окажется нуль операторного входного сопротивления (полюс операторной входной проводимости). Примеры полюсно-нулевых диаграмм операторных входных сопротивлений простейших RL -цепей приведены на рис. 9.5, а — г.

Операторное входное сопротивление безындуктивной цепи на нулевой частоте может быть бесконечно большим или иметь конечное действительное значение, а на бесконечно большой частоте может быть равно нулю или иметь конечное действительное значение. Таким образом, операторное входное сопротивление RC -цепи не может иметь нуля в начале координат и полюса на бесконечности (операторная входная проводимость не может иметь полюса на нулевой частоте и нуля на бесконечности). Если сопротивление RC -цепи на нулевой частоте имеет конечное действительное значение (между внешними выводами цепи существует путь, проходящий только через сопротивления), то ближайшим к началу координат

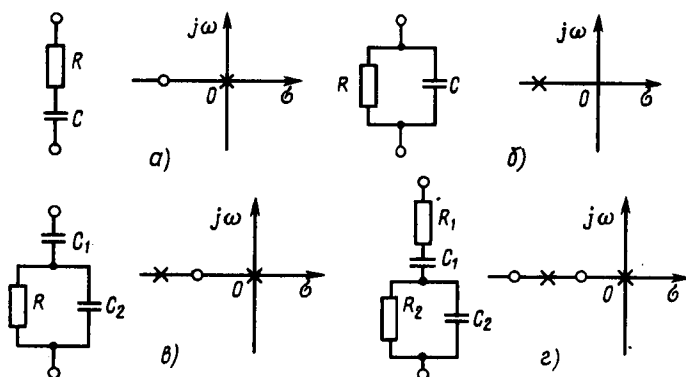


Рис. 9.6. Схемы и полюсно-нулевые диаграммы операторных входных сопротивлений простейших безындуктивных цепей

окажется полюс операторного входного сопротивления цепи (нуль операторной входной проводимости). Полюсно-нулевые диаграммы операторных входных сопротивлений простейших RC -цепей изображены на рис. 9.6, а — г.

§ 9.3. МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ (МЕТОД ФОСТЕРА)

Метод Фостера основан на представлении заданной физически реализуемой функции $H(p)$ в виде суммы простейших функций

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + \dots + H_i(p) + \dots + H_n(p),$$

каждую из которых можно рассматривать как операторную входную характеристику некоторого элементарного одно- или двухэлементного двухполюсника. Если функция $H(p)$ представляет собой операторное входное сопротивление, то искомая цепь может быть реализована в виде последовательного соединения элементарных двухполюсников, соответствующих каждой из простейших функций — $H_i(p)$. Если $H(p)$ представляет собой операторную входную проводимость, то искомая цепь реализуется в виде параллельного соединения элементарных двухполюсников, соответствующих каждой из простейших функций $H_i(p)$.

Метод Фостера применим для реализации положительных вещественных функций, нули и полюсы которых расположены только на мнимой оси и отрицательной вещественной полуоси. Этому ограничению удовлетворяют операторные входные функции реактивных,

безындуктивных и беземкостных двухполюсников, а также операторные входные функции некоторых RLC -цепей. Рассмотрим применение метода Фостера к синтезу реактивных двухполюсников.

Пусть реактансная функция $Z(p) = N(p)/M(p)$ должна быть реализована в качестве операторного входного сопротивления линейной пассивной цепи. Разложим функцию $Z(p)$ на простые дроби

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \alpha_0/p + \sum_{i=1}^N 2\alpha_i p/(p^2 + \omega_i^2). \quad (9.3)$$

Здесь N — число пар комплексно-сопряженных полюсов функции $Z(p)$; α_{∞} , α_0 , α_i — постоянные действительные положительные коэффициенты; причем $\alpha_{\infty} p$ является целой частью функции $Z(p)$:

$$\alpha_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p)/p;$$

$$\alpha_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Z(p) = \left[\frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right]_{p=0}$$

— вычет функции $Z(p)$ в полюсе $p=0$;

$$\alpha_i = \operatorname{Res}_{p=\pm j\omega_i} Z(p) = \left[\frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right]_{p=\pm j\omega_i}$$

— вычеты функции $Z(p)$ в полюсах $p_i = \pm j\omega_i$.

Очевидно, что первый член разложения (9.3) можно рассматривать как операторное входное сопротивление индуктивности

$$L_{\infty} = \alpha_{\infty}, \quad (9.4)$$

второй член — как операторное входное сопротивление емкости

$$C_0 = 1/\alpha_0, \quad (9.5)$$

а каждое из слагаемых вида $Z_i(p) = 2\alpha_i p/(p^2 + \omega_i^2)$ — как операторное входное сопротивление параллельной LC -цепи, составленной из элементов

$$C_i = 1/(2\alpha_i); \quad L_i = 2\alpha_i/\omega_i^2. \quad (9.6)$$

Таким образом, разложению (9.3) можно поставить в соответствие двухполюсник, представляющий собой последовательное соединение индуктивности L_{∞} , емкости C_0 и N параллельных LC -цепей. Схема двухполюсника, реализующего разложение (9.3), называется первой канонической схемой Фостера (рис. 9.7).

Анализируя различные виды реактансных функций — $Z(p) = N(p)/M(p)$, можно прийти к заключению, что первый член разложения (9.3) не равен нулю, если функция $Z(p)$ имеет полюс на бесконечности (у таких функций степень полинома,

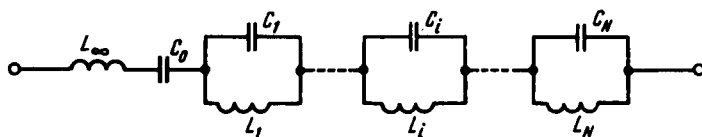


Рис. 9.7. Первая каноническая схема Фостера

стоящего в числителе, на единицу выше степени полинома, стоящего в знаменателе), а второй член разложения не равен нулю, если $Z(p)$ имеет полюс при $p=0$ (у таких функций множитель p в знаменателе может быть вынесен за скобки).

Следовательно, реактивный двухполосник, реализующий заданную функцию $Z(p)$ по первой канонической схеме Фостера, содержит индуктивность L_∞ только в том случае, когда степень полинома $N(p)$ превышает на единицу степень полинома $M(p)$, и емкость C_0 только в том случае, когда в многочлене $M(p)$ множитель p может быть вынесен за скобки.

Пример 9.5. Используя метод Фостера, построим двухполосник, операторное входное сопротивление которого $Z(p) = (p^2 + 4)/(p^3 + 9p)$ Ом.

В примерах 9.2, 9.3 было установлено, что данная функция является реактансной и, следовательно, может быть реализована с помощью метода Фостера. Непосредственно по виду функции устанавливаем, что искомый двухполосник представляет собой последовательное соединение емкости C_0 (в знаменателе функции p выносится за скобки) и параллельной LC -цепи (функция $Z(p)$ имеет одну пару комплексно-сопряженных полюсов). Разлагая $Z(p)$ на простые дроби

$$Z(p) = \frac{\alpha_0}{p} + 2\alpha_1 p / (p^2 + \omega_1^2),$$

где $\alpha_0 = 4/9$; $\alpha_1 = 5/18$; $\omega_1^2 = 9$, с учетом соотношений (9.5), (9.6) определяем параметры элементов искомой цепи (рис. 9.8): $C_0 = 2,25$ Ф; $C_1 = 1,8$ Ф; $L_1 = 5/81$ Гн.

Пример 9.6. Методом Фостера построим двухполосник, входное сопротивление которого $Z(p) = (p^3 + 9p)/(p^2 + 4)$ Ом.

Заданная функция является реактансной, поскольку реактансной является обратная ей функция, рассмотренная в предыдущем примере. Непосредственно по виду функции $Z(p)$ устанавливаем, что искомый двухполосник должен представлять собой последовательное соединение индуктивности L_∞ и параллельной LC -цепи (рис. 9.9). Разлагая функцию $Z(p)$ на простейшие составляющие $Z(p) = p + 5p/(p^2 + 4)$ и ис-

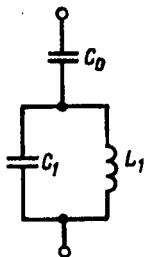


Рис. 9.8. К примеру 9.5

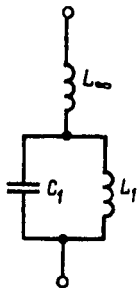


Рис. 9.9. К примеру 9.6

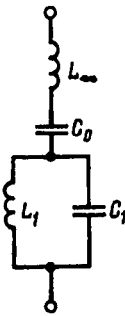


Рис. 9.10. К примеру 9.7

пользуя соотношения (9.4) и (9.6), определяем параметры входящих в двухполосник элементов: $L_\infty = 1$ Гн; $C_1 = 0,2$ Ф; $L_1 = 1,25$ Гн.

Пример 9.7. Методом Фостера построим двухполосник, входное сопротивление которого $Z(p) = (2p^4 + 5p^2 + 2)/(p^3 + p)$ Ом.

Очевидно, что искомым двухполосником может быть реализован путем последовательного соединения индуктивности L_∞ , емкости C_0 и параллельной LC-цепи (рис. 9.10). Разлагая функцию $Z(p)$ на простые дроби $Z(p) = 2p + 2/p + p/(p^2 + 1)$ и учитывая соотношения (9.4), (9.5), (9.6), определяем параметры элементов: $L_\infty = 2$ Гн; $C_0 = 0,5$ Ф; $C_1 = 1$ Ф; $L_1 = 1$ Гн.

Аналогичным образом синтезируют двухполосник и в том случае, когда заданная реактансная функция должна быть реализована в качестве операторной входной проводимости линейной пассивной цепи. Разложению функции $Y(p)$ на простые дроби

$$Y(p) = \alpha'_\infty p + \alpha'_0/p + \sum_{i=1}^N 2\alpha'_i p/(p^2 + \omega_i^2), \quad (9.7)$$

где N — число пар комплексно-сопряженных полюсов функции $Y(p)$; $\alpha'_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Y(p)/p$, $\alpha'_0 = \text{Res } Y(p)_{p=0}$, $\alpha'_i = \text{Res } Y(p)_{p=\pm j\omega_i}$ — постоянные

действительные положительные коэффициенты, можно поставить в соответствие двухполосник из параллельно соединенных емкости $C_\infty = \alpha'_\infty$, индуктивности $L_0 = 1/\alpha'_0$ и N последовательных LC-цепей (рис. 9.11) с параметрами $L_i = 1/(2\alpha'_i)$ и $C_i = 2\alpha'_i/\omega_i^2$. Схема двухполосника, соответствующего выражению (9.7), называется второй канонической схемой Фостера. Очевидно, что искомым двухполосником содержит емкость C_∞ , если функция $Y(p)$ имеет полюс на бесконечности [степень числителя функции $Y(p)$ на единицу выше степени знаменателя], и индуктивность L_0 , если функция $Y(p)$ имеет полюс при $p=0$ [в знаменателе функции $Y(p)$ множитель p выносится за скобки].

Пример 9.8. Используя метод выделения простейших составляющих, построим двухполосник, проводимость которого $Y(p) = (p^3 + p)/(2p^4 + 5p^2 + 2)$ См.

Непосредственно по виду функции $Y(p)$ устанавливаем, что искомым двухполосник может быть реализован путем параллельного соединения двух последовательных LC-цепей (рис. 9.12). Разлагая функцию $Y(p)$ на простые дроби $Y(p) = p/[3(p^2 + 2)] + p/[6(p^2 + 0,5)]$, определяем параметры элементов двухполосника: $L_1 = 3$ Гн; $C_1 = 1/6$ Ф; $L_2 = 6$ Гн; $C_2 = 1/3$ Ф.

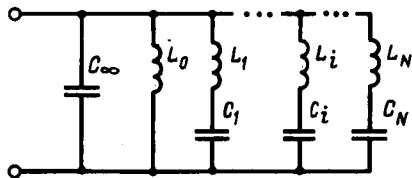


Рис. 9.11. Вторая каноническая схема Фостера

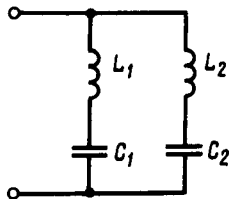


Рис. 9.12. К примеру 9.8

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ (МЕТОД КАУЭРА)

В соответствии с методом Кауэра реактивный двухполюсник, обладающий заданной операторной входной характеристикой $H(p)$, реализуется в виде лестничной цепи, построенной по первой или второй канонической схеме Кауэра.

Первая каноническая схема Кауэра (рис. 9.13, а) содержит индуктивности в продольных и емкости в поперечных ветвях, вторая каноническая схема Кауэра (рис. 9.13, б) — емкости в продольных ветвях, а индуктивности — в поперечных. Первая и последняя ячейки канонических схем Кауэра могут быть неполными — в них могут отсутствовать элементы, которым на рис. 9.13 присвоены номера 1 и N . Первая схема Кауэра содержит индуктивность L_1 только в том случае, когда операторное входное сопротивление цепи имеет полюс на бесконечности. Вторая схема содержит емкость C_1 , если операторное входное сопротивление цепи имеет полюс при $p=0$.

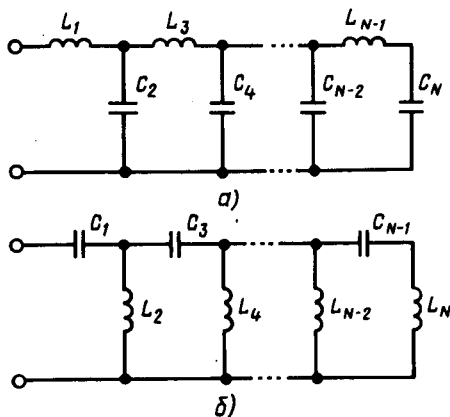


Рис. 9.13. Первая (а) и вторая (б) канонические схемы Кауэра

Как было показано в гл. 2, комплексное (в общем случае операторное) входное сопротивление или комплексная входная проводимость лестничной цепи могут быть представлены в виде цепных дробей (2.140), (2.141), элементы которых равны комплексным сопротивлениям двухполюсников, образующих про-

дольные ветви цепи, и комплексным проводимостям двухполюсников, образующих поперечные ветви. Если в первой канонической схеме Кауэра есть индуктивность L_1 , то операторное входное сопротивление может быть представлено в виде цепной дроби с элементами типа $p\alpha_i$:

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \dots + \frac{1}{pL_{N-1} + 1/(pC_N)}}} = [pL_1; pC_2; pL_3; \dots; pL_{N-1}; pC_N].$$

Если в первой канонической схеме Кауэра нет индуктивности L_1 (операторная входная проводимость имеет полюс на бесконечности) в виде цепной дроби с элементами типа $p\alpha_i$, может быть выражена операторная входная проводимость цепи

$$Y(p)=[pC_1, pL_2; pC_3; \dots; pL_{N-1}; pC_N].$$

Для цепей, построенных по второй канонической схеме Кауэра, выражения для операторного входного сопротивления

$$Z(p)=\left[\left(\frac{1}{pC_1}\right); \left(\frac{1}{pL_2}\right); \left(\frac{1}{pC_3}\right); \dots; \left(\frac{1}{pC_{N-1}}\right); \left(\frac{1}{pL_N}\right)\right]$$

или операторной входной проводимости

$$Y(p)=\left[\left(\frac{1}{pL_1}\right); \left(\frac{1}{pC_2}\right); \left(\frac{1}{pL_3}\right); \dots; \left(\frac{1}{pC_{N-1}}\right); \left(\frac{1}{pL_N}\right)\right]$$

представляются в виде цепных дробей с элементами типа $1/(p\beta_i)$. Следовательно, если заданная операторная входная функция $H(p)$ может быть записана в виде цепной дроби

$$H(p)=[H_1(p); H_2(p); H_3(p); \dots; H_{N-1}(p); H_N(p)] \quad (9.8)$$

с элементами типа $p\alpha_i$ или $1/(p\beta_i)$, где α_i, β_i — постоянные действительные положительные коэффициенты, то такой функции может быть поставлен в соответствие реактивный двухполюсник, построенный по первой или второй канонической схеме Кауэра.

Реализация реактивного двухполюсника по методу Кауэра сводится к разложению заданной реактансной функции $H(p)$ в цепную дробь с элементами типа $p\alpha_i$ или $1/(p\beta_i)$.

Функцию $H(p)=N(p)/M(p)$ разлагают в цепную дробь вида (9.8) путем последовательного выделения элементов дроби $H_i(p)$ в результате деления полинома $N(p)$ на полином $M(p)$, затем полинома $M(p)$ на остаток от первого деления $0_1(p)$, затем остатка от первого деления $0_1(p)$ на остаток от второго деления $0_2(p)$, и т. д. до тех пор, пока остаток от последнего деления не будет равен нулю:

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{N(p)}{M(p)} = H_1(p) + \frac{0_1(p)}{M(p)} = H_1(p) + \frac{1}{M(p)/0_1(p)} = \\ &= H_1(p) + \frac{1}{H_2(p) + \frac{1}{0_1(p)/0_2(p)}} = H_1(p) + \frac{1}{H_2(p) + \frac{1}{H_3(p) + \frac{1}{0_2(p)/0_3(p)}}} = \dots \end{aligned}$$

Для реализации первой канонической схемы Кауэра выбирают ту из входных функций (операторное сопротивление или операторную проводимость), которая имеет полюс на бесконечности, причем члены полиномов $N(p)$ и $M(p)$ располагают в порядке убывания степеней p .

Для реализации второй канонической схемы Кауэра используют ту из входных функций, которая имеет полюс при $p=0$, а полиномы $N(p)$ и $M(p)$ записывают в порядке возрастания степеней p . При выполнении деления необходимо следить, чтобы коэффициенты α_i , β_i были положительными. Если в процессе деления какой-либо из коэффициентов α_i окажется меньше нуля, то необходимо перейти от расположения полиномов по убывающим степеням p к расположению по возрастающим степеням p . Наоборот, если какой-либо из коэффициентов β_i окажется меньше нуля, то необходимо перейти от расположения полиномов по возрастающим степеням p к расположению по убывающим степеням.

Как и метод Фостера, рассматриваемый метод может быть использован при синтезе RC -, RL - и RLC -цепей, нули и полюсы операторных входных характеристик которых находятся на мнимой оси и отрицательной вещественной полуоси. Необходимо иметь в виду, что область применимости метода Кауэра несколько уже, чем метода Фостера, так как ряд операторных входных функций, реализуемых с помощью метода Фостера, не может быть представлен как операторное входное сопротивление или операторная входная проводимость какой-либо лестничной цепи.

Пример 9.9. Используя метод Кауэра, построим реактивные двухполюсники, операторное входное сопротивление которых $Z(p) = \frac{2p^4 + 5p^2 + 2}{p^3 + p}$ Ом.

Функция $Z(p)$ имеет полюсы на бесконечности и при $p=0$, поэтому она может быть использована как при реализации первой, так и второй канонической схем Кауэра. Располагая полиномы числителя и знаменателя функции $Z(p)$ в порядке убывания степеней p , и последовательно выделяя члены вида px_i

$$\begin{array}{r}
 \frac{2p^4 + 5p^2 + 2}{2p^4 + 2p^2} \Bigg| \frac{p^3 + p}{2p \rightarrow Z_1(p)} \\
 \hline
 \frac{p^3 + p}{p^3 + 2p/3} \Bigg| \frac{3p^2 + 2 \rightarrow 0_1(p)}{p/3 \rightarrow Y_2(p)} \\
 \hline
 \frac{3p^2 + 2}{3p^2} \Bigg| \frac{p/3 \rightarrow 0_2(p)}{9p \rightarrow Z_3(p)} \\
 \hline
 \frac{p/3}{p/3} \Bigg| \frac{2 \rightarrow 0_3(p)}{p/6 \rightarrow Y_4(p)} \\
 \hline
 0 \rightarrow 0_4(p),
 \end{array}$$

разлагаем функцию в цепную дробь $Z(p) = \left[2p; \frac{1}{3} p; 9p; \frac{1}{6} p \right]$ и определяем параметры элементов первой канонической схемы Кауэра (рис. 9.14, а): $L_1 = 2$ Гн; $C_2 = 1/3$ Ф; $L_3 = 9$ Гн; $C_4 = 1/6$ Ф.

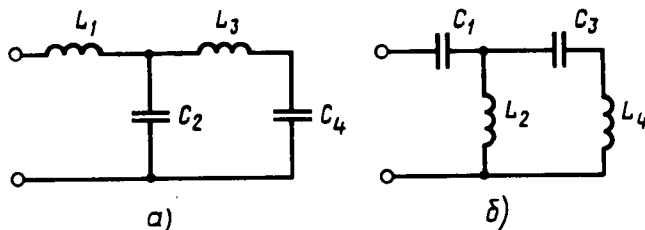


Рис. 9.14. К примеру 9.9

Располагая полиномы числителя и знаменателя функции $Z(p)$ в порядке возрастания степеней p и последовательно выделяя члены вида $1/p\beta_i$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2+5p^2+2p^4}{2+2p^2} \left| \frac{p+p^3}{2/p \rightarrow Z_1(p)} \right. \\
 & \frac{p+p^3}{p+2p^3/3} \left| \frac{3p^2+2p^4 \rightarrow 0_1(p)}{1/(3p) \rightarrow Y_2(p)} \right. \\
 & \frac{3p^2+2p^4}{3p^2} \left| \frac{p^3/3 \rightarrow 0_2(p)}{9/p \rightarrow Z_3(p)} \right. \\
 & \frac{p^3/3}{p^3/3} \left| \frac{2p^4 \rightarrow 0_3(p)}{1/(6p) \rightarrow Y_4(p)} \right. \\
 & 0 \rightarrow 0_4(p),
 \end{aligned}$$

разлагаем функцию $Z(p)$ в цепную дробь

$$Z(p) = \left[\left(\frac{2}{p} \right); \left(\frac{1}{3p} \right); \left(\frac{9}{p} \right); \left(\frac{1}{6p} \right) \right]$$

и определяем параметры элементов второй канонической схемы Каузера (рис. 9.14, б): $C_1 = 1/2$ Ф; $L_2 = 3$ Гн; $C_3 = 1/9$ Ф; $L_4 = 6$ Гн.

Анализируя примеры 9.7 — 9.9, убеждаемся, что решение задачи синтеза цепи по заданной операторной входной характеристике действительно не является единственным. Все четыре полученных в этих примерах двухполюсника (см. рис. 9.10, 9.12, 9.14) обладают одинаковыми операторными входными характеристиками, но построены по различным схемам из элементов с различными параметрами.

В то же время все четыре полученных двухполюсника содержат одинаковое число элементов. Это число является минимальным, с помощью которого можно реализовать заданную функцию в рассматриваемом элементном базисе.

§ 9.4. ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Синтез четырехполосников, как и двухполосников, можно производить во временной и частотной областях. Рассмотрим методы синтеза в частотной области (т. е. по заданным операторным входным и передаточным характеристикам), отметив, что, поскольку проходной четырехполосник может быть представлен различными входными и передаточными характеристиками, возможны разные варианты постановки задачи синтеза, например синтез четырехполосника по заданным выражениям для первичных или вторичных параметров, по передаточной характеристике в режиме холостого хода на выходе, по передаточной характеристике при согласованной чисто резистивной или произвольной нагрузке.

Критерии физической реализуемости четырехполосников формулируются различным образом в зависимости от постановки задачи синтеза и заданного или выбранного элементного базиса. В общем случае на вид операторных передаточных характеристик линейной пассивной цепи $H(p) = N(p)/M(p)$ накладывается меньше ограничений, чем на вид операторных входных характеристик. В частности, степени полиномов $N(p)$ и $M(p)$ могут отличаться больше, чем на единицу, вещественная часть передаточных функций на мнимой оси может быть отрицательной, а нули передаточных функций могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскостях (полюсы передаточных характеристик совпадают с нулями операторного входного сопротивления или операторной входной проводимости и не могут располагаться в правой полуплоскости).

МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ И НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Рассмотрим два четырехполосника A и B , операторные коэффициенты передачи которых по напряжению определяются выражениями

$$K_A(p) = (p + a)/(p + b); \quad (9.9)$$

$$K_B(p) = (p - a)/(p + b), \quad (9.10)$$

где a, b — действительные положительные числа. Функции $K_A(p)$ и $K_B(p)$ имеют одинаковые полюсы $p_{KA} = p_{KB} = -b$, расположенные в левой полуплоскости, и равные по модулю нули $|p_{0A}| = |p_{0B}| = a$, причем нуль функции $K_A(p)$ лежит в левой (рис. 9.15, а), а нуль функции $K_B(p)$ в правой (рис. 9.15, б) полуплоскости.

Заменяя в выражениях (9.9) и (9.10) комплексную частоту p на $j\omega$, определяем комплексные коэффициенты передачи рассматриваемых четырехполосников по напряжению

$$K_A(j\omega) = (a + j\omega)/(b + j\omega) = K_A(\omega) e^{j\psi_A(\omega)}; \quad (9.11)$$

$$K_B(j\omega) = (-a + j\omega)/(b + j\omega) = K_B(\omega) e^{j\psi_B(\omega)}. \quad (9.12)$$

Каждый из двучленов, стоящих в числителе и знаменателе этих выражений, можно изобразить на плоскости комплексного переменного p в виде вектора, проведенного из нуля или полюса функций $K_A(p)$, $K_B(p)$ в произвольную точку $j\omega$, лежащую на мнимой оси (рис. 9.15). Следовательно, модули комплексных коэффициентов передачи четырехполосников по напряжению равны отношению длин векторов, проведенных из нулей, к длинам векторов, проведенных из полюсов соответствующих функций:

$$K_A(\omega) = \sqrt{a^2 + \omega^2} / \sqrt{b^2 + \omega^2}; \quad (9.13)$$

$$K_B(\omega) = \sqrt{a^2 + \omega^2} / \sqrt{b^2 + \omega^2}, \quad (9.14)$$

а аргументы комплексных коэффициентов передачи четырехполосников — разности углов, образуемых с положительным направлением вещественной оси векторами, проведенными из нулей, и векторами, проведенными из полюсов функций $K_A(p)$ и $K_B(p)$:

$$\psi_A(\omega) = \alpha_A - \beta_A = \arctg(\omega/a) - \arctg(\omega/b); \quad (9.15)$$

$$\psi_B(\omega) = \alpha_B - \beta_B = \pi - \arctg(\omega/a) - \arctg(\omega/b). \quad (9.16)$$

Как следует из выражений (9.13) — (9.16), модули комплексных коэффициентов передачи по напряжению обоих четырехполосников равны, а аргумент комплексного коэффициента передачи по напряжению четырехполосника A меньше, чем соответствующий аргумент четырехполосника B . Таким образом, при одинаковых модулях аргумент передаточной функции, имеющей нули в правой полуплоскости, больше аргумента передаточной функции, нули которой расположены только в левой полуплоскости. Полученный результат

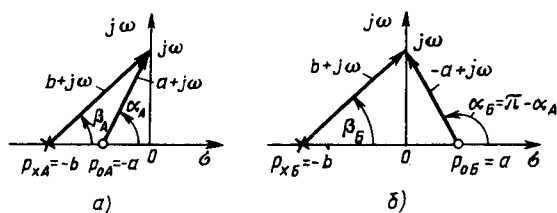


Рис. 9.15. К понятиям минимально-фазового и не-минимально-фазового четырехполосников

имеет весьма общий характер и распространяется на любые передаточные функции, имеющие произвольное число нулей и полюсов, расположенных не только на вещественной оси, но и в произвольных точках плоскости p .

В соответствии с указанным свойством четырехполосники, передаточные функции которых не имеют нулей в правой полуплоскости, называются **минимально-фазовыми**, а четырехполосники, у которых хотя бы один нуль расположен в правой полуплоскости, — **неминимально-фазовыми**.

Комплексные частотные характеристики неминимально-фазовых четырехполосников обладают рядом интересных особенностей. В частности, если у рассмотренного неминимально-фазового четырехполосника B параметры элементов выбраны таким образом, что

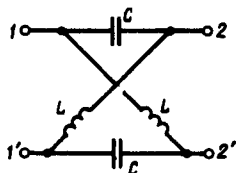
$$|p_{0B}| = |p_{\infty B}| = a = b, \quad (9.17)$$

то его модуль коэффициента передачи по напряжению не зависит от частоты: $K_B(\omega) = 1$, а аргумент коэффициента передачи по напряжению с изменением частоты изменяется в пределах от π до 0: $\psi_B(\omega) = \pi - 2\arctg(\omega/a)$.

Четырехполосник с АЧХ и ФЧХ такого типа называется **фазовым контуром**, все пропускающим четырехполосником или четырехполосником чисто фазового сдвига. Фазовые контуры широко используют для коррекции ФЧХ цепей, т. е. когда необходимо изменять ФЧХ цепи без изменения ее АЧХ.

Пример 9.10. Определим операторный коэффициент передачи по напряжению симметричного мостового реактивного четырехполосника (рис. 9.16) при согласованной нагрузке. Убедимся, что рассматриваемый четырехполосник относится к фазовым контурам.

Используя выражения для первичных параметров симметричного мостового четырехполосника (см. пример 7.16), определяем A -параметры рассматриваемой цепи:



$$A_{11}(p) = A_{22}(p) = \frac{pL + 1/(pC)}{pL - 1/(pC)};$$

$$A_{12}(p) = \frac{2L/C}{pL - 1/(pC)};$$

$$A_{21}(p) = \frac{2}{pL - 1/(pC)}.$$

Рис. 9.16. К примеру 9.10

Характеристическое сопротивление такого четырехполосника имеет чисто резистивный характер: $Z_C(p) = \sqrt{A_{12}(p)/A_{21}(p)} = \sqrt{L/C}$, а операторный коэффициент передачи по напряжению при согласованной нагрузке

$$K_{21}(p) = 1/[\sqrt{A_{11}(p)A_{22}(p)} + \sqrt{A_{12}(p)A_{21}(p)}] = (p - 1/\sqrt{LC})/(p + 1/\sqrt{LC}).$$

Полюсы и нули $K_{21}(p)$ удовлетворяют условию (9.17), поэтому рассматриваемый четырехполосник относится к фазовым контурам.

Существенное различие между минимально-фазовыми и неминимально-фазовыми четырехполосниками заключается в том, что модуль и аргумент, равно как и вещественная и мнимая части передаточной функции минимально-фазового четырехполосника связаны однозначными зависимостями, которые отсутствуют у неминимально-фазовых четырехполосников.

МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПАССИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКОВ

Задача синтеза четырехполосников решается в два этапа: на первом этапе проверяют условия физической реализуемости заданных характеристик, на втором определяют схему искомой цепи и параметры входящих в нее элементов (как и ранее, предполагаем, что искомые характеристики цепи заданы в виде аналитических выражений). Оставляя открытым вопрос о физической реализуемости операторных передаточных характеристик, рассмотрим некоторые простые методы, позволяющие свести задачу реализации пассивных четырехполосников к задаче реализации пассивных двухполосников.

Если синтез пассивного четырехполосника производится по заданным выражениям для первичных или вторичных параметров, то эффективный способ решения задачи заключается в использовании Π -образной или T -образной канонической схемы замещения взаимного четырехполосника (см. рис. 7.14, б, в). Операторные входные сопротивления или операторные входные проводимости пассивных двухполосников, входящих в канонические схемы замещения, определяют с помощью соотношений (7.58), (7.59) по известным выражениям для Z - или Y -параметров. Таким образом, задача синтеза пассивного четырехполосника сводится к задаче синтеза пассивных двухполосников, входящих в канонические схемы замещения.

Пример 9.11. Найдём одну из возможных реализаций четырехполосника, Y -параметры которого определяются выражениями

$$Y_{11}(p) = \frac{720 \cdot 10^{-48} p^5 + 276 \cdot 10^{-30} p^3 + 12 \cdot 10^{-12} p}{360 \cdot 10^{-36} p^4 + 42 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} \text{ См};$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = -\frac{60 \cdot 10^{-30} p^3 + 8 \cdot 10^{-12} p}{30 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} \text{ См};$$

$$Y_{22}(p) = \frac{270 \cdot 10^{-30} p^3 + 30 \cdot 10^{-18} p^2 + 15 \cdot 10^{-12} p + 1}{30 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} \text{ См}.$$

Выберем для реализации Π -образную схему замещения четырехполосника (см. рис. 7.14, в) и, используя соотношения (7.59), определим операторные входные проводимости входящих в нее двухполосников:

$$Y_1(p) = Y_{11}(p) + Y_{12}(p) = \frac{4 \cdot 10^{-12} p}{12 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} = \frac{p}{3 \cdot 10^{-6} [p^2 + 1/(12 \cdot 10^{-18})]} \text{ См};$$

$$Y_2(p) = -Y_{12}(p) = \frac{60 \cdot 10^{-30} p^3 + 8 \cdot 10^{-12} p}{30 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} = 2 \cdot 10^{-12} p + \frac{p}{5 \cdot 10^{-6} \left(p^2 + \frac{1}{30 \cdot 10^{-18}} \right)} \text{ См};$$

$$Y_3(p) = Y_{22}(p) + Y_{12}(p) = 7 \cdot 10^{-12} p + 1 \text{ См}.$$

Как следует из полученных выражений, двухполосник $Y_1(p)$ может быть реализован в виде последовательного соединения емкости $C_1 = 4$ пФ и индуктивности $L_1 = 3$ мкГн. Двухполосник $Y_2(p)$ можно представить в виде параллельного соединения емкости $C_3 = 2$ пФ и последовательной LC-цепи, состоящей из емкости $C_2 = 6$ пФ и индуктивности $L_2 = 5$ мкГн, а двухполосник $Y_3(p)$ — в виде параллельного соединения сопротивления $R = 1$ Ом и емкости $C_4 = 7$ пФ (рис. 9.17).

Синтезировать четырехполосник по заданному операторному коэффициенту передачи по напряжению в режиме холостого хода $K_{21x}(p) = N(p)/M(p)$ можно также с использованием П- или Т-образных канонических схем замещения. Для этого необходимо так подобрать выражения для его Y - или Z -параметров, чтобы они обеспечивали заданную передаточную характеристику

$$K_{21x}(p) = N(p)/M(p) = -Y_{21}(p)/Y_{22}(p) = Z_{21}(p)/Z_{11}(p)$$

и были физически реализуемы. Заданный $K_{21x}(p)$ можно реализовать с помощью Г-образного четырехполосника с Т-входом (см. рис. 7.17, а). Операторный коэффициент передачи по напряжению такого четырехполосника в режиме холостого хода определяется следующим выражением:

$$K_{21x}(p) = \frac{Z_a(p)}{Z_a(p) + Z_b(p)} = \frac{1}{1 + Z_b(p)/Z_a(p)}. \quad (9.18)$$

Для нахождения операторных входных сопротивлений двухполосников, образующих продольную и поперечную ветви Г-образного четырехполосника, приведем заданное выражение для коэффициента передачи к виду (9.18). Это достигается путем деления полиномов $N(p)$ и $M(p)$ на некоторый полином $Q(p)$:

$$K_{21x}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)/Q(p)}{M(p)/Q(p)} = \frac{N(p)/Q(p)}{N(p)/Q(p) + [M(p) - N(p)]/Q(p)},$$

выбранный таким образом, чтобы функции

$$Z_a(p) = N(p)/Q(p) \text{ и } Z_b(p) = [M(p) - N(p)]/Q(p)$$

были физически реализуемыми.

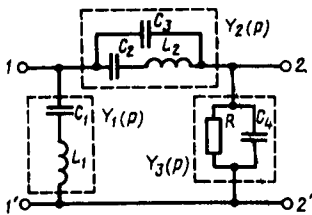


Рис. 9.17. К примеру 9.11

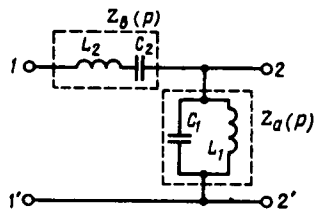


Рис. 9.18. К примеру 9.12

Следует иметь в виду, что нули операторного коэффициента передачи по напряжению четырехполюсника, составленного по Г-образной схеме, совпадают с нулями сопротивления $Z_a(p)$ и полюсами сопротивления $Z_b(p)$ и, следовательно, находятся в левой полуплоскости. Поэтому Г-образную схему можно использовать только для реализации операторных передаточных характеристик минимально-фазовых четырехполюсников.

Пример 9.12. Используя Г-образную схему, построим четырехполюсник, операторный коэффициент передачи по напряжению которого в режиме холостого хода

$$K_{21x}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{10p^2}{180p^4 + 37p^2 + 1}.$$

Разделим числитель и знаменатель данного выражения на полином $Q(p) = 30p^3 + 2p$, выбранный таким образом, чтобы операторные входные сопротивления продольного $Z_b(p)$ и поперечного $Z_a(p)$ плеч Г-образного четырехполюсника представляли собой положительные вещественные функции:

$$Z_a(p) = \frac{N(p)}{Q(p)} = \frac{5p}{15p^2 + 1} = \frac{p}{3(p^2 + 1/15)};$$

$$Z_b(p) = \frac{M(p) - N(p)}{Q(p)} = \frac{12p^2 + 1}{2p} = 6p + \frac{1}{2p}.$$

Как следует из полученных выражений, сопротивление $Z_a(p)$ может быть реализовано в виде параллельного соединения емкости $C_1 = 3$ Ф и индуктивности $L_1 = 5$ Гн, а сопротивление $Z_b(p)$ — в виде последовательного соединения индуктивности $L_2 = 6$ Гн и емкости $C_2 = 2$ Ф (рис. 9.18).

Четырехполюсник с заданным операторным коэффициентом передачи по напряжению в режиме холостого хода $K_{21x}(p)$ можно реализовать и по симметричной мостовой схеме (см. рис. 7.18, а), причем в этом случае нули $K_{21x}(p)$ могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскости. Коэффициент передачи по напряжению полученного четырехполюсника может быть выражен через

сопротивления продольных $Z_1(p)$ и скрещивающихся $Z_2(p)$ ветвей (см. пример 7.14):

$$K_{21x}(p) = Z_{21}(p)/Z_{11}(p) = [Z_2(p) - Z_1(p)]/[Z_2(p) + Z_1(p)]. \quad (9.19)$$

Разделим числитель и знаменатель заданного выражения для $K_{21x}(p)$ на некоторый полином $Q(p)$ и преобразуем полученное выражение к виду (9.19):

$$K_{21x}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)/Q(p)}{M(p)/Q(p)} = \frac{[M(p) + N(p)]/Q(p) - [M(p) - N(p)]/Q(p)}{[M(p) + N(p)]/Q(p) + [M(p) - N(p)]/Q(p)}. \quad (9.20)$$

Из сравнения выражений (9.19) и (9.20) видно, что если полином $Q(p)$ выбран таким образом, что операторные сопротивления

$$Z_1(p) = [M(p) - N(p)]/Q(p); \quad Z_2(p) = [M(p) + N(p)]/Q(p) \quad (9.21)$$

могут быть физически реализованы, то симметричный мостовой четырехполюсник, сопротивления продольных и скрещивающихся ветвей которого определяются выражениями (9.21), будет обладать заданным операторным коэффициентом передачи по напряжению.

Симметричный мостовой четырехполюсник можно использовать и для реализации заданного операторного коэффициента передачи по напряжению в режиме согласованной нагрузки. В этом случае $K(p)$ и $Z_c(p)$ могут быть определены с помощью выражений (7.82), (7.86)*:

$$Z_c(p) = \sqrt{A_{12}(p)/A_{21}(p)} = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)};$$

$$K(p) = \frac{1}{\sqrt{A_{11}(p)A_{22}(p)} + \sqrt{A_{12}(p)A_{21}(p)}} = \frac{\sqrt{Z_2(p)} - \sqrt{Z_1(p)}}{\sqrt{Z_2(p)} + \sqrt{Z_1(p)}}. \quad (9.22)$$

Используя (9.22), выразим сопротивления продольных и скрещивающихся ветвей четырехполюсника через сопротивление нагрузки $Z_n(p) = Z_c(p)$ и коэффициент передачи по напряжению $K(p)$:

$$Z_1(p) = [1 - K(p)]Z_n(p)/[1 + K(p)];$$

$$Z_2(p) = [1 + K(p)]Z_n(p)/[1 - K(p)]. \quad (9.23)$$

*Выражения для A -параметров симметричного мостового четырехполюсника приведены в примере 7.16.

Пример 9.13. Построим четырехполосник, операторный коэффициент передачи по напряжению которого при согласованной нагрузке $Z_n(p) = 10$ Ом определяется выражением

$$K(p) = -\frac{(p - 10^6)}{(p + 10^6)}.$$

Подставляя заданные значения $K(p)$ и $Z_n(p)$ в выражения (9.23), определяем операторные сопротивления продольных $Z_1(p)$ и скрещивающихся $Z_2(p)$ ветвей симметричного мостового четырехполосника:

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= 10 \cdot 10^{-6} p \text{ Ом;} \\ Z_2(p) &= 1/(0,1 \cdot 10^{-6} p) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

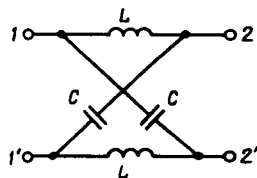
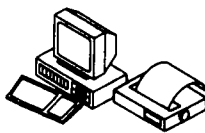


Рис. 9.19. К примеру 9.13

Таким образом, заданный коэффициент передачи может быть реализован с помощью реактивного мостового четырехполосника (рис. 9.19), содержащего индуктивности $L = 10$ мкГн в продольных и емкости $C = 0,1$ мкФ в скрещивающихся ветвях.



Методы автоматизированного анализа цепей

§ 10.1. ЗАДАЧА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

ПОНЯТИЕ О РУЧНЫХ И МАШИННЫХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

В соответствии с основным методом теории цепей решение задачи анализа произвольной электрической цепи включает в себя следующие основные этапы:

- 1) переход от принципиальной электрической схемы цепи к ее схеме замещения;
- 2) составление уравнений электрического равновесия;
- 3) решение уравнений электрического равновесия и представление полученных результатов.

На первом этапе каждый реальный элемент электрической цепи заменяется его упрощенной моделью, составленной только из идеализированных пассивных и активных элементов. На втором этапе выбирается система независимых переменных, характеризующая процессы в рассматриваемой цепи, и составляется система уравнений электрического равновесия относительно этих переменных. На третьем этапе решается система уравнений электрического равновесия и определяется искомая реакция цепи на заданное воздействие или соотношения, связывающие между собой реакцию цепи и внешнее воздействие.

В течение длительного времени различные средства вычислительной техники, в том числе и электронные вычислительные машины (ЭВМ), применялись только для выполнения третьего из перечисленных этапов. Такое использование ЭВМ было неэффективным, так как требовало большого объема подготовительных работ, выполняемых вручную. Очевидно, что применение ЭВМ для решения системы уравнений электрического равновесия не носит принципиального характера, так как для этой цели можно использовать и другие средства вычислений, включая арифмометры, счетные линейки и инженерные калькуляторы.

Характерной особенностью современного уровня развития ме-

тодов анализа цепей является широкое применение ЭВМ не только для решения уравнений электрического равновесия, но и для формирования этих уравнений по заданной схеме замещения цепи или для составления схемы замещения цепи и соответствующих уравнений электрического равновесия по заданной принципиальной электрической схеме цепи. Заметим, что использование ЭВМ для построения схемы замещения цепи и формирования системы уравнений электрического равновесия носит принципиальный характер, так как эти этапы не могут быть выполнены с помощью других средств вычислительной техники. Современные методы анализа цепей, основанные на применении ЭВМ для комплексного выполнения всех трех (или хотя бы двух последних) этапов анализа, получили название методов машинного (автоматизированного) анализа цепей. Методы анализа цепей, в которых формирование уравнений электрического равновесия производится вручную (независимо от того, применяют или не применяют ЭВМ для решения уравнений электрического равновесия), часто не очень удачно называют ручными методами анализа.

Автоматизация методов анализа электрических цепей позволяет не только значительно сократить время анализа, но и существенно повысить его точность. *Решение ряда задач, связанных с проектированием современной аппаратуры на больших интегральных микросхемах, каждая из которых может насчитывать несколько тысяч элементов, вообще немыслимо без применения автоматизированных методов анализа.* Широкое использование ЭВМ для анализа цепей оказало существенное влияние и на развитие теории цепей, в частности стимулировало разработку специальных методов анализа, ориентированных на применение ЭВМ.

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОГРАММАХ МАШИННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

Разработанные к настоящему времени программы машинного анализа цепей условно подразделяют на две большие группы: 1) программы общего назначения, предназначенные для решения широкого круга задач анализа цепей различного типа; 2) специализированные программы, ориентированные на решение отдельных частных задач анализа, таких, как исследование временных или частотных характеристик линейных цепей, нахождение рабочих точек нелинейных элементов, определение чувствительности цепи к изменению параметров элементов и т. п. Независимо от назначения каждая программа автоматизированного анализа состоит из нескольких основных блоков, соответствующих основным этапам анализа цепей: блок подготовки исходных данных, блок формирования уравнений электрического равновесия, блок решения уравнений электрического равновесия, блок представления результатов анализа.

С помощью первого блока на этапе подготовки исходных данных в ЭВМ вводят информацию о схеме исследуемой цепи, параметрах ее элементов, формулируют конкретную задачу анализа и указывают способ представления результатов. В наиболее развитых программах анализа цепей в ЭВМ вводят составленный определенным образом список элементов принципиальной электрической схемы рассматриваемой цепи с указанием типов элементов, их параметров и номеров узлов, к которым подключены выводы элементов. Переход от принципиальной схемы цепи к ее схеме замещения в программах такого типа осуществляется автоматически, с помощью имеющейся в программе библиотеки моделей (схем замещения) всех элементов цепи. При использовании программ анализа цепей более низкого уровня требуется предварительно вручную построить схему замещения цепи. В этом случае в ЭВМ вводят список ветвей идеализированной цепи с указанием характера ветви, ее параметров и ориентации, определяемой порядком перечисления номеров узлов, к которым подключена данная ветвь.

Важнейшим этапом машинного анализа цепей, который наиболее трудно поддается автоматизации, является формирование уравнений электрического равновесия. Рассмотренные ранее алгоритмы составления этих уравнений носят описательный характер, недостаточно формализованы и непригодны для непосредственного применения в программах машинного анализа.

Уравнения электрического равновесия цепи, сформированные любым из методов, можно решить либо в численной, либо в символьной форме. В первом случае находят числовые значения токов и напряжений цепи, соответствующие определенным значениям параметров элементов и величин, характеризующих внешнее воздействие, во втором — решение получают в виде аналитического выражения, справедливого в определенном диапазоне изменения параметров элементов и величин, характеризующих заданное воздействие. К настоящему времени наибольшие успехи достигнуты в области численных методов решения уравнений электрического равновесия, которые основаны на хорошо разработанных методах вычислительной математики и легко поддаются алгоритмизации*. Символьные методы решения уравнений электрического равновесия не имеют единой математической базы и развиты в меньшей степени. Имеющиеся программы машинного анализа цепей, реализующие решение уравнений электрического равновесия в символьной форме, основаны на использовании метода сигнальных графов или метода обобщенных чисел и позволяют анализировать только линейные цепи малой сложности. Методы символьного решения нелинейных дифференциальных или алгебраических уравнений вообще не разработаны.

*Детальное знакомство с численными методами решения уравнений электрического равновесия производится при изучении курсов «Высшая математика» и «Основы автоматизации проектирования радиоэлектронных устройств».

Определяющее влияние на выбор методов численного анализа оказывает уровень развития средств вычислительной техники и соответствующего математического обеспечения. В свою очередь, используемые методы численного анализа существенным образом влияют на выбор методов формирования уравнений электрического равновесия. Поэтому на каждом этапе развития вычислительной техники на первый план выступают свои методы решения уравнений электрического равновесия и соответствующие им методы формирования этих уравнений.

Заключительным этапом машинного анализа цепей является представление результатов. На этом этапе обрабатываются результаты решения уравнений электрического равновесия, определяются искомые характеристики цепи и осуществляется вывод полученных данных из ЭВМ. Современные программы автоматизированного анализа цепей, как правило, организуют работу ЭВМ в диалоговом режиме, при котором пользователь на основе данных предварительного анализа может вводить в ЭВМ директивы, с помощью которых определяется вид анализа, производится изменение схемы исследуемой цепи или параметров ее элементов, задается тот или иной способ представления получаемых результатов.

Программы машинного анализа цепей являются частью современных систем автоматизированного проектирования (САПР) и входят в состав математического обеспечения автоматизированных рабочих мест проектировщика радиоэлектронной аппаратуры. Несмотря на обилие таких программ, постоянно возникает необходимость их усовершенствования или разработки новых программ. Поэтому специалисты в области радиоэлектроники должны четко представлять себе основные принципы, положенные в основу машинных методов анализа цепей.

§ 10.2. КОМПОНЕНТНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При применении ЭВМ для составления уравнений электрического равновесия цепи требуется формализованное представление исходных данных о топологии цепи и параметрах входящих в нее элементов. В наибольшей степени этому требованию удовлетворяет представление исходной информации о цепи в матричной форме. Известно, что топологические свойства цепи полностью определяются ее графом, причем свойства графа зависят только от числа его ветвей и узлов, а также способа соединения ветвей между собой. Эта информация о графе может быть представлена либо в виде списка (перечня) ветвей графа с указанием, каким узлам они инцидентны и с какой ориентацией, или с помощью полной матрицы узлов A_c .

Полная матрица узлов (полная матрица инцидентий, матрица соединений, структурная матрица) — это таблица, в которой число столбцов равно числу ветвей графа p , а число строк — числу узлов q . Номера строк совпадают с номерами узлов (строка с нулевым номером обычно располагается последней), номера столбцов — с номерами ветвей. Элемент матрицы a_{ij} , расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца, может принимать значения $+1$, -1 и 0 : $a_{ij} = +1$, если ветвь j инцидентна узлу i и направлена от этого узла; $a_{ij} = -1$, если ветвь j инцидентна узлу i и направлена к этому узлу; $a_{ij} = 0$, если ветвь j не инцидентна узлу i . Так, графу, изображенному на рис. 1.27, а, соответствует полная матрица инцидентий

$$A_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \leftarrow \text{Номера ветвей} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \uparrow & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (10.1)$$

↑
Номера узлов

Нетрудно убедиться, что эта же полная матрица узлов (10.1) соответствует и всем графам, изоморфным графу, изображенному на рис. 1.27, а, в частности графам, приведенным на рис. 1.27, б, в.

Таким образом, *все изоморфные графы описываются одной и той же полной матрицей узлов.*

Имея полную матрицу узлов, всегда можно восстановить исходный граф с точностью до изоморфизма.

Число ненулевых элементов в каждой строке матрицы A_c равно числу ветвей, инцидентных соответствующему узлу, т. е. степени узла. В каждом столбце имеется только два ненулевых элемента: $+1$ и -1 , так как каждая ветвь инцидентна двум узлам и направлена от одного из них к другому.

Сумма всех элементов каждого столбца, а следовательно, и сумма всех строк полной матрицы узлов A_c равна нулю, т. е. строки полной матрицы узлов являются линейно зависимыми.

На практике обычно используют сокращенную (редуцированную) матрицу узлов A , которая получается из полной матрицы узлов путем отбрасывания любой из ее строк (обычно отбрасывают строку, соответствующую узлу с номером 0). Так, отбрасывая строку с номером 0 у полной матрицы узлов (10.1), получаем сокращенную матрицу узлов A цепи, граф которой изображен на рис. 1.27:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Зная сокращенную матрицу узлов, соответствующую некоторому графу, всегда можно найти его полную матрицу узлов, для чего необходимо дополнить матрицу A одной строкой так, чтобы сумма всех строк матрицы A_c равнялась нулю*.

В связи с тем что каждая строка матриц A_c и A несет информацию о том, какие ветви и с какой ориентацией подключены к определенному узлу цепи, эти матрицы можно использовать для записи уравнений по первому закону Кирхгофа. Действительно, умножая полную матрицу узлов A_c на матрицу-столбец токов ветвей i , получаем

$$A_c \times i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2p} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{q1} & a_{q2} \dots a_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}i_1 + a_{12}i_2 + \dots + a_{1p}i_p \\ a_{21}i_1 + a_{22}i_2 + \dots + a_{2p}i_p \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{q1}i_1 + a_{q2}i_2 + \dots + a_{qp}i_p \end{bmatrix}.$$

Каждая строка этого выражения есть алгебраическая сумма токов ветвей, подключенных к соответствующему узлу цепи, причем если ветвь направлена от узла, то соответствующий ток имеет знак плюс ($a_{ij} = +1$), если ветвь направлена к узлу, то знак минус ($a_{ij} = -1$). Если же ветвь не инцидентна рассматриваемому узлу, то соответствующее слагаемое равно нулю ($a_{ij} = 0$). Тогда в соответствии с первым законом Кирхгофа окончательно имеем

$$A_c \times i = 0. \quad (10.3)$$

В связи с тем что строки полной матрицы узлов являются линейно зависимыми, система уравнений (10.3) также будет линейно зависимой.

Для получения системы линейно независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, можно воспользоваться сокращенной матрицей инцидентий, строки которой являются линейно независимыми:

$$A \times i = 0. \quad (10.4)$$

Для матричной записи уравнений баланса токов в обобщенных узлах цепи и уравнений баланса напряжений используют матрицу главных сечений и матрицу главных контуров.

*В дальнейшем будем использовать только сокращенную матрицу узлов A , которую для краткости будем называть матрицей узлов.

Матрица главных сечений Q (матрица сечений) представляет собой таблицу, число столбцов которой равно числу ветвей графа p , а число строк — числу главных сечений: $m=q-1$ (номера столбцов совпадают с номерами ветвей, а номера строк — с номерами главных сечений, т. е. с номерами соответствующих ветвей дерева).

Каждая строка матрицы главных сечений характеризует состав ветвей графа, входящих в данное сечение. Элементы i -й строки q_{ij} принимают значение $+1$, если j -я ветвь графа входит в состав i -го сечения, причем ее ориентация совпадает с ориентацией сечения, т. е. с ориентацией соответствующей ветви дерева относительно линии сечения; $q_{ij} = -1$, если j -я ветвь входит в i -е сечение, а ее ориентация противоположна ориентации сечения; $q_{ij} = 0$, если j -я ветвь не входит в i -е сечение.

Матрица главных сечений, соответствующая графу, приведенному на рис. 1.35, а, имеет следующий вид:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Номера ветвей} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Номера главных сечений

Используя матрицу главных сечений, можно в компактной форме записать систему из $m=q-1$ уравнений, составленных на основании первого закона Кирхгофа для главных сечений графа, соответствующих выбранному дереву:

$$Q \times i = 0, \quad (10.5)$$

где i — вектор токов ветвей.

Если какое-либо из главных сечений графа является каноническим, то уравнение баланса токов для этого сечения с точностью до знака совпадает с уравнением баланса токов для соответствующего изолированного узла. Если все главные сечения графа являются каноническими, то матрицы узлов A и сечений Q совпадают с точностью до знака элементов строки. В общем случае строки матрицы сечений Q могут быть получены путем линейной комбинации строк матрицы узлов A .

Сравнивая выражение (1.39) и (10.4) или (10.5), убеждаемся, что коэффициенты a_{ik} , входящие в уравнение (1.39), являются элементами матрицы узлов или матрицы сечений соответствующей цепи.

Матрица главных контуров B представляет собой таблицу, в которой число столбцов равно числу ветвей графа p , а число строк — числу главных контуров, т. е. числу главных ветвей графа $n=p-q+1$ (номера столбцов совпадают с номерами ветвей, а номера строк — с номерами главных контуров). Элементы i -й строки

b_{ij} могут принимать значения $+1$, -1 и 0 ; $b_{ij} = +1$, если j -я ветвь входит в состав i -го контура, причем ее ориентация совпадает с ориентацией контура; $b_{ij} = -1$, если ориентация j -й ветви, входящей в i -й контур, не совпадает с ориентацией контура; $b_{ij} = 0$, если j -я ветвь не входит в i -й контур. Например, матрица главных контуров B графа (см. рис. 1.27), соответствующая дереву графа, приведенному на рис. 1.32, a , имеет следующий вид:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \leftarrow \text{Номера ветвей} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \uparrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Номера главных контуров

Матрицу главных контуров можно использовать для записи уравнений, составленных на основании второго закона Кирхгофа. Пусть исследуемая цепь содержит p ветвей, q узлов и $n = p - q + 1$ главных контуров. Умножая матрицу главных контуров B на матрицу-столбец напряжений ветвей u , получаем

$$B \times u = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2p} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1p}u_p \\ b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2p}u_p \\ \dots \\ b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{np}u_p \end{bmatrix}.$$

Каждая строка этого выражения представляет собой алгебраическую сумму напряжений ветвей, входящих в i -й главный контур, причем правило суммирования напряжений ветвей совпадает с соответствующим правилом, установленным для записи уравнений баланса напряжений в контуре (1.40). Так как в соответствии со вторым законом Кирхгофа сумма напряжений ветвей, входящих в каждый контур, в любой момент времени равна нулю, то окончательно имеем

$$B \times u = 0. \quad (10.6)$$

Выражение (10.6) является матричной формой записи уравнений баланса напряжений для главных контуров цепи. Очевидно, что коэффициенты b_{ik} уравнения баланса напряжений (1.40) являются элементами матрицы главных контуров B соответствующей цепи.

Матрицы A , B и Q , называемые топологическими, содержат полную информацию о топологии цепи. Элементы топологических матриц связаны между собой определенными соотношениями, так что, зная одну из них, всегда можно найти и любую другую, причем вид матрицы узлов A зависит только от выбора базисного узла и порядка нумерации узлов и ветвей, а вид матриц B и Q зависит еще и от выбора дерева графа рассматриваемой цепи.

СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

До сих пор на порядок нумерации ветвей графа и его главных контуров (главных сечений) не накладывалось никаких ограничений. Условимся теперь нумеровать ветви графа следующим образом: сначала все ветви дерева, а затем — главные ветви. Соответствующим образом расположим и столбцы матриц A , B и Q : сначала в порядке возрастания номеров поставим столбцы, соответствующие ветвям дерева, а затем — столбцы, соответствующие главным ветвям; строки матриц Q и B запишем в порядке возрастания номеров ветвей дерева и главных ветвей соответственно. В этом случае порядок нумерации главных сечений соответствует порядку нумерации ветвей дерева, а порядок нумерации главных контуров — порядку нумерации главных ветвей, причем каждая из матриц Q и B может быть разбита на две подматрицы, соответствующие ветвям дерева и главным ветвям:

$$Q = [Q_b Q_x]; \quad (10.7)$$

$$B = [B_b B_x], \quad (10.8)$$

где Q_b , B_b — подматрицы, содержащие столбцы, соответствующие ветвям дерева; Q_x и B_x — подматрицы, включающие столбцы, соответствующие главным ветвям (хордам).

Учитывая, что каждая ветвь дерева входит только в одно главное сечение, а каждая главная ветвь — только в один главный контур, приходим к заключению, что квадратные матрицы Q_b и B_x являются единичными:

$$Q_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad (10.9)$$

$$B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

Подставляя выражения (10.7) и (10.8) в (10.5) и (10.6) и разбивая матрицы-столбцы токов i и напряжений u на подматрицы токов и напряжений ветвей дерева i_b , u_b и токов и напряжений главных ветвей i_x , u_x , получаем

$$Qi = [Q_b Q_x] \begin{bmatrix} i_b \\ i_x \end{bmatrix} = Q_b i_b + Q_x i_x = 0; \quad (10.11)$$

$$Bu = [B_b B_x] \begin{bmatrix} u_b \\ u_x \end{bmatrix} = B_b u_b + B_x u_x = 0. \quad (10.12)$$

С учетом того что матрицы Q_b и B_x являются единичными, выражения (10.11) и (10.12) преобразуются к следующему виду:

$$i_b = -Q_x i_x; \quad (10.13)$$

$$u_x = -B_b u_b. \quad (10.14)$$

Выражения (10.13) и (10.14) вытекают непосредственно из уравнений баланса токов и напряжений и показывают, каким образом токи ветвей дерева могут быть выражены через токи главных ветвей, а напряжения главных ветвей — через напряжения ветвей дерева.

Подматрицы Q_x и B_b связаны между собой простыми соотношениями, для определения которых необходимо сначала убедиться в справедливости выражений

$$AB' = 0; \quad (10.15)$$

$$QB' = 0, \quad (10.16)$$

получивших название соотношений ортогональности (здесь B' — транспонированная матрица контуров).

Соотношение (10.15) равносильно утверждению, что произведение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B' или на транспонированную j -ю строку матрицы B равно нулю:

$$[i\text{-я строка } A] [j\text{-я строка } B]' = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{jk} = 0. \quad (10.17)$$

Из правил формирования топологических матриц A и B следует, что элементы a_{ik} i -й строки матрицы A не равны нулю только в том случае, когда k -я ветвь инцидентна i -му узлу, а элементы b_{jk} j -й строки матрицы B не равны нулю только в случае, когда k -я ветвь входит в j -й контур. Если i -й узел не инцидентен ни одной ветви, входящей в j -й контур, то ненулевым элементам i -й строки матрицы A соответствуют нулевые элементы j -й строки матрицы B и, следовательно, сумма произведений $a_{ik} b_{jk}$ будет равна нулю. Если узел

i инцидентен какой-либо ветви, входящий в j -й контур, то он обязательно инцидентен также еще одной ветви, входящей в этот контур. Если эти ветви одинаково сориентированы относительно узла i (обе направлены к узлу или от узла), то они различным образом сориентированы относительно направления обхода контура j . Если же они одинаково сориентированы относительно направления обхода контура j , то они различным образом сориентированы относительно узла i . В любом случае либо два ненулевых элемента i -й строки матрицы A имеют одинаковые, а соответствующие им элементы j -й строки матрицы B различные знаки, либо, наоборот, ненулевые элементы i -й строки матрицы A имеют различные знаки, а соответствующие им элементы j -й строки матрицы B — одинаковые. В обоих случаях соотношение (10.17), а следовательно, и (10.15) будут выполняться.

Аналогичным образом доказывается и справедливость соотношения (10.16). В этом случае необходимо учесть, что если какое-либо сечение и контур имеют общие ветви, то их число должно быть четным (линия сечения делит граф на две части, при этом любой замкнутый путь должен начинаться и заканчиваться в одной и той же части графа), причем если какие-либо две ветви, входящие и в сечение, и в контур, одинаково сориентированы относительно сечения, то они различным образом сориентированы относительно направления обхода контура и, наоборот, если они одинаково сориентированы относительно направления обхода контура, то они различным образом сориентированы относительно сечения.

Подставляя выражения (10.7) и (10.8) в соотношение (10.16) и учитывая (10.9) и (10.10), получаем

$$QB' = [Q_b Q_x] \begin{bmatrix} B'_b \\ B'_x \end{bmatrix} = Q_b B'_b + Q_x B'_x = B'_b + Q_x = 0,$$

откуда

$$Q_x = -B'_b \quad (10.18)$$

или

$$B_b = -Q'_x. \quad (10.19)$$

Выражения (10.18), (10.19) устанавливают связь между подматрицами B_b и Q_x , что позволяет записать уравнения (10.13) и (10.14) либо с помощью подматрицы Q_x :

$$\begin{aligned} i_b &= -Q_x i_x; \\ u_x &= Q'_x u_b, \end{aligned} \quad (10.20)$$

либо с помощью подматрицы B_b :

$$\begin{aligned} i_b &= B'_b i_x; \\ u_x &= -B_b u_b. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Уравнения (10.20) или (10.21) равносильны уравнениям (10.4, (10.6) или (10.5), (10.6); при машинном анализе цепей они часто используются вместо (10.4) — (10.6). На практике при составлении топологических уравнений чаще применяется подматрица Q_x , которая получила название матрицы сечений — хорд. Подматрица Q_b называется матрицей контуров — ветвей.

Анализируя правила формирования матрицы главных сечений Q и то, каким образом она была разбита на подматрицы Q_b и Q_x , устанавливаем, что матрица сечений — хорд Q_x является прямоугольной и содержит $m=q-1$ строк и $n=p-q+1$ столбец. Строки матрицы Q_x показывают, какие главные ветви входят в соответствующее главное сечение, причем элемент $q_{ij}=1$, если j -я главная ветвь входит в i -е главное сечение и ее направление совпадает с направлением сечения; $q_{ij}=-1$, если j -я главная ветвь входит в i -е сечение и ее направление противоположно направлению сечения. Столбцы матрицы сечений — хорд Q_x показывают, какие ветви дерева входят в главный контур, замыкаемый главной ветвью, соответствующей каждому столбцу. Элемент $q_{ij}=-1$, если i -я ветвь дерева входит в j -й главный контур, причем ее направление совпадает с направлением обхода контура; $q_{ij}=1$, если i -я ветвь входит в j -й главный контур, но ее направление не совпадает с направлением обхода контура; $q_{ij}=0$, если j -я главная ветвь не входит в i -е главное сечение или i -я ветвь дерева не входит в j -й главный контур.

Пример 10.1. Построим матрицу сечений-хорд и составим топологические уравнения в форме (10.20) для цепи, схема которой изображена на рис. 10.1, а.

Выберем в качестве ветвей дерева ветви, содержащие источник напряжения e_1 , сопротивление R_3 , емкости C_1, C_2 . Пронумеруем токи и соответствующие ветви следующим образом: $i_1=i_{e1}, i_2=i_{C1}, i_3=i_{C2}, i_4=i_{R3}, i_5=i_{R1}, i_6=i_{R2}, i_7=i_{L1}, i_8=i_{L1}=j_1$. Граф цепи с учетом принятой нумерации ветвей изображен на рис. 10.1, б. Матрица главных сечений этого графа

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Номера ветвей} & \text{Номера главных} \\ \text{дерева} & \text{ветвей} \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} = [Q_b Q_x].$$

↑
Номера главных сечений
(номера ветвей дерева)

разбивается на подматрицы

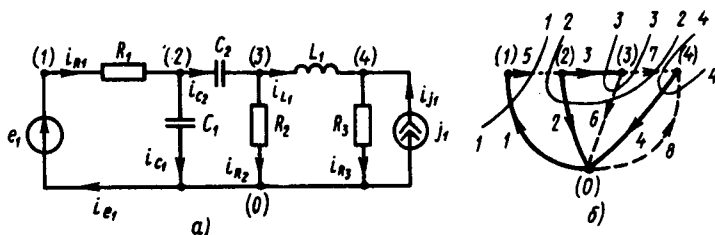


Рис. 10.1. К примеру 10.1

$$Q_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } Q_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Используя матрицу сечений-хорд Q_k , составляем топологические уравнения рассматриваемой цепи в форме (10.20):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}.$$

В справедливости полученных соотношений нетрудно убедиться, составляя уравнения баланса токов и напряжений для главных сечений и главных контуров рассматриваемой цепи.

Алгоритмы машинного формирования топологических матриц A , B и Q рассмотрены в [8, 9].

КОМПОНЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ И КОМПОНЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Одновременно с формированием топологических матриц, используемых затем для составления уравнений баланса токов и напряжений, в программах автоматизированного анализа цепей производится формирование компонентных матриц, необходимых для составления компонентных уравнений цепи в матричной форме. В большинстве программ машинного анализа цепей с целью упрощения и унификации компонентных уравнений ветвей применяют

расширенное топологическое описание цепи, при котором каждый идеализированный двухполюсный элемент выбирается в качестве отдельной ветви. Полагая для простоты, что исследуемая цепь не содержит вырожденных источников, используем один из вариантов расширенного топологического описания цепи, при котором активный двухполюсник, состоящий из идеального источника тока или напряжения и сопротивления, которое можно рассматривать как внутреннее сопротивление соответствующего источника, представляется в виде одной ветви графа.

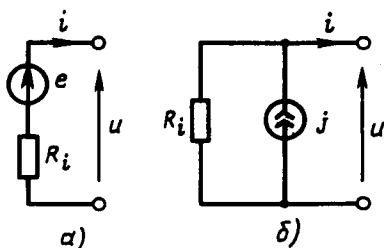


Рис. 10.2. Положительные направления токов и напряжений ветвей, содержащих источники напряжения (а) и тока (б)

В зависимости от того, какая из величин (ток или напряжение) выбрана в качестве независимой переменной, компонентные уравнения ветвей, содержащих идеализированные пассивные элементы, могут быть записаны в одной из двух форм: для сопротивления (1.9) или (1.10), емкости (1.13) или (1.16) и индуктивности (1.22) или (1.23). Принимая, что положительные направления токов и напряжений всех ветвей цепи совпадают, компонентные уравнения ветви, содержащей идеальный источник напряжения (рис. 10.2, а), можно представить в виде

$$u = R_i i - e, \quad i = \frac{1}{R_i} (u + e),$$

а компонентные уравнения ветви с источником тока (рис. 10.2, б) в виде

$$u = R_i (i - j), \quad i = j + \frac{1}{R_i} u.$$

Вводя обозначения $sa = d a/dt$, $s^{-1}a = \int_0^t a dt$, где s — оператор дифференцирования; s^{-1} — оператор интегрирования, компонентные уравнения каждой ветви при произвольном внешнем воздействии можно записать (табл. 10.1) либо в форме Z

Таблица 10.1. Компонентные уравнения ветвей электрических цепей

Тип ветви	Форма компонентного уравнения	
	Z	Y
R	$u = 0 + R(i - 0)$	$i = 0 + \frac{1}{R} (u - 0)$
C	$u = u(0) + \frac{1}{sC} (i - 0)$	$i = 0 + sC (u - 0)$

Тип ветви	Форма компонентного уравнения	
	Z	Y
L	$u=0+sL(i-i_0)$	$i=i(0)+\frac{1}{sL}(u-0)$
e	$u=-e+R_i(i-i_0)$	$i=0+\frac{1}{R_i}(u+e)$
j	$u=0+R_i(i-j)$	$i=j+\frac{1}{R_i}(u-0)$

$$u=u_v+Z(i-i_v), \quad (10.22)$$

либо в форме Y

$$i=i_g+Y(u-u_g). \quad (10.23)$$

Здесь u, i — напряжение и ток ветви; Y, Z — коэффициенты, определяемые параметрами входящих в ветвь идеализированных пассивных элементов; i_v, u_v, i_g, u_g — величины, характеризующие внешние воздействия на цепь и независимые начальные условия. Уравнениям (10.22), (10.23) можно

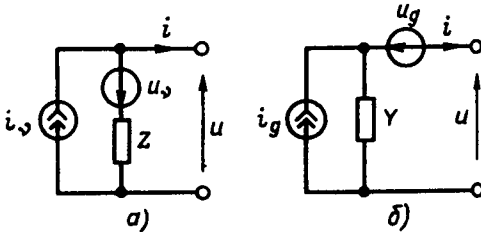


Рис. 10.3. Схемы замещения обобщенных ветвей, соответствующих компонентным уравнениям в форме Z (а) и в форме Y (б)

поставить в соответствие обобщенные ветви, схемы замещения которых приведены на рис. 10.3, а, б. При гармоническом внешнем воздействии компонентные уравнения ветвей сохраняют ту же структуру, но мгновенные значения токов и напряжений заменяются их комплексными изображениями, оператор s — на $j\omega$, незави-

симые начальные условия полагают равными нулю.

Если компонентные уравнения всех ветвей цепи представлены в одной и той же форме (Z или Y), то их можно объединить в одно матричное компонентное уравнение цепи в форме Z

$$u=u_v+Z\{i-i_v\}, \quad (10.24)$$

либо в форме Y

$$i=i_g+Y\{u-u_g\}, \quad (10.25)$$

где Z, Y — квадратные матрицы, называемые матрицами сопротивлений и проводимостей ветвей; i, u — векторы (матрицы-столбцы)

мгновенных значений токов и напряжений ветвей; i_v, u_v, i_g, u_g — задающие векторы, характеризующие внешние воздействия на цепь и независимые начальные условия.

Пример 10.2. Сформируем компонентные матрицы цепи, схема которой приведена на рис. 10.4, а. Граф, соответствующий принятому в этой главе топологическому описанию цепи, изображен на рис. 10.4, б.

Используя табл. 10.1, запишем компонентные уравнения всех ветвей в форме Y :

$$i_1 = 0 + \frac{1}{R_1} (u_1 + e);$$

$$i_2 = 0 + \frac{1}{R_2} (u_2 - 0);$$

$$i_3 = 0 + \frac{1}{R_3} (u_3 - 0);$$

$$i_4 = j + \frac{1}{R_4} (u_4 - 0);$$

$$i_5 = i_5(0) + \frac{1}{sL_1} (u_5 - 0);$$

$$i_6 = 0 + sC (u_6 - 0);$$

$$i_7 = i_7(0) + \frac{1}{sL_2} (u_7 - 0).$$

Объединяя компонентные уравнения всех ветвей в одно, получаем матричное компонентное уравнение цепи в форме Y :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ i_5(0) \\ 0 \\ i_7(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (10.25), находим компонентные матрицы:

$$Y = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix};$$

$$i_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ i_s(0) \\ 0 \\ i_7(0) \end{bmatrix}; \quad u_g = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Записывая компонентные уравнения всех ветвей той же цепи в форме Z и приводя их к виду (10.24), определяем компонентные матрицы:

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sC)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sL_2 \end{bmatrix}; \quad u_v = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_6(0) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad i_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

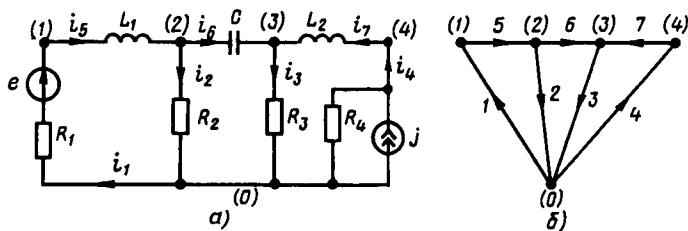


Рис. 10.4. К примеру 10.2

Таким образом, зависимости между токами и напряжениями всех ветвей электрической цепи могут быть представлены в виде одного матричного компонентного уравнения в форме (10.24) или (10.25), причем вся информация о характере ветвей и параметрах входящих в них элементов заключается в компонентных матрицах Z , u_i , i_i , или Y , u_i , i_i .

Необходимо отметить, что введенные компонентные и топологические матрицы цепи относятся к так называемым разреженным матрицам, содержащим большое число нулевых элементов. Хранение таких матриц в памяти ЭВМ в виде двумерных массивов неэкономично (значительная часть памяти будет занята хранением нулевых коэффициентов). Как правило, программы анализа цепей организуют таким образом, чтобы в памяти ЭВМ хранилась информация только о ненулевых элементах матриц. Данные о координатах и значениях ненулевых элементов компонентных и топологических матриц представляют в виде совокупности одномерных массивов, называемых списками [8, 22]. Дополнительно объем памяти ЭВМ можно сэкономить за счет того, что ненулевые элементы топологических матриц могут принять значения только $+1$ или -1 .

Так как элементы компонентных и топологических матриц численно равны коэффициентам компонентных (10.24) или (10.25) и топологических (10.4), (10.6) уравнений, запись в память ЭВМ элементов этих матриц можно рассматривать как занесение в память ЭВМ коэффициентов основной системы уравнений электрического равновесия цепи, а формирование компонентных и топологических матриц равносильно, следовательно, формированию основной системы уравнений электрического равновесия цепи в матричной форме.

При использовании принятого в этой главе топологического описания основная система уравнений электрического равновесия цепи, содержащей p ветвей, включает в себя $2p$ уравнений. Число уравнений электрического равновесия может быть уменьшено за счет исключения из основной системы уравнений зависимых токов и напряжения с помощью методов узловых напряжений и контурных токов.

§ 10.3. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫЕ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В ПРОГРАММАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

МЕТОДЫ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Известно, что метод узловых напряжений основан на том, что напряжения всех ветвей произвольной электрической цепи могут быть выражены через ее узловые напряжения. В матричной форме зависимость напряжений ветвей от узловых напряжений

определяется соотношением, получившим название узлового преобразования:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}' \mathbf{u}_0, \quad (10.26)$$

где $\mathbf{A}'$ — транспонированная матрица узлов; $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_0$ — матрицы-столбцы мгновенных значений напряжений ветвей и узловых напряжений.

Пример 10.3. Убедимся в справедливости соотношения (10.26) на примере цепи, схема которой приведена на рис. 10.4, а. Матрица узлов этой цепи, соответствующая ее графу, изображенному на рис. 10.4, б, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя транспонированную матрицу узлов

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

в выражение (10.26), получаем

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ u_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ -u_{40} \\ u_{10} - u_{20} \\ u_{20} - u_{30} \\ -u_{30} + u_{40} \end{bmatrix}$$

Аналогичные соотношения могут быть найдены непосредственно из рассмотрения схемы цепи (рис. 10.4, а).

Для формирования системы узловых уравнений воспользуемся компонентным уравнением цепи в форме Y . Умножая матрицу узлов на каждое из слагаемых, входящих в выражение (10.25), переходим к

$$Ai = Ai_s + AY_u - AY_{u_s}.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой матричную запись уравнения баланса токов (10.4), поэтому

$$Ai_s + AY_u - AY_{u_s} = 0.$$

Выражая напряжения ветвей через узловые напряжения (10.26) и выполняя очевидные преобразования, получаем систему узловых уравнений цепи в матричной форме

$$AYA' u_0 = A \{Yu_s - i_s\} \quad (10.27)$$

или

$$Y_{(ij)} u_0 = j_0. \quad (10.28)$$

Из выражений (10.27) и (10.28) следует, что матрица узловых проводимостей исследуемой цепи и матрица-столбец узловых токов

$$Y_{ij} = AYA' \text{ и } j_0 = A \{Yu_s - i_s\} \quad (10.29)$$

могут быть сформированы с помощью простых алгебраических операций над матрицей узлов A и компонентными матрицами Y , u_s , i_s . Поскольку компонентные и топологические матрицы цепи содержат значительное число нулевых элементов, при формировании матрицы узловых проводимостей $Y_{(ij)}$ и матрицы-столбца узловых токов j_0 используют специальные алгоритмы, учитывающие разреженность матриц A , Y , u_s , i_s и исключаящие тривиальные операции над нулевыми элементами. Можно убедиться, что системы узловых уравнений цепи для мгновенных значений (10.28) и узловых уравнений для комплексных действующих значений той же цепи (4.19) имеют одинаковую структуру и могут быть получены одна из другой с помощью таких же преобразований, которые необходимы для взаимного преобразования компонентных уравнений для мгновенных и комплексных действующих значений.

Пример 10.4. Используя выражения (10.29), сформируем матрицу узловых проводимостей и матрицу-столбец узловых токов цепи, схема которой приведена на рис. 10.4, а.

Матрица узлов A и компонентные матрицы цепи Y , u_s , i_s были получены в примерах 10.2 и 10.3. Подставляя эти матрицы в (10.29), находим

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL_1}\right); & -\frac{1}{sL_1}; & 0; & 0 \\ -\frac{1}{sL_1}; & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL_1} + sC\right); & -sC; & 0 \\ 0; & -sC; & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{sL_2} + sC\right); & -\frac{1}{sL_2} \\ 0; & 0; & -\frac{1}{sL_2}; & \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{sL_2}\right) \end{bmatrix};$$

$$j_{i0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix} \right\} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ i_5(0) \\ 0 \\ 0 \\ i_7(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e/R_1 \\ 0 \\ 0 \\ -j \\ -i_5(0) \\ 0 \\ -i_7(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e/R_1 - i_5^*(0) \\ i_5(0) \\ i_7(0) \\ j - i_7(0) \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что аналогичные выражения могут быть получены и с применением рассмотренного в гл. 4 алгоритма, используемого в ручных методах формирования уравнений электрического равновесия.

Для формирования уравнений электрического равновесия цепи с помощью ЭВМ можно воспользоваться и методом контурных токов. Используя компонентное уравнение цепи в форме Z и учитывая, что токи всех ветвей цепи могут быть выражены через токи главных ветвей с помощью соотношения $i = B' i_{ii}$, называемого контурным преобразованием, нетрудно прийти к системе контурных уравнений цепи в матричной форме

$$Z_{ij} i_{ii} = e_{ii},$$

где i_{ii} — матрица-столбец контурных токов; $Z_{ij} = BZB'$ — матрица контурных сопротивлений; $e_{ii} = B \{Zi, -u, \}$ — матрица-столбец контурных ЭДС; B и B' — матрица главных контуров и транспонированная матрица главных контуров рассматриваемой цепи.

В связи с тем что компонентные матрицы Z и Y содержат в общем случае операторы дифференцирования s и интегрирования s^{-1} , узловые и контурные уравнения цепи для мгновенных значений наряду с производными содержат интегралы от неизвестных функций времени.

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Наличие интегралов в уравнениях электрического равновесия цепи, составленных методами узловых напряжений и контурных токов, значительно затрудняет решение этих уравнений и в течение длительного времени ограничивало возможности применения данных методов при машинном анализе цепей. Интегралы, входящие

в уравнения электрического равновесия, могут быть устранены путем дифференцирования, однако при этом повышается порядок соответствующих уравнений, что также является нежелательным. Поэтому представляет интерес попытка составить уравнения электрического равновесия таким образом, чтобы они вообще не содержали интегралов. Интегралы в уравнениях электрического равновесия возникают только в том случае, когда напряжение емкости выражают через ток

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$$

или ток индуктивности через напряжение

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

Если в качестве независимых переменных выбрать не контурные токи или узловые напряжения, а напряжения емкостей и токи индуктивностей, то уравнения электрического равновесия цепи не будут содержать интегралов от неизвестных функций времени. Такие уравнения называются **уравнениями состояния цепи**, а независимые переменные (токи индуктивностей и напряжения емкостей) — **переменными состояния**. Такое название отражает тот факт, что именно токи индуктивностей и напряжения емкостей определяют запасы энергии в реактивных элементах и, следовательно, характеризуют энергетическое состояние цепи.

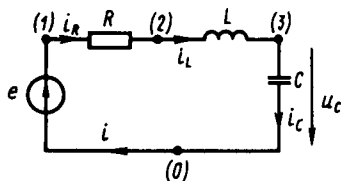


Рис. 10.5. К выводу уравнений состояния

Рассмотрим методику формирования уравнений состояния на примере простейшей последовательной RLC -цепи (рис. 10.5), основная система уравнений электрического равновесия которой имеет вид

$$\begin{aligned} u_R + u_L + u_C &= e; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}; \\ i_R &= i_L = i_C = i; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}; \\ u_R &= Ri_R. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Выбирая в качестве независимых переменных (переменных состояния) напряжение емкости и ток индуктивности, выразим остальные переменные, входящие в эти уравнения, через u_C и i_L :

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C = e; \quad i_L = C \frac{du_C}{dt}. \quad (10.31)$$

Разрешим уравнения (10.31) относительно производных:

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L - u_C + e;$$

$$C \frac{du_C}{dt} = i_L$$

и представим полученную систему уравнений в матричной форме

$$\begin{bmatrix} L; & 0 \\ 0; & C \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R; & -1 \\ 1; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$a \frac{dX}{dt} = bX + du, \quad (10.32)$$

где $X = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$ — вектор переменных состояния; $u = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$ — вектор

внешних воздействий; $a = \begin{bmatrix} L; & 0 \\ 0; & C \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} -R; & -1 \\ 1; & 0 \end{bmatrix}$; $d = \begin{bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 0 \end{bmatrix}$ —

матрицы, элементы которых определяются параметрами пассивных элементов цепи.

Выражение (10.32) является стандартной формой записи уравнений состояния цепи, не содержащей зависимых источников энергии. Очевидно, что число независимых уравнений, составляемых по методу переменных состояния, равно числу независимо включенных реактивных элементов, т. е. порядку сложности цепи. Если исследуемая цепь содержит *топологические вырождения*, к которым относятся емкостные контуры и индуктивные сечения, то система уравнений электрического равновесия цепи наряду с дифференциальными уравнениями (10.32) содержит алгебраические уравнения, составленные на основании второго или первого законов Кирхгофа и отражающие связь между напряжениями емкостей или токами индуктивностей, входящих в соответствующие контуры или сечения.

В ряде случаев, особенно при анализе нелинейных и параметрических цепей, в качестве переменных, относительно которых составляются уравнения состояния цепи, удобно выбирать не токи индуктивностей и напряжения емкостей, а связанные с ними потокоцепления индуктивностей и заряды емкостей.

ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Матрицы a , b и d , входящие в уравнения состояния цепи (10.32), могут быть выражены через компонентные и топологические матрицы исследуемой цепи, однако в общем случае соответствующие соотношения имеют сложный вид [8, 9, 24]. Для того чтобы продемонстрировать методику формирования уравнений состояния в матричной форме, ограничимся рассмотрением цепи, не содержащей управляемых источников и топологических вырождений.

При составлении уравнений состояния используется расширенное топологическое описание цепи, причем при выборе дерева графа необходимо учитывать, что топологические уравнения цепи (10.20) позволяют выразить токи ветвей дерева через токи главных ветвей, а напряжения главных ветвей — через напряжения ветвей дерева. Следовательно, ветви, напряжения которых выступают в качестве независимых переменных, должны быть включены в число ветвей дерева, а ветви, токи которых выбраны в качестве независимых переменных, в число главных ветвей. Таким образом, дерево графа, используемое для составления уравнений состояния, должно включать в себя все ветви с источниками напряжения и емкостями и не должно содержать ветвей с источниками тока и индуктивностями. Дерево графа, удовлетворяющее этим требованиям, называется **собственным деревом**. Для цепей, не имеющих емкостных контуров и индуктивных сечений, всегда можно выделить хотя бы одно собственное дерево [24]*.

Пронумеруем ветви графа цепи следующим образом: сначала источники напряжения, затем емкости, сопротивления, вошедшие в дерево, потом сопротивления, не вошедшие в дерево, индуктивности и источники тока. Составим матрицу сечений-хорд Q_x и разобьем ее на подматрицы по типам ветвей, соответствующих строкам и столбцам матрицы:

$$Q_x = C \begin{matrix} & \begin{matrix} G & L & J \leftarrow \text{главные ветви} \end{matrix} \\ \begin{matrix} E \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{bmatrix} Q_{EG} & Q_{EL} & Q_{EJ} \\ Q_{CG} & Q_{CL} & Q_{CJ} \\ Q_{RG} & Q_{RL} & Q_{RJ} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (10.33)$$

↑
Ветви дерева

Здесь буквой G обозначены главные ветви, содержащие сопротивления.

Разобьем матрицы-столбцы токов ветвей дерева i_b , токов главных ветвей i_x , напряжений ветвей дерева u_b и напряжений главных ветвей u_x на подматрицы по типам ветвей:

$$i_b = \begin{bmatrix} i_E \\ i_C \\ i_R \end{bmatrix}; \quad i_x = \begin{bmatrix} i_G \\ i_L \\ i_J \end{bmatrix}; \quad u_b = \begin{bmatrix} -u_E \\ u_C \\ u_R \end{bmatrix}; \quad u_x = \begin{bmatrix} u_G \\ u_L \\ -u_J \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

С учетом выражений (10.33), (10.34) запишем топологические уравнения цепи (10.20) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} i_E \\ i_C \\ i_R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{EG} & Q_{EL} & Q_{EJ} \\ Q_{CG} & Q_{CL} & Q_{CJ} \\ Q_{RG} & Q_{RL} & Q_{RJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_G \\ i_L \\ i_J \end{bmatrix}; \quad (10.35)$$

*Для цепей с топологическими вырождениями вместо собственного дерева приходится строить так называемое **нормальное дерево**, которое содержит все независимые источники напряжения, максимальное число емкостей, минимальное число индуктивностей и не включает в себя независимых источников тока.

$$\begin{bmatrix} u_G \\ u_L \\ -u_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{EG} & Q'_{CG} & Q'_{RG} \\ Q'_{EL} & Q'_{CL} & Q'_{RL} \\ Q'_{EJ} & Q'_{CJ} & Q'_{RJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_K \\ u_C \\ u_R \end{bmatrix}. \quad (10.36)$$

(Знак минус перед напряжениями ветвей с источниками напряжения или тока объясняется тем, что положительные направления напряжений данных ветвей противоположны направлениям токов ветвей, т. е. направлениям этих ветвей.)

Компонентные уравнения для каждой группы невырожденных ветвей цепи также можно представить в матричной форме:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; u_L = L \frac{di_L}{dt}; u_R = R i_R; i_G = G u_G, \quad (10.37)$$

где C, L, R, G — диагональные матрицы емкостей, индуктивностей, сопротивлений, включенных в ветви дерева, и проводимостей, входящих в главные ветви.

Из уравнений (10.35) — (10.37) найдем напряжения индуктивных и токи емкостных и резистивных ветвей:

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = -Q'_{EL} u_K + Q'_{CL} u_C + Q'_{RL} u_R; \\ i_C &= C \frac{du_C}{dt} = -Q_{CG} i_G - Q_{CL} i_L - Q_{CJ} i_J; \\ i_R &= R^{-1} u_R = -Q_{RG} i_G - Q_{RL} i_L - Q_{RJ} i_J; \\ i_G &= G u_G = -G Q'_{EG} u_K + G Q'_{CG} u_C + G Q'_{RG} u_R. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Исключая из (10.38) токи резистивных главных ветвей i_G , получаем

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= -Q'_{EL} u_K + Q'_{CL} u_C + Q'_{RL} u_R; \\ C \frac{du_C}{dt} &= Q_{CG} G Q'_{EG} u_K - Q_{CG} G Q'_{CG} u_C - Q_{CG} G Q'_{RG} u_R - Q_{CL} i_L - Q_{CJ} i_J; \\ \{R^{-1} + Q_{RG} G Q'_{RG}\} u_R &= Q_{RG} G Q'_{EG} u_K - Q_{RG} G Q'_{CG} u_C - Q_{RL} i_L - Q_{RJ} i_J. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Используя третье из уравнений (10.39) для исключения u_R из первых двух уравнений, систему уравнений (10.39) можно привести к виду (10.32).

Пример 10.5. Составим уравнения состояния цепи, схема которой приведена на рис. 10.1, а.

Данная цепь имеет единственное собственное дерево, включающее ветви с источником напряжения e , емкостями C_1, C_2 и сопротивлением R_3 (см. рис. 10.1, б). Матрица сечений-хорд рассматриваемой цепи, соответствующая данному собственному дереву, получена в примере 10.1. Разбивая матрицу Q_X на подматрицы по типам ветвей, получим

$$Q_X = \begin{matrix} & R_1 & R_2 & L_1 & j_1 & & G & L & J \\ \begin{matrix} e_1 \\ C_1 \\ C_2 \\ R_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} & = C \begin{bmatrix} Q_{EG} & Q_{EL} & Q_{EJ} \\ Q_{CG} & Q_{CL} & Q_{CJ} \\ Q_{RG} & Q_{RL} & Q_{RJ} \end{bmatrix}, \end{matrix}$$

где $Q_{EG} = [-1; 0; 0]$; $Q_{EL} = [0]$; $Q_{EJ} = [0]$;

$$\begin{aligned} Q_{CG} &= \begin{bmatrix} -1; & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; Q_{CL} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; Q_{CJ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ Q_{RG} &= [0; 0]; Q_{RL} = [-1]; Q_{RJ} = [-1]. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения совместно с компонентными матрицами

$$C = \begin{bmatrix} C_1; & 0 \\ 0; & C_2 \end{bmatrix}; L = [L_1]; R = [R_3]; G = \begin{bmatrix} R_1^{-1}; & 0 \\ 0; & R_2^{-1} \end{bmatrix},$$

находим уравнения состояния рассматриваемой цепи в форме (10.39):

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} &= -[0] [e_1] + [1; -1] \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + [-1] [u_{R3}]; \\ \begin{bmatrix} C_1; & 0 \\ 0; & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] - \begin{bmatrix} R_1^{-1} + R_2^{-1}; & -R_2^{-1} \\ -R_2^{-1}; & R_2^{-1} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u_{R3}] - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [i_{L1}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [j_1]; \\ \{[R_3]^{-1} + [0]\} [u_{R3}] &= [0] [e_1] - [0; 0] \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} - [-1] [i_{L1}] - [-1] [j_1]. \end{aligned}$$

Исключим $u_{R3} = R_3(i_{L1} + j_1)$ из первых двух уравнений и объединим их в одно матричное уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -R_3; & 1; & -1 \\ -1; & -(R_1^{-1} + R_2^{-1}); & R_2^{-1} \\ 1; & R_2^{-1}; & -R_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0; & -R_3 \\ R_1^{-1}; & 0 \\ 0; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ j_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ПОНЯТИЕ О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

При решении частных задач теорий цепей, таких, как исследование цепей нулевого порядка или анализ установившегося режима постоянного тока в линейных или нелинейных цепях, процессы в электрических цепях можно описывать системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений, однако в общем случае уравнения электрического равновесия произвольной идеализированной цепи с сосредоточенными параметрами представляют собой систему интегродифференциальных уравнений. Интегрирование таких уравнений в современных программах анализа цепей осуществляется, как правило, численными методами, основанными на замене рассматриваемого непрерывного интервала времени последователь-

ностью точек $t_0, t_1, \dots, t_n$ на временной оси. Искомая реакция цепи $s=s(t)$ в этом случае приблизительно представляется множеством дискретных значений $s_0=s(t_0), s_1=s(t_1), \dots, s_n=s(t_n), \dots$, определяемых в результате последовательного выполнения ряда шагов интегрирования.

Известные методы численного интегрирования принято разделять на явные и неявные. При использовании *явных методов* для получения s_n (решения системы уравнений на n шаге интегрирования) используют результаты, полученные на m предыдущих шагах:

$$s_n = F(s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-m}). \quad (10.40)$$

В *неявных методах* для нахождения решения s_n на каждом шаге интегрирования необходимо решить уравнение

$$F(s_n, s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-m}) = 0, \quad (10.41)$$

которое в общем случае является нелинейным относительно s_n . Уравнение (10.41) решают с помощью различных методов последовательного приближения, причем для определения значений s_n на каждом шаге интегрирования требуется выполнить несколько последовательных приближений (*итераций*).

Очевидно, что по сравнению с явными методами реализация одного шага интегрирования с использованием неявных методов требует большего объема вычислений, а следовательно, и больших затрат ресурсов ЭВМ (памяти и машинного времени). Поэтому практическое применение неявных методов стало возможным только в последние годы, в результате разработки мощных ЭВМ, обладающих высоким быстродействием и значительным объемом памяти. В большинстве программ машинного анализа, разработанных до появления таких ЭВМ, использовались явные методы интегрирования, что объясняется относительной простотой табулирования функции (10.40) на каждом шаге интегрирования. В то же время явные методы интегрирования обладают двумя существенными недостатками:

1) Для использования этих методов уравнения электрического равновесия должны быть представлены в *форме Коши*, т. е. разрешены относительно производных от искомой реакции цепи $ds/dt=f(s, t)$. Из всех рассмотренных методов только метод переменных состояния позволяет получить систему уравнений электрического равновесия цепи в форме Коши, причем процесс машинного формирования уравнений электрического равновесия этим методом более трудоемок по сравнению с методами узловых напряжений или контурных токов.

2) Явные методы критичны к выбору шага интегрирования $h=t_n-t_{n-1}$. При $h>h_{кр}$, где $h_{кр}$ — критическое значение, приближенно равное наименьшей из постоянных времени рассматриваемой

цепи, происходит потеря устойчивости вычислений, приводящая к неограниченному возрастанию погрешности решения. Необходимость интегрирования с малым шагом значительно увеличивает трудоемкость анализа и существенно ограничивает применение явных методов для анализа цепей большой сложности.

Неявные методы интегрирования не требуют представления исходных уравнений обязательно в форме Коши. Они менее чувствительны к выбору шага интегрирования. Поэтому, несмотря на высокую трудоемкость определения решения на каждом шаге интегрирования, суммарные затраты машинного времени при использовании неявных методов могут оказаться значительно меньше, чем при применении явных методов.

Наибольшую известность среди неявных методов интегрирования получил метод ФДН (формулы дифференцирования назад), используемый в большинстве эксплуатируемых в настоящее время программ автоматизированного анализа цепей [9].

Эффективность любого комплекса программ автоматизированного анализа цепей определяется не только рациональным выбором методов интегрирования интегродифференциальных уравнений, но также в значительной степени зависит от выбора методов решения систем линейных (СЛАУ) и нелинейных (СНАУ) алгебраических уравнений. Для решения СЛАУ в программах автоматизированного анализа цепей наиболее часто применяют различные модификации метода исключения Гаусса, в частности методы, основанные на представлении матрицы коэффициентов СЛАУ в виде произведения нижней L и верхней U треугольных матриц (LU -преобразование). Решение СНАУ обычно производится с помощью различных модификаций метода Ньютона или с помощью метода установления, при котором установившийся режим в цепи, описываемый СНАУ, рассматривается как предел, к которому стремится при затухании переходный процесс в рассматриваемой цепи.

§ 10.4. ОСОБЕННОСТИ СОВРЕМЕННЫХ ПРОГРАММ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

ВЫБОР МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ. ПОНЯТИЕ О ПОКОЛЕНИЯХ ПРОГРАММ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

Как правило, каждая программа машинного анализа цепей бывает ориентирована на использование определенного метода формирования системы уравнений электрического равновесия, поэтому необходимость выбора метода формирования системы уравнений возникает только при разработке новых алгоритмов и программ анализа. В течение длительного времени для составления уравнений

электрического равновесия применялся преимущественно метод переменных состояния. Основной положительной особенностью этого метода является формирование уравнений электрического равновесия цепи непосредственно в форме Коши, что допускает применение явных методов интегрирования. Кроме того, выбор в качестве независимых переменных токов индуктивностей и напряжений емкостей значительно облегчает определение вектора начальных условий цепи, необходимого для интегрирования системы уравнений (10.32).

К недостаткам метода переменных состояния относится значительная сложность формирования системы уравнений электрического равновесия, особенно при наличии в цепи топологических вырождений. Для устранения топологических вырождений в схему замещения исследуемой цепи вводятся дополнительные малые сопротивления (последовательно с емкостями или источниками напряжения) или проводимости (параллельно индуктивностям или источникам тока). Введение таких элементов приводит к возникновению малых постоянных времени и, следовательно, к уменьшению шага интегрирования по времени и увеличению общей трудоемкости вычислений. Таким образом, недостатки метода переменных состояния дополняются отмеченными ранее недостатками явных методов интегрирования.

Программы автоматизированного анализа цепей, основанные на использовании метода переменных состояния и явных методов интегрирования, относят к *программам первого поколения*. Такие программы разрабатывались до 1970—1972 гг. и в связи с отмеченными ограничениями на шаг интегрирования по времени и большой трудоемкостью формирования уравнений состояния позволяли анализировать цепи, описываемые системами не более чем из 30—50 уравнений. Характерными особенностями программ первого поколения являются отсутствие диалога, сложность входного языка, ограниченность и закрытость для пополнения библиотек моделей элементов, скудность набора процедур анализа.

В связи с разработкой ЭВМ с большим объемом памяти и высоким быстродействием создались условия для широкого применения неявных методов интегрирования, лежащих в основе *программ второго поколения* (1975—1980 гг.). В таких программах формирование уравнений электрического равновесия производится, как правило, с помощью метода узловых напряжений, который легко поддается автоматизации, причем при составлении уравнений отпадает проблема топологических вырождений. Метод контурных токов не обладает какими-либо преимуществами по сравнению с методом узловых напряжений, однако для контурных уравнений процесс формирования является более трудоемким, чем для узловых уравнений в связи с необходимостью выбора дерева графа исследуемой цепи и связанной с этим деревом системы независимых уравнений. В большинстве программ второго поколения хранение информации

о топологии цепи и решение соответствующих уравнений производятся с учетом разреженности топологических и компонентных матриц; пользователю предоставляется возможность ограниченного диалога, а также пополнения библиотеки моделей элементов.

Программы третьего поколения (1980 — 1990 гг.), как и программы второго поколения, основаны на применении различных модификаций метода узловых напряжений в сочетании с неявными или комбинированными (явно-неявными) методами интегрирования. В отличие от программ второго поколения программы третьего поколения характеризуются простыми входными языками, широким использованием диалога, наличием графического интерфейса, большим объемом и открытостью для пополнения библиотек моделей и предоставляют пользователю широкий диапазон различных процедур анализа и оптимизации цепей. Подробные сведения об отечественных и зарубежных программах анализа можно найти в работах [8, 9, 21 — 25].

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

В течение длительного времени разработка программ автоматизированного анализа цепей в основном происходила в рамках традиционного подхода, основанного на исследовании полной модели цепи, получаемой путем объединения моделей отдельных элементов цепи (транзисторов, резисторов и т. п.), построенных путем замены каждого из этих элементов идеализированной цепью, состоящей из двухполюсных или многополюсных идеализированных элементов. Возможности такого подхода были практически исчерпаны еще в программах второго поколения, причем программы как второго, так и третьего поколений не позволяют с приемлемыми затратами времени анализировать процессы в сложных современных электронных устройствах, насчитывающих сотни тысяч и даже миллионы компонентов. В связи с необходимостью проектирования и исследования столь сложных устройств в последние годы начали интенсивно развиваться методы анализа цепей, основанные на уменьшении трудоемкости анализа путем упрощения (сокращения) полной модели цепи.

К настоящему времени сформировалось несколько перспективных подходов к решению этой задачи, которые порознь или в различных сочетаниях друг с другом закладываются в основу разрабатываемых программ четвертого поколения: применение методов подсхем; макро моделирование; логическое моделирование; проблемная адаптация.

Методы подсхем, называемые также методами диакоптики, позволяют снижать размерность решаемой задачи путем разбиения полной схемной модели на ряд подсхем с последующим анализом

процессов в каждой подсхеме и минимизацией невязок переменных, описывающих связи между подсхемами [8, 10, 21, 22, 25].

Макромоделирование основано на укрупнении элементов, т. е. на переходе от моделирования резисторов, транзисторов и других простейших компонентов к моделированию отдельных функциональных узлов и фрагментов больших интегральных схем (упрощенные модели таких укрупненных компонентов называются макромоделями). В отличие от методов подсхем, где снижение вычислительных затрат производится без потери точности, при макромоделировании уменьшение трудоемкости вычислений достигается путем некоторого снижения точности моделирования [22, 23, 25].

Детальному анализу процессов в сложной цепи, производимому на основе численного решения уравнений электрического равновесия цепи, может быть противопоставлено упрощенное исследование этих процессов на основе логического или событийного моделирования, базирующегося на применении чрезвычайно упрощенных моделей отдельных функциональных узлов цепи. В связи с тем что точность такого моделирования является невысокой, его часто используют в сочетании с традиционными методами теории цепей; при этом анализ цепи может производиться в два этапа: сначала с помощью методов логического моделирования выделяются узлы или подсхемы, активизированные при данном внешнем воздействии, а затем производится детальный анализ процессов в активизированных участках цепи. Данный подход можно рассматривать как разновидность метода разделения движений (методов «быстрых» и «медленных» подсхем, метода учета латентности), при котором электрические процессы, протекающие с различными скоростями, исследуются раздельно [25].

Широкие возможности для существенного сокращения трудоемкости анализа при сохранении приемлемой точности открывает применение проблемной адаптации, заключающейся в «приспособлении» (точнее, в автоматической настройке) программы машинного анализа к особенностям решаемой задачи. При этом на основе информации о ходе вычислительного процесса могут изменяться как используемые вычислительные методы и их численные параметры, так и структура и параметры моделей отдельных компонентов или фрагментов исследуемой цепи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

У пытливого читателя, наслышанного о всемогуществе ЭВМ и познакомившегося на практике с широкими возможностями современных программ автоматизированного анализа цепей, может возникнуть естественный вопрос: «А необходимо ли вообще радиоинженеру знание теории цепей, если любая характеристика цепи может быть достаточно просто определена с помощью программ машинного анализа цепей, причем для этого не требуется даже знания законов Ома и Кирхгофа, т. е. не приведет ли дальнейшее развитие САПР к отмиранию теории цепей, хотя бы как учебной дисциплины?»

Действительно, характерная тенденция в развитии программ машинного анализа цепей заключается в постоянном повышении удобства работы с программами и кажущемся снижении требований к квалификации пользователей, благодаря чему значительная часть проектировщиков радиоэлектронной аппаратуры может не вникать во все тонкости используемых методов анализа. Однако эффективное применение САПР, особенно грамотная постановка исходной задачи и правильная оценка полученных результатов, возможно только с помощью высококвалифицированных специалистов, для которых программы автоматизированного анализа цепей — это только удобный и чрезвычайно эффективный инструмент, позволяющий сократить рутинную работу и освободить время для творческого осмысливания задачи и принятия решений. Более того, только специалисты, во всех тонкостях освоившие какую-либо предметную область, например теорию цепей, способны развивать ее далее и, в частности, создавать новые, еще более совершенные программы автоматизированного проектирования, предназначенные для использования в данной предметной области.

Таким образом, неправильно противопоставлять классические и автоматизированные методы анализа цепей, так как они образуют единое целое и будут и дальше развиваться совместно, дополняя и взаимообогащая друг друга. Потребность в создании новых типов радиоэлектронных устройств и систем будет стимулировать разработку новых программ автоматизированного анализа и развитие новых разделов теории цепей, а успехи в теории цепей будут способствовать повышению эффективности программ схемотехнического проектирования и дальнейшему прогрессу в создании радиоэлектронных и электротехнических устройств.

Ограниченный объем книги не позволил раскрыть все богатство идей и методов, накопленных в современной теории цепей. Автор ставил перед собой более скромную задачу — подготовить будущих радиоинженеров к практическому применению основных методов теории цепей и создать необходимую базу для дальнейшего

накопления и усвоения знаний в области теории радиоэлектронных цепей.

Глубокое усвоение изложенных методов и дальнейшее проникновение в теорию цепей невозможны без практического применения полученных знаний и без самостоятельной работы с научной литературой, поэтому, завершая книгу, мы отсылаем заинтересованного читателя к многочисленным монографиям и статьям, освещающим важнейшие достижения и новейшие идеи как в теории цепей, так и в смежных с ней областях науки и техники.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Таблица оригиналов и изображений по Лапласу

Изображение	Оригинал при $t \geq 0$	Примечание
$1/p$	1	
$1/p^2$	t	
$1/p^{n+1}$	$t^n/n!$	n — целое положительное число
1	$\delta(t)$	
$1/(p+\alpha)$	$e^{-\alpha t}$	
$1/[p(p+\alpha)]$	$(1-e^{-\alpha t})/\alpha$	
$1/[p^2(p+\alpha)]$	$(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)/\alpha^2$	
$e^{j\beta}/(p-j\alpha)$	$e^{j(\alpha t + \beta)}$	
$1/(p+\alpha)^2$	$t e^{-\alpha t}$	
$1/(p+\alpha)^n$	$e^{-\alpha t} t^{n-1}/(n-1)!$	n — целое положительное число
$p/(p+\alpha)^2$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	
$1/[p(p+\alpha)^2]$	$[1-e^{-\alpha t}(1+\alpha t)]/\alpha^2$	
$1/[(p+\alpha)(p+\beta)]$	$(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})/(\beta - \alpha)$	
$1/[p(p+\alpha)(p+\beta)]$	$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta-\alpha} \left(\frac{e^{-\beta t}}{\beta} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)$	
$p/[(p+\alpha)(p+\beta)]$	$\frac{1}{\beta-\alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$	
$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$	

Изображение	Оригинал при $t \geq 0$	Примечание
$\frac{(p \cos \beta - \alpha \sin \beta)}{(p^2 + \alpha^2)}$	$\cos(\alpha t + \beta)$	
$\frac{(p \sin \beta + \alpha \cos \beta)/(p^2 + \alpha^2)}{(p^2 - \alpha^2)/(p^2 + \alpha^2)^2}$	$\sin(\alpha t + \beta)$	
$\frac{(p + \alpha)/[(p + \alpha)^2 + \beta^2]}{\beta/[(p + \alpha)^2 + \beta^2]}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	
$\frac{\beta/[(p + \alpha)^2 + \beta^2]}{(p + \alpha)/[(p + \alpha)^2 - \beta^2]}$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	
$\frac{\beta/[(p + \alpha)^2 - \beta^2]}{\alpha/(p^2 - \alpha^2)}$	$e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \beta t$	
$\frac{\alpha/(p^2 - \alpha^2)}{p/(p^2 - \alpha^2)}$	$e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t$	
$\frac{1/\sqrt{p}}{1/\sqrt{p + \alpha}}$	$\operatorname{sh} \alpha t$	
$\frac{1/\sqrt{p + \alpha}}{1/\sqrt{p}}$	$\operatorname{ch} \alpha t$	
$\frac{1}{p \operatorname{ch} \alpha p}$	$1/\sqrt{\pi t}$	
$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha p} \right)$	$e^{-\alpha t} / \sqrt{\pi t}$	
$\frac{1}{p \operatorname{sh} \alpha p}$	2 при $t \in [(4k-3)\alpha; (4k-1)\alpha[$ 0 при $t \notin [(4k-3)\alpha; (4k-1)\alpha[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha p} \right)$	1 при $t \in [(4k-5)\alpha; (4k-3)\alpha[$ -1 при $t \in [(4k-3)\alpha; (4k-1)\alpha[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$\frac{1}{p \operatorname{th} \alpha p}$	$2k$ при $t \in [(2k-1)\alpha; (2k+1)\alpha[$ 0 при $t \in]0, \alpha[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$\frac{\operatorname{th} \alpha p}{p}$	1 при $t \in [(4k-4)\alpha; (4k-2)\alpha[$ -1 при $t \in [(4k-2)\alpha; 4\alpha k[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$1/(p \operatorname{th} \alpha p)$	$2k-1$ при $t \in [2(k-1)\alpha; 2\alpha k[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$

**Приложение 2. Соотношения между первичными параметрами
проходных четырехполосников**

	Y	Z	H	G	A	B
Y	$Y_{11}; Y_{12}$	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}; -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$	$\frac{1}{H_{11}}; -\frac{H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{22}}; \frac{G_{12}}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}; -\frac{\Delta_A}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}; -\frac{1}{B_{12}}$
	$Y_{21}; Y_{22}$	$-\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}; \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}}; \frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$-\frac{G_{21}}{G_{22}}; \frac{1}{G_{22}}$	$-\frac{1}{A_{12}}; \frac{A_{11}}{A_{12}}$	$-\frac{\Delta_B}{B_{12}}; \frac{B_{22}}{B_{12}}$
		$\frac{\Delta_Z}{\Delta_Z}; \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}}; \frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{22}}; \frac{G_{12}}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}; -\frac{\Delta_A}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}; -\frac{1}{B_{12}}$
		$-\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}; \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}}; \frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$-\frac{G_{21}}{G_{22}}; \frac{1}{G_{22}}$	$-\frac{1}{A_{12}}; \frac{A_{11}}{A_{12}}$	$-\frac{\Delta_B}{B_{12}}; \frac{B_{22}}{B_{12}}$

	Y	Z	H	G	A	B
Z	$\frac{Y_{22} - Y_{12}}{\Delta_Y \Delta_Y}$ $\frac{-Y_{21} Y_{11}}{\Delta_Y \Delta_Y}$	$Z_{11}; Z_{12}$ $Z_{21}; Z_{22}$	$\frac{\Delta_H}{H_{11}}; \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $\frac{-H_{21}}{H_{22}}; \frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}}; \frac{-G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{11}}; \frac{\Delta_G}{G_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}; \frac{\Delta_A}{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}}; \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}; \frac{1}{B_{21}}$ $\frac{B_{21}}{B_{21}}; \frac{B_{11}}{B_{21}}$
H	$\frac{1}{Y_{11}}; \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}}; \frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}; \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}; \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{H_{11}}{H_{21}}; \frac{H_{12}}{H_{21}}$ $\frac{H_{21}}{H_{21}}; \frac{H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{G_{22}}{\Delta_G}; \frac{-G_{12}}{\Delta_G}$ $\frac{-G_{21}}{\Delta_G}; \frac{G_{11}}{\Delta_G}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}; \frac{\Delta_A}{A_{22}}$ $\frac{-1}{A_{22}}; \frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}}; \frac{1}{B_{11}}$ $\frac{B_{11}}{B_{11}}; \frac{B_{11}}{B_{11}}$
G	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}; \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}; \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Z_{11}}; \frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}}; \frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta_H}; \frac{-H_{12}}{\Delta_H}$ $\frac{\Delta_H}{\Delta_H}; \frac{-H_{11}}{\Delta_H}$	$\frac{1}{G_{11}}; \frac{G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{22}}; \frac{G_{22}}{G_{22}}$	$\frac{A_{11}}{A_{11}}; \frac{-\Delta_A}{A_{11}}$ $\frac{1}{A_{11}}; \frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}; \frac{-1}{B_{22}}$ $\frac{B_{22}}{B_{22}}; \frac{B_{12}}{B_{22}}$
A	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}; \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{21}}; \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}; \frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}}; \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-\Delta_H}{H_{21}}; \frac{-H_{11}}{H_{21}}$ $\frac{H_{21}}{H_{21}}; \frac{-H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}; \frac{G_{22}}{G_{21}}$ $\frac{G_{11}}{G_{21}}; \frac{\Delta_G}{G_{21}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}; \frac{A_{12}}{A_{21}}$ $\frac{A_{21}}{A_{21}}; \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{\Delta_B}; \frac{B_{12}}{\Delta_B}$ $\frac{B_{21}}{\Delta_B}; \frac{B_{11}}{\Delta_B}$
B	$\frac{-Y_{11}}{Y_{12}}; \frac{-1}{Y_{12}}$ $\frac{Y_{12}}{Y_{12}}; \frac{-Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}; \frac{\Delta_Z}{Z_{12}}$ $\frac{1}{Z_{12}}; \frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}; \frac{H_{11}}{H_{12}}$ $\frac{H_{22}}{H_{12}}; \frac{\Delta_H}{H_{12}}$	$\frac{-\Delta_G}{G_{12}}; \frac{-G_{22}}{G_{12}}$ $\frac{-G_{11}}{G_{12}}; \frac{-1}{G_{12}}$	$\frac{A_{22}}{\Delta_A}; \frac{A_{12}}{\Delta_A}$ $\frac{A_{21}}{\Delta_A}; \frac{A_{11}}{\Delta_A}$	$\frac{B_{11}}{B_{21}}; \frac{B_{12}}{B_{21}}$ $\frac{B_{21}}{B_{21}}; \frac{B_{22}}{B_{21}}$

Приложение 3. Определители систем первичных параметров
проходных четырехполюсников

	Y	Z	H	G	A	B
Δ_Y	$\frac{Y_{11} Y_{22} -}{-Y_{12} Y_{21}}$	$\frac{1}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{22}}{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{12}}$	$\frac{B_{21}}{B_{12}}$
Δ_Z	$\frac{1}{\Delta_Y}$	$\frac{Z_{11} Z_{22} -}{-Z_{12} Z_{21}}$	$\frac{H_{11}}{H_{22}}$	$\frac{G_{22}}{G_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{21}}$	$\frac{B_{12}}{B_{21}}$
Δ_H	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$	$\frac{H_{11} H_{22} -}{-H_{12} H_{21}}$	$\frac{1}{\Delta_G}$	$\frac{A_{11}}{A_{22}}$	$\frac{B_{22}}{B_{11}}$
Δ_G	$\frac{Y_{11}}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}}$	$\frac{1}{\Delta_H}$	$\frac{G_{11} G_{22} -}{-G_{12} G_{21}}$	$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{B_{11}}{B_{22}}$

	Y	Z	H	G	A	B
Δ_A	$\frac{Y_{12}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$	$\frac{H_{12}}{H_{21}}$	$\frac{G_{12}}{G_{21}}$	$\frac{A_{11}A_{22} -}{-A_{12}A_{21}}$	$\frac{1}{\Delta_B}$
Δ_B	$\frac{Y_{21}}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{12}}$	$\frac{H_{21}}{H_{12}}$	$\frac{G_{21}}{G_{12}}$	$\frac{1}{\Delta_A}$	$\frac{B_{11}B_{22} -}{-B_{12}B_{21}}$

**Приложение 4. Соотношения между первичными параметрами
взаимных и симметричных четырехполосников**

Система параметров	Взаимный четырехполосник	Симметричный четырехполосник
Y	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{12} = Y_{21}; Y_{11} = Y_{22}$
Z	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{12} = Z_{21}; Z_{11} = Z_{22}$
H	$H_{12} = -H_{21}$	$H_{12} = -H_{21};$ $H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1$
G	$G_{12} = -G_{21}$	$G_{12} = -G_{21};$ $G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 1$
A	$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$	$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1;$ $A_{11} = A_{22}$
B	$B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1$	$B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1;$ $B_{11} = B_{22}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амплитуда гармонической функции 65 — комплексная 77, 342 Анализ цепей 54 Аппроксимация вольт-амперных характеристик 290 Аргумент комплексного сопротивления 83 — — числа 73 — комплексной проводимости 83 — частотной характеристики 164 Базис элементный 504 Баланс мощностей 112 — напряжений 43 — токов 42 Бел 429 Биеция 330 Вершина графа 46, 264 Ветвь электрической цепи 38 — графа 46, 264 — главная 49 — дерева 49	Включение встречное 143 — звездой 38 — каскадное 408 — обратное четырехполосника 420 — параллельное 38 — — четырехполосников 411 — параллельно-последовательное 412 — последовательное 38 — — четырехполосников 412 — последовательно-параллельное 412 — прямое четырехполосника 419 — согласное 143 — треугольником 38 Волна отраженная 468 — падающая 467 Вольт-ампер 112 — реактивный 112 Входы электрической цепи 161 Выходы внешние цепи 9, 34 Выпрямление 289 Выходы электрической цепи 162 Гармоники 299 Гиратор 447

- Годограф 164
- Граница полосы пропускания 193, 453
- Граф 46
 - двудольный 47
 - конечный 271
 - направленный 46
 - непланарный 48
 - ориентированный 46
 - планарный 48
 - плоский 48
 - прохождения сигналов 46
 - расширенный 47
 - связный 49
 - сигнальный 46, 264
 - сокращенный 47
 - топологический 46
- Графа связи 49
- Графы гомеоморфные 47
 - изоморфные 47
 - Понтрягина — Куратовского 48
 - равносильные 266
- Двухполосник 37
 - автономный 257
 - активный 28, 59
 - неавтономный 258
 - неэлектрически управляемый 278
 - пассивный 16, 59
 - реактивный 509
- Декремент колебания логарифмический 326
- Дельта-функция 353
- Дерево графа 49
- Децибел 429
- Диаграмма нулей и полюсов 348
- Длина волны 468
 - электрическая 484
- Добротность индуктивной катушки 178
 - конденсатора 178
 - контура 182, 197, 200, 204
 - — эквивалентная 197, 200
- Дробь цепная 126
- Дуальность 26
- Емкость 19
 - динамическая 19
 - линейная 20
 - нелинейная 20
 - статическая 19
- Зажимы внешние 9
 - входные 161
 - выходные 161
 - одноименные 146
- Закон Ома в комплексной форме 85
 - — в операторной форме 335
 - — для мгновенных значений 16
 - — электромагнитной индукции 19
- Законы Кирхгофа в комплексной форме 86
 - — в операторной форме 335
 - — для мгновенных значений 18
 - коммутации 308
- Значение действующее 70
 - комплексное действующее 81
 - мгновенное напряжения 11
 - тока 10
 - э. д. с. 12
 - средневыпрямленное 69
 - среднее за период 69
 - среднеквадратическое 70
- Избирательность 193
- Изображение операторное 332
 - по Лапласу 332
- Изоморфность 47
- Импульс единичный 353
- Инверсия ветви 270
- Индуктивности связанные 142
- Индуктивность 22
 - взаимная 142
 - дифференциальная 23
 - статическая 23
- Интеграл Дюамеля (наложения) 364
- Интенсивность внешнего воздействия 62
- Интерполяция 293
- Инцидентность 47
- Искажения нелинейные 304
- Исключение петли 269
- Исток сигнального графа 265
- Источник бесконечной мощности 29
 - вносимый 216
 - вырожденный 137
 - зависимый 34
 - линеаризованный 31
 - — гармонического тока или напряжения 136
 - линейно управляемый 35
 - напряжения 28
 - — идеальный 28
 - невырожденный 137
 - независимый 34
 - неуправляемый 34
 - первичный 8
 - постоянного напряжения 28
 - тока 29
 - — идеальный 29
 - управляемый 34
 - энергии вторичный 8
 - — первичный 8
 - э. д. с. 28
 - — идеальный 28
- Катушки индуктивности связанные 142
- Коммутация некорректная 308
 - определение 306
- Комплекс мгновенный 76
 - текущий 76
- Конденсатор 19
 - схемы замещения 27, 177

- Контур вторичный 211
 - главный 50
 - графа 48, 265
 - емкостной 312
 - параллельный 198
 - первичный 211
 - последовательный 177
 - фазовый 524
- Контура устранение 269
- Контуры независимые 46
 - связанные 211
 - соприкасающиеся 266
- Коэффициент бегущей волны 479
 - включения емкости 210
 - индуктивности 205
 - гармоник 305
 - гирации 448
 - затухания контура 324
 - мощности 115
 - ослабления линии 468
 - отражения 471
 - передачи по напряжению 165
 - по току 165
 - полезного действия 118
 - распространения 465, 466
 - операторный 465
 - связи между индуктивностями 147
 - контурами 213
 - стабилизации 284
 - линии 501
 - управления источником 36
 - фазы линии 468
- Кривая нагрузочная 286
- Критерии согласования 116
 - физической реализуемости 505
- Линия без искажений 490
 - задержки 490
 - неоднородная 463, 499
 - однородная 463
 - резистивная 463, 496
 - резистивно-емкостная 463, 497
 - экспоненциальная 500
- Матрица волновая 481
 - главных контуров 536
 - сечений 535
 - компонентная 542
 - контурных сопротивлений 233
 - э. д. с. 233
 - особенная 375
 - неопределенная 377
 - проводимостей 377
 - сопротивлений 544
 - проводимостей цепи 544
 - разреженная 547
 - рассеяния 481
 - соединений 534
 - сокращенная узлов 534
 - структурная 534
 - узлов 534
 - полная 534
 - узловых проводимостей 239
 - токов 239
- Метод выбранных точек 293
 - выделения простейших составляющих 514
 - выравнивания 291
 - интеграла Дюамеля 364
 - Кауэра 518
 - классический 313
 - анализа переходных процессов 313
 - комплексных амплитуд 72, 87
 - контурных токов 229, 547
 - наименьших квадратов 294
 - наложения 250
 - напряжений ветвей 236
 - операторный 340
 - переменных состояния 531
 - пробных источников 258
 - разложения в цепную дробь 518
 - символический 72
 - спектральный 363
 - токов ветвей 225
 - узловых напряжений 236, 547
 - обобщенный 391, 394
 - Фостера 514
- Многополосник автономный 371
 - активный 371
 - взаимный 372
 - неавтономный 371
 - невзаимный 372
 - пассивный 371
- Модуль 82
 - комплексного числа 74
 - комплексной проводимости 83
 - комплексной частотной характеристики 168
- Мощность активная 89, 110
 - комплексная 110
 - мгновенная 13
 - полная 110
 - реактивная 110
- Нагрузка согласованная линии 473
 - четырехполосника 422
- Направление напряжения 11, 37
 - положительное 11
 - обхода контура 40
 - сечения 51
 - тока 11, 37
 - положительное 11
 - э. д. с. 12
- Напряжение 11
 - комплексное 81
 - узловое 236
 - холостого хода 257, 419
- Настройки связанных контуров 217

- Нули функции комплексного переменного 348
- Нумерация ветвей 39
 - контуров 50
 - сечений 50
 - узлов 40
- Объединение ветвей 268
- Огибающая 326
- Ограничение колебаний 289
- Окна графа 48
- Оператор вращения 78
 - преобразования Лапласа 332
- Описание цепи топологическое 36
- Определитель графа 273
- Оригиналы функций времени 72
- Параметры волновые 471
 - вторичные 424
 - — четырехполосника 424
 - короткого замыкания 376
 - первичные 375
 - — четырехполосника 424
 - погонные 61
 - характеристические 424
- Передача ветви 264
 - контура 265
 - мощности в нагрузку 116
 - пути 265
- Период 66
- Петли устранение 269
- Плоскость комплексная 74
- Подграф 47
- Полоса задерживания фильтра 450
 - непрозрачности фильтра 450
 - пропускания контура 193
 - — фильтра 450
- Полосы функции комплексного переменного 348
 - элементов 37
- Порт 162
- Порядок сложности цепи 63, 311
- Постоянная времени 318, 319, 320, 326
 - ослабления 429
 - передачи характеристическая 424
 - фазы 429
- Потенциал 11
- Поток магнитный 23, 142
- Потокоцепление 22, 143
- Преобразование звезды в треугольник 129
 - контурное 551
 - Лапласа 332
 - треугольника в звезду 129
 - узловое 548
- Преобразования изоморфные 47
 - сигнальных графов 268
 - эквивалентные 119
- Приемники энергии 8
- Принцип наложения 64, 249
 - суперпозиции 64, 551
- Проводимость 18
 - взаимная между узлами 238
 - внутренняя 33
 - гираторная 448
 - комплексная 83
 - операторная 336
 - передаточная 164
 - полная входная 83
 - узла собственная 238
- Производная обобщенная 359
- Процесс неустойчивый 67
 - переходной 67, 306
 - свободный 313
 - установившийся 66
- Прямая нагрузочная 286
- Путь сигнального графа 266
 - топологического графа 48
- Пучность 476
- Расстройка абсолютная 188
 - обобщенная 188
 - относительная 188
- Расщепление узла 271
- Реализация цепи 505
- Ребро графа 46
- Режим бегущих волн 472
 - большого сигнала 303
 - короткого замыкания 257
 - критический 327
 - малого сигнала 300
 - неустойчивый 67
 - вынужденный 314
 - смешанных волн 478
 - стоячих волн 474
 - установившийся 66
 - холостого хода 257
- Резонанс 175
 - второй частный 217
 - индивидуальный 217
 - напряжений 176
 - первый частный 217
 - полный 218
 - сложный 218
 - токов 177
 - фазовый 176
- Свойства топологические 39
- Свойство фильтрующее 315
- Сечение главное 51
 - графа 50
- Сила электродвижущая 12
 - — взаимной индукции 142
- Синтез двухполосников 505, 514
 - четырехполосников 432, 505, 522
 - электрических цепей 54, 504
- Система основных уравнений электрического равновесия 55
- Скачок единичный 351

- неединичный 352
- Скорость фазовая 469
- Согласование источника с нагрузкой 116
 - критерии 116
 - линии 473, 486
 - четырехполосника 422
- Соединение двухполосников звездой 38
 - параллельное 38, 122
 - последовательное 38, 120
 - смешанное 38, 124
 - треугольником 38
 - связанных индуктивностей встречное 148
 - согласное 143
 - четырехполосников каскадное 383
 - параллельное 411
 - параллельно-последовательное 412
 - последовательное 412
 - последовательно-параллельное 412
 - регулярное 408, 413
- Сопротивление 16
 - автономного двухполосника 259
 - взаимное контуров 232
 - вносимое 215
 - внутреннее 32
 - волновое 465, 466, 470
 - операторное 336
 - входное комплексное 82
 - операторное 465
 - комплексное пассивных двухполосников 82, 258
 - неавтономного двухполосника 258
 - общее контуров 232
 - передаточное 161
 - полное 82
 - резонансное 181
 - собственное контура 231
 - характеристическое контура 180
 - четырехполосника 421
- Составляющая вынужденная 314
 - свободная 313
- Состояния переменные 552
- Стабилизация напряжения 284
- Сток сигнального графа 265
- Сторона многополосника 162
- Схема 14, 36
 - замещения комплексная цепи 84
 - элементов цепи 84
 - операторная цепи 336
 - элементов цепи 339
 - планарная 48
 - принципиальная 14
 - расчетная 14
 - цепная 126
 - эквивалентная 14
- Схемы включения неопределенные 374
 - многополосников обобщенные 374
 - замещения двухполосников 27, 132
- гиратора 448
- канонические Кауэра 518
 - Фостера 515
 - замещения четырехполосников 414
- трансформаторов 157, 158, 160
- эквивалентные для мгновенных значений 85
 - комплексные 84
 - операторные 336, 338
 - реальных источников 30
 - пассивных элементов 27
- Теорема взаимности 252
 - дифференцирования 333
 - интегрирования 333
 - компенсации 254
 - наложения 64, 249
 - об активном двухполоснике 263
 - обратимости 252
 - об эквивалентном источнике 260
 - смещения 333
 - суперпозиции 64
- Ток 9
 - комплексный 81
 - контурный 232
 - короткого замыкания 257, 392
 - операторный 336
 - узловой 238
- Топология цепей 46
- Точка рабочая 17, 287
- Трансформатор идеальный 158
 - линейный 155
 - совершенный 157
- Треугольник мощности 111
- Удлинение узла 271
- Узел базисный 52
 - зависимый 265
 - индуктивный 312
 - независимый 46, 265
 - сигнального графа 264
 - смешанный 265
 - устранимый 35
- Узла промежуточного устранения 269
- Уравнение баланса мощностей 113
 - напряжений 43
 - токов 42
 - характеристическое 315
- Уравнения компонентные 40, 547
 - контурные 230
 - основные многополосника 377
 - четырехполосника 400
 - состояния 552
 - узловые 237
- Условие баланса мощностей 113
 - периодичности 66
 - прозрачности фильтра 453
- Условия Дирихле 315
- Фаза мгновенная 65

- начальная 66
- Фильтр параллельно-производный 456
- последовательно-производный 456
- Фильтры активные 456
- классификация 450
- реактивные 451
- типа k 454
- типа m 455
- электрические 450
- Формулы перехода 402
- Функция гармоническая 65
- — значение действующее 70
- — комплексное 79
- Дирака 353
- периодическая 65
- — времени 65
- положительная вещественная 506
- реактансная 509
- реактивная 509
- физически реализуемая 504
- Характеристики 16
- амплитудно-частотные 164
- вебер-амперные 23
- вольт-амперные 16
- — монотонные 277
- — немонотонные 277
- — несимметричные 277
- — симметричные 277
- — N-образные 277
- — S-образные 277
- временные 54, 358
- входные 164
- импульсные 316
- комплексные частотные 162
- кулон-вольтные 17
- операторные 306
- передаточные 164
- переходные 315
- фазо-частотные 164
- частотные 54
- Цепь активная 13, 59
- взаимная 253
- идеализированная 9
- лестничная 127
- линейная 62, 64
- — инвариантная во времени 63
- — параметрическая 63
- — с постоянными параметрами 63
- моделирующая 9
- невзаимная 253
- нелинейная 62
- необратимая 253
- обратимая 253
- параметрическая 63
- с распределенными параметрами 60
- — сосредоточенными параметрами 59
- цепная 127

- электрическая 8
- Частота 66
- биений 331
- граничная 195
- комбинационная 304
- комплексная 332, 342
- обобщенная 342
- резонансная 176, 180
- свободных колебаний 325
- связи 221
- среза 450
- угловая 66
- Четырехполосник автономный 399, 416
- активный 399
- минимально-фазовый 524
- неминимально-фазовый 524
- несимметричный 399
- неуравновешенный 400
- проходной 399
- разорванный 388
- связи 188
- симметричный 399
- уравновешенный 400
- чисто фазового сдвига 524
- Число комплексное 73
- — сопряженное 74
- Ширина полосы пропускания 196
- Шлейф реактивный 484
- Э.д.с. контурная 232
- Эквивалентность полная 119
- частичная 119
- Элемент резистивный безынерционный 276
- Элементы активные 28, 62
- безынерционные 276
- — реальные 31
- двухполосные 9
- дуальные 25
- идеализированные 9
- инерционные 276
- линейные 63
- нелинейные 63
- параметрические 63
- пассивные 13
- реактивные 25
- резистивные 16
- топологические 40
- управляемые 278
- энергоемкие 25
- Ячейка базисная 48
- графа 48

Список литературы

1. Зинovieв А. Л., Филиппов Л. И. Введение в специальность радиоинженера.— М.: Высшая школа, 1989.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Высшая школа, 1988.
3. Говоровский И. С., Демин М. П. Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Радио и связь, 1994.
4. Бирюков В. Н., Попов В. П., Семенцов В. И. Сборник задач по теории цепей.— М.: Высшая школа, 1998.
5. Добровольский И. Н. Лабораторный практикум по основам теории цепей.— М.: Высшая школа, 1986.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.— Лейпциг: Тойбнер; М., Наука, 1981.
7. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей.— Л.: Энергия, 1972.
8. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем.— М.: Советское радио, 1976.
9. Чуа Л. О., Пен-Мин Ли. Машинный анализ электронных схем: Пер. с англ.— М.: Энергия, 1980.
10. Шакиров М. А. Преобразования и диакоптика электрических цепей.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980.
11. Дяткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению.— М.: Высшая школа, 1965.
12. Конторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях.— М.: Советское радио, 1975.
13. Фолкенберри Л. Применение операционных усилителей и линейных ИС: Пер. с англ.— М.: Мир, 1985.
14. Ионкин П. А., Миронов В. Г. Синтез RC-схем с активными взаимными элементами.— М.: Энергия, 1976.
15. Синтез активных RC-цепей: Современное состояние и проблемы/ Под ред. А. А. Ланнз.— М.: Связь, 1975.
16. Справочник по расчету и проектированию ARC-схем/ Под ред. А. А. Ланнз.— М.: Радио и связь, 1984.
17. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами.— М.: Высшая школа, 1980.
18. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей.— М.: Радио и связь, 1986.
19. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1976.
20. Лосев А. К. Теория линейных электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1987.
21. Системы автоматизированного проектирования. Под ред. И. П. Норенкова.— М.: Высшая школа, 1986.
22. Ильин В. Н. Основы автоматизации схемотехнического проектирования.— М.: Энергия, 1979.
23. Баталов Б. В., Егоров Ю. Б., Русаков С. Г. Основы математического моделирования больших интегральных схем на ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1982.
24. Глоразов Е. Л., Ссорин В. Г., Сыпчук П. П. Введение в автоматизацию схемотехнического проектирования.— М.: Советское радио, 1976.
25. Автоматизация схемотехнического проектирования/ Под ред. В. Н. Ильина.— М.: Радио и связь, 1987.
26. Зевеке Г. В. и др. Основы теории цепей.— М.: Энергоатомиздат, 1989.
27. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи.— М.: Высшая школа, 1990.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	6
Глава 1. Основные понятия теории цепей	8
§ 1.1. Основные определения	8
§ 1.2. Идеализированные пассивные элементы	16
§ 1.3. Идеализированные активные элементы	28
§ 1.4. Топология цепей	36
§ 1.5. Уравнения электрического равновесия цепей	54
Глава 2. Линейные электрические цепи при гармоническом воздействии	65
§ 2.1. Задача анализа линейных цепей с источниками гармонических токов и напряжений	65
§ 2.2. Метод комплексных амплитуд	72
§ 2.3. Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии	87
§ 2.4. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии	95
§ 2.5. Энергетические процессы в простейших цепях при гармоническом воздействии	108
§ 2.6. Преобразования электрических цепей	119
§ 2.7. Цепи с взаимной индуктивностью	142
Глава 3. Частотные характеристики и резонансные явления	161
§ 3.1. Комплексные частотные характеристики линейных электрических цепей	161
§ 3.2. Последовательный колебательный контур	177
§ 3.3. Параллельный колебательный контур	198
§ 3.4. Связанные колебательные контуры	211
Глава 4. Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии	224
§ 4.1. Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи	224
§ 4.2. Основные теоремы теории цепей	249
§ 4.3. Метод сигнальных графов	264
Глава 5. Нелинейные резистивные цепи	275
§ 5.1. Задача анализа нелинейных резистивных цепей	275
§ 5.2. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей	281
§ 5.3. Аппроксимация характеристик нелинейных резистивных элементов	290
§ 5.4. Нелинейные резистивные элементы при гармоническом внешнем воздействии	297
Глава 6. Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами	306
§ 6.1. Задача анализа переходных процессов	306
§ 6.2. Классический метод анализа переходных процессов	313
§ 6.3. Операторный метод анализа переходных процессов	331
§ 6.4. Операторные характеристики линейных цепей	342
§ 6.5. Временные характеристики линейных цепей	351
§ 6.6. Применение принципа наложения для анализа переходных процессов в линейных цепях	362

Глава 7. Основы теории четырехполюсников и многополюсников	370
§ 7.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами	370
§ 7.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников	399
§ 7.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четырехполюсников	419
§ 7.4. Независимые проходные четырехполюсники	431
§ 7.5. Электрические фильтры	450
Глава 8. Цепи с распределенными параметрами	462
§ 8.1. Задача анализа цепей с распределенными параметрами	462
§ 8.2. Однородная длинная линия при гармоническом внешнем воздействии	465
§ 8.3. Операторные и комплексные частотные характеристики однородных длинных линий	480
§ 8.4. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами	487
§ 8.5. Цепи с распределенными параметрами специальных типов	496
Глава 9. Синтез электрических цепей	504
§ 9.1. Задача синтеза линейных электрических цепей	504
§ 9.2. Основные свойства и критерии физической реализуемости операторных входных характеристик линейных пассивных цепей	506
§ 9.3. Методы реализации реактивных двухполюсников	514
§ 9.4. Основы синтеза линейных пассивных четырехполюсников	522
Глава 10. Методы автоматизированного анализа цепей	530
§ 10.1. Задача автоматизированного анализа цепей	530
§ 10.2. Компонентные и топологические матрицы электрической цепи	533
§ 10.3. Методы формирования уравнений электрического равновесия, предназначенные для применения в программах автоматизированного анализа цепей	547
§ 10.4. Особенности современных программ автоматизированного анализа цепей	558
Заключение	562
Приложения	564
Предметный указатель	567
Список литературы	573

Учебное издание

Вадим Петрович Попов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Редактор Н.Е. Овчеренко

Художественный редактор Ю.Э. Иванова

Технический редактор Л.А. Овчинникова

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.

Изд. № РЕНТ-105. Подп. в печать 13.01.03. Формат 60х88^{1/16}

Бум. газетн. Гарнитура Таймс. Печать офсетная

Объем: 35,28 усл. печ. л., 35,28 усл. кр.-отт., 34,15 уч.-изд. л.

Тираж 3000 экз. Заказ № 2006

**ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4,
Неглинная ул., 29/14**

Тел. (095) 200-04-56

E-mail: info@v-shkola.ru <http://www.v-shkola.ru>

Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-59-39, факс (095) 200-03-01

E-mail: sales@v-shkola.ru

Отдел «Книга-почтой»: (095) 200-33-36

E-mail: bookpost@v-shkola.ru

**Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14**

ISBN 5-06-003949-8

