Л. А. БЕССОНОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Издание 2-е, переработанное и дополненное

Допущено
Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебного пособия для высших технических учебных заведений

ВЫСШАЯ ШКОЛА · 1964

В книге рассмотрены: теоремы общетеоретического характера, общие свойства электрических цепей с нелинейными сопротивлениями и явления, наблюдаемые в них; свойства и принципы действия новых типов нелинейных активных, индуктивных и емкостных сопротивлений; новые важные применения нелинейных сопротивлений, в том числе основанные на относительно новых и малоизвестных явлениях; применение нелинейных электрических цепей в электромоделировании, счетно-решающей технике; новые типы отрицательных динамических параметров; магнитно-полупроводниковые устройства; автоколебания, субгармонические колебания; автомодуляция; резонансные явления на высших гармониках; динамические явления в цепях с выпрямителями; методы расчета установившихся и переходных процессов; основы теории устойчивости различных типов движения и т. д.

Большинство изложенных вопросов иллюстрируется числовыми примерами, что делает пособие пригодным для самостоятельного изучения.

Книга является учебным пособием для студентов втузов, изучающих курс „Теоретические основы электротехники". Она может быть рекомендована также для инженеров, аспирантов и научных работников.

Предисловие

„Нелинейные электрические цепи" — один из наиболее быстро развивающихся разделов теоретических основ электротехники. В нем излагается совокупность вопросов о физических процессах и явлениях в нелинейных цепях, о применении этих явлений в различных областях электротехники, а также о методах анализа и расчета этих явлений.

По своей физической природе процессы в нелинейных системах, как правило, более сложны и многогранны, чем процессы в линейных системах. В соответствии с этим и анализ нелинейных систем в математическом отношении значительно труднее, чем анализ линейных систем.

Теория нелинейных цепей создана усилиями многих ученых и инженеров, работавших в области теории колебаний, небесной механики, автоматического контроля, регулирования и управления, радиотехники, связи, счетно-решающей техники, электропривода, электрических машин и аппаратов, электромоделирования, промышленной электроники и т. д.

Ученые с различных позиций подходили к исследованию и анализу родственных по своей физической сущности явлений в самых разнообразных нелинейных системах, а также рассматривали различные стороны этих явлений. В результате было создано большое количество методов анализа, которые могут быть объединены в группы, близкие по своей основе, но несколько различные по математическому оформлению.

Курс ТОЭ является базисным курсом при подготовке инженеров электротехнического профиля. Он находится на рубеже общетеоретических и специальных дисциплин. Особое значение при изучении этого курса имеет подготовка студентов по физике и математике.

В настоящей книге автор стремился изложить в систематизированном виде основные положения современной теории нелинейных электрических цепей, показать богатейшие возможности применения их на практике, рассмотреть различные методы расчета и тенденции развития этой отрасли науки.

Содержание учебного пособия соответствует разделу „Нелинейные электрические цепи" программы по курсу ТОЭ, утвержденной в 1962 г. МВ и ССО СССР (индекс УМУ—3/23). Вместе с тем в книге содержится материал, несколько опережающий действующую программу и существующие учебники по ТОЭ.

В списке литературы, приведенном в конце книги, указаны лишь те работы, которые в первую очередь могут понадобиться читателю, желающему более глубоко изучить отдельные частные вопросы курса. Более подробные библиографические указания можно найти в самих работах.

Выражаю благодарность коллективу кафедры ТОЭ ВЗЭИ и официальным рецензентам — коллективу кафедры ТОЭ СЗПИ во главе с проф. О. Б. Броном и зав. кафедрой электротехники и электрооборудования МВТУ им. Н. Э. Баумана проф. О. Н. Братковой за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению книги.

Автор

1

Общая характеристика нелинейных электрических цепей

Нелинейными называют электрические цепи, в каждую из которых входит хотя бы по одному нелинейному сопротивлению.

Нелинейные сопротивления обладают нелинейными вольтамперными характеристиками.

Нелинейные сопротивления могут быть подразделены на три группы: активные, индуктивные и емкостные сопротивления.

Каждая из групп может быть разделена на две подгруппы: управляемые и неуправляемые сопротивления.

Управляемые сопротивления могут изменять свои свойства по отношению к основной цепи под влиянием управляющего фактора.

Обычно управляющим фактором является ток или напряжение, т. е. величина электрическая. Лишь в сравнительно редких случаях в качестве управляющего фактора выступает неэлектрическая величина. Так, например, управляющим фактором для фотосопротивления является световой поток.

Управляющий ток или напряжение может быть постоянным, синусоидальным или импульсным.

Если управляющий ток или напряжение изменяется во времени по синусоидальному закону, то частота его в общем случае может быть меньше, больше или равна основной частоте изменения тока главной цепи.

§ 1,1. Классификация нелинейных электрических цепей

Нелинейные электрические цепи могут быть классифицированы по различным признакам, а именно:

1) по характеру действующей в главной (управляемой) цепи вынуждающей силы — на цепи постоянного тока, цепи переменного

тока, цепи постоянного и переменного токов, а также на цепи, работающие при импульсных воздействиях;

2) по характеру нелинейных сопротивлений — на цепи с активными, индуктивными или емкостными нелинейными сопротивлениями;

3) по степени управляемости использованных в цепи нелинейных сопротивлений — на цепи с неуправляемыми, управляемыми и ограниченно-управляемыми нелинейными сопротивлениями;

4) по характеру управляющего фактора — на цепи, в которых управляющий фактор является величиной электрической или неэлектрической;

5) по частоте управляющего фактора — на цепи, в которых управляющий фактор представляет собой постоянный ток или напряжение, а также на цепи, в которых управляющий фактор (например, ток) периодически изменяется во времени;

6) по количеству нелинейных сопротивлений в цепи — на цепи с одним и несколькими нелинейными сопротивлениями;

7) по степени воздействия выходной величины на входную — на цепи с обратными связями и на цепи без обратных связей;

8) по характеру обратных связей — на цепи с явно выраженными обратными связями и на цепи с неявно выраженными обратными связями;

9) по числу фаз — на однофазные и многофазные;

10) по целевому назначению — в соответствии с перечислением, сделанным в следующем параграфе.

Цепи с нелинейными активными сопротивлениями могут быть классифицированы еще по признаку тепловой инерционности нелинейных активных сопротивлений — на инерционные и безынерционные.

§ 1,2. Общая характеристика основных преобразований, осуществляемых при помощи нелинейных цепей

На рис. 1,*а* схематически изображен четырехполюсник (НЧ), в состав которого входит одно или несколько нелинейных сопротивлений. Будем называть такой четырехполюсник нелинейным.

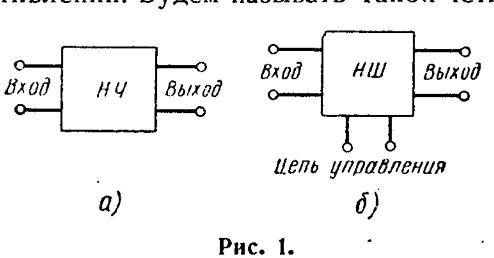


Рис. 1.

На рис. 1,*б* представлен нелинейный шестиполюсник (НШ). В отличие от четырехполюсника он имеет еще два зажима (полюса), к которым присоединяется источник управляющего напряжения или тока.

При помощи нелинейных четырехполюсников и шестиполюсников можно осуществить ряд очень важных преобразований, а именно:

1. Преобразовать переменный ток в постоянный. Устройства, позволяющие осуществить это преобразование, называются выпрямителями (§ 7,14).

2. Преобразовать постоянный ток в переменный. Это преобразование производится при помощи устройств, которые в радиотехнике и в теории колебаний называются генераторами или автогенераторами (§ 15,8), а в промышленной электронике — инверторами.

3. Умножить частоту, т. е. получить на выходе четырехполюсника напряжение, частота которого в несколько раз больше частоты входного напряжения.

Четырехполюсники, при помощи которых производится умножение частоты, называются умножителями частоты. Устройство, удваивающее частоту, называется удвоителем частоты; устройство, утраивающее частоту — утроителем частоты и т. д.

Принцип работы простейшего утроителя частоты рассмотрен в § 7, 11.

4. Разделить частоту, то есть выполнить операцию, обратную умножению частоты.

Нелинейные устройства (обычно четырехполюсники или шестиполюсники), позволяющие осуществить деление частоты, называются делителями частоты. Теория простейшего делителя частоты вдвое рассмотрена в § 8,20.

5. Преобразовать частоту в $\frac{m}{n}$ раз, где m и n — целые числа.

В § 8,21 рассматривается преобразователь частоты в $\frac{3}{2}$ раза.

6. Стабилизировать напряжение или ток, то есть получить на выходе нелинейного устройства напряжение или ток, почти не меняющийся по величине при значительном изменении величины входного напряжения. Такие нелинейные устройства называются стабилизаторами напряжения (или тока). Простейшие устройства, позволяющие осуществить стабилизацию постоянного напряжения и тока, рассмотрены в § 8,1 и 8,2. Стабилизатор напряжения переменного тока рассмотрен в § 8,11.

7. Произвести селективное выпрямление. Под селективным выпрямлением понимают выпрямление, при котором напряжение на выходе выпрямителя пропорционально только определенной гармонике (например, второй) входного напряжения (§ 8,7).

8. Осуществить амплитудную, частотную и фазовую модуляцию.

Модуляция представляет собой процесс, при котором амплитуда (фаза или частота) высокочастотного колебания, поступающего на вход четырехполюсника, преобразуется так, что характер изменения ее повторяет характер изменения управляющего низкочастотного сигнала.

Устройства, позволяющие осуществить модуляцию, называются модуляторами. Принцип работы одного из модуляторов описан в § 8,9.

9. Осуществить демодуляцию. Под демодуляцией понимают процесс выделения из высокочастотного колебания запечатленного в нем низкочастотного управляющего сигнала.

Устройства, позволяющие осуществить демодуляцию, называются демодуляторами или детекторами.

Простейшее детекторное устройство рассмотрено в § 8,10.

10. Преобразовать желаемым образом форму входного напряжения. Например, при подаче на вход нелинейного четырехполюсника напряжения синусоидальной формы на выходе его можно получить напряжение прямоугольной, трапецеидальной или пикообразной формы.

Некоторые устройства, применяемые для такого рода преобразований, получили свое название в соответствии с формой выходного напряжения или тока. Так, пиктрансформатор есть устройство, которое позволяет при подаче на вход его синусоидального напряжения или тока получить на выходе короткие импульсы (пики) тока или напряжения.

Принцип работы одного из пиктрансформаторов рассмотрен в § 8,8.

11. Усилить напряжение.

Усилением напряжения будем называть процесс получения на выходе нелинейного устройства напряжения значительно большей величины, чем управляющее напряжение на входе его. Управляющее напряжение может быть напряжением постоянного и переменного тока.

Обычные трансформаторы также позволяют усиливать напряжение. Однако в усилителях напряжения на нелинейных сопротивлениях энергия, потребляемая управляющей цепью, может быть в сотни, тысячи и даже сотни тысяч раз меньше энергии на выходе усилителя, тогда как в обычных трансформаторах эти энергии, грубо говоря, равны.

Кроме того, усилители напряжения, использующие нелинейные сопротивления, позволяют усилить не только переменное, но и постоянное напряжение, и притом с плавным изменением коэффициента усиления.

Простейший усилитель напряжения постоянного тока рассмотрен в § 8,5.

12. Усилить мощность.

Под усилением мощности понимается процесс выделения на выходе устройства (в нагрузке) мощности, значительно большей, чем мощность, поступающая в управляющую цепь.

Устройство, позволяющее получить эффект усиления мощности, называют усилителем мощности. Простейшие типы усилителей мощности рассмотрены в § 11,3; 13,10.

Эффект усиления мощности требует дополнительных пояснений. Энергия, поступающая на вход усилителя мощности (на вход четырехполюсника, рис. 1,*а*), доставляется находящимся вне четырехполюсника источником сигнала и расходуется на управление режимом работы нелинейного сопротивления, входящего в состав четырехполюсника.

Выделяющаяся в нагрузке энергия доставляется совсем от иного источника — от источника энергии, находящегося внутри рассматриваемого четырехполюсника или включаемого на выходе четырехполюсника последовательно с нагрузкой.

Когда говорят об эффекте усиления мощности, имеют в виду, что приращение мощности, выделяющейся в нагрузке, оказывается больше приращения мощности, потребовавшейся для изменения режима работы нелинейного сопротивления.

13. Осуществить степенное (и логарифмическое) преобразование напряжения или тока, при котором напряжение или ток на выходе нелинейного четырехполюсника изменяется пропорционально заданной степени (или логарифму) входного напряжения или тока (§ 8,3).

14. Плавно преобразовать частоту при помощи нелинейных четырехполюсников или шестиполюсников, не содержащих подвижных частей (§ 16,15).

15. Преобразовать однофазный переменный ток в m-фазный, в частности трехфазный, с плавной регулировкой частоты на выходе устройства [Л. 20, гл. 9].

16. Дифференцировать и интегрировать амплитудно-модулированное колебание по огибающей.

17. Преобразовать постоянный ток одного напряжения в постоянный ток другого напряжения — трансформировать постоянный ток (§ 15,13).

18. Получить фазочувствительное выпрямление.

Под ним понимают выпрямление, при котором выпрямленное напряжение на выходе устройства меняет знак на противоположный при изменении фазы переменного напряжения на входе устройства на 180°. Простейший фазочувствительный выпрямитель рассмотрен в § 8,6.

19. Электрическим путем осуществить операции умножения двух, трех и большего числа функций (§ 8,4).

20. Выполнить бесконтактные магнитные и электрические коммутаторы (§ 8,13), запоминающие (§ 8,14) и счетные устройства (§ 8,16).

21. Произвести шифровку и дешифровку, например перевести число, записанное в двоичном исчислении, в число, записанное в десятичном исчислении [Л. 44].

22. Выполнить нелинейные фильтры, которые в отличие от линейных фильтров дают напряжение на выходе, амплитуда которого является нелинейной функцией амплитуды напряжения на входе фильтра.

23. Создать искусственным путем комплексные сопротивления с отрицательными индуктивностью и емкостью для мгновенных значений переменной составляющей тока и напряжения (§ 12,9).

24. Создать отрицательную индуктивность для медленно меняющихся составляющих тока и потока нелинейной индуктивности и отрицательную емкость для медленно меняющихся составляющих напряжения и заряда на нелинейной емкости (§ 12,11 и 12,13).

25. Выполнить бесконтактное реле времени, выдержка времени на срабатывание или отпускание которого является функцией амплитуды сигнала, поступающего на вход [см., например, Л. 20, § 10,4].

26. Воспроизвести нелинейную зависимость силы трения от скорости и силы упругости от деформации при электромоделировании (§ 10,5).

27. Провести различные логические операции (§ 9,1).

28. Провести операции деления двух функций (§ 8,23).

29. Получить мигающий свет, интенсивность которого периодически изменяется с заданной частотой (§ 16,14).

30. Осуществить функции гиратора — устройства, в котором сигнал при прохождении в одном направлении (со входа на выход) не меняет своей фазы, а при прохождении в другом направлении (с выхода на вход) меняет фазу на 180° [Л. 98].

Перечисление специальных преобразований и функций, выполняемых при помощи электрических цепей с нелинейными сопротивлениями, можно было бы продолжить и дальше, но и сказанного достаточно, чтобы убедиться в многообразии этих функций.

Многие из перечисленных типов преобразований (преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, модуляция и демодуляция, усиление тока, напряжения, мощности) осуществляются при помощи нелинейных устройств, и в этом смысле они являются нелинейными преобразованиями. Но при определенных условиях в относительно небольшом диапазоне изменений входной величины осуществляющие эти преобразования преобразователи могут обладать почти линейной зависимостью амплитуды (действующего или среднего значения) выходной величины от амплитуды (действующего или среднего значения) входной величины.

Вне этого диапазона зависимость выходной величины от входной является в той или иной степени (часто в очень значительной) нелинейной.

Для многих других типов преобразований (например, для степенных и логарифмических) зависимость выходной величины от входной принципиально не может быть линейной, так как это противоречило бы их назначению и принципу работы.

Если же зависимость выходной величины от входной может быть линейной или близкой к линейной, то в большинстве случаев стремятся выбрать такой режим преобразователя, при котором его работа проходила бы именно на линейном участке. Так поступают, в частности, при использовании электронных, полупроводниковых и магнитных усилителей тока, напряжения и мощности.

§ 1,3. Некоторые физические явления, наблюдаемые в нелинейных цепях

В нелинейных электрических цепях постоянного или переменного тока могут возникать различные физические явления. Их особенно много в цепях переменного тока, содержащих управляемые и неуправляемые нелинейные индуктивности и (или) емкости.

В нелинейных электрических цепях постоянного тока могут возникать автоколебания, прерывистая генерация, самовозбуждение паразитных колебаний с нарастающей амплитудой и ряд других явлений.

Под автоколебаниями понимают устойчивые периодические колебания определенной амплитуды и частоты, возникающие в системах, содержащих источник постоянной э. д. с. или источник постоянного тока при отсутствии внешних периодических воздействий.

Прерывистая генерация колебаний представляет собой периодическое возбуждение и срыв колебаний автоколебательной системы с частотой, определяемой свойствами самой системы (§ 19,7).

Самовозбуждение паразитных колебаний в автогенераторах представляет собой возникновение добавочных колебаний, частота которых отлична от частоты автоколебаний.

В нелинейных электрических цепях переменного тока могут возникать резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках при отсутствии этих гармоник в напряжении источника питания; процессы автомодуляции, перемежающиеся резонансы и колебания с непериодической огибающей.

Возникновение интенсивных колебаний на частоте, составляющей долю частоты источника э. д. с. (например, на частотах $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{5}$ и т. п., где ω — частота источника э. д. с. в схеме), называют субгармоническим резонансом (гл. 17.) Дробным резонансом называют возникновение интенсивных колебаний в цепи на частоте $\frac{m}{n}\omega$, где m и n — целые числа.

Под автомодуляцией (гл. 16) понимают процесс периодического изменения амплитуд токов и напряжений в цепи без воздействия на цепь внешнего модулирующего фактора.

Перемежающиеся резонансы (§ 19,5) представляют собой явление периодического возникновения и срыва резонанса на какой-либо высшей или дробной гармонике.

Под колебаниями с непериодической огибающей (§ 19,6) условимся понимать процессы, при которых огибающая колебаний имеет резко выраженный непериодический характер.

В нелинейных электрических цепях переменного тока, имеющих S или N-образные вольт-амперные характеристики (§ 12,5), возможны триггерные эффекты.

Триггерным называют эффект резкого (скачкообразного) изменения выходной величины при незначительном изменении входной величины.

Триггерный эффект возможен на первой, высших, низших и дробных гармониках (§ 7,17; 19,4).

В зоне существования триггерного эффекта характер установившегося режима в цепи зависит от предшествовавшего этому режиму состояния цепи и от начальной фазы источника э. д. с., от которого питается схема. Другими словами, характер установившегося режима в нелинейных цепях при определенных условиях зависит от начальных значений токов, напряжений и начальной фазы источника э. д. с. в схеме.

Ряд нелинейных явлений наблюдается при переходных процессах в выпрямительных схемах с индуктивной и емкостной нагрузками в цепи выпрямленного тока и при наличии предвключенных сопротивлений в цепи переменного тока. Эти явления рассмотрены в гл. 18.

2

Нелинейные активные сопротивления

§ 2,1. Общая характеристика нелинейных активных сопротивлений

Нелинейные активные сопротивления подразделяются:

1) по степени управляемости — на управляемые и неуправляемые;

2) по степени тепловой инерционности — на инерционные и практически безынерционные;

3) по степени симметрии характеристик относительно начала координат — на сопротивления с симметричными и несимметричными характеристиками.

Неуправляемые нелинейные активные сопротивления предназначены для работы без воздействия на них управляющего фактора.

Управляемые нелинейные активные сопротивления работают при воздействии на них управляющего фактора.

Каждое нелинейное активное сопротивление имеет свою вольт-амперную характеристику. Вольт-амперная характеристика каждого неуправляемого активного сопротивления при заданных внешних условиях работы может быть представлена в виде некоторой кривой.

Для каждого управляемого нелинейного активного сопротивления имеется семейство вольт-амперных характеристик, параметром которых является управляющий фактор.

Неуправляемые активные сопротивления имеют по два электрода. Число электродов у управляемых активных сопротивлений обычно больше двух (исключение в этом отношении составляют сопротивления, управляющим фактором которых является неэлектрическая величина).

Нелинейность вольт-амперных характеристик инерционных сопротивлений обусловлена тепловым эффектом, то есть изменением удельного сопротивления вследствие нагрева при прохождении тока.

Нелинейность безынерционных нелинейных активных сопротивлений обусловлена другими, не тепловыми причинами, о которых будет сказано ниже.

Нелинейные активные сопротивления в подавляющем большинстве являются безынерционными или практически безынерционными. Ток, проходящий через безынерционное сопротивление, определяется мгновенным значением напряжения на сопротивлении.

Иная картина наблюдается у инерционного сопротивления. Напряжение на таком сопротивлении определяется в общем случае не только (а часто и не столько) значением тока в данный момент времени, сколько всем предшествовавшим тепловым режимом работы сопротивления.

Инерционность зависит от постоянной времени нагрева сопротивления τ.

Если нелинейное инерционное сопротивление включено в цепь переменного тока, то в зависимости от соотношения между постоянной времени нагрева сопротивления τ и периодом T переменного тока могут быть два существенно различных режима его работы.

Если $\tau << T$, то величина сопротивления почти без запаздывания следует за изменениями мгновенного значения тока и сопротивление, по существу, ведет себя как безынерционное.

Если $\tau >> T$, то за каждый отдельно взятый период переменного тока в установившемся режиме сопротивление не успевает изменяться и остается практически одинаковым.

В этом случае инерционное нелинейное сопротивление ведет себя как линейное сопротивление, величина которого определяется среднеквадратичным значением протекающего через него тока.

Характеристики $i=f(u)$, удовлетворяющие условию $i(u) = -f(-u)$, будем называть симметричными. Характеристики, не удовлетворяющие этому условию, — несимметричными.

§ 2,2. Вольт-амперные характеристики (в. а. х.) неуправляемых нелинейных активных сопротивлений

На рис. 2. изображено девять часто встречающихся в. а. х. неуправляемых нелинейных активных сопротивлений. Характеристики рис. 2, *а, б, в, ж* удовлетворяют условию симметричности. Остальные характеристики не удовлетворяют этому условию.

Вольт-амперные характеристики по типу рис. 2, *а* имеют термосопротивления с положительным температурным коэффициентом, например лампа с металлической нитью накаливания.

Чем больший ток протекает через нить лампы, тем бóльшую температуру она имеет и тем больше ее сопротивление.

Вольт-амперные характеристики по типу рис. 2, *б* имеют термосопротивления с отрицательным температурным коэффициентом, например термистор типа ММТ на основе окислов урана, магния и титана [Л. 85,86].

Вольт-амперной характеристикой такой же формы обладают лампы накаливания с угольной нитью, а также тиритовые и вилитовые сопротивления. Величина их сопротивления с увеличением температуры уменьшается.

Тиритовые и вилитовые сопротивления изготовляют из мелкоизмельченного графита и карборунда.

После соответствующей технологической обработки эта масса прессуется в виде дисков и запекается.

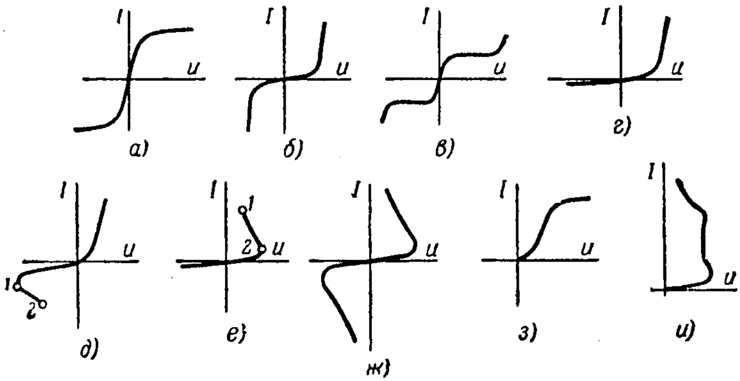


Рис. 2

Физически нелинейность в. а. х. тиритовых и вилитовых сопротивлений объясняется тем, что крупинки проводника (графита) покрыты тончайшей пленкой окисла кремния SiO_2, являющегося полупроводником. Сопротивление этих пленок зависит от напряжения.

Термистор типа ММТ и лампа с угольной нитью накала являются инерционными сопротивлениями, а тиритовые и вилитовые сопротивления практически безынерционны.

Вольт-амперные характеристики по типу рис. 2, *в* имеют инерционные нелинейные сопротивления, называемые бареттерами. Бареттер — это сопротивление, выполненное из свитой в спираль стальной проволоки, помещенной в стеклянный баллон с водородом при давлении порядка 50 — 200 *мм рт. ст.* Для в. а. х. бареттера характерно наличие почти горизонтального участка, что объясняется характером изменения теплоотдачи стальной спирали лучеиспусканием и конвекцией в водороде.

Вольт-амперными характеристиками по типу рис. 2, *г* обладают меднозакисные, селеновые и плоскостные германиевые и кремниевые диоды, а также некоторые типы точечных германиевых диодов.

Способность полупроводниковых выпрямителей пропускать ток практически только в одном направлении и почти не пропускать его в другом объясняется наличием потенциального барьера на *p-n*-переходе. Величина потенциального барьера зависит от полярности напряжения на выпрямителе.

Полупроводниковые выпрямители являются практически безынерционными сопротивлениями.

Некоторые типы точечных германиевых и кремниевых выпрямителей имеют в. а. х. по типу рис. 2, *д*.

Вольт-амперными характеристиками по типу рис. 2, *е* обладают электрические дуги с разнородными электродами и газотроны.

Газотрон представляет собой лампу с двумя электродами (катодом и анодом), помещенными в баллон с инертным газом или парами ртути. Катод накаливается от постороннего источника.

Газотрон способен пропускать ток только в одном направлении.

Между точками *1* — *2* в. а. х. (рис. 2, *д* и *е*) находится падающий участок, на котором приращению тока соответствует убыль напряжения.

Вольт-амперными характеристиками типа рис. 2, *ж* обладает электрическая дуга между двумя электродами, изготовленными из одного материала и находящимися в одинаковых условиях, а также некоторые типы термисторов, например измерительные термисторы бусинкового типа из окислов урана, а также термисторы косвенного подогрева типа ТКП [Л. 85].

Следует отметить, что форма в. а. х. электрической дуги соответствует рис. 2, *е* и *ж* только при относительно низких частотах. С повышением частоты в. а. х. дуги становится петлевой и форма ее резко меняется.

Газотрон является практически безынерционным сопротивлением, термистор бусинкового типа, наоборот, сопротивление инерционное, но с относительно малой постоянной времени.

Вольт-амперной характеристикой по типу рис. 2, *з* обладает двухэлектродная выпрямительная лампа — кенотрон. По одному электроду — катоду — пропускается ток, разогревающий его; в результате этого от катода к аноду под действием электрического поля движется поток электронов. Нелинейность в. а. х. в начальной ее части обусловлена влиянием на поток электронов отрицательного объемного заряда вблизи катода.

Ток, проходящий через кенотрон, достигает значения насыщения, когда все электроны, эмиттированные катодом, достигают анода. Несимметричность в. а. х. кенотрона объясняется тем, что поток электронов направляется ко второму электроду (аноду), если потенциал последнего положителен по отношению к потенциалу катода.

Вольт-амперными характеристиками по типу рис. 2, *и* обладают лампы с тлеющим разрядом. К ним относятся стабиловольты и неоновые лампы. Это двухэлектродные лампы, заполненные инертным газом. При повышении напряжения до значения u_1 в лампе возникает тлеющий разряд, газ в лампе начинает светиться. На характеристике рис. 2, *и* есть почти вертикальный участок. При работе на этом участке напряжение на лампе остается практически неизменным.

Кенотроны, стабиловольты и неоновые лампы являются практически безынерционными нелинейными активными сопротивлениями (разумеется, следует иметь в виду относительность понятия безынерционности). Необходимо также иметь в виду, что, когда говорится о практической безынерционности кенотрона, имеется в виду безынерционность следования анодного тока за изменением мгновенного значения напряжения между анодом и катодом при неизменной температуре нити накала лампы.

§ 2,3. Статическое и дифференциальное сопротивления

Свойства нелинейного сопротивления могут быть охарактеризованы либо его вольт-амперной характеристикой (в. а. х.), либо зависимостями его статического или дифференциального сопротивления (соответственно $R_{ст}$ и $R_д$) от тока:

$$R_{ст} = \frac{u}{i}, \quad R_д = \frac{du}{di}. \tag{2,1}$$

Статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла α на рис. 3,*а*.

При переходе от одной точки в. а. х. к соседней статическое сопротивление изменяется. Статическое сопротивление характеризует поведение нелинейного сопротивления (НС) в режиме неизменного тока (в статическом режиме).

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла β наклона касательной к в. а. х. в рабочей точке.

Дифференциальное сопротивление характеризует поведение НС при достаточно малых отклонениях тока и напряжения от предшествующего состояния.

Приращение напряжения du на НС связано с приращением тока di через НС соотношением

$$du = R_д di.$$

В качестве примера на рис. 3,*б* изображены кривые изменения $R_{ст}$ и $R_д$ в функции от тока для НС, вольт-амперная характеристика которого изображена на рис. 3,*а*.

Следует отметить, что для падающих участков в. а. х., на которых увеличению тока соответствует понижение напряжения, дифференциальное сопротивление оказывается величиной отрицательной.

В предыдущем параграфе говорилось о том, что форма в. а. х. для ряда НС зависит от частоты. Характеристика, снятая в статическом режиме (при бесконечно медленном изменении тока и напряжения на НС), и характеристика, снятая при весьма быстром изменении тока и напряжения на НС (при высокой частоте), могут существенно различаться. Различие особенно резко проявляется для сопротивлений, нелинейность которых обусловлена тепловым эффектом, а также для сопротивлений, при работе которых происходят процессы ионизации и (или) деионизации — процессы довольно инерционные.

В качестве иллюстрации упомянутого различия характеристик на рис. 3,*в* изображены кривые *абв* и *бг*. Кривая *абв* представляет

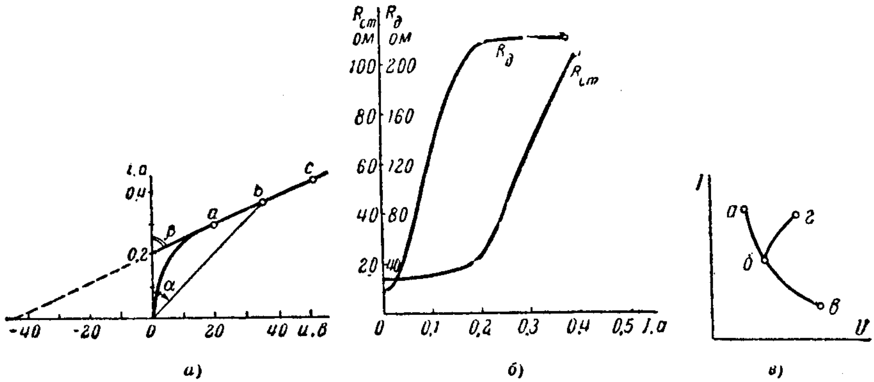


Рис. 3.

собой участок в. а. х. электрической дуги в статическом режиме, *бг* — участок в. а. х. дуги при весьма быстром увеличении тока в дуге, начиная от значения, соответствующего точке *б*.

Для НС со значительным отличием статических и динамических характеристик следует различать два типа дифференциальных сопротивлений: 1) подсчитанное по статической характеристике и 2) подсчитанное по динамической характеристике.

В точке *б* (рис. 3,*в*) $R_д$, подсчитанное по статической характеристике (кривая *абв*), отрицательно, а $R_д$, подсчитанное по динамической характеристике (кривая *бг*), положительно.

Дифференциальное сопротивление, подсчитанное по статической характеристике, связывает приращение тока с приращением напряжения при достаточно медленном (теоретически бесконечно медленном) приращении тока.

Дифференциальное сопротивление, подсчитанное по динамической характеристике, связывает приращения тока и напряжения при быстром изменении тока.

§ 2,4. Общая характеристика управляемых нелинейных активных сопротивлений

К управляемым нелинейным активным сопротивлениям относятся:

полупроводниковые триоды;

электронные лампы;

фотосопротивления;

полупроводниковые сопротивления, принцип действия которых основан на явлении Холла и родственных явлениях;

тиратроны;

криотроны — сопротивления, принцип действия которых основан на использовании зависимости явления сверхпроводимости от величины магнитного поля;

криосары — сопротивления, принцип действия которых основан на использовании эффекта ударной ионизации в полупроводниках, возникающей под действием электрического поля в условиях глубокого охлаждения.

В главе 2 рассмотрены основные свойства и характеристики первых пяти перечисленных типов сопротивлений.

§ 2,5. Основные сведения об устройстве полупроводниковых триодов

В настоящее время подавляющее большинство полупроводниковых триодов выполняют из элемента германия, подвергнутого специальной обработке.

Область полупроводникового триода, образованная германием, в который добавлены примеси, легко отдающие электроны (фосфор, сурьма, мышьяк), называют *n*-областью (*n* — первая буква слова *negativus*). Название обусловлено тем, что проводимость *n*-области создается в основном носителями отрицательных зарядов. Добавление к германию ничтожного количества примесей, имеющих на внешней орбите на один электрон меньше, чем германий (бор, алюминий, галий или индий), приводит к тому, что в германии образуется избыток носителей положительных зарядов.

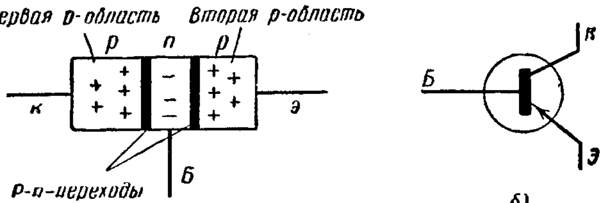
Область триода с избытком носителей положительных зарядов называют *p*-областью (*p*—первая буква слова *positivus*). Проводимость *p*-области обусловлена в основном носителями положительных зарядов.

Носителями положительных зарядов в полупроводниках являются дырки. Дырками называют незаполненные валентные связи атомов. Дырки способны перемещаться по кристаллической решетке, они являются как бы положительными зарядами.

Полупроводниковый триод типа *р-n-р* представляет собой кристалл германия (*р*-германий), в середине которого имеется *n*-прослойка толщиной 0,02—0,025 *мм* (рис. 4,*а*).

Другим пока менее распространенным типом триода является триод типа *n-р-n*. На рисунке знаками "+" в *р*-области условно обозначены носители положительных зарядов, знаками "—" в *n*-области — носители отрицательных зарядов.

Переходные слои между *р*- и *n*-областями обладают односторонней проводимостью. Ток через эти слои может течь практически только в случае, если потенциал *р*-области будет выше потенциала *n*-области.



а) б)

Рис. 4.

Триод имеет три вывода. Вывод от первой *р*-области называется коллектором (*К*); вывод от второй *р*-области называется эмиттером (*Э*); вывод от *n*-области называется базой (*Б*). Схематически триод изображают в виде кружка, внутри которого вычерчена утолщенная линия (рис. 4,*б*). От этой линии отходят три вывода: *Б*, *К*, *Э*. Вывод от эмиттера имеет стрелку.

§ 2,6. Три основных способа включения триодов в схему. Принцип работы полупроводникового триода в качестве управляемого сопротивления

Различают три основных способа включения триодов в схему. Эти способы отличаются друг от друга тем, какой из электродов триода является общим для управляющей и управляемой цепей. На рис. 5,*а*,*б*,*в* изображены схемы с общей базой, с общим эмиттером и с общим коллектором; $E_н$ — источник э. д. с. в цепи нагрузки; $E_у$ — источник э. д. с. в цепи управления.

Для всех схем, использующих триоды типа *р-n-р*, полярность источников э. д. с. должна быть такой, чтобы коллектор имел по отношению к базе отрицательный потенциал, а эмиттер — положительный.

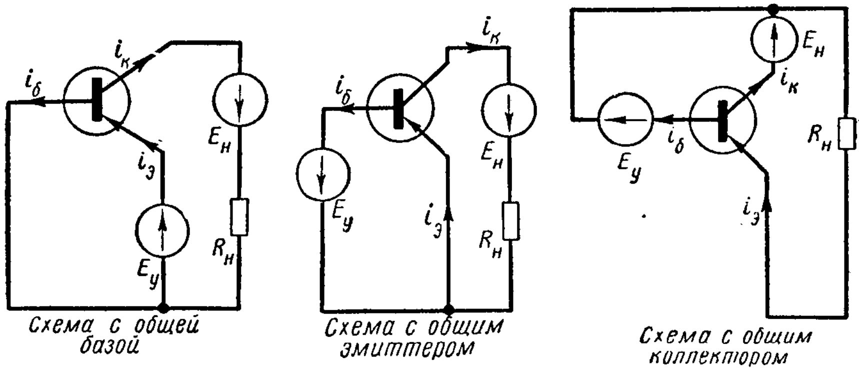
Основные положения, характеризующие принцип работы триода, рассмотрим применительно к схеме с общей базой (рис. 5,*а*).

В переходных слоях имеются объемные заряды*. В *р*-области объемные заряды отрицательны, а в *n*-области — положительны.

Объемные заряды переходных слоев создают электрическое поле, вектор напряженности которого направлен от *n*-области к *р*-области. Это поле препятствует движению носителей положительных зарядов из *р*-области в *n*-область и движению носителей отрицательных зарядов из *n*-области в *р*-область.

Разность потенциалов на переходном слое между *р*- и *n*-областями называют потенциальным барьером.

Разности потенциалов на переходных слоях зависят от величины и полярности каждой из э. д. с., включенной в схему.



а) б) в)

Рис. 5.

Так, включение э. д. с. $E_у$ в схеме с общей базой (рис. 5,*а*) приводит к уменьшению разности потенциалов на переходном слое между эмиттером и базой по сравнению с величиной разности потенциалов на этом слое, когда э. д. с. $E_у$ не включена.

В свою очередь включение э. д. с. $E_н$ приводит к увеличению разности потенциалов между базой и коллектором по сравнению с величиной разности потенциалов на этом слое, когда э. д. с. $E_н$ не включена.

При сниженном потенциальном барьере между эмиттером и базой из области эмиттера в область базы, соединенной с отрицательным полюсом э. д. с. $E_у$, движутся дырки (носители положительных зарядов).

Хотя в *n*-области при этом и происходит частичная рекомбинация положительных и отрицательных зарядов, однако благодаря малой толщине *n*-слоя бóльшая часть носителей

* На рис. 4 они не показаны.

положительных зарядов успевает „продрейфовать“ к переходному слою между базой и коллектором. В переходном слое между базой и коллектором носители положительных зарядов оказываются под воздействием сильного электрического поля, образованного источником э. д. с. $E_н$ (обычно $E_н \gg E_у$). Под действием этого поля носители положительных зарядов втягиваются в область коллектора и движутся к электроду коллектора. Таким образом, бо́льшая часть носителей положительных зарядов, вышедших из эмиттера и прошедших в n-область, устремляется к коллектору (потенциал коллектора отрицателен по отношению к потенциалам базы и эмиттера).

В результате к электроду базы подходит лишь незначительное количество носителей положительных зарядов из числа тех, которые вышли из области эмиттера и прошли в область базы.

В схеме с общей базой при принятых на рис. 5,*а* положительных направлениях для токов ток эмиттера $i_э$ равен сумме токов коллектора $i_к$ и базы $i_б$:

$$i_э = i_к + i_б.$$

Отношение тока коллектора к току эмиттера принято обозначать через α:

$$\alpha = \frac{i_к}{i_э}.$$

В плоскостных триодах (§ 2,7) α равно 0,95—0,98 и зависит от режима работы триода. В точечных триодах α может быть и больше единицы, например 2—3.

Полупроводниковый триод является управляемым активным сопротивлением. В нем можно управлять коллекторным током и падением напряжения на электродах коллекторной цепи путем изменения $E_у$.

Следует иметь в виду, что при изменении полярности $E_н$ в схеме с общей базой триод теряет свойство управляемости и на участке между базой и коллектором работает как обычный неуправляемый диод. Этот режим является ненормальным режимом работы триода.

§ 2,7. Плоскостные и точечные полупроводниковые триоды

Триоды делятся на плоскостные и точечные. У плоскостных триодов p- и n-области переходят одна в другую через относительно большую площадь. У точечных триодов p- и n-области имеют малый контакт. Следует иметь в виду, что физические процессы, происходящие в плоскостном и точечном триодах, существенно различны и дело, разумеется, не ограничивается только величиной площади p-n-перехода.

Плоскостные триоды применяют при низких, средних и высоких частотах, при малых и при относительно больших токах. Точечные триоды применяют при высоких частотах и при относительно малых токах.

§ 2,8. Общие сведения о вольт-амперных характеристиках триодов

Свойства триода определяются двумя видами семейств его вольт-амперных характеристик. Первый вид семейства — зависимость тока выходной цепи от напряжения между электродами триода, включенными в выходную цепь, при постоянстве какого-либо из остальных токов триода, взятого в качестве параметра. В качестве параметра* может быть взята и какая-либо другая величина, например напряжение между электродами триода, включенными в цепь управления. Это семейство характеристик описывает свойства триода по отношению к выходной цепи. Второй вид семейства — зависимость тока входной цепи — цепи управления — от напряжения между электродами триода, включенными во входную цепь, при напряжении между электродами триода, включенными в выходную цепь (или при токе выходной цепи), взятом в качестве параметра. Это семейство характеристик описывает свойства триода по отношению к цепи управления.

§ 2,9. Вольт-амперные характеристики плоскостных триодов

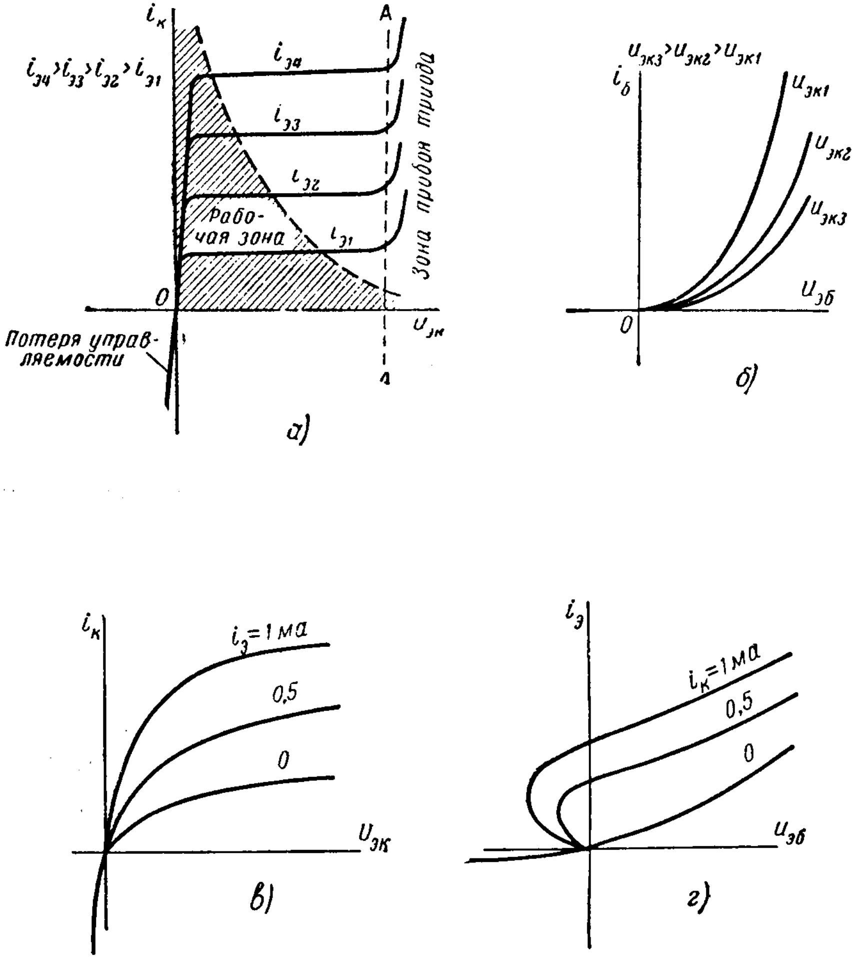
На рис. 6, *а* изображено семейство выходных характеристик плоскостного триода $i_к = f\ (u_{эк})$ при токе эмиттера $i_э$, взятом в качестве параметра для схемы с общим эмиттером (рис. 5,*б*). Правее пунктирной прямой *А—А* кривые начинают круто подниматься. В этой зоне напряжений может произойти пробой триода, поэтому правее прямой *А — А* работать нельзя.

Линия *ОВ* иллюстрирует зону потери управляемости триода при изменении полярности э. д. с. в выходной цепи.

При протекании тока триод нагревается. Допустимое тепловыделение в триоде характеризуется мощностью рассеяния $p_к = u_{эк} i_к$ (дается в каталогах).

На рис. 6,*а* пунктиром нанесена гипербола $i_к = \frac{p_к}{u_{эк}} = f\ (u_{эк})$. Чтобы триод не перегревался при длительной работе, рабочая точка должна находиться внутри заштрихованной области рис. 6,*а*

* Когда говорится о том, что на семействе вольт-амперных характеристик какая-либо величина является параметром, то здесь и в дальнейшем имеется в виду, что каждая кривая этого семейства получена (расчетным или опытным путем) при фиксированном (неизменном) значении величины, принятой в качестве параметра.



$i_к$
$i_{э4} > i_{э3} > i_{э2} > i_{э1}$
$i_{э4}$
$i_{э3}$
$i_{э2}$
$i_{э1}$
A
Зона пробоя триода
Рабо-
чая зона
0
$u_{эк}$
Потеря управ-
ляемости
а)
$u_{эк3} > u_{эк2} > u_{эк1}$
$i_б$
$u_{эк1}$
$u_{эк2}$
$u_{эк3}$
$u_{эб}$
0
б)
$i_к$
$i_э = 1\,ма$
0,5
0
$U_{эк}$
в)
$i_э$
$i_к = 1\,ма$
0,5
0
$u_{эб}$
г)

Рис. 6.

(кратковременно можно работать и в области, находящейся выше пунктирной кривой).

На рис. 6,*б* изображено семейство входных характеристик плоскостного триода $i_б = f\ (u_{эб})$ при параметре $u_{эк}$ в схеме с общим эмиттером (рис. 5,*б*).

Следует отметить, что любой ток триода, например $i_к$ или $i_б$, является функцией двух переменных. Так, ток $i_к$ является функцией $u_{эк}$ и $i_э$; ток $i_б$ есть функция $u_{эб}$ и $u_{эк}$.

§ 2,10. Вольт-амперные характеристики точечных триодов

На рис 6, *в* и *г* представлены вольт-амперные характеристики точечных триодов для схемы с общей базой.

Выходные характеристики $i_к = f\ (u_{эк})$ при токе эмиттера $i_э$, взятом в качестве параметра, представлены на рис. 6,*в*.

Входные характеристики $i_э = f\ (u_{эб})$ при токе коллектора $i_к$, взятом в качестве параметра, даны на рис. 6,*г*.

Выходные характеристики точечных и плоскостных триодов сходны, однако входные характеристики точечных триодов могут существенно отличаться от соответствующих характеристик плоскостных триодов.

Отличие заключается в том, что на входных характеристиках некоторых типов точечных триодов могут быть падающие участки (рис. 6,*г*). Появление падающих участков для схемы с общей базой может быть пояснено при помощи рис. 7.

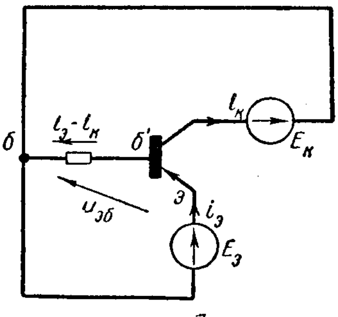


Рис. 7.

Здесь точка *э* — электрод эмиттера, точка *б* — электрод базы, *б'* — некоторая точка внутри триода вблизи электрода базы, от которой к точке *б* течет ток $i_э - i_к$. Положительные направления для токов $i_э$ и $i_к$ показаны на схеме стрелками. Между точками *б'* и *б* есть некоторое внутреннее сопротивление $R_{б'}$.

Запишем выражение для падения напряжения между точками *э* и *б*:

$$u_{эб} = u_{эб'} + R_{б'}\ (i_э - i_к).$$

Но $i_к = \alpha i_э$, поэтому $u_{эб} = u_{эб'} - R_{б'} i_э\ (\alpha - 1)\ \ (i_э > 0)$.

Как уже говорилось, для точечных триодов $\alpha > 1$. Следовательно, $u_{эб} < 0$ при $R_{б'} i_э\ (\alpha - 1) > u_{эб'}$.

При увеличении тока $i_э$ уменьшается коэффициент α, поэтому падающие участки на характеристиках имеют место при относительно небольших значениях тока $i_э$.

Для плоскостных триодов $\alpha < 1$, поэтому на характеристиках плоскостных триодов не возникает падающих участков.

Точечные триоды, на характеристиках которых есть падающие участки, используются в качестве составных частей триггерных схем и схем автогенераторов.

В настоящее время в основном применяются плоскостные триоды. Точечные триоды применяются относительно редко. Поэтому в дальнейшем, если не будет сделано специальной оговорки, под полупроводниковыми триодами будем понимать плоскостные триоды.

Полупроводниковые триоды могут быть использованы в качестве усилителей тока, напряжения и мощности.

§ 2,11. Полупроводниковый триод в качестве усилителя тока

Триод может служить усилителем тока, когда приращение (Δ) тока управляемой цепи (цепи, где включена э. д. с. $E_н$) оказывается во много раз больше приращения тока управляющей цепи (цепи, где включена э. д. с. $E_у$). Из трех схем (рис. 5,*а*, *б*, *в*) для усиления тока могут быть использованы две: схема с общим эмиттером (рис. 5,*б*) и схема с общим коллектором (рис. 5,*в*). В обеих схемах током управления является ток базы $i_б$. Током управляемой цепи в схеме с общим эмиттером является ток коллектора $i_к$, а в схеме с общим коллектором — ток эмиттера $i_э$.

Так как $i_к = \alpha i_э$ (см. § 2,6) и в то же время

$$i_э = i_к + i_б,$$

то

$$i_б = i_э - i_к = (1 - \alpha)\ i_э.$$

Как уже говорилось в § 2,6, коэффициент α зависит от режима работы триода, т. е. от величины токов триода, и несколько изменяется при переходе от одного режима работы триода к другому.

Однако при нахождении связи между малыми приращениями токов можно в первом приближении принять $\alpha = \text{const}$. Тогда

$$\Delta i_к = \alpha \Delta i_э$$

и

$$\Delta i_б = (1 - \alpha)\,\Delta i_э.$$

Коэффициент усиления по току k_i равен отношению приращения тока выхода к приращению тока входа. Коэффициент усиления по току для схемы с общим эмиттером, где выходным током является $i_к$, а входным — $i_б$, равен

$$k_i = \frac{\Delta i_к}{\Delta i_б} = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Коэффициент усиления по току для схемы с общим эмиттером, где выходной ток $i_э$, а входной $i_б$, равен

$$k_i = \frac{\Delta i_э}{\Delta i_б} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Коэффициент α для плоскостных триодов примерно равен 0,95—0,98, поэтому $k_i \approx 19—50$.

§ 2,12. Полупроводниковый триод в качестве усилителя напряжения

При работе триода в качестве усилителя напряжения важно, чтобы приращение напряжения $\Delta u_{вых}$ на нагрузке, включенной в выходную цепь, было больше приращения напряжения $\Delta u_{вх}$ на входе управляющей цепи.

Коэффициент усиления по напряжению равен $k_u = \frac{\Delta u_{вых}}{\Delta u_{вх}}$. При использовании триода в качестве усилителя напряжения его включают либо по схеме с общей базой (рис. 5,*а*), либо по схеме с общим эмиттером (рис. 5,*б*).

Покажем, что коэффициент усиления по напряжению для обеих схем может достигать значений порядка нескольких сотен. С этой целью обратим внимание на соотношение между входным и выходным сопротивлениями триода и на соотношение между сопротивлением нагрузки и выходным сопротивлением триода.

Соотношение между входным и выходным сопротивлениями триода.

Входное сопротивление триода $R_{вх}$ равно отношению приращения напряжения на входных зажимах триода к приращению входного тока.

Выходное сопротивление триода $R_{вых}$ равно отношению приращения напряжения на выходных зажимах триода к приращению выходного тока.

В схеме с общей базой

$$R_{вх} = R_{вх.\,эб} = \frac{\Delta u_{эб}}{\Delta i_э};$$

$$R_{вых} = R_{вых.\,эк} = \frac{\Delta u_{эк}}{\Delta i_к}.$$

Для схемы с общей базой $R_{вых}$ оказывается примерно на два порядка больше, чем $R_{вх}$.

В схеме с общим эмиттером

$$R_{вх} = R_{вх.\,эб} = \frac{\Delta u_{эб}}{\Delta i_б}$$

и

$$R_{вых} = R_{вых.\,эк} = \frac{\Delta u_{эк}}{\Delta i_к}.$$

Для схемы с общим эмиттером $R_{вых}$ обычно всего в несколько раз больше $R_{вх}$.

Соотношение между сопротивлением нагрузки и выходным сопротивлением триода.

При работе триода в качестве усилителя напряжения (и в качестве усилителя мощности) в обеих схемах сопротивления нагрузки $R_н$ берут обычно того же порядка, что и выходное сопротивление триода со стороны зажимов эмиттер — коллектор, т. е.

$$R_н \approx R_{вых.\ эк}.$$

Выведем формулу для определения k_u в схеме с общей базой:

$$k_u = \frac{\Delta u_{вых}}{\Delta u_{вх}} = \frac{\Delta i_к R_н}{\Delta i_э R_{вх.\ эб}}.$$

$$\text{Но } \frac{\Delta i_к}{\Delta i_э} = \alpha, \text{ а } \frac{R_н}{R_{вх.\ эб}} \approx \frac{R_{вых.\ эк}}{R_{вх.\ эб}},$$

$$\text{следовательно, } k_u = \alpha \frac{R_{вых.\ эк}}{R_{вх.\ эб}}.$$

Если учесть, что α близко к единице, то для схемы с общей базой $k_u \approx \frac{R_{вых.\ эк}}{R_{вх.\ эб}}$ составляет величину порядка нескольких сотен.

Выведем уравнение для k_u в схеме с общим эмиттером.

Входным током в схеме с общим эмиттером является ток базы, а выходным — ток коллектора. Поэтому

$$k_u = \frac{\Delta u_{вых}}{\Delta u_{вх}} = \frac{\Delta i_к R_н}{\Delta i_б R_{вх.\ эб}} \approx \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{R_{вых.\ эк}}{R_{вх.\ эб}}.$$

Если учесть, что $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 19 - 49$, а отношение $\frac{R_{вых.\ эк}}{R_{вх.\ эб}}$ в схеме с общим эмиттером составляет величину порядка нескольких единиц (и более), то для схемы с общим эмиттером k_u будет равно величине от нескольких десятков до нескольких сотен.

§ 2,13. Полупроводниковый триод в качестве усилителя мощности

Усиление по мощности достигается во всех схемах включения рис. 5. Коэффициент усиления по мощности k_p равен отношению приращения мощности в нагрузке к приращению мощности на входе триода:

$$k_p = \frac{\Delta P_н}{\Delta P_у}.$$

Для схемы с общей базой (рис. 5,*а*)

$$k_p = \frac{(\Delta i_{\text{к}})^2 R_{\text{н}}}{(\Delta i_{\text{э}})^2 R_{\text{вх. эб}}} \approx \frac{R_{\text{вых. эк}}}{R_{\text{вх. эб}}}.$$

Таким образом, для этой схемы коэффициент усиления по мощности примерно равен коэффициенту усиления по напряжению. Наибольшее усиление по мощности достигается в схеме с общим эмиттером. Для нее k_p может достигать значений 10^4 и более.

Для более подробного ознакомления с характеристиками и применением полупроводниковых триодов рекомендуется обратиться к [Л. 36, 46, 47].

§ 2,14. Основные сведения о трехэлектродной лампе

Электронная лампа имеет три электрода: катод, анод и сетку. Эти электроды находятся в вакуумированном стеклянном или металлическом баллоне. Катод, подогреваемый нитью накала от вспомогательной батареи (обычно не показываемой на схемах), испускает электроны вследствие явления, называемого термоэлектронной эмиссией. Поток электронов направляется ко второму (холодному) электроду — аноду — только в том случае, если потенциал анода выше потенциала катода. Если потенциал анода ниже потенциала катода, то движения электронов от катода к аноду не будет (в этом случае анод будет отталкивать электроны). Вследствие этого электронная лампа обладает несимметричной вольт-амперной характеристикой.

Третий электрод — сетка — расположен ближе к катоду, чем анод. Поэтому электрическое поле между сеткой и катодом даже при малых напряжениях между сеткой и катодом сильно влияет на поток электронов. Сетка является управляющим электродом. Путем изменения потенциала сетки можно управлять анодным током лампы. Как и полупроводниковый триод, электронная лампа может быть включена тремя способами: с общим катодом, с общей сеткой и с общим анодом (в зависимости от того, какой из электродов будет являться общим для анодной и сеточной цепей).

На рис. 8, *а* изображена часто применяемая схема с общим катодом.

Как и полупроводниковый триод, электронная лампа может служить усилителем тока, напряжения и мощности. Возможность выполнения лампой этих функций основывается на том, что изменение разности потенциалов между сеткой и катодом оказывает более сильное влияние на поток электронов с катода на анод, чем изменение (на ту же величину) разности потенциалов между анодом и катодом.

§ 2,15. Вольт-амперные характеристики трехэлектродной лампы для мгновенных значений

Цепь, в которую входит анод и катод электронной лампы, источник э. д. с. $E_а$ и нагрузка $R_н$ (рис. 8, *а*), называют анодной цепью.

Цепь, в которую входит сетка и катод электронной лампы и источник э. д. с. $E_с$, называют сеточной цепью.

Напряжение между анодом и катодом обозначают $u_а$ и называют анодным напряжением. Напряжение между сеткой и катодом обозначают $u_с$ и называют сеточным напряжением.

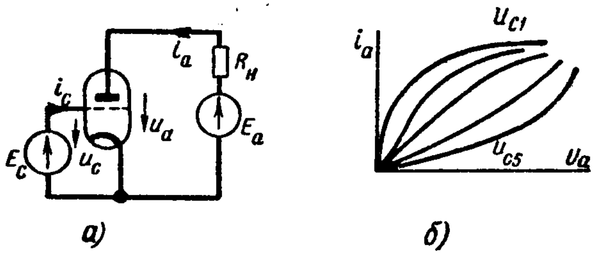


Рис. 8.

Токи в анодной $i_а$ и сеточной $i_с$ цепях нелинейно зависят от анодного и сеточного напряжений.

Под анодными характеристиками трехэлектродной лампы понимают зависимость анодного тока $i_а$ от анодного напряжения $u_а$ при сеточном напряжении $u_с$, взятом в качестве параметра.

На рис. 8, *б* представлено семейство анодных характеристик лампы.

Если семейство анодных характеристик рассечь прямыми $u_а = \text{const}$, то можно получить семейство кривых $i_а = f(u_с)$ при параметре $u_а$. Такие кривые называются сеточными (анодно-сеточными) характеристиками трехэлектродной лампы.

В зависимости от конструкции лампы и в особенности от конструктивного выполнения сетки лампы основные участки сеточных характеристик могут располагаться левее, правее, симметрично или почти симметрично относительно оси ординат (рис. 9).

Характеристики рис. 9, *а* называют левыми, характеристики рис. 9, *б* — правыми. При левом типе характеристик управление режимом работы производится отрицательным сеточным напряжением, при правом — положительным.

Левые характеристики более предпочтительны: при этом $i_с$ значительно меньше $i_а$, так что последний практически равен катодному току.

В лампах с правыми характеристиками $i_с$ может составлять заметную долю от $i_а$.

Зависимость сеточного тока от сеточного напряжения при неизменном анодном напряжении для ламп с левыми и правыми характеристиками иллюстрируется соответственно рис. 10, *а* и *б*.

Для кривой *1* анодное напряжение больше, чем для кривой *2*, т. е. $u_{a_1} > u_{a_2}$.

В общем случае при работе лампы одновременно меняются напряжения $u_а$ и $u_с$ и изображающая точка на семействах анодных и сеточных характеристик перемещается с одних кривых на другие.

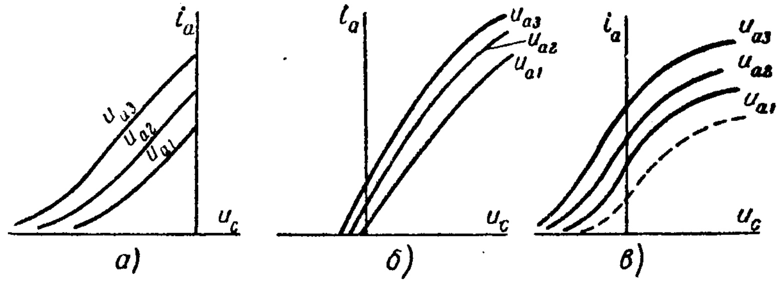


Рис. 9.

Следует отметить своеобразие сеточной (анодно-сеточной) характеристики по сравнению с обычными вольт-амперными характеристиками. Сеточная характеристика не связывает ток через нелинейное сопротивление и напряжение на нем (что характерно для обычных в. а. х.). Она дает связь между мгновенным значением тока через нелинейное сопротивление и мгновенным значением управляющего напряжения.

Между электродами электронной лампы существуют межэлектродные емкости. Они показаны пунктиром на рис. 11.

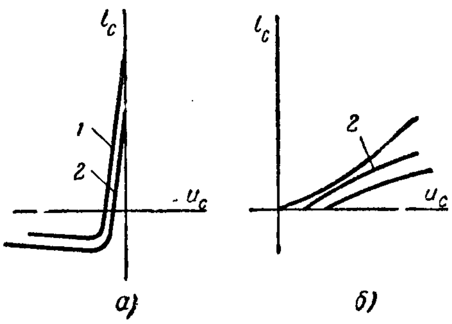


Рис. 10.

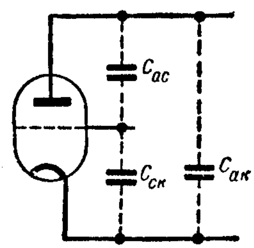


Рис. 11.

Здесь $C_{ак}$ — частичная емкость между анодом и катодом;
$C_{ас}$ — частичная емкость между анодом и сеткой;
$C_{ск}$ — частичная емкость между сеткой и катодом.

Если напряжение на электродах лампы меняется во времени, то через эти емкости текут емкостные токи.

Межэлектродные емкости относительно малы, они обычно не превышают несколько микромикрофарад. Поэтому емкостные токи учитывают при расчете электронных схем только при значительных частотах (при периодических процессах) или при весьма быстро протекающих переходных процессах.

Кроме трехэлектродных ламп, применяются четырех- и пятиэлектродные лампы.

§ 2,16. Четырехэлектродная электронная лампа — тетрод

Схема включения тетрода изображена на рис. 12.

У тетрода две сетки — C_1 и C_2. Сетка C_1 является управляющей, C_2 — экранирующей.

Управляющая сетка расположена ближе к катоду, чем экранирующая. К ней подводится управляющее напряжение u_{c1}. Она выполняет те же функции, что и сетка в триоде.

К экранирующей сетке подводится напряжение u_{c2} от вспомогательного источника, которое поддерживается при работе лампы неизменным.

Потенциал экранирующей сетки в тетроде обычно выбирают порядка 100—150 *в*.

Экранирующая сетка ослабляет электрическое поле между анодом и управляющей сеткой, что приводит к увеличению коэффициента усиления лампы.

В тетроде сильно сказывается влияние вторичной эмиссии (динатронный эффект). Динатронный эффект состоит в том, что первичные электроны, направляясь от катода к аноду, приобретают при своем движении настолько большую скорость, при которой они могут выбивать из анода вторичные электроны, движущиеся навстречу первичным.

При определенных условиях работы лампы количество вторичных электронов может оказаться настолько значительным, что вызовет падающие участки на анодных характеристиках лампы

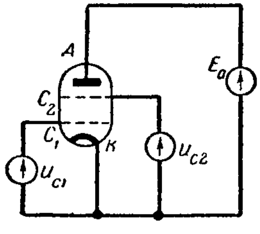


Рис. 12.

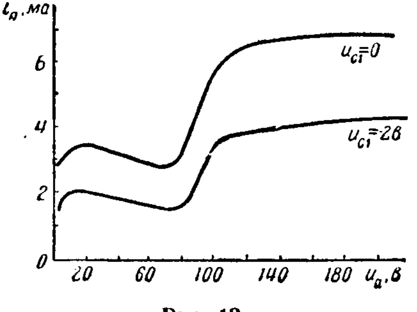


Рис. 13.

На рис. 13 изображены анодные характеристики тетрода при двух значениях сеточного напряжения u_{c1}.

Существуют специальные конструкции ламп (так называемые лучевые тетроды и пятиэлектродные лампы — пентоды), падающие участки на анодных характеристиках которых отсутствуют.

§ 2,17. Пятиэлектродная лампа — пентод

Схема включения пентода изображена на рис. 14. В пентоде три сетки: C_1 — управляющая сетка, к ней подводится управляющее напряжение u_{c1}; C_2 — экранирующая сетка, к ней подводится вспомогательное напряжение u_{c2} (назначение экранирующей сетки то же, что и в тетроде); C_3 — защитная или противодинатронная сетка.

Защитная сетка соединена с катодом лампы, благодаря чему она отталкивает вторичные электроны, выбитые из анода. В то же время защитная сетка не в состоянии задержать первичные электроны, направляющиеся с большой скоростью от катода к аноду лампы.

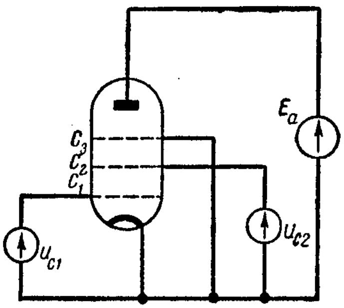


Рис. 14.

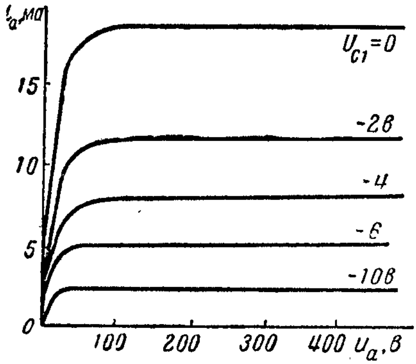


Рис. 15.

Анодные характеристики пентода изображены на рис. 15. Участки насыщения расположены почти параллельно оси абсцисс. Другими словами, напряжение между анодом и катодом лампы может значительно меняться, а анодный ток при неизменном напряжении управления остается постоянным. Это обстоятельство позволяет при расчетах рассматривать пентод по отношению ко всей остальной части схемы, присоединяемой к анодной цепи, как источник тока.

И у тетрода и у пентода анодно-сеточные характеристики являются левыми.

Более подробные сведения о характеристиках электронных ламп можно найти в [Л. 28,52].

§ 2,18. Общая характеристика фотоэлектронных приборов

Фотоэлектронными называют приборы, действие которых основано на фотоэффекте.

Фотоэффект представляет собой явление перехода электронов облучаемого вещества от одного энергетического уровня к другому под действием энергии светового потока.

Различают три вида фотоэффекта: внешний, внутренний и вентильный.

При внешнем фотоэффекте электроны покидают облучаемое вещество. При внутреннем фотоэффекте электроны остаются в облучаемом веществе, увеличивая его проводимость. При вентильном фотоэффекте электроны облучаемого вещества переходят из освещенного слоя вещества в другой слой, отделенный от освещенного тончайшим запорным слоем.

В соответствии с тремя видами фотоэффекта фотоэлектронные приборы (фотоэлементы) подразделяются на три группы:

фотоэлементы, действие которых основано на внешнем фотоэффекте;

фотоэлементы, действие которых основано на внутреннем фотоэффекте;

фотоэлементы, действие которых основано на вентильном фотоэффекте.

§ 2,19. Фотоэлементы, действие которых основано на внешнем фотоэффекте

Схема включения фотоэлемента с внешним фотоэффектом изображена на рис. 16,*а*.

Схема состоит из источника э. д. с. E, нагрузочного сопротивления $R_н$ и фотоэлемента. Свет, падая на катод фотоэлемента, выбивает с его поверхности электроны.

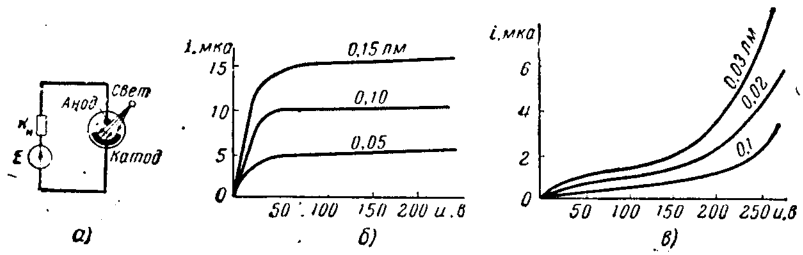


Рис. 16.

Под действием электрического поля между анодом и катодом электроны направляются к аноду.

Фотоэлементы с внешним фотоэффектом могут быть вакуумными и газонаполненными.

В вакуумном приборе ток между катодом и анодом создается только за счет электронов, выбиваемых лучами света из катода (первичных электронов).

В газонаполненных фотоэлементах ток обеспечивается не только за счет первичных электронов, но и за счет электронов, образовавшихся при ионизации газа первичными электронами.

Вольт-амперная характеристика одного из типов вакуумных фотоэлементов изображена на рис. 16,*б*. По оси абсцисс отложено напряжение между катодом и анодом, по оси ординат — ток. Параметром кривых является световой поток в люменах.

При относительно малых напряжениях часть электронов пролетает мимо анода. С увеличением напряжения усиливается электрическое поле и электроны в бóльшем количестве достигают анода. При еще бóльших напряжениях получается насыщение (все электроны достигли анода). Чем больше световой поток, тем больше электронов выбивается из катода.

Вольт-амперная характеристика одного из типов газонаполненных фотоэлементов с внешним фотоэффектом представлена на рис. 16,*в*.

Чем больше световой поток, тем большее количество электронов выбивается из катода.

Как видно из рис. 16,*в*, насыщение в данном типе фотоэлементов отсутствует. Это объясняется увеличением скорости движения электронов при повышении напряжения и бóльшей ионизацией газа, которую они вызывают.

Если катод не освещен, а на его электроды подано напряжение, то через фотоэлемент проходит очень малый ток, на 2—4 порядка (т. е. в 10^2—10^4 раз) меньше рабочего тока. Этот ток называется темновым.

Он обусловлен термоэлектронной эмиссией катода и токами проводимости по стеклу.

§ 2,20. Фотоэлементы, действие которых основано на внутреннем фотоэффекте

Этот тип фотоэлементов называют фотосопротивлениями.

Наиболее чувствительными к изменениям светового потока, стабильными и малоинерционными являются сернисто-свинцовые, сернисто-висмутовые фотосопротивления, а также сопротивления на основе селенида сурьмы.

Одним из лучших типов фотосопротивлений, серийно выпускаемых нашей промышленностью, являются сопротивления из селенида кадмия — ФСК и ФСД [Л.87]. Удельная чувствительность их составляет соответственно 6000 и 30 000 *мка/лм · в*. При рабочем напряжении 100 *в* от них можно получать ток в импульсном режиме 25 *ма* и в режиме постоянной нагрузки 1,5 *ма*.

Эти сопротивления применяются в фотореле, включающих фотосопротивление, электромагнитное реле и источник э. д. с. Фотореле работают на нагрузку без промежуточных усилителей.

В последние годы находят применение также германиевые фотосопротивления.

Схема включения германиевого фотосопротивления изображена на рис. 17,*а*.

Светочувствительным слоем в нем является *р-п*-переход. Луч света фокусируется на *р-п*-переходе.

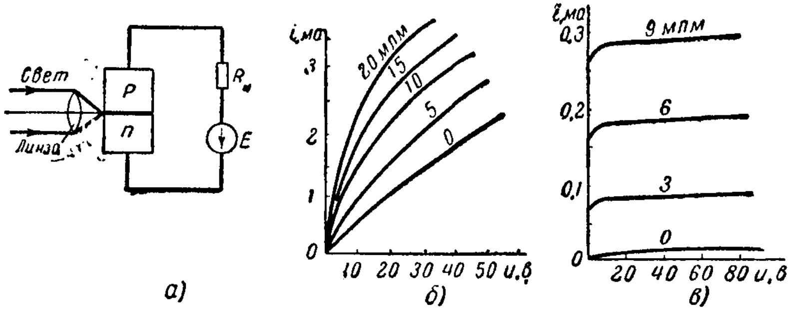


Рис. 17.

На рис. 17,*б* изображены в. а. х. точечного, а на рис. 17,*в* в. а. х. плоскостного германиевых фотосопротивлений.

У точечных германиевых фотосопротивлений сравнительно с плоскостными относительно большой темновой ток.

§ 2,21. Вентильные фотоэлементы

Вентильный фотоэлемент является преобразователем световой энергии в электрическую. Если к зажимам его присоединить сопротивление $R_н$ (рис. 18, *а*), а фотоэлемент облучить, то через

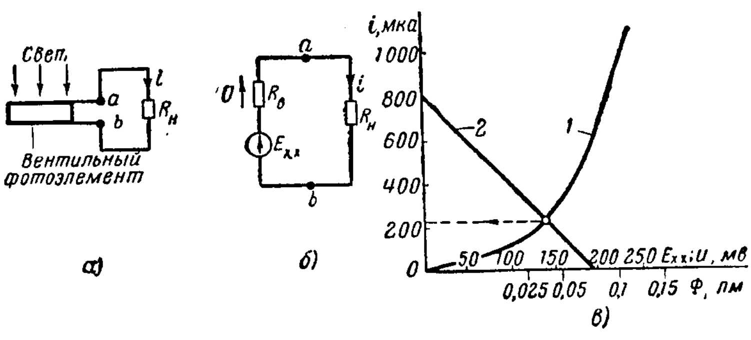


Рис. 18.

это сопротивление пойдет ток при отсутствии внешнего источника электрической энергии.

Схема замещения вентильного фотоэлемента изображена на рис. 18, *б*.

В этой схеме фотоэлемент замещен источником э. д. с. холостого хода $E_{х.х}$ и внутренним сопротивлением $R_в$.

Э. д. с. $E_{х.х}$ является нелинейной функцией светового потока, а сопротивление $R_в$ нелинейно зависит от тока в цепи.

Зависимость э. д. с. холостого хода $E_{х.х}$ от тока короткого замыкания $i_к$ (при $R_н = 0$) в схеме замещения для серноталлиевого фотоэлемента представлена кривой *1* (рис. 18, *в*).

Эта кривая фактически представляет собой в. а. х. сопротивления $R_в$ схемы замещения, поскольку при коротком замыкании (при $R_н = 0$) напряжение на сопротивлении $R_в$ равно э. д. с. $E_{х.х}$.

Для определения тока в цепи (рис. 18, *а*) при известном $R_н$ и заданном световом потоке следует найти ординату точки пересечения прямой *2*, проведенной через точки $u_в = E_{х.х}$, $i = 0$ и $u_в = 0$, $i = \frac{E_{х.х}}{R_н}$ ($R_н = 250$ *ом*), с вольт-амперной характеристикой сопротивления $R_в$ (кривая *1*).

Ордината точки пересечения прямой *2* с кривой *1* равна току в цепи.

§ 2,22. Тиратроны с накаленным катодом

Тиратроны с накаленным катодом или просто тиратроны представляют собой трехэлектродный ионный прибор, заполненный инертным газом или парами ртути.

На рис. 19, *а* показано условное изображение тиратрона на схемах.

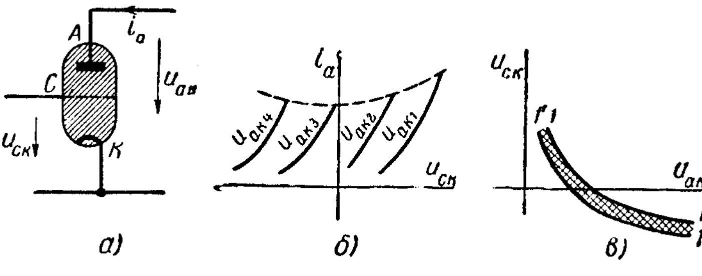


Рис. 19.

Штриховка внутри лампы свидетельствует о заполнении ее инертным газом или парами ртути.

Носителями тока в тиратроне являются электроны, испускаемые катодом, и ионы, возникающие при ионизации газа. Основными носителями являются электроны. Роль ионов сводится в основном к компенсации объемных отрицательных зарядов вблизи катода, благодаря чему падение напряжения между анодом и катодом у этого типа тиратронов в зажженном состоянии много меньше, чем у вакуумных электронных приборов. Токи, протекающие через тиратрон, могут быть значительно бо́льшими, чем токи, протекающие через вакуумные приборы.

Так же, как и вакуумные приборы, тиратрон обладает односторонней проводимостью: ток через него течет только в случае, если потенциал анода выше потенциала катода.

Семейство зависимостей анодного тока $i_а$ от напряжения $u_{ск}$ на промежутке сетка — катод при неизменном токе накала и различных напряжениях $u_{ак}$ на промежутке анод — катод, взятых в качестве параметра, изображено на рис. 19, *б*:

$$u_{ак\,4} > u_{ак\,3} > u_{ак\,2} > u_{ак\,1}.$$

Пунктирная кривая соединяет точки семейства, в которых зажигается дуга.

Таким образом, каждому значению анодного напряжения $u_{ак}$ соответствует свое напряжение $u^{з}_{ск}$ на сетке лампы, при котором происходит зажигание дуги.

Совокупность соответствующих значений $u_{ск}$ и $u_{ак}$, при которых происходит зажигание дуги, образует характеристику зажигания (кривая *1—1* на рис. 19, *в*).

Если значения $u_{ск}$ и $u_{ак}$ тако́вы, что соответствующая им точка будет находиться выше кривой *1—1* (рис. 19, *в*), то тиратрон будет зажжен.

Следует отметить, что положение кривой *1—1* может несколько меняться (кривая *1′—1′*) при вариации напряжения накала тиратрона и температуры окружающей среды.

Тиратрон является ограниченно управляемым нелинейным активным сопротивлением, поскольку путем изменения потенциала сетки можно управлять моментом зажигания тиратрона, но нельзя прекратить уже начавшийся разряд между анодом и катодом.

§ 2,23. Безнакальный тиратрон

Безнакальный тиратрон является управляемым прибором тлеющего разряда с активированным катодом.

В нем имеется три электрода — анод, катод и управляющий электрод, или зажигатель (рис. 20, *а*).

Тиратрон МТХ-90 конструктивно выполнен в виде стеклянного баллона длиной 35 *мм* и диаметром 11 *мм*, в который впаяны три электрода. Электроны выходят из катода под действием автоэлектронной эмиссии.

Цепь, в которую входят зажигатель и катод, является управляющей, цепь, в которую входят анод и катод, — управляемой.

Зависимость тока зажигателя $i_з$ от напряжения на промежутке между зажигателем и катодом $u_{зк}$ для тиратрона МТХ-90 изображена на рис. 20, *б* [Л. 67].

Вертикальный участок в. а. х. соответствует темновому разряду (тиратрон не светится). Падающий участок характеристики отвечает тлеющему разряду (при возникновении тлеющего разряда в тиратроне возникает свечение).

Зависимость тока зажигателя от напряжения на промежутке анод — катод $u_{ак}$ для того же тиратрона изображена на рис. 20, *в*.

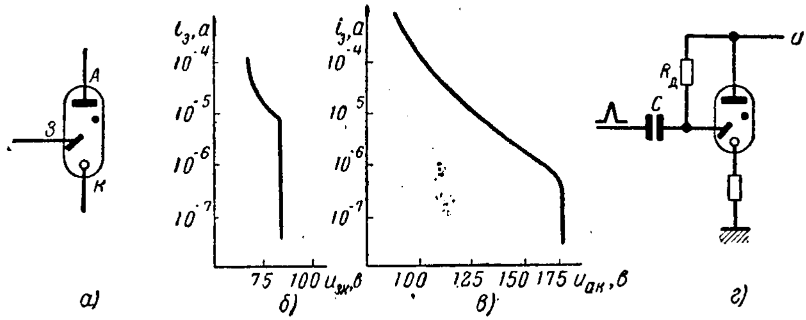


Рис. 20.

На рис. 20, *г* представлена схема включения безнакального тиратрона. В схеме имеется один источник питания. Он включен между анодом и катодом. Напряжение источника выбирают таким, чтобы тиратрон находился в незажженном состоянии, пока на зажигатель не поступит пусковой импульс (для МТХ-90 это напряжение равно 120—140 *в*).

Между анодом и зажигателем включено относительно большое сопротивление $R_д$. Напряжение на промежутке зажигатель — катод оказывается достаточно большим, чтобы в этом промежутке был темновой разряд. Однако темновой разряд пока не может перейти в тлеющий, поскольку ток зажигателя ограничивается сопротивлением $R_д$.

Если на зажигатель через емкость C поступит пусковой импульс, то ток через промежуток зажигатель — катод увеличится и в этом промежутке темновой разряд перейдет в тлеющий.

Возникновение тлеющего разряда между зажигателем и катодом приводит к ионизации промежутка катод — анод и к возникновению в нем тлеющего разряда.

§ 2,24. Безнакальный тетрод

Принцип действия безнакального тетрода тот же, что и безнакального тиратрона. В тетроде имеются две управляющие сетки — C_1 и C_2, первая является зажигателем (рис. 21,*а*).

Управление моментом зажигания тетрода может производиться путем увеличения напряжения $u_{с2к}$ между второй управляющей сеткой и катодом, тока $i_{с1}$ в цепи первой сетки и напряжения $u_{ак}$ между анодом и катодом.

Пусковые характеристики тетрода ТХ-4Б изображены на рис. 21, *б*.

Участок *a* — *b* соответствует возникновению разряда между второй сеткой и анодом, участок *b*—*c* — возникновению тлеющего разряда между анодом и катодом; $u_{ас1}$ — напряжение между анодом и первой сеткой.

Вольт-амперная характеристика тетрода в зажженном состоянии представлена на рис. 21, *в*. На этом рисунке по оси абсцисс

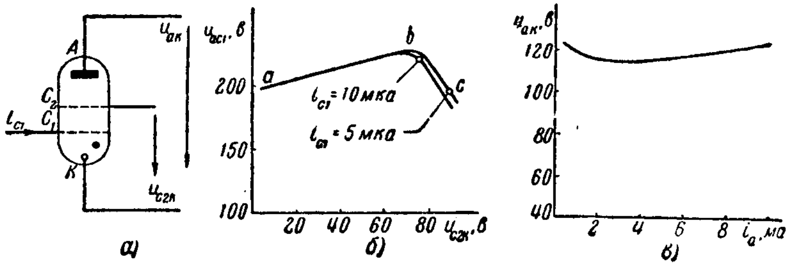


Рис. 21.

отложен анодный ток, по оси ординат — напряжение между анодом и катодом $u_{ак}$.

Вольт-амперные характеристики безнакальных тетродов в отличие от в. а. х. безнакальных тиратронов довольно стабильны в том смысле, что при переходе от одного образца данного типа к другому образцу того же типа пусковые характеристики оказываются практически одинаковыми.

§ 2,25. Полупроводниковые сопротивления, действие которых основано на эффекте Холла

Эффект Холла представляет собой явление возникновения э. д. с. на боковых гранях помещенного в магнитное поле кристалла полупроводника, по которому протекает ток управления $i_у$ (рис. 22,*а*).

Э. д. с. *e* направлена перпендикулярно магнитной индукции *B* и току $i_у$. Положительное направление э. д. с. *e* совпадает с направлением движения правоходового винта, если головку последнего вращать по кратчайшему расстоянию от положительного направления тока $i_у$ к положительному направлению вектора магнитной индукции *B*:

$$e = \frac{a}{\Delta} i_у B.$$

Здесь a — постоянная, зависящая от физико-химических свойств полупроводника;

Δ — толщина пластинки в направлении, совпадающем с направлением вектора магнитной индукции.

Чем тоньше пластинка, тем больше э. д. с. Последняя зависит от типа полупроводника и практически может достигать десятых долей вольта. Наибольшее распространение находят пластинки из мышьяковистого индия. Меняя $i_у$ или B, можно менять e. Если ток $i_у$ пропустить через катушку, создающую магнитное поле, в которое помещена пластинка, то магнитная индукция B будет пропорциональна этому току (рис. 22,*б*) и э. д. с. e окажется пропорциональной $i_у^2$.

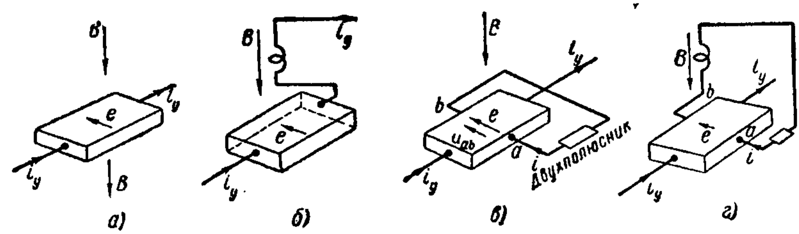


Рис. 22.

Если пластинку из полупроводника поместить в магнитное поле индукции B, пропустить через нее ток $i_у$, а к точкам a и b пластинки подключить некоторый двухполюсник так, чтобы через него протекал ток i (рис. 22,*в*), то падение напряжения между точками a и b пластинки будет зависеть не только от тока i, но и от э. д. с., возникающей в пластинке вследствие эффекта Холла:

$$u_{ab} = iR_с - kBi_у.$$

Здесь k — постоянная, зависящая от физико-химических свойств и толщины пластинки;

$R_с$ — сопротивление участка $a - b$ пластинки при отсутствии эффекта Холла.

Магнитное поле индукции B может быть создано и током i, протекающим через пластинку от точки a к точке b (рис. 22, *г*). Так как теперь $B \equiv i$, то $u_{ab} = iR_с - k_1 i\ i_у$.

В § 15,14 дан пример использования управляемого НС, действие которого основано на эффекте Холла.

§ 2,26. Активные сопротивления, управляемые путем изменения напряженности магнитного поля

Пластинки или плоские спирали из висмута, германия и некоторых других материалов обладают тем примечательным свойством, что их сопротивление зависит от величины напряженности магнитного поля H, в которое они помещены.

Если обозначить сопротивления при отсутствии или наличии магнитного поля соответственно через R_0 и R, то будет иметь место зависимость $R = R_0\ (1 + cH^2)$.

Здесь c — коэффициент, зависящий от физико-химических свойств материала.

Предполагается, как и в случае эффекта Холла, что температура проводника и окружающей среды поддерживается неизменной.

Для эффекта Холла падение напряжения берется в направлении, перпендикулярном току i_y, протекающему через пластинку, т. е. в направлении между точками a и b (рис. 22,*в*).

В рассматриваемом явлении падение напряжения берется в направлении движения тока.

Данный тип сопротивлений находит широкое применение при электрических измерениях, он является составной частью триггеров (§ 8,19) и других устройств.

Такие сопротивления используются также для измерений напряженности поля в сильных магнитных полях.

§ 2,27. Спазистор

Спазистор (рис. 23) представляет собой управляемый полупроводниковый прибор с одним электронно-дырочным (p-n) переходом.

Как и в полупроводниковом диоде, в спазисторе имеется p-n-область. В отличие от диода в область электронно-дырочного перехода (заштрихована) введено два управляющих электрода, называемых инжектором *И* и модулятором *М*.

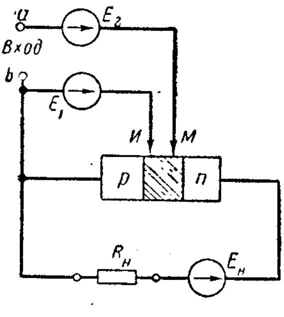


Рис. 23.

Инжектор соединен с электродом p-области через источник э. д. с. E_1, а модулятор соединен с тем же электродом через источник э. д. с. E_2.

Инжектор является для области электронно-дырочного перехода источником дополнительного потока электронов. Модулятор управляет дополнительным потоком электронов и этим влияет на основной ток, проходящий через нагрузку.

Управление потоком электронов, исходящим от инжектора, производится путем приложения управляющего напряжения между зажимами a и b. Если к этим зажимам приложить переменное напряжение относительно малой амплитуды, то в токе нагрузки возникнет переменная составляющая той же частоты, но со значительно бóльшей амплитудой. Следовательно, спазистор обладает усилительными свойствами.

Наиболее ценным свойством спазистора является его способность работать при весьма высоких частотах, вплоть до частот порядка 10^{10} *гц*. Эта способность объясняется тем, что в спазисторе отсутствует область, которая выполняла бы роль, аналогичную роли базы обычного полупроводникового триода.

Дело в том, что в области базы полупроводникового триода весьма мало́ результирующее электрическое поле, благодаря чему в ней мала́ скорость перемещения носителей электрических зарядов. Это обстоятельство и ограничивает частотные возможности обычных полупроводниковых триодов.

§ 2,28. Тринистор

Тринистор [Л. 111, 112] представляет собой четырехслойный кремниевый полупроводниковый диод.

На рис. 24, *а* изображена схема, в которой обычный диод (*p-n*-переход) подключен к источнику э. д. с. так, что э. д. с. E действует в направлении, обратном проводящему направлению диода.

При плавном увеличении э. д. с. от нуля изображающая точка на в. а. х. диода (рис. 24,*б*) будет перемещаться от точки О к точке f. Ток через диод в этом режиме очень мал, так как обусловлен неосновными носителями.

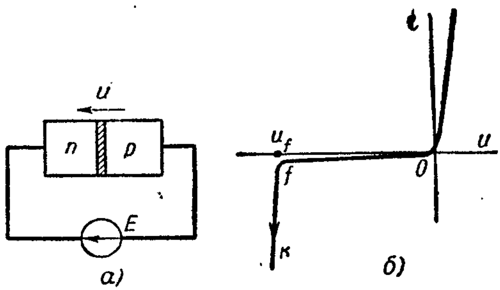


Рис. 24.

Когда э. д. с. достигнет значения u_f, произойдет ионизация атомов решетки вещества, возникнет лавинная ионизация и ток через диод резко возрастет (участок fk на рис. 24,*б*). На использовании лавинной ионизации и основано действие тринистора.

Простейшая схема включения тринистора изображена на рис. 25, *а*. В тринисторе три *p-n*-перехода (обозначены цифрами *1*, *2*, *3*). Источник э. д. с. включается так, чтобы проводящие направления для переходов *1* и *3* совпадали с положительным направлением э. д. с., а проводящее направление для перехода *2* было встречено э. д. с. E подобно случаю, изображенному на рис. 24,*а*.

Вольт-амперная характеристика тринистора изображена на рис. 25,*б*. Участок *0—1* ее качественно соответствует участку of на рис. 24,*б*.

На участке *1—2* (пунктир) происходит лавинная ионизация *p-n*-перехода *2*. Точки этого участка можно получить опытным путем лишь при питании схемы от источника тока. Участок *2—3* характеристики соответствует в. а. х. p-n-переходов *1* и *3*, когда p-n-переход *2* как бы закорочен.

Когда изображающая точка находится на участке 0—*1*, тринистор практически не пропускает тока. Когда изображающая точка находится на участке *2—3*, тринистор пропускает ток, как обычный диод.

Чтобы тринистор мог работать в качестве переключателя, режим его работы выбирают таким, чтобы в. а. х. нагрузки $R_н$ (прямая *B* на рис. 25,*в*) пересекала в. а. х. тринистора (кривая *A*) в точках *m*, *n*, *p*. Точки *n* и *m* находятся на падающем участке (на участке лавинной ионизации), а точка *p* — на восходящем участке.

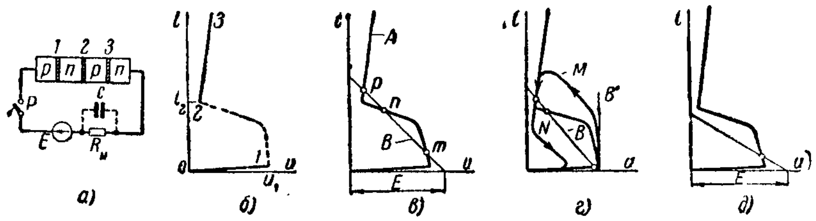


Рис. 25.

Если при неизменном $R_н$ плавно увеличивать э. д. с. *E* до пересечения вольт-амперных характеристик нагрузки и тринистора (рис. 25,*в*), то последний зажжется и изображающая точка перейдет в точку *p*. Другими словами, тринистор зажигается, когда напряжение на нем становится равным напряжению u_1 (рис. 25,*б*).

Для погасания тринистора необходимо, чтобы ток через него был снижен до значения, меньшего i_2.

Для облегчения зажигания тринистора параллельно активной нагрузке $R_н$ включают небольшой конденсатор (пунктир на рис. 25,*a*).

Если при нулевых начальных условиях замкнуть рубильник *P* в схеме рис. 25,*a*, то в первый момент в силу наличия конденсатора *C* возникает как бы короткое замыкание и в. а. х. нагрузок $R_н$ и *C* (рис. 25,*г*) займет положение *B'*, а не положение *B* (прямая *B* представляет собой в. а. х. сопротивления $R_н$).

Таким образом, замыкание рубильника при одной и той же э. д. с. приведет к зажиганию тринистора, если параллельно $R_н$ включен конденсатор *C*; при отсутствии конденсатора зажигания не будет.

При наличии конденсатора изображающая точка при зажигании движется по кривой *M* (рис. 25,*г*), а при погасании — по кривой *N*. Моментом зажигания тринистора можно управлять путем подачи на него кратковременных импульсов напряжения.

Время перехода из состояния „отключено“ в состояние „включено“ для тринистора на рабочий ток 1 *ма* составляет около $50 \cdot 10^{-9}$ *сек*. Тринисторы применяются и на большие токи (300—500 *а* и больше).

Если параметры E и $R_н$ в схеме рис. 25,*а* выбрать такими, чтобы пересечение в. а. х. нагрузки тринистора было только в одной точке, находящейся на падающем участке характеристики (рис. 25,*д*), то положение равновесия окажется неустойчивым и в системе возникнут автоколебания. Период автоколебательного процесса зависит от емкостей и активных сопротивлений.

Тринистор, который рассматривался в данном параграфе, является неуправляемым прибором, в нем нет управления величиной напряжения зажигания u_1. В последние годы разработаны управляемые тринисторы (полупроводниковые управляемые вентили — ПУВ). В них вблизи второго *p-n*-перехода имеется еще управляющий электрод. Подавая на него небольшое управляющее напряжение или пропуская через него небольшой управляющий ток, можно изменять вольт-амперную характеристику тринистора так, что вся она пододвинется ближе к оси ординат. При этом уменьшается напряжение зажигания u_1.

В последнее время в литературе описан еще один новый нелинейный элемент — бинистор, с которым можно ознакомиться, например, по [Л. 84].

3

Нелинейные индуктивные и емкостные сопротивления

§ 3,1. Общая характеристика нелинейных индуктивных сопротивлений

Под нелинейными индуктивными сопротивлениями, или нелинейными индуктивностями, понимают катушки индуктивности с замкнутыми сердечниками из ферромагнитного материала, для которых магнитный поток в сердечнике нелинейно зависит от тока. Индуктивное сопротивление таких катушек непостоянно и зависит от величины тока.

Катушка со стальным сердечником называется еще дросселем со стальным сердечником.

Нелинейные индуктивности подразделяются на управляемые и неуправляемые*.

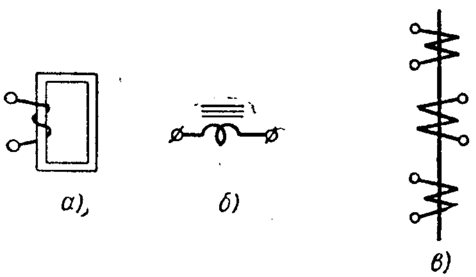


Рис. 26.

На электрических схемах нелинейную индуктивность изображают либо в виде замкнутого сердечника с обмоткой, либо в виде обмотки с тремя черточками (рис. 26, *а* и *б*). Когда сердечник содержит несколько обмоток, его иногда изображают в разрезанном виде (дают развертку сердечника, рис. 26, *в*).

Сердечники нелинейных индуктивностей при относительно низких частотах выполняют обычно либо пакетными, либо спиральными.

---

* Деление на безынерционные и инерционные на них не распространяется, так как нелинейность их обусловлена свойствами ферромагнитного материала, а не тепловым эффектом.

Пакетные сердечники состоят из тонких ферромагнитных пластин кольцевой, П- или Ш-образной формы.

Спиральные сердечники свивают из тонкой ферромагнитной ленты. По форме они напоминают туго навитую часовую пружину.

Пластины пакетного сердечника и отдельные витки спирального сердечника изолируют друг от друга эмалевым лаком, жидким стеклом, солями ортофосфорной кислоты или каким-либо иным изолирующим составом. Изоляция служит для уменьшения потерь энергии в сердечнике от вихревых токов.

При высоких частотах резко возрастают потери в листовых сердечниках, поэтому при высоких частотах применяют обычно прессованные ферритовые сердечники.

§ 3,2. Основные характеристики ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H. Различают два основных типа этих зависимостей: кривые намагничивания и гистерезисные петли.

Под кривыми намагничивания будем понимать однозначную зависимость между B и H.

Для гистерезисных кривых зависимость между B и H является петлевой.

Гистерезис представляет собой явление отставания изменений магнитной индукции B от изменений напряженности поля H. Он обусловлен как бы внутренним трением областей самопроизвольного намагничивания.

Различают несколько типов гистерезисных петель — симметричную, предельную и несимметричную (или частный цикл).

На рис. 27 изображено семейство симметричных гистерезисных петель. Для каждой симметричной петли максимальное положительное значение H равно максимальному отрицательному значению H и соответственно максимальное положительное значение B равно максимальному отрицательному значению B.

Геометрическое место вершин симметричных гистерезисных петель принято называть *основной кривой намагничивания*. При больших значениях H вблизи $\pm H_{max}$ восходящая и нисходящая части гистерезисной петли практически сливаются.

Предельной гистерезисной петлей, или *предельным циклом*, называют симметричную гистерезисную петлю при очень больших насыщениях. Индукцию при $H=0$ называют *остаточной индукцией* и обозначают B_r. Напряженность поля при $B=0$ называют *задерживающей* или *коэрцитивной силой* и обозначают H_c. Участок предельного цикла B_rH_c (рис. 27) принято называть кривой размагничивания или „спинкой“ гистерезисной петли.

Если периодически изменять H так, чтобы абсолютные значения $+H_{max}$ и $-H_{max}$ не были равны, то зависимость между B и H будет иметь петлевой характер, но центр петли не будет совпадать с началом координат (рис. 28). Такие гистерезисные петли принято называть *частными петлями гистерезиса* или *частными циклами*.

Если предварительно размагниченный ферромагнитный материал ($B=0, H=0$) намагничивать, монотонно увеличивая H, то зависимость между B и H при этом процессе будем называть *начальной кривой намагничивания*.

Начальная и основная кривые намагничивания настолько близко расположены друг к другу, что для многих практических целей их можно считать совпадающими (рис. 28).

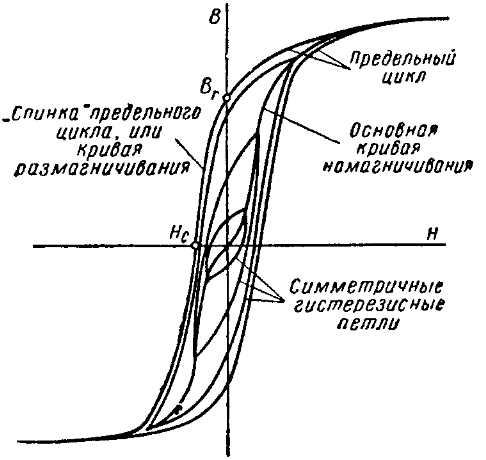


Рис. 27.

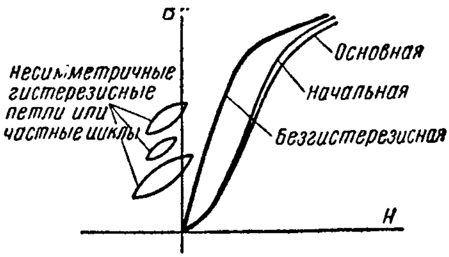


Рис. 28.

Безгистерезисную кривую при намагничивании ферромагнитного материала можно получить при периодическом постукивании или воздействии на него затухающим по амплитуде синусоидальным полем. При этом гистерезис, т. е. явление отставания изменений B от изменений H, вследствие внутреннего трения областей самопроизвольной намагниченности как бы снимается.

Безгистерезисная кривая намагничивания резко отличается от основной кривой (рис. 28).

В различных справочниках, а также в ГОСТ 802—58 в качестве однозначной зависимости между B и H дается основная кривая намагничивания.

§ 3,3. Магнитномягкие и магнитнотвердые материалы

Все ферромагнитные материалы могут быть подразделены на две большие группы: магнитномягкие и магнитнотвердые.

Магнитномягкие материалы обладают круто поднимающейся основной кривой намагничивания и относительно малыми площадями гистерезисных петель. Они применяются в устройствах, которые предназначены для работы при периодически изменяющемся магнитном потоке (трансформаторы, электродвигатели, генераторы, индуктивные катушки и т. п.).

В группу магнитномягких материалов входят электротехнические стали, железо-никелевые сплавы типа пермаллоя и оксидные ферромагнетики — ферриты и оксиферы.

Магнитнотвердые материалы обладают полого поднимающейся основной кривой намагничивания и большой площадью гистерезисной петли.

В группу магнитнотвердых материалов входят углеродистые стали, вольфрамовые сплавы, сплавы магнико, платино-кобальтовые и другие сплавы. Из магнитнотвердых материалов выполняют постоянные магниты.

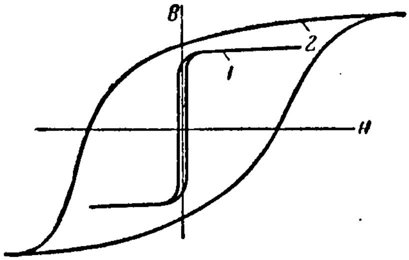


Рис. 29.

На рис. 29 для сопоставления показаны гистерезисные петли для магнитномягкого материала типа пермаллоя (кривая *1*) и для магнитнотвердого материала (кривая *2*).

§ 3,4. Потери на гистерезис за один цикл перемагничивания

При перемагничивании ферромагнитного материала в нем совершаются необратимые процессы, на которые расходуется энергия намагничивающего источника. Потери в сердечнике состоят в основном из потерь на гистерезис и вихревые токи. Потери на гистерезис обусловлены главным образом микроскопическими вихревыми токами, возникающими при скачкообразных поворотах векторов намагниченности отдельных намагниченных областей.

Гистерезисную петлю, снятую при весьма медленном, теоретически бесконечно медленном изменении магнитной индукции и напряженности поля, называют статической петлей гистерезиса. Площадь статической петли гистерезиса пропорциональна энергии, выделяющейся в 1 $см^3$ ферромагнитного вещества за один цикл перемагничивания.

§ 3,5. Потери в сердечниках нелинейных индуктивностей от вихревых токов

Если по обмотке со стальным сердечником проходит переменный ток, то в сердечнике возникает переменный магнитный поток, под действием которого в листах сердечника возникают вихревые токи.

На рис. 30 схематически изображен лист сердечника. Пусть магнитный поток, увеличиваясь, направлен вверх (вдоль листа). В листе, в плоскости, перпендикулярной магнитному потоку, наводится э.д.с., которая вызывает в нем вихревой ток. Контур, по которому замыкается вихревой ток, изображен пунктиром. Вихревые токи по закону Ленца стремятся создать поток, встречный вызвавшему их потоку.

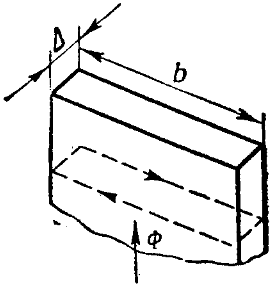


Рис. 30.

Потери энергии в листе на вихревые токи прямо пропорциональны квадрату наведенной в контурах листа э. д. с. и обратно пропорциональны сопротивлению контуров. Э. д. с. в контурах, по которым замыкаются вихревые токи, при заданной ширине листа пропорциональны толщине листа Δ, амплитудному значению индукции и частоте. В свою очередь, сопротивление контура пропорционально периметру контура и удельному сопротивлению. При $b \gg \Delta$ периметр контура почти не зависит от толщины листа. Поэтому потери энергии на вихревые токи пропорциональны квадрату амплитудного значения индукции, квадрату частоты и квадрату толщины листа.

Потери в листовом сердечнике на вихревые токи можно уменьшить путем изготовления сердечника из тонких изолированных друг от друга листов (см. предыдущий параграф), а также путем добавления в ферромагнитный материал примесей, увеличивающих его удельное сопротивление.

При частоте 50 *гц* толщина листов составляет обычно 0,35—0,5 *мм*, при высоких частотах она доходит до 0,005 *мм* и даже меньше.

§ 3,6. Схема замещения нелинейной индуктивности

В расчетах цепей переменного тока при относительно низких частотах нелинейную индуктивность можно представить в виде схемы рис. 31.

В этой схеме параллельно с идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивностью включено сопротивление $R_{гв}$, потери в котором имитируют потери энергии в сердечнике на гистерезис и вихревые токи и последовательно включенного сопротивления обмотки $R_{об}$;

U — напряжение на собственно нелинейной индуктивности.

Как отмечалось, потери энергии на гистерезис и вихревые токи $P_{гв}$ зависят от качества ферромагнитного материала и толщины листов сердечника.

Если сердечник выполнен из низкокачественного магнитного материала, то потери $P_{гв} = I_{гв}U = I_{гв}^2 R_{гв}$ в нем достаточно велики, а сопротивление $R_{гв}$ достаточно мало́ и ток $I_{гв} = \frac{U}{R_{гв}}$ может оказаться соизмеримым с током I_μ, протекающим по идеализированной (без потерь) нелинейной индуктивности. В этом случае ветвь с сопротивлением $R_{гв}$ надо учитывать в расчете.

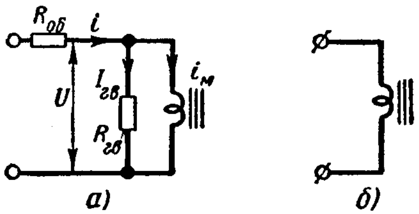


Рис. 31.

Если сердечник изготовлен из тонких листов высококачественного магнитномягкого материала, то потери в сердечнике малы, а сопротивление $R_{гв} = \frac{U^2}{P_{гв}}$ очень велико. В этом случае ветвь с сопротивлением $R_{гв}$ можно не учитывать при расчете.

Часто идут еще на одно упрощение: полагают, что активное сопротивление обмотки $R_{об}$ настолько мало́, что падение напряжения в нем можно не учитывать. В этом случае сопротивление катушки со стальным сердечником оказывается чисто индуктивным (рис. 31, *б*). Аналогичное упрощение часто допускается при расчете линейных индуктивностей.

Переход от схемы рис. 31, *а* к схеме рис. 31, *б* вызван стремлением облегчить расчеты цепей, учитывая основной полезный нелинейный эффект (нелинейность между индукцией B и напряженностью H) и пренебрегая побочным вредным эффектом (потерями на гистерезис и вихревые токи в сердечнике).

Нелинейность между B и H учитывают, ведя расчет по кривой, абсциссы которой равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли.

§ 3,7. Динамические петли гистерезиса

Если процесс перемагничивания является периодическим, то зависимость между B и H имеет петлевой характер.

Вследствие потерь на вихревые токи и явления магнитной вязкости динамические петли гистерезиса оказываются расширенными по сравнению с соответствующими статическими петлями гистерезиса.

Площадь динамической петли гистерезиса пропорциональна энергии, потребляемой от источника питания и выделяющейся в 1 $см^3$ ферромагнитного материала за один цикл перемагничивания. Эта энергия расходуется на гистерезис и вихревые токи и учитывает наличие магнитной вязкости в ферромагнитном материале.

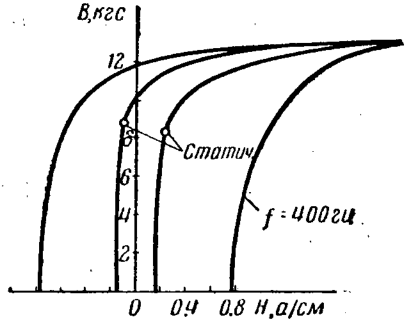


Рис. 32.

На рис. 32 изображены статическая и динамическая петли гистерезиса для одного и того же образца холоднокатаной текстурованной электротехнической стали при одном и том же максимальном значении магнитной индукции. Динамическая петля снята при частоте 400 *гц*.

Степень отличия динамической петли от статической зависит от сорта и удельного электрического сопротивления материала, от толщины листов, от температуры, а также от наличия в магнитном потоке высших гармоник. Чем ниже удельное электрическое сопротивление, чем больше толщина листов, чем выше процент содержания высших гармоник, чем ниже температура, тем шире динамическая петля гистерезиса.

§ 3,8. Магнитные материалы с прямоугольной петлей гистерезиса

Для некоторых ферромагнитных материалов — железо-никелевых сплавов, перминвара и других — петли гистерезиса имеют почти прямоугольную форму (рис. 33). Такие ферромагнитные материалы называют магнитными материалами с прямоугольной петлей гистерезиса.

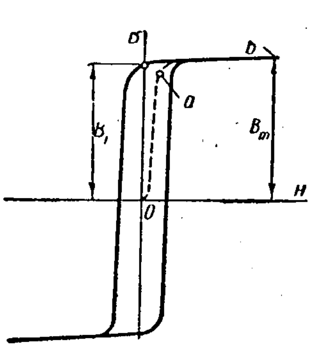


Рис. 33.

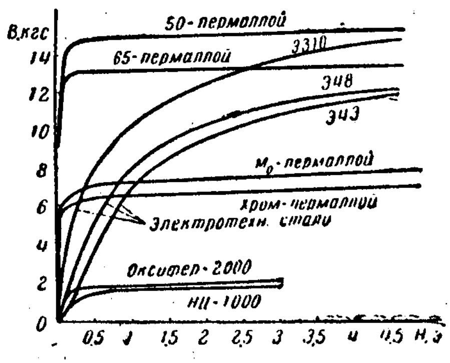


Рис. 34.

Степень прямоугольности петли гистерезиса принято характеризовать отношением остаточной индукции B_r к максимальной для данной петли магнитной индукции B_m. Отношение $\frac{B_r}{B_m}$ доходит до 0,95—0,99.

Основная кривая намагничивания на рис. 33 показана пунктиром. На участке *оа* она почти совпадает с осью ординат, на участке *ab* она идет почти параллельно оси абсцисс.

§ 3,9 Свойства и характеристики электротехнических сталей

Группу электротехнических сталей образуют сплавы железа с кремнием. Эти сплавы различаются по содержанию (степени легированности) кремния (от 1 до 4%), по способу прокатки (горячекатаная и холоднокатаная), по толщине листов (от 0,5 до 0,1 *мм*).

Согласно ГОСТ 802—58 электротехнические стали имеют буквенно-цифровое обозначение. Буква Э означает электротехническую сталь.

Первая цифра после буквы Э (1, 2, 3, 4) характеризует процентное содержание кремния. Вторая цифра (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) характеризует магнитные свойства стали.

Если в обозначении сорта стали поставлена третья цифра (цифра 0), то она свидетельствует о том, что сталь холоднокатаная. Холоднокатаные стали обладают улучшенными магнитными свойствами в направлении прокатки.

Электротехнические стали разделяются на две большие группы.

В первую группу входят стали, обладающие большой индукцией насыщения, но относительно низкими магнитными свойствами в слабых магнитных полях. Сюда относятся стали марок Э31, Э41, Э42, Э310, Э320, Э330 при толщине листа 0,35 и 0,5 *мм*. Эти стали предназначены для работы при относительно низких частотах — порядка 50 *гц*. Удельные потери при частоте 50 *гц* и индукции 10 *кгс** находятся в пределах от 0,8 до 1,6 *вт/кг* и при индукции 15 *кгс* — от 1,7 до 3,6 *вт/кг*.

Во вторую группу входят электротехнические стали, обладающие улучшенными магнитными свойствами в слабых полях и относительно малыми потерями. Они предназначены для работы при более высоких частотах (до звуковых частот включительно).

Ко второй группе относятся стали марок Э370, Э47, Э48 при толщине листа 0,35 и 0,2 *мм*; Э47, Э48 при толщине листа 0,15 и 0,1 *мм*.

Удельное электрическое сопротивление для сталей первой группы находится в пределах $0{,}5—0{,}58 \cdot 10^4$ *ом · см* и для второй группы — $0{,}47 — 0{,}55 \cdot 10^4$ *ом · см*.

Основные кривые намагничивания для нескольких сортов электротехнических сталей изображены на рис. 34.

---

*Работа издавалась до введения Международной системы единиц измерения (СИ).

На этом же рисунке для сопоставления представлены кривые намагничивания других магнитномягких материалов, о которых будет идти речь в § 3,10 и 3,11.

§ 3,10. Свойства и характеристики железо-никелевых сплавов

Группу железо-никелевых сплавов образуют сплавы железа с никелем, молибденом, хромом, кобальтом.

Эти сплавы имеют обобщенное название — пермаллои. Железо-никелевые сплавы по величине индукции насыщения могут быть разделены на сплавы с относительно низкой индукцией насыщения — порядка 6,5—8,5 *кгс* и сплавы с относительно высокой индукцией насыщения — порядка 13,5—16,5 *кгс*.

В первую группу входят следующие сплавы: Мо-пермаллой, содержащий 4 или 5% молибдена, и хромистый пермаллой (старое название 80 НХС).

Во вторую группу входят: 50-пермаллой, содержащий 50% никеля (старое название 50 Н); 65-пермаллой П, содержащий 65% никеля (старое название 65 НП); перминвар П и Мо-перминвар П (буква П свидетельствует о прямоугольной петле гистерезиса). Сплав перминвар, кроме никеля и железа, содержит кобальт.

По виду основной кривой намагничивания пермаллои могут быть разделены на сплавы с относительно пологой кривой намагничивания и на сплавы с крутоподнимающейся основной кривой намагничивания.

По степени прямоугольности петли гистерезиса пермаллои разделяются на сплавы с почти прямоугольной петлей гистерезиса, для которых коэффициент прямоугольности $\frac{B_r}{B_m}$ доходит до 0,95—0,99, и на сплавы с относительно низким коэффициентом прямоугольности.

Коэрцитивная сила железо-никелевых сплавов составляет 0,01—0,2 *а/см*. Удельное электрическое сопротивление составляет $0{,}2 \cdot 10^{-4}$—$0{,}6 \cdot 10^{-4}$ *ом · см*.

Пермаллой изготовляют в виде лент толщиной от 0,1 до 0,005 *мм*. С уменьшением толщины ленты возрастает коэрцитивная сила и несколько снижается степень прямоугольности петли гистерезиса.

Магнитные свойства пермаллоев сильно зависят не только от процентного содержания компонентов в сплаве, но и от технологии изготовления листового материала и сердечников.

Даже при незначительном отступлении от технологии изготовления листового материала (степени обжатия при прокатке, времени и температуры отжига, скорости изменения температуры при отжиге, состава газа, в атмосфере которого производится отжиг) резко изменяются магнитные свойства.

Магнитные свойства сердечников из пермаллоев сильно зависят от условий их отжига и от мер, принятых для устранения механических напряжений в них.

§ 3,11. Свойства и характеристики ферритов

Ферритами [Л. 101] называют ферромагнитные материалы, изготовленные из смеси окислов железа с окислами цинка, меди, магния, марганца или бериллия.

При изготовлении сердечников эта смесь тщательно размалывается, прессуется под большим давлением (1—3 *т/см*^{2}), отжигается в кислороде при температуре 1000—1400°С и затем медленно охлаждается. В результате получаются сердечники нужной геометрической формы, не требующие или почти не требующие последующей механической обработки.

По своим электрическим свойствам ферриты представляют собой полупроводники. Удельное электрическое сопротивление большинства типов ферритов составляет 10^2—10^7 *ом · см*, тогда как для железа удельное электрическое сопротивление составляет около 10^{-4} *ом · см*.

Благодаря большому электрическому сопротивлению потери на вихревые токи в ферритовых сердечниках чрезвычайно малы. Это позволяет применять ферритовые сердечники до частот порядка 10^7 *гц* и более.

Относительная электрическая проницаемость ферритов составляет несколько десятков. Следует иметь в виду, что свойства ферритов сильно зависят не только от состава и способа изготовления составных частей, но и от условий их спекания (температуры, давления и т. п.).

Ферриты маркируются двумя буквами и цифрой.* Буквы обозначают легирующие металлы (присадки к окислам железа). Цифра дает значение относительной магнитной проницаемости ферритов в начальной части основной кривой намагничивания. Например, НЦ-1000 есть никель-цинковый феррит с магнитной проницаемостью начальной части кривой намагничивания, равной 1000 *гс/э*.

Все ферриты могут быть разделены на три группы: ферриты с пологой кривой намагничивания (марганцево-цинковые ферриты); ферриты с круто поднимающейся кривой намагничивания (никель-цинковые ферриты); ферриты с прямоугольной петлей гистерезиса (магний-марганцевые ферриты типа ПП-1 — ПП-5) с коэффициентом прямоугольности B_r/B_m порядка 0,9 и коэрцитивной силой порядка 0,6—2 *э*.

Никель-цинковые ферриты, получаемые путем термического разложения солей, называют *оксиферами* или *оксидными ферромагнетиками*.

*Иногда применяют и другой способ маркировки, когда буква и цифра имеют иной смысл.

Оксиферы по магнитным свойствам мало отличаются от ферритов. Тип оксифера обозначается словом оксифер и цифрой, которая означает магнитную проницаемость на начальном участке основной кривой намагничивания. Так, оксифер-2000 обладает магнитной проницаемостью на начальном участке основной кривой намагничивания, равной 2000 *гс/э*.

Индукция насыщения для различных типов ферритов и оксидных ферромагнетиков находится в диапазоне примерно от 1800 до 3200 *гс*; коэрцитивная сила составляет 0,1—1,0 *э*.

На рис. 34 представлены основные кривые намагничивания для феррита НЦ-1000 и оксифера-2000.

Миниатюрные ферритовые сердечники из ферритов марок ВТ-2, К и других используются в качестве элементов „памяти" и логических элементов быстродействующих вычислительных машин. Ферритовые сердечники этих элементов перемагничиваются с очень большой скоростью путем подачи импульсов тока через намагничивающую обмотку (обмотки) тороида.

На процесс перемагничивания при высоких скоростях сильное влияние оказывает магнитная вязкость ферритов. В расчетах вязкость учитывают, полагая, что

$$H = H_в - a\frac{dJ}{dt}. \qquad (3,1)$$

Здесь H — напряженность поля, перемагничивающего сердечник;
$H_в$ — напряженность внешнего поля;
J — намагниченность;
$a\frac{dJ}{dt}$ — напряженность внутреннего „поля трения", обусловленного магнитной вязкостью (пропорциональна скорости изменения J);
a — коэффициент пропорциональности.

$H = H_{ст}(J)$ представляет собой статическую зависимость результирующей напряженности поля от намагниченности J.

Из (3,1) следует, что $\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{a}\,[H_в - H_{ст}(J)]$.

Установлено [Л.93], что коэффициент $\frac{1}{a}$ является функцией намагниченности J и для многих типов ферритов может быть представлен так:

$$\frac{1}{a} = k\left(1 - \frac{J^2}{J_s^2}\right).$$

Здесь k — коэффициент, зависящий от сорта феррита и от величины намагниченности насыщения J_s.

Таким образом, процесс перемагничивания ферритового сердечника с учетом магнитной вязкости описывается уравнением

$$\frac{dJ}{dt} = k\left(1 - \frac{J^2}{J_s^2}\right)[H_в - H_{ст}(J)]. \qquad (3,2)$$

В силу того что $B = \mu_0 (H + J)$, а $J \gg H$, в уравнении (3,2) можно заменить J на B. Тогда получим

$$\frac{dB}{dt} = k\left(1 - \frac{B^2}{B_s^2}\right)[H_{\text{в}} - H_{\text{ст}}(B)]. \tag{3,3}$$

При перемагничивании ферритовых сердечников с большими скоростями напряженность $H_{\text{в}}$ берут значительно превышающей напряженность по статической петле гистерезиса $H_{\text{ст}}(B)$. Поэтому в правой части уравнения (3,3) можно пренебречь величиной $H_{\text{ст}}(B)$ по сравнению с $H_{\text{в}}$ [Л.68].

Тогда

$$\frac{dB}{dt} = k\left(1 - \frac{B^2}{B_s^2}\right)H_{\text{в}}. \tag{3,4}$$

В уравнении (3,4) разделим переменные $\dfrac{dB}{k\left(1 - \dfrac{B^2}{B_s^2}\right)} = H_{\text{в}}dt$

и проинтегрируем левую часть по индукции B от начального значения $-B_r$ до конечного значения B, а правую часть по времени t от $t = 0$ до конечного значения t, соответствующего конечному значению B. В результате получим

$$\int_{-B_r}^{B} \frac{dB}{k\left(1 - \frac{B^2}{B_s^2}\right)} = Q(B) = \int_0^t H_{\text{в}}dt. \tag{3,5}$$

Характер зависимости $Q(B)$ от B определяется свойствами феррита (коэффициентом k) и начальным значением индукции $-B_r$. Качественно эта зависимость изображена на рис. 35.

Физический смысл зависимости $Q(B) = f(B)$ состоит в том, что для перемагничивания данного ферритового сердечника от $-B_r$ до фиксированного значения B необходимо, чтобы на сердечник воздействовала вполне определенная величина $Q(B) = \int_0^t H_{\text{в}}dt$. Одно и то же значение $Q(B)$ может быть создано малой величиной $H_{\text{в}}$ при большом времени t или большой величиной $H_{\text{в}}$ при относительно малом значении t.

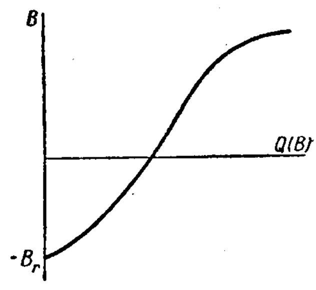


Рис. 35.

Величина $Q(B)$ имеет размерность $\frac{a \cdot сек}{см}$ и может быть названа амперсекундной площадью.

Чтобы познакомиться с применением характеристик $Q = f(B)$ для расчета схем, содержащих нелинейные индуктивности с ферритовыми сердечниками с прямоугольной петлей гистерезиса при импульсных воздействиях, можно обратиться, например, к [Л.91].

§ 3,12. Магнитодиэлектрики

Магнитодиэлектрики — материалы, полученные путем смешения мелкоизмельченного ферромагнитного порошка с диэлектриком. Эта смесь формуется, прессуется и запекается. Каждую ферромагнитную крупинку обволакивает пленка из диэлектрика, благодаря чему сердечники не насыщаются. μ, магнитодиэлектриков находится в интервале от нескольких единиц до нескольких десятков и даже сотен.

Все магнитодиэлектрики могут быть разделены на магнитномягкие и магнитнотвердые.

Группу магнитномягких магнитодиэлектриков образуют *ферропласты* и *ферроэласты*, группу магнитнотвердых — *магнитопласты* и *магнитоэласты*.

Ферропласты и магнитопласты неэластичны, а ферроэласты и магнитоэласты эластичны. В качестве диэлектрика используется полихлорвинил и полиэтилен.

Из ферропластов изготовляют сердечники индуктивных катушек и трансформаторов, работающих при высоких частотах.

В качестве ферромагнитных порошков при изготовлении ферропластов используют альсифер, пермаллой и карбонильное железо. Маркируются ферропласты одной или двумя буквами и цифрой, которая указывает магнитную проницаемость (в *гс/э*).

Наиболее распространенными ферропластами на основе альсифера являются альсиферы ТЧ-90; ТЧ-60; ТЧК-55; ферроэбонит А-10.

Ферропласты на основе пермаллоя называют также *пресспермами*.

Наивысшей магнитной проницаемостью обладает ферропласт типа ТЧ-180 на основе пермаллоя.

Магнитная проницаемость ферропластов, изготовленных на основе порошка карбонильного железа (типы К-12, К-8 и др.) составляет всего 7—14 *гс/э*.

Ферроэласты применяются для изготовления магнитных экранов, покрытий на жилах кабелей связи для увеличения их индуктивности и т. п.

В качестве ферромагнитных порошков при изготовлении ферроэластов используют пермаллой (ферроэласт П-20), альсифер (ферроэласт А-10), карбонильное железо (ферроэласт К-9), магнетит (ферроэласт М-7) и др.

Разновидность ферроэластов, магнитная проницаемость которых падает с увеличением температуры на несколько десятков градусов Цельсия, называют *термомагнитными ферроэластами*. Их применяют при изготовлении сердечников индуктивных катушек, индуктивность которых не должна меняться с изменением температуры [Л.101].

В сердечнике такой катушки перпендикулярно к магнитному потоку помещают тонкую пластинку (толщиной 0,01—0,05 *см*) из термомагнитного ферроэласта.

Магнитопласты — неэластичные магнитодиэлектрики с относительно высокой коэрцитивной силой. Их изготовляют из порошков никель-алюминиевых сплавов. Из магнитопластов делают прессованные магниты.

Магнитоэласты — эластичные магнитодиэлектрики с относительно высокой коэрцитивной силой и остаточной индукцией. Магнитоэласты применяются для изготовления лент, цилиндров, дисков, используемых при магнитной записи звука.

В качестве ферромагнитных порошков при изготовлении магнитоэластов применяют железо-никель-алюминиевые, бариевые сплавы и др.

§ 3,13. Нелинейные конденсаторы — варикbriefконды

В обычных конденсаторах обкладки разделены веществами, электрическая проницаемость которых не является функцией напряженности электрического поля. Для них зависимость мгновенного значения заряда q на одной обкладке конденсатора от мгновенного значения напряжения между обкладками (кулон-вольтная характеристика) представляет собой прямую линию, а емкость не зависит от напряжения u.

Для нелинейных конденсаторов зависимость $q=f(u)$ нелинейна (рис. 36, *а*), а емкость зависит от напряжения u.

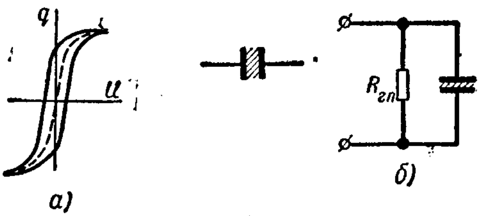


Рис. 36.

Нелинейные конденсаторы в нашей литературе называют варикондами, а в американской — варикапами.

Пространство между обкладками нелинейного конденсатора заполнено сегнетодиэлектриком. Сегнетодиэлектриками называют вещества, электрическая проницаемость которых является функцией напряженности электрического поля. Впервые это свойство было обнаружено у кристаллов сегнетовой соли, поэтому все вещества с этим свойством стали называть сегнетодиэлектриками.

На электрических схемах вариконды изображают в виде конденсаторов, между обкладками которых делается косая штриховка (рис. 36, *б*).

Сегнетодиэлектрики, подобно ферромагнитным веществам, обладают гистерезисом. Электрическим гистерезисом называют явление отставания изменения электрического смещения D от изменения напряженности электрического поля E. Как и в ферромагнитных веществах, площадь гистерезисной петли в координатах D, E характеризует собой потери на электрический гистерезис в 1 $см^3$ сегнетодиэлектрика за один период изменения E.

Кроме потерь на гистерезис, в варикондах есть еще потери, обусловленные тем, что проводимость сегнетодиэлектрика не равна нулю, а также вязкостью процессов поляризации и рядом других причин.

На схеме замещения (рис. 36, *б*) вариконд можно представить в виде параллельного соединения идеализированного (без потерь) вариконда и ветви с активным сопротивлением $R_{гп}$, потери в которой имитируют в расчетном отношении активные потери в варигонде.

Потери в варикондах являются вредными. Чем выше качество сегнетодиэлектрика, тем у́же петля гистерезиса и меньше потери. Для облегчения исследования свойств электрических цепей, содержащих варикопды, гистерезисом и потерями часто пренебрегают и зависимость $q=f(u)$ принимают в виде пунктирной кривой (рис. 36, *а*)

Абсциссы ее равны полусумме абсцисс восходящей и нисходящей ветвей предельной гистерезисной петли.

Однако такого рода замена недопустима при исследовании схем, принцип действия которых основан на гистерезисных явлениях, например, при анализе работы некоторых запоминающих счетных устройств на варикондах.

В настоящее время в качестве варикондов применяют конденсаторы, наполнителями в которых являются сегнетокерамические материалы на основе титаната бария — ВК-1 и ВК-3. Эти материалы обладают нелинейными свойствами в широком диапазоне температур от $-190°$ до $+80°$ С.

С изменением температуры диэлектрические свойства сегнетокерамики не остаются постоянными, что является одним из наиболее существенных недостатков ее.

Уменьшение зависимости диэлектрических свойств при изменении температуры достигнуто в так называемых термокомпенсированных конденсаторах ВКТ [Л. 54, 55, 108, 111].

В последнее время в качестве материала для изготовления нелинейных конденсаторов стали применять сегнетодиэлектрики, которые имеют почти прямоугольную петлю гистерезиса. Прямоугольной петлей гистерезиса обладают, например, кристаллические вещества триглицынсульфат и сернокислый гуанидин алюминия [Л. 111, 119]. Свойства этих двух новых сегнетодиэлектриков иллюстрируются приведенными данными для модулей вектора остаточной поляризации P, коэрцитивной силы E_c и температуры, соответствующей точке Кюри, в градусах Цельсия:

	P, *мккул/см²*	E_c, *кв/см*	°С
Сернокислый гуанидин алюминия	0,36	2,5	300
Триглицынсульфат	2,2	0,22	47

Конденсаторы с сегнетодиэлектриками, применяемые в счетно-решающей технике, являются тем совершеннее, чем выше у них остаточная поляризация и температура точки Кюри и чем ниже коэрцитивная сила.

Сернокислый гуанидин алюминия обладает более высокой температурой точки Кюри по сравнению с триглицынсульфатом, но уступает последнему по двум остальным показателям.

У этих материалов в меньшей степени проявляется эффект старения, чем у сегнетокерамических на основе титаната бария.

В последнее время в литературе [Л. 111] появились сообщения о том, что сернокислый гуанидин алюминия при определенных условиях обладает аномалией: гистерезисная петля его $P = f(E)$ оказывается смещенной по оси абсцисс на некоторое расстояние $E_{см}$ по отношению к обычному расположению петли. При этом в материале возникает как бы внутреннее поле смещения, характеризующееся напряженностью $E_{см}$.

Сернокислый гуанидин алюминия, в котором наблюдается такое явление, получил название аномального гуанидина алюминия.

В последние годы в литературе появились сообщения [см., например, Л. 111] об исследовании свойств тонких поликристаллических пленок из различных сегнетодиэлектриков. Толщина пленок, наносимых путем химического осаждения на платиновую фольгу, составляет около 2 *мк*. Такие пленки предполагается использовать для создания запоминающих счетных машин, т. е. в качестве аналогов магнитных пленок (см. § 9,8).

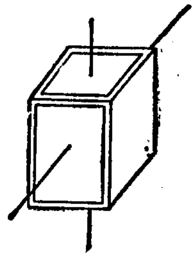


Рис. 37.

С целью разделения управляющей и управляемой цепей применяют четырехэлектродные конденсаторы, расположение электродов для одного из них схематически представлено на рис. 37.

Одна пара противостоящих пластин включается в управляющую, другая пара — в управляемую цепь.

4

Аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений

Для математического анализа нелинейных электрических цепей и изучения их общих свойств часто оказывается необходимым выразить характеристику нелинейного сопротивления аналитически, т. е. записать ее в виде математической зависимости.

Приближенное математическое описание характеристик нелинейных сопротивлений принято называть аппроксимацией.

Нелинейные сопротивления могут работать в самых различных режимах. В одних режимах работы изображающая точка перемещается по характеристике нелинейного сопротивления лишь в небольшой области, в других она может перемещаться вдоль всей характеристики или вдоль большей ее части.

Аппроксимация производится двумя основными методами:

1) путем замены характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых линий (кусочно-линейная аппроксимация);

2) путем замены характеристики (или рабочего участка ее) одним аналитическим выражением.

§ 4,1. Кусочно-линейная аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений

Методику кусочно-линейной аппроксимации характеристик отрезками прямых линий проиллюстрируем несколькими примерами.

Заменим в. а. х. диода (рис. 38,*а*) отрезками прямых линий в соответствии с рис. 38, *б* и *в*. На рис. 38, *б* характеристика представлена прямыми mn и np, на рис. 38, *в* — прямыми mq и qr.

Прямая *пр* проводится так, чтобы она возможно ближе совпадала с истинной характеристикой на рабочем участке.

Аппроксимация по рис. 38, *б* больше соответствует истинной характеристике, чем аппроксимация по рис. 38, *в*. Однако последняя приводит к более простым расчетным формулам при анализе цепей.

На участке *тп* (рис. 38, *б*) $i = 0$, на участке *пр* $i = k(u - u_0)$. Последняя формула справедлива только при $u \geqslant u_0$. Коэффициент k численно равен тангенсу угла наклона прямой *пр* к оси абсцисс.

На рис. 39 сплошной кривой представлена сеточная характеристика трехэлектродной лампы (при $u_а = \mathrm{const}$), пунктиром изображена ломаная прямая, заменяющая ее.

На рис. 40, *а* представлена характеристика симметричного нелинейного сопротивления. Рис. 40, *б* и *в* иллюстрирует два наиболее часто применяемых способа кусочно-линейной аппроксимации. Кривую рис. 40, *в* называют идеально прямоугольной кривой. В методе кусочно-линейной аппроксимации гистерезис учитывается путем замены гистерезисной петли (рис. 41, *а*) или частного гистерезисного цикла (рис. 42, *а*) параллелограммами или прямоугольниками, изображенными на рис. 41, 42 *б* и *в*.

Семейство характеристик полупроводникового триода (рис. 6, *а*) в первом приближении можно представить ломаными в соответствии с рис. 43. Параметром $u_{эб}$ на нем является напряжение между эмиттером и базой.

§ 4,2. Замена характеристики нелинейного сопротивления аналитическим выражением, описывающим всю характеристику в целом или значительный нелинейный участок ее в рабочей области

При использовании этого метода часто исходят не только из того, что аналитическая кривая должна всеми точками достаточно близко расположиться к характеристике нелинейного сопротивления в предполагаемом диапазоне перемещения рабочей точки на ней, но и из тех расчетных возможностей (простоты анализа), которые дает то или иное аналитическое выражение.

Замена реальной характеристики нелинейного сопротивления аналитической кривой является формально математической операцией и сводится к определению коэффициентов, входящих в аналитическое выражение. При подборе коэффициентов пользуются обычно методом выбранных точек. Согласно этому методу на характеристике выбирают наиболее характерные точки, через которые должна пройти аналитическая кривая. Число точек должно быть равно числу коэффициентов в аналитическом выражении. Затем подставляют координаты выбранных точек в аналитическое выражение кривой и получают систему урав-

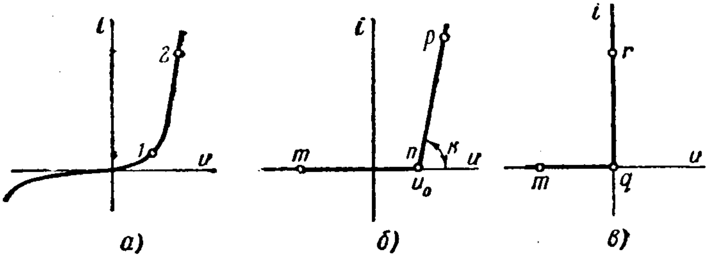


Рис. 38.

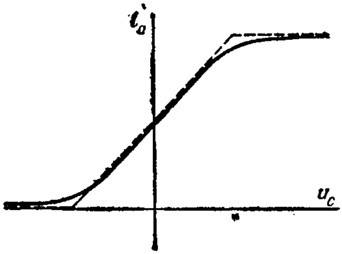


Рис. 39.

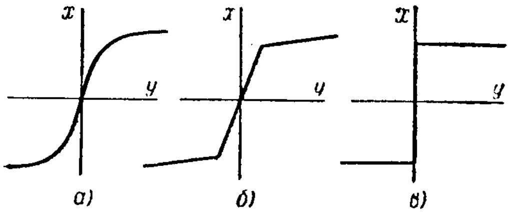


Рис. 40.

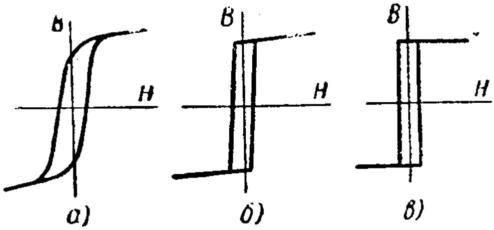


Рис. 41.

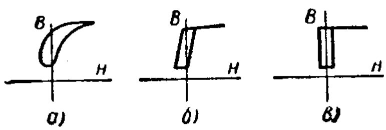


Рис. 42.

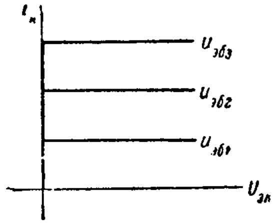


Рис. 43.

нений относительно искомых коэффициентов. Число уравнений равно числу искомых коэффициентов. Например, характеристика на рис. 38, *а* может быть представлена показательной функцией

$$i = A\,(e^{\beta u} - 1); \tag{4,1}$$

Для определения двух неизвестных коэффициентов A и β произвольно выбирают на характеристике две точки: точку *1* с координатами i_1 и u_1 и точку *2* с координатами i_2 и u_2 — и составляют систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$i_1 = A\,(e^{\beta u_1} - 1);$$

$$i_2 = A\,(e^{\beta u_2} - 1).$$

Отсюда

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{e^{\beta u_2} - 1}{e^{\beta u_1} - 1}. \tag{4,2}$$

Трансцендентное уравнение (4,2) решают относительно коэффициента β следующим образом: задаются различными значениями β, подсчитывают для них значения правой части (4,2) и по точкам строят вспомогательную кривую

$$\frac{e^{\beta u_2} - 1}{e^{\beta u_1} - 1} = f(\beta).$$

Искомое значение β определяется точкой вспомогательной кривой, ордината которой равна $\frac{i_2}{i_1}$. Затем определяется

$$A = \frac{i_2}{e^{\beta u_2} - 1}.$$

Единицы измерения коэффициента A такие же, что и единицы измерения тока; единицы измерения коэффициента β обратны единицам измерения напряжения. Произведение βu есть величина безразмерная.* Если сеточная характеристика трехэлектродной лампы, т. е. зависимость $i_a = f(u_c)$ при $u_a = \mathrm{const}$, путем выбора соответствующего значения u_a оказывается симметричной относительно точки пересечения кривой с осью ординат (например, кривая u_{a2} на рис. 39, *а*), то ее можно приближенно представить следующим выражением [Л. 33, 35]:

$$i_a = i_{a0} + a u_c - b u_c^3; \tag{4,3}$$

i_{a0} определяется током i_a при $u_c = 0$. Для определения коэффициентов a и b выбираем на характеристике две точки (i_{a1}, u_{c1} и i_{a2}, u_{c2}) и решаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$i_{a1} = i_{a0} + a u_{c1} - b u_{c1}^3;$$

$$i_{a2} = i_{a0} + a u_{c2} - b u_{c2}^3.$$

*Правильнее сказать, имеет нулевую размерность.

Симметричные сеточные характеристики часто описываются также формулой

$$i_a = \frac{i_s}{2}(1 + \operatorname{th}\gamma u_c).$$

Здесь i_s — ток насыщения (рис. 39) при выбранном анодном напряжении;

γ — коэффициент, численное значение которого равно тангенсу угла наклона касательной $\frac{di_a}{du_c}$ $\left(\text{в точке, для которой анодный ток } i_a = \frac{i_s}{2}\right)$, поделенному на $\frac{i_s}{2}$.

Эта формула хорошо описывает нижний загиб сеточной характеристики и участок насыщения.

Если сеточная характеристика несимметрична относительно точки пересечения с осью ординат (например, пунктирная кривая на рис. 9, *в*), то в окрестности точки пересечения эту характеристику можно выразить следующим образом:

$$i_a = i_{a0} + a_1 u_c + b_1 u_c^2. \tag{4,4}$$

Записанная выше формула с гиперболическим тангенсом также может быть приспособлена для описания несимметричных сеточных характеристик.

Положим, что анодное напряжение, при котором сеточная характеристика является симметричной, равно u_{a0}. Требуется записать аналитическое выражение $i_a = f(u_c)$ для кривой семейства сеточных характеристик, снятой при анодном напряжении u_a, не равном u_{a0}. В этом случае [Л. 19] будет иметь место зависимость

$$i_a = \frac{i_s}{2}[1 + \operatorname{th}\gamma(u_c - u)],$$

где

$u = \frac{u_{a0} - u_a}{\mu}$ $\left(\mu \text{ — коэффициент усиления лампы при токе } i_a = \frac{i_s}{2}\right)$.

Для описания участка характеристики, расположенного до точки перегиба кривой $i_a = f(u_c)$ при $u_a = \text{const}$ (например, участка кривой, обведенного жирной линией на рис. 9, *в*), и особенно для описания левых сеточных характеристик применяют показательную функцию

$$i_a = i_{a0}\, e^{\beta u_c}.$$

Здесь i_{a0} — анодный ток при $u_c = 0$;

β — коэффициент.

Большое практическое значение имеет аппроксимация симметричных характеристик по типу характеристик рис. 2, *а* и *б*. Для них удовлетворяется условие $y(x) = -y(-x)$, этому условию должна удовлетворять и аналитическая зависимость. Часто используется аппроксимация при помощи гиперболического синуса

$$y = \alpha \operatorname{sh}\beta x. \tag{4,5}$$

В нелинейных индуктивных сопротивлениях роль x в уравнении (4,5) играет магнитная индукция, роль y — напряженность поля. В нелинейных емкостях роль x играет заряд, роль y — напряжение на конденсаторе.

В нелинейных активных сопротивлениях с характеристикой (рис. 2, *б*) роль x выполняет напряжение, роль y — ток. Единицы измерения коэффициента α в уравнении (4,5) те же, что и единицы измерения y. Единицы измерения коэффициента β обратны единицам измерения x.

Для описания симметричных характеристик применяют также степенные полиномы вида

$$y = ax + bx^3 + cx^5. \tag{4,6}$$

Часто применяют укороченный полином вида $y = ax + bx^3$. Менее подходящим для описания симметричных характеристик является выражение

$$x = ay - by^3. \tag{4,7}$$

Однако и оно находит применение при грубом качественном анализе работы нелинейных цепей, так как в нем x просто выражается через y, что иногда существенно. Уравнение (4,7) пригодно для описания симметричных характеристик только до значения $y = \sqrt{\frac{a}{3b}}$ (до точки перегиба кривой).

Иногда симметричные характеристики описывают степенной функцией

$$y = kx^n, \tag{4,8}$$

где n принимает значения 3, 5, 7, 9...

Если индуктивность или емкость работают при слабых напряженностях поля — до точки перегиба начальной кривой намагничивания или соответственно до точки перегиба кривой $q = f(u)$, где кривая вогнута в обратную сторону по сравнению с вогнутостью кривой при значительных насыщениях, то для описания участка до точки перегиба могут быть применены аналитические выражения, которые были рассмотрены для описания симметричных характеристик, но x и y надо поменять местами.

Семейство характеристик полупроводникового триода (рис. 6, *а*) в первом весьма грубом приближении может быть описано так:

$$u_{кэ} = A\left(e^{pi_к - \gamma u_{бэ}} - 1\right), \tag{4,9}$$

где A, p и γ — численные коэффициенты.

Более подробно с вопросом аппроксимации характеристик электронных ламп можно ознакомиться по [Л. 19, 31] и с вопросом аппроксимации характеристик нелинейных индуктивностей по [Л. 15[.

В дальнейшем для аналитического описания характеристик симметричных сопротивлений по типу рис. 44, *а* будем пользоваться гиперболическим синусом [см. уравнение (4,5)].

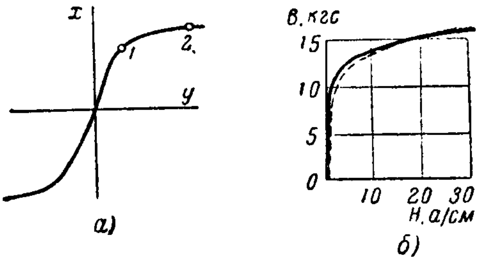


Рис. 44.

Для определения двух неизвестных коэффициентов α и β следует на полученной опытным путем зависимости $y = f(x)$ в предполагаемом рабочем диапазоне произвольно выбрать две наиболее характерные точки (*1* и *2* на рис. 44, *а*), через которые должна пройти аналитическая кривая, подставить координаты этих точек в уравнение (4,5) и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Пусть координаты этих точек будут y_1, x_1 и y_2, x_2.

Тогда

$$y_1 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_1;$$
$$y_2 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_2.$$

Поделим их и получим трансцендентное уравнение, которое служит для определения коэффициента β,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\operatorname{sh} \beta x_2}{\operatorname{sh} \beta x_1}. \qquad (4,10)$$

После этого определяется коэффициент α

$$\alpha = \frac{y_2}{\operatorname{sh} \beta x_2}.$$

Пример. Кривая намагничивания тороидального сердечника из трансформаторной стали Э41 изображена на рис. 44, *б*. Найти коэффициенты α и β.

Решение. Выбираем две точки на кривой

$$H_1 = 2\ \textit{а/см},\ B_1 = 11\ \textit{кгс},$$
$$H_2 = 24\ \textit{а/см},\ B_2 = 15{,}32\ \textit{кгс}.$$

По уравнению (4,10) имеем

$$\frac{\operatorname{sh}(15\,320\,\beta)}{\operatorname{sh}(11\,000\,\beta)} = 12.$$

Задаемся произвольными значениями β и подсчитываем:

$\beta \cdot 10^3 =$	0,6	0,522	0,457	0,392	0,326
$\beta B_2 =$	9,2	8	7	6	5
$\beta B_1 =$	6,6	5,74	5,03	4,32	3,59
$\frac{\operatorname{sh} \beta B_2}{\operatorname{sh} \beta B_1} =$	13,5	9,58	7,25	6,24	4,1

По результатам подсчетов строим кривую $\frac{\operatorname{sh}\beta B_2}{\operatorname{sh}\beta B_1}=f(\beta)$, из которой находим $\beta=0{,}575\cdot10^{-3}\frac{1}{гс}$.

Далее определяем

$$a=\frac{H_2}{\operatorname{sh}\beta B_2}=\frac{24}{\operatorname{sh}8{,}82}=\frac{12}{1690}=0{,}0071\ а/см.$$

Пунктирная кривая рис. 44, *б* построена по уравнению

$$H=0{,}0071\ \operatorname{sh}(0{,}575\cdot10^{-3}B).$$

В заключение необходимо остановиться на аналитическом описании характеристик S и N-образной формы.

S и N-образные характеристики можно грубо приближенно описать формулой

$$y=k_1x+k_2x^2+k_3x^3,$$

где k_1 и $k_3>0$, а $k_2<0$.

Для S-характеристики роль x играет величина, откладываемая по оси ординат, для N-характеристики — величина, откладываемая по оси абсцисс [Л. 32].

Другой способ описания характеристик S и N-образной формы рассмотрен в § 9,9.

5

Некоторые общие свойства нелинейных сопротивлений

Нелинейные сопротивления (НС) могут работать в различных режимах и условиях, например, когда через них протекает постоянный ток, синусоидальный ток без постоянной составляющей, а также синусоидальный ток с постоянной составляющей. Может иметь место и такой режим работы, когда на НС воздействуют несколько синусоидальных напряжений различных частот при отсутствии или наличии постоянной составляющей в токе или напряжении.

Приводимые ниже рассуждения и выводы распространяются на основной тип нелинейных сопротивлений — на безынерционные НС. Прежде всего убедимся в том, что НС являются генераторами гармоник тока и напряжения. С этой целью рассмотрим два простейших примера. На рис. 45 приведена кривая тока НС, к зажимам которого подведено синусоидальное напряжение. На рис. 46 изображены аналогичные кривые, когда через НС течет синусоидальный ток.

Из рисунков видно, что ток в первом случае имеет пикообразную форму, а напряжение во втором случае — трапецеидальную форму. Пикообразная и трапецеидальная кривые могут быть разложены на гармоники.

Если известны напряжение или ток на НС, то гармонический состав тока или напряжения можно определить графически.

Однако графический путь очень громоздок и не позволяет выразить различные нелинейные зависимости в общем виде. Поэтому для анализа общих свойств НС при работе в различных условиях будем пользоваться аналитическими характеристиками.

В предыдущей главе отмечалось, что характеристики НС можно представить в виде $y = f(x)$ или $x = f(y)$. Вид функции $f(x)$ или $f(y)$ должен соответствовать характеру нелинейности в каждой конкретной задаче. Кроме того, под x и y в каждой конкретной задаче следует понимать соответствующие данной задаче величины. Все вопросы, которые будут обсуждаться в данной и в последующих главах, можно было бы рассматривать, используя в качестве аналитического выражения характеристик НС степенные полиномы [например, формулы (4,3), (4,7), (4,8) и др.]. Однако формулы для определения амплитуд гармоник тока

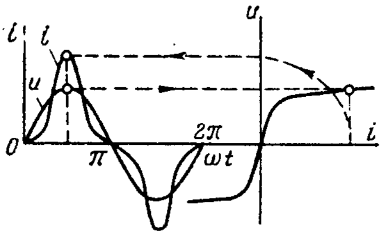


Рис. 45.

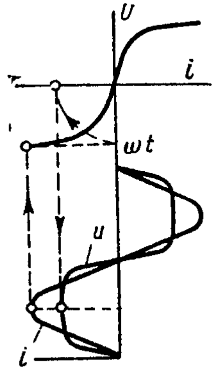


Рис. 46.

и напряжения при пользовании степенными полиномами часто оказываются настолько громоздкими, что пользоваться ими крайне неудобно. Поэтому предпочтение следует оказывать таким аналитическим выражениям характеристик НС, которые приводят к табулированным функциям, например к функциям Бесселя, гамма-функции и т. п.

§ 5,1. Понятие о функциях Бесселя

При анализе нелинейных цепей широко пользуются функциями Бесселя. Прежде чем записать общее выражение для них, вспомним, что тригонометрические, показательные и гиперболические функции выражаются степенными рядами:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{5,1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{5,2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{5,3}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{5,4}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{5,5}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{5,6}$$

В этих формулах аргумент x может быть чисто действительным, чисто мнимым или комплексным числом. Значения записанных выше функций для конкретных значений x можно определить при помощи степенных рядов (см. приводимый пример). Однако практически их следует определять при помощи графиков или таблиц.

Пример. Известно, что $\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30° = 0{,}5$. Проверить этот результат при помощи формулы (5,1).

Решение. В формулу (5,1) подставляем $\frac{\pi}{6}$ вместо x и ограничиваемся тремя членами ряда:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 =$$

$$= 0{,}5228 - 0{,}02385 + 0{,}0032 \approx 0{,}5.$$

Функции Бесселя также выражаются степенными рядами, и для них также составлены таблицы.

Функция Бесселя от аргумента x обозначается $J_p(x)$. Индекс p указывает порядок функции Бесселя. Общее выражение для $J_p(x)$ в виде степенного ряда:

$$J_p(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{0!\,p!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2}}{1!\,(p+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+4}}{2!\,(p+2)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+6}}{3!\,(p+3)!} + \ldots \tag{5,7}$$

В дальнейшем наибольший интерес будут представлять функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Для получения их в общее выражение (5,7) вместо x следует подставить jx, где $j = \sqrt{-1}$. Бесселева функция нулевого порядка ($p = 0$) от чисто мнимого аргумента jx равна

$$J_0(jx) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!^2} + \ldots \tag{5,8}$$

Пример. При помощи формулы (5,8) найти $J_0(j4)$.

Решение.

$$J_0(j4) = 1 + \frac{2^2}{1} + \frac{2^4}{4} + \frac{2^6}{36} + \frac{2^8}{576} + \frac{2^{10}}{14\,400} + \ldots \approx 11{,}3.$$

Бесселева функция первого порядка ($p = 1$) от чисто мнимого аргумента jx равна

$$J_1(jx) = j\frac{\frac{x}{2}}{1!} + j\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} + j\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} + j\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} + \ldots \tag{5,9}$$

Бесселева функция второго порядка ($p = 2$) от чисто мнимого аргумента jx равна

$$J_2(jx) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!4!} - \ldots \tag{5,10}$$

Аналогично записываются ряды для функции Бесселя и более высоких порядков.

При помощи этих рядов для функций Бесселя составлена табл. 1. Обратим внимание на то, что в таблице дана не функция $J_1(jx) = f(x)$, а функция $-jJ_1(jx) = f(x)$. Точно так же вместо функции $J_3(jx) = f(x)$ в табл. 1 дана зависимость $jJ_3(jx) = f(x)$. Сделано это потому, что функции $J_1(jx)$ и $J_3(jx)$, а также $J_5(jx)$ без дополнительного множителя j в дальнейшем не встречаются.

Так как функция $J_2(jx) = f(x)$ отрицательна, то в табл. 1 приведена зависимость $-J_2(jx) = f(x)$.

Таблица 1

Значения функций Бесселя мнимого аргумента

x	$J_0(jx)$	$-jJ_1(jx)$	$-J_2(jx)$	$jJ_3(jx)$
0,0	1,00	0,00	0,00	0,00
0,2	1,01	0,10	0,005	$0{,}17 \cdot 10^{-3}$
0,4	1,04	0,20	0,02	$0{,}13 \cdot 10^{-2}$
0,6	1,09	0,32	0,046	$0{,}46 \cdot 10^{-2}$
0,8	1,16	0,43	0,08	0,01
1,0	1,26	0,56	0,14	0,02
1,2	1,39	0,72	0,20	0,04
1,4	1,55	0,88	0,29	0,06
1,6	1,75	1,08	0,39	0,10
1,8	1,99	1,32	0,53	0,15
2,0	2,28	1,59	0,69	0,21
2,2	2,63	1,91	0,89	0,30
2,4	3,05	2,30	1,13	0,41
2,6	3,55	2,76	1,43	0,55
2,8	4,16	3,30	1,80	0,73
3,0	4,88	3,95	2,24	0,96
3,2	5,75	4,73	2,79	1,25
3,4	6,78	5,67	3,45	1,61
3,6	8,03	6,79	4,25	2,07
3,8	9,51	8,14	5,23	2,63
4,0	11,30	9,76	6,42	3,34
4,2	13,44	11,70	7,87	4,21
4,4	16,01	14,04	9,63	5,29
4,6	19,09	16,86	11,76	6,63
4,8	22,79	20,25	14,35	8,29
5,0	27,23	24,34	17,50	10,33
5,2	32,58	29,25	21,33	12,84
5,4	39,01	35,18	25,97	15,94
5,6	46,73	42,32	31,62	19,74
5,8	56,03	50,94	38,47	24,41
6,0	67,23	61,34	46,78	30,15
7	168,6	156	124	85,17
8	427,56	399,87	327,6	236,07
9	1 093,59	1 030,91	864,50	646,69
10	2 815,7	2 671	2 281	1 758
11	7 288	6 948,9	6 025	4 758
12	18 948	18 142	15 924	12 834

x	$J_4(jx)$	$-jJ_5(jx)$	$-J_6(jx)$
0,0	0,00	0,00	0,00
0,2	$0{,}42 \cdot 10^{-5}$	$0{,}83 \cdot 10^{-7}$	$0{,}14 \cdot 10^{-8}$
0,4	$0{,}67 \cdot 10^{-4}$	$0{,}27 \cdot 10^{-5}$	$0{,}89 \cdot 10^{-7}$
0,6	$0{,}34 \cdot 10^{-3}$	$0{,}21 \cdot 10^{-4}$	$0{,}10 \cdot 10^{-5}$
0,8	$0{,}11 \cdot 10^{-2}$	$0{,}87 \cdot 10^{-4}$	$0{,}58 \cdot 10^{-5}$
1,0	$0{,}27 \cdot 10^{-2}$	$0{,}27 \cdot 10^{-3}$	$0{,}22 \cdot 10^{-4}$
1,2	$0{,}58 \cdot 10^{-2}$	$0{,}69 \cdot 10^{-3}$	$0{,}68 \cdot 10^{-4}$
1,4	0,011	$0{,}15 \cdot 10^{-2}$	$0{,}17 \cdot 10^{-3}$
1,6	0,019	$0{,}30 \cdot 10^{-2}$	$0{,}40 \cdot 10^{-3}$
1,8	0,032	$0{,}56 \cdot 10^{-2}$	$0{,}83 \cdot 10^{-3}$
2,0	0,051	$0{,}98 \cdot 10^{-2}$	$0{,}16 \cdot 10^{-2}$
2,2	0,077	0,02	$0{,}29 \cdot 10^{-2}$
2,4	0,114	0,026	$0{,}51 \cdot 10^{-2}$
2,6	0,165	0,040	$0{,}85 \cdot 10^{-2}$
2,8	0,234	0,061	0,013
3,0	0,325	0,091	0,022
3,2	0,446	0,1328	0,033
3,4	0,605	0,1886	0,050
3,6	0,810	0,2651	0,074
3,8	1,076	0,3678	0,1078
4,0	1,416	0,5047	0,1545
4,2	1,851	0,6857	0,2186
4,4	2,405	0,9234	0,3060
4,6	3,106	1,234	0,4239
4,8	3,992	1,637	0,5819
5,0	5,108	2,158	0,7923
5,2	6,510	2,829	1,071
5,4	8,268	3,689	1,437
5,6	10,468	4,788	1,197
5,8	13,21	6,189	2,543
6,0	16,63	7,968	3,356
7	51,0	26,88	12,59
8	150,5	85,53	43,62
9	433,3	261,46	142,9
10	1 226	771	449,3
11	3 430	2 263	1 372
12	9 507	6 496	4 094

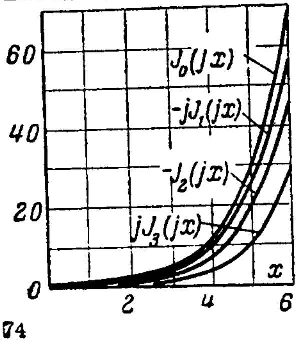


Рис. 47.

При $x = 0$ не равна нулю только функция Бесселя нулевого порядка $J_0(0) = 1$.

Из графиков (рис. 47) видно, что с ростом x значения функций увеличиваются. Чем выше порядок функции Бесселя, тем меньше ее значение при одном и том же x.

§ 5,2. Разложение гиперболического синуса и гиперболического косинуса от периодического аргумента в ряды Фурье, коэффициентами которых являются функции Бесселя

Если аргумент x изменяется по периодическому закону, например по закону синуса: $x = x_m \sin \omega t$, где x_m — амплитуда колебания, то по периодическому закону будут изменяться и функции $\mathrm{sh}(x_m \sin \omega t)$ и $\mathrm{ch}(x_m \sin \omega t)$. Так как периодические функции могут быть представлены рядами Фурье, то в ряд Фурье могут быть разложены функции $\mathrm{sh}(x_m \sin \omega t)$ и $\mathrm{ch}(x_m \sin \omega t)$. С этой целью в (5,5) и (5,6) надо вместо x подставить $x_m \sin \omega t$, учесть известные из тригонометрии формулы

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^3\alpha = -\frac{1}{4}\sin 3\alpha + \frac{3}{4}\sin\alpha;$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{4}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

сгруппировать все слагаемые с $\sin \omega t$, с $\sin 3\omega t$, а также выделить постоянную составляющую. Окажется, что коэффициентами при тригонометрических функциях будут ряды, которыми изображаются функции Бесселя различных порядков от чисто мнимого аргумента jx_m:

$$\mathrm{sh}(x_m \sin \omega t) = 2\left[-jJ_1(jx_m)\right]\sin \omega t - 2jJ_3(jx_m)\sin 3\omega t - -2jJ_5(jx_m)\sin 5\omega t - \ldots \tag{5,11}$$

$$\mathrm{ch}(x_m \sin \omega t) = J_0(jx_m) + 2J_2(jx_m)\cos 2\omega t + + 2J_4(jx_m)\cos 4\omega t + \ldots \tag{5,12}$$

Ряд для $\mathrm{sh}(x_m \sin \omega t)$ состоит только из нечетных гармоник и не имеет постоянной составляющей. Ряд для $\mathrm{ch}(x_m \sin \omega t)$ имеет постоянную составляющую и четные гармоники.

Пример. Разложить в ряд Фурье $\mathrm{sh}(4\sin\omega t)$ и $\mathrm{ch}(4\sin\omega t)$.

Решение. Значение функций Бесселя берем из табл. 1. В соответствии с формулами (5,11) и (5,12) имеем

$$\mathrm{sh}(4\sin\omega t) = 2\cdot 9{,}76\sin\omega t - 2\cdot 3{,}337\sin 3\omega t + 2\cdot 0{,}505\sin 5\omega t - \ldots$$

$$\mathrm{ch}(4\sin\omega t) = 11{,}3 - 2\cdot 6{,}42\cos 2\omega t + 2\cdot 1{,}416\cos 4\omega t + \ldots$$

§ 5,3. Разложение гиперболического синуса от постоянной и синусоидальной составляющих в ряды Фурье

Если аргумент

$$x = x_0 + x_m \sin \omega t,$$

где x_0 — постоянная составляющая;

x_m — амплитуда синусоидальной составляющей, то

$$y = \alpha \operatorname{sh}(\beta x_0 + \beta x_m \sin \omega t) = \alpha \operatorname{sh}(\beta x_0) \operatorname{ch}(\beta x_m \sin \omega t) + \\ + \alpha \operatorname{ch}(\beta x_0) \operatorname{sh}(\beta x_m \sin \omega t).$$

Следовательно,

$$y = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 [J_0(j\beta x_m) + 2J_2(j\beta x_m) \cos 2\omega t + \\ + 2J_4(j\beta x_m) \cos 4\omega t + \ldots] + \alpha \operatorname{ch} \beta x_0 \{2[-jJ_1(j\beta x_m)] \sin \omega t + \\ + 2[-jJ_3(j\beta x_m)] \sin 3\omega t + \\ + 2[-jJ_5(j\beta x_m)] \sin 5\omega t + \ldots\}. \quad (5,13)$$

Из формулы (5,13) следует, что постоянная составляющая функции y (назовем ее y_0) равна

$$y_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta x_0 J_0(j\beta x_m). \quad (5,14)$$

Первая гармоника функции y (обозначим ее y_1)

$$y_1 = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-J_1(j\beta x_m)] \sin \omega t. \quad (5,15)$$

Вторая гармоника функции y

$$y_2 = 2\alpha \operatorname{sh} \beta x_0 [J_2(j\beta x_m)] \cos 2\omega t. \quad (5,16)$$

Третья гармоника функции y

$$y_3 = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 [-jJ_3(j\beta x_m)] \sin 3\omega t \quad (5,17)$$

и т. д.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $\frac{y}{\alpha} = \operatorname{sh}(2 + 4 \sin \omega t)$.

Решение. Примем $\beta x_0 = 2$ и $\beta x_m = 4$.

По таблицам находим $\operatorname{sh} 2 = 3{,}63$, $\operatorname{ch} 2 = 3{,}76$. Значения функций Бесселя берем из табл. 1.

В соответствии с формулой (5,13) имеем

$$\frac{y}{\alpha} = \operatorname{sh}(2 + 4 \sin \omega t) = 3{,}63(11{,}3 + 12{,}84 \cos 2\omega t + \\ + 2{,}83 \cos 4\omega t + \ldots) + 3{,}76(19{,}52 \sin \omega t - \\ - 6{,}67 \sin 3\omega t + 1{,}01 \sin 5\omega t - \ldots).$$

Таким образом, постоянная составляющая $\frac{y_0}{a} = 3{,}63 \cdot 11{,}3 = 41{,}1$.

Амплитуда первой гармоники $\frac{y_{1m}}{a} = 3{,}76 \cdot 19{,}52 = 73{,}4$.

Амплитуда второй гармоники $\frac{y_{2m}}{a} = 3{,}63 \cdot 12{,}84 \approx 46{,}7$ и т. д.

§ 5,4. Разложение гиперболического синуса от постоянной составляющей и двух синусоидальных колебаний различных частот в ряды Фурье

Пусть

$$x = x_0 + x_{1m} \sin \omega_1 t + x_{2m} \sin (\omega_2 t + \psi_2). \tag{5,18}$$

В формулу (4,5) вместо x подставим правую часть уравнения (5,18).

Получим

$$\frac{y}{a} = \operatorname{sh} \beta x = \operatorname{sh} \beta \,[x_0 + x_{1m} \sin \omega_1 t + \\ + x_{2m} \sin (\omega_2 t + \psi_2)\,]. \tag{5,19}$$

Представим правую часть формулы (5,19) следующим образом:

$$\operatorname{sh} \beta [x_0 + x_{1m} \sin \omega_1 t + x_{2m} \sin (\omega_2 t + \psi_2)\,] =$$
$$= \operatorname{sh} \beta x_0 \operatorname{ch} \beta \,[x_{1m} \sin \omega_1 t + x_{2m} \sin (\omega_2 t + \psi_2)\,] +$$
$$+ \operatorname{ch} \beta x_0 \operatorname{sh} \beta \,[x_{1m} \sin \omega_1 t + x_{2m} \sin (\omega_2 t + \psi_2)\,].$$

Развернем гиперболический косинус и гиперболический синус от суммы аргументов, воспользуемся формулами (5,11), (5,12) и применим известные тригонометрические соотношения:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta);$$
$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta);$$
$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta).$$

После преобразований получим

$$\frac{y}{a} = F_0 + F_1 (t) + F_2 (t); \tag{5,20}$$

$$F_0 = \operatorname{sh} \beta x_0 J_0 (j\beta x_{1m})\, J_0 (j\beta x_{2m}). \tag{5,21}$$

Если пренебречь комбинационными составляющими, содержащими функции Бесселя выше третьего порядка, то

$$\frac{F_1(t)}{\operatorname{sh}\beta x_0} = J_0(j\beta x_{1m})\,[+\,2J_2(j\beta x_{2m})\cos(2\omega_2 t + 2\psi_2) + \ldots] +$$
$$+ 2J_2(j\beta x_{1m})\Big[J_0(j\beta x_{2m})\cos 2\omega_1 t + J_2(j\beta x_{2m})\{\cos[(2\omega_1 -$$
$$- 2\omega_2)t - 2\psi_2] + \cos[(2\omega_1 + 2\omega_2)t + 2\psi_2]\}\Big] -$$
$$- 2jJ_1(j\beta x_{1m})\Big[-jJ_1(j\beta x_{2m})\{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \psi_2] -$$
$$- \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \psi_2]\} - jJ_3(j\beta x_{2m})\{\cos[(\omega_1 - 3\omega_2)t - 3\psi_2] -$$
$$- \cos[(\omega_1 + 3\omega_2)t + 3\psi_2]\}\Big] - 2jJ_3(j\beta x_{1m})\Big[-jJ_1(j\beta x_{2m})\times$$
$$\times\{\cos[(3\omega_1 - \omega_2)t - \psi_2] - \cos[(3\omega_1 + \omega_2)t + \psi_2]\} -$$
$$- jJ_3(j\beta x_{2m})\{\cos[(3\omega_1 - 3\omega_2)t - 3\psi_2] -$$
$$- \cos[(3\omega_1 + 3\omega_2)t + 3\psi_2]\}\Big]; \qquad (5{,}22)$$

$$\frac{F_2(t)}{\operatorname{ch}\beta x_0} = -2jJ_1(j\beta x_{1m})\Big[J_0(j\beta x_{2m})\sin\omega_1 t -$$
$$- J_2(j\beta x_{2m})\{\sin[(\omega_1 + 2\omega_2)t + 2\psi_2] +$$
$$+ \sin[(\omega_1 - 2\omega_2)t - 2\psi_2]\}\Big] - 2jJ_3(j\beta x_{1m})\Big[J_0(j\beta x_{2m})\sin 3\omega_1 t +$$
$$+ J_2(j\beta x_{2m})\{\sin[(3\omega_1 + 2\omega_2)t + 2\psi_2] +$$
$$+ \sin[(3\omega_1 - 2\omega_2)t - 2\psi_2]\}\Big] +$$
$$+ 2J_0(j\beta x_{1m})\Big[-jJ_1(j\beta x_{2m})\sin(\omega_2 t + \psi_2) -$$
$$- jJ_3(j\beta x_{2m})\sin(3\omega_2 t + 3\psi_2)\Big] +$$
$$+ 2J_2(j\beta x_{1m})\Big[-jJ_1(j\beta x_{1m})\{\sin[(2\omega_1 + \omega_2)t + \psi_2] -$$
$$- \sin[(2\omega_1 - \omega_2)t - \psi_2]\}\Big]. \qquad (5{,}23)$$

Если $x_0 = 0$, то $\operatorname{sh}\beta x_0 = 0$, $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, но $F_2 \neq 0$. В общем случае $\frac{y}{a}$ содержит гармоники вида $k\omega_1 \pm p\omega_2$, где k и p — целые числа, принимающие значения 0, 1, 2, 3 ...

Пусть частота $\omega_2 = a\omega_1$, тогда $\frac{y}{a}$ будет содержать гармоники вида $\omega_1(k \pm ap)$ [Л. 65]. Когда a принимает значения $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и т. д., функция $\frac{y}{a}$ может иметь гармоники $\frac{5}{2}\,\omega_1$, $\frac{3}{2}\,\omega_1$ и т. д.

Так,

$$\text{при}\quad k=1,\ p=3\ \text{и}\ a=\frac{1}{2}\quad \omega_1(k+ap)=\frac{5}{2}\omega_1;$$

$$\text{при}\qquad k=3,\ p=3\ \text{и}\ a=\frac{1}{2}\quad \omega_1(k\pm ap)=\begin{cases}4{,}5\omega_1\\ 1{,}5\omega_1\end{cases}.$$

§ 5,5. Некоторые общие свойства нелинейных сопротивлений при воздействии на них постоянной и гармонически меняющейся составляющих

Если нелинейное сопротивление с симметричной характеристикой работает в условиях, когда x изменяется по закону $x=x_0+$ $+x_m\sin\omega t$, то имеет место следующее:

1) величина постоянной составляющей функции y (т. е. y_0) зависит не только от x_0, но и от x_m (это свойство следует из формулы 5,14);

2) в кривой $y=f(\omega t)$ появляются четные гармоники, которые исчезают при $x_0=0$;

3) с изменением x_0 или y_0 меняется амплитуда первой и высших гармоник функции $y(\omega t)$.

Первое из этих свойств поясним графически. Пусть НС работает при отсутствии синусоидальной составляющей ($x_m=0$). Тогда изображением этого процесса на характеристике будет точка a (рис. 48, a). Для нее $y=y_0$, $\beta x=\beta x_0'=\mathrm{Arsh}\,\frac{y_0}{a}$. Этот результат следует из формулы (5,14), если учесть, что $J_0(0)=1$.

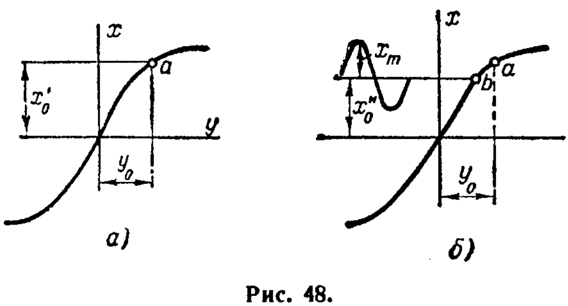


Рис. 48.

Если НС будет работать при $x_m\neq 0$, то для того, чтобы y_0 сохранить прежним, постоянная составляющая x_0 должна быть снижена (или снизится) со значения x_0' до значения x_0''.

Величина $\beta x_0''$ определяется из формулы

$$\beta x_0''=\mathrm{Arsh}\frac{\frac{y_0}{a}}{J_0(j\beta x_m)};\tag{5,24}$$

x_0'' определяется ординатой, проходящей через точку b, расположенную ниже точки a (рис. 48, *б*).

Перечисленные свойства справедливы и для НС с несимметричными характеристиками. Конечно, формула, связывающая x_0, x_m и y_0, для них будет иная.

Первое и третье из перечисленных свойств широко используются в теории установившихся и переходных процессов в управляемых активных, индуктивных и емкостных сопротивлениях.

Второе свойство используется в теории умножителей частоты в четное число раз.

В литературе по управляемым нелинейным индуктивностям влияние x_m на зависимость x_0 от y_0 иногда не совсем правильно называют *магнитным выпрямлением*.

Пример. Нелинейное сопротивление с характеристикой $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$ сначала работало при $\frac{y_0}{\alpha} = 41{,}1$ и при отсутствии переменной составляющей ($\beta x_m = 0$). Затем режим работы его изменился: постоянная составляющая $\frac{y_0}{\alpha}$ осталась прежней, но появилась переменная составляющая, амплитуда которой $\beta x_m = 4$. Найти постоянные составляющие βx_0 в этих двух режимах.

Решение.

В первом режиме

$$\beta x_0' = \operatorname{Arsh} 41{,}1 = 4{,}41.$$

Во втором режиме

$$\beta x_0'' = \operatorname{Arsh} \frac{41{,}1}{J_0(j4)} = \operatorname{Arsh} 3{,}63 = 2.$$

Таким образом, при переходе от первого режима ко второму постоянная составляющая βx_0 изменилась с 4,41 до 2, т. е. более чем в два раза.

§ 5,6. Некоторые общие свойства нелинейных сопротивлений при воздействии на них постоянной составляющей и двух гармонических составляющих различных частот

Воспользуемся формулами § 5,4 и сделаем несколько важных для дальнейшего изложения выводов.

1. Если $x = x_0 + x_{1m} \sin \omega_1 t + x_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$, то функция y содержит постоянную составляющую y_0 и гармоники вида $k\omega_1 \pm p\omega_2$, где k и p — целые числа.

2. Амплитуда любой гармоники функции y зависит не только от амплитуды данной гармоники функции x, но и от амплитуд и фаз всех остальных гармоник функции x.

Это создает большие трудности при расчете цепей.

3. Если в состав x будет входить хотя бы одна дробная гармоника $\left(\text{например, } \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1\right)$, то функция y будет содержать гармоники вида $\frac{n}{m}\omega_1$, где m и n — целые числа. Другими словами, если в кривой индукции (заряда, напряжения) появится хотя бы одна дробная гармоника, то спектр напряженности (напряжения, тока) обогатится множеством дробных гармоник.

4. Постоянная составляющая y_0 зависит не только от x_0, но и от x_{1m}, x_{2m}, ψ_2.

5. Если при работе НС будут периодически изменяться амплитуды x_{1m}, x_{2m}, фаза ψ_2 или те и другие одновременно, то периодически будет меняться y_0. Это положение имеет существенное значение для понимания принципа работы некоторых автомодуляционных систем (гл. 16).

6. Если условия работы НС с симметричной характеристикой таковы, что функция y по физическим соображениям не может иметь постоянной составляющей (y_0 равен нулю), то воздействие на НС двумя гармоническими колебаниями $x_{1m}\sin\omega_1 t + x_{2m}\sin(\omega_2 t + \psi_2)$ при $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$ (и при некоторых других соотношениях), а также при $\psi_2 \neq 0$ приводит к появлению постоянной составляющей x_0.

Дадим этому положению физическое и математическое объяснение.

Физически появление постоянной составляющей в x (т. е. появление x_0) означает, что нулевая линия аргумента x должна проходить через значение $x = x_0$, только в этом случае площадь положительной полуволны функции $y = f(t)$ будет равна площади отрицательной полуволны функции $y = f(t)$.

Теперь рассмотрим математическую сторону этого вопроса. Если $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$ и принять, что x не имеет постоянной составляющей, то из формулы (5,23) следует, что функция y будет иметь постоянную составляющую

$$\frac{y_0}{a} = \sin 2\psi_2\ [-2jJ_1(j\beta x_{1m})]\ [-J_2(j\beta x_{2m})].$$

Так как угол ψ_2 может быть любым, то условие $y_0 = 0$ при $x_0 = 0$ в общем случае не выполняется.

Если принять $x_0 \neq 0$, то условие $y_0 = 0$ может быть выполнено. Действительно, из формулы (5,20) следует, что

$$\frac{y_0}{a} = \operatorname{sh}\beta x_0 J_0(j\beta x_{1m})\, J_0(j\beta x_{2m}) +$$

$$+ 2\sin 2\psi_2\, [-jJ_1(j\beta x_{1m})]\ [-J_2(j\beta x_{2m})]\operatorname{ch}\beta x_0. \qquad (5,25)$$

При $\frac{y_0}{a} = 0$

$$\operatorname{th}\beta x_0 = \frac{-2\sin 2\psi_2\,[-jJ_1(\beta x_{1m})]\,[-J_2(j\beta x_{2m})]}{J_0(j\beta x_{1m})\,J_0(j\beta x_{2m})}. \tag{5,26}$$

Перечисленные выводы вытекали из формул (5,21—5,23).

Необходимо отметить еще два свойства, не вытекающие из этих формул, но также являющиеся существенными для работы нелинейных индуктивностей и емкостей.

Опыт показывает, что при воздействии на НС двумя гармоническими колебаниями с частотами ω_1 и ω_2 происходит следующее:

а) кривая зависимости между мгновенными значениями низших гармоник индукции и напряженности поля в нелинейной индуктивности (или заряда и напряжения на нелинейной емкости) приобретает безгистерезисный или почти безгистерезисный характер;

б) потери на гистерезис покрываются источником более высокой частоты.

Поясним, почему снимаются гистерезисные явления для низшей гармоники. Как известно, гистерезис обусловлен, грубо говоря, трением областей самопроизвольного намагничивания.

Если ферромагнитный сердечник при намагничивании слегка постукивать, то трение областей уменьшается. Намагничивание сердечника высокой частотой производит действие, как бы эквивалентное механической встряске сердечника.

Чем больше $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, тем сильнее этот эффект, но он проявляется даже при $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3$.

Устройством, в котором используются отмеченные свойства а) и б), является ортомагнитный трансформатор [Л.75]. Сердечник этого трансформатора подмагничивается от вспомогательного источника током утроенной частоты. Вследствие проявления последних двух свойств удается резко снизить угловую погрешность трансформатора и погрешность коэффициента трансформации по основной частоте.

§ 5,7. Разложение показательных функций от периодического аргумента в ряды Фурье

Начальные участки анодных характеристик электронных ламп, характеристики диодов и триодов часто описываются при помощи показательных функций (гл. 4). Если аргумент показательной функции изменяется по периодическому закону, то показательные функции могут быть представлены рядами Фурье, коэффициенты которых являются функциями Бесселя:

$$e^{x_m \sin \omega t} = J_0(jx_m) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(jx)\cos 2k\omega t -$$

$$-2j\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(jx)\sin(2k+1)\,\omega t; \qquad (5,27)$$

$$e^{x_m \cos \omega t} = J_0(jx_m) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (j)^{-k} J_k(jx)\cos k\omega t. \qquad (5,28)$$

§ 5,8. Разложение периодических функций в ряды Фурье, коэффициентами которых являются гамма-функции

В § 4,2 говорилось о том, что симметричные характеристики НС в ряде случаев могут быть представлены степенными функциями вида

$$y = ax^n. \qquad (5,29)$$

Степень n может быть равна 3, 5, 7, 9...

Из формулы (5,29) следует, что

$$x = a^{-\frac{1}{n}}\, y^{\frac{1}{n}}. \qquad (5,30)$$

В формуле (5,29) y является функцией x, а в формуле (5,30) x функцией y. Если x есть периодическая функция, изменяющаяся, например, по закону $x = x_m \sin \omega t$, то y также будет периодической функцией, которая может быть представлена рядом Фурье. Аналогично, если по периодическому закону, например по закону $y = y_m \sin \omega t$, будет изменяться функция y, то рядом Фурье может быть представлена функция x. Другими словами, если вместо x в формулу (5,29) подставить $x_m \sin \omega t$, то

$$y = y_{1m}\sin \omega t + y_{3m}\sin 3\omega t + y_{5m}\sin 5\omega t + \dots \qquad (5,31)$$

Амплитуда k-й гармоники этого ряда определяется следующим образом:

$$y_{km} = a\,\frac{x_m^n}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^n \omega t \sin k\omega t\, d\omega t. \qquad (5,32)$$

С другой стороны, если вместо y в формулу (5,30) подставить $y_m \sin \omega t$, то

$$x = x_{1m} \sin \omega t + x_{3m} \sin 3\omega t + x_{5m} \sin 5\omega t + \ldots, \tag{5,33}$$

$$x_{km} = \frac{a^{-\frac{1}{n}} y_m^{\frac{1}{n}}}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{1}{n}} \omega t \sin k\omega t \, d\omega t. \tag{5,34}$$

Известно, что $\sin n\alpha$ может быть выражен через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

$$\sin n\alpha = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + $$

$$+ \binom{n}{5} \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \ldots \tag{5,35}$$

Если в (5,32) и (5,34) вместо $\sin k\omega t$ подставить функции $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в соответствии с (5,35), то в правые части указанных формул будут входить интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2\mu+1} \omega t \cos^{2\nu+1} \omega t \, d\omega t.$$

Интегралы такого вида подсчитывают через гамма-функции (обозначается буквой Γ), причем интеграл от 0 до 2π для симметричных относительно начала безгистерезисных характеристик может быть заменен на четыре интеграла от 0 до $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2\mu+1} \omega t \cos^{2\nu+1} \omega t \, d\omega t = \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+1)}{2\Gamma(\mu+\nu+2)}. \tag{5,36}$$

Таблицы гамма-функций имеются в математических справочниках и руководствах.

Важным свойством гамма-функции является следующее:

$$\Gamma(z+1) = z!.$$

На основании изложенного можно сказать, что коэффициенты y_{km} ряда (5,31) и коэффициенты x_{km} ряда (5,33) могут быть найдены через гамма-функции.

Путем использования гамма-функции в одинаковой степени удобно определять амплитуды гармоник ряда (5,31) и ряда (5,33).

Пример. Вольт-амперная характеристика тиритового сопротивления аппроксимирована следующим образом:

$$i = ku^n,$$

где $n = 5$.

Определить, во сколько раз сопротивление тирита по первой гармонике в режиме работы при синусоидальном токе больше, чем в режиме работы при синусоидальном напряжении.

При решении исходить из того, что амплитуда первой гармоники тока в обоих режимах одинакова.

Решение. В первом режиме

$$i = I_m \sin \omega t, \quad u = \sqrt[n]{\frac{i}{k}} = k^{-\frac{1}{n}} i^{\frac{1}{n}}.$$

В соответствии с формулой (5,34) амплитуда первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении определится так:

$$U_{1m} = \frac{4}{\pi} k^{-\frac{1}{n}} I_m^{\frac{1}{n}} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\frac{1}{n}} \omega t \sin \omega t \, d\omega t =$$

$$= \frac{4 I_m^{\frac{1}{n}}}{\pi k^{\frac{1}{n}}} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\frac{n+1}{n}} \omega t \, d\omega t. \tag{5,37}$$

В нашем случае $n = 5$ и $\frac{n+1}{n} = \frac{6}{5}$.

Воспользуемся формулой(5,36). Подынтегральное выражение формулы (5.36) будет совпадать с подынтегральным выражением формулы (5,37), если принять

$$2\nu + 1 = 0 \text{ и } 2\mu + 1 = \frac{n+1}{n} = \frac{6}{5}.$$

Отсюда

$$\nu = -0{,}5 \text{ и } \mu = 0{,}1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\frac{6}{5}} \omega t \, d\omega t = \frac{\Gamma(0{,}1+1)\,\Gamma(-0{,}5+1)}{2\Gamma(0{,}1-0{,}5+2)} = \frac{\Gamma(1{,}1)\,\Gamma(0{,}5)}{2\Gamma(1{,}6)} =$$

$$= \frac{0{,}9514 \cdot 1{,}77}{2 \cdot 0{,}8935} = 0{,}943.$$

Таким образом, амплитуда первой гармоники напряжения на тиритовом сопротивлении в первом режиме (индекс I) равна

$$U_{1m}^{\mathrm{I}} = \frac{4 \cdot 0{,}943}{\pi k^{0,2}} I_{1m}^{0,2}.$$

Сопротивление тирита в первом режиме по первой гармонике

$$R_1^{\mathrm{I}} = \frac{U_{1m}^{\mathrm{I}}}{I_{1m}^{\mathrm{I}}} = \frac{4 \cdot 0{,}943}{\pi \cdot k^{0,2} I_{1m}^{0,8}}.$$

Сделаем аналогичные выкладки для второго режима — режима синусоидального напряжения (индекс II).

Пусть $u = U_m \sin \omega t$. Тогда амплитуда первой гармоники тока

$$I_{1m}^{\mathrm{II}} = \frac{4k}{\pi} U_m^5 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{5+1} \omega t \, d\omega t.$$

Для подсчета последнего интеграла воспользуемся формулой (5,36)

$$2\nu + 1 = 0, \quad \nu = -0{,}5;$$

$$2\mu + 1 = 6, \quad \mu = 2{,}5.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \omega t \, d\omega t = \frac{\Gamma(3{,}5)\,\Gamma(0{,}5)}{2\Gamma(4)} = \frac{3{,}32 \cdot 1{,}77}{2 \cdot 6} = 0{,}48.$$

$$I_{1m}^{II} = \frac{4 \cdot 0{,}48}{\pi} k U_m^5 \quad \text{или} \quad U_m = \left(\frac{I_{1m}^{II} \pi}{k \cdot 4 \cdot 0{,}48} \right)^{0{,}2}.$$

Сопротивление тирита во втором режиме по первой гармонике

$$R_1^{II} = \frac{U_m}{I_{1m}^{II}} = \frac{\pi^{0{,}2}}{k^{0{,}2} \cdot 1{,}92^{0{,}2} \left(I_{1m}^{II} \right)^{0{,}8}}.$$

По условию $I_{1m}^{I} = I_{1m}^{II}$, поэтому

$$\frac{R_1^{I}}{R_1^{II}} = \frac{4 \cdot 0{,}943 \cdot 1{,}92^{0{,}2}}{\pi^{1{,}2}} = 1{,}09.$$

§ 5,9. Энергетические преобразования в нелинейных цепях

Источником энергии в электрических цепях обычно является источник синусоидальной или постоянной э. д. с. Так как нелинейное сопротивление является генератором высших гармоник тока и напряжения, то токи и напряжения на отдельных участках содержат высшие гармоники.

Таким образом, энергия доставляется в цепь источником постоянной или синусоидальной э. д. с., а потребление энергии активными сопротивлениями цепи и обмен энергией между индуктивностями и емкостями происходят не только на первой, но и на высших, низших и дробных гармониках.

Нелинейное сопротивление трансформирует энергию частоты источника питания в энергию иной частоты.

Потребление энергии на высших, низших и дробных гармониках приводит к увеличению угла сдвига фаз между напряжением источника синусоидальной э. д. с. и первой гармоникой тока источника.

Ниже приведены некоторые выкладки применительно к нелинейной индуктивности, которые будут полностью пригодны и для нелинейной емкости, если заменить напряженность поля H на напряжение u, индукцию B на заряд q. Если заменить H на u и B на i, то эти выкладки будут годиться для нелинейного активного сопротивления.

Пусть напряженность магнитного поля в сердечнике нелинейной индуктивности равна

$$H = H_0 + \sum_{k=1}^{\infty} H_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + H_{m\Omega} \sin(\Omega t + \psi_\Omega).$$

Здесь

H_0 — средняя за период частоты ω составляющая напряженности поля;

H_{km} — амплитуда высокочастотной составляющей напряженности поля;

$H_{m\Omega}$ — амплитуда низкочастотной составляющей напряженности поля.

Магнитная индукция B соответственно равна

$$B = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) + B_{m\Omega} \sin(\Omega t + \varphi_\Omega).$$

При наличии составляющей частоты Ω полный цикл колебаний совершается за n периодов частоты ω.

Потери p_c в одном кубическом сантиметре ферромагнитного материала сердечника за один полный цикл перемагничивания будут равны

$$p_c = \oint H dB = \int_0^{nT} H \frac{dB}{dt} dt.$$

После интегрирования за один период низкой частоты получим

$$\frac{nB_{1m}H_{1m}}{2} \sin(\psi_1 - \varphi_1) = \frac{p_c}{2\pi} + n \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{H_{km}B_{km}}{2} \sin(\varphi_k - \psi_k) + \\ + \frac{H_{m\Omega}B_{m\Omega}}{2} \sin(\varphi_\Omega - \psi_\Omega), \qquad (5,38)$$

где

$\frac{nB_{1m}H_{1m}}{2} \sin(\psi_1 - \varphi_1)$ — магнитная энергия, доставляемая источником питания на частоте ω в 1 $см^3$ ферромагнитного сердечника за один период низкой частоты;

$n \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{H_{km}B_{km}}{2} \sin(\varphi_k - \psi_k)$ — энергия, отдаваемая 1 $см^3$ ферромагнитного сердечника за то же время на покрытие потерь в цепи от высокочастотных гармоник токов;

$\frac{H_{m\Omega}B_{m\Omega}}{2} \sin(\varphi_\Omega - \psi_\Omega)$ — энергия, отдаваемая в цепь 1 $см^3$ ферромагнитного сердечника на частоте Ω.

Если сердечник выполнен из высококачественного магнитномягкого материала и потери в стали пренебрежимо малы ($p_c \approx 0$), то при преобразованиях частоты и отсутствии автомодуляции (и некоторых других непериодических для мгновенных значений процессов) имеет место соотношение

$$\frac{n}{2} H_{1m} B_{1m} \sin(\psi_1 - \varphi_1) = \frac{n}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k H_{km} B_{km} \sin(\varphi_k - \psi_k) + \\ + \frac{H_{m\Omega} B_{m\Omega}}{2} \sin(\varphi_\Omega - \psi_\Omega). \qquad (5,39)$$

Уравнение (5,39) показывает, что потребление энергии на частоте Ω увеличивает сдвиг фаз ($\psi_1 - \varphi_1$) между первой гармоникой напряженности поля и первой гармоникой магнитной индукции.

Если в нелинейной цепи возникает автомодуляция, то H_0 и B_0 являются медленно меняющимися функциями времени. В этом случае ферромагнитный сердечник доставляет энергию не только на возмещение потерь от высших гармоник и от субгармоники, но и на покрытие потерь от медленно меняющихся постоянных составляющих токов. Таким образом, энергия, потребляемая всей системой из сети переменного тока, в смежные периоды автомодуляции несколько неодинакова.

§ 5,10. Теорема Менли и Роу

Положим, что в электрической цепи, в которой имеются два генератора синусоидальных колебаний с частотами f_1 и f_2, имеется нелинейная емкость или нелинейная индуктивность с безгистерезисной однозначной характеристикой.

В токах и напряжениях этой цепи в общем случае возникают гармоники различных частот вида

$$f_{m,n} = mf_1 + nf_0,$$

где m и n могут принимать любые целые, положительные, отрицательные и нулевые значения.

Если в цепи отсутствуют автомодуляционные и другие непериодические процессы, то имеют место два следующих соотношения (обозначения приняты по [Л. 90]):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mW_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = 0; \qquad (5,40)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nW_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = 0. \qquad (5,41)$$

Здесь $W_{m,n}$ — средняя за период мощность, втекающая в нелинейное реактивное сопротивление при частотах $\pm(mf_1+nf_0)$, $[|(mf_1+nf_0)|>0]$, определяемая формулой

$$W_{m,n}=\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}+\overset{*}{U}_{m,n}\dot{I}_{m,n}.$$

Здесь $\dot{U}_{m,n}$ — комплекс напряжения на нелинейном реактивном сопротивлении при частоте mf_1+nf_0;

$\dot{I}_{m,n}$ — комплекс тока через нелинейное реактивное сопротивление при той же частоте.

Звездочка (*) означает, что комплекс сопряженный.

Рассмотрим частный режим работы нелинейного реактивного сопротивления, который наблюдается в параметрических усилителях (см., например, [Л. 97]). Положим, что нелинейная емкость с безгистерезисной характеристикой включена в цепь, в которой действуют генераторы с частотами f_1 и f_0, а схема и ее параметры выбраны такими, что токи всех частот, кроме f_1, f_0 и двух боковых $f_+=f_1+f_0$ и $f_-=f_1-f_0$, подавлены идеальными фильтрами.

Приняв $m=1$; $n=-1,\ 0,+1$, из уравнения (5,40) получим

$$\frac{W_1}{f_1}+\frac{W_+}{f_+}+\frac{W_-}{f_-}=0. \qquad (a)$$

Из (5,41), приняв $n=1$ и $m=-1,\ 0,+1$, найдем

$$\frac{W_0}{f_0}+\frac{W_+}{f_+}-\frac{W_-}{f_-}=0. \qquad (б)$$

Здесь $W_1=W_{1,0}$ — средняя за период мощность, втекающая в нелинейную емкость на частоте f_1;

$W_0=W_{0,1}$ — средняя за период мощность, втекающая в нелинейную емкость на частоте f_0;

W_+ — мощность на частоте f_+;

W_- — мощность на частоте f_-.

Соотношения, подобные (*а*) и (*б*), используются при анализе параметрических усилителей.

Доказательство теоремы.

Следуя [Л. 90], положим, что в цепи с нелинейной емкостью, имеющей однозначную кулон-вольтную характеристику $u=F(q)$, действуют, как говорилось, два генератора синусоидальных колебаний на частотах f_1 и f_0.

В силу того что нелинейная емкость является источником гармоник тока и напряжения, заряд q будет содержать множество гармоник; он может быть записан в виде двойного ряда Фурье

$$q=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{Q}_{m,n}e^{j(mx+ny)}. \qquad (5,42)$$

где

$\dot{Q}_{m,n}$ — комплексная амплитуда заряда при частоте $mf_1 + nf_0$.

$$\left.\begin{aligned} x &= \omega_1 t \ \ (\omega_1 = 2\pi f_1); \\ y &= \omega_0 t \ \ (\omega_0 = 2\pi f_0). \end{aligned}\right\} \qquad (5,43)$$

Ввиду вещественности q

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_{m,n} &= \overset{*}{\dot{Q}}_{-m,-n}; \\ \dot{Q}_{-m,-n} &= \overset{*}{\dot{Q}}_{m,n}. \end{aligned}\right\}. \qquad (5,44)$$

Ток через конденсатор

$$i = \frac{dq}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{m,n} \ e^{j(mx+ny)}, \qquad (5,45)$$

причем

$$\dot{I}_{m,n} = j \ (m\omega_1 + n\omega_0) \ \dot{Q}_{m,n}; \qquad (5,46)$$

$$\dot{I}_{m,n} = -\overset{*}{\dot{I}}_{-m,-n}, \quad \dot{I}_{-m,-n} = \overset{*}{\dot{I}}_{m,n}. \qquad (5,47)$$

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе u является нелинейной функцией мгновенного значения заряда q: $u = F(q)$. Так как q выражено двойным рядом Фурье, то и напряжение может быть представлено двойным рядом Фурье:

$$u = F(x,y); \qquad (5,48)$$

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_{m,n} \ e^{j(mx+ny)}; \qquad (5,49)$$

$$\dot{U}_{m,n} = \overset{*}{\dot{U}}_{-m,-n}, \quad \dot{U}_{-m,-n} = \overset{*}{\dot{U}}_{m,n}. \qquad (5,50)$$

Комплексная амплитуда ряда Фурье $\dot{U}_{m,n}$ вычисляется по формуле

$$\dot{U}_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} dx \, F(x, y) e^{-j(mx+ny)}. \qquad (5,51)$$

Умножим обе части уравнения (5,51) на $jm\overset{*}{\dot{Q}}_{m,n}$ и просуммируем по m и n от $-\infty$ до ∞:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} jm \overset{*}{\dot{Q}}_{m,n} \dot{U}_{m,n} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} dx F(x,y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} jm \overset{*}{\dot{Q}}_{m,n} \ e^{-j(mx+ny)}. \qquad (5,52)$$

Обратимся теперь к уравнению (5,42) и продифференцируем его по x:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} jm\,\dot{Q}_{m,n}\;e^{-j(mx+ny)}. \qquad (5,53)$$

Учитывая (5,44), запишем (5,53) следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} jm\,\overset{*}{Q}_{m,n}\;e^{-j(mx+ny)}. \qquad (5,54)$$

Решим (5,46) относительно $\dot{Q}_{m,n}$, найдем сопряженный комплекс $\overset{*}{Q}_{m,n}$, подставим последний в левую часть (5,52), а в правой части (5,52) заменим $jm\,\overset{*}{Q}_{m,n}\,e^{-j(mx+ny)}$ на $\frac{\partial q}{\partial x}$. Получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{m\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}}{mf_1+nf_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dy\int_0^{2\pi}dx\,\frac{\partial q}{\partial x}\,F(x,y). \qquad (5,55)$$

Поскольку $\frac{\partial q}{\partial x}\,dx$ есть dq при $y=\text{const}$, то во втором интеграле (5,55) переменная x, по которой производится интегрирование, может быть заменена на q. При этом пределы интегрирования по q будут $q\,(0,\,y)$ и $q\,(2\pi,y)$:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{m\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}}{mf_1+nf_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dy\int_{q(0,y)}^{q(2\pi,y)}f(q)dq. \qquad (5,56)$$

Умножим обе части уравнения (5,51) на $jn\overset{*}{Q}_{m,n}$, просуммируем по m и n от $-\infty$ до ∞. Рассуждая подобно предыдущему, получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}}{mf_1+nf_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\int_{q(x,0)}^{q(x,2\pi)}f(q)dq. \qquad (5,57)$$

Во втором интеграле пределы интегрирования по q соответствуют пределам $y=0$ и $y=2\pi$ при $x=\text{const}$.

Обозначим

$$\dot{S}_{m,n}=W_{m,n}+jX_{m,n}=2\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}; \qquad (5,58)$$

$$\dot{S}_{m,n}=\overset{*}{S}_{-m,-n},\quad \dot{S}_{-m,-n}=\overset{*}{S}_{m,n}; \qquad (5,59)$$

$$W_{m,n}=\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n}+\overset{*}{U}_{m,n}\dot{I}_{m,n}=W_{-m,-n}; \qquad (5,60)$$

$$X_{m,n}=j\,(\overset{*}{U}_{m,n}\dot{I}_{m,n}-\dot{U}_{m,n}\overset{*}{I}_{m,n})=-X_{-m,-n}. \qquad (5,61)$$

Здесь

$W_{m,n}$ — средняя за период (0—2π) мощность, втекающая в нелинейный конденсатор при частотах $\pm(mf_1 + nf_0)$;

$\dot{S}_{m,n}$ — кажущаяся мощность;

$X_{m,n}$ — реактивная мощность.

Чтобы получить уравнение для активной мощности, умножим уравнение (5,45) на (5,49). Комбинируем попарно члены частоты $\pm(mf_1 + nf_0)$, выбирая m и n так, чтобы $mf_1 + nf_0$ было больше нуля. Берем среднее за период, учитывая (5,56), (5,60) и (5,67).

Получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mW_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy \int_{q(0,y)}^{q(2\pi,y)} f(q)dq; \qquad (5,62)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nW_{m,n}}{mf_1 + nf_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \int_{q(x,0)}^{q(x,2\pi)} f(q)dq. \qquad (5,63)$$

Правые части уравнений (5,62) и (5,63) при однозначной характеристике $u = f(q)$ равны нулю, так как при интегрировании по q за целый период изменения x от 0 до 2π и $y = \text{const}$ в начале и в конце периода q принимает одно и то же значение.

Приравняв правые части формул (5,62) и (5,63) нулю, получим формулы (5,40) и (5,41).

§ 5,11. Некоторые новые понятия и теоремы, введенные Милларом и Черри

В 1951 г. Милларом и Черри [Л.89] были введены понятия объема и кообъема, энергии и коэнергии и ряд теорем, использующих эти понятия.

Понятие об объеме и кообъеме. Со всяким нелинейным сопротивлением связан объем $G = \int u di$ и кообъем $J = \int i du$, где u — мгновенное значение напряжения; i — мгновенное значение тока.

В любой момент времени сумма объема и кообъема равна мгновенному значению мощности.

Понятие об энергии и коэнергии. Энергия, запасенная в индуктивности (пользуемся обозначениями Миллара и Черри), равна $T = \int i d\psi$, где i — ток; ψ — потокосцепление. Энергии T соответствует коэнергия индуктивности $T' = \int \psi di$.

Энергия, запасенная в емкости, $U = \int u dq$. Ей соответствует коэнергия емкости $U' = \int q du$, где q — мгновенное значение заряда и u — мгновенное значение напряжения на емкости.

На рис. 49,*а* графически изображена энергия и коэнергия индуктивности, а на рис. 49,*б* — энергия и коэнергия емкости.

Ниже приводятся только четыре теоремы, сформулированные Милларом и Черри как наиболее существенные.

Теорема 3 (нумерация соответствует принятой в [Л.89]). В любой многоконтурной цепи, питаемой только источниками тока, полный объем G не меняется при бесконечно малых изменениях любого из токов системы, если только эти изменения совместимы с законами Кирхгофа.

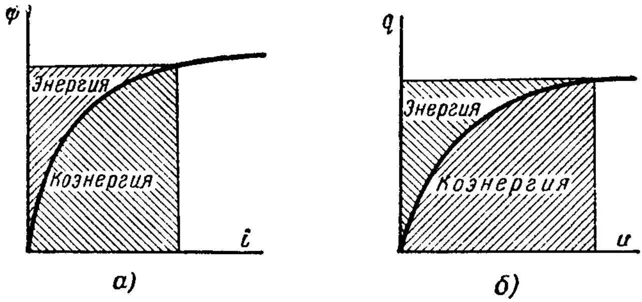


Рис. 49.

Подобным же образом в цепи, питаемой только источниками э. д. с., полный кообъем J обладает свойствами постоянства по отношению к приращениям напряжения.

Теорема 8. В любой цепи, состоящей из нелинейных индуктивных сопротивлений, возбуждаемых по напряжению (току), полная энергия T (или коэнергия T') сохраняет постоянную величину при всех изменениях напряжения на элементах, сходящихся к узлу (узловых токов) при условии, что эти изменения совместимы с законами Кирхгофа.

Теорема 9 взаимна с теоремой 8. В ней индуктивности заменены на емкости, контур на узел, напряжение на ток и поток на заряд.

6

Характеристики нелинейных сопротивлений

При анализе и расчете электрических цепей с НС в зависимости от характера рассматриваемого вопроса используется несколько различных типов характеристик одного и того же НС, а именно:

1) характеристики, связывающие мгновенные значения определяющих величин;

2) вольт-амперные характеристики для первых гармоник тока и напряжения на НС;

3) вольт-амперные характеристики для действующих значений тока и напряжения;

4) вольт-амперные характеристики для средних за полпериода частоты источника питания значений тока и напряжения на НС;

5) вольт-амперные (вебер-амперные, кулон-вольтные) характеристики для постоянных (или медленно меняющихся) величин);

6) характеристики, связывающие приращения токов с приращениями напряжений (токов и магнитных потоков, зарядов и напряжений) при наличии управляющего фактора;

7) характеристики, связывающие амплитуды и фазы высших гармоник тока с амплитудами и фазами высших гармоник напряжения на НС. Параметром на кривых последнего типа может быть, например, амплитуда первой гармоники тока (напряжения).

Основным типом характеристик являются характеристики, связывающие мгновенные значения основных определяющих величин, например тока и напряжения, индукции и напряженности, заряда и напряжения.

В данной главе будут рассмотрены характеристики типов 2, 3, 4, 5. Характеристики первого типа были рассмотрены в гл. 2

и 3, характеристики шестого типа будут рассмотрены в гл. 7 и характеристики седьмого типа — в гл. 19.

§ 6,1. Общая характеристика методов воздействия управляющего фактора на нелинейное сопротивление

Характеристики одного и того же НС зависят от частоты управляющего фактора (управляющего поля) и от значения угла между направлением управляющего и управляемого полей.

Управляющий фактор может иметь различную частоту, например нулевую (постоянный ток или напряжение), а также частоту, равную, бóльшую или меньшую частоты рабочей цепи. Наибольшее распространение в цепях с управляемыми нелинейными индуктивностями и емкостями получило управление при помощи постоянного тока или напряжения. Меньшее распространение получили электрические цепи, в которых управление производится при помощи синусоидального или, в более общем случае, импульсного тока или напряжения.

Если управляющее поле синусоидально, то эффект его воздействия на свойства нелинейного сопротивления зависит не только от амплитуды управляющего фактора, но и от его фазы.

Особенно сильно влияние фазы проявляется в том случае, когда частота управляющего поля равна частоте управляемого поля. Обычно в управляемых нелинейных индуктивностях и емкостях управляющий фактор создает магнитное (или электрическое) поле, направленное коллинеарно с магнитным (электрическим) полем, создаваемым управляющей цепью. Будем называть такое управляющее поле продольным. Существуют аппараты и устройства специального назначения, в которых магнитное (или электрическое) управляющее поле направлено под углом 90° к магнитному (электрическому) полю управляемой цепи. Такое управляющее поле будем называть поперечным.

В более общем случае угол между направлением управляющего и управляемого полей может быть любым. В дальнейшем, если не будет специальной оговорки, под управляющим полем в нелинейных индуктивностях и емкостях будем понимать продольное поле.

§ 6,2. О расчетном и экспериментальном получении характеристик нелинейных сопротивлений

Все управляемые НС в отношении возможностей расчета их характеристик при воздействии управляющего фактора могут быть разбиты на две группы.

В первой группе из-за особенностей конструктивного выполнения НС, а также микро-и макроструктуры электромагнитного поля характер воздействия управляющего поля на управляемое имеет настолько сложный характер, что поле не поддается или почти не поддается расчету в инженерном смысле. Например, почти не поддается аналитическому расчету электрическое поле в многосеточных электронных лампах. В них электрическое поле, создаваемое анодной и сеточной цепями при наличии объемного заряда, имеет весьма сложный характер.

Почти не поддается аналитическому расчету поле в полупроводниковых триодах, а также поле в управляемых многоэлектродных тиритовых и иных полупроводниковых сопротивлениях.

Во второй группе за редким исключением результирующее поле в НС поддается расчету, так как оно является однородным или почти однородным. Например, поддается расчету в макроскопическом смысле результирующее магнитное поле внутри ферромагнитного тороида или электрическое поле в плоском конденсаторе из сегнетодиэлектрика.

Когда результирующее электрическое или магнитное поле в НС поддается расчету, для получения любых перечисленных выше типов характеристик достаточно знать полученную экспериментальным путем нелинейную связь между мгновенными значениями определяющих величин при отсутствии управляющего фактора. Так, для получения различных типов характеристик управляемой нелинейной индуктивности достаточно знать экспериментально полученную связь между мгновенными значениями магнитной индукции и напряженности поля.

Аналогично для получения различных типов характеристик управляемой нелинейной емкости достаточно знать экспериментально полученную для данного типа сегнетодиэлектрика связь между мгновенными значениями напряжения и заряда на нелинейной емкости.

Когда результирующее электрическое или магнитное поле в нелинейном сопротивлении не поддается расчету, для получения перечисленных выше типов характеристик недостаточно располагать лишь одной характеристикой, снятой при отсутствии управляющего фактора. В этих случаях необходимо иметь семейство характеристик для мгновенных значений определяющих величин на НС при различных мгновенных значениях управляющего фактора. Например, для расчета цепей с трехэлектродной лампой необходимо располагать семейством анодных и сеточных характеристик лампы.

§ 6,3. Вольт-амперные характеристики для первых гармоник

Под вольт-амперными характеристиками для первых гармоник понимают графическую или аналитическую связь между амплитудами (или действующими значениями) первых гармоник тока и напряжения.

Этот тип характеристик обычно подразделяется на две подгруппы. В первой из них принимается, что напряжение (поток или заряд) на нелинейном сопротивлении изменяется во времени по синусоидальному закону. Во второй подгруппе принимается, что по синусоидальному закону во времени меняется ток через нелинейное активное сопротивление (или напряженность в сердечнике нелинейной индуктивности или напряжение на нелинейной емкости).

Если воздействующее на нелинейное сопротивление синусоидальное напряжение или ток не содержит постоянной составляющей, то вольт-амперная характеристика для первых гармоник данного нелинейного сопротивления изображается какой-то одной кривой. Если же воздействующее напряжение или ток содержит постоянную составляющую, то вольт-амперные, вебер-амперные или кулон-вольтные характеристики изображаются семействами кривых, на которых постоянная составляющая тока, напряжения, магнитного потока или заряда является параметром.

Этот тип характеристик получают расчетным или графическим путем из соответствующих характеристик для мгновенных значений либо снимают экспериментально.

При графическом построении (см. § 6,7) задаются различными значениями амплитуды воздействующего на нелинейное сопротивление напряжения (тока, индукции, заряда), по точкам строят кривую тока (напряженности, напряжения) в функции времени и путем разложения ее в ряд Фурье находят соответствующие амплитуды первой гармоники тока (напряженности, напряжения).

Аналитическое построение характеристики производится, например, по формулам (5,14) и (5,15).

Экспериментальный способ сводится к определению амплитуды первой гармоники тока (или напряжения) по показаниям прибора.

Вольт-амперные характеристики для первых гармоник используются при расчете установившихся режимов в нелинейных цепях, который получил название расчета по первой гармонике (§ 7,13).

Для нелинейной индуктивности в. а. х. по первым гармоникам можно получить опытным путем при помощи схемы рис. 50.

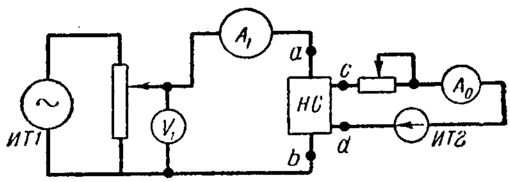


Рис. 50.

В этой схеме $ИТ1$ — источник синусоидальной э. д. с., $ИТ2$ — источник постоянной э. д. с.; ab — зажимы управляемой цепи, cd — зажимы управляющей цепи. Измерительные приборы V_1 и A_1 реагируют соответственно на первую гармонику напряжения и тока.

На рис. 51,*а* изображены вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам. Параметром на них является ток управления I_0.

Вольт-амперные характеристики по первым гармоникам для управляемой нелинейной емкости изображены на рис. 51,*б*. Параметром на них является управляющее постоянное напряжение U_0.

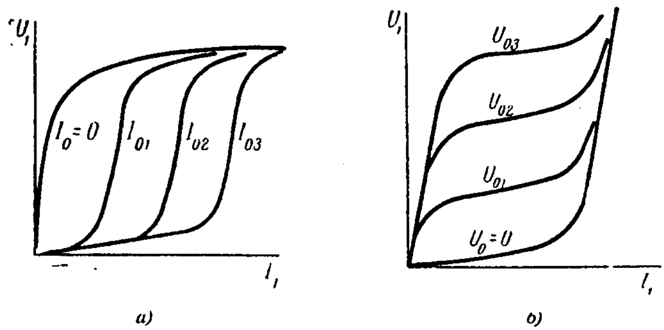


Рис. 51.

Характеристики рис. 51, *а* снимают следующим образом. Устанавливают произвольное значение тока I_0 в цепи управления. Затем, плавно повышая напряжение U_1, для каждого его значения записывают величину тока I_1. После этого запись ведут при новом значении I_0 и т. д. Результаты измерений наносят на график, и соответствующие точки соединяют плавной кривой.

§ 6,4. Вольт-амперные характеристики для действующих значений

Под вольт-амперными характеристиками для действующих значений понимают зависимость между действующими значениями синусоидального (или несинусоидального) напряжения на нелинейном сопротивлении и действующим значением тока, протекающего через нелинейное сопротивление. Если напряжение или ток содержит постоянную составляющую, то в. а. х. изображаются семейством кривых, для которых постоянная составляющая тока, потока, напряжения или заряда является параметром.

Эти характеристики получают графическим или аналитическим путем из характеристик для мгновенных значений или снимают опытным путем при помощи схемы рис. 50. Измерительные приборы V_1 и A_1 в этом случае должны измерять действующие значения.

Следует иметь в виду, что в. а. х. для действующих значений зависят от формы напряжения и (или) тока, поэтому необходимо указывать, при каких условиях они получены.

При качественном и грубом количественном анализах, в которых используются в. а. х. для действующих значений, полагают, что характеристики, снятые при одной форме напряжения, близки к характеристикам, снятым при другой форме. В действительности же количественное различие характеристик может оказаться значительным. В. а. х. для действующих значений используются в методе расчета, получившем название расчета по вольтамперным характеристикам для действующих значений (см. § 7,16).

§ 6,5. Вольт-амперные характеристики для средних за полупериод значений тока и напряжения

Вольт-амперные характеристики для средних за полупериод частоты источника питания значений представляют собой характеристики, которые связывают средние за полупериод значения напряжения и тока. Так же, как и предыдущие, этот тип характеристик зависит от величины и характера управляющего фактора. Он может быть получен аналитически, графически или экспериментально.

Экспериментально они могут быть получены, например, при помощи схемы рис. 50, причем измерительные приборы должны реагировать на средние значения.

§ 6,6. Получение аналитическим путем обобщенных характеристик управляемых нелинейных сопротивлений по первым гармоникам

Как говорилось, нелинейные индуктивности и емкости, а также большая группа нелинейных активных сопротивлений имеют характеристики для мгновенных значений, которые могут быть приближенно описаны формулой $y = \alpha \operatorname{sh} \beta x$.

Для каждого вида нелинейного сопротивления под y и x следует понимать свои величины.

Для нелинейной индуктивности x — магнитная индукция, y — напряженность магнитного поля; для нелинейной емкости x — заряд, y — напряжение; для нелинейного активного сопротивления x — напряжение (или ток), y — ток (или напряжение).

Таким образом, x и y — обобщенные обозначения величин, определяющих работу нелинейного сопротивления.

Для перечисленных видов сопротивлений можно построить единые характеристики по первым гармоникам. С этой целью положим $x = x_0 + x_m \sin \omega t$.

Тогда в соответствии с формулой (5,1) амплитуда первой гармоники функции y (назовем ее y_{1m}) равна

$$y_{1m} = 2\alpha \operatorname{ch} \beta x_0 \left[-jJ_1 (j\beta x_m) \right]. \qquad (6,1)$$

Формула (6,1) дает связь между амплитудой y_{1m} первой гармоники y, амплитудой x_m первой гармоники x и постоянной составляющей x_0.

На рис. 52,*а* изображены характеристики управляемого нелинейного сопротивления $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2a}\right)$ при параметре $\beta x_0 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, построенные по формуле (6,1).

Кривыми рис. 52,*а* можно пользоваться при известном значении параметра βx_0. Если известно не βx_0, а постоянная состав-

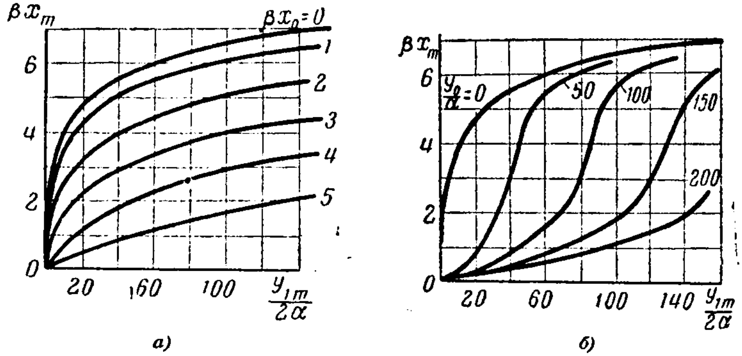


Рис. 52.

ляющая $\frac{y_0}{a}$, то семейство кривых $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2a}\right)$ при параметре $\frac{y_0}{a}$ (рис. 52,*б*) может быть построено следующим образом.

Из формулы (5,14) находим

$$\operatorname{sh}\beta x_0 = \frac{\frac{y_0}{a}}{J_0(j\beta x_m)}. \quad (6,\ 1')$$

Вместо $\operatorname{ch}\beta x_0$ в формулу (6,1) подставляем

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\beta x_0} = \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{y_0}{a}}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}.$$

Получаем

$$\frac{y_{1m}}{2a} = \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{y_0}{a}}{J_0(j\beta x_m)}\right]^2}\ [-jJ_1(j\beta x_m)]. \qquad (6,2)$$

Характеристики НС рис. 52,*б* построены по формуле (6,2) при значениях параметра $\frac{y_0}{a} = 0,\ 50,\ 100,\ 150$ и 200. Отметим, что $\frac{y_{1m}}{2a}$, βx_m, $\frac{y_0}{a}$ есть безразмерные величины. Если масштабы по осям уменьшить в $\sqrt{2}$ раз, то эти кривые будут представлять собой характеристики по действующим значениям первых гармоник.

Характеристика неуправляемого нелинейного сопротивления изображается кривой, для которой $\frac{y_0}{a} = 0$.

§ 6,7. Простейшая управляемая нелинейная индуктивность

Простейшая управляемая нелинейная индуктивность изображена на рис. 53. Она состоит из обмоток w_1 и w_0, намотанных на замкнутый ферромагнитный сердечник. Пусть площадь поперечного сечения сердечника будет S ($см^2$), а длина средней магнитной линии l ($см$).

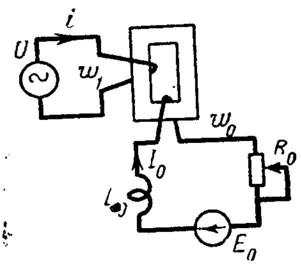


Рис. 53.

Обмотка w_1 включена в цепь переменного тока, и по ней протекает переменный ток i, содержащий первую и высшие гармоники.

Обмотка управления w_0 — ее называют также обмоткой подмагничивания — присоединена к источнику постоянной э. д. с. E_0 через дополнительную индуктивность L_0 и регулируемое активное сопротивление. По обмотке w_0 протекает постоянный ток $I_0 = \frac{E_0}{R_0}$, где R_0 — активное сопротивление цепи подмагничивания.

Хотя переменный магнитный поток и наводит в обмотке w_0 переменную э. д. с., но переменного тока по обмотке w_0 практически не протекает, так как дополнительная индуктивность L_0 взята такой, что она образует для переменного тока достаточно большое индуктивное сопротивление.

Пусть приложенное к обмотке w_1 напряжение равно $U_m \cos \omega t$. Это напряжение равно э. д. с. самоиндукции, взятой с обратным знаком (активное сопротивление обмотки w_1 считаем весьма малым):

$$u = -e_L = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = U_m \cos \omega t.$$

Отсюда магнитный поток

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w_1} \sin \omega t + \Phi_0 = \Phi_m \sin \omega t + \Phi_0, \qquad (6,3)$$

где Φ_0 — постоянная составляющая магнитного потока;

Φ_m — амплитуда переменной составляющей магнитного потока, которая равна

$$\Phi_m = \frac{U_m}{\omega w_1}.$$

Управляемая нелинейная индуктивность позволяет путем изменения величины постоянного тока I_0 в обмотке w_0 управлять величиной переменного тока i.

Принцип управления режимом работы нелинейной индуктивности и характер изменения во времени отдельных величин поясним при помощи рис. 54,*а* и *б*. На рисунках кривые $\Phi = f(Hl)$ представляют зависимости потока Φ в сердечнике в функции от произведения напряженности магнитного поля H на длину средней магнитной линии l сердечника.

Построения на рис. 54,*а* соответствуют случаю, когда $I_0 = 0$, а на рис. 54,*б* — когда $I_0 \neq 0$. На обоих рисунках переменная составляющая потока $\Phi_m \sin \omega t$ одинакова. Для рис. 54,*а* постоянная составляющая потока равна нулю, а для рис. 54,*б* $\Phi_0 \neq 0$. На кривых $\Phi = f(\omega t)$, $\Phi = f(Hl)$ и $iw_1 = f(\omega t)$ наиболее характерные соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми буквами.

Построения производим в следующей последовательности.

1. Сначала откладываем значение постоянной составляющей потока Φ_0 и строим кривую $\Phi_m \sin \omega t = f(\omega t)$ (для рис. 54,*а* $\Phi_0 = 0$).

2. Затем произвольно задаемся различными моментами времени, например $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, и для каждого значения ωt при помощи кривой $\Phi = f(Hl)$ находим соответствующие значения Hl и строим кривую $iw_1 + I_0 w_0 = f(\omega t)$ (для рис. 54,*а* $I_0 w_0 = 0$). Ось времени для этой кривой направлена вниз и проходит через точки *а*, *в*, *д*.

Обратим внимание на то, что ток i не содержит постоянной составляющей, так как в цепи обмоток w_1 нет источника постоянной э. д. с. и выпрямителей.

Прямая A—A (рис. 54,*б*) является нулевой линией для кривой $iw_1 = f(\omega t)$. Ток i колеблется около этой прямой так, что среднее значение его за период от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$ равно нулю.

Другими словами, проводим прямую A—A так, чтобы площадь S_1 была равна площади S_2 (рис. 54,*б*).

Расстояние, на которое удалена прямая A—A от оси ординат, равно $I_0 w_0$.

Полезно сопоставить выводы § 5,5, сделанные в общей форме, с теми выводами, которые применительно к нелинейной индуктивности могут быть сделаны путем рассмотрения рис. 54. Сопоставимыми величинами являются: x — Φ, y — $(iw_1 + I_0 w_0)$, x_0 — Φ_0, x_m — Φ_m, y_0 — $I_0 w_0$, $y = f(\omega t) - iw_1 + I_0 w_0 = f(\omega t)$.

В § 5,5 говорилось, что путем изменения величины y_0 можно изменять амплитуды первой и высших гармоник функции $y = f(\omega t)$. Этот вывод подтверждается построениями на рис. 54: амплитуды первой и высших гармоник функции $iw_1 = f(\omega t)$ зависят от величины $I_0 w_0$. Чем больше $I_0 w_0$, тем больше амплитуда первой гармоники тока i.

В § 5,5 отмечалось, что y_0 зависит не только от x_0, но и от x_m. В свою очередь из рис. 54 следует, что величина $I_0 w_0$ зависит не только от Φ_0, но и от Φ_m.

В § 5,5 говорилось, что при наличии постоянной составляющей в составе функции x в кривой $y = f(\omega t)$ появляются четные гармоники. Из рис. 54,*б* следует, что при наличии постоянной составляющей Φ_0 в составе магнитного потока Φ в кривой $iw_1 = f(\omega t)$ появляются четные гармоники — кривая $iw_1 = f(\omega t)$ несимметрична относительно прямой $A - A$.

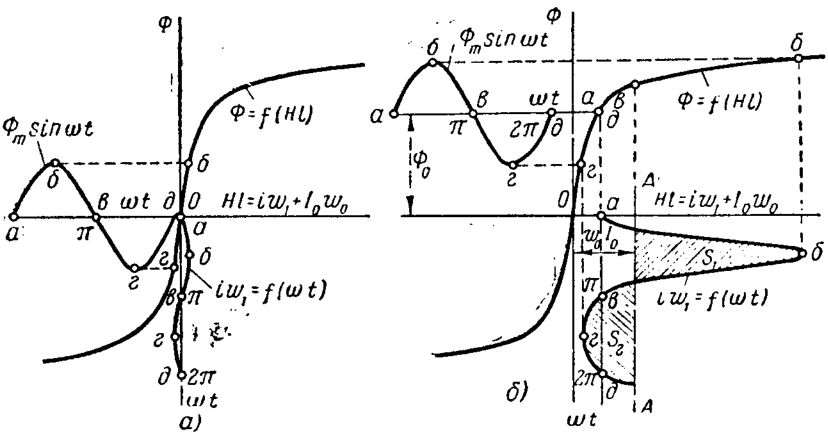


Рис. 54.

Выведем зависимости, позволяющие подсчитать амплитуду переменной составляющей магнитной индукции B_m через амплитуду приложенного напряжения U_m, угловую частоту ω, площадь поперечного сечения сердечника S, число витков w_1. Выведем также формулы, позволяющие подсчитать постоянную составляющую напряженности поля H_0 через постоянный ток I_0, амплитуду первой гармоники напряженности поля H_{1m} через амплитуду первой гармоники I_{1m} переменного тока и т. д.

$$\Phi_m = B_m S; \tag{6,4}$$

$$\Phi_0 = B_0 S, \tag{6,5}$$

где B_m — амплитуда переменной составляющей магнитной индукции;

B_0 — постоянная составляющая магнитной индукции.

Из формул (6,4) и (6,5) следует, что

$$B_m = \frac{U_m}{\omega w_1 S}. \tag{6,6}$$

Если магнитную индукцию измерять в гауссах, S в *см*^{2}, а U_m заменить на $\sqrt{2}\,U$, где U — действующее значение напряжения на обмотке w_1, то

$$B_m = \frac{\sqrt{2}U \cdot 10^8}{2\pi f w_1 S} = \frac{U \cdot 10^8}{4{,}44 f w_1 S}. \tag{6,6'}$$

Формула (6,6′) дает возможность найти амплитуду переменной составляющей магнитной индукции по действующему значению напряжения U, частоте f, числу витков w_1 и сечению S.

По закону полного тока произведение напряженности поля H на длину средней магнитной линии l должно равняться алгебраической сумме м. д. с.

Следовательно,

$$iw_1 + I_0 w_0 = Hl. \tag{6,7}$$

Переменный ток i содержит первую, вторую и другие высшие гармоники, но постоянную составляющую не содержит, так как в цепи обмотки w_1 нет источника постоянной э. д. с. и выпрямителей. Уравнение (6,7) распадается на ряд уравнений: на уравнение для постоянной составляющей, на уравнение для первой гармоники, второй гармоники и т. д.

Равенство постоянных составляющих левой и правой частей уравнения (6,7) дает

$$I_0 w_0 = H_0 l, \tag{6,8}$$

где H_0 — постоянная составляющая напряженности поля.

Амплитуда первой гармоники левой части уравнения (6,7) равна амплитуде первой гармоники правой части уравнения.

Следовательно,

$$I_{1m} w_1 = H_{1m} l. \tag{6,9}$$

Здесь I_{1m} — амплитуда первой гармоники тока i;

H_{1m} — амплитуда первой гармоники напряженности поля.

Аналогично

$$I_{2m} w_1 = H_{2m} l \tag{6,10}$$

и т. д.

Из (6,8—6,10) следует, что

$$H_0 = \frac{I_0 w_0}{l}; \tag{6,11}$$

$$H_{1m} = \frac{I_{1m} w_1}{l}; \tag{6,12}$$

$$H_{2m} = \frac{I_{2m} w_1}{l} \tag{6,13}$$

и т. д.

Формула (6,11) дает возможность определить постоянную составляющую напряженности поля H_0 через постоянную составляющую тока I_0. Формула (6,12) позволяет найти H_{1m} через I_{1m} и т. д.

§ 6,8. Вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам

Под вольт-амперными характеристиками управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники переменного напряжения на обмотке w_1 нелинейной индуктивности от действующего значения первой гармоники переменного тока I_1 при постоянном токе I_0, взятом в качестве параметра.

Примем, что зависимость между мгновенными значениями напряженности магнитного поля H и магнитной индукции B выражается гиперболическим синусом:

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B. \tag{6,14}$$

В формуле (6,14) H играет ту же роль, что и y в формуле (4,5), а B — ту же роль, что и x.

Из аналогии формул (6,14) и (4,5) ясно, что характеристики управляемой нелинейной индуктивности по первым гармоникам будут полностью совпадать с характеристиками рис. 52, *а* и *б*, только надо βx_m заменить на βB_m, $\frac{y_{1m}}{2a}$ на $\frac{H_{1m}}{2a}$, $\frac{y_0}{a}$ на $\frac{H_0}{a}$.

Из формулы (6,6′) следует, что

$$\beta B_m = \frac{\beta U_m \cdot 10^8}{\omega w_1 S} = \frac{\beta \sqrt{2} U \cdot 10^8}{\omega w_1 S}$$

или

$$U = \beta B_m \frac{\omega w_1 S}{10^8 \beta \sqrt{2}}.$$

С другой стороны, из (6,12) имеем

$$I_{1m} = \sqrt{2} I_1 = \frac{H_{1m} l}{w_1}.$$

Следовательно,

$$I_1 = \frac{H_{1m}}{2a} \cdot \frac{a l \sqrt{2}}{w_1}. \tag{6,15}$$

На основании формулы (6,11)

$$I_0 = \frac{H_0}{a} \cdot \frac{a l}{w_0}. \tag{6,16}$$

Таким образом, для перехода от семейства кривых в безразмерных величинах $\beta B_m = f\left(\frac{H_{1m}}{2a}\right)$ при параметре $\frac{H_0}{a}$ к семейству кривых $U=f(I_1)$ при параметре I_0 надо масштабы по оси y и x изменить соответственно в $\frac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}}$ и $\frac{al\sqrt{2}}{w_1}$ раз, а значения параметра в $\frac{al}{w_0}$ раз.

Пример 1. Управляемая нелинейная индуктивность (рис. 53) имеет следующие данные:

$$S=2{,}2\ см^2,\ l=25\ см,\ w_1=250,\ w_0=1775.$$

Аналитическое выражение кривой намагничивания

$$H=0{,}0071\ \mathrm{sh}\ (0{,}575\cdot 10^{-3}\ B).$$

Воспользовавшись кривыми $\beta x_m=f\left(\frac{y_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\frac{H_0}{a}$ (рис. 52), построить для нелинейной индуктивности семейство в. а. х. по первым гармоникам $U=f(I_1)$ при параметре I_0.

Решение. Подсчитываем коэффициент для перехода от βx_m к напряжению U:

$$\frac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}\cdot 10^8}=\frac{314\cdot 250\cdot 2{,}2}{0{,}575\cdot 10^{-3}\sqrt{2}\cdot 10^8}=2{,}13.$$

Таким образом, при переходе от βx_m к напряжению масштаб по оси ординат должен быть увеличен в 2,13 раза.

Определяем коэффициент для перехода от $\frac{H_{1m}}{2a}$ к действующему значению первой гармоники тока:

$$\frac{al\sqrt{2}}{w_1}=\frac{0{,}0071\cdot 25\sqrt{2}}{250}=10^{-3}.$$

Следовательно, масштаб по оси абсцисс должен быть изменен в 10^{-3} раз. Коэффициент для перехода от $\frac{H_0}{a}$ к току I_0 равен

$$\frac{al}{w_0}=\frac{0{,}0071\cdot 25}{1775}=10^{-4}.$$

Семейство в. а. х. изображено на рис. 55.

Пример 2. Обмотка w_1 управляемой индуктивности предыдущего примера подключена к синусоидальному напряжению $U=12{,}2\ в$ ($f=50\ гц$). Обмотка управления w_0 подключена к источнику постоянной э. д. с. $E_0=1\ в$. Активное сопротивление цепи подмагничивания $R_0=50\ ом$. Определить амплитуду переменной составляющей B_m и постоянную составляющую B_0 магнитной индукции.

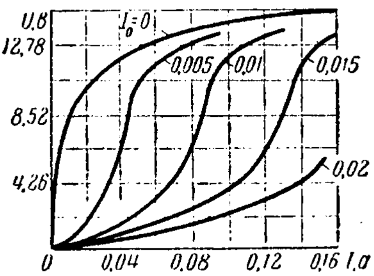


Рис. 55.

Решение. По формуле (6,6')

$$B_m=\frac{12{,}2\cdot 10^8}{4{,}44\cdot 50\cdot 250\cdot 2{,}2}=10\ кгс,$$

$$\beta B_m=5{,}75.$$

Постоянная составляющая тока

$$I_0=\frac{E_0}{R_0}=\frac{1}{50}=0{,}02\ a.$$

Постоянная составляющая напряженности поля

$$H_0 = \frac{I_0 w_0}{l} = 1{,}415 \ a/см.$$

Параметр

$$\frac{H_0}{a} = \frac{1{,}415}{0{,}0071} = 200.$$

По формуле (6,1′)

$$\beta B_0 = \operatorname{Arsh} \frac{\frac{H_0}{a}}{J_0(j\beta B_m)} = \operatorname{Arsh} \frac{200}{J_0(j5{,}75)} = 1{,}86;$$

$$B_0 = \frac{\beta B_0}{\beta} = \frac{1{,}86}{0{,}575 \cdot 10^{-3}} = 3240 \ гс.$$

Пример 3. Напряжение источника синусоидального напряжения управляемой нелинейной индуктивности предыдущего примера снижено до нуля, а по обмотке w_0 по-прежнему протекает ток $I_0 = 0{,}02$ *а*. Найти магнитную индукцию B_0 в сердечнике.

Решение. Амплитуда переменной составляющей магнитной индукции $B_m = 0$.

Следовательно,

$$J_0(j\beta B_m) = 1;$$

$$\beta B_0 = \operatorname{Arsh} \frac{H_0}{a} \approx 6;$$

$$B_0 = \frac{6}{0{,}575 \cdot 10^{-3}} = 10\,430 \ гс.$$

§ 6,9. Понятие об индуктивном сопротивлении по первой гармонике

В литературе, посвященной электрическим цепям с нелинейными индуктивностями, используется термин индуктивное сопротивление нелинейной индуктивности по первой гармонике.

Под индуктивным сопротивлением по первой гармонике X_1 понимают отношение действующего значения первой гармоники напряжения U_1 к действующему значению первой гармоники тока I_1:

$$X_1 = \frac{U_1}{I_1}.$$

О том, как меняется X_1 в функции от U_1 при $I_0 = \text{const}$ и в функции от I_0 при $U_1 = \text{const}$, можно сделать заключение, воспользовавшись кривыми рис. 55. Если принять $U_1 = 8{,}52$*в*, то при $I_0 = 0$ $I_1 = 0{,}01$ *а*.

Следовательно,

$$X_1 = \frac{8{,}52}{0{,}01} = 852 \ ом.$$

При $I_0 = 0{,}01$ a

$$X_1 = \frac{8{,}52}{0{,}084} = 101 \text{ ом}.$$

При $I_0 = 0{,}015$ a

$$X_1 = \frac{8{,}52}{0{,}128} = 66{,}5 \text{ ом}.$$

Таким образом, путем изменения тока подмагничивания можно управлять сопротивлением X_1. Не представляет труда записать аналитическое выражение для X_1, воспользовавшись формулами § 6,6 и 6,8.

Имеем:

$$X_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\beta B_m \dfrac{\omega w_1 S}{\beta\sqrt{2}}}{\dfrac{H_{1m}}{2a}\cdot\dfrac{al\sqrt{2}}{w_1}} = \frac{\omega w_1^2 S}{2al\beta}\times$$

$$\times\frac{\beta B_m}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\dfrac{I_0 w_0}{al}}{J_0(j\beta B_m)}\right]^2[-jJ_1(j\beta B_m)]}}.$$

Если в этой формуле заменить βB_m на $\dfrac{\beta\sqrt{2}\,U}{\omega w_1 S}$, то получим зависимость X_1 от U_1 и I_0.

§ 6,10. Семейство зависимостей постоянной составляющей магнитной индукции от постоянной составляющей напряженности поля для управляемой нелинейной индуктивности

При расчете переходных, установившихся и автомодуляционных процессов в цепях с управляемой нелинейной индуктивностью пользуются зависимостью постоянной составляющей магнитной индукции B_0 от постоянной составляющей напряженности поля H_0. В качестве параметра обычно берут амплитуду первой гармоники B_m переменной составляющей магнитной индукции.

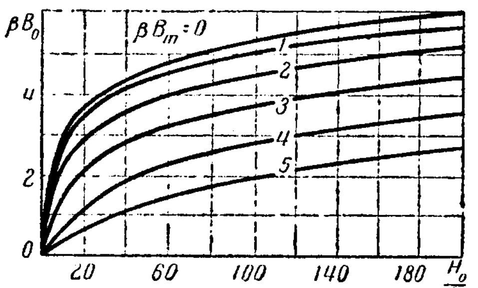


Рис. 56.

Семейство кривых $\beta B_0 = f\left(\frac{H_0}{a}\right)$ при параметре βB_m на рис. 56 построено при помощи формулы, непосредственно следующей из формулы (5,14):

$$\frac{H_0}{a} = \operatorname{sh}\beta B_0 J_0(j\beta B_m). \qquad (6{,}17)$$

Параметр βB_m принимал значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Чем больше амплитуда первой гармоники магнитной индукции, тем меньше значение постоянной составляющей βB_0 при одном и том же значении $\frac{H_0}{a}$.

§ 6,11. Простейшая управляемая поперечным полем нелинейная индуктивность и аналитическое выражение ее характеристик

На рис. 57 дан в двух проекциях (в разрезе) эскиз простейшей управляемой поперечным полем нелинейной индуктивности. Тороидальный сердечник (обычно ферритовый) имеет полость, в которую помещают обмотку w_1, создающую поперечное магнитное поле индукции B_1. Поверх тороида намотана обмотка w_2, создающая продольное магнитное поле индукции B_2.

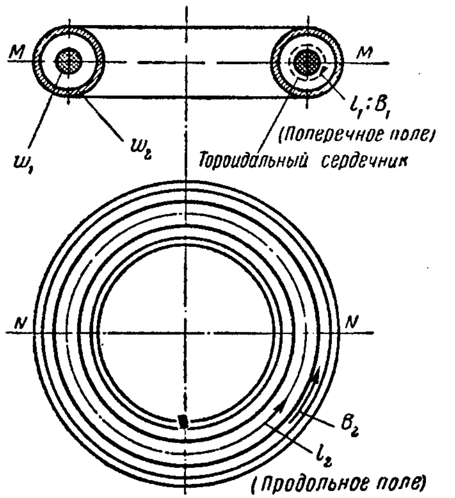


Рис. 57.

Выведем формулу для определения гармоник напряженности продольного H_1 и поперечного H_2 полей. Положим, что сердечник однородный и изотропный. Для простоты примем, что кривая намагничивания ферромагнитного материала выражается полиномом третьей степени

$$H = aB + bB^3. \quad (6,18)$$

Здесь H — результирующая напряженность;

B — результирующая магнитная индукция в теле тороида.

$\bar{B}$ равна геометрической сумме $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$. Аналогично $\bar{H}$ равна геометрической сумме $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$.

Квадрат модуля результирующей индукции

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2.$$

Квадрат модуля результирующей напряженности поля

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2.$$

В силу изотропности материала сердечника

$$\frac{B_1}{H_1} = \frac{B_2}{H_2} = \frac{B}{H}.$$

Пусть $B_1 = B_0$ и $B_2 = B_m \sin \omega t$. Найдем H_1 и H_2. С этой целью составим два выражения:

$$H_1 = aB_1 + bB^2B_1; \tag{6,19}$$

$$H_2 = aB_2 + bB^2B_2. \tag{6,20}$$

При этом

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = (a + bB^2)\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = aB + bB^3,$$

как и должно быть.

После подстановки в (6,19) и в (6,20) B_0 вместо B_1 и $B_m \sin \omega t$ вместо B_2 получим

$$H_1 = H_{10} - H_{12} \cos 2\omega t; \tag{6,21}$$

$$H_2 = H_{21} \sin \omega t - H_{23} \sin 3\omega t. \tag{6,22}$$

Здесь

$$H_{10} = aB_0 + bB_0^3 + \frac{bB_0B_m^2}{2}; \tag{6,23}$$

$$H_{12} = 0,5bB_0B_m^2; \tag{6,24}$$

$$H_{21} = aB_m + b\left(B_0^2B_m + \frac{3}{4} B_m^3\right); \tag{6,25}$$

$$H_{23} = \frac{bB_m^3}{4}. \tag{6,26}$$

Поперечная составляющая напряженности поля H_1 состоит из постоянной составляющей H_{10} и из второй гармоники с амплитудой H_{12}. H_{10} и H_{12} являются функциями B_0 и B_m. Продольная составляющая напряженности поля H_2 содержит нечетные гармоники. Амплитуда H_{21} первой гармоники H_2 является функцией B_0 и B_m.

Если обозначить ток по обмотке w_1 через i_1 и длину средней магнитной линии через l_1, то по закону полного тока

$$i_1 = \frac{H_1 l_1}{w_1}.$$

Аналогично ток по обмотке w_2

$$i_2 = \frac{H_2 l_2}{w_2}.$$

Таким образом, изменение тока i_1 приводит к изменению H_{10} и, как следствие, к изменению B_0. Последнее приведет к изменению H_{21}. Следовательно, изменяя ток i_1 в обмотке w_1, можно влиять на ток i_2 в обмотке w_2.

§ 6,12. Распространение на управляемую нелинейную емкость формул для управляемой нелинейной индуктивности

Кулон-вольтная характеристика нелинейной емкости с достаточной степенью точности может быть выражена гиперболическим синусом

$$u = \alpha \operatorname{sh} \beta q. \tag{6,27}$$

Пусть заряд

$$q = Q_0 + Q_m \sin \omega t.$$

Здесь Q_0 — постоянная составляющая заряда;

Q_m — амплитуда первой гармоники заряда.

Напряжение на емкости будет иметь постоянную составляющую U_0, а также первую и высшие гармоники. Формулы (5,14—5,17) можно распространить на нелинейную емкость, если заменить y_0 на U_0, y_{1m} на U_{1m}, x_m на Q_m и x_0 на Q_0. В соответствии с этим постоянная составляющая напряжения на емкости

$$U_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta Q_0 J_0 (j\beta Q_m). \tag{6,28}$$

Первая гармоника напряжения на емкости равна

$$2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1 (j\beta Q_m)] \sin \omega t.$$

Ток через емкость равен $\frac{dq}{dt}$. Следовательно, первая гармоника тока через емкость запишется так:

$$\frac{d}{dt}(Q_m \sin \omega t) = \omega Q_m \cos \omega t.$$

Ее амплитуда равна $\omega Q_m = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta}$, а действующее значение в $\sqrt{2}$ раз меньше:

$$I_1 = \beta Q_m \frac{\omega}{\beta \sqrt{2}}. \tag{6,29}$$

§ 6,13. Вольт-амперные характеристики управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам

Под вольт-амперными характеристиками управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам будем понимать зависимость действующего значения первой гармоники тока через емкость I_1 в функции от действующего значения первой гармоники напряжения U_1 при параметре U_0.

На основании записанного выше соответствия между y_0 и U_0, y_{1m} и U_{1m} и т. д. можно сказать, что семейство кривых $\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\frac{U_0}{\alpha}$ полностью повторяет семейство кривых $\beta x_m = f\left(\frac{y_{1m}}{2a}\right)$ при параметре $\frac{y_0}{a}$, изображенное на рис. 52. Для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = f\left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ к семейству вольт-амперных характеристик управляемой нелинейной емкости по первым гармоникам надо учесть формулу (6,29), учесть, что действующее значение первой гармоники напряжения на емкости

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{2\alpha}\alpha\sqrt{2} \text{ и } U_0 = \frac{U_0}{\alpha}\alpha.$$

Другими словами, для перехода от семейства кривых $\beta Q_m = \left(\frac{U_{1m}}{2\alpha}\right)$ при параметре $\frac{U_0}{\alpha}$ к семейству кривых $I_1 = f(U_1)$ при параметре U_0 надо масштаб по оси ординат изменить в $\frac{\omega}{\beta\sqrt{2}}$ раз, по оси абсцисс в $\alpha\sqrt{2}$ раз и параметр U_0 в α раз.

Пример 1. На рис. 58 изображена кулон-вольтная характеристика варикон-да типа ВК1-3. Найти значения α и β в выражении $u = \alpha \operatorname{sh} \beta q$.

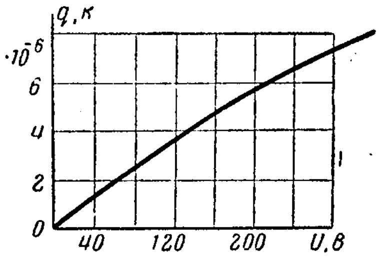


Рис. 58.

Решение. Выбираем две точки на характеристике:

$$u_1 = 120 \text{ в}, \quad u_2 = 320 \text{ в};$$

$$q_1 = 3{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ к}, \quad q_2 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ к}.$$

Составим уравнение для определения коэффициента β:

$$\frac{u_2}{u_1} = 2{,}67 = \frac{\operatorname{sh}(8 \cdot 10^{-6}\beta)}{\operatorname{sh}(3{,}7 \cdot 10^{-6}\beta)}.$$

Отсюда $\beta \approx 0{,}17 \cdot 10^6 \frac{1}{к}$;

$$\alpha = \frac{u_2}{\operatorname{sh}(8 \cdot 10^{-6}\beta)} = \frac{320}{1{,}82} = 175{,}5 \text{ в}.$$

Пример 2. Заряд q вариконда предыдущего примера изменяется по закону

$$q = Q_0 + Q_m \sin \omega t,$$

где

$$Q_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ к}, \quad Q_m = 4 \cdot 10^{-6} \text{ к}, \quad \omega = 3140 \frac{1}{сек}.$$

Записать выражение для мгновенного значения напряжения на конденсаторе и найти ток через конденсатор.

Решение. Находим

$$\beta Q_0 = 3 \cdot 0{,}17 = 0{,}49, \; \beta Q_m = 4 \cdot 0{,}17 = 0{,}68;$$

$$\operatorname{sh}\beta Q_0 = 0{,}51, \; \operatorname{ch}\beta Q_0 = 1{,}12;$$

$$u = U_0 + U_{1m}\sin\omega t + U_{2m}\cos 2\omega t + U_{3m}\sin 3\omega t + \ldots$$

$$U_0 = \alpha \operatorname{sh}\beta Q_0 J_0(j\beta Q_m) = 175{,}5 \cdot 0{,}51 \cdot 1{,}12 = 100 \text{ в}.$$

$$U_{1m} = 2\alpha \operatorname{ch}\beta Q_0 \left[-jJ_1(j\beta Q_m)\right] = 2 \cdot 175{,}5 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}368 = 144 \text{ в};$$

$$U_{2m} = 2a\,\mathrm{sh}\,\beta Q_0\,[-J_2(j\beta Q_m)] = 2\cdot 175{,}5\cdot 0{,}51\cdot 0{,}065 = 11{,}6\ \textit{в};$$

$$U_{3m} = 2a\,\mathrm{ch}\,\beta Q_0\,[-jJ_3(j\beta Q_m)] = 2\cdot 175{,}5\cdot 1{,}12\cdot 0{,}008 = 3{,}14\ \textit{в}.$$

Амплитуда тока

$$I_m = \omega Q_m = 3140\cdot 4\cdot 10^{-6} = 0{,}012\ a.$$

Пример 3. Через нелинейный конденсатор с характеристикой $u = 175{,}5\ \mathrm{sh}\ 0{,}17\cdot 10^6 q$ протекает ток, первая гармоника которого при $\omega = 3140$ *сек*$^{-1}$ имеет амплитуду $I_{1m} = 18{,}45$ *ма*. Постоянная составляющая напряжения на конденсаторе $U_0 = 106{,}2\,\textit{в}$. Амплитуда первой гармоники напряжения $U_{1m} = 217{,}5$ *в*. Найти постоянную составляющую заряда Q_0 и амплитуду первой гармоники заряда Q_{1m}.

Решение. Определяем

$$Q_{1m} = \frac{I_{1m}}{\omega} = \frac{0{,}01845}{3140} = 5{,}88\cdot 10^{-6}\ \kappa.$$

Составим уравнение для определения βQ_0:

$$\frac{U_0}{U_{1m}} = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\beta Q_0 J_0(j\beta Q_m)}{2a\,\mathrm{ch}\,\beta Q_0[-jJ_1(j\beta Q_m)]}.$$

Отсюда

$$\mathrm{th}\,\beta Q_0 = 2\,\frac{U_0}{U_{1m}}\cdot\frac{[-jJ_1(j\beta Q_m)]}{J_0(j\beta Q_m)} = 2\,\frac{106{,}2\cdot 0{,}56}{217{,}5\cdot 1{,}26} = 0{,}432;$$

$$\beta Q_0 = 0{,}463,\quad Q_0 = \frac{0{,}463}{0{,}17\cdot 10^6} = 2{,}72\cdot 10^{-6}\ \kappa.$$

§ 6,14. Понятие о емкостном сопротивлении нелинейной емкости по первой гармонике

Подобно тому как для нелинейной индуктивности вводится понятие индуктивного сопротивления по первой гармонике (см. § 6,9), для нелинейной емкости вводится понятие емкостного сопротивления по первой гармонике:

$$X_1 = \frac{U_1}{I_1}.$$

Здесь X_1 — функция величин U_1 и U_0;

U_1 — действующее значение первой гармоники напряжения на нелинейной емкости;

I_1 — действующее значение первой гармоники тока через нелинейную емкость.

В заключение сделаем два дополнительных замечания.

1. Вопрос о вольт-амперных характеристиках управляемых нелинейных сопротивлений рассматривался применительно к такому режиму работы, когда управляющий фактор имел нулевую частоту. Если же частота управляющего фактора будет отлична от нулевой, например равна частоте источника питания управляемой цепи, то применительно к такому режиму работы также может идти речь о затронутых выше типах характеристик. Однако этот случай здесь не разбирается ввиду значительно меньшего практического значения.

Один из возможных путей расчета схем с управляемыми нелинейными индуктивностями, в которых частота управляющего фактора равна частоте управляемой цепи и отсутствуют выпрямители, описан, например, в [Л.74].

2. Кроме разобранных выше типов характеристик, на практике используются также характеристики НС при весьма быстрых импульсных воздействиях. Они могут резко отличаться от аналогичных статических характеристик как за счет изменения свойств самого НС (влияние магнитной и электрической вязкости, поверхностного эффекта и т. д.), так и за счет резкого возрастания роли паразитных параметров (индуктивностей и емкостей). Форма импульсных характеристик зависит также от крутизны переднего и заднего фронтов, от амплитуды и продолжительности импульсов.

7

Анализ и расчет установившихся процессов в нелинейных электрических цепях

§ 7,1. Применение метода двух узлов для расчета цепей с нелинейными сопротивлениями

Для схем, содержащих только два узла или приводящихся к ним, широко применяется метод двух узлов. Рассмотрим схему рис. 59, *а*. В схеме три НС и три э. д. с. Пусть в. а. х. НС изображаются кривыми рис. 59, *б*, *в*, *г*. Для определенности положим, что $E_1 > E_2 > E_3$. Выберем положительные направления для токов, направив их к узлу *а*.

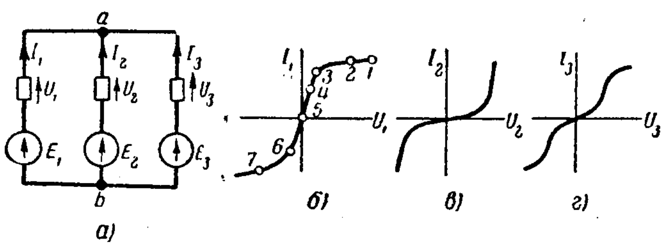


Рис. 59.

Тогда по первому закону Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \qquad (a)$$

Каждый из токов является нелинейной функцией напряжения на своем нелинейном сопротивлении:

$$I_1 = f(U_1),\ I_2 = f(U_2),\ I_3 = f(U_3).$$

Выразим токи в функции не от различных переменных (U_1, U_2, U_3), а в функции от одного переменного — напряжения U_{ab} между двумя узлами. Это сделать возможно, так как

$$U_1 = E_1 - U_{ab};$$

$$U_2 = E_2 - U_{ab};$$

$$U_3 = E_3 - U_{ab}.$$

Таким образом, возникает задача перестройки кривой $I_1 = f(U_1)$ в кривую $I_1 = f(U_{ab})$, кривой $I_2 = f(U_2)$ в кривую $I_2 = f(U_{ab})$ и т. д. Перестроим кривую $I_1 = f(U_1)$ (рис. 59, *б*) в кривую $I_1 = f(U_{ab})$ (рис. 60). Соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми цифрами.

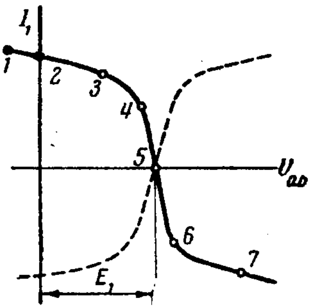


Рис. 60.

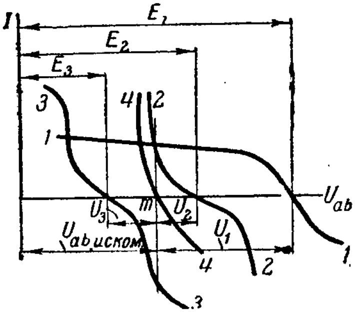


Рис. 61.

Для точки *5* $I_1 = 0$ и $U_1 = 0$, при этом $U_{ab} = E_1$ (см. формулу для U_1). Другими словами, начало кривой $I_1 = f(U_{ab})$ сдвинуто в точку $U_{ab} = E_1$.

Увеличению U_1 (при $U_1 > 0$) соответствует уменьшение U_{ab}.

Для точки *2* при значении $U_1 = E_1$ $U_{ab} = 0$. Увеличению U_1 (при $U_1 < 0$) соответствует увеличение U_{ab}, причем $U_{ab} > E_1$.

На основании предыдущих рассуждений и построений (рис. 60) рекомендуется проводить перестройку следующим образом:

1. Сместить кривую $I_1 = f(U_1)$ параллельно самой себе так, чтобы начало ее находилось в точке $U_{ab} = E_1$ (пунктирная кривая на рис. 60).

2. Провести через точку $U_{ab} = E_1$ вертикаль и зеркально отразить пунктирную кривую относительно вертикали.

Аналогично производится перестройка кривых и для других ветвей схемы. Нанесем кривые $I_1 = f(U_{ab})$, $I_2 = f(U_{ab})$, $I_3 = f(U_{ab})$ (на рис. 61 они обозначены цифрами *1*, *2*, *3*) и построим кривую $I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab})$ (на рис. 61 она обозначена цифрами *4*), просуммировав ординаты кривых *1*, *2*, *3*.

Точка m пересечения кривой *4* с осью абсцисс дает значение U_{ab}, при котором удовлетворяется уравнение (*a*). Восстановим в этой точке перпендикуляр к оси абсцисс. Ординаты точек пересечения перпендикуляра с кривыми *1*, *2*, *3* дадут соответственно токи I_1, I_2, I_3 по величине и по знаку.

§ 7,2. Замена нескольких параллельных ветвей одной эквивалентной ветвью

Замена производится для упрощения расчета. Воспользуемся рис. 62,*а*. Положим, что параллельные ветви входят в состав сложной схемы, не показанной на рисунке. Спрашивается, какова должна быть $E_э$ и в. а. х. эквивалентного нелинейного сопротивления (НСЭ) участка схемы рис. 62,*б* чтобы он был эквивалентен ветвям схемы рис. 62,*а*. Необходимо, чтобы ток I в неразветвленной части цепи (рис. 62, *а*) при любых значениях U_{ab} равнялся току I в ветви (рис. 62,*б*).

Воспользуемся построениями на рис. 61. Кривая *4* есть не что иное, как зависимость

$$I_1 + I_2 + I_3 = f(U_{ab}).$$

Другими словами, кривая *4* есть не что иное, как результирующая в. а. х. трех параллельных ветвей. Такую же в. а. х. должна иметь ветвь рис. 62, *б*. Если ток I на рис. 62, *б* будет равен нулю, то $U_{ab} = E_э$. Следовательно, $E_э$ определяется напряжением U_{ab}, при котором кривая *4* будет пересекать ось абсцисс. Для определения в. а. х. эквивалентного нелинейного сопротивления необходимо кривую *4* (рис. 61) зеркально отобразить относительно вертикали, проведенной через точку m.

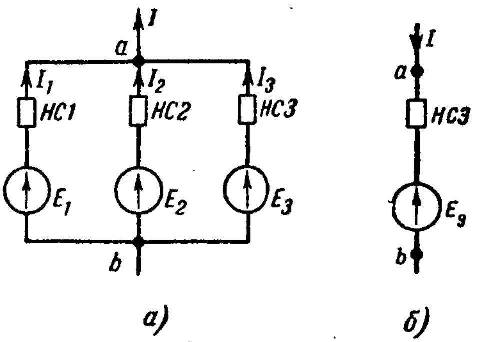


Рис. 62.

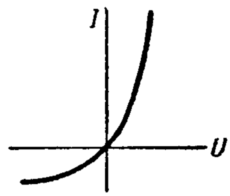


Рис. 63.

В. а. х. НСЭ изображена на рис. 63. Важно подчеркнуть, что включение э. д. с. в параллельные ветви привело к тому, что в. а. х. НСЭ стала несимметричной, несмотря на то, что в. а. х. нелинейных сопротивлений *1*, *2*, *3* были взяты симметричными.

Таким образом, меняя э. д. с. в ветвях параллельной группы, можно изменять результирующую в. а. х. ее и как бы искусственно создавать НС с самыми причудливыми в. а. х.

§ 7,3. Применение метода эквивалентного генератора к расчету цепей с нелинейными сопротивлениями

Если в сколь угодно сложной линейной электрической цепи есть одна ветвь с НС, то определение тока в ней может производиться по методу эквивалентного генератора.

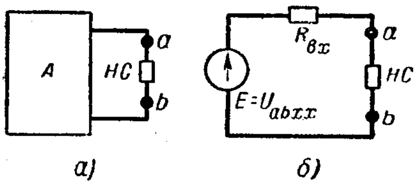


Рис. 64.

Выделим ветвь с нелинейным сопротивлением, а всю остальную линейную схему представим в виде активного двухполюсника (рис. 64, *а*).

Схему линейного активного двухполюсника по отношению к зажимам *a* и *b* выделенной ветви можно представить в виде последовательного соединения источника э. д. с. с э. д. с., равной напряжению на зажимах *ab* при размыкании ветви ($U_{ab\ х.х}$), сопротивления, равного входному сопротивлению $R_{вх}$ линейного двухполюсника, и сопротивления ветви *ab* (рис. 64, *б*).

Определение тока в схеме рис. 64, *б* не представляет труда.

Пример. Определить ток в ветви *ab* схемы рис. 65, *а*:

$$R_1 = R_0 = 2\ ом,\ R_2 = 8\ ом,\ R_3 = 4\ ом,$$

$$R_4 = 6\ ом,\ E = 58{,}4\ в.$$

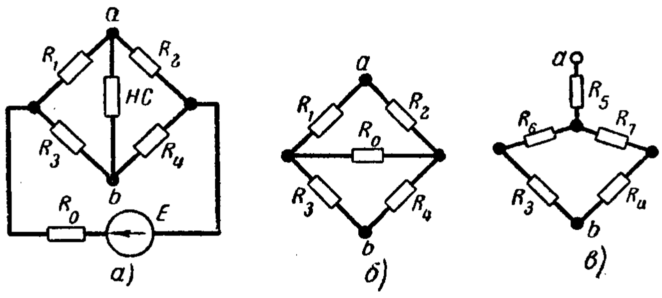


Рис. 65.

В. а. х. НС изображена на рис. 66.

Решение. Размыкаем ветвь *ab* и определяем напряжение холостого хода:

$$U_{ab\ х.х} = 8{,}35\ в.$$

Для подсчета $R_{вх}$ линейной части схемы относительно зажимов ab необходимо преобразовать треугольник сопротивлений R_1, R_2, R_0 (или R_4, R_0, R_3, рис. 65, *б*) в эквивалентную звезду (рис. 65, *в*):

$$R_5 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_0} = 1{,}333 \text{ ом},$$

$$R_6 = 0{,}33 \text{ ом}, \ R_7 = 1{,}333 \text{ ом},$$

$$R_{вх} = R_5 + \frac{(R_6 + R_3)(R_7 + R_4)}{R_6 + R_3 + R_7 + R_4} = $$

$$= 4{,}05 \text{ ом}.$$

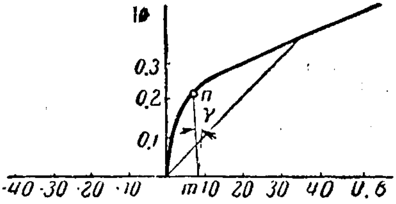


Рис. 66.

Для определения тока в ветви ab (рис. 65, *а*) на рис. 66 из точки m ($U_{ab\,х.х} = 8{,}35$ *в*) проводим луч mn, тангенс угла наклона γ которого к вертикали равен $R_{вх}$. Точка n пересечения луча mn с в. а. х. определяет рабочий режим схемы: $I = 0{,}22$ *а*.

§ 7,4. Расчет цепей с двумя нелинейными сопротивлениями путем сочетания метода эквивалентного генератора с методом двух узлов

На рис. 67, *а* прямоугольник с изображенной на нем буквой *А* представляет собой активный линейный четырехполюсник. В ветвях ab и cd находятся нелинейные сопротивления (НС1 и НС2). Требуется найти токи I_1 и I_2 [Л. 24].

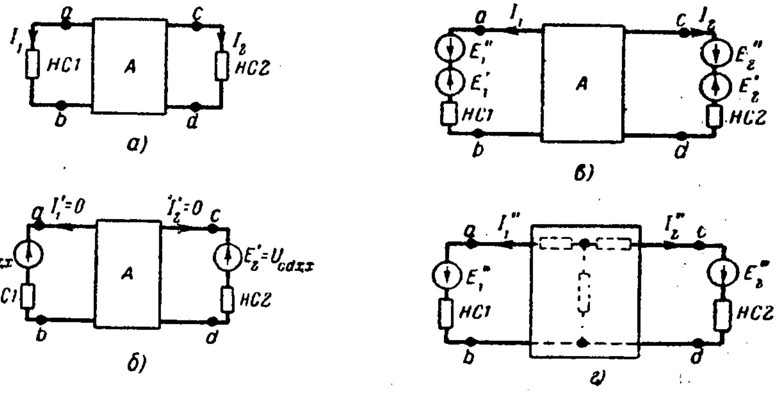


Рис. 67.

Введем в первую ветвь э. д. с. E_1', а во вторую E_2'. Выберем E_1' и E_2' (рис. 67, *б*) такими, чтобы протекающие по первой и второй ветвям токи одновременно были равны нулю ($I_1' = 0$ и $I_2' = 0$), т. е. получим режим холостого хода для обеих ветвей.

Через $U_{ab\,х.х}$ и $U_{cd\,х.х}$ обозначим соответственно напряжения на зажимах ab и cd в режиме холостого хода.

Следовательно

$$E_1' = U_{ab\,\text{х.х}}, \quad E_2' = U_{cd\,\text{х.х}}.$$

Чтобы токи в ветвях сделать такими же, как в исходной схеме (рис. 67, *а*), в ветвь *ab* включим E_1'', равную E_1' по величине, но противоположно направленную (рис. 67, *в*), а в ветвь *cd* включим E_2''.

Токи I_1 и I_2 можно представить в виде суммы двух токов:

$$I_1 = I_1' + I_1'';$$

$$I_2 = I_2' + I_2''.$$

Токи I_1' и I_2' обусловлены действием E_1', E_2' и всех э. д. с. активного четырехполюсника. Токи I_1'' и I_2'' обусловлены действием E_1'' и E_2''. Так как $I_1' = I_2' = 0$, то $I_1 = I_1''$, а $I_2 = I_2''$.

Из теории линейных цепей известно, что всякий пассивный линейный четырехполюсник можно заменить Т-схемой замещения (пунктир внутри прямоугольника на рис. 67, *г*). Токи в ней можно рассчитывать в соответствии с § 7,1.

§ 7,5. Построение в. а. х. участков цепи, содержащих узел с подтекающим извне током

На рис. 68 изображен участок сложной нелинейной цепи, который состоит из нелинейных сопротивлений *НС1* и *НС2*. Между ними находится узел *m*, к которому от не показанной на рисунке части схемы подтекает (или утекает) некоторый ток *I*. Требуется при известных в. а. х. *НС1* и *НС2* построить семейство в. а. х. участка при различных значениях взятого в качестве параметра тока *I*. Под в. а. х. участка цепи, содержащего внутри себя узел, будем понимать зависимость напряжения на зажимах участка U_{ab} в функции от тока I_1 или I_2 при параметре *I*. Пусть *НС1* имеет в. а. х. (рис. 59, *б*) и *НС2* имеет в. а. х. (рис. 59, *в*).

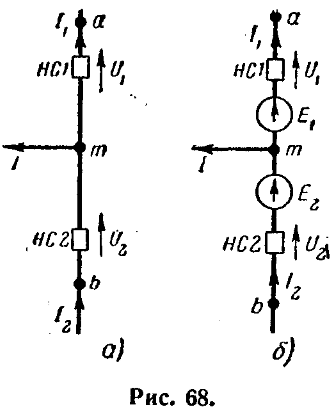


Рис. 68.

В соответствии с выбранными положительными направлениями для токов (рис. 68) при любом U_{ab} ток I_1 меньше тока I_2 на величину утекающего от узла *m* тока *I*. Это обстоятельство учтем при построениях на рис. 69 так: начало кривой $I_2 = f(U_2)$ поместим выше начала кривой $I_1 = f(U_1)$ на величину тока *I*. Из рис. 59, *а* следует, что

$$U_{ba} = U_1 + U_2 \text{ или } U_{ab} = -(U_1 + U_2).$$

Для построения точки, принадлежащей кривой $I_1=f(U_{ba})$, при $I=\text{const}$ задаемся произвольно током I_1, проводим через эту точку горизонталь и суммируем абсциссы точек пересечения этой горизонтали с кривыми *1* и *2*. Кривая $I_1=f(U_{ab})$ (рис. 70) получается из кривой *3* (рис. 69) путем зеркального отображения ее относительно вертикальной оси. При ином значении I будет новая кривая $I_1=f(U_{ab})$.

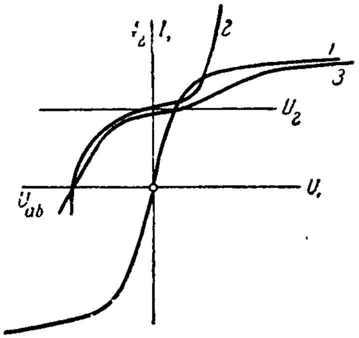


Рис. 69.

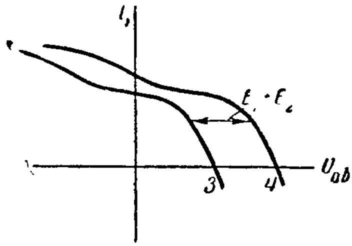


Рис. 70.

Если на участках *1* и *2* будут включены э. д. с. E_1 и E_2 (рис. 68, *б*), то

$$U_{ab}=-(U_1+U_2)+E_1+E_2.$$

Поэтому в. а. х. участка ab может быть получена из кривой *3* (см рис. 70) путем сдвига ее (параллельного переноса) на величину (E_1+E_2) — кривая *4*.

§ 7,6. Расчет сложных разветвленных нелинейных цепей методом эквивалентного нелинейного генератора

В сложной разветвленной нелинейной цепи всегда можно выделить какую-то одну ветвь с НС и рассматривать ее как нагрузку нелинейного генератора (НГ). Например, в мостовой схеме с шестью НС и шестью э. д. с. (рис. 71) ветвь ab, по которой протекает ток I_5, можно рассматривать как нагрузку нелинейного генератора (рис. 72,*а*), причем под НГ понимается вся схема, за исключением выделенной ветви.

Напряжение на зажимах ab является напряжением на выходе НГ, и в то же время оно является напряжением на выделенной ветви — нагрузке. Если построить зависимость напряжения на зажимах ab в функции от тока I_5 и на том же рисунке нанести в. а. х. выделенной ветви, то пересечение характеристик определит рабочий режим схемы.

Таким образом, возникает задача построить в. а. х. НГ относительно зажимов ab с учетом того, что от точки a утекает, а к точке b подтекает ток I_5. Задача решается путем построения в. а. х. участков цепи, содержащих узел с подтекающим током. Задаемся несколькими положительными значениями тока I_5, $I_5 = 0$ и несколькими отрицательными значениями I_5, чтобы равномерно охватить в. а. х. *НС5*. Для каждого значения I_5 на одном рисунке изображаем в. а. х. $I_1 = f(U_{cd})$, $I_3 = f(U_{cd})$, $I_6 = f(U_{cd})$. По первому закону Кирхгофа для узла c (см. рис. 71) $I_1 + I_3 + I_6 = 0$. Поэтому, если для каждого выбранного значения I_5 построить кривую $I_1 + I_3 + I_6 = f(U_{cd})$, то пересечение ее с осью абсцисс (с осью U_{cd}) даст возможность найти значение U_{cd}, I_1, I_3 и I_6, а по ним и напряжение U_{ab} между точками ab в схеме нелинейного генератора. Совокупность соответствующих друг другу значений I_5 и U_{ab} и дает в. а. х. нелинейного генератора. Пусть она изображается кривой *1* (рис. 72 *б*). Наносим кривую *2* — в. а. х.

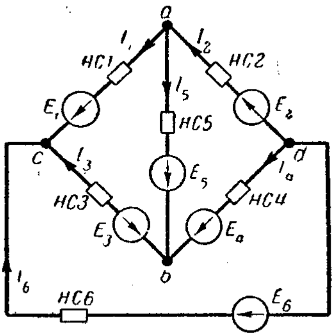
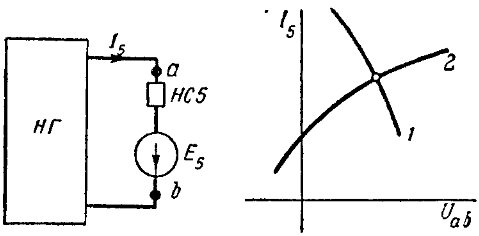


Рис. 71.



а) *б)*

Рис. 72

выделенной ветви. Пересечение их определит ток I_5 и напряжение U_{ab} в рабочем режиме (численный пример на данный метод приведен в журнале „Электричество", 1955, № 12).

В заключение заметим, что для расчета сложных разветвленных схем с НС часто оказывается полезным комбинировать рассмотренные методы и использовать другие, не показанные здесь приемы.

§ 7,7. Типы задач и трудности расчета нелинейных цепей переменного тока

Чтобы составить представление о том, с какими типами задач приходится встречаться при расчете нелинейных цепей, перечислим некоторые из них:

1. Определить граничные значения параметров схемы, при которых в ней наблюдается (или, наоборот, не наблюдается) такое-то грубое явление, например эффект стабилизации тока или напряжения, триггерный эффект на первой гармонике и т. п. Эта задача может быть поставлена и в ином аспекте, например сводиться к выявлению возможности возникновения данного явления, если параметры схемы будут изменяться в заданных пределах.

2. Определить граничные значения параметров схемы, чтобы в ней возникли (или, наоборот, не возникли) более тонкие, чем в предыдущем пункте, явления, например триггерный эффект на высшей гармонике, явление автомодуляции, прерывистая генерация и т. п. Как и в предыдущем случае, задача может сводиться к выявлению возможностей возникновения этих явлений для заданного диапазона изменения параметров.

3. Определить возможные пики токов в отдельных ветвях и напряжения на отдельных участках схемы при возникновении резонансных явлений на первой, высшей, дробной и низшей гармониках.

4. Дать теорию того или иного подмеченного экспериментальным путем явления, не поддающегося объяснению, исходя из известных фактов.

5. Сопоставить несколько схем, при помощи которых можно выполнить одно и то же нелинейное преобразование, и на основании этого сопоставления рекомендовать схему.

6. Рассчитать нелинейное устройство на минимум веса и стоимости, на максимум к. п. д. или на какое-либо заданное сочетание этих требований.

Разумеется, чаще встречаются более ординарные задачи, например определение характеристики вход — выход цепи, содержащей управляемое нелинейное сопротивление.

Нелинейные электрические цепи переменного тока содержат нелинейные индуктивности, емкости и безынерционные в тепловом отношении активные сопротивления.

Токи и напряжения в них в той или иной степени несинусоидальны. Токи и напряжения строго синусоидальны лишь в таких нелинейных цепях, которые содержат инерционные в тепловом отношении нелинейные сопротивления.

Трудности расчета физически обусловлены тем, что нелинейные сопротивления являются генераторами высших гармоник, причем амплитуда и фаза каждой гармоники сложным образом зависит от амплитуд и фаз остальных гармоник. В некоторых случаях трудности обусловлены также наличием в системе неявной обратной связи. Выявить каналы, по которым она действует, и учесть ее часто оказывается довольно трудно. В формально математическом отношении эти трудности выражаются в том, что уравнения, составленные для нелинейных цепей по второму закону Кирхгофа, являются нелинейными дифференциальными уравнениями.

В нелинейных дифференциальных уравнениях коэффициенты при неизвестных токах и напряжениях или коэффициенты при производных от них являются функциями этих токов и напряжений.

§ 7,8. Общая характеристика допущений при расчете установившихся процессов

При расчете нелинейных электрических цепей делают те или иные допущения, чтобы составить расчетную схему. Применительно к расчету установившихся процессов в нелинейных электрических цепях допущения можно разбить на допущения, общие для всех или почти всех цепей, и на допущения, специфические для данного типа НС.

Общими допущениями (при не очень высоких частотах) является обычно пренебрежение распределенными емкостями катушек индуктивностей (межвитковыми и на землю), индуктивностями, обусловленными потоками рассеяния, и межэлектродными емкостями электронных ламп и полупроводниковых выпрямителей. Перечисленные выше параметры часто называют паразитными. Как правило, они не оказывают существенного влияния на установившиеся процессы. Однако роль паразитных параметров резко возрастает, когда сопоставимые с ними остальные (учитываемые) параметры становятся весьма малыми или равными нулю. В этих случаях паразитные параметры могут оказать на работу схемы существенное влияние.

В качестве примера может быть названа схема автогенератора на плоскостном триоде (рис. 230,*а*). В определенной области значений параметров при размыкании ветви с емкостью C_1 автоколебания в схеме сохраняются за счет распределенной емкости обмоток w_1.

Далее перечислим допущения, специфические для различных нелинейностей. При расчете цепи с нелинейной индуктивностью обычно либо вовсе не учитывают гистерезис и потери в сердечнике, либо учитывают их приближенно (§ 3,6). Аналогично поступают при расчетах цепей с нелинейной емкостью.

Разумеется, гистерезис следует учитывать при расчете цепей, принцип действия которых основан на использовании гистерезисных явлений (§ 8, 12).

При ориентировочных расчетах цепей с нелинейной индуктивностью иногда полагают активные сопротивления обмоток равными нулю (аналогичное допущение часто делают и при исследовании линейных цепей).

Замена реальной характеристики НС той или иной аналитической зависимостью также является допущением, часто весьма существенным. Естественно, что все рассматриваемые ниже методы расчета справедливы лишь при достаточно низких частотах.

При весьма высоких частотах любой расчет любой электрической (в том числе и нелинейной) цепи представляет собой достаточно сложную задачу, которая может быть решена только путем привлечения математического аппарата, используемого в теории электромагнитного поля.

§ 7,9. Общая характеристика методов анализа и расчета установившихся процессов в нелинейных электрических цепях переменного тока

Все известные методы анализа и расчета могут быть подразделены на следующие:

1) графические и аналитические;

2) позволяющие анализировать только грубые явления и позволяющие анализировать физически более тонкие явления;

3) основывающиеся и не основывающиеся на гармоническом анализе;

4) использующие либо известные функции, либо новые типы функций.

Аналитические методы в отличие от графических дают возможность более легкого обозрения задачи в целом или, другими словами, возможность анализировать задачу в общем виде, а не для частных значений параметров.

Общим недостатком аналитических методов является то, что приходится аналитически выражать характеристики нелинейных сопротивлений (в графических методах этого не требуется), что всегда связано с погрешностями.

Естественно, что, чем сложнее нелинейное явление, тем более сложным оказывается его анализ.

Если исследуются нерезонансные или резонансные электрические цепи, в которых не могут возникать резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках, то амплитуда первой гармоники тока, как правило, оказывается больше амплитуд остальных гармоник. Если при этом не достигается очень больших насыщений, то действующее значение тока в цепи сравнительно мало отличается от действующего значения первой гармоники тока.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример. Пусть ток в цепи содержит первую и третью гармоники, а действующее значение третьей гармоники тока составляет 40% от действующего значения первой гармоники ($I_3 = 0{,}4\ I_1$). Действующее значение несинусоидального тока будет

$$\sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1{,}075 I_1,$$

т. е. на 7,5% больше действующего значения первой гармоники.

При больших насыщениях действующее значение несинусоидального тока может в значительно бóльшей степени отличаться от действующего значения первой гармоники.

Для анализа резонансных явлений более подходят методы, основанные на гармоническом анализе процессов.

В подавляющем большинстве аналитических методов расчет производится при помощи известных функций (например, функций Бесселя, показательных, степенных, гамма-функций и т. п.).

Однако вопрос о расчете нелинейных цепей может ставиться и в иной плоскости. Дело в том, что каждое нелинейное уравнение можно рассматривать как основу для формирования новых (пока неизвестных)* функций.

Наиболее широкое распространение получили следующие методы анализа и расчета нелинейных цепей переменного тока:

графический метод, использующий характеристики нелинейных сопротивлений для мгновенных значений;

расчет путем кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления;

аналитический (или графический) метод, использующий в. а. х. по первым гармоникам. Метод может быть назван методом гармонического баланса по первой гармонике;

графический (аналитический) метод, использующий в. а. х. по действующим значениям несинусоидальных величин;

аналитический метод расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам. Метод может быть назван методом гармонического баланса по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам;

расчет при помощи линейных схем замещения.

Известное распространение получили и другие методы:

метод малого параметра;

метод, основанный на сведении нелинейных цепей к цепям с переменными параметрами;

вариационные методы Ритца и Галеркина;

метод коллокаций;

метод комплексных амплитуд;

метод наименьших квадратов;

частотный метод.

Все большее применение при расчете нелинейных цепей находят математические счетные машины.

Математические счетные машины применяются для табулирования решений систем трансцендентных уравнений и систем алгебраических уравнений высоких степеней, для табулирования решений, выраженных в виде медленно сходящихся рядов, для интегрирования линейных дифференциальных уравнений (главным образом высоких порядков), к которым сводятся нелиней-

---

*В литературе мало примеров решений через новые функции. Для ознакомления с одним из них можно воспользоваться [Л. 59] (см. также § 7,29).

В этой работе характеристика нелинейного сопротивления выражается степенной функцией (4,8), а решение дается через новые функции ($\mathrm{sup}\, x$ и $\mathrm{cip}\, x$), представляющие собой степенные ряды. Эти ряды в упомянутой работе протабулированы.

ные дифференциальные уравнения при кусочно-линейной аппроксимации характеристики НС, а также в некоторых других случаях.

Необходимо отметить, что при расчете нелинейных электрических цепей приходится мириться с тем, что расчет может быть произведен лишь с известной степенью приближения.

§ 7,10. Графический метод, использующий характеристики нелинейных сопротивлений для мгновенных значений

Графический метод применим, как правило, к цепям, в которых известен закон изменения какой-либо одной определяющей работу нелинейного сопротивления величины, например тока, напряжения, заряда. Метод иллюстрируется на примере анализа работы пик-трансформатора (§ 8,8) и утроителя частоты (§ 7,11).

Последовательность расчета этим методом такова:

1. Исходя из тех или иных физических предпосылок, положенных в основу анализа, находят закон изменения величины, определяющей работу нелинейного сопротивления (см. § 7,11 и 8,8).

2. Путем использования характеристики (или характеристик) нелинейного сопротивления для мгновенных значений графически находят закон изменения второй величины, определяющей работу нелинейного сопротивления.

3. По результатам п. 2 путем вспомогательных графических построений и простейших расчетов находят выходную величину и искомое соотношение между параметрами схемы.

Достоинствами метода являются простота и наглядность, а также легкость учета гистерезисных явлений. Однако он не всегда может быть применен, так как закон изменения во времени тока или напряжения на НС при заданном напряжении на входе в большинстве случаев бывает неизвестен. В ограниченной степени метод применим для анализа и синтеза сложных разветвленных цепей. В этом случае следует задаваться несколькими различными по амплитуде и форме выходными величинами и для каждой из них строить соответствующую кривую изменения входной величины.

§ 7,11. Простейший утроитель частоты

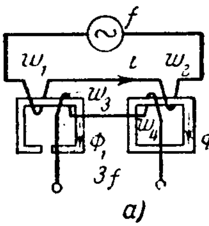
Утроитель частоты — устройство, частота на выходе которого в три раза больше частоты на входе.

Схема простейшего утроителя изображена на рис. 73, *а*. Она состоит из двух трансформаторов. В сердечнике первого трансформатора сделан воздушный зазор. Благодаря этому вебер-амперная характеристика его $\Phi_1 = f(i)$ представляет собой прямую линию (прямая *1* на рис. 73,*б*). Сердечник второго трансформатора не имеет воздушного зазора. Вебер-амперная характеристика его изображается кривой *2* (рис. 73, *б*). На сердечник первого трансформатора намотаны обмотки w_1 и w_3, на сердечник второго — w_2 и w_4. Обмотки w_1 и w_2 соединены согласно, а обмотки w_3 и w_4 — встречно.

Поток первого трансформатора назовем Φ_1, второго Φ_2.

Пусть приложенное к первичной цепи напряжение

$$u = U_m \cos \omega t.$$



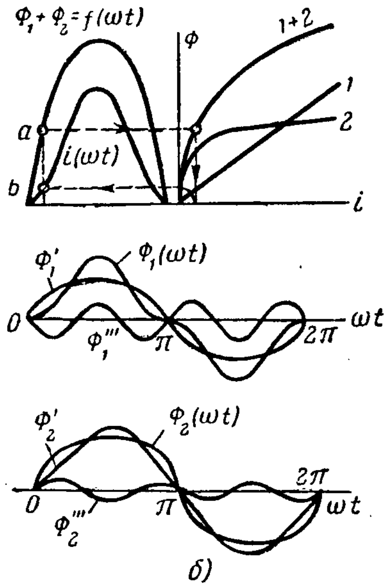


Рис. 73.

Пренебрегая падением напряжения в активном сопротивлении первичной цепи, по закону электромагнитной индукции имеем

$$u = \frac{d}{dt}\,(w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2).$$

Отсюда

$$w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 = \frac{U_m}{\omega}\sin \omega t.$$

Полагая $w_1 = w_2 = w_3 = w$, получим $\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{U_m}{\omega w}\sin \omega t$,

т. е. сумма потоков первого и второго трансформаторов изменяется по синусоидальному закону. Построим кривую $i = f(\omega t)$. С этой целью, просуммировав ординаты кривых *1* и *2*, построим кривую

$$\Phi_1 + \Phi_2 = f(i)$$

и нанесем синусоиду

$$\Phi_1 + \Phi_2 = f(\omega t),$$

амплитуда которой равна $\frac{U_m}{\omega w}$.

Задаемся произвольным значением суммарного потока (точка a), проектируем эту точку на кривую $\Phi_1 + \Phi_2 = f(i)$, находим соответствующий ток i и затем откладываем этот ток на вертикали, проведенной через точку a. Получаем точку b, принадлежащую кривой $i = f(\omega t)$.

Так как первый трансформатор не насыщен и зависимость $\Phi_1 = f(i)$ есть прямая линия, то кривая $\Phi_1(\omega t)$ имеет такую же заостренную форму, как и ток $i(\omega t)$.

Ординаты кривой $\Phi_2(\omega t)$ равны разности ординат кривой $\Phi_1 + \Phi_2 = f(\omega t)$ и кривой $\Phi_1(\omega t)$.

Кривая $\Phi_2(\omega t)$ имеет плоскую форму.

Кривые $\Phi_1(\omega t)$ и $\Phi_2(\omega t)$ могут быть разложены на гармоники. Первая и третья гармоники потоков изображены на рисунке. Первая гармоника потока Φ_1 (она обозначена Φ_1') и первая гармоника потока Φ_2 (Φ_2') находятся в фазе, тогда как третья гармоника потока Φ_1 (Φ_1''') находится в противофазе с третьей гармоникой потока Φ_2 (Φ_2''').

В каждой из вторичных обмоток (w_3 и w_4) наводятся первая и третья гармоники э. д. с. В силу встречного включения обмоток w_3 и w_4 первые гармоники в них будут вычитаться, а третьи гармоники э. д. с. складываться.

Если подобрать число витков w_4 так, чтобы первые гармоники э. д. с. в обмотках w_3 и w_4 были равны по величине (это будет при условии $\Phi_1' w_3 = \Phi_2' w_4$), то на выходе утроителя будет э. д. с. только утроенной частоты.

Для нормальной работы утроителя частоты необходимо, чтобы результирующая э. д. с. утроенной частоты, наводимая в обмотках w_1 и w_2 первичной цепи, равнялась нулю, т. е. чтобы $w_1\Phi_1''' - w_2\Phi_2''' = 0$ (в противном случае первичная цепь будет являться нагрузкой для утроителя). Нетрудно убедиться в том, что это условие выполняется. Действительно, $w_1 = w_2$, а $\Phi_1''' = \Phi_2'''$, так как суммарный поток синусоидален. Практически нет необходимости брать всегда $w_1 = w_2$.

Пример. Графически найдено, что в утроителе (рис. 73, *а*) $\Phi_{1m}' = \Phi_{2m}' = 0{,}0027$ *в · сек*, а $\Phi_{2m}''' = \Phi_{1m}''' = 0{,}0006$ *в · сек*. Определить число витков обмотки w_4 и напряжение на выходе утроителя при холостом ходе, полагая, что $w_1 = w_2 = w_3 = w = 100$.

Решение. Находим число витков:

$$w_4 = w_3 \frac{\Phi_{1m}'}{\Phi_{2m}'} = 100.$$

Мгновенное значение напряжения на выходе

$$u_{вых} = w \frac{d}{dt}\left(-\Phi_{1m}''' \sin 3\omega t - \Phi_{2m}''' \sin 3\omega t\right).$$

Действующее значение напряжения

$$U_{вых} = w\, 3\omega \frac{2\Phi_{1m}'''}{\sqrt{2}} = 100 \cdot 3 \cdot 314 \frac{2 \cdot 0{,}0006}{\sqrt{2}} = 97{,}6 \text{ в}.$$

В конце § 7,10 говорилось, что графический метод анализа и расчета может быть применен и к сравнительно сложным схемам. В качестве иллюстрации применим его к схеме (рис. 74, *а*) с нелинейными емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением. Характеристики нелинейных сопротивлений полагаем известными.

Требуется построить кривые изменения всех токов и напряжений для нескольких заданных формой и амплитудами токов i_1. Пусть, например, требуется найти все токи и напряжения в установившемся режиме, когда ток i_1 изменяется в соответствии с кривой *1* (рис. 74, *б*).

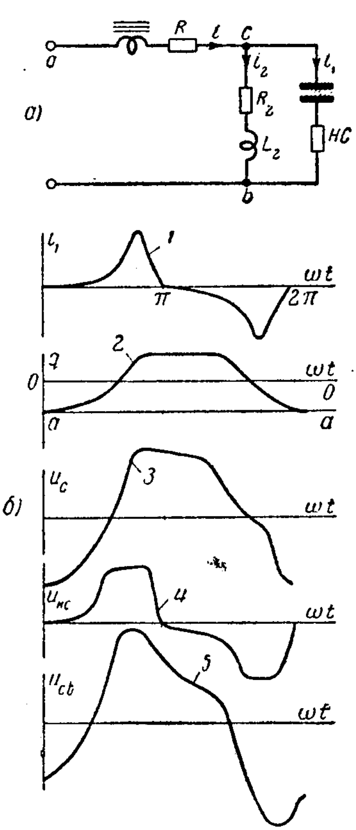


Рис. 74.

Прежде всего строим кривую *2* — кривую зависимости заряда q на нелинейной емкости в функции от времени. С этой целью графически интегрируем кривую тока i_1 $q = \int i_1 dt$, приняв за начало счета прямую *аа*. Если напряжение на входе цепи не имеет постоянной составляющей и в токе i_1 нет четных гармоник, то постоянная составляющая заряда q должна быть равна нулю. Это обстоятельство используется для того, чтобы найти положение действительной нулевой линии *00* для кривой $q = f(\omega t)$. Для этого, считая линию *аа* за исходную, подсчитываем среднее значение заряда за период:

$$q_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T q\,dt$$

и проводим нулевую линию *00* так, чтобы ее ордината равнялась $q_{ср}$. Далее при помощи кривой $q = f(\omega t)$ — кривой *2* и кулон-вольтной характеристики нелинейной емкости $u_C = f(q)$ строим зависимость напряжения на емкости u_C в функции от времени (кривая *3*). Затем при помощи в. а. х. нелинейного активного сопротивления и кривой $i_1 = f(\omega t)$ строим кривую *4* падения напряжения на НС в функции от времени $u_{нс} = f(\omega t)$. Суммирование ординат кривых *3* и *4* дает кривую *5* зависимости напряжения на зажимах *cb* в функции от времени. Графически раскладываем последнюю на гармоники и строим кривую тока $i_2 = f(\omega t)$ (на рис. эта кривая и последующие не показаны).

Суммируем ординаты кривых $i_1 = f(\omega t)$ и $i_2 = f(\omega t)$ и получаем зависимость тока i от времени в неразветвленной части схемы. Строим кривую падения напряжения на сопротивлении R от тока i.

При помощи зависимости $i = f(\omega t)$ и зависимости потокосцепления от тока $\psi = f(i)$ строим кривую $\psi = f(\omega t)$ и по ней кривую падения напряжения u_L на нелинейной индуктивности $u_L = \frac{d\psi}{dt}$.

Суммирование ординат кривых u_L, u_R и u_{cb} дает кривую напряжения u_{ab} на входе цепи.

§ 7,12. Расчет нелинейных цепей путем кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления для мгновенных значений

Основным содержанием метода является сведение нахождения периодического решения нелинейных уравнений к нахождению периодического решения системы линейных уравнений.

Основные этапы метода:

1. Замена вольт-амперной (вебер-амперной, кулон-вольтной) характеристики НС для мгновенных значений отрезками прямых линий.

2. Подстановка в нелинейные дифференциальные уравнения уравнений прямых из п. 1. Следовательно, каждому нелинейному уравнению будет соответствовать столько линейных уравнений, сколько использовано отрезков для замены характеристики НС.

3. Решение системы линейных дифференциальных уравнений. Каждому линейному участку характеристики нелинейного сопротивления будет соответствовать свое решение со своими постоянными интегрирования.

4. Определение постоянных интегрирования, исходя из согласования решения на одном линейном участке с решением на другом линейном участке.

Метод наиболее эффективен тогда, когда характеристика НС с известной степенью приближения может быть заменена отрезками прямых, расположенных так, что, когда одна величина, определяющая режим работы НС, например ток, меняется, другая, например потокосцепление, неизменна.

Еще более эффективен метод тогда, когда отрезки прямых, заменяющие собой в. а. х. НС*, могут быть взяты совпадающими

---

* Метод предложен Н. Д. Папалекси [Л.7] и развит Ю. Г. Толстовым [Л.30] Г. Ф. Стормом [Л.56] и другими авторами.

с осями координат. Замена характеристики НС отрезками прямых, расположенных под прямым углом друг к другу, приводит к тому, что характеристика приобретает максимально возможную для данного НС степень нелинейности; расчеты какой-либо цепи, проведенные при прямоугольной аппроксимации, дают возможность получить численные соотношения между токами и напряжениями схемы при максимально возможной степени нелинейности для данного НС.

В последнее время этот метод был развит применительно к нерезонансным цепям: одновременно с заменой характеристики НС отрезками прямых линий, расположенных под прямым углом друг к другу, производится замена действующей в схеме э. д. с. на более простую в расчетном отношении. Так, вместо источника синусоидальной э. д. с. в схему включают источник прямоугольных знакочередующихся импульсов. Частота и амплитуда (или среднее значение) последних равны частоте и амплитуде (или среднему значению) заменяемой синусоидальной э. д. с.

Рассматриваемый метод иллюстрируется ниже тремя примерами. Первые два примера весьма просты и служат лишь для иллюстрации идеи метода. Третий пример несколько сложнее, поскольку при решении возникает необходимость в определении корня трансцендентного уравнения.

Пример 1. В схеме (рис. 75, *а*) к источнику э. д. с. $e = E_m \sin \omega t$ подключены последовательно соединенные нелинейная индуктивность и активное сопротивление R. Зависимость потокосцепления ψ от тока i принять в соответствии с рисунком. Вывести формулу для определения среднего за полупериод значения тока в цепи.

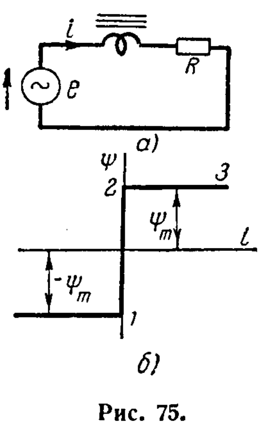


Рис. 75.

Решение. Запишем уравнение цепи

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = E_m \sin \omega t. \qquad (7,1)$$

В интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \omega t_1$ (назовем этот интервал первым) $i = 0$, все напряжение приходится на нелинейную индуктивность, $\frac{d\psi}{dt} = E_m \sin \omega t$, и потокосцепление ψ изменяется от $-\psi_m$ до ψ_m (изображающая точка перемещается от *1* к *2*). В этом интервале $d\psi = E_m \sin \omega t \, dt$, следовательно,

$$\psi = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t + C. \qquad (7,2)$$

Здесь C — постоянная интегрирования.

Во втором интервале от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ потокосцепление ψ остается постоянным и равным ψ_m, $\frac{d\psi}{dt} = 0$.

Из уравнения (7,2) имеем

$$Ri = E_m \sin \omega t \text{ или } i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t.$$

Таким образом, во втором интервале времени ток i изменяется по закону синуса, а потокосцепление ψ постоянно и равно ψ_m. При этом изображающая точка на рис. 75, *б* перемещается по участку $2-3$.

Найдем постоянную интегрирования C и величину ωt_1. Для определения C запишем уравнение (7,2) при $\omega t = 0$. При $\omega t = 0$ $\psi = -\psi_m$, поэтому $-\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} + C$.

Отсюда

$$C = -\psi_m + \frac{E_m}{\omega}.$$

Для определения ωt_1 воспользуемся также уравнением (7,2), учтя, что при $\omega t = \omega t_1$ $\psi = \psi_m$:

$$\psi_m = -\frac{E_m}{\omega}\cos\omega t_1 - \psi_m + \frac{E_m}{\omega}.$$

Отсюда

$$\cos\omega t_1 = 1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m} \quad \text{или} \quad \omega t_1 = \arccos\left(1 - \frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right).$$

Характер изменения тока i, потокосцепления ψ и $\frac{d\psi}{dt}$, когда $\frac{\omega\psi_m}{E_m} < 1$, показан на рис. 76.

Если амплитуда E_m будет меньше, чем $\omega\psi_m$, то второго интервала времени не возникает; другими словами, ток i будет равен нулю в течение всего периода.

По определению среднее значение тока

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi i d\omega t = \frac{E_m}{\pi R}(1+\cos\omega t_1) = \frac{2I_m}{\pi}\left(1 - \frac{\omega\psi_m}{E_m}\right);$$

$$I_m = \frac{E_m}{R}. \tag{7,3}$$

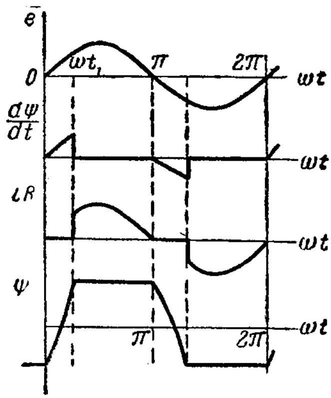


Рис. 76.

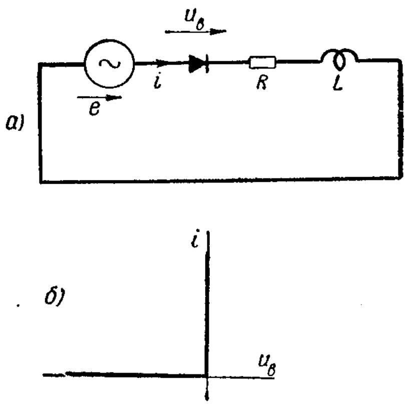


Рис. 77.

Пример 2. На рис. 77,*а* изображена схема однополупериодного выпрямления. К источнику синусоидальной э. д. с. присоединены однополупериодный выпрямитель (вентиль), активное сопротивление R и индуктивность L. Требуется вывести формулу и построить кривую тока в цепи в функции времени, полагая, что вентиль обладает идеальной характеристикой (рис. 77,*б*).

Решение. В соответствии с этой идеальной характеристикой, когда через выпрямитель проходит ток, падение напряжения на нем равно нулю и, следовательно, сопротивление самого выпрямителя равно нулю. Когда напряжение на выпрямителе отрицательно (т. е. когда отрицательна взятая в направлении стрелки, рис. 77, *а* разность потенциалов на самом выпрямителе), выпрямитель тока не проводит ($i = 0$) и сопротивление его равно бесконечности.

Уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 77,*а*, запишется так:

$$u_в + iR + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t. \tag{7,4}$$

Это уравнение является нелинейным, так как напряжение на выпрямителе нелинейно зависит от тока.

Уравнение (7,4) записано в общем виде и пригодно как для проводящей, так и для непроводящей частей периода. В проводящую часть периода, когда ток $i \neq 0$ и изображающая точка движется по вертикальному участку в. а. х., напряжение на диоде $u_в \doteq 0$. При этом уравнение (7,4) приобретает вид

$$iR + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t. \tag{7,4'}$$

В непроводящую часть периода, когда через R и L не протекает ток, падения напряжений на сопротивлении R и индуктивности L равны нулю и изображающая точка движется по горизонтальному участку в. а. х. При этом уравнение (7,4) принимает следующий вид:

$$u_в = E_m \sin \omega t. \tag{7,4''}$$

Таким образом, вместо одного нелинейного уравнения (7,4) получилось два линейных уравнения (7,4′) и (7,4″).

Решение уравнения (7,4) запишется так:

$$i = \frac{E_m}{z}\sin(\omega t - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \tag{7,5}$$

Первое слагаемое правой части уравнения (7,5) представляет собой принужденный ток, а второе — свободный ток:

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

Выпрямитель открывается (проводит ток), начиная с $\omega t = 0$. Составим уравнение для определения постоянной интегрирования A. С этой целью запишем уравнение (7,5) при $t = 0$:

$$0 = -\frac{E_m}{z}\sin\varphi + A.$$

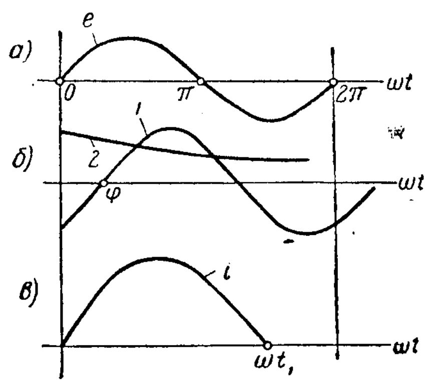


Рис. 78.

Нуль в левой части последней формулы объясняется тем, что при $\omega t = 0$ $i = 0$. Следовательно, $A = \frac{E_m}{z}\sin\varphi$. Подставим в формулу (7,5) значение A и запишем окончательное выражение для тока в проводящую часть периода:

$$i = \frac{E_m}{z}\sin(\omega t - \varphi) + \frac{E_m}{z}\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В непроводящую часть периода $i = 0$.

На рис. 78, *а* изображена э. д. с. источника питания схемы $E_m \sin \omega t$.

На рис. 78, *б* кривая *1* — принужденный ток $\frac{E_m}{z}\sin(\omega t - \varphi)$, кривая *2*—свободный ток. С увеличением t свободный ток затухает по экспоненциальному закону.

Кривая рис. 78,*в* изображает ток i. Ординаты этой кривой в интервале $0 - \omega t_1$ равны сумме ординат кривых *1* и *2*.

В момент времени ωt_1, когда ток i становится равным нулю, выпрямитель переходит из состояния проводимости в состояние непроводимости. В интервале времени от ωt_1 до 2π выпрямитель закрыт и ток нагрузки равен нулю. В следующий период процесс повторяется.

Пример 3. В схеме рис. 79 к источнику э. д. с. $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ подключены нелинейная индуктивность с в. а. х. по рис. 75, линейная индуктивность L и активное сопротивление R. Требуется вывести формулы для определения тока i и потокосцепления ψ в функции времени и построить кривые указанных величин во времени.

Решение. Запишем уравнение для исследуемой цепи:

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin(\omega t + \alpha). \tag{7,6}$$

В интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \beta$ (рис. 80, *б*) ток i, а также $\frac{di}{dt}$ равны нулю, изображающая точка на характеристике $\psi(i)$ перемещается по

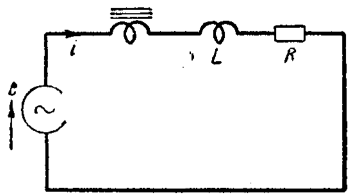


Рис. 79.

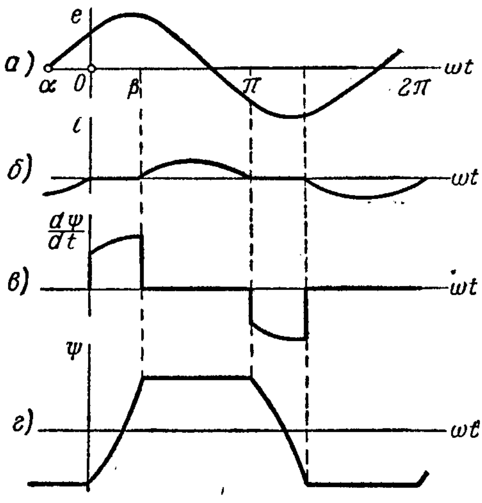


Рис. 80.

вертикальному участку, ψ изменяется от $-\psi_m$ до ψ_m. Процесс описывается уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = E_m \sin(\omega t + \alpha). \tag{7,6'}$$

Отсюда

$$\psi = -\frac{E_m}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что при $t=0$ $\psi=-\psi_m$:

$$-\psi_m=-\frac{E_m}{\omega}\cos\alpha+C;$$

$$C=-\psi_m+\cos\alpha.$$

Таким образом, в интервале времени от $\omega t=0$ до $\omega t=\beta$ $i=0$ и $\psi=$ $=-\frac{E_m}{\omega}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{E_m}{\omega}\cos\alpha-\psi_m$. При $\omega t=\beta$ $\psi=\psi_m$.

Следовательно,

$$\cos(\beta+\alpha)=-\frac{2\omega\psi_m}{E_m}+\cos\alpha. \qquad (7,7)$$

При $\omega t>\beta$ изображающая точка будет двигаться по горизонтальному участку кривой $\psi(i)$, потокосцепление изменяться не будет $\left(\frac{d\psi}{dt}=0\right)$. Процесс в этом случае описывается уравнением

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E_m\sin(\omega t+\alpha).$$

Так как при $0<\omega t<\beta$ ток в цепи отсутствовал, то переход с вертикального участка кривой $\psi(i)$ на горизонтальный означает, что при $\omega t=\beta$ происходит подключение последовательно соединенных L и R к источнику синусоидальной э. д. с. При этом возникает переходный процесс. Ток i будет состоять из принужденной и свободной составляющих:

$$i=\frac{E_m}{z}\sin(\omega t+\alpha-\varphi)-\frac{E_m}{z}\sin(\beta+\alpha-\varphi)e^{-\frac{R(\omega t-\beta)}{\omega L}}, \qquad (7,8)$$

где

$$z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

Если в формулу (7,8) подставить $\omega t=\beta$, то получим $i=0$, как и должно быть.

В силу периодичности процесса при $\omega t=\pi$ ток должен быть равен нулю. Подставим в (7,8) $\omega t=\pi$ и приравняем нулю левую часть формулы:

$$0=\frac{E_m}{z}\sin(\pi+\alpha-\varphi)-\frac{E_m}{z}\sin(\beta+\alpha-\varphi)e^{-\frac{R}{\omega L}(\pi-\beta)}. \qquad (7,8')$$

Найдем углы α и β. С этой целью из формулы (7,7) получим

$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\cos\alpha-\frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)^2}. \qquad (7,8'')$$

Из (7,8') следует, что

$$\beta=\pi+\frac{\omega L}{R}\ln\frac{\sin(\pi-\varphi+\alpha)}{\sin(\beta-\varphi+\alpha)}. \qquad (7,8''')$$

Но

$\sin(\beta-\varphi+\alpha)=\sin(\beta+\alpha)\cos\varphi-\cos(\beta+\alpha)\sin\varphi$, а $\sin(\pi-\varphi+\alpha)=\sin(\varphi-\alpha)$.

Поэтому

$$\beta=\pi+\frac{\omega L}{R}\ln\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi\sqrt{1-\left(\cos\alpha-\frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)^2}-\sin\varphi\left(\cos\alpha-\frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)}. \qquad (7,9)$$

Подставив правую часть формулы (7,9) в уравнение (7,5), получим трансцендентное уравнение относительно угла α:

$$\cos\left[\alpha + \frac{\omega L}{R}\ln\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi\sqrt{1-\left(\cos\alpha-\frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)^2}-\sin\varphi\left(\cos\alpha-\frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)}\right]=$$

$$=\frac{2\omega\psi_m}{E_m}-\cos\alpha. \qquad (7,10)$$

Последовательность расчета следующая. Сначала определяем угол $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$. Затем при известных значениях $\frac{\omega L}{R}$, $\frac{2\omega\psi_m}{E_m}$ и угла φ решаем уравнение (7,10) относительно угла α. С этой целью произвольно задаемся несколькими значениями угла α и строим кривые зависимости левой и правой частей уравнения (7,10) в функции от угла α. Абсцисса точки пересечения указанных кривых дает искомое значение угла α. После этого при помощи формулы (7,6) строим кривую $\psi = f(t)$, а при помощи формулы (7,8) — кривую $i = f(t)$.

Отметим, что если бы пришлось часто пользоваться уравнением (7,10) для определения угла α, то было бы целесообразно представить решение уравнения (7,10) в виде семейства кривых $\alpha = f\left(\frac{2\omega\psi_m}{E_m}\right)$ при параметре $\frac{\omega L}{R}$.

§ 7,13. Аналитический и графический методы расчета по первым гармоникам токов и напряжений

В аналитическом методе изменяющиеся по сложному закону токи и напряжения на нелинейном сопротивлении заменяются их первыми гармониками. В расчете используются вольт-амперные характеристики по первым гармоникам в аналитической форме или в виде графической зависимости.

Основные этапы расчета в аналитическом варианте:

1. Сначала выражают аналитически в. а. х. нелинейного сопротивления для мгновенных значений.

2. Путем подстановки в нее первой гармоники напряжения или тока получают формулу, которая дает нелинейную связь между амплитудой первой гармоники тока через нелинейное сопротивление и амплитудой первой гармоники напряжения на нем [в качестве примера такой связи можно назвать формулу (6,1)].

3. В уравнение, составленное для исследуемой цепи по второму закону Кирхгофа, подставляют вместо мгновенных значений тока и напряжения на нелинейном сопротивлении мгновенные значения их первых гармоник, а высшими гармониками пренебрегают.

4. После этого уравнение разбивают на два. Одно из них выражает равенство коэффициентов при синусных слагаемых левой и правой частей уравнения, другое — равенство коэффициентов при косинусных слагаемых обеих частей уравнения.

5. Далее совместно решают эти два уравнения.

Существует два варианта рассматриваемого метода, отличающиеся один от другого тем, какая из двух величин, определяющих работу нелинейного сопротивления, принята синусоидальной.

В первом варианте принимается, что синусоидальную форму имеет напряжение на НС, а амплитуда первой гармоники несинусоидального тока находится аналитически или графически и представляет собой нелинейную функцию амплитуды синусоидального напряжения на НС.

Во втором варианте принимается, что синусоидальную форму имеет ток, протекающий через НС, а амплитуда первой гармоники несинусоидального напряжения на НС находится аналитически или графически и представляет собой нелинейную функцию амплитуды синусоидального тока через НС.

Для каждого конкретного режима и для каждой конкретной цепи следует применять тот вариант, который ближе подходит к реальным условиям работы НС в схеме.

В промежуточных случаях следует просчитать оба варианта и взять средние результаты. Метод применим и в том случае, когда в цепи имеется несколько различных НС, находящихся в одной и той же или в различных ветвях. При наличии нескольких НС целесообразно характеристику одного НС выразить степенной функцией [формула (4,8)] и в расчете использовать гамма-функцию (§ 5,8).

Если пользоваться аналитическим вариантом этого метода, то решение можно получить в общем виде, что весьма существенно с точки зрения анализа режимов работы исследуемой цепи при изменении любого из ее параметров.

Метод позволяет исследовать такие нелинейные явления, как преобразование постоянного тока в переменный и обратно, резонанс на первой гармонике, триггерный эффект на первой гармонике, некоторые типы автомодуляционных процессов (см. гл. 16) и т. п. Метод не позволяет исследовать резонансные явления на высших, низших и дробных гармониках, некоторые типы автомодуляционных процессов (например, такие, где обратная связь осуществляется через вторую гармонику или через субгармонику второго порядка) и другие, более сложные явления.

Метод иллюстрируется несколькими примерами (см. § 7,14; 12,11; 12,13; 15,8).

Основные этапы расчета методом первой гармоники в графическом варианте:

1. В качестве зависимости между амплитудой первой гармоники напряжения на нелинейном сопротивлении и амплитудой первой гармоники тока через него берут нелинейную зависимость в виде графика. Эта зависимость может быть получена любым способом, в том числе и опытным путем.

2. Произвольно задаются амплитудой I_{1m} первой гармоники тока через НС, из графика находят соответствующую ей амплитуду первой гармоники напряжения и затем путем построения векторной диаграммы по первой гармонике для всей схемы определяют амплитуду U_{1m} первой гармоники напряжения на входе схемы.

Векторная диаграмма принципиально строится так же, как и для обычных линейных цепей синусоидального тока, а именно: если не учитывать потери в сердечнике, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивности опережает первую гармонику протекающего через нее тока на 90°; первая гармоника напряжения на нелинейной емкости отстает от протекающего через нее тока на 90°; первые гармоники напряжения и тока на нелинейном активном сопротивлении совпадают по фазе.

3. Путем построения нескольких векторных диаграмм для различных значений I_{1m} находят соответствующие им значения U_{1m} и строят в. а. х. всей схемы $U_{1m}=f(I_{1m})$.

§ 7,14. Анализ работы мостовой выпрямительной схемы с предвключенным сопротивлением и активно-индуктивной нагрузкой в цепи выпрямленного тока

На рис. 81, *а* изображена схема, в которой к источнику синусоидальной э. д. с. присоединены сопротивление R_1+jX_1 и выпрямительный мост. На выходе выпрямительного моста включены активное сопротивление $R_н$ и индуктивность $L_н$.

Рассмотрим расчет схемы по первой гармонике в установившемся режиме [Л. 18]. Будем полагать, что в. а. х. каждого плеча выпрямительного моста соответствует рис. 81, *б*. Следовательно, в проводящем направлении сопротивление выпрямителя равно нулю, а в непроводящем — бесконечности.

Если модуль предвключенного сопротивления

$$z_1=\sqrt{R_1^2+X_1^2}$$

будет хотя бы раза в два меньше сопротивления $R_н$, то напряжение на входе моста можно в первом приближении считать синусоидальным (этот режим будем называть первым режимом).

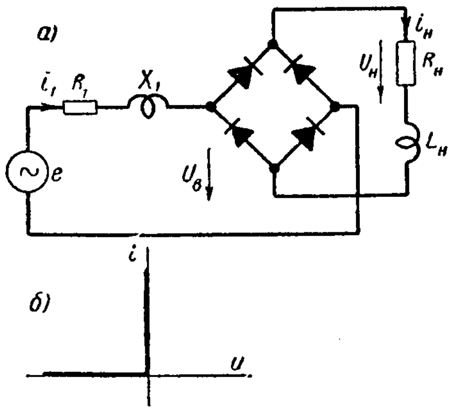


Рис. 81.

Если $z_1>2R_н$, то в первом приближении можно считать, что синусоидальным является переменный ток i_1 (второй режим).

Примерные графики изменения переменного напряжения на входе моста $u_в$, переменного тока i_1, напряжения на выходе моста (напряжения на нагрузке) $u_н$ и тока в нагрузке $i_н$ для первого и второго режимов изображены на рис. 82, *а* и *б*.

В качественном отношении первый и второй режимы отличаются друг от друга тем, что во втором режиме имеются такие интервалы времени (на рис. 82, *б* за первый полупериод от $\omega t = 0$ до $\omega t = \alpha_1$ и от α_2 до π), за которые нормальное выпрямление нарушено и ток проводят все плечи выпрямительного моста. Этот режим возникает в такие интервалы времени, когда ток $i_н$ становится больше, чем модуль тока i_1 (ток i_1 во втором режиме синусоидальный, он должен периодически проходить через нуль).

В эти моменты времени ток $i_н$ поддерживается за счет запаса энергии в магнитном поле индуктивности $L_н$.

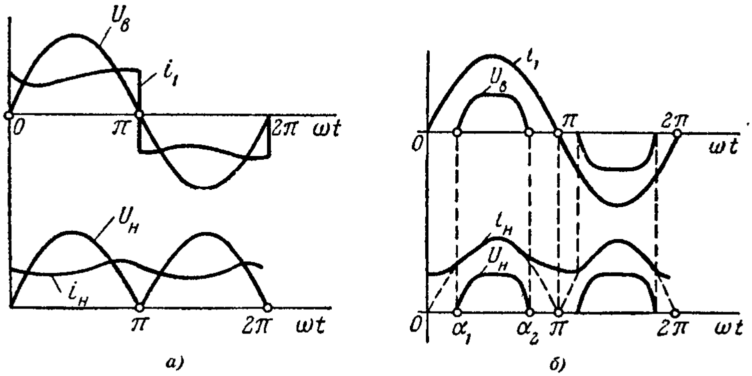


Рис. 82.

Проделаем выкладки для первого режима.

Пусть напряжение на входе моста

$$u_в = U_{вm} \sin \omega t.$$

В цепи периодически происходит коммутационный процесс, вызванный прекращением работы одной пары вентилей и включением в работу другой пары вентилей (диодов).

В интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \pi$ ток $i_н$ можно представить в виде суммы принужденного и свободного токов:

$$i_н = I_m \sin(\omega t - \varphi) + Ce^{-\frac{R_н}{L_н}t}.$$

Здесь

$$I_m = \frac{U_{вm}}{\sqrt{R_н^2 + (\omega L_н)^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L_н}{R_н};$$

C — постоянная интегрирования.

Постоянную C определим из условия $i_{н\,\omega t=0} = i_{н\,\omega t=\pi}$:

$$C = \frac{2I_m \sin\varphi}{1 - e^{-\frac{R_н}{\omega L_н}\pi}}. \qquad (7,11)$$

Следовательно, закон изменения тока $i_н$ в интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \pi$ таков:

$$i_н = I_m \sin(\omega t - \varphi) + \frac{2I_m \sin\varphi}{1 - e^{-\frac{R_н}{\omega L_н}\pi}} e^{-\frac{R_н}{L_н}t}. \qquad (7,12)$$

Средние за полупериод выпрямленные напряжение и ток будут равны

$$U_н = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi U_{вm} \sin \omega t d\omega t = \frac{2}{\pi} U_{вm};$$

$$I_н = \frac{U_н}{R_н}.$$

В первый полупериод ток $i_н$ равен переменному току i_1. Во второй полупериод $i_н = -i_1$ (см. рис. 82, a). Ток i_1 несинусоидален и может быть представлен в виде ряда Фурье.

Первую гармонику тока i_1 запишем в виде

$$I_{1ms} \sin \omega t + I_{1mc} \cos \omega t,$$

где

I_{1ms} — амплитуда синусной составляющей первой гармоники ряда Фурье;

I_{1mc} — амплитуда косинусной составляющей первой гармоники.

Из теории рядов Фурье известно, что

$$I_{1ms} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} i_1 \sin \omega t\, d\omega t; \qquad (7,13)$$

$$I_{1mc} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} i_1 \cos \omega t\, d\omega t. \qquad (7,14)$$

Вместо i_1 в формулы (7,13) и (7,14) для первого полупериода подставим плюс $i_н$ (формула 7,12), а для второго полупериода — минус $i_н$. После интегрирования получим

$$I_{1s} = \frac{I_{1ms}}{\sqrt{2}} = \frac{U_в}{R_н} k_1; \qquad (7,13')$$

$$I_{1c} = \frac{I_{1mc}}{\sqrt{2}} = \frac{U_в}{R_н} k_2. \qquad (7,14')$$

Здесь

$$U_в = \frac{U_{вm}}{\sqrt{2}}.$$

Коэффициенты k_1 и k_2 являются функциями отношения $\frac{R_н}{\omega L_н} = a$:

$$k_1 = \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a}{1+a^2} \cdot \frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}}; \qquad (7,15)$$

$$k_2 = -\frac{a}{1+a^2} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a}{1+a^2} \cdot \frac{1+e^{-a\pi}}{1-e^{-a\pi}}. \qquad (7,16)$$

Зависимости k_1 и k_2 от a изображены на рис. 83. Из теории переменного тока известно, что комплекс тока $\dot{I}$ по участку цепи

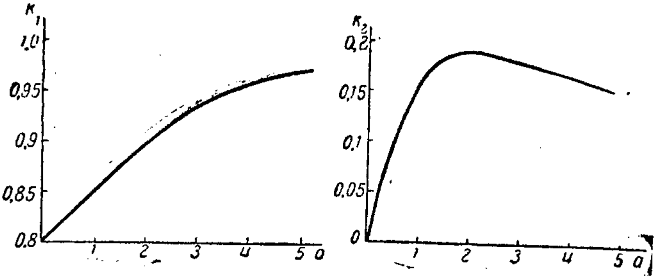


Рис. 83.

можно представить в виде произведения комплекса напряжения $\dot{U}$ на этом участке на комплекс проводимости Y этого участка:

$$\dot{I} = \dot{U}Y. \qquad (7,17)$$

Но

$$\dot{I} = I_а + jI_r \text{ и } Y = g - jb, \qquad (7,17')$$

где $I_а$ — активная составляющая тока $\dot{I}$;

I_r — реактивная составляющая.

Сопоставление формул (7,17) и (7,17′) с формулами (7,13′) и (7,14′) дает соотношения

$$g = \frac{k_1}{R_н} \text{ и } b = \frac{k_2}{R_н}. \qquad (7,18)$$

Входное сопротивление выпрямительного моста для первой гармоники обозначим $Z_в$. Как и всякий комплекс, его можно представить в виде действительной $R_в$ и мнимой $X_в$ частей:

$$Z_в = R_в + jX_в;$$

$$Z_в = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = R_в + jX_в;$$

$$\left.\begin{aligned} R_{в} &= R_{н}\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2}; \\ X_{в} &= R_{н}\frac{k_2}{k_1^2+k_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7,19}$$

Подведем итоги. Для расчета схемы (рис. 81, a) по первой гармонике служит схема замещения, изображенная на рис. 84. В этой схеме активное сопротивление $R_{в}$ и индуктивное сопротивление $X_{в}$ в режиме синусоидального напряжения на входе моста определяются по формулам (7,19). Очевидно, что для схемы рис. 84

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{R_1 + R_{в} + j(X_1 + X_{в})}.$$

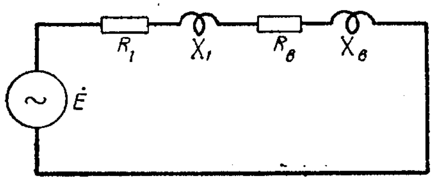


Рис. 84

Если проделать аналогичные выкладки для режима синусоидального тока, то окажется, что сопротивления $R_{в}$ и $X_{в}$ определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} R_{в} &= k_3 R_{н}; \\ X_{в} &= k_4 R_{н}. \end{aligned} \tag{7,19'}$$

Коэффициенты k_3 и k_4 являются функциями коэффициента $a = \frac{R_{н}}{\omega L_{н}}$ (рис. 85).

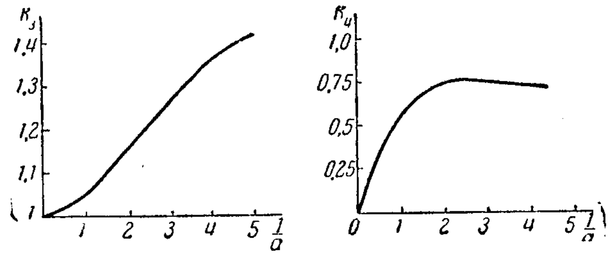


Рис. 85.

§ 7,15. Аналитический метод расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам (метод гармонического баланса)

Расчет включает следующие этапы:

1. Составляют систему дифференциальных уравнений цепи (в частном случае это может быть одно уравнение).

2. Характеристику нелинейного сопротивления выражают аналитически, и аналитическое выражение подставляют в дифференциальные уравнения (или уравнение) цепи.

3. Решение для искомой величины изображают в виде ряда, состоящего из первой и одной или нескольких высших или низших гармоник.

Так, если расчет проводится по первой и одной высшей или низшей гармонике, то решение берут в одной из следующих форм записи:

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t + c\sin k\omega t + g\cos k\omega t; \qquad (7,20)$$

$$x = a_1\sin\omega t + c_1\sin k\omega t + g_1\cos k\omega t; \qquad (7,20')$$

$$x = a_1\sin\omega t + c_2\sin(k\omega t + \psi_k). \qquad (7,20'')$$

В первом случае в качестве неизвестных в расчет вводят амплитуды первой (a и b) и высшей или низшей (c и g) гармоник, а начальную фазу напряжения источника э. д. с. берут равной нулю.

Во втором случае в качестве неизвестных в расчет вводят амплитуду первой гармоники a_1, амплитуды c_1 и g_1 высшей или низшей гармоники и начальную фазу напряжения источника э. д. с.

В третьем случае неизвестными являются амплитуды a_1, c_2, фаза ψ_k и начальная фаза э. д. с. источника.

Уравнения для определения амплитуд (и фаз) гармоник можно получить несколькими способами. Наибольшее распространение получил метод гармонического баланса и эквивалентный ему в смысле получаемых решений вариационный метод Б. Галеркина. Меньшее распространение получил метод коллокаций (см. ниже).

Согласно методу гармонического баланса уравнения для определения амплитуд получают следующим образом. Подставляют предполагаемое решение [например, (7,20)] в уравнение системы и полученное уравнение представляют в виде ряда Фурье:

$$A\,(a, b, c, g)\sin\omega t + B\,(a, b, c, g)\cos\omega t +$$
$$+ C\,(a, b, c, g)\sin k\omega t + G\,(a, b, c, g)\cos k\omega t +$$
$$+ \Sigma \text{ высших гармоник} = 0.$$

Ряд Фурье будет содержать синусную составляющую первой гармоники, косинусную составляющую первой гармоники, синусную и косинусную составляющие учитываемой высшей (или низшей) гармоники, а также другие высшие или низшие гармоники.

Уравнения для определения амплитуд (и фаз) получают, приравнивая нулю амплитуду синусной составляющей первой гармоники ряда Фурье, а также амплитуду косинусной составляющей первой гармоники и амплитуды остальных, учитываемых при решении гармоник. Остальными гармониками ряда Фурье пренебрегают.

Число полученных уравнений будет в два раза больше числа учитываемых гармоник. Так, если учитываются две гармоники, например первая и третья, то число уравнений будет равно четырем.

Каждое из уравнений будет алгебраическим уравнением довольно высокой степени или трансцендентным уравнением и будет содержать все неизвестные. Основная трудность решения данным методом заключается в решении системы трансцендентных уравнений или алгебраических уравнений высоких степеней.

Если исследуются нерезонансные режимы по высшим и низшим гармоникам, а амплитуды высших (низших) гармоник меньше амплитуды первой гармоники, то уравнения решают методом последовательных приближений.

Сначала (в нулевом приближении) из одной пары уравнений находят амплитуды (или амплитуду и фазу) первой гармоники, полагая амплитуду учитываемой высшей гармоники равной нулю. Затем из другой пары уравнений находят амплитуды (или амплитуду и фазу) высшей гармоники, полагая, что амплитуда (или амплитуда и фаза) первой гармоники остаются такими же, какими они были в нулевом приближении. Полученный результат назовем первым приближением. После этого находят поправки в значениях амплитуды и фазы первой гармоники, которые необходимо сделать вследствие учета высшей гармоники, и т. д.

Таким образом, систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} A(a,\ b,\ c,\ g) &= 0; \\ B(a,\ b,\ c,\ g) &= 0; \\ C(a,\ b,\ c,\ g) &= 0; \\ G(a,\ b,\ c,\ g) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

методом последовательных приближений решают следующим образом:

1. Определяют амплитуды первых гармоник $a = a_0$ и $b = b_0$ в нулевом приближении из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} A(a_0,\ b_0,\ 0,\ 0) &= 0; \\ B(a_0,\ b_0,\ 0,\ 0) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

2. Находят амплитуды высших гармоник $c = c_0$ и $g = g_0$ из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} C(a_0,\ b_0,\ c_0,\ g_0) &= 0; \\ G(a_0,\ b_0,\ c_0,\ g_0 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

3. Вычисляют поправки Δa и Δb на амплитуды первых гармоник.

С этой целью раскладываем уравнения

$$A(a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b,\ 0 + c_0,\ 0 + g_0) = 0;$$

$$B(a_0 + \Delta a,\ b_0 + \Delta b,\ 0 + c_0,\ 0 + g_0) = 0$$

в ряд Тейлора по степеням Δa, Δb, c_0, g_0 и ввиду малости Δa, Δb, c_0, g_0 ограничиваемся членами разложения, содержащими эти величины в степенях не выше первой.

Получаем

$$\left.\begin{aligned} &A(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b,\ 0+c_0,\ 0+g_0)=A(a_0,\ b_0,\ 0,\ 0)+\\ &\qquad +\Delta aA_1+\Delta bB_1+c_0C_1+g_0G_1=0;\\ &B(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b,\ 0+c_0,\ 0+g_0)=B(a_0,\ b_0,\ 0,\ 0)+\\ &\qquad +\Delta aA_2+\Delta bB_2+c_0C_2+g_0G_2=0. \end{aligned}\right\}\quad(7{,}21)$$

Здесь
$$A_1=\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0},\quad C_1=\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0};$$

$$B_1=\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0},\quad G_1=\left(\frac{\partial A}{\partial g}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0};$$

$$A_2=\left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0},\quad C_2=\left(\frac{\partial B}{\partial c}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0};$$

$$B_2=\left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0},\quad G_2=\left(\frac{\partial B}{\partial g}\right)_{a_0,\ b_0,\ 0,\ 0}.$$

Если учесть, что

$$A(a_0,\ b_0,\ 0,\ 0)=0 \text{ и } B(a_0,\ b_0,\ 0,\ 0)=0,$$

то из системы уравнений (7,21) следует:

$$\Delta a=\frac{\begin{vmatrix}(c_0C_1+g_0G_1) & B_1\\ (c_0C_2+g_0G_2) & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\quad \Delta b=\frac{\begin{vmatrix}A_1\,(c_0C_1+g_0G_1)\\ A_2\,(c_0C_2+g_0G_2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.\quad(7{,}22)$$

При исследовании резонансных режимов на высшей или низшей гармонике (или близких к ним) амплитуда высшей или низшей гармоники может быть не только соизмерима с амплитудой первой гармоники, но и значительно превосходить ее.

В этом случае метод последовательных приближений неприменим, и необходимо в каждом конкретном случае изыскивать наименее трудоемкий путь для решения и исследования системы трансцендентных уравнений (или алгебраических уравнений высоких степеней).

Метод пригоден при любой форме воздействующей на схему э. д. с.

Вкратце рассмотрим основы метода коллокаций (метода подстановок). Он отличается от метода гармонического баланса лишь способом получения алгебраических (или трансцендентных) уравнений для определения амплитуд (и фаз) отдельных гармоник.

В методе коллокаций предполагается, что ограниченным числом тригонометрических функций с неизвестными амплитудами (и фазами) можно точно удовлетворить нелинейному дифференциальному уравнению в стольких точках внутри одного полупериода основной частоты, сколько неизвестных амплитуд (и фаз) входит во взятое решение. Например, если решение берется в виде суммы первой и третьей гармоник, то можно потребовать, чтобы это решение удовлетворяло нелинейному уравнению при каких-то четырех конкретных значениях ωt, например при $\omega t = 0$, 45, 90 и 135°.

Подстановка в нелинейное дифференциальное уравнение предполагаемого решения при одном значении ωt, например при $\omega t = 0$, дает одно алгебраическое (или трансцендентное) уравнение относительно искомых амплитуд (и фаз). Подстановка при другом значении ωt дает новое уравнение и т. д.

При подстановке предполагаемого решения в исходное уравнение высшими гармониками (например, 5, 7-й и т. д.), выявившимися при подстановке, в методе коллокаций не пренебрегают.

Естественно, что в методе коллокаций решение зависит от того, какие значения ωt взяты при составлении уравнений.

В заключение необходимо подчеркнуть, что рассматриваемый метод пригоден для анализа таких относительно сложных явлений, как резонанс на высших, низших и дробных гармониках (см. § 8,20; 17,4 и 19,2).

§ 7,16. Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования в. а. х. для действующих значений

Графический или аналитический расчет этим методом проводится путем использования в. а. х. НС для действующих значений, полученных расчетным или опытным путем.

Принимается, что в действительности несинусоидально изменяющиеся токи и напряжения могут быть заменены их эквива-

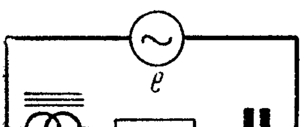


Рис. 86.

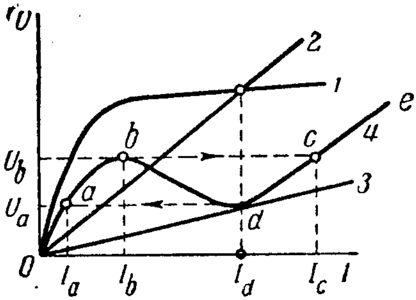


Рис. 87.

лентными синусоидальными величинами (эквивалентность в смысле действующего значения).

Все этапы расчета рассматриваемым методом полностью совпадают с перечисленными в § 7,13 этапами графического расчета по методу первой гармоники. Однако в данном методе используется в. а. х. не для первых гармоник, а для действующих значений.

Метод позволяет изучать некоторые свойства нерезонансных электрических цепей, например эффект усиления мощности в магнитном усилителе. Для исследования свойств резонансных нелинейных цепей метод пригоден в ограниченной степени. Так, им можно исследовать триггерный эффект на первой гармонике (см. ниже), но нельзя исследовать более тонкие явления, например резонанс на высшей гармонике.

§ 7,17. Триггерный эффект на первой гармонике в последовательной феррорезонансной цепи

К источнику синусоидальной э. д. с. присоединены нелинейная индуктивность L, линейное активное сопротивление R и линейная емкость C (рис. 86).

В. а. х. нелинейной индуктивности $U_L = f(I)$ представлена кривой *1* (рис. 87), в. а. х. емкости $U_C = f(I)$ — прямой *2* и в. а. х. активного сопротивления $U_R = f(I)$ — прямой *3*.

Точки, принадлежащие результирующей в. а. х. схемы — кривой *4*, получаем следующим образом: произвольно задаемся некоторым током I, находим для него разность напряжений $U_L - U_C$ (напряжения на индуктивности и емкости находятся в противофазе) и напряжение U_R. Результирующее напряжение U равно гипотенузе треугольника, построенного на катетах U_R и $U_L - U_C$.

При сравнительно малом активном сопротивлении цепи результирующая в. а. х. имеет N-образную форму. С увеличением R падающий участок на в. а. х. исчезает.

При плавном (с нуля) увеличении напряжения источника э. д. с. изображающая точка на рис. 87 будет перемещаться по кривой *4*. Сначала движение будет происходить от точки 0 через точку a к точке b. При $U = U_b$ произойдет скачок в точку c. При дальнейшем увеличении напряжения движение будет происходить от точки c к e и далее.

При уменьшении напряжения изображающая точка будет перемещаться от точки e через c к d. Из точки d произойдет скачок в точку a и далее от a к 0.

При скачке из точки b в точку c резко меняется угол между первой гармоникой тока в цепи и напряжением источника э. д. с. В точке b ток отстает от напряжения ($U_L > U_C$), в точке c ток опережает напряжение ($U_C > U_L$).

Если на схему (рис. 86) подать напряжение U, величина которого находится в интервале между U_b и U_a, то в схеме установится один из двух возможных режимов. Первый режим соответствует нахождению рабочей точки на участке между точками a и b, второй — на участке между точками c и d. На каком из двух участков окажется рабочая точка, — это зависит от характера переходного процесса в схеме при подключении ее к источнику э. д. с.

Триггерный эффект в схеме (рис. 86) при плавном увеличении амплитуды входного напряжения U_m, но неизменных частоте ω, емкости C и сопротивлении R был рассмотрен выше путем использования в. а. х. по действующим значениям. Качественно к таким же результатам можно придти, применяя и иные методы анализа.

В схеме рис. 86 триггерный эффект может наблюдаться и при других условиях, например при плавном изменении частоты и неизменных R, C, U_m.

Рассмотрим триггерный эффект в схеме при плавном изменении частоты, пользуясь методом гармонического баланса по первой гармонике. В уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = U_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (m)$$

вместо потокосцепления ψ подставим $\frac{wS\beta B_m}{\beta}\sin\omega t$, где w — число витков катушки, а S — площадь поперечного сечения тороидального сердечника.

Выразим зависимость $B = f(H)$ уравнением (6,14) и, исходя из закона полного тока и формулы (6,2), заменим ток i его первой гармоникой

$$\frac{2\alpha l}{w}\left[-jJ_1(j\beta B_m)\right]\sin\omega t.$$

Здесь l длина средней магнитной линии сердечника.

После разбивки уравнения (m) на два (на синусные и косинусные составляющие), возведения их в квадрат, сложения и введения дополнительных обозначений получим

$$\left\{\omega a\beta B_m - \frac{b}{\omega}\left[-jJ_1(j\beta B_m)\right]\right\}^2 + \left[-jJ_1(j\beta B_m)\right]^2 = c^2, \qquad (n)$$

где

$$a = \frac{w^2 S}{2\alpha l\beta R},\quad b = \frac{1}{RC},\quad c = \frac{wU_m}{2\alpha lR}.$$

Не приведенный здесь анализ уравнения (n) показывает, что в определенной области значений коэффициентов a, b, c зависимость амплитуды первой гармоники магнитной индукции от частоты $\beta B_m = f(\omega)$ имеет N-образную форму (рис. 88).

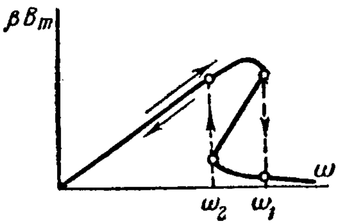


Рис 88.

С увеличением ω триггерный эффект происходит при частоте ω_1, а при уменьшении ω — при частоте ω_2.

Кривые $\beta B_m = f(\omega)$ можно рассматривать как резонансные кривые — аналог резонансных кривых линейного колебательного контура.

§ 7,18. Применение линейных схем замещения для расчета нелинейных цепей, находящихся под воздействием относительно большой постоянной э. д. с. и малой переменной э. д. с.

Этот метод применим к расчету нелинейных электрических цепей, на которые воздействует постоянная и синусоидально меняющаяся э. д. с., если переменные составляющие токов и напряжений относительно малы.

При этих условиях участок вольт-амперной (вебер-амперной, кулон-вольтной) характеристики, по которой перемещается изображающая точка в установившемся режиме, может быть заменен отрезком прямой. Замена рабочего участка прямой линией дает возможность составить для переменной составляющей схему замещения, содержащую только линейные элементы.

В этом методе расчет постоянной и переменной составляющих тока производится отдельно.

Расчет постоянной составляющей тока дает возможность найти рабочую точку на характеристике, в окрестности которой перемещается изображающая точка.

Параметры схемы замещения для переменной составляющей тока зависят от величины постоянной составляющей тока.

Последовательность расчета:

1. Определяют положение рабочей точки на характеристике нелинейного сопротивления по постоянному току. В окрестности этой точки будет перемещаться изображающая точка под воздействием малой переменной э. д. с.

2. В рабочей точке по постоянному току проводят касательную к характеристике нелинейного сопротивления и производят замену участка характеристики нелинейного сопротивления отрезком касательной.

3. Составляют линейную схему замещения для расчета переменной составляющей. Вид схемы зависит от характера нелинейного сопротивления, а ее параметры — от величины тангенса угла, составленного касательной к характеристике и одной из осей координат.

Схема замещения полупроводникового триода для малой переменной составляющей дана на рис. 89, *б*, для трехэлектродной лампы — на рис. 94, *б* и *в*. Пример на данный метод см. в § 7,22.

Метод применяется в радиотехнике при расчете схем с полупроводниковыми триодами и электронными лампами, а также в промышленной электронике при расчете фильтров, использующих индуктивные катушки со стальными сердечниками.

§ 7,19. Связь между приращениями входных и выходных величин для полупроводникового триода

Напряжение на входных зажимах триода (назовем его для общности u_1) и напряжение на выходных зажимах u_2 являются функциями входного i_1 и выходного i_2 токов триода, т. е.

$$u_1 = U_1(i_1, i_2); \tag{7,23}$$

$$u_2 = U_2(i_1, i_2). \tag{7,24}$$

Запись $u_1 = U_1(i_1, i_2)$ свидетельствует, что u_1 есть функция двух переменных (i_1 и i_2). Условимся исходные значения токов и напряжений обозначать большими буквами U, I, а приращения — через Δu и Δi. Пусть токи получили малые приращения Δi_1 и Δi_2 и стали равными $(I_1 + \Delta i_1)$ и $(I_2 + \Delta i_2)$. При этом напряжения также получили приращения и стали равными $(U_1 + \Delta u_1)$ и $(U_2 + \Delta u_2)$.

Следовательно,

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1\,[(I_1 + \Delta i_1),\ (I_2 + \Delta i_2)]; \tag{7,25}$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2\,[(I_1 + \Delta i_1),\ (I_2 + \Delta i_2)]. \tag{7,26}$$

Найдем связь между приращениями напряжений Δu_1 и Δu_2 и приращениями токов Δi_1 и Δi_2. С этой целью разложим правые части равенств (7,25) и (7,26) в ряд Тейлора для функции от двух переменных по степеням приращений Δi_1 и Δi_2 и воспользуемся тем, что ввиду малости приращений можно пренебречь слагаемыми, содержащими Δi_1 и Δi_2 в степенях выше первой.

Получим

$$U_1 + \Delta u_1 = U_1(I_1, I_2) + \Delta i_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2};$$

$$U_2 + \Delta u_2 = U_2(I_1, I_2) + \Delta i_1 \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} + \Delta i_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2}.$$

Здесь

$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2}$ — частная производная U_1 по току i_1, в которую подставлены значения I_1 и I_2, определяющие исходные значения токов (до получения приращений);

$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2}$ — частная производная U_1 по i_2, в которую подставлены значения I_1 и I_2.

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{11}, \left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{12};$$

$$\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{21}, \left(\frac{\partial U_2}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{22}.$$

Обратим внимание на то, что $\left(\frac{\partial U_2}{\partial i_1}\right)_{I_1, I_2} = R_{21}$ не равно $\left(\frac{\partial U_1}{\partial i_2}\right)_{I_1, I_2} = R_{12}$.

Значения R_{11}, R_{12}, R_{21} и R_{22} могут быть найдены графически из характеристик полупроводникового триода, поэтому в дальнейшем будем полагать их известными. Если из уравнения (7,25) вычесть уравнение (7,24), а из уравнения (7,26) — уравнение (7,23) и затем частные производные заменить соответственно на R_{11}, R_{12} R_{21}, R_{22}, то получим

$$\Delta u_1 = R_{11}\Delta i_1 + R_{12}\Delta i_2; \tag{7,27}$$

$$\Delta u_2 = R_{21}\Delta i_1 + R_{22}\Delta i_2. \tag{7,28}$$

Формулы (7,27) и (7,28) связывают малые приращения токов Δi_1 и Δi_2 с малыми приращениями напряжений Δu_1 и Δu_2. Из формул следует, что по отношению к малым приращениям триод, являющийся управляемым нелинейным сопротивлением, можно заменить эквивалентной линейной схемой замещения.

§ 7,20. Схема замещения полупроводникового триода для малых приращений при низких частотах

В специальной литературе по полупроводниковым триодам в схемы замещения триодов для малых приращений вводят не сопротивления R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, о которых шла речь выше, а некоторые расчетные сопротивления — сопротивление базы $R_б$, сопротивление коллектора $R_к$, сопротивление эмиттера $R_э$ и некоторый расчетный источник э. д. с., величина э. д. с. которого равна произведению тока управляющей цепи на расчетное сопротивление R_m.

Значения $R_б$, $R_э$, $R_к$, R_m определяются через R_{11}, R_{12}, R_{21} и R_{22}.

Рассмотрим схему замещения триода, когда общим электродом является база (рис. 89, *а*). Входным током в ней является ток i_1, равный току эмиттера $i_1 = i_э$; выходным током — i_2, равный току коллектора (взятому с обратным знаком) $i_2 = -i_к$ (положительное направление для тока i_2 принято противоположным положительному направлению тока $i_к$ на рис. 5, *а*). Схема рис. 89, *б* заменяет схему рис. 5, *а* для малых приращений. По второму закону Кирхгофа составим уравнения для двух контуров схемы рис. 89, *б*:

$$\Delta u_1 = (R_э + R_б)\,\Delta i_1 + R_б \Delta i_2; \tag{7,29}$$

$$\Delta u_2 - R_m \Delta i_э = R_б \Delta i_1 + (R_к + R_б)\Delta i_2; \tag{7,30}$$

$$\Delta u_1 = u_{mn} = \varphi_m - \varphi_n;$$

$$\Delta u_2 = u_{pq} = \varphi_p - \varphi_q,$$

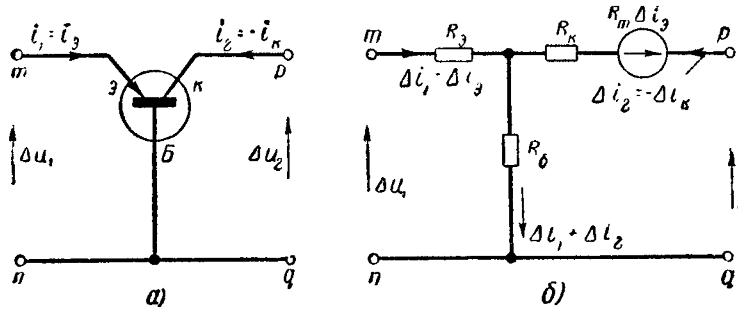


Рис. 89.

где φ_m — потенциал точки m;

φ_n — потенциал точки n и т. д.

Сопоставление уравнений (7,29) и (7,30) с уравнениями (7,27) и (7,28) дает

$$R_э + R_б = R_{11},\ R_б = R_{12};$$

$$R_m + R_б = R_{21},\ R_к + R_б = R_{22}.$$

Последние уравнения дают возможность найти сопротивления $R_б$, $R_э$, $R_к$ и R_m по известным сопротивлениям R_{11}, R_{21}, R_{12}, R_{22}. Источник э. д. с. $R_m \Delta i_э (\Delta i_э = \Delta i_1)$ введен в схему замещения (рис. 89, *б*), чтобы учесть в расчете усилительное действие триода: величина э. д. с. этого источника пропорциональна входному току.

Таким образом, при расчете малых приращений входных и выходных токов в нелинейной схеме рис. 89, *а* для определения коэффициентов усиления и входных сопротивлений для малых приращений следует произвести расчет линейной схемы рис. 89, *б*, подключив к входным зажимам mn источник малой (обычно синусоидальной) э. д. с., а к выходным зажимам pq — нагрузку $R_н$.

Расчет схем с полупроводниковыми триодами для малых приращений на практике часто производят не при помощи схем замещения, при пользовании которыми надо знать $R_э$, $R_б$, $R_к$ и R_m, а путем непосредственного использования семейств характеристик триода. Этот способ расчета иллюстрируется следующим примером.

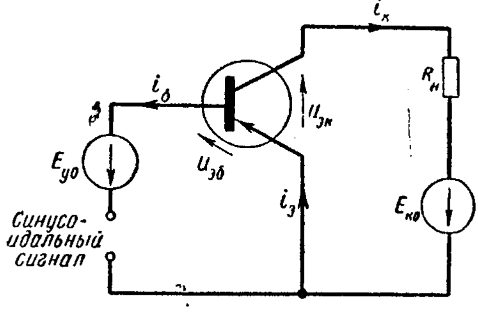


Рис. 90.

Пример. Определить коэффициенты усиления по току, напряжению и мощности схемы рис. 90, предназначенной для усиления слабых синусоидальных колебаний.

В схеме использован триод типа П14. Его входные характеристики изображены на рис. 91, а выходные — на рис. 92. Сопротивление нагрузки $R_н = 500$ *ом*. Электродвижущая сила смещения в выходной цепи $E_{ко} = 10$ *в*. Электродвижущая сила смещения в цепи управления $E_{уо} = 0{,}25$ *в*.

Решение. На рис. 92 проводим прямую, представляющую в. а. х. нагрузки. Прямая пройдет через точки $i_к = 0$, $u_{эк} = E_{ко} = 10$ *в*, $i_к = \frac{E_{ко}}{R_н} = 20$ *ма*, $u_{эк} = 0$.

Семейство входных характеристик (рис. 91) обладает той особенностью что в интервале значений $u_{эк} = 0{,}2 - 10$ *в* зависимость тока базы $i_б$ от напря-

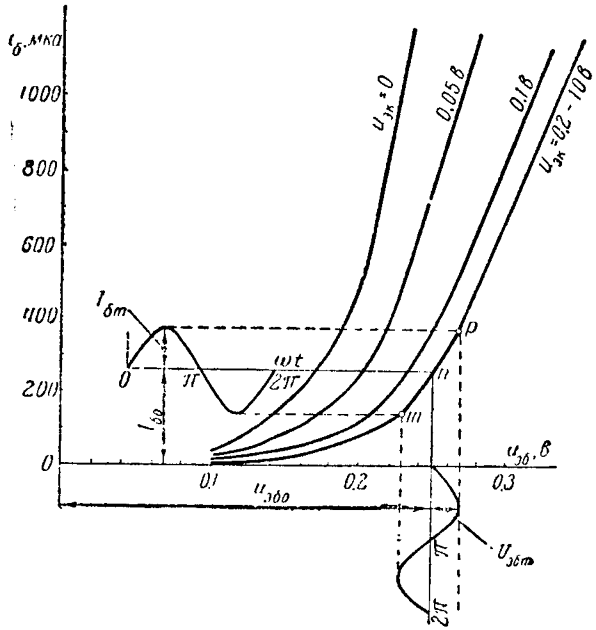
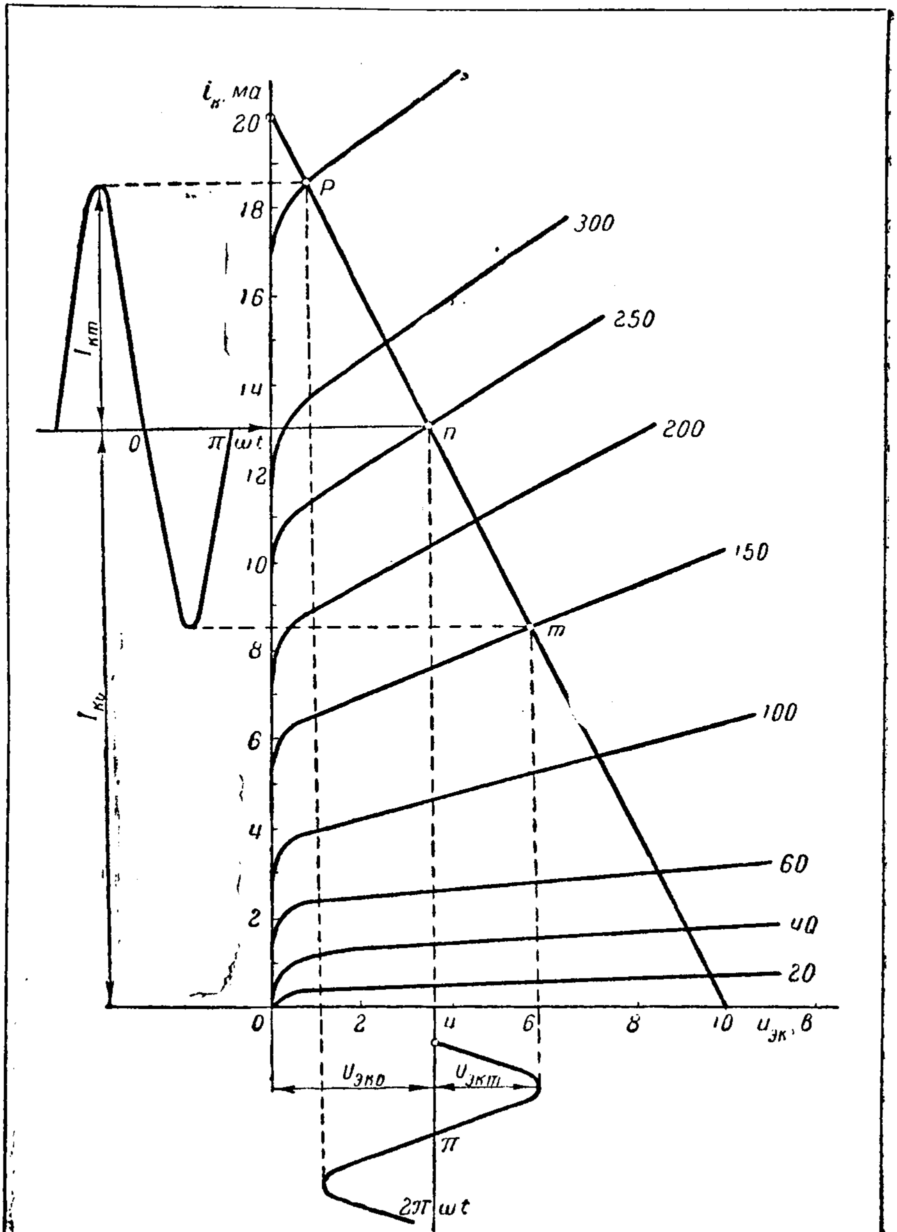


Рис. 91.



$i_к$, ма
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
P
n
m
300
250
200
150
100
60
40
20
$I_{кm}$
$I_{кu}$
0
π
ωt
2
4
6
8
10
$u_{эк}$, в
$U_{экo}$
$U_{экm}$
π
2π
ωt

Рис. 92.

жения между эмиттером и базой изображается одной и той же кривой (практически не зависит от $u_{эк}$). Найдем значение тока $i_б = I_{б0}$ при отсутствии синусоидального сигнала на входе, т. е. в режиме, когда на вход цепи управления действует только постоянная э. д. с. $E_{у0} = 0{,}25$ *в* (цепь управления замкнута через источник сигнала).

Из рис. 91 следует, что при $u_{эб} = 0{,}25$ *в* ток $i_б = I_{б0} = 250$ *мка* (точка *n*). Далее найдем ток $i_к = I_{к0}$ и напряжение $u_{эк} = U_{эк0}$ в этом режиме.

На семействе кривых (рис. 92) режим работы при $E_у = E_{у0}$ определяется точкой *n*, полученной в результате пересечения в. а. х. нагрузки с той кривой семейства $i_к = f(u_{эк})$, для которой параметром является $i_б = 250$ *мка*.

В точке *n* $i_к = I_{к0} = 13{,}1$ *ма* и $u_{эк} = U_{эк0} = 3{,}5$ *в*. Линеаризуем входную характеристику в рабочей точке. С этой целью проведем в окрестности точки *n* (рис. 91) прямую так, чтобы она на возможно большем участке совпала с касательной к кривой $i_б = f(u_{эб})$ в точке *n*. Крайними точками проведенной прямой будем считать точки *p* и *m*. В точке *p* $i_б = 350$ *мка* и $u_{эб} = 0{,}27$ *в*. В точке *m* $i_б = 100$ *мка* и $u_{эб} = 0{,}23$ *в*. Этим точкам соответствуют одноименные точки *p* и *m* на рис. 92.

В точке *p* $i_к = 18{,}6$ *ма*, в точке *m* $i_к = 8{,}6$ *ма*.

Таким образом, при подаче на вход схемы синусоидального напряжения с амплитудой $U_{эбm} = 0{,}02$ *в* в цепи управления появится синусоидальная составляющая тока с амплитудой $I_{уm} = 150$ *мка*, а в выходной цепи, кроме постоянного тока $I_{к0}$, появится синусоидальный ток с амплитудой $I_{кm} = 5$ *ма*. При этом на выходных зажимах триода будет действовать синусоидальная составляющая напряжения с амплитудой $U_{экm} = 2{,}45$ *в*.

Найдем искомые коэффициенты усиления.

Коэффициент усиления по току

$$k_i = \frac{\Delta i_{вых}}{\Delta i_{вх}} = \frac{I_{кm}}{I_{уm}} = \frac{5 \text{ ма}}{100 \text{ мка}} = 50.$$

Коэффициент усиления по напряжению

$$k_u = \frac{\Delta u_{вых}}{\Delta u_{вх}} = \frac{R_н I_{кm}}{U_{эбm}} = \frac{500 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0{,}02} = 125.$$

Коэффициент усиления по мощности

$$k_p = \frac{\Delta p_{вых}}{\Delta p_{вх}} = \frac{R_н I_{кm}^2}{U_{эбm} I_{уm}} = \frac{500\,(5 \cdot 10^{-3})^2}{0{,}02 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 6250.$$

Входное сопротивление триода между зажимами эмиттер — база для синусоидальной составляющей равно

$$R_{вх.эб} = \frac{U_{эб\,m}}{I_{уm}} = \frac{0{,}02 \text{ в}}{100 \text{ мка}} = 200 \text{ ом}.$$

Выходное сопротивление между зажимами эмиттер — коллектор для синусоидальной составляющей равно

$$R_{вых.эк} = \frac{U_{эк\,m}}{I_{кm}} = \frac{2{,}45 \text{ в}}{5 \text{ ма}} = 490 \text{ ом}.$$

В тепловом отношении триод работает в ненапряженных условиях, так как мощность, выделяемая в самом триоде в режиме, соответствующем точке *n* (рис. 92), равна

$$U_{эк0} I_{к0} = 3{,}5 \text{ в} \cdot 13{,}1 \text{ ма} = 45{,}8 \text{ мвт},$$

что значительно меньше допустимой для данного триода мощности рассеяния 150 *мвт*.

§ 7,21. Схема замещения полупроводникового триода для малых приращений при высоких частотах и при быстро протекающих переходных процессах

Схема замещения триода для малых приращений (рис. 89, *б*) пригодна только для низких частот, поскольку она не описывает емкостные свойства коллекторного и эмиттерного переходов, в которых имеются объемные заряды, и инерционность основных носителей, распространяющихся в направлении от эмиттера к коллектору за счет диффузии.

Схема замещения триода с общей базой для высоких частот изображена на рис. 93. На этой схеме в отличие от схемы рис. 89, *б* вместо источника э. д. с. $R_m \Delta i_э$, включенного последовательно с сопротивлением $R_к$, введен источник тока $\alpha\Delta\dot{I}_к$ (шунтирующий сопротивление $R_к$), емкость $C_к$ коллекторного перехода и емкость $C_э$ эмиттерного перехода.

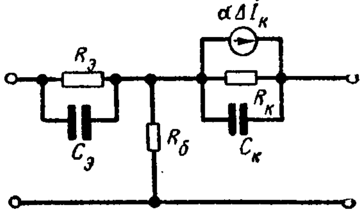


Рис. 93.

Источник тока $\alpha\Delta\dot{I}_к$ учитывает усилительные свойства триода и их изменение в функции от частоты ω.

Экспериментально и теоретически установлено [Л. 109], что коэффициент усиления триода α для синусоидального тока частоты ω может быть приближенно выражен формулой*

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}. \qquad (a)$$

Здесь α_0 — коэффициент усиления триода на постоянном токе;
ω_0 — угловая частота, при которой модуль коэффициента усиления становится меньше α_0 в $\sqrt{2}$ раз ($\omega_0 = R_к C_к$).

Выражение (*а*) приближенно справедливо при $\omega \leqslant \omega_0$. В обычных типах триодов емкости $C_к$ и $C_э$ равны примерно 7 — 50 *пф*. Величины этих емкостей зависят от многих факторов, в том числе и от напряжения на *p-n*-переходе. Поскольку $R_э$ значительно меньше $R_к$, емкость $C_э$, шунтирующую относительно малое сопротивление $R_э$, обычно не учитывают.

Схема замещения триода с общей базой для расчета быстро протекающих переходных процессов повторяет схему рис. 93

* Эта формула для весьма высоких частот, например для видеочастот, несправедлива.

с тем отличием, что коэффициент усиления принимается равным

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \qquad (б)$$

и не ставятся точки над приращениями токов*.

Формула (*б*) получена из формулы (*а*) путем замены $j\omega$ на оператор p.

§ 7,22. Связь между приращениями входных и выходных величин электронной лампы для малых приращений

Как уже говорилось в § 7,19, анодный ток $i_а$ является функцией не только анодного, но и сеточного напряжения: $i_а = I_а(u_а,\ u_с)$. Если по отношению к некоторому исходному состоянию ($U_а$, $U_с$) сеточное напряжение получит небольшое приращение $\Delta u_с$, то оно вызовет приращения анодного напряжения $\Delta u_а$ и анодного тока $\Delta i_а$.

Если проделать выкладки, аналогичные выкладкам § 7,19, то получим

$$\Delta i_а = \Delta u_а \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с} + \Delta u_с \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а,\ U_с}.$$

Частную производную $\left(\frac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с}$, в которую подставлены значения $U_а$ и $U_с$, соответствующие исходному состоянию, принято обозначать g_i и называть внутренней проводимостью электронной лампы (проводимость между анодом и катодом):

$$g_i = \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с}. \qquad (7,31)$$

Величину R_i, обратную g_i, называют внутренним сопротивлением лампы (сопротивление между анодом и катодом):

$$R_i = \frac{1}{g_i}. \qquad (7,32)$$

Частную производную $\left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а,\ U_с}$, подсчитанную при исходных значениях $U_а$ и $U_с$, называют крутизной характеристики лампы и обозначают буквой S:

$$S = \left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а,\ U_с}. \qquad (7,33)$$

S имеет размерность проводимости; g_i и S зависят от вида характеристик лампы и величин исходных напряжений $U_а$ и $U_с$.

* В соответствии с символикой комплексного метода точка над какой-либо величиной свидетельствует о том, что эта величина во времени изменяется синусоидально.

Отношение S к g_i называют коэффициентом усиления лампы и обозначают буквой μ:

$$\mu = \frac{S}{g_i} = \frac{\left(\frac{\partial I_а}{\partial u_с}\right)_{U_а,\ U_с}}{\left(\frac{\partial I_а}{\partial u_а}\right)_{U_а,\ U_с}}. \tag{7,34}$$

Коэффициент усиления показывает, во сколько раз $\Delta u_с$ окажется более эффективным, чем $\Delta u_а$ в отношении получения одинакового приращения $\Delta i_а$. С учетом сказанного формула для $\Delta i_а$ запишется следующим образом:

$$\Delta i_а = \Delta u_а g_i + \Delta u_с S \tag{7,35}$$

или

$$\Delta u_а = R_i \Delta i_а - \mu \Delta u_с. \tag{7,36}$$

§ 7,23. Схема замещения электронной лампы для малых приращений

На рис. 94, *а* большими буквами $U_н$, $U_а$, $U_с$, $I_а$ обозначены постоянные составляющие напряжений и тока, соответствующие исходному состоянию схемы (до получения приращения сеточного напряжения). Напряжения и ток, обозначенные через $\Delta u_с$, $\Delta u_а$, $\Delta i_а$, представляют собой приращения соответствующих величин*. Положительные направления для приращений те же, что и для исходных напряжений и токов.

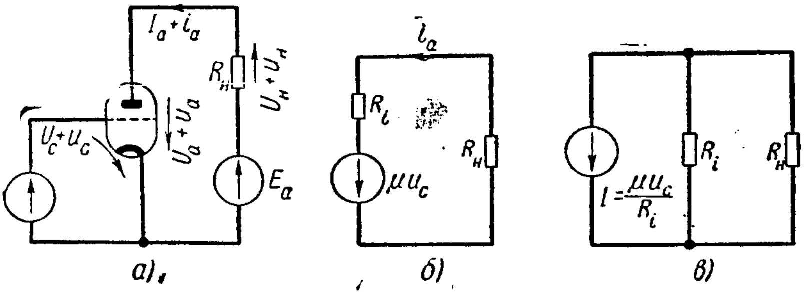


Рис. 94.

Составим уравнение для приращений напряжений в анодной цепи, вызванных приращением напряжения $\Delta u_с$ на сетке лампы. С этой целью составим два уравнения по второму закону Кирхгофа для анодной цепи. Одно из них для режима до получения приращений $U_а + U_н = E$, другое — для режима после получения приращений $U_а + \Delta u_а + U_н + \Delta u_н = E$. Если в последнем уравнении $U_а + U_н$ заменить на E, то получим

*На рис. 94 буква Δ отсутствует.

$$\Delta u_а + \Delta u_н = 0, \qquad (7,37)$$

где $\Delta u_а$ — приращение напряжения между анодом и катодом лампы; $\Delta u_н$ — приращение напряжения на нагрузке $R_н$.

В уравнение (7,37) вместо $\Delta u_н$ подставим $R_н \Delta i_а$ и вместо $\Delta u_а$ в соответствии с уравнением (7,36) подставим $R_i \Delta i_а - \mu \Delta u_с$.

Получим

$$(R_н + R_i)\,\Delta i_а = \mu \Delta u_с. \qquad (7,38)$$

Уравнению (7,38) отвечает схема рис. 94, *б*. В этой схеме к источнику э. д. с. $\mu \Delta u_с$ присоединены сопротивление нагрузки $R_н$ и внутреннее сопротивление электронной лампы R_i. Таким образом, для малых приращений анодная цепь электронной лампы замещается (имитируется) источником э. д. с. $\mu \Delta u_с$ и включенным последовательно с ним сопротивлением R_i. Электродвижущая сила источника э. д. с. пропорциональна изменению напряжения на сетке лампы.

На рис. 94, *б* изображена другая часто используемая схема замещения. В ней вместо источника э. д. с. включены источник тока $\frac{\mu \Delta u_с}{R_i}$ и шунтирующее его сопротивление R_i.

Пример. Между сеткой и катодом триода 6С2С приложено напряжение $U_с + \Delta u_с = U_с + U_{cm} \sin \omega t = -2 + 0{,}05 \sin \omega t$ (рис. 94, *а*). Зависимость анодного тока $i_а$ от анодного напряжения $u_а$ при параметре $u_с$ изображена на рис. 95. Электродвижущая сила $E_а = 150$ *в*, $R_н = 15$ *ком*. Найти параметры схемы замещения триода и определить при помощи этой схемы амплитуду синусоидальной составляющей тока в анодной цепи.

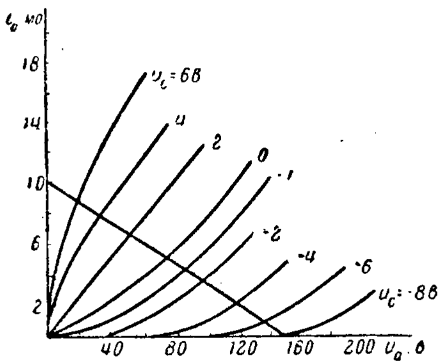


Рис. 95.

Решение. Определяем положение рабочей точки на характеристиках лампы по постоянному току. С этой целью на рис. 95 наносим прямую, характеризующую нагрузочное сопротивление анодной цепи $R_н$ (ее часто называют нагрузочной прямой).

Прямая проходит через точки $i_а = 0$, $u_а = 150$ *в*, $i_а = \frac{E_а}{R_н} = 10$ *ма*, $u_а = 0$. Рабочей точкой в рассматриваемом режиме будет точка пересечения прямой с той кривой семейства, для которой параметр $U_с = -2$ *в*. Координаты этой точки $u_а = 94$ *в* и $i_а = 3{,}67$ *ма*. По определению g_i (см. формулу 7,31) для нахождения ее следует, считая за исходное положение найденную выше рабочую точку, при неизменном $u_с = -2$ *в* дать приращение анодному напряжению $\Delta u_а$, найти соответствующее ему приращение анодного тока $\Delta i_а$ и поделить $\Delta i_а$ на $\Delta u_а$:

$$g_i = \frac{\partial i_а}{\partial u_а} \approx \frac{\Delta i_а}{\partial u_а} = \frac{5\,ма}{50\,в} = 10^{-4}\,\frac{1}{ом}, \qquad R_i = \frac{1}{g_i} = 10^4\,ом;$$

g_i пропорциональна тангенсу угла наклона касательной в рабочей точке к кривой $i_а = f(u_а)$, для которой $u_с = -2$ *в*. Для определения крутизны характеристики S при $u_а = 94$ *в* = const задаемся приращением сеточного напряжения $\Delta u_с = -1 - (-2) = 1$ *в* и из рисунка находим соответствующее ему приращение $\Delta i_а = 5{,}37 - 3{,}67 = 1{,}7$ *ма*. Следовательно,

$$S = \frac{\partial i_а}{\partial u_с} \approx \frac{\Delta i_а}{\Delta u_с} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\ а/в.$$

Коэффициент усиления

$$\mu = \frac{S}{g_i} = 17.$$

Амплитуда синусоидальной составляющей тока в анодной цепи

$$I_{1m} = \frac{\mu U_{cm}}{R_н + R_i} = 3{,}39 \cdot 10^{-5}\ а.$$

Анодный ток

$$I_а + \Delta i_а = 3{,}67 + 0{,}0339 \sin \omega t\ ма.$$

§ 7,24. Расчет электрических цепей, находящихся под воздействием большой постоянной э. д. с. и относительно малой переменной э. д. с. с учетом гистерезисных явлений

В данном параграфе рассмотрим вопрос о нахождении параметров схемы замещения нелинейной индуктивности с учетом того, что на эти параметры существенное влияние оказывает гистерезис. Все сказанное здесь с небольшими изменениями применимо и к другим нелинейным сопротивлениям, в которых наблюдаются гистерезисные явления, в частности к варикондам.

Определение параметров схемы замещения рассмотрим на примере расчета индуктивной катушки, сглаживающей пульсации выпрямленного тока в трехфазной выпрямительной схеме.

В цепь выпрямленного тока трехфазного выпрямителя (рис. 96) включены нагрузка $R_н$ и индуктивность $L_н$. Выпрямлен-

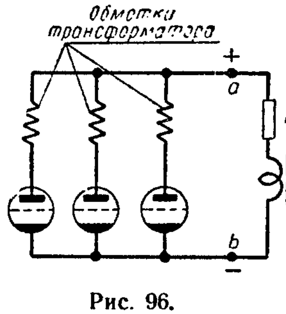


Рис. 96.

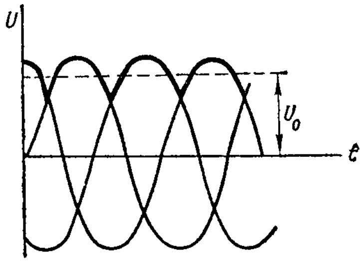


Рис. 97.

ное напряжение (зажимы a и b) изменяется в соответствии с жирно нанесенной кривой рис. 97. Это напряжение имеет постоянную составляющую U_0 и высшие гармоники, из которых основной является третья. Назначение $L_н$ в том, чтобы оказать возможно большее сопротивление переменной составляющей выпрямленного тока.

Через $L_н$ протекает большой постоянный ток $I_0 = \frac{U_0}{R_н}$, являющийся основным рабочим током в цепи, и небольшой по сравнению с ним переменный ток $I_\sim$.

Чтобы увеличить индуктивное сопротивление катушки, сердечник ее выполняют из ферромагнитного материала. В отличие от большинства других ферромагнитных устройств здесь оказывается выгодным сделать в сердечнике небольшой воздушный зазор.

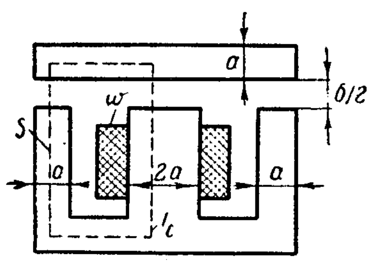


Рис. 98.

На рис. 98 изображен эскиз индуктивной катушки. Длину магнитного пути в стали обозначим l_c, длину воздушного зазора $\frac{\delta}{2}$, площадь поперечного сечения среднего стержня S, число витков катушки w. Сердечник выполнен из трансформаторной стали.

Если напряженность поля имеет постоянную составляющую H_0 и малую переменную составляющую $H_m \sin 3\omega t$, то изображающая точка перемещается по частному гистерезисному циклу (рис. 99). В расчетном отношении его можно заменить прямой me.

Тангенс угла наклона me к оси абсцисс с учетом масштабов по осям численно равен реверсивной магнитной проницаемости

$$\mu_r = \operatorname{tg} \alpha.$$

Переменные составляющие индукции и напряженности поля связаны через μ_r:

$$B_\sim = \mu_r H_\sim,$$

где μ_r — функция постоянной составляющей напряженности поля H_0 (рис. 100).

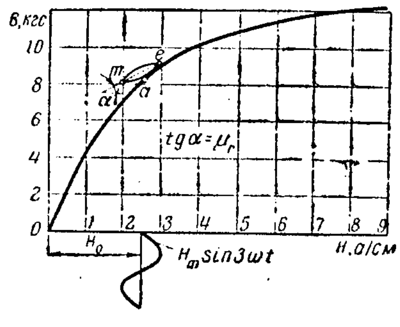


Рис. 99.

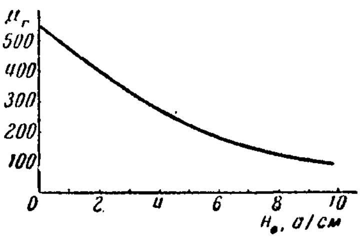


Рис. 100.

Индуктивность $L_\sim$ для переменной составляющей равна отношению переменной составляющей потокосцепления $\psi_\sim$ к переменной составляющей тока $I_\sim$, протекающего через катушку:

$$L_\sim = \frac{\psi_\sim}{I_\sim} = \frac{w\Phi_\sim}{I_\sim}.$$

Но по закону Ома для магнитной цепи

$$\Phi_\sim = \frac{wI_\sim}{R_м}.$$

Магнитное сопротивление цепи $R_м$ равно сумме магнитного сопротивления стали $R_{мс}$ и магнитного сопротивления воздушного пути $R_{мв}$:

$$R_м = R_{мс} + R_{мв};$$

$$R_м = \frac{l_с}{\mu_0\mu_r S} + \frac{\delta}{\mu_0 S},$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

Следовательно,

$$L_\sim = \frac{w\Phi_\sim}{I_\sim} = \frac{w^2}{\dfrac{l_с}{\mu_0\mu_r S} + \dfrac{\delta}{\mu_0 S}} = \frac{w^2\mu_0 S}{l_с\left(\dfrac{1}{\mu_r} + \dfrac{\delta}{l_с}\right)}.$$

Если w, S и $l_с$ неизменны, то $L_\sim$ достигает максимума, когда множитель $\left(\frac{1}{\mu_r} + \frac{\delta}{l_с}\right)$, в котором оба слагаемых являются функцией величины зазора δ, минимален.

Действующее значение k-й гармоники тока в цепи выпрямленного тока определяем в соответствии с линейной схемой замещения (рис. 101):

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R_н^2 + (k\omega L_\sim)^2}}.$$

Здесь U_k — k-я гармоника напряжения на зажимах a и b схемы (рис. 101).

В схеме трехфазного выпрямителя достаточно подсчитать переменную составляющую тока от одной третьей гармоники.

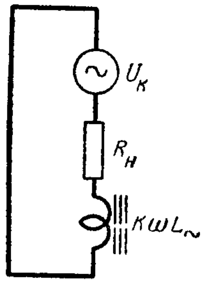


Рис. 101.

Пример. Для схемы рис. 96 $U_0 = 114{,}26$ *в*. Действующее значение третьей гармоники напряжения $U_3 = 20{,}3$ *в*, $R_н = 114{,}2$ *ом*.

Данные индуктивной катушки: $w = 863$, $l_с = 16$ *см*, $S = 8$ *см*^{2}. Зависимости $B = f(H_0)$ и $\mu_r = f(H_0)$ изображены на рис. 99 и 100. Определить, при каком зазоре δ катушка будет обладать наибольшим индуктивным сопротивлением, и найти переменный ток в цепи при этих условиях.

Решение. Подсчитаем величину постоянного тока:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_н} = 1\ a.$$

Найдем постоянную составляющую м. д. с.:

$$I_0 w = 863\ a.$$

Определим минимум функции:

$$\frac{1}{\mu_r} + \frac{\delta}{l_c} = f(\delta).$$

С этой целью произвольно задаемся рядом значений H_0. Для каждого из них по кривой $B = f(H_0)$ находим постоянную составляющую магнитной индукции B_0 и подсчитываем падение магнитного напряжения на пути в стали $H_0 l_c$.

Исходя из закона полного тока

$$H_0 l_c + H_в \delta = I_0 w.$$

Но $H_в = 0{,}8\ B_0$, поэтому зазор

$$\delta = \frac{I_0 w - H_0 l_c}{0{,}8\ B_0}.$$

Далее, для каждого значения H_0 по кривой $\mu_r = f(H_0)$ находим μ_r и подсчитываем величину $\frac{1}{\mu_r} + \frac{\delta}{l_c}$.

Результаты подсчетов сведем в таблицу:

H_0, *а/см*	0,5	1	2	4	6	8	10
B_0, *гс*	2500	4500	7000	10100	11800	13000	13900
$H_0 l_c$, *а*	8	16	32	64	96	128	160
δ, *см*	0,43	0,236	0,1485	0,1	0,081	0,0707	0,0633
$\frac{1}{\mu_r} + \frac{\delta}{l_c}$	0,0287	0,01675	0,0116	0,0097	0,01047	0,0135	0,01934

Функция $\frac{1}{\mu_r} + \frac{\delta}{l_c}$ минимальна при $\delta = 0{,}1$ *см*. При этом

$$L_\sim = \frac{w^2 S \mu_0}{l_c\left(\frac{1}{\mu_r} + \frac{\delta}{l_c}\right)} = \frac{863^2 \cdot 8 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-8}}{16 \cdot 0{,}0097} = 0{,}485\ гн.$$

Действующее значение тока третьей гармоники в цепи выпрямленного тока

$$I_3 = \frac{U_3}{\sqrt{R_н^2 + (3\omega L_\sim)^2}} = 0{,}043\ a.$$

§ 7,25. Расчет нелинейных электрических цепей путем сведения их к цепям с переменными во времени параметрами

В литературе можно встретиться с расчетами, в которых нелинейные электрические цепи заменяются цепями с переменными во времени параметрами. При этом нелинейная индуктивность заменяется индуктивностью, явно зависящей от времени; нелинейная емкость — емкостью, являющейся явной функцией времени t, и т. д.

Рассмотрим, как осуществляется такого рода переход на примере нелинейной индуктивности. Напряжение на нелинейной индуктивности равно

$$u_L = \frac{d\psi}{dt}.$$

Положим, что зависимость потокосцепления ψ от тока i задана в виде кривой рис. 102:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L_{\text{дин}} \frac{di}{dt}.$$

Здесь $L_{\text{дин}} = \frac{d\psi}{di}$ — динамическая дифференциальная индуктивность. Она определяется тангенсом угла наклона касательной к кривой $\psi = f(i)$ и осью абсцисс.

Зависимость $L_{\text{дин}} = f(i)$ представлена кривой на рис. 102. Пусть ток i через нелинейную индуктивность изменяется по синусоидальному закону во времени: $i = I_m \sin \omega t$. При помощи кривой $L_{\text{дин}} = f(i)$ и кривой $i = f(\omega t)$ на том же рисунке построим зависимость $L_{\text{дин}} = f(\omega t)$. Как видно из рисунка, $L_{\text{дин}}$ является периодической функцией и потому может быть представлена рядом Фурье, состоящим из постоянной составляющей и четных гармоник:

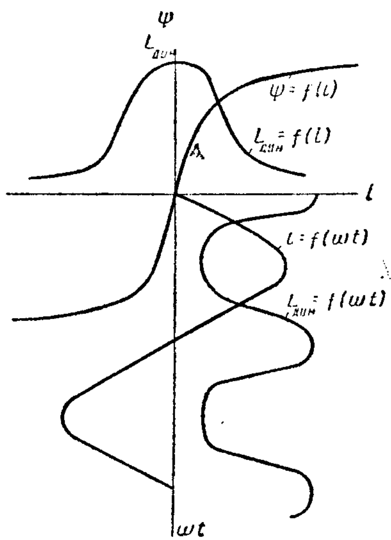


Рис. 102.

$$L_{\text{дин}} = L_0 + L_2 \cos 2\omega t + $$
$$+ L_4 \cos 4\omega t + \ldots$$

Если L_4 мала по сравнению с L_2, то в первом приближении

$$L_{\text{дин}} = L_0 (1 + m \cos 2\omega t),$$

где $m = \frac{L_2}{L_0}$.

Таким образом, если кривая тока симметрична относительно оси времени, то частота первой гармоники $L_{\text{дин}}$ в два раза больше частоты первой гармоники тока. Когда кривая $i = f(t)$ несимметрична относительно оси времени, $L_{\text{дин}}$ содержит и четные и нечетные гармоники.

Обратим внимание на то, что L_0, L_2, L_4 в общем случае являются нелинейными функциями амплитуд первой и высших гармоник тока и зависят от начальных фаз этих гармоник. Другими словами, $L_0 = f_0(I_{1m}, I_{3m}, \psi_0 \ldots)$, $L_2 = f_2(I_{1m}, I_{3m}, \psi_1 \ldots)$. Если зависимость $\psi = f(i)$ представить аналитически, задавшись

$i = f(\omega t)$, то нетрудно найти зависимость функций f_0, f_2 ... от амплитуд и фаз гармоник тока. После того как будет найдена $L_{дин}$, в уравнение цепи подставляют $L_{дин}\frac{di}{dt}$ вместо u_L и дальнейший расчет цепи производят методом гармонического баланса.

В заключение остановимся на том, насколько обоснованной при качественном и количественном исследованиях периодических процессов различных нелинейных систем является замена нелинейных индуктивности и емкости соответственно линейными индуктивностью и емкостью, изменяющимися во времени.

С этой целью сопоставим выражение для напряжения на нелинейной индуктивности

$$u_L = L_{дин}(i)\frac{di}{dt},$$

в котором заменим $L_{дин}(i)$ на $L_{дин}(t)$ $\left(u_L = L_{дин}(t)\frac{di}{dt}\right)$, с выражением для напряжения на линейной индуктивности, изменяющейся в функции времени:

$$u_L = \frac{d}{dt}[L(t)\,i] = i\frac{dL(t)}{dt} + L(t)\frac{di}{dt}.$$

Второе слагаемое напряжения на линейной индуктивности формально можно сопоставить с выражением напряжения на нелинейной индуктивности. Но при этом надо учитывать, что постоянные составляющие, амплитуды и фазы гармоник $L_{дин}(t)$ являются нелинейными функциями амплитуд гармоник тока. Для линейной индуктивности постоянная составляющая и амплитуды гармоник $L(t)$ не зависят от амплитуд гармоник тока. Кроме того, следует учесть, что напряжение на линейной индуктивности зависит не только от скорости изменения тока, но и от скорости изменения индуктивности, тогда как напряжение на нелинейной индуктивности непосредственно не зависит от скорости изменения индуктивности во времени.

В целом можно сказать, что выражение для напряжения на нелинейной индуктивности качественно отлично от выражения для напряжения на линейной индуктивности, изменяющейся во времени. Поэтому к замене нелинейной индуктивности изменяющейся во времени линейной индуктивностью, равно как и к замене нелинейной емкости изменяющейся во времени линейной емкостью (концепции эквивалентности нелинейных и автопараметрических цепей), следует относиться с известной осторожностью.

Возникает вопрос: если нелинейная цепь и родственная ей автопараметрическая цепь не эквивалентны по меньшей мере в двух отношениях (в отношении нелинейности и в отношении зависимости от скорости изменения индуктивности во времени), то почему в большинстве случаев при качественном анализе замена нелинейной индуктивности на линейную, изменяющуюся во времени, не привела к качественно неверным результатам?

Объясняется это тем, что в этих цепях может возникать много качественно сходных типов колебаний, например субгармонические колебания, колебания на дробных гармониках и многие другие типы колебаний.

Однако наличие сходных типов колебаний не дает оснований сделать заключение о том, что в цепях будут одинаковые условия возбуждения одинаковых типов колебаний, одинаковые условия устойчивости возникших колебаний, а также одинаковое влияние начальных условий на возбуждение колебаний и т. п.

§ 7,26. Применение вариационных методов В. Ритца и Б. Галеркина

При решении задач нелинейной электротехники иногда применяют методы вариационного исчисления.

Как известно, одной из задач вариационного исчисления является отыскание экстремального значения определенного интеграла:

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx. \tag{7,39}$$

Здесь x_1 и x_2 — пределы интегрирования;

$F(x,\ y,\ y')$ — некоторая известная функция от x, y, y', где $y'=\frac{dy}{dx}$.

Находим такую функцию $y=f(x)$, при которой интеграл (7,39) принимает экстремальное значение. Интеграл I является функцией от неизвестной функции $y=f(x)$ и называется функционалом. В курсе вариационного исчисления доказывается, что функция $y=f(x)$ представляет собой решение уравнения Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \tag{7,40}$$

Методика решения вариационных задач, основанная на сведении их к решению уравнения Эйлера — Лагранжа, в нелинейной электротехнике применяется редко. При решении вариационных физико-технических задач чаще применяются приближенные методы, которые называются прямыми вариационными методами. Используются два прямых метода — В. Ритца и Б. Галеркина.

В методе В. Ритца функцию $y=f(x)$, при которой имеет место экстремум функционала (7,39), находят следующим путем.

1. Полагают, что функция $y=f(x)$ может быть представлена в виде суммы линейно не зависимых друг от друга функций:

$$y=af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x)+\ \ldots \tag{7,41}$$

Видом функций $f_k(x)$ задаются исходя из тех или иных физических соображений о характере исследуемого процесса в изучаемой системе. Каждая из этих функций и их производные должны быть непрерывны в интервале от x_1 до x_2.

2. Ряд (7,41) подставляют в (7,39), после чего интеграл (7,39) будет являться функцией неизвестных коэффициентов a, b, c...

3. Коэффициенты a, b, c... определяют путем минимизации интеграла, которая дает следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial I}{\partial a} = 0; \\ &\frac{\partial I}{\partial b} = 0. \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right\} \tag{7,42}$$

Чем больше слагаемых взято в ряде (7,41), тем точнее будет решение. Наибольшее распространение метод В. Ритца нашел в теории упругости, где функционал I составляют исходя из условия минимума энергии при деформации.

В случае, когда изучаемые системы можно считать консервативными, функционал представляют в виде разности между кинетической и потенциальной энергиями изучаемой системы.

Основная трудность для применения метода В. Ритца к неконсервативным системам заключается в составлении функционала, который удовлетворял бы уравнению Эйлера — Лагранжа.

В задачах физики и техники, как правило, бывает известно уравнение, описывающее процесс. Пусть оно записывается так:

$$L(x,\ y,\ y',\ y''\ \ldots) = 0.$$

По предложению Б. Галеркина это уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера — Лагранжа. В этом случае нет необходимости составлять функционал, подлежащий минимизации. Решение методом Б. Галеркина состоит из следующих этапов:

1. Подставляют предполагаемое решение в виде ряда (7,41) в дифференциальное уравнение $L(x,\ y,\ y',\ y''\ \ldots) = 0$.

2. Коэффициенты a, b, c... при каждой из функций $f_k(x)$ определяют путем умножения $L(x,\ y,\ y',y''\ \ldots)$ на соответствующую этому коэффициенту функцию $f_k(x)$, интегрирования в пределах от x_1 до x_2 и приравнивания результатов интегрирования нулю:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} L(x,\ y,\ y',\ y''\ \ldots)\, f_1(x)\, dx = 0; \\ &\int_{x_1}^{x_2} L(x,\ y,\ y',\ y''\ \ldots) f_2(x)\, dx = 0. \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right\} \tag{7,43}$$

3. Если нужно найти периодическое решение, то ряд (7,41) целесообразно взять в виде ряда Фурье. Если бы ряд (7,41) был точным интегралом, то функция $L(x, y, y', y'' \dots)$ после подстановки в нее ряда (7,41) точно равнялась бы нулю. Нулю равнялся бы и ряд Фурье, в который могла бы быть разложена функция L. Все коэффициенты этого ряда равнялись бы нулю.

4. Поскольку практически число членов ряда не может быть взято бесконечно большим и берется всегда конечное число членов, нельзя претендовать, чтобы все коэффициенты ряда, в который разложена функция L, равнялись нулю, и можно требовать равенства нулю стольких коэффициентов ряда, сколько в этом ряде имеется неизвестных коэффициентов.

При расчете периодических процессов методом Б. Галеркина получаются точно такие же формулы, что и при расчете методом гармонического баланса.

§ 7,27. Метод наименьших квадратов

При подстановке ряда (7,41) в дифференциальное уравнение $L(x, y, y', y'' \dots) = 0$ в общем случае для каждого момента времени будет иметь место некоторая ошибка. Для одних моментов времени эта ошибка будет положительной, для других отрицательной.

Согласно методу наименьших квадратов решение уравнения $L(x, y, y', y'' \dots) = 0$ в виде ряда (7,41) будет меньше всего отличаться от истинного, если сумма квадратов ошибок на всем диапазоне интегрирования от x_1 до x_2 будет минимальна. Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2} L^2(x, y, y', y'' \dots)\,dx = 0;\\ &\frac{\partial}{\partial b}\int_{x_2}^{x_1} L^2(x, y, y', y'' \dots)\,dx = 0.\\ &\qquad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (7,44)$$

Коэффициенты a, b, c... определяются путем решения системы уравнений (7,44).

§ 7,28. Метод малого параметра

Метод малого параметра применяется главным образом для решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}). \qquad (7,45)$$

$f(x, \dot{x})$ представляет собой некоторую нелинейную функцию x и $\dot{x}$. Коэффициент μ называется малым параметром ($\mu \ll 1$).

В методе малого параметра исходят из того, что при достаточно малом μ решение уравнения (7,45) будет мало отличаться от решения уравнения

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{7,46}$$

т. е. от выражения

$$x_0 = M \cos \tau. \tag{7,47}$$

В дальнейшем под x будем понимать решение уравнения (7,45), а под x_0 — решение уравнения (7,46). Время будем обозначать через τ. Отклонение значения x от x_0 при $\tau = 0$ обозначим a, а отклонение $\dot{x}(0)$ от $\dot{x}_0(0)$ при $\tau = 0$ назовем b:

$$\left.\begin{aligned} a &= x(0) - x_0(0); \\ b &= \dot{x}(0) - \dot{x}_0(0). \end{aligned}\right\} \tag{7,48}$$

Как показал Пуанкаре, уравнение (7,45) можно решить в виде

$$x = x_0 + aA + bB + \mu C + a\mu D + b\mu E + \mu^2 F + \ldots, \tag{7,49}$$

где A, B, C, D, E, F — некоторые, пока неизвестные, функции времени.

Найдем начальные значения этих функций и их производных. С этой целью продифференцируем (7,49) по времени:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + a\dot{A} + b\dot{B} + \mu\dot{C} + a\mu\dot{D} + b\mu\dot{E} + \mu^2\dot{F} + \ldots \tag{7,49'}$$

и запишем (7,49) и (7,49′) для момента времени $\tau = 0$.

Получим

$$x(0) = x_0(0) + aA(0) + bB(0) + \mu C(0) + a\mu D(0) + \\ + b\mu E(0) + \mu^2 F(0);$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0(0) + a\dot{A}(0) + b\dot{B}(0) + \mu\dot{C}(0) + a\mu\dot{D}(0) + \\ + b\mu\dot{E}(0) + \mu^2\dot{F}(0).$$

Так как a, b, μ в общем случае не равны нулю, то из двух последних уравнений с учетом того, что $x(0) - x_0(0) = a$ и $\dot{x}(0) - \dot{x}_0(0) = b$, следует:

$$A(0) = 1, \qquad \dot{B}(0) = 1;$$

$$B(0) = C(0) = D(0) = E(0) = F(0) = 0;$$

$$\dot{A}(0) = \dot{C}(0) = \dot{D}(0) = \dot{E}(0) = \dot{F}(0) = 0.$$

Чтобы составить уравнения относительно A, B, C, D, сначала продифференцируем уравнение (7,49′) по τ:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 + a\ddot{A} + b\ddot{B} + \mu\ddot{C} + a\mu\ddot{D} + b\mu\ddot{E} + \mu^2\ddot{F} + \ldots \tag{7,49''}$$

Затем, полагая, что функция $f(x, \dot{x})$ является аналитической, разложим ее в ряд Тейлора в окрестности значений x_0 и $\dot{x}_0$ по степеням $\alpha = x - x_0$ и $\beta = \dot{x} - \dot{x}_0$:

$$f(x,\dot{x}) = f(x_0, \dot{x}_0) + \alpha\left(\frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial x^2}\right)_0 + \beta\left(\frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\right)_0 + \frac{\alpha^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,\dot{x})}{\partial x^2}\right)_0 +$$

$$+ \frac{\beta^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^2}\right)_0 + \alpha\beta\left(\frac{\partial^2 f(x,\dot{x})}{\partial x\, \partial \dot{x}}\right)_0 + \ldots \tag{7,50}$$

Индекс 0 у частных производных свидетельствует о том, что в них следует подставить значения $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Далее подставим (7,49′), (7,49″) и (7,50) в уравнение (7,45) и в соответствии с уравнениями (7,49) и (7,49′) заменим $\alpha = x - x_0$ на выражение $aA + bB + \mu C + a\mu D + b\mu E + \mu^2 F$ и $\beta = \dot{x} - \dot{x}_0$ на $a\dot{A} + b\dot{B} + \mu\dot{C} + a\mu\dot{D} + b\mu\dot{E} + \mu^2\dot{F}$.

Получим

$$\ddot{x}_0 + a\ddot{A} + b\ddot{B} + \mu\ddot{C} + a\mu\ddot{D} + b\mu\ddot{E} + \mu^2\ddot{F} + x_0 + aA + bB + \mu C +$$

$$+ a\mu D + b\mu E + \mu^2 F = \mu f(x_0, \dot{x}_0) + \mu(aA + bB + \mu C + \ldots)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 +$$

$$+ \mu(a\dot{A} + b\dot{B} + \mu\dot{C} + \ldots)\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 + (x - x_0)^2\frac{\mu}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 +$$

$$+ (\dot{x} - \dot{x}_0)\ \frac{\mu}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}\right)_0 + \ldots \tag{7,51}$$

Здесь для сокращения записи обозначено $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x}\right)_0$ и т. д.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях a, b, μ в левой и правой частях уравнения (7,51), будем иметь следующие уравнения относительно A, B, C, D...:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0; \tag{7,52}$$

$$\ddot{A} + \dot{A} = 0; \tag{7,53}$$

$$\ddot{B} + B = 0; \tag{7,54}$$

$$\ddot{C} + C = f(x_0, \dot{x}_0); \tag{7,55}$$

$$\ddot{D} + D = A\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \dot{A}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0; \tag{7,56}$$

$$\ddot{E} + E = B\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \dot{B}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0; \tag{7,57}$$

$$\ddot{F} + F = C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \dot{C}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0. \tag{7,58}$$

Уравнения (7,52—7,58) позволяют последовательно находить A, B, C, D... Уравнение (7,52) решается по формуле (7,47). Решения уравнений (7,53) и (7,54) берем следующими: $A = \cos\tau$ и $B = \sin\tau$. Уравнения (7,55) — (7,58) имеют вид

$$\ddot{z} + z = \varphi(t). \qquad (7,59)$$

Решение уравнения (7,59) при начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ запишется так:

$$z(t) = \int_0^t \varphi(u)\sin(t-u)\,du; \qquad (7,60)$$

$$\dot{z}(t) = \int_0^t \varphi(u)\cos(t-u)\,du, \qquad (7,61)$$

где u — переменная, по которой производится интегрирование.

Если в правую часть уравнения (7,55) вместо x_0 подставить $M\cos u$, а вместо $\dot{x}_0$ подставить $-M\sin u$ и воспользоваться формулами (7,60) и (7,61), заменив в них t на τ, то получим:

$$C = \int_0^\tau f(M\cos u, -M\sin u)\sin(\tau-u)\,du; \qquad (7,62)$$

$$\dot{C} = \int_0^\tau f(M\cos u, -M\sin u)\cos(\tau-u)\,du. \qquad (7,63)$$

Аналогично запишется решение уравнений (7,56), (7,57) и (7,58), причем в правых частях этих уравнений перед интегрированием вместо A следует подставить $\cos\tau$, вместо $\dot{A}$ — $(-\sin\tau)$ и т. д.:

$$D = \int_0^\tau \left[\cos u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 - \sin u\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0\right]\sin(\tau-u)\,du; \qquad (7,64)$$

$$E = \int_0^\tau \left[\sin u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \cos u\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0\right]\sin(\tau-u)\,du; \qquad (7,65)$$

$$F = \int_0^\tau \left[C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \dot{C}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0\right]\sin(\tau-u)\,du. \qquad (7,66)$$

Как уже говорилось, при достаточно малом μ искомое решение (7,49) находится вблизи решения $x_0 = M\cos\tau$, период которого равен 2π. Естественно, что если период для функции $x_0 = M\cos\tau$ равен 2π, то период для функции x в общем случае будет хотя и близок к 2π, но все же на некоторый угол (назовем его углом γ) отличен от 2π ($\gamma \ll 2\pi$).

Итак, принимаем период для x равным $2\pi+\gamma$. Угол γ пока неизвестен. Наложим условие периодичности на решение (7,49), т. е. потребуем выполнения следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi+\gamma) &= x(0); \\ \dot{x}(2\pi+\gamma) &= \dot{x}(0). \end{aligned}\right\} \tag{7,67}$$

Функции $x(2\pi+\gamma)$ и $\dot{x}(2\pi+\gamma)$ разложим в ряд по степеням γ:

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi+\gamma) &= x(2\pi)+\gamma\dot{x}(2\pi)+\frac{\gamma^2}{2!}\ddot{x}(2\pi)+\ldots \\ \dot{x}(2\pi+\gamma) &= \dot{x}(2\pi)+\gamma\ddot{x}(2\pi)+\frac{\gamma^2}{2!}\dddot{x}(2\pi)+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7,68}$$

Первое уравнение (7,67) с учетом (7,48), (7,49) и (7,68) дает

$$x_0(0)+a\approx x_0(2\pi)+aA(2\pi)+bB(2\pi)+\mu C(2\pi)+a\mu D(2\pi)+$$
$$+b\mu E(2\pi)+\mu^2F(2\pi)+\gamma\{\dot{x}_0(2\pi)+a\dot{A}(2\pi)+b\dot{B}(2\pi)+\mu\dot{C}(2\pi)\}+$$
$$+\frac{\gamma^2}{2!}\ddot{x}_0(2\pi). \tag{7,69}$$

Аналогично из второго уравнения (7,67) найдем

$$\dot{x}_0(0)+b\approx\dot{x}_0(2\pi)+a\dot{A}(2\pi)+b\dot{B}(2\pi)+\mu\dot{C}(2\pi)+a\mu\dot{D}(2\pi)+$$
$$+b\mu\dot{E}(2\pi)+\gamma\,[(\ddot{x}_0(2\pi)+a\ddot{A}(2\pi)+b\ddot{B}(2\pi)+\mu\ddot{C}(2\pi)+\ldots]+$$
$$+\frac{\gamma^2}{2!}\dddot{x}_0(2\pi). \tag{7,70}$$

Уравнения (7,69) и (7,70) можно значительно упростить. Действительно, ввиду того, что $x_0=M\cos\tau$, $x_0(0)=x_0(2\pi)=M$, $\dot{x}_0(0)=\dot{x}_0(2\pi)$, $A(2\pi)=A(0)$ и т. д.

Вместо уравнения (7,69) будем иметь уравнение (7,71), а вместо (7,70) — уравнение (7,72):

$$0=\mu C(2\pi)+a\mu D(2\pi)+b\mu E(2\pi)+\ldots \tag{7,71}$$

$$0=\mu\dot{C}(2\pi)-\gamma M+a\mu\dot{D}(2\pi)+b\mu\dot{E}(2\pi)+\ldots \tag{7,72}$$

Уравнения (7,71) и (7,72) решают методом последовательных приближений. В первом приближении пренебрегают слагаемыми второго порядка малости. Получают уравнения

$$\mu C(2\pi)=0; \tag{7,73}$$

$$\gamma M=\mu\dot{C}(2\pi). \tag{7,74}$$

Так как $\mu\neq0$, то из уравнений (7,73) и (7,74) с учетом (7,62) и (7,63) следует:

$$C(2\pi)=\int\limits_0^{2\pi}f(M\cos u,-M\sin u)\sin u\,du=0; \tag{7,73'}$$

$$\gamma=\frac{\mu}{M}\dot{C}\,(2\pi)=\frac{\mu}{M}\int\limits_0^{2\pi}f(M\cos u,-M\sin u)\cos u\,du. \tag{7,74'}$$

Из (7,73′) находят амплитуду колебания M, а из (7,74′) — поправку γ на период.

Во втором приближении уравнения (7,71) и (7,72) решают с учетом слагаемых второго порядка малости. Поскольку уравнений всего два, а неизвестных — три (a, b, γ), то или a или b приравнивают нулю, что предопределяет начальную фазу колебания; поэтому несущественно, какую из этих двух величин взять равной нулю.

Последовательность решения методом малого параметра:

1. Путем введения безразмерного времени $\tau = \omega_0 t$ уравнение задачи приводят к виду (7,45). При этом будет известен вид функции $f(x, \dot{x})$ и выражение для μ через параметры схемы.

2. При помощи формулы (7,73) определяют амплитуду M первого приближения, а при помощи формулы (7,74) — поправку γ на период колебания в первом приближении.

3. Дальнейшее уточнение производят путем совместного решения уравнений (7,71) и (7,72), полагая в них либо a, либо b равным нулю.

В заключение следует остановиться на расчетных возможностях метода малого параметра. Опыт применения метода показывает, что он может быть применен к задачам, в которых нелинейность выражена относительно слабо, в результате чего характер изменения искомых величин во времени мало отличается от синусоидального. Метод малого параметра физически менее „прозрачен", чем метод гармонического баланса. Кроме того, приходится считаться с тем, что до проведения расчета неизвестно, какие значения малого параметра можно считать достаточно малыми, чтобы можно было пользоваться этим методом.

Несмотря на указанные ограничения, метод малого параметра довольно широко применялся для решения задач небесной механики, а также для решения некоторых задач теории колебаний.

О применении метода малого параметра к уравнениям высоких порядков сказано в [Л. 34, 41, 42, 80].

Пример. Решить методом малого параметра уравнение $\ddot{x}+x=\mu(m-nx^2)\dot{x}$. К такому уравнению приводится уравнение лампового генератора при мягком возбуждении*. Ограничиться первым приближением.

---

* В уравнение (15,12) $\frac{d^2x}{dt^2} - k_1(1-x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ вместо t введем новую переменную $\tau = \omega_0 t$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \omega_0\frac{dx}{d\tau},\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \omega_0^2\frac{d^2x}{d\tau^2}.$$

Получим

$$\omega_0^2\frac{d^2x}{d\tau^2} - k_1\omega_0(1-x^2)\frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = 0$$

Решение. В рассматриваемом примере $f(x, \dot{x}) = (m - nx^2)\,\dot{x}$. Полагая $x_0 = M\cos\tau$, находим

$$f(M\cos\tau, -M\sin\tau) = -Mm\sin\tau + nM^3\cos^2\tau\sin\tau =$$
$$= \sin\tau\left(\frac{nM^3}{4} - mM\right) + nM^3\sin 3\tau.$$

В соответствии с уравнением (7,73′) составляем уравнение для определения амплитуды M:

$$C(2\pi) = \int\limits_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{nM^3}{4} - mM\right)\sin^2 u + nM^3\sin 3u\sin u\right\}du = 0.$$

Отсюда $\frac{nM^2}{4} - m = 0$, амплитуда колебания $M = 2\sqrt{\frac{m}{n}}$.

Поскольку $\dot{C}(2\pi) = \int\limits_0^{2\pi}\left[\left(\frac{nM^3}{4} - mM\right)\sin u + nM^3\sin 3u\right]\cos u\,du = 0$, то поправка γ на период в первом приближении равна нулю.

§ 7,29. Применение новых функций для расчета нелинейных цепей

За последнее десятилетие появилось несколько работ, общим в которых является введение новых специальных функций.

Первой работой такого рода явилась работа И. Т. Турбовича [Л. 59]. В ней введены две новые функции $\mathrm{cip}\,x$ и $\mathrm{sup}\,x$, представляющие собой специально сконструированные степенные ряды, которые в этой работе протабулированы. $\mathrm{cip}\,x$ представляет собой своеобразный аналог $\cos x$, а $\mathrm{sup}\,x$ — аналог $\sin x$. Форма кривых $\mathrm{cip}\,x$ и $\mathrm{sup}\,x$ зависит от степени нелинейности характеристики нелинейного сопротивления.

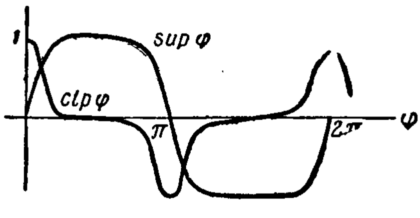


Рис. 103.

На рис. 103 изображены графики этих функций при достаточно сильно выраженной нелинейности. Если нелинейное сопротивление вырождается в линейное, то $\mathrm{cip}\,x$ вырождается в $\cos x$, а $\mathrm{sup}\,x$ в $\sin x$.

Подход к введению новых функций [Л. 59] производится следующим образом. Берется уравнение колебательного контура без потерь, состоящего из нелинейной индуктивности и емкости:

$$\frac{d}{dt}\Phi(i) + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0. \qquad (a)$$

или

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \frac{k_1}{\omega_0}(1 - x^2)\,\dot{x} = \mu(m - nx^2)\,\dot{x},$$

где $\mu = \frac{k_1}{\omega}$, $m = 1$, $n = 1$.

Вводится новый масштаб времени $\varphi = \omega_0 t$, где ω_0 — некоторый коэффициент пропорциональности; принимается, что $i = I_m f(\varphi)$, причем $f(\varphi)$ представляет собой некоторую периодическую функцию с амплитудой, равной единице.

После этого уравнение (a) приобретает вид

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\omega_0^2}{I_m}\Phi\left[I_m f(\varphi)\right]\right\} + \frac{1}{C}\int f(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Чтобы вид функции $f(\varphi)$ был независим от амплитуды колебаний I_m, функция Φ должна удовлетворять следующему функциональному уравнению:

$$\Phi\left[I_m f(\varphi)\right] = \frac{I_m}{\omega_0^2}\,\Phi\left[f(\varphi)\right].$$

Последнему уравнению удовлетворяет функция

$$\Phi = \Phi_1\left(\frac{i}{i_1}\right)^{\frac{1}{p}}\operatorname{sn} i.$$

Здесь Φ_1 — значение потока в сердечнике нелинейной индуктивности при некотором токе i_1, протекающем через катушку этой индуктивности; значения Φ_1 и i_1 соответствуют некоторой базисной точке на характеристике нелинейной индуктивности;

Φ и i — мгновенные значения потока и тока.

Число p зависит от степени нелинейности вебер-амперной характеристики: чем больше p, тем сильнее выражена нелинейность. В [Л. 59] p принимало значения от 5 до 8.

$$\operatorname{sn} i = 1 \text{ при } i > 0 \text{ и } \operatorname{sn} i = -1 \text{ при } i < 0.$$

В [Л. 59] путем довольно громоздких выкладок показано, что решением уравнения (a) при сделанном допущении о характере зависимости между Φ и i является функция $i = I_m \operatorname{cip}\frac{2\pi}{\tau}t$, где период $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\pi(p+1)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p+1}\right)}\sqrt{L_p C}\, I_m^{\frac{1-p}{2p}}.$

Обобщенная индуктивность L_p равна $\frac{|\Phi_1|}{|i_1|^{\frac{1}{p}}}$; через Γ обозначена гамма-функция.

В рассматриваемом примере амплитуда тока I_m определяется начальными условиями.

Функции $\operatorname{cip}\varphi$ и $\operatorname{sup}\varphi$ использованы в [Л. 59] для решения следующих задач: 1) исследования колебаний в ламповом генераторе с нелинейной индуктивностью, 2) исследования установившегося режима в нелинейном колебательном контуре с потерями, на вход которого воздействует либо функция $\operatorname{sup}\varphi$, либо $\operatorname{cip}\varphi$, 3) исследования резонансных скачков на первой и высших гармониках в системе п. 2.

Новые типы функций введены также в других работах [Л. 104, 105, 115, 118].

В этих работах введены специальные функции для описания кусочно-ломаных характеристик нелинейных сопротивлений или (и) для описания разрывно-периодических э. д. с.

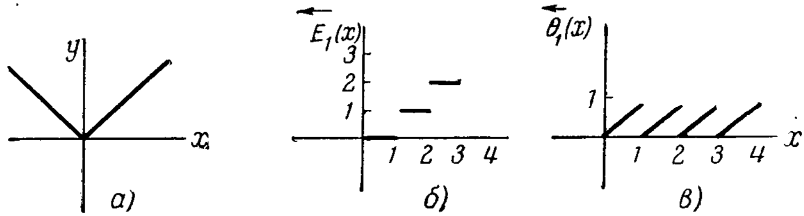


Рис. 104.

Функции дают возможность получать решение не в виде совокупности нескольких выражений, каждое из которых справедливо только в определенной области изменения токов и напряжений, а в виде единого выражения, описывающего весь процесс в целом.

В [Л. 105] введены три разрывные функции: модуль-функция $y = |x|$ (рис. 104, *а*), функция Антье $y_1 = \overleftarrow{E}_1(x)$ (рис. 104, *б*) и периодическая функция $\overleftarrow{\theta}_1(x) = x - \overleftarrow{E}_1(x)$ (рис. 104, *в*) с периодом, равным единице.

В [Л. 115] введены две функции: $\psi(t)$ и $\Phi(t)$ (рис. 105, *а* и *б*), определяемые следующим образом:

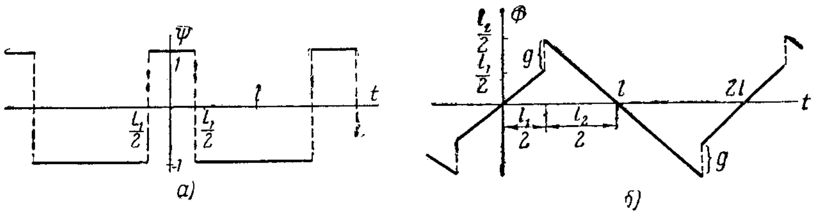


Рис. 105.

$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & \pm 2kl - \frac{l_1}{2} < t < \pm 2kl + \frac{l_1}{2}; \\ -1 & \pm (2k+1)\,l - \frac{l_2}{2} < t < \pm (2k+1)\,l + \frac{l_2}{2}. \end{cases}$$

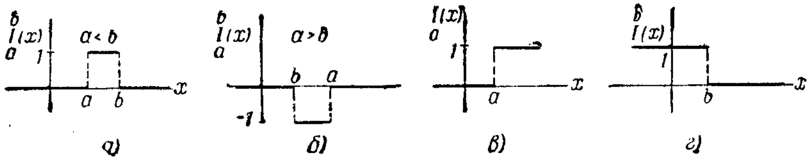
$$\Phi(t) = \begin{cases} t & -\frac{l_1}{2} < t < \frac{l_1}{2} \\ l - t & \frac{l_1}{2} < t < l \\ -l - t & -l < t < -\frac{l_1}{2} \end{cases}$$

В [Л. 118] введена более сложная разрывная функция $\xi(t) = \psi(t)\,\Phi(t)$. Операции над разрывными функциями и их производными выполняются путем использования специально сконструированных для этой цели прерывателей, а также путем использования специальных тождеств и замены одного или нескольких неравенств одним равенством.

Под прерывателем понимается функция, которая в некоторой точке или точках скачком изменяется от нуля до ± 1 (или от ± 1 до нуля).

В [Л. 105] введены три типа прерывателей:

$$\overset{b}{\underset{a}{I}}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x-a|}{x-a} - \frac{|x-b|}{x-b}\right) \qquad \text{(рис. 106, } a \text{ и } б);$$



а) б) в) г)

Рис. 106.

$$\underset{a}{I}(x) = \overset{\infty}{\underset{a}{I}}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x-a|}{x-a}\right) \qquad \text{(рис. 106, } в);$$

$$\overset{b}{I}(x) = \overset{b}{\underset{-\infty}{I}}(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x-b|}{x-b}\right) = \overset{0}{I}(x-b) = 1 - \underset{b}{I}(x) \quad \text{(рис. 106, } г).$$

Тождество

$$\frac{|x-y|}{x-y} f(x,t) = 2f\left(\frac{x+y+|x-y|}{2}, t\right) - f(x,t) - f(y,t) + \frac{|x-y|}{x-y} f(y,t).$$

Здесь через $t = \varphi(x)$ обозначена произвольная функция от x. Неравенство $A \geqslant 0$ эквивалентно равенству $A - |A| = 0$; n неравенств могут быть сведены к одному неравенству или к одному равенству. Например, два неравенства $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$ эквивалентны одному неравенству

$$A + B - |A - B| \geqslant 0.$$

Производная от модуль-функции $y = |x|$ равна

$$y' = \frac{d|x|}{dx} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|};$$

$$\frac{d|f(x)|}{dx} = \frac{|f(x)|}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Производные от функции Антье и от функции $\psi(t)$ равны периодически повторяющейся дельта-функции.

В качестве примера описания сложной кривой одним аналитическим выражением рассмотрим пример, разобранный в [Л. 105].

На рис. 107 изображена функция $y = f(x)$. При $x < a$ $y = b$, а при $x \geqslant a$ $y = b\cos(x - a)$. Эта функция путем использования прерывателей может быть записана одним равенством:

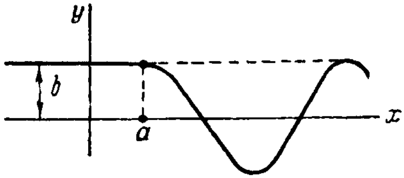


Рис. 107.

$$y = \underset{a}{1}(x)\, b\cos(x - a) + \overset{a}{1}(x)\, b =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x-a|}{x-a}\right) b\cos(x-a) + $$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x-a|}{x-a}\right) b.$$

Учитывая тождество

$$\frac{|x-a|}{x-a}\cos(x-a) = 2\cos\left(\frac{x+a+|x-a|}{2} - a\right) -$$

$$- \cos(x-a) - \cos 0 + \frac{|x-a|}{x-a}\cos 0,$$

имеем

$$y = b\cos\left(\frac{x-a+|x-a|}{2}\right).$$

Для более подробного ознакомления с методикой решения некоторых радиотехнических задач путем использования разрывных функций (например, задачи о динатронном генераторе, релаксационном генераторе и др.) рекомендуется обратиться к [Л. 118].

В отдельных работах, опубликованных за последнее время в периодической печати ставится вопрос о применении для анализа нелинейных электрических цепей некоторых относительно малоизвестных интегральных преобразований. Например, в статье Ку [и других авторов], опубликованной в IRE Nat. Convent Rec. 1959, № 2 рассматривается вопрос о применении преобразований Тейлора — Коши для анализа определенного класса нелинейных систем. В этой статье в качестве примера дается решение двух простейших уравнений:

$$\frac{di}{dt} + i^2 = 1 \quad (i = \operatorname{th} t).$$

и

$$\frac{d^2i}{dt^2} + (2+i)\frac{di}{dt} + i = -e^{-2t} \quad (i(t) = -e^{-t}).$$

В журнале IRE, Trans. Circuit Theory, 1959, № 2 рассматривается применение интегральных преобразований Меллина и Ганкеля к цепям с переменными во времени параметрами.

8

Преобразования с помощью нелинейных цепей

В предыдущей главе нелинейные устройства рассматривались в качестве иллюстрации к различным методам расчета.

В данной главе будет продолжено рассмотрение нелинейных устройств, позволяющих выполнять различные функции, важные в практическом отношении.

§ 8,1. Стабилизатор постоянного тока

Под стабилизатором постоянного тока понимают устройство, которое способно поддерживать ток постоянным при изменении сопротивления нагрузки и (или) изменении напряжения на входе схемы.

Простейшая схема стабилизатора представлена на рис. 108,*а*. В этой схеме последовательно с нагрузкой $R_л$ включено НС имеющее в. а. х. по типу рис. 2,*в*.

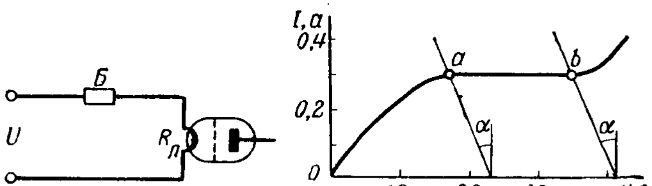


Рис. 108.

Такой характеристикой обладает, например, бареттер. Стабилизация тока достигается за счет того, что в. а. х. НС имеет почти горизонтальный участок, на котором напряжение меняется при неизменном или почти неизменном токе через него.

Пример. Бареттер 0,3Б17-35 используется для стабилизации тока накала электронной лампы. Номинальный ток накала 0,3 *а*, напряжение 6 *в*. Найти, в каких пределах можно менять напряжение U на входе схемы, чтобы ток через нить накала лампы равнялся 0,3 *а*.

Решение. Находим сопротивление нити $R_л = \frac{6}{0,3} = 20$ *ом*. Проводим через точки *a* и *b* рис. 108, *б*, ограничивающие почти горизонтальный участок в. а. х. НС, две прямые под углом α к вертикали;

$$\operatorname{tg} \alpha = 20.$$

Графически находим, что напряжение на входе может изменяться от 23 до 41 *в*

§ 8,2. Стабилизатор постоянного напряжения

Стабилизатор постоянного напряжения представляет собой устройство, напряжение на выходе которого $U_н$ поддерживается постоянным или почти постоянным при изменении сопротивления нагрузки $R_н$ или величины напряжения U_1 на входе устройства.

Простейший стабилизатор напряжения осуществляется по схеме рис. 109,*а*. НС должно иметь в. а. х. по типу рис. 2,*и*. $R_б$ — балластное сопротивление. Стабилизация достигается за счет того, что на в. а. х. НС есть участок, на котором падение напряжения остается практически одним и тем же при изменении тока через НС.

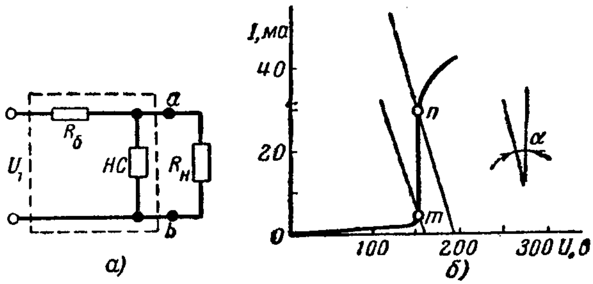


Рис. 109.

Пример. На рис. 109, *а* изображена в. а. х. стабиловольта 150 С-5-30. Он используется в качестве НС в схеме рис. 109,*а*.

$$R_б = 2 \text{ ком}, \; R_н = 5 \text{ ком}.$$

Определить границы допустимого изменения напряжения на входе схемы U_1, чтобы на выходе стабилизатора поддерживалось напряжение 150 *в*.

Решение. Воспользуемся методом эквивалентного генератора.

Разомкнем ветвь с НС и найдем напряжение холостого хода между точками *a* и *b*:

$$U_{ab\,x.x} = U_1 \frac{R_н}{R_н + R_б} = 0{,}713 U_1.$$

Определим входное сопротивление по отношению к зажимам a и b:

$$R_{вх} = \frac{R_н R_б}{R_н + R_б} = 1427 \ ом.$$

Через точки m и n, ограничивающие вертикальный участок в. а. х. стабиловольта (рис. 109,*б*), проводим прямые так, чтобы тангенс угла, образованного ими с вертикалью, численно равнялся $R_{вх} = 1427$ *ом*.

Отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси абсцисс, равны $U_{ab\,x.x}$. Находим

$$0{,}713 \ U_{1min} = 157 \ в \text{ и } 0{,}713 \ U_{1max} = 192 \ в.$$

Отсюда

$$U_{1min} = 220 \ в \text{ и } U_{1max} = 269 \ в.$$

Следовательно, напряжение U_1 может изменяться от 220 до 269 *в*.

§ 8,3. Логарифмические преобразователи на нелинейных сопротивлениях

Логарифмическими преобразователями называют устройства, выходная величина которых пропорциональна логарифму от входной величины. Схема простейшего логарифмического преобразователя изображена на рис. 110, *а*. НС имеет в. а. х. по типу характеристики рис. 2, *г*. Сопротивление R линейное. Входной величиной является ток I, выходной — ток I_R.

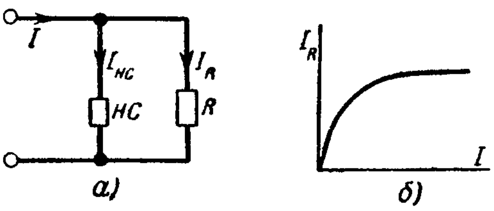


Рис. 110.

При малых токах I статическое (см. § 2,3) сопротивление НС много больше сопротивления R. Поэтому при малых токах I через НС ток почти не пойдет.

При больших токах I статическое сопротивление НС становится малым, много меньше сопротивления R, и бóльшая часть тока идет по НС.

Зависимость $I_R = f(I)$ качественно показана на рис. 110, *б*. Подбором вида в. а. х. НС и величины шунтирующего сопротивления R можно добиться того, что зависимость $I_R = f(I)$ будет близка к логарифмической, т. е. $I_R = a \lg I$.

Таким путем можно получать и иные функциональные зависимости.

§ 8,4. Умножение, сложение и вычитание двух функций с помощью электрических цепей с нелинейными сопротивлениями

Допустим, имеются два постоянных напряжения U_1 и U_2. Каждое из них пропорционально какой-то физической величине. Требуется получить напряжение, пропорциональное произведению U_1 и U_2. Простейшее преобразующее устройство (рис. 111) основано на применении НС с квадратичной в. а. х. вида $i = ku^2$ и какого-либо усилителя, например магнитного.

Вольт-амперной характеристикой, по форме близкой к квадратичной, обладают, например, медно-закисные выпрямители. Магнитный усилитель $МУ$ имеет две одинаковые управляющие обмотки $w_{у1}$ и $w_{у2}$ ($w_{у1} = w_{у2} = w$). Сопротивления их берутся ничтожно малыми по сравнению с сопротивлениями НС1 и НС2. Поэтому можно с большой степенью приближения считать, что напряжение $U_1 + U_2$ на входе первой цепи, образованной НС1 и $w_{у1}$, приложено к НС1. Аналогично напряжение $U_1 - U_2$ на входе второй цепи приложено к НС2. Характеристики НС1 и НС2 одинаковы.

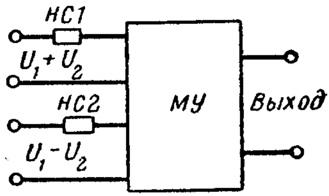


Рис. 111.

Напряжение на выходе $МУ$ пропорционально результирующей м. д. с. управления. Последняя равна разности м. д. с. первой и второй обмоток управления:

$$\text{м. д. с.}_{\text{рез}} = I_1 w_{у1} - I_2 w_{у2} = (I_1 - I_2)\, w_у.$$

Но

$$I_1 = k\,(U_1 + U_2)^2 = k\,(U_1^2 + 2U_1U_2 + U_2^2)$$

и

$$I_2 = k\,(U_1 - U_2)^2 = k\,(U_1^2 - 2\,U_1U_2 + U_2^2),$$

или

$$\text{м. д. с.}_{\text{рез}} = 4\;kU_1U_2w_у.$$

Следовательно, напряжение на выходе $МУ$ действительно пропорционально произведению U_1 на U_2.

Схема (рис. 111), если убрать из нее НС1 и НС2, может служить также для сложения и вычитания двух функций. Для вычитания двух функций, выражаемых напряжениями U_1 и U_2, на первую обмотку $МУ$ подается напряжение U_1, на вторую — напряжение U_2. При этом напряжение на выходе $МУ$ будет пропорционально разности $U_1 - U_2$. Для сложения двух функций, выражаемых напряжениями U_1 и U_2, на первую обмотку $МУ$ подается напряжение U_1, а на вторую напряжение — U_2 (изменена полярность по сравнению с полярностью в предыдущем случае). Тогда напряжение на выходе $МУ$ будет пропорционально сумме $U_1 + U_2$.

§ 8,5. Усилитель постоянного напряжения

Усилитель постоянного напряжения представляет собой устройство, напряжение на выходе которого больше напряжения на входе.

На рис. 112 изображена схема простейшего усилителя на трехэлектродной лампе.

Входное (усиливаемое) напряжение подается на сетку лампы. Выходное (усиленное) напряжение возникает на нагрузке $R_н$, включенной в анодную цепь лампы.

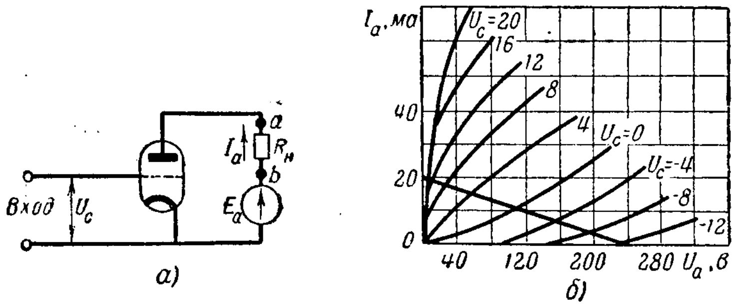


Рис. 112.

Усиление получается за счет того, что сетка, будучи расположена ближе к катоду, чем анод, оказывает бо́льшее влияние на поток электронов с катода на анод, чем анод. Поэтому сравнительно небольшие изменения напряжения на сетке приводят к резкому изменению анодного тока и напряжения на выходе усилителя:

$$U_н = I_a R_н = E - U_a.$$

Здесь U_a — напряжение между анодом и катодом лампы.

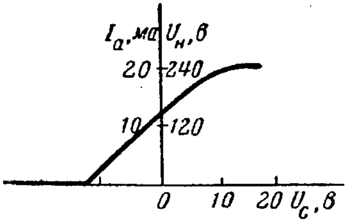


Рис. 113.

Пример. Построить зависимость $U_н = f(U_c)$ для схемы (рис. 112), где $R_н = 12$ *ком*, $E = 240$ *в*, триод 6-С-2С (анодные характеристики его изображены на рис. 112, *б*).

Решение. Из точки $I_a = 0$, $U_a = E$ в точку $I_a = 20$ *ма*, $U = 0$ проводим луч, тангенс угла наклона которого к оси абсцисс численно равен 12 *ком*. Точки пересечения этого луча с анодными характеристиками дают соответствующие друг другу значения I_a и U_c (рис 113).

Так как $U_н = I_a R_н$, а $R_н = \text{const}$, то зависимость $U_н = f(U_c)$ отличается от зависимости $I_a = f(U_c)$ лишь масштабом.

§ 8,6. Фазочувствительный выпрямитель

Под фазочувствительным выпрямителем (рис. 114) понимают устройство, напряжение на выходе которого меняет знак на противоположный при изменении на 180° фазы переменного (синусоидального) напряжения на входе устройства.

Он состоит из трансформатора *Т1* (коэффициент трансформации равен 1), трансформатора *Т2*, двух диодов *Д1* и *Д2*, двух равных сопротивлений $R_1 = R_2 = R$ и двух равных емкостей $C_1 = C_2 = C$.

Вторичная обмотка трансформатора *Т1* имеет вывод от средней точки. Входное синусоидальное напряжение $u_{вх}$ поступает на первичную обмотку трансформатора *Т1*.

Первичная обмотка трансформатора *Т2* присоединена к источнику вспомогательного синусоидального напряжения $u_в$ той же частоты, что и $u_{вх}$.

Диоды *Д1* и *Д2* пропускают ток только в одном, проводящем, направлении.

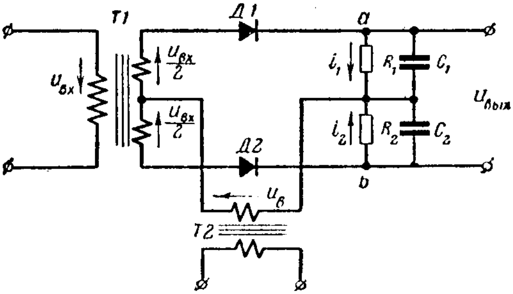


Рис. 114.

Напряжение на выходе

$$u_{вых} = u_{ab} = i_1 R_1 - i_2 R_2 = (i_1 - i_2) R.$$

Рассмотрим работу схемы, для простоты полагая, что емкости C_1 и C_2 отсутствуют.

Если $u_{вх} = 0$, то в первый (проводящий) полупериод

$$i_1 = \frac{u_в}{R_1},\ i_2 = \frac{u_в}{R_2} \text{ и } u_{вых} = (i_1 - i_2)\, R = 0.$$

Во второй полупериод напряжение на выходе также равно нулю.

Если на входе будет действовать напряжение $u_{вх}$, по фазе совпадающее с $u_в$, то в первый полупериод

$$i_1 = \frac{u_в + \frac{u_{вх}}{2}}{R_1};$$

$$i_2 = \frac{u_в - \frac{u_{вх}}{2}}{R_2} \text{ и } u_{вых} = (i_1 - i_2)\, R = u_{вх}$$

$\left(\text{предполагается, что } \frac{u_{вх}}{2} < u_в\right)$. Во второй полупериод диоды запирают цепь, и напряжение на выходе равно нулю.

Если теперь фазу напряжения $u_{вх}$ изменить на противоположную, то в первый полупериод

$$i_1 = \frac{u_в - \frac{u_{вх}}{2}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_в + \frac{u_{вх}}{2}}{R_2} \text{ и } u_{вых} = (i_1 - i_2) R = -u_{вх}.$$

Во второй полупериод $u_{вых}$ по-прежнему будет равно нулю.

Таким образом, изменение фазы синусоидального напряжения на входе $u_{вх}$ приводит к изменению полярности (знака) напряжения на выходе.

При наличии емкостей происходит сглаживание пульсаций выпрямленного напряжения.

§ 8,7. Селективный выпрямитель

Под селективным выпрямлением понимают выпрямление, при котором на выходе устройства появляется постоянная составляющая тока и напряжения только в том случае, если на вход устройства будет подано напряжение $u_{вх}$, частота которого относится к частоте вспомогательного напряжения $u_в$, как $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ или, в более общем случае, как $\frac{2k}{2p+1}$, где k и p — целые числа.

Если же частота напряжения $u_{вх}$ будет равна частоте напряжения $u_в$ или будет в нечетное число раз больше или меньше ее, то постоянной составляющей на выходе устройства не возникнет. Простейшая схема селективного выпрямителя изображена на рис. 115. Она состоит из двух трансформаторов *T1* и *T2*, двух одинаковых нелинейных сопротивлений *НС1* и *НС2* с симметричной характеристикой по типу характеристики рис. 2, *б* (тиритовые сопротивления) и нагрузки $R_н$, шунтированной емкостью. Трансформатор Т1 имеет вывод от средней точки вторичной обмотки.

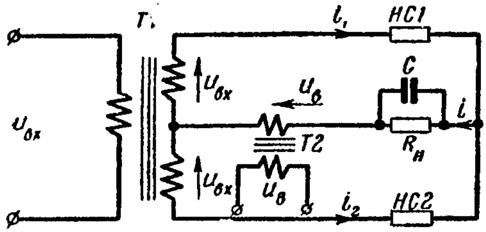


Рис. 115.

Пусть вспомогательное напряжение

$$u_в = U_2 \sin(2\omega t + \alpha)$$

и входное напряжение

$$u_{вх} = U_1 \sin \omega t.$$

Принцип работы устройства основан на появлении постоянной составляющей при воздействии на нелинейное сопротивление двумя синусоидальными колебаниями, частоты которых относятся, как 1:2 (см. § 5,6).

Если для простоты принять, что величина сопротивления $R_н$ много меньше величины сопротивлений *НС1* и *НС2*, то приближенно напряжение на *НС1* равно $u_{вх} + u_в$, а напряжение на *НС2* равно $-u_{вх} + u_в$. Поэтому постоянная составляющая тока i_2 будет иметь тот же знак, что и постоянная составляющая тока i_1. Постоянная составляющая тока i равна сумме постоянных составляющих токов i_1 и i_2. Емкость C включена для обеспечения прохождения переменных составляющих токов.

§ 8,8. Общие замечания о формировании импульсов

В радиотехнике, импульсной технике и промышленной электронике широко применяются устройства, преобразующие постоянное или синусоидальное напряжение в серию импульсов прямоугольной, пикообразной, экспоненциальной, колокольной форм, а также в импульсы с крутым передним или задним фронтом. Устройства такого рода могут быть как очень малой мощности, например выходной мощностью в доли милливатта, так и весьма большой мощности, например выходной мощностью в тысячи киловатт (в локационных установках).

Формирование почти прямоугольных импульсов при помощи диода

Схема рис. 116 позволяет получить на выходе серию почти прямоугольных или трапецеидальных импульсов напряжения

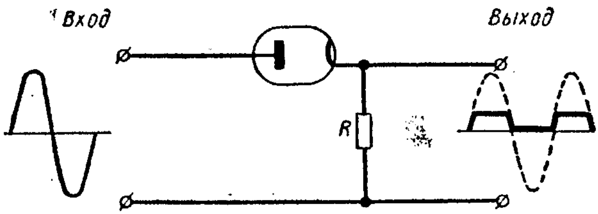


Рис. 116.

одной полярности при подаче на вход ее синусоидального напряжения.

В проводящий полупериод диод сначала проводит ток почти без ограничения. Затем, после того как ток через диод достигнет значения тока насыщения, напряжение на выходе по величине не изменяется*.

В отрицательные полупериоды диод не проводит тока, и потому напряжение на выходе равно нулю.

* В схеме рис. 116 диод должен обладать характеристикой с резко выраженным насыщением.

Формирование импульсов при помощи трансформатора с почти прямоугольной кривой намагничивания

На замкнутый тороидальный сердечник (рис. 117) из материала с почти прямоугольной кривой намагничивания наматываются две обмотки (w_1 и w_2). По обмотке w_1 пропускают синусоидальный ток. На зажимах обмотки w_2 наводится э. д. с. пикообразной формы. Принцип получения ее иллюстрируется на рис. 118.

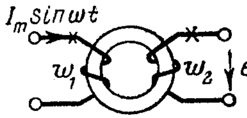


Рис. 117.

В левой части рисунка изображена петля гистерезиса $\Phi = f(i)$. Для удобства дальнейших построений оси Φ и i повернуты по сравнению с обычным начертанием их на 90° против часовой стрелки. В правой части рисунка построены три кривые: кривая заданного синусоидального тока $i = f(\omega t)$ по обмотке w_1, кривая магнитного потока в сердечнике $\Phi = f(\omega t)$ и кривая $\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$, ординаты которой пропорциональны искомой э. д. с. e_2 на зажимах обмотки w_2:

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt} = -w_2 \frac{d\Phi}{d\omega t} \cdot \frac{d\omega t}{dt} = -\omega w_2 \frac{d\Phi}{d\omega t}.$$

Соответствующие друг другу точки кривых обозначены одинаковыми цифрами.

Последовательность построения такова.

Сначала строим кривую $i = f(\omega t)$. Амплитуда тока соответствует ординате точки *8* на кривой $\Phi = f(i)$. Затем при помощи кривой $i = f(\omega t)$ и кривой $\Phi = f(i)$ строим кривую $\Phi = f(\omega t)$. В качестве примера на рисунке стрелками показана последовательность нахождения точки *6* кривой $\Phi = f(\omega t)$.

После этого путем графического дифференцирования строим кривую $\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$. Ординаты ее пропорциональны тангенсам угла наклона касательных к кривой $\Phi = f(\omega t)$ с осью абсцисс. Так, для точки *6* $\frac{d\Phi}{d\omega t}$ пропорционально тангенсу угла α.

На участках, где Φ увеличивается в функции времени, $\frac{d\Phi}{d\omega t}$ положительно. Чем больше крутизна кривой $\Phi = f(\omega t)$, тем больше $\frac{d\Phi}{d\omega t}$. Кривая $\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$ имеет пикообразную форму. Такую же форму имеет и э. д. с. e_2.

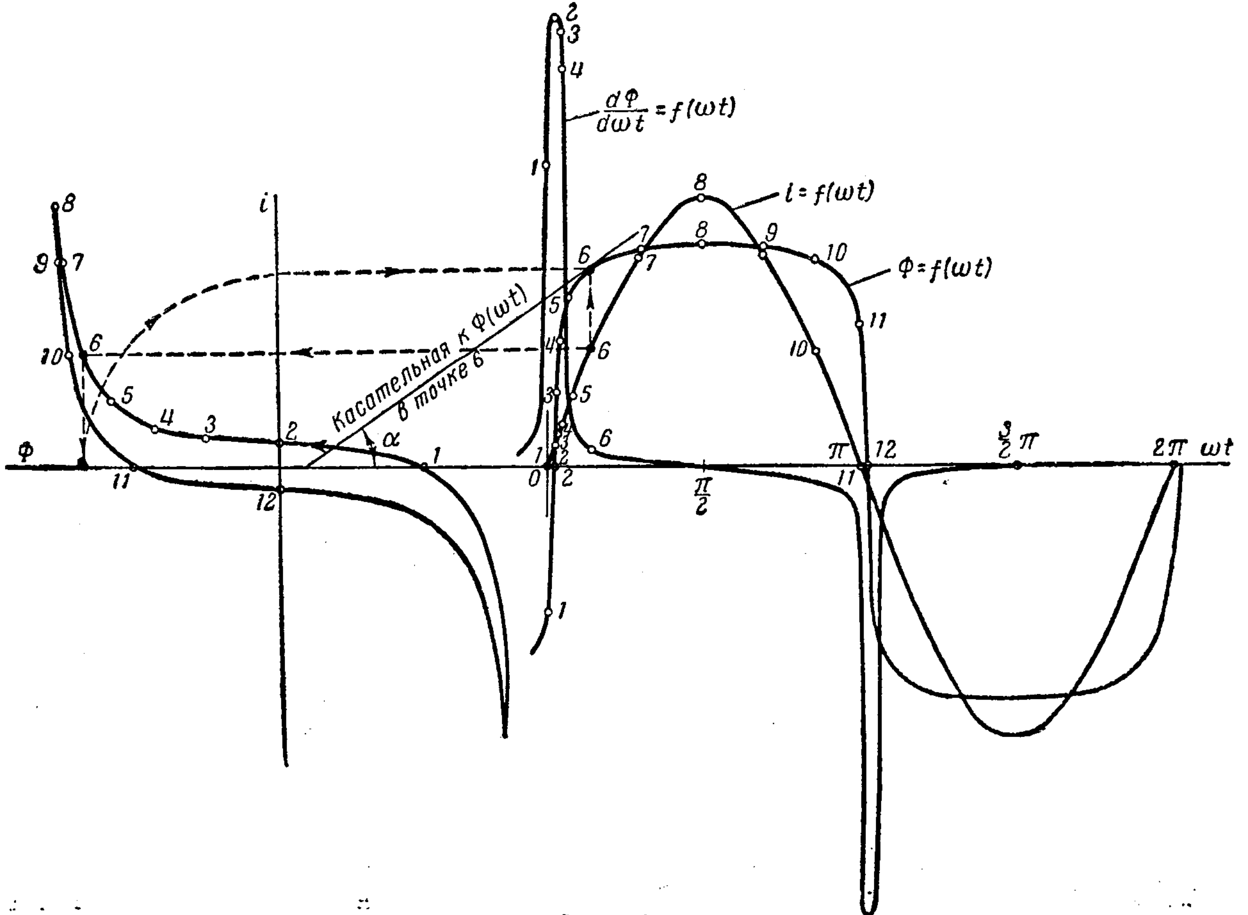

$\frac{d\Phi}{d\omega t} = f(\omega t)$
$i = f(\omega t)$
$\Phi = f(\omega t)$
Касательная к $\Phi(\omega t)$ в точке 6
α
Φ
i
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π ωt

Рис. 118.

§ 8,9. Принцип осуществления амплитудной модуляции

На рис. 119 пунктиром обведен нелинейный активный четырехполюсник. Он состоит из трехэлектродной лампы, анодной батареи $E_а$ и параллельно включенных индуктивности L и емкости C, настроенных в резонанс на частоту ω. Если к входным зажимам четырехполюсника (зажимы a и b) подвести сумму двух синусоидальных напряжений

$$u_с = U_1 \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t;$$
$$\omega \gg \Omega, \tag{8,1}$$

то на выходных зажимах (c и d) будет действовать амплитудно-модулированное напряжение.

Соответствующим подбором величины э. д. с. $E_а$ добьемся того, что сеточную характеристику лампы $i_а = f(u_с)$ при малых значениях напряжения на сетке можно будет представить в виде пунктирной кривой рис. 9, *в* и аналитически можно будет представить полиномом второй степени (формулы 4,4):

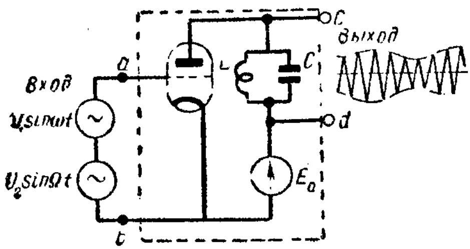


Рис. 119.

$$i_а = i_{а0} + au_с + bu_с^2. \tag{8,2}$$

Подставив (8,1) в (8,2), получим

$$i_а = i_{а0} + a(U_1 \sin \omega t + U_2 \sin \Omega t) + b\left[\frac{U_1^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) + \right.$$
$$\left. + \frac{U_2^2}{2}(1 - \cos 2\Omega t) + 2U_1 U_2 \sin \Omega t \sin \omega t\right],$$

или

$$i_а = i_{а0} + \frac{b}{2}(U_1^2 + U_2^2) + aU_1(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t -$$
$$- \frac{bU_1^2}{2} \cos 2\omega t + aU_2 \sin \Omega t - \frac{bU_2^2}{2} \cos 2\Omega t; \tag{8,3}$$
$$m = \frac{2bU_2}{a}.$$

Следовательно, протекающий в анодной цепи ток содержит постоянную составляющую $i_{а0} + \frac{b}{2}(U_1^2 + U_2^2)$, модулированную по амплитуде первую гармонику $aU_1(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega t$, гармонику частоты 2ω и гармоники частот Ω и 2Ω.

На зажимах резонансного контура, настроенного на частоту ω, будет действовать практически только амплитудно-модулированное напряжение, поскольку для постоянной составляющей, а также для частот 2ω, Ω, 2Ω сопротивление резонансного контура во много раз меньше, чем для частоты ω и близких к ней.

Появление амплитудно-модулированного напряжения на выходе четырехполюсника вызвано квадратичным членом в аналитическом выражении сеточной характеристики лампы.

§ 8,10. Детектирование

Выделение низкочастотного сигнала, запечатленного в модулированном колебании, называют детектированием. Принципиальная схема детектора, позволяющего осуществлять детектирование амплитудно-модулированного колебания, изображена на рис. 120, *а*. Она состоит из выпрямителя и емкости, шунтирующей нагрузку $R_н$, $L_н$. В качестве нагрузки может быть телефон, репродуктор, реле и т. п. устройства.

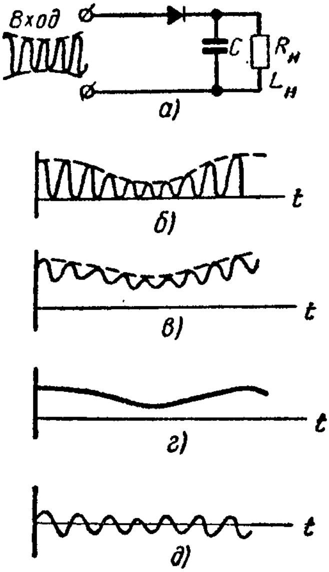


Рис. 120.

Выпрямитель срезает отрицательные полуволны модулированного напряжения. Если бы емкость отсутствовала, то характер изменения напряжения на выходе выпрямителя после среза отрицательных полуволн изобразился бы кривой рис. 120, *б*. В действительности на выходе выпрямителя есть емкость. В промежутки проводимости емкость заряжается, а в промежутки непроводимости разряжается на нагрузку $R_н$, $L_н$.

В результате этого напряжение на выходе оказывается сглаженным (рис. 120, *в*). Напряжение, изображаемое кривой рис. 120, *в*, можно представить в виде суммы двух кривых (рис. 120, *г* и *д*). Кривая *г* дает низкочастотное колебание (частота Ω), наложенное на постоянную составляющую, кривая рис. 120, *д* — высокочастотное колебание.

Через нагрузку $R_н$, $L_н$ проходит постоянный ток и ток частоты Ω (полезный сигнал), а ток частоты ω через нагрузку почти не проходит из-за большого сопротивления ее на частоте ω.

Чтобы сглаживающее действие емкости проявлялось в достаточной степени, должно быть выполнено следующее соотношение:

$$\frac{1}{\omega C} \ll R_н \ll \frac{1}{\Omega C}.$$

§ 8,11. Простейший феррорезонансный стабилизатор напряжения

Для стабилизации напряжения переменного тока широко применяются различные феррорезонансные схемы. Простейшая из них представлена на рис. 121. Она состоит из параллельного феррорезонансного контура и последовательно с ним включенной линейной индуктивности L.

Рассмотрим принцип работы ее путем использования в. а. х. для действующих значений токов и напряжений.

На рис. 122 кривая *1* — в. а. х. нелинейной индуктивности, прямая *2* — в. а. х. емкости, кривая *3* — в. а. х. параллельного феррорезонансного контура, прямая *4* — в. а. х. линейной индуктивности L, кривая *5* — результирующая в. а. х. всей схемы.

Намотаем на сердечник линейной индуктивности дополнительную обмотку $w_к$ и присоединим ее к основной схеме, как показано пунктиром на рис. 121.

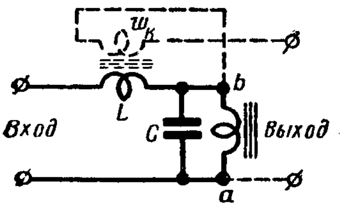


Рис. 121.

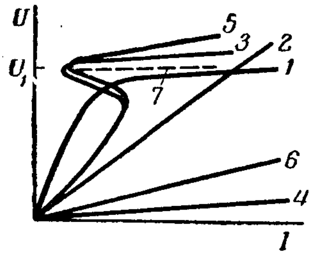


Рис. 122.

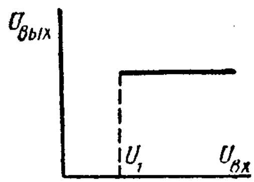


Рис. 123.

Напряжение на выходе стабилизатора будет равно напряжению на зажимах ab минус э. д. с. обмотки $w_к$. Последняя зависит от тока (прямая *6* на рис. 122). Напряжение на выходе стабилизатора изобразится кривой *7*. Ординаты ее будут равны разности соответствующих ординат кривой *5* и прямой *6*. Зависимость напряжения на выходе стабилизатора $U_{вых}$ от напряжения на входе $U_{вх}$ при холостом ходе стабилизатора изображена на рис. 123. Для построения ее следует задаваться произвольными значениями тока I и для каждого его значения находить соответствующие $U_{вых}$ и $U_{вх}$.

Стабилизация имеет место только при $U_{вх} > U_1$. Поэтому в область $U_{вх} < U_1$ кривая на рис. 123 не продолжена.

§ 8,12. Некоторые сведения о триггерных устройствах

Большое внимание за последнее время уделяется разработке бесконтактных элементов, на базе которых создаются счетные устройства, бесконтактные коммутаторы, шаговые распределители, запоминающие линии, шифрующие и дешифрующие устройства.

Основу всех этих устройств составляют ламповые, магнитные, полупроводниковые и диэлектрические триггеры. В настоящее время имеется тенденция переходить на магнитные и на полупроводниковые триггеры.

Триггеры применяются как при высоких частотах следования импульсов управления порядка 10^6 *гц* и более, например в счетно-решающей технике, так и при сравнительно низких частотах — порядка десятков и сотен герц, например в устройствах телеуправления и телесигнализации. Мощность на выходе их может изменяться от долей милливатта до нескольких десятков и даже сотен ватт.

Наибольшее распространение получили триггеры с сердечниками из материала с прямоугольной петлей гистерезиса. Действие их основано на способности магнитного сердечника в силу явления магнитного гистерезиса „записывать" знак импульса тока, прошедшего через его намагничивающую обмотку (обмотку управления).

Схема магнитного триггера изображена на рис. 124, *а*. Сердечник триггера выполнен из магнитного материала, имеющего прямоугольную петлю гистерезиса (рис. 124, *б*). Обозначим: $R_у$ — сопротивление обмотки управления $w_у$; $R_н$ — сопротивление нагрузки, включая и собственное активное сопротивление выходной обмотки $w_н$; $i_у$ — ток обмотки управления; $i_н$ — ток нагрузки; S — сечение; l — длина средней магнитной линии сердечника.

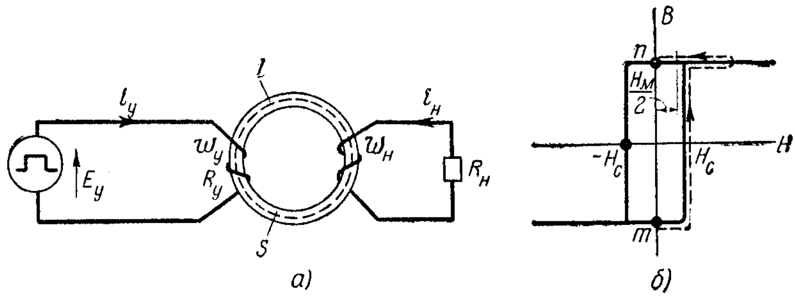


Рис. 124.

Положим, что в исходном состоянии изображающая точка на рис. 124, *б* находится в положении *m* (внизу). Обозначим: B — текущее значение магнитной индукции; B_s — индукция насыщения; H_c — коэрцитивная сила.

Рассмотрим характер изменения во времени индукции B, тока управления $i_у$ и тока нагрузки $i_н$, когда на вход триггера от источника э. д. с. поступает прямоугольный импульс э. д. с. $E_у$

(рис. 124, *а*). Под воздействием импульса э. д. с. сердечник триггера будет перемагничиваться. Магнитная индукция в нем будет изменяться от $-B_s$ до $+B_s$. При этом изображающая точка будет перемещаться по вертикальному участку петли гистерезиса, так что $H = H_c$.

По закону полного тока

$$i_у w_у + i_н w_н = H_c l.$$

Уравнение для цепи управления

$$w_у S \frac{dB}{dt} + i_у R_у = E_у.$$

Уравнение для цепи нагрузки

$$w_н S \frac{dB}{dt} + i_н R_н = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{dB}{dt} = a,$$

где

$$a = \frac{E_у - R_у \dfrac{H_c l}{w_у}}{S w_у \left(1 + \dfrac{R_у}{R_н} \cdot \dfrac{w_н^2}{w_у^2}\right)}.$$

Таким образом, при перемагничивании сердечника индукция линейно нарастает во времени: $B = -B_s + at$ (рис. 125). Перемагничивание закончится, когда индукция достигнет величины B_s. Время перемагничивания $t_п$ найдем из соотношения

$$B_s = -B_s + at_п.$$

Отсюда

$$t_п = \frac{2B_s}{a}.$$

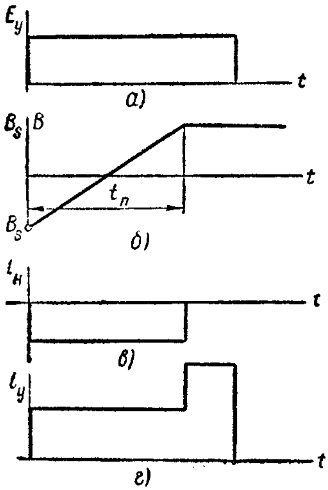


Рис. 125.

При перемагничивании $i_н = -\dfrac{aSw_н}{R_н}$. Когда перемагничивание закончится, ток $i_н$ становится равным нулю, а ток управления $i_у$ скачком возрастает до величины $\dfrac{E_у}{R_у}$. Ток $i_у$ становится равным нулю, когда прекратится импульс э. д. с. $E_у$. При этом изображающая точка на рис. 124, б приходит в положение *n* (вверху). Из положения *n* в положение *m* изображающая точка перейдет после того, как на вход триггера поступит отрицательный импульс э. д. с. достаточной амплитуды и продолжительности.

§ 8,13. Бесконтактный магнитный коммутатор

На рис. 126 представлена схема простейшего магнитного коммутатора на четыре канала. Схема состоит из четырех триггеров. Сердечники даны в разрезе в виде прямых линий. На каждом сердечнике, выполненном из магнитного материала с прямоугольной кривой намагничивания, находятся четыре обмотки. Обмотки $w_н$ являются выходными обмотками, к ним присоединены нагрузки $R_н$, на которые работает устройство; w_1 и w_2 — обмотки связи смежных сердечников; $w_у$ — обмотки управления. Обмотки управления соединены в две цепи. Первую цепь образуют последовательно соединенные обмотки $w_у$ нечетных сердечников, вторую цепь — четных.

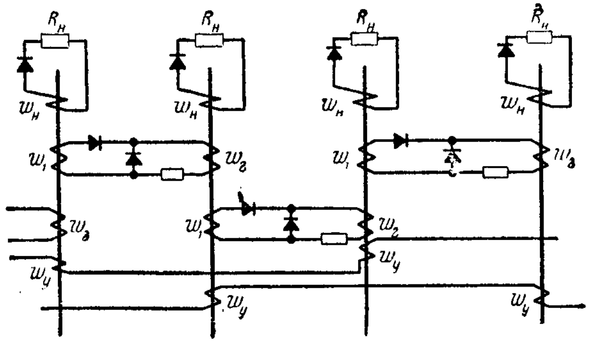


Рис. 126.

В исходном (стартовом) положении все сердечники, кроме первого, находятся „вверху“, т. е. магнитное состояние их определяется точкой n (рис. 124). В управляющие обмотки нечетных сердечников поступает серия положительных тактовых импульсов 1,3...; в управляющие обмотки четных сердечников — аналогичная серия положительных импульсов (2,4...), смещенных во времени относительно первой серии импульсов.

Каждый тактовый импульс имеет достаточную амплитуду и продолжительность, чтобы вызвать срабатывание очередного элемента цепочки.

При поступлении первого импульса первый магнитный сердечник переходит из состояния m в состояние n (рис. 124). Третий сердечник продолжает находиться в состоянии n. Переход первого сердечника из m в n вызывает появление импульсной э. д. с. в обмотках $w_н$ и w_1 первого сердечника. Импульсная э. д. с. в обмотке $w_н$ вызывает импульс тока в нагрузке $R_н$ первого сердечника. Э. д. с. обмотки w_1 вызывает протекание импульса тока в обмотке w_2 второго сердечника. Этот ток переводит второй сердечник из состояния n в состояние m и тем подготавливает его к срабатыванию от второго тактового импульса.

Второй тактовый импульс вызывает переход второго сердечника из состояния m в состояние n и подготавливает к срабатыванию третий сердечник и т. д.

Выпрямители в цепях w_1 и w_2 включены, чтобы срабатывание элемента с бóльшим порядковым номером не вызвало срабатывания элемента цепочки с меньшим порядковым номером.

Практически в силу недостаточной прямоугольности петель гистерезиса срабатывание последующих элементов цепочки вызывает появление небольших токов в обмотках связи предыдущих элементов цепочки.

§ 8,14. Магнитная запоминающая линия

Под магнитной запоминающей линией понимают статическое устройство, при помощи которого можно зафиксировать (записать) характер поступающих на вход устройства импульсов и затем воспроизвести эту запись (считать информацию).

Если в схеме (рис. 126) исключить обмотки $w_н$ и нагрузки $R_н$, то образовавшуюся схему можно трактовать как простейшую запоминающую линию. Она способна запоминать последовательность положительных и отрицательных импульсов, поступающих в обмотки $w_у$.

Информация о поступивших импульсах передается от элемента с меньшим порядковым номером к элементу с большим номером. Она может храниться сколь угодно долго, и на сохранение ее не расходуется энергия.

Считывание информации с запоминающей линии производится с обмотки выхода последнего сердечника путем подачи серии вспомогательных импульсов на обмотки управления.

В качестве примера на рис. 127 изображена копия осциллограммы при считывании записи 1010111.

Так как механических перемещений в линии не происходит, то скорость записи и считывания может быть очень велика.

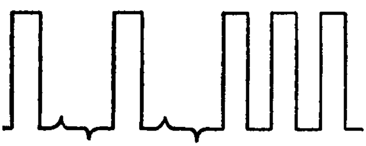


Рис. 127.

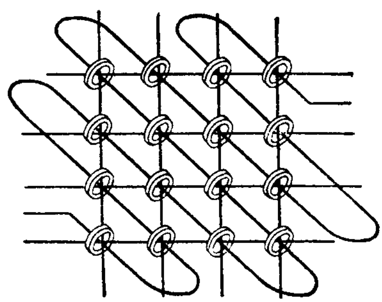


Рис. 128а.

Запоминающая линия нашла себе применение в счетно-решающих устройствах, в телеграфии, для связи систем, работающих с разной скоростью и для других целей.

§ 8,15. Магнитная матричная память

Иногда магнитные накопители выполняют в виде решетки из магнитных элементов с прямоугольной петлей гистерезиса. Элементы объединяют в столбцы и ряды, так что вид всего устройства напоминает матрицу (рис. 128а). Каждый элемент решетки представляет собой миниатюрный тороид, через который пропущено три провода, выполняющих роль обмоток. Вертикальный и горизонтальный провода играют роль обмоток управления, третий провод — обмотки съема.

По обмоткам управления подаются импульсы тока такой величины, что каждый импульс тока создает напряженность поля в соответствующем сердечнике, равную $\frac{H_м}{2}$ (рис. 124).

Переход сердечника из состояния m в n или обратный переход может иметь место только в том случае, когда по двум взаимно-перпендикулярным проводам одновременно поступят импульсы одинакового знака, так как только в этом случае напряженность поля достигнет величины, необходимой для срабатывания: $2\,\frac{H_м}{2}=H_м$.

Матрица из 10000 элементов (100 элементов в строке и 100 элементов в столбце) располагается на листе форматом 25×25 *см*. Внутренний диаметр сердечников 0,75 *мм*, наружный 1,25 *мм*, высота 0,4 *мм**. Продолжительность перехода из состояния m в состояние n в ферритовом сердечнике доходит до 0,5 *мксек*. Считывание числа с заданного элемента матрицы производится путем пропускания двух или трех токов одновременно через соответствующие цепи.

§ 8,16. Магнитные счетчики импульсов

Магнитные счетчики импульсов представляют собой устройства, позволяющие сосчитать число импульсов, поступивших на вход схемы. Магнитные счетчики импульсов выполняются в виде каскадного включения нескольких счетных цепочек. Каждая счетная цепочка обычно состоит из 10 элементов. На выходе первой цепочки возникает импульс э. д. с. только после того, как на вход первой цепочки поступит десять импульсов. На выходе второй цепочки импульс э. д. с. возникает только после того, как на вход второй цепочки с выхода первой цепочки поступит 10 импульсов и т. д. Таким образом, каждая цепочка

*Цифры приведены только для указания примерного порядка величин.

снижает (редуцирует) число импульсов в 10 раз. На выходе последней цепочки включается электромеханический счетчик или какое-либо иное записывающее (индикаторное) устройство.

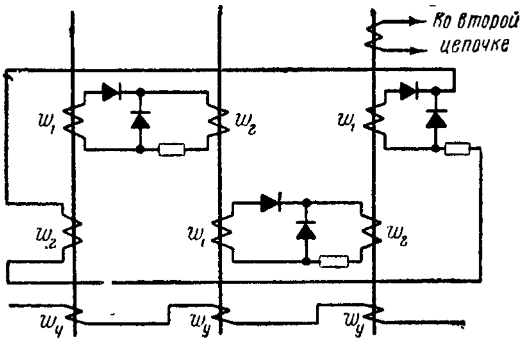


Рис. 128б.

Схема одной цепочки из трех элементов изображена на рис. 128б. Обмотка связи w_1 предыдущего элемента через диод подключена к обмотке w_2 последующего элемента. Обмотка w_1 последнего элемента цепочки (в нашем случае третьего) через диод соединена с обмоткой w_2 первого элемента цепочки. Таким образом, в каждой цепочке есть кольцевая связь между отдельными элементами. Это необходимо для того, чтобы срабатывание последнего элемента цепочки подготовило к срабатыванию первый элемент цепочки. В исходном положении (до начала счета) первый элемент цепочки находится в состоянии *m*, а все остальные в *n*.

§ 8,17. Триггер на точечном полупроводниковом триоде

В § 2,10 говорилось о том, что на в. а. х. некоторых типов точечных триодов ввиду большого значения коэффициента α и падения напряжения внутри триода в области базы могут возникать падающие участки. Точечные триоды, на в. а. х. которых имеются падающие участки, применяются в качестве элементов различных триггерных (спусковых, курковых) схем и в качестве элементов мультивибраторов.

Рассмотрим схему триггера на точечном триоде (рис. 129, *а*). Дополнительное сопротивление $R_б$, включенное в цепь базы, относительно мало (а в том случае, когда на входной в. а. х. есть падающий участок, оно может отсутствовать).

Кривая *1* рис. 129, *б* представляет собой зависимость тока эмиттера $i_э$ от напряжения между эмиттером и базой $u_{эб}$. Эту кривую можно сопоставить с начальным участком какой-либо одной из кривых рис. 6, *г*.

Прямая *2* — это в. а. х. сопротивления $R_э$. Она строится по двум точкам: $u_{эб}=0$, $i_э=-\frac{E_у}{R_э}$ и $i_э=0$, $u_{эб}=-E_у$. Прямая *2* пересекает кривую *1* в точках *a*, *b*, *c*. Точки *a* и *c* являются точками устойчивого равновесия, точка *b* — неустойчивого. В точке *a* триод закрыт, в точке *c* открыт. Переход из точки *a* в точку c происходит при подаче на вход схемы положительного спускового импульса; обратный переход (из c в a) — при подаче отрицательного спускового импульса. Подача положительного спускового импульса на вход схемы эквивалентна уменьшению

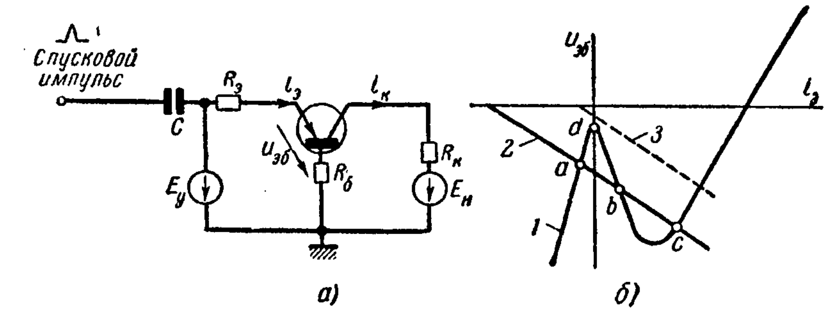


Рис. 129.

значения результирующей э. д. с. в цепи управления, т. е. эквивалентна временному уменьшению величины $E_у$. Поэтому при подаче положительного спускового импульса достаточной амплитуды вольт-амперная характеристика сопротивления $R_э$ временно поднимается из положения, которое занимает прямая 2, в положение, показанное пунктирной прямой 3. Триггерный скачок произойдет, если прямая 3 будет проходить выше точки d. После скачка и прекращения действия спускового импульса положительной полярности изображающая точка приходит в точку c.

§ 8,18. Триггер на плоскостных полупроводниковых триодах

Триггер с непосредственными связями (рис. 130) состоит из двух одинаковых триодов *ПТ1* и *ПТ2*, сопротивлений R_1 и R_2 и источника э. д. с.

База первого триода соединена с коллектором второго, а база второго с коллектором первого. Схема имеет два устойчивых состояния (режима работы). В первом режиме работы триод *ПТ1* закрыт, триод *ПТ2* открыт, и ток течет через нагрузку R_2. Во втором режиме работы закрыт триод *ПТ2*, открыт триод *ПТ1*, и ток течет через нагрузку R_1.

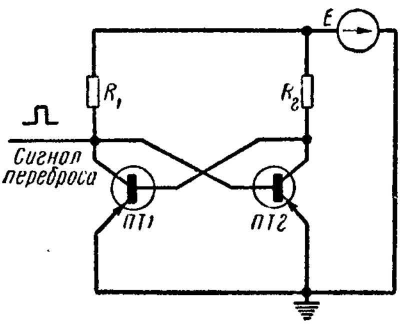


Рис. 130.

Для уяснения принципа работы схемы необходимо иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, то, что полупроводниковый триод закрывается, когда потенциал базы его становится равным нулю (равен потенциалу эмиттера). Во-вторых, то, что падение напряжения между эмиттером и коллектором открытого триода весьма мало по сравнению с э. д. с. E.

Пусть в исходном состоянии открыт триод *ПТ2* и закрыт триод *ПТ1*. При этом потенциал базы первого триода приблизительно равен 0, а потенциал базы второго триода отрицателен. В таком состоянии триггер будет находиться до тех пор, пока на вход его не поступит положительный импульс напряжения (сигнал переброса).

Если амплитуда сигнала переброса будет достаточной, чтобы поднять до нуля потенциал базы триода *ПТ2*, то последний закроется. Как только закроется триод *ПТ2*, сразу же потенциал коллектора этого триода, а следовательно, и потенциал базы триода *ПТ1* окажутся отрицательными. В результате откроется триод *ПТ1*. После прекращения действия сигнала переброса будет открыт триод *ПТ1* и закрыт триод *ПТ2*. Триод *ПТ2* будет находиться в закрытом состоянии потому, что при открытом триоде *ПТ1* потенциал базы триода *ПТ2* приблизительно равен 0.

§ 8,19. Триггерные эффекты в схеме, содержащей магнитно-управляемые активные сопротивления

В качестве одного из примеров использования магнитно-управляемых сопротивлений (§ 2,26) рассмотрим схему рис. 131. В этой схеме возможно несколько состояний равновесия [Л. 69]. Сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4, помещенные в плечи моста, являются висмутовыми сопротивлениями.

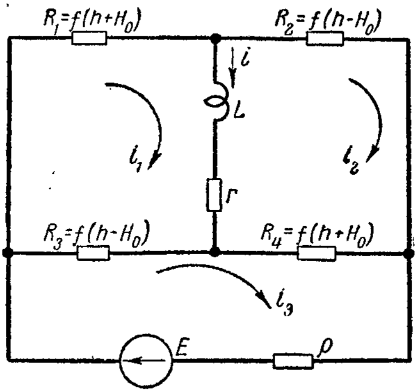


Рис. 131.

В одну из диагоналей моста включена индуктивная катушка, имеющая индуктивность L и постоянное сопротивление r; в другую диагональ — источник э. д. с. E и постоянное сопротивление ρ.

Сопротивление R_1 и равное ему сопротивление R_4 находятся в магнитном поле напряженностью

$$H = h + H_0.$$

Сопротивление R_2 и равное ему сопротивление R_3 находятся в магнитном поле напряженностью

$$H = h - H_0.$$

Здесь h — напряженность поля, создаваемая током i, протекающим по индуктивности L; $h = ki$, где k — коэффициент пропорциональности;

H_0 — составляющая напряженности поля, не зависящая от токов в ветвях схемы. Она создается вспомогательным источником постоянного тока, не показанным на рисунке.

Для анализа работы схемы составим уравнения по методу контурных токов. Положительные направления контурных токов i_1, i_2, i_3 показаны на схеме стрелками.

$$\begin{aligned} &(R_1 + r + R_3)\, i_1 - r i_2 && - R_3 i_3 && = -L\frac{di}{dt}, \\ &-r i_1 && + (R_2 + R_4 + r)\, i_2 - R_4 i_3 && = L\frac{di}{dt}, \\ &-R_3 i_1 \qquad - R_4 i_2 && + (R_3 + R_4 + \rho)\, i_3 = E. && \end{aligned}$$

Учитывая, что $R_3 = R_2$, $R_4 = R_1$, найдем ток i через индуктивность L:

$$i = i_1 - i_2 = \frac{(R_1 - R_2)\,E - (R_1 + R_2 + 2\rho)\,L\dfrac{di}{dt}}{(r+\rho)(R_1 + R_2) + 2(R_1R_2 + r\rho)}.$$

Откуда

$$-L\frac{di}{dt} = \frac{(R_2 - R_1)\,E + i\,[(r+\rho)(R_1 + R_2) + 2(R_1R_2 + r\rho)]}{R_1 + R_2 + 2\rho}.$$

В § 2,26 говорилось, что сопротивление висмутовой пластинки зависит от напряженности магнитного поля H, в которое помещена эта пластинка:

$$R = R_0(1 + cH^2),$$

где R_0 — сопротивление при напряженности магнитного поля, равной нулю;

c — коэффициент.

Поэтому в последней формуле произведем замену:

$$R_1 = R_0(1 + cH^2) = R_0[1 + c(H_0 + ki)^2] = R_0(1 + 2Mi + Ni^2),$$

$$R_2 = R_0[1 + c(H_0 - ki)^2] = R_0(1 - 2Mi + Ni^2),$$

$$M = \frac{ckH_0}{1 + cH_0^2}, \quad N = \frac{ck^2}{1 + cH_0^2}.$$

Тогда

$$-L\frac{di}{dt} = \frac{Ai^5 + Bi^3 + Di}{R_0(1 + Ni^2) + \rho} = \varphi(i),$$

$$A = N^2R_0^2,$$

$$B = NR_0(r + \rho) + 2R_0^2(N - 2M^2),$$

$$D = rR_0 + R_0\rho + \rho r + R_0^2 - 2MER_0.$$

В точках равновесия $Ai^5 + Bi^3 + Di = 0$. Коэффициент $A > 0$. Коэффициенты B и D могут быть как больше, так и меньше нуля.

В точках равновесия кривая $\varphi = f(i)$ пересекает ось абсцисс. Если $\varphi(i) > 0$, то $\frac{di}{dt} < 0$ и ток i уменьшается. При $\varphi(i) < 0$ $\frac{di}{dt} > 0$, и ток i увеличивается.

Возможны четыре типа сочетаний знаков коэффициентов B и D и соответствующих этим сочетаниям типов графиков $\varphi = f(i)$.

1. $B > 0$ и $D > 0$; кривая $\varphi = f(i)$ для этого случая изображена на рис. 132, *а*. Имеется одно устойчивое состояние равновесия. Стрелки на кривой дают направление движения.

2. $B > 0$ и $D < 0$ (рис. 132, *б*). Схема имеет одно неустойчивое состояние равновесия (начало координат) и два устойчивых.

3. $B < 0$ и $D < 0$ (рис. 132, *в*). Имеется одно неустойчивое состояние равновесия и два устойчивых, но при иных значениях токов, чем в предыдущем случае.

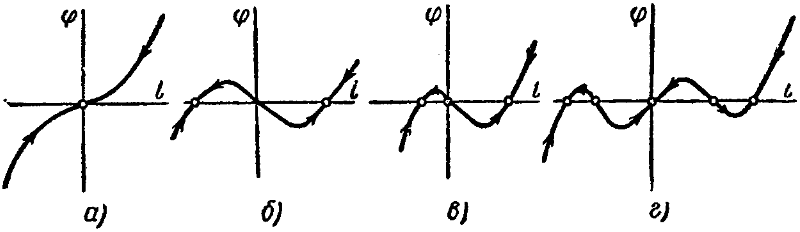


Рис. 132.

4. $B < 0$ и $D > 0$ (рис. 132, *г*). При этом условии имеется пять точек равновесия, из них три устойчивых и две неустойчивых. Одна из устойчивых точек равновесия находится в начале координат.

При практическом использовании схемы (рис. 131) стремятся к тому, чтобы сопротивление r индуктивной катушки было возможно меньше. Триггерный переход от одного состояния равновесия к другому состоянию равновесия происходит при плавном изменении величины э. д. с. E.

§ 8,20. Делитель частоты вдвое

На рис. 133 изображена простейшая схема магнитного делителя частоты вдвое. Два одинаковых магнитопровода имеют по три обмотки.

Обмотки w_2 соединены последовательно и согласно и подключены к источнику синусоидальной э. д. с. Частоту последнего примем равной 2ω. Ток по обмотке w_2 обозначим $\acute{I}_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2)$. Частота на выходе устройства будет равна ω.

Обмотки подмагничивания w_0 соединены согласно и через вспомогательную индуктивность L подключены к источнику постоянного тока I_0. Роль индуктивности L заключается в том, чтобы препятствовать прохождению тока частоты 2ω в цепи обмоток w_0.

Э. д. с. половинной частоты наводится в обмотке w_1. Обмотка w_1 замкнута на активное сопротивление и емкость, и по ней в режиме деления частоты протекает ток $I'_{1m} \sin \omega t$.

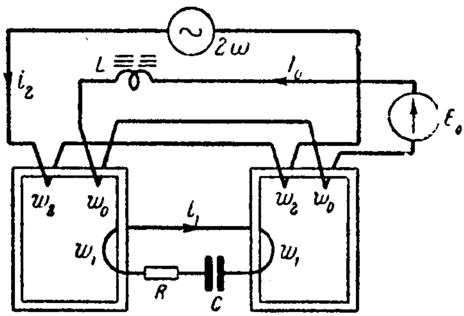


Рис. 133.

Выведем формулы, характеризующие работу делителя вдвое. Для этого выразим кривую намагничивания в виде $B = aH - bH^3$ и подставим в нее

$$H = \frac{1}{l}\,[I'_{2m} w_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + I'_0 w_0 \pm I'_{1m} w_1 \sin \omega t].$$

Знак плюс относится к левому сердечнику, минус — к правому.

Обозначим через l длину средней магнитной линии каждого магнитопровода и примем

$$a' = \frac{a}{l};\; b' = \frac{b}{l^3};\; I_0 = I'_0 w_0;\;\; I_{1m} = I'_{1m} w_1;\;\; I_{2m} = I'_{2m} w_2.$$

Индукция половинной частоты будет равна

$$B_k = R_1 \sin \omega t - S_1 \cos(\omega t + \psi_2); \tag{8,4}$$

$$R_1 = a' I_{1m} - b' \left(\frac{3}{4} I_{1m}^3 + 3 I_0^2 I_{1m} + \frac{3}{2} I_{1m} I_{2m}^2\right); \tag{8,5}$$

$$S_1 = 3 I_0 I_{1m} I_{2m} b'. \tag{8,6}$$

Обозначим для сокращения записи

$$R_k = \frac{R}{w_1} \text{ и } C_k = C w_1.$$

При этом уравнение для контура половинной частоты можно записать так

$$k\,\frac{d^2 B_k}{dt^2} + R_k \frac{di_k}{dt} + \frac{i_k}{C_k} = 0; \tag{8,7}$$

$$k = 2 S w_1,$$

где S — площадь поперечного сечения каждого магнитопровода.

Подстановка формул (8,4—8,6) в уравнение (8,7) приводит к двум уравнениям:

$$-k\omega^2 R_1 - k\omega^2 S_1 \sin\psi_2 + \frac{I_{1m}}{C_k} = 0 \tag{8,8}$$

и

$$k\omega^2 S_1 \cos\psi_2 + \omega R_k I_{1m} = 0. \tag{8,9}$$

Из (8,9) и (8,6) следует, что

$$\cos\psi_2 = -\frac{R_k}{3I_0 I_{2m} k\omega b'}. \tag{8,10}$$

Следовательно,

$$\sin\psi_2 = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{R_k}{3I_0 I_{2m} k\omega b'}\right)^2}. \tag{8,11}$$

Подставив (8,11) в (8,8) и заменив в последнем R_1 согласно (8,5) и S_1 согласно (8,6), получим

$$b'\cdot\frac{3}{4} I_{1m}^2 = a' - M - \frac{3}{2} b' I_{2m}^2 \pm 3I_0 I_{2m} b' \times$$

$$\times\sqrt{1 - \left(\frac{R_k}{3I_0 I_{2m} k\omega b'}\right)^2} - 3\, b' I_0^2; \tag{8,12}$$

$$M = \frac{1}{k\omega^2 C_k}. \tag{8,13}$$

Уравнение (8,12) дает возможность найти квадрат амплитуды тока половинной частоты I_{1m}^2 через параметры схемы a', b', M, k, R_k, ток подмагничивания I_0 и амплитуду тока первой гармоники I_{2m}.

Знак плюс перед корнем в (8,12) соответствует углу ψ_2 во второй четверти, минус — в третьей.

Так как квадрат амплитуды тока не может быть комплексом, то явление деления частоты в схеме рис. 129 может быть только в том случае, когда правая часть (8,12) вещественна и положительна.

При $I_0 < \frac{R_k}{3I_{2m} k\omega b'}$ и при $I_{2m} < \frac{R_k}{3I_0 k\omega b'}$ подкоренное выражение отрицательно. Поэтому при малых I_0 и I_{2m} деление частоты невозможно. Чрезмерное увеличение I_0 и (или) I_{2m} приведет к тому, что правая часть уравнения (8,12) станет отрицательной. Следовательно, при больших I_0 и I_{2m} деление частоты также невозможно.

Если сопротивление R_k превысит значение $3I_0 I_{2m} k\omega b'$, то подкоренное выражение станет отрицательным, и деление частоты окажется невозможным.

Из (8,13) видно, что M обратно пропорционально C_k. Таким образом, при выбранных I_0, I_{2m}, k, a', b' есть некоторое минимальное или пороговое значение C_k, начиная с которого возможно деление частоты.

Делители частоты вдвое, в которых в качестве источника питания на частоте 2ω используется источник тока, а не источник э. д. с., применяются в качестве двоичных элементов в счетных машинах и называются параметронами [Л. 96,114]. Существует несколько типов параметронов. В одном из них состояние 0 соответствует режиму, при котором отсутствует явление деления частоты вдвое. Состояние 1 отвечает режиму, при котором происходит деление частоты вдвое. В другом типе параметронов одно состояние отличается от другого фазой тока низкой частоты (на 180°). В качестве нелинейных элементов в параметронах используют также нелинейные емкости, в частности нелинейные емкости *p-n*-перехода полупроводниковых диодов.

§ 8,21. Преобразование частоты в 3/2 раза

Каскадное включение делителей и умножителей частоты позволяет преобразовывать частоту в $\frac{p}{q}$ раз, где p и q — простые целые числа.

Простейшим преобразователем такого рода является преобразователь частоты в $^3/_2$ раза (рис. 134). В нем частота сначала

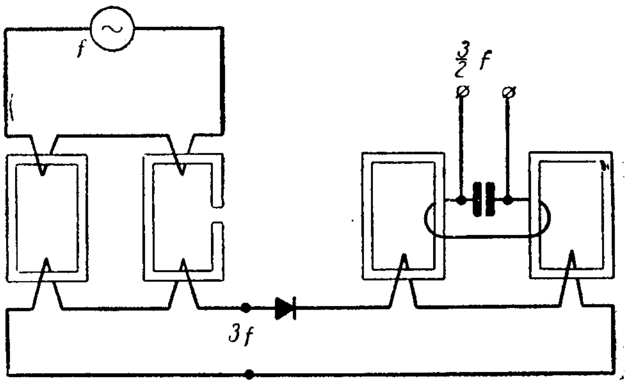


Рис. 134.

умножается в три раза при помощи утроителя (§ 7,11), а затем делится на два. В делителе рис. 134 обмотки w выполняют функции обмоток w_2 и w_1 делителя рис. 133.

Через обмотки w проходит пульсирующий ток после однополупериодного выпрямления напряжения утроителя частоты.

§ 8,22. Применение нелинейных сопротивлений в качестве составных элементов датчиков систем регулирования

В системах автоматического регулирования всегда должен быть чувствительный элемент (датчик), воспринимающий отклонение регулируемой величины от номинала и дающий сигнал об этом в последующие элементы схемы. Напряжение с выхода датчика поступает обычно на усилитель и далее на исполнительный орган.

В качестве датчиков часто используются электрические схемы с НС. На постоянном токе применяют мостовые схемы.

Простейшая из них [см. например, Л.23] изображена на рис. 135. Она составлена из двух одинаковых линейных сопротивлений R и двух одинаковых нелинейных сопротивлений *НС*. Входное напряжение приложено к зажимам *ab*. Напряжение с зажимов *cd* представляет собой напряжение с выхода датчика, оно поступает на усилитель и далее на исполнительный орган.

Параметры схемы подбираются таким образом, что если напряжение U_{ab} равно номинальному, то падение напряжения на НС равно падению напряжения на сопротивлении R и потому напряжение на выходе датчика равно нулю.

При отклонении U_{ab} от номинала на выходе датчика появляется напряжение. Полярность последнего зависит от того, выше или ниже номинального напряжение U_{ab}.

Мостовые схемы применяются и на переменном токе. В качестве нелинейных сопротивлений на переменном токе используют обычно нелинейные индуктивности и нелинейные емкости.

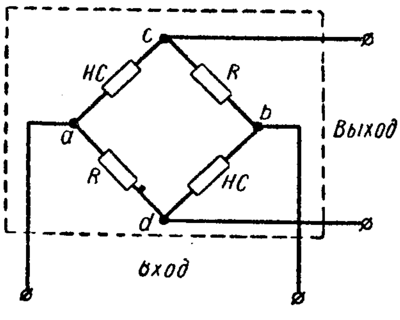


Рис. 135.

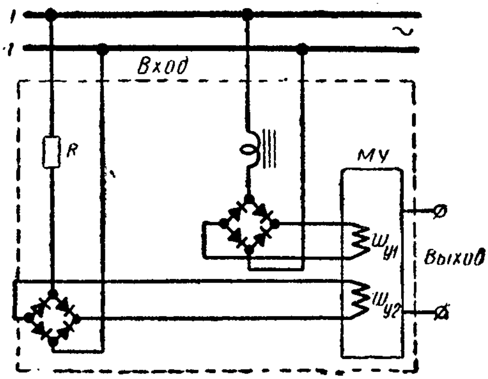


Рис. 136.

На рис. 136 представлена схема, в которой датчик совмещен с магнитным усилителем *МУ*.

Кроме обмоток управления w_{y1} и w_{y2} ($w_{y1} = w_{y2}$) *МУ* имеет обмотку вспомогательного подмагничивания и обмотку обратной связи, не показанные на рис. 136. По w_{y1} и w_{y2} текут выпрямленные токи.

М. д. с., создаваемая w_{y1}, действует встречно м. д. с., создаваемой w_{y2}. Нелинейная индуктивность и сопротивление R выбираются так, чтобы при номинальном напряжении на шинах *I-I* протекающие по w_{y1} и w_{y2} токи были равны. Если напряжение на шинах *I-I* станет выше номинального, то ток по обмотке w_{y1} будет больше тока по w_{y2}. Когда напряжение на шинах станет ниже номинала, то м. д. с. обмотки w_{y1} будет меньше м. д. с. обмотки w_{y2}. Напряжение на выходе *МУ* зависит от знака результирующей м. д. с. управления.

§ 8,23. Устройство для деления двух функций

В § 6,11 рассматривался принцип работы нелинейной индуктивности, управление которой производится при помощи поперечного магнитного поля. В данном параграфе дается одно из возможных применений таких индуктивностей.

Устройство для деления двух функций (рис. 137) состоит из двух одинаковых нелинейных индуктивностей *A* и *B* по типу

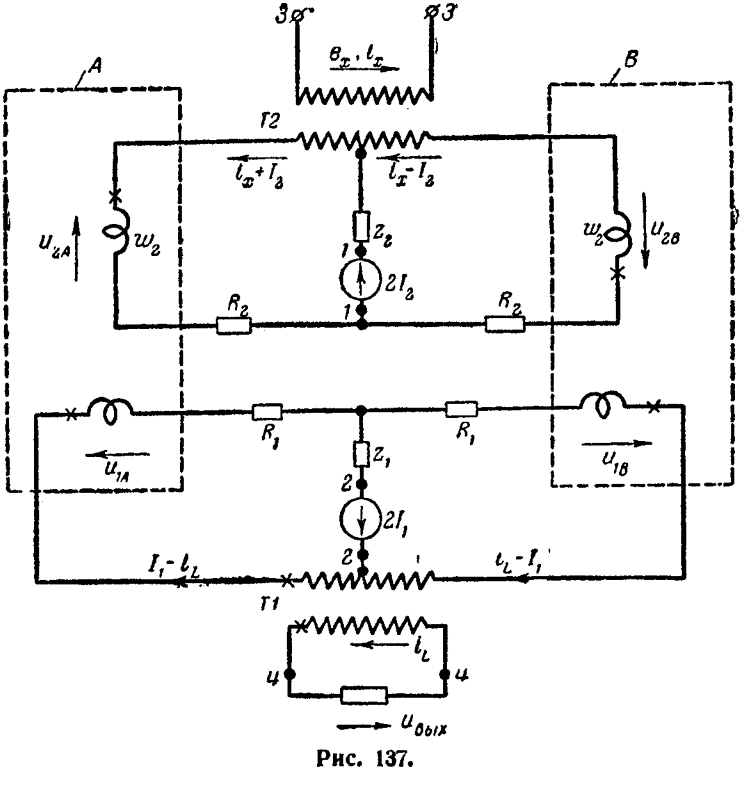


Рис. 137.

индуктивности (рис. 57), в каждой из которых есть и продольное и поперечное магнитные поля, двух вспомогательных идеальных трансформаторов *T1* и *T2* и двух источников постоянного тока $2I_1$ и $2I_2$.

Условимся, что индекс *A* у напряжения и индукции будет свидетельствовать о том, что данная величина относится к нелинейной индуктивности *A* и индекс *B* — к нелинейной индуктивности *B*. Каждая из нелинейных индуктивностей имеет по 2 обмотки. Первая обмотка (w_1) каждой нелинейной индуктивности создает продольное магнитное поле, а вторая обмотка (w_2), расположенная перпендикулярно первой, — поперечное магнитное поле.

Продольное и поперечное магнитные поля в сердечнике каждой нелинейной индуктивности имеют и постоянную, и переменную составляющие (в этом отличие от режимов работы нелинейной индуктивности рис. 57).

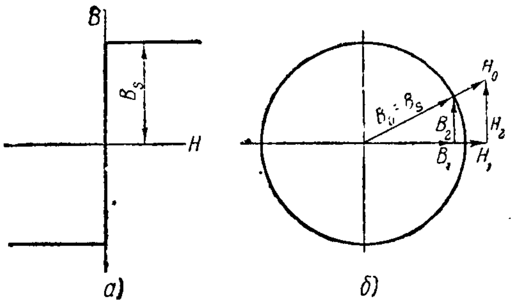


Рис. 138.

Ферритовые сердечники нелинейных индуктивностей имеют почти прямоугольные кривые намагничивания (рис. 138, *а*).

Индукцию насыщения назовем B_s.

К зажимам *1 — 1* (см. рис. 137) присоединяется источник постоянной э. д. с., который дает постоянный ток $2I_2$. Пусть этот ток пропорционален некоторой функции F_1.

К зажимам *2 — 2* присоединяется источник постоянной э. д. с., дающий постоянный ток $2I_2$. Последний пусть будет пропорционален некоторой другой функции F_2.

К первичной обмотке вспомогательного трансформатора *T2* (зажимы *3 — 3*) подключен источник синусоидальной э. д. с. $\sqrt{2}\,E \sin \omega t$.

Выходное напряжение снимается со вторичной обмотки другого вспомогательного трансформатора *T1* (зажимы *4 — 4*). Амплитуда выходного напряжения $u_{вых}$ пропорциональна отношению токов $\frac{I_2}{I_1}$, т. е. пропорциональна частному от деления функций F_2 и F_1.

Активные сопротивления R_2 малы по сравнению с индуктивными сопротивлениями поперечной цепи, поэтому при составлении уравнения для поперечной цепи по переменному току их учитывать не будем. Не будем учитывать и малые активные сопротивления R_1.

Сопротивление Z_2 представляет собой достаточно большое индуктивное сопротивление, и ветвь с Z_2 можно считать в расчетном отношении разомкнутой для переменного тока.

Сопротивление Z_1 — это относительно малое индуктивное сопротивление. Звездочки у обмоток с одинаковыми индексами означают одноименные зажимы этих обмоток.

Положительные направления для токов и напряжений указаны стрелками. В соответствии с [Л. 70] составим основные уравнения для схемы рис. 137.

Сумма падений напряжения на обмотках w_2 индуктивностей A и B

$$u_{2A} + u_{2B} = \sqrt{2}\, E \sin \omega t. \tag{8,14}$$

Обозначим:

$$b_2 = \frac{E}{\sqrt{2}\, \omega w_2 S_2 B_s}; \tag{8,15}$$

S_2 — сечение, по которому проходит поперечный магнитный поток;

S_1 — сечение, по которому проходит продольный магнитный поток;

B_{2A} и B_{2B} — мгновенные значения поперечной магнитной индукции соответственно в сердечнике A и в сердечнике B;

B_{1A} и B_{1B} — мгновенные значения продольной магнитной индукции соответственно в сердечнике A и в сердечнике B.

Ток первичной обмотки трансформатора $T2$ назовем i_x.

$$\frac{B_{2A} + B_{2B}}{B_s} = -2b_2 \cos \omega t. \tag{8,16}$$

Напряжение на выходе устройства

$$u_{\text{вых}} = w_1 S_1 \frac{d}{dt}(B_{1A} - B_{1B}). \tag{8,17}$$

В соответствии с рис. 138, *б* для каждого из сердечников

$$B_1^2 + B_2^2 = B_0^2 = B_s^2. \tag{8,18}$$

Дифференцируя (8,18) по времени и учитывая, что $B_s = \text{const}$, получим

$$B_1 \frac{dB_1}{dt} + B_2 \frac{dB_2}{dt} = 0. \tag{8,19}$$

Следовательно,

$$-u_{\text{вых}} = w'_1 S \left(\frac{B_{2A}}{B_{1A}} \frac{dB_{2A}}{dt} - \frac{B_{2B}}{B_{1B}} \cdot \frac{dB_{2B}}{dt} \right). \tag{8,20}$$

Полагая магнитные сердечники однородными и изотропными, имеем

$$\frac{B_1}{H_1} = \frac{B_2}{H_2} = \frac{B_0}{H_0}, \tag{8,21}$$

где H_1 — продольная, H_2 — поперечная составляющие полной H_0 напряженности поля в сердечнике.

Применим уравнение (8,21) к нелинейной индуктивности A. Учтем, что H_1 в сердечнике A создается током $I_1 - i_L$, а H_2 создается током $i_x + I_2$. Поэтому

$$\frac{B_{1A}}{\frac{w_1}{l_1}(I_1 - i_L)} = \frac{B_{2A}}{\frac{w_2}{l_2}(i_x + I_2)}, \tag{8,22а}$$

где i_L — ток в нагрузке;

l_1 и l_2 — длины средних линий для продольного и поперечного магнитных потоков.

Аналогичное уравнение запишем для индуктивности B:

$$\frac{B_{1B}}{\frac{w_1}{l_1}(i_L + I_1)} = \frac{B_{2B}}{\frac{w_2}{l_2}(i_x - I_2)}. \tag{8,22б}$$

Если учесть, что каждое из произведений $S_1 l_1 = S_2 l_2$ есть объем сердечника, и обозначить

$$a = \frac{w_2 l_1}{w_1 l_2} = \frac{w_2 S_2}{w_1 S_1},$$

то вместо (8,22а) и (8,22б) получим

$$a(i_x + I_2) = \frac{B_{2A}}{B_{1A}}(I_1 - i_L), \tag{8,23а}$$

$$a(i_x - I_2) = \frac{B_{2B}}{B_{1B}}(i_L + I_1). \tag{8,23б}$$

Вычтем (8,23б) из (8,23а):

$$2aI_2 = I_1\left(\frac{B_{2A}}{B_{1A}} - \frac{B_{2B}}{B_{1B}}\right) - i_L\left(\frac{B_{2A}}{B_{1A}} + \frac{B_{2B}}{B_{1B}}\right). \tag{8,24}$$

Работа системы характеризуется уравнениями (8,15), (8,20) и (8,24). Решим эти уравнения для частного случая работы, когда

$$i_L = 0, \quad |B_{2A}| \ll B_s \text{ и } |B_{2B}| \ll B_s. \tag{8,25}$$

В этом случае

$$|B_{1A}| \approx |B_{1B}| \approx B_s. \tag{8,26}$$

С учетом (8,25) и (8,26) уравнение (8,24) запишем так:

$$2a\frac{I_2}{I_1} = \frac{B_{2A} - B_{2B}}{B_s}. \tag{8,27}$$

Из (8,26) и (8,27) найдем

$$\frac{B_{2A}}{B_s} = a\frac{I_2}{I_1} - b_2 \cos \omega t, \tag{8,28а}$$

$$\frac{B_{2B}}{B_s} = -a\frac{I_2}{I_1} - b_2 \cos \omega t. \tag{8,28б}$$

Имея в виду уравнения (8,26), (8,28а), (8,28б), перепишем уравнение (8,20) следующим образом:

$$-\frac{u_{\text{вых}}}{w_1 S_1 B_s} = \frac{B_{2A}}{B_s}\frac{d}{dt}\left(\frac{B_{2A}}{B_s}\right) - \frac{B_{2B}}{B_s}\frac{d}{dt}\left(\frac{B_{2B}}{B_s}\right) =$$

$$= \left(a\frac{I_2}{I_1} - b_2\cos\omega t\right)\omega b_2\cdot\sin\omega t + \left(a\frac{I_2}{I_1} + b_2\cos\omega t\right)\omega b_2\sin\omega t =$$

$$= 2a\frac{I_2}{I_1}\omega b_2\sin\omega t. \qquad (8,29)$$

Амплитуда выходного напряжения

$$U_{\text{вых}.m} = 2\omega w_1 B_s a b_2\frac{I_2}{I_1} \qquad (8,30)$$

пропорциональна отношению постоянных токов $\frac{I_2}{I_1}$.

В заключение отметим, что осуществление операции деления двух функций может производиться и при помощи электронных устройств (см., например, [Л. 40]).

9

Применение нелинейных сопротивлений для выполнения логических операций и новые элементы быстродействующих вычислительных машин

В качестве элементов вычислительных машин используются запоминающие и логические элементы.

Запоминающие элементы предназначены для запоминания поступившей в них информации.

Логические элементы предназначены для выполнения логических операций при образовании новых чисел.

В вычислительных машинах все операции производят над числами, представленными не в десятичном, а в двоичном исчислении.

Двоичное исчисление — это исчисление, основанное на представлении чисел в виде степеней числа 2 таким образом, что коэффициенты при степенях числа 2 равны либо 1, либо 0.

Так, число 13 можно представить в виде суммы $2^3 + 2^2 + 1$, или $13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Коэффициентами при различных степенях числа 2 в данном случае являются числа 1101.

Таким образом, число 13 в двоичном исчислении запишется так:

$$13 = 1101.$$

И запоминающие, и логические устройства выполняются на двоичных элементах.

Двоичными элементами называют элементы, имеющие два резко отличных состояния. Условно принимают, что одно состояние элемента соответствует цифре 1, а другое состояние цифре 0 двоичного исчисления.

В качестве двоичных элементов используют триггеры на электронных лампах и полупроводниковых диодах и триодах, магнитные триггеры на сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, диэлектрические триггеры, различные сочетания магнитных триггеров с диодами и триодами, магнитные ленты и электронно-лучевые трубки, принцип действия которых рассматривается, например, в [Л. 45,49], а также ряд новых элементов (§ 9,2 — 9,9).

§ 9,1. Типы основных логических операций

Основными логическими операциями (логическими преобразованиями) являются: операция *И*, операция *ИЛИ* и операция запрета.

На базе этих простейших операций выполняются более сложные логические преобразования.

Операция *И* поясняется рис. 139, *а* и состоит в том, что сигнал на выходе устройства, выполняющего эту операцию, появляется только при условии, если сигналы одновременно поступят на вход a и на вход b, т. е. если одновременно замкнутся ключи a и b.

Принято эту операцию записывать в символической форме:

$$c = ab.$$

Схема рис. 139, *б*, построенная на диодах, предназначена для выполнения операции *И*. Схемы, предназначенные для выполнения операции *И*, называют также схемами совпадения.

Ток в нагрузке $R_н$ появится только в том случае, если под воздействием сигналов a и b будут закрыты оба диода. Если одного из сигналов не будет, то сопротивление $R_н$ окажется закороченным проводящим диодом.

На схеме рис. 140, *а* поясняется операция *ИЛИ*. Сигнал на выходе схемы появится, если возбудится a или b.

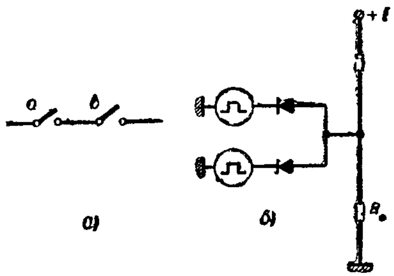


Рис. 139.

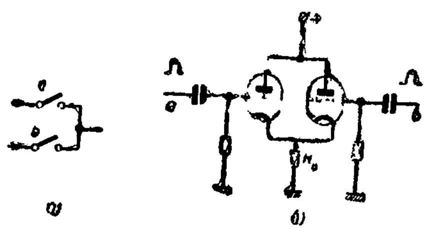


Рис. 140.

Для этой операции принято символическое обозначение:

$$c = a + b.$$

Импульс тока в нагрузке $R_н$ (рис. 140,*б*) появится, если на сетке одной из ламп появится импульс э. д. с. положительной полярности.

На схеме рис. 141,*а* поясняется операция запрет. Схемы, выполняющие операцию запрет, называются также схемами несовпадения.

Сигнал на выходе появится, если возбудится *a* и не возбудится *b*. Если же сигнал одновременно поступит на вход *a* и на вход *b* (запрещающий вход), то сигнала на выходе не возникнет.

Символическое обозначение операции запрет:

$$c = a\bar{b}.$$

Выполнение операции запрет из магнитном элементе с прямоугольной петлей гистерезиса поясняется рис. 141, *б*. На кольцевом сердечнике находятся четыре обмотки: входные обмотки w_a и w_b, выходная обмотка $w_{вых}$ и обмотка w_c, приводящая сердечник в исходное состояние (в точку 0 на рис. 141, *в*). По обмотке w_c протекает постоянный ток. Направление намотки w_b противоположно направлению намотки w_a.

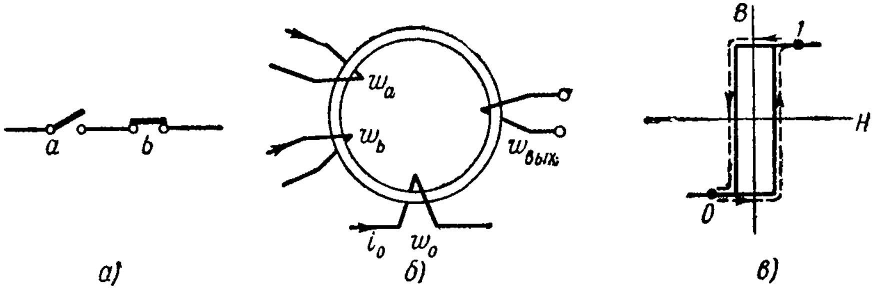


Рис. 141.

При поступлении импульса тока в обмотку w_a изображающая точка на рис. 141, *в* переместится из точки 0 в окрестность точки 1 и затем при прекращении импульса тока в обмотке w_a возвратится снова в точку 0. На зажимах выходной обмотки возникает импульс э. д. с.

Если сигнал одинаковой полярности поступит одновременно в обмотку w_a и в обмотку w_b, то сердечник не перемагнитится и на выходе не появится импульс э. д. с.

§ 9,2. Твистор

Твистор является элементом памяти, действие которого основано на явлении магнитострикции и эффекте Видемана [Л. 82,39].

Если кусочек неотожженной никелевой проволоки несколько закрутить вокруг ее оси, то в проволоке возникнут напряжения сжатия по винтовой линии (геликоиде) и напряжение растяжения в перпендикулярном к ней направлении.

Направление, в котором никель сильнее сжат, т. е. направление геликоиды, будет являться направлением наиболее легкого намагничивания.

Если теперь закрученную никелевую проволоку намагничивать, пропуская ток $I_у$ по намагничивающей обмотке (рис. 142), то силовые линии магнитного поля расположатся по винтовой линии, а на концах проволоки возникнет разность потенциалов.

Явление возникновения э. д. с. на концах закрученной никелевой проволоки при пропускании тока по намагничивающей обмотке, называют прямым эффектом Видемана.

Возникновение э. д с. может быть пояснено следующим образом.

Кусочек никелевой проволоки составляет как бы часть витка, остальная часть которого показана пунктиром. Магнитный поток, направленный вдоль винтовой линии, несколько раз пронизывает этот виток и наводит в нем значительную э. д. с.

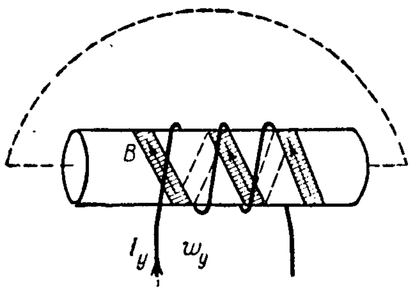


Рис. 142.

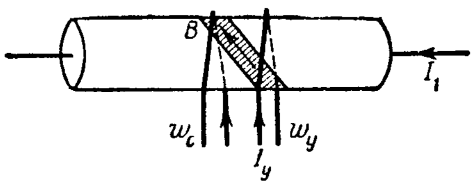


Рис. 143.

Наведенная э. д. с. во много раз превышает ту э. д. с., которая могла бы возникнуть в никелевой проволоке вследствие наличия паразитных связей между проволокой и намагничивающей обмоткой.

Кроме прямого эффекта Видемана существует и обратный эффект Видемана.

Обратный эффект состоит в том, что при намагничивании кусочка никелевой проволоки двумя токами, один из которых течет вдоль проволоки, а другой по намагничивающей обмотке, охватывающей никелевую проволоку, последняя, во-первых, намагнитится по геликоиде и, во-вторых, вследствие явления магнитострикции несколько закрутится вокруг своей оси.

Устройство твистора показано на рис. 143.

Вдоль оси кусочка никелевой проволоки диаметром 0,075 *мм* пропускается ток I_1 порядка 0,13 *а*. Этот ток недостаточен для намагничивания никелевой проволоки, имеющей кривую намагничивания, близкую к идеально прямоугольной.

По управляющей обмотке $w_у$, охватывающей никелевую проволоку на небольшой ее длине, пропускается импульс тока управления $I_у$ с амплитудой порядка 2—3 *а*.

Совместное действие токов I_1 и $I_у$ вызывает местное намагничивание никелевой проволоки по геликоиде — на проволоке записан сигнал единица.

Если от вспомогательного генератора подать на обмотку считывания $w_с$, расположенную в непосредственной близости от обмотки управления, импульс тока, амплитуда м. д. с. которого равна примерно 6 *а*, то произойдет местное перемагничивание никелевой проволоки, а на концах проволоки вследствие эффекта Видемана появится импульс э. д. с. с амплитудой порядка 3,5 *мв* и длительностью около $2 \cdot 10^{-6}$ *сек*.

Если же к моменту считывания никелевая проволока не была местно намагничена, то импульс тока в считывающей обмотке не вызовет или почти не вызовет появления э. д. с. на концах этой проволоки.

§ 9,3. Криотрон

Криотрон представляет собой управляемое активное сопротивление, принцип действия которого основан на использовании зависимости температуры, при которой возникает явление сверхпроводимости, от величины напряженности магнитного поля [Л. 116,39,117].

Устройство криотрона иллюстрируется рис. 144.

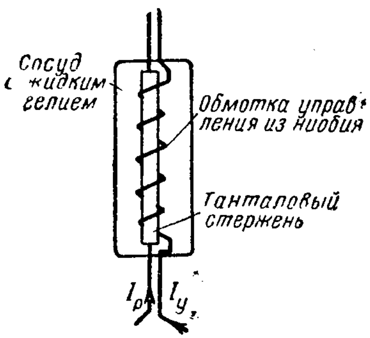


Рис 144.

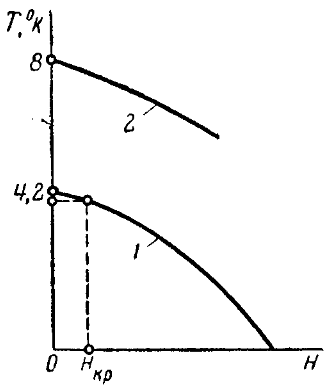


Рис. 145.

В сосуд Дьюара с жидким гелием помещен тонкий танталовый стержень длиной 25,4 *мм* и диаметром 0,225 *мм* в шелковой или какой-либо иной изоляции. На танталовую проволоку, как на сердечник, нанесена обмотка управления из ниобиевой проволоки диаметром 0,075 *мм*. Концы танталового стержня и обмотки управления выведены из сосуда.

Температура, при которой происходит переход от состояния сверхпроводимости к состоянию нормальной проводимости, зависит от величины напряженности магнитного поля H, в котором находится танталовый стержень и ниобиевая обмотка. Кривая *1* на рис. 145 характеризует эту зависимость для тантала, а кривая *2* для ниобия.

Если рабочая точка будет находиться ниже кривой *1*, то танталовый стержень будет в состоянии сверхпроводимости, т. е. его сопротивление будет равно нулю. Если рабочая точка будет находиться выше кривой *1*, то танталовый стержень будет в состоянии нормальной проводимости, при этом его сопротивление равно 0,0085 *ом*.

Аналогично кривая *2* отделяет область сверхпроводимости для ниобия (лежит ниже кривой *2*) от области нормальной проводимости для него (выше кривой *2*).

Так как температура жидкого гелия при соответствующем давлении равна 4,0°К, то при этой температуре сопротивление танталового стержня и обмотки из ниобия равно нулю, если напряженность магнитного поля H равна нулю.

Если температура останется равной 4,0°К, а напряженность поля станет больше некоторого критического значения $H_{кр}$, то тантал перейдет из состояния сверхпроводимости в состояние нормальной проводимости, но ниобий при этом останется в состоянии сверхпроводимости.

Следовательно, путем изменения величины напряженности магнитного поля H можно скачком менять величину сопротивления танталового стержня.

При работе криотрона напряженность H создается рабочим током $I_р$ и током управления $I_у$. Рабочий ток $I_р$, протекающий по танталовому стержню, создает напряженность поля H_1, направление которой совпадает с направлением касательной к стержню. Ток управления $I_у$, протекающий по обмотке управления, создает напряженность поля H_2, направленную вдоль оси стержня.

Результирующая напряженность поля на поверхности стержня

$$H_{рез} = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}.$$

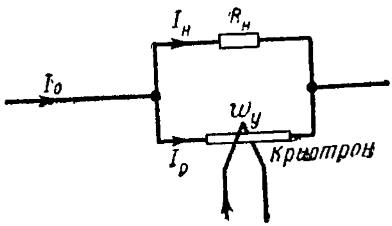


Рис. 146.

На рис. 146 показана схема включения криотрона. Схема питается от источника тока I_0.

Когда танталовый стержень находится в состоянии сверхпроводимости, ток в нагрузке $R_н$ равен нулю. Когда танталовый стержень находится в состоянии нормальной проводимости (сопротивление его в этом состоянии пусть равно $R_р$), ток в нагрузке

$$I_н = I_0 \frac{R_р}{R_р + R_н}.$$

Практически в один сосуд с жидким гелием помещают большое количество криотронных элементов.

Достоинства криотрона — малые габариты и очень малая мощность управления; недостатки — необходимость в глубоком охлаждении и относительно малая выходная мощность (т. е. мощность, выделяемая в нагрузке $R_н$).

§ 9,4. Криосар

Криосар — управляемое активное сопротивление, принцип действия которого основан на возникновении под действием электрического поля в условиях глубокого охлаждения эффекта ударной ионизации атомов примесей, введенных в p-германий.

Конструктивно криосар выполнен в виде пластинки p-германия размерами порядка $0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}05$ *см*. На двух противолежащих боковых гранях этой пластинки имеются электроды. Пластинка германия и электроды помещены в сосуд Дьюара и находятся при температуре жидкого гелия.

Когда напряжение на электродах достигает 3—7 *в* (в зависимости от типа примесей), возникает ударная ионизация атомов примесей, введенных в германий. При возникновении ударной ионизации ток через пластинку германия скачком возрастает примерно в 10^7 раз.

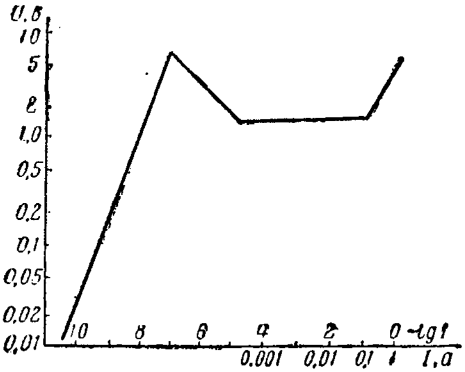


Рис. 147.

На рис. 147 изображена S-образная в. а. х. криосара.

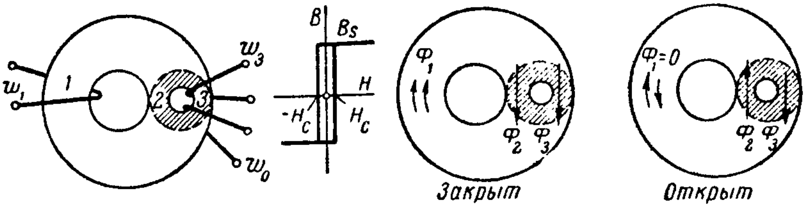
Достоинства криосара — быстродействие (время, затрачиваемое на цикл — увеличение и уменьшение тока, составляет всего $2 - 5 \cdot 10^{-8}$ *сек*), малый объем (в 1 кубическом дюйме помещается 200 000 элементов), тождественность (повторяемость) характеристик элементов, способность пропускать большие токи, большая надежность. Недостаток криосара — необходимость в глубоком охлаждении.

§ 9,5. Трансфлюксор

Трансфлюксор представляет собой запоминающий элемент, считывание с которого производится без разрушения записи [Л. 76].

Сердечник простейшего трансфлюксора имеет форму, изображенную на рис. 148, *а*. Он выполняется из материала с почти прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 148, *б*). В сердечнике есть два отверстия неравных диаметров. Эти отверстия разделяют сердечник на три стержня — *1*, *2*, *3*. Площади поперечных сечений стержней *2* и *3* одинаковы, а площадь стержня *1* в узком месте либо равна, либо больше суммы сечений стержней *2* и *3* в узких местах.

Обмоткой w_1 осуществляется управление режимом работы трансфлюксора, поступающие в нее импульсы приводят к тому, что трансфлюксор переводится из состояния „открыт" в состояние „закрыт" и обратно. w_3 является обмоткой основной рабочей



а) б) в) г)

Рис. 148.

цепи (цепи питания); при работе по ней протекает переменный ток. w_0 — выходная обмотка; в ней наводится э. д. с., если трансфлюксор открыт, и не наводится э. д. с., если трансфлюксор закрыт.

Пусть к началу процесса ни по одной из обмоток не протекает ток, сердечник размагничен и изображающая точка на рис. 148, *б* находится в начале координат.

Пропустим через обмотку w_1 импульс тока такой интенсивности, чтобы напряженности полей в стержнях *2* и *3* превысили значение коэрцитивной силы H_c. При этом стержни *2* и *3* перейдут в насыщенное состояние и индукция в них будет равна индукции насыщения B_s (рис. 148, *в*). В этом случае трансфлюксор находится в положении „закрыт".

Если теперь через обмотку w_3 пропустить переменный ток i_3 не очень большой амплитуды, то в выходной обмотке w_0 не будет наводиться э. д. с.

Объясняется это тем, что в течение одного полупериода переменного тока насыщен один стержень (скажем, второй), а в течение второго полупериода насыщен другой (третий) стержень. Поэтому в течение обоих полупериодов переменного тока обмотки w_0 и w_1 фактически развязаны, так как магнитное сопротивление по замкнутому контуру, образованному стержнями *2* и *3* (заштрихованное кольцо на рис. 148, *в*), достаточно велико.

Пропустим теперь через управляющую обмотку w_1 импульс тока обратного направления такой амплитуды, чтобы напряженность поля в стержне *2* превысила значение коэрцитивной силы H_c, а напряженность поля в стержне *3* в силу его большей удаленности от стержня *1* еще не достигла значения H_c. При этом произойдет реверсирование потока в стержне *2*, а направление потока в стержне *3* не изменится. Трансфлюксор перейдет в состояние „открыт", которое показано на рис. 148, *г*.

При открытом трансфлюксоре протекание переменного тока достаточной амплитуды по обмотке w_3 приведет к перемагничиванию стержней *2* и *3* и поэтому в выходной обмотке будет наводиться э. д. с.

Меняя амплитуду импульсов тока в обмотке w_1, можно перемагничивать стержень *2* частично, поскольку для каждой амплитуды управляющего импульса есть граничная окружность, снаружи которой напряженность поля оказывается меньше коэрцитивной силы H_c. При этом меняется сечение магнитного пути, связывающего обмотки w_3 и w_0. Таким способом можно регулировать величину напряжения на зажимах выходной обмотки w_0.

Во время работы трансфлюксора происходит реверсирование потока только в стержнях *2* и *3* без сколько-нибудь существенного ответвления потока в стержень *1*. Этим объясняется развязка управляющей цепи от цепи питания и выходной цепи.

Амплитуда тока в обмотке w_3 не должна быть чрезмерно большой, когда трансфлюксор находится в состоянии „закрыт". Иначе произойдет ложное открытие трансфлюксора, так как в этом случае, грубо говоря, напряженность поля, создаваемая током i_3 на половине длины окружности минимального радиуса вокруг меньшего отверстия, достигнет значения, равного индукции насыщения ферритового сердечника, поделенной на магнитную проницаемость вакуума.

В настоящее время применяются трансфлюксоры с тремя и бо́льшим количеством отверстий.

§ 9,6. Леддик

Леддик (рис. 149) — это многостержневой магнитный элемент, предназначенный для выполнения логических операций [Л. 70,83]. Магнитная система леддика по форме напоминает лестницу. Все стержни и ярма имеют равное поперечное сечение.

В конструкции, описанной в [Л. 70], размер $a = 0{,}7$ *мм*, размер $b = 0{,}6 — 0{,}9$ *мм*. Магнитная система выполнена из феррита с почти прямоугольной петлей гистерезиса.

Леддик, изображенный на рис. 149, *а*, предназначен для выполнения логической операции *И* для трех каналов, которую можно записать так:

$$F = ABC.$$

Магнитная система леддика, изображенного на рис. 149, имеет 8 стержней. В леддик входят обмотки четырех типов: $w_н$ — обмотки, устанавливающие начальное распределение потоков, $w_у$ — обмотки управления, $w_{вх}$ — входная обмотка, $w_{вых}$ — выходная обмотка.

Четыре обмотки $w_н$ расположены на ярмах (через ярмо).

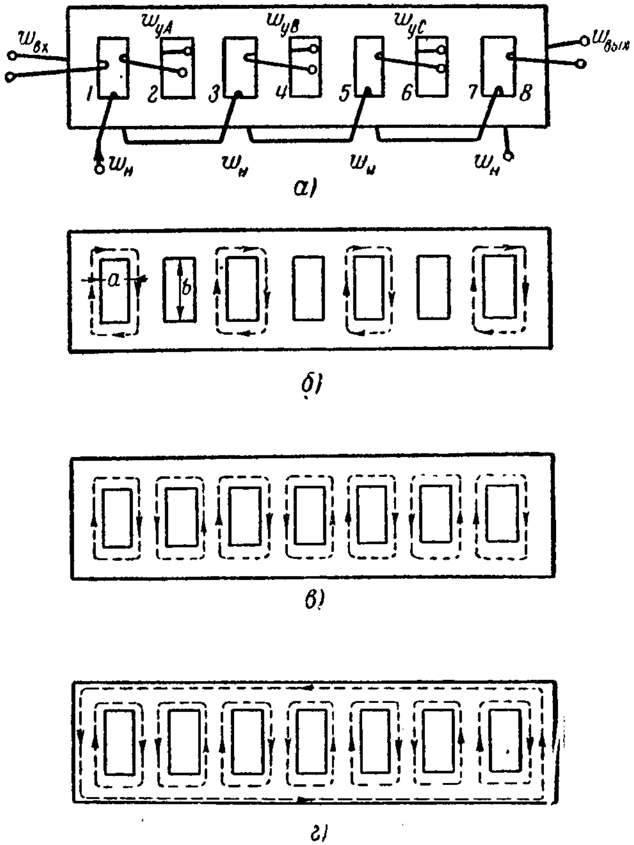


Рис. 149.

Обмотки управления $w_{уA}$, $w_{уB}$, $w_{уC}$ расположены соответственно на втором, четвертом и шестом стержнях.

Входная обмотка $w_{вх}$ расположена на первом стержне, выходная $w_{вых}$ — на восьмом стержне.

Напряжение на зажимах выходной обмотки появится только при условии, если на зажимы управляющих обмоток одновременно поступят управляющие импульсы определенной амплитуды.

В силу прямоугольности петли гистерезиса поток одного направления может заполнять сечение какого-либо участка магнитной цепи полностью или частично. Поэтому на каждом участке магнитной цепи на рис. 149, *б*, *в*, *г* изображены или по одной, или по две пунктирных линии. Стрелки указывают положительные направления соответствующих частичных потоков. Если половина какого-либо участка заполнена потоком одного направления, а другая половина того же участка заполнена потоком другого направления, то стрелки у потоков на данном участке направлены в противоположные стороны.

На рис. 149, *б*, *в*, *г* показано распределение магнитных потоков в магнитной системе при последовательной подаче импульсов тока в различные обмотки леддика.

На рис. 149, *б* изображено распределение потоков, которое установится, если полностью размагниченную магнитную систему подвергнуть намагничиванию путем пропускания импульса тока достаточной амплитуды через обмотки $w_н$.

На рис. 149, *в* представлено распределение потоков, которое возникает после того, как магнитную систему, находящуюся в состоянии, изображенном на рис. 149, *б*, подвергнуть намагничиванию импульсами токов управления, пропускаемыми одновременно по обмоткам w_{yA}, w_{yB}, w_{yC}.

Положительные направления токов управления и остальных токов показаны на рис. 149, *а*.

Если через входную обмотку $w_{вх}$ пропустить импульс тока достаточной величины, для того чтобы намагнитить стержни *1* и *8* и все ярма на половине их сечения, то на зажимах выходной обмотки возникнет импульс э. д. с. Величина амплитуды импульса э. д. с. при одновитковой обмотке $w_{вых}$ составляет около 0,02 *в*, а продолжительность импульса от 3 до 6 *мксек*.

§ 9,7. Биакс

Элемент памяти биакс (рис. 150, *а*, [Л. 106, 107]) представляет собой ферритовый параллелепипед размерами 1,25×1,25×2,1 *мм* с двумя непересекающимися одинаковыми отверстиями размерами 0,5×0,5 *мм*. Через верхнее отверстие проходит провод записи и провод считывания (съема), через нижнее — провод первоначального намагничивания (записи) и провод опроса.

Работа элемента основана на использовании поворота вектора намагниченности в намагниченной до насыщения перемычке, находящейся между верхним и нижним отверстиями.

Положим, что параллелепипед находится в размагниченном состоянии. Пропустим по проводу записи и по проводу первоначального намагничивания импульсы тока такой полярности, что направление магнитного потока вокруг верхнего и нижнего отверстий будет соответствовать рис. 150, *а*.

Импульсы тока записи имеют достаточную амплитуду, чтобы намагнитить перемычку до насыщения.

После прекращения действия импульсов тока записи перемычка останется намагниченной (направление магнитного потока в ней соответствует рис. 150, *б*).

Провод первоначального намагничивания после этого можно убрать.

Если затем подать в обмотку опроса импульс тока такой полярности, что он создаст поток вокруг нижнего отверстия того же направления, что и ранее действовавший импульс записи, то вектор намагниченности в перемычке, намагниченной до насыщения, повернется в соответствии с направлением действия поля

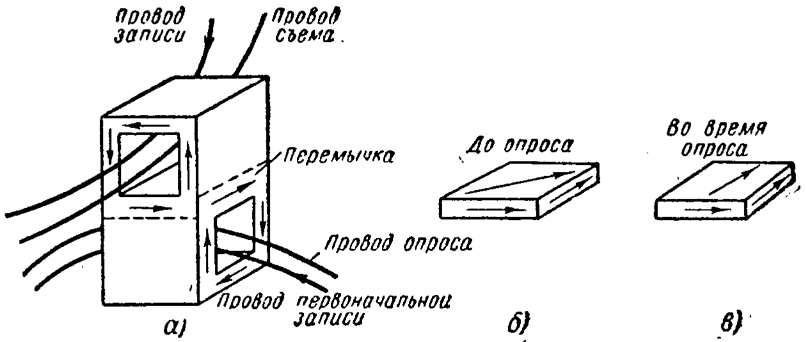


Рис. 150.

опроса и примет положение, изображенное на рис. 150, *в*. При этом уменьшится поток, пронизывающий обмотку считывания, — в обмотке считывания возникнет импульсная э. д. с. Знак э. д. с. зависит от направления потока вокруг верхнего отверстия до подачи импульса опроса. Знак плюс соответствует записи 1, знак минус — записи 0.

После окончания действия импульса опроса вектор намагниченности в перемычке, а следовательно, и магнитный поток в ней, принимают то направление, которое они имели до подачи импульса опроса*.

При считывании информация не разрушается. При одновитковых обмотках ток опроса составляет ~200 *ма*; э. д. с. считывания ~40 *мв*; время считывания ~0,2 *мксек*.

Элементы памяти типа биакс надежны в работе и дешевы.

---

*Иное объяснение работы биакса дано в [Л. 120].

§ 9,8. Пленочные магнитные элементы

Пленочные магнитные элементы изготовляются следующим образом [Л. 39, 81]. На стеклянную пластинку толщиной 0,1 *мм* путем конденсации паров железо-никелевого сплава в постоянном магнитном поле наносится пленка диаметром 0,125 *мм* и толщиной $\sim 10^{-5}$ *мм*. Пленка обладает магнитной анизотропией. Направление оси легкого намагничивания в ней совпадает с направлением действия постоянного магнитного поля, созданного при образовании пленки. Ось тяжелого намагничивания расположена перпендикулярно к оси легкого намагничивания. Пленку охватывают три обмотки (рис. 151): входная, выходная и ведущая. Входная и выходная расположены одинаково, ведущая — к ним перпендикулярно.

Магнитное поле, создаваемое входной обмоткой, направлено по оси легкого намагничивания, а создаваемое ведущей обмоткой — по оси тяжелого намагничивания.

При подаче импульса тока в ведущую обмотку пленка намагнитится по оси тяжелого намагничивания.

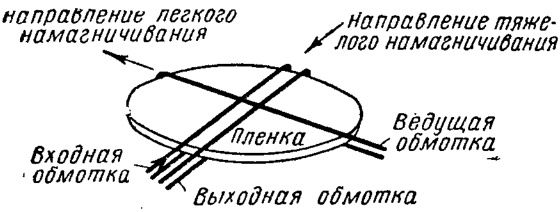


Рис. 151.

Если в момент спада импульса тока в ведущей обмотке подать импульс тока во входную обмотку, то вектор намагниченности пленки повернется по направлению от оси тяжелого намагничивания к оси легкого намагничивания. При этом в выходной обмотке возникнет импульс э. д. с. Полярность последнего зависит от направления импульса тока во входной обмотке.

Обмотки выполняются методами, используемыми при изготовлении печатных схем, и охватывают большое количество элементов памяти.

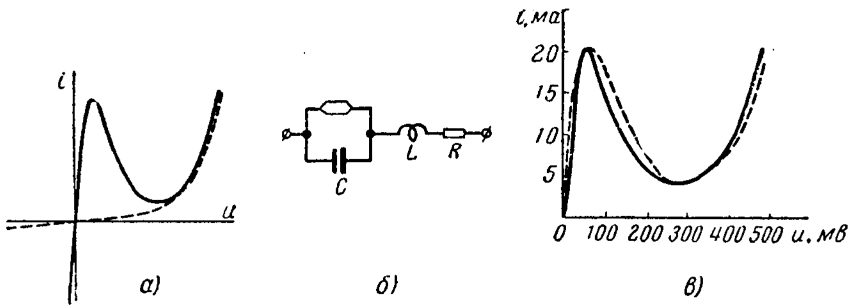
§ 9,9. Туннельный диод

Туннельный диод — это германиевый диод, в котором плотность концентрации акцепторных и донорных примесей в p- и n-областях примерно на три порядка больше, чем в обычных диодах ($\sim 10^{19}$ *см*$^{-3}$ в туннельном диоде и $\sim 10^{16}$ *см*$^{-3}$ в обычных диодах), а толщина области p-n-перехода на один-два порядка меньше, чем в обычных диодах (у туннельного диода около $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ *см*, у обычных $10^{-5} - 10^{-4}$ *см*).

В результате указанных особенностей в рассматриваемых диодах резко проявляется туннельный эффект, который состоит в том, что в определенных условиях носители проходят через потенциальный барьер малой толщины, даже если энергия носителей меньше энергии, необходимой для преодоления ими потенциального барьера.

Разумеется, это пояснение туннельного эффекта имеет лишь качественный характер, более подробное объяснение можно найти, например, в [Л. 110].

На рис. 152, *а* сплошной линией показана в. а. х. туннельного диода, а пунктирной линией — в. а. х. обычного германиевого диода.



а) б) в)

Рис. 152.

В проводящем направлении в. а. х. туннельного диода имеет N-образную форму. В непроводящем направлении характеристика его почти линейна и расположена более круто, чем у обычных диодов.

Ввиду малой толщины *p-n*-перехода носители зарядов могут сравнительно быстро проходить через него (за время порядка 10^{-9} *сек*). Благодаря этому туннельные диоды применяются при частоте вплоть до $2 \cdot 10^8$ *гц*.

На рис. 152, *б* изображена схема замещения туннельного диода для высоких частот. На этой схеме идеализированный диод, т. е. диод, не обладающий емкостью, индуктивностью и потерями в контактах, представлен прямоугольником со скошенными углами. Емкость запорного слоя C обусловлена пространственным зарядом. По данным фирмы RCA при частоте $f = 10^7$ *гц* $C \approx 140 - 170$ *пф*, индуктивность $L \approx 0{,}4 \cdot 10^{-9}$ *гн*.

Потери в активном сопротивлении R, равном примерно 1 *ом*, эквивалентны потерям в контактах.

Для описания N-образных в. а. х. туннельных диодов применяют различные аналитические зависимости, в частности следующую:

$$i = (A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + A_4 u^7) \cdot e^{-\frac{u}{u_p}} + A_5 (c^{39u} - 1), \qquad (a)$$

где i — ток, *ма*;

u — напряжение, *в*;

u_p — напряжение, при котором ток i достигает максимума на участке N-характеристики.

Характеристика диода фирмы RCA изображена сплошной линией на рис. 152, *в*. Пунктирной кривой представлена аппроксимирующая кривая по уравнению (а) при следующих значениях коэффициентов:

$$A_1 = 950;\ A_2 = 702;\ A_3 = -1{,}133 \cdot 10^5;\ A_4 = 2{,}907 \cdot 10^6;$$

$$A_5 = 3{,}442 \cdot 10^{-7}.$$

В заключение заметим, что в последнее время в литературе появились сообщения о создании управляемых туннельных сопротивлений — туннельных триодах*.

---

*См., например, „Journal of the Britisch Institution of Radio Engineers", 1961.

10

Применение нелинейных сопротивлений при электромоделировании

Под электромоделированием понимают метод изучения свойств механических, электромеханических, аэродинамических, акустических, гидродинамических, тепловых и других систем и происходящих в них явлений, а также получение численных решений путем использования электрических моделей.

Существуют два направления в электромоделировании.

Первое направление основано на выявлении свойств изучаемой системы путем исследования процессов в электрической модели-аналоге. В этом случае каждому физическому элементу изучаемой неэлектрической или частично неэлектрической системы соответствует вполне определенный элемент схемы аналога, а параметры схемы модели находятся в таком же соотношении друг к другу, в каком находятся параметры исследуемой системы.

Второе направление основано на создании структурных моделей*.

Структурные модели составляются из отдельных электрических звеньев или блоков, каждый из которых служит либо для интегрирования, либо для дифференцирования, либо для выполнения арифметических или алгебраических операций (сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.).

Структурные модели служат для выполнения операций, предписываемых самим дифференциальным уравнением или уравнениями, описывающими поведение изучаемой системы.

---

* В данной главе не затрагивается вопрос о физическом моделировании. При физическом моделировании изучение процессов в установках оригиналах производят путем исследования процессов в малогабаритных моделях. Параметры модели находятся в таком же соотношении друг к другу, в каком находятся параметры установки оригинала.

Электромоделирование путем использования моделей-аналогов является более физичным (так как отчетливо видно, какое влияние на процесс в целом оказывает каждый элемент системы).

Однако оно обладает меньшей универсальностью и гибкостью, чем структурное моделирование, потому что не любые естественные нелинейные зависимости различных неэлектрических элементов могут быть достаточно просто и точно воспроизведены в требуемых границах путем использования соответствующих электрических элементов в моделях-аналогах.

В настоящей главе кратко рассматривается применение нелинейных сопротивлений при электромоделировании. Для основательного ознакомления с различными вопросами электромоделирования рекомендуется обратиться к [Л. 37,38, 40].

Прежде всего остановимся на том, как осуществляется переход от неэлектрической системы к ее электрическому аналогу. Этот переход рассмотрим на примере механических систем; для иных систем переход осуществляется аналогичным образом.

§ 10,1. Составление схем замещения для механических систем

Механические системы подразделяются на системы поступательного, вращательного и поступательно-вращательного движения.

Любая механическая система состоит из активных и пассивных элементов.

Активные элементы являются источниками энергии, пассивные — потребителями энергии. Активные элементы подразделяются на источники силы f и источники скорости v для цепей поступательного движения, на источники вращательного момента M и источники угловой скорости ω для цепей вращательного движения.

Пассивные элементы подразделяются на элементы упругости, трения и массы. С целью упорядочения составления электрической схемы, моделирующей механическую систему, сначала по чертежу механической системы составляют схему механической цепи (схему замещения). При составлении схем замещения механических цепей полагают, что пассивные элементы цепи обладают каким-либо одним свойством: упругостью, трением или массой. Например, считают, что пружина обладает только упругостью, а массу пружин не учитывают.

На рис. 153 показаны условные изображения элементов механических систем поступательного и вращательного движения: S — элемент упругости невесомой идеальной пружины; R — элемент трения; m — элемент массы; f — источник силы; v — источник скорости (стрелка показывает положительное направление скорости); источник скорости обеспечивает постоянство разности скоростей между теми точками схемы, к которым он присоединен, независимо от величины нагрузки.

При вращательном движении положение точек механической системы определяется углом поворота ϑ относительно начального положения и угловой скоростью $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$.

Элемент упругости при вращении (например, закручиваемый вал) обладает тем свойством, что под воздействием вращающего момента M происходит закручивание элемента на угол ϑ.

$$M = S_в \vartheta = S_в \int \omega dt \text{ или } \omega = e_в \frac{dM}{dt},$$

где

$S_в$ — упругость при закручивании;

$e_в = \frac{1}{S_в}$ — податливость при закручивании.

Для элемента инерции J при вращении справедливы соотношения:

$$M = J \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega = \frac{1}{J} \int M dt.$$

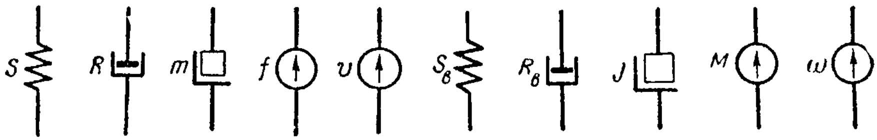


Рис. 153.

Элемент трения при вращении характеризуется сопротивлением трения при вращении $R_в$.

Вращающий момент M, сопротивление при вращении $R_в$ и угловая скорость ω связаны соотношениями;

$$M = \omega R_в, \quad \omega = \frac{M}{R_в}.$$

Независимо от величины нагрузки источник вращающего момента M обеспечивает постоянство момента, а источник угловой скорости ω обеспечивает постоянство угловой скорости.

Порядок составления схемы механической цепи токов:

1) выбирают систему отсчета для сил и скоростей (вращающих моментов и угловых скоростей);

2) соединяют между собой узлы, имеющие одинаковую скорость или смещение;

3) соединяют неподвижные узлы в один узел;

4) между соответствующими узлами изображают активные и пассивные элементы.

Рассмотрим два простейших примера на составление схемы замещения механических систем. В первом примере механическая система поступательного движения, во втором — вращательного.

Пример 1. Механическая система (рис. 154, *а*) образована массой m, опирающейся на пружину упругостью $S = \frac{1}{e}$. На тело действует внешняя сила $f(t)$. При движении тела возникает трение о среду. Вся система находится в замкнутом пространстве. Требуется составить схему замещения этой системы.

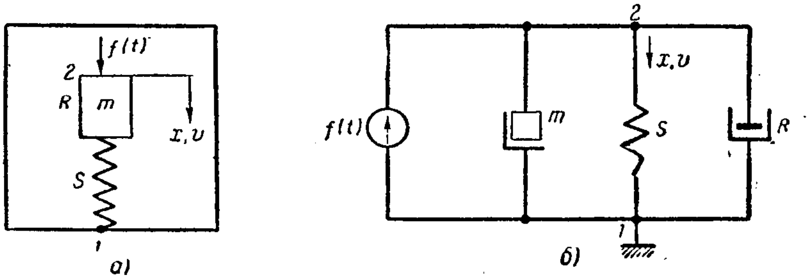


Рис. 154.

Решение. Неподвижный узел назовем узлом *1*, подвижный — узлом *2*. На схеме замещения (рис. 154, *б*) между двумя узлами изображены 4 ветви: ветвь с источником силы $f(t)$, ветвь с инерционным элементом массы m, ветвь с элементом упругости S и ветвь с элементом трения R.

По первому закону механики сумма всех сил, действующих в узле *2*, равна нулю. Следовательно,

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} + R\dot{x} + \frac{1}{e}\int \dot{x}dt = f(t), \tag{10,1}$$

где $m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\frac{d^2\dot{x}}{dt^2}$ — реакция системы, обусловленная силой инерции;

$R\dot{x}$ — реакция системы, вызванная трением;

$\frac{1}{e}\int \dot{x}dt$ — реакция системы, обусловленная деформацией пружины;

x — отклонение тела от исходного положения, когда сила $f(t)$ отсутствует.

Пример 2. На рис. 155, *а* изображена механическая система вращательного движения. Система образована двумя маховиками, находящимися на общем валу. К концам вала приложен постоянный вращающий момент M и дополнительный

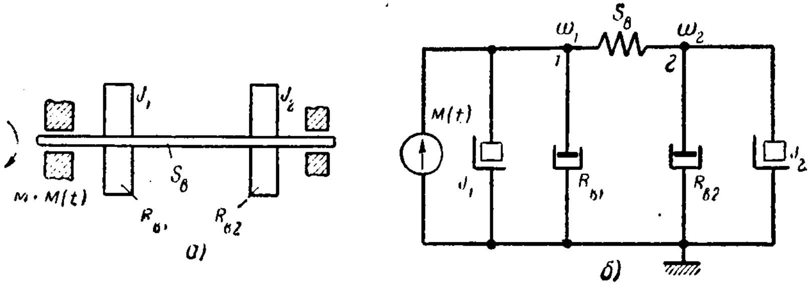


Рис. 155.

момент вращения $M(t)$. Моменты инерции маховиков равны J_1 и J_2. Упругость вала между маховиками равна $S_в$. Упругостью концов вала можно пренебречь. Трение маховиков о среду характеризуется сопротивлением трения $R_{в1}$ для первого маховика и $R_{в2}$ — для второго. Требуется составить схему замещения для определения процессов в системе под действием дополнительного вращающего момента $M(t)$.

Решение. Под действием постоянного момента M вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_п$. После приложения к концу вала дополнительного момента $M(t)$ угловая скорость первого маховика не будет равна угловой скорости вращения второго маховика, так как вал способен закручиваться.

В схеме замещения, представленной на рис. 155, *б*, три узла. Первый узел соответствует первому маховику, второй — второму маховику, третий — точке, от которой производится отсчет приращений угловой скорости по отношению к угловой скорости $\omega_п$. ω_1 — дополнительная угловая скорость вращения первого маховика; ω_2 — дополнительная угловая скорость вращения второго маховика.

§ 10,2. Основные законы для механических систем

Для механических систем справедливы два основных закона, в дальнейшем называемые первым и вторым.

Для систем поступательного движения первый закон (в литературе его называют также законом Ньютона, уравнением Даламбера) формулируется следующим образом:

алгебраическая сумма мгновенных значений реакций системы и мгновенных значений внешних сил в любом узле системы равна нулю:

$$\Sigma f(t) = 0.$$

Этот закон может быть сопоставлен с первым законом Кирхгофа для электрических цепей.

Второй закон для систем поступательного движения формулируется так:

алгебраическая сумма относительных скоростей в любом замкнутом контуре равна нулю:

$$\Sigma v(t) = 0.$$

Этот закон можно сопоставить со вторым законом Кирхгофа.

Для механических систем вращательного движения эти законы формулируются несколько иначе.

Первый закон — алгебраическая сумма моментов вращения от внешних сил и от сил реакций в любом узле системы равна нулю:

$$\Sigma M(t) = 0.$$

Второй закон — алгебраическая сумма угловых скоростей вдоль любого замкнутого контура системы равна нулю:

$$\Sigma \omega(t) = 0.$$

§ 10,3. Два вида аналогий

Между отдельными величинами изучаемой неэлектрической системы и ее электрической моделью может быть проведена формальная аналогия.

Существуют два вида аналогий в соответствии с тем, что для каждой электрической цепи можно построить дуальную ей цепь.

Первый тип аналогий основан на сопоставлении силы (момента) и скорости изучаемой неэлектрической системы соответственно с напряжением и током в электрической модели.

Второй тип аналогий основан на сопоставлении силы (момента) и скорости соответственно с током и напряжением в электрической модели.

Рассмотрим эти два типа аналогий применительно к механическим системам.

Механической системе рис. 154, *б* согласно первому типу аналогий отвечает электрическая схема рис. 156, *а* с источником э. д. с. Схема рис. 156, *а* получена из схемы рис. 154, *б* путем замены источника механической силы $f(t)$ на источник э. д. с. $e(t)$, скорости v на ток i, массы m на индуктивность L, сопротивления трения R на электрическое сопротивление R, податливости пружины $e = \frac{1}{S}$ на емкость C.

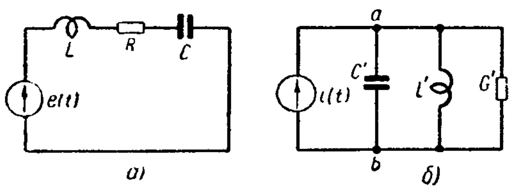


Рис. 156.

Для электрической цепи (рис. 156, *а*) справедливо уравнение

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = e(t).$$

Если в системе рис. 154 сила $f(t)$ будет изменяться во времени по гармоническому закону $f(t) = F_m \sin(\omega t + \psi)$, то в соответствии с уравнением (10,1) амплитуда скорости $\dot{x}_m$ отклонения тела от равновесного состояния в установившемся режиме будет равна

$$\dot{x}_m = \frac{F_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega m - \frac{1}{\omega e}\right)^2}}.$$

В электрической цепи амплитуда тока I_m при $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ будет равна

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

В электрической цепи при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ возникает резонанс. Аналогичный процесс возникает и в механической цепи при $\omega m = \frac{1}{\omega e}$.

Рассмотрим второй вид аналогий.

На рис. 156, *б* изображена электрическая схема, дуальная по отношению к схеме рис. 156, *а*, где $i(t)$ — источник тока.

Параметры дуальной схемы G', L', C' выбираем так, чтобы они были связаны с параметрами R, L, C схемы рис. 156, *а* соотношением

$$\frac{R}{G'} = \frac{L}{C'} = \frac{L'}{C};$$

при этом ток $i(t)$ должен изменяться во времени по тому же закону, по которому изменяется э. д. с. $e(t)$. Тогда закон изменения во времени контурного тока в схеме рис. 156, *а* совпадает с законом изменения разности потенциалов u между точками a и b на рис. 156, *б*.

Для последней схемы справедливо уравнение

$$C' \frac{du}{dt} + G'u + \frac{1}{L'} \int u dt = i(t). \qquad (10,2)$$

Если сравнить уравнение (10,2) с уравнением (10,1), то можно сделать вывод, что сопоставимыми величинами во втором виде аналогий являются: сила — ток; скорость — напряжение; масса — емкость; податливость — индуктивность; сопротивление трения — проводимость.

Для механических систем вращательного движения полностью справедливы оба рассмотренных вида аналогий. Надо только вместо силы F вводить вращающий момент M, вместо линейной скорости v — угловую скорость ω, вместо массы m — момент инерции J и т. д.

В качестве примера на рис. 157 изображены две электрические схемы, моделирующие механическую систему (рис. 155, *а*). Эти схемы дуальны друг другу.

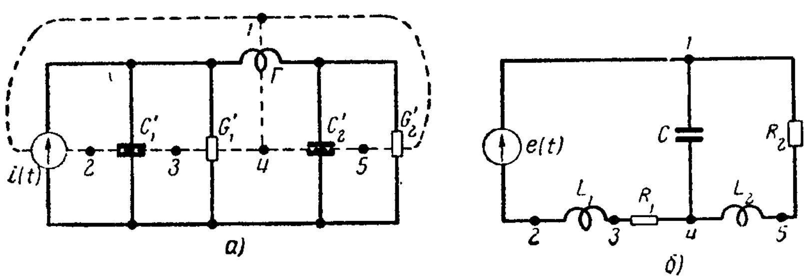


Рис. 157.

Схема на рис. 157, *а* основана на втором виде аналогий, а схема рис. 157, *б* на первом.

Первая схема получена путем замены вращающего момента $M(t)$ на источник тока $i(t)$, моментов инерции J на емкости C, сопротивлений трения при вращении $R_в$ на проводимости G, упругости $S_в$ при вращении на инверсную индуктивность $Г$.

Для облегчения перехода от схемы с источником тока $i(t)$ к дуальной ей схеме с источником э. д. с. $e(t)$ на схеме рис. 157, *а* поставлены точки *1, 2, 3, 4, 5*, а через элементы схемы проведены пунктирные линии, соединяющие эти точки.

Точки соответствуют узлам, а пунктирные линии ветвям дуальной схемы. В ветвях схемы рис. 157, *б* включены элементы, дуальные по отношению к соответствующим элементам схемы рис. 157, *а*.

§ 10,4. Электромоделирование при помощи структурных моделей

Структурная модель представляет собой электрическую цепь последовательно отрабатывающую операции, предписываемые дифференциальным уравнением системы.

На схеме структурную модель принято изображать в виде блок-схемы. Каждое звено блок-схемы является звеном направленного действия и производит какую-то одну или несколько математических операций, например, умножение на постоянные множители и суммирование нескольких входных величин, интегрирование, изменение знака величины (инвертирование) и т. п. Выполняемая блоком операция указывается на нем в виде условного значка. Так, значок $\int$ означает интегрирование, — 1 — инвертирование, Σ — суммирование, $\times$ — умножение и т. д.

На рис. 158 изображена блок-схема структурной модели для решения уравнения

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}+k\,\frac{dx}{dt}+\frac{x}{e}=f(t).$$

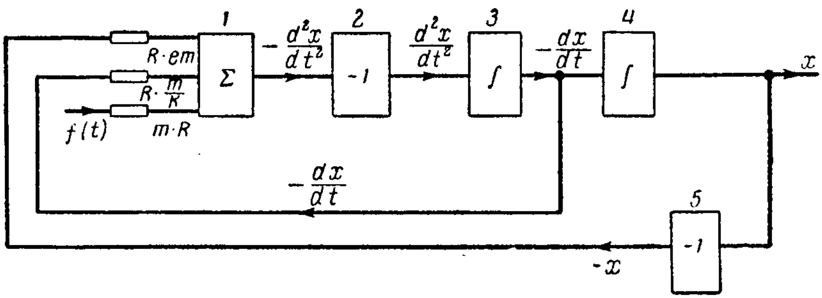


Рис. 158.

Это уравнение характеризует поведение системы, схема которой дана на рис. 154, *a*.

Разрешим записанное выше уравнение относительно старшей производной:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{em}x - \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{m}f(t).$$

Первое звено схемы рис. 158 является звеном, в котором производится умножение величины $-x$ на произведение $\frac{1}{em}$, $-\frac{dx}{dt}$ на $\frac{k}{m}$, $f(t)$ на m и суммирование полученных величин. На выходе его образуется сумма:

$$-\frac{1}{em}x - \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{m}f(t).$$

Второе звено является инвертирующим звеном.

Третье звено — интегрирующее. На выходе третьего звена образуется величина $-\frac{dx}{dt}$. Эта величина поступает на вход четвертого (интегрирующего) звена. На выходе последнего получается искомая величина $x(t)$.

Рассмотрим каждое из звеньев в отдельности.

Интегрирующее звено обычно выполняется по схеме рис. 159, *a*. Оно состоит из линейного усилителя с отрицательной обратной связью, операторный коэффициент усиления которого равен $K(p)$, сопротивления Z_1, включенного на входе усилителя, и сопротивления Z_2 в цепи обратной связи.

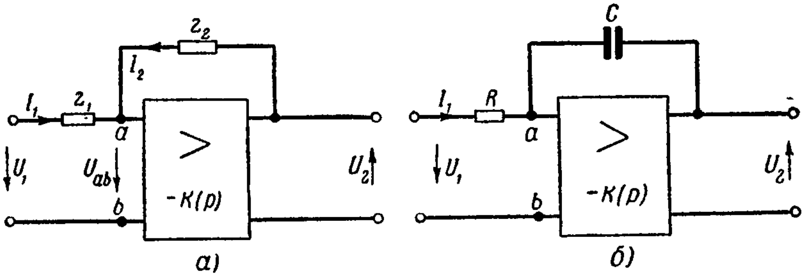


Рис. 159.

Сопротивления Z_1 и Z_2 в операторной форме обозначим $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$.

Входное сопротивление самого усилителя по отношению к зажимам *a* и *b* весьма велико, теоретически бесконечно велико, поэтому в соответствии с положительными направлениями, принятыми на рис. 159, *a* для токов и напряжений, имеем

$$I_1 + I_2 = 0,$$

или

$$\frac{U_1(p)-U_{ab}(p)}{Z_1(p)}+\frac{U_2(p)-U_{ab}(p)}{Z_2(p)}=0.$$

Подставим в последнее выражение

$$U_{ab}(p)=-\frac{U_2(p)}{K(p)}$$

и разрешим уравнение относительно $U_1(p)$:

$$U_1(p)=-U_2(p)\left[\frac{Z_1(p)}{Z_2(p)}\left(1+\frac{1}{K(p)}\right)-\frac{1}{K(p)}\right].$$

Если коэффициент усиления усилителя на частоте ω $|K(j\omega)|\gg 1$, то отношение

$$\frac{U_1(p)}{U_2(p)}=-\frac{Z_1(p)}{Z_2(p)}$$

практически не зависит от величины коэффициента усиления.

Обычно в интегрирующем звене берут $Z_1=R$, а сопротивление Z_2 выполняют в виде емкости C (рис. 159, *б*). В этом случае

$$U_2(p)=-U_1(p)\frac{1}{RCp} \quad \text{или} \quad u_2(t)=-\frac{1}{RC}\int u_1(t)dt.$$

Суммирующее звено с отрицательной обратной связью изображено на рис. 160. Как и в предыдущих схемах, линейный усилитель имеет операторный коэффициент усиления $-K(p)$.

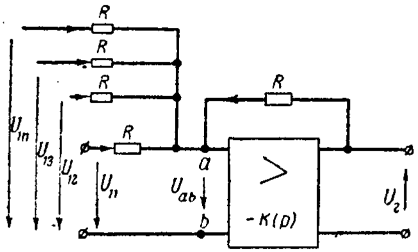


Рис. 160.

Обратная связь осуществляется через активное сопротивление R.

Схема имеет n параллельных входов через одинаковые сопротивления R.

Входные напряжения назовем U_{11}, U_{12}, U_{13},...,U_{1n}.

Напряжение на входе усилителя на зажимах a и b назовем U_{ab}.

Положительные направления напряжений и токов показаны на схеме стрелками.

Входное сопротивление самого усилителя по отношению к зажимам a и b полагаем равным бесконечности.

Сумма токов в узле a равна нулю. Поэтому

$$\frac{\sum\limits_1^n [U_{1n}(p)-U_{ab}(p)]}{R}+\frac{U_2(p)-U_{ab}(p)}{R}=0.$$

Подставим

$$U_{ab}(p)=-\frac{U_2(p)}{K(p)}$$

и разрешим уравнение относительно $U_2(p)$;

$$U_2(p) = -\frac{\sum_1^n U_{1n}(p)}{1 + \frac{1+n}{K(p)}}.$$

Если коэффициент усиления усилителя на частоте ω $|K(j\omega)| \gg 1$, а n невелико, то

$$U_2(p) = -\sum_1^n U_{1n}(p), \tag{10,1}$$

т. е. напряжение на выходе суммирующего звена равно сумме напряжений на входе.

Суммирующее звено, позволяющее при суммировании умножать суммируемые величины на постоянные множители, изображено на рис. 161.

На первый вход через сопротивление $\frac{R}{a}$ поступает напряжение U_{1a}; на второй вход через сопротивление $\frac{R}{b}$ — напряжение U_{1b}.

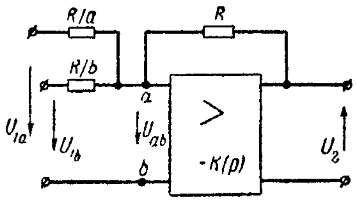


Рис. 161.

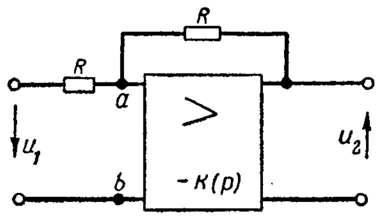


Рис. 162.

Выходное напряжение U_2 равно сумме напряжений $aU_{1a} + bU_{1b}$.

В цепи обратной связи усилителя включено сопротивление R. Сумма токов в узле a равна нулю. Поэтому

$$\frac{U_{1a}(p) - U_{ab}(p)}{\frac{R}{a}} + \frac{U_{1b}(p) - U_{ab}(p)}{\frac{R}{b}} + \frac{U_2(p) - U_{ab}(p)}{R} = 0.$$

Подставим

$$U_{ab}(p) = -\frac{U_2(p)}{K(p)}$$

и разрешим уравнение относительно $U_2(p)$:

$$U_2(p) = -\frac{aU_{1a}(p) + bU_{1b}(p)}{1 + \frac{1+a+b}{K(p)}}.$$

При $|K(j\omega)| \gg 1$

$$U_2(p) \approx -[aU_{1a}(p) + bU_{1b}(p)].$$

Для суммирующего звена схемы рис. 158 $a = \frac{m}{K}$ и $b = em$.

Каждое структурное звено, имеющее усилитель с отрицательной обратной связью, если в нем не предусмотрены дополнительные инвертирующие элементы, производя соответствующую операцию, выдает результат с обратным знаком. Например, если на вход интегрирующего звена поступает $\frac{dx}{dt}$, то на выходе его получают не x, а $-x$.

Инвертирующие элементы могут быть либо встроены в структурные звенья, тогда последние выдают результат с положительным знаком, либо могут быть выполнены в виде отдельных звеньев.

Схема инвертирующего звена изображена на рис. 162.

Напряжение на выходе звена u_2 равно напряжению на входе u_1, взятому с обратным знаком:

$$u_2 = -u_1.$$

Этот результат следует из формулы (10,1), если в ней положить $n = 1$.

§ 10,5. Некоторые типичные нелинейности механических систем

В механических системах нелинейными характеристиками обладают упругие и фрикционные элементы, а также элементы, передающие движение.

Нелинейная зависимость между силой упругости и деформацией возникает вследствие предварительных затяжек пружин, введения промежуточных опор, а также работы материала за пределом упругости.

На рис. 163 изображено несколько типичных зависимостей силы упругости пружины $f(x)$ от ее растяжения x по отношению к состоянию покоя: *1* — характеристика линейной пружины; *2* — характеристика пружины, у которой податливость уменьшается с увеличением растяжения; *3* — характеристика пружины, податливость которой увеличивается с увеличением растяжения.

Различные зависимости силы трения от скорости показаны на рис. 164.

По оси абсцисс на этом рисунке откладывается скорость $v = \frac{dx}{dt}$, а по оси ординат — сила трения $F_{тр}$.

Прямая *1* характеризует линейное трение смазанных твердых тел, а также трение твердого тела в газообразной среде при относительно малой скорости.

Кривая 2 характеризует силу трения, которая пропорциональна квадрату скорости. Такая зависимость возникает, например, при движении тел в газообразной среде с относительно большими скоростями.

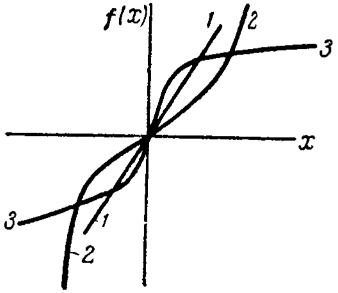


Рис. 163.

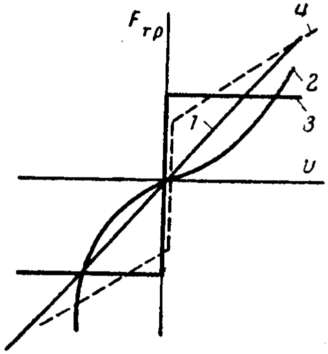


Рис. 164.

Ломаная 3 характеризует так называемое сухое, или Кулоново, трение. В этом случае сила трения не зависит от величины скорости перемещения одного твердого тела по другому и лишь меняет знак при изменении направления скорости.

Ломаная 4 характеризует силу трения, когда в системе одновременно имеет место сухое и линейное трение.

При передаче движения (в механической передаче) возникают нелинейности, характер которых изображен на рис. 165. По оси абсцисс откладывается входная величина, по оси ординат — выходная.

Для рис. 165, *а* характерно наличие ограничения в изменении выходной величины (в обобщенном смысле можно говорить о насыщении).

Характеристика на рис. 165, *б* свидетельствует о наличии зоны нечувствительности и насыщения.

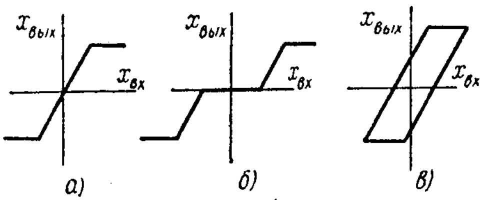


Рис. 165.

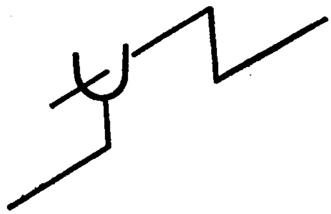


Рис. 166.

Характеристика на рис. 165, *в* свидетельствует о наличии в системе зазора (люфта). Такие характеристики имеет, например, система передачи движения от одного валика к другому через вилку (рис. 166).

§ 10,6. Воспроизведение нелинейных механических зависимостей на электрических моделях-аналогах

Если электрическая модель-аналог создается на основе первого из названных выше видов аналогий (сила — напряжение, скорость — ток), то нелинейная зависимость силы трения от скорости имитируется зависимостью напряжения на нелинейном активном сопротивлении от протекающего через него тока, а нелинейная зависимость силы упругости от величины деформации может быть имитирована зависимостью напряжения на нелинейной емкости от величины заряда q на одной из ее обкладок.

Если же электрическая модель-аналог создается на основе второго вида аналогии (сила — ток, скорость — напряжение), то зависимость $F_{тр} = f(v)$, как и в первом виде аналогий, имитируется при помощи нелинейного активного сопротивления, а характеристика упругого элемента имитируется зависимостью тока, протекающего через нелинейную индуктивность, от потокосцепления $i = f(\psi)$.

Нелинейные зависимости моделируемой системы должны быть известны перед сборкой схемы модели.

При создании моделей-аналогов используют нелинейные сопротивления, характеристики которых близки к требуемым. Путем последовательного и параллельного соединения их с другими линейными или нелинейными сопротивлениями добиваются достаточно близкого соответствия требуемой форме.

§ 10,7. Воспроизведение нелинейных зависимостей в уравнениях, описывающих поведение моделируемой установки, при использовании структурных моделей

Для воспроизведения нелинейных зависимостей в уравнениях, описывающих поведение моделируемой установки, при использовании метода структурных моделей применяют два способа.

Первый способ состоит в применении нелинейных сопротивлений, формы естественных характеристик которых близки к требуемым.

Второй способ состоит в применении схем искусственных нелинейностей (двухполюсников), составленных из вентилей, линейных сопротивлений и источников опорных напряжений.

Нелинейные зависимости $u_2 = f(u_1)$ в этих способах получают путем включения естественных или искусственных нелинейностей во входную цепь или в цепь обратной связи усилителя с отрицательной обратной связью в соответствии со схемами на рис. 167.

В схеме на рис. 167,*а* *НС* с вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$ включено во входную цепь усилителя, а обратная связь осуществляется через линейное сопротивление R.

Если учесть, что при достаточно большом коэффициенте усиления напряжение на входе самого усилителя $u_{ab} \approx 0$ и что входное сопротивление самого усилителя стремится к бесконечности, то с точностью до знака

$$i = f(u_1) = \frac{u_2}{R}.$$

Отсюда следует, что

$$u_2 \doteq Rf(u_1).$$

Например, если характеристика *НС* описывается уравнением

$$i = bu^5, \text{ то } u_2 = Rbu_1^5.$$

Другими словами, выходное напряжение u_2 (рис. 167, *а*) в этом случае пропорционально пятой степени входного напряжения u_1.

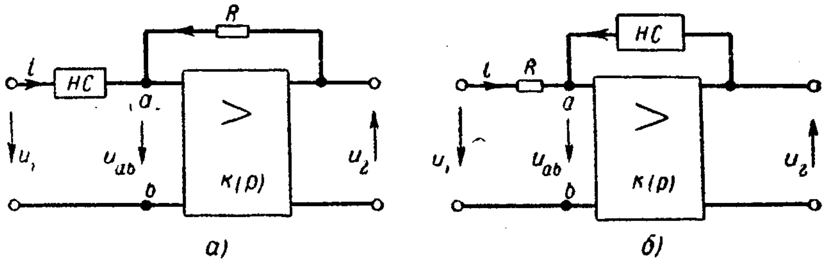


Рис. 167.

В схеме на рис. 167, *б* во входную цепь усилителя включено линейное сопротивление R, а обратная связь осуществлена через *НС* с в. а. х. $u = f(i)$. При тех же допущениях

$$i = \frac{u_1}{R}, \quad u_2 = \psi(i).$$

Следовательно,

$$u_2 = \psi\left(\frac{u_1}{R}\right).$$

Если взять нелинейное сопротивление с характеристикой $i = bu^5$, то

$$u = \psi(i) = \sqrt[5]{\frac{i}{b}} \text{ и } u_2 = \sqrt[5]{\frac{u_1}{bR}},$$

т. е. выходное напряжение u_2 (рис. 167, *б*) в этом случае пропорционально корню пятой степени из входного напряжения u_1.

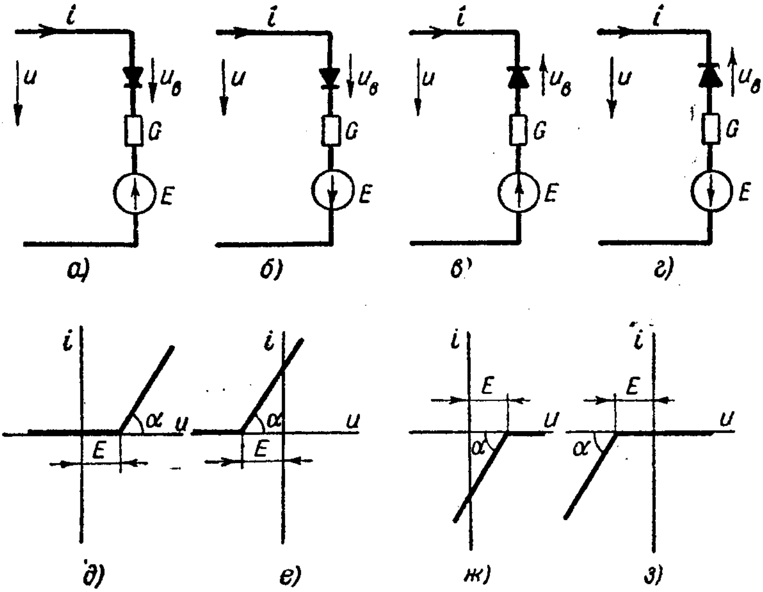


Рис. 168.

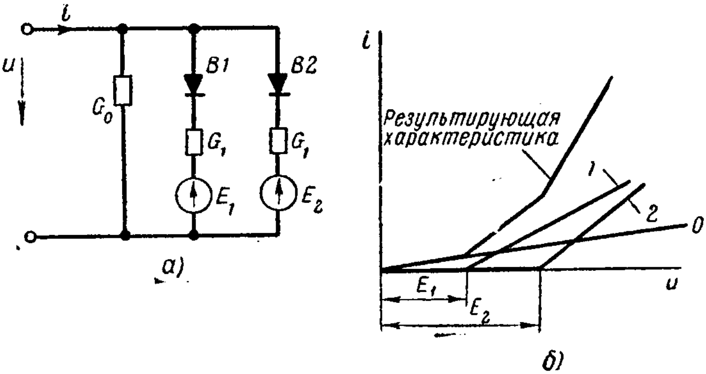


Рис. 169.

§ 10,8. Формирование двухполюсников с заданными вольт-амперными характеристиками

Для образования двухполюсника, который обладает вольт-амперной характеристикой заданной формы, поступают следующим образом:

1. Заданную в. а. х. заменяют кусочно-ломаной характеристикой.

2. Из вентилей, линейных сопротивлений и источников э. д. с. в соответствии с излагаемым ниже методом [Л. 51, 77, 78, 79] составляют схему, которая имеет кусочно-ломаную характеристику требуемой формы.

На рис. 168, *а*, *б*, *в*, *г* изображены схемы четырех простейших двухполюсников, каждый из которых состоит из идеального вентиля, линейного сопротивления проводимостью G и источника э. д. с. E. Двухполюсники отличаются способом включения вентиля и полярностью источников э. д. с. (напряжения, равные э. д. с. источников, называют опорными напряжениями). Положительное направление напряжения на вентиле $u_в$ показано стрелкой. В каждой из схем вентиль закрыт, если $u_в$ меньше нуля. Внизу показаны вольт-амперные характеристики схем (рис. 168, *д*, *е*, *ж*, *з*). Тангенс угла α на этих рисунках численно равен проводимости G.

Соединяя параллельно ветви рис. 168, *а*, *б*, *в*, *г*, можно получать различные кусочно-ломаные характеристики. В схеме на рис. 169, *а* параллельно соединены три ветви. В первую ветвь включено линейное сопротивление с проводимостью G_0. Вторая и третья ветви качественно такие же, как и на рис. 168, *а*.

Пусть $G_0 < G_1 < G_2$ и $E_1 < E_2$.

Цифрами *0*, *1*, *2* обозначены в. а. х. отдельных ветвей. Вентиль *В1* открывается, когда напряжение u становится равным E_1, вентиль *В2* начинает проводить ток при $u > E_2$.

Ток в неразветвленной части схемы равен сумме токов ветвей. Поэтому ординаты в. а. х. всей схемы равны сумме ординат трех кривых.

При использовании рассматриваемой схемы стремятся уменьшить в ней число источников э. д. с. С этой целью опорные напряжения создают при помощи делителей напряжения, питаемых от общего источника.

На рис. 170 изображена схема, тождественная схеме рис. 169, *а*, но опорные напряжения в ней создаются от одного общего источника э. д. с. E.

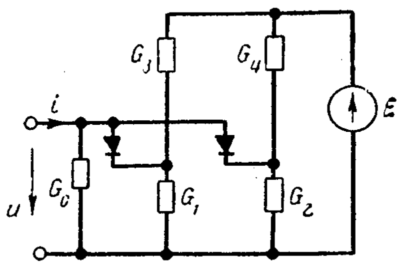


Рис. 170.

Для получения гистерезисной характеристики (рис. 171, *б*) применяют активный четырехполюсник (рис. 171, *а*). Обозначения на рис. 171: u_1 — напряжение на входе, u_2 — напряжение на выходе четырехполюсника; *B1* и *B2* — одинаковые вентили, характеристики которых полагаем идеальными; u_0 — опорные напряжения, создаваемые на двух плечах низкоомного делителя напряжения от непоказанного на рисунке вспомогательного источника напряжения.

Рассмотрим работу схемы при увеличении напряжения u_1, начиная с нуля.

В интервале изменений u_1 от 0 до u_0 оба вентиля закрыты, и потому $u_2=0$. При $u_1 \geqslant u_0$ открывается вентиль *B1*. При открытом вентиле *B1*

$$u_1 = u_0 + u_2 \text{ или } u_2 = u_1 - u_0,$$

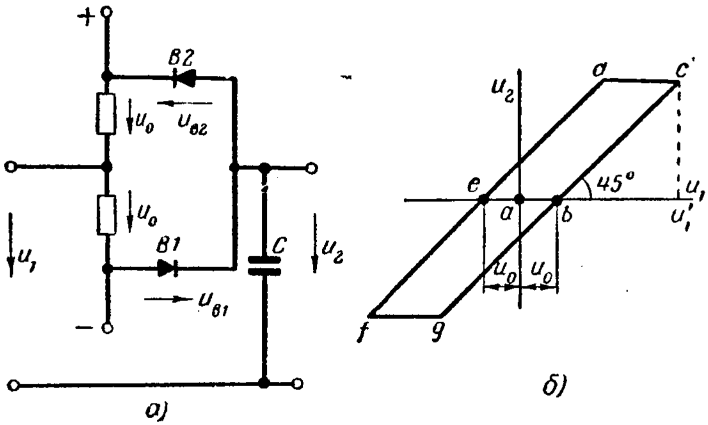


Рис. 171.

т. е. напряжение на выходе u_2 изменяется линейно с u_1, но на величину u_0 меньше его.

Пусть напряжение u_1 достигло значения u_1'. Конденсатор на выходе зарядится до напряжения

$$u_2 = u_1' - u_0.$$

Если после этого напряжение u_1 уменьшать, то вентиль *B1* закроется, так так напряжение на нем окажется отрицательным. Обозначим напряжение на вентиле *B2* через $u_{в2}$. Положительное направление этого напряжения показано стрелкой на рис. 171, *а*.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для периферийного контура, в который входит вентиль *B2*:

$$u_1 - u_2 + u_{в2} + u_0 = 0.$$

Вентиль *B2* откроется, когда напряжение

$$u_{в2} = u_2 - u_1 - u_0,$$

где

$$u_2 = u_1' - u_0,$$

станет равным нулю, $u_{в2}$ станет равным нулю при

$$u_1 = u_1' - 2u_0.$$

Таким образом, в интервале изменений u_1 от u_1' до $u_1 \leqslant u_1' - 2u_0$ выходное напряжение u_2 неизменно и равно $u' - u_0$ (участок cd на рис. 171, *б*).

При дальнейшем уменьшении u_1 схема работает при открытом вентиле *В2* и напряжение

$$u_2 = u_1 + u_0$$

(участок de на рис. 171, *б*).

При изменении знака u_1 происходят аналогичные процессы. В этом случае изображающая точка на рис. 171, *б* последовательно проходит через точки e, f, g, b.

11

Магнитно-полупроводниковые устройства

За последние годы все шире применяются устройства, состоящие из управляемых нелинейных индуктивностей, диодов и триодов. В качестве примера назовем магнитно-полупроводниковые усилители (§ 11,3), магнитно-полупроводниковые триггерные ячейки и магнитно-полупроводниковые генераторы (§ 15,12).

К перечисленным устройствам предъявляются различные требования. Как правило, чем выше к. п. д., чем меньше входная мощность и чем меньше время перехода от одного установившегося состояния к другому, тем лучше устройство.

И полупроводниковые триоды, и управляемые нелинейные индуктивности имеют свои достоинства и недостатки.

Достоинства полупроводникового триода — практическая безынерционность, способность работать при весьма малых входных напряжениях и токах, большой коэффициент усиления по току, напряжению и мощности.

Основной недостаток полупроводниковых триодов в том, что они обладают относительно невысоким к. п. д. Приходится считаться и с тем, что пока триоды изготовляют на довольно небольшие выходные мощности.

Достоинства управляемых нелинейных индуктивностей — высокий к. п. д., способность сохранять информацию без затраты энергии, возможность выполнения их на какие угодно большие выходные мощности и выходные напряжения, а также очень высокая надежность.

Основной недостаток управляемых нелинейных индуктивностей, особенно мощных, — относительно большая инерционность.

Нелинейные индуктивности соединяются с полупроводниковыми триодами в каскад так, что полупроводниковые триоды выполняют роль первого каскада, а управляемые нелинейные индуктивности роль второго каскада. При этом устройство в целом приобретает положительные качества (свойства) каждой из своих составных частей и лишается почти всех недостатков, присущих отдельно взятым полупроводниковым триодам и нелинейным индуктивностям.

Более того, соединение нелинейных индуктивностей только с полупроводниковыми диодами, без использования триодов, в отдельных случаях позволяет существенно улучшить свойства тех или иных устройств.

Примером тому может служить магнитный усилитель Рейми [Л. 102]. Он состоит только из нелинейных индуктивностей и диодов. По сравнению с обычными типами магнитных усилителей он обладает большим быстродействием — время перехода от одного установившегося состояния до другого при активной нагрузке составляет всего полпериода частоты источника питания схемы.

§ 11,1. Основные положения, используемые при анализе магнитно-полупроводниковых устройств

Как уже говорилось, в состав магнитно-полупроводниковых устройств входят полупроводниковые диоды, нелинейные индуктивности и полупроводниковые триоды.

Рассмотрим, какие допущения принимаются обычно при анализе и расчете таких устройств, как принято идеализировать характеристики диодов, триодов и магнитных элементов, а также те основные положения, из которых следует исходить при определении моментов времени открытия и закрытия диодов и триодов, времени перемагничивания сердечников от одного магнитного состояния до другого магнитного состояния и т. д.

Обычно полагают, что диоды обладают идеальными в. а. х. (рис. 172, *б*). Положительное направление напряжения на диоде $u_в$ совпадает с положительным направлением тока через диод (рис. 172, *а*).

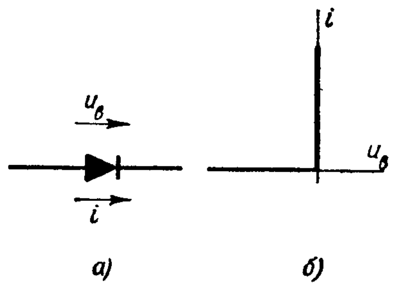


Рис. 172.

Когда диод открыт, напряжение на нем равно нулю. Диод закрывается, когда протекающий через него ток, уменьшаясь, становится равным нулю.

В закрытом состоянии диод находится все то время, пока напряжение на нем отрицательно.

Уравнение, по которому можно определить напряжение на диоде, составляется для исследуемой схемы по второму закону Кирхгофа.

Следует иметь в виду, что если при работе схемы сторонняя э. д. с. в цепи диода соизмерима с падением напряжения на самом диоде, когда он открыт, то в качестве расчетной характеристики диода должна быть взята характеристика, изображенная на рис. 38, *б*. В этом случае, когда диод открыт, он замещается динамическим сопротивлением, равным тангенсу угла k на рис. 38, *б*, и источником э. д. с. с напряжением u_0, направленным встречно току. Диод открывается, когда напряжение на нем становится равным u_0 и закрывается, когда ток, протекающий через него, уменьшаясь, становится равным нулю. В отдельных случаях необходимо учитывать обратный ток через диод, а также емкостный ток, обусловленный емкостью *p-n*-перехода.

Далее рассмотрим основные положения, характеризующие работу нелинейных индуктивностей, входящих в состав магнитно-полупроводниковых устройств.

Сердечники нелинейных индуктивностей (особенно маломощных) выполняют, как правило, из магнитных материалов с почти прямоугольной петлей гистерезиса.

При анализе полагают, что зависимость магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H для таких материалов может быть принята в виде одной из зависимостей, изображенных на рис 173.

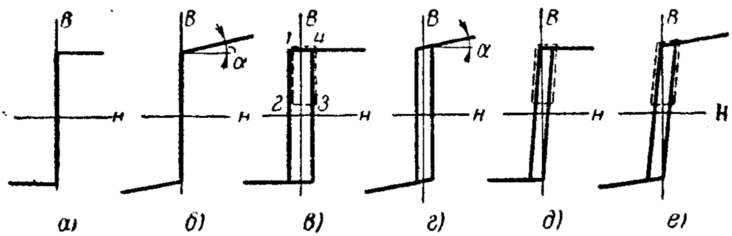


Рис. 173.

На рис. 173, *а* и *б* указанные зависимости приняты безгистерезисными, на всех остальных эти зависимости имеют петлевой гистерезисный характер.

На рис. 173, *в*, *д*, *е* пунктиром показаны частные петли гистерезиса, по которым будет перемещаться изображающая точка, если в процессе работы нелинейной индуктивности магнитная индукция не будет снижаться до нуля.

Для характеристик, показанных на рис. 173, *а* и *б*, изображающие точки движутся по вертикальным участкам характеристик $B = f(H)$ при напряженности поля, равной нулю.

Для рис. 173, *в* и *г* при движении изображающей точки по вертикальным участкам характеристики напряженность поля равняется $+H_c$ при увеличении индукции и $-H_c$ при уменьшении индукции.

Движение изображающей точки по почти вертикальным участкам характеристики $B=f(H)$ рис. 173, *д* и *е* происходит в условиях, когда напряженность поля не остается постоянной.

При перемещении по горизонтальным участкам характеристик $B=f(H)$ (рис. 173, *а*, *в*, *д*) магнитная индукция остается постоянной; следовательно, процесс происходит при напряжении на нелинейной индуктивности, равном нулю.

При перемещении изображающей точки по пологим участкам характеристик (рис. 173, *б*, *г*, *е*) отношение приращения потокосцепления нелинейной индуктивности к приращению протекающего по ее обмотке тока остается постоянным. Это дает возможность при расчете заменить нелинейную индуктивность линейной L, величина которой пропорциональна тангенсу угла α (рис. 173, *б*, *г*, *е*).

Обычно полагают, что зависимость потока в сердечнике нелинейной индуктивности от намагничивающего тока $\Phi=f(i)$ имеет такую же форму, что и зависимость $B=f(H)$ для материала сердечника и отличается от нее только масштабами. Это имеет место, когда радиальный размер сердечника относительно мал, так что отношение длины силовой линии по наружной части сердечника l_2 к длине силовой линии по внутренней части сердечника l_1 менее, примерно, 1,55. Если отношение $\frac{l_2}{l_1}$ будет значительно превышать эту цифру, то форма зависимости $\Phi=f(i)$ может заметно отличаться от формы кривой $B=f(H)$ материала сердечника. В этом случае кривым $B=f(H)$ рис. 173, *в* и *г* будут соответствовать кривые $\Phi=f(i)$, по форме подобные изображенным на рис. 173, *д* и *е*. Объясняется это тем, что при одном и том же токе через обмотку напряженность во внутренних слоях сердечника больше, чем в наружных. Поэтому внутренние слои сердечника начнут перемагничиваться при меньшем токе намагничивания, чем наружные слои.

В дальнейшем будем полагать, что выполняется условие $\frac{l_2}{l_1} \leqslant 1{,}55$.

Положим, что нелинейная индуктивность имеет обмотку с числом витков w, а площадь поперечного сечения магнитопровода равна S.

Примем, что к обмотке w подведено напряжение u и под действием этого напряжения магнитная индукция изменяется от начального значения B_1 до конечного B_2 (рис. 173, *в*).

По закону электромагнитной индукции

$$wS\frac{dB}{dt}=u \quad \text{или} \quad wSdB=udt.$$

Проинтегрируем левую часть последней строчки по B от B_1 до B_2, а правую по времени от t_1 до t_2. Получим

$$wS(B_2-B_1)=\int_{t_1}^{t_2} udt.$$

На основании последней формулы можно сказать, что изменение индукции в сердечнике нелинейной индуктивности на величину $B_2 - B_1$ пропорционально площади, образованной в координатах u, t кривой $u(t)$, осью абсцисс и ординатами $t = t_1$ и $t = t_2$. Площадь, выражаемая $\int\limits_{t_1}^{t_2} udt$, измеряется в вольт-секундах, поэтому в литературе называют эту площадь *вольт-секундной площадью.* Заметим, что вольт-секундную площадь можно сопоставить с ампер-секундной площадью (§ 3,11), необходимой для перемагничивания ферритовых сердечников под действием импульсов тока.

Обратим внимание на следующее. Если магнитная индукция в сердечнике нелинейной индуктивности изменяется так, что начальные и конечные значения магнитной индукции оказываются одинаковыми, то среднее значение напряжения на индуктивности за время изменения индукции (оно пропорционально вольт-секундной площади) будет равно нулю.

Рассмотрим это более подробно.

Положим, что под воздействием напряжения u магнитная индукция в сердечнике нелинейной индуктивности сначала уменьшается от значения индукции насыщения B_1 до некоторого значения B_2 (рис. 173,*в*), а затем возрастает от значения $B_3 = B_2$ до значения $B_4 = B_1$. (Индекс у индукции соответствует номеру точки на рис. 173, *в*.)

Обозначим: t_1 — момент начала изменения индукции; t_2 — момент времени, когда индукция достигла значения B_2; t_3 — момент начала увеличения индукции со значения $B_3 = B_2$; t_4 — момент достижения индукцией значения B_1.

Для указанного процесса можно записать уравнение

$$wS\left(\int\limits_{B_1}^{B_2} dB + \int\limits_{B_3}^{B_1} dB\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2} udt + \int\limits_{t_3}^{t_4} udt.$$

Так как в интервале времени от t_2 до t_3 магнитная индукция неизменна, то это означает, что $\int\limits_{t_2}^{t_3} udt = 0$.

Поэтому правую часть последнего уравнения можно распространить и на интервал времени $t_3 - t_2$ и переписать так:

$$wS(B_2 - B_1 + B_1 - B_2) = \int\limits_{t_1}^{t_4} udt.$$

Левая часть последней формулы равна нулю. Следовательно, равна нулю и правая часть этой формулы. Но правая часть пропорциональна среднему за время $t_4 - t_1$ значению напряжения на нелинейной индуктивности.

Соотношение $\int_{t_1}^{t_4} u dt = 0$ при известном законе изменения напряжения u во времени позволяет определить время t_4, при котором индукция достигает начального значения (индукции насыщения).

Рассмотрим теперь основные положения, относящиеся к работе триодов в магнитно-полупроводниковых устройствах.

Обычно полагают, что полупроводниковый триод может быть представлен в виде источника тока, т. е. что ток выходной цепи триода не зависит от напряжения на электродах выходной цепи, а зависит только от величины тока управляющей цепи триода.

В соответствии с этим выходные характеристики триода представляют семейство прямых, параллельных оси абсцисс (на рис. 174, *а* изображено семейство для схемы с общей базой).

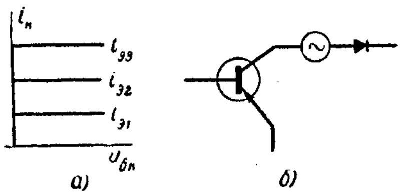


Рис. 174.

Триод открывается, как только напряжение на электродах управляющей цепи его становится положительным, и закрывается, когда это напряжение становится равным нулю.

Если э. д. с., включенная в выходную цепь триода, может в процессе работы принимать отрицательные значения, то чтобы триод не потерял управляемости (§ 2,9), в выходную цепь включают диод (рис. 174, *б*).

В заключение отметим следующее:

1. Если схема магнитно-полупроводникового устройства представляет собой мостовую или дифференциальную схему или иную сложную схему, то анализ ее, особенно в установившемся режиме, в значительной мере облегчается наличием той или иной симметрии в работе отдельных элементов схемы в положительную и отрицательную часть периода.

2. Работа магнитно-полупроводниковых устройств ниже будет рассматриваться при относительно невысоких частотах, когда влиянием межэлектродных емкостей диодов и триодов, а также влиянием межвитковых емкостей индуктивностей можно пренебречь.

§ 11,2. Пример расчета мостовой схемы

На рис. 175,*а* изображена мостовая схема, в одной диагонали которой имеется источник э. д. с. $e(t) = E_m \sin \omega t$, а в другой — источник постоянного тока I_k.

В каждом плече мостовой схемы находятся диод, активное сопротивление R и нелинейная индуктивность.

Все активные сопротивления и нелинейные индуктивности во всех плечах одинаковы.

Полагая, что диоды обладают идеальными характеристиками (175, *б*), а нелинейные индуктивности характеристиками, показанными на рис. 175, *в*, вывести формулы для определения токов в плечах моста в функции времени в установившемся режиме.

Выберем положительные направления для токов и для напряжений на диодах в соответствии с рис. 175, *а*.

Ввиду симметрии схемы относительно каждой из диагоналей и в силу равенства $e(\omega t) = -e(\omega t + \pi)$, $i_2(\omega t) = i_1(\omega t + \pi)$, $i_4 = i_1$ и $i_3 = i_2$.

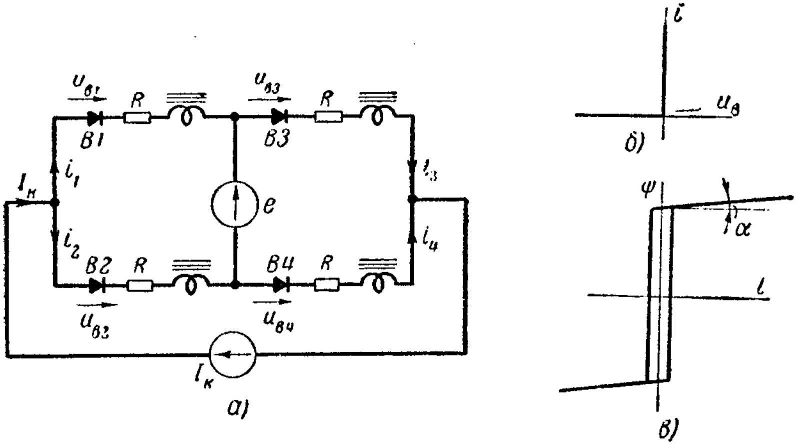


Рис. 175.

Поскольку в каждом плече моста включено по диоду, ни один из токов i_1 и i_2 не может быть отрицательным.

Следовательно, изображающая точка на характеристике $B = f(H)$ (рис. 175, *в*) в процессе работы схемы будет перемещаться по участку зависимости $B = f(H)$, расположенному в первом квадрате под углом α к оси абсцисс.

Напряжение на нелинейной индуктивности

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di}\,\frac{di}{dt},$$

где ψ — потокосцепление нелинейной индуктивности.

На линейном участке, расположенном под углом α к оси абсцисс, $\frac{d\psi}{di} = L$ пропорционально $\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 175, *в*). Поэтому нелинейные индуктивности при расчете заменяем линейными.

Составим два уравнения для токов i_1 и i_2:

по первому закону Кирхгофа

$$i_1 + i_2 = I_k, \qquad (11,1)$$

по второму закону Кирхгофа

$$u_{в2} + i_2 R + L\frac{di_2}{dt} - i_1 R - L\frac{di_1}{dt} - u_{в1} = e. \qquad (11,2)$$

В процессе работы схемы диоды *В1*, *В2*, *В3*, *В4* находятся то в открытом, то в закрытом состояниях.

Диод *В4* открывается и закрывается синхронно с диодом *В1*, а диод *В3* синхронно с диодом *В2*.

Диод *В1* закрывается, когда ток i_1, уменьшаясь, становится равным нулю. Когда диод *В1* будет находиться в закрытом состоянии, весь ток I_k пойдет через вторую ветвь моста. Аналогично при закрытом диоде *В2* весь ток I_k пойдет через первую ветвь моста.

Каждый из токов i_1 и i_2 при $\omega t = 0$ имеет некоторое начальное значение. Обозначим: $i_1(0)$ — значение тока i_1 при $\omega t = 0$, $i_2(0)$ — значение тока i_2 при $\omega t = 0$.

Если бы индуктивности в плечах моста отсутствовали, то

$$i_1(0) = i_2(0) = \frac{I_k}{2}.$$

При наличии индуктивностей

$$i_1(0) \neq i_2(0),$$

но в сумме всегда

$$i_1(0) + i_2(0) = I_k.$$

Когда диоды *В1* и *В2* открыты, $u_{в1} = u_{в2} = 0$. Если в (11,1) вместо i_2 подставить $I_k - i_1$ и принять, что диоды *В1* и *В2* открыты, получим следующее уравнение относительно тока i_1:

$$i_1 R + L\frac{di_1}{dt} = \frac{I_k R - e(t)}{2}. \qquad (11,3)$$

Решение его следующее:

$$i_1 = \frac{I_k}{2} - \frac{E_m}{2z}\sin(\omega t - \varphi) + A_1 e^{-\frac{R}{\omega L}\omega t}, \qquad (11,4)$$

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R},$$

A_1 — постоянная интегрирования.

При $t = 0$ из (11,4) найдем

$$i_1(0) = \frac{I_k}{2} + \frac{E_m}{2z}\sin\varphi + A_1.$$

Отсюда

$$A_1 = i_1(0) - \frac{I_k}{2} - \frac{E_m}{2z}\sin\varphi. \qquad (11,5)$$

При достаточно большом значении E_m ток i_1, уменьшаясь, в некоторый момент времени ωt_1 достигает нулевого значения и диод *В1* закрывается.

Время ωt_1 определяется из трансцендентного уравнения

$$0 = \frac{I_k}{2} - \frac{E_m}{2z}\sin(\omega t_1 - \varphi) + A_1 e^{-\frac{R}{\omega L}\omega t_1}. \qquad (11,6)$$

Диод будет находиться в закрытом состоянии все время, пока напряжение на нем $u_{в1}$ будет отрицательно. Диод $B1$ вновь откроется, когда напряжение на нем $u_{в1}$ станет равным нулю.

Момент времени ωt_2, при котором произойдет открытие диода $B1$, определим из уравнения (11,2), учтя, что при открытом диоде $B2$ $i_2 = I_{2k} = \text{const}$, $u_{в2} = 0$, $\frac{di_2}{dt} = 0$, $i_1 = 0$, $\frac{di_1}{dt} = 0$.

Из (11,2) следует, что

$$u_{в1} = -E_m \sin\omega t + I_k R.$$

Положив в последней строчке $u_{в1} = 0$ и $\omega t = \omega t_2$, найдем

$$\omega t_2 = \arcsin\frac{I_k R}{E_m}. \qquad (11,7)$$

С момента времени ωt_2 до $\omega t = \pi$ ток i_1 будет изменяться в соответствии с формулой (11,8)

$$i_1 = \frac{I_k}{2} - \frac{E_m}{2z}\sin(\omega t - \varphi) + A_2 e^{-\frac{R}{\omega L}(\omega t - \omega t_2)}. \qquad (11,8)$$

Постоянная интегрирования A_2 в формуле (11,8) отлична от постоянной интегрирования A_1 в формуле (11,4), так как переходный процесс происходит теперь при начальных условиях, отличных от начальных условий при $\omega t = 0$.

Постоянную интегрирования A_2 найдем из условия, что в момент открытия диода $B1$ при $\omega t = \omega t_2$ $i_1 = 0$.

Отсюда

$$A_2 = -\frac{I_k}{2} + \frac{E_m}{2z}\sin(\omega t_2 - \varphi). \qquad (11,9)$$

Подставим (11,9) в (11,8) и найдем значение тока i_1 при $\omega t = \pi$:

$$\underset{\omega t = \pi}{i_1} = \frac{I_k}{2}\left[1 - e^{-\frac{R}{\omega L}(\pi - \omega t_2)}\right] -$$

$$- \frac{E_m}{2z}\left[\sin\varphi - \sin(\omega t_2 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{\omega L}(\pi - \omega t_2)}\right]. \qquad (11,10)$$

Учтем, что в результате отмеченной выше симметрии $i_2(0) = \underset{\omega t = \pi}{i_1}$. Таким образом, формула (11,10) дает возможность найти $i_2(0)$.

Последовательность расчета следующая:

1. По формуле (11,7) определяем время ωt_2 открытия диода $B1$ в конце первого полупериода.
2. По формуле (11,9) находим постоянную интегрирования A_2, которая входит в формулу для i_1 в интервале времени $\omega t_2 - \pi$.
3. По формуле (11,10) подсчитываем значение $i_2(0)$.
4. Определяем $i_1(0) = I_k - i_2(0)$.

5. По формуле (11,5) определяем постоянную интегрирования A_1, которая входит в формулу для i_1 в интервале времени $0 - \omega t_1$.

6. Решая уравнение (11,6), находим момент времени ωt_1 закрытия диода $B1$.

7. По формуле (11,4) подсчитываем значения тока i_1 в интервале $0 - \omega t_1$ и по формуле (11,8) в интервале $\omega t_2 - \pi$.

На рис. 176 изображены кривые $i_1 = f(\omega t)$ и $i_2 = f(\omega t)$, построенные при следующих параметрах схемы (рис. 175, *a*):

$$R = 10\ ом,\ \omega L = 15\ ом,\ I_k = 6\ a,\ E_m = 120\ в.$$

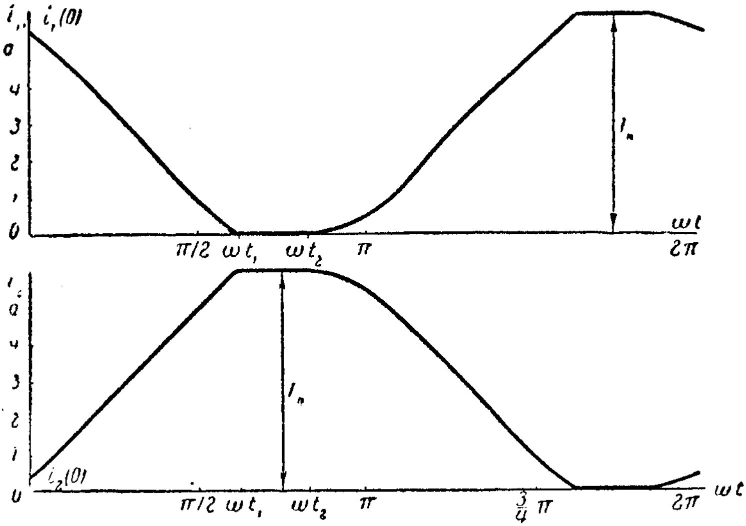


Рис. 176.

При этом

$$z = 17{,}22\ ом,\ \varphi = 54^\circ 30',\ \omega t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi,$$

$$\omega t_2 - \varphi = 95^\circ 30',\ \frac{E_m}{2z} = 3{,}47,\ i_2(0) = \underset{\omega t = \pi}{i_1} = 0{,}436\ a,$$

$$i_1(0) = \underset{\omega t = \pi}{i_2} = 5{,}564\ a,\ A_1 = -0{,}256,\ A_2 = 0{,}45,\ \omega t_1 = 112^\circ 30'.$$

На участке $0 - \omega t_1$

$$i_1 = 3 - 3{,}47 \sin(\omega t - 54^\circ 30') - 0{,}256\, e^{-\frac{\omega t}{1{,}5}}\ a.$$

На участке $\omega t_1 - \omega t_2$

$$i_1 = 0.$$

На участке $\omega t_2 - \pi$

$$i_1 = 3 - 3{,}47 \sin(\omega t - 54^\circ 30') + 0{,}45\, e^{-\frac{(\omega t - \omega t_2)}{1{,}5}}\ a.$$

§ 11,3. Магнитно-полупроводниковый усилитель

В состав схемы усилителя, изображенной на рис. 177, входят полупроводниковый триод типа *р-п-р* и быстродействующий магнитный усилитель Рейми (обведен пунктиром).

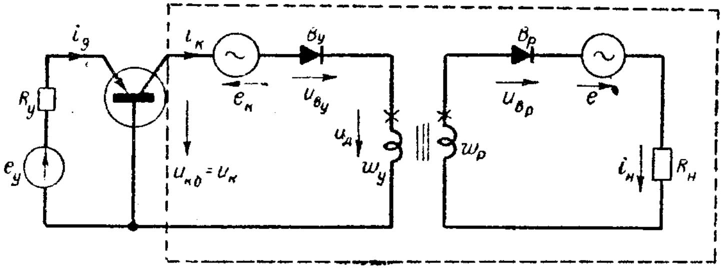


Рис. 177.

Усилитель Рейми предназначен для усиления слабых сигналов и обладает тем примечательным свойством, что величина напряжения на нагрузке $R_н$ принимает установившееся значение через полпериода частоты источника питания усилителя после изменения величины сигнала управления.

Триод собран по схеме с общей базой.

Ток коллектора $i_к$ течет по обмотке управления $w_у$ нелинейной индуктивности. Постоянный во времени управляющий сигнал поступает от э. д. с. $e_у$.

Источники синусоидальной э. д. с. e и $e_к$ имеют одинаковую частоту и совпадают по фазе $e_к = E_{кm} \sin \omega t$, $e = E_m \sin \omega t$. В дальнейшем вместо ωt будем писать θ.

Обозначим: $В_у$ и $В_р$ — германиевые выпрямители (диоды); $u_{Вр}$ — напряжение на выпрямителе $В_р$; $u_{Ву}$ — напряжение на выпрямителе $В_у$; $R_у$ — сопротивление цепи управления триода; $R_н$ — сопротивление нагрузки, на которую работает усилитель.

Тороидальный сердечник нелинейной индуктивности выполнен из ферромагнитного материала, кривая намагничивания которого близка к прямоугольной (рис. 178, *б*).

При работе схемы в установившемся режиме процессы размагничивания и намагничивания сердечника нелинейной индуктивности чередуются.

Так как амплитуда размагничивающей э. д. с. $e_к$ меньше амплитуды намагничивающей э. д. с. e, то точка, изображающая магнитное состояние сердечника, будет двигаться по частной петле гистерезиса. Отдельные точки частной петли гистерезиса обозначены цифрами *0*, *1*, *2*, *3* ... (рис. 178, *б*).

На сердечнике нелинейной индуктивности кроме обмотки управления $w_у$ имеется рабочая обмотка $w_р$. Напряжение на обмотке управления назовем $u_д$. Звездочки у обмоток $w_у$ и $w_р$ означают одноименные зажимы. Положительные напряжения для токов и напряжений показаны стрелками.

Рассмотрение работы усилителя проведем в соответствии с работой Р. А. Липмана [Л. 62].

Изменение во времени различных определяющих величин показано на рис. 178.

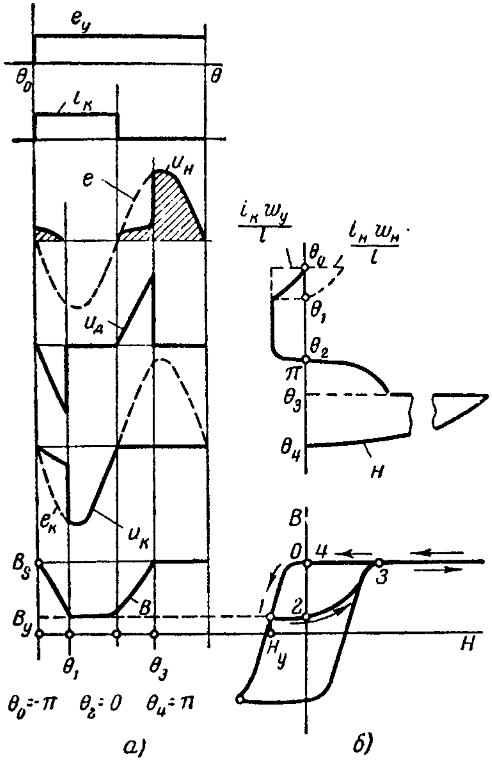


Рис. 178.

Пусть до момента времени $\omega t = \theta_0 = -\pi$ сигнал управления отсутствовал ($e_у = 0$), триод был заперт и магнитное состояние сердечника определялось точкой *0* (рис. 178, *а,б*).

В момент времени $\theta_0 = -\pi$ скачком подается сигнал управления $e_у$ порядка 0,1 — 0,2 *в*. Под действием э. д. с. $e_у$ в цепи коллектора также скачком возникает ток $i_к = \Delta i_к$.

Для определения $i_к$ обратимся к схеме замещения триода рис. 179 (ср. с § 7,20), где $R_э$ — сопротивление эмиттера, $R_б$ — сопротивление базы, $R_к$ — сопротивление коллектора, подсчитанные для малых приращений токов; $R_m \Delta i_э$ — источник э. д. с., учитывающий усилительное действие триода; $u_{кб}$ — напряжение между коллектором и базой.

Составим уравнение для левого контура схемы рис. 179:

$$(R_у + R_э)\Delta i_э + R_б(\Delta i_э - \Delta i_к) = e_у.$$

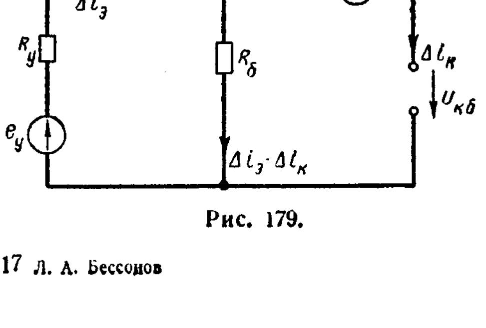


Рис. 179.

Если учесть, что коэффициент усиления триода по току $\alpha = \frac{\Delta i_к}{\Delta i_э}$, то

$$\Delta i_к = i_к = \frac{\alpha e_у}{R_у + R_э + R_б(1-\alpha)}. \quad (11,11)$$

Полупроводниковый триод будем рассматривать для выходной цепи как источник тока (при неизменном токе управления ток коллектора почти не зависит от напряжения между коллектором и базой).

Таким образом, хотя в управляющий полупериод напряжение на триоде $u_{кб}$ и будет меняться во времени, ток коллектора практически останется неизменным (рис. 178, *а*).

Магнитное состояние сердечника не может измениться скачком, т. е. если до приложения сигнала $e_у$ индукция B равнялась индукции насыщения B_s, а $H=0$, то сразу же после приложения сигнала при $\theta_0=-\pi$ индукция останется равной B_s, а напряженность поля останется равной нулю.

Как уже говорилось, в обмотке $w_у$ скачком появляется ток $i_к$. Если допустить, что в обмотке $w_р$ не появится ток $i_н$, то напряженность поля не останется равной нулю.

Поэтому одновременно со скачком тока $i_к$ в управляющей цепи скачком появляется ток $i_н$ в цепи нагрузки.

$$i_к w_у - i_н w_р = Hl \underset{\theta_0=-\pi}{=} 0,$$

откуда

$$\underset{\theta_0=-\pi}{i_н} = i_к \frac{w_у}{w_р}.$$

Протекание тока $i_н$ означает, что при $\theta_0=-\pi$ открывается вентиль $B_р$ и на рабочей обмотке $w_р$ возникает напряжение

$$u_д = E_m \sin \omega t - i_н R_н \approx E_m \sin \omega t.$$

Под действием этого напряжения сердечник будет перемагничиваться — индукция в нем будет уменьшаться, изображающая точка перемещаться от точки *0* к точке *1* (рис. 178, *б*).

Положение точки *1* определяется током $i_к$:

$$H_у = \frac{i_к w_к}{l},$$

где l — длина средней магнитной линии сердечника.

Так как напряженность поля $H=\frac{i_к w_у - i_н w_р}{l}$, а $i_к=\mathrm{const}$, то при перемещении от точки *0* к точке *1* ток $i_н$ уменьшается.

Точка *1* на рис. 178, *б* достигается в момент времени θ_1, определяемый соотношением

$$\left| \int_{-\pi}^{\theta_1} E_m \sin \theta d\theta \right| = 2\pi f w_р S (B_s - B_у), \qquad (11,12)$$

где S — площадь поперечного сечения сердечника;

B_s — индукция насыщения;

$B_у$ — индукция, соответствующая точке *1*.

В интервале времени от θ_0 до θ_1 напряжение между коллектором и базой

$$u_{кб} = e_к - u_д \frac{w_у}{w_р} \approx e_к - e \frac{w_у}{w_р}.$$

Для нормальной работы триода это напряжение должно быть больше нуля, т. е. должно выполняться соотношение

$$E_{кm} > E_m \frac{w_у}{w_р}.$$

В точке *1* выпрямитель $B_р$ закрывается, так как ток $i_н$ становится равным нулю.

При движении от точки *1* до точки *2* индукция в сердечнике не меняется, и напряжение на нелинейной индуктивности $u_д = 0$. При этом почти вся э. д. с. $e_к$, за вычетом падения напряжения в активном сопротивлении обмотки $w_у$, оказывается приложенной между зажимами коллектор — база триода.

В точке *2* ($\theta_2 = 0$) э. д. с. $e_к$ становится равной нулю. Управляющий полупериод закончился, начинается рабочий полупериод. Так как $E_{кm} > E_m \frac{w_у}{w_р}$, то в рабочий полупериод напряжение на выпрямителе $B_у$ меньше нуля, и потому ток по управляющей цепи в рабочий полупериод не протекает.

При движении от точки *2* до точки *3* индукция увеличивается, но ток $i_н$ продолжает оставаться относительно малым.

В момент θ_3, определяемый соотношением

$$\int_0^{\theta_3} E_m \sin\theta d\theta = 2\pi f w_р S (B_s - B_у), \qquad (11,13)$$

напряжение на нелинейной индуктивности становится равным нулю и ток $i_н$ скачком возрастает до величины $\frac{E_m \sin\theta_3}{R_н}$. Далее ток $i_н$ изменяется по синусоидальному закону.

К началу следующего управляющего полупериода состояние сердечника определяется положением точки *0*.

Рассмотрим вопрос о зависимости среднего за период напряжения на нагрузке $u_н$ от величины э. д. с. $e_у$ сигнала управления.

Чем больше э. д. с. $e_у$, тем больше ток $i_к$ и тем большее размагничивание сердечника происходит за управляющий полупериод $\left(\text{напомним, что } H_у = \frac{i_к w_у}{l}\right)$. Но чем больше за управляющий полупериод размагнитится сердечник, тем позднее в рабочий полупериод наступит момент времени θ_3, в который сердечник намагничивается до индукции насыщения, и тем меньше будет напряжение на нагрузке $u_н$.

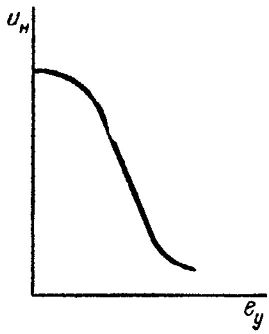


Рис. 180.

Зависимость $u_н = f(e_у)$ качественно изображена на рис. 180.

Если необходимо, чтобы с ростом $e_у$ $u_н$ увеличивалось, а не уменьшалось, как это имеет место на рис. 180, в цепь базы или в цепь эмиттера триода (рис. 177) включают дополнительную постоянную э. д. с., действующую встречно э. д. с. $e_у$. Эта э. д. с. смещает начало счета на рис. 180.

Быстродействие магнитно-полупроводникового усилителя столь же высоко, как и отдельно взятого усилителя Реими. Однако коэффициент усиления по мощности усилителя Реими равен примерно нескольким сотням, тогда как у магнитно-полупроводникового усилителя он доходит до нескольких миллионов.

12

Отрицательные дифференциальные параметры электрических цепей и отрицательные входные сопротивления двухполюсников

В теории нелинейных электрических цепей существенное значение имеют:

отрицательные дифференциальные активные сопротивления;

отрицательные активные, индуктивные и емкостные входные сопротивления двухполюсников;

отрицательные дифференциальные индуктивности для медленно меняющихся составляющих потокосцепления и тока управляемой нелинейной индуктивности;

отрицательные дифференциальные емкости для медленно меняющихся составляющих заряда и напряжения управляемой нелинейной емкости.

§ 12,1. Общая характеристика причин образования отрицательных дифференциальных активных сопротивлений

Как отмечалось в § 2,5, дифференциальное активное сопротивление

$$R_д = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}. \qquad (12,1)$$

Если на в. а. х. НС есть падающий участок, то на этом участке $R_д$ отрицательно. Падающий участок на в. а. х. НС может появиться вследствие:

1) физико-химических особенностей работы самого НС (§ 12,6);

2) воздействия на НС неявно выраженной обратной связи внутри самого НС (§ 12,7);

3) воздействия на НС явно выраженной внешней обратной связи (§ 12,8).

Отрицательные дифференциальные сопротивления широко применяются при исследовании различных схем автогенераторов.

§ 12,2. Общая характеристика методов получения отрицательных входных сопротивлений двухполюсников

Путем введения электрической или магнитной обратной связи в схемах с линейным усилителем можно получить эффект (§ 12,9), при котором входное сопротивление двухполюсника оказывается отрицательным, например, равным

$$Z_{вх} = -R,\ Z_{вх} = -j\omega L,\ Z_{вх} = \frac{j}{\omega C}.$$

Двухполюсник оказывается эквивалентен отрицательному активному, индуктивному или емкостному сопротивлениям. Устройства, эквивалентные отрицательным индуктивным сопротивлениям и отрицательным емкостным сопротивлениям, применяются для расширения полосы пропускания и (или) для снижения постоянной времени электронных, а в некоторых случаях и магнитных усилителей, в Q-метрах, в схемах автоматической подстройки радиоприемников и т. д. Важно подчеркнуть формальный характер рассматриваемого эффекта.

В схемах такого рода, предназначенных для получения отрицательных входных индуктивных сопротивлений, нет ни одной индуктивности, увеличение м. д. с. которой привело бы к уменьшению магнитного потока в ее сердечнике.

Аналогично, в схемах такого рода, предназначенных для получения отрицательных входных емкостных сопротивлений, нет ни одного конденсатора, в котором увеличение абсолютного значения напряжения на обкладках сопровождалось бы уменьшением абсолютной величины заряда на каждой из его обкладок.

§ 12,3. Отрицательная дифференциальная индуктивность и отрицательная дифференциальная емкость для медленно меняющихся составляющих управляемых нелинейных индуктивностей и управляемых нелинейных емкостей

Условимся под дифференциальной индуктивностью для медленно изменяющихся составляющих тока и потока управляемой нелинейной индуктивности понимать предел отношения приращения медленно меняющейся составляющей потокосцепления $\Delta\psi_0$ к соответствующему ему приращению медленно меняющейся составляющей тока ΔI_0:

$$L_{0д} = \lim_{\Delta I_0 \to 0} \frac{\Delta\psi_0}{\Delta I_0} = \frac{d\psi_0}{dI_0}. \qquad (12,2)$$

Аналогично под дифференциальной емкостью для медленно меняющихся составляющих заряда и напряжения на управляемой нелинейной емкости условимся понимать предел отношения приращения медленно меняющейся составляющей заряда ΔQ_0 к соответствующему ему приращению медленно меняющейся составляющей напряжения ΔU_{c0}:

$$C_{0д} = \lim_{\Delta U_{c0} \to 0} \frac{\Delta Q_0}{\Delta U_{c0}} = \frac{dQ_0}{dU_{c0}}. \qquad (12,3)$$

§ 12,4. Общая характеристика методов получения отрицательных $L_{0д}$ и $C_{0д}$

Дифференциальная индуктивность $L_{0д}$ оказывается отрицательной, если на зависимости постоянной составляющей магнитной индукции B_0 от постоянной составляющей напряженности поля H_0 образуется падающий участок. На нем положительному приращению постоянной составляющей напряженности поля соответствует отрицательное приращение постоянной составляющей магнитной индукции.

Падающий участок на зависимости

$$\beta B_0 = f\left(\frac{H_0}{\alpha}\right)$$

(α и β — коэффициенты в формуле $H = \alpha \operatorname{sh} \beta B$) образуется чаще всего вследствие действия неявно выраженной обратной связи. Неявно выраженная обратная связь проявляется в том, что амплитуда первой, а в некоторых случаях и высших гармоник или субгармоник магнитной индукции влияет на среднее за период значение последней.

Например, для простейшего случая, рассматриваемого в § 12,11, падающий участок на зависимости

$$\frac{H_0}{\alpha} = f(\beta B_0) \qquad (12,4)$$

образуется вследствие перераспределения напряжения переменного тока между последовательно соединенными элементами цепи и влияния амплитуды первой гармоники магнитной индукции B_m на эту зависимость.

Аналогично $C_{0д}$ отрицательна на падающем участке зависимости

$$\frac{U_{c0}}{\alpha} = f(\beta Q_0) \qquad (12,5)$$

(α и β — коэффициенты в формуле $u = \alpha \operatorname{sh} \beta q$). На падающем участке этой зависимости положительному приращению постоянной составляющей напряжения U_{c0} на нелинейной емкости соответствует отрицательное приращение постоянной составляющей заряда Q_0.

Как и в предыдущем случае, падающий участок на зависимости (12,5) образуется чаще всего вследствие неявно выраженной обратной связи.

Последняя проявляется в том, что амплитуда первой гармоники заряда, а в некоторых случаях и высших гармоник или субгармоник заряда, влияет на среднее за период значение постоянной составляющей напряжения на нелинейной емкости.

Например, для простейшего случая, рассматриваемого в § 12,13, появление падающего участка на зависимости (12,5) объясняется перераспределением напряжения переменного тока между последовательно соединенными элементами цепи и влияния амплитуды первой гармоники заряда Q_m на зависимость $\frac{U_{c0}}{a}$ от βQ_0.

Если рабочая точка окажется на падающем участке характеристики (12,4) или (12,5), то в системе возникает автомодуляция (см. гл. 16).

§ 12,5. S- и N-образный вид вольт-амперных, вебер-амперных и кулон-вольтных характеристик

Вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики при наличии на них падающего участка по форме напоминают либо букву S (рис. 181,*а*), либо букву N (рис. 181, *б*).

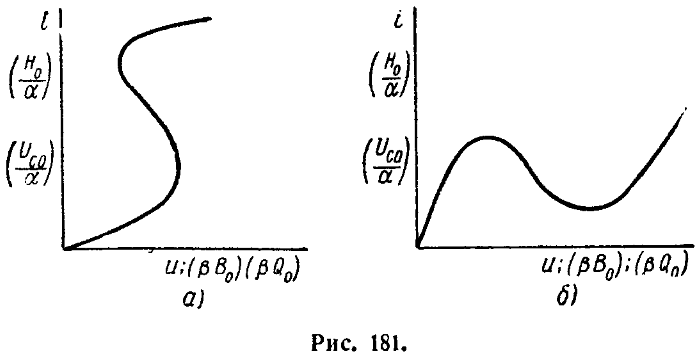


Рис. 181.

Характеристики первого вида называются S-образными, второго — N-образными. По оси абсцисс на них откладываются соответственно напряжение, постоянная составляющая магнитной индукции, постоянная составляющая заряда или величины, им пропорциональные. По оси ординат откладываются соответственно ток, постоянная составляющая напряженности поля, постоянная составляющая напряжения или величины, им пропорциональные.

§ 12,6. Возникновение падающего участка на вольт-амперных характеристиках неуправляемых нелинейных активных сопротивлений

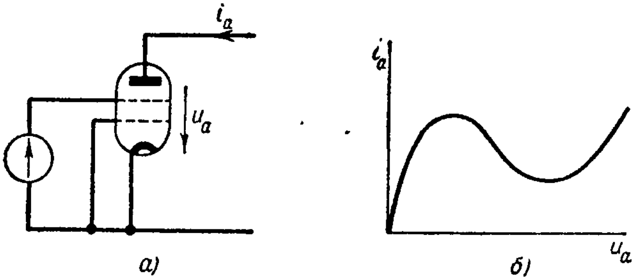
Известно, что на в. а. х. газотрона (рис. 2, *е*), неоновой лампы (рис. 2, *и*), электрической дуги (рис. 2, *е*), точечного полупроводникового диода (рис. 2, *д*) есть падающие участки. На этих участках дифференциальное сопротивление отрицательно.

В газотроне, неоновой лампе и электрической дуге падающий участок образуется, грубо говоря, в силу физико-химических особенностей прохождения тока через ионизированный газ. В точечном полупроводниковом диоде падающий участок образуется в силу физико-химических особенностей точечного *p-n*-перехода.

§ 12,7. Возникновение падающего участка на вольт-амперной характеристике управляемого нелинейного активного сопротивления в результате действия внутренней обратной связи

Падающий участок на в. а. х. управляемого нелинейного активного сопротивления возникает вследствие воздействия обратной связи, осуществляемой внутри самого нелинейного сопротивления. Рассмотрим это на примере четырехэлектродной электронной лампы — тетрода и на примере точечного полупроводникового триода.

В § 2,16 говорилось о том, что при включении тетрода по схеме рис. 182, *а* на в. а. х. его, т. е. на зависимости анодного тока от анодного напряжения $i_а = f(u_а)$, в результате динатронного эффекта возникает падающий участок (рис. 182, *б*). Внутренняя обратная связь в данном случае находит выражение



а) б)

Рис. 182.

в том, что поток электронов с катода на анод при определенных условиях вызывает соизмеримый по величине встречный поток электронов с анода на катод.

На в. а. х. некоторых типов точечных полупроводниковых триодов (§ 2,10) также могут возникнуть падающие участки.

На рис. 183, *а* изображена схема с общей базой. Зависимость тока эмиттера $i_э$ от напряжения $u_{эб}$ между эмиттером и базой представлена на рис. 183, *б*. В этом случае обратная связь между входной и выходной цепями также носит неявно выраженный характер и находит свое выражение в том, что внутри триода вблизи электрода базы имеется падение напряжения от двух встречно направленных токов — от тока базы и от тока коллектора (см. § 2,10).

§ 12,8. Возникновение падающего участка на вольт-амперных характеристиках управляемых нелинейных активных сопротивлений вследствие воздействия внешней обратной связи

В качестве примера цепи, на в. а. х. НС которой возникает падающий участок вследствие воздействия внешней обратной связи, рассмотрим схему (рис. 184).

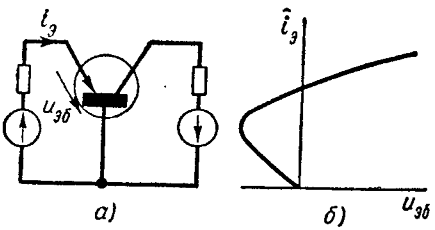


Рис. 183.

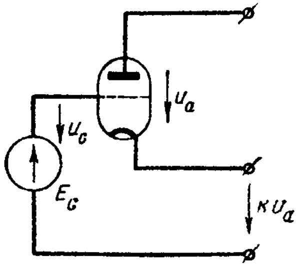


Рис. 184.

В этой схеме часть анодного напряжения $u_а$, равная $ku_а$ $(k < 1)$, подается в сеточную цепь. Поэтому сеточное напряжение $u_с = E_с - ku_а$. Построим в. а. х. анодной цепи $i_а = f(u_а)$ для лампы 6С2С при $E_с = 20$ *в* и $k = 0{,}2$. Искомая зависимость показана жирной кривой на рис. 185. Для получения точек этой кривой задаемся произвольными значениями $u_с$ в интервале от 20 до -8 *в* и для каждого его значения из уравнения $u_с = E_с - ku_а$ находим $u_а$.

Пересечение вертикали, проведенной через найденное значение $u_а$, с кривой, для которой взятое значение $u_с$ является параметром, дает точку искомой характеристики.

§ 12,9. Двухполюсник с отрицательным входным сопротивлением

Двухполюсник, входное сопротивление по отношению к зажимам $1-2$ которого при определенных условиях оказывается отрицательным, обведен пунктиром на рис. 186.

В состав его входит линейное сопротивление $R_д$, линейный усилитель и некоторое сопротивление Z.

Линейный усилитель представлен четырехполюсником, входные зажимы которого mn, выходные — pq.

Линейный усилитель при разомкнутой цепи обратной связи работает в режиме пропорционального усиления ($U_2 = kU_1$, $k > 1$). Ток на входе его $I_0 \approx 0$. Последнее может иметь место, если сеточный ток первой лампы усилителя равен нулю. Напряжение с выхода усилителя через сопротивление Z подается на вход усилителя.

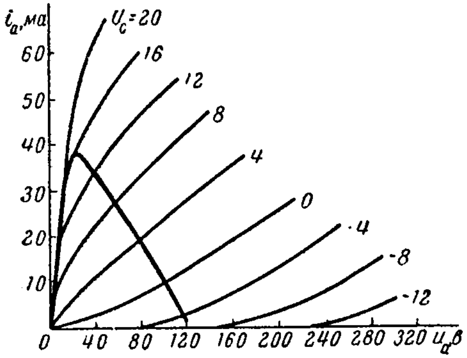


Рис. 185.

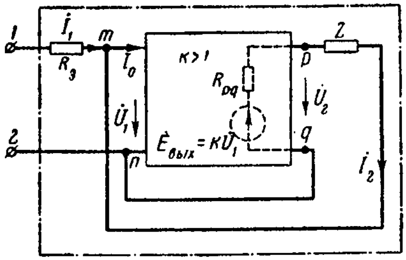


Рис. 186.

Со стороны выходных зажимов pq линейный усилитель представлен входным сопротивлением R_{pq} и э. д. с. $\dot E_{вых} = k\dot U_1$ (пунктир внутри четырехполюсника).

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\dot I_2 Z + \dot U_1 + \dot I_2 R_{pq} = \dot E_{вых} = k\dot U_1.$$

Отсюда

$$\dot I_2 = \frac{\dot U_1(k-1)}{Z+R_{pq}}.$$

Входное сопротивление по отношению к зажимам mn

$$Z_{вх mn} = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = \frac{\dot U_1}{-\dot I_2} = \frac{\dot U_1(Z+R_{pq})}{\dot U_1(1-k)} = -\frac{Z+R_{pq}}{k-1}.$$

Входное сопротивление по отношению к зажимам $1-2$

$$Z_{\text{вх}12} = R_{\text{д}} + Z_{\text{вх}\,mn} = R_{\text{д}} - \frac{R_{pq}}{k-1} - \frac{Z}{k-1}.$$

Если взять

$$R_{\text{д}} = \frac{R_{pq}}{k-1},$$

то

$$Z_{\text{вх}12} = -\frac{Z}{k-1},$$

т. е. в этом случае схема преобразует положительное сопротивление Z в отрицательное, одновременно изменяя его по модулю в $\frac{1}{k-1}$ раз.

При $Z = R$

$$Z_{\text{вх}12} = -R \cdot \frac{1}{k-1}.$$

Если $Z = j\omega L$, то

$$Z_{\text{вх}12} = -j\omega L \cdot \frac{1}{k-1},$$

т. е. входное сопротивление оказывается отрицательным индуктивным сопротивлением.

При $Z = \frac{-j}{\omega C}$

$$Z_{\text{вх}12} = \frac{j}{\omega C} \cdot \frac{1}{k-1},$$

т. е. входное сопротивление оказывается отрицательным емкостным сопротивлением.

Другие схемы, позволяющие осуществить подобного рода преобразования, рассмотрены, например, в [Л.8].

§ 12,10. Возникновение падающего участка на зависимости постоянной составляющей магнитной индукции в сердечниках нелинейной индуктивности от постоянной составляющей напряженности поля

Как уже упоминалось, в ряде схем с управляемыми нелинейными индуктивностями в результате действия неявно выраженных обратных связей на зависимости постоянной составляющей магнитной индукции от постоянной составляющей напряженности поля при определенных условиях может появиться падающий участок.

Рассмотрим появление падающего участка на примере схемы рис. 187.

К источнику синусоидального напряжения $U_m \sin \omega t$ подключены последовательно соединенные управляемая постоянным током нелинейная индуктивность, емкость и активное сопротивление R_l.

Активное сопротивление каждой обмотки переменного тока нелинейной индуктивности обозначим через R_1. Магнитная индукция в сердечниках нелинейной индуктивности имеет постоянную B_0 и переменную $B_\sim$ составляющие. Аппроксимируем кривую намагничивания гиперболическим синусом (формула 4,5) и воспользуемся обозначениями положительных направлений токов и индукций в соответствии с рис. 187.

По закону полного тока для левого сердечника

$$i_1' w_1 + i_0 w_0 = \alpha l \operatorname{sh} \beta (B_0 + B_\sim), \quad (12,6а)$$

для правого сердечника

$$i_1'' w_1 - i_0 w_0 = \alpha l \operatorname{sh} \beta (-B_0 + B_\sim), \quad (12,6б)$$

где l — длина средней магнитной линии сердечника.

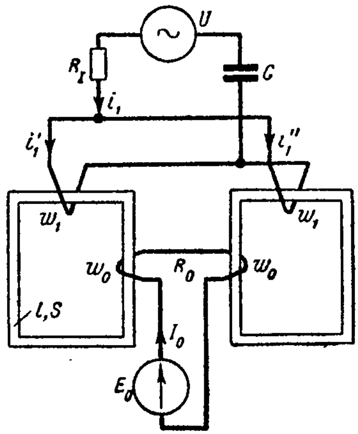


Рис. 187.

Сложив (12,6 а) и (12,6 б), получим

$$(i_1' + i_1'') w_1 = i_1 w_1 = 2\alpha l \operatorname{sh} \beta B_\sim \operatorname{ch} \beta B_0. \quad (12,6)$$

Составим уравнение для цепи переменного тока

$$k_1 \frac{dB_\sim}{dt} + i_1 \left(R_l + \frac{R_1}{2}\right) + \frac{1}{C} \int i_1 dt = U_m \sin \omega t, \quad (12,7)$$

где $k_1 = w_1 S \cdot 10^{-8}$;

S — площадь поперечного сечения сердечника.

Расчет проведем по первой гармонике. Примем

$$B_\sim = -B_m \cos(\omega t + \xi)$$

(высшими гармониками индукции в первом приближении пренебрегаем). После разложения гиперболических функций в ряд (см. § 5,3) и разбиения уравнения (12,7) на уравнения для синусной и косинусной составляющих получим два следующих уравнения:

$$-M \sin \xi + N \cos \xi = 0, \quad (12,8)$$

$$M \cos \xi + N \sin \xi = A. \quad (12,9)$$

Здесь

$$M = x - a\,[-jJ_1(jx)]\,\mathrm{ch}\,\beta B_0, \tag{12,10}$$

$$x = \beta B_{m1}, \tag{12,11}$$

$$N = b\,\mathrm{ch}\,\beta B_0\,[-jJ_1(jx)], \tag{12,12}$$

$$a = \frac{4\alpha l\beta}{k_1\omega^2 C w_1}, \tag{12,13}$$

$$b = \frac{2\alpha l\beta\,(R_1 + 2R_l)}{w_1 k_1 \omega}, \tag{12,14}$$

$$A = \frac{\beta U_m}{k_1\omega}. \tag{12,15}$$

Возведем уравнения (12,8) и (12,9) в квадрат и сложим их. Будем иметь

$$M^2 + N^2 = A^2. \tag{12,16}$$

Уравнение (12,16) разрешим относительно $\mathrm{ch}\,\beta B_0$:

$$\mathrm{ch}\,\beta B_0 = \frac{x \mp \sqrt{A^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - x^2\frac{b^2}{a^2}}}{a\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)[-jJ_1(jx)]}. \tag{12,17}$$

Если задаться конкретными значениями безразмерных параметров A, a, b, то при помощи уравнения (12,17) можно построить зависимость между βB_0 и $x = \beta B_m$.

В силу вещественности βB_0 $\mathrm{ch}\,\beta B_0$ не может быть комплексом. На рис. 188 изображена зависимость βB_0 от $x = \beta B_m$ при $A = 0{,}5$, $\frac{b}{a} = 0{,}1$, $a = 0{,}054$.

Нижняя ветвь кривой соответствует знаку минус перед радикалом в (12,17), верхняя — знаку плюс.

Для построения зависимости постоянной составляющей напряженности поля от постоянной составляющей магнитной индукции

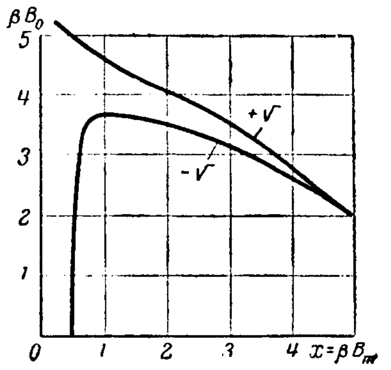


Рис. 188.

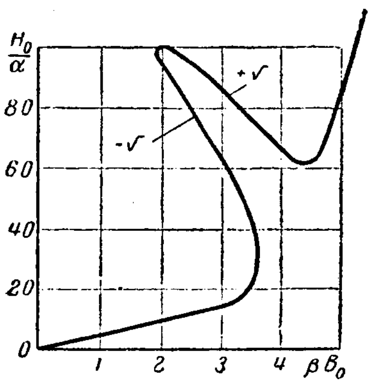


Рис. 189.

(рис. 189) при названных выше значениях параметров воспользуемся формулой (4,17):

$$\frac{H_0}{a} = \operatorname{sh} \beta B_0 J_0 (j\beta B_m)$$

и кривой рис. 188.

Из рис. 189 видно, что в интервале значений $\frac{H_0}{a} \approx 35 - 60$ на кривой есть не прикрытый другими ветвями падающий участок. Физически падающий участок появился вследствие перераспределения переменного напряжения между последовательно включенными элементами цепи переменного тока и влияния B_m на B_0.

§ 12,11. Отрицательная дифференциальная индуктивность для медленно изменяющихся „постоянных" составляющих тока и потока нелинейной индуктивности (схема рис. 187)

При выводе уравнения (12,16) было принято, что B_0 и B_m не являются функциями времени. Однако из метода медленно меняющихся амплитуд (§ 13,7) следует, что уравнение (12,16) и вытекающая из него формула (12,17) останутся практически справедливыми и в том случае, если B_0 и B_m будут достаточно медленно изменяться во времени.

Медленность изменения B_0 и B_m определяется тем, что производные от них по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведением ωB_m, т. е.

$$\frac{dB_m}{dt} \ll \omega B_m \text{ и } \frac{dB_0}{dt} \ll \omega B_m.$$

Таким образом, зависимость между $\frac{H_0}{a}$ и βB_0, изображенная на рис. 189, будет справедлива и при достаточно медленном изменении H_0 и B_0 во времени. При этом вместо терминов „постоянная составляющая магнитной индукции" и „постоянная составляющая напряженности поля" будем пользоваться терминами „медленно изменяющаяся постоянная составляющая магнитной индукции (или потока)" и „медленно изменяющаяся постоянная составляющая напряженности поля (или тока)".

Найдем $L_{0\,д}$ для схемы рис. 187. Для этой схемы

$$\Delta\psi_0 = \frac{2Sw_0}{\beta} \Delta(\beta B_0) \text{ и } \Delta I_0 = \frac{al}{w_0} \Delta\left(\frac{H_0}{a}\right).$$

Поэтому

$$L_{0\,д} = \frac{2Sw_0^2}{al\beta} \frac{d\beta B_0}{d\left(\frac{H_0}{a}\right)}.$$

На падающем участке зависимости $\frac{H_0}{a} = f(\beta B_0)$ на рис. 189 производная $\frac{d\beta B_0}{d\frac{H_0}{a}}$, а следовательно, и $L_{0\,д}$ отрицательны.

§ 12,12. Возникновение падающего участка на зависимости постоянной составляющей напряжения на нелинейной емкости от постоянной составляющей заряда на ней

Как уже говорилось, при определенных условиях в некоторых электрических цепях с управляемыми нелинейными емкостями на зависимости постоянной составляющей напряжения U_{c0} на нелинейной емкости от постоянной составляющей заряда Q_0 появляется падающий участок,

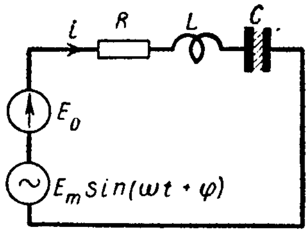


Рис. 190.

Убедимся в этом на примере схемы рис. 190.

С этой целью выразим зависимость мгновенного значения напряжения на емкости u_c через мгновенное значение заряда q гиперболическим синусом (§ 4,4):

$$u_c = \alpha \operatorname{sh} \beta q.$$

Примем, что заряд

$$q = Q_0 + Q_m \sin \omega t,$$

где Q_0 — постоянная составляющая заряда;

Q_m — амплитуда первой гармоники заряда.

Высшими гармониками заряда пренебрегаем.

В соответствии с формулой (6,28) постоянная составляющая напряжения на емкости U_{c0} определится следующим образом:

$$\frac{U_{c0}}{\alpha} = \operatorname{sh} \beta Q_0 J_0 (j\beta Q_m).$$

В свою очередь, первая гармоника напряжения на емкости будет равна

$$2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1 (j\beta Q_m)] \sin \omega t.$$

В уравнение цепи

$$iR + L \frac{di}{dt} + u_c = E_0 + E_m \sin(\omega t + \varphi)$$

подставим

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega Q_m \cos \omega t$$

и

$$\frac{di}{dt} = -\omega^2 Q_m \sin \omega t.$$

Получим

$$\omega Q_m R \cos \omega t - \omega^2 Q_m L \sin \omega t + U_{c0} + $$
$$+ 2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1 (j\beta Q_m)] \sin \omega t =$$
$$= E_0 + E_m \sin \omega t \cos \varphi + E_m \cos \omega t \sin \varphi. \quad (12,18)$$

Постоянная составляющая левой части уравнения (12,18) равна постоянной составляющей правой части этого уравнения, т. е.

$$U_{c0}=E_0.$$

Амплитуда синусной составляющей левой части уравнения (12,18) равна амплитуде синусной составляющей правой его части:

$$-\omega^2 Q_m L + 2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1(j\beta Q_m)] = E_m \cos\varphi. \qquad (12,19)$$

Амплитуда косинусной составляющей левой части уравнения (12,18) равна амплитуде косинусной составляющей правой части:

$$\omega Q_m R = E_m \sin\varphi. \qquad (12,20)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (12,19), а также обе части уравнения (12,20) и сложим полученные уравнения:

$$\{2\alpha \operatorname{ch} \beta Q_0 [-jJ_1(j\beta Q_m)] - \omega^2 L Q_m\}^2 + (\omega Q_m R)^2 = E_m^2. \quad (12,21)$$

Разрешим (12,21) относительно $\operatorname{ch}\beta Q_0$:

$$\operatorname{ch}\beta Q_0 = \frac{\beta Q_m \mp \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega^2 L} E_m\right)^2 - \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 \beta^2 Q_m^2}}{\frac{2\alpha\beta}{\omega^2 L}[-jJ_1(j\beta Q_m)]}. \qquad (12,22)$$

Формула (12,22) дает возможность построить зависимость βQ_0 от βQ_m при различных значениях безразмерных параметров

$$\frac{\beta E_m}{\omega^2 L}, \quad \frac{R}{\omega L} \text{ и } \frac{2\alpha\beta}{\omega^2 L}.$$

Формула (12,22) весьма сходна с формулой (12,17). Действительно, параметр $\frac{2\alpha\beta}{\omega^2 L}$ играет в ней такую же роль, какую играет параметр a в формуле (12,17). $\frac{R}{\omega L}$ эквивалентно $\frac{b}{a}$, $\frac{\beta}{\omega^2 L} E_m$ эквивалентно A, βQ_0 эквивалентно βB_0 и βQ_m эквивалентно x.

Несколько различны только знаменатели и первое слагаемое подкоренного выражения формул. Однако при $\frac{b}{a} \ll 1$ множитель $1+\frac{b^2}{a^2}$ может быть заменен на единицу и тогда формулы полностью тождественны.

Поэтому зависимость

$$\beta Q_0 = f(\beta Q_m)$$

при $\frac{\beta E_m}{\omega^2 L}=0{,}5, \quad \frac{R}{\omega L}=0{,}1$ и $\frac{2\alpha\beta}{\omega^2 L}=0{,}054$

будет повторять зависимость $\beta B_0 = f(\beta B_m)$, изображенную на рис. 188, а зависимость $\frac{U_{c0}}{a} = f(\beta Q_0)$ будет повторять зависимость (12,4), представленную на рис. 189.

Таким образом, на зависимости (12,5), как и на (12,4), при определенных условиях может появиться падающий участок.

Физически падающий участок на зависимости $U_{c0} = f(Q_0)$ для схемы рис. 190 появился вследствие перераспределения напряжения переменного тока между элементами цепи и влияния амплитуды переменной составляющей заряда Q_m на постоянную составляющую заряда Q_0.

§ 12,13. Отрицательная дифференциальная емкость для медленно изменяющихся постоянных составляющих заряда и напряжения на нелинейной емкости

Если Q_0 и Q_m будут достаточно медленно изменяться (схема рис. 190) $\left(\frac{dQ_m}{dt} \ll \omega Q_m \text{ и } \frac{dQ_0}{dt} \ll \omega Q_m\right)$, то зависимость между $\frac{U_{c0}}{a}$ и βQ_0 будет практически такой же, что и в режиме, когда Q_0 и Q_m не являются функциями времени.

В соответствии с формулой (12,3)

$$C_{0\,д} = \frac{1}{a\beta} \frac{d\beta Q_0}{d\left(\frac{U_{c0}}{a}\right)}.$$

На падающем участке зависимости (12,5) $C_{0\,д}$ отрицательна.

13

Переходные процессы в нелинейных электрических цепях

§ 13,1. Общая характеристика методов анализа и расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Рассматриваемые ниже методы анализа и расчета переходных процессов в нелинейных цепях могут быть классифицированы следующим образом:

1) по виду основных операций, которые необходимо выполнить для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, — на графические (графо-аналитические) и аналитические;

2) по характеру величины, для которой производится расчет, — на расчет для мгновенных значений токов и напряжений, на расчет для мгновенных значений огибающих токов и напряжений и на расчет для медленно меняющихся составляющих.

Условимся под графическими (графо-аналитическими) методами расчета понимать такие методы, в которых основными операциями при определении зависимости искомых токов и напряжений являются графические построения, зачастую сопровождаемые и некоторыми вспомогательными численными подсчетами.

Важно подчеркнуть, что в графических (графо-аналитических) методах расчета характеристики нелинейных сопротивлений обычно не требуется выражать аналитически.

В данной главе рассмотрены следующие графические методы:

1) метод, основанный на графическом подсчете определенного интеграла (§ 13,2);

2) метод, основанный на подсчете определенного интеграла по формуле трапеций (§ 13,5);

3) метод фазовой плоскости (§ 13,11 — 13,15).

Под аналитическими методами расчета будем понимать такие методы расчета, в которых основной операцией при определении зависимостей искомых токов и напряжений от времени является точное или приближенное аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений цепи, в которые подставляются аналитические выражения характеристик нелинейных сопротивлений.

Ниже рассматриваются следующие аналитические методы:

1) метод интегрируемой нелинейной аппроксимации (§ 13,3);

2) метод кусочно-линейной аппроксимации (§ 13,4);

3) метод медленно меняющихся амплитуд (§ 13,7);

4) метод гармонической линеаризации (§ 13,17).

Графические методы перед аналитическими имеют следующие преимущества:

а) в них не требуется, как правило, выражать характеристики нелинейных сопротивлений аналитически, и потому они свободны от погрешностей, связанных с аналитическим представлением характеристик нелинейных сопротивлений;

б) они довольно просто позволяют учесть наличие гистерезиса и другие сложные нелинейные зависимости.

Основное преимущество аналитических методов перед графическими в том, что они дают возможность получить решение в общем виде, а не для какого-то одного конкретного сочетания параметров или нескольких сочетаний параметров.

Анализ решения в общем виде позволяет выяснить все особенности процесса при изменении всех параметров.

Как уже упоминалось, все методы расчета могут быть разделены на три подгруппы: расчет по мгновенным значениям токов и напряжений, расчет по мгновенным значениям огибающих токов и напряжений и расчет по медленно меняющимся составляющим токов, напряжений, индукций, зарядов и других величин.

Расчет по огибающим дает возможность, не вдаваясь в мелкие детали процесса внутри каждого периода действующей в схеме периодической э. д. с. или внутри каждого периода автоколебаний в автоколебательной схеме, судить о макроструктуре процесса. Расчет по огибающим возможен не только для нелинейных цепей, он представляет существенный интерес и для линейных цепей.

Естественно, что точность расчета по огибающим уступает точности расчета по мгновенным значениям. Однако относительная быстрота расчета по огибающим и возможность судить о макроструктуре процесса часто оказываются решающими факторами.

Наиболее целесообразно там, где это необходимо, дополнять расчет по огибающим расчетом по мгновенным значениям. Метод расчета по огибающим представлен методом медленно меняющихся амплитуд (§ 13,7) и методом гармонической линеаризации (§ 3,17). Все же остальные методы относятся к подгруппе расчета по мгновенным значениям.

Довольно часто электрические цепи содержат несколько нелинейных сопротивлений. В § 13,5 рассматривается пример расчета переходного процесса в простейшей цепи с двумя нелинейностями.

Теория переходных процессов в электрических цепях с управляемыми нелинейными индуктивными, емкостными и активными сопротивлениями рассматривается в § 13,8 — 13,10.

Исследование переходных процессов в таких цепях обычно проводится для медленно меняющихся составляющих токов, напряжений, индукций, зарядов.

§ 13,2. Метод расчета переходных процессов, основанный на графическом подсчете определенного интеграла

Метод расчета переходных процессов, основанный на графическом подсчете определенного интеграла, применим к электрическим цепям, приводящим к дифференциальным уравнениям первого порядка, допускающим разделение переменных. Последняя оговорка очень существенна. Она свидетельствует о том, что в чистом виде метод применим к цепям постоянного тока и, как правило, неприменим к цепям переменного тока.

Основные этапы и последовательность расчета разберем на конкретном примере.

Пример. Нелинейный конденсатор через сопротивление R подключается к источнику напряжения U (рис. 191). Кулон-вольтная характеристика конденсатора задана графически (рис. 192).

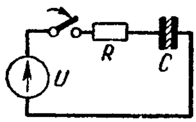


Рис. 191.

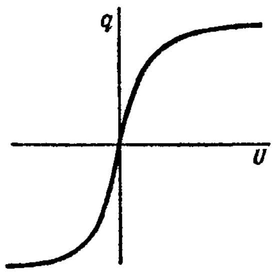


Рис. 192.

Полагая, что в схеме заданы нулевые начальные условия, построить кривые изменения заряда q, напряжения на емкости u_c и тока i в функции времени.

Решение. Составим дифференциальное уравнение

$$u_c + R\frac{dq}{dt} = U.$$

Разделим переменные

$$dt = R\frac{dq}{U - u_c}$$

или

$$dt = RF(q)dq. \tag{13,1}$$

Функция

$$F(q)=\frac{1}{U-u_c}\tag{13,2}$$

(см. рис. 193) строится при помощи кулон-вольтной характеристики. С этой целью задаемся произвольными значениями q, по кулон-вольтной характеристике находим соответствующие им u_c и по формуле (13,2) подсчитываем $F(q)$:

$$\text{при } q=0 \; u_c=0 \text{ и } F(q)=\frac{1}{U}; \text{ при } u_c=U \; F(q)=\infty.$$

Левую часть уравнения (13,1) интегрируем по t от 0 до текущего значения t, правую часть — по q от 0 до текущего значения q.

Получаем

$$t=R\int\limits_0^q F(q)dq.\tag{13,3}$$

Подынтегральное выражение $F(q)dq$ представляет собой заштрихованную площадку.

Согласно уравнению (13,3) для определения времени t, соответствующего какому-то конкретному значению q, надо подсчитать площадь, выраженную определенным интегралом $\int\limits_0^q F(q)dq$, и умножить ее на сопротивление R.

Кривая 1 (рис. 194) качественно представляет собой зависимость q от t. При помощи кривой $q=f(t)$ и кулон-вольтной характеристики нелинейной емкости строится зависимость $u_c=f(t)$ — кривая 2.

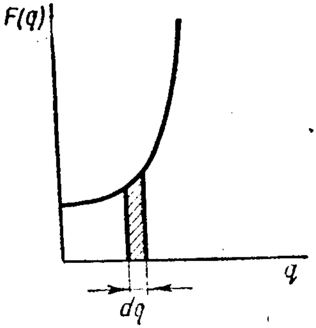


Рис. 193.

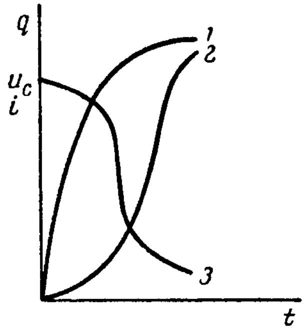


Рис. 194.

Ток в цепи (кривая 3) для произвольного момента времени определяется при помощи формулы

$$i=\frac{U-u_c}{R}.$$

§ 13,3. Расчет переходных процессов методом интегрируемой нелинейной аппроксимации

Расчет переходных процессов можно осуществлять методом интегрируемой нелинейной аппроксимации. Метод основан на аппроксимации характеристики нелинейного сопротивления такой нелинейной функцией, которая, во-первых, достаточно точно отображает характеристику нелинейного сопротивления на предполагаемом интервале перемещения изображающей точки и, во-вторых, и это главное, дает возможность точно проинтегрировать уравнение в известных функциях.

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования получается в общем виде зависимость исследуемой величины от времени и от всех параметров схемы.

Метод применим главным образом к электрическим цепям постоянного тока, сводящимся к дифференциальным уравнениям первого порядка, но при определенных упрощающих допущениях он может быть применен и к расчету электрических цепей переменного тока (имеются в виду цепи первого порядка). С применением метода к цепи переменного тока можно ознакомиться, например, по [Л.16], § 4,3.

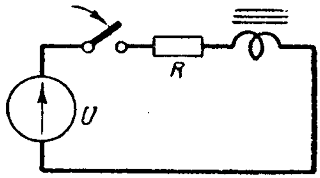


Рис. 195.

Пример. Определить закон нарастания во времени тока i при включении рубильника в схеме рис. 195. Принять, что зависимость тока i от потокосцепления ψ нелинейной индуктивности может быть выражена формулой $i = k\psi^4$. В схеме заданы нулевые начальные условия.

Решение. Дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = U$$

перепишем следующим образом:

$$dt = \frac{d\psi}{U - Ri}.$$

Вынесем из знаменателя множитель R и заменим i на $k\psi^4$:

$$dt = \frac{1}{R}\,\frac{d\psi}{I_у - k\psi^4},$$

где

$$I_у = \frac{U}{R}.$$

Обозначим $I_у = a^2$ и заменим $k\psi^4$ на ψ_1^4, $d\psi$ на $\frac{d\psi_1}{\sqrt[4]{k}}$.

Получим

$$dt = \frac{1}{R\sqrt[4]{k}}\,\frac{d\psi_1}{a^2 - \psi_1^4};$$

$$\frac{1}{a^2 - \psi_1^4} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a - \psi_1^2} + \frac{1}{a + \psi_1^2}\right);$$

$$\int\frac{dx}{a - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{a}}};$$

$$\int\frac{dx}{a + x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{a}}.$$

Следовательно,

$$t=\frac{1}{2I_y^{3/4}Rk^{\frac{1}{4}}}\left(0,5\ln\frac{1+\sqrt[4]{\frac{i}{I_y}}}{1-\sqrt[4]{\frac{i}{I_y}}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt[4]{\frac{i}{I_y}}\right). \qquad (13,4)$$

При помощи формулы (13,4) можно определить значение времени t, которое необходимо, чтобы отношение $\frac{i}{I_y}$ достигло заданной величины.

§ 13,4. Метод расчета переходных процессов, основанный на замене характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых линий (метод кусочно-линейной аппроксимации)

Замена характеристики нелинейного сопротивления отрезками прямых линий дает возможность перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным уравнениям, отличающимся лишь значениями коэффициентов.

Каждое из линейных уравнений справедливо для того интервала времени, в течение которого рабочая точка перемещается по данному линеаризированному участку. Метод применим к цепям, содержащим источники постоянной и (или) синусоидальной э. д. с., к цепям первого и более высоких порядков.

Для сложных нелинейных цепей с источником (источниками) синусоидальной э. д. с. основная трудность расчета данным методом, как и при расчете установившихся процессов (§ 7,12), заключается в определении постоянных интегрирования и времени работы на каждом линейном участке, исходя из законов коммутации. В сложных цепях неизвестные определяются обычно из трансцендентных уравнений. Для решения трансцендентных уравнений могут быть применены математические счетные машины.

Рассмотрим основные этапы расчета на простейшем примере.

Пример. Конденсатор заряжается через нелинейное сопротивление от источника постоянного напряжения U (рис. 196,*а*). Определить закон изменения тока в цепи при зарядке.

Решение. Вольт-амперную характеристику нелинейного сопротивления заменим двумя отрезками прямых линий (рис. 196,*б*). Пусть на участке от $i=0$ до $i=i_1$

$$u_{HC}=k_2 i,$$

где u_{HC} — напряжение на нелинейном сопротивлении.

На участке $i>i_1$

$$u_{HC}=U_0+k_1 i.$$

Размерность коэффициентов k_1 и k_2 равна размерности сопротивления.

В уравнение цепи

$$u_c+u_{HC}=U$$

вместо u_c подставим $\frac{1}{C}\int idt$, и для первого участка заменим u_{HC} на U_0+k_1i, а для второго — на k_2i.

При зарядке конденсатора ток будет постепенно уменьшаться от максимального значения до нуля. Поэтому изображающая точка будет перемещаться сначала по первому участку, а затем по второму; для первого участка

$$\frac{1}{C}\int idt + U_0 + k_1 i = U,$$

для второго участка

$$\frac{1}{C}\int idt + k_2 i = U.$$

Решение для первого участка:

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = 0 + A_1 e^{-\frac{t}{k_1 C}}.$$

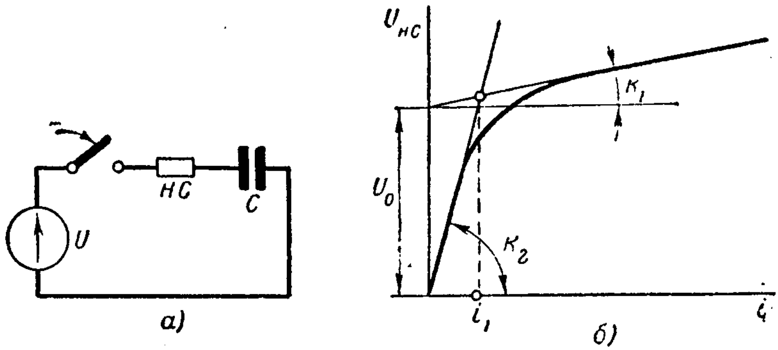


Рис. 196

Постоянную интегрирования найдем из начального условия: при $t=0$ $u_c=0$, поэтому

$$U_0 + k_1 i_1(0_+) = U,$$

$$i_1(0_+) = \frac{U-U_0}{k_1} = A_1.$$

Следовательно, при работе на первом участке

$$i = \frac{U-U_0}{k_1} e^{-\frac{t}{k_1 C}}. \tag{13,5}$$

Пусть при $t=t_1$ ток i станет равным i_1. Подставим в (13,5) i_1 вместо i и t_1 вместо t и решим полученное уравнение относительно t_1:

$$t_1 = k_1 C \ln \frac{U-U_0}{k_1 i_1}. \tag{13,6}$$

Дальнейшая работа происходит по второму участку, на нем

$$i = A_2 e^{-\frac{t-t_1}{k_2 C}}.$$

Причем $A_2 = i_1$.

Практически важной является задача о переходном процессе при подключении ненагруженного трансформатора (с разомкнутой вторичной обмоткой) или нелинейной индуктивности к источнику синусоидальной э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 197, *а*).

Рассмотрим эту задачу качественно.

Если активное сопротивление первичной обмотки трансформатора R_1 мало, а амплитуда установившегося значения потокосцепления $\psi_m = \frac{E_m}{\omega}$ соответствует окрестности точки *а* (рис, 197, *б*), то при включении рубильника в момент, когда э. д. с. $E_m \sin(\omega t + \psi)$ проходит через нулевое значение, в цепи возникают очень большие кратковременные броски тока. Последние могут превышать амплитуду тока холостого хода трансформатора в 20 — 50 и даже более раз (аналитическое решение этой задачи методом кусочно-линейной аппроксимации см., например, в [Л. 16]).

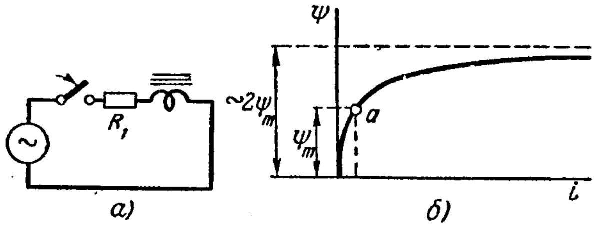


Рис. 197.

Физически броски тока возникают вследствие того, что к концу первого полупериода $\frac{2\pi}{2\omega}$ после включения потокосцепление достигает величины, близкой к $2\psi_m$.

Из кривой рис. 197, *б* видно, что если будет достигнуто такое состояние, при котором $\psi \approx 2\psi_m$, в этот момент в цепи будет очень большой ток, во много раз превышающий ток при $\psi = \psi_m$.

Хотя толчки тока и очень кратковременны, но все же в системах с мощными трансформаторами они нежелательны, так как требуют принятия специальных мер для устранения возможных вредных последствий от них.

§ 13,5. Основы расчета переходных процессов путем замены определенного интеграла приближенной суммой*

В 1916 г. В. Волынкиным был разработан графоаналитический метод расчета переходных процессов в нелинейных цепях, основанный на замене определенного интеграла приближенной суммой по формуле трапеций.

---

* Кроме рассматриваемого в § 13,5 метода существуют и другие графоаналитические методы и приемы. Из них наиболее известны: метод Д. А. Башкирова [Л. 12], гл. 18 и [Л. 58], метод А. В. Башарина [Л. 57], метод М. Л. Франка [Л. 19], метод последовательных интервалов [Л. 16, 26] и другие методы [Л. 61 и др.].

Из курса математики известно, что если интервал интегрирования $b-a$ в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ разбить на n равных частей и через y_0, y_1, y_2 ... обозначить значения функции $f(x)$ соответственно при $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$ и т. д.,
где

$$h=\frac{b-a}{n},$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n). \qquad (13,7)$$

Рассмотрим метод на примере цепи рис. 198. Цепь состоит из нелинейной индуктивности и сопротивлений R_1 и R_2. Зависимость потокосцепления ψ от тока i для нелинейной индуктивности задана кривой рис. 199. Пусть э. д. с. $e_1(t)$ имеет форму, изображенную на рис. 200.

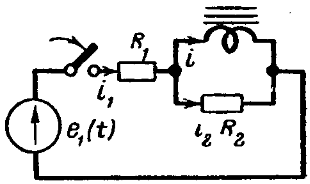


Рис. 198.

Обозначим токи в ветвях в соответствии с рис. 198. Составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_1=i+i_2;$$

$$i_2=\frac{1}{R_2}\frac{d\psi}{dt},\quad i_1R_1+\frac{d\psi}{dt}=e_1(t).$$

Отсюда

$$\frac{d\psi}{dt}+i\frac{R_1}{1+\frac{R_1}{R_2}}=\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}}e_1(t). \qquad (13,8)$$

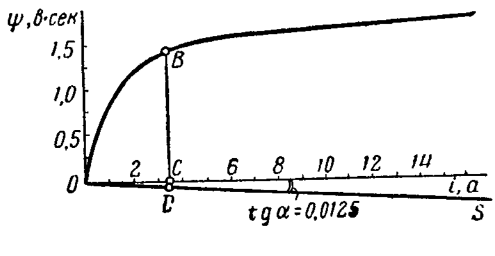


Рис. 199.

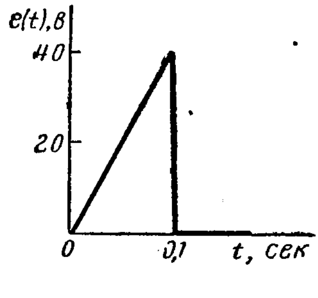


Рис. 200.

Для сокращения записи обозначим

$$R = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}},$$

$$e(t) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} e_1(t).$$

Тогда уравнение цепи запишется так:

$$\frac{d\psi}{dt} + Ri = e(t). \qquad (13,9)$$

Разобьем время t на равные промежутки τ ($t = n\tau$), тогда вместо $\frac{b-a}{2n}$ будем иметь

$$\frac{n\tau - 0}{2n} = \frac{\tau}{2}.$$

Последовательно проинтегрируем (13,9) от $t = 0$ до $t = \tau$ затем от $t = 0$ до $t = 2\tau$ и т. д. и воспользуемся формулой трапеций.

Получим для первого интервала

$$\psi_1 - \psi_0 + R\int_0^\tau i\,dt = \int_0^\tau e(t)\,dt,$$

но

$$\int_0^\tau i\,dt = \frac{\tau}{2} i_1.$$

Следовательно,

$$\psi_1 + \frac{R\tau}{2} i_1 = \psi_0 + \int_0^\tau e(t)\,dt, \qquad (13,10)$$

где ψ_0 — остаточное потокосцепление. В дальнейшем примем его равным нулю.

Для $t = 2\tau$

$$\psi_2 + R\int_0^{2\tau} i\,dt = \int_0^{2\tau} e(t)\,dt,$$

но

$$\int_0^{2\tau} i\,dt = \frac{\tau}{2}(2i_1 + i_2).$$

Поэтому для $t=2\tau$

$$\psi_2+\frac{R\tau}{2}i_2=\int_0^{2\tau}e(t)\,dt-R\tau\cdot i_1. \qquad (13,11)$$

При $t=n\tau$

$$\psi_n+\frac{R\tau}{2}i_n=\int_0^{n\tau}e(t)\,dt-R\tau\sum_{k=1}^{n-1}i_k. \qquad (13,12)$$

Уравнение (13,12) позволяет последовательно находить i_1, i_2, i_3 ... В левую часть его входят неизвестный ток i_n и соответствующее ему потокосцепление ψ_n, а величина Σi_k в правой части известна по результатам подсчета за предыдущие интервалы времени.

Последовательность расчета следующая:

1. По заданной $e(t)$ строим кривую $\int_0^{n\tau}e(t)\,dt$ (рис. 201).

2. На рис. 199, где изображена кривая $\psi=f(i)$, проводим прямую OS под углом α к оси абсцисс, тангенс которого равен $\frac{R\tau}{2}$.

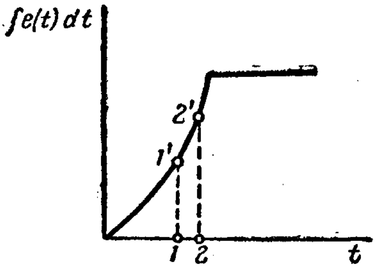


Рис. 201.

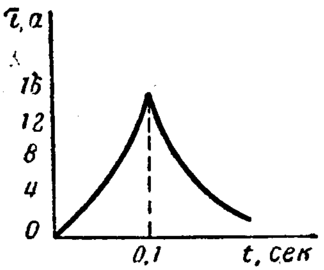


Рис. 202.

3. Значение i_1 находим по уравнению (13,10). С этой целью из рис. 201 берем значение $\int_0^{\tau}e(t)\,dt$. Пусть оно будет равно отрезку $1-1'$. Переносим этот отрезок на рис. 199 и перемещаем его параллельно оси ординат до тех пор, пока один конец его не окажется на кривой $\psi(i)$ — точка B, а другой на прямой OS — точка D.

При этом отрезок BC будет равен ψ_1, отрезок CD — равен $\frac{R\tau}{2}i_1$. Ток i_1 равен отрезку OC.

4. Ток i_2 находится аналогично, только в соответствии с уравнением (13,11) из интеграла $\int\limits_0^{2\tau} e(t)\,dt$, равного отрезку $2-2'$, надо предварительно вычесть $R\tau i_1$, а затем уже перемещать полученный отрезок параллельно оси ординат.

5. Для определения i_3 из интеграла $\int\limits_0^{3\tau} e(t)\,dt$ надо вычесть $R\tau(i_1+i_2)$ и т. д.

Если $e(t)$ — функция периодическая с периодом T, то рекомендуется брать

$$\tau = \left(\frac{1}{18} \div \frac{1}{36}\right) T.$$

Если $e(t)$ — функция непериодическая, то величину выбирают после предварительных пробных подсчетов.

Рассмотрим численный пример.

Пример. В схеме (рис. 198) $R_1 = R_2 = 2$ *ом*. Зависимость $\psi = f(i)$ изображается кривой (рис. 199).

В интервале от $t = 0$ до $t = 0{,}1$ *сек* $e(t) = 400\,t$, далее $e(t) = 0$. Построить кривую $i = f(t)$, полагая начальные условия нулевыми и остаточное потокосцепление $\psi_0 = 0$.

Решение. Задаемся интервалом времени $\tau = 0{,}025$ *сек*. Результаты подсчетов сводим в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n\tau$	0,025	0,05	0,075	0,10	0,125	0,15	0,175	0,2
$\int\limits_0^{n\tau} e(t)\,dt$	0,125	0,5	1,13	2	2	2	2	2
$R\tau \sum\limits_{k=1}^{n-1} i_k$	0	0,004	0,01	0,057	0,45	0,565	0,645	0,715
$\int\limits_0^{n\tau} e(t)\,dt - R\tau \sum\limits_{k=1}^{n-1} i_k$	0,125	0,496	1,12	1,943	1,55	1,435	1,355	1,285
i_n	0,16	0,24	1,85	15,7	4,6	3,2	2,76	2,36

По данным таблицы построен график (рис. 201)

$$\int e(t)\,dt = f(t);$$

на рис. 202 построен график $i = f(t)$.

§ 13,6. Расчет переходных процессов в схемах с несколькими нелинейными сопротивлениями

Метод, рассмотренный в § 13,5, может применяться и к цепям с несколькими нелинейными сопротивлениями, а также к цепям, приводящим к уравнению второго, третьего и более высоких порядков [Л. 16].

В качестве примера рассмотрим вопрос о переходном процессе в простейшей цепи с двумя нелинейностями.

В схеме рис. 203 к источнику э. д. с. $e(t)$ подключаются последовательно соединенные нелинейная индуктивность (зависимость ψ от i задана) и нелинейное активное сопротивление с заданной вольт-амперной характеристикой $u_R = f(i)$.

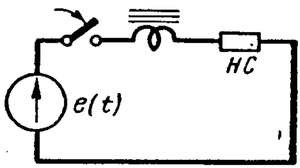


Рис. 203.

Проинтегрируем уравнение цепи

$$\frac{d\psi}{dt} + u_R(i) = e(t)$$

по t от 0 до $t = n\tau$.

Учтем, что

$$\int_0^{n\tau} u_R i(dt) = \frac{\tau}{2}\,[2u_R(i_1) + 2u_R(i_2) + \ldots + 2u_R(i_{n-1}) + u_R(i_n)].$$

Получим формулу, аналогичную (13,12):

$$\psi_n + \frac{\tau}{2}\,u_R(i_n) = \int_0^{n\tau} e(t)dt - \tau\sum_{k=1}^{n-1} u_R(i_k). \qquad (13,13)$$

Последовательность расчета по формуле (13,13) такая же, как и по формуле (13,12). Отличие состоит лишь в том, что вместо прямой $\frac{\tau}{2}Ri$ (прямая OS на рис. 199) на рис. 199 надо нанести кривую $\frac{\tau}{2}\,u_R(i)$.

§ 13,7. Метод медленно меняющихся амплитуд

В электротехнике, радиотехнике и других отраслях техники широко применяется метод расчета переходных процессов, получивший название метода медленно меняющихся амплитуд.

Впервые этот метод был применен в 1921 г. голландским физиком Ван-дер-Полем.

Рассмотрим основы этого метода на примере нелинейной цепи второго порядка, находящейся под воздействием периодической возмущающей силы. Пусть уравнение цепи таково:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\sin\omega t. \qquad (13,14)$$

Про изучаемую цепь известно, что под действием периодической силы с частотой ω в ней устанавливается вынужденное колебание с частотой ω, а высшие гармоники выражены слабо.

Примем, что искомая функция $x(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \tag{13,15}$$

где a и b — медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения a и b во времени определяется тем, что производные от них по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведениями ωa и ωb, т. е.

$$\frac{da}{dt} \ll \omega a \text{ и } \frac{db}{dt} \ll \omega b. \tag{13,16}$$

Если это учесть, то вместо того, чтобы взять

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t + \sin \omega t \frac{da}{dt} + \cos \omega t \frac{db}{dt}, \tag{13,17}$$

можно в первом приближении принять

$$\frac{dx}{dt} \cong a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t. \tag{13,18}$$

Аналогично, вместо того чтобы вторую производную брать в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\omega^2 a \sin \omega t - \omega^2 b \cos \omega t + \omega \cos \omega t \frac{da}{dt} -$$

$$- \omega \sin \omega t \frac{db}{dt} + \frac{d^2a}{dt^2} \sin \omega t + \frac{d^2b}{dt^2} \cos \omega t +$$

$$+ \omega \cos \omega t \frac{da}{dt} - \omega \sin \omega t \frac{db}{dt},$$

пренебрежем в ней слагаемыми второго порядка малости и оставим слагаемые первого порядка малости. Получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\left(\omega^2 a + 2\omega \frac{db}{dt}\right) \sin \omega t + \left(-\omega^2 b + 2\omega \frac{da}{dt}\right) \cos \omega t. \tag{13,19}$$

Далее в функцию $f(x)$ вместо x подставим (13,15) и разложим $f(x)$ в ряд Фурье. Затем умножим ряд Фурье, которым выразилась $f(x)$, на $\frac{dx}{dt}$ (см. формулу 13,18).

При этом учтем, что уравнение (13,14) составлено для цепи с относительно малыми потерями, поэтому амплитуда второго слагаемого левой части этого уравнения мала по сравнению с амплитудой первого и третьего слагаемых этого уравнения.

Если это учесть, то слагаемыми первого порядка малости, содержащими $\frac{da}{dt}$ и $\frac{db}{dt}$ от члена $f(x)\frac{dx}{dt}$, можно пренебречь*. Получим

$$f(x)\frac{dx}{dt} = F_0(a, b) + F_1(a, b)\sin\omega t + F_2(a, b)\cos\omega t +$$
$$+ F_3(a, b)\sin 2\omega t + F_4(a, b)\cos 2\omega t + \ldots \qquad (13,20)$$

Так как расчет ведется по первой гармонике, то постоянной составляющей $F_0(a,b)$ и высшими гармониками ряда Фурье (т. е. $F_3(a, b)$, $F_4(a, b)$...) в дальнейшем пренебрежем.

В уравнение (13,14) подставим вместо $\frac{d^2x}{dt^2}$ правую часть (13,19), вместо $f(x)\frac{dx}{dt}$ подставим

$$F_1(a, b)\sin\omega t + F_2(a, b)\cos\omega t$$

и вместо $\omega_0^2 x$ подставим

$$\omega_0^2 (a\sin\omega t + b\cos\omega t).$$

Тогда уравнение (13,14) разобьется на два уравнения. Одно из них — уравнение (13,21) — будет выражать равенство коэффициентов при $\sin\omega t$ в левой и правой частях уравнения (13,14); другое — уравнение (13,22) — равенство коэффициентов при $\cos\omega t$ в левой и правой частях уравнения (13,14):

$$-2\omega\frac{db}{dt} + F_1(a, b) + a(\omega_0^2 - \omega^2) = A; \qquad (13,21)$$

$$2\omega\frac{da}{dt} + F_2(a, b) + b(\omega_0^2 - \omega^2) = 0. \qquad (13,22)$$

Система уравнений (13,21) и (13,22) представляет собой два совместных дифференциальных уравнения, составленных относительно мгновенных значений медленно меняющихся амплитуд a и b.

Огибающая колебаний определяется уравнением

$$f(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}.$$

В общем случае систему (13,21) — (13,22) можно решить методами численного интегрирования или при помощи метода, рассмотренного в § 13,5. В частном случае, когда внешняя периодическая сила равна нулю ($A = 0$), угловая частота колебаний ω равна угловой частоте собственных колебаний ω_0. В этом случае начальную фазу колебаний можно взять равной нулю, т. е. в формуле (13,15) принять $b = 0$.

---

* Если максимальное значение слагаемого $f(x)\frac{dx}{dt}$ в уравнении (13,14) (и подобных ему), выражающее собой падение напряжения в активном сопротивлении контура (или контуров), соизмеримо с максимальными значениями остальных слагаемых уравнения (13,14), то в выражении $f(t)\frac{dx}{dt}$ должны быть сохранены слагаемые первого порядка малости.

При этом $F_1(a, b) = 0$ и система сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{da}{dt} = -\frac{F_2(a)}{2\omega}, \ (b = 0). \tag{13,23}$$

(Пример для этого случая см. в § 15,10).

Выше были рассмотрены основные этапы перехода от дифференциального уравнения для мгновенных значений к дифференциальным уравнениям для медленно меняющихся амплитуд на примере уравнения (13,14).

Однако метод применим и к другим более сложным уравнениям, например к уравнениям третьего, четвертого и более высоких порядков.

Идея, положенная в основу метода медленно меняющихся амплитуд, с успехом может быть использована и в том случае, если расчет проводится с учетом не только первой, но и одной или нескольких высших или низших гармоник. Например, если расчет проводится с учетом гармоник частот ω и ω_1, то решение берут в такой форме:

$$x = a(t)\sin\omega t + b(t)\cos\omega t + c(t)\sin\omega_1 t + g(t)\cos\omega_1 t.$$

После подстановки этого решения в исходное уравнение будет получена система четырех уравнений относительно

$$\frac{da(t)}{dt}, \ \frac{db(t)}{dt}, \ \frac{dc(t)}{dt}, \ \frac{dg(t)}{dt}.$$

§ 13,8. Введение к расчету переходных процессов в электрических цепях с управляемыми нелинейными сопротивлениями

Особенностью переходных процессов в электрических цепях с управляемыми нелинейными сопротивлениями является то, что в них происходят два неразрывно связанных и влияющих друг на друга процесса: процесс изменения управляющего фактора и процесс изменения управляемой величины.

Все переходные процессы в цепях с управляемыми нелинейными сопротивлениями с точки зрения их продолжительности можно разделить на две группы. Первую группу составляют весьма быстро протекающие переходные процессы, длительностью от 0,5 до 1,5 (или несколько более) периодов источника питания управляемой цепи. Вторую группу составляют относительно медленно протекающие переходные процессы, длительность которых — три, пять, десять, двадцать и более периодов источника питания управляемой цепи.

При довольно быстро протекающих переходных процессах существенное влияние на характер процесса в целом может в ряде случаев оказать фаза источника питания управляемой цепи, соответствующая моменту коммутации (начальная фаза). В относительно медленно протекающих переходных процессах начальная фаза источника питания управляемой цепи сколько-нибудь существенного влияния на процесс в целом, как правило, не оказывает и потому ее не учитывают при расчете.

По виду управляющего фактора, изменение которого приводит к переходному процессу, все цепи могут быть разделены на две группы. В первой из них управление режимом работы НС производится постоянным током или постоянным напряжением; во второй — переменным или импульсным током (или напряжением) той или иной частоты.

Наибольшее распространение на практике нашли устройства первой группы. Устройства второй группы в настоящее время применяются сравнительно редко. Поэтому ниже будут рассмотрены некоторые вопросы расчета переходных процессов в схемах, где управляющая цепь подключена к источнику постоянной э. д. с.

Как говорилось в § 13,1, все методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях могут быть разбиты на две категории методов. В первую из них входят методы, в которых расчет производится применительно к мгновенным значениям всех величин. Эта группа методов может быть названа микрометодами.

Вторую группу методов составляют макрометоды. Применительно к электрическим цепям с неуправляемыми нелинейными сопротивлениями макрометод был определен как метод, в котором расчет переходных процессов производится для мгновенных значений огибающих*. Эта формулировка применительно к электрическим цепям с управляемыми нелинейными сопротивлениями требует некоторых уточнений.

Под макрометодом при расчете электрических цепей с управляемыми нелинейными сопротивлениями будем понимать метод, в котором расчет производится для мгновенных значений амплитуд первых гармоник управляемой цепи и для мгновенных значений медленно меняющихся величин управляющей цепи.

Медленно меняющимися величинами в электрических цепях с управляемыми нелинейными индуктивностями являются медленно меняющиеся составляющие напряженности и магнитной индукции; в цепях с управляемыми нелинейными емкостями — медленно меняющиеся составляющие напряжения и заряда на нелинейной емкости; в цепях с управляемыми нелинейными активными сопротивлениями — медленно меняющиеся составляющие тока и напряжения.

Естественно, что для расчета весьма быстро протекающих переходных процессов следует пользоваться тем или иным микрометодом, и макрометод либо вовсе неприменим, либо применим

* Обычно имеются в виду огибающие первых гармоник.

в ограниченной степени для качественной оценки характера процесса и порядка величин.

Для расчета относительно медленно протекающих переходных процессов, и особенно для изучения их макроструктуры, целесообразно применять макрометод, дополняя его в случае необходимости и микрометодом.

§ 13,9. Общая характеристика макроскопического метода расчета переходных процессов в цепях с управляемыми нелинейными сопротивлениями

Основными этапами макрометода являются следующие:

1. Составление дифференциального уравнения (уравнений) для мгновенных значений величин управляемой цепи.

2. Переход от этого уравнения к уравнениям, связывающим мгновенные значения амплитуд (или действующих значений) первых гармоник в управляемой цепи. Этот переход производится по методу медленно меняющихся амплитуд. В результате будет получено уравнение (уравнения), которое дает возможность аналитическим или графическим путями построить зависимость между мгновенными значениями амплитудных (или действующих) значений каких-либо двух величин, определяющих работу нелинейного сопротивления.

Если переходный процесс относительно медленно протекает во времени, то зависимость между этими величинами при переходном процессе (т. е. в динамическом режиме), как правило, будет практически совпадать с зависимостью между теми же величинами при бесконечно медленном изменении управляющего фактора во времени (т. е. со статическими зависимостями). Если же переходный процесс происходит весьма быстро, то уравнения динамических характеристик будут содержать соизмеримые с остальными слагаемыми производные от быстро меняющихся амплитуд и фаз, и это (а также ряд других, не учитываемых здесь факторов) приведет к тому, что статические и динамические характеристики будут в той или иной мере различными.

3. Составление дифференциального уравнения для медленно меняющихся величин цепи управления.

4. Интегрирование уравнения п. 3 любым из известных методов с учетом связи, которая была получена в п. 2.

Основными допущениями макрометода являются:

1. Пренебрежение высшими гармониками токов и напряжений управляемой и управляющей цепей. При необходимости влияние высших гармоник на характеристики п. 2 можно учесть так же, как это делается при расчете нелинейных цепей с учетом высших гармоник (см. § 7,15).

2. Влияние изменения режима работы управляемой цепи на свойства самого нелинейного сопротивления в отношении управ-

ляющей цепи, как правило, учитывается тоже только по первой гармонике, хотя принципиально возможно учесть влияние и высших гармоник (пример учета влияния второй гармоники см., например, в § 5,6 [Л. 16]).

§ 13,10. Применение макрометода к расчету переходного процесса в цепи с управляемой нелинейной индуктивностью

В схеме рис. 204 управляемая цепь образована источником э. д. с. напряжением $U_m \sin(\omega t + \varphi)$, обмотками w управляемой нелинейной индуктивности и активным сопротивлением $R_н$. Управляющая цепь образована обмотками w_0 управляемой нелинейной индуктивности, источником постоянной э. д. с. E_0 и активным сопротивлением R_0.

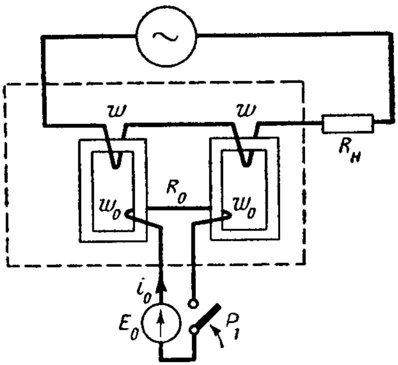


Рис. 204.

Путем изменения величины тока подмагничивания i_0 в обмотках w_0 можно менять величину индуктивного сопротивления, оказываемого нелинейной индуктивностью в управляемой цепи, и тем самым управлять величиной активной мощности, выделяющейся в сопротивлении $R_н$.

Если последняя будет больше активной мощности $i_0^2 R_0$ в цепи управления, то такого рода устройство можно рассматривать как магнитный усилитель мощности. Слово „магнитный“ свидетельствует о характере управляемого нелинейного сопротивления в схеме.

Переходный процесс в цепи вызывается замыканием рубильника P_1.

Этапы приводимого ниже расчета соответствуют перечисленным в § 13,9.

Составим дифференциальное уравнение для мгновенных значений величин в управляемой цепи:

$$\frac{d\psi}{dt} + iR_н = U_m \sin(\omega t + \varphi), \qquad (13,24а)$$

где ψ — результирующее потокосцепление обмоток w.

Пусть первая гармоника магнитной индукции в каждом из сердечников равна $B_m \sin \omega t$, а постоянная составляющая индукции $\pm B_0$. Знак плюс относится к левому сердечнику, знак минус — к правому.

Выразим кривую намагничивания гиперболическим синусом (формула 4,5) и будем вести расчет по первой гармонике.

Суммарное потокосцепление обмоток w обоих сердечников

$$\psi = k\beta B_m \sin \omega t,$$

где

$$k = \frac{2wS}{\beta};$$

S — площадь поперечного сечения одного сердечника.

Мгновенное значение первой гармоники переменного тока i (см. формулу 6,1) равно $I_{1m} \sin \omega t$.

Здесь

$$I_{1m} = \frac{2\alpha l}{w} \operatorname{ch} \beta B_0 \left[-jJ_1(j\beta B_m) \right]. \qquad (13,24б)$$

При переходном процессе βB_0 и βB_m являются медленно меняющимися функциями времени. От дифференциального уравнения (13,24а) перейдем к уравнению для медленно меняющихся амплитуд первых гармоник. Если $\frac{d\beta B_m}{dt} \ll \omega\beta B_m$, то можно пренебречь слагаемыми уравнений, содержащими производные по времени от βB_0 и βB_m. Тогда, пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд (§ 13,7), получим уравнение

$$k\omega\beta B_m \cos \omega t + \frac{2\alpha l R_{\text{н}}}{w} \operatorname{ch}\beta B_0 \left[-jJ_1(j\beta B_m) \right] \sin \omega t =$$

$$= U_m \sin \omega t \cos \varphi + U_m \cos \omega t \sin \varphi.$$

Последнее уравнение разбивается на два:

$$kw\beta B_m = U_m \sin \varphi; \qquad (13,25а)$$

$$\frac{2\alpha l R_{\text{н}}}{w} \operatorname{ch} \beta B_0 \left[-jI_1 (j\beta B_m) \right] = U_m \cos \varphi. \qquad (13,25б)$$

Возведем уравнения (13,25а) и (13,25б) в квадрат, сложим и разрешим относительно $\operatorname{ch} \beta B_0$. Получим

$$\operatorname{ch} \beta B_0 = \frac{\sqrt{U_m^2 - (k\omega\beta B_m)^2}}{\frac{2\alpha l R_{\text{н}}}{w} \left[-jI_1 (j\beta B_m) \right]}. \qquad (13,26а)$$

Придавая βB_m конкретные значения по уравнению (13,26а), можно найти соответствующие им значения βB_0 и построить зависимость

$$\beta B_0 = f(\beta B_m). \qquad (13,26б)$$

Качественно зависимость изображена на рис. 205, *а*.

Далее воспользуемся формулой (6,17). Она дает связь между постоянной составляющей напряженности поля H_0 в сердечниках нелинейной индуктивности, постоянной составляющей магнитной индукции B_0 и амплитудой B_m первой гармоники магнитной индукции:

$$H_0 = \alpha \operatorname{sh} \beta B_0 J_0 (j\beta B_m).$$

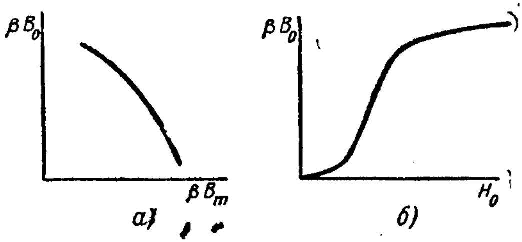


Рис. 205.

Задаваясь различными значениями βB_0, при помощи кривой $\beta B_0 = f(\beta B_m)$ находим значения βB_m и по формуле (6,17) подсчитываем H_0. На основании этих подсчетов строим кривую

$$H_0 = F_0(\beta B_0).$$

Качественно она представлена на рис. 205, *б*.

Затем составляем дифференциальное уравнение для медленно меняющихся величин управляющей цепи (в силу встречного включения обмоток w_0 в цепи управления не наводится э. д. с. частоты ω):

$$k_0 \frac{d\beta B_0}{dt} + i_0 R_0 = E_0,$$

$$k_0 = \frac{2w_0 S}{\beta}.$$

По закону полного тока

$$i_0 = \frac{lH_0}{w_0} = \frac{l}{w_0} F_0(\beta B_0).$$

Следовательно,

$$\frac{d\beta B_0}{d(k_1 t)} + F_0(\beta B_0) = E_0', \qquad (13,27)$$

где

$$k_1 = \frac{R_0 l}{w_0 k_0} \text{ и } E_0' = \frac{w_0 E_0}{lR_0}.$$

Уравнение (13,27) интегрируется любым из методов, рассмотренных в § 13,2 — 13,6. В результате интегрирования будет получена зависимость

$$\beta B_0 = f(t).$$

При помощи этой зависимости и ранее полученной (13,26б) строится кривая изменения во времени амплитуды первой гармоники напряжения на нелинейной индуктивности $k\omega\beta B_m = f(t)$, а при помощи формулы (13,24а) — зависимость от времени амплитуды (или действующего значения) первой гармоники переменного тока.

§ 13,11. Определение фазовой плоскости и краткая характеристика областей ее применения для исследования переходных процессов в нелинейных цепях

Качественное исследование различных процессов в электрических цепях, описываемых дифференциальными уравнениями первого и в особенности второго порядка, производится в ряде случаев при помощи фазовой плоскости.

Фазовой плоскостью называют плоскость, по оси абсцисс которой откладывается исследуемая величина (назовем ее x), а по оси ординат — производная от исследуемой величины $\frac{dx}{dt}$ (последнюю принято обозначать через y).

В каждой конкретной задаче под x понимают либо ток, либо напряжение, либо заряд, либо индукцию. Любому сочетанию значений x и y исследуемой цепи соответствует вполне определенная точка фазовой плоскости.

Для качественного исследования процессов в электрических цепях, описываемых уравнениями третьего порядка, применяют трехмерное фазовое пространство. На одной оси декартовой системы этого пространства откладывают значение функции x, на другой — $\frac{dx}{dt}$, на третьей — $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Качественное исследование — выявление общих свойств исследуемой цепи без интегрирования нелинейного дифференциального уравнения. Под общими свойствами понимают обычно выяснение зависимости характера переходного процесса от начальных условий, выяснение возможности возникновения в схеме автоколебаний, резонансных явлений, автомодуляции, а также исследование устойчивости перечисленных режимов и режима равновесия.

Все эти вопросы в ряде случаев могут быть решены и иными путями, без привлечения фазовой плоскости. Применение последней делает исследование более наглядным и оправдано в тех случаях, когда объем работы соизмерим или меньше объема работы при решении тех же задач иными методами.

Обычно фазовая плоскость применяется для исследования процессов в электрических цепях, содержащих источники постоянной э. д. с. и не содержащих источников периодической э. д. с.

Однако фазовая плоскость может быть использована и для исследования процессов в цепях, содержащих источники синусоидальной (и постоянной) э. д. с., если предварительно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений, к уравнениям для мгновенных значений амплитуд или к уравнениям для медленно меняющихся составляющих.

§ 13,12. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл

Зависимость $y = f(x)$, получаемая из решения дифференциального уравнения системы, определяет семейство кривых на фазовой плоскости, соответствующих различным значениям постоянной интегрирования. Кривые $y = f(x)$, соответствующие различным начальным условиям, называются *интегральными кривыми.*

Начальное положение изображающей точки на фазовой плоскости определяется значениями x и $\frac{dx}{dt} = y$ при $t = 0$.

Интегральная кривая, проходящая через точку фазовой плоскости с заданными начальными условиями, называется *фазовой траекторией.*

Вид фазовой траектории зависит от конфигурации схемы, от характера нелинейности и от соотношения между параметрами.

Если процесс в цепи является периодическим, то через интервалы времени, равные периоду процесса, соответствующие друг другу значения x и $\frac{dx}{dt} = y$ повторяются, и фазовая траектория в этом случае является замкнутой кривой.

Замкнутая фазовая траектория называется *предельным циклом.* Если же процесс является непериодическим, то фазовая траектория представляет собой незамкнутую кривую.

Фазовую траекторию можно наблюдать на экране электроннолучевого осциллографа. С этой целью на одну пару отклоняющих пластин его подают исследуемую величину x, а на другую пару — производную от x.

§ 13,13. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости

Рассмотрим несколько простейших примеров описания процессов в линейных цепях.

Требуется изобразить на фазовой плоскости переходный процесс в схеме рис. 206, *а*, вызываемый при нулевых начальных условиях замыканием рубильника. Обозначим: i — ток в цепи, u_C — напряжение на конденсаторе. В уравнение цепи

$$Ri + u_C = E$$

вместо i подставим $C \frac{du_C}{dt}$; получим

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Положим

$$u_C = x, \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{dx}{dt} = y.$$

Тогда

$$y = \frac{E - x}{RC}.$$

Последнее уравнение характеризует прямую ab (рис. 206, *б*). Эта прямая и является фазовой траекторией рассматриваемого процесса. Точка b является точкой равновесия.

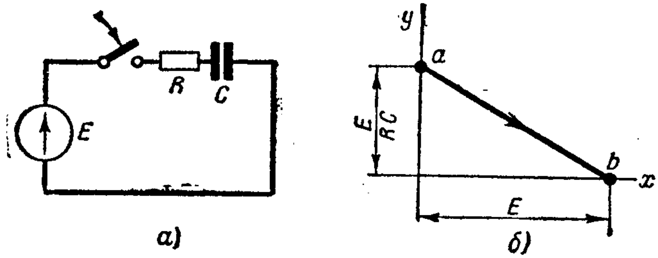


Рис. 206.

В качестве второго примера рассмотрим изображение синусоидального колебания $i = I_m \sin \omega t$ (рис. 207, *а*). Обозначим $i = x$, тогда

$$y = \frac{dx}{dt} = \omega I_m \cos \omega t,$$

т. е.

$$x = I_m \sin \omega t;$$

$$y = \omega I_m \cos \omega t.$$

Поделим первое уравнение на I_m, второе — на ωI_m, затем возведем в квадрат полученные уравнения и сложим их. Будем иметь уравнение эллипса

$$\left(\frac{x}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega I_m}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, изображением синусоидального процесса (фазовой траекторией) на фазовой плоскости будет эллипс (рис. 207, *б*).

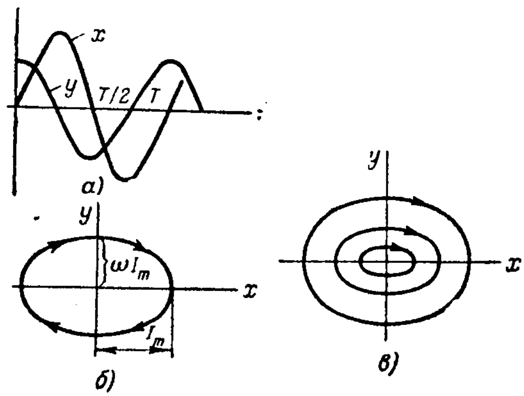


Рис. 207.

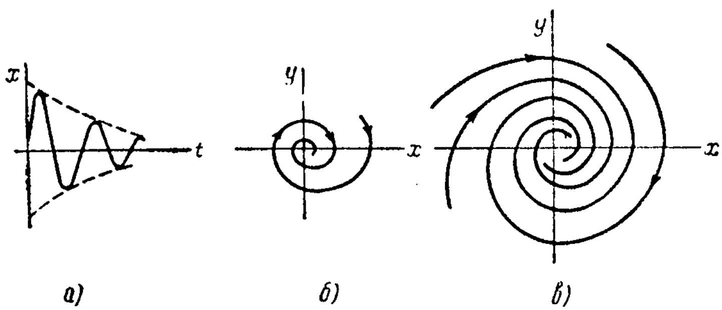


Рис. 208.

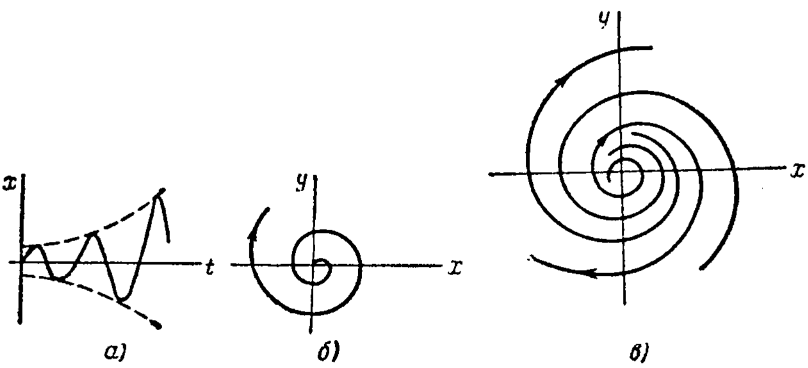


Рис. 209.

На рис. 207, *в* изображено несколько эллипсов, соответствующих синусоидальным колебаниям с различными условиями. Направление движения изображающей точки показано стрелкой.

В верхней полуплоскости $y = \frac{dx}{dt} > 0$; следовательно, в верхней полуплоскости изображающая точка движется в сторону увеличения координаты x. В нижней полуплоскости $y = \frac{dx}{dt} < 0$, поэтому в нижней полуплоскости изображающая точка движется в сторону уменьшения координаты x. В целом можно сказать, что перемещение изображающей точки на фазовой плоскости происходит всегда в направлении движения часовой стрелки.

Важно обратить внимание на то, что хотя x и y являются функциями времени, но на фазовой плоскости время в явном виде никак не отображено.

Изображением затухающего синусоидального процесса (рис. 208, *а*) — ему соответствуют комплексно сопряженные с отрицательной действительной частью корни характеристического уравнения второго порядка — является свертывающаяся спираль (рис. 208, *б*).

На рис. 208, *в* представлено несколько свертывающихся спиралей, соответствующих затухающим синусоидальным колебаниям с различными начальными условиями.

Изображением нарастающего синусоидального колебания (рис. 209, *а*) — корни характеристического уравнения комплексно сопряженные и имеют положительную действительную часть — является раскручивающаяся спираль (рис. 209, *б*).

На рис. 209, *в* дано несколько раскручивающихся спиралей для различных начальных условий.

На рис. 210, *а* изображены две кривые — пунктирная и сплошная — для затухающего апериодического процесса в цепи второго порядка (корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны). Изображение этих процессов на фазовой плоскости дано на рис. 210, *б*; пунктирная кривая рис. 210, *б* соответствует пунктирной кривой рис. 210, *а*.

Кривые рис. 210, *в* изображают затухающие апериодические процессы в цепи второго порядка при различных начальных условиях.

Изображение нарастающего апериодического процесса рис. 211, *а* в цепи второго порядка (корни характеристического уравнения вещественны и положительны) дано на рис. 211, *б*.

Кривые рис. 211, *в* соответствуют нарастающим апериодическим процессам в цепи второго порядка при различных начальных условиях.

Если корни характеристического уравнения второго порядка вещественны и имеют разные знаки, то исследуемая величина x с увеличением времени t будет либо сразу расти, либо начнет увеличиваться после некоторого спада (рис. 212, *а*).

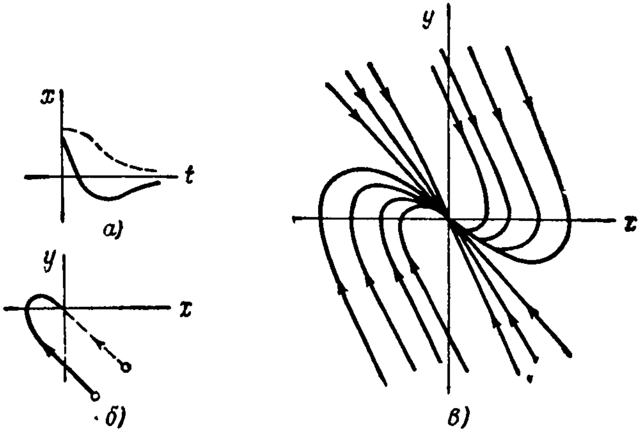


Рис. 210.

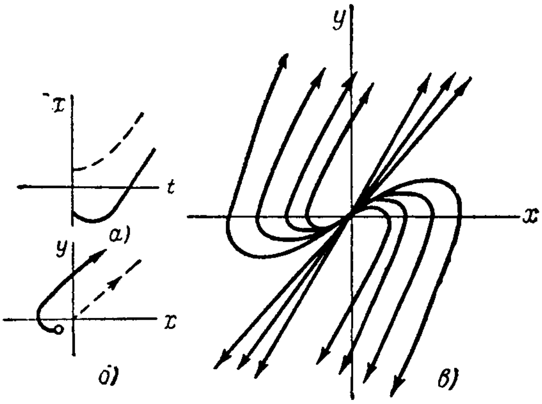


Рис. 211.

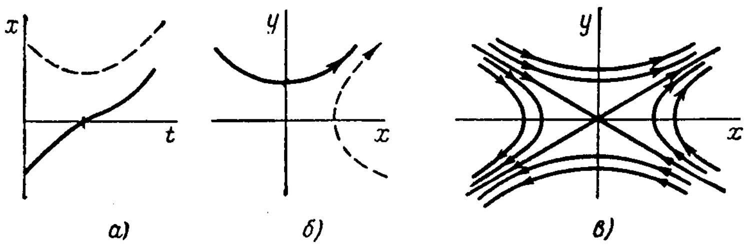


Рис. 212.

Кривым рис. 212, *а* отвечают соответствующие кривые рис. 212, *б*. Кривые рис. 212, *в* отражают процессы в цепи второго порядка при самых различных начальных условиях, когда корни характеристического уравнения вещественны и имеют разные знаки.

§ 13,14. Изоклины. Особые точки. Построение интегральных кривых при помощи семейства изоклин

Под изоклиной (линией равного наклона) понимают геометрическое место точек фазовой плоскости, для которых $\frac{dy}{dx}$ есть некоторое постоянное число. Таким образом, для одной изоклины $\frac{dy}{dx}$ есть некоторое число, скажем a_1, для другой изоклины $\frac{dy}{dx}$ есть другое число, допустим a_2, и т. д.

Выведем уравнение для построения семейства изоклин для линейной цепи (рис. 213). С этой целью запишем дифференциальное уравнение цепи

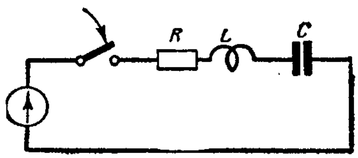


Рис. 213.

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=U.$$

Продифференцируем его по времени, заменим i на x, $\frac{di}{dt}$ на y. Учтя, что

$$\frac{d}{dt}\frac{di}{dt}=\frac{d}{dt}y=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=y\frac{dy}{dx},$$

получим

$$Ly\frac{dy}{dx}+Ry+\frac{x}{C}=0. \qquad (a)$$

Уравнение (а) используем дважды и притом в различных целях. Сначала используем его при рассмотрении вопроса об особых точках на фазовой плоскости, а затем — при построении семейства изоклин.

Для рассмотрения вопроса об особых точках на фазовой плоскости разрешим уравнение (а) относительно $\frac{dy}{dx}$. Будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{R}{L}-\frac{x}{y}\frac{1}{LC}.$$

В начале координат при $x=0$ и $y=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{R}{L}-\frac{0}{0}\frac{1}{LC},$$

т. е. $\frac{dy}{dx}$ принимает неопределенное значение.

Точки, в которых $\frac{dy}{dx}$ принимает неопределенное значение, называют *особыми точками*.

Если построения на фазовой плоскости производятся для мгновенных значений, то особые точки соответствуют точкам равновесия системы.

Условились классифицировать особые точки по виду интегральных кривых, окружающих эти точки.

Начало координат рис. 207, *в* — особая точка, именуемая *центром*.

Начало координат рис. 208, *в* — особая точка, называемая *устойчивым фокусом*.

Начало координат рис. 209, *в* — особая точка, именуемая *неустойчивым фокусом*.

Начало координат рис. 210, *в* — особая точка, определяемая как *устойчивый узел*.

Начало координат рис. 211, *в* — особая точка, называемая *неустойчивым узлом*.

Начало координат рис. 212, *в* — особая точка, именуемая *седлом*.

Далее используем уравнение (а) для построения семейства изоклин. С этой целью разрешим уравнение (а) относительно y. Получим

$$y = -\frac{x}{\left(R + L\frac{dy}{dx}\right)C}. \tag{б}$$

Для отыскания точек фазовой плоскости, принадлежащих первой изоклине, в уравнение (б) вместо $\frac{dy}{dx}$ подставим a_1:

$$y = -\frac{x}{(R + La_1)C}. \tag{в}$$

Придаем x различные значения, и из уравнения (в) определяем соответствующие им значения y. Совокупность полученных точек дает изоклину, для которой $\frac{dy}{dx} = a_1$. Затем полагаем $\frac{dy}{dx} = a_2$ и таким же путем строим вторую изоклину и т. д.

Для линейных цепей изоклины будут прямыми линиями, проходящими через начало координат, для нелинейных цепей изоклины в общем случае непрямые линии. На рис. 214 изображено некоторое семейство изоклин: для кривой *1* $a = 1$, для кривой *2* $a = 0{,}5$, для изоклины, совпадающей с осью ординат, $a = 0$, для кривой *3* $a = -1$.

Значение коэффициента a (с учетом масштабов по осям фазовой плоскости) численно равно тангенсу угла наклона с осью абсцисс касательной к любой интегральной кривой, проходящей через точки, принадлежащие данной изоклине.

Если масштабы по осям x и y одинаковы, то любая интегральная кривая пересекает первую изоклину под углом 45° к оси абсцисс. Черточки на изоклинах и дают соответствующие углы.

После нанесения на фазовую плоскость семейства изоклин можно строить интегральные кривые. Допустим, что надо построить интегральную кривую, т. е. зависимость $y = f(x)$, проходящую через точку A. С этой целью из точки A проводим два луча до пересечения с изоклиной 2. Первый луч проводим так, что он составляет с осью абсцисс угол, тангенс которого равен a_1. Он пересекает изоклину 2 в точке m. Второй луч проводим под углом, соответствующим изоклине 2. Он пересекает изоклину 2 в точке n. Делим расстояние mn пополам, получаем точку B. Точки A и B соединяем прямой. Эта прямая и представляет собой кусочек искомой интегральной кривой.

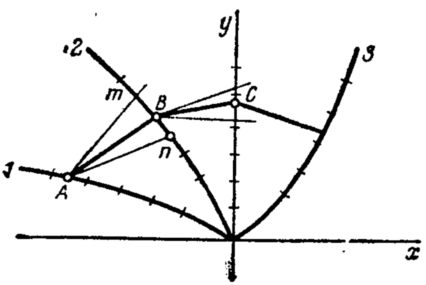


Рис. 214.

Далее проводим два луча из точки B до пересечения с осью ординат (со следующей изоклиной). Получаем точку C. Соединяем прямой точки B и C. Отрезок BC представляет собой новый кусочек интегральной кривой и т. д. Чем ближе будут расположены изоклины друг к другу, тем больше ломаная интегральная кривая будет соответствовать истинной интегральной кривой.

Поле изоклин для нелинейных цепей часто строят, заменяя характеристику нелинейного сопротивления отрезками прямых линий. В этом случае для каждого линейного участка (граничные значения x для него известны из характеристики нелинейного сопротивления) на фазовой плоскости строят свое семейство изоклин. Каждое из этих семейств годится только в соответствующей области изменения x.

§ 13,15. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы

Устойчивым предельным циклом называется предельный цикл, на который навиваются расположенные внутри и вне цикла близлежащие интегральные кривые. Физически он соответствует устойчивому периодическому движению. Пример устойчивого предельного цикла — кривая 1 (рис. 215).

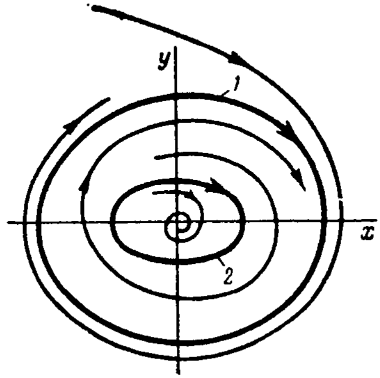


Рис. 215.

Неустойчивым предельным циклом называется такой предельный цикл, с которого раскручиваются (удаляются) вблизи расположенные интегральные кривые. Физически он соответствует неустойчивому периодическому процессу. Кривая 2 — пример неустойчивого предельного цикла.

§ 13,16. Качественное исследование процессов в нелинейных электрических цепях при помощи фазовой плоскости

Как уже говорилось, построения на фазовой плоскости могут проводиться:

а) для мгновенных значений величин,

б) для огибающих амплитуд первой (высшей, низшей) гармоники,

в) для медленно меняющихся средних значений.

Для мгновенных значений построения проводятся с целью исследования:

а) устойчивости точек равновесия,

б) возможности возникновения автоколебаний в схеме,

в) устойчивости возникающих автоколебаний и определения их амплитуды,

г) влияния начальных условий на возникающие в цепи процессы.

Допустим, что для некоторой системы для мгновенных значений построены интегральные кривые, изображенные на рис. 215.

Спрашивается, какие заключения качественного порядка могут быть сделаны в отношении возможных процессов в этой системе при том значении параметров ее, для которых эти кривые построены.

Прежде всего убеждаемся в том, что в системе возможно лишь одно устойчивое состояние равновесия (начало координат). Далее констатируем, что на фазовой плоскости есть один устойчивый предельный цикл (кривая *1*) и один неустойчивый (кривая *2*).

Если начальные условия в системе будут таковы, что изображающая точка, характеризующая собой начальные значения x и $\dot{x} = y$, попадет внутрь неустойчивого предельного цикла (кривой *2*), то в системе возникает затухающий колебательный процесс, в результате которого система придет в состояние устойчивого равновесия. Если же начальные значения x и $\dot{x} = y$ будут таковы, что изображающая точка попадет в область, находящуюся снаружи (вне) кривой *2*, то в результате переходного процесса в системе возникнут устойчивые автоколебания — изображающая точка будет двигаться по устойчивому предельному циклу (кривой *1*).

Таким образом, про исследуемую систему можно сказать, что в ней либо будет устойчивое „в малом“ (см. § 14,1) состояние равновесия, либо будет устойчивый автоколебательный процесс.

Какой из этих режимов возникнет в системе, зависит от начальных условий.

Далее перечислим вопросы, которые могут быть решены с помощью фазовой плоскости при исследовании нелинейных электрических цепей, находящихся под действием периодической возмущающей силы (в этом случае построения на фазовой плоскости производят для медленно меняющихся величин или для огибающих амплитуд). К числу этих вопросов относятся следующие.

Исследование влияния начальных условий на характер установившегося или квазиустановившегося процесса.

Исследование устойчивости субгармонических колебаний и резонансов на высших гармониках.

Исследование устойчивости процессов автомодуляции.

Пример применения фазовой плоскости для изучения процесса автомодуляции дан в § 16,5.

Пример исследования влияния начальных условий на установление субгармонических колебаний третьего порядка приведен в § 17,5.

§ 13,17. Исследование качества переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования методом гармонической линеаризации

Е. П. Поповым [Л. 64, 80, 103] разработан простой и удобный приближенный метод исследования качества переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования.

Рассмотрим основы этого метода.

Системы автоматического регулирования состоят из отдельных звеньев. Каждое звено можно схематически представить либо в виде некоторого четырехполюсника (рис. 216, *а*), либо в однолинейном начертании, как это показано на рис. 216,*б*.

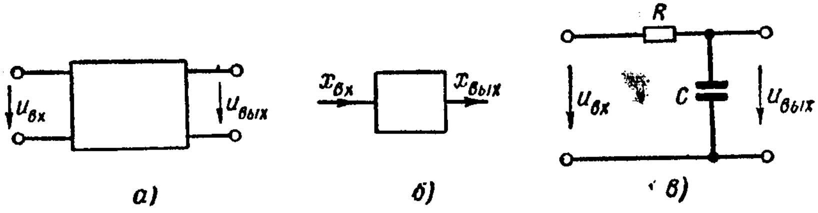


Рис. 216.

Входными $x_{вх}$ и выходными $x_{вых}$ величинами могут быть как электрические величины, например ток, напряжение, так и неэлектрические, например скорость, угол поворота.

Какова бы ни была схема внутренних соединений каждого звена, всегда можно выразить операторное изображение выходной величины $x_{вых}(p)$ через операторное изображение входной величины $x_{вх}(p)$:

$$x_{вых}(p) = x_{вх}(p)k(p).$$

Коэффициент пропорциональности $k(p)$ между $x_{вых}(p)$ и $x_{вх}(p)$ называют передаточной функцией звена. Последняя зависит от схемы внутренних соединений звена, значений параметров и от оператора p.

В качестве примера составим выражение $k(p)$ для четырехполюсника рис. 216,*в*:

$$u_{вых}(p) = \frac{u_{вх}(p)}{R + \frac{1}{Cp}} = \frac{u_{вх}(p)}{Tp + 1},$$

где

$$T = RC.$$

Следовательно,

$$k(p) = \frac{u_{вых}(p)}{u_{вх}(p)} = \frac{1}{Tp + 1}$$

или

$$x_{вых}(p)\,(Tp + 1) = x_{вх}(p).$$

Рассмотрим основы метода на примере замкнутой системы, изображенной на рис. 217,*а*, [Л. 80]. Система состоит из четырех звеньев: звенья *1*, *3* и *ОС* являются линейными звеньями; звено *2* — нелинейное. Звено *ОС* является звеном, через которое осуществляется обратная связь. Кружок с крестиком означает место сложения и вычитания различных воздействий.

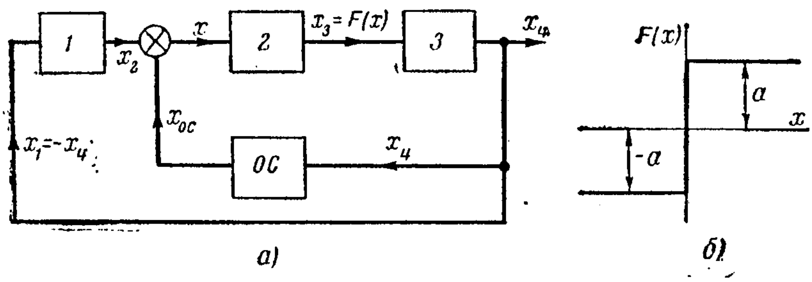


Рис. 217.

Положим, что первое звено характеризуется уравнением

$$(T_1p + 1)\,x_2 = -k_1x_4. \tag{13,27}$$

С целью сокращения записи вместо $x_2(p)$ пишем x_2, вместо $x_4(p)$ — x_4 и т. д.

Зависимость выходной величины x_3 от входной x для второго нелинейного звена

$$x_3 = F(x), \tag{13,28}$$

где $F(x)$ — некоторая нелинейная функция x.

Зависимость между входной и выходной величинами для третьего звена:

$$(T_2 p + 1)\, p x_4 = k_2 x_3. \tag{13,29}$$

В соответствии с положительными направлениями для воздействий, указанными на рис. 217, *а*, имеем

$$x = x_2 - k_{0c} x_4. \tag{13,30}$$

Перемножим левые и соответственно правые части уравнений (13,27) — (13,30). Получим

$$(T_1 p + 1)\; x_2 x_3 (T_2 p + 1)\, p x_4 x = -k_1 x_4 F(x) k_2 x_3 (x_2 - k_{0c} x_4).$$

В соответствии с (13,27) заменим x_4 на $-\frac{(T_1 p + 1)\, x_2}{k_1}$.

Будем иметь

$$(T_1 p + 1) x_2 x_3 (T_2 p + 1) p x_4 x = -k_1 x_4 F(x) k_2 x_3 x_2 \; \frac{1 + k_{0c}(T_1 p + 1)}{k_1}.$$

После сокращения на $x_2 x_3 x_4$ имеем

$$Q(p) x + R(p) F(x) = 0, \tag{13,31}$$

где

$$Q(p) = (T_1 p + 1)\,(T_2 p + 1)\, p, \tag{13,32}$$

$$R(p) = k_2\,[1 + k_{0c}\,(T_1 p + 1)]. \tag{13,33}$$

Если нелинейное звено обладает петлевой гистерезисной характеристикой, то выходная величина этого звена (в рассматриваемом случае x_3) зависит не только от входной величины x, но и от скорости изменения последней, т. е. от $\frac{dx}{dt} = px$. В этом случае вместо $F(x)$ в уравнении (13,31) следует написать функцию $F(x, px)$:

$$Q(p) x + R(p) F(x, px) = 0. \tag{13,31'}$$

Уравнения (13,31) — (13,31′) характеризуют поведение довольно большого числа различных нелинейных систем регулирования, и потому их можно рассматривать как достаточно общие уравнения (но не как единственно возможные).

Обратим внимание на то, что во всех физически осуществимых системах степень многочлена $Q(p)$ всегда выше степени многочлена $R(p)$.

Далее производится гармоническая линеаризация нелинейности $F(x)$ [или соответственно $F(x, px)$]. С этой целью полагают, что во время переходного процесса искомая величина x, являющаяся сложной функцией времени, может быть представлена первой гармоникой $x = a \sin u$, где $u = \omega t + \psi$. Причем амплитуда a и угловая частота ω есть медленно меняющиеся функции времени.

Для того чтобы можно было взять x в виде первой гармоники, необходимо, чтобы вся линейная часть исследуемой системы обладала свойством фильтра, т. е. задерживала все гармоники, частоты которых больше ω.

Линейная часть системы будет обладать свойством фильтра, если

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left| \frac{R[j(2r+1)\omega]}{Q[j(2r+1)\omega]} \right|^2 \ll \left| \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2.$$

Гармоническая линеаризация есть не что иное, как замена функции $F(x)$ ее первой гармоникой при условии, что $x = a \sin u$. Первая гармоника функции $F(x)$ равна $q_I(a) \sin u + q_{II}(a) \cos u$. Здесь

$$q_I(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^T F(a \sin u) \sin u \, du, \tag{13,34}$$

$$q_{II}(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^T F(a \sin u) \cos u \, du. \tag{13,35}$$

Если функция $F(x)$ нечетная, т. е. если $F(-x) = -F(x)$, то $q_{II}(a) = 0$.

Так как $x = a \sin u$, то

$$px = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos u + \sin u \frac{da}{dt}.$$

Полагают, что $\frac{da}{dt} = a\alpha$, где α есть функция a. Тогда

$$px = a\omega \cos u + a\alpha \sin u.$$

Учтем, что

$$\sin u = \frac{x}{a}, \tag{13,36}$$

и

$$\cos u = \frac{px - a\alpha \frac{x}{a}}{a\omega}. \tag{13,37}$$

Тогда первая гармоника функции $F(x)$ запишется следующим образом:

$$q_I(a) \sin u + q_{II}(a) \cos u = q_I(a) \frac{x}{a} + q_{II}(a) \frac{px - \alpha x}{a\omega} =$$

$$= q(a)x + q_1(a) \left(\frac{px}{\omega} - \frac{\alpha x}{\omega} \right). \tag{13,38}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} q(a) &= \frac{q_I(a)}{a}, \\ q_1(a) &= \frac{q_{II}(a)}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (13,39)$$

Подставим в уравнение (13,31) вместо $F(x)$ ее первую гармонику в соответствии с (13,38):

$$Q(p)x + R(p)\left[q(a)x + q_1(a)\left(\frac{px}{\omega} - \frac{\alpha x}{\omega}\right)\right] = 0. \qquad (13,40)$$

Так как $x \neq 0$, то из уравнения (13,40) получаем алгебраическое уравнение относительно p:

$$Q(p) + R(p)\left[q(a) + q_1(a)\left(\frac{p}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega}\right)\right] = 0. \qquad (13,41)$$

В этом уравнении $q(a)$, $q_1(a)$, ω и α — функции амплитуды колебания a. В общем случае степень уравнения (13,41) относительно p может быть достаточно высокой. Количество корней уравнения (13,41) равно степени этого уравнения.

В соответствии с ранее принятым допущением, что $x = a\sin u$, где a и u — медленно меняющиеся функции времени, в дальнейших выкладках будут учитываться лишь два наименьших по модулю комплексно сопряженных корня $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$.

Что касается остальных корней уравнения (13,41), то полагают, что соответствующие им слагаемые решения относительно быстро затухают во времени и имеют малые начальные значения. Для того чтобы можно было судить о характере переходного процесса по двум наименьшим по модулю комплексно сопряженным корням, необходимо, чтобы остальные корни были дальше расположены от мнимой оси, чем корни $\alpha \pm j\omega$, и чтобы $q(a)$ и $q_1(a)$ плавно изменялись во времени [Л.103].

Для уравнений 3-й и 4-й степени ($n = 3$ и 4) это обеспечивается положительностью всех коэффициентов уравнения (13,41), приведенного подстановкой

$$Q(\alpha + j\omega) = Q(\alpha) + j\omega\left(\frac{dQ}{dp}\right)_\alpha + \frac{(j\omega)^2}{2!}\left(\frac{d^2Q}{dp^2}\right)_\alpha + \ldots + \frac{(j\omega)^n}{n!}\left(\frac{d^nQ}{dp^n}\right)_\alpha$$

к виду

$$b_0(j\omega)^n + b_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + b_{n-1}j\omega + b_n = 0. \qquad (13,42)$$

Проверка на положительность коэффициентов уравнения (13,42) должна производиться для всех представляющих интерес значений a, после того как будет найдено $\alpha(a)$.

Итак, в уравнение (13,41) подставляем $\alpha + j\omega$ вместо p. При этом уравнение (13,41) разобьется на два. Одно из них будет выражать равенство нулю действительной части, другое — равенство нулю мнимой части:

$$X(q, \alpha, \omega) = 0, \tag{13,43}$$

$$Y(q, \alpha, \omega) = 0. \tag{13,44}$$

Два последних уравнения позволяют найти показатель затухания α и угловую частоту колебаний ω в функции от амплитуды колебания a и всех параметров системы.

В соответствии с [Л. 80] составим выражения X и Y для рассматриваемой системы.

Положим, что функция $F(x)$ нелинейного звена соответствует рис. 217, *б*. Тогда согласно (13,39) и (13,34):

$$q(a) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a \sin u)\sin u\, du = \frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi} c \sin u\, du +$$

$$+ \frac{1}{\pi a}\int_{\pi}^{2\pi} (-c)\sin u\, du = \frac{4c}{\pi a}.$$

Так как функция $F(x)$ нечетная, то $q_1(a) = 0$. Подставим в (13,41) значение $Q(p)$ из (13,32) и $R(p)$ из (13,33):

$$T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (1 + T_1k_2k_{0c}q)p + (k_1 + k_{0c})k_2q = 0. \tag{13,45}$$

Здесь

$$q = q(a) = \frac{4c}{\pi a}.$$

В уравнение (13,45) вместо p подставим $\alpha + j\omega$. Тогда

$$X(q, \alpha, \omega) = T_1T_2\alpha^2 + (T_1 + T_2)\alpha^2 + (1 + T_1k_2k_{0c}q)\alpha +$$
$$+ (k_1 + k_{0c})k_2q - (3T_1T_2\alpha + T_1 + T_2)\omega^2 = 0, \tag{13,46}$$

$$Y(q, \alpha, \omega) = [3T_1T_2\alpha^2 + 2(T_1 + T_2)\alpha + 1 +$$
$$+ T_1k_2k_{0c}q]\omega - T_1T_2\omega^3 = 0. \tag{13,47}$$

Из (13,47) найдем

$$\omega^2 = 3\alpha^2 + 2\,\frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}\,\alpha + \frac{1}{T_1T_2} + \frac{4ck_2k_{0c}}{\pi T_2 a}, \tag{13,48}$$

$$a = \frac{4ck_2}{\pi f(\alpha)}\left[k_1 - T_1k_{0c}\left(\frac{1}{T_2} + 2\alpha\right)\right], \tag{13,49}$$

где

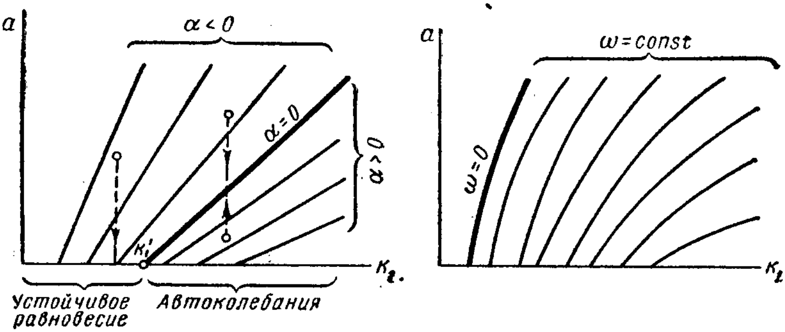
$$f(\alpha) = \frac{T_1 + T_2}{T_1\,T_2} + 2\left[1 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1T_2}\right]\alpha + 8(T_1 + T_2)\alpha^2 + 8T_1T_2\alpha^3. \tag{13,50}$$

Формулы (13,48) — (13,50) позволяют исследовать качество переходных процессов в системе (рис. 217, *а*) при изменении любого ее параметра k_1, k_2, k_{0c}, T_1, T_2. С целью исследования качества переходного процесса от какого-либо параметра системы следует построить семейство зависимостей амплитуды колебания a от этого параметра (например, от k_1) при различных $\alpha = \text{const}$ (рис. 218, *а*) и при различных $\omega = \text{const}$ (рис. 218, *б*).

Зависимость $a = f(k_1)$ при $\alpha = 0$ на рис. 218, *а* изображена утолщенной линией. Левее и выше ее расположены прямые, для которых $\alpha < 0$, а правее и ниже — для которых $\alpha > 0$.

На рис. 218, *б* кривая $a = f(k_1)$ при $\omega = 0$ также изображена утолщенной линией.

В замкнутых системах автоматического регулирования могут существовать автоколебания (гл. 15). В режиме установившихся автоколебаний амплитуда a неизменна; следовательно, $\alpha = 0$. Поэтому прямая $a = f(k_1)$ (рис. 218, *а*), для которой $\alpha = 0$, соответствует автоколебательным режимам в системе. Эта прямая



а) б)

Рис. 218.

отделяет область затухающих колебательных процессов ($\alpha < 0$) от области колебательных процессов с нарастающей амплитудой ($\alpha > 0$).

Амплитуда колебаний, начавшихся в области $k_1 < k_1'$ будет уменьшаться до нуля.

Колебательный процесс, который начался в области, находящейся выше прямой $\alpha = 0$, при $k_1 > k_1'$ постепенно переходит в режим устойчивых автоколебаний (изображающая точка проходит по вертикали на прямую $\alpha = 0$).

Процесс, который начался в области, лежащей ниже прямой $\alpha = 0$, при $k_1 > k_1'$ представляет собой колебательный процесс с нарастающей амплитудой, который заканчивается установлением режима автоколебаний.

Значения угловой частоты ω, соответствующие некоторым произвольным сочетаниям значений a и k_1, определяются из рис. 218, *б*. При изменении a меняются α и ω.

Слева от кривой $\omega = 0$ находится область монотонных апериодических процессов. Следовательно, кривая $\omega = 0$ отделяет область колебательных переходных процессов от апериодических.

Если изображающая точка попадет левее кривой $\omega = 0$, в системе будет монотонный апериодический процесс. Поскольку в рассматриваемом методе решение для x взято в виде $a \sin u$, других более полных сведений о характере переходного процесса получить нельзя.

В целом можно сказать, что совокупность кривых рис. 218, *а* и *б* является диаграммой качества затухания переходных процессов в нелинейной системе.

В заключение запишем последовательность операций в рассматриваемом методе:

1. Составляют совокупность уравнений, описывающих связь между входными и выходными величинами для отдельных звеньев исследуемой системы.

2. По формулам (13,38) — (13,39) осуществляют гармоническую линеаризацию нелинейной зависимости $F(x)$ или $F(x, px)$.

3. В уравнение, характеризующее нелинейное звено, вместо $F(x)$ или соответственно $F(x, px)$ подставляют $q(a)x + q_1(a) \times \times \left(\frac{px}{\omega} - \frac{\alpha x}{\omega}\right)$.

4. Решая совместно уравнения звеньев, приходят к уравнению

$$Q(p) + R(p)\left[q(a) + q_1(a)\left(\frac{p}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega}\right)\right] = 0.$$

5. В это уравнение вместо p подставляют $\alpha + j\omega$ и разбивают его на два:

$$X(q, \alpha, \omega) = 0,$$
$$Y(q, \alpha, \omega) = 0.$$

6. Используя два последних уравнения, строят диаграммы качества затухания в функции от изменяющегося параметра и анализируют их.

7. При необходимости проверяют надлежащее расположение корней уравнения (13,41), не учитываемых при анализе. Для уравнений 3-й и 4-й степеней проверка осуществляется путем определения знаков коэффициентов уравнения (13,42); все коэффициенты этого уравнения должны быть положительными.

Рассмотренный метод может быть применен не только для анализа, но и для синтеза систем при заданном характере переходного процесса. Метод применим и при воздействии на систему периодических вынуждающих сил.

Необходимо отметить еще два не рассматриваемых в книге метода расчета переходных процессов в нелинейных цепях — метод Я. З. Цыпкина [Л. 13] и метод Г. Е. Пухова [Л. 50].

Метод Я. З. Цыпкина основан на дискретном преобразовании Лапласа и предназначен для нелинейных систем дискретного действия. Метод Г. Е. Пухова основан на интегральном преобразовании, подобном преобразованию Лапласа и Фурье, но отличающемся от него тем, что интеграл берется в конечных пределах.

14

Основы теории устойчивости режимов работы нелинейных цепей

§ 14,1. Устойчивость „в малом“, устойчивость „в большом“ и „устойчивость по Ляпунову“

Режим работы той или иной электрической цепи, содержащей нелинейные сопротивления, может быть либо устойчивым, либо неустойчивым. Как правило, режим работы подавляющего большинства электрических цепей оказывается устойчивым и в относительно редких случаях — неустойчивым.

Различают устойчивость „в малом“, устойчивость „в большом“ и „устойчивость по Ляпунову“ [Л. 1 и 5]. Под устойчивым „в малом“ режимом работы будем понимать такой, при котором достаточно малое отклонение режима работы от исходного (установившегося) независимо от того, какими причинами оно вызвано, с течением времени уменьшается и система возвращается к исходному состоянию.

При неустойчивом „в малом“ режиме работы достаточно малое отклонение с течением времени увеличивается и система не возвращается в исходное состояние.

Устойчивым „в большом“ режимом работы будем называть такой, при котором система, получив достаточно большое начальное отклонение, возвращается к исходному состоянию после прекращения действия возмущения.

Если при достаточно большом отклонении от исходного состояния и прекращении действия возмущения система не возвращается к исходному состоянию, то ее называют системой, неустойчивой „в большом“.

Различие между устойчивостью „в малом“ и устойчивостью „в большом“ наглядно можно проиллюстрировать рис. 219. На этом рисунке изображен желоб с помещенным в нем шариком. Если шарик толкнуть так, чтобы он пришел в положение *2*, а затем предоставить его самому себе, то под действием силы тяжести шарик возвратится в исходное положение *1* (положение равновесия). Если же шарик толкнуть с большей силой, то он пройдет через положение 3 и выскочит из желоба. Следовательно, эта система является устойчивой „в малом" и неустойчивой „в большом".

Устойчивой по Ляпунову называют систему, для которой при заданных допустимых отклонениях (область ε на рис. 220) можно указать такую область [область $\delta(\varepsilon)$], что всякая представляющая точка, лежащая в начальный момент в области $\delta(\varepsilon)$, никогда не выйдет за пределы области ε.

В нелинейных электрических цепях в общем случае возможны следующие режимы (типы движения): 1) состояние равновесия; 2) периодическое движение при отсутствии в системе источников периодической э. д. с. (или тока) — автоколебания; 3) периодическое движение с частотой источника периодической э. д. с. (или тока) — вынужденные колебания; 4) резонансные явления

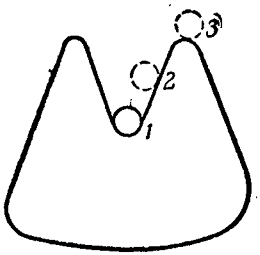


Рис. 219.

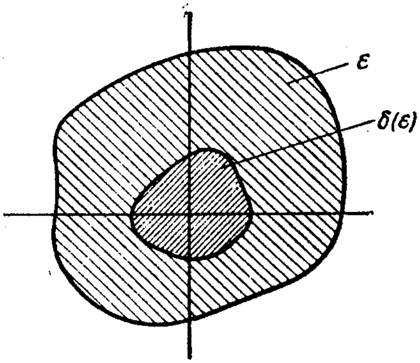


Рис. 220.

на высших, низших и дробных гармониках; 5) квазипериодические (как бы периодические) процессы по типу автомодуляции, а также ряд других, более сложных типов движений. Каждый из этих режимов (типов движений) может быть исследован на устойчивость.

Основы теории устойчивости были заложены крупнейшим русским математиком А. М. Ляпуновым, в 1892 г. выпустившим книгу „Общая задача об устойчивости движения".

В подавляющем большинстве практических задач производится исследование устойчивости „в малом". Этот вопрос и рассматривается в следующих параграфах. Исследование устойчивости „в большом" производится путем анализа хода интегральных кривых на фазовой плоскости или путем использования „второй методы Ляпунова" [Л. 1 и 5] и здесь не рассматривается.

§ 14,2. Общие основы исследования устойчивости в „малом"

Общие основы исследования устойчивости „в малом" применимы ко всем или почти ко всем известным в настоящее время типам движения. Разумеется, в каждом конкретном случае могут быть особенности применения общих принципов (см. следующие параграфы).

Для исследования устойчивости исследуемой величине x (или величинам) дают малое приращение Δx, развертывают уравнения, описывающие процесс, в ряд по степеням малого приращения Δx и ввиду малости Δx отбрасывают все члены ряда, содержащие Δx в степенях выше первой.

В полученном уравнении (уравнениях) выделяют слагаемые, содержащие Δx и производные от Δx по времени, и образуют из них дифференциальное уравнение (уравнения) относительно Δx. Уравнение относительно Δx алгебраизируют, получают характеристическое уравнение и определяют его корни.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения (при действительных корнях) будет положительным или будет положительной действительная часть комплексно сопряженных корней, то это явится свидетельством того, что возникшее приращение Δx будет не убывать, а возрастать во времени. Другими словами, исследуемое движение будет неустойчивым.

Если же все действительные корни характеристического уравнения будут отрицательными, а все комплексно сопряженные корни будут иметь отрицательные действительные части, то исследуемое движение будет устойчивым.

При наличии нулевого корня и (или) чисто мнимых корней для исследования вопроса об устойчивости движения недостаточно учитывать только первые степени приращения исследуемой величины Δx. В этом случае следует учитывать также и вторую степень приращения Δx.

Характеристическое уравнение, составленное относительно приращения Δx, для системы второго порядка имеет вид

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Для системы третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Для суждения о характере корней характеристического уравнения разработано несколько математических критериев. Воспользуемся для этой цели критерием Гурвица.

Критерий (теорема) Гурвица состоит в следующем: чтобы действительные части корней характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные миноры (Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}$) определителя Гурвица ($\Delta_n$) были больше нуля.

Определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Следовательно, условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения выразятся следующим образом:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

и т. д.

Определитель Гурвица Δ_n составляют так:

1) по главной диагонали определителя в порядке возрастания индексов выписывают коэффициенты от a_1 до a_n;

2) в ту часть каждого столбца, которая расположена выше главной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке возрастания индексов;

3) в ту часть каждого столбца, которая расположена ниже главной диагонали, вписывают коэффициенты в порядке уменьшения индексов (до a_0 включительно).

Следствием теоремы Гурвица является лемма: все коэффициенты характеристического уравнения (a_0, a_1, a_2,..., a_n) устойчивой системы положительны.

Из изложенного выше вытекает, что для системы с характеристическим уравнением второго порядка положительные вещественные корни (или комплексно сопряженные с положительной действительной частью) будут в случае, если какой-либой из коэффициентов уравнения (a_0, a_1, a_2) окажется отрицательным. Для системы с характеристическим уравнением третьего порядка положительные вещественные корни (или комплексно сопряженные с положительной действительной частью) будут в случае, если какой-либо из коэффициентов (a_0, a_1, a_2, a_3) окажется отрицательным или если $a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0$.

Аналогичные заключения могут быть сделаны и для систем с характеристическими уравнениями более высоких порядков.

Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3... могут оказаться отрицательными в следующих основных случаях:

1. Когда в состав исследуемой на устойчивость системы входят нелинейные активные сопротивления, обладающие падающим участком характеристики, и когда точка равновесия оказывается на падающем участке характеристики.

2. В схемах с чрезмерно большим воздействием выходной цепи на входную — в схемах с чрезмерно большой положительной обратной связью. В этом случае поступление энергии из выходной цепи во входную превышает потребление энергии во входной цепи и приращение Δx возрастает.

3. В схемах с управляемыми нелинейными индуктивностями и емкостями при наличии неявно (а в некоторых случаях и явно) действующих обратных связей. В таких схемах обратные связи при определенных условиях приводят к появлению на характеристиках нелинейных индуктивностей или нелинейных емкостей падающих участков. Режим работы системы может оказаться неустойчивым, если изображающая точка окажется на падающем участке управляемой нелинейной индуктивности или управляемой нелинейной емкости.

4. В схемах, содержащих нелинейные сопротивления с большой тепловой инерционностью.

§ 14,3. Исследование устойчивости положения равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой

Обратим внимание на две особенности при исследовании устойчивости положения равновесия в системах с постоянной вынуждающей силой:

1. Характеристики всех нелинейных сопротивлений обычно заменяют отрезками прямых линий, совпадающими с касательными к нелинейным сопротивлениям в точке равновесия.

2. Если точка равновесия в системе с нелинейным активным сопротивлением, имеющим S- или N-образную в. а. х., окажется на падающем участке в. а. х., то при исследовании устойчивости положения равновесия следует учитывать малые паразитные параметры нелинейного сопротивления. Последние не играют существенной роли в установившемся (стационарном) процессе, но при переходном процессе, в особенности при быстро протекающих процессах, роль их становится значительной.

Опыт показывает, что нелинейное сопротивление с S-образной в. а. х. (рис. 221, *а*) в схеме замещения (рис. 221, *б*) для исследования устойчивости должно быть представлено в виде последовательного соединения динамического* сопротивления $R_д$ с весьма малой паразитной индуктивностью $L_п$ нелинейного сопротивления; НС с N-образной в. а. х. (рис. 221, *в*) в схеме замещения (рис. 221, *г*) должно быть представлено в виде па-

* Дифференциального динамического.

раллельного соединения динамического сопротивления $R_д$ с весьма малой паразитной емкостью $C_п$ нелинейного сопротивления*.

В § 14,5 приведен пример на исследование устойчивости положения равновесия в релаксационной автоколебательной системе с НС, имеющим S-образную в. а. х. В § 14,6 дан пример на исследование устойчивости положения равновесия в автоколебательной системе с явно выраженной обратной связью.

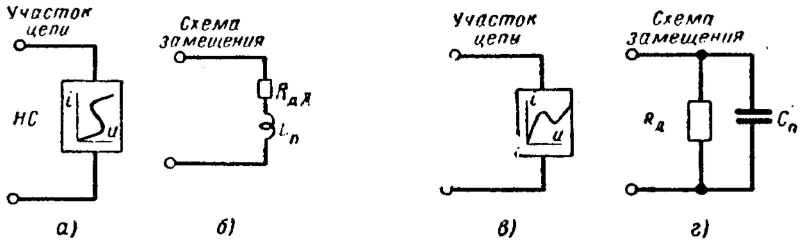


Рис. 221.

§ 14,4. Исследование устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний по первой гармонике

В качестве исходных уравнений при исследовании устойчивости автоколебаний и вынужденных колебаний обычно служат уравнения, получаемые по методу медленно меняющихся амплитуд (§ 13,7).

Если через a и b обозначить медленно меняющиеся амплитуды синусной и косинусной составляющих исследуемого колебания, то из исходных уравнений системы можно получить два уравнения для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{da}{dt} = A(a, b); \qquad (14,1)$$

$$\frac{db}{dt} = B(a, b). \qquad (14,2)$$

A и B являются функциями амплитуд a и b, а также функциями всех параметров схемы, угловой частоты колебаний ω и величины вынуждающей силы. Обозначим значения a и b в установившемся режиме (когда амплитуды не изменяются во времени) через a_0 и b_0. Для определения a_0 и b_0 в уравнениях

* Учитывается тот паразитный параметр, роль которого при возможном триггерном эффекте в НС становится особенно значительной. Естественно, что при составлении схемы замещения для исследования устойчивости режима равновесия следует учитывать, допускает ли вся остальная часть схемы такой триггерный скачок на нелинейном сопротивлении.

(14,1) и (14,2) следует положить $\frac{da}{dt}=0$ и $\frac{db}{dt}=0$ и решить уравнения:

$$A(a_0, b_0)=0; \tag{14,3}$$

$$B(a_0, b_0)=0. \tag{14,4}$$

Пусть в результате возмущения амплитуды колебания получили малые приращения Δa и Δb, равные

$$a=a_0+\Delta a,\ b=b_0+\Delta b.$$

Подставим эти значения a и b в уравнения (14,1) и (14,2), развернем $A(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b)$ и $B(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b)$ в ряд Тейлора по малым приращениям Δa и Δb и в силу малости приращений ограничимся слагаемыми ряда с первыми степенями Δa и Δb. Получим:

$$A(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b)=A(a_0,\ b_0)+\Delta a A_1+\Delta b B_1; \tag{14,5}$$

$$B(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b)=B(a_0,\ b_0)+\Delta a A_2+\Delta b B_2. \tag{14,6}$$

Здесь для сокращения записи обозначено:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \left|\frac{\partial A(a, b)}{\partial a}\right|_y; \\ B_1 &= \left|\frac{\partial A(a, b)}{\partial b}\right|_y; \end{aligned}\right\} \tag{14,7}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \left|\frac{\partial B(a, b)}{\partial a}\right|_y; \\ B_2 &= \left|\frac{\partial B(a, b)}{\partial b}\right|_y. \end{aligned}\right\} \tag{14,8}$$

Индекс y указывает на то, что в частные производные должны быть подставлены значения a и b установившегося режима, т. е. a_0 и b_0.

Коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 являются функциями a_0, b_0, но не являются функциями приращений Δa и Δb. Подставим правые части уравнений (14,5) и (14,6) в уравнения (14,1) и (14,2), учтем уравнения (14,3) и (14,4), а также то, что

$$\frac{d(a_0+\Delta a)}{dt}=\frac{d(\Delta a)}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d(b_0+\Delta b)}{dt}=\frac{d(\Delta b)}{dt}.$$

Получим два уравнения:

$$\frac{d(\Delta a)}{dt}=A_1\Delta a+B_1\Delta b; \tag{14,9}$$

$$\frac{d(\Delta b)}{dt}=A_2\Delta a+B_2\Delta b. \tag{14,10}$$

Алгебраизируем их:

$$p\Delta a=A_1\Delta a+B_1\Delta b; \tag{14,9'}$$

$$p\Delta b=A_2\Delta a+B_2\Delta b. \tag{14,10'}$$

Составим характеристическое уравнение

$$p^2 + mp + q = 0. \tag{14,11}$$

Здесь

$$m = -(A_1 + B_2); \tag{14,12}$$

$$q = A_1 B_2 - B_1 A_2. \tag{14,13}$$

В соответствии с критерием Гурвица для затухания Δa и Δb необходимо, чтобы

$$\left.\begin{matrix} m > 0, \\ q > 0. \end{matrix}\right\} \tag{14,14}$$

В автоколебательных системах периодические вынуждающие силы, как правило, отсутствуют, поэтому обычно возможно взять $b = 0$, т. е. взять колебание в виде $a(t)\sin\omega t$ (см., например, автоколебания лампового генератора в § 15,8). В этом случае вместо двух уравнений (14,1) и (14,2) будет одно уравнение $\frac{da}{dt} = A(a)$. Точно так же вместо двух уравнений (14,9) и (14,10) будет одно уравнение:

$$\frac{d(\Delta a)}{dt} = A_1 \Delta a, \tag{14,15}$$

где

$$A_1 = \left|\frac{dA(a)}{da}\right|_{a=a_0}. \tag{14,16}$$

Для устойчивости автоколебаний в этом случае необходимо выполнение условия $A_1 < 0$.

Пример на исследование устойчивости автоколебаний по формуле (14,15) см. в § 14,6.

§ 14,5. Исследование устойчивости колебаний на высших и низших гармониках

Исследуемое колебание берется в виде суммы основной гармоники частоты ω и высшей или низшей гармоники частоты ω_1:

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t + c\sin\omega_1 t + g\cos\omega_1 t, \tag{14,17}$$

где a, b, c, g — медленно меняющиеся функции времени.

После подстановки формулы (14,17) в дифференциальные уравнения системы по методу медленно меняющихся амплитуд получим следующие четыре уравнения:

$$\frac{da}{dt} = A(a, b, c, g); \tag{14,18}$$

$$\frac{db}{dt} = B(a, b, c, g); \tag{14,19}$$

$$\frac{dc}{dt} = C(a, b, c, g); \tag{14,20}$$

$$\frac{dg}{dt} = G(a, b, c, g). \tag{14,21}$$

Уравнение (14,18) получено путем выделения в дифференциальном уравнении системы слагаемых с $\sin \omega t$, уравнение (14,19) — путем выделения слагаемых с $\cos \omega t$, уравнения (14,20) и (14,21) — путем выделения слагаемых соответственно с $\sin \omega_1 t$ и $\cos \omega_1 t$. A, B, C, G (для сокращения скобки при них опускаем) являются функциями медленно меняющихся амплитуд a, b, c, g, частот ω и ω_1 и всех параметров схемы. Из уравнений

$$A(a_0,\ b_0,\ c_0,\ g_0) = 0;$$

$$B(a_0,\ b_0,\ c_0,\ g_0) = 0;$$

$$C(a_0,\ b_0,\ c_0,\ g_0) = 0;$$

$$G(a_0,\ b_0,\ c_0,\ g_0) = 0$$

находим значения амплитуд колебаний a_0, b_0, c_0, g_0 в установившемся режиме, устойчивость которого исследуется.

Далее даем амплитудам малые приращения Δa, Δb, Δc и Δg и подобно тому, как это делалось в предыдущем параграфе, развертываем функции A, B, C, G от аргумента $(a_0+\Delta a,\ b_0+\Delta b,\ c_0+\Delta c,\ g_0+\Delta g)$ в ряд Тейлора по малым приращениям, в силу малости приращений отбрасываем члены ряда, содержащие степени приращений выше первой. В результате вместо уравнений (14,18—14,21) получим следующие уравнения:

$$\frac{d(\Delta a)}{dt} = A_1\Delta a + B_1\Delta b + C_1\Delta c + G_1\Delta g;$$

$$\frac{d(\Delta b)}{dt} = A_2\Delta a + B_2\Delta b + C_2\Delta c + G_2\Delta g;$$

$$\frac{d(\Delta c)}{dt} = A_3\Delta a + B_3\Delta b + C_3\Delta c + G_3\Delta g;$$

$$\frac{d(\Delta g)}{dt} = A_4\Delta a + B_4\Delta b + C_4\Delta c + G_4\Delta g.$$

Здесь

$$A_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_y; \quad B_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)_y; \quad C_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_y; \quad G_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial g}\right)_y;$$

$$A_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)_y; \quad B_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)_y; \quad C_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial c}\right)_y; \quad G_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial g}\right)_y \text{ и т. д.}$$

Индекс y говорит о том, что в частные производные должны быть подставлены значения a, b, c, g установившегося режима, т. е. a_0, b_0, c_0, g_0. Далее полученные уравнения алгебраизируем, составляем характеристическое уравнение системы и при помощи критерия Гурвица находим условия, при соблюдении которых приращения будут затухать во времени.

В общем случае такого рода исследования могут занимать много времени и оказаться довольно утомительными. Поэтому иногда идут на те или иные упрощения.

Так, при исследовании устойчивости субгармоники полагают, что амплитуды первой гармоники a и b постоянны и равны их значениям в установившемся режиме и что приращения получили только амплитуды субгармоник. В этом случае исследование устойчивости сводится к исследованию всего двух уравнений вместо четырех:

$$\frac{d(\Delta c)}{dt} = C_3\Delta c + G_3\Delta g,$$

$$\frac{d(\Delta g)}{dt} = C_4\Delta c + G_4\Delta g.$$

Пример на исследование устойчивости субгармоники третьего порядка упрощенным методом можно найти в § 17,5.

§ 14,6. Исследование устойчивости процессов автомодуляции

Процессы автомодуляции (см. гл. 16) являются процессами непериодическими для мгновенных значений и периодическими или почти периодическими для медленно меняющихся токов и напряжений. Поэтому исследование устойчивости таких процессов проводится для медленно меняющихся составляющих.

Если в автомодуляционной системе с управляемыми нелинейными индуктивностями или емкостями огибающая колебаний имеет релаксационный характер, то уравнение движения такой системы для медленно меняющихся величин обычно является дифференциальным уравнением первого порядка.

На фазовой плоскости дифференциальному уравнению первого порядка будет соответствовать одна интегральная кривая (см., например, § 16,5).

В этом случае устойчивость процесса следует из того, что в системе возможен лишь единственный предельный цикл.

Если уравнение движения для медленно меняющихся величин представляет собой дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка, то для исследования устойчивости оно должно быть заменено уравнением для приращения медленно меняющейся величины. С этой целью дифференциальное уравнение для полных значений величин раскладывают в ряд по приращению медленно меняющейся величины (по отношению к ее установившемуся значению). В силу малости приращения ряд обрывают на членах, содержащих первую степень приращения. Далее из этого уравнения составляют уравнение для приращения, алгебраизируют его, составляют характеристическое уравнение, исследуют его корни и по характеру корней судят об устойчивости процесса.

§ 14,7. Исследование устойчивости периодических процессов в нелинейных цепях путем сведения уравнений для приращений к уравнениям с периодически изменяющимися коэффициентами

Кроме метода исследования устойчивости периодических процессов в нелинейных цепях, рассмотренного в § 14,4, 14,5, описан [Л. 9, 21, 71] и другой метод, основанный на сведении уравнений для приращений к линейным уравнениям с переменными во времени коэффициентами.

Рассмотрим основные положения и возможности этого метода.

Будем исходить, как это принято в теории колебаний, из уравнения

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+f_1(x)\frac{dx}{d\tau}+f_2(x)=F\cos\tau. \qquad (14,22)$$

Здесь $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — некоторые нелинейные функции x;
$F\cos\tau$ — вынуждающая периодическая сила.

Положим, что известно периодическое решение для x в виде ряда Фурье и требуется исследовать устойчивость этого режима. С этой целью полагают, что мгновенное значение x, выражающееся рядом Фурье, получило приращение ξ и стало равным $x+\xi$.

В силу малости ξ можно принять, что

$$f_1(x+\xi)=f_1(x)+\xi\frac{df_1(x)}{dx} \qquad (14,23)$$

и

$$f_2(x+\xi)=f_2(x)+\xi\frac{df_2(x)}{dx}. \qquad (14,24)$$

Подставим правые части (14,23) и (14,24) в (14,22), заменим $\frac{d(x+\xi)}{d\tau}$ на $\frac{dx}{d\tau}+\frac{d\xi}{d\tau}$ и $\frac{d^2(x+\xi)}{d\tau^2}$ на $\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{d^2\xi}{d\tau^2}$. Выделим из полученного уравнения уравнение для приращений:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+f_1(x)\frac{d\xi}{d\tau}+\xi\left(\frac{df_1(x)}{dx}\frac{dx}{d\tau}+\frac{df_1(x)}{dx}\frac{d\xi}{d\tau}+\frac{df_2(x)}{dx}\right)=0. \qquad (14,25)$$

Так как для исследуемого периодического процесса x представляет собой некоторую периодическую функцию времени τ, то и $f_1(x)$ есть некоторая периодическая функция времени τ, которую назовем $F(\tau)$, т. е. положим $f_1(x)=F(\tau)$. Коэффициент при ξ в уравнении (14,25) состоит из трех слагаемых. Первое и третье слагаемые являются функциями x, а следовательно, и функциями τ, второе слагаемое представляет собой произведение функции времени на производную $\frac{d\xi}{d\tau}$.

В указанной выше литературе предполагается, что величина слагаемого $\frac{df_1(x)}{dx}\frac{d\xi}{d\tau}$ мала по сравнению с $\frac{df_1(x)}{dx}\frac{dx}{d\tau}$ и $\frac{df_2(x)}{dx}$, поэтому слагаемое $\frac{df_1(x)}{dx}\frac{d\xi}{d\tau}$ не учитывается. При этом условии коэффициент при ξ в уравнении (14,25) будет являться некоторой периодической функцией времени τ, которую обозначим $G(\tau)$:

$$G(\tau) = \frac{df_1(x)}{dx}\frac{dx}{d\tau} + \frac{df_2(x)}{dx}.$$

С учетом сказанного перепишем уравнение (14,25) следующим образом:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + F(\tau)\frac{d\xi}{d\tau} + G(\tau)\xi = 0. \qquad (14,26)$$

Подстановкой

$$\xi = \eta e^{-\frac{1}{2}\int F(\tau)d\tau} \qquad (14,27)$$

уравнение (14,26) можно привести к виду

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + A(\tau)\eta = 0. \qquad (14,28)$$

Здесь $A(\tau) = G(\tau) - \frac{1}{2}\frac{dF(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{4}[F(\tau)]^2$ есть некоторая периодическая функция времени τ. Вид функции $A(\tau)$ зависит не только от вида функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, но и от количества учитываемых гармоник ряда Фурье в периодическом решении для x, устойчивость которого исследуется.

Если функция $f_2(x)$ в уравнении (14,22) представляет собой полином выше третьей степени, а также если в решении для x учитываются несколько гармоник, то $A(\tau)$ будет состоять из постоянной составляющей и четных гармоник. При этом уравнение (14,28) запишется в виде

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \left(\theta_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\nu \cos 2\nu\tau\right)\eta = 0, \qquad (14,29)$$

где θ_0 и θ_ν — постоянные числа;

ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\theta_\nu|$ сходится.

Уравнение (14,29) называют уравнением Хилла. Решение его записывается в общем виде так:

$$\eta = C_1 e^{\mu\tau}\varphi(\tau) + C_2 e^{-\mu\tau}\psi(\tau). \qquad (14,30)$$

Здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий;

$\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ — некоторые периодические функции τ;

μ — некоторое число, называемое характеристическим показателем. Величина μ зависит от численного значения коэффициентов ряда θ_ν и θ_0.

Исследуемое решение для x будет устойчиво, если приращение ξ с увеличением τ будет уменьшаться. Для этого необходимо (см. 14,27), чтобы $e^{-\frac{1}{2}\int F(\tau)d\tau \pm \mu\tau}$ уменьшалось во времени. Другими словами, чтобы исследуемый процесс был устойчивым, действительная часть выражения $-\frac{1}{2}F_0 \pm \mu$ должна быть отрицательна.

Здесь через F_0 обозначена постоянная составляющая функции $F(\tau)$. Таким образом, путем оценки величины характеристического показателя μ можно судить об устойчивости исследуемого периодического режима.

Оценка величины μ по известным значениям θ_0 и θ_ν для уравнения Хилла производится путем составления определителей из коэффициентов θ_0 и θ_ν. В силу того, что методика составления этих определителей в общем случае довольно громоздка, для ознакомления с ней рекомендуется обратиться к специальной литературе (например, [Л. 21, гл. 4]).

Здесь же рассмотрим вопрос об устойчивости решения уравнения Матье, являющегося частным случаем уравнения Хилла. Им чаще всего и оперируют в литературе по теории нелинейных цепей.

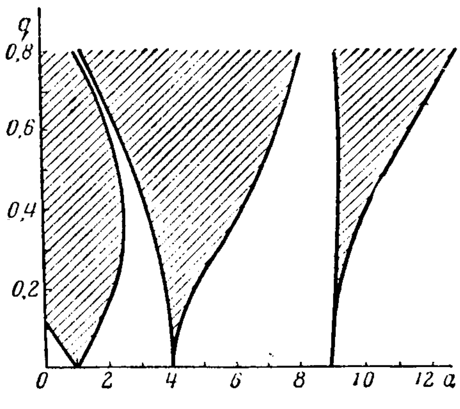


Рис. 222.

Уравнение Матье записывается так:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + (a + 16q\cos 2\tau)\eta = 0. \tag{14,31}$$

Для суждения об устойчивости решения уравнения Матье воспользуемся рис. 222. По оси абсцисс отложены значения коэффициента a, по оси ординат — значения коэффициента q. Из точек на оси абсцисс, для которых a принимает значения, равные квадрату целых чисел (1, 4, 9, 16...), исходят по две кривых. Области, ограниченные каждыми двумя кривыми, являются областями неустойчивости (на рисунке эти области заштрихованы).

Следовательно, для исследования вопроса об устойчивости рассматриваемого периодического решения в нелинейной цепи уравнение для приращения в простейшем случае сводят к уравнению Матье и по известным значениям коэффициентов a и q этого уравнения определяют, в какой области будет находиться изображающая точка на рис. 222. Если изображающая точка попадет в какую-либо из заштрихованных областей, то это будет свидетельствовать о том, что исследуемый периодический режим работы нелинейной цепи будет неустойчивым.

В заключение остановимся на возможностях рассматриваемого метода. Метод исследования устойчивости периодических процессов в нелинейных цепях в том плане, как он здесь представлен, обладает меньшей общностью, чем метод, изложенный в § 14,4, 14,5. Это объясняется тем, что рассматриваемый в настоящем параграфе метод может быть применен лишь к таким уравнениям, которые относительно приращений могут быть сведены к уравнениям Матье или Хилла, т. е. к уравнениям второго порядка. Это первое существенное ограничение.

Второе ограничение состоит в том, что к уравнениям Матье или Хилла уравнение (14,22) может быть сведено только в том случае, когда функция $f_1(x)$ в нем представляет постоянное число либо когда по тем или иным соображениям можно принять, что слагаемое $\frac{df_1(x)}{dx}\frac{d\xi}{d\tau}$ имеет порядок малости, бо́льший, чем остальные слагаемые суммы, являющейся множителем при ξ в уравнении (14,25). В общем случае для диссипативных цепей это предположение не выполняется.

15

Автоколебания

§ 15,1. Общая характеристика автоколебательных систем

Под автоколебаниями (АК) понимают незатухающие колебания, возникающие в нелинейной системе, содержащей источник постоянной вынуждающей силы (т. е. силы, не являющейся функцией времени).

АК широко распространены в различных механических, акустических, гидротехнических, радиотехнических, электротехнических установках [Л. 1,10, 11]. Они происходят также в живых организмах. Так, часы — пример механической АК-системы, духовые музыкальные инструменты — пример акустической АК-системы, деятельность сердца — пример АК в живом организме.

В данной главе будут рассматриваться АК только в электрических цепях. При АК в электрических цепях роль постоянной вынуждающей силы играет обычно источник постоянной э. д. с.

АК в электрических цепях могут быть либо полезными, либо вредными процессами. Полезными АК являются в тех случаях, когда их специально вызывают, например, для того, чтобы преобразовать постоянное напряжение в синусоидальное или почти синусоидальное, в напряжение пилообразной формы, или когда требуется преобразовать постоянный ток одного напряжения (например, низкого напряжения) в постоянный ток другого (более высокого) напряжения.

При исследовании АК-систем требуется обычно ответить на следующие вопросы: при каких условиях возникают АК в системе, какова будет частота и амплитуда АК, а также как они будут меняться при изменении параметров системы.

Вредными АК оказываются в тех случаях, когда они мешают нормальной работе установок. Так, АК часто мешают нормальной работе замкнутых систем автоматического регулирования. В этих случаях при исследовании соответствующих систем обычно требуется выяснить, могут ли возникнуть в них АК, и, если могут, указать значения параметров, при которых АК не появятся.

Любая АК-система состоит из трех основных частей: источника энергии, нелинейного сопротивления, накопителя (или накопителей) энергии.

Кроме того, в любой АК-системе обязательно должна быть обратная связь. Под обратной связью понимают обратное воздействие выходной величины на входную. Обратную связь в АК-системах можно определить и иначе, а именно, как воздействие накопителя (или накопителей) энергии на рабочее состояние нелинейного сопротивления. Блок схема АК-системы показана на рис. 223.

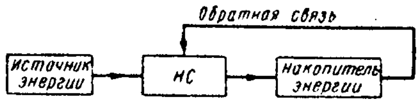


Рис. 223.

§ 15,2. Классификация АК-систем

АК-системы могут быть классифицированы:

1) по числу накопителей энергии, т. е. по числу индуктивностей и емкостей в схеме, — на системы с одним накопителем и на системы с двумя или бо́льшим числом накопителей энергии. Системы с одним накопителем энергии называются релаксационными, системы с двумя и бо́льшим числом накопителей энергии обычно называют почти гармоническими;

2) по типу нелинейного сопротивления в схеме. В качестве нелинейных сопротивлений в АК-системах применяются трех (и более) электродные лампы, полупроводниковые триоды (плоскостные и точечные), неоновая лампа, газотрон, электрическая дуга, управляемые магнитным полем нелинейные сопротивления и т. д.;

3) по способу осуществления обратной связи — на системы, в которых обратная связь действует по явно выраженным каналам, и на системы, в которых обратная связь действует по неявно выраженным каналам;

4) по способу возбуждения — на системы с мягким и с жестким возбуждением.

§ 15,3. Общая характеристика релаксационных автоколебательных систем

Основными отличительными особенностями релаксационных АК-систем являются следующие:

1) они возникают в системах, содержащих один накопитель энергии. Обмен энергией при колебаниях происходит между накопителем энергии и остальной частью АК-системы;

2) форма колебаний резко несинусоидальна и имеет обычно пилообразный вид (рис. 224);

3) на вольт-амперной характеристике нелинейного сопротивления, входящего в состав АК-системы, как правило, имеется падающий участок;

4) амплитуда релаксационных АК не зависит от нагрузки системы и определяется границами падающего участка характеристики нелинейного сопротивления.

Рис. 224.

Автоколебания в релаксационной системе возбуждаются только в том случае, когда положение равновесия оказывается неустойчивым. Это будет тогда, когда единственная точка равновесия окажется на падающем участке вольт-амперной характеристики нелинейного сопротивления.

§ 15,4. Общая характеристика почти гармонических автоколебательных систем

Основными отличительными чертами почти гармонических АК-систем являются следующие:

1) автоколебательные системы имеют по меньшей мере два накопителя энергии, например одну индуктивность L и одну емкость C; L и C составляют колебательный контур.

Обмен энергией происходит в основном между индуктивностью и емкостью (или между индуктивностями и емкостями). Вся остальная часть системы, включая и источник энергии, восполняет потери энергии в колебательном контуре;

2) форма колебаний обычно близка к синусоиде, но может и значительно отличаться от нее;

3) на в. а. х. отдельно взятого нелинейного сопротивления, как правило, нет падающего участка;

4) амплитуда колебаний зависит от нагрузки и определяется характером в. а. х. нелинейного сопротивления.

Условия возбуждения АК в почти гармонических системах рассмотрены в § 15,5.

Кроме релаксационных и почти гармонических возможны промежуточные типы АК. Они возникают в релаксационных системах с емкостью, когда с увеличением частоты возрастает роль паразитной индуктивности, и в почти гармонических системах, если в. а. х. нелинейного сопротивления имеет резко выраженный излом и достигаются большие насыщения.

§ 15,5. Мягкое и жесткое возбуждение колебаний в почти гармонических системах

АК-системы с двумя и бо̀льшим числом накопителей энергии по способу возбуждения колебаний в них делятся на системы с мягким возбуждением и на системы с жестким возбуждением.

Под *мягким* понимают такое возбуждение колебаний, при котором АК-системе, находящейся в равновесии, т. е. в режиме отсутствия АК, достаточно получить сколь угодно малый первоначальный толчок, например, флуктуационного происхождения, чтобы колебания, постепенно нарастая по амплитуде, достигли своего установившегося значения.

Под *жестким* понимают возбуждение, при котором колебания возбуждаются только в том случае, если первоначальный толчок, полученный системой, будет превышать некоторое определенное значение — для каждой системы и для каждого сочетания параметров свое.

Если же первоначальный толчок будет меньше этого значения, то колебания в системе затухнут и система возвратится в положение равновесия.

На рис. 225, *а* показаны энергетические соотношения при мягком возбуждении, а на рис. 225, *б* — при жестком возбуждении. По оси абсцисс на них откладывается амплитуда АК, по оси ординат — энергия. $W_п$ — энергия, выделяемая в виде потерь в колебательном контуре системы; $W_д$ — энергия, доставляемая в контур источником энергии. Начало координат соответствует отсутствию автоколебаний (амплитуда колебаний $a = 0$), $a_у$ обозначает амплитуду АК в установившемся режиме.

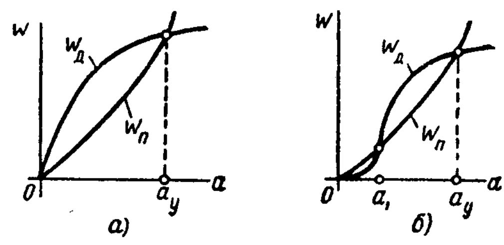


Рис. 225

При мягком возбуждении колебания самостоятельно развиваются потому, что при возрастании амплитуды с $a = 0$ до $a = a_у$ доставляемая в контур энергия превышает потери в нем ($W_д > W_п$). В установившемся режиме $W_д = W_п$. При жестком возбуждении в интервале значений амплитуд от $a = 0$ до $a = a_1$ $W_д < W_п$ (см. рис. 225, *б*), и поэтому начавшиеся колебания будут затухать. Если начальное значение амплитуды превысит a_1, тогда $W_д$ будет больше $W_п$ и амплитуда колебаний будет нарастать до значения $a = a_у$.

§ 15,6. Исследование устойчивости положения равновесия в автоколебательной системе релаксационного типа

На рис. 226, *а* изображена схема генератора релаксационных колебаний. Она состоит из источника постоянной э. д. с. E, линейного сопротивления R, емкости C и параллельно соединенного с ней нелинейного сопротивления HC, имеющего в. а. х. S-образной формы.

В качестве HC с такой в. а. х. могут быть взяты неоновая лампа или тиратрон.

На рис. 226, *б* дана схема генератора с неоновой лампой. Кривая *1* рис. 226, *в* представляет собой в. а. х. неоновой лампы, прямая *2* — в. а. х. линейного сопротивления R. Если бы не было релаксационных колебаний, то режим работы определился бы точкой m пересечения кривой *1* и прямой *2*. Для этой точки сумма падений напряжения на HC и на сопротивлении R равна э. д. с. E в соответствии со вторым законом Кирхгофа.

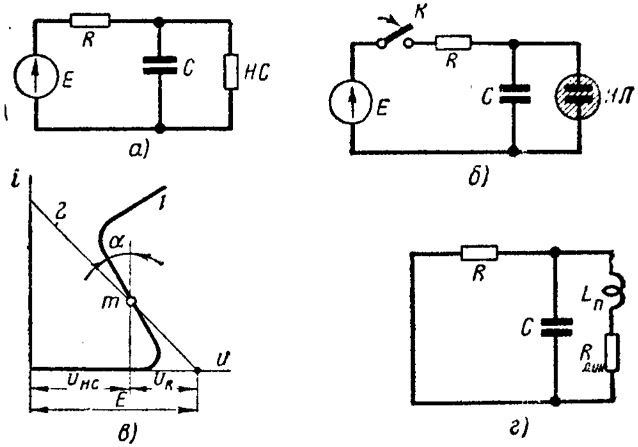


Рис. 226.

Точку m будем называть точкой равновесия. Она определяет собой режим работы схемы при протекании по сопротивлению R и по неоновой лампе постоянного тока.

Убедимся в том, что режим работы, определяемый точкой m, является неустойчивым режимом: достаточно ничтожно малого отклонения от положения равновесия, чтобы изображающая точка „ушла" из точки m и не возвратилась в нее. В схеме начнутся релаксационные колебания.

Для того чтобы убедиться в неустойчивости состояния равновесия, составим линейную схему замещения релаксационного генератора.

Так как HC имеет S-образную в. а. х., то в схеме для исследования устойчивости оно имитировано (в соответствии с § 14,3) дифференциальным динамическим сопротивлением $R_{дин}$ и последовательно с ним включенной ничтожно малой паразитной индуктивностью $L_п$ (рис. 226, *г*).

Динамическое сопротивление $R_{дин}$ в точке m пропорционально тангенсу угла α (рис. 226, *в*) и является отрицательной величиной.

Источник э. д. с. в схеме замещения (рис. 226, *г*) отсутствует, так как исследуется поведение схемы в режиме приращений по отношению к режиму, определяемому точкой m.

Найдем входное сопротивление схемы в операторной форме:

$$Z(p) = R + \frac{\frac{1}{Cp}(R_{дин} + pL_п)}{\frac{1}{Cp} + R_{дин} + pL_п}.$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + 2bp + \omega^2 = 0,$$

где

$$b = \frac{L_п + RR_{дин}C}{2RL_пC} \approx \frac{R_{дин}}{2L_п} \text{ и } \omega^2 = \frac{R + R_{дин}}{RL_пC},$$

имеет корни

$$p_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2},$$

так как

$$R_{дин} < 0, \text{ то и } b < 0.$$

Если соотношение между параметрами таково, что $b^2 > \omega^2$, то оба корня будут вещественными и положительными.

Если $b^2 < \omega^2$, то корни комплексно сопряжены и имеют положительную вещественную часть.

Таким образом, независимо от соотношения между b^2 и ω^2 состояние равновесия, определяемое точкой m, неустойчиво. Рассмотрим теперь последовательность смены состояний при релаксационных колебаниях.

§ 15,7. Автоколебания в релаксационной системе

Пусть в схеме рис. 226, *б* при нулевых начальных условиях замыкается ключ K. Конденсатор C начнет заряжаться, и напряжение на нем будет расти (рис. 227, *а*). Так как конденсатор и неоновая лампа включены параллельно, то в любом режиме работы напряжения на них одинаковы.

Как только напряжение на конденсаторе возрастет до величины, равной напряжению зажигания $u_з$ неоновой лампы, последняя зажжется, и ток в ней скачком возрастет с нуля до значения $i_з$ (рис. 227, *б*).

Конденсатор быстро разрядится через *НЛ*, внутреннее сопротивление которой мало по сравнению с сопротивлением R. При этом изображающая точка на в. а. х. *НЛ* переместится из точки *4* в точку *1*. В точке *1* напряжение на *НЛ* равно напряжению погасания $u_п$, поэтому неоновая лампа гаснет, и ток в ней становится равным нулю (точка *2*).

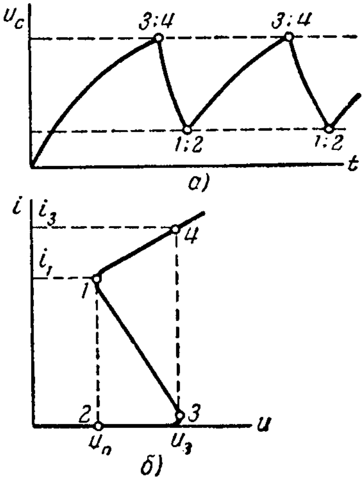


Рис. 227

Далее конденсатор вновь заряжается до напряжения $u_з$, неоновая лампа снова зажигается и процесс повторяется.

Траектория движения изображающей точки образует замкнутую петлю *1—2—3—4*.

Важно подчеркнуть, что если условия возбуждения колебаний в схеме выполнены, то размах колебаний напряжения на емкости не зависит от нагрузки R и э. д. с. E и определяется напряжением зажигания $u_з$ и погасания $u_п$ *НЛ*. Период колебаний равен сумме времени зарядки конденсатора и времени разрядки конденсатора. Он зависит от величины э. д. с. E, емкости C, сопротивления R и внутреннего сопротивления *НЛ*. Обратная связь в схеме находит свое выражение в том, что конденсатор управляет режимом работы неоновой лампы.

§ 15,8. Почти гармонические автоколебания в ламповом генераторе

На рис. 228 изображены две схемы ламповых генераторов. В первой из них (рис. 228,*а*) колебательный контур находится в анодной цепи, во второй (рис. 228, *б*) — в сеточной цепи.

Проанализируем работу схемы рис. 228, *б*. Сначала изучим работу схемы в режиме установившихся автоколебаний, затем рассмотрим устойчивость положения равновесия, в заключение выведем закон установления амплитуды колебаний при самовозбуждении и исследуем устойчивость в установившемся режиме.

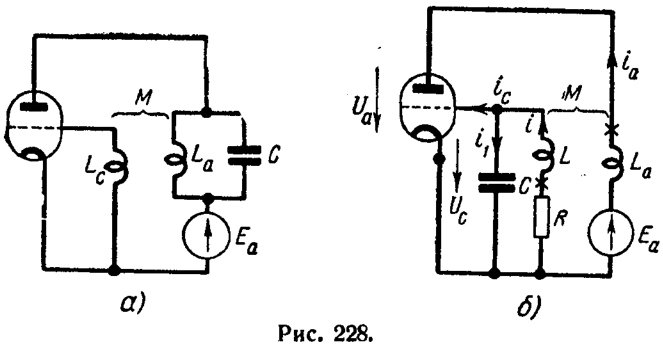


Рис. 228.

В анодной цепи лампы включена индуктивность $L_а$ и источник э. д. с. $E_а$. Колебательный контур состоит из индуктивности L, магнитносвязанной с $L_а$, активного сопротивления R и емкости C. Примем три допущения, упрощающие анализ:

1. Будем полагать, что падение напряжения от переменной составляющей анодного тока $i_а$ и тока i в индуктивности $L_а$ мало по сравнению с э. д. с. $E_а$, т. е. что в уравнении анодной цепи

$$L_а \frac{di_а}{dt} - M \frac{di}{dt} + u_а = E_а$$

падением напряжения $L_a \frac{di_a}{dt} - M \frac{di}{dt}$ можно пренебречь по сравнению с u_a, и тогда

$$u_a \approx E_a.$$

При этом анодный ток оказывается зависящим только от сеточного напряжения (рис. 9).

2. Примем, что сеточная характеристика может быть приближенно выражена следующим образом:

$$i_a = i_{a0} + au_c - bu_c^3. \tag{15,1}$$

3. При анализе не будем учитывать сеточный ток лампы, так как лампа работает при сравнительно малых сеточных напряжениях. Другими словами, будем полагать, что $i = i_1$ и $i_c \approx 0$.

Составим уравнение для колебательного контура сеточной цепи для встречного включения магнитносвязанных катушек:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c - M \frac{di_a}{dt} = 0.$$

Составим уравнение относительно напряжения на сетке лампы u_c или, что то же самое, относительно напряжения на конденсаторе

$$i = C \frac{du_c}{dt},$$

$$LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c - M \frac{di_a}{dt} = 0. \tag{15,2}$$

Решение уравнения проведем методом первой гармоники.

Из опыта известно, что в схеме лампового генератора рис. 228, *б* напряжение на сетке лампы изменяется почти по синусоидальному закону, поэтому примем, что

$$u_c = U_{cm} \sin \omega_0 t. \tag{15,3}$$

Причем амплитуда колебания U_{cm} и частота ω_0 подлежат определению. Для нахождения их подставим предполагаемое решение (15,3) в уравнение (15,2).

Учтем, что

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha,$$

тогда анодный ток

$$i_a = i_{a0} + aU_{cm} \sin \omega_0 t - \frac{3}{4} bU_{cm}^3 \sin \omega_0 t + \frac{1}{4} bU_{cm}^3 \sin 3\omega_0 t,$$

а производная от него

$$\frac{di_a}{dt} = a\omega_0 U_{cm} \cos \omega_0 t - \frac{3}{4} b\omega_0 U_{cm}^3 \cos \omega_0 t + \frac{3}{4} b\omega_0 U_{cm}^3 \cos 3\omega_0 t.$$

Как говорилось раньше, при решении нелинейных цепей по методу первой гармоники принимаются в расчет только первые гармоники токов и напряжений, а высшими гармониками пренебрегают.

Поэтому слагаемое $\frac{3}{4} b\omega_0 U_{cm}^3 \cos 3\omega_0 t$ в выражении $\frac{di_a}{dt}$ учитывать не будем. При этом уравнение (15,2) приобретает такой вид:

$$(1 - \omega_0^2 LC) U_{cm} \sin \omega_0 t + \left(RC - aM + \frac{3}{4} bMU_{cm}^2 \right) \times \\ \times \omega_0 U_{cm} \cos \omega_0 t = 0. \tag{15,4}$$

Из уравнения следует, что сумма двух функций, из которых одна изменяется во времени по синусоидальному закону, а другая по косинусоидальному, равна нулю для любого момента времени. Это может быть только в том случае, если равны нулю амплитуды этих функций, т. е.

$$1 - \omega_0^2 LC = 0 \tag{15,5}$$

и

$$RC - aM + \frac{3}{4} bMU_{cm}^2 = 0. \tag{15,6}$$

Из (15,5) определим угловую частоту колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{15,7}$$

Она зависит от индуктивности и емкости колебательного контура.

Из (15,6) найдем амплитуду

$$U_{cm} = \sqrt{\frac{aM - RC}{\frac{3}{4} bM}}. \tag{15,8}$$

Амплитуда колебаний U_{cm} зависит от величин M, R, C и от коэффициентов a и b. Она ограничивается нелинейностью сеточной характеристики (если $b \to 0$, то $U_{cm} \to \infty$).

Так как амплитуда U_{cm} не может быть мнимым числом, то ясно, что при автоколебаниях в схеме должно выполняться соотношение $aM > RC$. В процессе колебаний в сопротивлении R сеточной цепи выделяется тепло. Энергия на покрытие потерь в сопротивлении доставляется в сеточный контур из анодной цепи (от э. д. с. E_a) вследствие наличия магнитной связи между сеточной и анодной цепями.

§ 15,9. Исследование устойчивости положения равновесия в ламповом генераторе

В уравнение (15,2) в соответствии с (15,1) вместо $\frac{di_a}{dt}$ подставим $(a - 3bu_c^2)\frac{du_c}{dt}$.

Получим

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (RC - aM + 3bMu_c^2) \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

Поделим последнее уравнение на $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, где ω_0 — угловая частота автоколебаний (см. формулу 15,7), и для сокращения записи обозначим

$$k_1 = \frac{aM - RC}{LC}, \tag{15,9}$$

$$k_2 = \frac{3bM}{aM - RC}. \tag{15,10}$$

Тогда

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} - k_1(1 - k_2u_c^2)\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \tag{15,11}$$

Положим

$$x = u_c\sqrt{k_2}.$$

При этом

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2u_c}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{d^2x}{dt^2},$$

и уравнение (15,11) примет следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k_1(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{15,12}$$

В точке равновесия

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ и } x = x_0 = 0.$$

Пусть x получит весьма малое приращение $\Delta x \ll 1$. Тогда

$$x = x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x.$$

Подставим в уравнение (15,12) вместо x величину Δx, и в силу малости Δx пренебрежем слагаемым $(\Delta x)^2$ по сравнению с единицей. Получим следующее линейное уравнение относительно приращения Δx:

$$\frac{d^2(\Delta x)}{dt^2} - k_1\frac{d(\Delta x)}{dt} + \omega_0^2\Delta x = 0.$$

Из него образуем характеристическое уравнение

$$p^2 - k_1p + \omega_0^2 = 0.$$

Корни последнего

$$p_{1,2} = \frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - \omega_0^2}. \tag{15,13}$$

Коэффициент k_1 определяется по формуле (15,9).

Как известно из предыдущего (§ 14,2), положение равновесия будет неустойчивым, если хотя бы один корень характеристического уравнения будет положительным при действительных корнях или будет иметь положительную действительную часть при комплексных сопряженных корнях.

В исследуемом случае положение равновесия будет неустойчивым при $k_1 > 0$, т. е. если $aM > RC$. Это условие совпадает с условием вещественности амплитуды колебаний (см. формулу 15,8).

§ 15,10. Нарастание амплитуды в ламповом генераторе при возбуждении колебаний

Решим уравнение (15,12) методом медленно меняющихся амплитуд.

Так как на систему не действует внешняя периодическая сила и частота автоколебаний равна ω_0, а не ω, как было принято в § 13,7, то примем, что

$$x = a \sin \omega_0 t.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} \approx a\omega_0 \cos \omega_0 t, \tag{15,14}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx 2\omega_0 \frac{da}{dt} \cos \omega_0 t - \omega_0^2 a \sin \omega_0 t. \tag{15,15}$$

Подставим (15,14) и (15,15) в (15,12). Учитывая, что

$$\sin^2 \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{4} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t),$$

получим

$$2\omega_0 \cos \omega_0 t \frac{da}{dt} - a\omega_0^2 \sin \omega_0 t + a\omega_0^2 \sin \omega_0 t - k_1 a\omega_0 \cos \omega_0 t + \\ + \frac{k_1 \omega_0 a^3}{4} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) = 0.$$

Так как расчет ведется по медленно меняющейся первой гармонике, то слагаемое с $\cos 3\omega_0 t$ не учитываем. Получаем

$$2\frac{da}{dt} = ak_1 (1 - 0{,}25a^2). \tag{15,16}$$

Введем новую переменную

$$y = 0{,}25\, a^2.$$

Вместо (15,16) будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y (1 - y). \tag{15,17}$$

Уравнение (15,17) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными

$$k_1 t = \int \frac{dy}{y(1-y)};$$

$$k_1 t = -\ln C_0 + \ln \frac{y}{1-y}.$$

Здесь через $\ln C_0$ обозначена постоянная интегрирования.

$$\frac{y}{1-y}=C_0e^{k_1t},\quad y=\frac{C_0e^{k_1t}}{1+C_0e^{k_1t}}=\frac{1}{1+C_1e^{-k_1t}}.$$

$$C_1=\frac{1}{C_0},\quad a=2\sqrt{y}=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}.$$

$$x=a\sin\omega_0t=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}\sin\omega_0t.$$

Амплитуда напряжения на конденсаторе изменяется во времени следующим образом:

$$U_c=\frac{a}{\sqrt{k_2}}=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}\sqrt{\frac{aM-RC}{3bM}}.\qquad(15{,}18)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется по начальному значению амплитуды напряжения U_c. Так, если при $t=0$

$$U_c=U_c(0_-),$$

то

$$C_1=\frac{4}{U_c^2(0_-)}\ \frac{aM-RC}{3bM}-1.$$

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе

$$u_c=U_c\sin\omega_0t=\frac{2}{\sqrt{1+C_1e^{-k_1t}}}\sqrt{\frac{aM-RC}{3bM}}\sin\omega_0t.\qquad(15{,}19)$$

Убедимся, что автоколебательный процесс в схеме рис. 228,*б* является устойчивым. С этой целью воспользуемся формулами (14,15) и (14,16).

В данном случае

$$\frac{da}{dt}=A(a)=0{,}5\,ak_1\,(1-0{,}25\,a^2).$$

В установившемся режиме

$$a=a_0=2,$$

$$A_1=\left|\frac{dA(a)}{da}\right|_{a=a_0}=\left(1-0{,}75a^2\right)_{a=a_0}0{,}5\,k_1=-k_1.$$

Процесс устойчив, так как $A_1<0$ ($k_1>0$).

Из формулы (15,19) следует, что при $t\to\infty$ амплитуда колебаний равна $2\sqrt{\frac{aM-RC}{3bM}}$. Это выражение совпадает с выражением для амплитуды, которое дает формула (15,8).

В заключение необходимо отметить, что ламповый генератор рис. 228, *б* при сделанных в § 15,8 допущениях возбуждается мягко.

§ 15,11. Понятие о средней крутизне электронной лампы и применение его к вопросу о мягком и жестком возбуждении лампового генератора

В § 15,10 рассматривался вопрос о возбуждении колебаний в схеме рис. 228, *б*, когда характеристика $i_a = f(u_c)$ описывалась полиномом третьей степени. Обсудим вопрос о характере возбуждения колебаний, не накладывая ограничения на вид характеристики $i_a = f(u_c)$. Уравнение (15,2) было выведено применительно к схеме рис. 228, *б*, но оно годится и для схемы рис. 228, *а*, если под u_c понимать по-прежнему напряжение на сетке лампы, а под R, L, C, M — параметры схемы рис. 228, *а*.

В общем случае анодный ток i_a является функцией u_c и u_a. С целью большей наглядности вопрос о характере возбуждения лампового автогенератора принято рассматривать несколько упрощенно, полагая, что анодное напряжение является функцией только сеточного напряжения, т. е. $i_a = f(u_c)$.

При возникновении колебаний напряжение на сетке лампы изменяется почти по синусоидальному закону $u_c = U_{cm} \sin \omega_0 t$.

Задаваясь различными значениями амплитуды U_{cm}, при помощи кривой $i_a = f(u_c)$ можно построить зависимость $i_a = f(t)$ и графическим путем найти величину амплитуды I_{1a} первой гармоники тока i_a для каждого значения U_{cm}, т. е. построить зависимость $I_{1a} = f(U_{cm})$.

В радиотехнике пользуются понятием средней крутизны S. Под крутизной понимают отношение I_{1a} к соответствующей U_{cm}:

$$S = \frac{I_{1a}}{U_{cm}}.$$

Форма зависимости $S = f(U_{cm})$ определяется кривой $i_a = f(u_c)$ На рис. 229, *а* и *г* изображены две кривые $i_a = f(u_c)$. Кривая рис. 229, *а* повторяет жирную кривую рис. 9, *в*, а кривая рис. 229, *г* — пунктирную кривую рис. 9, *в*.

Зависимость $S = f(U_{cm})$ представлена на рис. 229, *б* и *д*, причем кривая рис. 229, *б* соответствует кривой рис. 229, *а*, а кривая рис. 229, *д* — кривой рис. 229, *г*.

С ростом амплитуды U_{cm} средняя крутизна на рис. 229, *б* плавно уменьшается вследствие насыщения.

Для характеристики, изображенной на рис. 229, *д*, средняя крутизна сначала растет вследствие перехода на более крутой участок характеристики $i_a = f(u_c)$, а затем уменьшается вследствие насыщения. Возвратимся к уравнению (15,2) и, воспользовавшись методом первой гармоники, перейдем от уравнения для мгновенных значений к уравнениям для синусной и косинусной составляющих первой гармоники. С этой целью подставим в уравнение (15,2) вместо u_c величину $U_{cm} \sin \omega_0 t$, а $\frac{di_a(u_c)}{du_c}$ заменим средней крутизной S. Получим два уравнения: уравнение (15,5) и уравнение

$$\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} S = 0.$$

Для того чтобы в ламповом генераторе рис. 228,*а* существовали колебания $u_c = U_{cm} \sin \omega_0 t$ с амплитудой U_{cm}, необходимо, чтобы $\frac{RC}{M}$ равнялось средней крутизне лампы S при выбранном значении U_{cm}.

На рис. 229, *б* и *д* нанесено по несколько прямых $\frac{RC}{M}$ при различных M и неизменных R и C. Чем больше M, тем ближе расположится прямая к оси абсцисс.

Кривые рис. 229, *а*, *б*, *в* соответствуют мягкому возбуждению; кривые 229, *г*, *д*, *е* — жесткому. Точки *1*, *2*, *3*, *4* на кривых рис. 229, *в* и *е* отвечают одноименным точкам на рис. 229, *б* и *д*.

Рассмотрим, как будет изменяться величина U_{cm} при плавном увеличении M, начиная с нуля, сначала для случая мягкого возбуждения, затем для жесткого.

При плавном увеличении M в случае мягкого возбуждения U_{cm} остается равным нулю до точки *1*, затем U_{cm} плавно увеличивается. При плавном уменьшении M происходит плавное уменьшение U_{cm}. Таким образом, зависимость $U_{cm} = f(M)$ при мягком возбуждении имеет непетлевой характер.

Иная картина имеет место при жестком возбуждении. Кривая $S = f(U_{cm})$ рис. 229, *д* имеет восходящий участок *2'—1* и нисходящий *1—2—3—4*.

Участок *2'—1* является неустойчивым, а участок *1—2—3—4* устойчивым.

При плавном увеличении M в случае жесткого возбуждения колебания возникают скачком, когда M достигнет значения M_2, соответствующего точке *2*, рис. 229, *е*.

При дальнейшем увеличении M происходит перемещение рабочей точки от точки *2* к точке *4*.

При плавном уменьшении M изображающая точка перемещается от точки *4* через точку *3* к точке *1*. В точке *1* колебания срываются. Стрелки на рис. 229, *в* и *е* показывают направление движения.

Таким образом, при жестком возбуждении зависимость $U_{cm} = f(M)$ имеет петлевой характер. Аналогичным образом можно построить зависимость U_{cm} от сопротивления R при неизменных M и C и зависимость U_{cm} от емкости C при неизменных M и R.

§ 15,12. Генератор на плоскостном полупроводниковом триоде

На рис. 230, *а* изображена схема генератора на плоскостном полупроводниковом триоде. Генератор состоит из двух ферромагнитных тороидальных сердечников (на рисунке они даны в развертке) с тремя обмотками на каждом из них, плоскостного полупроводникового триода, батареи E и емкости C_1.

Последовательно соединенные обмотки w_1 и емкость C_1 образуют колебательный контур. Обмотки $w_у$, включенные в цепь эмиттера, являются обмотками обратной связи. К последовательно соединенным обмоткам w_2 подключается нагрузка.

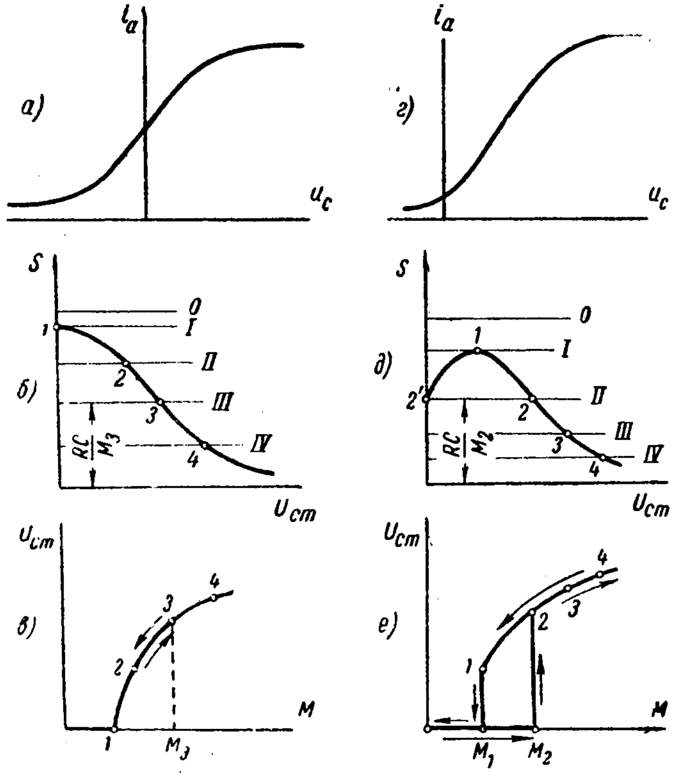
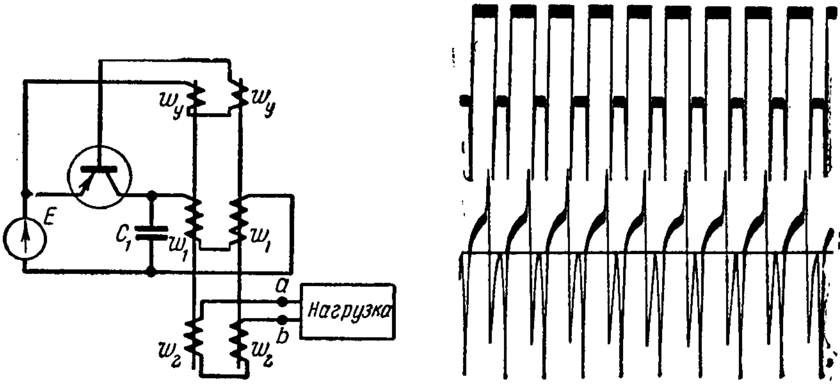


Рис. 229.

Регулировка частоты производится либо путем изменения величины емкости C_1, либо путем изменения эквивалентной индуктивности обмоток w_1. Последнее достигается посредством подмагничивания сердечников постоянным током.

Если емкость C_1 отключить, то автоколебания в схеме сохраняются вследствие действия распределенной емкости обмоток w_1, но частота колебаний резко возрастает. Схема работает и в том случае, если один тороидальный сердечник с намотанными на нем тремя обмотками убрать из схемы. При помощи генераторов, подобных изображенному на рис. 230, *а*, можно получать выходную мощность от нескольких милливатт до нескольких сотен ватт при частоте от десятков герц до нескольких десятков и сотен килогерц при к. п. д. порядка 80% и выше.



а) **Рис. 230** *б)*

На рис. 230, *б* представлена осциллограмма автоколебательного процесса в схеме рис. 230, *а* при емкостной нагрузке. Верхний вибратор записывал ток коллектора, нижний — ток нагрузки.

§ 15,13. Трансформатор постоянного напряжения

Если напряжение с выходных зажимов *ab* (рис. 230, *а*) подать на вход двухполупериодного выпрямителя на германиевых диодах, имеющего емкостный фильтр на выходе для сглаживания пульсаций, то на выходе выпрямителя получим постоянное напряжение.

Величина последнего будет больше э. д. с. E при $w_2 > w_1$. При питании генератора на полупроводниковом триоде от низковольтного источника э. д. с., например от батареи в 3 *в*, на выходе генератора можно получить постоянное напряжение в несколько десятков и даже сотен вольт.

§ 15,14. Генератор, содержащий управляемое магнитным полем нелинейное сопротивление

Схема генератора, изображенного на рис. 231, состоит из емкости C, индуктивности L, активного сопротивления индуктивной катушки R и пластинки из мышьяковистого индия. Сопротивление последней является функцией тока контура i и тока I_y, протекающего через пластинку в перпендикулярной плоскости.

Ток $I_у$ обеспечивается не показанным на рисунке источником тока. Пластинка полупроводника помещается в магнитное поле индуктивной катушки (рис. 232). Индуктивность ее (см. § 7,25)

$$L = \frac{\mu_0 S w^2}{\delta + \frac{l_c}{\mu_r}},$$

где w — число витков катушки;

S — площадь поперечного сечения магнитопровода;

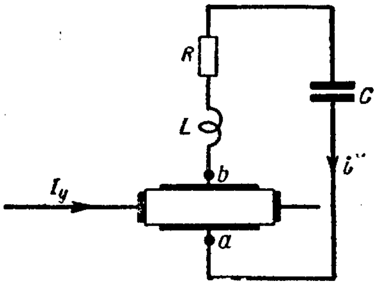


Рис. 231.

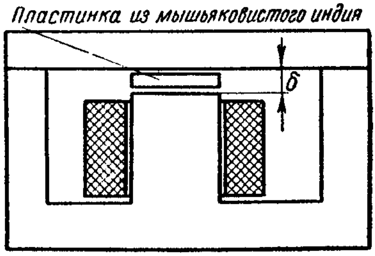


Рис. 232.

l_c — длина средней магнитной линии сердечника;

μ_r — дифференциальная магнитная проницаемость;

δ — длина воздушного зазора.

L является функцией μ_r, последняя же есть функция тока i.

В § 2,25 отмечалось, что падение напряжения между точками a и b при таком способе включения

$$u_{ab} = iR_c - kiI_у, \qquad (15,20)$$

где k — коэффициент;

R_c — сопротивление между точками a и b при $I_у = 0$.

Если в уравнение цепи

$$L\frac{di}{dt} + u_{ab} + iR + \frac{1}{C}\int i dt = 0$$

подставить (15,20), затем продифференцировать полученное уравнение по времени, то будем иметь

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R + R_c}{L}(1 - m)\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0, \qquad (15,21)$$

$$m = \frac{kI_у}{R + R_c}.$$

Самовозбуждение наступит при $m > 1$.

Более подробные сведения о рассмотренном генераторе имеются в ETZ-A, 1957, № 10.

16

Автомодуляция

§ 16,1. Общая характеристика процессов автомодуляции

Под автомодуляцией понимают процесс периодического или почти периодического изменения амплитуд токов и напряжений вынужденных колебаний без воздействия внешнего модулирующего фактора. Частота изменения огибающей амплитуд вынужденных колебаний может плавно регулироваться в широких пределах. Процесс автомодуляции в одних случаях мешает нормальной работе различных устройств, в других он является полезным и его стремятся вызвать.

Автомодуляционные процессы возникают в феррорезонансных схемах, в магнитных усилителях с гибкой обратной связью, в делителях частоты в четное число раз, в преобразователях частоты в $\frac{p}{q}$ раз при четном q, в умножителях частоты, в инверторах, в резонансных магнитных триггерах, применяемых в счетно-решающей технике, в триггерах на магнитных усилителях с релейной характеристикой, в магнитных реле времени, в каскадных магнитных усилителях, в линиях передачи энергии, в распределительных устройствах энергосистем и других установках. Возникновение автомодуляционных процессов в них совершенно недопустимо, так как нормальная работа устройств нарушается.

С другой стороны, как упоминалось, часто стремятся вызвать автомодуляционные процессы.

Так, автомодулирующие устройства уже нашли довольно широкое применение в качестве низкочастотных генераторов, генераторов импульсов и преобразователей частоты. Их используют также в качестве заменителей пульспар, источников питания для периодического бесконтактного включения различных аппаратов и реле, заменителей „синусных“ машинок и т. д. Широкое использование их вполне понятно, так как они обладают рядом ценных свойств: в них нет движущихся частей, они дешевы, надежны в работе, сравнительно малочувствительны к колебаниям величины напряжения и частоты источника питания схемы.

Кроме того, автомодуляционные системы могут быть применены как статические преобразователи однофазного переменного напряжения в симметричную многофазную, в частности трехфазную, систему напряжений с плавно-регулируемой низкой частотой.

§ 16,2. Классификация автомодуляционных систем

Автомодуляционные системы могут быть разделены на:

1) системы с управляемыми и системы с неуправляемыми нелинейными индуктивностями, емкостями и активными сопротивлениями;

2) системы, в которых при автомодуляции возникает медленно меняющаяся составляющая магнитного потока в сердечниках нелинейной индуктивности (или соответственно медленно меняющаяся составляющая заряда на обкладках нелинейной емкости), и системы, в которых она не возникает;

3) системы, в которых обратная связь осуществляется по явно выраженным каналам, и системы, в которых обратная связь действует по неявно выраженным каналам;

4) системы, в которых огибающая колебаний имеет ярко выраженный релаксационный характер, и системы с почти гармонической огибающей (конечно, возможны колебания и промежуточного типа);

5) системы, имеющие специальный колебательный контур для протекания медленно меняющейся составляющей тока, и системы, не имеющие его;

6) системы с нелинейной индуктивностью (нелинейной емкостью), в которых амплитуда первой гармоники магнитной индукции (заряда) периодически изменяется при автомодуляции, и системы, в которых она практически неизменна;

7) системы, в которых между огибающими тех или иных определяющих величин возникает петлевая связь, и системы без петлевой связи между огибающими.

В данной главе рассмотрена только небольшая часть вопросов теории и лишь некоторые типы автомодуляционных систем. Более полно все эти вопросы рассмотрены в [Л. 20].

§ 16,3. Некоторые особенности энергетических преобразований при автомодуляции

В процессе автомодуляции магнитные сердечники нелинейных индуктивностей (или нелинейные емкости) в силу нелинейности своих вебер-амперных (кулон-вольтных) характеристик могут трансформировать энергию высокой частоты ω в энергию частоты автомодуляции Ω, не находящейся к частоте ω в общем случае в дробнорациональном отношении. Эта энергия пропорциональна величине $\oint H_0 dB_0$ ($\oint U_0 dQ_0$), где H_0 и B_0 — медленно меняющиеся средние значения напряженности магнитного поля и магнитной индукции в сердечниках (U_0 и Q_0 представляют собой медленно меняющиеся составляющие напряжения и заряда на нелинейной емкости).

Если автомодуляционная система имеет какие-либо контуры, потребляющие энергию низкочастотных колебаний и не связанные с источником постоянной э. д. с. или с цепью выпрямленного тока (последней может и вовсе не быть), то восполнение потерь в них имеет место в результате возникновения петлевой связи между H_0 и B_0 (соответственно U_0 и Q_0).

Очень важным для понимания физических причин возникновения автомодуляционных процессов является вопрос о том, почему в различных схемах образуются петлевые характеристики. Петлевая связь между H_0 и B_0 (U_0 и Q_0) может возникать и действительно возникает в двух принципиально различных режимах работы автомодулирующих устройств. В первом из них первая гармоника напряжения (заряда) на нелинейной индуктивности (нелинейной емкости) периодически изменяется по амплитуде, во втором она практически не изменяется по амплитуде. Основной причиной, приводящей к созданию петлевой связи между H_0 и B_0 (U_0 и Q_0) в первом режиме является чаще всего петлевая связь между медленно изменяющейся амплитудой первой гармоники магнитной индукции B_m (заряда Q_m) и медленно меняющимся средним значением магнитной индукции B_0 (заряда Q_0). Во втором режиме петлевая связь образуется в силу амплитудной или амплитудно-фазовой модуляции какой-либо четной гармоники или четной субгармоники напряженности поля (или напряжения на нелинейной емкости). Более подробно об энергетических соотношениях в одной из систем с петлевой характеристикой сказано в § 16,7.

§ 16,4. Условие возникновения автомодуляции в схеме рис. 187

В § 12,10 указано, что в определенной области значений параметров схемы рис. 187 зависимость постоянной составляющей напряженности поля H_0 от постоянной составляющей магнитной индукции B_0 имеет S-образную форму (рис. 233)*.

При автомодуляции в схеме рис. 187 βB_0 медленно изменяется во времени. Медленно меняются также амплитуда тока i_1, амплитуда напряжения на нелинейной индуктивности и на емкости.

* Рис. 233 построен при $A = 2$, $a = 0{,}054$, $\frac{b}{a} = 0{,}3675$.

В качестве иллюстрации на рис. 234 представлена осциллограмма процесса автомодуляции в схеме рис. 187. Верхний вибратор записывал напряжение на нелинейной индуктивности, средний — э. д. с. на зажимах вспомогательной обмотки, охватывавшей подобно обмоткам w_0 оба сердечника, нижний — ток i_1.

Вследствие явления электромагнитной индукции изменение постоянной составляющей индукции вызывает протекание медленно меняющихся токов в обмотках w_1 и w_0.

Медленно меняющуюся составляющую тока в обмотках w_1 обозначим

$$i_{1ср} = i'_1 - i''_1.$$

Составим уравнения для медленно меняющихся величин в цепях обмоток w_0 и обмоток w_1:

$$k_0 \frac{dB_0}{dt} + i_0 R_0 = \frac{U}{2}; \qquad (16,1)$$

$$k_1 \frac{dB_0}{dt} + i_{1ср} R_1 = 0; \qquad (16,2)$$

$$k_0 = w_0 S, \ k_1 = w_1 S. \qquad (16,3)$$

Если вычесть (12,5) из (12,4), то получим, что

$$2i_0 w_0 + i_{1ср} w_1 = 2\alpha l \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx). \qquad (16,4)$$

Из (16,1) — (16,4) следует уравнение

$$\frac{d\beta B_0}{dkt} + \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx) = \frac{H'_0}{\alpha}, \qquad (16,5)$$

где

$$\frac{H'_0}{\alpha} = \frac{Uw_0}{2R_0 \alpha l},$$

$$k = \frac{\alpha l \beta R_0}{S w_0^2 \left(1 + \frac{w_1^2 R_0}{w_0^2 R_1}\right)}. \qquad (16,6)$$

Уравнение (16,5) является основным уравнением движения системы. В точке равновесия

$$\frac{d\beta B_0}{dkt} = 0 \text{ и } \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx) = \frac{H'_0}{\alpha}.$$

Если $\frac{H'_0}{\alpha}$ таково, что точка равновесия попадет на падающий участок характеристики

$$\frac{H_0}{\alpha} = \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx) = f(\beta B_0),$$

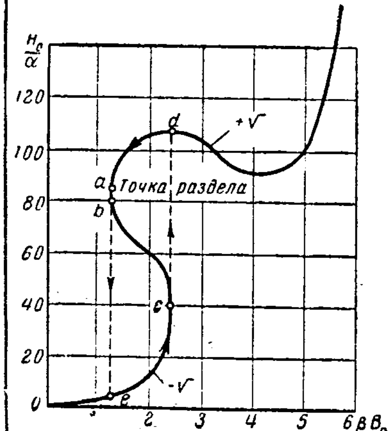


Рис. 233.

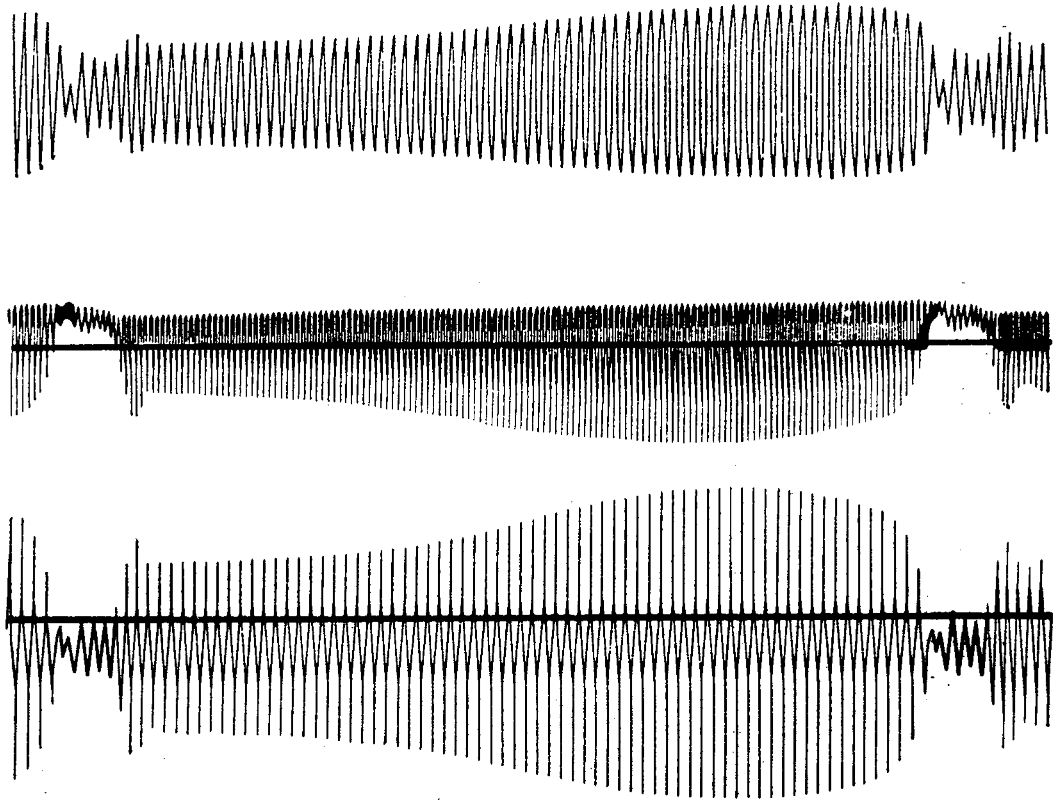


Рис. 234.

то равновесие будет неустойчивым. Чтобы убедиться в этом, разложим уравнение (16,5) в ряд Тейлора в окрестности точки равновесия. Обозначим координаты точки равновесия через

$$\beta B_0 = b \text{ и } \left.\operatorname{sh}\beta B_0 J_0(jx)\right|_{\beta B_0 = b}.$$

Пусть βB_0 получило приращение Δb и стало равным $b + \Delta b$. Разложим функцию $\operatorname{sh}\beta B_0 J_0(jx)$ в ряд Тейлора по степени Δb и в силу малости Δb ограничимся двумя членами ряда.

Уравнение для приращений будет иметь вид

$$\frac{d(\Delta в)}{dkt} + \Delta b \left.\frac{d}{d\beta B}\left[\operatorname{sh}\beta B_0 J_0(jx)\right]\right|_{\beta B_0 = b} = 0.$$

Воспользуемся дифференциальной динамической индуктивностью $L_{0\text{дин}}$ для медленно меняющихся постоянных составляющих (§ 12,12) и перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\frac{d(\Delta b)}{dkt} + \Delta b\,\frac{2Sw_0^2}{al\beta}\,\frac{1}{L_{0\text{дин}}} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$pL_{0\text{дин}} + \frac{2Sw_0^2}{al\beta} = 0.$$

имеет положительный корень, так как $L_{0\text{дин}} < 0$.

Таким образом, возникшее приращение Δb будет возрастать во времени.

Положение равновесия неустойчиво.

§ 16,5. Изображение процесса автомодуляции в схеме рис. 187 на фазовой плоскости

На рис 235 изображена интегральная кривая на фазовой плоскости; по оси абсцисс отложено βB_0; по оси ординат

$$\frac{d\beta B_0}{dkt} = \beta \dot{B}_0.$$

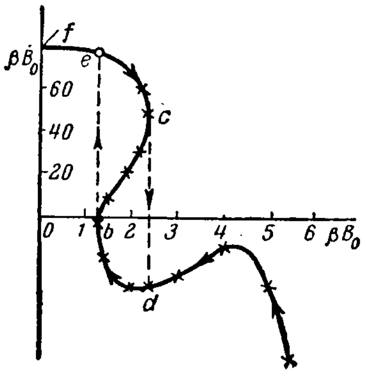


Рис. 235.

Интегральная кривая построена по уравнению (16,5) при следующих значениях параметров:

$$A = 2,\ a = 0{,}054,$$

$$\frac{b}{a} = 0{,}3675,\ \frac{H_0'}{a} = 75.$$

При включении источника постоянной э. д. с. в цепь обмоток w_0 схемы рис. 187 постоянная составляющая магнитной индукции начнет нарастать с нуля (точка f рис. 235) и достигнет максимального значения в точке c. Затем произойдет скачок при неизменном βB_0 из точки c в точку d. Из d изображающая точка движется в b. Затем она скачком перемещается в точку e. Скачок из c в d сопровождается резким уменьшением x (см. рис. 188)*, т. е. резким уменьшением амплитуды переменной составляющей магнитной индукции. Скачок из точки b в точку e сопровождается резким увеличением x.

Далее процесс периодически повторяется. Устойчивость процесса следует из того, что в системе возможен лишь единственный предельный цикл (замкнутая кривая $ecdbe$ на рис. 235).

§ 16,6. Получение временных зависимостей при автомодуляции в схеме рис. 187

Графическое интегрирование уравнения (16,5) дает возможность построить зависимость βB_0 от времени (кривая 1, рис. 236). Использование кривой

$$\beta B_0 = f(t)$$

и кривой

$$x = \beta B_m = f(\beta B_0)$$

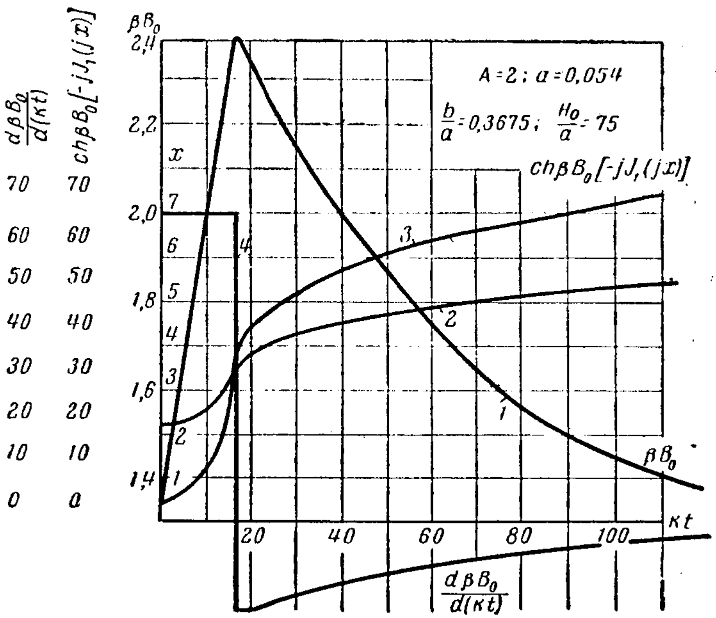


Рис 236.

* В данном случае ссылка на рис. 188 имеет качественный характер, поскольку для рис. 188 $A = 0{,}5$, а здесь $A = 2$.

(подобно кривой рис. 188) позволяет построить зависимость

$$x = \beta B_m = f(t)$$

(кривая 2, рис. 236), представляющую в некотором масштабе огибающую амплитуд напряжения на нелинейной индуктивности. После этого строится кривая 3, представляющая в некотором масштабе огибающую амплитуд первой гармоники тока i_1:

$$I_{1m} = \frac{2\alpha l}{w_1} \operatorname{ch} \beta B_0 [-jJ_1(jx)].$$

§ 16,7. Уравнение энергетического баланса при автомодуляции в схеме рис. 187

Если обратиться к рис. 188, то можно заметить, что движение изображающей точки на плоскости $\beta \dot{B}_0$, x происходит по замкнутой петле. Последней соответствует петля *ecdbe* рис. 233. Ее площадь пропорциональна энергии, доставляемой ферромагнитным сердечником в контуры обмоток, сцепляющихся с медленно меняющейся составляющей потока, на покрытие потерь в них от низкочастотных составляющих токов.

Чтобы убедиться в этом, умножим (16,1) на $\frac{2w_0 i_0 k_1}{T} dt$, проинтегрируем за период низкочастотного колебания T, сложим с уравнением (16,2), которое предварительно умножим на $\frac{k_0 w_1 i_{1\text{ср}}}{T} dt$ и проинтегрируем за период T.

После сокращения одинаковых слагаемых ($I_{0\text{ср}}^2 2w_0 R_0 k$) и замены $i_{1\text{ср}} w_1 + 2i_0 w_0$ на $2\alpha l \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx)$ получим уравнение энергетического баланса

$$(2R_0\alpha_0^2 + R_1\alpha_1^2) \int\limits_0^{t=T} \left(\frac{d\beta B_0}{dkt}\right)^2 dt = -\frac{2\alpha l k_0}{\beta w_0} \oint \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx)\, d\beta B_0. \qquad (16,7)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{kk_0}{\beta R_1}, \qquad \alpha_0 = \frac{kk_0}{\beta R_0},$$

интеграл $-\oint \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx)\, d\beta B_0$ пропорционален площади петли *ecdbe* на рис. 233. Левая часть уравнения (16,7) характеризует энергию, выделяющуюся в виде тепла в контурах обмоток w_1 и w_0 от низкочастотных составляющих токов; правая часть — энергию, доставляемую ферромагнитным сердечником на покрытие потерь в этих контурах.

Так как

$$\alpha \operatorname{sh} \beta B_0 J_0(jx) = H_0,$$

то правая часть (16,7) может быть заменена на

$$-\frac{2\alpha l k_0}{\beta w_0} \oint H_0 d\beta B_0.$$

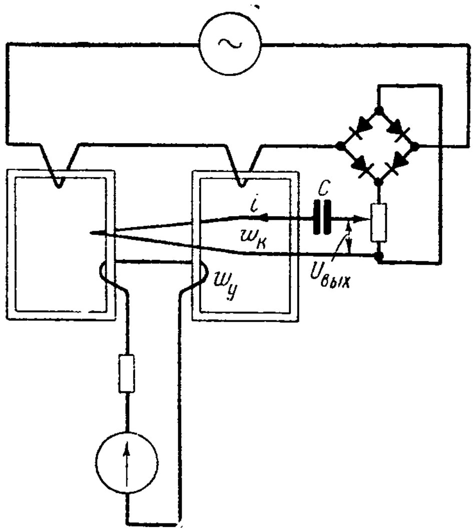


Рис. 237.

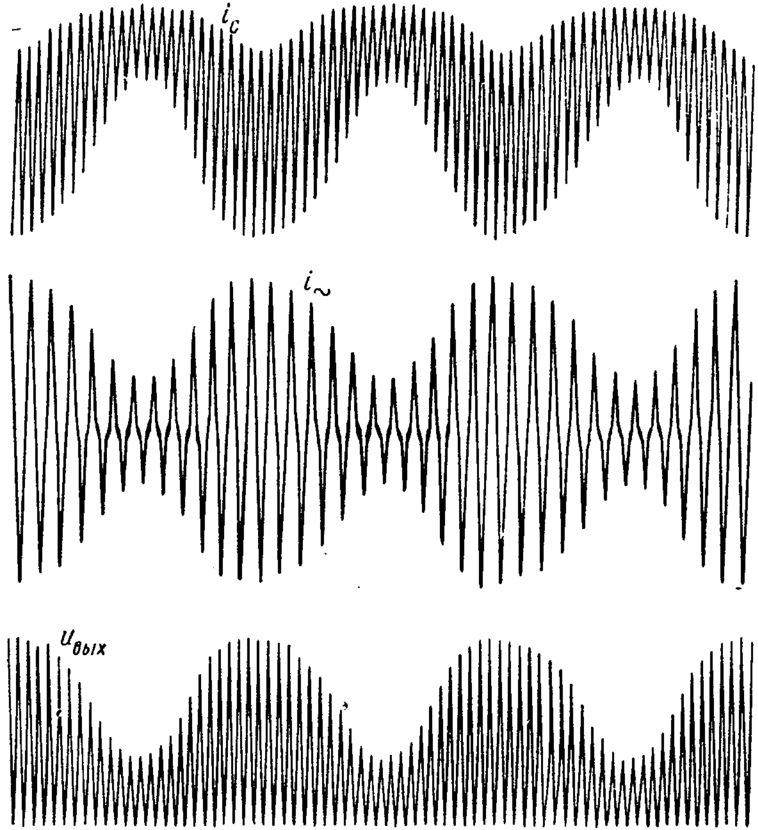


Рис. 238.

В заключение необходимо отметить два существенных положения.

1. Обратная связь в схеме рис. 187 осуществляется неявно, вследствие эффекта воздействия переменной составляющей магнитной индукции на постоянную составляющую индукции.

2. Если изменять какой-либо один из безразмерных параметров A, a, b, $\frac{H_0'}{a}$ (см. формулы 12,13—12,15; 16,6), то можно убедиться в наличии верхней и нижней границ этого параметра, при которых автомодуляция в схеме рис. 187 прекращается.

Объясняется это тем, что при изменении любого из параметров зависимость (12,4) так деформируется, что падающий участок на ней либо вовсе исчезает, либо сохраняется, но прикрывается другими ветвями, не имеющими падающего участка.

§ 16,8. Автомодуляция в схеме с гибкой обратной связью

Под гибкой, или исчезающей, обратной связью (ГОС) понимают обратную связь, проявляющуюся только в процессе изменения выходной величины. Если выходная величина во времени не изменяется, то ГОС не проявляет себя. Простейшая автомодуляционная система с ГОС изображена на рис. 237. В ней ГОС осуществлена через емкость C. Медленно меняющаяся составляющая тока i протекает только при изменении среднего значения напряжения на выходе выпрямительного моста.

На рис. 238 представлена осциллограмма процесса автомодуляции в схеме рис. 237. Верхний вибратор записывал ток колебательного контура, средний — переменный ток, нижний — напряжение на выходе выпрямителя.

Векторная диаграмма для первых гармоник медленно меняющихся составляющих токов и напряжений при активной нагрузке в цепи выпрямленного тока изображена на рис. 239. Видно, что первые гармоники медленно меняющихся составляющих I, $B = B_0$ и $U = U_{вых}$ находятся в фазе. Напряжение на обмотке $w_к$ опережает ток I на 90° и напряжение на емкости U_c отстает от тока I на 90°.

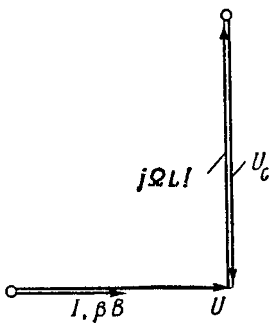


Рис. 239.

При индуктивной нагрузке в цепи выпрямленного тока вектор B будет опережать вектор тока I.

Колебательный контур состоит из емкости C и обмотки $w_к$. Он электрически связан с цепью выпрямленного тока и получает от нее энергию на покрытие потерь в активном сопротивлении колебательного контура.

§ 16,9. Условие возникновения автомодуляции в схеме рис. 237

Запишем дифференциально уравнение для колебательного контура

$$k\frac{dB_0}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt = U_{\text{вых}}. \qquad (16,8)$$

Ток i и напряжение $U_{\text{вых}}$ являются функциями медленно меняющейся составляющей индукции B_0. После дифференцирования уравнения (16,8) по времени получим

$$k\frac{d^2B_0}{dt^2}+\left(R\frac{di}{dB_0}-\frac{dU_{\text{вых}}}{dB}\right)\frac{dB_0}{dt}+\frac{i}{C}=0. \qquad (16,9)$$

Второе слагаемое уравнения (16,9) состоит из двух частей: первая характеризует потери энергии в колебательном контуре; вторая характеризует энергию, поступающую в колебательный контур из цепи выпрямленного тока.

На рис. 240, *а* изображены вспомогательные кривые, при помощи которых могут быть построены зависимости $R\frac{di}{d\beta B_0}$ и $\frac{dU_{\text{вых}}}{d\beta B_0}$.

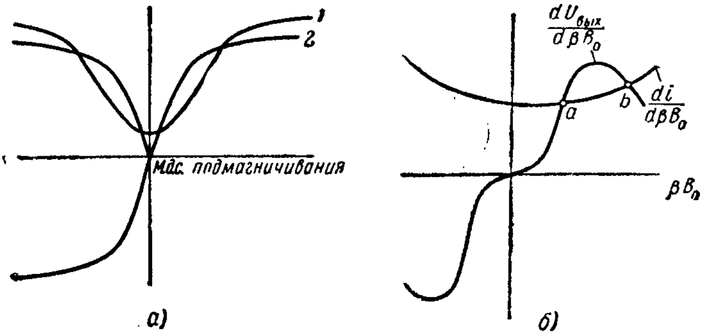


Рис. 240.

Кривая *1* представляет зависимость напряжения на выходе выпрямительного моста в функции от результирующей м. д. с. подмагничивания; кривая *2* — зависимость B_0 от м. д. с. подмагничивания.

Кривые

$$R\frac{di}{d\beta B_0}=f(\beta B_0) \text{ и } \frac{dU_{\text{вых}}}{d\beta B_0}=f(\beta B_0)$$

качественно изображены на рис. 240, *б* (буква R на рисунке отсутствует).

В интервале между точками a и b кривая $\frac{dU_{\text{вых}}}{d\beta B_0}$ расположена выше кривой $R\frac{di}{d\beta B_0}$. Левее точки a и правее точки b кривая расположена ниже.

Для того чтобы автомодуляция возникла, значение постоянной составляющей магнитной индукции должно находиться в интервале между точками a и b (рис. 240, *б*).

При этом случайное приращение постоянной составляющей индукции B_0 вызовет приток энергии в колебательный контур больший, чем потери энергии в нем, и амплитуда тока колебательного контура начнет нарастать до значения, определяемого энергетическим балансом и нелинейностью характеристик схемы.

§ 16,10. Обратная связь в схеме рис. 237

В схеме рис. 237 имеются два канала, по которым действует обратная связь. Первый канал — непосредственное воздействие напряжения с выхода выпрямительного моста на колебательный контур. Второй канал — воздействие переменной составляющей магнитной индукции на медленно меняющуюся постоянную составляющую индукцию B_0.

Если принять, что ток i линейно связан с B_0, т. е. что $i \equiv B_0$, то уравнение (16,9) будет тождественно уравнению лампового генератора с колебательным контуром в цепи сетки.

§ 16,11. Вывод основных зависимостей для объяснения автомодуляции в магнитных делителях частоты вдвое

В делителе частоты вдвое, схема которого изображена на рис. 241, источник питания частоты 2ω подключен к двум последовательно соединенным обмоткам w_2 двух одинаковых нелинейных индуктивностей через диод. По обмоткам w_2 протекает однополупериодно выпрямленный ток. Этот ток содержит постоянную составляющую I'_0, синусоидальную составляющую частоты 2ω амплитуды I'_{2m} и составляющие более высоких частот, не учитываемых ниже.

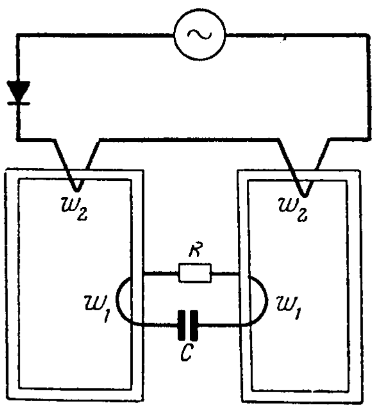


Рис. 241.

Обмотки w_2 выполняют функции и намагничивающих на частоте 2ω обмоток и подмагничивающих постоянным током обмоток. Это отличает данную схему от схемы рис. 133.

В первом приближении примем, что амплитуда тока частоты 2ω пропорциональна постоянной составляющей тока I'_0, т. е. $I'_{2m} = k_0 I'_0$, где k_0 — некоторый коэффициент. Величина этого коэффициента несколько меняется при переходе от одного режима работы к другому.

Так как токи I'_0 и I'_{2m} протекают по одной и той же обмотке w_2, то между постоянной составляющей полного тока $I_0 = I'_0 w_2$ и амплитудным значением синусоидальной составляющей (частоты 2ω) полного тока $I_{2m} = I'_{2m} w_2$ существует такая же связь, как и между токами I'_0 и I'_{2m}, т. е. $I_{2m} = kI_0$.

Будем пользоваться обозначениями, введенными в § 8,20. Все выкладки § 8,20 будут справедливы и для схемы рис. 241, если учесть, что $w_0 = w_2$ и $I_{2m} = kI_0$.

Напомним, что в § 8,20 угол ψ_2 представляет собой начальную фазу тока частоты 2ω. Как показывает не приводимый здесь анализ, угол ψ_2 находится во второй четверти. Поэтому в формуле (8,11) перед радикалом берем знак плюс. С учетом сказанного из формулы (8,13) получаем следующее выражение для квадрата амплитуды полного тока половинной частоты ω:

$$I_{1m}^2 = A - I_0^2\left(4 + 2k_0^2 + 4\sqrt{1 - \frac{p^2}{I_0^4}}\right), \qquad (16,10)$$

где

$$A = \frac{a' - M}{0,75b'}; \quad p = \frac{R_k}{3k\omega b'};$$

a', M, k, b', R_k — коэффициенты, введенные в § 8,20.

Если в формулу $B = aH - bH^3$ (§ 8,20) подставить мгновенное значение напряженности поля H, приведенное в § 8,20, и выделить постоянную составляющую магнитной индукции, то последняя окажется равной

$$B_0 = a'I_0 - b'\left[I_0^3 + \frac{3}{2} I_0 I_{1m}^2 + \frac{3}{2} I_0 I_{2m}^2 - I_{1m}^2 I_{2m} \cdot \frac{3}{4} \sin\psi_2\right]. \qquad (16,11)$$

Из схемы рис. 241 следует, что м. д. с. правого магнитопровода отличается от м. д. с. левого магнитопровода только знаком полного тока I_{1m} половинной частоты ω. Но так как I_{1m} входит в выражение для B_0 только в четной степени, то постоянная составляющая магнитной индукции в левом магнитопроводе равна постоянной составляющей магнитной индукции в правом магнитопроводе.

Подставим в формулу (16,11) вместо I_{2m} величину $k_0 I_0$ и вместо I_{1m}^2 правую часть формулы (16,10). Получим

$$B_0 = a'I_0 - b'F(I_0). \qquad (16,12)$$

Здесь

$$F(I_0) = F_1(I_0) + F_2(I_0), \qquad (16,13)$$

$$F_1(I_0) = I_0^3(1 + 1,5k_0^2), \qquad (16,14)$$

$$F_2(I_0) = F_2 = I_0'\left(1{,}5 - 0{,}75\sqrt{1-\frac{p^2}{I_0^4}}\right)\times$$
$$\times\left[A - I_0^2\left(4 + 2k_0^2 + 4\sqrt{1-\frac{p^2}{I_0^4}}\right)\right]. \qquad (16{,}15)$$

Функция F_2 не равна нулю только в области существования явления деления частоты. Последняя начинается со значения $I_0 = I_{0\,\min} = \sqrt{p}$ и заканчивается при $I_0 = I_{0\,\max}$, определяемом из уравнения

$$I_{0\,\max}^2\left(4 + 2k_0^2 + 4\sqrt{1-\frac{p^2}{I_{0\,\max}^4}}\right) = A.$$

Проанализируем формулу (16,12). На рис. 242 представлена зависимость функции F_2 от I_0 при типичных для работы делителя (рис. 240) значениях параметров схемы, а именно при $A = 9{,}98$, $p = 0{,}1$ и трех значениях k_0, равных 0,8; 1; 1,335. Из рисунка видно, что изменение коэффициента k_0 сказывается на величине максимума кривой $F_2 = f(I_0)$ и на величине $I_{0\max}$, но форма кривой $F_2 = f(I_0)$ не изменяется.

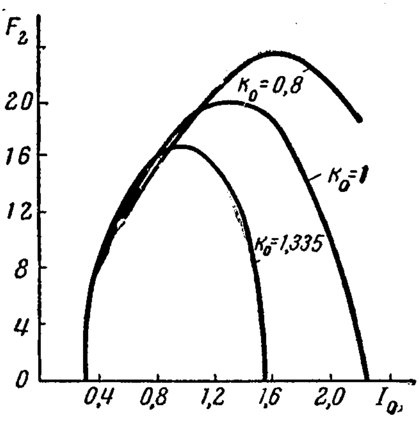


Рис. 242.

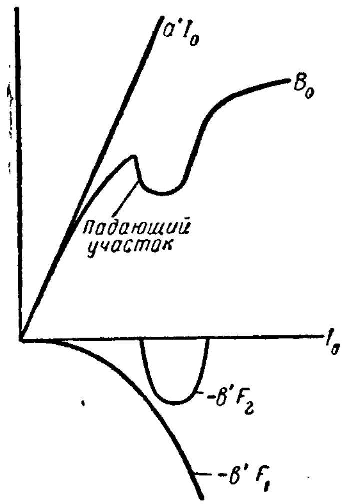


Рис. 243.

На рис. 243 изображены прямая $a'I_0 = f(I_0)$, кривая $-b'F_1 = f(I_0)$ по уравнению (16,14), зависимость $-b'F_2 = f(I_0)$ по (16,15) и результирующая кривая $B_0 = f(I_0)$. Если ординаты кривой F_2 будут достаточно велики, то на зависимости $B_0 = f(I_0)$ может появиться падающий участок. Падающий участок появляется вследствие влияния амплитуды и фазы половинной гармоники на B_0 при неизменной амплитуде первой гармоники магнитной индукции в сердечниках схемы рис. 241.

§ 16,12. Условия возникновения автомодуляции в делителях частоты вдвое

Если I_0 будет таким, что изображающая точка, характеризующая собой периодический процесс в схеме рис. 241, окажется на падающем участке кривой $B_0 = f(I_0)$, то в системе возникает автомодуляция. При автомодуляции B_0 будет медленно изменяться во времени. Изменение B_0 вызовет протекание медленно изменяющейся постоянной составляющей тока в контуре обмоток w_2. В контуре обмоток w_1 медленно изменяющейся составляющей тока не будет, так как постоянные составляющие потоков в смежных стержнях левого и правого магнитопроводов направлены встречно и в любой момент времени равны.

Составим уравнение, характеризующее поведение системы при автомодуляции. Обозначим постоянную составляющую напряжения на выходе выпрямителя схемы рис. 241 через $U_{во}$, а полное активное сопротивление цепи обмоток w_2, включая и собственное активное сопротивление вентиля (поделенное на w_2) через R_2. Имеем

$$k_2 \frac{dB_2}{dt} + R_2 I_0 (B_2) = U_{во}.$$

Если учесть, что зависимость $I_0(B_0)$ в схеме рис. 241 качественно такая же, как и зависимость $\frac{H_0}{a} = f(B_0)$ в схеме рис. 187, то уравнение движения рассматриваемой системы при автомодуляции оказывается аналогичным уравнению (16,5). Как и для схемы рис. 187, автомодуляционный процесс будет устойчив, ввиду того что на фазовой плоскости имеется только один предельный цикл. Обратная связь в рассматриваемой системе осуществляется через субгармонику второго порядка.

§ 16,13. Автомодуляция в индуктивно-связанных резонансных контурах с нелинейной индуктивностью

В качестве примера автомодуляционной системы, содержащей неуправляемую нелинейную индуктивность, рассмотрим схему на рис. 244. Вторичный контур содержит линейную индуктивность L_{02}, емкость C_2, активное сопротивление R_2 и нелинейную индуктивность. Первичная цепь состоит из источника э. д. с., емкости C_1, линейной индуктивности L_{01} и активного сопротивления R_1.

Для того чтобы автомодуляция возникла, необходимо выполнить три основных условия:

1) подобрать параметры участка цепи, состоящего из емкости C_2, нелинейной индуктивности и сопротивления R_2 так, чтобы в. а. х. его имела N-образную форму;

2) взять параметры первичной цепи такими, чтобы в ней был точно или приближенно резонанс на частоте источника питания схемы. При этом в. а. х. всей цепи будет иметь S-образную форму;

3) взять напряжение источника питания схемы таким, чтобы изображающая точка попала на падающий участок в. а. х. всей схемы.

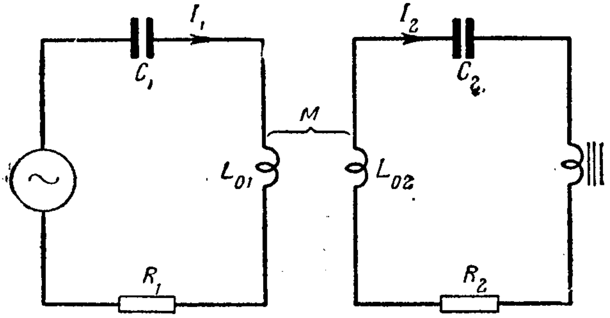


Рис. 244.

На рис. 245—246 приведены построения, поясняющие сказанное выше. Прямая A (рис. 245) представляет в. а. х. сопротивления R_2, кривая $Б$ — в. а. х. участка цепи, в который входит нелинейная индуктивность, емкость C_2 и сопротивление R_2, прямая $В$ — в. а. х. индуктивности L_{02}.

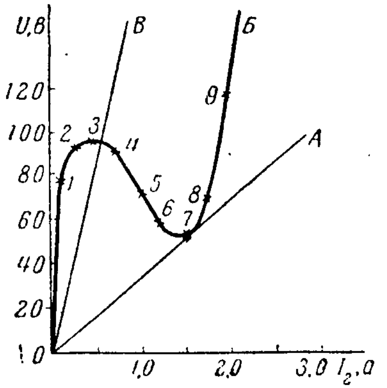


Рис. 245.

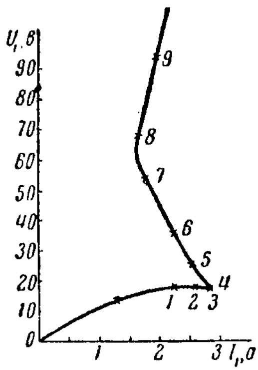


Рис. 246.

Так как геометрическая сумма падений напряжения во вторичном контуре равна нулю, то для любого значения тока I_2 по известной угловой частоте ω и взаимоиндукции M может быть найден модуль и фазовый угол тока I_1 первичной цепи.

В приведенных ниже данных первая строка дает номер точки на характеристике, вторая — ток I_2 в амперах, третья — ток I_1 в амперах, четвертая — угол ν между I_1 и I_2 в градусах (I_1 опережает I_2 на угол ν) при $\omega M = 38{,}2$ *ом*, пятая — напряжение U_1 в вольтах на входе первичной цепи; $\omega L_1 = \omega L_{01} = 176$ *ом*, $\frac{1}{\omega C_1} = 166$ *ом*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_2	0,125	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2	2,25
I_1	2,2	2,59	2,88	2,89	2,51	2,225	1,775	1,65	2,24	3,67
ν	176	175	171,3	168	159	149	126	106	56	35
U_1	17,5	17,8	17	18	25,5	37,5	55	66,5	97	124

По этим данным на рис. 246 построена в. а. х. всей цепи $U_1 = f(I_1)$. Она имеет S-образную форму. Падающий участок на ней начинается в точке *3* и заканчивается в окрестности точки *7*.

Если изображающая точка попадет на падающий участок в. а. х. схемы, то режим вынужденных колебаний по первой гармонике оказывается неустойчивым и в системе возникает автомодуляция.

Наибольший размах колебаний амплитуд токов имеет место в том случае, когда значение U_1 отвечает примерно середине падающего участка характеристики $U_1 = f(I_1)$.

Исследование показывает, что период низкочастотных колебаний очень слабо зависит от величины U_1 и сильно зависит от взаимоиндукции M. При автомодуляции изменяются не только амплитуды токов и напряжений, но непрерывно меняется угол сдвига фаз ν. Более подробное рассмотрение автомодуляции в схеме рис. 254 имеется в [Л. 20].

§ 16,14. Автомодуляционные системы для получения мигающего света

Из предыдущего известно, что при автомодуляционном процессе происходит периодическое изменение амплитуды переменного тока. Если этот ток будет протекать через лампу накаливания, то последняя будет периодически вспыхивать и гаснуть. Наибольшее распространение получила схема рис. 187, в которой сопротивление R_l является сопротивлением нити накала лампы.

Время между двумя смежными вспышками лампы равно периоду автомодуляционного колебания. Это время можно в известных пределах регулировать путем изменения величины тока подмагничивания.

Мигающий свет применяется на маяках, в случаях предупредительной сигнализации и на железнодорожном транспорте, при освещении витрин, при праздничном освещении и т. п.

§ 16,15. Автомодуляционные системы в качестве генераторов э. д. с. весьма низкой частоты, не содержащих подвижных частей

На рис. 247 изображена схема, которая применяется в качестве генератора э. д. с. очень низкой частоты. Эта схема отличается от схемы рис. 237 тем, что в цепь выпрямленного тока дополнительно включена индуктивная катушка L_1, магнитно связанная со второй индуктивной катушкой L_2.

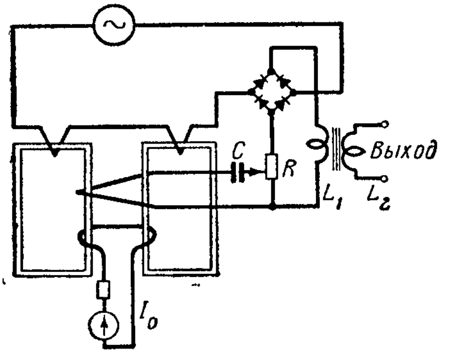


Рис 247.

Эти две катушки позволяют произвести демодуляцию, т. е. выделить низкую частоту из модулированного колебания. Индуктивность L_1 выбирается достаточно большой, чтобы подавить гармоники высокой частоты в выпрямленном токе. Поэтому выпрямленный ток, протекающий через L_1, имеет лишь постоянную составляющую и гармонику частоты автомодуляции.

Низкая частота (частота автомодуляции) регулируется путем изменения емкости C или путем изменения тока подмагничивания. Рассматриваемые генераторы применяются в телеизмерениях, в геологоразведке, в качестве заменителей синусных машинок при снятии частотных характеристик систем автоматического регулирования и т. п.

17

Субгармонические колебания

§ 17,1. Общая характеристика субгармонических колебаний

Под субгармоническими понимают колебания, частота которых меньше частоты периодической вынуждающей силы, действующей на систему.

На рис. 248 представлена осциллограмма субгармонических колебаний пятого порядка в цепи, состоящей из источника синусоидальной э. д. с. 50 *гц*, последовательно с ним включенных линейной индуктивности, линейной емкости и группы из параллельно соединенных нелинейной индуктивности и линейной емкости.

Верхний вибратор записывал напряжение на входе схемы; средний — ток в неразветвленной части схемы; нижний — напряжение на нелинейной индуктивности. На рис. 248 видно, что период процесса в пять раз больше периода вынуждающей силы.

При наличии субгармоник напряжения на отдельных элементах цепи могут в несколько раз превышать напряжение от первой гармоники. Поэтому возникновение субгармоник часто приводит к опасным перенапряжениям.

Все схемы, в которых возбуждаются субгармонические колебания, могут быть подразделены на две большие группы: на группу с независимым от начальных условий возбуждением (мягкое возбуждение) и на группу с зависимым от начальных условий возбуждением (жесткое возбуждение).

Первую группу составляют схемы, содержащие управляемые постоянным током или постоянным напряжением нелинейные индуктивности и (или) емкости.

В схемах первой группы возбуждаются, как правило, четные субгармоники.

Вторую группу составляют схемы с неуправляемыми нелинейными индуктивностями и емкостями.

В схемах второй группы возбуждаются, как правило, нечетные субгармоники, но при определенных условиях могут возбуждаться и четные гармоники.

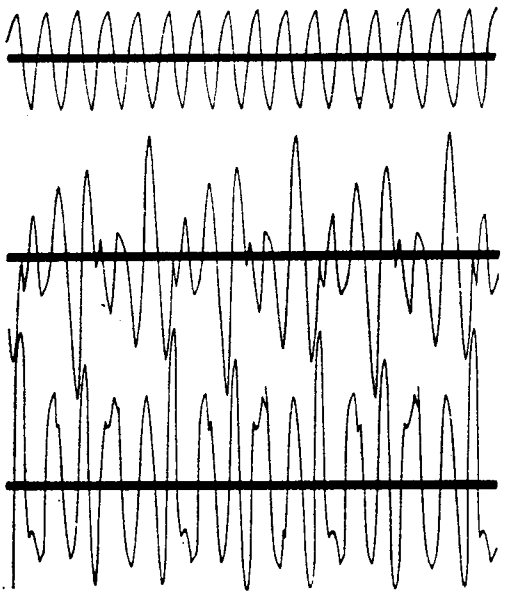


Рис. 248.

В схемах первой группы начальные условия не оказывают или почти не оказывают существенного влияния на процесс возбуждения субгармоник потому, что энергия на частоте субгармоники, доставляемая в цепь нелинейной индуктивностью, или соответственно нелинейной емкостью, начиная с самых малых значений амплитуд субгармонической составляющей тока, превышает потери в цепи на частоте субгармоники. Колебания плавно нарастают до тех пор, пока доставляемая в цепь энергия не станет равной потерям (сравните с возбуждением автоколебаний, см. § 15,5).

В схемах второй группы при малых значениях амплитуды субгармоники доставляемая в цепь энергия оказывается меньше потерь в цепи, поэтому процесса плавной раскачки колебаний до установившегося значения нет. Доставляемая нелинейной индуктивностью или емкостью энергия превышает потери лишь в определенном диапазоне значений амплитуд субгармоники, и потому для возникновения устойчивых субгармонических колебаний в схемах второй группы, помимо выполнения определенных соотношений между параметрами и величиной амплитуды напряжения на входе схемы, оказывается необходимым тем или иным путем „забросить" амплитуду субгармоники в ту область, где доставляемая энергия больше энергии потерь. Процесс „заброса" часто осуществляют путем вспомогательных переходных процессов в схеме (см. § 17,2) или при помощи кратковременного подключения схемы к вспомогательному генератору, имеющему частоту субгармоники или близкую к ней.

Возбуждение субгармоники второго порядка в одной из схем второй группы было рассмотрено в § 8,20. В § 17,2 приводятся рекомендации по возбуждению субгармонических колебаний в простейшей схеме первой группы.

§ 17,2. Возбуждение субгармонических колебаний в последовательной феррорезонансной цепи

В цепи рис. 249,*а* могут возбуждаться нечетные субгармоники 3, 5, 7 и более высокого порядка, а из четных — вторая и четвертая. Нечетные субгармоники возбуждаются легче и более устойчивы, чем четные. Чем выше порядок нечетной субгармоники, тем ее труднее возбудить. Легче других возбуждается субгармоника третьего порядка.

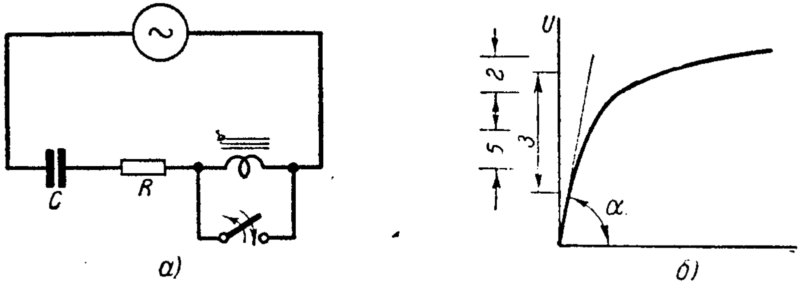


Рис. 249.

Опыт показывает, что субгармонические колебания легче возбуждаются и наблюдаются в более широкой области значений параметров, если нелинейная индуктивность имеет сравнительно пологую (без резкого излома) вольт-амперную характеристику (рис. 249, *б*).

Рассмотрим условия возбуждения субгармоник в схеме рис. 249, *а*. Через X_L обозначим индуктивное сопротивление нелинейной индуктивности в ненасыщенной области. Оно пропорционально тангенсу угла α (рис. 249, *б*).

Для возбуждения субгармоники третьего порядка емкость C рекомендуется выбрать так, чтобы емкостное сопротивление по первой гармонике

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \approx (0{,}008 - 0{,}002)\ X_L.$$

Суммарное активное сопротивление цепи R не должно превышать некоторого предельного значения $R_{пр} \approx (0{,}01 - 0{,}002)\ X_L$.

Первая цифра соответствует большему емкостному сопротивлению, вторая — меньшему. Цифрами 3, 5, 2 на рис. 249, *б* обозначены примерные области значений напряжения на входе схемы (не напряжения на нелинейной индуктивности!), при которых в цепи могут быть возбуждены субгармонические колебания соответственно 3, 5 и 2 порядков. Эти области могут быть сплошными, могут быть и разрывными Так как колебания в схеме возбуждаются жестко, то возбуждают их обычно путем многократного включения и выключения рубильника *P*.

Процесс включения и последующего выключения рубильника продолжают до тех пор, пока просмотр на катодном осциллографе не покажет наличия субгармоники.

Если же субгармоники не возникает, то следует несколько изменить параметры схемы или напряжение на входе и повторить коммутационный процесс.

§ 17,3. Вид областей существования субгармонических колебаний при изменении различных параметров

Как уже говорилось, субгармонические колебания могут возникать только при определенных соотношениях между параметрами схемы, т. е. при определенных соотношениях между емкостями, активными сопротивлениями, параметрами нелинейной индуктивности, амплитудой синусоидального напряжения источника питания схемы и частотой. Можно изменять какой-либо один параметр схемы, например напряжение или частоту источника питания, а остальные параметры оставить неизменными и опытным путем исследовать вид области существования той или иной субгармоники. Такого рода исследования проводились многими авторами. В краткой форме изложим результаты этих исследований.

Типичный вид области существования субгармонических колебаний третьего порядка для цепи рис. 249, *а* в координатах напряжение U на входе схемы и частота f, когда сердечник нелинейной индуктивности выполнен из трансформаторной стали, изображен на рис. 250, *а*, где область устойчивого существования субгармонических колебаний заштрихована.

Если сердечник нелинейной индуктивности выполнен из ферромагнитного материала, кривая намагничивания которого близка к прямоугольной, то область существования в тех же координатах разбивается на отдельные полоски (рис. 250, *б*).

Примерный вид области существования в координатах напряжение на входе схемы U и активное сопротивление R показан на рис. 250, *в*. Вид области существования в координатах напряжение на входе схемы U и емкость C дан на рис. 250, *г*.

Если оставить неизменными емкость C, активное сопротивление R и параметры нелинейной индуктивности схемы рис. 249, *а* и изменять напряжение U на входе схемы, то зависимость действующего значения тока в цепи I от действующего значения напряжения U на входе схемы при наличии субгармонических колебаний иллюстрируется рис. 250, *д*.

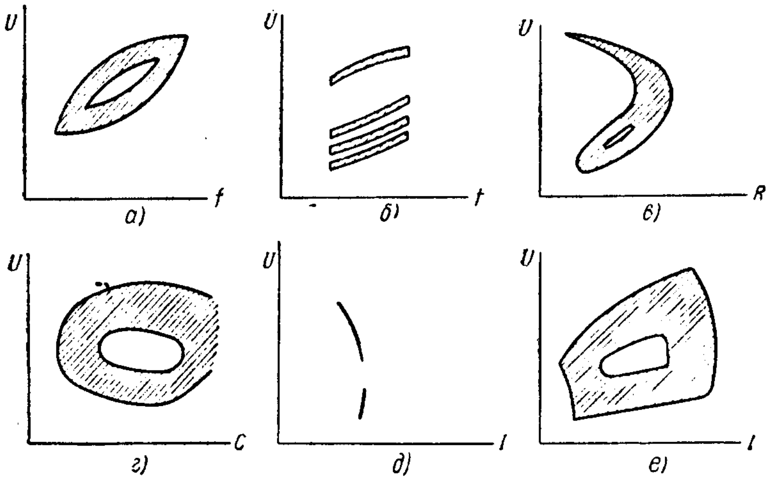


Рис. 250.

Примерный вид области существования субгармонических колебаний третьего порядка при различных R и C схемы изображен на рис. 250, *е*. Внутренняя незаштрихованная область представляет область, в которой отсутствуют субгармонические колебания. Внутренняя область исчезает, если кривая намагничивания нелинейной индуктивности будет иметь малую нелинейность.

§ 17,4. Анализ условий существования субгармонических колебаний третьего порядка в последовательной феррорезонансной цепи

Анализ условий проведем в соответствии с [Л. 60]. Примем на зависимости потокосцепления ψ от тока i нелинейной индуктивности некоторую точку за базисную. Соответствующее ей значение потокосцепления назовем базисным $\psi_б$, а соответствующий ей ток — базисным током $i_б$. Кривую зависимости потокосцепления ψ от тока i изобразим в относительных единицах. С этой целью по оси абсцисс отложим ток в долях от базисного тока, а по оси ординат — потокосцепление в долях от базисного потокосцепления. Обозначим

$$\varphi = \frac{\psi}{\psi_б} \quad \text{и} \quad i_{отн} = \frac{i}{i_б}.$$

Кривую намагничивания в относительных единицах выразим полиномом третьей степени

$$i_{\text{отн}} = p\varphi + q\varphi^3. \qquad (17,1)$$

По построению, при $\varphi = 1$, $i_{\text{отн}} = 1$, поэтому $p + q = 1$. Введем обозначение $s = \frac{q}{p}$. Коэффициент s характеризует относительное влияние кубичного члена.

Если записать уравнение для мгновенных значений цепи (рис. 249, a) при разомкнутом ключе, перейти от него к уравнению относительно φ, ввести вместо времени t новую переменную $\nu = \frac{\omega}{3} t$, то будет получено уравнение

$$\ddot{\varphi} + \alpha(1 + 3s\varphi^2)\dot{\varphi} + \beta^2(1 + s\varphi^2)\varphi = 9E\cos(3\nu - \theta). \qquad (17,2)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{3Rp}{\omega}\frac{i_6}{\psi_6}; \quad \beta^2 = \frac{9p}{\omega^2 C}\frac{i_6}{\psi_6}; \quad E = \frac{E_m}{3\omega\psi_6}; \\ &\frac{d\varphi}{d\nu} = \dot{\varphi} \text{ и } \frac{d^2\varphi}{d\nu^2} = \ddot{\varphi}; \end{aligned}\right\} \qquad (17,3)$$

E_m и θ — амплитуда и начальная фаза источника э. д. с.

Периодическое решение для потока φ ищем в виде суммы вынужденного колебания частоты 3ν и в виде субгармоники третьего порядка частоты ν:

$$\varphi = m\cos 3\nu + A\cos(\nu + \delta). \qquad (17,4)$$

Всего неизвестных четыре: амплитуда основного колебания m, начальная фаза θ напряжения генератора, амплитуда A и начальная фаза δ субгармонического колебания.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -3m\sin 3\nu - A\sin(\nu + \delta), \\ \ddot{\varphi} &= -9m\cos 3\nu - A\cos(\nu + \delta). \end{aligned}\right\} \qquad (17,5)$$

Подставим φ, φ^2, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ в (17,2) и выявим слагаемые, содержащие частоты ν и 3ν. Чтобы избавиться от углов 2δ, заменим $\sin(\nu - 2\delta)$ на $\cos 3\delta \sin(\nu + \delta) - \sin 3\delta \cos(\nu + \delta)$, и $\cos(\nu - 2\delta)$ на $\cos 3\delta \cos(\nu + \delta) + \sin 3\delta \sin(\nu + \delta)$. Затем приравняем нулю сумму слагаемых уравнения (17,2), содержащих $\sin(\nu + \delta)$, приравняем нулю сумму слагаемых, содержащих $\cos(\nu + \delta)$; то же проделаем со слагаемыми $\cos 3\nu$ и $\sin 3\nu$.

Получим четыре следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &A\left[\alpha + \frac{3\alpha s}{2}\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right) + \frac{3s}{4} mA(\alpha\cos 3\delta - \beta^2\sin 3\delta)\right] = 0; \\ &1 - \beta^2 - \frac{3\beta^2 s}{2}\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right) - \frac{3s}{4} mA(\alpha\sin 3\delta + \beta^2\cos 3\delta) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (17,6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&9E\sin\theta + 3\alpha m\left[1 + \frac{3s}{2}\left(A^2 + \frac{m^2}{2}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{sA^3}{4}\left[3\alpha\cos 3\delta + \beta^2\sin 3\delta\right] = 0; \\
&9E\cos\theta + m(9 - \beta^2) - \frac{3\beta^2 s}{2} m\left(A^2 + \frac{m^2}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{sA^3}{4}\left[3\alpha\sin 3\delta - \beta^2\cos 3\delta\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (17{,}7)$$

Из (17,6) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&A\alpha\left[1 + \frac{3s}{2}\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right)\right] = \frac{3s}{4} mA^2(\beta^2\sin 3\delta - \alpha\cos 3\delta); \\
&1 - \beta^2 - \frac{3\beta^2 s}{2}\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right) = \frac{3s}{4} mA(\beta^2\cos 3\delta + \alpha\sin 3\delta).
\end{aligned}\right\} \qquad (17{,}8)$$

Решение $A_1 = 0$ не представляет интереса. Для нахождения остальных решений следует возвести в квадрат уравнения (17,8) и сложить их. Будет получено биквадратное уравнение относительно $A_{2,3}$:

$$A^4 - 2\frac{4}{3s(\alpha^2 + \beta^2)}\left[\beta^2(1 - \beta^2) - \alpha^2 - \frac{9s}{8} m(\alpha^2 + \beta^4)\right] A^2 +$$

$$+ \frac{16}{9s^2(\alpha^2 + \beta^4)}\left[\left(1 - \beta^2 - \frac{3\beta^2 s}{2} m^2\right)^2 + \alpha^2\left(1 + \frac{3s}{2} m^2\right)^2\right] = 0; \qquad (17{,}9)$$

$$A_{2,3}^2 = \frac{4}{3s(\alpha^2 + \beta^4)}\left(n \pm \sqrt{n^2 - h^2}\right); \qquad (17{,}10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&n = \beta^2(1 - \beta^2) - \alpha^2 - \frac{9s}{8} m^2(\alpha^2 + \beta^4); \\
&h^2 = (\alpha^2 + \beta^4)\left[\left(1 - \beta^2 - \frac{3\beta^2 s}{2} m^2\right)^2 + \alpha^2\left(1 + \frac{3s}{2} m^2\right)^2\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (17{,}11)$$

Найдем угол 3δ. С этой целью из (17,8) найдем

$$\left.\begin{aligned}
&\beta^2\sin 3\delta - \alpha\cos 3\delta = d_1 = \frac{4\alpha}{3smA}\left[1 + \frac{3s}{2}\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right)\right], \\
\text{и}\quad &\alpha\sin 3\delta + \beta^2\cos 3\delta = d_2 = \frac{4}{3smA}\left[1 - \beta^2 - \frac{3\beta^2 s}{2}\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (17{,}12)$$

Отсюда

$$\sin 3\delta = \frac{\beta^2 d_1 + \alpha d_2}{\alpha^2 + \beta^4}; \quad \cos 3\delta = \frac{\beta^2 d_2 - \alpha d_1}{\alpha^2 + \beta^4};$$

$$\operatorname{tg} 3\delta = \frac{\alpha}{\beta^2(1 - \beta^2) - \alpha^2 - \frac{3s}{2}(\alpha^2 + \beta^4)\left(m^2 + \frac{A^2}{2}\right)}. \qquad (17{,}13)$$

Амплитуда и фаза субгармонического колебания зависят от квадрата амплитуды m^2 потока основной частоты.

Возведем в квадрат оба уравнения (17,7) и сложим их:

$$81E^2 = (9\alpha^2 + \beta^4)\frac{s^2A^6}{16} + m^2(9\alpha^2x^2 + y^2) +$$

$$+ \frac{msA^3}{2}(9\alpha^2x - y\beta^2)\cos 3\delta + 3\alpha(\beta^2x + y)\sin 3\delta], \qquad (17{,}14)$$

где

$$x = 1 + \frac{3s}{2}\left(A^2 + \frac{m^2}{2}\right) \quad \text{и} \quad y = 9 - \beta^2 - \frac{3\beta^2 s}{2}\left(A^2 + \frac{m^2}{2}\right). \qquad (17{,}15)$$

Если субгармонические колебания существуют, то квадрат амплитуды субгармоники A^2 представляет собой положительное число. Чтобы $A^2_{2,3}$ было больше нуля, согласно (17,10) должно быть $n \geqslant 0$ и $n^2 - h^2 \geqslant 0$.

Сначала рассмотрим последнее условие. Обозначим $\frac{3s}{2}m^2 = \eta$. Тогда $n^2 - h^2$ может быть представлена как функция η, α, β^2:

$$n^2 - h^2 = \psi(\eta, \alpha, \beta^2).$$

Если амплитуда основной гармоники потока $m \to 0$, то $m^2 = \eta \to 0$ и $\psi \to -\alpha^2 < 0$. При очень больших m $m^2 = \eta \to \infty$ и $\psi \to -\frac{17}{16}(\alpha^2 + \beta^4)^2 < 0$. Следовательно, существование субгармоники невозможно как при $m \to 0$, так и при $m \to \infty$. Если $\psi = n^2 - h^2$ не менее двух раз проходит через нуль, то эти нулевые значения и будут границами значений m для области существования субгармоники. Условие $\psi = 0$ дает квадратное уравнение относительно η:

$$n^2 - 2\frac{4[\beta^2(1-\beta^2) - \alpha^2]}{7(\alpha^2 + \beta^4)}\eta + \frac{16\alpha^2}{7(\alpha^2 + \beta^4)^2} = 0. \qquad (17{,}16)$$

Отсюда

$$\eta = \frac{4}{7(\alpha^2 + \beta^4)}\left\{\beta^2(1-\beta^2) - \alpha^2 \pm \sqrt{[\beta^2(1-\beta^2) - \alpha^2]^2 - 7\alpha^2}\right\}. \qquad (17{,}17)$$

Знак плюс перед корнем дает максимальное значение m^2, знак минус — минимальное. Если m^2 находится в интервале между максимальным и минимальным значениями m^2, то варьируя активное сопротивление цепи будем менять α, и при некотором $\alpha = \alpha_{кр}$ возникновение субгармонических колебаний третьего порядка становится невозможным. Для нахождения $\alpha_{кр}$ следует совместно решить систему уравнений

$$\frac{d\psi}{d\eta} = 0 \text{ и } \psi = 0.$$

Уравнение $\psi = 0$ уже решено (см. уравнение 17,17), а уравнение $\frac{d\psi}{d\eta} = 0$ дает

$$\eta = \frac{4}{7}\frac{\beta^2(1-\beta^2) - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^4}. \qquad (17{,}18)$$

Приравняем правые части (17,17) и (17,18). Получим квадратное уравнение относительно α^2:

$$[\beta^2(1-\beta^2)-\alpha^2]^2-7\alpha^2=0. \tag{17,19}$$

Отсюда

$$\alpha_{кр}^2=\frac{7}{2}+\beta^2(1-\beta^2)-\sqrt{\frac{49}{4}+7\beta^2(1-\beta^2)}. \tag{17,20}$$

Перед корнем в (17,20) взят знак минус, поскольку следует взять наименьшее затухание.

Уравнение (17,19) решено относительно α^2, но его можно решить и относительно β^2 и найти область значений частот свободных колебаний, вне которой невозможно возникновение субгармоник ни при каких значениях m^2. Эти граничные значения β^2 таковы:

$$\beta_{гр}^2=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1-4\alpha(\alpha+\sqrt{7})}\right]. \tag{17,21}$$

При отсутствии затухания $\alpha\to 0$ и $\beta_{гр}^2=1$. При наличии затухания $\beta^2<1$. Так как $\beta^2<1$, то частота свободных колебаний линеаризированной цепи рис. 250 должна быть меньше частоты субгармоники.

§ 17,5. Исследование устойчивости субгармонических колебаний третьего порядка и влияние начальных условий на возникновение колебаний

Рассмотрим устойчивость субгармонических колебаний и влияние начальных условий на возникновение колебаний применительно к схеме рис. 251 в соответствии с [Л. 21]. В схеме рис. 251 индуктивность принята идеальной, без потерь. Запишем уравнения Кирхгофа:

$$\left.\begin{aligned} w_1\frac{d\Phi}{dt}+Ri_1&=U_m\sin\omega t,\\ Ri_1&=\frac{1}{C}\int i_2dt,\\ i&=i_1+i_2. \end{aligned}\right\} \tag{17,22}$$

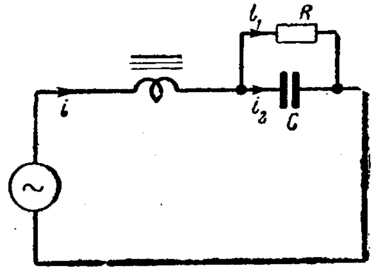


Рис. 251.

Как и в предыдущем параграфе, выразим кривую намагничивания в относительных единицах. Будем пользоваться обозначениями, введенными в [Л. 21]. Базисный ток обозначим $I_б$, базисный поток $\Phi_б$.

Выберем базисные величины так, чтобы выполнялось соотношение

$$\omega^2 C_1 w_1 \Phi_б = I_б. \qquad (17,23)$$

Ток в относительных единицах обозначим u, а поток в относительных единицах v. Мгновенное значение тока $i = uI_б$, мгновенное значение потока $\Phi = v\Phi_б$. Кривую намагничивания нелинейной индуктивности выразим полиномом третьей степени

$$u = c_1 v + c_3 v^3. \qquad (17,24)$$

Поскольку при $v = 1$ $u = 1$, то

$$c_1 + c_3 = 1. \qquad (17,25)$$

Из системы уравнений (17,22) с учетом (17,23) — (17,25) получим уравнение относительно v:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + k\,\frac{dv}{d\tau} + c_1 v + c_3 v^3 = B\cos\tau. \qquad (17,26)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \omega t - \operatorname{arc\,tg} k; \\ k = \frac{1}{\omega CR}, \quad B &= \frac{U_m\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}{w_1 \omega \Phi_б} \end{aligned}\right\} \qquad (17,27)$$

Уравнение (17,26) перепишем следующим образом:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + c_1 v = \mu(k, v, c_3) + B\cos\tau, \qquad (17,28)$$

где

$$\mu(k, v, c_3) = -\frac{k\,dv}{d\tau} - c_3 v^3. \qquad (17,29)$$

Уравнение (17,28) является частным случаем более общего уравнения

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \omega_0^2 v = \mu(k, v, c_3) + B\cos\omega\tau. \qquad (17,30)$$

Как показали Мандельштам и Папалекси [Л. 6], при достаточно малом значении слагаемого $\mu(k, v, c_3)$ по сравнению с $B\cos\omega\tau$ решение уравнения (17,30) следует искать в такой форме:

$$v = a\sin\omega_0\tau + b\cos\omega_0\tau + w\cos\omega\tau. \qquad (17,31)$$

Решение (17,31) точно удовлетворяет уравнению (17,30), если $\mu(k, v, c_3) = 0$, и оно удовлетворяет уравнению (17,30) приближенно при $\mu(k, v, c_3) \neq 0$.

Синусная и косинусная составляющие колебания частоты ω_0 обозначены через a и b; w представляет амплитуду колебания с частотой ω вынуждающей силы:

$$w = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}*.$$

Если

$$\omega_0 = 1, \text{ а } \omega = 3,$$

то

$$w = \frac{B}{1-9} = -\frac{B}{8}.$$

Ясно, что если в электрической цепи рис. 251 при кривой намагничивания, характеризуемой уравнением $u = c_1 v + c_3 v^3$, могут возникнуть и устойчиво существовать субгармонические колебания третьего порядка, то в той же цепи с той же нелинейностью, но при описании кривой намагничивания уравнением $u = c_3' v^3$ (c_3' не равно c_3) также следует ожидать возникновения субгармонических колебаний третьего порядка почти с той же амплитудой. Другими словами, можно распространить решение уравнения (17,31) на уравнение

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + k\frac{dv}{d\tau} + v^3 = B\cos 3\tau, \tag{17,32}$$

где принято $c_3' = 1$.

---

* В справедливости формулы для амплитуды w колебания частоты вынуждающей силы ω можно убедиться следующим образом. Если на цепь, содержащую последовательно соединенные линейную индуктивность L, емкость C и пренебрежимо малое активное сопротивление R, будет действовать напряжение $U_m \sin \omega t$, то из уравнения цепи

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = U_m \sin \omega t$$

имеем

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = B\cos \omega t,$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad B = \frac{\omega U_m}{L}.$$

Амплитуда тока при

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}$$

$$I_m = w = \frac{U_m}{z} = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} = \frac{\omega U_m}{L\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)} = \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Чтобы составить уравнения для определения амплитуд синусной и косинусной составляющих субгармонического колебания третьего порядка, в уравнение (17,32) подставим (17,31). Учтем медленность изменения a и b, т. е. что

$$\frac{da}{d\tau} \ll a; \quad \frac{db}{d\tau} \ll b;$$

$$\frac{d^2a}{d\tau^2} \ll \frac{da}{d\tau}; \quad \frac{d^2b}{d\tau^2} \ll \frac{db}{d\tau}.$$

Получим

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{da}{d\tau} &= -ka + Ab + \frac{3}{4} w(a^2 - b^2) = A(a, b) \\ -2\frac{db}{d\tau} &= Aa + kb + \frac{3}{4} w\, 2ab = B(a, b). \end{aligned}\right\} \quad (17,33)$$

Здесь

$$A = 1 - \frac{3}{4} r^2 - \frac{3}{2} w^2,$$

$$r^2 = a^2 + b^2.$$

Значения a и b в установившемся режиме (их обозначим a_0 и b_0) найдем из уравнений $A(a, b) = 0$ и $B(a, b) = 0$. Процесс становления субгармонического колебания описывается уравнением

$$\frac{db}{da} = \frac{B(a, b)}{A(a, b)}.$$

Для исследования устойчивости субгармонического колебания амплитудам колебания дадим приращения Δa и Δb, т. е. положим

$$a = a_0 + \Delta a \text{ и } b = b_0 + \Delta b.$$

Тогда из уравнений (17,33) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Delta a}{d\tau} &= \Delta a A_1 + \Delta b B_1, \\ \frac{d\Delta b}{d\tau} &= \Delta a A_2 + \Delta b B_2. \end{aligned}\right\} \quad (17,34)$$

Здесь

$$A_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_{a_0, b_0}; \quad B_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)_{a_0, b_0}; \quad A_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)_{a_0, b_0}; \quad B_2 = \left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)_{a_0, b_0}.$$

Индексы a_0 и b_0 свидетельствуют о том, что в частные производные вместо a следует подставить a_0, а вместо b подставить b_0. Получим характеристическое уравнение

$$p^2 - p(A_1 + B_2) + (A_1B_2 - B_1A_2) = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения и по характеру корней будем судить об устойчивости колебаний. Исследуем устойчивость при следующих значениях параметров: $k=0{,}2$ и $B=3{,}2$. Этому случаю соответствует $w=-0{,}4$. В рассматриваемом примере имеется семь точек равновесия. Из них точки *1, 2, 3, 7* устойчивы, а точки *4, 5, 6* неустойчивы. Координаты этих точек и соответствующие им корни характеристического уравнения таковы:

Точка	a_0	b_0	$p_{1,2}$
1	$-1{,}123$	$-0{,}378$	
2	0,889	$-0{,}784$	$-0{,}100 \pm 0{,}599j$
3	0,234	1,162	
4	0,858	0,209	
5	0,610	0,639	0,365; $-0{,}565$
6	0,248	$-0{,}848$	
7	0	0	

Точка *7* находится в начале координат; в режиме, ей отвечающем, субгармонические колебания отсутствуют.

Влияние начальных условий на процесс становления субгармонических колебаний показано на рис. 252. На этом рисунке

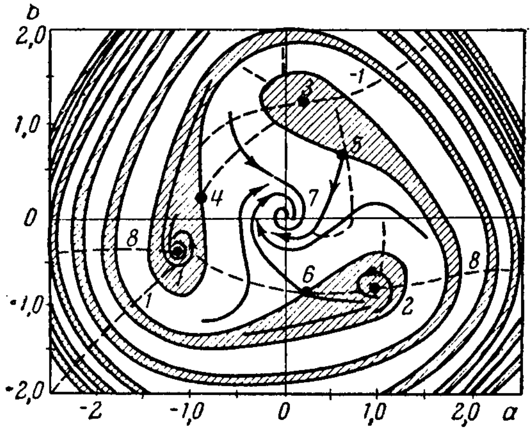


Рис. 252.

выполнены построения, близкие к тем, которые делаются на фазовой плоскости. Построения на рис. 252 сделаны в координатах a и b; a — амплитуда синусной составляющей субгармонического колебания, b — амплитуда косинусной составляющей субгармонического колебания. Построения проводились следующим образом. Путем деления второго из уравнений (17,33) на первое найдем

$$\frac{db}{da}=\frac{B(a,b)}{A(a,b)}.$$

Подставив в последнее выражение $k=0{,}2$, $B=3{,}2$, $w=-0{,}4$, получим

$$\frac{db}{da}=\frac{[0{,}75\,(a^2+b^2)-0{,}76]\,a+0{,}6\,ab-0{,}2b}{-0{,}2\,a+[0{,}76-0{,}75\,(a^2+b^2)]\,b-0{,}3\,(a^2-b^2)}.$$

Затем в соответствии с предыдущим расчетом наносим на рис. 252 все семь точек равновесия. Например, координаты точки *1* таковы: $a_0=-1{,}123$ и $b_0=-0{,}378$. Точки *1, 2, 3* удалены от начала координат на расстояние $r=\sqrt{a_0^2+b_0^2}=1{,}183$, и угловое расстояние между ними равно 120°. Угловое расстояние между неустойчивыми точками равновесия также равно 120°.

Угловое расстояние в 120° между устойчивыми точками равновесия *1, 2,3* (как и между неустойчивыми точками *4, 5, 6*) свидетельствует о том, что при частоте источника питания, в три раза большей частоты субгармонического колебания, три устойчивых (неустойчивых) колебания различаются на целый период.

Из каждой точки равновесия (рис. 252) исходят пунктирные кривые. Каждая пунктирная кривая построена при некотором неизмененном значении $\frac{db}{da}$. Чтобы не загромождать рисунок, на нем показаны лишь несколько пунктирных кривых, исходящих из каждой точки равновесия. Например, из точки *1* исходят пунктирные кривые, для которых значения $\frac{db}{da}$ таковы: $\infty, -1, 0$; из точки *2* — $0, \infty, 1$; из точки *3* — $0, 1, -1$.

Пунктирные кривые можно рассматривать как кривые, являющиеся своеобразным аналогом изоклин на фазовой плоскости.

В свою очередь сплошные кривые (рис. 252) являются аналогом интегральных кривых фазовой плоскости.

Заштрихованные области (рис. 252), ограниченные сплошными линиями, по форме напоминают удлиненные запятые. Таких областей три. В центре каждой области находится по одной устойчивой точке равновесия, а на границе области находится по одной неустойчивой точке равновесия. При значительном удалении от начала координат заштрихованные области (полоски) выходят за пределы рисунка.

Положение изображающей точки в начальный момент времени определяется координатами $a=a_{нач}$ и $b=b_{нач}$. Если значения $a_{нач}$ и $b_{нач}$ таковы, что изображающая точка попадет в одну из заштрихованных областей, то она притянется в устойчивую точку равновесия, находящуюся в этой области. Другими словами, в этом случае в системе возникнут устойчивые субгармонические колебания.

Если же значения $a_{нач}$ и $b_{нач}$ будут таковы, что изображающая точка попадет в незаштрихованную область, то она протянется в начало координат — в точку *7*. Последнее означает, что в установившемся режиме субгармонические колебания будут отсутствовать.

В процессе становления режима изображающая точка движется вокруг начала координат против часовой стрелки. В рассматриваемом численном примере амплитуда субгармонической составляющей магнитного потока в установившемся режиме $r = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} = 1{,}183$, тогда как амплитуда первой гармоники магнитного потока $w = 0{,}4$. Таким образом, субгармоническая составляющая магнитного потока больше амплитуды первой гармоники магнитного потока в $\frac{1{,}183}{0{,}4} = 2{,}96$ раза.

18

Некоторые динамические явления в выпрямительных цепях

Выпрямительные схемы находят широкое применение в технике. В этих схемах могут возникать своеобразные явления при переходных процессах. Условимся называть эти явления динамическими. Динамические явления в данной главе рассмотрены применительно к однофазной мостовой схеме выпрямления, хотя они возникают и в других выпрямительных схемах.

§ 18,1. Процесс динамического перераспределения напряжений в выпрямительных цепях

На рис. 253 изображена однофазная мостовая выпрямительная схема.

В цепь выпрямленного тока включены активное сопротивление $R_н$, индуктивность $L_н$ и емкость C.

В цепь переменного тока последовательно с выпрямительным мостом включено сопротивление Z. Переходные процессы в схеме рис. 253 и в подобных схемах, вызываемые подключением схемы к источнику синусоидальной э. д. с., представляют собой два взаимно связанных и взаимно обусловливающих друг друга процесса: 1) изменение во времени медленно меняющейся составляющей („постоянной составляющей") выпрямленного тока (и напряжения) и 2) перераспределение напряжения источника питания схемы между сопротивлением Z и входом выпрямительного моста.

Процесс непрерывного перераспределения напряжения источника э. д. с. между предвключенным сопротивлением Z и входом выпрямительного моста, зависящий от величины и скорости изменения во времени медленно меняющейся составляющей выпрямленного тока, условимся называть процессом динамического перераспределения напряжения.

На рис. 254 представлена осциллограмма переходного процесса в схеме рис. 253 при $R_н = 4$ *ом*,

$$L_н = 0{,}4 \text{ гн}, \ Z = R = 20 \text{ ом}$$

(при отключенной емкости), частоте источника э. д. с. $f = 50$ *гц*. Верхняя кривая — напряжение на входе $u_{вх}$ выпрямительного моста. Нижняя — выпрямленный ток $i_н$. На рис. 254 видно, что напряжение $u_{вх}$ плавно уменьшается по амплитуде и одновременно с этим возрастает выпрямленный ток.

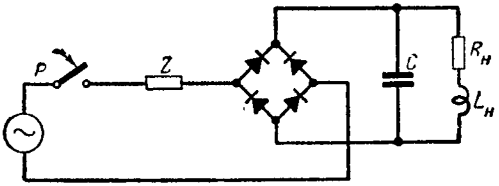


Рис. 253.

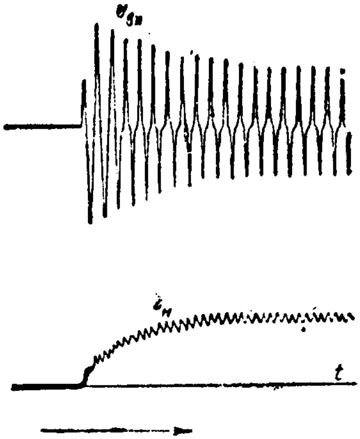


Рис. 254.

Процесс динамического перераспределения напряжения приводит к ряду следствий, имеющих и самостоятельное значение:

а) эффекту форсировки;

б) эффекту затягивания;

в) эффекту резкого отличия динамических характеристик управляемой нелинейной индуктивности (или емкости) от соответствующих статистических характеристик;

г) эффекту отсутствия слежения выпрямленного тока за переменным током.

§ 18,2. Эффект форсировки

Если емкость C в схеме на рис. 253 убрать, а индуктивность $L_н$ взять достаточно большой, так что

$$\frac{L_н}{R_н} \gg T,$$

где $T=\frac{1}{f}$ (f — частота источника питания схемы), то переходный процесс, вызываемый включением рубильника P при нулевых начальных условиях ($i_н(0)=0$) и одинаковом установившемся значении тока $i_н$, закончится быстрее при наличии предвключенного сопротивления Z, чем при отсутствии последнего. Чтобы установившееся значение тока $i_н$ было одинаковым, напряжение источника э. д. с. при наличии сопротивления Z должно быть взято более высоким, чем при отсутствии сопротивления Z. Эффект ускорения (форсировки) переходного процесса будет выражен тем более резко, чем больше будет отношение модуля сопротивления Z к сопротивлению $R_н$.

Если сопротивление Z чисто активное ($Z=R$) и $\frac{L_н}{R_н} \gg T$, то время нарастания медленно меняющейся составляющей тока $i_н$ до значения, равного 0,95 от установившегося, в первом грубом приближении может быть определено по формуле

$$t=\frac{3L_н}{R+R_н},$$

которая может быть выведена путем использования метода медленно меняющихся амплитуд (см. гл. 4 и приложение II [Л. 20]). Это время практически не зависит от начальной фазы источника э. д. с. Эффект форсировки физически объясняется тем, что напряжение на входе моста, а следовательно и напряжение на выходе его, в начальной стадии переходного процесса оказывается много больше, чем в установившемся режиме (рис. 254).

§ 18,3. Эффект затягивания

Если в схеме (рис. 253) принять $L_н=0$ и соотношения между параметрами схемы взять такими, что $CR_н \gg T$, то переходный процесс в схеме, вызываемый включением рубильника P, при нулевых начальных условиях и при одинаковом установившемся значении тока $i_н$ при наличии сопротивления Z будет более длительным, чем при отсутствии сопротивления Z. Другими словами, происходит затягивание переходного процесса.

Чтобы установившийся ток $i_н$ при наличии сопротивления Z был таким же, каким и при отсутствии сопротивления Z, напряжение источника э. д. с. в первом случае должно быть взято более высоким.

Эффект затягивания будет выражен тем сильнее, чем больше будет отношение модуля Z к сопротивлению $R_н$. Физически переходный процесс затягивается вследствие того, что в начальной стадии переходного процесса напряжение на входе выпрямительного моста в данной схеме оказывается меньше, чем в установившемся режиме.

§ 18,4. Эффект резкого отличия динамических характеристик управляемой нелинейной индуктивности от соответствующих статических

В схеме рис. 255 к источнику синусоидальной э. д. с. присоединены последовательно соединенные магнитный усилитель и выпрямительный мост. Если рубильник P_1 разомкнут, а P_2 замкнут, то в цепь выпрямленного тока включены активное сопротивление $R_н$ и индуктивность $L_н$. Если замкнут P_1 и разомкнут P_2, то в цепь выпрямленного тока, кроме $R_н$ и $L_н$ будет включена еще обмотка обратной связи $w_{ос}$ магнитного усилителя. Переходный процесс в схеме вызывается включением цепи управления к источнику э. д. с. $E_у$ (замыкается рубильник P_3).

Условимся под статическими характеристиками управляемой нелинейной индуктивности понимать характеристики, при снятии каждой точки которых среднее за период источника питания схемы значение выпрямленного тока не меняется во времени; под динамическими характеристиками — зависимости, когда выпрямленный ток содержит медленно меняющуюся составляющую.

На примере схемы рис. 255 при замкнутом P_2 и разомкнутом P_1 рассмотрим вопрос о различии между динамическими и статическими характеристиками.

На рис. 256 изображено семейство в. а. х. магнитного усилителя (сравните с кривыми рис. 52,*б*). По оси абсцисс отложено действующее значение переменного тока I, по оси ординат —

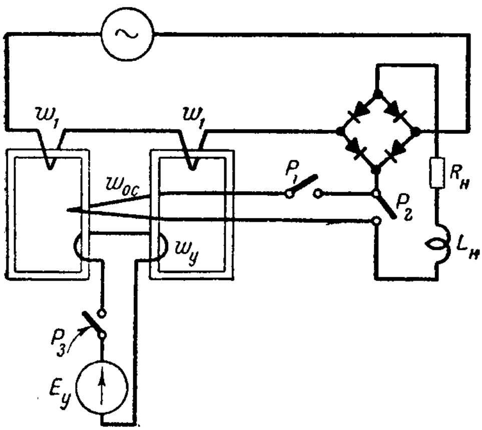


Рис. 255.

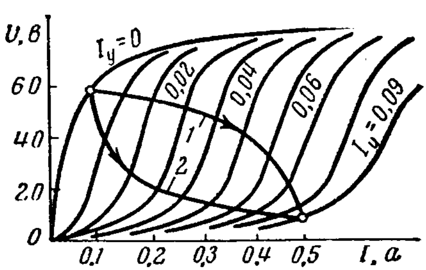


Рис. 256.

напряжение на магнитном усилителе (МУ). Каждой кривой семейства соответствует свое значение тока подмагничивания $I_у$. Зависимость между напряжением на МУ и током I при весьма медленном изменении (теоретически бесконечно медленном увеличении) тока $I_у$ — статическая зависимость — выражается кривой *1* (дуга эллипса) (см., например [Л. 22]).

В динамическом режиме зависимость между теми же величинами изобразится кривой *2*, существенно отличающейся от кривой *1*. Качественно поясним, чем вызвано это различие (подробнее см. [Л. 20]).

В статическом режиме среднее за полупериод частоты источника питания схемы напряжение на выходе выпрямительного моста равно $i_{но}R_н$, где $i_{но}$ — постоянная составляющая выпрямленного тока. В динамическом режиме, когда ток $i_{но}$ медленно меняется во времени, медленно изменяющаяся составляющая напряжения на выходе моста равна $i_{но}R_н + L_н \frac{di_{но}}{dt}$. Другими словами, при одном и том же значении тока управления $I_у$ и при одном и том же значении переменного тока I напряжение на входе выпрямительного моста в динамическом режиме должно быть больше, а напряжение на *МУ* должно быть меньше, чем в соответствующем статическом режиме.

Это обстоятельство приводит к тому, что характеристики $B_0 = f(H_0)$ управляемой нелинейной индуктивности схемы рис. 255 в динамическом и статическом режимах существенно различаются.

§ 18,5. Эффект слежения и эффект отсутствия слежения выпрямленного тока за переменным током

Условимся под эффектом слежения выпрямленного тока за переменным током понимать эффект, наблюдаемый при переходных процессах в выпрямительных цепях, при котором характер изменения медленно меняющейся составляющей выпрямленного тока повторяет или почти повторяет характер изменения огибающей амплитуд (или действующих значений) переменного тока.

Если этого эффекта не будет, будем говорить об отсутствии слежения. При отсутствии слежения характер изменения выпрямленного тока может оказаться отличным от характера изменения огибающей амплитуд переменного тока. Как правило, выпрямленный ток следит за переменным в отмеченном выше смысле и лишь в относительно редких случаях наблюдается отсутствие слежения.

Эффект отсутствия слежения чаще всего возникает тогда, когда в цепи выпрямленного тока есть дополнительный источник э. д. с., величина э. д. с. которого неявно зависит от величины и скорости изменения медленно меняющейся составляющей выпрямленного тока и может достигать достаточно больших значений.

При замыкании рубильника в схеме рис. 253 выпрямленный ток будет следить за переменным в указанном выше смысле. Слежение будет наблюдаться и при переходном процессе в схеме рис. 255, вызванном замыканием P_3 при замкнутом P_2 и разомкнутом P_1.

Слежение в схеме отсутствует, если переходный процесс, вызываемый замыканием рубильника P_3, происходит в условиях, когда рубильник P_1 замкнут, P_2 разомкнут, $\frac{L_н}{R_н} \gg T$ и $\frac{w_{oc}}{w_1} > 1$. В этом случае дополнительная э. д. с., наводимая в обмотке w_{oc} медленно меняющейся составляющей магнитного потока в сердечниках нелинейной индуктивности, вызывает длительное короткое замыкание выпрямительного моста.

На рис. 257 представлена осциллограмма, иллюстрирующая отсутствие слежения в схеме рис. 255. На ней записаны переменный ток $i_\sim$, выпрямленный ток $i_н$ и ток управления i_y. Виден

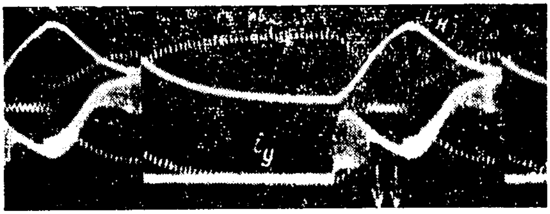


Рис. 257.

интервал времени (см. стрелки) продолжительностью около 6—7 периодов, когда слежение отсутствует. В этом интервале амплитуда переменного тока остается практически неизменной, а выпрямленный ток существенно изменяется (уменьшается).

§ 18,6. О нарушении нормального выпрямления в мостовой выпрямительной схеме

Схема рис. 258 состоит из источника синусоидальной э. д. с. частоты f, нелинейной индуктивности L_1, выпрямительного моста и включенной на выходе его активно-индуктивной нагрузки R_2, L_2, шунтированной емкостью C.

Такого рода схемы, а также схемы, в которых L_1 подмагничивается постоянным или выпрямленным током, широко применяются на практике в качестве элементов схем автоматического управления и регулирования.

Если ключ K будет разомкнут, будет происходить нормальное выпрямление. В режиме нормального выпрямления переменный ток i_1 содержит только нечетные

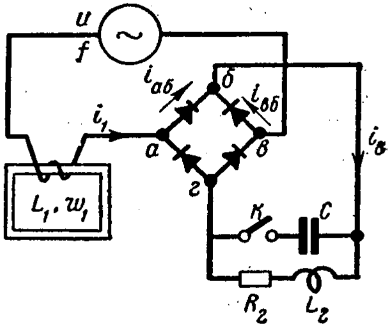


Рис. 258

гармоники, а постоянной составляющей и четных гармоник не содержит. Выпрямленный ток $i_в$ в режиме нормального выпрямления содержит постоянную составляющую и четные гармоники.

Если ключ K замкнуть, то при определенных соотношениях между параметрами схема вступает в аномальный режим работы [Л. 72]. В этом режиме переменный ток i_1 кроме нечетных гармоник содержит постоянную составляющую и четные гармоники, а напряжение на выходе моста и выпрямленный ток $i_в$ кроме четных гармоник и постоянной составляющей содержат нечетные гармоники.

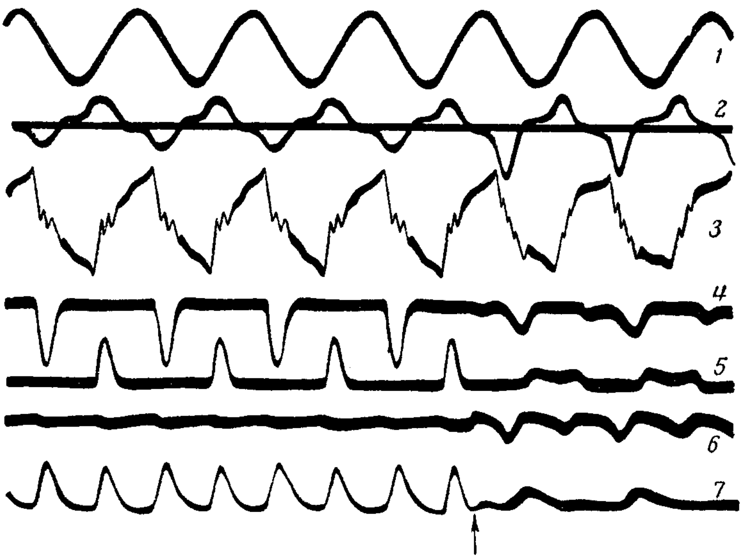


Рис. 259.

На рис. 259 представлена осциллограмма процесса перехода от режима нормального выпрямления к аномальному режиму путем замыкания ключа K (момент замыкания ключа на рис. 259 указан стрелкой) при следующих значениях параметров схемы: $U = 25$ *в*, $C = 29$ *мкф*, $R = 92$ *ом*, $f = 50$ *гц*. Кривая *1* характеризует напряжение источника питания схемы, *2* — ток i_1, *3* — напряжение на нелинейной индуктивности L_1, *4* — напряжение $u_{аб}$ на одном плече выпрямительного моста, *5* — напряжение $u_{бв}$ на другом плече выпрямительного моста, *6* — ток $i_в$ на выходе моста, *7* — напряжение на выходе моста.

Из осциллограммы (рис. 259) видно, что переход от одного установившегося режима к другому произошел довольно быстро — не более чем за один период $T = \frac{1}{f}$. Однако при прочих равных условиях и при иной фазе источника питания, соответствующей моменту замыкания ключа K, переходный процесс может быть довольно длительным, например продолжаться около 18 T.

Обратим внимание на то, что после коммутации отрицательная полуволна тока i_1 имеет пикообразную форму, а также на то, что площадь отрицательной полуволны тока i_1 больше площади положительной полуволны тока i_1. В соответствии с этим гистерезисная петля нелинейной индуктивности L_1 — зависимость магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H, — снятая с экрана электронно-лучевого осциллографа, оказывается несимметричной относительно начала координат (рис. 260). При ином моменте замыкания ключа K и прочих равных условиях пикообразную форму может иметь положительная полуволна тока i_1.

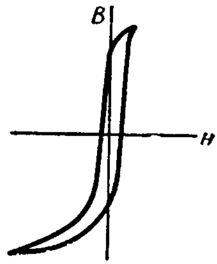


Рис. 260

Асимметрию в токе можно устранить, если от некоторого постороннего источника постоянной э. д. с. через дополнительную обмотку подмагнитить нелинейную индуктивность L_1 так, чтобы создаваемая этой обмоткой м. д. с. компенсировала постоянную составляющую м. д. с., создаваемую обмоткой w_1, по которой протекает ток i_1.

Диоды могут быть германиевые, селеновые и любые иные. Индуктивность L_2 представляла собой дроссель с замкнутым стальным сердечником.

Рассматриваемое явление сохраняется, если изменять число витков обмотки w_1 индуктивности L_1 в довольно широких пределах, например в 10 раз. Однако одновременно с изменением числа витков w_1 следует менять и напряжение источника питания схемы. Эффект проявляется наиболее резко, если напряжение источника питания взять немного меньше напряжения, соответствующего середине „колена", в. а. х. нелинейной индуктивности L_1. Число витков индуктивности L_2 также можно менять в широких пределах. При оптимальном значении C рассматриваемый эффект выражен наиболее сильно. Последнее свидетельствует о резонансной природе эффекта.

Аномальный режим работы является устойчивым режимом и может продолжаться сколь угодно долго. Кроме упомянутого выше способа его возбуждения путем замыкания ключа K режим может быть получен (при замкнутом ключе K) путем подключения схемы к источнику э. д. с. Если емкость выбрана оптимальной или близкой к ней, то аномальный режим возбуждается сразу после включения схемы. Если же емкость взята существенно отличающейся от оптимальной, то в зависимости от фазы источника э. д. с. в момент включения аномальный режим может либо вовсе не возникнуть, либо возникнет не сразу, а через некоторое время после включения, например через несколько десятых секунды или даже через несколько секунд.

Рассмотрим качественно механизм установления аномального режима и причины, вызывающие взаимную обусловленность процессов в элементах схемы.

В первый момент после замыкания ключа K в схеме рис. 258 конденсатор создает как бы короткое замыкание, через него проходит импульс зарядного тока и на нем в течение первого полупериода появляется некоторая постоянная составляющая напряжения. В следующий полупериод процесс зарядки конденсатора начинается уже при наличии некоторой постоянной составляющей напряжения на конденсаторе.

В силу различия формы волны тока в первый и второй полупериоды после включения напряжение на плече *аб* выпрямительного моста в первый полупериод не будет равно напряжению на плече *вб* выпрямительного моста во второй полупериод после включения (замыкания) ключа.

Но если напряжения на смежных плечах выпрямительного моста (*аб* и *вб* и соответственно *га* и *гв*) не будут повторять друг друга со сдвигом в полпериода основной частоты, то со стороны зажимов выпрямленного тока мост будет являться генератором нечетных гармоник (наряду с четными), а со стороны зажимов переменного тока — генератором постоянной составляющей напряжения и четных гармоник. В этом можно убедиться, подставив два различных выражения для напряжений $u_{аб}$ и $u_{вб}$ в виде рядов Фурье в формулу

$$i = A\left(e^{\beta u} - 1\right),$$

характеризующую в. а. х. полупроводникового диода (сравните с формулой 4,1). Тогда ток в плече *аб*

$$i_{аб} = A\left(e^{\beta u_{аб}} - 1\right),$$

ток в плече *вб*

$$i_{вб} = A\left(e^{\beta u_{вб}} - 1\right).$$

Если теперь учесть, что

$$u_{аб}(\omega t) \neq u_{вб}(\omega t - \pi),$$

то, воспользовавшись формулами § 5,7, нетрудно убедиться в том, что амплитуды гармоник тока $i_{аб}$ будут отличны от амплитуд соответствующих гармоник тока $i_{вб}$.

Поэтому переменный ток $i_1 = i_{аб} - i_{вб}$ будет содержать постоянную составляющую и четные гармоники, а в состав выпрямленного тока $i_н = i_{аб} + i_{вб}$ будут входить нечетные гармоники.

Если бы режим неравенства напряжений $u_{аб}$ и $u_{вб}$ в смежные полупериоды продолжался и дальше, то выпрямительный мост продолжал бы являться генератором названных выше гармоник.

Поддержание неравенства напряжений на смежных плечах выпрямительного моста в установившемся режиме обусловливается двумя взаимосвязанными причинами:

1) появлением дополнительной (свободной) составляющей напряжения на выходе моста, имеющей частоту f и возникающей при периодической коммутации выпрямленного тока с одной пары вентилей на другую;

2) асимметрией относительно начала координат траектории движения изображающей точки на характеристике $B = f(H)$ нелинейной индуктивности L_1 при наличии постоянной составляющей и четных гармоник в токе i_1.

Вопрос о форме траектории изображающей точки на характеристике $B = f(H)$ рассматривался выше (рис. 260). Вопрос о появлении дополнительных колебаний напряжения на выходе моста при коммутационных процессах обсудим подробнее.

В установившемся режиме работы (при включенной емкости) ток проходит или через выпрямители в плечах *аб* и *гв* или через выпрямители в плечах *вб* и *га*, или через все четыре выпрямителя.

При периодической коммутации цепи выпрямленного тока в цепи также периодически возникают переходные процессы.

а) б) в)

Рис. 261

Частота дополнительных или свободных колебаний при этих процессах зависит от величины емкости C. На рис. 261, *а*, *б*, *в* изображены полученные с экрана электронно-лучевого осциллографа кривые напряжения на выходе моста при одном и том же значении напряжения на входе схемы и неизменных остальных параметрах, но различных значениях емкости C. Для кривой *а* — $C=1$ *мкф*, для *б* — $C=4$ *мкф*, для кривой *в* — $C=29$ *мкф*. На рис. 261, *а* за один полупериод $\frac{T}{2}$ совершается четыре затухающих колебания, на рис. 261, *б* — два, на рис. 261, *в* — одно колебание за один период, и процесс носит незатухающий характер (рис. 259).

Рассматриваемый режим будет устойчив, если частота дополнительных колебаний на выходе моста будет равна (или почти равна) частоте f источника питания схемы. При этом амплитуда и фаза дополнительной составляющей напряжения на выходе моста будет соответствовать амплитуде и фазе первой гармоники напряжения, генерируемой на выходе выпрямительного моста вследствие несимметрии напряжений на его плечах.

19

Резонансные и триггерные явления на высших гармониках, перемежающиеся резонансы и некоторые другие явления

§ 19,1. Общая характеристика резонансных явлений на высших гармониках

В главе первой говорилось о том, что в нелинейных цепях могут возникать резонансные явления на высших и дробных гармониках. Перед тем как дать определение этим явлениям, напомним определение резонанса на высшей гармонике в линейной цепи.

Положим, что первая гармоника несинусоидальной периодической э. д. с. на входе линейной цепи имеет частоту f.

Под резонансом на частоте νf ($\nu = 2, 3, 4...$) понимается такой режим работы, при котором ток частоты νf на входе цепи по фазе совпадает с ν гармоникой э. д. с. на входе цепи.

Таким образом, в основу определения резонанса в линейной цепи положен фазовый признак. Условимся такой резонанс называть фазовым.

Фазовый признак может быть положен в основу определения резонанса на высшей гармонике в нелинейной цепи только в том случае, если воздействующая на схему э. д. с. несинусоидальна. Если же воздействующая на схему э. д. с. синусоидальна и имеет частоту f, то приведенное выше определение резонанса на гармонике частоты νf не может быть распространено на нелинейные цепи.

В литературе (см., например [Л. 21, 27, 29]) можно встретить термины: субгармонический резонанс и резонанс на дробной гармонике (на гармонике $\frac{m}{n} f$, где m и n — целые числа, не равные единице).

В перечисленных выше случаях возникают колебания с такими частотами, которые в обычных условиях работы схемы должны отсутствовать, поскольку нелинейные сопротивления в схеме имеют симметричные характеристики, а вынуждающая сила не содержит постоянной составляющей.

Таким образом, под резонансом на тех гармониках, которые в обычных условиях работы схемы не должны возникнуть, условимся понимать сам факт возникновения колебаний на данной гармонике.

Естественно, что для тех гармоник, которые в обычных условиях работы схемы с НС, имеющими симметричные характеристики и при отсутствии постоянной вынуждающей силы, всегда присутствуют в частотном спектре тока (напряжения), например, для 3-,5-,7-й гармоник, названный выше признак наступления резонанса использован быть не может.

Условимся о смысле понятия резонанса в нелинейных цепях на тех гармониках, которые всегда присутствуют в спектре тока или напряжения. В основу определения резонанса для таких гармоник положим принцип относительного максимума.

Условимся под резонансом на 3-,5-,7-й гармониках в схеме с одной или несколькими индуктивностями и емкостями, на входе которой действует синусоидальная э. д. с., понимать такой режим работы нелинейной цепи, при котором амплитуда соответственно 3-,5-,7-й гармоники тока или соответственно напряжения на каком-либо участке цепи, отнесенная к амплитуде первой гармоники тока (напряжения) на этом участке, принимает максимальное значение при изменении величины напряжения на входе схемы и поддержании неизменными всех параметров ее или при изменении какого-либо одного параметра схемы и поддержании неизменными остальных параметров схемы и величины входного напряжения.

Следует сказать, что определение резонанса по относительному максимуму может быть распространено на четные и дробные гармоники.

Как и в линейных цепях, в нелинейных цепях могут возникать резонансы на высшей гармонике по току и по напряжению. Более того, в одной и той же разветвленной нелинейной цепи может быть несколько резонансных режимов по току и по напряжению.

При рассмотрении двух определений для резонансов на высших гармониках, субгармониках и дробных гармониках предполагалось, что на нелинейную цепь воздействует вынуждающая сила, изменяющаяся во времени по синусоидальному закону.

Если же вынуждающая сила является периодической, но несинусоидальной, то в нелинейных цепях, на которые воздействует такая вынуждающая сила, могут возникать фазовые резонансы одновременно на нескольких гармониках, например на 1-й и 3-й гармониках, на 1-й и 5-й и т. д. Для этого должны быть выдержаны определенные соотношения между параметрами схемы. Соотношения получаются путем составления и совместного решения уравнения по методу гармонического баланса, куда входят амплитуды и фазы тех гармоник э. д. с., для которых предполагается получить одновременный фазовый резонанс.

При исследовании резонансных явлений на высших и дробных гармониках в нелинейных цепях следует иметь в виду, что фазовые соотношения между током высшей (низшей, дробной) гармоники и напряжением той же гармоники на нелинейном реактивном сопротивлении существенно отличны от фазовых соотношений на линейных реактивных сопротивлениях.

В линейных цепях падение напряжения на индуктивности от гармоники тока частоты νf опережает последнюю по фазе на 90°, а падение напряжения на емкости от гармоники тока частоты νf отстает от нее по фазе на 90°.

На нелинейные цепи эти положения не распространяются, поскольку нелинейные индуктивности и емкости являются не только сопротивлениями, но и источниками энергии частоты νf.

Когда нелинейная индуктивность является источником энергии на частоте νf, падение напряжения на ней частоты νf опережает ток на угол, больший 90°.

Аналогично падение напряжения на нелинейной емкости, когда последняя служит в качестве источника энергии на частоте νf, по фазе отстает от протекающего через нее тока на угол, больший 90°.

Поясним сказанное рис. 262, *а*. К источнику синусоидальной э. д. с. частоты f присоединены нелинейная индуктивность, линейное сопротивление R и линейная емкость.

Векторная диаграмма для этой цепи на частоте νf изображена на рис. 262,*б*.

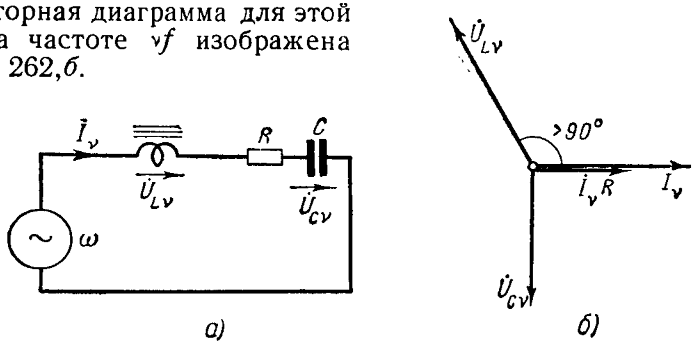


Рис. 262.

На диаграмме падение напряжения на активном сопротивлении совпадает по фазе с током $\dot I_\nu$ ν-гармоники, а падение напряжения на линейной емкости отстает от тока $\dot I_\nu$ на 90°.

Так как в цепи нет источника э. д. с. частоты νf, то геометрическая сумма падений напряжений на частоте νf по замкнутому контуру должна быть равна нулю.

Вектор падения напряжения на нелинейной индуктивности равен геометрической сумме падений напряжения на активном сопротивлении R и емкости C, взятой с обратным знаком.

На рис. 262, *б* видно, что падение напряжения на нелинейной индуктивности (рис. 262, *а*) от ν-гармоники опережает ток $\dot{I}_\nu$ на угол, больший 90°.

Как известно из предыдущего, нелинейное сопротивление является источником высших гармоник тока и напряжения. Существенно обратить внимание на то, что гармонический состав тока и напряжения, генерируемых нелинейным сопротивлением, зависит от тех условий работы, которые созданы для него остальными элементами цепи. Насколько существенно на режим работы нелинейного сопротивления влияют линейные элементы схемы можно судить по приведенным ниже двум примерам.

Если линейную индуктивность L без потерь и линейную емкость C в схеме рис. 263, *а* выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $3\omega L = \frac{1}{3\omega C}$ (где ω — частота источника питания), то в схеме возникнет резонанс токов по третьей гармонике

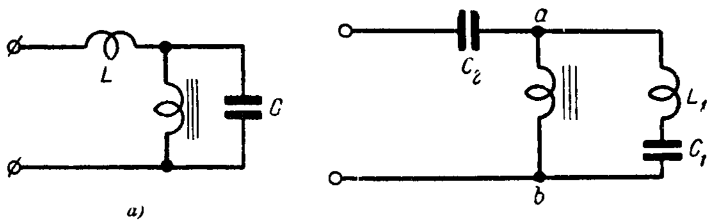


Рис. 263.

При этом нелинейная индуктивность будет работать в условиях вынужденного намагничивания по третьей гармонике: магнитная индукция в сердечнике нелинейной индуктивности будет содержать третью гармонику, а в токе, протекающем по обмотке нелинейной индуктивности, третьей гармоники не будет.

Совершенно иные условия работы для нелинейной индуктивности возникают в схеме рис. 263, *б*.

Если в этой схеме линейную индуктивность и линейную емкость выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $3\omega L_1 = \frac{1}{3\omega C_1}$, то между точками a и b схемы напряжение по третьей гармонике должно быть равно нулю. Последнее означает, что нелинейная индуктивность, также присоединенная между точками a и b, будет намагничиваться в условиях, когда третья гармоника магнитной индукции в сердечнике нелинейной индуктивности будет равна нулю.

Следовательно, линейные элементы схемы могут создать для нелинейной индуктивности условия вынужденного намагничивания, а для нелинейной емкости — вынужденной поляризации.

При аналитическом рассмотрении резонансных явлений на гармонике частоты νf в нелинейных цепях обычно учитывают все гармоники, начиная с постоянной составляющей до гармоники частоты νf включительно.

Гармониками более высокой кратности, чем νf, обычно пренебрегают, хотя учет их и является желательным.

Рассматривая резонансные явления на третьей гармонике в цепи с нелинейной индуктивностью при отсутствии подмагничивания постоянным током, учитывают обычно первую и третью гармоники. Исследуя резонансные явления на пятой гармонике, учитывают обычно первую, третью и пятую гармоники.

При исследовании резонансных явлений на какой-либо дробной гармонике частоты $\frac{m}{n} f$ (m и n целые числа, отличные от единицы) обычно оказывается необходимым учитывать не только те гармоники, воздействие которых на нелинейное сопротивление привело к появлению этой дробной гармоники, но необходимо учесть и те гармоники (в частности, постоянную составляющую), которые могут появиться вследствие комбинационного воздействия на нелинейное сопротивление спектра учитываемых гармоник.

Например, при исследовании резонансных явлений на частоте $\frac{2}{3} f$ в цепи с нелинейной индуктивностью (f — частота источника питания) необходимо учесть следующие гармоники магнитной индукции (даже при отсутствии подмагничивания постоянным током): постоянную составляющую, гармоники частот f, $\frac{f}{3}$ и $\frac{2}{3} f$.

Совместное воздействие на нелинейное сопротивление гармоник частот f и $\frac{f}{3}$ приводит к появлению гармоник $\frac{2}{3} f$ и $\frac{4}{3} f$, а воздействие гармоник $\frac{f}{3}$ и $\frac{2}{3} f$ приводит к появлению в сердечнике нелинейной индуктивности постоянной составляющей в магнитном потоке даже при отсутствии постоянной составляющей в м. д. с.

§ 19,2. Резонансные явления на третьей гармонике в феррорезонансном стабилизаторе напряжения

Схема стабилизатора без компенсационной обмотки изображена на рис. 263, *а* (сравните с рис. 121). Активные сопротивления будем полагать достаточно малыми и учитывать не будем.

Выберем параметры схемы так, чтобы между линейными элементами схемы L и C выдерживалось соотношение $3\omega L = \frac{1}{3\omega C}$.

Убедимся, что при этом условии и при соответствующем напряжении на входе схемы нормальная работа стабилизатора нарушается: вместо того чтобы стабилизировать напряжение, он будет работать утроителем частоты.

Чтобы определить амплитуду третьей гармоники магнитной индукции B_3 через амплитуду первой гармоники магнитной индукции B_1, в аналитическое выражение $H = \alpha \mathrm{sh} \beta B$ вместо B подставим $B_1 \sin \omega t + B_3 \sin (3\omega t - \psi)$.

После преобразований, которые здесь опущены, получим следующее выражение для третьей гармоники напряженности магнитного поля:

$$\frac{H_3}{2\alpha} = \sin 3\omega t \; \{ -jJ_3 (j\beta B_1) \, [J_0(j\beta B_3) - \cos 2\psi J_2(j\beta B_3)] -$$
$$- \cos \psi j J_1 (j\beta B_3) J_0(j\beta B_1) \} + \cos 3\omega t \; \{ \sin \psi j J_1(j\beta B_3) \times$$
$$\times J_0(j\beta B_1) - \sin 2\psi j J_3(j\beta B_1) J_2(j\beta B_3) \}$$

Как говорилось в § 19,1, при $3\omega L = \frac{1}{3\omega C}$ в схеме рис. 263, *а* произойдет вынужденное намагничивание нелинейной индуктивности, когда третья гармоника тока будет равна нулю.

Если третья гармоника тока нелинейной индуктивности равна нулю, это значит, что третья гармоника напряженности поля равна нулю.

Условие отсутствия третьей гармоники в напряженности поля ($H_3 = 0$) будет выполнено при $\psi = 0$ и при соотношении между βB_1 и βB_3, определяемом равенством

$$\frac{jJ_3(j\beta B_1)}{J_0(j\beta B_1)} = \frac{-jJ_1(j\beta B_3)}{J_0(j\beta B_3) - J_2(j\beta B_3)}. \qquad (а)$$

Равенство (а) дает возможность по βB_1 найти βB_3 в резонансном режиме. На рис. 264 изображены кривые *1* и *2*. Они выражают зависимости соответственно

$$\frac{jJ_3(j\beta B_1)}{J_0(j\beta B_1)} = f(\beta B_1)$$

и

$$\frac{-jJ_1(j\beta B_3)}{J_0(j\beta B_3) - J_2(j\beta B_3)} = f(\beta B_3).$$

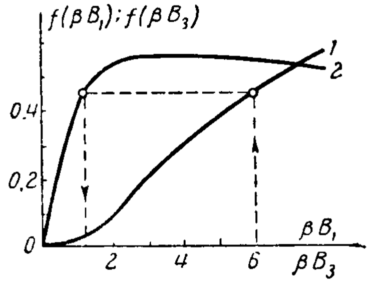


Рис. 264.

Последовательность определения βB_3 по известной βB_1 показана стрелками.

При точной настройке схемы рис. 263, *а* на резонанс по третьей гармонике третья гармоника напряжения на нелинейной индуктивности может оказаться больше первой.

§ 19,3. Триггерный эффект на высших гармониках

Условимся под триггерным эффектом на высшей гармонике понимать эффект скачкообразного изменения высшей гармоники при плавном изменении какого-либо параметра схемы. Триггерный эффект возникает в том случае, когда зависимость амплитуды высшей гармоники (на которой наблюдается триггерный эффект) от изменяющегося параметра (например, от амплитуды напряжения питания схемы) имеет S-образную форму.

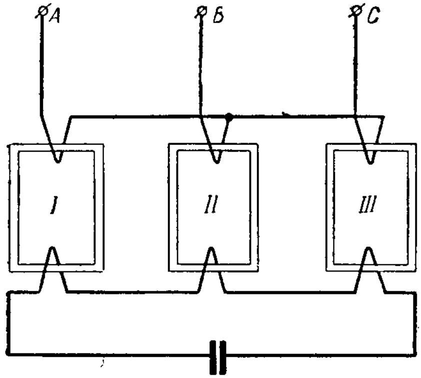


Рис. 265.

При триггерном эффекте обычно резко меняется не только амплитуда, но и фаза высшей гармоники.

В качестве примера схемы, в которой возникает триггерный эффект на третьей гармонике, назовем схему утроителя частоты (рис. 265). Утроитель частоты образован тремя одинаковыми трансформаторами *I*, *II*, *III*. Первичные обмотки их соединены в звезду и подключены к симметричной трехфазной системе э. д. с. Нагрузка включается к соединенным в открытый треугольник вторичным обмоткам.

Триггерный эффект на третьей гармонике в этой схеме наблюдается в определенной области значений параметров схемы и при емкостной нагрузке. Он заключается в том, что при плавном подъеме напряжения питания схемы напряжение утроенной частоты на выходе схемы возрастает скачком (в 1,5—2 раза), а при последующем плавном снижении напряжения питания напряжение утроенной частоты скачком уменьшается (в 2—4 раза).

Если триггерный эффект в схеме с управляемой нелинейной индуктивностью или в схеме с управляемой нелинейной емкостью наблюдается на четной гармонике, то он часто приводит к значительному изменению постоянной составляющей магнитной индукции (или соответственно постоянной составляющей заряда). Это изменение может быть настолько велико, что на зависимости $B_0 = f(H_0)$ или $Q_0 = f(U_{c0})$ возникнет падающий участок. В этом случае триггерный эффект на высших гармониках приведет к автомодуляции в схеме.

В сложных дифференциальных схемах часто бывает некоторая несимметрия в отдельных частях схемы. Обычно она является следствием тех или иных недостатков технологии. В таких схемах триггерный эффект может возникать не только на той гармонике, которая является превалирующей при нормальной работе схемы, но и на какой-либо иной, выявляющейся из-за несимметрии.

Так, например, в делителе частоты вдвое (рис. 133) можно наблюдать триггерный эффект на второй гармонике. Он наблюдается при значениях напряжения источника питания переменного тока немного меньших, чем те, при которых возникает явление деления частоты вдвое, и часто приводит к автомодуляции.

§ 19,4. Теория триггерного эффекта в утроителе частоты

Рассмотрим природу триггерных явлений в утроителе частоты (рис. 265).

Для анализа в общем виде выразим зависимость магнитной индукции B в сердечнике магнитопровода от напряженности поля H гиперболическим синусом

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B. \tag{19,1}$$

Мгновенное значение магнитной индукции в первом сердечнике примем

$$B = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin (3\omega t - \psi). \tag{19,2}$$

Тогда во втором сердечнике мгновенное значение индукции будет равно

$$B_1 \sin (\omega t - 120°) + B_3 \sin (3\omega t - \psi)$$

и в третьем

$$B_1 \sin (\omega t + 120°) + B_3 \sin (3\omega t - \psi).$$

Подставим (19,2) в (19,1), воспользуемся разложением гиперболических функций от периодического аргумента в ряд Фурье, коэффициентами которого являются функции Бесселя от мнимого аргумента. Пренебрежем слагаемыми, содержащими функции Бесселя выше третьего порядка, и получим формулы для определения первой и третьей гармоник напряженности магнитного поля:

$$\frac{H_1}{2\alpha} = J_0 (j\beta B_3) [-jJ_1 (j\beta B_1)] \sin \omega t + \\ + [-jJ_1 (j\beta B_3)] J_2 (j\beta B_1) \sin (\omega t - \psi), \tag{19,3}$$

$$\frac{H_3}{2\alpha} = [-jJ_1 (j\beta B_3)] J_0 (j\beta B_1) \sin (3\omega t - \psi) - \\ - [jJ_3 (j\beta B_1)] J_0 (j\beta B_3) \sin 3\omega t. \tag{19,4}$$

Пусть l — длина средней магнитной линии, а S — площадь поперечного сечения магнитопровода одного трансформатора.

Введем следующие обозначения:

$$m = \frac{2\alpha l}{w_3}; \tag{19,5}$$

$$m_1 = \frac{2al}{w_1};\qquad(19,6)$$

$$a = [-jJ_1(j\beta B_3)]\,J_0(\beta jB_1);\qquad(19,7)$$

$$b = jJ_3(j\beta B_1)\,J_0(j\beta B_3);\qquad(19,8)$$

$$a_1 = J_0(j\beta B_3)[-jJ_1(j\beta B_1)];\qquad(19,9)$$

$$b_1 = [-jJ_1(j\beta B_3)]\,J_2(j\beta B_1).\qquad(19,10)$$

Тогда первая гармоника тока i_1 в обмотке w_1 первого трансформатора (назовем ее i_{11})

$$i_{11} = m_1(a_1 + b_1\cos\psi)\sin\omega t - m_1 b_1\sin\psi\cos\omega t.\qquad(19,11)$$

Так как нулевой провод отсутствует, то третья гармоника тока может протекать только по контуру, образованному обмотками w_3, емкостью C_3 и активным сопротивлением R_3, и будет равна

$$i_3 = m(a - b\cos\psi)\sin(3\omega t - \psi) - mb\sin\psi\cos(3\omega t - \psi).\qquad(19,12)$$

Сумма мгновенных значений потоков основной частоты, пронизывающих контур обмоток w_3, равна нулю, и потому уравнение для контура утроенной частоты будет следующее:

$$\frac{d}{dt}\frac{3Sw_3\beta B_3\sin(3\omega t - \psi)}{\beta} + R_3 i_3 + \frac{1}{C}\int i_3 dt = 0.\qquad(19,13)$$

Если в (19,13) подставить (19,12), то уравнение (19,13) разбивается на уравнение (19,14) для синусной составляющей и на уравнение (19,15) для косинусной составляющей:

$$mR_3(a - b\cos\psi) - \frac{mb}{3\omega C}\sin\psi = 0,\qquad(19,14)$$

$$\frac{9\omega Sw_3}{\beta}\beta B_3 - mR_3 b\sin\psi - \frac{m}{3\omega C}(a - b\cos\psi) = 0.\qquad(19,15)$$

Возведем (19,14) и (19,15) в квадрат и сложим. Получим уравнение (19,16), связывающее амплитуду первой гармоники магнитной индукции, умноженную на коэффициент β, т. е. βB_1, амплитуду третьей гармоники индукции, умноженную на β, т. е. βB_3 и безразмерные параметры n и c:

$$(1 + n^2)\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c\beta B_3}{a} - n\right)^2,\qquad(19,16)$$

где

$$n = \frac{1}{3\omega CR_3},\qquad(19,17)$$

$$c = \frac{4{,}5\omega w_3^2 S}{al\beta R_3}.\qquad(19,18)$$

Из уравнений (19,17) и (19,18) следует, что тангенс угла ψ в уравнении (19,2) определится так:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{c\beta B_3}{(1 + n^2)\,a - nc\beta B_3}.\qquad(19,19)$$

Из формулы (19,12) найдем амплитуду тока утроенной частоты

$$\frac{I_{3m}}{m} = \sqrt{(a - b\cos\psi)^2 + (b\sin\psi)^2}. \tag{19,20}$$

Угол, который составляет I_{3m} с вещественной осью на векторной диаграмме для третьей гармоники (назовем его углом γ), найдем по формуле (19,21)

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{b\sin\psi}{a - b\cos\psi}. \tag{19,21}$$

Из формулы (19,11) определим амплитуду тока I_{1m} первой гармоники, протекающего по обмотке w_1:

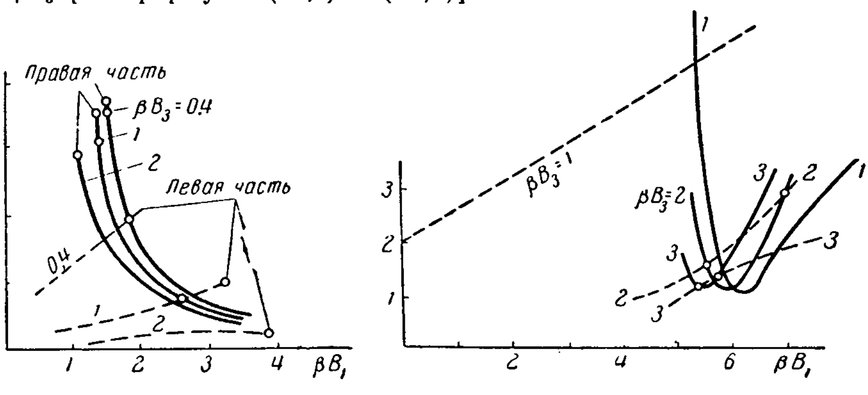
$$\frac{I_{1m}}{m_1} = \sqrt{(a_1 + b_1\cos\psi)^2 + (b_1\sin\psi)^2} \tag{19,22}$$

На векторной диаграмме для первой гармоники вектор $\dot{I}_{1m}$ повернут к вещественной оси на некоторый угол α, определяемый следующим образом:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-b_1\sin\psi}{a_1 + b_1\cos\psi}. \tag{19,23}$$

Проанализируем уравнение (19,16). С этой целью зададимся двумя характерными сочетаниями значений коэффициентов n и c и построим семейства кривых, выражающих зависимости левой и правой частей уравнения (19,16) в функции от βB_1, приняв βB_3 в качестве параметра.

Напомним, что a и b являются нелинейными функциями βB_1 и βB_3 [см. формулы (19,7) и (19,8)].



а) б)

Рис. 266.

На рис. 266, *а* пунктирные кривые представляют собой зависимости левой части уравнения (19,16) от βB_1 при чисто активной нагрузке ($n = 0$, $c = 100$) и значениях параметра $\beta B_3 = 0{,}4$; 1; 2; сплошные кривые — зависимости правой части уравнения (19,16) от βB_1 при тех же значениях n и c и тех же значениях параметра βB_3.

На рис. 266,*а* видно, что с увеличением βB_1 величина правой части монотонно уменьшается, а левой части — увеличивается. Абсциссы точек пересечения пунктирных и сплошных кривых при одинаковых значениях параметра βB_3 определяют значения βB_1, удовлетворяющие уравнению (19,16). При $n = 0$ для каждого фиксированного значения βB_3 имеется только по одной точке пересечения соответствующих друг другу пунктирной и сплошной кривых. При относительно больших значениях βB_3 (например, при $\beta B_3 = 2$) соответствующие сплошная и пунктирная кривые не пересекаются. Это свидетельствует о том, что при выбранных значениях коэффициентов n и c такое значение βB_3 не может быть достигнуто изменением βB_1.

Кривые, выражающие собой правую часть уравнения (19,16), при $n \neq 0$ (при емкостной нагрузке) имеют V-образную форму.

На рис. 266,*б* изображены кривые, аналогичные кривым рис. 266,*а*, но при $n = 2$ и $c = 100$. Минимальное значение правой части равно единице при $\frac{c\beta B_3}{a} = n$. При увеличении βB_1 правая часть стремится к величине $1 + n^2$.

Из рис. 266,*б* видно, что соответствующие пунктирные и сплошные кривые при малых βB_3 пересекаются только в одной точке, например при $\beta B_3 = 1$ $\beta B_1 = 5{,}65$.

При относительно больших значениях βB_3 соответствующие пунктирная и сплошная кривые пересекаются в двух точках. Так, при $\beta B_3 = 2$ кривые пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны $\beta B_1 = 5{,}55$ и 7,1.

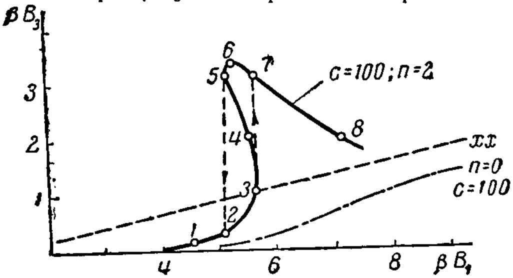


Рис. 267.

Наконец, при некотором βB_3 (при $\beta B_3 = 3{,}4$) две точки пересечения сливаются в одну, и при дальнейшем увеличении βB_3 пунктирная и сплошная кривые не пересекаются.

На рис. 267 три кривые изображают зависимости $\beta B_3 = f(\beta B_1)$ при различных условиях работы утроителя частоты: пунктирная кривая соответствует холостому ходу утроителя ($n = 0$, $c = 0$); пунктир с точкой — чисто активная нагрузка ($n = 0$, $c = 100$); сплошная кривая, имеющая S-образную форму, соответствует некоторой активно-емкостной нагрузке ($n = 2$, $c = 100$).

Цифрами *1—8* на сплошной кривой обозначены точки, которым отвечают одноименные точки на рис. 268, *а* и *г*.

Так как соответствующие друг другу значения βB_3 и βB_1 известны, то при помощи формул (19,5) — (19,8) и (19,19) строится зависимость угла ψ в функции от βB_1 (рис. 268,*а*).

По формуле (19,20) подсчитываются значения $\frac{I_{3m}}{m}$ и строится кривая (рис. 268, *б*), по формуле (19,21) — значения угла γ (рис. 268, *в*), по формуле (19,22) определяются значения $\frac{I_{1m}}{m_1}$ (рис. 268, *г*).

Первая гармоника магнитной индукции пропорциональна напряжению трехфазного источника питания схемы (рис. 265). Если плавно увеличивать напряжение источника питания схемы, то пропорционально будет изменяться и βB_1 (активное сопротивление первичной обмотки, как правило, весьма мало).

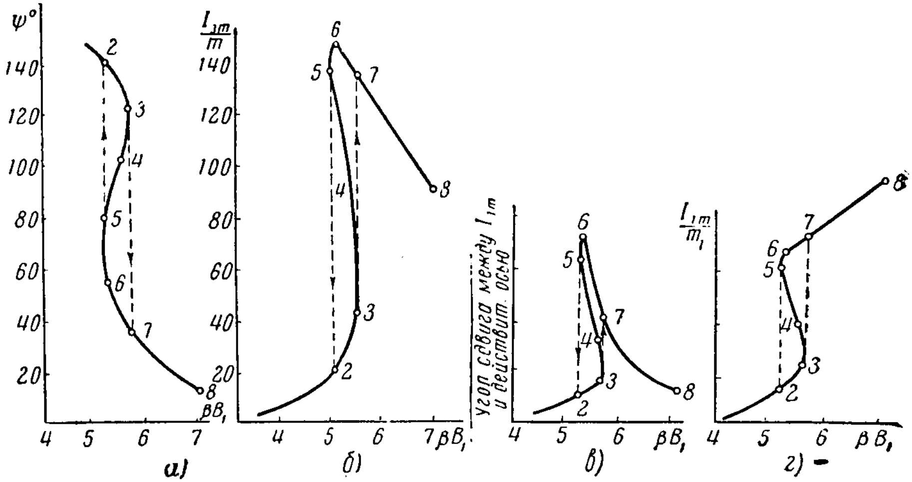


Рис. 268.

При плавном увеличении βB_1 изображающая точка на рис. 267 движется от точки *1* к точке *3*. Далее она скачком перемещается в окрестность точки *7* и при дальнейшем увеличении βB_1 движется по направлению от точки *7* к точке *8*.

При плавном уменьшении βB_1 изображающая точка совершает путь от точки *8*, через точку *7* к точке *6*, а вблизи точки *5* она скачком перемещается в окрестность точки *2* и далее к точке *1*.

§ 19,5. Перемежающийся резонанс

Условимся под перемежающимся резонансом понимать периодически появляющийся и исчезающий резонанс на высшей или дробной гармонике или на какой-либо субгармонике. Наиболее часто перемежающийся резонанс наблюдается в виде побочного явления при автомодуляции. На рис. 269 представлена осциллограмма перемежающегося резонанса в схеме рис. 270. Верхний вибратор записывал переменный ток i_1; нижний — ток колебательного контура i_2, образованного индуктивностью

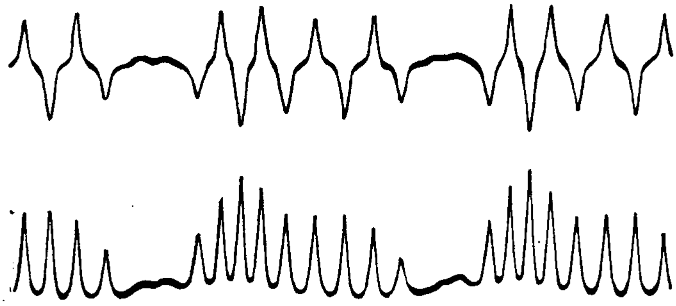


Рис. 269.

обмоток w_2, емкостью C_2 и сопротивлением R_2. Параметры схемы выбраны так, чтобы на зависимости $B_0 = f(H_0)$ был падающий участок и точка равновесия находилась на падающем участке. (B_0 и H_0 — постоянные составляющие.)

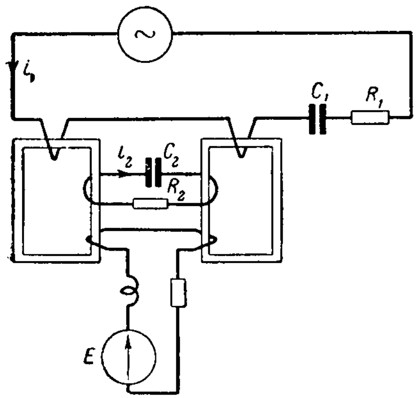


Рис. 270.

При автомодуляции периодически меняется постоянная составляющая магнитной индукции в сердечниках нелинейной индуктивности. В результате этого периодически меняется индуктивность обмоток w_2.

За один период процесса автомодуляции колебательный контур сначала вступает в резонанс на третьей гармонике, затем резонансные условия на третьей гармонике нарушаются и в токе выявляется вторая гармоника.

§ 19,6. Колебания с непериодической огибающей

Все колебания, возникающие в нелинейных цепях, условно можно разделить на три группы:

1) периодические процессы для мгновенных значений;

2) периодические или почти периодические процессы по огибающим, но непериодические для мгновенных значений;

3) непериодические для мгновенных значений и для огибающих.

Пример колебаний первого типа — вынужденные колебания при отсутствии и при наличии резонансных явлений на высших и низших гармониках.

Пример колебаний второго типа — большинство автомодуляционных процессов, перемежающиеся резонансы, резонансы на дробных гармониках и т. п.

Колебания третьего типа чаще всего возникают вблизи границы устойчивости режимов автомодуляции, особенно при больших насыщениях. Колебания такого рода имеют иногда настолько сложный характер, что по отношению к ним вообще невозможно говорить об огибающей колебания (см., например, осциллограмму на рис. 271).

Рис. 271.

§ 19,7. Прерывистая генерация в автоколебательных системах

Для улучшения коэффициента полезного действия лампового генератора с колебательным контуром в анодной цепи (рис. 228, *а*) в сеточную цепь его включают параллельно соединенные емкость C_1 и большое активное сопротивление R_1 (рис. 272). Цепочка R_1C_1 (смещающая цепочка) не должна препятствовать самовозбуждению генератора, когда смещающее напряжение на емкости C_1 мало. В установившемся режиме, когда постоянная составляющая напряжения на конденсаторе становится достаточно большой, цепочка приводит к выгодному в энергетическом отношении режиму работы генератора.

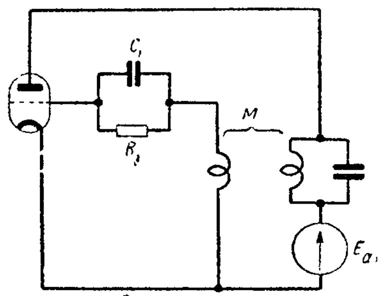


Рис. 272.

В нормальном установившемся режиме работы приращение медленно меняющейся составляющей напряжения на конденсаторе, происходящее в интервалы прохождения сеточного тока, равно убыли медленно меняющейся составляющей напряжения на конденсаторе вследствие его разряда на сопротивление R_1 в интервалы отсутствия сеточного тока.

Если сопротивление R_1 чрезмерно велико, то в схеме возникает прерывистая генерация (рис. 273). Последняя заключается в том, что автоколебания в схеме то возникают, то срываются. Периодические перерывы генерации вызываются тем, что при чрезмерно большом сопротивлении R_1 конденсатор C_1 заряжается до излишне высокого напряжения, при котором обратная связь становится слишком слабой, чтобы поддерживать автоколебания.

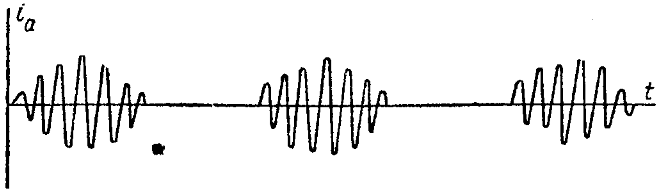


Рис. 273.

К концу периода паузы, когда напряжение на конденсаторе упадет вследствие его разряда на сопротивление R_1, восстанавливаются условия самовозбуждения и вновь возникают автоколебания.

20

О многообразии типов колебаний в нелинейных электрических цепях

В гл. 15, 16, 17, 19 рассматривались различные типы колебаний в нелинейных цепях. Продолжим это рассмотрение на примере схемы рис. 274.

Схема рис. 274 образована двумя одинаковыми трансформаторами. Последовательно и согласно соединенные обмотки их w_1' и w_1'' ($w_1' = w_1'' = w_1$) присоединены к источнику синусоидального напряжения частоты f. Вторичные обмотки w_2' и w_2'' ($w_2' = w_2'' = w_2$) соединены последовательно и встречно и замкнуты на активное сопротивление R_2 и емкость C_2.

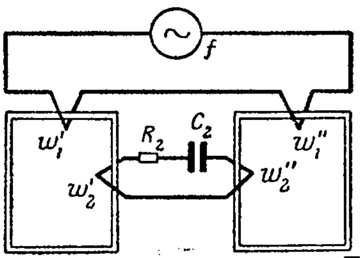


Рис. 274.

Казалось бы, что ввиду симметрии обеих половин схемы и встречного включения вторичных обмоток во вторичной цепи ток будет отсутствовать и каких-либо специфических явлений в этой схеме возникнуть не может. Между тем в этой схеме возможны различные типы колебаний: периодические для мгновенных значений, периодические или почти периодические для огибающей, перемежающиеся резонансы, высокочастотные колебания, колебания непериодические для мгновенных значений и для огибающей.

§ 20,1. Вывод основных соотношений для анализа колебательных процессов в схеме рис. 274 на основной гармонике

Для проведения анализа выразим кривую намагничивания гиперболическим синусом:

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B, \tag{20,1}$$

где α и β — коэффициенты;

H — напряженность магнитного поля;

B — магнитная индукция.

При возникновении во вторичном контуре колебаний частоты f первая гармоника магнитной индукции второго сердечника $\dot{B}_2$ будет сдвинута по фазе на угол φ по отношению к первой гармонике магнитной индукции первого сердечника ($\dot{B}_1$)

Обозначим: i_1 — ток первичной цепи; i_2 — ток вторичной цепи; l — длина средней магнитной линии сердечника, S — площадь поперечного сечения последнего.

На основании закона полного тока

для первого сердечника

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 = \alpha l \,\mathrm{sh}(\beta B_1 \sin \omega t), \tag{20,2}$$

для второго сердечника

$$i_1 w_1 - i_2 w_2 = \alpha l \,\mathrm{sh}\,[\beta B_2 \sin(\omega t + \varphi)]. \tag{20,3}$$

Гиперболический синус от периодического аргумента сам является периодической функцией и может быть представлен рядом Фурье, коэффициенты которого являются функциями Бесселя от чисто мнимого аргумента. Поэтому, если через i_{11} обозначить первую гармонику тока i_1, а через i_{21} — первую гармонику тока i_2, то из уравнений (20,2) и (20,3) получим

$$i_{11} = \frac{\alpha l}{w_1}\,[d_1 \sin \omega t + b_1 \sin(\omega t + \varphi)], \tag{20,4}$$

$$i_{21} = \frac{\alpha l}{w_2}\,[d_1 \sin \omega t - b_1 \sin(\omega t + \varphi)]. \tag{20,5}$$

Здесь

$$d_1 = -jJ_1(j\beta B_1), \tag{20,6}$$

$$b_1 = -jJ_1(j\beta B_2), \tag{20,7}$$

где — $jJ_1(j\beta B)$ — функция Бесселя первого порядка.

Составим уравнение для вторичной цепи по первой гармонике:

$$\frac{w_2 S}{\beta}\,\frac{d}{dt}\,[\beta B_1 \sin \omega t - \beta B_2 \sin(\omega t + \varphi)] +$$

$$+ R_2 i_{21} + \frac{1}{C}\int i_{21}\,dt = 0. \tag{20,8}$$

Подставим в него вместо i_{21} правую часть формулы (20,5) и после отделения в уравнении (20,8) синусной и косинусной составляющих получим

$$-a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi = d_1, \tag{20,9}$$

$$a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi = c_1, \tag{20,10}$$

где

$$a_1 = a\beta B_2 - b\,[-jJ_1(j\beta B_2)], \tag{20,11}$$

$$c_1 = a\beta B_1 - b\,[-jJ_1(j\beta B_1)]. \tag{20,12}$$

$$a = \frac{\omega w_2^2 \cdot S}{al\beta \cdot R_2}, \qquad (20,13)$$

$$b = \frac{1}{\omega C_2 R_2}. \qquad (20,14)$$

Безразмерные параметры a и b зависят от угловой частоты ω, от величины и характера нагрузки вторичной цепи (R_2, C_2) и от l, S, w_2, α, β.

Из формул (20,6) и (20,7) следует, что d_1 является нелинейной функцией βB_1, а b_1 есть нелинейная функция βB_2.

В свою очередь из формул (20,11) и (20,12) вытекает, что c_1 есть функция βB_1, а a_1 — функция βB_2; c_1 и a_1 зависят от значений параметров a и b.

Сопоставим формулы (20,11) и (20,12). Из сопоставления следует, что c_1 зависит от βB_1 так же, как a_1 зависит от βB_2.

Аналогично, путем сопоставления формул (20,6) и (20,7) придем к выводу, что d_1 зависит от βB_1 так же, как b_1 зависит от βB_2.

Если возвести уравнения (20,9) и (20,10) в квадрат и затем сложить их, то получим

$$a_1^2 + b_1^2 = d_1^2 + c_1^2. \qquad (20,15)$$

В уравнении (20,15) левая часть представляет собой функцию βB_1, а правая часть — функцию βB_1. Уравнение (20,15) связывает βB_1 и βB_2.

Из уравнений (20,9) и (20,10) найдем также тангенс угла φ, т. е. тангенс угла сдвига фаз между первыми гармониками магнитных индукций первого и второго магнитопроводов (рис. 275):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b_1 c_1 - a_1 d_1}{a_1 c_1 + b_1 d_1}. \qquad (20,16)$$

Из формулы (20,16) следует, что $\operatorname{tg}\varphi$ является нелинейной функцией βB_1 и βB_2 и зависит от параметров a и b.

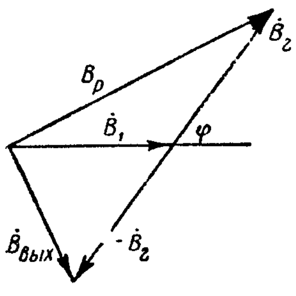


Рис. 275.

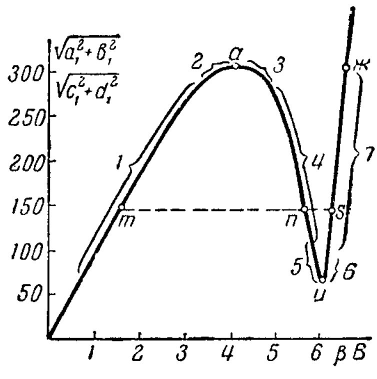


Рис. 276.

Проанализируем уравнение (20,15). Так как зависимость a_1 от βB_2 повторяет зависимость c_1 от βB_1, а зависимость b_1 от βB_2 повторяет зависимость d_1 от βB_1, то левая часть уравнения (20,15) зависит от βB_2 так же, как правая часть уравнения (20,15) зависит от βB_1.

По оси абсцисс на рис. 276 отложено значение βB (βB_1 и βB_2), а по оси ординат $\sqrt{a_1^2+b_1^2}=f(\beta B_2)$ или, в соответствии с уравнением (20,15), равный ему корень $\sqrt{d_1^2+c_1^2}=f(\beta B_1)$ при $a=100$ и $b=10$.

Колебания частоты f во вторичной цепи схемы рис. 274 могут возникнуть только в том случае, если зависимость $a_1^2+b_1^2=f(\beta B_2)$ имеет N-образную форму. Обратим внимание на то, что при возникновении колебаний частоты f во вторичной цепи $\beta B_1 \neq \beta B_2$.

В последнем убедимся следующим образом. Если $\beta B_1=\beta B_2$, то $a_1=c_1$, $b_1=d_1$; из формулы (20,15) найдем, что $\varphi=0$ ($i_{11}\neq 0$), и, следовательно, из формулы (20,5) найдем, что $i_{21}=0$, т. е. колебаний частоты f во вторичной цепи при этом не будет.

Левая часть уравнения (20,15) может быть равна правой части (при $\beta B_1 \neq \beta B_2$) при трех различных типах сочетаний βB_1 и βB_2.

Для выявления сочетаний в области многозначности кривой рис. 276 проведем произвольно горизонталь (например, линию ms). Абсциссы точек пересечения последней с кривой (точки m, n, s) дадут следующие типы сочетаний:

1) βB_1 определяется абсциссой точки m, βB_2 — абсциссой точки n;

2) βB_1 определяется абсциссой точки m, βB_2 — абсциссой точки s;

3) βB_1 определяется абсциссой точки n, βB_2 — абсциссой точки s.

Таким образом, для конкретных значений параметров a и b можно построить кривую $\sqrt{a_1^2+b_1^2}=f(\beta B_2)$ или аналогичную ей кривую $\sqrt{d_1^2+c_1^2}=f(\beta B_1)$ и, нанеся на нее горизонтали подобно прямой ms, найти соответствующие друг другу значения βB_1 и βB_2.

В соответствии с перечисленными выше типами сочетаний на рис. 277 изображена кривая зависимости индукции $\beta B_{вых}$ от индукции βB_p при $a=100$ и $b=10$.

Под $B_{вых}$ понимается геометрическая разность индукций первого (B_1) и второго (B_2) магнитопроводов (рис. 275).

Она пропорциональна напряжению U_2 на выходе обмоток w_2 схемы (рис. 274). Из рис. 275 следует, что

$$\beta B_{вых}=\sqrt{(\beta B_1-\beta B_2\cos\varphi)^2+(\beta B_2\sin\varphi)^2}. \qquad (20,17)$$

Под B_p понимается геометрическая сумма индукций первого (B_1) и второго (B_2) магнитопроводов. B_p пропорциональна напряжению источника питания схемы (если пренебречь малым падением напряжения в активном сопротивлении первичной цепи). Из рис. 275 следует, что

$$\beta B_p = \sqrt{(\beta B_1 + \beta B_2 \cos\varphi)^2 + (\beta B_2 \sin\varphi)^2}. \qquad (20{,}18)$$

При построении кривой (рис. 277) угол φ определялся по формуле (20,16), $\beta B_{\text{вых}}$ — по формуле (20,17), βB_p — по формуле (20,18). Восходящий участок *аб* соответствует сочетанию значений βB_1 и βB_2 участков *2* и *3* рис. 276. Точка *а* рис. 277

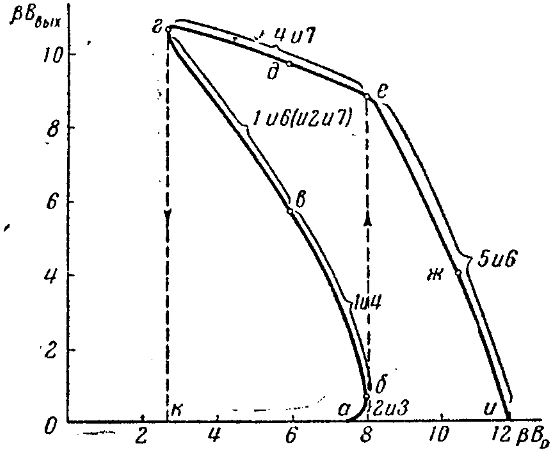


Рис. 277.

отвечает точке *а* рис. 276. Участок *бв* соответствует сочетанию точек участков *1* и *4*; участок *вг* рис. 277 — сочетанию точек участков *1* и *6* (и *2* и *7*). Точка *г* рис. 277 соответствует сочетанию точек *а* и *ж* рис. 276. Участок *ге* рис. 277 соответствует сочетанию точек участков *4* и *7*; участок *еи* рис. 277 — сочетанию точек участков *5* и *6*. Точка *и* рис. 277 отвечает точке *и* рис. 276.

§ 20,2. Характер возникающих колебаний при плавном изменении амплитуды входного напряжения

Рассмотрим характер возникающих во вторичной цепи колебаний при относительно малом активном сопротивлении R_2 и плавном увеличении напряжения источника питания схемы, когда зависимость $\beta B_{\text{вых}} = f(\beta B_p)$ имеет S-образный вид, подобно изображенному на рис. 277. На осциллограммах рис. 278—281 кривые *1* и *2* характеризуют напряжение на обмотках w_1' и w_1''

(первые гармоники этих напряжений пропорциональны соответственно βB_1 и βB_2); кривая 3 — это напряжение на входе схемы (оно пропорционально величине βB_p, если не учитывать малое по величине падение напряжения в активном сопротивлении первичных обмоток); кривая 4 — напряжение на выходе обмоток w_2,

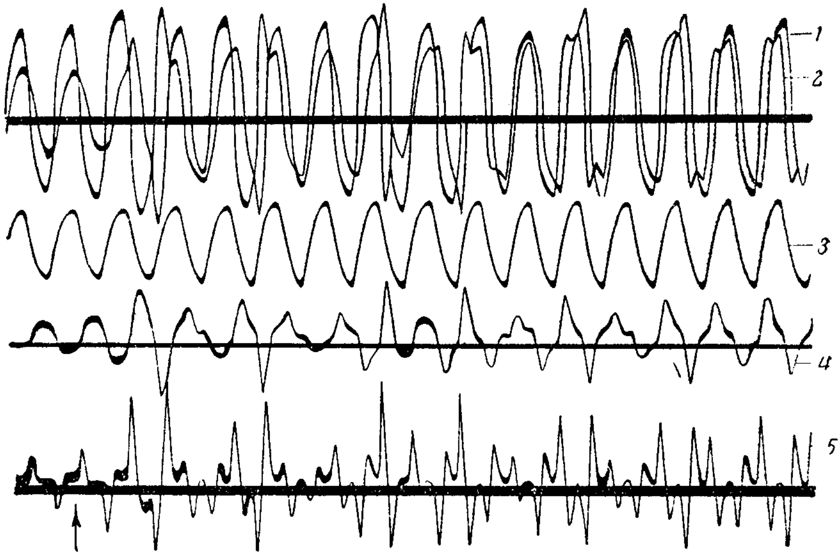


Рис. 278.

оно пропорционально величине $\beta B_{вых}$ (на рис. 279 эта кривая не записана); кривая 5 — ток i_2 колебательного контура.

При плавном увеличении напряжения питания схемы будет плавно возрастать величина βB_p. Вначале при изменении βB_p в интервале от 0 до значения, соответствующего точке a, $\beta B_1 = \beta B_2$, $\varphi = 0$ и $\beta B_{вых} = 0$. При последующем увеличении βB_p βB_1 становится не равным βB_2, угол φ достигает 1—20° (зависит от значения параметров a и b) и во вторичной цепи возникают устойчивые периодические колебания частоты f.

При увеличении βB_p изображающая точка перемещается от точки a к точке $б$ рис. 277. При дальнейшем увеличении βB_p изображающая точка скачком перемещается из $б$ в точку $е$. При этом βB_1 резко увеличивается, а угол φ возрастает до 80—100°.

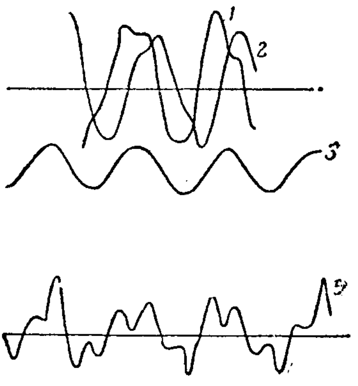


Рис. 279.

В интервале от точки *е* до точки *ж* колебательный процесс на частоте *f* во вторичной цепи оказывается, как правило, неустойчивым, и в схеме возникает автомодуляция.

На рис. 278 изображен переход из точки *б* в окрестность точки *е*, вызванный увеличением на 10% приложенного к схеме напряжения. Если частота автомодуляции близка к частоте какой-либо субгармоники (чаще всего третьей), то в окрестности точки *е* может произойти синхронизация автомодуляционного процесса на частоте этой субгармоники.

На рис. 279 дана осциллограмма колебательного процесса, засинхронизированного третьей субгармоникой ($U = 18{,}7$ *в*; $C_2 = 0{,}15$ *мкф*; $R_2 = 150$ *ом*).

При дальнейшем увеличении βB_p изображающая точка движется от некоторой точки *ж* к точке *и*. В этом интервале автомодуляция прекращается и процесс имеет периодический характер (рис. 280). (Для рис. 280 $U = 25{,}6$ *в*, $C_2 = 0{,}15$ *мкф* и $R_2 = 150$ *ом*.) В этом интервале значение βB_1 приближается к значению βB_2, а угол φ и $\beta B_{\text{вых}}$ уменьшаются. В точке *и* колебания частоты *f* во вторичной цепи прекращаются.

Если теперь плавно уменьшать βB_p, начиная от точки *и*, то изображающая точка движется от точки *и* через промежуточные точки *ж*, *е* к точке *г*. В интервале между точками *ж* и *д* процесс оказывается неустойчивым, и возникает автомодуляция. В интервале между точками *д* и *г* βB_1 и βB_2 растут, угол φ и $\beta B_{\text{вых}}$ увеличиваются. В этом интервале процесс может иметь периодический характер (характер процесса зависит от соотношения между *a* и *b* и от величины R_2). На рис. 281 показан периодический колебательный процесс вблизи точки *г* и при

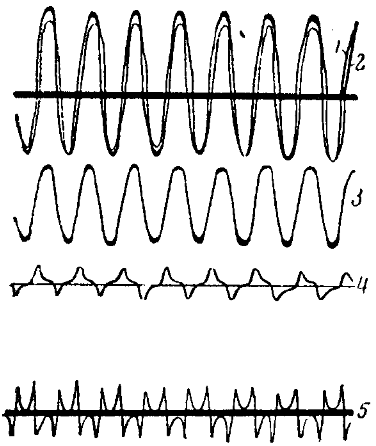


Рис. 280.

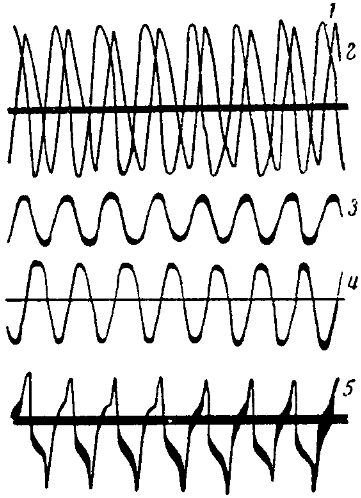


Рис. 281.

$U = 15$ *в*, $C_2 = 0{,}15$ *мкф* и $R_2 = 150$ *ом*. При достижении βB_p значения, соответствующего точке *г*, колебания частоты f во вторичной цепи прекращаются и изображающая точка скачком перемещается в точку k.

Таким образом, срыв колебаний частоты f (точка *г*) и возникновение колебаний частоты f (точка *а*) происходят при различных βB_p, т. е. возникает характерный для схем с S-образными характеристиками процесс затягивания колебаний.

Выше был рассмотрен характер возникающих колебаний при плавном увеличении напряжения питания, когда активное сопротивление относительно мало. При относительно большом активном сопротивлении вторичной цепи колебания частоты f во вторичной цепи не сопровождаются автомодуляцией и субгармоническими колебаниями.

Аналогичное изменение характера колебаний имеет место и при относительно больших C_2.

Устойчивость периодических колебаний может исследоваться при помощи формул, выведенных в § 20,3.

Опыт показывает, что если напряжение источника питания схемы установить таким, что βB_p будет находиться в интервале значений, соответствующих абсциссам точек *а* и *б* (рис. 277), то после подключения схемы к источнику питания во вторичной цепи может возникнуть либо периодический процесс, отвечающий участку *аб*, либо процесс, отвечающий режиму работы на участке *де*. Какой из этих режимов возникнет, будет зависеть от начальных условий в схеме к моменту коммутации и от начальной фазы источника э. д. с.

При дальнейшем плавном увеличении βB_p выше значения, соответствующего точке *и*, во вторичной цепи схемы рис. 274 возникают колебания, в которых основную роль играет уже не первая, а высшие гармоники. Эти процессы в известном смысле сходны с рассмотренными выше процессами на частоте f.

Сходство состоит в том, что при возникновении колебаний на высших гармониках зависимость между $\beta B_{вых}$ и βB_p также имеет S-образную форму, подобную изображенной на рис. 277, и наблюдается затягивание колебаний — этим и объясняется возможность перекрытия области колебаний на частотах f и $3f$.

Сходство состоит также в том, что при увеличении R_2 или C_2 выше некоторых критических значений автомодуляция, субгармонические колебания и перемежающиеся колебания не возникают. Однако ввиду того что колебательные процессы, в которых основную роль играют колебания на частотах $3f$, $2f$, возникают при бóльших насыщениях, в этих процессах относительно большую роль играют высшие гармоники (частоты $5f$, $4f$ и др.).

На рис. 282—285 приведены осциллограммы различных типов колебаний на высших гармониках. Кривая *1* характеризует напряжение на входе схемы, кривая *2* — напряжение на емкости.

На рис. 282 записан периодический колебательный процесс, в котором основную роль играет третья гармоника; на рис. 283 ($U = 30$ *в*; $C_2 = 0{,}15$ *мкф*, $R_2 = 150$ *ом*) — непериодический колебательный процесс, в котором основная роль отводится также третьей гармонике; на рис. 284 ($U = 30{,}6$ *в*, $C_2 = 0{,}15$ *мкф*, $R_2 = 150$ *ом*), — перемежающиеся колебания (происходят почти периодические переходы от режима слабого тока к режиму сильного тока); на рис. 285 ($U = 31$ *в*, $C = 0{,}15$ *мкф*, $R_2 = 150$ *ом*) — периодический процесс, в котором основную роль играет вторая гармоника.

§ 20,3. Исследование устойчивости колебаний на основной гармонике в схеме рис. 274

Выведем формулы для исследования устойчивости периодического процесса во вторичной цепи схемы рис. 274 на первой гармонике.

Положим, что магнитная индукция первого сердечника получила приращение Δb_1 и стала равной $\beta B_1 + \Delta b_1$, а индукция второго сердечника получила приращение Δb_2 и стала равной $\beta B_2 + \Delta b_2$. Составим уравнение для приращений. С этой целью подставим $(\beta B_1 + \Delta b_1)$ вместо βB_1 и $(\beta B_2 + \Delta b_2)$ вместо βB_2 в формулу (20,5) и разложим функции Бесселя в ряд по приращениям Δb_1 и Δb_2. В силу малости приращений ограничимся членами рядов, содержащими первые степени Δb_1 и Δb_2. При наличии приращений выражение для тока i_{21} будет:

$$\frac{i_{21}}{\frac{al}{w_2}} = \{[-jJ_1(j\beta B_1)] + m_1\Delta b_1\}\sin\omega t - \{[-jJ_1(j\beta B_2)] + n_1\Delta b_2\}\sin(\omega t + \varphi). \tag{20,19}$$

Здесь

$$m_1 = \frac{1}{\beta B_1}[-jJ_1(j\beta B_1)] - J_2(j\beta B_1), \tag{20,20}$$

$$n_1 = \frac{1}{\beta B_2}[-jJ_1(j\beta B_2)] - J_2(j\beta B_2). \tag{20,21}$$

Таким образом, ток i_{21} получил приращение Δi_{21}, равное

$$\frac{\Delta i_{21}}{\frac{al}{w_2}} = m_1\Delta b_1\sin\omega t - n_1\Delta b_2\sin(\omega t + \varphi). \tag{20,22}$$

Производная от приращения тока Δi_{21}

$$\frac{w_2}{al}\frac{d\Delta i_{21}}{dt} \approx (m_1\Delta b_1 - n_1\Delta b_2\cos\varphi)\,\omega\cos\omega t + n_1\cdot\omega\cdot\Delta b_2\cdot\sin\varphi\cdot\sin\omega t. \tag{20,23}$$

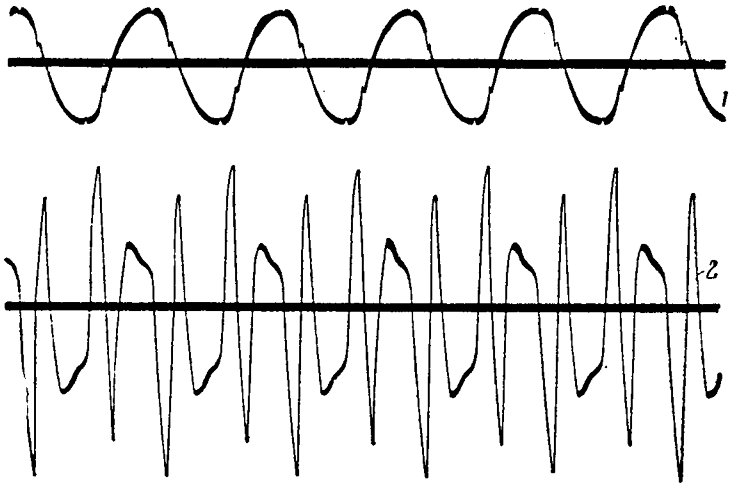


Рис. 282.

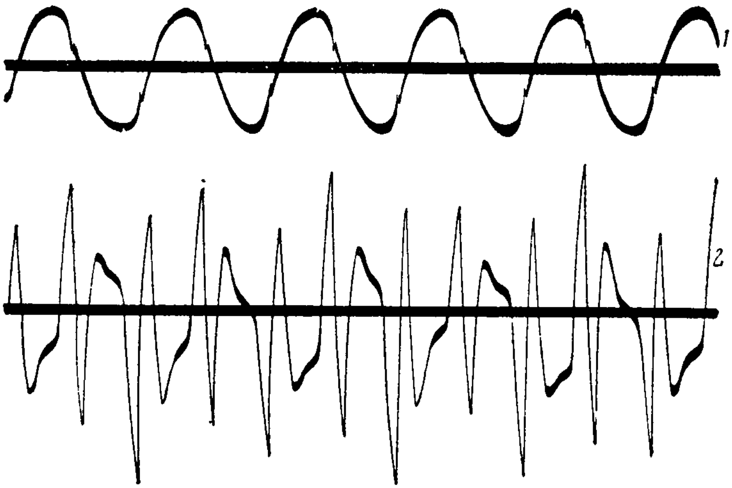


Рис. 283.

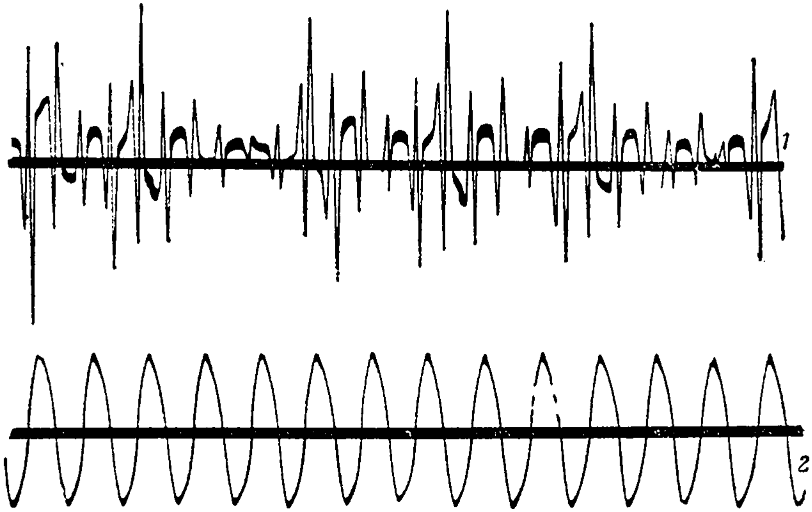


Рис. 284.

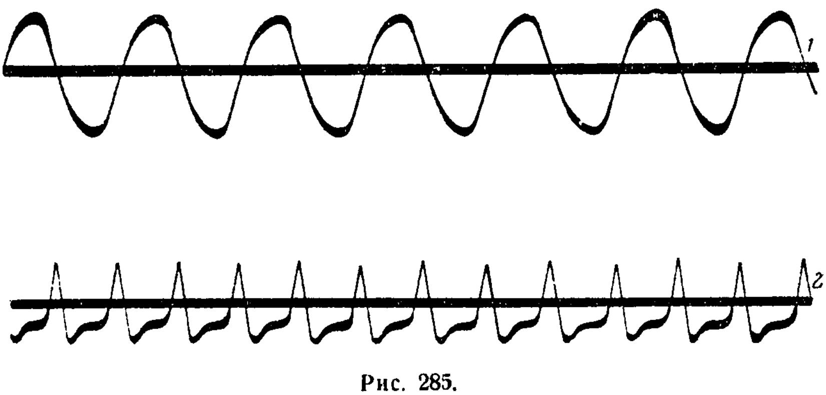


Рис. 285.

В формуле (20,23) выписаны главные члены и опущены члены второго порядка малости, в качестве множителей содержащие производные $\frac{d\Delta b_1}{dt}$; $\frac{d\Delta b_2}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$. Это справедливо при

$$\frac{d\Delta b_1}{dt} \ll \omega\Delta b_1; \quad \frac{d\Delta b_2}{dt} \ll \omega\Delta b_2 \text{ и } \frac{d\varphi}{dt} \ll \omega.$$

Приращение индукции $\beta B_{\text{вых}}$, определяющее собой приращение потокосцепления обмоток w_2, равно

$$\Delta\beta B_{\text{вых}} = (\Delta b_1 - \Delta b_2 \cos\varphi)\sin\omega t - \Delta b_2 \sin\varphi\cos\omega t. \tag{20,24}$$

Вторая производная от $\Delta\beta B_{\text{вых}}$ будет записана следующим образом:

$$\frac{d^2\Delta\beta B_{\text{вых}}}{dt^2} = -\omega^2(\Delta b_1 - \Delta b_2\cos\varphi)\sin\omega t + \omega^2\cdot\Delta b_2\sin\varphi\cdot\cos\omega t +$$

$$+ 2\omega\left(\frac{d\Delta b_1}{dt} - \cos\varphi\cdot\frac{d\Delta b_2}{dt}\right)\cos\omega t + 2\omega\sin\varphi\frac{d\Delta b_2}{dt}\sin\omega t. \tag{20,25}$$

В формуле (20,25), как и в формуле (20,22), выписаны только главные члены и опущены члены второго порядка малости, содержащие производные $\frac{d^2\Delta b_2}{dt^2}$, $\frac{d^2\Delta b_1}{dt^2}$ и производные от приращения угла φ во времени

$$\left(\frac{d^2\Delta b_1}{dt^2} \ll \omega\frac{d\Delta b_1}{dt}; \quad \frac{d^2\Delta b_2}{dt^2} \ll \omega\frac{d\Delta b_2}{dt}\right).$$

Если уравнение (20,8) продифференцировать по времени, вместо тока i_{21} подставить правую часть формулы (20,22), вместо производной от тока i_{21} подставить правую часть формулы (20,23) и вместо второй производной от выражения $\beta B_1\sin\omega t - \beta B_2\sin(\omega t + \varphi)$ подставить правую часть формулы (20,25), то после разделения полученного уравнения на два (синусные и косинусные составляющие) получим систему уравнений (20,26—20,27):

$$p\Delta b_2 + r\Delta b_1 + s\cdot\Delta b_2 = 0; \tag{20,26}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\Delta b_1 - p\cdot\Delta b_2 + q\cdot\Delta b_1 + \gamma\cdot\Delta b_2 = 0. \tag{20,27}$$

Здесь

$$p = \frac{d}{dt}; \quad r = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\omega b m_1}{2a} - \frac{\omega}{2}\right); \tag{20,28}$$

$$s = \frac{\omega n_1}{2a} + \operatorname{ctg}\varphi\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega b n_1}{2a}\right); \tag{20,29}$$

$$q = \frac{\omega m_1}{2a\cos\varphi}; \tag{20,30}$$

$$\gamma = \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega b n_1}{2a}\right) - \frac{\omega n_1}{2a}. \tag{20,31}$$

В соответствии с критерием Гурвица из уравнений (20,26)—(20,27) следует, что периодический процесс на частоте f во вторичной цепи будет устойчив, если выполняются два условия:

$$\left(r + q + \frac{s}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi > 0, \tag{20,32}$$

$$(sq - r\gamma)\cos\varphi > 0. \tag{20,33}$$

В формулах (20,23)—(20,25) и (20,28)—(20,33) значения φ, m_1 и n_1 относятся к установившемуся режиму, устойчивость которого исследуется.

Рассмотрим пример применения формул (20,32) и (20,33). Исследуем устойчивость процесса в двух точках кривой рис. 277 при $a = 100$ и $b = 10$.

В качестве первой из них возьмем точку с координатами $\beta B_{\text{вых}} = 6{,}5$ и $\beta B_p = 5{,}5$ (точка находится на участке *гв*), в качестве второй — точку с координатами $\beta B_{\text{вых}} = 10{,}7$ и $\beta B_p = 3{,}27$ (находится на участке *ге*). При построении кривых рис. 276 и 277 найдено, что для первой точки $\beta B_1 = 0{,}8$; $\beta B_2 = 6{,}06$, $a_1 = -40{,}5$; $b_1 = 65{,}5$; $c_1 = 77$; $d_1 = 0{,}433$; $\varphi = 121°45'$. По формуле (20,20) находим $m_1 = 0{,}625$ и по формуле (20,21) $n_1 = 59{,}7$. По формулам (20,28)—(20,31) определяем $r = -173$; $s = 576{,}8$; $q = -1{,}863$; $\gamma = 1166$. Режим работы в первой точке неустойчив, так как $(sq - r\gamma)\cos\varphi = -0{,}106 \cdot 10^6 < 0$.

Исследуем устойчивость периодического процесса во второй точке. Для второй точки $\beta B_1 = 5{,}35$; $\beta B_2 = 6{,}27$, $\varphi = 148°30'$; $a_1 = -179$, $c_1 = 196$, $b_1 = 80$; $d_1 = 33{,}5$; $m_1 = 31{,}93$; $n_1 = 73{,}75$; $r = 358$; $s = 1746$; $q = -93{,}2$; $\gamma = 497$. Условия (20,32) и (20,33) для второй точки выполнены, следовательно, процесс устойчив. Эксперимент это подтверждает.

Для определения приращения $\Delta\varphi$, вызываемого приращениями Δb_1 и Δb_2, воспользуемся формулой (20,16) для $\operatorname{tg}\varphi$ и аналогичной ей формулой для $\sin\varphi$. Выведем формулу для $\Delta\varphi$ для областей характеристики, в которых соблюдается условие $|a_1 c_1| \gg \gg b_1 d_1$ (для иных соотношений формула выглядит более громоздко и поэтому здесь не приводится).

С этой целью в формулу (20,16) вместо βB_1 подставим $\beta B_1 + \Delta b_1$, вместо βB_2 подставим $\beta B_2 + \Delta b_2$ и $\varphi + \Delta\varphi$ вместо φ. Развернем в ряд Тейлора функции, стоящие в левой и правой частях формулы (20,16), учтем, что $\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) \approx \operatorname{tg}\varphi + \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}$;

$$a_1(\beta B_2 + \Delta b_2) \approx a_1(\beta B_2) + \Delta b_2 a_1'(\beta B_2) = a_1 + a_1' \cdot \Delta b_2,$$

$$b_1(\beta B_2 + \Delta b_2) \approx b_1(\beta B_2) + \Delta b_2 \cdot b_1'(\beta B_2) = b_1 + b_1' \cdot \Delta b_2,$$

$$c_1(\beta B_1 + \Delta b_1) \approx c_1(\beta B_1) + \Delta b_1 \cdot c_1'(\beta B_1) = c_1 + c_1' \cdot \Delta b_1,$$

$$d_1(\beta B_1 + \Delta b_1) \approx d_1(\beta B_1) + \Delta b_1 \cdot d_1'(\beta B_1) = d_1 + d_1' \cdot \Delta b_1.$$

Под a_1; b_1; c_1; d_1 понимаются значения соответствующих функций в установившемся режиме работы, устойчивость которого исследуется;

$$a'_1(\beta B_2) = a'_1 = \left(\frac{da_1}{d\beta B_2}\right)_{\beta B_2}$$

есть значение производной от функции a_1, в которую подставляется значение βB_2 установившегося режима работы. Аналогичным образом следует понимать и производные d'_1; b'_1; c'_1. Получим

$$\operatorname{tg}\varphi + \Delta\varphi \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{\Delta b_1 \cdot d'_1 - d_1}{c_1 + \Delta b_1 \cdot c'_1} + \frac{b_1 + \Delta b_2 \cdot b'_1}{a_1 + a'_1 \cdot \Delta b_2}.$$

При условии $|a_1 c_1| \gg b_1 d_1$ из формулы (20,16) следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_1}{b_1}.$$

Поэтому

$$\Delta\varphi = \Delta b_1 \cdot e \cdot \cos^2\varphi + \Delta b_2 \cdot f \cdot \cos^2\varphi. \tag{20,34}$$

Здесь

$$e = \frac{c_1 d'_1 + d_1 \cdot c'_1}{c_1^2 + \Delta b_1 \cdot c_1 \cdot c'_1}, \tag{20,35}$$

$$f = \frac{a_1 \cdot b'_1 - a'_1 \cdot b_1}{a_1^2 + \Delta b_2 \cdot a'_1 \cdot a_1}. \tag{20,36}$$

Путем подстановки значений βB_1 и βB_2 в формулы (20,35) и (20,36) можно убедиться в том, что $e \ll 1$ и $f \ll 1$. Отсюда следует, что $\Delta\varphi$ имеет второй порядок малости, если считать, что Δb_1 и Δb_2 имеют первый порядок малости.

Литература*

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. Физматгиз, 1959,
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1955.
3. Б. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических колебаний. Связьиздат, 1935.
4. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. Новые методы нелинейной механики. ОНТИ, 1934.
5. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, 1892 (переиздана в 1935 и 1950 гг.).
6. Л. И. Мандельштам. Полное собрание трудов. Изд-во АН СССР, 1948—1952.
7. Н. Д. Папалекси. Собрание трудов. Изд-во АН СССР, 1949.
8. А. А. Фельдбаум. Введение в теорию нелинейных цепей. Госэнергоиздат, 1948.
9. С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. ГИТТЛ, 1951.
10. К. Ф. Теодорчик. Автоколебательные системы. ГИТТЛ, 1952.
11. А. А. Харкевич. Автоколебания. ГИТТЛ, 1954.
12. Е. П. Попов. Динамика систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1954.
13. Я. З. Цыпкин. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. Гостехиздат, 1951.
14. А. А. Воронов. Элементы теории автоматического регулирования. Воениздат, 1954.
15. Л. А. Бессонов. Электрические цепи со сталью. Госэнергоиздат, 1948.
16. Л. А. Бессонов. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях со сталью. Госэнергоиздат, 1951.
17. Г. В. Добровольский. Анализ нелинейных многополюсников. Изд-во АН СССР, 1947.

---

* Основной литературой по нелинейным электрическим цепям в плане курса ТОЭ являются учебники по ТОЭ [Л. 24, 25, 26, 27]. Остальная литература, приведенная в списке, является дополнительной. Она предназначена для более глубокого изучения отдельных частных вопросов курса.

18. В. Г. Комар. Работа полупроводниковых выпрямителей в цепях управления. Госэнергоиздат, 1952.
19. Н. Н. Крылов. Электрические процессы в нелинейных элементах радиоприемников. Связьиздат, 1949.
20. Л. А. Бессонов. Автоколебания (автомодуляция) в нелинейных электрических цепях со сталью. Госэнергоиздат, 1958.
21. Т. Хаяси. Вынужденные колебания в нелинейных системах. Изд-во иностр. лит., 1957.
22. М. А. Розенблат. Магнитные усилители. „Советское радио", 1956.
23. Б. С. Сотсков. Элементы автоматической и телемеханической аппаратуры. Госэнергоиздат, 1950.
24. Л. Р. Нейман, П. Л. Калантаров. Теоретические основы электротехники, тт. I и II. Госэнергоиздат, 1959.
25. Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин. Основы электротехники, ч. I. Госэнергоиздат, 1955.
26. А. В. Нетушил, С. В. Страхов. Основы электротехники, ч. II. Госэнергоиздат, 1955.
27. Л. А. Бессонов. Теоретические основы электротехники, ч. I, II, III. Изд-во „Высшая школа", 1964.
28. В. Ф. Власов. Электронные и ионные приборы. Связьиздат, 1960.
29. А. И. Долгинов. Резонанс в электрических цепях и системах. Госэнергоиздат, 1957.
30. Ю. Г. Толстов. Измерительные трансформаторы постоянного тока. Госэнергоиздат, 1951.
31. Я. С. Ицхоки. Нелинейная радиотехника. „Советское радио", 1955.
32. М. А. Бонч-Бруевич. Основы радиотехники, ч. II. Связьиздат, 1936.
33. В. А. Котельников, А. М. Николаев. Основы радиотехники. Связьиздат, 1954.
34. Б. В. Булгаков. Колебания, т. I. ГТТИ, 1949.
35. Б. П. Асеев. Основы нелинейной радиотехники. Связьиздат, 1943.
36. Полупроводниковые приборы и их применение. Сборник статей под ред. Я. А. Федотова, вып. 1—5. „Советское радио", 1956—61.
37. Б. Я. Коган. Электронные моделирующие устройства и их применение. Физматгиз, 1959.
38. И. М. Тетельбаум. Электрическое моделирование. Физматгиз, 1959.
39. Б. С. Сотсков. Лекции по курсу „Магнитные элементы быстродействующих машин". Изд. ВЗЭИ, 1960.
40. А. А. Фельдбаум. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.
41. И. Г. Малкин. Некоторые задачи нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
42. И. М. Капчинский. Методы теории колебаний в радиотехнике. Госэнергоиздат, 1954.
43. А. А. Харкевич. Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике. ГИТТЛ, 1956.
44. Я. Г. Кобленц. Бесконтактные способы телефонной коммутации. Связьиздат, 1957.
45. А. И. Китов, Н. А. Криницкий. Электронные цифровые машины и программирование. Физматгиз, 1959.
46. Полупроводниковые приборы и их применение. Под ред. Р. Ф. Ши. Госэнергоиздат, 1957.
47. Ю. И. Конев. Кристаллические триоды в устройствах автоматического управления. „Советское радио", 1957.
48. А. А. Булгаков. Электронные устройства автоматического управления. Госэнергоиздат, 1958.
49. Э. И. Гитис. Электрорадиоавтоматика. Госэнергоиздат, 1958.
50. Г. Е. Пухов. Комплексное исчисление. Изд. АН УССР, 1961.
51. С. А. Гинзбург. Нелинейные цепи и их функциональные характеристики. Госэнергоиздат, 1958.

52. И. Л. Каганов. Электронные и ионные преобразователи, тт. I, II, III. Госэнергоиздат, 1956.
53. Л. А. Бессонов. Нелинейные электрические цепи. Изд. ВЗЭИ, 1958.
54. Т. Н. Вербицкая. Вариконды. Госэнергоиздат, 1958.
55. Д. М. Казарновский. Сегнетокерамика. Изд. ВЗЭИ, 1956; Сегнетокерамические конденсаторы. Изд. ВЗЭИ, 1956.
56. Г. Ф Сторм. Магнитные усилители. Изд-во иностр. лит. 1957.
57. А. В. Башарин. Графический метод расчета переходных процессов в системах каскадного возбуждения электрических машин с обратными связями. ВЭП, 1956, № 5.
58. Д. А. Башкиров. Метод построения переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования. Труды второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. 2, 1955, стр. 82—95.
59. И. Т. Турбович. К теории колебательных систем со степенной нелинейностью. „Радиотехника", 1954, № 6.
60. С. С. Шур. Деление частоты в простейшей цепи со сталью. „Электричество", 1954, № 11.
61. В. Е. Боголюбов, В. Л. Дятлов. Расчет переходных процессов в дросселях насыщения и элементах схем магнитных усилителей. Труды ВЗЭИ. Изд. ВЗЭИ, вып. 4, 1954.
62. Р. А. Липман. Вопросы теории и расчета быстродействующих магнитных усилителей. Канд. диссерт., МЭИ, 1958.
63. Э. А. Меерович. К расчету нелинейных цепей. „Электричество", 1951, № 9.
64. Е. П. Попов. О выделении областей устойчивости нелинейных автономных систем на основе гармонической линеаризации. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 1.
65. K. Heegner. Über Selbsterregungserscheinungen bei System mit gestörter Superposition, z. f. Physik, 1924, Bd. 29, s. 91.
66. К. Г. Митюшкин. Разработка и исследование бесконтактных магнитных элементов для устройств телеуправления, Канд. диссерт. Институт АиТ АН СССР, 1953.
67. Генис. Расчет бинарной ячейки на безнакальных тиратронах. „Радиотехника", 1959, № 6.
68. К. М. Поливанов. Динамические характеристики элементов электрических цепей. ДАН СССР, т. 118, 1958, № 1.
69. Ахарони, Фрей, Хоровиц. Активные сопротивления, зависимые от магнитного поля. Journal of the Applied Physics, 1955, No. 12.
70. Special Technical Conference „Nonlinear Magnetics and Magnetic Amplifiers", Los Angeles, 1958.
71. Д. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Изд-во иностр. лит., 1952.
72. Л. А. Бессонов. О нарушении нормального выпрямления в мостовой выпрямительной схеме. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 2.
73. Л. А. Бессонов. К теории колебаний в одной из феррорезонансных схем. Известия вузов, „Электромеханика", 1959, № 2.
74. Л. А. Бессонов, М. С. Рыбаков. Подмагничивание ферромагнитных устройств переменным током рабочей частоты. Труды ВЗЭИ, вып. 9, 1958.
75. A. Boyajian, G. Camilli. Orthomagnetic Bushing Current Transformer for Metering. El. Eng., 1945, № 3.
76. Ло, Райхман. Трансфлюксор — управляемый запоминающий магнитный элемент. „RCA Revue", 1955, No 2.
77. В. В. Гуров, Б. Я. Коган, А. Д. Таланцев, В. А. Трапезников. Новая электронная аппаратура моделирования Института автоматики и телемеханики АН СССР; А и Т, 1956, № 1.
78. А. Д. Таланцев. Проектирование диодных функциональных преобразователей. А и Т, 1956, № 2.

79. Г. Корн, Т. Корн. Электронные моделирующие устройства. Изд-во иностр. лит., 1955.
80. Е. П. Попов, И. Е. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
81. E. E. Bittmann. Using thin films in high — speed memories. Electronics, 1959, No 23.
82. A. H. Bobeck. The Twistor — a new magnetic memory element, Bell Labor. Record, 1959, No 11. (Перевод в экспресс информации. Приборы и элементы промышленной автоматики, 1960, вып. 11, № 81).
83. U. F. Gianola, T. H. Crowly. The laddic — a magnetic device for performing logic. Bell system Technical Journal, 1959, No 1. (Перевод в экспресс информации. Вычислительная техника, 1959, вып. 29, № 115—116.)
84. Der Binistor — ein neues Halbleiter Bauelement. Electronische Rundschau, 1961, Nr 2.
85. Полупроводниковые термосопротивления. Под ред. Б. С. Сотскова. Госэнергоиздат, 1959.
86. И. Ф. Волошин [и др.]. Полупроводниковые термосопротивления. Изд. АН БССР, 1959.
87. Б. Т. Коломиец. Новые виды фотосопротивлений и области их применения. Первый международный конгресс ИФАК, вып. II, 43, 1960.
88. Х. Ку. Теория нелинейных систем автоматического регулирования. Первый международный конгресс ИФАК, вып. I, 4, 1960.
89. Е. Черри, У. Миллар. Некоторые новые понятия и теоремы в области нелинейных систем. Автоматическое регулирование. Сб. материалов конференции в Кренфильде, 1951. Изд-во иностр. лит., 1954.
90. J. M. Manley, H. E. Rowe. General Energy Relations in Nonlinear Inductors and Capacitors. Proceedings Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956. Proc. IRE, 1956, N 7 и 1958, N 5.
91. Ферриты (Доклады III Всесоюзного совещания по ферритам). Изд. АН БССР, 1960.
92. L. A. Zadeh. Optimum Nonlinear Filters. Journal Applied Physics, 1953, 24.
93. Gyorgy. Potational Model of Flux Reversal in Square Loop Ferrites. Journal Appl. Physics, 1957, 28, N 9.
94. П. Е. Гренстед. Частотный метод анализа нелинейных систем. Машиностроение (сборник переводов), 1956, № 3.
95. И. Н. Лисицкая. Динамические характеристики нелинейных элементов и их роль при исследовании нелинейных цепей. Всесоюзная межвузовская конференция по нелинейным электрическим цепям. Сб. докладов, № 3. Ташкент, 1960.
96. E. Schmitt. Das Parametron und seine Verwendung in nachrichtenverarbeitenden Systemen. Elektronische Rundschau, 1960, Nr 2.
97. С. В. Перцов. Параметрические усилители на полупроводниковых диодах. Полупроводниковые приборы и их применение, вып. 5. Сб. статей под ред. Я. А. Федотова. „Советское радио", 1960.
98. В. Н. Богомолов. Устройства с датчиками Холла и датчиками магнитосопротивления. Госэнергоиздат, 1961.
99. G. H. Royer. A Switching transistor d-c to a-c converter. Trans. AIEE, 1955, part I, p. 322.
100. R. V. Van Allen. A Variable Frequency Magnetic Coupled Multivibrator. Tr. AIEE, 1955, part I, p. 356.
101. Л. И. Рабкин. Высокочастотные ферромагнетики. Физматгиз, 1960.
102. R. Ramey. On the mechanism of magnetic amplifier operation. Tr. AIEE, 1951.
103. Е. П. Попов. Приближенное исследование переходных процессов в нелинейных автоматических системах методом гармонической линеаризации. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 9.

104. Л. Л. Иванов. К решению задач с функциями, имеющими разрывные производные и разрывы непрерывности. Сборник научных трудов МВТУ, вып. 87, 1958.
105. Л. Л. Иванов. Начала аналитической теории разрывных функций и расчет нелинейных электрических цепей. „Электричество", 1960, № 9.
106. „PIRE", 1961, No 1, Special Issue on Computers.
107. „Зарубежная радиоэлектроника", 1961, № 10.
108. В. Кэнциг. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики, Изд-во иностр. лит., 1960.
109. Шокли [и др.]. P-N. funcion transistors, Physical Revue, 1955, No 1.
110. Туннельные диоды. Сб. статей под ред. В. И. Фистул. Изд-во иностр. лит., 1961.
111. А. П. Крайзмер. Устройства хранения дискретной информации. Госэнергоиздат, 1961.
112. Die steuerbare Siliziumzelle — ein neues halbleiter Bauelement für die Elektronik. ETZB, 12, 1960, Nr 19.
113. Каннингхэм. Введение в теорию исследования нелинейных цепей (перевод с английского). Госэнергоиздат, 1962.
114. E. Goto. The Parametron, a digital computing element which utilizes parametric oscillation. „PIRE", v. 47, 1959, No 8.
115. И. Е. Средний. Основы метода импульсного анализа. Труды ОЭИС, Сб. № 4 (14), 1956.
116. I. M. Bremer. Cryogenic devices in logical circuitry and storage. El. Manufacturing, v. 61, 1958, No 2.
117. R. Hübner. Das Kryotron. Elektronik, Bd. 6, 1957, Nr 1.
118. Е. П. Маслов. Некоторые вопросы импульсных систем. „Электричество", 1962, № 10.
119. И. С. Желудев, В. В. Гладкий, Л. З. Русаков, И. С. Рез. О нелинейных свойствах монокристаллов $BaTiO_3$ с добавками Pb и монокристаллов триглицинсульфата в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, Серия физическая, 1958, т. 22, № 12.
120. Е. И. Ильяшенко. К вопросу о принципе действия элемента памяти биакс. Научно-техническая информация, 1963, № 4.

Оглавление

Стр.

Л. А. Бессонов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Редакторы *Т. И. Артемова, Л. А. Тупицына, В. М. Фотиев*

Технический редактор *С. В. Швецов*

Корректоры *О. В. Герцман, С. Н. Юровец*

Т-04106. Сдано в набор 1/II-1963 г. Подписано к печати 3/III-1964 г. Индекс УС-12. Формат $60\times90^1/_{16}$. Объем 27 печ. л. Уч.-изд. л. 2581. Тираж 24 450 экз. Заказ 852. Цена 1 руб.

Типография им. Анохина Управления по печати при Совете Министров Карельской АССР
г. Петрозаводск, ул. Правды, 4