621.382(075)
58

Л. А. БЕССОНОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

НОВЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА
ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ
И РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗОВ

ОТПИСАНО

У/2798
(об т.ш.)

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 31.211
Б53
УДК 621.3(0.75)

Рецензент:
кафедра ТОЭ Ленинградского электротехнического института им. В. И. Ульянова (Ленина)

Бессонов Л. А.
Б 53 Линейные электрические цепи. Новые разделы курса теоретических основ электротехники: Учеб. пособие для студ. электротехн. и радиотехн. специальностей вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1983. — 336 с., ил.

В пер.: 1 р.

В книге рассмотрены различные методы синтеза электрических цепей, приближенные методы расчета переходных процессов, расчет по огибающим амплитуд, расчет квазиустановившихся процессов при различного рода модуляции, дискретное преобразование Лапласа, основы теории ненаправленных и направленных графов и др. По сравнению со 2-м изданием (1974 г.) в книгу включены: прямое и обратное преобразования Тейлора и Мелллина, расчет схем с операционными усилителями, новые схемные элементы и их применение и др.

Б $\frac{2302000000-309}{001(01)-83}$ 101—83

ББК 31.211
6П2.1

Лев Алексеевич Бессонов

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Зав. редакцией Л. А. Романова. Редактор И. Г. Волкова. Младший редактор Е. И. Попова. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Технический редактор З. А. Муслимова. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 3992

Изд. № ЭР-331 Сдано в набор 28.12.82. Подп. в печать 17.06.83. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 21 усл. печ. л. 21 усл. кр.-отт. 18,78 уч.-изд. л. Тираж 20 000 экз. Зак. № 734. Цена 1 руб.

Издательство «Высшая школа». 101430. Москва. ГСП-4. Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.

© Издательство «Высшая школа», 1974
© Издательство «Высшая школа», 1983, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассмотрены относительно новые вопросы развивающейся теории линейных электрических цепей. Роль их в общетеоретической подготовке инженеров и научных работников, специализирующихся в области электротехники, электроники, радиотехники, теории информации, теории автоматического регулирования, кибернетики, энергетики, связи, телефонии, вычислительной техники, теории электрических машин и аппаратов, все более возрастает. Многие из этих вопросов либо отсутствуют в общетеоретических курсах ТОЭ, ТОР, теории цепей, либо представлены в недостаточном объеме.

Материал, относящийся к современной теории линейных электрических цепей, весьма обширен; в книгу включен наиболее существенный. Для углубленного изучения сложных вопросов приведены ссылки на литературу.

Настоящее издание книги структурно переработано по сравнению с предыдущим. В книгу включены следующие новые вопросы: прямое и обратное преобразования Тейлора и Меллина, основы матрично-топологического направления теории цепей, различные виды частотных преобразований, расчет схем с операционными усилителями, передаточная функция четырехполюсника, параметры которого медленно изменяются во времени, и др. В Приложении дано несколько программ для расчета электрических цепей на ЭВМ серии ЕС, записанных на алгоритмическом языке ФОРТРАН-4, и конкретные указания по пользованию ими.

Выражаю благодарность рецензенту — зав. кафедрой ТОЭ ЛЭТИ д-ру техн. наук, проф. П. Н. Матханову за полезные замечания и советы. При чтении корректуры книги оказали помощь канд. техн. наук Цыганов В. И. и канд. техн. наук Силаев В. А.

Отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

Глава первая
ДВУХПОЛЮСНИКИ

§ 1.1. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Входное сопротивление пассивного двухполюсника $Z(p)$ как функция оператора p представляет собой отношение операторного изображения входного напряжения к операторному изображению входного тока.

Входное сопротивление зависит от схемы внутренних соединений двухполюсника и от значения индуктивностей, емкостей и активных сопротивлений схемы.

Если воспользоваться методом контурных токов, то в соответствии с рис. 1.1 входной ток $I(p)$ можно рассматривать как контурный ток $I_{11}(p)$, возникающий под действием контурной э. д. с.

$$E_{11}(p) = E(p),$$

и определить его следующим образом:

$$I_{11}(p) = E_{11}(p)\frac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)}.$$

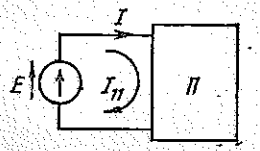


Рис. 1.1

Здесь $\Delta(p)$ — определитель системы уравнений, составленной по методу контурных токов; $\Delta_{11}(p)$ — определитель, полученный из определителя $\Delta(p)$ путем вычеркивания 1-й строки и 1-го столбца и умножения полученного выражения на $(-1)^{1+1}$.

По определению

$$Z(p) = \frac{E_{11}(p)}{I_{11}(p)} = \frac{E(p)}{I(p)} = \frac{\Delta(p)}{\Delta_{11}(p)}.$$

В общем случае $Z(p)$ может быть представлено в виде отношения двух полиномов по степеням p:

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_0}. \qquad (1.1)$$

Степень полинома числителя обозначена n, степень полинома знаменателя m. Для любых линейных двухполюсников степени n и m либо равны, либо отличаются на 1 *. Наименьшие степени p в числителе и знаменателе $Z(p)$ также не могут отличаться более чем на 1.

* Доказательство см. на с. 15.

Величину, обратную входному сопротивлению, называют входной проводимостью

$$Y(p) = 1/Z(p).$$

Двухполюсники, не содержащие резистивных сопротивлений, называют *реактивными двухполюсниками*.

Запишем выражения для входных сопротивлений реактивных двухполюсников, изображенных на рис. 1.2. Для двухполюсника рис. 1.2, *а*:

$$Z(p) = \frac{pL_n}{1 + p^2 L_n C_n}.$$

Сопротивление k последовательно соединенных двухполюсников (рис. 1.2, *б*)

$$Z(p) = \sum_1^k \frac{pL_n}{1 + p^2 L_n C_n}$$

$$(L_1 C_1 \neq L_2 C_2 \neq \ldots \neq L_k C_k).$$

Его можно привести к виду

$$Z(p) = \frac{a_1 p + a_3 p^3 + \ldots + a_{2k-1} p^{2k-1}}{b_0 + b_2 p^2 + \ldots + b_{2k} p^{2k}}.$$

Степень полинома числителя на 1 меньше степени полинома знаменателя, причем степень полинома числителя нечетная, а знаменателя — четная.

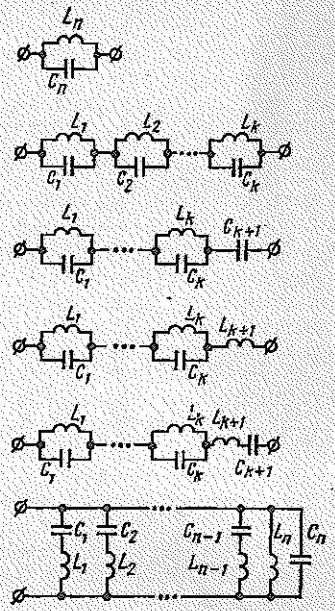


Рис. 1.2

Для двухполюсника рис. 1.2, *в*

$$Z(p) = \sum_1^k \frac{pL_n}{1 + p^2 L_n C_n} + \frac{1}{pC_{k+1}} = \frac{a'_0 + a'_2 p^2 + \ldots + a'_{2k} p^{2k}}{b'_1 p + b'_3 p^3 + \ldots + b'_{2k+1} p^{2k+1}}.$$

Степени полиномов числителя и знаменателя увеличились на 1, но по-прежнему степень полинома знаменателя на 1 выше степени полинома числителя.

Для двухполюсника рис. 1.2, *г*

$$Z(p) = \sum_1^k \frac{pL_n}{1 + p^2 L_n C_n} + pL_{k+1} = \frac{a'_1 p + a'_3 p^3 + \ldots + a'_{2k+1} p^{2k+1}}{b'_0 + b'_2 p^2 + \ldots + b'_{2k} p^{2k}}.$$

Для двухполюсника рис. 1.2, *д*

$$Z(p) = \sum_1^k \frac{pL_n}{1 + p^2 L_n C_n} + pL_{k+1} + \frac{1}{pC_{k+1}} = \frac{a''_0 + a''_2 p^2 + \ldots + a''_{2k+2} p^{2k+2}}{b''_1 p + b''_3 p + \ldots + b''_{2k+1} p^{2k+1}}.$$

Схемы рис. 1.2, *б — д* реактивных двухполюсников в литературе часто называют *каноническими** схемами Фостера [40]. Эти схемы состоят из последовательно соединенных параллельных резонансных контуров, а в общем случае еще из емкости и индуктивности.

Кроме этих схем есть и другой вид канонических схем Фостера реактивных двухполюсников. В нем параллельно соединены последовательные резонансные цепочки (рис. 1.2, *е*), емкости и индуктивности.

Так как проводимость последовательно соединенных L_n и C_n

$$Y(p)=\frac{pC_n}{1+p^2L_nC_n},$$

а при параллельном соединении проводимости складываются, то структура входной проводимости второго типа реактивных двухполюсников аналогична структуре входных сопротивлений реактивных двухполюсников первого типа.

§ 1.2. КОМПЛЕКСНАЯ ЧАСТОТА

Комплексное число p имеет в общем случае действительную β и мнимую $j\alpha$ части. Его можно представить в виде произведения $j=\sqrt{-1}$ на комплексную частоту Ω, т. е. $p=j\Omega$, где

$$\Omega=\alpha-j\beta. \qquad (1.2)$$

Следовательно, $Z(p)=Z(j\Omega)$ есть входное сопротивление двухполюсника при комплексной частоте Ω. Сопротивление $Z(j\Omega)$ характеризует двухполюсник при воздействии на его вход напряжения вида

$$Ce^{j\Omega t}=Ce^{\beta t}e^{j\alpha t},$$

где C — некоторое комплексное постоянное число, не зависящее от времени.

В частном случае, когда воздействующее напряжение неизменно по амплитуде ($\beta=0$) и имеет угловую частоту $\alpha=\omega$, $p=j\omega$ и $Z(p)=Z(j\omega)$.

§ 1.3. НУЛИ И ПОЛЮСЫ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Выражение (1.1) можно переписать в ином виде, разложив на множители полиномы в числителе и знаменателе. Вынесем в числителе за скобки множитель a_n, а в знаменателе множитель b_m.

Корни уравнения

$$N(p)=a_n\left[p^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}p^{n-1}+\ldots+\frac{a_0}{a_n}\right]=0$$

---

* Каноническими их называют потому, что путем линейных преобразований к ним можно свести схему любого пассивного многоконтурного двухполюсника.

обозначим через p_1, p_3, p_5, ..., а корни уравнения

$$M(p) = b_m\left[p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m}p^{m-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_m}\right] = 0$$

через p_2, p_4, p_6, ... Число корней числителя равно n, число корней знаменателя m. Тогда

$$Z(p) = \frac{a_n}{b_m}\frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_5)\ldots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\ldots(p-p_m)}. \qquad (1.3)$$

Корни уравнения $Z(p) = 0$ называют *нулями*. Нулями $Z(p)$ являются корни уравнения $N(p) = 0$, т. е. значения p_1, p_3, p_5, ... Если степень $M(p)$ на 1 больше степени $N(p)$, то нуль $Z(p)$ будет также при $p = \infty$.

Корни уравнения $M(p) = 0$, т. е. значения p_2, p_4, p_6, ..., при которых $Z(p)$ обращается в бесконечность, называют *полюсами* $Z(p)$. Нули и полюсы являются в общем случае комплексными числами и могут быть изображены на комплексной плоскости.

Так как

$$Y(p) = 1/Z(p),$$

то нули $Z(p)$ являются полюсами $Y(p)$, а полюсы $Z(p)$ — это нули для $Y(p)$.

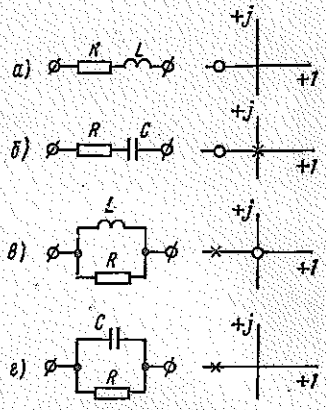


Рис. 1.3

Рассмотрим определение нулей и полюсов простейших двухполюсников. На рис. 1.3 изображены схемы и соответствующее им расположение нулей и полюсов на комплексной плоскости. Нули обозначены кружками, полюсы крестиками.

Двухполюсник рис. 1.3, *а*, для которого

$$Z(p) = R + pL,$$

имеет нуль при $p = -R/L$.

Двухполюсник рис. 1.3, *б*, для которого

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = \frac{RCp+1}{Cp},$$

имеет нуль при $p = -1/(RC)$ и полюс при $p = 0$.

Двухполюсник рис. 1.3, *в*, для которого

$$Z(p) = \frac{RpL}{R+pL},$$

имеет нуль при $p = 0$ и полюс при $p = -R/L$.

Двухполюсник рис. 1.3, *г* имеет полюс при $p = -1/(RC)$.

Нули и полюсы $Z(p)$ для двухполюсников, состоящих только из R и L или только из R и C, расположены на отрицательной вещественной полуоси. Для двухполюсников типа R, L ближайшей особой точкой к началу координат является нуль. Для двух-

полюсников типа R, C ближайшей особой точкой к началу координат является полюс.

Нули и полюсы реактивных двухполюсников расположены на мнимой оси и чередуются, т. е. не может быть рядом двух нулей или двух полюсов. Физически нуль $Z(p)$ реактивного двухполюсника соответствует резонансу напряжений, а полюс — резонансу токов.

То, что нули и полюсы чередуются, следует из теоремы реактивности Фостера. Фостер в 1924 г. показал, что для любого реактивного двухполюсника производная от модуля входного сопротивления по частоте всегда является величиной положительной, т. е.

$$d\frac{Z(j\omega)}{j}\Big/d\omega > 0.$$

Так, например, для двухполюсника рис. 1.2, *д*

$$Z(j\omega) = j\sum_{1}^{k}\frac{\omega L_n}{1-\omega^2 L_n C_n} + j\omega L_{k+1} - \frac{j}{\omega C_{k+1}};$$

$$\frac{Z(j\omega)}{j} = \sum_{1}^{k}\frac{\omega L_n}{1-\omega^2 L_n C_n} + \omega L_{k+1} - \frac{1}{\omega C_{k+1}};$$

$$\frac{d\frac{Z(j\omega)}{j}}{d\omega} = \sum_{1}^{k}\frac{L_n(1+\omega^2 L_n C_n)}{(1-\omega^2 L_n C_n)^2} + L_{k+1} + \frac{1}{\omega^2 C_{k+1}} > 0.$$

Заметим, что производная от модуля входного сопротивления $|Z|$ по частоте определяет тангенс угла наклона между касательной к кривой $|Z| = f(\omega)$ и осью ω. Этот угол всегда положителен. Отсюда и следует, что нули и полюсы реактивных двухполюсников всегда чередуются.

Рассмотрим некоторые вопросы из теории функций комплексного переменного.

§ 1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Прежде чем рассмотреть вопрос об интегрировании на плоскости комплексного переменного, вспомним, как производится интегрирование на плоскости действительного переменного x. Положим, что требуется найти интеграл от некоторой непрерывной функции $f(x)$ в пределах от x_1 до x_2. Интеграл можно представить как предел суммы площадей прямоугольников S_k (рис. 1.4, *а*):

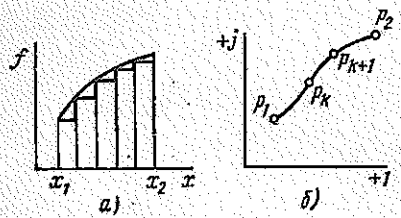


Рис. 1.4

$$S_k = f(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

когда x_{k+1} стремится к x_k:

$$\lim\sum f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Предел не зависит от выбора точек деления по оси x.

Положим теперь, что задана некоторая аналитическая функция комплексного переменного p на плоскости p и требуется найти интеграл $f(p)$ в пределах от p_1 до p_2. С этой целью задаемся произвольной кривой на плоскости p, соединяющей точки p_1 и p_2, и подобно тому, как это проводилось для действительного переменного, составим сумму

$$\sum_k f(p_k)(p_{k+1}-p_k).$$

Интеграл $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$ есть предел суммы $\sum_k f(p_k)(p_{k+1}-p_k)$ при $p_{k+1}\to p_k$:

$$\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp = \lim_{p_{k+1}\to p_k^*} \sum_k f(p_k)(p_{k+1}-p_k).$$

Следовательно, форма записи интеграла от комплексного переменного точно такая же, как и интеграла от действительного переменного. При интегрировании на плоскости комплексного переменного следует указывать кривую, по которой производится интегрирование.

§ 1.5. ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОГО ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$

Положим, что на кривой $p_1 - p_k - p_{k+1} - p_2$ (рис. 1.4, *б*) максимальное значение модуля функции $f(p)$, т. е. $|f(p)|$ меньше некоторой положительной величины M:

$$\mathrm{Max}\,|f(p)| \leqslant M.$$

С целью оценки абсолютного значения интеграла подставим в него $|f(p)|$ вместо $f(p)$ и затем заменим $|f(p)|$ на M. Получим

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp\right| \leqslant \int_{p_1}^{p_2} |f(p)|\,|dp| \leqslant M\int_{p_1}^{p_2} |dp| = Ml.$$

Здесь через l обозначена длина кривой S, вдоль которой производится интегрирование. Таким образом, можно утверждать, что абсолютное значение интеграла $\int_S f(p)\,dp$ не превышает произведения максимального значения модуля функции $|f(p)|$ на длину кривой l.

При интегрировании на плоскости комплексного переменного путь интегрирования между двумя точками часто выбирают по полуокружности, радиус которой стремится либо к бесконечности, либо к нулю. Рассмотрим эти два случая отдельно.

---

* Максимум модуля разности $(p_{k+1}-p_k)$ стремится к нулю.

1. Положим, что радиус полуокружности R, вдоль которой производится интегрирование, стремится к бесконечности, а начальная и конечная точки пути (p_1 и p_2) расположены на оси мнимых значений (рис. 1.5, *а*). Длина полуокружности $l=\pi R$.

Если $R\to\infty$, то $l\to\infty$. Если

$$|f(p)|<M,$$

т. е. если модуль функции $f(p)$ остается величиной ограниченной, то при $R\to\infty$ произведение Ml также стремится к бесконечности.

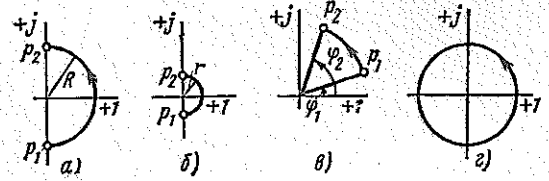


Рис. 1.5

Аналогичный результат будет и при

$$|f(p)|<MR^n, \text{ если } n>0.$$

Положим, далее, что

$$|f(p)|<M/R^2,$$

т. е. рассмотрим случай, когда модуль функции $f(p)$ убывает на кривой S быстрее чем $1/R^2$. Тогда

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp\right|<\frac{M}{R^2}\pi R\to 0 \text{ при } R\to\infty,$$

т. е. в этом случае $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$ стремится к нулю. $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$ при интегрировании по полуокружности бесконечно большого радиуса будет стремиться к нулю и в том случае, когда

$$|f(p)|<M/R^n \text{ при } n\geqslant 2.$$

Если же

$$|f(p)|<M/R,$$

то $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$ будет по модулю ограничен.

2. Рассмотрим вопрос об интегрировании по полуокружности, когда радиус ее r стремится к нулю (рис. 1.5, *б*). Если на контуре S $|f(p)|$ при $|p|$, стремящемся к нулю, оказывается меньше, чем Mr^n $(n\geqslant 0)$, где M — некоторое ограниченное по модулю число, то в соответствии с предыдущим $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$ оказывается

меньше, чем $Mr^n\pi r$. Отсюда следует, что при $r \to 0$ и $|f(p)| \leqslant Mr^n$

$$\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp \to 0.$$

При $|f(p)| < M/r^n$ и $n \geqslant 2$

$$\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp < \frac{M}{r^n}\pi r \to \infty.$$

Важным для дальнейшего является интегрирование по полуокружности радиусом r, когда

$$|f(p)| < M/r.$$

В этом случае модуль интеграла

$$\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp < \frac{M}{r}\pi r = \pi M$$

есть величина ограниченная.

В качестве примера найдем интеграл от функции

$$f(p) = 1/p$$

при интегрировании по дуге окружности в пределах от p_1 до p_2 (рис. 1.5, *в*).

Произведем замену переменных

$$p = re^{j\varphi},$$

где r — радиус, а угол φ отсчитывается в направлении против часовой стрелки от оси действительных значений; φ изменяется от φ_1 до φ_2:

$$dp = jre^{j\varphi}\,d\varphi = pj\,d\varphi;$$

$$\frac{dp}{p} = j\,d\varphi; \quad \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = j\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = j(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1.4)$$

Таким образом, интеграл $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$ по дуге окружности произвольного радиуса зависит только от углов φ_1 и φ_2 и не зависит от величины радиуса r. Если дуга S описана радиусом r (рис. 1:5, *г*), то

$$\int_S \frac{dp}{p} = 2\pi j.$$

§ 1.6. ТЕОРЕМА КОШИ

При интегрировании на плоскости комплексного переменного часто используют теорему Коши, которая формулируется следующим образом.

Если функция $f(p)$ комплексного переменного p является аналитической (регулярной) внутри некоторого замкнутого контура и на самом контуре (т. е. не имеет полюсов внутри этого контура и на самом контуре), то интеграл от этой функции между некоторыми точками p_1 и p_2 (рис. 1.6, *а*) не зависит от формы кривой, соединяющей эти точки и по которой производится интегрирование, а зависит только от положения начальной и конечной точек пути. Другими словами, в этом случае

$$\int_{S_1} f(p)\,dp = \int_{S_2} f(p)\,dp. \qquad (1.5)$$

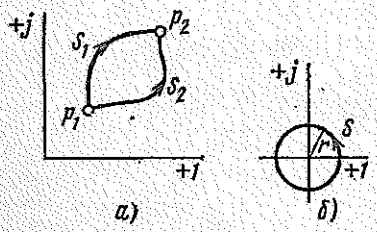


Рис. 1.6

Теорема Коши формулируется и несколько иначе: интеграл вдоль любого замкнутого контура от функции $f(p)$, аналитической внутри области, ограниченной этим контуром, и на самом контуре, равен нулю:

$$\oint f(p)\,dp = 0. \qquad (1.6)$$

В качестве примера найдем интеграл по окружности радиусом r (рис. 1.6, *б*) от функции

$$f(p) = p^n \quad (n \neq -1)$$

и сравним с результатом, следующим из теоремы Коши. Эта функция является аналитической и к ней применима теорема Коши. Примем $p = re^{j\varphi}$, $dp = re^{j\varphi} j\,d\varphi$. Тогда

$$\int_S f(p)\,dp = j\int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{j(n+1)\varphi}\,d\varphi = jr^{n+1}\int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\varphi + j\sin(n+1)\varphi]\,d\varphi = 0.$$

Такой же результат следует и из теоремы Коши.

§ 1.7. ПОНЯТИЕ О ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМОМ ДВУХПОЛЮСНИКЕ

Физически реализуемым (осуществимым) двухполюсником условимся называть пассивный двухполюсник, в котором свободные процессы затухают или во всяком случае не возрастают во времени.

Свободную составляющую тока на входе такого двухполюсника при простых корнях можно записать следующим образом:

$$i_{св} = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t},$$

где p_k — корни уравнения $Z(p)=0$ или, что то же самое, корни уравнения $N(p)=0$.

Для физически реализуемых двухполюсников при времени $t\to\infty$ свободный ток должен стремиться либо к нулю, либо (в чисто реактивных двухполюсниках) не должен превышать некоторого конечного (не бесконечно большого) числа N. Но это может быть только в том случае, когда

$$\mathrm{Re}\,|p_k|\leqslant 0. \tag{1.7}$$

§ 1.8. НУЛИ И ПОЛЮСЫ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Из (1.7) следует, что нули физически реализуемого двухполюсника всегда должны быть расположены в левой части плоскости p, в правой части плоскости p не может быть нулей $Z(p)$.

Кроме того, если $Z(p)$ имеет нули, расположенные на мнимой оси, то они могут быть только простыми, не кратными. Чтобы доказать это, вспомним, что свободную составляющую тока, соответствующую кратным корням, записывают следующим образом:

$$C_r(1+\xi t^m)\,e^{p_r t}, \tag{1.8}$$

где m — кратность корня p_r; ξ — некоторый коэффициент.

Если допустить, что на мнимой оси могут быть сопряженные нули $p_r=\pm j\omega$ кратности m, то свободная составляющая тока, соответствующая им, как это следует из (1.8), неограниченно возрастала бы во времени, чего быть не может. Докажем теперь, что в правой части плоскости p не могут находиться не только нули, но и полюсы $Z(p)$, а также, что полюсы на мнимой оси могут быть только простыми, не кратными.

Напомним, что любой двухполюсник, назовем его исходным, с входным сопротивлением $Z(p)$ может быть сопоставлен с дуальным ему двухполюсником. Входная проводимость дуального двухполюсника $Y_д(p)$ равна входному сопротивлению исходного двухполюсника, деленному на некоторый коэффициент пропорциональности k, имеющий размерность Ом² (об этом см. в курсе ТОЭ):

$$Y_д(p)=Z(p)/k.$$

Следовательно, входное сопротивление дуального двухполюсника

$$Z_д(p)=k/Z(p).$$

Таким образом, полюсы исходного двухполюсника являются нулями дуального и наоборот. Поскольку нули дуального двухполюсника должны удовлетворять требованиям, предъявляемым к нулям любых двухполюсников, то этим же требованиям должны удовлетворять и полюсы исходного.

§ 1.9. ОБ УСЛОВИИ, КОТОРОМУ ДОЛЖНА УДОВЛЕТВОРЯТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ $Z(p)$ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМОГО ДВУХПОЛЮСНИКА, КОГДА ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ p БОЛЬШЕ НУЛЯ

В процессе работы двухполюсника комплексное число p может принимать самые различные значения, в том числе и такие, при которых действительная часть его больше нуля. Это может иметь место, например, когда на вход двухполюсника воздействует синусоидальное напряжение с нарастающей по экспоненциальному закону амплитудой.

Для всех физически реализуемых двухполюсников $\operatorname{Re} Z(p) \geqslant 0$, если $\operatorname{Re} p \geqslant 0$. Доказать это можно, используя два положения.

1. Действительная часть входного сопротивления любого линейного пассивного двухполюсника на переменном токе при $p = j\omega$, т. е. $\operatorname{Re} Z(j\omega) = R$, представляющая собой активную составляющую R входного сопротивления $Z(j\omega)$, физически (пассивный двухполюсник является потребителем электрической энергии: $P = I^2 \operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$) есть величина действительная.

2. Максимум модуля любой функции комплексного переменного, регулярной и непрерывной в области, ограниченной некоторым контуром, и на самом контуре, достигается на самом контуре. Это положение следует из формулы Коши.

Положим, что на плоскости комплексного переменного z есть некоторая область, ограниченная контуром C, и внутри этой области и на контуре функция $f(z)$ регулярна и непрерывна. Тогда согласно формуле Коши значение функции комплексного переменного в некоторой точке z

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(t)}{t - z} dt,$$

где t — переменная, по которой производится интегрирование.

Возьмем вместо функции $f(z)$ функцию $[f(z)]^n$, где $n > 0$. Если $f(z)$ регулярна, то и функция $[f(z)]^n$ тоже регулярна и потому к ней применима формула Коши:

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f^n(t)\, dt}{t - z}.$$

Чтобы показать, что модуль функции $f(z)$ во всех точках области внутри контура остается меньше максимального значения модуля функции $f(z)$ на контуре (назовем его M_c), положим, что кратчайшее расстояние от точки z до контура C равно δ, а l есть длина кривой, ограничивающей контур C.

Тогда оценкой функции $|f(z)|^n$ может служить выражение

$$|f(z)|^n \leqslant M_c^n l/(2\pi\delta).$$

Отсюда следует, что

$$|f(z)| \leqslant [1/(2\pi\delta)]^{1/n} M_c.$$

Полагая $n \to \infty$ и имея в виду, что

$$\lim_{n \to \infty} [1/(2\pi\delta)]^{1/n} = 1,$$

получаем

$$|f(z)| \leqslant M_c.$$

Другими словами, модуль функции $f(z)$ в любой точке внутри области остается меньше, чем модуль функции на контуре этой области. В нашем случае роль области играет правая полуплоскость, а границей области является мнимая ось. В том случае, когда на мнимой оси будут находиться полюсы функции $Z(p)$, они должны быть обойдены справа дугами бесконечно малого радиуса и этим исключены из рассматриваемой области (чтобы сохранить условие регулярности функции в рассматриваемой области).

Поскольку действительные и мнимые части $Z(p)$ являются гармоническими функциями, удовлетворяющими принципу максимума, то $\operatorname{Re} Z(p)$ также достигает максимума и минимума на мнимой оси плоскости p. Но на мнимой оси $p = j\omega$, а $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geqslant 0$; поэтому при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ $\operatorname{Re} Z(p) \geqslant 0$.

В литературе по синтезу цепей широко используют термин *«положительная действительная функция»*. Этот термин был введен Бруне в 1931 г.

Положительной действительной называют функцию:

1) действительная часть которой положительна, если положительна действительная часть p;

2) действительную при действительном (не комплексном) p.

Поскольку входное сопротивление двухполюсника $Z(p)$ удовлетворяет этим свойствам, оно является положительной действительной функцией.

§ 1.10. УСЛОВИЯ, КОТОРЫМ ДОЛЖНА УДОВЛЕТВОРЯТЬ ФУНКЦИЯ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМОГО ДВУХПОЛЮСНИКА

Прежде чем сформулировать условия, которым должна удовлетворять функция входного сопротивления физически реализуемого двухполюсника, обратим внимание на два положения.

1. Поскольку действительные части корней уравнений $N(p) = 0$ и $M(p) = 0$ $\left[Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}\right]$ не могут быть положительными, то эти уравнения удовлетворяют условиям Гурвица. Но из условий Гурвица вытекает лемма о том, что в характеристическом уравнении, корни которого имеют отрицательные вещественные части, все коэффициенты должны быть положительными. Следовательно, все коэффициенты уравнений $N(p) = 0$ и $M(p) = 0$ для физически осуществимых двухполюсников должны быть положительными.

2. В § 1.1 говорилось о том, что наивысшие (наинизшие) степени p в числителе и в знаменателе $Z(p)$ не могут отличаться

более чем на 1. Отсюда ясно, что при $p \to \infty$ и $p \to 0$ сопротивление $Z(p)$ либо постоянно, либо пропорционально $1/p$ или p.

Если допустить, что степень $M(p)$ больше степени $N(p)$, например, на 2, то при $p \to \infty$ у $Z(p)$ имелся бы полюс второй кратности. Можно принять, что корни в бесконечности лежат на мнимой оси (мнимая ось тоже простирается в бесконечность). Но при этом свободная составляющая нарастала бы до бесконечности [см. формулу (1.8)]. Следовательно, допущение о возможности того, что максимальные степени p у $M(p)$ и $N(p)$ могут отличаться более чем на 1, противоречит физике явлений.

Аналогично доказываем, что минимальные степени $M(p)$ и $N(p)$ не могут отличаться более чем на 1. В этом случае при $p \to 0$ появились бы кратные корни, лежащие на мнимой оси.

Таким образом, условия, которым удовлетворяет функция входного сопротивления любого физически осуществимого двухполюсника, следующие:

1) все коэффициенты полиномов $N(p)$ и $M(p)$ должны быть не отрицательны (этот пункт вытекает из п. 3);

2) максимальные степени p в $N(p)$ и в $M(p)$ не могут отличаться более чем на 1; то же и в отношении минимальных степеней p;

3) в правой полуплоскости p отсутствуют нули и полюсы $Z(p)$;

4) нули и полюсы уравнения $Z(p) = 0$, расположенные на мнимой оси, могут быть только простыми, не кратными;

5) $\operatorname{Re} Z(p)$ при $p = j\omega$ должна быть положительна или равна нулю.

Из перечисленных пяти требований основным является пятое. Если оно выполняется, то выполняются и остальные четыре. Требования в п. 1—4 свидетельствуют о том, что полиномы $N(p)$ и $M(p)$ в (1.1) должны быть полиномами Гурвица.

Если степени полиномов $N(p)$ и $M(p)$ достаточно высоки, например имеют пятый, шестой или седьмой порядок, то проверку выполнения пятого условия производят, используя, например, *метод Штурма*.

Согласно этому методу исследуемую функцию представляют в виде

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{n_1(p) + n_2(p)}{m_1(p) + m_2(p)},$$

где $n_1(p)$ и $m_1(p)$ — полиномы с четными степенями p; $n_2(p)$ и $m_2(p)$ — полиномы с нечетными степенями p.

Заменив p на $j\omega$, найдем

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{n_1(j\omega)\, m_1(j\omega) - n_2(j\omega)\, m_2(j\omega)}{m_1^2(j\omega) - m_2^2(j\omega)}.$$

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad n_1 m_1 - n_2 m_2 = P_0 \geqslant 0.$$

P_0 является функцией ω^2. Обозначим $\omega^2 = x$. $P_0(\omega^2) = P_0(x)$ называют первой функцией Штурма. Первую производную от нее называют второй функцией Штурма $P_1 = P_0'(x)$.

Третью функцию Штурма $P_2(x)$ получают как минус остаток от деления $P_0(x)/P_1(x)$. Деление останавливают, когда степень x в остатке становится ниже степени x в делителе на 1.

Четвертую функцию Штурма $P_3(x)$ получают как минус остаток от деления $P_1(x)/P_2(x)$, прекратив деление при том же условии.

Нахождение последующих функций Штурма заканчивают, когда в результате деления получена вещественная величина. После нахождения функций

Штурма определяют знаки их при $x=x_1=0$ и при $x=x_2=\infty$. Этим значениям $x=\omega^2$ соответствуют частоты 0 и ∞. Затем составляют табличку знаков функций Штурма при $x_1=0$ и при $x_2=\infty$. Например:

	P_0	P_1	P_2	P_3
$x_1=0$	+	−	+	+
$x_2=\infty$	+	+	−	−

В заключение подсчитывают число перемен знаков w_1 в первом ряду таблицы при x_1 и во втором ряду таблицы w_2 при x_2. В примере $w_1=2$ и $w_2=1$.

Если разность w_1-w_2 равна нулю (в примере она равна 1), то при изменении x от 0 до ∞, а следовательно, и изменении ω от 0 до ∞ исследуемая функция $P_0(x)=n_1m_1-n_2m_2$ не изменяет знака. Это означает, что если $P_0(x)$ положительно при $x=x_1=0$, то оно положительно и во всем диапазоне изменения x от 0 до ∞. Если же $w_1-w_2\neq 0$, это означает, что при некотором значении x функция $P_0(x)$, а значит, и $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$ меняют знак, т. е. условие $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)\geqslant 0$ во всем диапазоне частот не выполняется.

Рассмотрим простейший пример, в котором все операции проведены полностью.

Методом Штурма проверим выполнение условий $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)\geqslant 0$ для функции

$$Z(p)=\frac{2p^3+3p^2+2p+1}{2p^2+2p+1}.$$

В примере $n_1=1+3p^2$; $n_2=2p^3+2p$; $m_1=1+2p^2$; $m_2=2p$. Разность $n_1m_1-n_2m_2=2p^4+p^2+1$.

Заменяем $p^2=-\omega^2=-x$ и $p^4=\omega^4=x^2$. Первая функция Штурма $P_0=2x^2-x+1$. Вторая функция Штурма $P_1=P_0'=4x-1$. Производим деление $P_0/P_1=0{,}5x-0{,}125+0{,}875/(4x-1)$. Следовательно, третья функция Штурма $P_2=-0{,}875$. Составляем таблицу знаков функций Штурма при $x=0$ и $x=\infty$:

	P_0	P_1	P_2	w
$x=0$	+	−	−	1
$x=\infty$	+	+	−	1

Разность $w_1-w_2=0$, поэтому для исследуемой функции $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)\geqslant 0$.

В заключение отметим:

1. Если при использовании метода Штурма окажется, что первая функция Штурма $P_0(x)$ имеет кратные корни x_k кратности k, то необходимо соблюдать известную осторожность в применении данного метода. В этом случае на этапе составления некоторой (скажем, $m+1$) функции Штурма $\frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)}$ в числителе и знаменателе окажутся либо одинаковые, либо различающиеся на единицу степени бинома $(x-x_k)^k$, которые сократятся, и деление будет закончено преждевременно. В этом случае по величине разности w_1-w_2 нельзя будет судить о том, сохраняет ли $P_0(x)$ одинаковые знаки в интервале от $x=0$ до $x=\infty$.

Если такая ситуация возникнет, то следует разложить $P_0(x)$ на множители (среди них будут и кратные) и о характере изменения знаков P_0 судить по этим множителям. Например, проверим методом Штурма выполнение условия $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)\geqslant 0$ для $Z(p)=\frac{p^2+p+1}{p^2+p+4}$. В этом примере $P_0(x)=x^2-4x+4$;

$P_1(x)=2x-4$; $P_2(x)=0{,}5(x-2)$. Остаток отсутствует, деление закончилось преждевременно. Это свидетельствует о наличии кратного корня у $P_0(x)$. Действительно, $P_0(x)=(x-2)^2$. В данном примере в интервале изменения x от 0 до ∞ $P_0(x)$ остается положительным. Следовательно, условие $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)\geqslant 0$ для исследуемого $Z(p)$ выполняется.

2. Кроме метода Штурма известны и другие методы для проверки условия $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)\geqslant 0$, в частности метод Труди и метод Талбота*.

§ 1.11. ПОНЯТИЕ О ДВУХПОЛЮСНИКАХ ТИПА МИНИМАЛЬНОГО РЕАКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ТИПА МИНИМАЛЬНОЙ РЕАКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

В литературе можно встретить термины «двухполюсник типа минимального реактивного сопротивления» и «двухполюсник типа минимальной реактивной проводимости».

Под первым из них понимают двухполюсник, $Z(p)$ которого не имеет полюсов на мнимой оси плоскости p; под вторым — двухполюсник, $Z(p)$ которого не имеет нулей на мнимой оси плоскости p.

§ 1.12. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЛИ ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В ВИДЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ

Непрерывной дробью называют дробь вида

$$\cfrac{1}{C_1+\cfrac{1}{C_2+\cfrac{1}{C_3+\cfrac{1}{C_4+\ldots}}}}$$

К подобному выражению могут быть сведены выражения для входного сопротивления или входной проводимости двухполюсника, образованного последовательно и параллельно соединенными сопротивлениями (лестничные схемы).

Так, входное сопротивление последовательно соединенных L_1 и C_1

$$Z(p)=pL_1+\frac{1}{pC_1}$$

и проводимость

$$Y(p)=\frac{1}{pL_1+\cfrac{1}{pC_1}}.$$

Для схемы рис. 1.7, *а*

$$Y(p)=pC_2+\cfrac{1}{pL_1+\cfrac{1}{pC_1}}$$

---

* С ними можно ознакомиться по книге: К а р н и Ш. Теория цепей. М., Связь, 1973.

$$Z(p)=\cfrac{1}{pC_2+\cfrac{1}{pL_1+\cfrac{1}{pC_1}}}.$$

Аналогичным образом можно составить выражение для входного сопротивления или входной проводимости и более сложных схем.

Например, для схемы рис. 1.7, *б*, в которой сопротивления продольных ветвей равны $Z_1, Z_3, \ldots, Z_{n-1}$, а проводимости попе-

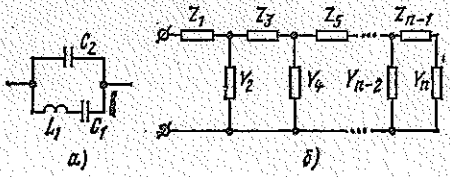


Рис. 1.7

речных ветвей $Y_2, Y_4, \ldots, Y_{n-2}, Y_n$, не конкретизируя характер сопротивлений и проводимостей, можно записать (см. также § 4.3)

$$Y=\cfrac{1}{Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\ldots}}}}.$$

Лестничные схемы называют часто каноническими схемами Кауэра [45].

§ 1.13. ЧЕТНОСТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И НЕЧЕТНОСТЬ МНИМОЙ ЧАСТЕЙ $Z(p)$ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Входное сопротивление двухполюсника при частоте ω переменного тока можно получить из (1.1) если в нем p заменить на $j\omega$. Произведя такую замену и объединив действительные и мнимые части в числителе и знаменателе, получим

$$Z(j\omega)=\frac{(a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots)+j(a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots)}{(b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\ldots)+j(b_1\omega-b_3\omega^3+b_5\omega^5-\ldots)}=\frac{N_1+jN_2}{M_1+jM_2}, \quad (1.9)$$

где

$$N_1=a_0-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots,$$
$$N_2=a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots,$$
$$M_1=b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\ldots,$$
$$M_2=b_1\omega-b_3\omega^3+b_5\omega^5-\ldots.$$

Здесь N_1 и M_1 — четные функции частоты, а N_2 и M_2 — нечетные.

Входное сопротивление двухполюсника в установившемся синусоидальном режиме имеет некоторую действительную и мнимую части. В соответствии с принятыми обозначениями назовем их A и jB:

$$Z(j\omega) = A + jB.$$

Выразим A и B через N_1, M_1, N_2 и M_2. Для этого умножим и числитель и знаменатель правой части уравнения (1.9) на $M_1 - jM_2$. Получим

$$Z(j\omega) = A + jB = \frac{(N_1 + jN_2)(M_1 - jM_2)}{(M_1 + jM_2)(M_1 - jM_2)} = \\ = \frac{(N_1M_1 + N_2M_2) + j(M_1N_2 - N_1M_2)}{M_1^2 + M_2^2}.$$

Отсюда, приравнивая действительные и затем мнимые части, находим

$$A = \frac{N_1M_1 + N_2M_2}{M_1^2 + M_2^2}$$

и

$$B = \frac{N_2M_1 - N_1M_2}{M_1^2 + M_2^2}.$$

Так как произведения двух четных функций N_1 и M_1 и произведения двух нечетных функций N_2 и M_2 являются четными функциями частоты, то $A(-\omega) = A(\omega)$, т. е. A есть четная функция частоты. Аналогичным путем убеждаемся в том, что $B(-\omega) = -B(\omega)$, т. е. B — нечетная функция частоты.

§ 1.14. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВУХПОЛЮСНИКА ПРИ МАЛЫХ И БОЛЬШИХ p В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Для описания поведения аналитической функции комплексного переменного (комплексной частоты) p при малых и больших его значениях по модулю эти функции раскладывают в степенные ряды. Причем разложение в ряд при малых $|p|$ производят по степеням p, а при больших $|p|$ — по степеням $1/p$. Для дальнейшего представляет интерес разложение в ряд функции

$$Z(p) = N(p)/M(p).$$

При $|p| \to 0$ путем деления $N(p)$ на $M(p)$ получим

$$Z(p) = A_0 + B_0p + T(p^2), \qquad (1.10)$$

где $T(p^2)$ — слагаемые ряда, изменяющиеся не медленнее, чем p^2. При $|p| \to \infty$

$$Z(p) = A_\infty - B_\infty/p + T(1/p^2), \qquad (1.11)$$

где $T(1/p^2)$ — сумма всех слагаемых ряда, изменяющихся не медленнее, чем $1/p^2$.

Если $p=j\omega$, то при малых ω (когда $\omega\to 0$), т. е. при малых $|p|$, ряд для $Z(j\omega)$ можно записать следующим образом:

$$Z(j\omega)=A_0+j\omega B_0+T(\omega^2), \qquad (1.10')$$

где A_0 — физически активное сопротивление двухполюсника при нулевой частоте.

При больших ω (когда $\omega\to\infty$)

$$Z(j\omega)=A_\infty+j\frac{B_\infty}{\omega}+T\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \qquad (1.11'')$$

где A_∞ — физически активное сопротивление двухполюсника при бесконечно большой частоте; B_∞ — равно произведению угловой частоты ω на реактивное сопротивление двухполюсника $B(\omega)$ при $\omega\to\infty$:

$$B_\infty=[\omega B(\omega)]_{\omega\to\infty}. \qquad (1.12)$$

§ 1.15. ТЕОРЕМА ОБ ИНТЕГРАЛЕ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ

Входное сопротивление двухполюсника при частоте ω равно $Z=A+jB$. Образуем разность $Z-A_\infty$, которая будет некоторой функцией частоты, а следовательно, и некоторой функцией p.

Вычислим контурный интеграл от этой функции по контуру C (рис. 1.8). Контур составлен мнимой осью и полуокружностью S_1 бесконечно большого радиуса. В силу аналитичности рассматриваемой функции по теореме Коши

$$\int (Z-A_\infty)\,dp=0.$$

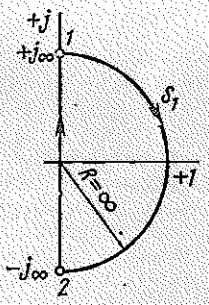


Рис. 1.8

Представим интеграл в виде суммы интегралов по мнимой оси и по полуокружности S_1:

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty}(Z-A_\infty)\,dp+\int_{S_1}(Z-A_\infty)\,dp=0. \qquad (1.13)$$

На мнимой оси

$$Z(p)=Z(j\omega)=A+jB$$

и

$$dp=j\,d\omega.$$

На полуокружности S_1, когда радиус $R\to\infty$, в соответствии с (1.11)

$$Z-A_\infty=-B_\infty/p.$$

Таким образом,

$$j\int_{-\infty}^{\infty}(A-A_\infty)\,d\omega-\int_{-\infty}^{\infty}B\,d\omega-\int_{S_1}\frac{B_\infty}{p}\,dp=0.$$

Так как $B=B(\omega)$ есть нечетная функция частоты (см. § 1.13), то

$$\int_{-\infty}^{\infty}B\,d\omega=0.$$

Если взять интеграл $\int\limits_{S_1} \frac{B_\infty}{p}\,dp$ по полуокружности S_1 и учесть соотношение (1.4), получим

$$\int\limits_{S_1} \frac{B_\infty}{p}\,dp = B_\infty \int\limits_{S_1} \frac{dp}{p} = -j\pi B_\infty.$$

Минус в правой части свидетельствует о том, что интегрирование происходило по часовой стрелке ($\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = -\pi/2$, $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi$). Запишем (1.13) после сокращения j в таком виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (A - A_\infty)\,d\omega = -\pi B_\infty.$$

Поскольку $A = A(\omega)$ есть четная функция частоты (см. § 1.13), интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ можно заменить двумя интегралами от 0 до ∞. Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\infty} (A - A_\infty)\,d\omega = -\frac{\pi}{2} B_\infty. \qquad (1.14)$$

Формулу (1.14) называют *интегралом от действительной части входного сопротивления двухполюсника.* Для любого двухполюсника площадь, ограниченная функцией $A - A_\infty$ и осью ω, пропорциональна величине B_∞. Если заменить в (1.14) B_∞ на $[\omega B(\omega)]$, то

$$\int\limits_{0}^{\infty} (A - A_\infty)\,d\omega = -\frac{\pi}{2} [\omega B(\omega)]_{\omega\to\infty}. \qquad (1.14')$$

Пример 1.1. Применить формулу (1.14) к схеме рис. 1.9, *а* и проверить результат непосредственным интегрированием.

Решение. Входное сопротивление

$$Z(p) = R/(1 + RCp).$$

Заменим p на $j\omega$ и найдем действительную и мнимую части:

$$Z(j\omega) = \frac{R(1 - RCj\omega)}{(1 + jRC\omega)(1 - j\omega RC)} = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} - j\frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2};$$

$$A(\omega) = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2}; \quad B(\omega) = -\frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}.$$

Найдем A_∞ и B_∞:

$$A_\infty = \underset{\omega\to\infty}{A} = 0; \quad B_\infty = [\omega B(\omega)]_{\omega\to\infty} = -1/C.$$

В соответствии с формулой (1.14)

$$\int\limits_{0}^{\infty} [A - A_\infty]\,d\omega = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{C}\right) = \frac{\pi}{2C}. \qquad (1.14'')$$

На рис. 1.9, *б* изображены кривые $A=f(\omega)$ для двух сопротивлений R схемы рис. 1.9, *а*; причем $R_2 > R_1$. Из формулы (1.14″) следует, что площадь, ограниченная кривой $A(\omega)$ и осью ω для схемы рис. 1.9, *а*, не зависит от активного сопротивления R и обратно пропорциональна емкости C. Следовательно, площади под обеими кривыми рис. 1.9, *б* одинаковы. Проверим формулу (1.14″) путем непосредственного интегрирования:

$$\int_0^\infty A\,d\omega = \int_0^\infty \frac{R\,d\omega}{1+(RC\omega)^2} =$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{C}\operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2C}$$

$$(x = RC\omega).$$

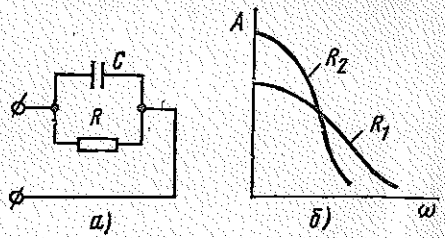


Рис. 1.9

В литературе можно встретить различные формы записи теоремы об интеграле от действительной части.

Так, в книге Боде [2] приведены восемь различных форм записи теоремы.

В дополнение к формулам (1.14) и (1.14′) рассмотрим еще две формы записи этой теоремы. Если

$$Z(j\omega) = |Z(j\omega)|\,e^{j\Theta(\omega)},$$

то

$$\ln Z(j\omega) = \ln|Z(j\omega)| + j\Theta(\omega).$$

Заменив $A(\omega)$ в формуле (1.14) на $\ln|Z(j\omega)|$ и $B(\omega)$ на $\Theta(\omega)$, получим

$$\int_0^\infty \ln|Z(j\omega)|\,d\omega = [\omega\Theta(\omega)]_{\omega\to\infty}. \qquad (1.15)$$

Еще одну форму записи интеграла от действительной части получим путем следующих преобразований. В правой части формулы

$$\int_0^\infty (A - A_\infty)\,d\omega = -\frac{\pi}{2}B_\infty$$

обозначим $A - A_\infty = u$ и $d\omega = dv$ и произведем интегрирование по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du; \quad v=\omega; \quad du/d\omega = dA/d\omega;$$

$$\int_0^\infty (A - A_\infty)\,d\omega = [\omega(A - A_\infty)]_0^\infty - \int_0^\infty \omega\frac{dA}{d\omega}\,d\omega.$$

Первое слагаемое правой части последней строки равно нулю как при $\omega=\infty$, так и при $\omega=0$. Поэтому

$$\int_0^\infty (A-A_\infty)\,d\omega=-\int_0^\infty \omega\,\frac{dA}{d\omega}\,d\omega=-\frac{\pi}{2}\,B_\infty.$$

Введя ω под знак дифференциала, получим

$$\int_0^\infty \frac{dA}{d\omega}\,d(\omega)^2=\pi B_\infty. \qquad (1.16)$$

Из формулы (1.16) следует, что площадь, ограниченная кривой $dA/d\omega$ и осью ω^2, для данной цепи зависит только от значения B_∞.

§ 1.16. ТЕОРЕМА ОБ ИНТЕГРАЛЕ ОТ МНИМОЙ ЧАСТИ

Чтобы получить теорему об интеграле от мнимой части, следует осуществить преобразования над функцией $Z(p)/p$, подобные тем, которые выполнены в § 1.15.

Деление функции $Z(p)$ на p приводит к тому, что действительная часть заменяется мнимой:

$$\frac{Z(j\omega)}{j\omega}=\frac{A+jB}{j\omega}=\frac{B}{\omega}-j\,\frac{A}{\omega}.$$

Функция $Z(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости. Функция $Z(p)/p$ имеет полюс на мнимой оси в начале координат.

Чтобы можно было использовать теорему Коши, возьмем контур интегрирования (рис. 1.10), состоящий из мнимой оси, полуокружности S_1 с бесконечно малым радиусом ρ, которой обходим полюс в начале координат, и полуокружности S_2 радиусом R, стремящимся к бесконечности. Внутри этого контура и на самом контуре функция $Z(p)/p$ является аналитической и потому по теореме Коши

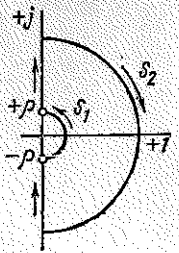


Рис. 1.10

$$\int_C \frac{Z(p)}{p}\,dp=0;$$

$$\int_C \frac{Z(p)}{p}\,dp=\int_{-j\infty}^{-\rho}\frac{Z(p)}{p}\,dp+\int_{\rho}^{+j\infty}\frac{Z(p)}{p}\,dp+$$

$$+\int_{S_1}\frac{Z(p)}{p}\,dp+\int_{S_2}\frac{Z(p)}{p}\,dp=0.$$

При интегрировании по мнимой оси $Z(p)=Z(j\omega)$. При интегрировании по полуокружности S_1, когда $\rho\to 0$, в соответствии с формулой (1.10) полагаем $Z(p)=A_0$ и при интегрировании по полуокружности S_2, когда $|p|\to\infty$, в соответствии с (1.11)

$Z(p) = A_\infty$. Получим

$$\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{Z(j\omega)}{j\omega} d\omega + \int_{\rho}^{\infty} \frac{Z(j\omega)}{\omega} d\omega + A_0 \int_{S_1} \frac{dp}{p} + A_\infty \int_{S_2} \frac{dp}{p} = 0.$$

Если радиус ρ полуокружности S_1 будет стремиться к нулю, а радиус полуокружности S_2 — к бесконечности, то можно объединить первое и второе слагаемые левой части последней строки, заменив в них $Z(j\omega)$ на $A + jB$.

Кроме того, следует учесть, что в соответствии с формулой (1.4)

$$A_0 \int_{S_1} \frac{dp}{p} = j\pi A_0$$

и

$$A_\infty \int_{S_2} \frac{dp}{p} = -j\pi A_\infty.$$

Знак минус в правой части последнего выражения является следствием того, что движение изображающей точки по контуру S_2 происходило по часовой стрелке.

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A + jB}{\omega} d\omega + j\pi (A_0 - A_\infty) = 0.$$

$A(\omega)$ — функция четная, но $A(\omega)/\omega$ — функция нечетная. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} d\omega = 0.$$

В силу четности функции $B(\omega)/\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} d\omega = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} d\omega.$$

Следовательно,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{B(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} (A_\infty - A_0). \qquad (1.17)$$

Формула (1.17) представляет собой математическую запись теоремы об интеграле от мнимой части.

Согласно этой теореме интеграл от $B(\omega)/\omega$ по ω для любого двухполюсника типа минимального реактивного сопротивления не зависит от вида характеристики $A(\omega)$ и определяется только разностью значений активных сопротивлений двухполюсника при бесконечно большой и нулевой частотах.

В книге Боде [2] приведены еще три формы записи этой теоремы. Рассмотрим одну из них.

Учтем, что $d\omega/\omega = d(\ln\omega)$ и обозначим $\ln\omega = u$; тогда (1.17) можно записать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(e^u)\,du = \frac{\pi}{2}(A_\infty - A_0). \qquad (1.18)$$

Пример 1.2. Применить теорему об интеграле от мнимой части к схемам рис. 1.11, *а*, *б*.

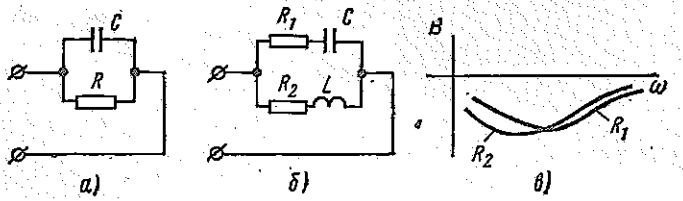


Рис. 1.11

Решение. Для схемы рис. 1.11, *а*:

$$A(\omega) = \frac{R}{1+(RC\omega)^2}; \quad A_0 = A(\omega)_{\omega=0} = R; \quad A_\infty = A(\omega)_{\omega=\infty} = 0;$$

$$B(\omega) = -\frac{\omega CR^2}{1+\omega^2C^2R^2}.$$

Зависимости $B = f(\omega)$ изображены на рис. 1.11, *в*.

Следовательно, в соответствии с формулой (1.17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(e^u)\,du = -\frac{\pi}{2}R.$$

Для схемы рис. 1.11, *б*: $A_0 = R_2$, $A_\infty = R_1$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(e^u)\,du = \frac{\pi}{2}(R_1 - R_2).$$

Теоремы § 1.15 и 1.16 используют для расчета сложных схем, в частности, усилителей с обратной связью (см. [2]).

§ 1.17. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЯМИ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВУХПОЛЮСНИКА НА ЛЮБЫХ ЧАСТОТАХ

Составим функцию $Z(p)/(p - j\omega_c)$. Эта функция имеет полюс при $p = j\omega_c$. Подсчитаем контурный интеграл от этой функции (в смысле главного значения) по контуру C, изображенному на рис. 1.12. Учтем, что внутри контура и на контуре рассматриваемая функция аналитична.

По теореме Коши

$$\int_C \frac{Z(p)}{p-j\omega_c}\,dp=0.$$

Интеграл разобьем на сумму четырех интегралов:

$$\int_{-j\infty}^{j(\omega_c-\rho)} \frac{Z(p)}{p-j\omega_c}\,dp+\int_{j(\omega_c+\rho)}^{j\infty} \frac{Z(p)}{p-j\omega_c}\,dp+$$
$$+\int_{S_1} \frac{Z(p)}{p-j\omega_c}\,dp+\int_{S_2} \frac{Z(p)}{p-j\omega_c}\,dp=0.$$

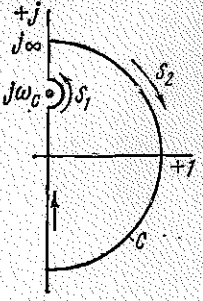


Рис. 1.12

На полуокружности S_2 при $|p|\to\infty$ $Z(p)\approx A_\infty$.

На полуокружности S_1 $Z(p)=Z(j\omega_c+\rho e^{j\psi})$, где $\rho\to 0$, а угол ψ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

На мнимой оси $Z(p)=Z(j\omega)$.

Если на полуокружности S_1 радиус $\rho\to 0$, а на полуокружности S_2 радиус $R\to\infty$, то интегрирование по мнимой оси ($p=j\omega$) производится от $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(j\omega)}{\omega-\omega_c}\,d\omega+\int_{S_1} \frac{Z(j\omega_c+\rho e^{j\psi})}{\rho e^{j\psi}}\,d(j\omega_c+\rho e^{j\psi})+$$
$$+\int_{S_2} \frac{A_\infty}{p-j\omega_c}\,dp=0. \qquad (1.19)$$

Но

$$\int_{S_1} \frac{Z(j\omega_c+\rho e^{j\psi})}{\rho e^{j\psi}}\,d(j\omega_c+\rho e^{j\psi})=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Z(j\omega_c+\rho e^{j\psi})}{\rho e^{j\psi}}\,\rho e^{j\psi}\times$$
$$\times j\,d\psi=Z(j\omega_c)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} j\,d\psi=j\pi Z(j\omega_c);$$
$$d(j\omega_c+\rho e^{j\psi})=d(\rho e^{j\psi})=\rho e^{j\psi}j\,d\psi \quad (\omega_c=\text{const});$$

при $\rho\to 0$ $Z(j\omega_c+\rho e^{j\psi})\to Z(j\omega_c)$.

Таким образом, интеграл по полуокружности S_1, по которой обходим полюс $p=j\omega_c$, пропорционален сопротивлению $Z(p)$ при частоте ω_c. В свою очередь,

$$\int_{S_2} \frac{A_\infty}{p}\,dp=A_\infty\int \frac{dp}{p}=-j\pi A_\infty.$$

Подставим найденные значения в (1.19):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(j\omega)}{\omega-\omega_c}\,d\omega+j\pi\,[Z(j\omega_c)-A_\infty]=0. \qquad (1.20)$$

Поделим обе части (1.20) на π, вместо $Z(j\omega)$ подставим $A(\omega)+jB(\omega)$, а вместо $Z(j\omega_c)$ подставим $A(\omega_c)+jB(\omega_c)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)+jB(\omega)}{\omega-\omega_c}d\omega=-j[A(\omega_c)-A_\infty+jB(\omega_c)].$$

Равенство действительных частей последней строки дает

$$B(\omega_c)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega-\omega_c}d\omega; \qquad (1.21)$$

равенство мнимых —

$$A(\omega_c)-A_\infty=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(\omega)}{\omega-\omega_c}d\omega. \qquad (1.22)$$

Перепишем (1.21) следующим образом:

$$B(\omega_c)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega-\omega_c}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{A(\omega)}{\omega-\omega_c}d\omega.$$

Во втором интеграле правой части заменим переменную интегрирования ω на $-\omega$. При этом учтем, что $A(-\omega)=A(\omega)$; $\omega-\omega_c\to-(\omega+\omega_c)$, а пределы интегрирования второго интеграла будут 0 и ∞ и появится знак минус перед интегралом. Тогда

$$B(\omega_c)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega-\omega_c}d\omega-\int_{0}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega+\omega_c}d\omega\right]. \qquad (1.23)$$

Физически слагаемое $\int_{0}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega+\omega_c}d\omega$ учитывает, что полюсу $p_1=j\omega_c$ обязательно сопутствует полюс $p_2=-j\omega_c$. Так как $\frac{1}{\omega-\omega_c}-\frac{1}{\omega+\omega_c}=\frac{2\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2}$, формулу (1.23) можно переписать следующим образом:

$$B(\omega_c)=\frac{2}{\pi}\omega_c\int_{0}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega^2-\omega_c^2}d\omega. \qquad (1.24)$$

Аналогично преобразуем (1.22):

$$A(\omega_c)-A_\infty=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega B(\omega)}{\omega^2-\omega_c^2}d\omega. \qquad (1.25)$$

Формула (1.24) дает возможность найти мнимую часть входного сопротивления на некоторой частоте ω_c, т. е. $B(\omega_c)$, по вещественной частотной характеристике $A(\omega)$, заданной (известной) в диапазоне частот от 0 до ∞.

Формула (1.25) дает возможность определить действительную часть входного сопротивления на некоторой частоте ω_c, т. е. $A(\omega_c)$, по мнимой частотной характеристике $B(\omega)$, заданной в диапазоне частот от 0 до ∞.

Рассмотрим, какое значение имеет множитель $1/(\omega^2-\omega_c^2)$ в подынтегральном выражении (1.24).

График функции $1/(\omega^2-\omega_c^2)=f(\omega)$ изображен на рис. 1.13. При $\omega=0$ функция равна $-1/\omega_c^2$. При $\omega=\omega_c$ функция претерпевает разрыв от $-\infty$ до $+\infty$. При $\omega\to\infty$ функция стремится к нулю. Рассматриваемая функция является функцией веса. Используя ее в качестве множителя, учитывают удельное влияние, оказываемое $A(\omega)$ на $B(\omega_c)$. При различных значениях ω величина $B(\omega_c)$ существенным образом зависит от величины $A(\omega)$ в диапазоне значений ω, близких к ω_c.

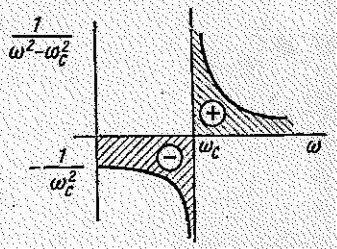


Рис. 1.13

Так как при $\omega_c\neq 0$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2-\omega_c^2}=0$$

(в смысле главного значения), то заштрихованная площадь на рис. 1.13 (сумма положительных и отрицательных площадей) равна нулю.

Аналогичное значение имеет множитель $1/(\omega^2-\omega_c^2)$ в подынтегральном выражении (1.25).

Пример 1.3. Для некоторого двухполюсника $A(\omega)=1/(1+\omega^2)$.

Требуется составить выражение $B(\omega)$ для этого двухполюсника.

Решение. По формуле (1.24)

$$B(\omega_c)=\frac{2}{\pi}\,\omega_c\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega^2-\omega_c^2)(1+\omega^2)},$$

но

$$\frac{1}{(\omega^2-\omega_c^2)(1+\omega^2)}=\frac{1}{(1+\omega_c^2)(\omega^2-\omega_c^2)}-\frac{1}{(1+\omega_c^2)(1+\omega^2)};$$

$$B(\omega_c)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\omega_c}{1+\omega_c^2}\left[\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2-\omega_c^2}-\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2}\right];$$

Так как $\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2-\omega_c^2}=0$, а $\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2}=\operatorname{arctg}\omega\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$, то

$$B(\omega_c)=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\omega_c}{1+\omega_c^2}\,\frac{\pi}{2}=-\frac{\omega_c}{1+\omega_c^2}.$$

Индекс c при интегрировании используется для того, чтобы отличить текущую частоту ω от фиксированной частоты ω_c. После интегрирования этот индекс следует отбросить. Таким образом, для рассматриваемого двухполюсника

$$B(\omega) = -\omega/(1+\omega^2).$$

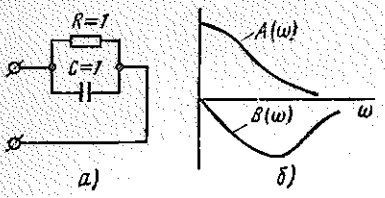


Рис. 1.14

Схема двухполюсника изображена на рис. 1.14, *а*, характеристики $A(\omega)$ и $B(\omega)$ — на рис. 1.14, *б*.

Глава вторая
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

§ 2.1. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Схема пассивного четырехполюсника является в общем случае многоконтурной. Для этой схемы можно составить уравнения по методу контурных токов. Если за первый контур принять контур, в который входит ветвь $1-1$ с источником синусоидальной э. д. с. $\dot{E}_1$ и током $I_{11} = \dot{I}_1$ (рис. 2.1), а за второй контур с выходной ветвью $2-2$ с током $\dot{I}_{22} = \dot{I}_2$ и выбрать контуры так, что э. д. с. $\dot{E}_1$ входит только в первый контур, а в остальных контурах нет э. д. с., то можно составить систему уравнений

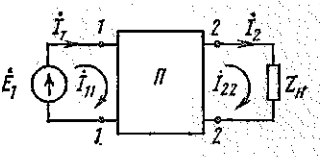


Рис. 2.1

$$\dot{I}_{11}Z_{11} + \dot{I}_{22}Z_{12} + \dot{I}_{33}Z_{13} + \ldots = E_1;$$
$$\dot{I}_{11}Z_{21} + \dot{I}_{22}Z_{22} + \dot{I}_{33}Z_{23} + \ldots = 0;$$
$$\dot{I}_{11}Z_{31} + \dot{I}_{22}Z_{32} + \dot{I}_{33}Z_{33} + \ldots = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда

$$\dot{I}_{11} = \dot{I}_1 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta};$$

$$I_{22} = I_2 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{21}}{\Delta}.$$

Здесь определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11}Z_{12}Z_{13}\ldots \\ Z_{21}Z_{22}Z_{23}\ldots \\ Z_{31}Z_{32}Z_{33}\ldots \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ_{mn} получают из определителя системы Δ путем вычеркивания m столбца и n строки и умножения полученного определителя на $(-1)^{m+n}$.

В теории четырехполюсника большую роль играет понятие о его передаточной функции. Под ней понимают отношение тока или напряжения на выходе четырехполюсника к току или напряжению на входе его.

Так, например, передаточная функция четырехполюсника по току

$$\dot{K}_I = \dot{I}_2/\dot{I}_1,$$

по напряжению

$$\dot{K}_U = \dot{U}_2/\dot{U}_1.$$

Из предыдущих формул следует, что

$$\dot{K}_I = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = \Delta_{21}/\Delta_{11}. \qquad (2.1)$$

Для перехода от синусоидального процесса к процессу при комплексной частоте заменим $j\omega$ на p, получим выражение для передаточной функции четырехполюсника на комплексной частоте p.

Следует обратить внимание на то, что определитель системы Δ симметричен относительно главной диагонали, проведенной из его верхнего левого угла в правый нижний угол, и корни его лежат только в левой части плоскости p.

Определители $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{mm}$, получающиеся при вычеркивании одинаковых строк и столбцов, также оказываются симметричными в указанном смысле.

Определитель $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ не обладает симметрией относительно своей главной диагонали, и корни его могут лежать как в левой, так и в правой части плоскости p. Это приводит к тому, что передаточная функция четырехполюсника в отличие от входного сопротивления двухполюсника может иметь нули, расположенные не только в левой, но и в правой части плоскости p.

Полюсы передаточной функции четырехполюсника, как и полюсы входного сопротивления двухполюсника, могут находиться только в левой части плоскости p.

§ 2.2. МИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ И НЕМИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Все четырехполюсники могут быть разделены на два класса — минимально фазовые и неминимально фазовые.

Минимально фазовыми называют четырехполюсники, все нули передаточной функции которых расположены в левой части плоскости p; *неминимально фазовыми* — такие, в которых хотя бы часть нулей передаточной функции находится в правой части плоскости p.

Разложим и числитель и знаменатель передаточной функции четырехполюсника $K(p)$ на множители:

$$K(p) = \frac{(p-p_1)(p-p_3)\ldots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)\ldots(p-p_m)}, \qquad (2.2)$$

где $p_1, p_3, \ldots, p_n$ — нули; $p_2, p_4, \ldots, p_m$ — полюсы передаточной функции.

И нули и полюсы в общем случае — некоторые комплексные числа. Если исследуется работа четырехполюсника в установившемся синусоидальном режиме при изменяющейся частоте ω, то вместо p в (2.2) следует подставить $j\omega$ (см. § 1.2).

Каждый из биномов $p-p_k$ можно представить в показательной форме в виде $p_k'' e^{j\psi_k}$, где p_k'' — модуль, а ψ_k — аргумент комплекса $p-p_k$. Угол ψ_k отсчитывают от оси $+1$ комплексной плоскости в направлении против часовой стрелки до положительного направления вектора $p-p_k$.

С учетом сказанного

$$K(p)=\frac{p_1'' p_3'' \cdots p_n''}{p_2'' p_4'' \cdots p_m''} e^{j[(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)-(\varphi_3+\varphi_4+\cdots+\varphi_m)]}. \qquad (2.3)$$

Чтобы пояснить, почему четырехполюсник, не имеющий нулей в правой полуплоскости, называют минимально фазовым, сравним выражения для двух передаточных функций:

$$K'(p)=\frac{p-p_1}{p-p_2} \text{ и } K''(p)=\frac{p-p_1'}{p-p_2}.$$

Положим, что p_1 и p_1' равны по модулю и действительны. Нуль p_1 первого выражения находится в левой части плоскости p (рис. 2.2, *а*), а нуль второго $p_1'=-p_1$ — в правой части плоскости p (рис. 2.2, *б*). Пусть на вход обоих четырехполюсников воздействует синусоидальное напряжение частоты ω. Некоторой конкретной частоте на комплексной плоскости соответствует точка a на оси $+j$. Образуем разности $p-p_1$ и $p-p_2$ на рис. 2.2, *а* и разности $p-p_1'$ и $p-p_2$ на рис. 2.2, *б*:

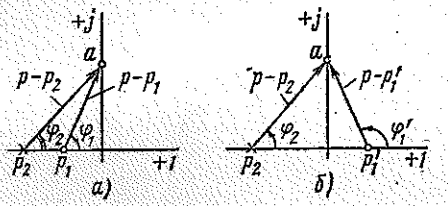


Рис. 2.2

$$\frac{p-p_1}{p-p_2}=\frac{p_1''}{p_2''}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)};\quad \frac{p-p_1'}{p-p_2}=\frac{p_1''}{p_2''}e^{j(\varphi_1'-\varphi_2)}.$$

Из рис. 2.2 видно, что отношение модулей

$$\left|\frac{p-p_1}{p-p_2}\right| \text{ и } \left|\frac{p-p_1'}{p-p_2}\right|$$

для обоих четырехполюсников одинаково, тогда как разности углов неодинаковы.

Разность углов $\varphi_1-\varphi_2$ (для первого четырехполюсника) меньше, чем разность углов $\varphi_1'-\varphi_2$ (для второго четырехполюсника).

Четырехполюсник, нули передаточной функции которого лежат в левой полуплоскости, называют минимально фазовым потому, что фаза его передаточной функции меньше фазы передаточной функции четырехполюсника, имеющего такое же значение модуля

передаточной функции, но хотя бы часть нулей которого находится в правой части плоскости p.

Необходимо подчеркнуть, что в минимально фазовых четырехполюсниках каждому значению модуля передаточной функции соответствует вполне определенное значение аргумента передаточной функции, тогда как в неминимально фазовом четырехполюснике нет однозначной зависимости между модулем и аргументом передаточной функции. Это имеет существенное значение в отношении реализации четырехполюсника по заданной для него амплитудно-частотной характеристике.

§ 2.3. МОСТОВЫЕ И СКРЕЩЕННЫЕ СХЕМЫ ФАЗОВОГО СДВИГА

На рис. 2.3, *а* изображена симметричная мостовая схема четырехполюсника. В этой схеме в каждые два противоположных плеча моста включены одинаковые сопротивления (Z_1 или соответственно Z_2). На выходе моста включено активное сопротивление R, равное входному сопротивлению схемы со стороны зажимов $1-1$, т. е. схема нагружена согласованно.

На рис. 2.3, *б* представлена симметричная скрещенная схема. Эта схема отличается от мостовой схемы рис. 2.3, *а* только несколько иным начертанием. Заметим, что на рисунках принято

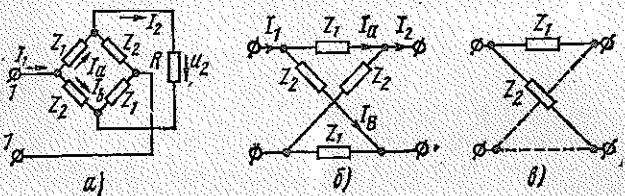


Рис. 2.3

изображать только по одному продольному сопротивлению Z_1 и по одному диагональному сопротивлению Z_2, а вместо второго продольного и второго диагонального элементов наносить пунктирные линии в соответствии с рис. 2.3, *в*.

Четырехполюсник, представленный на рис. 2.3, при условии, что произведение Z_1Z_2 — действительное число, а $R=\sqrt{Z_1Z_2}$, обладает тем свойством, что модуль передаточной функции его не зависит от частоты (от частоты зависит только аргумент передаточной функции).

Чтобы убедиться в этом, прежде всего составим уравнения по законам Кирхгофа, предварительно выбрав положительные направления для токов в соответствии с рис. 2.3, *а*:

$$I_a=I_b+I_2;\quad \dot{U}_1=I_aZ_1+I_bZ_2;\quad \dot{U}_2+I_aZ_1=I_bZ_2.$$

Отсюда

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2\frac{Z_1+Z_2}{Z_2-Z_1}+I_2\frac{2Z_1Z_2}{Z_2-Z_1};\quad I_2=\frac{\dot{U}_2}{R}.$$

Ток на входе схемы

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_a + \dot{I}_b = 2\dot{I}_a - \dot{I}_2 = \frac{2\dot{U}_2}{Z_2 - Z_1} + \frac{2Z_2}{Z_2 - Z_1}\frac{\dot{U}_2}{R} - \frac{\dot{U}_2}{R} = \dot{U}_2 \frac{2R + Z_1 + Z_2}{R(Z_2 - Z_1)}.$$

Входное сопротивление схемы

$$Z_{вх1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{(Z_1 + Z_2)R + 2Z_1Z_2}{2R + Z_1 + Z_2}.$$

Приравняв входное сопротивление схемы нагрузочному R, получим

$$R^2 = Z_1Z_2, \quad \text{или} \quad R = \sqrt{Z_1Z_2}. \qquad (2.4)$$

Из формулы (2.4) следует, что входное сопротивление схемы будет чисто резистивным, если произведение Z_1Z_2 будет представлять собой действительное число.

Передаточная функция по напряжению для схемы рис. 2.3

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{(Z_2 - Z)R}{(Z_1 + Z_2)R + 2Z_1Z_2}.$$

Подставим в нее $Z_2 = R^2/Z_1$. Получим

$$\dot{K}_U = \frac{\left(\frac{R^2}{Z_1} - Z_1\right)R}{\left(Z_1 + \frac{R^2}{Z_1}\right)R + 2R^2} = \frac{R^2 - Z_1^2}{Z_1^2 + 2RZ_1 + R^2}.$$

Отсюда

$$\dot{K}_U = \frac{R - Z_1}{R + Z_1}. \qquad (2.5)$$

Положим, что в схеме рис. 2.3 сопротивление Z_1 образовано емкостью C, сопротивление Z_2 индуктивностью L, а нагрузка чисто резистивная и равна R. Получающаяся при этом схема изображена на рис. 2.4, *а* (сопротивление R на схеме не показано).

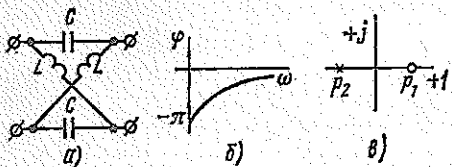


Рис. 2.4

При заданных R и C требуется найти значение индуктивности L, при котором модуль передаточной функции не будет зависеть от частоты (будет постоянен и равен 1), а от частоты будет зависеть только аргумент передаточной функции.

Составим выражения для Z_1 и Z_2: $Z_1 = 1/(pC)$, $Z_2 = pL$. Из соотношения (2.4) находим $R^2 = L/C$, отсюда $L = R^2C$.

В соответствии с (2.5)

$$K_U(p) = \frac{R - \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{RCp - 1}{RCp + 1};$$

$$K(j\omega) = \frac{RC\omega j - 1}{RC\omega j + 1} = K(\omega)\, e^{j\varphi}.$$

Модуль передаточной функции $K(\omega)=1$, а аргумент

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2RC\omega}{(RC\omega)^2-1}.$$

График зависимости $-\varphi=f(\omega)$ показан на рис. 2.4, *б*. Нули и полюсы передаточной функции (крестик и нулик) изображены на рис. 2.4, *в*.

В качестве второго примера рассмотрим свойства скрещенной схемы рис. 2.5, *а*.

Для нее

$$Z_1(p)=\frac{Lp}{LCp^2+1}\quad\text{и}\quad Z_2(p)=\frac{1+LCp^2}{Cp}.$$

Произведение

$$Z_1(p)\,Z_2(p)=L/C=R^2.$$

Передаточная функция по напряжению

$$K_U(p)=\frac{R-Z_1(p)}{R+Z_1(p)}=\frac{L\sqrt{LC}p^2-Lp+\sqrt{L/C}}{L\sqrt{LC}p^2+Lp+\sqrt{L/C}}=\frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p-p_2)(p-p_4)}.$$

Нули функции $K_U(p)$, например, при $L=C=2$ равны $p_{1,3}=0{,}496e^{\pm j59°30'}$, полюсы $p_{2,4}=0{,}49e^{\pm j120°30'}$.

Модуль $K_U(p)$ равен 1. Зависимость аргумента передаточной функции $\varphi=f(\omega)$ изображена на рис. 2.5, *б*.

Из рис. 2.5, *в* видно, что полюсы $K_U(p)$ являются зеркальным отображением нулей относительно вертикальной оси (оси $\pm j$).

В заключение отметим, что поскольку нули симметричной скрещенной (мостовой) схемы находятся в правой части плоскости p, то эти схемы являются неминимально фазовыми схемами.

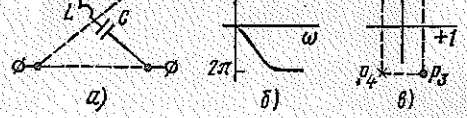


Рис. 2.5

Симметричные скрещенные схемы широко применяют в телефонии и в автоматике в качестве схем фазовой коррекции. С этой целью их включают последовательно с остальной частью схемы и они, не изменяя модуля передаточной функции, соответствующим образом меняют ее фазу (подробнее см. гл. 8).

§ 2.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НЕМИНИМАЛЬНО ФАЗОВОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Положим, что неминимально фазовый четырехполюсник имеет передаточную функцию, среди нулей которой есть один нуль p_1, находящийся в правой части плоскости p, а все остальные нули лежат в левой части плоскости p.

Запишем передаточную функцию этого четырехполюсника в таком виде:

$$K(p)=\frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_5)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\dots(p-p_m)}. \qquad (2.6)$$

Умножим правую часть (2.6) на $\frac{p+p_1}{p+p_1}$ и перепишем (2.6) так:

$$K(p)=K_1(p)\,K_2(p), \qquad (2.7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_1(p)&=\frac{(p+p_1)(p-p_3)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)\dots(p-p_m)};\\ K_2(p)&=\frac{p-p_1}{p+p_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

Первый множитель правой части (2.7), т. е. $K_1(p)$, представляет собой передаточную функцию некоторого минимально фазового четырехполюсника, который не имеет нулей в правой части плоскости p.

Второй множитель, т. е. $K_2(p)$, в соответствии с § 2.3 можно считать передаточной функцией некоторого симметричного скрещенного (мостового) согласованно нагруженного четырехполюсника, т. е. четырехполюсника чисто фазового сдвига.

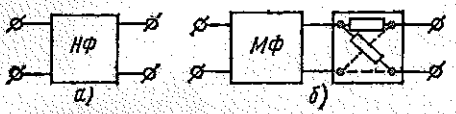


Рис. 2.6

Но известно, что передаточная функция двух каскадно включенных четырехполюсников равна произведению соответствующих передаточных функций этих четырехполюсников. Поэтому можно заменить неминимально фазовый четырехполюсник *НФ* (рис. 2.6, *а*) двумя каскадно соединенными четырехполюсниками (рис. 2.6, *б*), из которых один является минимально фазовым *МФ*, а второй четырехполюсником чисто фазового сдвига.

Аналогичным образом поступают и в том случае, когда передаточная функция неминимально фазового четырехполюсника имеет в правой части плоскости p не один нуль, а несколько. Например, при наличии в правой части плоскости p двух нулей p_1 и p_3 правую часть (2.6) следует умножить на $\frac{(p+p_1)(p+p_3)}{(p+p_1)(p+p_3)}$ и представить передаточную функцию в таком виде:

$$K(p)=\frac{(p+p_1)(p+p_3)(p-p_5)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\dots(p-p_m)}\,\frac{p-p_1}{p+p_1}\,\frac{p-p_3}{p+p_3}. \qquad (2.9)$$

В соответствии с (2.9) четырехполюсник с двумя нулями в правой части плоскости p можно заменить каскадно соединенными минимально фазовым четырехполюсником и двумя скрещенными согласованно нагруженными четырехполюсниками.

§ 2.5. УСЛОВИЯ, КОТОРЫМ ДОЛЖНЫ УДОВЛЕТВОРЯТЬ Z- И Y-ПАРАМЕТРЫ И ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Напомним основные уравнения пассивного четырехполюсника, записанные в Z-форме и затем в Y-форме.

Уравнения четырехполюсника в Z-форме:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12};$$
$$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}.$$

Схемы для опытного определения Z_{11}, Z_{22} и Z_{12} изображены на рис. 2.7, *а*, *б*: Z_{11} — входное сопротивление четырехполюсника по отношению к зажимам *1—1* при разомкнутых зажимах *2—2*;

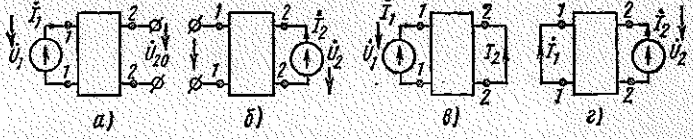


Рис. 2.7

Z_{22} — входное сопротивление по отношению к зажимам *2—2* при разомкнутых зажимах *1—1*; Z_{12} — взаимное сопротивление между входной и выходной ветвями.

Для схемы 2.7, *а* напряжение на зажимах *2—2*

$$\dot{U}_{20} = \dot{I}_1 Z_{21};$$

ток $\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / Z_{11}$. Следовательно,

$$\dot{U}_{20} = \dot{U}_1 \frac{Z_{21}}{Z_{11}}.$$

Для взаимных четырехполюсников $Z_{12} = Z_{21}$.

Уравнения четырехполюсника в Y-форме:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 Y_{11} + \dot{U}_2 Y_{12};$$
$$\dot{I}_2 = \dot{U}_1 Y_{21} + \dot{U}_2 Y_{22}.$$

Схемы для определения Y_{11}, Y_{22} и Y_{12}, Y_{21} изображены на рис. 2.7, *в*, *г*: Y_{11} — входная проводимость четырехполюсника по отношению к зажимам *1—1* при короткозамкнутых зажимах *2—2*; Y_{22} — входная проводимость по отношению к зажимам *2—2* при короткозамкнутых зажимах *1—1*.

Между Z- и Y-параметрами существуют соотношения:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}; \quad Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{\Delta_Y}; \quad Z_{21} = \frac{-Y_{21}}{\Delta_Y};$$
$$Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}; \quad \Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2;$$
$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z}; \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\Delta_Z}; \quad Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\Delta_Z}; \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_Z},$$

где

$$\Delta_Z = \frac{1}{\Delta_Y} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2.$$

Если вычеты функций Z_{11}, Z_{22}, Z_{12} в рассматриваемом полюсе обозначить соответственно K_{11}, K_{22} и K_{12}, то в любом полюсе на оси j между вычетами для взаимных четырехполюсников имеет место соотношение, которое называют *условием вычетов:*

$$K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \geqslant 0. \qquad (2.10)$$

Доказательство его осуществляется методами матричной алгебры и ввиду громоздкости здесь не приводится (его можно найти, например, в [30]). Условие (2.10) свидетельствует о том, что матрица вычетов Z-параметров в полюсах является не отрицательной. Для Y-параметров условие (2.10) также справедливо, причем под K_{11}, K_{22} и K_{12} в этом случае следует понимать соответственно вычеты в полюсах функций Y_{11}, Y_{22} и Y_{12}.

Отметим, что если в полюсе выполняется условие

$$K_{11}K_{22} - K_{12}^2 = 0,$$

то полюс называют компактным. Z (или Y)-параметры, во всех полюсах которых выполняется условие компактности, называют компактными Z (или Y)-параметрами.

Кроме того, Z-параметры четырехполюсника на любой частоте ω ($p = j\omega$) должны удовлетворить еще так называемому *условию вещественной части (условию Геверца* [12])

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 \geqslant 0, \qquad (2.11')$$

где

$$r_{11} = \operatorname{Re} Z_{11}(j\omega); \quad r_{22} = \operatorname{Re} Z_{22}(j\omega)$$

и

$$r_{12} = \operatorname{Re} Z_{12}(j\omega).$$

Соотношение (2.11′) — это следствие того, что Z-матрица пассивного четырехполюсника является положительной вещественной. Формулы (2.10) и (2.11′) накладывают ограничения на величину коэффициента усиления Q синтезируемого четырехполюсника. Для Y-параметров условие вещественной части записывают так:

$$g_{11}g_{12} - g_{12}^2 \geqslant 0, \qquad (2.11'')$$

где

$$g_{11} = \operatorname{Re} Y_{11}(j\omega); \quad g_{22} = \operatorname{Re} Y_{22}(j\omega)$$

и

$$g_{12} = \operatorname{Re} Y_{12}(j\omega).$$

В литературе по синтезу четырехполюсников используют также некоторые дополнительные понятия и теоремы (условия). Познакомимся с основными из них.

Если у входной и выходной ветвей четырехполюсника без взаимной индуктивности нет общего зажима, то такие четырех-

полюсники называют *уравновешенными*. Если общий зажим имеется, то четырехполюсник называют *неуравновешенным*. Практически неуравновешенные четырехполюсники выгоднее уравновешенных, так как содержат меньшее число элементов.

Для неуравновешенных четырехполюсников существует *условие Фиалкова и Герста* (вывод см., например, в [12]). Условие состоит в том, что:

а) коэффициенты при p в числителе и знаменателе функций $-Y_{12}$, Y_{11} и Y_{22} неотрицательны;

б) коэффициенты при соответствующих степенях p функций $-Y_{12}$ не превышают коэффициентов при соответствующих степенях p функций Y_{11} и Y_{22}. При этом предполагается, что общий множитель, если он имеется в числителе и знаменателе соответствующей функции, не сокращается.

При синтезе четырехполюсника обычно задается его передаточная функция, причем это осуществляется различным образом. Так, например, она может быть задана в виде передаточной функции по напряжению или по току, при наличии и при отсутствии нагрузки на выходе четырехполюсника с учетом и без учета входного сопротивления источника питания и т. п. Довольно часто в руководствах по синтезу цепей ее задают в виде передаточной функции по напряжению при питании со стороны зажимов *1—1* и холостом ходе на зажимах *2—2* (см. рис. 2.7, *а*). Обозначим ее через $K_{U\,\text{х.х}}$ (в литературе ее обозначают также через T_{12}). Тогда

$$K_{U\,\text{х.х}} = T_{12} = \dot{U}_{20}/\dot{U}_1 = Z_{12}/Z_{11} = -Y_{12}/Y_{22}.$$

Полюсы $K_{U\,\text{х.х}}$ образуются из нулей Z_{11}, которые не являются одновременно нулями Z_{12}, и из полюсов Z_{12}, не являющихся одновременно полюсами Z_{11}.

$K_{U\,\text{х.х}}$ можно представить в виде отношения двух полиномов по степеням p:

$$K_{U\,\text{х.х}} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}.$$

Если вынести за скобки a_m в числителе и b_n в знаменателе, то получим

$$K_{U\,\text{х.х}} = \frac{a_m}{b_n} \frac{p^m + \frac{a^{m-1}}{a_m} p^{m-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_m} p + \frac{a_0}{a_m}}{p^n + \frac{b^{n-1}}{b_n} p^{n-1} + \ldots + \frac{b_1}{b_n} p + \frac{b_0}{b_n}}.$$

Отношение a_m/b_n обозначают K (или Q) и называют *коэффициентом усиления четырехполюсника*.

При решении задач синтеза необходимо знать свойства $K_{U\,\text{х.х}}$ и ее составляющих Z_{12}, Z_{11} или Y_{12} и Y_{22}. О некоторых из двух свойств — условии вычетов и условии вещественной части — говорилось в настоящем параграфе.

Однако эти свойства должны быть дополнены и другими не менее важными. Доказательства этих свойств в ряде случаев до-

вольно громоздки. (Их можно найти в специальных руководствах по синтезу: например, в [12] и др.)

Далее перечислены важные для синтеза условия (свойства) в отношении Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12}, $K_{U\text{х.х}}$, которые должны быть выполнены для любого пассивного четырехполюсника, и дополнительные условия (свойства) для частных случаев четырехполюсников.

I. *Условия в отношении* Z_{11}, Z_{12}, Y_{11}, Y_{12} и $K_{U\text{х.х}}$ *для всех пассивных четырехполюсников.*

А. Должно быть удовлетворено условие вычетов и условие вещественной части.

Б. Условия в отношении полюсов функций:

1. Полюсы Z_{12}, Y_{12} и $K_{U\text{х.х}}$ не могут находиться в правой полуплоскости.

2. У $K_{U\text{х.х}}$ не может быть полюса в нуле и в бесконечности.

3. Полюсы Z_{12} и Y_{12} на оси $j\omega$ должны быть простые с вещественными значениями вычетов.

4. Полюсы $K_{U\text{х.х}}$ на оси j должны быть простые с мнимыми значениями вычетов.

В. Условия в отношении нулей функций.

Нули Z_{12}, Y_{12} и $K_{U\text{х.х}}$ могут быть кратными и находиться в любой точке плоскости p.

II. *Свойства передаточной функции* $K_{U\text{х.х}}$ *неуравновешенных четырехполюсников без взаимной индуктивности*:

1. Нули ее могут находиться на комплексной плоскости всюду, кроме положительной вещественной оси.

2. При положительных вещественных p величина передаточной функции находится между 0 и 1.

3. Коэффициенты числителя передаточной функции должны быть положительны (часть из них может равняться нулю) и не превышать соответствующих коэффициентов знаменателя при условии, что функцию не сокращают на общий множитель.

Разновидностью четырехполюсников с общим зажимом (неуравновешенных) являются цепные схемы (см., например, рис. 1.7, *б*).

III. *Передаточная функция цепных схем* обладает дополнительным свойством — ее нули не могут находиться в правой полуплоскости.

Нули передаточной функции цепной схемы, собранной только из активных сопротивлений и емкостей, могут быть только на отрицательной вещественной оси.

IV. *Свойства передаточной функции* $K_{U\text{х.х}}$ *уравновешенных четырехполюсников*:

1. Нули передаточной функции могут находиться в любой точке комплексной плоскости, включая и положительную вещественную ось.

2. Для положительных вещественных p величина передаточной функции должна находиться в пределах -1; $+1$. Крайние значения можно получить только при $p=0$ или при $p=\infty$ или в обоих этих случаях.

3. Коэффициенты числителя передаточной функции могут быть отрицательными, не превышая по величине соответствующие коэффициенты знаменателя при условии, что функцию не сокращают на общий множитель.

§ 2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРГУМЕНТА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ МОДУЛЮ

В § 1.17 говорилось о том, что между действительной и мнимой частями входного сопротивления двухполюсника существует однозначная зависимость, т. е. зная зависимость действительной части от частоты $A(\omega)$, можно с помощью формулы (1.24) найти зависимость мнимой части входного сопротивления $B(\omega)$ от частоты. Аналогичная зависимость существует между действительной и мнимой частями передаточной функции четырехполюсника типа минимальной фазы. Для определения этой зависимости принято исходить из выражения для логарифма передаточной функции четырехполюсника.

Передаточная функция четырехполюсника при частоте ω

$$K(j\omega) = K(\omega)\, e^{j\psi(\omega)}, \tag{2.12}$$

где $K(\omega)$ — модуль передаточной функции; $\psi(\omega)$ — ее аргумент.

Прологарифмировав (2.12), найдем

$$\ln K(j\omega) = \ln K(\omega) + j\psi(\omega), \tag{2.13}$$

где $\ln K(\omega)$ — действительная, а $\psi(\omega)$ — мнимая часть логарифма передаточной функции.

Заменив в формуле (1.24) $B(\omega_c)$ и $A(\omega)$ соответственно на $\psi(\omega_c)$ и $\ln K(\omega)$, получим

$$\psi(\omega_c) = \frac{2}{\pi}\,\omega_c \int_0^\infty \frac{\ln K(\omega) - \ln K(\omega_c)}{\omega^2 - \omega_c^2}\, d\omega. \tag{2.14}$$

Формула (2.14) дает возможность найти значение аргумента ψ при некоторой произвольной (фиксированной) частоте ω_c, если известно выражение для $\ln K(\omega)$ в диапазоне частот от 0 до ∞.

Формулу (2.14) часто записывают в иной форме — в форме, предложенной Боде [2].

Обозначим $\ln K(\omega) = Л(\omega)$ и $\ln K(\omega_c) = Л(\omega_c)$ и подставим в (2.14):

$$\psi(\omega_c) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Л(\omega) - Л(\omega_c)}{\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}}\,\frac{d\omega}{\omega}.$$

Введем новую переменную u, связанную с ω зависимостью

$$\frac{\omega}{\omega_c} = e^u \text{ или } u = \ln\frac{\omega}{\omega_c};\ du = d\left(\ln\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{1}{\omega/\omega_c}\,\frac{d\omega}{\omega_c} = \frac{d\omega}{\omega}. \tag{2.15}$$

Тогда

$$\Psi(\omega_c)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Л(\omega)-Л(\omega_c)}{\frac{e^u-e^{-u}}{2}}\,du. \qquad (2.16)$$

Учитывая, что $\frac{e^u-e^{-u}}{2}=\operatorname{sh}u$, а $Л(\omega)-Л(\omega_c)=U$, имеем $\psi(\omega_c)=$

$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U}{\operatorname{sh}u}\,du.$

Интегрируем по частям. С этой целью обозначим

$$U=u \quad \text{и} \quad dv=dv/\operatorname{sh}u. \text{ Но } \int U\,dv=Uv-\int v\,dU. \qquad (а)$$

Найдем $v=\int\frac{du}{\operatorname{sh}u}=\ln\operatorname{th}\frac{|u|}{2}=-\ln\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}$ и $dU=\frac{dЛ(\omega)}{du}du=$

$=\frac{dЛ}{du}du.$

Первое слагаемое равенства (а) $Uv\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$, так как $v=0$ при обоих значениях пределов.

Второе слагаемое равенства (а)

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}v\,dU=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dЛ}{du}\ln\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}\,du,$$

поэтому

$$\psi(\omega_c)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dЛ}{du}\ln\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}\,du. \qquad (2.17)$$

Множитель $\ln\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}$ в (2.17) выполняет роль весовой функции. Действительно,

$$\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}=\frac{e^{\frac{|u|}{2}}+e^{-\frac{|u|}{2}}}{e^{\frac{|u|}{2}}-e^{-\frac{|u|}{2}}}=\frac{e^{|u|}+1}{e^{|u|}-1}=\frac{\frac{\omega}{\omega_c}+1}{\frac{\omega}{\omega_c}-1}=\frac{\omega+\omega_c}{\omega-\omega_c};$$

$$\ln\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}=\ln\left|\frac{\omega+\omega_c}{\omega-\omega_c}\right|.$$

На рис. 2.8 изображен график зависимости $\ln\operatorname{cth}\frac{|u|}{2}$ от ω/ω_c, который симметричен относительно вертикали $u=0$. Ординаты кривой быстро убывают при удалении значений u от 0. В силу этого величина интеграла (2.17) определяется главным образом значением $dЛ/du$ в окрестности $u=0$. Площадь, ограниченная

кривой $\ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2}$ и осью абсцисс на рис. 2.8:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2}\, du = \frac{\pi^2}{2} \qquad (2.18)$$

(табличный интеграл).

Рассмотрим простейший пример на применение формулы (2.17). Для некоторого четырехполюсника крутизна характеристики $Л = f(u)$ постоянна, равна постоянному числу q и не зависит от u. Определить для этого четырехполюсника $\psi(\omega_c)$. Воспользуемся формулой (2.17), вынеся $dЛ/du$ из-под знака интеграла, и учтем (2.18). Получим

$$\psi(\omega_c) = \frac{1}{\pi} q \frac{\pi^2}{2} = \frac{q\pi}{2}.$$

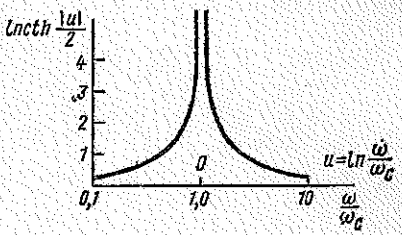


Рис. 2.8

Таким образом, для этого четырехполюсника аргумент передаточной функции постоянен и равен произведению $\pi/2$ на крутизну характеристики $dЛ/du$.

Глава третья

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

§ 3.1. СВЯЗЬ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Четырехполюсник может быть охарактеризован либо его частотными, либо временными характеристиками. Частотные свойства четырехполюсника на комплексной частоте p определяются его передаточной функцией $K(p)$, а для синусоидального процесса значением $K(j\omega)$ передаточной функции на частоте $\omega\,(p = j\omega)$. Получают $K(j\omega)$ из $K(p)$ заменой p на $j\omega$.

Действительная и мнимая части $K(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, как об этом говорилось в § 2.6, связаны друг с другом и каждая из них порознь также характеризует четырехполюсник.

Временные свойства четырехполюсника определяются его переходной функцией $h(t)$ или его импульсной переходной функцией $h'(t)$. Физически $h(t)$ — это выходное напряжение $u_2(t)$ четырехполюсника при воздействии на его вход единичным напряжением $u_1(t) = 1(t)$ (рис. 3.1, *а*); $h'(t)$ — выходное напряжение четырехполюсника при воздействии на его вход импульса напряжения в виде δ-функции (рис. 3.1, *б*).

Убедимся в том, что импульсная переходная функция $h'(t)$ равна производной по времени от переходной функции $h(t)$.

С этой целью на вход четырехполюсника воздействуем двумя напряжениями (рис. 3.1, *в*). Одно из них равно U и действует с момента $t=0$, другое $-U$ и действует с момента $t=\tau$. Причем $\tau \to 0$, а произведение $U\tau = 1$. На основании принципа наложения

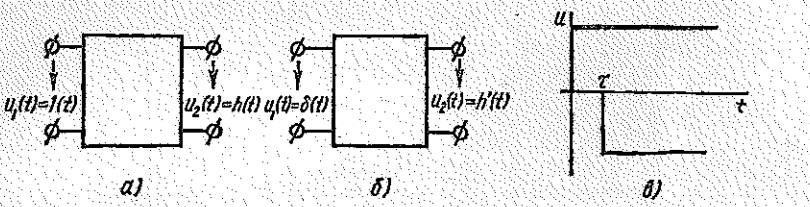


Рис. 3.1

выходное напряжение $u_2(t) = Uh(t) - Uh(t-\tau)$. Разложим $h(t-\tau)$ в ряд по степеням τ:

$$u_2(t) = U\left[h(t) - h(t) + \tau h'(t) - \frac{\tau^2}{2!}h''(t) + \ldots\right]$$

и ввиду малости τ пренебрежем слагаемыми ряда со степенями τ выше первой. Тогда $u_2(t) = U\tau h'(t)$, но по условию $U\tau = 1$, поэтому

$$u_2(t) = h'(t).$$

Таким образом, физически импульсная переходная функция $h'(t)$ равна выходному напряжению четырехполюсника при воздействии на его вход импульсом напряжения в виде δ-функции.

Частотные и временные характеристики четырехполюсника взаимно связаны и могут быть выражены друг через друга.

Рассмотрим, как определить $h(t)$ через $K(p)$, $K(p)$ через $h(t)$, $K(p)$ через $h'(t)$ и $h'(t)$ через $K(p)$. По определению

$$U_2(p) = U_1(p)\,K(p). \tag{3.1}$$

Если $u_1(t) = 1(t)$, то $u_2(t) = \dot{h}(t)$. Учтем, что изображение единичной функции по Лапласу $1(t) \doteqdot 1/p$, следовательно, $U_2(p) = K(p)/p$ и потому

$$h(t) \doteqdot K(p)/p. \tag{3.2}$$

Таким образом, $h(t)$ есть оригинал выражения $K(p)/p$. В свою очередь, если изображение $h(t)$ обозначить $H(p)$ [$h(t) \doteqdot H(p)$], то $H(p) = K(p)/p$ и

$$K(p) = pH(p). \tag{3.3}$$

Формула (3.3) дает возможность определить передаточную функцию $K(p)$ через изображение переходной функции $H(p)$.

Выразим теперь $K(p)$ через $h'(t)$. Изображение по Лапласу функции $h'(t)$ равно изображению $dh(t)/dt \doteqdot pH(p) - h(0)$, где $h(0)$ — значение $h(t)$ при $t = 0_+$. Но $pH(p) = K(p)$, поэтому

$$h'(t) \doteqdot K(p) - h(0). \tag{3.4}$$

Если $h(0)=0$, то

$$h'(t) \doteqdot K(p). \tag{3.5}$$

Таким образом, в соответствии с (3.4) импульсная переходная функция в общем случае есть оригинал $K(p)-h(0)$, а при $h(0_+)=0$ равна оригиналу $K(p)$.

Пример 3.1. Для четырехполюсника (рис. 3.1, *б*) составим $h(t)$ и $K(p)$ непосредственно по схеме, а затем определим $h(t)$ по (3.2) через $K(p)$, $K(p)$ через $H(p)$ по (3.3) и $h'(t)$ через $K(p)$ по (3.4).

Решение. Непосредственно по схеме

$$h(t)=1-\frac{1}{2}e^{-t/(2RC)};\quad K(p)=\frac{RCp+1}{2RCp+1};\quad h'(t)=\frac{1}{4RC}e^{-t/(2RC)};$$

$$h(0)=\frac{1}{2}.$$

По формуле (3.2) $h(t) \doteqdot \frac{K(p)}{p}=\frac{RCp+1}{p(2RCp+1)} \doteqdot 1-\frac{1}{2}e^{-t/(2RC)}$.

По формуле (3.3) $K(p)=pH(p)=p\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{2\left(p+\frac{1}{2RC}\right)}\right]=\frac{RCp+1}{2RCp+1}$.

По формуле (3.4) $h'(t) \doteqdot K(p)-h(0)=\frac{RCp+1}{2RCp+1}-\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{2(2RCp+1)} \doteqdot \frac{1}{4RC}e^{-t/(2RC)}$.

§ 3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧЕРЕЗ ИМПУЛЬСНУЮ ПЕРЕХОДНУЮ ФУНКЦИЮ $h'(t)$

В соответствии с прямым преобразованием Фурье функция $f(t)$ имеет спектр $S(j\omega)$, определяемый по формуле

$$S(j\omega)=\int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{3.6}$$

С помощью обратного преобразования Фурье по спектру $S(j\omega)$ может быть определена функция времени

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{3.7}$$

Если положить, что роль функции $f(t)$ играет импульсная переходная проводимость $h'(t)$ и $h(0_+)=0$, то из формулы (3.5) следует, что роль $S(j\omega)$ при $p=j\omega$ играет $K(j\omega)$. Поэтому в соответствии с формулой (3.6)

$$K(j\omega)=\int_0^\infty h'(t)e^{-j\omega t}dt \tag{3.8}$$

и по (3.7)

$$h'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega, \qquad (3.9)$$

но

$$K(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega),$$

где $U(\omega)$ — вещественная, а $V(\omega)$ — мнимая частотные характеристики.

Заменив в (3.8) $K(j\omega)$ на $U(\omega)+jV(\omega)$, а $e^{-j\omega t}$ на $\cos\omega t - j\sin\omega t$, получим

$$U(\omega)+jV(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h'(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty}h'(t)\sin\omega t dt.$$

Будем иметь

$$U(\omega)=\int_{0}^{\infty}h'(t)\cos\omega t dt; \qquad (3.10)$$

$$V(\omega)=-\int_{0}^{\infty}h'(t)\sin\omega t dt. \qquad (3.11)$$

Таким образом, и вещественная и мнимая частотные характеристики могут быть определены через производную от переходной функции.

Формулы (3.10) и (3.11) имеют различные применения. Рассмотрим два из них.

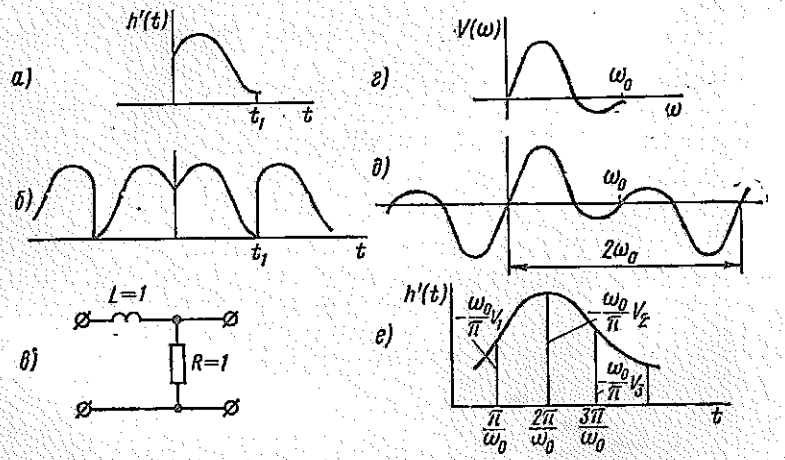


Рис. 3.2

1. Основываясь на формулах (3.10) или (3.11), можно определить амплитуды гармоник ряда Фурье, в который может быть разложена $h'(t)$ при ее периодическом продолжении. Будем исходить из формулы (3.10). Примем, что для некоторой цепи изве-

стен график функции $h'(t)$ (например, в виде изображенного на рис. 3.2, *а*) и известно, что $h(0)=0$. Из рисунка видно, что при $t>t_1$ $h'(t)\approx 0$. Имея это в виду, перепишем (3.10) так:

$$U(\omega)=\int_0^{t_1} h'(t)\cos\omega t dt. \qquad (3.12)$$

Периодизируем $h'(t)$ четным образом, как это показано на рис. 3.2, *б* и разложим $h'(t)$ в ряд Фурье. Ряд будет иметь постоянную и косинусные составляющие:

$$h'(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos k\omega_0 t.$$

В формуле (3.12) примем $\omega=k\omega_0$ и придадим k значения 0, 1, 2,... Замечаем, что амплитуды гармоник ряда Фурье можно найти через значения функции $U(\omega)$, взятые соответственно при $k=0$, 1, 2,..., т. е.

$$A_0=\frac{U(0)}{t_1}; \quad A_k=\frac{2}{t_1}U(k\omega_0).$$

Проиллюстрируем сказанное числовым примером.

Пример 3.2. Для четырехполюсника рис. 3.2, *в* $h(t)=1-e^{-t}$; $h'(t)=e^{-t}$; $K(p)=\frac{1}{1+p}$; $U(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$. Приняв $t_1=\pi$, разложить $h'(t)$ в ряд Фурье.

Решение. Находим $\omega_0=\frac{\pi}{t_1}=1$, $A_0=\frac{1}{t_1}U(0)=\frac{1}{\pi}=0{,}318$; $A_1=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+1}=0{,}318$; $A_2=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+4}=0{,}127$; $A_3=0{,}0635$; $A_4=0{,}0376$.

Таким образом, в интервале $0-t_1$

$$h'(t)\approx 0{,}318+0{,}318\cos t+0{,}127\cos 2t+0{,}0635\cos 3t+ \\ +0{,}0376\cos 4t+\ldots$$

2. Учитывая нечетность $U(\omega)\sin\omega t+V(\omega)\cos\omega t$, из (3.9) получим

$$h'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[U(\omega)\cos\omega t-V(\omega)\sin\omega t]\,d\omega. \qquad (а)$$

Приняв в (а) $t<0$ и учитывая, что $h'(t)=0$ при $t<0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[U(\omega)\cos\omega t+V(\omega)\sin\omega t]\,d\omega=0. \qquad (б)$$

Вычитая (б) из (а) и имея в виду четность $V(\omega)\sin\omega t$, получим

$$h'(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} V(\omega)\sin\omega t d\omega. \qquad (3.13)$$

Положим, что функция $V(\omega)$ при $\omega > \omega_0$ становится много меньше ее максимального значения, например на порядок (см. рис. 3.2, *г*). Тогда в формуле (3.13) можно верхний предел заменить на ω_0:

$$h'(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_0} V(\omega)\sin\omega t d\omega.$$

Продолжим функцию $V(\omega)$ нечетным образом (рис. 3.2, *д*) и разложим ее в ряд Фурье. Ряд будет состоять только из синусных составляющих:

$$V(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \sin\left(k\frac{\pi}{\omega_0}\omega\right).$$

Амплитуда k-й гармоники ряда

$$V_k = \frac{2}{2\omega_0}\int_0^{2\omega_0} V(\omega)\sin\left(\frac{k\pi\omega}{\omega_0}\right)d\omega = \frac{2}{\omega_0}\int_0^{\omega_0} V(\omega)\sin\left(\frac{k\pi\omega}{\omega_0}\right)d\omega.$$

Времени t придадим значения $k\pi/\omega_0$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда

$$h'\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_0} V(\omega)\sin\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\omega\right)d\omega = -\frac{2}{\pi}\frac{\omega_0}{2}V_k = -\frac{\omega_0}{\pi}V_k.$$

Таким образом, численное значение производной от переходной функции $h'(t)$ в момент времени π/ω_0 пропорционально амплитуде первой гармоники V_1 разложения в ряд функции $V(\omega)$, т. е. $h'\left(\frac{\pi_0}{\omega_0}\right) = -\frac{\omega_0}{\pi}V_1$, значение $h'(t)$ в момент времени $2\pi/\omega_0$ пропорционально V_2, т. е. $h'\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = -\frac{\omega_0}{\pi}V_2$, и т. д. (см. рис. 3.2, *е*).

§ 3.3. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Функцией времени с ограниченным спектром называют функцию, спектр которой ограничен частотами $0 - f_c$, т. е. в спектре ее нет частот выше f_c. Применительно к таким функциям В. А. Котельниковым в 1933 г. была сформулирована следующая теорема: «Любую функцию времени $f(t)$, состоящую из частот от 0 до f_c, можно передавать с любой точностью с помощью чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_c)$ секунд».

Эта теорема является основой различных методов импульсной связи. Она теоретически обосновывает возможность передачи непрерывных сообщений дискретными значениями. Доказательство проводится следующим образом.

Функцию времени определяют через ее спектр $G(j\omega)$ так:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega,$$

где

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt.$$

Поскольку для функции времени с ограниченным спектром $G(j\omega)=0$ при $\omega>\omega_c$, то

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (3.14)$$

В свою очередь, $G(j\omega)$ в интервале от $-\omega_c$ до ω_c может быть представлена рядом Фурье по частотам (период по частоте равен $2\omega_c$):

$$G(j\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} M_k e^{j\pi k\frac{\omega}{\omega_c}}, \qquad (3.15)$$

где k может принимать целочисленные значения от $-\infty$ до ∞.

Коэффициент ряда Фурье

$$M_k=\frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\,e^{-j\pi k\frac{\omega}{\omega_c}}d\omega. \qquad (3.16)$$

Подставим (3.15) в (3.14):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} M_k e^{j\pi k\frac{\omega}{\omega_c}}\right)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} M_k\frac{1}{2}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega\left(t+\frac{k\pi}{\omega_c}\right)}d\omega,$$

где

$$\frac{1}{2}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega\left(t+\frac{k\pi}{\omega_c}\right)}d\omega=\frac{1}{t+\frac{k\pi}{\omega_c}}\cdot\frac{e^{j\omega_c\left(t+\frac{k\pi}{\omega_c}\right)}-e^{-j\omega_c\left(t+\frac{k\pi}{\omega_c}\right)}}{2j}=\frac{\sin\omega_c\left(t+\frac{k\pi}{\omega_c}\right)}{t+\frac{k\pi}{\omega_c}}.$$

Таким образом,

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} M_k\frac{\sin\omega_c\left(t+\frac{k\pi}{\omega_c}\right)}{t+\frac{k\pi}{\omega_c}}. \qquad (3.17)$$

В формуле (3.14) придадим t значение $-k\pi/\omega_c$. Получим

$$f\left(-\frac{k\pi}{\omega_c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} G(j\omega)\,e^{-\frac{jk\pi}{\omega_c}}d\omega. \qquad (3.18)$$

Сопоставив (3.16) и (3.18), имеем

$$M_k = \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_c}\right) = \Delta t f(-k\Delta t).$$

Подставим найденное выражение для M_k в формулу (3.17) и изменим знаки перед k, что возможно, поскольку суммирование производится по всем k от $-\infty$ до ∞. Получим

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \frac{\sin \omega_c (t - k\Delta t)}{\omega_c (t - k\Delta t)}. \qquad (3.19)$$

Отсюда следует, что функция времени $f(t)$ может быть представлена рядом (3.19), коэффициентами которого являются значения функции, взятые через интервал времени $\Delta t = \pi/\omega_c = 1/(2f_c)$. Графическим пояснением к формуле (3.19) является рис. 3.3. Поскольку $(\sin x/x) = 1$ при $x = 0$ и равно 0 при $x = k\pi$, то при всех $t = k\pi$ сумма в правой части (3.19) принимает значения $f(k\Delta t)$.

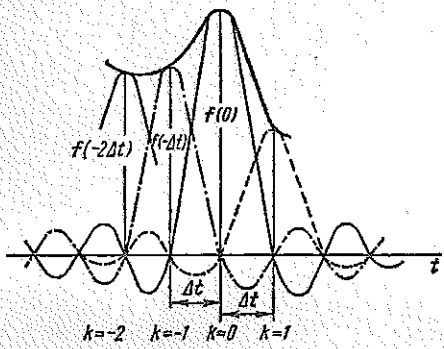


Рис. 3.3

Таким образом, для передачи за время $0 - T$ N дискретных значений через равноотстоящие интервалы времени требуется полоса частот

$$f_c = N/(2T).$$

Физически можно пояснить, почему для передачи N дискретных значений некоторой функции через равноотстоящие интервалы времени $\Delta t = T/N$ число требуемых гармоник в два раза меньше частоты $1/\Delta t = N/T$. Положим, что рассматриваемая функция имеет период T и что ее выразили обычным рядом Фурье из $N/2$ гармоник. Каждая гармоника ряда Фурье определяется двумя числами — величиной амплитуды и величиной фазы. Таким образом, у $N/2$ гармоник ряда Фурье неизвестно $N/2$ амплитуд и $N/2$ фаз. Всего неизвестных $N/2 + N/2 = N$. Для однозначного определения N неизвестных надо было бы составить N уравнений для всех N дискретных моментов времени, для которых известны значения функции.

Таким образом, N равноотстоящих значений функции определяют $N/2$ гармоник ряда Фурье и, наоборот, для получения N значений функции достаточно $N/2$ гармоник ряда Фурье.

Строго говоря, теорема Котельникова применима к функциям времени с ограниченным спектром. Но практически ее применяют и к функциям времени с неограниченным спектром.

Применение теоремы Котельникова для приближенного представления функций с неограниченным спектром основано на пред-

положении о том, что спектральная плотность этой функции при частотах, бо́льших ω_c, хотя и не равна нулю, но остается достаточно малой по сравнению со значениями спектральной плотности в интервале частот от $\omega=0$ до $\omega=\omega_c$. За счет малости спектральной плотности в диапазоне частот от $\omega=\omega_c$ до $\omega=\infty$ влияние этой части спектра на процесс в целом незначительно.

§ 3.4. ТЕОРЕМА ПЭЛИ—ВИНЕРА

В 1934 г. была опубликована работа Р. Пэли и Н. Винера, в которой дано доказательство теоремы, получившей название теоремы Пэли — Винера. Теорема накладывает определенные ограничения на модуль передаточной функции $K(\omega)$ четырехполюсника, соответствующего некоторой физически реализуемой цепи.

Теорема формулируется следующим образом: для того чтобы некоторое $K(\omega)$ соответствовало физически реализуемой цепи, интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{|\ln K(\omega)|}{\omega^2+\omega_0^2}\,d\omega$, где ω_0 — некоторая произвольная не равная нулю частота (ее часто полагают равной единице), должен быть конечен (не бесконечен).

Если же указанный интеграл будет равен бесконечности, то физически осуществить цепь со взятым $K(\omega)$ невозможно.

Для иллюстрации применим теорему Пэли — Винера к дифференцирующей RC-цепи. Для нее передаточная функция $K(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$,

$$K(\omega)=(1+R^2C^2\omega^2)^{-1/2};\quad \int\limits_0^\infty \frac{|\ln K(\omega)|}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+R^2C^2\omega^2)}{1+\omega^2}\,d\omega.$$

Интеграл конечен, четырехполюсник физически реализуем.

Глава четвертая

ЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 4.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЧАСТОТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Частотными называют преобразования, выполняемые по определенным правилам, позволяющие от некоторой исходной схемы (схемы прототипа) путем изменения частоты перейти к некоторой другой (преобразованной) схеме с иными частотными свойствами.

Известны два основных типа частотных преобразований. В первом комплексную частоту p схемы прототипа заменяют функцией некоторой другой комплексной частоты s, т. е. $p=f_1(s)$ или $s=f_2(p)$. На возможность такого преобразования было указано О. Зобелем еще в 1924 г. Однако полное исследование свойств этого преобразования было выполнено позже В. Кауэром и другими учеными.

Преобразование первого типа используется, например, для получения частотных характеристик сложных типов фильтров по частотным характеристикам простых фильтров.

Во втором типе преобразований кроме замены p на $f(s)$ матрицу сопротивлений исходной схемы умножают еще на некоторый множитель $W(s)$. В результате получают новые физически реализуемые схемы. Второй тип преобразований применим и к цепям с распределенными параметрами. Частотные преобразования второго типа были предложены Лаурентом в 1956 г. и впоследствии развиты другими авторами (М. Новаком, О'Ши и др.).

§ 4.2. ЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Частотные преобразования первого рода осуществляют, заменяя комплексную частоту p в исходной схеме некоторой функцией комплексной частоты s.

Рассмотрим три примера. В первом из них заменим p на ω_0/s, во втором — на $\frac{k(s^2+\omega_0^2)}{\omega_0 s}$, в третьем — на $\frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}$.

Первое преобразование дает возможность перейти от схемы, хорошо пропускающей низкие частоты (рис. 4.1, *а*), к схеме

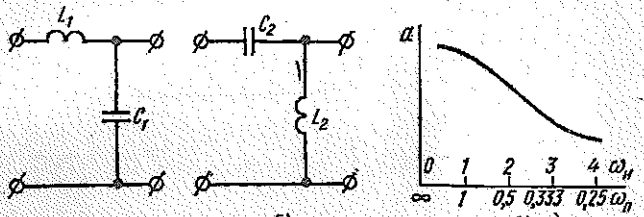


Рис. 4.1

рис. 4.1, *б*, хорошо пропускающей высокие частоты. Элементам L_1 и C_1 в схеме рис. 4.1, *а* отвечают соответственно C_2 и L_2. Для выявления связи L_1 и C_1 с C_2 и L_2 составим сопротивление L_1 на частоте p и заменим в нем p на ω_0/s и сопоставим его с сопротивлением элемента C_2 на частоте s. Получим $pL_1 = \omega_0 L_1/s = 1/(sC_2)$, отсюда $C_2 = 1/(\omega_0 L_1)$. Поступая аналогично по отношению к C_1 и L_2, имеем $1/(pC_1) = s/(\omega_0 C_1) = sL_2$, следовательно, $L_2 = \frac{1}{\omega_0 C_1}$.

Передаточная функция преобразованной схемы рис. 4.1, *б* $K_{2п}(s) = \frac{sL_2}{pL_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{L_2 C_2 s^2}{1 + L_2 C_2 s^2}$ может быть получена из передаточной функции непреобразованной схемы рис. 4.1, *а*

$$K_{1а}(p) = \frac{1/(C_1 p)}{pL_1 + 1/(C_1 p)} = \frac{1}{1 + L_1 C_1 p^2}.$$

Действительно, если в последнем выражении заменить p на ω_0/s, L_1 на $1/(\omega_0 C_2)$ и C_1 на $1/(\omega_0 L_2)$, то получим $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\omega_0 C_2}\dfrac{1}{\omega_0 L_2}\dfrac{\omega_0^2}{s^2}} = \dfrac{L_2 C_2 s^2}{1+L_2 C_2 s^2}$.

Из равенства $K_{2\text{п}}(s) = K_{1\text{и}}(\omega_0/p)$ следует, что схемы рис. 4.1, *а*, *б* имеют одинаковые частотные характеристики, только направление отсчета частоты по оси частот для преобразованной схемы рис. 4.1, *б* противоположно направлению отсчета частоты для исходной схемы рис. 4.1, *а*. Если по оси частот на рис. 4.1, *в* частота $\omega_{\text{и}}$ для исходной схемы рис. 4.1, *а* ($p = j\omega_{\text{и}}$) откладывается в равномерном масштабе и отсчитывается слева направо, то зависимость затухания a или передаточной функции преобразованной схемы изобразится той же кривой, что и для исходной схемы, только угловая частота для преобразованной схемы $\omega_{\text{п}}$ ($s = j\omega_{\text{п}}$) по оси абсцисс будет откладываться в неравномерном масштабе $\omega_{\text{п}} = \omega_0/\omega_{\text{и}}$ (это следует из соотношения $p = \omega_0/s$ или $j\omega_{\text{и}} = \omega_0/(j\omega_{\text{п}}) = -j\dfrac{\omega_0}{\omega_{\text{п}}}$). Знак минус означает изменение направления отсчета частоты $\omega_{\text{п}}$ по сравнению с направлением отсчета частоты $\omega_{\text{и}}$.

В качестве примера на рис. 4.1, *в* дана оцифровка по оси абсцисс для частот $\omega_{\text{и}}$ и $\omega_{\text{п}}$ при $\omega_0 = 1$.

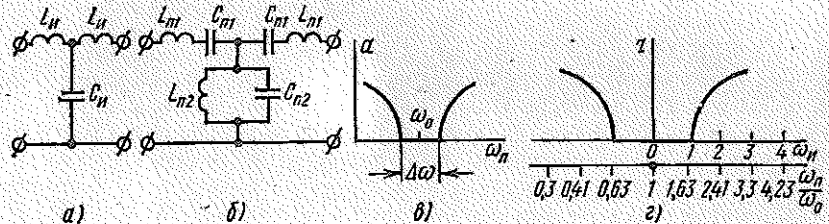


Рис. 4.2

Преобразование фильтра низких частот (рис. 4.2, *а*) в полосно-пропускающий фильтр (рис. 4.2, *б*) осуществляется путем замены комплексной частоты p на $\varphi(s) = k(s^2+\omega_0^2)/(\omega_0 s)$.

Положим, что параметры ФНЧ ($L_{\text{и}}$ и $C_{\text{и}}$) известны и известна также желаемая резонансная частота ω_0 и полоса пропускания $\Delta\omega$ полосно-пропускающего фильтра (рис. 4.2, *в*).

Частотную характеристику ФНЧ (рис. 4.2, *г*) можно рассматривать как частотную характеристику полосно-пропускающего фильтра, только надо правильно осуществить оцифровку по оси частот на рис. 4.2, *г* для этого фильтра и определить значения $L_{\text{п}1}$, $C_{\text{п}1}$, $L_{\text{п}2}$ и $C_{\text{п}2}$ через $L_{\text{и}}$, $C_{\text{и}}$, $\Delta\omega$ и ω_0. Индуктивности $L_{\text{и}}$ при переходе от схемы ФНЧ к схеме ППФ соответствуют последовательно соединенные $L_{\text{п}1}$ и $C_{\text{п}1}$, а емкости $C_{\text{и}}$ — параллельно соединенные $L_{\text{п}2}$ и $C_{\text{п}2}$.

Для того чтобы выявить соответствие между $L_{п1}$, $C_{п1}$ и $L_и$, в выражении для сопротивления $pL_и$ заменим p на $k(s^2+\omega_0^2)/(\omega_0 s)$ и сопоставим полученную формулу с формулой для последовательно соединенных $L_{п1}$ и $C_{п1}$ на частоте s:

$$\frac{k(s^2+\omega_0^2)}{\omega_0 s}L_и = \frac{s^2+\dfrac{1}{L_{п1}C_{п1}}}{s\dfrac{1}{L_{п1}}}.$$

Из сопоставления следует, что $L_{п1}=kL_и/\omega_0$, $C_{п1}=1/(k\omega_0 L_и)$.

Поступая аналогичным образом для перехода от $C_и$ к параллельно соединенным $L_{п2}$ и $C_{п2}$, имеем

$$\frac{1}{pC_и} = \frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)C_и} = \frac{s\dfrac{1}{C_{п2}}}{s^2+1/(L_{п2}C_{п2})}.$$

Отсюда $L_{п2}=k/(\omega_0 C_и)$ и $C_{п2}=kC_и/\omega_0$.

Для оцифровки оси абсцисс частотной характеристики преобразованной схемы следует выявить соответствие между частотой $\omega_п$ и частотой $\omega_и$. С этой целью в выражении $p=k(s^2+\omega_0^2)/(\omega_0 s)$ следует заменить p на $j\omega_и$, а s на $j\omega_п$ и решить полученное уравнение относительно $\omega_п$:

$$\omega_и = k(\omega_п/\omega_0 - \omega_0/\omega_п) \text{ или } \omega_п/\omega_0 = \omega_и/(2k) \pm \sqrt{1+(\omega_и/2k)^2}. \quad (а)$$

Из формулы (а) следует, что оцифровка по оси $\omega_п/\omega_0$ неравномерна. Частоте $\omega_и=0$ отвечает $\omega_п/\omega_0=1$. Два знака перед радикалом в формуле (а) указывают на то, что частотная характеристика полосно-пропускающего фильтра имеет две ветви, одна из которых будет являться зеркальным отображением другой относительно вертикали, проведенной через точку $\omega_п/\omega_0=1$.

Придавая $\omega_и$ отрицательные значения, получим повторение частотной характеристики преобразованной схемы в области отрицательных частот. Другими словами, при частотном преобразовании частотная характеристика может оказаться повторенной.

На рис. 4.2, *г* нанесена оцифровка на оси $\omega_п/\omega_0$ для полосно-пропускающего (полосового) фильтра при $k=\omega_0/\Delta\omega=1$.

Преобразования рассматриваемого вида $\left(\text{при которых } p \text{ заменяется на некоторое } k\dfrac{s^2+\omega_0^2}{\omega_0 s}\right)$ могут быть применены и к более сложным схемам, чем схема рис. 4.2, *а*, например к схеме рис. 4.3, *а*. Преобразованная схема изображена на рис. 4.3, *б*.

Преобразование фильтра низких частот рис. 4.4, *а* в полосно-задерживающий (заграждающий) фильтр (рис. 4.4, *б*) осуществляется заменой комплексной частоты p на $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}\left(\dfrac{s}{\omega_0}+\dfrac{\omega_0}{s}\right)^{-1}$ и заменой индуктивности $L_и$ на параллельно соединенные $L_{п1}$ и $C_{п1}$ и емкости $C_и$ на последовательно соединенные $L_{п2}$ и $C_{п2}$.

Под ω_0 понимают резонансную частоту, а под $\Delta\omega$ — ширину полосы затухания (рис. 4.4, *в*); $k=\omega_0/\Delta\omega$.

Для определения значений $L_{п1}$, $C_{п1}$, $L_{п2}$ и $C_{п2}$ через $L_и$, $C_и$, k и ω_0 надлежит сопротивление $pL_и$ заменить на $\frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}L_и$ и сопо-

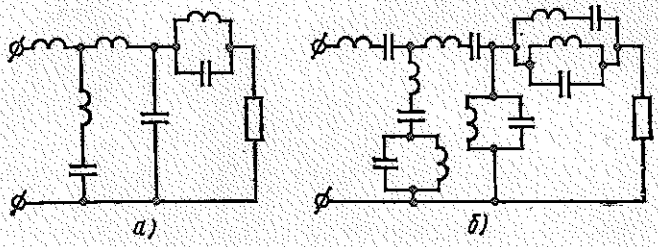


Рис. 4.3

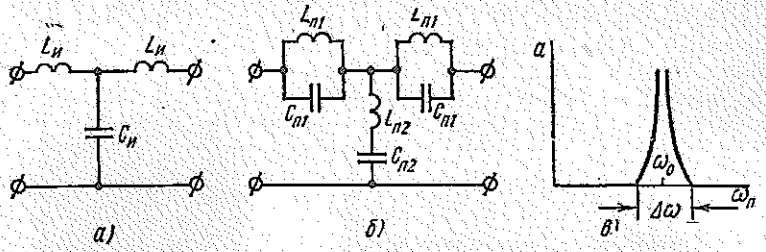


Рис. 4.4

ставить его с сопротивлением параллельно соединенных $L_{п1}$ и $C_{п1}$ на частоте s:

$$\frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}L_и=\frac{s\frac{1}{C_{п1}}}{s^2+\frac{1}{C_{п1}L_{п1}}}.$$

Получим $L_{п1}=L_и/(k\omega_0)$ и $C_{п1}=k/(\omega_0 L_и)$.

Для определения $L_{п2}$ и $C_{п2}$ сопоставим сопротивление $\frac{1}{pC_и}=\frac{s^2+\omega_0^2}{\frac{\omega_0 C_и}{k}s}$ с сопротивлением последовательно соединенных $L_{п2}$ и $C_{п2}$ на частоте s:

$$\frac{s^2+\omega_0^2}{\frac{\omega_0 C_и}{k}s}=\frac{s^2+\frac{1}{L_{п2}C_{п2}}}{\frac{1}{L_{п2}}s},$$

отсюда $L_{п2}=k/(\omega_0 C_и)$ и $C_{п2}=C_и/(k\omega_0)$.

С целью получения соответствия оцифровки по оси абсцисс на частотной характеристике ФНЧ оцифровке по оси абсцисс на той же частотной характеристике, но для полосно-задерживающего

фильтра, в формуле $p=\frac{\omega_0 s}{k(s^2+\omega_0^2)}$ заменим p на $j\omega_и$, а s на $j\omega_п$. Получим уравнение

$$\omega_и=\frac{\omega_0\omega_п}{k(\omega_0^2-\omega_п^2)}.$$

Решим его относительно $\omega_п/\omega_0$:

$$\frac{\omega_п}{\omega_0}=-\frac{1}{2k\omega_и}\pm\sqrt{1+\left(\frac{1}{2k\omega_п}\right)^2}. \qquad (б)$$

Формула (б) позволяет осуществить оцифровку оси абсцисс на частотной характеристике ФНЧ для полосно-заграждающего фильтра.

В заключение рассмотрим свойства преобразования, при котором p заменяют на $\varphi(s)=1/(s+a)$. В этом случае индуктивность L заменяется на параллельное соединение конденсатора емкостью $C=1/L$ и сопротивления $R=1/a$, а конденсатор емкостью C заменяется на последовательное соединение $R=a/C$ и индуктивного элемента с $L=1/C$.

§ 4.3. ЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВТОРОГО РОДА

Частотное преобразование второго рода представляет собой преобразование, состоящее из двух операций — замены комплексной частоты p для сопротивлений исходной схемы на некоторую функцию $\varphi(s)$ комплексной частоты s (это преобразование осуществляется в принципе так же, как и в частотном преобразовании первого рода) и в умножении всех сопротивлений на некоторую функцию $W(s)$, подобранную таким образом, чтобы получить физически осуществимые сопротивления.

В качестве примера используем преобразование второго рода для перевода канонической схемы двухполюсника, состоящего из элементов L и C (исходной схемы), в каноническую схему двухполюсника, состоящего из элементов R и C.

Входная проводимость LC-двухполюсника может быть записана в виде

$$Y_{LC}(p)=a_1 p+\frac{a_0}{p}+\sum\frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2}.$$

Заменим в этом выражении p на $\varphi(s)=\sqrt{s}$ и умножим результат на $W(s)=1/\sqrt{s}$:

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\left[a_1\sqrt{s}+\frac{a_0}{\sqrt{s}}+\sum\frac{2a_k\sqrt{s}}{s+\omega_k^2}\right]=a_1+\frac{a_0}{s}+\sum\frac{2a_k}{s+\omega_k^2}.$$

Получили выражение, которое можно трактовать как входное сопротивление канонической схемы двухполюсника, состоящего из элементов R и C. Следовательно, $Z_{RC}(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}Y_{LC}(\sqrt{s})$.

Аналогично, входное сопротивление двухполюсника из элементов R и C преобразуется во входную проводимость двухполюсника из элементов L и C:

$$Y_{LC}(s) = \sqrt{s}\, Z_{RC}(\sqrt{s}).$$

В заключение рассмотрения частотного преобразования второго рода отметим, что:

1) в частном случае их проводят, умножая сопротивления исходной схемы на некоторую функцию $W(p)$, не заменяя p на $\varphi(s)$. Например, если исходной схемой является T-схема (рис. 4.5, *а*), то, умножая все сопротивления ее на $W(p) = 1/(g + pC)$, получим схему 4.5, *б*;

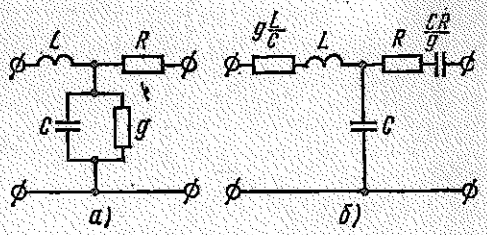


Рис. 4.5

2) возможны и более сложные частотные преобразования второго рода по сравнению с рассмотренными. Например, когда в исходном $Z(p)$ сначала заменяют p на $\varphi_1(s_1)$ и результат умножают на $W_1(s_1)$, то получают $W_1(s_1) \times Z[\varphi_1(s_1)]$. Затем к полученному результату применяют еще одно частотное преобразование, заменяя s_1 на $\varphi_2(s_2)$ и умножая получающуюся функцию на $W_2(s_2)$, так что окончательно преобразование запишем так:

$$W_2(s_2)\, W_1[\varphi_2(s_2)]\, Z[\varphi_1(\varphi_2(s_2))].$$

§ 4.4. ЧАСТОТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

По отношению к цепям с распределенными параметрами частотные преобразования применяют для достижения двух целей:

1) для перехода от одного типа цепей к другому (например, от цепей с распределенными параметрами типа LC без потерь к цепям с распределенными параметрами типа RC, от цепей типа LC к безындукционным цепям R, G, C и т. д.);

2) для перехода от электрических цепей с распределенными параметрами к цепям с сосредоточенными параметрами.

Параметры однородной линии с распределенными параметрами на единицу длины обозначим следующим образом: L_0 — индуктивность, R_0 — продольное сопротивление, C_0 — емкость, G_0 — поперечная проводимость. Длину линии обозначим l, напряжение и ток в конце линии U_2 и I_2, напряжение и ток в начале линии U_1 и I_1. Постоянная распространения $\gamma = \sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}$, волновое сопротивление

$$Z_в = \sqrt{(R_0 + pL_0)/(G_0 + pC_0)}.$$

Запишем уравнения линии в A-форме: (а)

$$U_1 = AU_2 + BI_2,$$
$$I_1 = CU_2 + DI_2.$$

Здесь $A = D = \operatorname{ch} \gamma l$, $B = Z_в \operatorname{sh} \gamma l$, $C = \operatorname{sh} \gamma l / Z_в$.

Систему (а) представим в Z-форме, имея в виду, что

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{A}{C} = Z_п \operatorname{cth} \gamma l, \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} = \frac{Z_в}{\operatorname{sh} \gamma l}.$$

Получим

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = Z_в \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \gamma l & \operatorname{csh} \gamma l \\ \operatorname{csh} \gamma l & \operatorname{cth} \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $L_п = lL_0$, $R_п = lR_0$, $G_п = lG_0$, $C_п = lC_0$.

Тогда

$$\gamma^2 l^2 = L_п C_п p^2 + (L_п G_п + C_п R_п) p + R_п G_п.$$

Для L, C-линии без потерь ($R_0 = G_0 = 0$) $\gamma l_{LC} = \sqrt{L_п C_п} p$, $Z_в = \sqrt{L_0 / C_0}$.

Для R, C-линии ($L_0 = G_0 = 0$) $\gamma l_{RC} = \sqrt{p C_п R_п}$, $Z_в = \sqrt{R_0 / p C_0}$.

Для безындукционной R, C, G-линии ($L_0 = 0$) $\gamma l_{RCG} = \sqrt{R_п C_п p + R_п G_п}$; $Z_в = \sqrt{\dfrac{R_0}{G_0 + pC_0}}$.

Линия L, C без потерь переходит в линию R, C, а Z-матрица L, C-линии преобразуется в Z-матрицу RC-линии, если в Z-матрице L, C-линии положить $p = \varphi'(s) = \sqrt{s}\sqrt{R_п / L_п}$ и умножить ее на $W(s) = \sqrt{R_0 / (L_0 s)}$.

Линия с распределенными параметрами R, C ($L_0 = G_0 = 0$) переходит в линию с распределенными параметрами L, C ($R_0 = G_0 = 0$), если в Z-матрице R, C-линии положить $p = \varphi(s) = s^2 \dfrac{L_п}{R_п}$ и умножить ее на $W(s) = sL_0 / R_0$.

Аналогично осуществляется переход от линии L, C без потерь к безындукционной линии R, G, C и обратный переход, а также от линии R, C к линии R, G, C, L с потерями. Различие при этих переходах только в том, какую функцию $p = \varphi(s)$ следует взять и каков должен быть множитель $W(s)$.

Рассмотрим теперь, как путем частотных преобразований осуществляют переход от цепей с распределенными параметрами к цепям с сосредоточенными параметрами. С этой целью рассмотрим преобразование, которое позволяет осуществить переход от безындуктивной цепи R, C с распределенными параметрами к цепи с сосредоточенными параметрами, содержащими индуктивные элементы и положительные и отрицательные резисторы. Запишем Z-матрицу цепи R, C без потерь:

$$\sqrt{\frac{R_0}{pC_0}} \begin{bmatrix} \operatorname{cth} \sqrt{p C_п R_п} & \operatorname{csh} \sqrt{p C_п R_п} \\ \operatorname{csh} \sqrt{p C_п R_п} & \operatorname{cth} \sqrt{p C_п R_п} \end{bmatrix}.$$

Применим к ней подстановку О'Ши $s = \operatorname{ch}\sqrt{pC_{\text{п}}R_{\text{п}}}$ и умножим полученную матрицу на $W(s) = \sqrt{pC_{\text{п}}R_{\text{п}}}\operatorname{sh}\sqrt{pC_{\text{п}}R_{\text{п}}}$.

В результате будет получена следующая Z-матрица преобразованной цепи.

$$R_{\text{п}}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

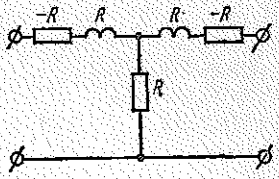


Рис. 4.6

Этой матрице соответствует T-схема с сосредоточенными параметрами, изображенная на рис. 4.6.

Таким образом, используя частотную подстановку О'Ши, цепь с распределенными параметрами R, C ($L_0 = G_0 = 0$) привели к схеме рис. 4.6 с сосредоточенными параметрами, которая содержит индуктивности и положительные и отрицательные резисторы R.

Глава пятая

МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ. ИНТЕГРАЛ ЛЮАМЕЛЯ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 5.1. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Метод пространства состояний (метод переменных состояния) представляет собой упорядоченный способ нахождения состояния системы в функции времени, использующий матричный метод решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши (в нормальной форме). Применительно к электрическим цепям под переменными состояния понимают обычно величины, определяющие энергетическое состояние цепи, т. е. токи через индуктивные элементы и напряжения на конденсаторах (независимые начальные значения). Значения этих величин полагаем известными к началу процесса. Переменные состояния в обобщенном смысле обозначим x. Так как это некоторые функции времени, то их можно обозначить $x(t)$.

Пусть в системе n переменных состояния. Матрицу-столбец переменных состояния в n-мерном пространстве состояний обозначим $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, m выходных величин (токи, напряжения) назовем y, матрицу-столбец выходных величин обозначим $[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Матрица-столбец переменных состояния может быть интерпретирована как вектор в n-мерном пространстве, положение которого определяет состояние системы в некоторый момент времени t. Конечно, когда $n>3$, то обычное геометрическое представление теряет смысл.

Источники воздействий (источники э. д. с. и тока) будем именовать z. Матрица-столбец источников воздействий $[z]=\begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ z_p \end{bmatrix}$.

Для электрических цепей можно составить матричные уравнения вида

$$[\dot{x}]=[M][x]+[N][z], \tag{5.1}$$

$$[y]=[P][x]+[Q][z], \tag{5.2}$$

где $[M]$, $[N]$, $[P]$, $[Q]$ — некоторые матрицы, определяемые структурой цепи и значениями ее параметров.

На основании принципа наложения решение (5.1) таково:

$$[x(t)]=e^{[M]t}[x(0)]+\int_0^t e^{[M](t-\tau)}[N][z(\tau)]\,d\tau, \tag{5.3}$$

где $[x(0)]$ — матрица начальных значений x.

Первое слагаемое в формуле (5.3) описывает свободные процессы в системе, второе — принужденные и свободные при нулевом исходном состоянии [вывод формулы (5.3) см. в § 5.2].

Из (5.2) и (5.3) находим

$$[y(t)]=[P]e^{[M]t}[x(0)]+\int_0^t [P]e^{[M](t-\tau)}[N][z(\tau)]\,d\tau+[Q][z(t)]. \tag{5.4}$$

Поясним формулу (5.3) на простейшем примере. Ток в схеме рис. 5.1 до коммутации был $i(0_-)=E/(2R)$. Уравнение состояния для этой схемы $di/dt=-(R/L)i+(E/L)$, т. е.

$$[\dot{x}]=di/dt;\quad [M]=-R/L;\quad [N]=1/L;\quad [z]=E;$$

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\frac{E}{2R}+\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\frac{E}{L}\,d\tau=\frac{E}{R}-\frac{E}{2R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Матричную функцию $e^{[M]t}$ в формуле (5.3) вычисляют либо по формуле (теореме) Сильвестра, либо путем разложения в ряд.

По теореме Сильвестра

$$e^{[M]t}=e^{\lambda_1 t}[A_1]+e^{\lambda_2 t}[A_2]+\dots+e^{\lambda_n t}[A_n], \tag{5.5}$$

где

$$[A_r]=\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}([M]-\lambda_j[1])}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq r}}(\lambda_r-\lambda_j)}; \qquad (5.6)$$

λ_r — собственные значения (характеристические числа) квадратной матрицы $[M]$, т. е. корни уравнения

$$\det([M]-\lambda[1])=0. \qquad (5.7)$$

Из уравнения (5.7) следует, что уравнение относительно λ составляют, приравнивая нулю определитель матрицы $[M]$, в котором все элементы этой матрицы a_{mm} $(m=1, \ldots, n)$, расположенные по главной диагонали, заменяют на элементы $a_{mm}-\lambda$.

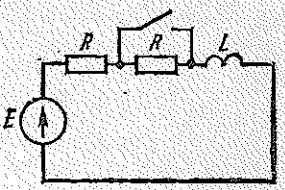


Рис. 5.1

Характеристические числа — это не что иное, как корни характеристического уравнения послекоммутационной схемы. Запись решения в виде ряда (5.5) предполагает, что все характеристические числа различны (нет кратных корней). Если же среди корней уравнения $\det([M]-\lambda[1])=0$ будет кратный корень λ_s кратности s, то составляющая $e^{[M]t}$, обусловленная этим корнем, имеет вид

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}}\left[\frac{e^{[\lambda]t}Adj(\lambda[1]-[M])}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq s}}(\lambda-\lambda_j)}\right]\right\}_{\lambda=\lambda_s}, \qquad (5.8)$$

где $Adj(\lambda[1]-[M])$ — присоединенная матрица к матрице $\lambda(1)-[M]$. В ней все элементы Q_{ij} заменены на алгебраические дополнения. Составляющие решения по формуле (5.8) соответствуют части решения по формуле разложения, учитывающей кратные корни.

Второй способ получения матричной функции $e^{[M]t}$ основан на представлении ее в виде ряда $e^{[M]t}=[1]+[M]t+\frac{[M]^2t^2}{2!}+\ldots$

Этот способ применяют обычно при машинном счете.

Пример 5.1. Методом пространства состояний исследовать переходный процесс в схеме рис. 5.2, *а*. До коммутации был установившийся режим, причем $E=4$ В, $I_k=1$ А, $R=2$ Ом, $L=1$ Г, $C=1$ Ф.

Решение. Обозначим токи и напряжения в соответствии с рис. 5.2, *а*. До коммутации

$$i(0_-)=\frac{E}{2R}-\frac{I_k}{2}=0{,}5 \text{ А}; \quad u_C(0)=R\left(\frac{I_k}{2}+\frac{E}{2R}\right)=3 \text{ В}.$$

В качестве переменных состояния выбираем ток i_1 и напряжение на емкости u_C.

Известно несколько способов составления уравнений состояния. Рассмотрим наиболее целесообразный, основанный на сведении послекоммутационной схеме к резистивной с источниками э. д. с. и тока. С этой целью индуктивности в послекоммутационной схеме заменяем на источники тока, которые доставляют ток в том же направлении, что и в исходной схеме (в рассматриваемом примере L заменяем на источник тока i_1 с напряжением на нем $L\,di_1/dt$), а конденсаторы емкостью C заменяем на источники э. д. с., причем в соответствии с теоремой компенсации э. д. с. этих источников должны быть направлены встречно токам в ветвях с емкостями, т. е. встречно напряжениям u_C на емкостях (в рассматриваемом примере емкость C с напряжением на ней u_C заменена на э. д. с. $E_1 = u_C$).

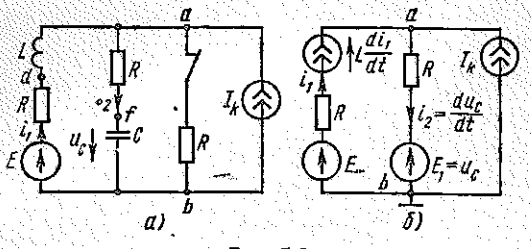


Рис. 5.2

В результате схема окажется без индуктивностей и емкостей (чисто резистивной), но с дополнительными источниками тока и э. д. с. (рис. 5.2, *б*).

В полученной резистивной схеме один из узлов заземляем. Составляем уравнения по методу узловых потенциалов и определяем потенциалы незаземленных узлов. В рассматриваемом примере не заземлен всего один узел a. Поэтому

$$\varphi_a = \frac{(i_1 + I_k) + (u_C/R)}{1/R} = (i_1 + I_k)\,R + u_C.$$

По известным потенциалам узлов рассчитываем напряжения на источниках тока $L_k di_k/dt$, эквивалентирующих индуктивности L_k и токи $i_m = C_m\,du_{C_m}/dt$ через источники э. д. с., эквивалентирующие емкости C_m.

Для первой ветви схемы рис. 5.2, *б*

$$\varphi_a = (i_1 + I_k)\,R + u_C = E - i_1 R - L\frac{di_1}{dt}.$$

Отсюда $\dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{2R}{L}\,i_1 - \dfrac{u_C}{L} + \dfrac{E}{L} - \dfrac{R}{L}\,I_k.$

Ток второй ветви i_2 можно определить либо по первому закону Кирхгофа, либо по закону Ома для участка цепи с э. д. с.:

$$i_2 = C\frac{du_C}{dt} = \frac{\varphi_a - u_C}{R} = \frac{(i_1 + I_k)\,R + u_C - u_C}{R} = i_1 + I_k.$$

Отсюда $du_C/dt = (i_1/C) + (I_k/C)$. Таким образом, уравнения переменных состояния для послекоммутационной схемы рис. 5.2, *а*

таковы:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{2R}{L} i_1 - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} E - \frac{R}{L} I_k;$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 + 0u_C + 0E + \frac{1}{C} I_k,$$

или $[\dot{x}] = [M][x] + [N][z]$, где $[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix}$; $[x] = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_C \end{bmatrix}$; $[M] =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad [N] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$[z] = \begin{bmatrix} E \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $[x(0)] = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Составляем уравнение для определения характеристических чисел:

$$\det([M] - \lambda[1]) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = -0{,}27$; $\lambda_2 = -3{,}73$ с$^{-1}$. По формуле (5.6):

$$[A_1] = \frac{[M] - \lambda_2[1]}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3{,}73 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{3{,}46} = \begin{bmatrix} -0{,}078 & -0{,}289 \\ 0{,}289 & 1{,}077 \end{bmatrix};$$

$$[A_2] = \frac{[M] - \lambda_1[1]}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} 1{,}077 & 0{,}289 \\ -0{,}289 & -0{,}078 \end{bmatrix}.$$

По формуле (5.3):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_C \end{bmatrix} = \{e^{-0{,}27t}[A_1] + e^{-3{,}73t}[A_2]\} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \{e^{-0{,}27(t-\tau)}[A_1] + e^{-3{,}73(t-\tau)}[A_2]\} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau;$$

$$[A_1] \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}906 \\ 3{,}5545 \end{bmatrix}; \quad [A_2] \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4055 \\ -0{,}3785 \end{bmatrix};$$

$$[A_1] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}078 & -0{,}133 \\ 0{,}289 & 0{,}5 \end{bmatrix}; \quad [A_1] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}445 \\ 1{,}654 \end{bmatrix}.$$

Выполнив подсчеты, получим:

$$i_1 = -1 + 0{,}75e^{-0{,}27t} + 0{,}75e^{-3{,}73t} \text{ А};$$

$$u_C = 6 - 2{,}8e^{-0{,}27t} - 0{,}2e^{-3{,}73t} \text{ В}.$$

Если за выходную величину y принять напряжение u_{df} между точками d и f, то

$$[u_{df}]=[-R-1]\begin{bmatrix} i_1 \\ u_C \end{bmatrix}+[1 \quad 0]\begin{bmatrix} E \\ I_k \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (5.1) осуществляют обычно на ЭВМ.

§ 5.2. ВЫВОД ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ МЕТОДА ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Решение неоднородного уравнения (5.1) можно получить в виде суммы полного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Полное решение однородного уравнения

$$[\dot{x}]=[M][x] \tag{5.9}$$

для $t \geqslant \tau$, где τ — постоянная величина, находим по аналогии с решением скалярного дифференциального уравнения $\dot{x}=mx$ $x=e^{m(t-\tau)}x(\tau)$ в виде

$$[x_n(t)]=e^{[M](t-\tau)}[x_n(\tau)]. \tag{5.10}$$

Подставив (5.10) в (5.9), убеждаемся в справедливости решения однородного уравнения (5.9). Функцию $e^{[M]t}$ обозначим $[\varphi(t)]$, а $e^{[M](t-\tau)}=[\varphi(t-\tau)]$.

Так как $e^{[M]t}=[1]+[M]t+\frac{[M]^2t^2}{2!}+\ldots$, то $[\varphi(0)]=[1]$.

В соответствии с методом вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения положим в виде

$$[x_ч(t)]=[\varphi(t-\tau)][u(t)][x(\tau)].$$

Общее решение

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][x(\tau)]+[\varphi(t-\tau)][u(t)][x(\tau)]=$$
$$=[\varphi(t-\tau)][1]+[u(t)][x(\tau)]=[\varphi(t-\tau)][R(t)],$$

где $R(t)$ нужно определить.

Подставим

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][R(t)] \tag{5.11}$$

в уравнение (5.1):

$$[[\dot{\varphi}(t-\tau)]-[M][\varphi(t-\tau)]][R(t)]+[\varphi(t-\tau)][\dot{R}(t)]=[N][z]. \tag{5.12}$$

Поскольку $[\varphi(t-\tau)]$ — матрица, столбцы которой являются решением уравнения (5.9), первый член выражения (5.12) — нулевая матрица. Следовательно,

$$[\dot{R}(t)]=[\varphi(t-\tau)]^{-1}[N][z]. \tag{5.13}$$

Проинтегрируем (5.13) от τ до t:

$$[R(t)]-[R(\tau)]=\int_{\tau}^{t}[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}[N][z]\,d\lambda. \tag{5.14}$$

Из уравнений (5.11) и (5.14) следует

$$[\varphi(t-\tau)]^{-1}[x(t)]=[\varphi(0)]^{-1}[x(\tau)]+\int_{\tau}^{t}[\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}[N][z(\lambda)]\,d\lambda. \quad (5.15)$$

Но $[\varphi(0)]=[1]$. Умножая (5.15) слева на $[\varphi(t-\tau)]$ и учитывая, что

$$[\varphi(t-\tau)][\varphi(\lambda-\tau)]^{-1}=e^{[M](t-\tau)}e^{-[M](\lambda-\tau)}=e^{[M](t-\lambda)}=[\varphi(t-\lambda)],$$

получим

$$[x(t)]=[\varphi(t-\tau)][x(\tau)]+\int_{\tau}^{t}[\varphi(t-\lambda)][N][z(\lambda)]\,d\lambda. \quad (5.16)$$

Полагая в (5.16) $\tau=0$ и заменяя затем переменную λ на τ, получим формулу (5.3).

§ 5.3. ПОНЯТИЕ ОБ ОГИБАЮЩЕЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ВХОД ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЕМ С НЕИЗМЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Положим, что в момент $t=0$ к напряжению $u(t)$ подключается электрическая цепь с нулевыми начальными условиями. Тогда напряжение на выходе можно определить с помощью интеграла Дюамеля:

$$u_2(t)=u(0)\,h(t)+\int_{0}^{t}u'(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau, \quad (5.17)$$

где $u'(\tau)$ — производная входного напряжения по времени, в которой время t заменено на τ; $h(t)$ — переходная функция.

В дальнейшем будет необходима иная форма записи интеграла Дюамеля, которую можно получить из (5.17), взяв интеграл по частям с последующей заменой переменных.

Так как $\int u\,dv=uv-\int v\,du$, то, полагая $h(t-\tau)=u$ и $u'(\tau)\,d\tau=dv$, получим

$$u_2(t)=u(0)\,h(t)+h(t-\tau)\,u(\tau)\Big|_{0}^{t}+\int_{0}^{t}u(\tau)\,h'(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=u(0)\,h(t)+h(0)\,u(t)-u(0)\,h(t)+\int_{0}^{t}u(\tau)\,h'(t-\tau)\,d\tau.$$

Следовательно,

$$u_2(t)=h(0)\,u(t)+\int_{0}^{t}u(\tau)\,h'(t-\tau)\,d\tau. \quad (5.18)$$

Если ввести новую переменную $x=t-\tau$, то

$$\int_{0}^{t}u(\tau)\,h'(t-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{t}u(t-x)\,h'(x)\,dx.$$

Возвращаясь к прежней переменной τ вместо x, получим

$$\int_0^t u(\tau)\, h'(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t u(t-\tau)\, h'(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом,

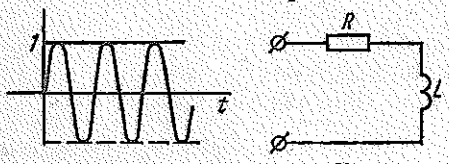
$$u_2(t) = h(0)\, u(t) + \int_0^t u(t-\tau)\, h'(\tau)\, d\tau. \qquad (5.19)$$

Положим, что на вход цепи с нулевыми начальными условиями при $t=0$ воздействует синусоидальное напряжение $u(t)$, амплитуда которого в момент времени $t=0$ скачком возрастает с 0 до 1 и затем остается постоянной (рис. 5.3, *а*).

Напряжение $u(t) = \sin \omega t$ есть коэффициент при мнимой части в разложении по Эйлеру выражения $e^{j\omega t}$. Поэтому

$$u(t) = \mathrm{Im}[e^{j\omega t}],$$

где Im — символ взятия мнимой части.



а) *б)*

Рис. 5.3

Подставим в (5.19)

$$u(t-\tau) = \mathrm{Im}\left[e^{j\omega(t-\tau)}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau}\right]$$

и воспользуемся тем, что сумма мнимых частей равна мнимой части суммы и что множитель $e^{j\omega t}$, как не зависящий от переменной интегрирования τ, можно вынести из-под знака интеграла. Получим

$$u_2(t) = \mathrm{Im}\left\{\left[h(0) + \int_0^t h'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right] e^{j\omega t}\right\}. \qquad (5.20)$$

Множитель, находящийся в квадратных скобках в (5.20), обозначим через

$$a(\omega, t) = h(0) + \int_0^t h'(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau. \qquad (5.21)$$

Из формулы (5.21) можно вывести соотношение между $K(j\omega)$ и $h(t)$, частным случаем которого является формула (3.8). Будем считать, что время t в (3.19) стремится к бесконечности, при этом получим установившийся режим. Комплексную амплитуду выходного напряжения четырехполюсника $a(\omega, t)$ в установившемся режиме при $t \to \infty$ обозначим $a(\omega)$. Таким образом, если на вход четырехполюсника при нулевых начальных условиях подвести синусоидальное напряжение частотой ω, комплексная амплитуда которого $\dot{U}_1 = 1$, то на выходе четырехполюсника будет синусоидальное напряжение той же частоты с комплексной амплитудой $\dot{U}_2 = a(\omega)$

Передаточная функция

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{a(\omega)}{1} = h(0) + \int_0^\infty h'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau. \qquad (5.22)$$

Если $h(0)=0$, то эта формула превращается в формулу (3.8).

Тогда

$$u_2(t) = \operatorname{Im}[a(\omega, t)\, e^{j\omega t}], \qquad (5.23)$$

где $a(\omega, t)$ — *огибающая переходной функции* при воздействии на вход цепи синусоидального напряжения, по амплитуде равного 1.

В общем случае $a(\omega, t)$ представляет собой комплексную величину и может быть записана следующим образом:

$$a(\omega, t) = m(\omega, t) + jn(\omega, t) = q(\omega, t)\, e^{j\varphi(\omega, t)},$$

где

$$q(\omega, t) = \sqrt{m^2(\omega, t) + n^2(\omega, t)};$$

$$\varphi(\omega, t) = \operatorname{arctg} \frac{n(\omega, t)}{m(\omega, t)}.$$

Пример 5.2. Найти огибающую переходной проводимости для схемы 5.3, *б*.

Переходная проводимость для этой схемы

$$g(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

В соответствии с формулой (5.21)

$$a(\omega, t) = g(0) + \int_0^t g'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau,$$

но $g(0) = 0$.

Следовательно,

$$a(\omega, t) = \frac{1}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau} e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{R + j\omega L}\left[1 - e^{-\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}\right].$$

Запишем $a(\omega, t)$ в показательной форме:

$$a(\omega, t) = \frac{e^{-j \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t + je^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t\right).$$

Но

$$1 - e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t + je^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t =$$

$$= \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t\right)^2 + \left(e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t\right)^2}\; e^{j \operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t}{1 - e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t}}.$$

Окончательно получим

$$a(\omega, t) = \frac{\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t\right)^2 + \left(e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t\right)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\, e^{j\varphi(\omega t)},$$

где

$$\varphi(\omega,\ t)=\operatorname{arctg}\frac{e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t}{1-e^{-\frac{R}{L}t}\cos\omega t}-\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

Чем больше ω, тем меньше установившееся значение модуля $a(\omega,\ t)$.

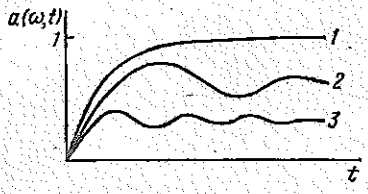


Рис. 5.4

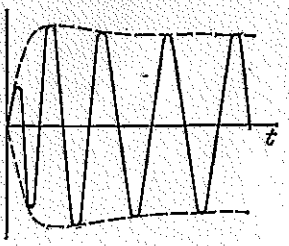


Рис. 5.5

На рис. 5.4 изображены три кривые, которые характеризуют изменение модуля $a(\omega,\ t)$ с увеличением ω. Для кривой *1* $\omega=\omega_1=0$; для кривой *2* $\omega=\omega_2>\omega_1$, для кривой *3* $\omega=\omega_3>\omega_2$.

Кривая рис. 5.5 характеризует изменение мгновенного значения тока в цепи при некотором $\omega=\omega_2$. Огибающая на этом рисунке повторяет кривую *2* на рис. 5.4.

В качестве второго примера приведем вы-

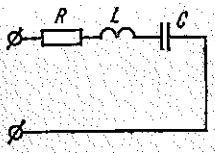


Рис. 5.6

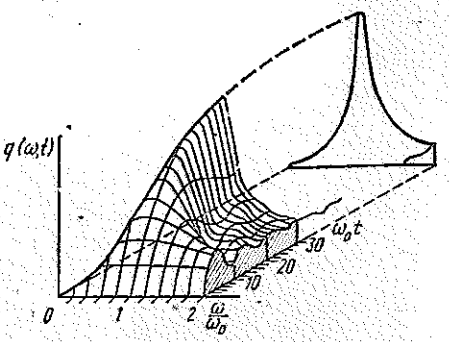


Рис. 5.7

ражение модуля огибающей переходной функции (умноженной на L) для схемы рис. 5.6:

$$q(\omega,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega}\right]^2+\left(\frac{R}{L}\right)^2}}\sqrt{1-2e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega-\omega_0)t+e^{-\frac{R}{L}t}},$$

где $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

При $t \to \infty$, т. е. в установившемся режиме,

$$q(\omega, t) = q(\omega),$$

$$q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}}.$$

На рис. 5.7 изображен рельеф $q(\omega, t)$ в зависимости от двух переменных: ω/ω_0 и $\omega_0 t$. Находящиеся в плоскостях, параллельных $q(\omega, t)$; 0; $\omega_0 t$, кривые представляют собой динамические резонансные кривые. Статическая резонансная кривая, имеющая место при $t \to \infty$, показана на рисунке жирной линией.

Кривые, находящиеся в плоскостях, параллельных $q(\omega, t)$; 0; $\omega_0 t$, характеризуют установление амплитуд при различных ω/ω_0.

При $\omega/\omega_0 = 1$ у огибающей колебаний экспоненциальный характер установления.

§ 5.4. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ

Определение реакции линейной системы на амплитудно-модулированное синусоидальное колебание

$$U_m(t) \sin \omega t = \operatorname{Im}[U_m(t) e^{j\omega t}]$$

производятся путем расчета по огибающей.

С этой целью в формулу (5.19) вместо $u(t-\tau)$ подставим

$$\operatorname{Im}[U_m(t-\tau) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau}].$$

Вынесем за знак интеграла множитель $e^{j\omega t}$, не зависящий от τ, и воспользовавшись тем, что сумма мнимых частей равна мнимой части суммы, получим напряжение на выходе системы

$$u_2(t) = \operatorname{Im}\left\{\left[h(0) U_m(t) + \int_0^t h'(\tau) U_m(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau\right] e^{j\omega t}\right\}. \quad (5.24)$$

Множитель в квадратных скобках формулы (5.24) представляет собой огибающую выходного напряжения (тока). Этот множитель можно переписать в более удобном для использования виде. Если учесть, что согласно формуле (5.21) $h(0) = a(\omega, 0)$, то

$$\frac{da(\omega, t)}{dt} = a'(\omega, t) = h'(\tau) e^{-j\omega\tau}.$$

Заменив в (5.24) $h(0)$ на $a(\omega, 0)$ и $h'(\tau) e^{-j\omega\tau}$ на $a'(\omega, \tau)$, получим

$$u_2(t) = \operatorname{Im}\{A(\omega, t) e^{j\omega t}\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\left[a(\omega, 0) U_m(t) + \int_0^t a'(\omega, \tau) U_m(t-\tau) d\tau\right] e^{j\omega t}\right\}, \quad (5.25)$$

где $A(\omega, t)$ — огибающая выходного напряжения;

$$A(\omega, t) = a(\omega, 0)\, U_m(t) + \int_0^t a'(\omega, \tau)\, U_m(t-\tau)\, d\tau. \qquad (5.26)$$

Формула (5.26) для огибающей полностью повторяет формулу (5.19) интеграла Дюамеля для мгновенных значений. Поэтому формулу (5.26) называют *интегралом Дюамеля для огибающей*.

Формула (5.26) весьма существенна, так как она дает возможность исследовать макроструктуру переходных процессов, не вдаваясь в мелкие подробности, имеющие место внутри каждого периода вынуждающей силы.

Впервые вопрос об интеграле Дюамеля для огибающей применительно к избирательным (резонансным) системам был рассмотрен С. И. Евтяновым. В более общем виде вопрос был рассмотрен А. А. Ризкиным (Электричество, 1950, № 9) и Н. Н. Крыловым [10].

Исследование макроструктуры переходного процесса может осуществляться также методом медленно изменяющихся амплитуд. Решение задачи о воздействии на резонансный контур синусоидального колебания с линейно нарастающей частотой методом медленно изменяющихся амплитуд, разбор предшествующих работ и обширная библиография по этому вопросу имеются в книге А. А. Харкевича [6].

Пример 5.3. Определить закон изменения во времени огибающей тока в цепи рис. 5.3 при воздействии на нее напряжения

$$u(t) = U_m(t) \sin \omega t,$$

где $U_m = kt$ (линейно нарастающая амплитуда).

Решение. Значение $a(\omega, t)$ возьмем из примера 5.2: $a(\omega, t) = \frac{1}{R + j\omega L}[1 - e^{-qt}]$, где $q = (R/L) + j\omega$.

Воспользуемся формулой (5.26). Первое слагаемое в ней выпадает, так как $a(\omega, 0) = 0$. Найдем $a'(\omega, \tau)$:

$$a'(\omega, \tau) = \frac{1}{L} e^{-q\tau}; \quad U_m(t-\tau) = k(t-\tau).$$

Огибающая амплитуд тока

$$A(\omega, t) = \int_0^t a'(\omega, \tau)\, U_m(t-\tau) = \frac{k}{L} \int_0^t (t-\tau) e^{-q\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{k}{L} t \int_0^t e^{-q\tau}\, d\tau - \frac{k}{L} \int_0^t \tau e^{-q\tau}\, d\tau = -\frac{kt}{Lq}[e^{-qt} - 1] +$$

$$+ \frac{k}{L}\left| \frac{\tau}{q} e^{-q\tau} + \frac{1}{q^2} e^{-q\tau} \right|_0 = \frac{-k}{Lq^2}(1 - e^{-qt}) + \frac{kt}{Lq} =$$

$$= \frac{kt}{R + j\omega L} + \frac{kL}{(R + j\omega L)^2}(e^{-qt} - 1),$$

или

$$A(\omega, t) = \frac{kL}{R^2 + (\omega L)} \times$$

$$\times \sqrt{\left[\frac{Rt}{L} + e^{-\frac{R}{L}t}\cos(\omega t + 2\varphi) - \cos 2\varphi\right]^2 + \left[\omega t + e^{-\frac{R}{L}t}\sin(\omega t + 2\varphi) - \sin 2\varphi\right]^2}\, e^{-j\beta(\omega t)}, \quad (5.26')$$

где

$$\beta(\omega, t) = \operatorname{arctg} \frac{\omega t + e^{-\frac{R}{L}t}\sin(\omega t + 2\varphi) - \sin 2\varphi}{\frac{R}{L}t + e^{-\frac{R}{L}t}\cos(\omega t + 2\varphi) - \cos 2\varphi};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}.$$

§ 5.5. ПОНЯТИЕ О РЕШЕТЧАТОЙ ФУНКЦИИ

Решетчатой называют функцию $f[n,T]$, заданную дискретными значениями через равноотстоящие интервалы времени, т. е. в моменты времени 0, T, $2T$, ... (см., например, рис. 5.8). В промежутках между этими моментами времени функция равна нулю. Число n может принимать целые положительные значения.

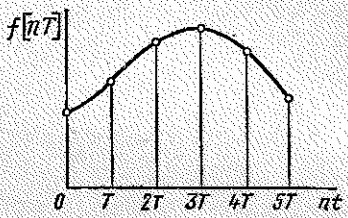


Рис. 5.8

Решетчатую функцию можно образовать из любой числовой таблицы. Ее можно образовать и из непрерывной функции, придавая ее аргументу кратные T значения.

При переходе от непрерывной функции к решетчатой масштаб времени изменяют так, чтобы интервал времени между смежными значениями аргумента равнялся 1. Например, если задана

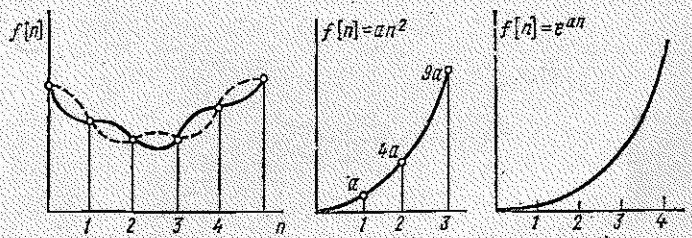


Рис. 5.9

непрерывная функция $f(t) = e^{a_1 t}$, то, введя время $\bar{t} = t/T$, получим $f(\bar{t}) = e^{a\bar{t}}$, где $a = a_1 T$. Решетчатая функция обозначается либо как $f[nT]$, либо как $f[n]$.

Одной и той же решетчатой функции $f[n]$ может соответствовать несколько непрерывных функций. В качестве примера на рис. 5.9, *а* показаны две кривые (сплошная и пунктирная). Этим кривым соответствует одинаковая решетчатая функция.

§ 5.6. РАЗНОСТЬ k-ГО ПОРЯДКА РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

Ту роль, которую в теории непрерывных функций выполняет первая производная, в теории решетчатых функций играет первая разность, или разность 1-го порядка:

$$\Delta f[n]=f[n+1]-f[n]. \tag{5.27}$$

$\Delta f[n]$ равно приращению решетчатой функции при переходе от аргумента n к аргументу $n+1$.

Разность 2-го порядка

$$\Delta^2 f[n]=\Delta f[n+1]-\Delta f[n]=f[n+2]-f[n+1]-$$
$$-f[n+1]+f[n]=f[n+2]-2f[n+1]+f[n]. \tag{5.28}$$

Разность k-го порядка

$$\Delta^k f[n]=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}f[n+k-\nu]. \tag{5.29}$$

Рассмотрим два примера.

1. $f[n]=an^2$; функция изображена на рис. 5.9, *б*. Для нее в соответствии с (5.27) первая разность

$$\frac{\Delta f[n]}{a}=(n+1)^2-n^2=2n+1;$$

вторая разность

$$\frac{\Delta^2 f[n]}{a}=(n+2)^2-2(n+1)^2+n^2=2.$$

2. $f[n]=e^{an}$; функция представлена на рис. 5.9, *в*. Для нее

$$\Delta f[n]=e^{a(n+1)}-e^{an}=e^{an}(e^a-1);$$
$$\Delta^2 f[n]=e^{a(n+2)}-2e^{a(n+1)}+e^{an}=e^{an}(e^a-1)^2.$$

§ 5.7. УРАВНЕНИЕ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ (РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ)

Уравнением p-го порядка в конечных разностях, или разностным уравнением p-го порядка, называют уравнение, в которое входят неизвестная функция $y=[n]$ и ее разности до p-го порядка включительно:

$$b_p\Delta^p y[n]+b_{p-1}\Delta^{p-1}y[n]+\ldots+b_0 y[n]=f[n], \tag{5.30}$$

где b_p, b_{p-1}, ... — коэффициенты; $f[n]$ — внешняя сила, воздействующая на систему.

При $f[n]=0$ уравнение (5.30) называют однородным, при $f[n]\neq 0$ — неоднородным. Естественно, что какие-либо из коэффициентов $b_{p-1}, \ldots, b_0$ могут равняться нулю.

Существует и вторая форма записи уравнений в конечных разностях. Ее получают из (5.30), заменяя все разности (начиная с $\Delta y[n]$ и кончая $\Delta^p y[n]$) на их выражения через $y[n+1]$, $y[n+2], \ldots, y[n+p-1]$ в соответствии с формулой (5.29).

Если затем объединить слагаемые с одинаковыми значениями аргументов функции y, т. е. слагаемые с $y[n]$; $y[n+1]$ вплоть до $y[n+p]$, то получим следующую строку:

$$a_p y[n+p]+a_{p-1}y[n+p-1]+\ldots+a_0 y[n]=f[n]. \qquad (5.31)$$

В качестве простейшего примера рассмотрим переход от (5.30) к (5.31), если (5.30) задано в виде

$$\Delta^2 y[n]+5\Delta y[n]+4y[n]=0.$$

Если заменить $\Delta^2 y[n]$ по формуле (5.28) и $\Delta y[n]$ по формуле (5.27), то получим

$$y[n+2]-2y[n+1]+y[n]+5y[n+1]-5y[n]+4y[n]=0,$$

или

$$y[n+2]+3y[n+1]=0, \qquad (5.32)$$

т. е. $a_2=1$, $a_1=3$, $a_0=0$.

Уравнение в конечных разностях в отличие от дифференциальных уравнений обладает двумя существенными особенностями.

1. Записанное в форме (5.31) оно дает возможность определять последующие значения отклика системы $y[n+p]$ через значения отклика в предыдущие моменты времени, т. е. через значения $y[n+p-1]$, $y[n+p-2]$, вплоть до $y[0]$ и через значения вынуждающей силы $f[n]$. Другими словами, уравнение, записанное в форме (5.31), представляет собой рекуррентную формулу для последовательного определения откликов системы через отклики в предыдущие моменты времени.

2. Если условиться называть порядком разностного уравнения разность максимального и минимального значения аргументов функций y этого уравнения, то порядок разностного уравнения не всегда совпадает с порядком наивысшей разности того же уравнения. Так, в приведенном примере уравнение $\Delta^2 y[n]+5\Delta y[n]+4y[n]=0$ имеет наивысший порядок разности, равный двум, т. е. имеет в своем составе $\Delta^2 y[n]$, тогда как уравнение (5.32), если заменить в нем $(n+1)$ на n, представляет собой уравнение первого порядка.

Теория уравнений в конечных разностях и различные задачи, приводящиеся к этим уравнениям, рассмотрены в книге Я. З. Цыпкина [5] и в книгах Я. С. Безиковича, А. О. Гельфонда [29], Ш. Е. Микеладзе и др.

§ 5.8. ПРЯМОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА (ПРЯМОЕ *D*-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ)

Я. З. Цыпкиным [5] разработано прямое и обратное *D*-преобразование и совокупность теорем и правил, относящихся к этим преобразованиям. Далее изложены основные вопросы, относящиеся к *D*-преобразованию.

Прямое дискретное преобразование Лапласа решетчатых функций $f[n]$ производят по формуле

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n]. \qquad (5.33)$$

$F^*(q)$ является изображением функции $f[n]$, подобно тому как функция $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ представляет собой изображение по Лапласу обычной функции $f(t)$.

Комплексное число $q = \sigma + j\omega$ является параметром преобразования.

Соотношение (5.33) записывают также в символической форме в виде

$$F^*(q) = D\{f[n]\}, \qquad (5.34)$$

подобно преобразованию Лапласа, которое записывают так:

$$F(p) = L\{f(t)\}.$$

Чтобы $F^*(q)$ было определенной (конечной) величиной, ряд в правой части (5.33) должен сходиться. Ряд будет сходиться, если функция $f[n]$ при любом n по модулю будет оставаться меньше некоторого числа $M e^{\sigma_0 n}$ при $\operatorname{Re} q = \sigma > \sigma_0$, т. е.

$$|f[n]| < M e^{\sigma_0 n} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} q > \sigma_0.$$

При этом

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-qn} f[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-\sigma n} e^{-j\omega n} f[n]| <$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty} M e^{-n(\sigma - \sigma_0)} = M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\sigma - \sigma_0)}. \qquad (5.35)$$

Так как $\sigma > \sigma_0$, то ряд в правой части (5.35) представляет собой сходящуюся геометрическую прогрессию. Сумма членов этого ряда равна $\frac{M}{1 - e^{-\sigma(\sigma - \sigma_0)}}$. Поскольку члены ряда (5.35) по абсолютной величине меньше членов ряда $M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\sigma - \sigma_0)}$ при $\operatorname{Re} q > \sigma_0$, то ряд (5.33) при этом условии также сходится.

Абсциссой сходимости называют наименьшую σ_0, при которой ряд (5.33) сходится. Если $\sigma_0 < \infty$, то функция $f[n]$ имеет изображение $F^*(q)$ и называется *преобразуемой*. Если же $\sigma_0 = \infty$, то изображение для $f[n]$ не существует.

§ 5.9. ТЕОРЕМЫ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Теорема линейности — изображение суммы равно сумме изображений:

$$D\{f_1[n]+f_2[n]\} = D\{f_1[n]\} + D\{f_2[n]\}. \tag{5.36}$$

Теорема (5.36) позволяет находить изображение функций, представляющих собой линейную комбинацию функций, изображения которых известны.

2. Теорема смещения в области оригиналов (ее называют еще теоремой сдвига или теоремой упреждения и запаздывания). Теорема смещения позволяет найти изображение функции $f[n+k]$ через изображение функции $f[n]$, равное $F^*(q)$, и значение функций $f[0]$, $f[1]$, ..., $f[k-1]$. При положительном k теорему записывают следующим образом:

$$D\{f[n+k]\} = e^{qk}\left[F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} f[r]\right], \tag{5.37}$$

где k — целое положительное число.

Доказательство. В правой части формулы

$$D\{f[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n+k]$$

осуществим подстановку $n+k=r$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n+k] = \sum_{r=k}^{\infty} e^{-qr} e^{qk} f[r] =$$

$$= e^{qk}\left[\sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} f[r] - \sum_{r=0}^{k-1} e^{-qr} f[r]\right]. \tag{5.38}$$

Так как суммирование от 0 до ∞ не зависит от того, как обозначена переменная (n или r), то

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-qr} f[r] = F^*(q).$$

Поэтому из (5.38) следует (5.37).

Аналогичным образом можно вывести формулу при отрицательном k:

$$D\{f[n-k]\} = e^{-qk}\left[F^*(q) - \sum_{r=1}^{k} e^{qr} f[-r]\right]. \tag{5.39}$$

На основании (5.37) находим:

$$D\{f[n+1]\} = e^{q}[F^{*}(q) - f(0)], \tag{5.40}$$

где $f[0]$ — значение функции $f[n]$ к началу процесса:

$$D\{f[n+2]\} = e^{2q}[F^{*}(q) - f[0]] - e^{q}f[1]. \tag{5.41}$$

Теорему сдвига совместно с теоремой линейности используют также для нахождения изображения первой, второй и более высоких разностей. Так как

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n],$$

то

$$D\{\Delta f[n]\} = D\{f[n+1]\} - D\{f[n]\} = e^{q}[F^{*}(q) - f[0]] - \\ - F^{*}(q) = (e^{q} - 1)F^{*}(q) - e^{q}f[0]. \tag{5.42}$$

В свою очередь,

$$\Delta^{2} f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n].$$

Поэтому

$$D\{\Delta^{2} f[n]\} = e^{2q}F^{*}(q) - e^{2q}f[0] - e^{q}f[1] - 2e^{q}F^{*}(q) + \\ + 2e^{q}f[0] + F^{*}(q) = (e^{q} - 1)^{2}F^{*}(q) - (e^{q} - 2)e^{q}f[0] - e^{q}f[1]. \tag{5.43}$$

3. Теорема смещения в области изображений. Если в формуле (5.33) заменить q на $q \pm \lambda$, то получим

$$F^{*}(q \pm \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(q \pm \lambda)n} f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn}[e^{\mp \lambda n} f[n]].$$

Отсюда

$$F^{*}(q \pm \lambda) = D\{e^{\mp \lambda n} f[n]\}, \tag{5.44}$$

т. е. смещение в области изображения на $\pm\lambda$ соответствует умножению оригинала на $e^{\mp \lambda n}$.

4. Теорема умножения оригинала на n^{k}. Дифференцируя левую и правую части (5.33) k раз по q, имеем

$$\frac{d^{k}F^{*}(q)}{dq^{k}} = \frac{d}{dq^{k}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k} n^{k} e^{-qn} f[n],$$

или

$$\frac{d^{k}F^{*}(q)}{dq^{k}} = (-1)^{k} D\{n^{k} e^{-qn} f[n]\}. \tag{5.45}$$

Следовательно, умножение оригинала на n^{k} соответствует k-кратному дифференцированию $F^{*}(q)$ по $-q$.

5. Теорема деления оригинала на n^{k}. Положим, что функция $f[n]$ такова, что $f[0] = 0$. Тогда суммирование в пра-

вой части формулы (5.33) должно быть начато с $n=1$, т. е.

$$F^*(q)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn} f[n].$$

Интегрируем обе части последнего уравнения по q от q до ∞:

$$\int_q^{\infty} F^*(q)\,dq=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn}\frac{f[n]}{n}.$$

При интегрировании k раз имеем

$$\int_q^{\infty}\dots\int_q^{\infty} F^*(q)\,(dq)^k=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-qn}\frac{f[n]}{n^k}.$$

Следовательно,

$$D\left\{\frac{f[n]}{n^k}\right\}=\int_q^{\infty}\dots\int_q^{\infty} F^*(q)\,(dq)^k. \qquad (5.46)$$

Деление оригинала на n^k соответствует k-кратному интегрированию изображения по q от q до ∞.

6. Теорема свертки дает возможность найти оригинал произведения двух изображений, если известны оригиналы сомножителей. Пусть функции $f_1[m]$ соответствует $F_1^*(q)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{-qm} f_1[m]$ и функции $f_2[n]$ отвечает $F_2^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f_2[n]$.

Умножим F_1^* на $F_2^*(q)$:

$$F_1^*(q)\,F_2^*(q)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{-qm} F_2^*(q)\,f_1[m].$$

По теореме сдвига

$$e^{-qm}F_2^*(q)=\begin{cases}0 & \text{при } n<m,\\ f_2[n-m] & \text{при } n\geqslant m.\end{cases}$$

Принято, что решетчатая функция равна нулю при отрицательном значении аргумента. Тогда

$$F_1^*(q)\,F_2^*(q)\to\sum_{m=0}^{n} f_1[m]\,f_2[n-m]. \qquad (5.47)$$

Так как функции f_1 и f_2 равноправны, то существует и вторая форма записи теоремы свертки:

$$F_1^*(q)\,F_2^*(q)\to\sum_{n=0}^{m} f_1[n-m]\,f_2[m]. \qquad (5.48)$$

Изображения некоторых простых решетчатых функций:

$$1[n]=\begin{cases}0 & \text{при } n<0\\ 1 & \text{при } n\geqslant 0\end{cases} \quad \frac{e^q}{e^q-1} \qquad 1-e^{\alpha n} \quad \frac{e^q(1-e^{\alpha})}{(e^q-e^{\alpha})(e^q-1)}$$

$$n \quad \frac{e^q}{(e^q-1)^2} \qquad e^{j\bar{\omega}n} \quad \frac{e^q}{e^q-e^{j\bar{\omega}}}$$

$$n^2 \quad \frac{e^q}{(e^q-1)^3}(e^q+1) \qquad \cos\bar{\omega}n \quad \frac{(e^q-\cos\bar{\omega})e^q}{e^{2q}-2e^q\cos\bar{\omega}+1}$$

$$a^n \quad \frac{e^q}{e^q-a} \qquad \sin\bar{\omega}n \quad \frac{e^q\sin\bar{\omega}}{e^{2q}-2e^q\cos\bar{\omega}+1}.$$

$$e^{\alpha n} \quad \frac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}$$

В [5] на с. 668 приведена таблица соответствия, в которой дано 68 соотношений.

Переход от изображений к оригиналу можно осуществлять либо с помощью таблицы соответствия, либо с помощью обратного D-преобразования.

§ 5.10. ОБРАТНОЕ D-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Обратное D-преобразование осуществляют по формуле

$$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\pi}^{c+j\pi}F^*(q)\,e^{qn}dq, \qquad (5.49)$$

где $c>\sigma_0$; σ_0 — абсцисса сходимости.

Интегрирование производят по контуру, показанному на рис. 5.10, *а*. Этот контур справа ограничен абсциссой c, слева простирается в бесконечность. По оси ординат контур ограничен прямыми $q=\pm j\pi$.

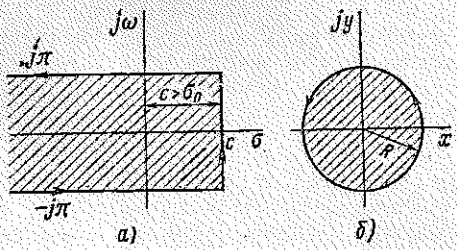


Рис 5.10

Ограничение контура по оси ординат прямыми $q=\pm j\pi$ объясняется тем, что функция e^q является периодической по мнимой оси. Действительно,

$$q+j2\pi k=\sigma+j(\omega+2\pi k),$$

где k — целое число.

Поэтому $e^q=e^{q+j2\pi k}$.

Другими словами, все особенности (полюса) функции $F^*(q)$ выявлены в полосе, указанной на рис. 5.10, *а*. При взятии интеграла (5.49) вводят новую переменную $z=e^q$. При этом заштрихованная полоса рис. 5.10, *а* преобразуется во внутреннюю область круга радиусом $R=e^c$ (рис. 5.10, *б*). Интегрирование производят по окружности радиусом R против часовой стрелки.

Интеграл (5.49) приводится к виду

$$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint F(z)\,z^{n-1}\,dz.$$

Правая часть этого равенства в соответствии с теорией вычетов равна $\sum \operatorname{Res}[F(z)\,z^{n-1}]$, т. е. равна сумме вычетов функции $F(z)\,z^{n-1}$ во всех ее полюсах. Поэтому

$$f[n]=\sum \operatorname{Res}[F(z)\,z^{n-1}]. \qquad (5.50)$$

Формула (5.50) является основной формулой обратного D-преобразования.

Пример 5.4. Определить закон изменения напряжения на конденсаторе в схеме рис. 5.11, *а*, на вход которой при $\omega t=0$ поступает выпрямленное напряжение в виде полусинусоид (рис. 5.11, *б*).

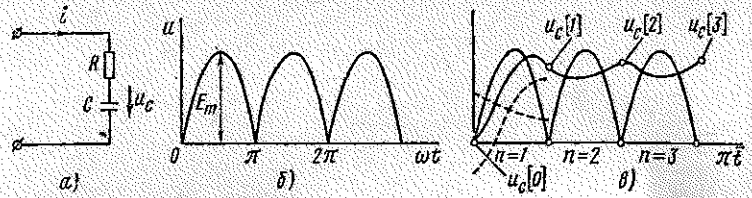


Рис. 5.11

Решение. При $\omega t=0$ напряжение на конденсаторе $u_C(0)=0$ (рис. 5.11, *в*). Если через n обозначить номер полупериода, считая от начала, и ввести время t, которое в каждый полупериод изменяется от 0 до 1, то напряжение на входе цепи можно записать так:

$$(-1)^n \sin(n\pi+\pi t).$$

Чтобы решить задачу, надо составить уравнение, выражающее напряжение на конденсаторе в конце n-го полупериода $u_C[n+1]$ через напряжение в начале n-го полупериода $u_C[n]$, записать изображение этого уравнения и затем по нему найти оригинал $u_C[n]$. Пользуясь классическим методом расчета, найдем напряжение на конденсаторе в 1-й полупериод:

$$u_C=\frac{E_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+$$

$$+\frac{E_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos\varphi\, e^{-\frac{\pi t}{R\omega C}},$$

где $\cos\varphi=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$.

Обозначим

$$\frac{E_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)}}\cos\varphi = A \text{ и } e^{-\frac{\pi}{\omega RC}} = p.$$

Тогда к концу 1-го полупериода $u_C[1] = A(1+p)$.
Напряжение во 2-й полупериод

$$u_C = \frac{E_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}+\varphi\right) + [A(1+p)+A]e^{-\frac{\pi t}{R\omega C}}.$$

К концу 2-го полупериода

$$u_C[2] = A + [A(1+p)+A]p = A(1+p)+u_C[1]p.$$

Напряжение к концу n-го полупериода

$$u_C[n+1] = A(1+p)+u_C[n]p.$$

Составим изображение этого уравнения. Изображение $u_C[n] = F^*(q)$; в соответствии с формулой (5.40)

$$u_C[n+1] = e^q[F^*(q) - u_C[0]].$$

Так как к началу процесса конденсатор был не заряжен, то $u_C[0] = 0$. Изображение постоянной $A(1+p)$, как это следует из первого соотношения в таблице, равно

$$A(1+p)\frac{e^q}{e^q-1}.$$

Следовательно,

$$e^qF^*(q) = A(1+p)\frac{e^q}{e^q-1}+pF^*(q).$$

Отсюда

$$F^*(q) = A(1+p)\frac{e^q}{(e^q-1)(e^q-p)}.$$

Обозначим $e^q = z$ и осуществим переход от изображения

$$F(z) = A(1+p)\frac{z}{(z-1)(z-p)}$$

к оригиналу $u_C[n]$ с помощью формулы (5.50):

$$u_C[n] = A(1+p)\sum \operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-1)(z-p)}\right].$$

Функция $\frac{z^n}{(z-1)(z-p)}$ имеет два полюса: $z=1$ и $z=p$.
Поэтому

$$u_C[n] = A(1+p)\left[\frac{1}{1-p}+\frac{p^n}{p-1}\right].$$

280—Б.

Подставляя значения A и p, находим

$$u_C[n]=\frac{E_m}{\omega C}\,\frac{R}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega RC}}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega RC}}}\left(1-e^{-\frac{\pi}{\omega RC}n}\right).$$

При $n\to\infty$

$$u_C[n]=\frac{E_m}{\omega C}\,\frac{R}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega RC}}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega RC}}}.$$

§ 5.11. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обобщенные функции включают в себя единичные функции Хевисайда $1(t)$ и $1(-t)$ и δ-функцию Дирака $\delta(t)$. Вспомним свойства этих функций.

Единичная функция $1(t)$ (рис. 5.12, *а*) равна 1 при $t>0$ и равна 0 при $t<0$. Единичная функция $1(-t)$ равна 0 при $t>0$ и равна 1 при $t<0$ (рис. 5.12, *б*).

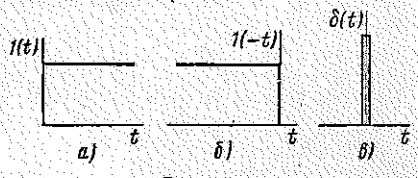


Рис. 5.12

Умножение какой-либо функции $f(t)$, в общем случае не равной нулю при $t<0$, на $1(t)$ обращает произведение в нуль при $t<0$, т. е.

$$f(t)\,1(t)=\begin{cases}0 & t<0,\\ f(t) & t>0.\end{cases}$$

Аналогично, умножение какой-либо функции $f(t)$ на $1(-t)$ обращает произведение в нуль при $t>0$, т. е.

$$f(t)\,1(-t)=\begin{cases}f(t) & t<0,\\ 0 & t>0.\end{cases}$$

Другими словами, единичная функция обладает фильтрующим действием.

Как говорилось в § 3.1, δ-функцией называют единичный импульс длительностью $\Delta\tau$ и амплитудой $1/\Delta\tau$ при стремлении $\Delta\tau$ к нулю (рис. 5.12, *в*). Единичным называют потому, что площадь его равна 1.

Дельта-функция обладает следующими свойствами.

1. Из определения ее следует, что $\int_0^t \delta(t)\,dt=\begin{cases}1 & t>0,\\ 0 & t<0.\end{cases}$

2. Дельта-функцию можно рассматривать как производную единичной функции $1(t)$:

$$d\,1(t)/dt=\delta(t).$$

3. Изображение по Лапласу δ-функции равно 1, т. е.

$$\int_0^\infty \delta(t)\, e^{-pt}\, dt = 1.$$

4. Дельта-функция обладает фильтрующим действием, т. е.

$$f(t)\,\delta(t-t_1) = f(t_1)\,\delta(t-t_1).$$

Импульсное (игольчатое) напряжение (или ток амплитудой, положим A), имеющее бесконечно малую продолжительность во времени, записывают так: $A\delta(t)$. Здесь A имеет размерность Вс или Ас соответственно.

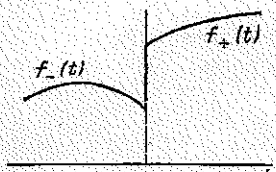


Рис. 5.13

Обобщенными функциями $f\{t\}$ называют функции времени, которые имеют разрывный или импульсный характер, например при $t=0$, и которые, несмотря на это, описываются единым выражением. Значение функции при $t<0$ обозначают $f_-(t)$, при $t>0$ — через $f_+(t)$ (рис. 5.13). Обе эти функции предполагаются гладкими, т. е. имеющими производные любого порядка.

Используя фильтрующее свойство единичных функций, обобщенную функцию $f\{t\}$, имеющую разрыв при $t=0$, можно записать так:

$$f\{t\} = f_-(t)\,1(-t) + f_+(t)\,1(t). \qquad (5.51)$$

Первая производная от $f\{t\}$, взятой в виде (5.51):

$$\frac{df\{t\}}{dt} = f'_-(t)\,1(-t) + f'_+(t)\,1(t) + f_-(t)\frac{d1(-t)}{d(-t)}\frac{d(-t)}{dt} + f_+(t)\frac{d1(t)}{dt} =$$
$$= f'_-(t)\,1(-t) + f'_+(t)\,1(t) + \delta(t)\,[f_+(0) - f_-(0)]. \qquad (5.52)$$

В более общем случае обобщенная функция $f_v\{t\}$ может содержать не только гладкие функции $f_{v-}(t)$ и $f_{v+}(t)$, которые скачком переходят одна в другую в момент $t=t_v$, но и сингулярные (импульсные) воздействия амплитудой αA_v в момент $t=t_v$, которые могут быть описаны δ-функцией и ее производными. Так что в общем случае

$$f\{t\} = f_{v-}(t)\,1(t_v - t) + f_{v+}(t)\,1(t-t_v) + \sum_{\alpha=0}^{q} \alpha A_v \delta^{(\alpha)}(t-t_v). \qquad (5.53)$$

При этом

$$1'(t-t_v) = \delta(t-t_v),$$
$$1'(t_v-t) = -\delta(t-t_v),$$
$$f_v(t)\,\delta(t-t_v) = f_v(t_v)\,\delta(t-t_v). \qquad (5.54)$$

Продифференцируем (5.54) по t:

$$f_v(t)\,\delta'(t-t_v) + f'_v(t_v)\,\delta(t-t_v) = f_v(t_v)\,\delta'(t-t_v). \qquad (5.55)$$

Из уравнения (5.55) следует, что производная от δ-функции, в отличие от самой δ-функции, фильтрующим действием не обладает

Первая производная от обобщенной функции, взятой в виде (5.53):

$$f'_v(t) = f'_{v-}(t)\,1(t_v - t) + f'_{v+}(t)\,1(t - t_v) + \\ + [f_v(t_v) - f_{v-}(t_v)]\,\delta(t - t_v) + \sum_{\alpha=0}^{d} A_v \alpha \delta^{(\alpha+1)}(t - t_v). \quad (5.56)$$

Интегрируя (5.54) в пределах от $t = a$ до $t = b$, получим

$$\int_a^b f_v(t)\,\delta(t - t_v)\,dt = f_v(t_v)\int_a^b \delta(t - t_v)\,dt = \\ = f_v(t_v)\,[1(b - t_v) - 1(a - t_v)]. \quad (5.57)$$

Если $t = t_v$ находится внутри интервала $a - b$, то правая часть (5.57) равна $f_v(t_v)$, если $t = t_v$ вне интервала $a - b$, то правая часть равна нулю.

В отличие от обычного преобразования Лапласа, когда нижний предел равен 0_+, преобразование Лапласа от обобщенной функции с импульсным слагаемым $f_-(t)\,1(-t) + f_+(t)\,1(t) + A\delta(t)$ надлежит производить с нижним пределом 0_- и верхним ∞, иначе при преобразовании будет потеряно слагаемое, которое дает интеграл $\int_{0_+}^{0_+}$ от δ-функции:

$$L_-[f\{t\}] = F_-(p) = \int_{0_-}^{\infty} f(-t)\,1(-t)\,e^{-pt}\,dt + \int_{0_-}^{\infty} f_+(t)\,1(t)\,e^{-pt}\,dt + \\ + A\int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\,e^{-pt}\,dt = 0 + \int_{0_+}^{\infty} f_+(t)\,1(t)\,e^{-pt}\,dt + A = F_+(p) + A.$$

Изображение производной от обобщенной функции вида (5.52), если предположить, что гладкие функции растут не быстрее экспоненты:

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{df\{t\}}{dt} e^{-pt}\,dt = \int_{0_-}^{\infty} f'_-(t)\,1(-t)\,e^{-pt}\,dt + \int_{0_-}^{\infty} f'_+(t)\,1(t) \times \\ \times e^{-pt}\,dt + \int_{0_-}^{\infty} [f(0_+) - f(0_-)]\,\delta(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Имея в виду, что $\int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\,e^{-pt}\,dt = 1$, $\int_{0_-}^{\infty} f'_+(t)\,1(t)\,e^{-pt}\,dt = pF_-(p) - f_+(0)$, $\int_{0_-}^{\infty} f'_-(t)\,1(-t)\,e^{-pt}\,dt = 0$, получаем

$$L_-[f'\{t\}] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df\{t\}}{dt} e^{-pt}\,dt = pF_-(p) - f_-(0).$$

Изображение интеграла от обобщенной функции вида (5.51)

$$\int_{0_-}^{\infty}\left[\int f\{t\}\,dt\right]e^{-pt}\,dt=\frac{F_-(p)}{p}+\frac{f_-(0)}{p}.$$

Обобщенные функции целесообразно применять при расчетах переходных процессов, когда воздействия имеют импульсный характер или когда коммутация происходит таким образом, что при макроскопическом рассмотрении возникающих при этом процессов токи через индуктивности и (или) напряжения на емкостях изменяются прерывно, а также когда сочетаются оба эти условия. Методика решения задач при использовании обобщенных функций может быть, например, такова. Составляют уравнение для послекоммутационной схемы, выражают токи, напряжения и их производные через обобщенные функции и, воспользовавшись фильтрующим свойством функций $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$ [или соответственно функций $1(t_v-t)$, $1(t-t_v)$ и $\delta(t-t_v)$], в левых и правых частях соответствующих уравнений приравнивают коэффициенты с одинаковыми функциями, т. е. содержащие только $1(-t)$, только $1(t)$ и только $\delta(t)$. Затем полученные уравнения решают совместно либо классическим, либо операторным методом.

Рассмотрим два простейших примера. В первом воздействующее напряжение имеет импульсный характер; во втором происходит коммутация, при которой нарушается непрерывность напряжения на конденсаторе.

Пример 5.5. На вход последовательно соединенных R и C при нулевых начальных условиях в момент времени $t=0$ поступает импульс напряжения $1\cdot\delta(t)$. Здесь 1 имеет размерность вольт-секунда. Определить закон изменения напряжения на конденсаторе после окончания действия импульса.

Решение. В уравнение цепи

$$RC\frac{du_C\{t\}}{dt}+u_C\{t\}=1\cdot\delta(t)$$

подставляем

$$u_C\{t\}=u_C(-t)\,1(-t)+u_{C+}(t)\,1(t).$$

Получаем

$$RC\{u'_C(-t)\,1(-t)+u'_{C+}(t)\,1(t)+\delta(t)[u_C(0_+)-u_C(0_-)]+$$
$$+u_C(-t)\,1(-t)+u_{C+}(t)\,1(t)=1\cdot\delta(t)\}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях последнего уравнения:

$$RCu'_{C+}(t)+u_{C+}(t)=0; \qquad (5.58)$$

$$RCu'_{C-}(t)+u_{C-}(t)=0; \qquad (5.59)$$

$$RC[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1. \qquad (5.60)$$

Так как $u_C(0_-)=0$, то из (5.60) следует, что напряжение на конденсаторе в момент времени $t=0_+$ равно $u_C(0_+)=1/(RC)$.

В уравнении (5.59) оба слагаемых нулевые. Из (5.58) имеем $u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)}$.

Пример 5.6. В схеме рис. 5.14 до коммутации был установившийся режим. Определить закон изменения напряжения на конденсаторах после коммутации.

Решение. В уравнение послекоммутационной схемы

$$R\left(C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} + C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}\right) + u_{C_1} = E \qquad (5.61)$$

подставим

$$u_{C_1} = u_{C_1-}(t)\,1(-t) + u_{C_1+}(t)\,1(t);$$
$$u_{C_2} = u_{C_2-}(t)\,1(-t) + u_{C_2+}(t)\,1(t);$$
$$u'_{C_1} = u'_{C_1-}(t)\,1(-t) + u'_{C_1+}(t)\,1(t) + \delta(t)\,[u_{C_1}(0_+) - u_{C_1}(0_-)];$$
$$u'_{C_2} = u'_{C_2-}(t)\,1(-t) + u'_{C_2+}(t)\,1(t) + \delta(t)\,[u_{C_2}(0_+) - u_{C_2}(0_-)];$$
$$E = E1(-t) + E1(t).$$

Коэффициенты при $1(-t)$, $1(t)$ и $\delta(t)$ в уравнении (5.61) образуют следующую систему уравнений:

$$RC\,[u'_{C_1-}(t) + u'_{C_2-}(t)] + u_{C_1-}(t) = E; \qquad (5.62)$$

$$RC\,[u'_{C_1+}(t) + u'_{C_2+}(t)] + u_{C_1+}(t) = E; \qquad (5.63)$$

$$u_{C_1}(0_+)(C_1 + C_2) = C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-). \qquad (5.64)$$

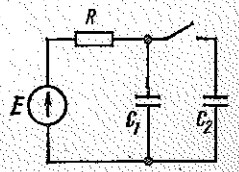


Рис. 5.14

Из (5.62) определим $u_{C_1-}(t) = E$, из (5.64) найдем $u_{C_1}(0_+) = \frac{C_1 E}{C_1 + C_2}$ (это выражение можно получить также исходя из непрерывности заряда в узле схемы в момент коммутации). Решая (5.63) классическим методом и учитывая, что $u_{C_2+}(t) = u_{C_1+}(t)$, найдем

$$u_{C_1+}(t) = u_{C_2+}(t) = E\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}\right).$$

Глава шестая

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 6.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ И ВРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Периодическая функция $f(t)$, изображенная на рис. 6.1, состоит из прямоугольных импульсов амплитудой 1 и продолжительностью $T/2$ и промежутков (пауз) продолжительностью также $T/2$ *. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\frac{2\pi}{T} t. \qquad (6.1)$$

* Функция берет начало из $-\infty$.

Для описания этой кривой введем текущую угловую частоту

$$\omega = (2k+1)\frac{2\pi}{T} \tag{6.2}$$

и приращение угловой частоты $\Delta\omega$, соответствующее разности частот между смежными гармониками:

$$\Delta\omega = [2(k+1)+1]\frac{2\pi}{T} - (2k+1)\frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi}{T}. \tag{6.3}$$

Подставив (6.2) и (6.3) в (6.1), получим

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{2\omega}\sin\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\Delta\omega. \tag{6.4}$$

Устремим период функции T к бесконечности, что будет соответствовать переходу к единичной функции рис. 6.2. При этом $\Delta\omega$

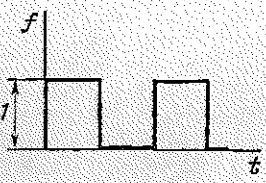


Рис. 6.1

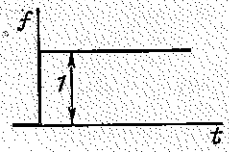


Рис. 6.2

будет стремиться к нулю, а сумма в (6.4) в пределе заменится интегралом.

Таким образом, единичная функция (единичная ступенчатая функция) рис. 6.2 может быть выражена следующим спектром гармоник:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin t\omega}{\omega}d\omega. \tag{6.5}$$

Положим, что единичная ступенчатая функция воздействует на вход некоторого четырехполюсника, передаточная функция которого

$$K(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Гармоника $\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$ вызывает на выходе четырехполюсника колебание $\frac{K(\omega)\,d\omega}{\pi\omega}\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$, а от постоянной составляющей единичной функции (1/2) на выходе будет постоянная составляющая $K(0)/2$.

Следовательно, выходное напряжение четырехполюсника можно записать так:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{K(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]}{\omega}d\omega.$$

Но

$$K(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]=K(\omega)\cos\varphi(\omega)\sin\omega t+$$
$$+K(\omega)\sin\varphi(\omega)\cos\omega t=U(\omega)\sin\omega t+V(\omega)\cos\omega t,$$

где $U(\omega)$ — вещественная и $V(\omega)$ — мнимая частотная характеристики.

Поэтому имеем

$$u_{\text{вых}}(t)=\frac{K(0)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{U(\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{V(\omega)\cos\omega t}{\omega}d\omega. \qquad (6.6)$$

При $t<0$ выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)=0$, поскольку приращение $u_{\text{вых}}(t)$ отсчитывается от старого установившегося значения, которое имело место при $t<0$. Заменив в (6.6) t на $-t$ и приняв во внимание нечетность $\sin\omega t$ и четность $\cos\omega t$, получим

$$0=\frac{K(0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{U(\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{V(\omega)\cos\omega t}{\omega}d\omega. \qquad (6.6')$$

Вычитая (6.6') из (6.6), будем иметь

$$u_{\text{вых}}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{U(\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega. \qquad (6.6'')$$

Формула (6.6) устанавливает связь между вещественной частотной характеристикой цепи $U(\omega)$ и временно́й характеристикой $u_{\text{вых}}(t)$.

§ 6.2. МЕТОД ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В основу разработанного В. В. Солодовниковым метода трапецеидальных частотных характеристик положена формула (6.6″).

Предполагается, что либо расчетным, либо экспериментальным путем получено и имеется перед началом расчета графическое изображение зависимости вещественной частотной характеристики $U(\omega)$ как функции частоты.

Аппроксимируем $U(\omega)$ прямолинейными участками и заменим ее суммой трапеций, подобно тому, как показано на рис. 6.3. На рис. 6.3 ординаты кривой $U=f(\omega)$ равны сумме ординат трех трапеций — $U_1(\omega)$; $U_2(\omega)$; $U_3(\omega)$:

$$U(\omega)=\sum_{i=1}^{n}U_i(\omega).$$

В качестве аппроксимирующих кривых выбраны прямые потому, что интеграл в (6.6″) при этом сводится к табличному.

Введем типовую трапецию $U_i=f(\omega)=U_i(\omega)$, изображенную на рис. 6.4. Она характеризуется интервалом пропускания частот ω_0 и интервалом равномерного пропускания частот ω_d.

В интервале равномерного пропускания частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_d$

$$U_i(\omega) = U_{0i}.$$

В интервале от ω_d до ω_0

$$U_i(\omega) = U_{0i}\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_d}.$$

При $\omega > \omega_0$

$$U_i(\omega) = 0.$$

Характеристикой типовой трапеции является также коэффициент наклона

$$k = \omega_d/\omega_0.$$

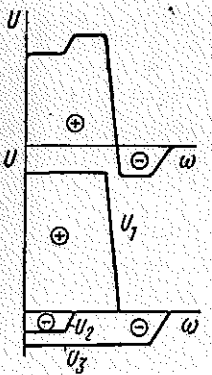
Составляющую выходного напряжения, соответствующую трапеции $U_i(\omega)$, можно записать следующим образом:

$$u_{\text{вых}\,i}(t) = \frac{2U_{0i}}{\pi}\left[\int_0^{\omega_d}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega + \int_{\omega_d}^{\omega_0}\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0-\omega_d}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega\right]. \qquad (6.7)$$

Но

$$\int_0^{\omega_d}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega = \mathrm{Si}(\omega_d t).$$

Здесь $\mathrm{Si}(\omega_d t)$ — интегральный синус, представляющий собой табулированную функцию (значения его берут из таблиц; см., например, [3]).



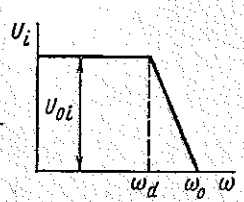


Рис. 6.4

Рис. 6.3

Второе слагаемое правой части равенства (6.7) запишем следующим образом:

$$\int_{\omega_d}^{\omega_0}\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0-\omega_d}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega = \frac{\omega_0}{\omega_0-\omega_d}\int_{\omega_d}^{\omega_0}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega - \frac{1}{\omega_0-\omega_d}\int_{\omega_d}^{\omega_0}\sin\omega t\,d\omega =$$

$$= \frac{\omega_0}{\omega_0-\omega_d}[\mathrm{Si}(\omega_0 t) - \mathrm{Si}(\omega_d t)] + \frac{1}{\omega_0-\omega_d}\left(\frac{\cos\omega_0 t - \cos\omega_d t}{t}\right).$$

Если разделить обе части уравнения (6.7) после его интегрирования на U_{0i}, принять $\omega_0 = 1$, время t, соответствующее $\omega_0 = 1$, обозначить через t (т. е. ввести безразмерное время $\omega_0 t = t$), заменить ω_d на $\omega_0 k = 1 \cdot k = k$ и объединить слагаемые с $\mathrm{Si}(\omega_d t)$, то получим

$$\frac{u_{\text{вых}\,i}(t)}{U_{0i}} = h_i(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-k}\left[\mathrm{Si}(t) - k\mathrm{Si}(kt) + \frac{\cos t - \cos kt}{t}\right]. \quad (6.8)$$

Значения правой части формулы (6.8) вычислены при различных значениях времени t и параметра k и приведены в табл. 6.1.

Таким образом, для любой типовой трапеции $U_i(\omega)$, на которые может быть разбита исходная кривая $U(\omega)$, по табл. 6.1 можно построить переходный процесс.

Чтобы от полученной с помощью табл. 6.1 кривой перейти к кривой $u_{\text{вых}\,i}(t)$, следует ординаты кривой умножить на U_{0i}, а масштаб времени уменьшить в ω_0 раз.

Ординаты результирующей кривой $u_{\text{вых}}(t)$ равны сумме ординат временных функций от всех трапеций, которыми была представлена функция $U(\omega)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_i u_{\text{вых}\,i}(t).$$

Начальной части временной характеристики (при t, близком к 0) соответствует «хвост» частотной характеристики (участок ее при больших ω). А так как «хвост» частотной характеристики при расчетах всегда отбрасывается, то наибольшие ошибки имеют место в начальной части временной характеристики.

В заключение заметим, что так как все h_i-функции равны нулю при $t = 0$, то методом трапецеидальных частотных характеристик (в том виде, как он здесь изложен) можно пользоваться для нахождения выходных величин, которые начинают изменяться с нулевого значения.

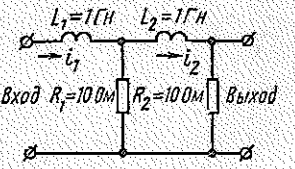


Рис. 6.5

Рассмотрим на примере применение метода трапецеидальных частотных характеристик.

Пример 6.1. Требуется определить напряжение на выходе четырехполюсника (рис. 6.5) при подаче на вход его единичного напряжения. Числовые значения индуктивностей и активных сопротивлений указаны на схеме.

Решение. Входное сопротивление цепи

$$Z(p) = L_1 p + \frac{(L_2 p + R_2) R_1}{L_2 p + R_1 + R_2} = \frac{p^2 + 30p + 100}{p + 20}.$$

Ток на входе цепи

$$I_1(p) = U_{\text{вх}}(p)/Z(p).$$

Таблица 6.1

Таблица функции $x_i(l)$ для метода трапецендальных частотных характеристик

l	k										
	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,176	0,192	0,207	0,223	0,240	0,255	0,267	0,282	0,297	0,314
1,0	0,310	0,340	0,371	0,401	0,432	0,461	0,490	0,519	0,546	0,575	0,603
1,5	0,449	0,494	0,538	0,594	0,617	0,665	0,706	0,740	0,776	0,813	0,844
2,0	0,572	0,628	0,683	0,691	0,786	0,833	0,878	0,919	0,956	0,986	1,020
2,5	0,674	0,739	0,802	0,862	0,917	0,967	1,010	1,050	1,084	1,105	1,133
3,0	0,755	0,828	0,896	0,958	1,013	1,061	1,100	1,130	1,154	1,172	1,178
3,5	0,783	0,892	0,963	1,024	1,074	1,115	1,145	1,161	1,171	1,175	1,175
4,0	0,857	0,938	1,008	1,060	1,107	1,142	1,158	1,160	1,156	1,141	1,118
4,5	0,889	0,960	1,029	1,080	1,115	1,134	1,138	1,132	1,111	1,085	1,053
5,0	0,896	0,978	1,042	1,087	1,112	1,118	1,107	1,084	1,053	1,019	0,986
5,5	0,900	0,986	1,046	1,083	1,095	1,092	1,070	1,032	0,994	0,962	0,932
6,0	0,904	0,982	1,037	1,065	1,068	1,051	1,021	0,984	0,949	0,922	0,906
6,5	0,904	0,980	1,030	1,050	1,043	1,018	0,982	0,948	0,920	0,903	0,905
7,0	0,904	0,979	1,024	1,037	1,023	0,993	0,957	0,927	0,911	0,909	0,925
7,5	0,907	0,980	1,019	1,025	1,005	0,974	0,944	0,922	0,920	0,934	0,958
8,0	0,910	0,985	1,020	1,021	0,995	0,966	0,941	0,932	0,944	0,970	1,004
8,5	0,918	0,989	1,021	1,018	0,992	0,966	0,994	0,951	0,974	1,006	1,041
9,0	0,924	0,997	1,025	1,018	0,992	0,970	0,961	0,976	1,006	1,039	1,061
9,5	0,932	1,004	1,029	1,019	0,993	0,975	0,980	1,000	1,033	1,059	1,066
10,0	0,939	1,009	1,031	1,019	0,993	0,982	0,993	1,020	1,049	1,063	1,056
10,5	0,946	1,013	1,033	1,017	0,993	0,987	1,007	1,033	1,054	1,055	1,033
11,0	0,947	1,015	1,031	1,014	0,993	0,993	1,014	1,039	1,048	1,034	1,005
11,5	0,949	1,016	1,028	1,010	0,991	0,997	1,017	1,037	1,034	1,010	0,977
12,0	0,950	1,015	1,024	1,004	0,988	0,997	1,019	1,027	1,015	0,984	0,958
12,5	0,950	1,013	1,019	0,999	0,986	0,997	1,018	1,017	0,995	0,965	0,949
13,0	0,950	1,012	1,015	0,994	0,985	0,997	1,014	1,005	0,980	0,555	0,955
13,5	0,950	1,011	1,011	0,990	0,984	0,998	1,010	0,995	0,968	0,954	0,970
14,0	0,952	1,011	1,009	0,988	0,985	1,000	1,008	0,987	0,965	0,965	0,990
14,5	0,954	1,012	1,008	0,987	0,988	1,002	1,005	0,983	0,960	0,981	1,101
15,0	0,956	1,012	1,007	0,988	0,991	1,005	1,002	0,983	0,978	1,001	1,030
15,5	0,959	1,014	1,006	0,989	0,996	1,008	1,001	0,985	0,991	1,019	1,040
16,0	0,961	1,015	1,006	0,991	0,998	1,011	1,000	0,990	1,003	1,031	1,039
16,5	0,964	1,016	1,005	0,993	1,002	1,011	1,001	0,995	1,014	1,036	1,028
17,0	0,965	1,016	1,005	0,994	1,005	1,012	0,999	0,999	1,020	1,032	1,012
17,5	0,966	1,015	1,003	0,994	1,006	1,009	0,997	1,002	1,023	1,023	0,988
18,0	0,966	1,015	1,002	0,995	1,008	1,008	0,997	1,004	1,020	1,008	0,979
18,5	0,966	1,015	1,001	0,995	1,007	1,006	0,995	1,003	1,014	0,933	0,969
19,0	0,967	1,015	0,998	0,995	1,006	1,001	0,993	1,004	1,006	0,981	0,956
19,5	0,967	1,014	0,996	0,995	1,005	0,998	0,992	1,003	0,998	0,973	0,973
20,0	0,967	1,013	0,995	0,995	1,005	0,996	0,992	1,003	0,991	0,972	0,985
20,5	0,968	1,012	0,994	0,996	1,004	0,995	0,994	1,001	0,986	0,974	1,001
21,0	0,968	1,011	0,994	0,997	1,004	0,995	0,997	0,999	0,983	0,981	1,016
21,5	0,969	1,011	0,995	0,999	1,004	0,996	1,000	0,998	0,986	0,997	1,024
22,0	0,971	1,011	0,995	1,000	1,004	0,996	1,000	0,997	0,991	1,012	1,029
22,5	0,973	1,011	0,996	1,002	1,004	0,997	1,004	0,996	0,998	1,022	1,026
23,0	0,974	0,011	0,996	1,004	1,003	0,998	1,006	0,997	1,002	1,025	1,016
23,5	0,975	1,010	0,996	1,004	1,003	0,999	1,007	0,998	1,007	1,023	1,002
24,0	0,975	1,010	0,996	1,005	1,002	1,000	1,008	0,999	1,008	1,015	0,988
24,5	0,975	1,009	0,996	1,005	1,001	1,000	1,006	1,000	1,008	1,005	0,979
25,0	0,975	1,008	0,995	1,005	1,000	1,000	1,004	1,001	1,005	0,991	0,975
25,5	0,975	1,008	0,995	1,004	0,998	1,000	1,002	1,002	1,004	0,986	0,977
26,0	0,975	1,007	0,995	1,004	0,997	1,000	1,000	1,002	1,002	0,984	0,983

Ток через сопротивление R_2

$$I_2(p) = I_1(p)\frac{10}{p+20}.$$

Выходное напряжение

$$U_{вых}(p) = I_2(p)\,R_2 = I_1(p)\frac{100}{p+20} = \frac{U_{вх}(p)\,100}{p^2+30p+100}.$$

Передаточная функция

$$K(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{100}{p^2+30p+100}.$$

Передаточная функция при частоте ω

$$K(j\omega) = \frac{100}{-\omega^2+30\omega j+100} = \frac{100^3-100\omega^2}{(100-\omega^2)^2+900\omega^2} - j\frac{3000\omega}{(100-\omega^2)^2+900\omega^2}.$$

Вещественная частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{10\,000-100\omega^2}{10\,000+700\omega^2+\omega^4}$$

изображена на рис. 6.6 утолщенной линией. Разбиваем ее на

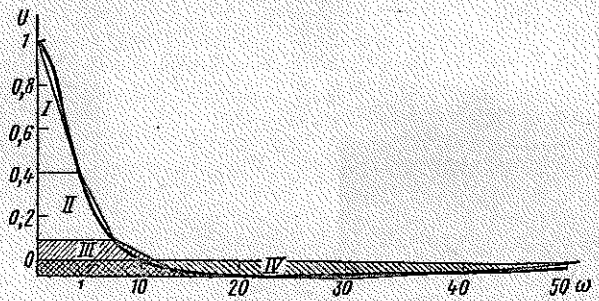


Рис. 6.6

четыре трапецеидальные характеристики, как показано на рисунке. Трапеции имеют следующие данные:

трапеция I: $k=0$ (треугольник), $U_{01}=0{,}6$, $\omega_{01}=4$;

трапеция II: $k=0{,}55$, $U_{02}=0{,}31$, $\omega_{02}=7{,}5$;

трапеция III: $k=0{,}55$, $U_{03}=0{,}16$, $\omega_{03}=13{,}5$;

трапеция IV: $k=0{,}40$, $U_{04}=-0{,}07$, $\omega_{04}=50$.

Для каждой из трапеций с помощью табл. 6.1 находим зависимость

$$U_i(t)/U_{0i} = f(t).$$

Так, для трапеции I:

t	=0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0
$U_1(t)/0{,}6$ =	0	0,138	0,310	0,572	0,755	0,857	0,896	0,904	0,910

Для перехода от кривой $U_1(t)/0{,}6 = f(t)$ к кривой $u_1(t)$ умножаем ординаты полученной кривой на $U_{01} = 0{,}6$, а для получения времени t соответствующие абсциссы (т. е. t) делим на $\omega_{01} = 4$. Получим:

$t=$	0	0,125	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2
$u_1(t)=$	0	0,0828	0,186	0,343	0,452	0,513	0,537	0,541	0,546

Согласно этим данным строим кривую $u_1(t) = f(t)$ на рис. 6.7. Аналогичным образом строим кривые для трех остальных трапеций и, суммируя ординаты четырех кривых, получаем $u_{вых}(t)$.

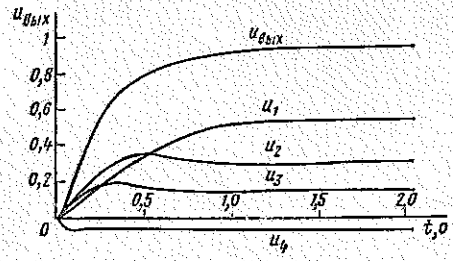


Рис. 6.7

Точное решение $u_{вых} = 1 - 1{,}1725\,e^{-3{,}82t} + 0{,}1725\,e^{-26{,}18t}$ В.

Точки, соответствующие точному решению (с точностью построения графика), находятся на кривой, выражающей собой приближенное решение на рис. 6.7.

§ 6.3. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПУТЕМ ПЕРИОДИЗАЦИИ ВРЕМЕННÓЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В § 6.2 при выводе соотношения между вещественной частотной характеристикой и временнóй характеристикой был использован переход от периодической прямоугольной кривой рис. 6.1 к единичной функции рис. 6.2.

В данном параграфе рассматривается метод расчета переходных процессов, основанный на обратном переходе, т. е. на замене единичной функции периодической функцией времени (метод предложен П. К. Акульшиным).

Положим, что на вход линейной электрической цепи воздействует постоянное напряжение в 1 В [единичная функция — кривая *2* (рис. 6.8, *а*)] и входной ток или выходное напряжение изменяются в функции времени в соответствии с кривой *1* (рис. 6.8, *а*).

Так как свободный ток в цепи затухает, то через некоторое время (назовем его t_y) искомая величина (ток, напряжение) будет достаточно мало отличаться от постоянной величины, соответствующей установившемуся режиму.

Если теперь единичную э. д. с. убрать, закоротив источник э. д. с., то искомая величина будет спадать (рис. 6.8, *б*) и при времени спада t_y процесс также можно считать установившимся.

Таким образом, переходный процесс в интервале времени от 0 до t_y можно заменить установившимся процессом, происходящим в той же цепи под действием периодически повторяющихся импульсов (вычерчены утолщенной линией на рис. 6.8, *б*) с амплитудой, равной *1*.

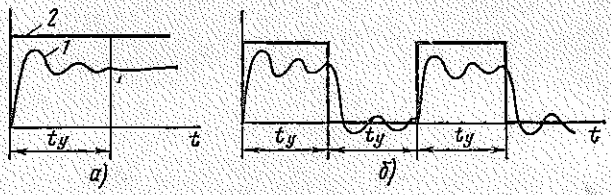


Рис. 6.8

Угловая частота ω, соответствующая первой гармонике этого процесса, равна

$$2\pi/T = 2\pi/(2t_y) = \pi/t_y.$$

Запишем разложение периодического напряжения в ряд Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\frac{\pi}{t_y} t.$$

Если передаточная функция четырехполюсника равна $K(j\omega) = K(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$, то от постоянной составляющей входного напряжения на выходе будет $K(0)/2$, а $2k-1$-й гармонике входного напряжения на выходе будет соответствовать напряжение

$$\frac{K\left[(2k-1)\frac{\pi}{t_y}\right]}{2k-1} \sin\left[(2k-1)\frac{\pi}{t_y} t + \varphi\left\{(2k-1)\frac{\pi}{t_y}\right\}\right].$$

Полное значение выходного напряжения

$$u_2(t) = \frac{K(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} K\left[(2k-1)\frac{\pi}{t_y}\right] \times$$
$$\times \sin\left[(2k-1)\frac{\pi}{t_y} t + \varphi\left\{(2k-1)\frac{\pi}{t_y}\right\}\right]. \qquad (6.9)$$

Таким образом, определение выходного напряжения при переходном процессе в этом методе сводится к расчету мгновенных значений синусоидальных колебаний в установившемся режиме и к суммированию этих колебаний. При использовании метода следует предварительно оценить величину t_y.

Практически чем меньше t_y, тем менее трудоемки подсчеты. Трудоемкость подсчетов связана также с изменением модуля и аргумента передаточной функции или входного сопротивления в зависимости от частоты. Наиболее благоприятным случаем расчета с помощью этого метода является такой, когда с ростом

частоты модуль передаточной функции (или входной проводимости) уменьшается.

Пример 6.2. В качестве примера найдем напряжение на емкости в схеме рис. 6.9, *а* при воздействии импульса рис. 6.9, *б* амплитудой 1 В при $t_y = 10^{-3}$ с, $R = 333$ Ом, $C = 1$ мкФ.

Передаточная функция

$$K(j\omega) = \frac{a}{a + j\omega},$$

где $a = 1/(RC)$; $\omega = \pi \cdot 10^3$, $a = 3 \cdot 10^3$.

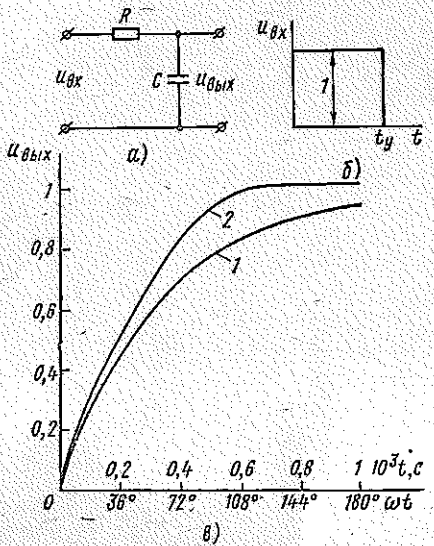


Рис. 6.9

Кривая *1* на рис. 6.9, *в* построена по точной формуле

$$u_{вых} = 1 - e^{-3 \cdot 10^3 t} \text{ В},$$

кривая *2* — по приближенной

$$u_{вых} = 0{,}5 + 0{,}69 \sin(\omega t - 46°15') + 0{,}101 \sin(3\omega t - 72°20') + \\ + 0{,}0376 \sin(5\omega t - 79°15') + 0{,}0193 \sin(7\omega t - 82°10') \text{ В}.$$

§ 6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ЦЕПЬ КРАТКОВРЕМЕННЫМ ИМПУЛЬСОМ НАПРЯЖЕНИЯ

Положим, что на некоторую цепь с момента времени $t = 0$ до $t = t_1$ воздействует кратковременный импульс напряжения $u(t)$. При $t > t_1$ напряжение $u(t) = 0$ (рис. 6.10). Обозначим площадь импульса через Q:

$$Q = \int_0^{t_1} u(t)\, dt.$$

Если переходная функция цепи $h(t)$ (для тока, напряжения) такова, что за период времени от 0 до t_1 производную от нее $h'(t)$ можно считать с известным приближением постоянной, то для $t > t_1$ выходную величину можно определить как произведение площади импульса Q на производную от переходной функции $h'(t)$. Выводят это соотношение следующим образом.

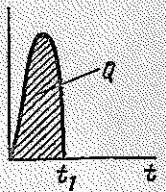


Рис. 6.10

В соответствии с формулой (5.19)

$$u_2(t) = h(0)\,u(t) + \int_0^t u(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau.$$

Но при $t \geqslant t_1$ напряжение $u(t) = 0$, поэтому для $t \geqslant t_1$ первое слагаемое в (5.19) выпадает.

Ввиду кратковременности действия импульса и оговоренного замедленного изменения $h'(\tau)$ в интервале времени от 0 до t_1 последнюю можно положить равной $h'(0)$ и вынести из-под знака интеграла, а верхний предел интегрирования заменить на t_1. Тогда

$$u_2(t) = h'(0) \int_0^{t_1} u(t-\tau)\,d\tau.$$

Кривую $u(t-\tau)$ как функцию τ можно получить из кривой $u(t)$ путем зеркального отражения относительно оси ординат и сдвига вправо на величину t. При $t = t_1$

$$\int_0^{t_1} u(t-\tau)\,d\tau = Q.$$

Следовательно, учитывая последующее изменение $h'(t)$, имеем

$$u_2(t) = h'(t)\,Q. \qquad (6.10)$$

§ 6.5. РЕАКЦИЯ ЦЕПИ НА МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ НАПРЯЖЕНИЕ

Для некоторого четырехполюсника известна переходная функция $h(t)$, для которой $h(0) = 0$. Импульсная переходная функция этого четырехполюсника $h'(t)$ связана с операторным изображением передаточной функции $K(p)$ четырехполюсника соотношением

$$K(p) = \int_0^\infty h'(t)\,e^{-pt}\,dt. \qquad (6.11)$$

Воздействуем на вход четырехполюсника медленно изменяющимся напряжением $u_{вх}(t)$ и запишем выражение для выходного напряжения четырехполюсника с помощью интеграла Дюамеля:

$$u_{вых}(t) = \int_0^t u_{вх}(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau, \qquad (6.12)$$

но

$$\int_0^t u_{вх}(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau=\int_0^\infty u_{вх}(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau-\int_t^\infty u_{вх}(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau. \quad (6.13)$$

Первое слагаемое правой части (6.13) соответствует установившемуся режиму, второе слагаемое обусловлено переходным процессом, имеющим место в интервале от момента времени t, в который определяем отклик, до $t=\infty$.

В тех случаях, когда благодаря медленному изменению $u_{вх}(t)$ второе слагаемое достаточно мало, можно приближенно считать

$$u_{вых}(t)\approx\int_0^\infty u_{вх}(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau. \quad (6.14)$$

Соотношение (6.14) приближенно выполняется при двух допущениях: 1) если представить $u_{вх}\approx\sum A_k e^{a_k(t-t_k)}$, то $|\operatorname{Re} a_k|\ll|b_k|$, где b_k — наименьший по модулю действительный корень характеристического уравнения $M(p)=0$ четырехполюсника (или модуль наименьшей действительной части при комплексных корнях); 2) $u_{вых}$ определяем для $t>3|b_k|$.

Разложим в ряд Тейлора $u_{вх}(t-\tau)$ относительно времени t:

$$u_{вх}(t-\tau)=u_{вх}(t)-u'_{вх}(t)\frac{\tau}{1}+u''_{вх}(t)\frac{\tau^2}{2!}-u'''_{вх}(t)\frac{\tau^3}{3!}+\dots \quad (6.15)$$

Подставим (6.15) в (6.14):

$$u_{вых}(t)=u_{вх}(t)\int_0^\infty h'(\tau)\,d\tau-u'_{вх}(t)\int_0^\infty \tau h'(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{u''_{вх}(t)}{2!}\int_0^\infty \tau^2 h'(\tau)\,d\tau-\frac{u'''_{вх}(t)}{3!}\int_0^\infty \tau^3 h'(\tau)\,d\tau+\dots,$$

но $\int_0^\infty h'(\tau)\,d\tau=h(\infty)-h(0)$, где $h(\infty)$ — переходная функция при $t=\infty$.

Дифференцируя (6.11) по параметру p, заменяя t на τ и придавая p значение нуль, получаем соотношения:

$$\int_0^\infty \tau h'(\tau)\,d\tau=-\left|\frac{dK(p)}{dp}\right|_{p=0};\quad \int_0^\infty \tau^2 h'(\tau)\,d\tau=(-1)^2\left|\frac{d^2K(p)}{dp^2}\right|_{p=0}.$$

Таким образом, выходное напряжение при медленно изменяющемся входном можно найти по следующей приближенной формуле:

$$u_{вых}(t)\approx u_{вх}(t)\,h(\infty)+u'_{вх}(t)\left[\frac{dK(p)}{dp}\right]_{p=0}+$$

$$+\frac{u''_{вх}(t)}{2!}\left[\frac{d^2K(p)}{dp^2}\right]_{p=0}+\dots \quad (6.16)$$

§ 6.6. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ

Для расчета квазиустановившихся процессов в линейных системах, находящихся под воздействием амплитудно- и частотно-модулированных колебаний, применяют метод динамического коэффициента передачи, разработанный И. Т. Турбовичем [14].

Метод будем рассматривать применительно к переходным функциям, значения которых при $t=0$ равны нулю, т. е. $h(0)=0$. При этом в соответствии с формулой (5.19) мгновенное значение выходного напряжения

$$u_2(t)=\int_0^t u_1(t-\tau)\,h'(\tau)\,d\tau. \qquad (6.17)$$

Если бы синусоидальное колебание $u_1(t)$, действующее на входе четырехполюсника, было неизменно по амплитуде и частоте, то в установившемся режиме комплекс выходного напряжения $\dot{U}_2(j\omega)$ равнялся бы произведению комплекса входного напряжения $\dot{U}_1(j\omega)$ на статический коэффициент передачи $K(j\omega)$:

$$\dot{U}_2(j\omega)=\dot{U}_1(j\omega)\,K(j\omega). \qquad (6.18)$$

Но статический коэффициент передачи определяют через производную от переходной функции $h'(\tau)$ по формуле (3.8):

$$K(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau.$$

Подставив (3.8) в (6.18), получим

$$\dot{U}_2(j\omega)=\dot{U}_1(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \qquad (6.19)$$

Комплексное значение квазигармонического колебания, модулированного по амплитуде и фазе, можно записать следующим образом (символ взятия мнимой части Im опускаем):

$$U_1(t)=A(t)\,e^{j\varphi(t)}=A(t)\,e^{j\int\omega(t)\,dt}, \qquad (6.20)$$

где $A(t)$ — мгновенная амплитуда; $\omega(t)$ — мгновенная частота: $\varphi(t)$ — мгновенная фаза.

Формула (6.20) справедлива при $t>0$. При $t<0$ $U_1(t)=0$.

Приведем уравнение (6.17) к виду (6.19). С этой целью вводим переменную $v(t,\tau)$ — комплексную величину, которую называют функцией различия:

$$v(t,\tau)=\frac{U_1(t-\tau)}{U_1(t)}\,e^{j\omega\tau}=\frac{A(t-\tau)}{A(t)}\,e^{j[\varphi(t-\tau)-\varphi(t)+\omega\tau]}. \qquad (6.21)$$

Если бы колебание было немодулированным, то его амплитуда и частота были бы постоянны:

$$A(t-\tau)=A(t),\quad \varphi(t-\tau)=\varphi(t)-\omega\tau \quad \text{и} \quad v(t,\tau)=1.$$

Запишем уравнение (6.19) в комплексной форме, введя в него функцию $v(t, \tau)$:

$$U_2(t) = U_1(t) \int_0^t v(t, \tau)\, e^{-j\omega\tau} h'(\tau)\, d\tau. \qquad (6.22)$$

Переходные процессы, которые возникают непосредственно после включения источника э. д. с., рассматривать не будем (т. е. будем изучать квазиустановившиеся процессы). Эти переходные процессы заканчиваются в течение времени, соизмеримого с постоянными времени рассматриваемой системы.

С этой целью верхний предел в (6.22) будем считать стремящимся к бесконечности, а нижний предел заменим на $-\infty$, что возможно, поскольку в реальных системах $h'(t) = 0$ при $t < 0$. Получим

$$U_2(t) = U_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau)\, v(t, \tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau. \qquad (6.23)$$

Отношение комплексов $U_2(t)$ и $U_1(t)$, изменяющихся во времени, называют комплексным динамическим коэффициентом передачи

$$K_д = \frac{U_2(t)}{U_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau)\, v(t, \tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau. \qquad (6.24)$$

Правая часть формулы (6.24) отличается от правой части формулы (3.8) наличием под интегралом функции различия $v(t, \tau)$.

Комплексный динамический коэффициент передачи $K_д$ может быть выражен через статический коэффициент передачи $K(j\omega)$ и производные от него по частоте. Для этого функцию $v(t, \tau)$ разложим в ряд по степеням τ по формуле Маклорена:

$$v(t, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n!} \tau^n + r_m, \qquad (6.25)$$

где $a_n = \frac{\partial^n v(t, 0)}{\partial \tau^n}$ и остаточный член

$$r_m = \frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} v(t, \theta)}{\partial \tau^{m+1}} \quad (\text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant t).$$

Подставив (6.25) в (6.24), получим

$$K_д = \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau + \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^n h'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau + R_m, \qquad (6.26)$$

где остаточный член

$$R_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} v(t, \theta)}{\partial \tau^{m+1}} h'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau.$$

Первое слагаемое правой части (6.26) представляет собой статический коэффициент передачи $K(j\omega)$. Во втором слагаемом под знаком интеграла есть множитель τ^n. Наличие его можно рассматривать как результат n-кратного дифференцирования статического коэффициента передачи по параметру ω. Поэтому

$$K_д = K(j\omega) + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-j)^n}{n!} \alpha_n \frac{d^n K(j\omega)}{d\omega^n} + R_m. \qquad (6.27)$$

В табл. 6.2 даны значения коэффициентов α_n, когда колебание модулировано и по частоте и по амплитуде, только по частоте, только по амплитуде.

Таблица 6.2

α_n	Модуляция по частоте и амплитуде	Модуляция по частоте	Модуляция по амплитуде
α_1	$-\frac{\dot{A}}{A}$	0	$-\frac{\dot{A}}{A}$
α_2	$\frac{\ddot{A}}{A} + j\dot{\omega}$	$j\dot{\omega}$	$\frac{\ddot{A}}{A}$
α_3	$-\left(\frac{\dddot{A}}{A} + j\ddot{\omega} + 3j\dot{\omega}\frac{\dot{A}}{A}\right)$	$-j\ddot{\omega}$	$-\frac{\dddot{A}}{A}$
α_4	$\frac{A^{IV}}{A} + j\dddot{\omega} - 3\dot{\omega}^2 + 4j\frac{\dddot{A}}{A}\dot{\omega} + 6j\frac{\ddot{A}}{A}\ddot{\omega}$	$j\dddot{\omega} - 3\dot{\omega}^2$	$-\frac{A^{IV}}{A}$
α_5	$-\left[\frac{A^{V}}{A} + j\omega^{IV} + 10j\dddot{\omega}\dot{\omega} + 5j\frac{A^{IV}}{A}\dot{\omega} - 15\frac{\dddot{A}}{A}\dot{\omega}^2 + 20j\frac{\ddot{A}}{A}\dot{\omega} + 20j\frac{\dot{A}}{A}\ddot{\omega}\right]$	$-j\omega^{IV} - 10\ddot{\omega}\dot{\omega}$	$-\frac{A^{V}}{A}$

Точки над A и ω (или римские цифры IV и V над ними) означают производные соответственно от амплитуды $A(t)$ и от частоты $\omega(t)$ по времени t.

В том случае, когда эффективный спектр $A(t)$ или $\omega(t)$ относительно узок по сравнению с шириной пропускания рассматриваемой линейной системы, число членов суммы в (6.26) берут от 2 до 4 ($m = 2 \div 4$).

В [14] дается формула (здесь не приводится), позволяющая оценить погрешность, получающуюся в результате пренебрежения переходным процессом при включении э. д. с.

Пример 6.3. Найти установившийся ток в цепи R, L рис. 5.3, *б* при воздействии на нее, как и в примере § 5.4, синусоидальным колебанием с линейно нарастающей амплитудой $A(t)\sin\omega t$, где $A(t) = kt$.

Решение. Коэффициент передачи при синусоидальном режиме и неизменной амплитуде

$$K(j\omega) = \dot{I}/\dot{U}_{вх} = 1/(R + j\omega L).$$

В соответствии с табл. 6.2 динамический коэффициент передачи

$$K_д = K(j\omega) - \frac{-j}{1}\alpha_1 \frac{dK(j\omega)}{d\omega},$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{dA(t)/dt}{A} = -\frac{1}{t}; \quad \frac{dK(j\omega)}{d\omega} = \frac{-jL}{(R+j\omega L)^2} = \frac{-jL}{(R^2+\omega^2L^2)\,e^{j2\varphi}}.$$

Комплексную амплитуду тока как функцию частоты и времени определим следующим образом:

$$I(\omega, t) = U_{вх}(t)\, K_д = kt\left[\frac{R - j\omega L}{R^2+\omega^2L^2} - \frac{L}{t}\,\frac{e^{-j2\varphi}}{R^2+\omega^2L^2}\right];$$

$$I(\omega, t) = \frac{kL}{R^2+\omega^2L^2}\left[\frac{Rt}{L} - \cos 2\varphi - j(\omega t - \sin 2\varphi)\right].$$

При $\omega t \gg \sin 2\varphi$ и $Rt/L \gg \cos 2\varphi$ получим

$$I(\omega, t) = \frac{kt}{R^2+\omega^2L^2}\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\, e^{-j\varphi} = \frac{kt}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\, e^{-j\varphi},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$.

Таким образом, после окончания переходного процесса [после затухания слагаемых $e^{-Rt/L}\cos(\omega t + 2\varphi)$ и $e^{-Rt/L}\sin(\omega t + 2\varphi)$ в формуле (5.26)] амплитуда тока будет изменяться по тому же закону во времени, что и воздействующая э. д. с.

§ 6.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ УСТАНОВЛЕНИЯ МОНОТОННЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Под монотонными переходными процессами будем понимать переходные процессы, при которых выходная величина $H(t)$ при включении на входе четырехполюсника постоянного напряжения монотонно нарастает без выбросов до установившегося значения.

В отличие от предыдущего переходную функцию четырехполюсника обозначим $H(t)$, а выходную величину, взятую в относительных единицах, — $h(t)$. В дальнейшем будем считать $H(0) = 0$.

Передаточная функция четырехполюсника

$$K(p) = \int_0^\infty H'(t)\, e^{-pt}\, dt. \qquad (6.28)$$

Переходная функция в относительных единицах

$$h(t) = H(t)/H(\infty). \qquad (6.29)$$

Импульсная переходная функция в относительных единицах

$$h'(t) = H'(t)/H(\infty)$$

соответствует нормированной передаточной функции в относительных единицах $k(p) = K(p)/K(0)$.

Таким образом,

$$k(p) = \int_0^\infty h'(t)\, e^{-pt}\, dt. \qquad (6.30)$$

На рис. 6.11, *а* изображена функция $h(t)$ для монотонных и на рис. 6.11, *б* для немонотонных переходных процессов в многокаскадных усилительных схемах.

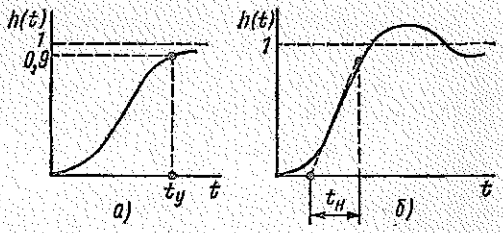


Рис. 6.11

Под *временем установления* t_y при монотонных переходных процессах условимся понимать время нарастания функции $h(t)$ от 0 до 0,9. Заметим, что используют также понятие *времени нарастания* $t_н$, понимая под ним время нарастания переходной функции $h(t)$ от 0,1 до 0,9. При расчете $t_н$ в усилительных схемах [45, 43 и др.] пользуются методом моментов, предложенным в [44].

Применим идею метода моментов для расчета t_y. Разложим e^{-pt} в ряд по степеням pt:

$$e^{-pt} = 1 - pt + \frac{(pt)^2}{2!} - \frac{(pt)^3}{3!} + \ldots$$

Подставим этот ряд под интеграл в (6.30):

$$k(p) = \int_0^\infty h'(t)\, dt - p\int_0^\infty t h'(t)\, dt + \frac{p^2}{2!}\int_0^\infty t^2 h'(t)\, dt - \ldots \qquad (6.31)$$

Интеграл $\int_0^\infty t^m h'(t)\, dt$ называют моментом m-го порядка и обозначают α_m. Момент первого порядка

$$\alpha_1 = \int_0^\infty t h'(t)\, dt. \qquad (6.32)$$

Момент второго порядка

$$\alpha_2 = \int_0^\infty t^2 h'(t)\, dt. \qquad (6.33)$$

Под центральным моментом первого порядка понимают

$$\mu_1 = \int_0^\infty (t - t_1)\, h'(t)\, dt, \tag{6.34}$$

под центральным моментом второго порядка понимают

$$\mu_2 = \int_0^\infty (t - t_1)^2 h'(t)\, dt. \tag{6.35}$$

Выберем время t_1 так, чтобы $\mu_1 = 0$. В формуле (6.34) от переменной t перейдем к переменной $h(t)$, соответственно изменив верхний предел интеграла:

$$\mu_1 = \int_0^\infty (t - t_1) \frac{dh(t)}{dt}\, dt = \int_0^1 (t - t_1)\, dh(t).$$

На рис. 6.12, *а* зачерненная площадка представляет собой $(t - t_1)\, dh(t)$ при $t < t_1$, площадка с косой штриховкой — при

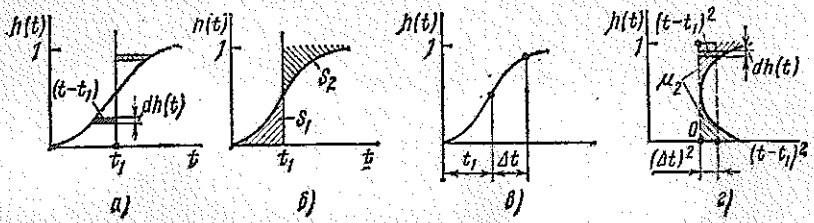


Рис. 6.12

$t > t_1$. t_1 — время, относительно которого (рис. 6.12, *б*) сумма площадей $S_1 + S_2 = 0$; $S_1 < 0$, $S_2 > 0$; $\mu_1 = S_1 + S_2 = 0$.

Можно μ_1 записать и иначе:

$$\mu_1 = 0 = \int_0^\infty t h'(t)\, dt - t_1 \int_0^\infty h'(t)\, dt = \alpha_1 - t_1 \int_0^1 dh(t) =$$

$$= \alpha_1 - t_1 [h(\infty) - h(0)] = \alpha_1 - t_1, \tag{6.36}$$

где $t_1 = \alpha_1$.

Время установления переходного процесса t_y определим (рис. 6.12, *в*) как сумму времен t_1 и Δt:

$$t_y = t_1 + \Delta t. \tag{6.37}$$

Время Δt найдем как время, квадрат которого, умноженный на $h(\infty) = 1$, равен μ_2:

$$\mu_2 = (\Delta t)^2 \cdot 1 = \int_0^1 (t - t_1)^2\, dh(t).$$

Другими словами, $(\Delta t)^2$ — это основание прямоугольника, высота которого 1, а площадь равна μ_2 (рис. 6.12, *г*).

Поскольку $(t-t_1)^2=t^2-2tt_1+t_1^2$, то

$$\mu_2=\int_0^\infty t^2h'(t)\,dt-2t_1\int_0^\infty th'(t)\,dt+t_1^2\int_0^1 dh(t)=$$
$$=\alpha_2-2\alpha_1^2+\alpha_1^2=\alpha_2-\alpha_1^2=(\Delta t)^2.$$

Таким образом, время установления

$$t_y=\alpha_1+\sqrt{\alpha_2-\alpha_1^2}. \qquad (6.38)$$

Моменты первого и второго порядков α_1 и α_2 можно найти, разложив в ряд по p нормированную передаточную функцию $k(p)$. Обычно для монотонных процессов

$$k(p)=\frac{1+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n}{1+b_1p+b_2p^2+\ldots+b_mp^m}, \qquad (6.39)$$

причем a_i и b_i — вещественны, $m>n$ и все полюса $k(p)$ лежат в левой полуплоскости.

Поделив числитель (6.39) на знаменатель, найдем

$$k(p)=1+(a_1-b_1)\,p+[(a_2-b_2)-b_1(a_1-b_1)]\,p^2+\ldots \qquad (6.40)$$

Сопоставим коэффициенты в $k(p)$ при одинаковых степенях p в формулах (6.31) и (6.40), учтя, что $\int_0^\infty h'(t)\,dt=1$. Сопоставление дает:

$$\alpha_1=\int_0^\infty th'(t)\,dt=b_1-a_1;$$

$$\alpha_2=\int_0^\infty t^2h'(t)\,dt=2\,[(a_2-b_2)-b_1(a_1-b_1)].$$

Подставим найденные α_1 и α_2 в формулу (6.38):

$$t_y=(b_1-a_1)+\sqrt{2(a_2-b_2)+b_1^2-a_1^2}. \qquad (6.41)$$

Время установления t_y, подсчитанное по формуле (6.41), довольно близко совпадает со временем возрастания переходной функции $h(t)$ от 0 до значения 0,86. Заметим, что в упомянутых ранее статьях и книгах методом моментов определялось время нарастания $t_н$ функции $h(t)$ от 0,1 до 0,9. Для $t_н$ там получена формула

$$t_н=(2{,}2\div 2{,}7)\,\Delta t.$$

Пример 6.4. Для некоторого четырехполюсника нормированная передаточная функция

$$k(p)=\frac{1+0{,}5p+0{,}25p^2}{1+2p+1{,}5p^2+0{,}5p^3+0{,}25p^4}. \qquad (6.42)$$

Найдем время установления t_y по формуле (6.41).

Решение. Сопоставляя (6.42) с (6.39), находим $a_1=0{,}5$, $a_2=0{,}25$, $b_1=2$, $b_2=1{,}5$. По формуле (6.41)

$$t_y=(2-0{,}5)+\sqrt{2\,(0{,}25-1{,}5)+2^2-0{,}5^2}=2{,}618 \text{ с}.$$

При каскадном соединении нескольких четырехполюсников, например двух, с нормированными передаточными функциями

$$k_1(p)=\frac{1+a_1'p+a_2'p^2+\ldots}{1+b_1'p+b_2'p^2+\ldots} \quad \text{и} \quad k_2(p)=\frac{1+a_1''p+a_2''p^2+\ldots}{1+b_1''p+b_2''p^2+\ldots}.$$

Передаточная функция каскадного соединения

$$k(p)=k_1(p)\,k_2(p)=\frac{1+(a_1'+a_1'')\,p+(a_2'+a_2''+a_1'a_1'')\,p^2+\ldots}{1+(b_1'+b_1'')\,p+(b_2'+b_2''+b_1'b_1'')\,p^2+\ldots}.$$

Время установления при каскадном соединении двух четырехполюсников

$$t_y=(b_1'+b_1'')-(a_1'+a_1'')+$$
$$+\sqrt{2\,[(a_2'+a_2''+a_1'a_1'')-(b_2'+b_2''+b_1'b_1'')+(b_1'+b_1'')^2-(a_1'+a_1'')^2]};$$

оно не равно сумме времен установления отдельных каскадов t_{y1} и t_{y2} и не равно корню квадратному из суммы квадратов времен установления каскадов. Оно более сложным образом зависит от времен t_{y1} и t_{y2}. Если нормированная переходная функция имеет выброс после достижения ею значения *1* (см. рис. 6.11, *б*), то время нарастания $t_н$ переходной функции $h(t)$ от 0,1 до 1 приближенно определяют по формуле $t_н\approx\frac{1}{(dh(t)/dt)_{max}}$, где $\left(\frac{dh(t)}{dt}\right)_{max}$ — максимальная крутизна.

Глава седьмая

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕЙЛОРА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

§ 7.1. СТЕПЕННОЙ РЯД ТЕЙЛОРА

Дифференциальные уравнения, которые описывают процессы в линейных и нелинейных электрических цепях, а также в цепях с переменными параметрами, в ряде случаев решают путем применения степенных рядов Тейлора. Вообще говоря, применение для этой цели степенных рядов известно уже давно [56]. Однако за последнее время к методу степенных рядов вновь привлечено внимание [57, 58 и др.]. В недавно вышедшей книге Г. Е. Пухова [57] рассмотрены преобразования, названные прямым и обратным преобразованиями Тейлора, и совокупность правил, близкая к совокупности правил, основанных на прямом и обратном преобразованиях Лапласа — Карсона. В ближайших четырех параграфах в краткой форме рассмотрим, как осуществляется прямое и обратное преобразования Тейлора. Рассмотрим преобразования наиболее существенных функций времени, необходимые для решения дифференциальных уравнений, а также саму методику решения.

Прежде всего запишем степенной ряд Тейлора и напомним, как упорядоченным образом определяют коэффициенты этого ряда.

Функцию времени $x(t)$ можно представить степенным рядом

$$x(t)=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\ldots \tag{7.1}$$

Здесь a_0, a_1, a_2, ... — некоторые постоянные; t_0 — постоянное число, которое называют центром ряда, в частном случае $t_0=0$.

Степенной ряд сходится внутри радиуса сходимости

$$R=\overline{\lim}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Символ $\overline{\lim}$ означает верхний предел. Внутри радиуса сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Из (7.1) при $t=t_0$ следует, что

$$a_0=x(t_0). \tag{7.2}$$

Остальные коэффициенты определим путем дифференцирования (7.1)

$$a_1=\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=t_0};\quad a_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)_{t=t_0};\ \ldots;\ a_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kx_k(t)}{dt^k}\right)_{t=t_0}. \tag{7.3}$$

Если $t_0=0$, то

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\frac{d^kx(t)}{dt^k}\right)_{t=0}. \tag{7.4}$$

§ 7.2. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЕЙЛОРА

Полагаем, что функции $x(t)$, с которыми будем иметь дело, представлены рядами Тейлора. Функцию времени $x(t)$ будем называть оригиналом. Ей соответствует тейлоровское изображение (T-функция) целочисленного аргумента k ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty$), определяемое формулой

$$X(k)=\frac{H^k}{k!}\left(\frac{d^kx(t)}{dt^k}\right)_{t=0}. \tag{7.5}$$

Обычно (но не всегда) оригинал обозначают строчной буквой [например, $x(t)$], а его T-изображение такой же буквой, но прописной — $X(k)$. В формуле (7.5) через H обозначена некоторая постоянная, которая в дальнейшем — при переходе к искомой функции времени — сократится. Совокупность членов ряда, выражаемых (7.5), при фиксированном H и различных значениях k называют тейлоровским спектром.

Обратим внимание на то, что любая T-функция при $k<0$ равна нулю.

Сопоставляя (7.4) и (7.5), находим

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}X(k)\left(\frac{t}{H}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left[\frac{d^kx(t)}{dt^k}\right]_{t=0}. \tag{7.6}$$

Таким образом, между функцией времени $x(t)$ и ее T-изображением $X(k)$ существует прямая и обратная связи, которые обозначают символом $\rightleftarrows$, подобно тому, как в операторном методе используется символ $\doteq$.

Прямое T-изображение (преобразование)

$$X(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}\rightleftarrows x(t). \tag{7.7}$$

Обратное T-преобразование

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} X(k)\left(\frac{t}{H}\right)^k \rightleftarrows X(k). \tag{7.8}$$

Постоянная H, разумеется, одинакова при прямом и обратном преобразованиях.

§ 7.3. T-ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

1. *Изображение* $f(t)=b_0(t)=1$ при $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$ (рис. 7.1, *а*). Ее Т-изображение равно 1 при $k=0$ и равно 0 при $k\neq 0$ (рис. 7.1, *б*). Изображение $f(t)=1$ записывают следующим образом:

$$f(t)=1\rightleftarrows\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0;\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

Функцию δ называют тедой. Функция $\delta(k-m)$ представляет собой теда-функцию, смещенную вправо по оси k на m единиц (рис. 7.1, *в*).

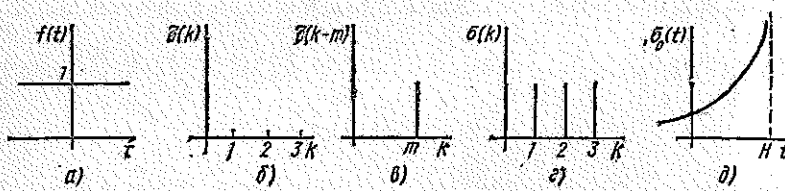


Рис. 7.1

2. При использовании преобразований Тейлора единичной T-функцией $\sigma(k)=1$ называют функцию, равную 1 при любом целочисленном $k=0, 1, 2, \ldots$ (рис. 7.1, *г*). В соответствии с формулами (7.7) и (7.8) ей отвечает функция времени (рис. 7.1, *д*)

$$\sigma_0(t)=1+\frac{t}{H}+\left(\frac{t}{H}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-t/H}.$$

Таким образом,

$$\sigma(k)=1\rightleftarrows\frac{1}{1-t/H},\quad t<H;\quad k\geqslant 0.$$

Запаздывающая единичная функция

$$\sigma(k-m)=\begin{cases}1, & k\geqslant m;\\ 0, & k<m.\end{cases}$$

Ей соответствует функция времени

$$\sigma_m(t)=\frac{\left(\frac{t}{H}\right)^m}{1-t/H}=\left(\frac{t}{H}\right)^m\sigma_0(t).$$

3. *T-изображение степенного многочлена* $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$. Здесь a_k — некоторые постоянные. Подставляя $f(t)$ в формулу (7.7), получим

$$F(k)=\sum_{m=0}^{n}a_mH^m\sigma(k-m).$$

В качестве примера составим $F(k)$ для $f(t)=3t-2t^3$:

$$F(k)=3H\sigma(k)-2H^3\sigma(k-3).$$

4. *T-изображение экспоненты* $e^{\lambda t}$ [обозначают $\varepsilon_\lambda(k)$]. В соответствии с (7.7)

$$\varepsilon_\lambda(k)=\frac{(\lambda H)^k}{k!}\doteq e^{\lambda t}.$$

5. *T-изображение показательной функции* a^t [обозначают $\Pi_a(k)$]

$$\Pi_a(k)=\frac{(H\ln a)^k}{k!}\doteq a^t.$$

6. *T-изображение синуса и косинуса.* Если обозначить $\varepsilon_\omega(k)=\frac{(\omega H)^k}{k!}$, то

$$\sin\omega t\doteq S_\omega(k)=\varepsilon_\omega(k)\sin\frac{\pi k}{2};\quad \cos\omega t\doteq C_\omega(k)=\varepsilon_\omega(k)\cos\frac{\pi k}{2}.$$

7. *T-аналог формулы Эйлера.* Если в формуле п. 4 положить $\lambda=j\omega$, то

$$e^{j\omega t}\doteq\frac{(\omega H)^k}{k!}\left(\cos\frac{\pi k}{2}+j\sin\frac{\pi k}{2}\right).$$

8. *T-умножение.* Известны T-изображения функций $x(t)\doteq X(k)$ и $y(t)\doteq Y(k)$. Требуется определить через них изображение произведения $x(t)\,y(t)$. В соответствии с формулой (7.7)

$$x(t)\,y(t)\doteq\sum_{l=0}^{l=k}X(k-l)\,Y(l).$$

9. *T-изображение первой производной.* Известно T-изображение функции $x(t)\doteq X(k)$. Требуется определить изображение производной $\frac{dx(t)}{dt}$.

Так как $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} X(k)\left(\frac{t}{H}\right)^k$, то, дифференцируя ряд $x(t)$ внутри его радиуса сходимости, имеем

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{kX(k)}{H}\left(\frac{t}{H}\right)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{H}X(k+1)\left(\frac{t}{H}\right)^k.$$

Отсюда

$$\frac{dx(t)}{dt}\doteq\frac{k+1}{H}X(k+1).$$

Дифференцированию оригинала соответствует сдвиг спектра на 1 с умножением на $\frac{k+1}{H}$.

10. *T-изображение n-й производной:*

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}\doteq\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{H^n}X(k+n).$$

11. *Перевод начальных условий из области оригиналов в область T-изображений.* Известны значения функции $x(t)$ и ее производных при $t=0$:

$$x(0)=\alpha_0;\quad x'(0)=\alpha_1,\ldots;\quad x^{n-1}(0)=\alpha_{n-1}.$$

Требуется перевести эти начальные условия в область T-изображений. С этой целью воспользуемся прямым T-преобразованием (7.7), обозначив $\left(\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right)_{t=0}=\alpha_r$:

$$X(r)\doteq\frac{H^r}{r!}\left(\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right)_{t=0}=\frac{H^r}{r!}\alpha_r.$$

Последовательно придавая r значения $0, 1, 2,\ldots(n-1)$, находим $x(0)=\alpha_0;\ X(1)=H\alpha_1;\ X(n-1)=\frac{H^{n-1}}{(n-1)!}\alpha_{n-1}$.

§ 7.4. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЕЙЛОРА

Решение дифференциальных уравнений путем применения T-преобразования может осуществляться различными способами [57]. Здесь рассмотрим только один из них, наиболее наглядный.

Положим, что требуется решить неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx(t)}{dt}+a_nx(t)=f(t). \qquad (7.9)$$

Заданы начальные условия $x(0)=\alpha_0,\ x'(0)=\alpha_1,\ldots,\ x^{n-1}(0)=\alpha_{n-1}$.

Коэффициенты $a_1\div a_n$ в (7.9) представляют собой постоянные числа. Запишем T-изображение уравнения (7.9). С этой целью

заменим $x(t) \doteq X(k)$; $\frac{dx(t)}{dt} \doteq \frac{k+1}{H} X(k+1)$; $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \doteq \frac{(k+1)\dots(k+n)}{H^n} \times$

$\times X(k+n)$; $f(t) \doteq F(k) = \frac{H^k}{k!} \left(\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right)_{t=0}$.

После соответствующей замены получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\frac{(k+1)\dots(k+n)}{H^n} X(k+n) + a_1 \frac{(k+1)\dots(k+n-1)}{H^{n-1}} X(k+n-1) + \dots +$$

$$+ a_{n-1} \frac{k+1}{H} X(k+1) + a_n X(k) = \frac{H^k}{k!} \left(\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right)_{t=0}. \qquad (7.10)$$

Последовательно придавая величине k в (7.10) значение 0, 1, 2, ..., будем определять из него соответственно значения $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, ... через изображения $F(k)$ и начальные условия $x(0)$, $x'(0)$, ... в области T-изображений. После того как все $X(k)$ определены, записываем решение для $x(t)$ по (7.8).

Пример 7.1. Решить уравнение

$$dx(t)/dt + 2x(t) = 3t^2 \qquad (7.11)$$

при начальном условии $x(0) = \alpha_0 = 0$.

Решение. Запишем T-изображение (7.11):

$$\frac{k+1}{H} X(k+1) + 2X(k) = 3H^2 \sigma(k-2). \qquad (7.12)$$

Начальное условие $X(0) = 0$.

Придав k значение 0, из (7.12) находим $X(1)$:

$$\frac{1}{H} X(1) + 2 \cdot 0 = 0$$

при

$k = 0$ $\sigma(k-2) = 0$, $X(1) = 0$;

$k = 1$ $\frac{2}{H} X(2) = 0$, $X(2) = 0$;

$k = 2$ $\frac{3}{H} X(3) = 3H^2 \cdot 1$, $(\sigma(0) = 1)$, $X(3) = H^3$;

$k = 3$ $\frac{4}{H} X(4) + 2H^3 = 0$, $X(4) = -\frac{H^4}{2}$;

$k = 4$ $\frac{5}{H} X(5) - H^4 = 0$, $X(5) = \frac{H^5}{5}$;

$k = 5$ $\frac{6}{H} X(6) + \frac{2H^5}{5} = 0$, $X(6) = -\frac{H^6}{15}$; $X(7) = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} H^7$.

Искомая функция времени в соответствии с формулой (7.8) (все H сократятся)

$$x(t) = t^3 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{15} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} t^7 - \dots$$

В заключение приведем разработанный Л. П. Гавриловым [58] алгоритм расчета по уравнению (7.10), удобный для применения ЭВМ. С этой целью (7.10) перепишем так:

$$X(k+n)=\frac{H^n}{(k+1)\dots(k+n)}\left(-\sum_{l=1}^{n}a_l b_l+F_k\right), \qquad (7.13)$$

где $k=0,\ 1,\ \dots;\ b_l=(k+1)\dots(k+n-l);\ l=1\div(n-2)$,

$$b_1=k+1;\ b_0=1;\ F_k=\frac{H^k}{k!}\left(\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right)_{t=t_i};\ i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

i — номер шага интегрирования.

При $t_i=0$ первые $n-1$ коэффициентов определяются из начальных условий $X(r)=\frac{H^r}{r!}x^r(t_i)$, $r=0\div(n-1)$, а $x^r(t_i)$, значения функции $x(t)$ и ее $n-1$ производных при $t=t_i$.

Уравнение (7.13) позволяет последовательно определить коэффициенты разложения решения дифференциального уравнения в ряд Тейлора.

Обозначим τ — шаг интегрирования; $\tau<R$, где R — радиус сходимости ряда. Используя обратное преобразование Тейлора для $t=t_{i+1}=t_i+\tau$, вычислим значения $x(t_{i+1}),\ x'(t_{i+1}),\ \dots,\ x^{n-1}(t_{i+1})$. Число членов каждого ряда выбираем из условия, чтобы укороченный ряд Тейлора аппроксимировал функцию с допустимой погрешностью.

По известным значениям функции и ее производных при $t=t_{i+1}$ можно построить аналитическое продолжение решения для $t>t_{i+1}$.

Оценку величины шага интегрирования τ и числа членов степенного ряда N можно осуществить следующим способом. Положим, что все корни p_k характеристического уравнения, соответствующего (7.10), действительны и некратны. Тогда свободная составляющая решения уравнения (7.10) на интервале шага интегрирования $x_{св}(\tau)=\sum_{k=1}^{N}C_k e^{p_k\tau}$. Разложим функцию $e^{p\tau}$ в ограниченный ряд:

$$e^{p\tau}\approx\sum_{r=0}^{N}\frac{(p\tau)^r}{r!}.$$

Вычислим логарифм относительной погрешности приближения

$$\lg\delta=\lg\left|\frac{e^{p\tau}-\sum_{r=0}^{N}(p\tau)^r/r!}{e^{p\tau}}\right|.$$

В [58] показано, что $\lg\delta$ соответствует числу верных десятичных знаков функции, представляющей $e^{p\tau}$.

На рис. 7.2 показана зависимость $\lg\delta=f(p\tau)$. С помощью этой зависимости можно оценить величины N и τ для ряда, пред-

ставляющего решение уравнения (7.10). Например, пусть наибольшее по модулю значение корня характеристического уравнения равно $p_i = -4$. Расчет предполагается вести с числом членов ряда $N = 4$. Число верных десятичных знаков в решении не должно быть меньше 3.

На рис. 7.2 проводим горизонталь $\lg \delta = -3$ до пересечения с кривой $N = 4$ и находим $p\tau = -0{,}845$. Откуда шаг интегрирования не должен превышать $\tau = \frac{-0{,}845}{-4} = 0{,}211$ с.

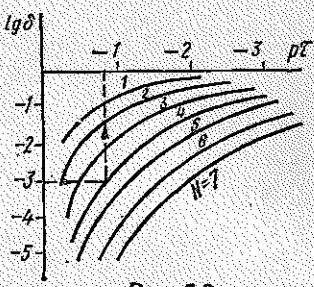


Рис. 7.2

Для кратных и комплексных корней в [58] даны свои номограммы.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых вопросов расчета переходных процессов в цепях с изменяющимися во времени параметрами.

§ 7.5. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА

Прямое преобразование Меллина [59, 60] функции $f(t)$ осуществляется по формуле

$$M\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt, \qquad (7.14)$$

обратное преобразование

$$M^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, t^{-s}\, ds, \qquad (7.15)$$

где $s = \alpha + j\omega$ — комплексная переменная, действительная часть которой $\alpha \leqslant -c$; c — абсцисса абсолютной сходимости интеграла.

Чтобы интеграл в (7.14) сходился, модуль функции $f(t)$ должен расти медленнее роста модуля некоторой степенной функции. Другими словами, можно указать некоторые числа M и c, при которых выполняется неравенство

$$|f(t)| < Mt^c.$$

Порядок роста функции $f(t)$ при преобразовании Меллина должен быть меньше порядка роста функции $f(t)$ при преобразовании Лапласа (степенная функция имеет порядок роста меньше порядка роста экспоненты).

Обратим внимание на то, что не могут быть преобразованы по Меллину те функции, которые начинаются при $t = 0$ (для них преобразование (7.14) не имеет смысла). Чтобы их все же можно было преобразовывать по Меллину, их сдвигают на весьма небольшое время ξ (практически не влияющее на результат). Так, например, дельта-функция $\delta(t)$, ее интеграл и производные непреобразуемы по Меллину, а функция $\delta(t - \xi)$ (при любом малом ξ), ее интеграл и производные преобразуемы.

Преобразования по формулам (7.14) и (7.15) будем называть M-преобразованиями и обозначать символом $\doteqdot$, несколько отличающимся от символа $\fallingdotseq$ преобразования Лапласа.

§ 7.6. M-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРАКТИЧЕСКИ ВАЖНЫХ ФУНКЦИЙ

1. *M-преобразование первой производной:*

$$M\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}t^{s-1}\,dt=f(t)\,t^{s-1}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty (s-1)\,f(t)\,t^{s-2}\,dt.$$

Если учесть, что $f(t)$ является функцией, преобразуемой по Меллину, то первое слагаемое выпадает, а второе дает

$$-(s-1)\int_0^\infty f(t)\,t^{(s-1)-1}\,dt=-(s-1)\,F(s-1).$$

Таким образом,

$$df(t)/dt\doteqdot-(s-1)\,F(s-1),$$

т. е. дифференцирование $f(t)$ сдвигает аргумент функции $F(s)$ на -1 при одновременном умножении на $-(s-1)$.

2. *M-преобразование μ-производной:*

$$\frac{d^\mu f(t)}{dt^\mu}\doteqdot(-1)^\mu(s-1)(s-2)\ldots(s-\mu)\,F(s-\mu).$$

3. *M-преобразование интеграла.* Известно, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(s)$, требуется выразить $\int_0^t f(t)\,dt$ через $F(s)$. С этой целью проинтегрируем обе части формулы (7.15) по t вдоль правой полуоси t:

$$\int_0^t f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)\,ds\int_0^t t^{-s}\,dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{1}{1-s}t^{-s+1}F(s)\,ds.$$

Введя переменную $s_1=s-1$, получим

$$\int_0^t f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left(-\frac{1}{s_1}\right)t^{-s_1}F(s_1+1)\,ds_1.$$

Отсюда

$$\int_0^t f(t)\,dt\doteqdot-\frac{1}{s}F(s+1).$$

Таким образом, интегрирование $f(t)$ сдвигает аргумент у $F(s)$ на $+1$ при одновременном умножении на $(-1/s)$.

4. *М-изображение дельта-функции* $\delta(t-\xi)$:

$$\int_0^\infty \delta(t-\xi)\, t^{s-1}\, dt = \xi^{s-1} \text{ или } \delta(t-\xi) \doteqdot \xi^{s-1}.$$

5. *М-изображение единичной функции* $1(t-\xi)$:

$$1(t-\xi) \doteqdot -\xi^s/s.$$

6. *М-изображение линейно возрастающей функции* $(t-\xi)$:

$$(t-\xi) \doteqdot \frac{\xi^{s+1}}{s(s+1)}.$$

7. *М-изображение степенной функции* $(t-\xi)^n$:

$$(t-\xi)^n \doteqdot (-1)^{n-1} \frac{n!\,\xi^{s+n}}{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}.$$

При $t<\xi$ все степенные функции обращаются в нуль, так как они являются интегралами от функции $1(t-\xi)$, обладающей тем же свойством.

8. *М-изображение функции* $1(t-\xi)\,t^n$:

$$1(t-\xi)\,t^n \doteqdot -\frac{\xi^{s+n}}{s+n}.$$

9. *М-изображение функции* $f(t)\,t^\nu$. Зная, что изображение $f(t)$ равно $F(s)$, требуется определить изображение $f(t)\,t^\nu$:

$$f(t)\,t^\nu = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} t^{\nu-s} F(s)\, ds.$$

Введем переменную $\nu - s = -s_1$. Тогда

$$f(t)\,t^\nu = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} t^{-s_1} F(s_1+\nu)\, ds_1,$$

отсюда

$$f(t)\,t^\nu \doteqdot F(s+\nu).$$

10. *М-изображение* $t^\nu \frac{d^\mu x(t)}{dt^\mu}$:

$$t^\nu \frac{d^\mu x(t)}{dt^\mu} \doteqdot (-1)^\mu (s-1+\nu)(s-2+\nu)\ldots(s-\mu+\nu)\, F(s-\mu+\nu).$$

§ 7.7. ФОРМУЛА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА

Положим, что составлено изображение искомой функции в виде

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}\,\xi^s, \qquad (7.16)$$

где $\frac{A(s)}{B(s)}$ — рациональная дробь.

Пусть уравнение $B(s)=0$ имеет n различных корней, среди которых нет корня $s=0$.

Разложим правую часть (7.16) на сумму простых дробей:

$$F(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\xi^{s}\frac{1}{s-s_k}, \tag{7.17}$$

где $B'(s_k)$ — производная $B(s)$ по s, взятая при значении $s=s_k$.

Правую часть (7.17) умножим и поделим на ξ^{-s_k}. Тогда

$$F(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\xi^{s_k}\frac{\xi^{s-s_k}}{s-s_k}.$$

Но в соответствии с п. 8 $\dfrac{\xi^{s-s_k}}{s-s_k}\doteq 1(t-\xi)\,t^{-s_k}$.

Поэтому формулу разложения при отсутствии нулевого корня у $B(s)=0$, позволяющую по $F(s)$ определить соответствующую ей $f(t)$, запишем так:

$$f(t)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}\xi^{s_k}1(t-\xi)\,t^{-s_k}. \tag{7.18}$$

Если же среди корней $B(s)=0$ имеется и нулевой корень $s=0$, то формула разложения принимает следующий вид:

$$f(t)=\left[-\frac{A(0)\,\xi}{B_1(0)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)\,\xi^{s_k}}{s_kB_1'(s_k)}\,t^{-s_k}\right]1(t-\xi), \tag{7.19}$$

где $F(s)=\dfrac{A(s)\,\xi^{s}}{sB_1(s)}$; s_k — корни уравнения $B_1(s)=0$.

§ 7.8. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА

Наибольшее применение преобразование Меллина нашло для описания процессов в цепях с переменными во времени параметрами [33, 60].

Сначала рассмотрим, как решается уравнение Эйлера

$$a_{nn}t^{n}\frac{d^{n}x_{\text{вых}}}{dt^{n}}+\ldots+a_{22}t^{2}\frac{d^{2}x_{\text{вых}}}{dt^{2}}+a_{11}t\frac{dx_{\text{вых}}}{dt}+a_{00}x_{\text{вых}}=\delta(t-\xi). \tag{7.20}$$

Запишем M-изображение этого уравнения, использовав соотношения п. 4 и п. 10 (последнее при $\mu=\nu$):

$$[(-1)^{n}a_{nn}s(s+1)\ldots(s+n-1)+\ldots+a_{22}(s+1)-a_{11}s+a_{00}]\times X_{\text{вых}}(s)=\xi^{s-1}. \tag{7.21}$$

Отсюда

$$X_{\text{вых}}(s)=\frac{\xi^{s-1}}{(-1)^{n}a_{nn}s(s+1)\ldots(s+n-1)+\ldots+a_{22}(s+1)-a_{11}s+a_{00}}. \tag{7.22}$$

Для определения $x_{вых}(t)$ к (7.22) следует применить формулу разложения.

В более общем случае дифференциальное уравнение с переменными во времени параметрами, составленное для определения импульсной переходной функции, запишем следующим образом:

$$(a_{nn}t^n + a_{n,\,n-1}t^{n-1} + \ldots + a_{n0})\frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + (a_{n-1,\,n-1}t^{n-1} + \ldots + a_{n-1,\,0})\frac{d^{n-1}x_{вых}}{dt^{n-1}} + \ldots + (a_{11}t + a_{10})\frac{dx_{вых}}{dt} + a_0 x_{вых} = \delta(t-\xi). \quad (7.23)$$

В левой части (7.23) оставим только те члены, которые имеются в левой части уравнения (7.20), а остальные перенесем в правую часть:

$$a_{nn}t^n\frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + \ldots + a_{11}t\frac{dx_{вых}}{dt} + a_{00}x_{вых} = \delta(t-\xi) - \left\{[a_{n,\,n-1}t^{n-1} + \ldots + a_{n,\,1}t + a_{n0}]\frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + \ldots + [a_{21}t + a_{20}]\frac{d^2 x_{вых}}{dt^2} + a_{10}\frac{dx_{вых}}{dt}\right\}. \quad (7.24)$$

Решение (7.24) полагают в виде ряда

$$h'(t,\,\xi) = g(t,\,\xi) = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots \quad (7.25)$$

За нулевое приближение g_0 для импульсной переходной функции $h'(t,\,\xi)$ принимают решение уравнения (7.21), остальные приближения (g_1, g_2, ...) получают с помощью рекуррентных зависимостей. Рассмотрим, как это делается на примере решения уравнения второго порядка [60]:

$$(a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20})\frac{d^2 g}{dt^2} + (a_{11}t + a_{10})\frac{dg}{dt} + a_{00}g = \delta(t-\xi).$$

Запишем левую часть уравнения в виде уравнения Эйлера

$$a_{22}t^2\frac{d^2 g}{dt^2} + a_{11}t\frac{dg}{dt} + a_{00}g = \delta(t-\xi) - \left[(a_{21}t + a_{20})\frac{d^2 g}{dt^2} + a_{10}\frac{dg}{dt}\right]. \quad (7.26)$$

Преобразуем (7.26) по Меллину:

$$[a_{22}s(s+1) - a_{11}s + a_{00}]\,G(s) = \xi^{s-1} - [a_{21}s(s-1)\,G(s-1) + a_{20}(s-1)(s-2)\,G(s-2) - a_{10}(s-1)\,G(s-1)]. \quad (7.27)$$

Изображение $G_0(s)$ функции $g_0 = g_0(t,\,\xi)$:

$$G_0(s) = \frac{\xi^{s-1}}{a_{22}s(s+1) - a_{11}s + a_{00}}. \quad (7.28)$$

Рекуррентная формула для изображений последующих членов ряда (7.25):

$$G_{k+1}(s) = -\frac{a_{21}s(s-1)\,G_k(s-1) + a_{20}(s-1)(s-2)\,G_k(s-2)}{a_{22}s(s+1) - a_{11}s + a_{00}} - \frac{a_{10}(s-1)\,G_k(s-1)}{a_{22}s(s-1) - a_{11}s + a_{00}}. \quad (7.29)$$

В формуле (7.29) участвуют функции $G_k(s-1)$ и $G_k(s-2)$. Их получают путем сдвига аргумента у G_k соответственно на -1

или на —2. Так, из (7.28) получим

$$G_0(s-1)=\frac{\xi^{s-2}}{a_{22}(s-1)\,s-a_{11}(s-1)+a_{00}},$$

$$G_0(s-2)=\frac{\xi^{s-3}}{a_{22}(s-2)(s-1)-a_{11}(s-2)+a_{00}}.$$

Подставляя $G_0(s-1)$ и $G_0(s-2)$ в (7.29), получим изображение первой поправки

$$G_1(s)=-\frac{[a_{21}s(s-1)+a_{10}(s-1)]\,\xi^{s-2}}{[a_{22}(s-1)\,s-a_{11}s+a_{00}]\,[a_{22}(s-1)\,s-a_{11}(s-1)+a_{00}]}-$$
$$-\frac{a_{20}(s-1)(s-2)\,\xi^{s-3}}{[a_{22}(s-1)\,s-a_{11}s+a_{00}]\,[a_{22}(s-2)-a_{11}(s-2)+a_{00}]}.$$

Заметим, что быстрая сходимость ряда (7.25) имеет место, если в уравнении (7.24) коэффициенты $a_{ii}t^i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ на исследуемом интервале времени преобладают над остальными коэффициентами при соответствующей производной в этом уравнении.

По отношению к цепям с переменными во времени параметрами в литературе используется иногда термин квазистационарная система. В такой системе коэффициенты дифференциальных уравнений практически изменяются несущественно за время от начала процесса до момента, когда его приближенно можно считать затухшим.

Пример 7.2. Определить импульсную переходную функцию системы, описываемой уравнением

$$4t^2\frac{d^2x_{\text{вых}}}{dt^2}+t\,\frac{dx_{\text{вых}}}{dt}+0{,}5x_{\text{вых}}=x_{\text{вх}}. \qquad (7.30)$$

Принимаем $x_{\text{вх}}=\delta(t-\xi)$ и преобразуем уравнение (7.30) по Меллину:

$$[4s(s+1)-s+0{,}5]\,G(s)=\xi^{s-1},$$

отсюда

$$G(s)=\frac{\xi^{s-1}}{4s^2+3s+0{,}5}=\frac{A(s)\,\xi^s}{B(s)};\quad A(s)=\xi^{-1}.$$

Уравнение $B(s)=0$ имеет корни $s_1=-1/4$, $s_2=-1/2$.

Применив формулу разложения (7.18), получаем

$$h'(t,\ \xi)=g(t,\ \xi)=1(t-\xi)\left[-\xi^{-1,25}t^{0,25}+\xi^{-1,5}t^{0,5}\right].$$

§ 7.9. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА, ПАРАМЕТРЫ КОТОРОГО МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮТСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Обозначим входное напряжение четырехполюсника $u_{\text{вх}}$ и выходное $u_{\text{вых}}$. В общем случае связь между ними может быть описана дифференциальным уравнением вида

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}u_{\text{вых}}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u_{\text{вых}}+\ldots+a_0u_{\text{вых}}=$$
$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}u_{\text{вх}}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u_{\text{вх}}+\ldots+b_0u_{\text{вх}}. \qquad (7.31)$$

Если параметры четырехполюсника изменяются во времени, то коэффициенты уравнения $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ также являются функциями времени $a_n(t), \ldots, a_0(t), b_m(t), \ldots, b_0(t)$. Так как импульсная переходная функция $h'(t, \tau)$ представляет собой выходное напряжение четырехполюсника при воздействии на вход его напряжением в виде δ-функции в момент $t=\tau$, т. е. $\delta(t-\tau)$, то по отношению к импульсной переходной функции уравнение (7.31) для цепи с переменными во времени параметрами запишем следующим образом:

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}h'(\tau)+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}h'(\tau)+a_0(t)h'(\tau)=$$

$$=b_m(t)\frac{d^m}{dt^m}\delta(t-\tau)+b_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t-\tau)+\ldots+b_0(t)\delta(t-\tau). \quad (7.32)$$

Используя (7.32), составим дифференциальные уравнения для определения параметрической передаточной функции четырехполюсника $K(p, t)$, которая зависит не только от комплексной частоты p, но и от времени t.

Определим $K(p, t)$ так:

$$K(p, t)=\int_{-\infty}^{t} h'(t, \tau)\,e^{-p(t-\tau)}\,d\tau. \quad (7.33)$$

Для составления дифференциального уравнения относительно $K(p, t)$ умножим (7.32) на $e^{p\tau}$ и проинтегрируем полученное выражение по τ от $-\infty$ до t. При этом учтем, что

$$\int_{-\infty}^{t} h'(t, \tau)\,e^{p\tau}\,d\tau=e^{pt}\int_{-\infty}^{t} h'(t, \tau)\,e^{-p(t-\tau)}\,d\tau=K(p, t)\,e^{pt}, \quad (7.34)$$

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}\left[\int_{-\infty}^{t} h'(t, \tau)\,e^{p\tau}\,d\tau\right]=a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}[K(p, t)\,e^{pt}]=$$

$$=a_n(t)\,e^{pt}\left[p^nK(p, t)+np^{n-1}\frac{dK(p, t)}{dt}+\ldots+n!\frac{d^nK(p, t)}{dt^n}\right]. \quad (7.35)$$

В свою очередь,

$$-\int_{\infty}^{t} b_m(t)\frac{d^m}{dt^m}\delta(t-\tau)\,e^{p\tau}\,d\tau=b_m(t)\,p^m\,e^{pt}. \quad (7.36)$$

При взятии интеграла в (7.36) принято во внимание, что $\int_{-\infty}^{t}\delta(t-\tau)\,d\tau=1$. С учетом (7.34) и (7.35) уравнение (7.32) после его умножения на $e^{p\tau}$, интегрирования по τ от $-\infty$ до t и сокращения на e^{pt} приводится к виду

$$A(p, t)K(p, t)+\frac{dA(p, t)}{dp}\frac{dK(p, t)}{dt}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{d^nA(p, t)}{dp^n}\frac{d^nK(p, t)}{dt^n}=$$

$$=B(p, t). \quad (7.37)$$

Здесь $A(p, t) = a_n(t) p^n + \ldots + a_1(t) p + a_0 t;$
$B(p, t) = b_m(t) p^m + \ldots + b_1(t) p + b_0(t).$ (7.38)

Дифференциальное уравнение (7.37) составлено относительно параметрической передаточной функции $K(p, t)$. Коэффициенты этого уравнения являются комплексами, зависящими от времени. В системах с постоянными параметрами $K(p, t)$ не зависит от t, все производные от $K(p, t)$ по t нули и потому для систем с постоянными параметрами уравнение (7.37) переходит в

$$A(p) K(p) = B(p). \tag{7.39}$$

Точное решение уравнения (7.37) неизвестно и потому его решают приближенно. Наиболее рациональный приближенный способ предложен Л. А. Заде [53] и развит в работах А. В. Солодова [60] и Б. Е. Рудницкого [54]. Способ состоит в следующем. Перепишем (7.37) так:

$$A(p, t) K(p, t) = B(p, t) + C(p, t). \tag{7.40}$$

Здесь

$$C(p, t) = C[K(p, t)] = -\left[\frac{dA(p, t)}{dp}\frac{dK(p, t)}{dt} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n A(p, t)}{dp^n}\frac{d^n K(p, t)}{dt^n}\right] \tag{7.41}$$

и положим, что $K(p, t)$ может быть представлено рядом

$$K(p, t) = K_0(p, t) + K_1(p, t) + K_2(p, t) + \ldots \tag{7.42}$$

Здесь $K_0(p, t)$ — нулевое приближение; $K_1(p, t)$ — первое, $K_2(p, t)$ — второе и т. д.

Если параметры четырехполюсника медленно изменяются во времени, то производные $\frac{d^\nu A(p, t)}{dt^\nu}$ малы, $C(p, t) \approx 0$ и

$$A(p, t) K_0(p, t) \approx B(p, t), \tag{7.43}$$

отсюда нулевое приближение

$$K_0(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)}. \tag{7.44}$$

Здесь $K_0(p, t)$ представляет собой передаточную функцию «замороженной» системы, т. е. такой системы, в которой все в действительности переменные коэффициенты полагают постоянными, а затем в полученном решении вместо постоянных коэффициентов подставляют эти коэффициенты как функции времени.

Первую поправку $K_1(p, t)$, равно как и остальные, определяют, исходя из следующих соображений. Подставим в (7.40) $K_0(p, t) + K_1(p, t)$ вместо $K(p, t)$ и учтем (7.43). Получим

$$A_1(p, t) K_1(p, t) = C[K_0(p, t)],$$

отсюда

$$K_1(p, t) = \frac{C[K_0(p, t)]}{A(p, t)}. \tag{7.45}$$

Аналогично

$$K_2(p, t) = \frac{C[K_1(p, t)]}{A(p, t)}, \qquad (7.46)$$

т. е. каждая последующая поправка определяется через предыдущую путем ее дифференцирования и подстановки в формулу, подобную (7.45). Для того чтобы рядом (7.42) можно было пользоваться, он должен давать сходящееся решение при переходе к функции времени.

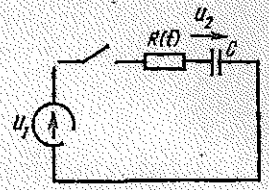


Рис. 7.3

Пример 7.3. Определить параметрическую передаточную функцию $K(p, t)$ для четырехполюсника, представленного на рис. 7.3. У него емкость C конденсатора неизменна, а сопротивление резистора линейно изменяется во времени $R(1+kt)$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение цепи

$$R(1+kt)C\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

или

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{RC(1+kt)}u_2 = \frac{1}{RC(1+kt)}u_1.$$

В соответствии с (7.44)

$$A(p, t) = p + \frac{1}{RC(1+kt)}; \quad B(p, t) = \frac{1}{RC(1+kt)}.$$

Нулевое приближение определим по (7.44):

$$K_0(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} = \frac{1}{1+pRC(1+kt)}.$$

Так как $\frac{dA(p, t)}{dp} = 1$, а $\frac{d^2A(p, t)}{dp^2} = 0$, то

$$C[K_0(p, t)] = -\frac{dA(p, t)}{dp}\frac{dK_0(p, t)}{dt} = \frac{pRCk}{[1+pRC(1+kt)]^2},$$

$$K_1(p, t) = \frac{C[K_0(p, t)]}{A(p, t)} = \frac{(1+kt)kR^2C^2p}{[1+pRC(1+kt)]^3}.$$

Учитывая нулевое и первое приближения, имеем

$$K(p, t) = \frac{1}{1+ap} + \frac{RCap}{(1+ap)^3}; \quad a = RC(1+kt).$$

Если на вход четырехполюсника с изменяющимися во времени параметрами поступает $u_1(t) \rightleftharpoons U_1(p)$ и требуется определить $u_2(t)$, то изображение $U_2(p) = U_1(p)K(p, t)$. При переходе от изображения $U_2(p)$ к оригиналу $u_2(t)$ все коэффициенты $K(p, t)$, являющиеся функциями времени t, например коэффициент a в рассмотренном примере, временно «замораживают», т. е. рассматри-

вают их как некоторые постоянные коэффициенты, а то, что они изменяются во времени, учитывают в окончательном выражении. Так, если в рассмотренном примере на вход четырехполюсника поступает $u_1(t) = 1(t)$, а в $K(p, t)$ ограничиться нулевым приближением, то

$$U_2(p) = \frac{1/a}{p(p + 1/a)}$$

и $u_2(t) = 1 - e^{-t/a} = 1 - e^{-t/[RC(1+kt)]}$.

Глава восьмая

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ИХ СВОЙСТВАМ В ОБЛАСТИ КОМПЛЕКСНОЙ ЧАСТОТЫ

§ 8.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Синтезом электрических цепей называют определение структуры электрических цепей и параметров входящих в них элементов по частотным или временным свойствам цепей.

При синтезе двухполюсников задается либо зависимость входного сопротивления или входной проводимости от частоты, либо зависимость тока на входе двухполюсника в функции от времени при подаче на вход его единичного напряжения.

При синтезе четырехполюсников задается либо зависимость его передаточной функции от частоты, либо зависимость его коэффициента затухания или коэффициента фазы от частоты, либо временная реакция цепи на единичное напряжение.

Каким бы образом ни были заданы характеристики двухполюсника или четырехполюсника, они должны удовлетворять условиям физической реализуемости.

Все задачи на синтез цепей имеют, как правило, неоднозначные решения, т. е. цепи могут быть реализованы с помощью различных схем с сосредоточенными параметрами. Преимущество отдается схеме с наименьшим числом элементов и с наименьшими суммарными значениями индуктивностей и емкостей и параметры которой относительно просто выполнить практически. (Поэтому емкости предпочитают индуктивностям.)

В технике связи, технике автоматического регулирования и радиотехнике синтез цепей находит применение при проектировании корректирующих звеньев — устройств, улучшающих частотные характеристики всей системы в целом. Современная теория электрических фильтров также использует результаты, достигнутые в области синтеза цепей.

В теории фильтров и в теории корректирующих контуров широко применяют методы расчета, основанные на аппроксимации частотных характеристик. В связи с этим в данной главе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с аппроксимацией частотных характеристик.

В данной главе и в двух последующих рассмотрены вопросы синтеза при использовании пассивных схемных элементов R, L, C. Между тем за последние годы интенсивно развивается направление синтеза, в основе которого лежит применение активных схемных элементов (таких, как операционные усилители, транзисторы, туннельные диоды) в совокупности с пассивными R, C-элементами. Индуктивные элементы применяют часто имитированные, обычные индуктивные элементы, как правило, не применяют, так как они не поддаются миниатюризации. Такие цепи называют активными RC-цепями. Некоторые вопросы построения активных RC-цепей применительно к электрическим фильтрам рассмотрены в гл. 12.

§ 8.2. СИНТЕЗ ДВУХПОЛЮСНИКОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ВЫДЕЛЕНИИ ИЗ ФУНКЦИИ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Известно выражение входного сопротивления некоторого двухполюсника

$$Z(p) = A(p)/B(p),$$

удовлетворяющее условиям физической реализуемости (см. § 1.10).

Требуется образовать схему и найти значения входящих в нее элементов методом последовательного выделения из функции входного сопротивления простейших составляющих.

Рассмотрим один из возможных путей решения задачи.

1. Сначала выделяем из состава $Z(p)$ составляющую, пропорциональную первой степени p. Она будет иметь место, если степень $A(p)$ на единицу выше степени $B(p)$. Выделенная составляющая имеет вид $a_1'(p)$, где a_1' — некоторая индуктивность, с которой начинается схема двухполюсника (рис. 8.1): $a_1' = \lim (Z(p)/p)_{p\to\infty}$.

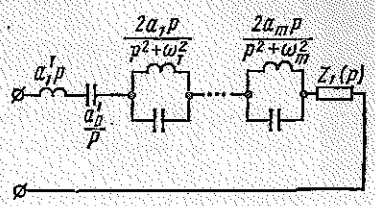


Рис. 8.1

2. Выясняем, нет ли у $Z(p)$ полюса при $p=0$. Если $Z(p)$ имеет полюс при $p=0$, то из $Z(p)$ следует выделить слагаемое вида a_0/p. Коэффициент a_0 представляет собой интегральный вычет функции $Z(p)$ при $p=0$, т. е.

$$a_0' = \operatorname*{Res}_{p\to 0} Z(p) = \left(\frac{A(p)}{B'(p)}\right)_{p=0},$$

где $B'(p)$ — производная от $B(p)$ по p [a_0 может быть определена и иначе — как $a_0' = \lim\limits_{p\to 0} pZ(p)$].

Слагаемому a_0/p в двухполюснике соответствует последовательно включенная емкость $C_0 = 1/a_0'$.

3. Выясняем, нет ли у $Z(p)$ полюсов при $p_{1,2} = \pm j\omega_k$, лежащих на мнимой оси.

Если такие полюсы имеются, а они в соответствии с гл. 1 могут быть только простые, не кратные, то каждой паре таких полюсов в разложении $Z(p)$ соответствуют слагаемые вида $2a_k p/(p^2+\omega_k^2)$.

Коэффициент a_k находят путем вычисления интегрального вычета функции $Z(p)$ при $p=j\omega_k$, т. е.

$$a_k = \operatorname*{Res}_{p\to j\omega_k} Z(p) = \left(\frac{A(p)}{B'(p)}\right)_{p=j\omega_k}.$$

Слагаемому $2a_k p/(p^2+\omega_k^2)$ в искомой схеме соответствует последовательно включенный контур, образованный индуктивностью L_k и параллельно ей присоединенной емкостью C_k.

Действительно, операторное сопротивление параллельно соединенных L_k и C_k

$$Z_k(p) = \frac{pL_k\frac{1}{pC_k}}{pL_k+\frac{1}{pC_k}} = \frac{pL_k}{p^2L_kC_k+1} = \frac{p\frac{1}{C_k}}{p^2+\frac{1}{L_kC_k}}.$$

При сопоставлении последнего выражения с $\frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2}$ получаем $1/C_k = 2a_k$; $\omega_k^2 = 1/(L_kC_k)$.

4. Согласно п. 1—3 можно выделить из $Z(p)$ составляющие:

$$a_1' p + \frac{a_0'}{p} + \sum_{k=1}^{m}\frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2},$$

где m — число пар корней, лежащих на мнимой оси.

Остаток

$$Z_1(p) = Z(p) - \left(a_1' p + \frac{a_0'}{p} + \sum_{k=1}^{m}\frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2}\right)$$

уже не содержит полюсов на мнимой оси.

Функцию $Z_1(p)$, выражающую собой операторное сопротивление некоторого двухполюсника, не содержащего полюсов на мнимой оси, условились называть *функцией минимального реактивного сопротивления*.

5. Дальнейшее формирование двухполюсника состоит в реализации функции минимального реактивного сопротивления $Z_1(p)$.

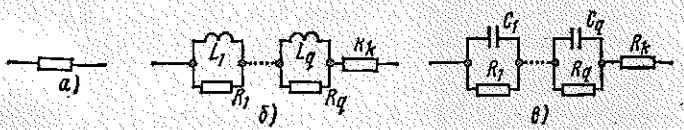


Рис. 8.2

При этом возможны следующие случаи:

а) $Z_1(p)$ — действительное и положительное число. В схеме двухполюсника оно реализуется последовательным активным сопротивлением (рис. 8.2, *а*);

б) $Z_1(p) = A_1(p)/B_1(p)$, причем $A_1(p)$ не содержит постоянного, не зависящего от p слагаемого, т. е. $A_1(p)$ таково, что $p=0$ представляет собой нуль $Z_1(p)$.

В этом случае $Z_1(p)$ может быть разложено на сумму дробей вида $a_k p/(p+m_k)$, т. е.

$$Z_1(p) = \sum \frac{a_k p}{p+m_k}.$$

Каждой дроби вида $\frac{a_k p}{p+m_k}$ в схеме двухполюсника соответствует последовательно включенный контур, образованный параллельно соединенными индуктивностью L_n и активным сопротивлением R_n (рис. 8.2, *б*).

В этом можно убедиться, образовав операторное сопротивление параллельно соединенных L_n и R_n: $\frac{pR_n}{p+R_n/L_n}$ и сопоставив его с $\frac{a_k p^*}{p+m_k}$. Сопоставление дает

$$a_k = R_n \text{ и } m_k = R_n/L_n.$$

Если $m_k = 0$, то в схеме, реализующей $Z_1(p)$, появляется последовательно включенное активное сопротивление, равное a_k;

в) $Z_1(p) = A_1(p)/B_1(p)$, причем $A_1(p)$ содержит постоянное, не зависящее от p слагаемое. В этом случае $Z_1(p)$ может быть представлено следующим образом:

$$Z_1(p) = \sum \frac{b_k}{p+d_k} + b_0.$$

Каждой дроби вида $b_k/(p+d_k)$ в схеме двухполюсника соответствует параллельное соединение емкости C_k и сопротивления R_k (рис. 8.2, *в*).

Действительно, операторное сопротивление параллельно соединенных C_k и R_k равно $\frac{1/C_k}{p+1/(R_kC_k)}$, при сопоставлении которого с $b_k/(p+d_k)$ получим

$$b_k = 1/C_k \text{ и } d_k = 1/(R_kC_k).$$

6. Если функция минимального реактивного сопротивления

$$Z_1(p) = A_1(p)/B_1(p)$$

такова, что $A_1(p)$ имеет нули на мнимой оси при $p = \pm j\omega_k$ и при $p=\infty$, то $Z_1(p)$ формируют путем составления обратной дроби:

$$Y_1(p) = 1/Z_1(p) = B_1(p)/A_1(p),$$

разлагая ее в той же последовательности, которая была дана ранее в п. 1—4. Однако следует иметь в виду, что разложение

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} = a_1 p + \frac{a_v}{p} + \sum \frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2} + Y_2(p)$$

---

* Здесь и далее предполагается, что коэффициенты a_k, b_k и b_0 вещественны и положительны.

физически осуществляется уже не в виде последовательно соединенных сопротивлений $a_1'p$, a_0'/p, $2a_kp/(p^2+\omega_k^2)$ и $Z_1(p)$, как это имело место для $Z(p)$, а в виде параллельного соединения ветвей с проводимостями: a_1p; a_0/p; $2a_kp/(p^2+\omega_k^2)$ (рис. 8.3, *а*).

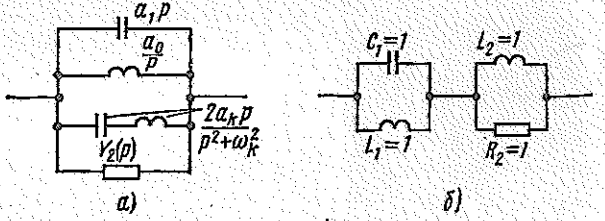


Рис. 8.3

Рассмотрим пример синтеза двухполюсника методом выделения простейших составляющих.

Пример 8.1. Требуется реализовать функцию

$$Z(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{p^3+p^2+2p}{p^3+p^2+p+1}.$$

Решение. Действуем в соответствии с изложенным методом.

1. Так как степень $A(p)$ равна степени $B(p)$, то $a_1'=0$, т. е. в составе двухполюсника нет последовательно включенной индуктивности.

2. $Z(p)$ не имеет полюса при $p=0$. Поэтому в состав искомого двухполюсника не входит последовательно соединенная емкость.

3. $Z(p)$ имеет два полюса, лежащих на мнимой оси. Действительно,

$$B(p)=(p^2+1)(p+1).$$

Следовательно,

$$p_{1,2}=\pm j.$$

Находим вычет $Z(p)$ при $p=+j$ (ему же будет равен вычет при $p=-j$, так как они оба действительны):

$$a_1=\operatorname*{Res}_{p=j}Z(p)=\frac{A(p)}{B'(p)}_{p=j}=\frac{p^3+p^2+2p}{3p^2+2p+1}_{p=j}=\frac{-j-1+2j}{-3+2j+1}=\frac{1}{2}.$$

Определяем величины параллельно соединенных L_1 и C_1:

$$C_1=\frac{1}{2a_1}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1;\quad L_1=\frac{1}{\omega_1^2C_1}=\frac{1}{1\cdot1}=1.$$

4. Из $Z(p)$ вычитаем

$$\frac{2a_kp}{p^2+\omega_k^2}=\frac{p}{p^2+1}$$

и находим функцию минимального реактивного сопротивления

$$Z_1(p)=\frac{p^3+p^2+2p}{p^3+p^2+p+1}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p+1}.$$

5. Так как структура $Z_1(p)$ подходит под описанную в п. 5б, то $Z_1(p)$ осуществляем в виде параллельного соединения $L_2=1$ и $R_2=1$.

Схема искомого двухполюсника изображена на рис. 8.3, *б*.

§ 8.3. СИНТЕЗ ДВУХПОЛЮСНИКОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ИЛИ ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБЬЮ

В § 1.12 говорилось о том, что входное сопротивление или входная проводимость двухполюсника, имеющего вид лестничной схемы, представляет собой непрерывную дробь. Это положено в основу второго метода синтеза двухполюсников по заданному $Z(p)$ или $Y(p)$, удовлетворяющему условию физической реализуемости. Последовательность решения такова.

1. Располагаем числитель и знаменатель

$$Z(p)=A(p)/B(p)$$

по убывающим (или возрастающим) степеням p.

2. Проверяем, не содержит ли $Z(p)$ полюса при $p=0$*. Если он имеется, то в продольной ветви искомой цепной схемы есть емкость a_0'. Величина емкости a_0' определяется так же, как и в § 8.2, путем нахождения вычета $Z(p)$ при $p=0$:

$$a_0'=\operatorname*{Res}_{p=0} Z(p)=[A(p)/B'(p)]_{p=0}.$$

3. Производим деление полинома $A(p)$ на полином $B(p)$, следя за тем, чтобы в процессе деления получались положительные (не отрицательные) слагаемые и чтобы результат деления можно было физически осуществить в виде лестничной схемы (чтобы не было слагаемых, содержащих p в степенях, отличных от 0, 1 и —1).

Следует заметить, что вариантов лестничных схем, с помощью которых можно осуществлять заданное $Z(p)$, в общем случае несколько, так как полиномы $A(p)$ и $B(p)$ перед делением могут быть расположены либо по возрастающим, либо по убывающим степеням p. Кроме того, вид схемы зависит от того, изменялся ли в процессе деления порядок расположения слагаемых по степеням p в числителе и знаменателе или не изменялся.

Вместе с тем необходимо иметь в виду, что не любые $Z(p)$, удовлетворяющие условиям физической осуществимости, могут быть реализованы в виде цепной схемы, т. е. возможны такие по структуре $Z(p)$, которые при любых способах деления $A(p)$ на $B(p)$ приводят к выражениям, физически нереализуемым в виде цепной схемы **.

---

* Выполнение п. 2 в общем случае не обязательно.

** Так, например, не могут быть реализованы рассматриваемым методом $Z(p)$, у которых есть комплексные нули и полюсы.

Приведем некоторые выкладки, поясняющие процесс упорядоченного последовательного нахождения элементов цепной схемы рис. 8.4. Продольные сопротивления в ней обозначены Z_1, Z_3, Z_5, Z_7, а поперечные проводимости — Y_2, Y_4, Y_6. Входная проводимость правой части схемы по отношению к зажимам ab.

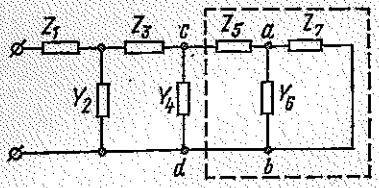


Рис. 8.4

$$Y_{ab} = Y_6 + 1/Z_7.$$

Входное сопротивление по отношению к тем же зажимам

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{1}{Y_6 + 1/Z_7}.$$

Входное сопротивление обведенной пунктиром части схемы по отношению к зажимам cd равно $Z_5 + Z_{ab}$, или

$$Z_{cd} = \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + \cfrac{1}{Y_6 + 1/Z_7}}}.$$

Продолжая процесс, находим входное сопротивление всей схемы:

$$Z = \frac{A}{B} = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + \cfrac{1}{Y_6 + 1/Z_7}}}}}.$$

Через A и B здесь обозначены полиномы по степеням p. При делении полинома A на полином B будет получено частное Z_1 и остаток, который обозначим $\frac{O_1}{B}$:

$$Z = Z_1 + O_1/B = Z_1 + \frac{1}{B/O_1}.$$

При делении B/O_1 будет получено частное Y_2 и остаток O_2/O_1:

$$B/O_1 = Y_2 + O_2/O_1 = Y_2 + \frac{1}{O_1/O_2},$$

Но

$$O_1/O_2 = Z_3 + O_3/O_2,$$

поэтому

$$B/O_1 = Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{O_2/O_3}}.$$

На основании изложенного процесс последовательного определения элементов Z_1, Y_2, Z_3, ... можно представить следующей

схемой:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline BZ_1 & Z_1 \\ \hline B & O_1 \\ \hline O_1Y_2 & Y_2 \\ \hline O_1 & O_2 \\ \hline O_2Z_3 & Z_3 \\ \hline O_2 & O_3 \\ \hline O_3Y_4 & Y_4 \\ \hline \ldots & \end{array}$$

Пример 8.2. Найти параметры лестничной схемы, для которой

$$Z(p)=\frac{p^4+9p^2+8}{p^3+3p}.$$

Решение. Сначала решим задачу, располагая перед делением полиномы по убывающим степеням p, а затем по возрастающим. Из дальнейшего будет видно, что в данном примере оказывается

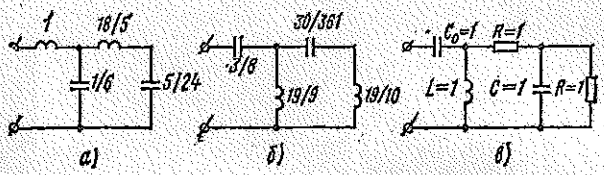


Рис. 8.5

возможным не изменять порядок расположения слагаемых в процессе деления.

При расположении слагаемых по убывающим степеням p имеем

$$\begin{array}{r|l} p^4+9p^2+8 & p^3+3p \\ \hline p^4+3p^2 & p \to Z_1 \\ \hline p^3+3p & 6p^2+8 \\ \hline p^3+\frac{8}{6}p & \frac{1}{6}\,p \to Y_2 \\ \hline 6p^2+8 & \frac{10}{6}\,p \\ \hline 6p^2 & \frac{36}{10}\,p \to Z_3 \\ \hline \frac{10}{6}\,p & 8 \\ \hline \frac{10}{6}\,p & \frac{5}{24}\,p \to Y_4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

На рис. 8.5, *а* изображена схема и даны ее параметры для случая, когда полиномы перед их делением были расположены по убывающим степеням p. Произведем теперь деление, расположив

полиномы по возрастающим степеням p:

$$
\begin{array}{r|l}
8+9p^2+p^4 & 3p+p^3 \\
\cline{2-2}
8+\frac{8}{3}p^2 & \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{p}\to Z_1 \\
\cline{1-1}
3p+p^3 & \frac{19}{3}p^3+p^4 \\
\cline{2-2}
3p+\frac{9}{19}p^3 & \frac{9}{19}\cdot\frac{1}{p}\to Y_2 \\
\cline{1-1}
\frac{19}{3}p^2+p^4 & \frac{10}{19}p^3 \\
\cline{2-2}
\frac{19}{3}p^3 & \frac{361}{30}\cdot\frac{1}{p}\to Z_3 \\
\cline{1-1}
\frac{10}{19}p^3 & p^4 \\
\cline{2-2}
\frac{10}{19}p^3 & \frac{10}{19}\cdot\frac{1}{p}\to Y_4 \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Схема и параметры для второго случая даны на рис. 8.5, *б*.

Пример 8.3. Реализовать в виде лестничной схемы двухполюсник

$$Z(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{p^3+3p^2+2p+2}{p(p^2+2p+2)}.$$

Решение. Так как $Z(p)$ имеет полюс при $p=0$, то цепную схему начнем с емкости (выполним п. 2)

$$a_0'=C_0^{-1}=\left[\frac{A(p)}{B'(p)}\right]_{p=0}=1.$$

Последовательно включенная с емкостью часть схемы имеет сопротивление

$$Z_1(p)=Z(p)-\frac{1}{p}=\frac{p^2+2p}{p^3+2p+2}.$$

Для формирования $Z_1(p)$ расположим слагаемые числителя и знаменателя по возрастающим степеням p и разделим числитель на знаменатель:

$$\frac{2p+p^2}{2+2p+p^2}=\frac{1}{\frac{2+2p+p^2}{2p+p^2}}=\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{1+\frac{1}{p+1}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{p^3+3p^2+2p+2}{p(p^2+2p+2)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{1+\frac{1}{p+1}}}.$$

Искомая цепная схема изображена на рис. 8.5, *в*.

Два способа реализации, рассмотренные в § 8.2 и 8.3, являются весьма распространенными, но не достаточно общими. Так,

они не могут быть применены, если $Z(p)$ содержит комплексно сопряженные нули и полюсы. Например, для такого относительно простого

$$Z(p)=\frac{p^2+p+2}{2p^2+p+1},$$

нули которого $p_{1,3}=-0{,}5\pm j\,0{,}5\sqrt{7}$, а полюсы $p_{2,4}=-0{,}25\pm \pm j\,0{,}25\sqrt{7}$, реализация рассмотренными способами невозможна.

Во всех подобных случаях применяют другие, более общие способы: метод Бруне, метод Ботта и Даффина, метод Дарлингтона и метод Мията.

§ 8.4. МЕТОД БРУНЕ

Основные этапы метода Бруне следующие.

1. Прежде всего проверяют, не содержит ли заданное $Z(p)$ [назовем его $Z_{зад}(p)$] полюсов на мнимой оси. Если они имеются, то из состава $Z_{зад}(p)$ выделяют соответствующие этим полюсам

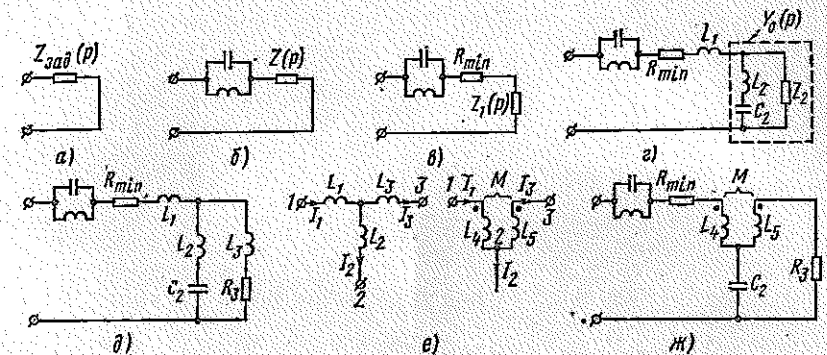


Рис. 8.6

один или несколько последовательно включенных параллельных резонансных контуров. В результате получают

$$Z_{зад}(p)-\sum\frac{2a_k p}{p^2+\omega_k^2}=Z(p). \qquad (8.1)$$

Этот этап соответствует переходу от рис. 8.6, *а* к рис. 8.6, *б*. Коэффициент a_k определим следующим образом:

$$a_k=\operatorname*{Res}_{p=j\omega_k} Z_{зад}(p).$$

$Z(p)$ не имеет полюсов на мнимой оси и представляет собой функцию минимального реактивного сопротивления.

2. Полагая $p=j\omega$, в $Z(j\omega)$ выделяют действительную часть, т. е. находят $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ и определяют частоту ω, при которой $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ минимальна. Эта частота может быть равна нулю, бес-

конечности или иметь некоторое конечное значение (в последнем случае ее будем называть ω_0). Подсчитываем также минимальную величину $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$, которую назовем $R_{\min}$.

3. Из $Z(p)$ вычитают $R_{\min}$ и находят $Z_1(p)$. Этой операции соответствует переход от рис. 8.6, *б* к рис. 8.6, *в*. Заметим, что степень числителя и знаменателя $Z_1(p)$ одинакова.

4. Если частота, при которой имеет место минимум $\mathrm{Re}\,Z_1(j\omega)$, равна нулю или бесконечности, то уже на этой стадии делается попытка реализовать $Z_1(p)$ лестничной схемой. Если же минимум $\mathrm{Re}\,Z_1(j\omega)$ имеет место при некоторой $\omega=\omega_0$, отличающейся от 0 и от ∞, то дальнейшую реализацию производят в соответствии с п. 5 — 12.

5. Подсчитывают $Z_1(p)$ при $p=j\omega_0$. Так как при частоте $p=j\omega_0$ действительная часть $Z(p)=R_{\min}$, то действительная часть разности $Z(j\omega_0)-R_{\min}$ равна нулю, т. е. $Z_1(j\omega_0)$ представляет собой чисто реактивное сопротивление:

$$Z_1(j\omega_0)=jX_1.$$

6. Возможны два случая. Первый, когда $X_1>0$, второй, когда $X_1<0$. Будем полагать $X_1=\omega_0 L_1>0$ (случай $X_1<0$ рассмотрен в п. 12). Тогда

$$L_1=X_1/\omega_0. \tag{8.2}$$

7. Составим разность $Z_1(p)-pL_1$ и приведем ее к общему знаменателю.

Так, например, если исходить из того, что

$$Z_1(p)=\frac{p^2+a_1p+a_0}{p^2+b_1p+b_0},$$

то проводимость оставшейся для реализации части двухполюсника

$$Y_0(p)=\frac{1}{Z_1(p)-pL_1}=\frac{p^2+b_1p+b_0}{-p^3L_1+p^2(1-b_1L_1)+p(a_1-b_0L_1)+a_0}. \tag{8.3}$$

Обращаем внимание на то, что в знаменателе $Y_0(p)$ имеется слагаемое $-p^3L_1$, которое при дальнейшей реализации приведет к появлению в схеме отрицательной индуктивности.

8. Поскольку при $p=j\omega_0$ $Z_1(p)-pL_1=0$, то $Y_0(p)=\infty$, т. е. $p=j\omega_0$ является полюсом $Y_0(p)$. Наличие полюса у $Y_0(p)$ позволяет представить оставшуюся часть двухполюсника ветвью из последовательно соединенных L_2 и C_2, настроенной в резонанс на частоту ω_0, и параллельно ей присоединенным двухполюсником с сопротивлением $Z_2(p)$ (рис. 8.6, *г*):

$$Y_0(p)=\frac{p/L_2}{p^2+\omega_0^2}+\frac{1}{Z_2(p)}. \tag{8.4}$$

9. Полагаем

$$Z_2(p)=N_2(p)/M_2(p).$$

Степени полиномов $N_2(p)$ и $M_2(p)$ должны быть такими, чтобы после приведения правой части (8.4) к общему знаменателю

степень полинома числителя левой части равнялась степени полинома числителя правой части, то же и в отношении степеней знаменателей. Так, если $Y_0(p)$ соответствует выражению (8.3), то

$$Z_2(p) = (c_1 p + c_0)/d_0.$$

Методом неопределенных коэффициентов можно найти c_1, c_0, d_0 и значение L_2. В рассматриваемом случае:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -L_1\omega_0^2; \quad c_0 = a_0; \quad d_0 = b_0, \\ L_2 &= \frac{L_1\omega_0^2}{b_0 - \omega_0^2}; \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 L_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

Разность $(b_0 - \omega_0^2) > 0$; это следует из того, что условие $X_1 > 0$ означает, что $\operatorname{Im}\left[\frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}\right] > 0$, а при $p = j\omega_0$ $\operatorname{Re} Z_1(p) = 0$.

10. Реализацию $Z_2(p)$ производят, как правило, лестничной схемой. Так, в рассматриваемом примере $Z_2(p)$ реализуют индуктивностью $L_3 = c_1/d_0 = -\omega_0^2 L_1/b_0$ и активным сопротивлением $R_3 = a_0/b_0$.

Важно обратить внимание на то, что L_3 оказалась отрицательной.

11. Так как физически осуществить отрицательную индуктивность невозможно, то следующий этап реализации в методе Бруне состоит в том, что три магнитно не связанные индуктивности L_1, L_2 и L_3 заменяют трансформатором, состоящим из индуктивностей L_4 и L_5, между которыми имеется магнитная связь (взаимная индуктивность M). Это действие является обратным по отношению к операции «развязывания» магнитно связанных цепей.

На рис. 8.6, *е* изображены два участка цепи: левый — до преобразования; правый — после преобразования. На рисунке показаны положительные направления токов в ветвях и указаны одноименные зажимы катушек. Напряжения между точками *1* и *2* для обоих участков цепи в силу их эквивалентности должны быть одинаковы, т. е.

$$pL_1 I_1 + pL_2 I_2 = pL_4 I_1 - pMI_3;$$
$$-pL_2 I_2 + pL_3 I_3 = pL_5 I_3 - pMI_1.$$

Подставляя в эти две строки $I_1 = I_2 + I_3$ и учитывая, что каждое из уравнений должно удовлетворяться при любых значениях токов, получаем

$$M = L_2; \; L_4 = L_1 + L_2; \; L_5 = L_2 + L_3, \qquad (8.6)$$

где L_4 и L_5 — положительны. Окончательная схема изображена на рис. 8.6, *ж*.

12. Если условиться сумму степеней полиномов в числителе и в знаменателе $Z_{зад}(p)$ называть порядком $Z_{зад}(p)$, то совокупность перечисленных операций («цикл Бруне») позволяет снизить порядок на 4. Потребность в каком-либо одном или нескольких

этапах в некотором конкретном примере может и не возникнуть (например, в этапах 1 или 3).

Для $Z_{зад}(p)$, порядок которых достаточно высок, может возникнуть потребность применить эту последовательность операций не один раз. В заключение заметим, что если X_1 в п. 5 окажется отрицательным, то L_1 будет отрицательно, а вычитание согласно п. 7 сопротивления $-p(L_1)$ сводится к прибавлению сопротивления $+p|L_1|$.

Некоторым недостатком метода Бруне является его относительная сложность и необходимость введения в схему идеального трансформатора с коэффициентом связи

$$K = M^2/(L_4 L_5) = 1.$$

Рассмотрим численный пример, в котором X_1 отрицательно.

Пример 8.4. Реализовать четырехполюсник, для которого

$$Z_{зад}(p) = \frac{p^2+p+2}{2p^2+p+1}.$$

Решение. Нули и полюсы этой функции являются комплексно сопряженными, и непосредственная проверка показывает, что реализация ее лестничной схемой или путем последовательного выделения простейших составляющих не удается.

1. Так как заданная функция не имеет полюсов на мнимой оси, то п. 1 выпадает.

2.
$$\operatorname{Re} Z_{зад}(j\omega) = \frac{(2-\omega^2)(1-2\omega^2)+\omega^2}{(1-2\omega^2)^2+\omega^2}.$$

Минимум $\operatorname{Re} Z_{зад}(j\omega)$, равный нулю, имеет место при $\omega_0^2 = 1$.

3. Так как $R_{min} = 0$, то п. 3 выпадает.

4. Также выпадает п. 4, ибо частота, при которой имеет место минимум $\operatorname{Re} Z_{зад}(j\omega)$, не равна нулю и не равна бесконечности.

5. $Z_1(p) \underset{p=j}{=} Z_{зад}(p) \underset{p=j}{=} -j = jX_1$, где $X_1 = -1$.

6. $L_1 = X_1/\omega_0 = -1$.

7. $Z_1(p) - pL_1 = \frac{p^2+p+2}{2p^2+p+1} + p = \frac{p^3+p^2+p+1}{p^2+0{,}5p+0{,}5}$;

$$Y_0(p) = \frac{1}{Z_1(p)-pL_1} = \frac{p^2+0{,}5p+0{,}5}{(p^2+1)(p+1)}.$$

8. $Y_0(p)$ имеет полюсы на мнимой оси, равные $\pm j$. Этим полюсам соответствует ветвь из последовательно соединенных L_2 и C_2, имеющая проводимость, равную $2a_k p/(p^2+\omega^2)$, где $\omega^2 = \omega_0^2 = 1$; $a_k = \operatorname{Res}\limits_{p=j} Y_0(p) = 0{,}25$; $L_2 = 1/(2a_k) = 2$; $C_2 = 1/(\omega_0^2 L_2) = 0{,}5$.

9. Находим проводимость оставшейся для реализации части схемы:

$$Y_2 = Y_0 - \frac{0{,}5p}{p^2+1} = \frac{0{,}5}{p+1};$$

Y_2 реализуем последовательным соединением $L_3=2$ Гн и $R_3=2$ Ом. Полученная схема с отрицательной индуктивностью изображена на рис. 8.7, *а*.

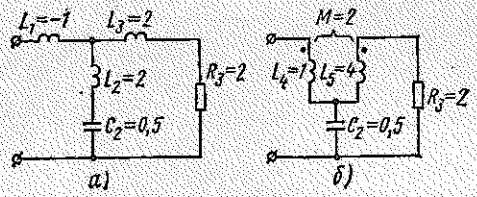


Рис. 8.7

10. Вместо L_1, L_2, L_3 вводим в схему идеальный трансформатор, у которого

$$M=L_2=2 \text{ Гн}; \quad L_4=L_1+L_2=-1+2=1 \text{ Гн}.$$
$$L_5=L_2+L_3=2+2=4 \text{ Гн}.$$

Окончательная схема изображена на рис. 8.7, *б*.

§ 8.5. СИНТЕЗ Г-ОБРАЗНЫХ *RC*- И *RL*-ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Г-образный четырехполюсник рис. 8.8 является простейшим делителем напряжения. Его передаточная функция по напряжению при холостом ходе

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)}. \tag{8.7}$$

В дальнейшем вместо $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ будем писать Z_1 и Z_2. Положим, что требуется реализовать с помощью Г-образного четырехполюсника передаточную функцию по напряжению при холостом ходе вида

$$U_2(p)/U_1(p)=N/M, \tag{8.8}$$

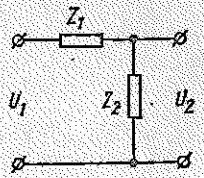


Рис. 8.8

удовлетворяющую условиям передаточной функции *RC*- или *RL*-четырехполюсников. Здесь N и M полиномы по степеням p. Разделив числитель и знаменатель (8.8) на некоторый полином $Q(p)=Q$ и приравняв результат правой части формулы (8.7), получим

$$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{N/Q}{M/Q}. \tag{8.9}$$

Полином Q имеет тот же порядок, что и полиномы N и M, а корни его чередуются с корнями уравнений $N=0$ и $M=0$*. Из уравнения (8.8) находим

$$Z_2=N/Q \quad \text{и} \quad Z_1=(M-N)/Q. \tag{8.10}$$

* Предполагается, что такой полином можно составить.

Далее производят реализацию двухполюсников Z_1 и Z_2 RL- или RC-схемами.

Пример 8.5. Передаточная функция некоторого четырехполюсника при холостом ходе

$$K_{U_x} = \frac{N}{M} = \frac{2p}{6p^2+9p+1}.$$

Требуется реализовать четырехполюсник в виде Г-образной схемы.

Решение. Нуль передаточной функции находится в начале координат. Полюсы передаточной функции: —0,121 и —1,379. Полином Q, на который следует разделить и числитель и знаменатель, должен иметь корни, чередующиеся с корнями N и M. В качестве такого полинома примем: а) $Q=6p+1$; б) $Q=p+1$; в) $Q=p+0{,}5$. Для каждого из этих трех случаев — своя схема реализации.

Если $Q=6p+1$, то

$$Z_2 = \frac{N}{Q} = \frac{2p}{6p+1} \quad \text{и} \quad Z_1 = \frac{M-N}{Q} = \frac{6p^2+7p+1}{6p+1} = p+1.$$

Соответствующая схема изображена на рис. 8.9, *а*.

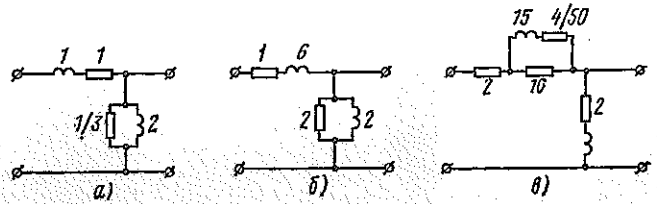


Рис. 8.9

Если $Q=p+1$, то

$$Z_2 = \frac{2p}{p+1} \quad \text{и} \quad Z_1 = 6p+1.$$

Схема представлена на рис. 8.9, *б*.

Если $Q=p+0{,}5$, то

$$Z_2 = \frac{2p}{p+0{,}5} \quad \text{и} \quad Z_1 = \frac{6p^2+7p+1}{p+0{,}5}.$$

Схема показана на рис. 8.9, *в*.

§ 8.6. СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ВЫДЕЛЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Известно выражение для передаточной функции четырехполюсника, нагруженного на согласованное активное сопротивление R. Известно также, что передаточная функция удовлетворяет условиям, рассмотренным в § 2.6. Требуется реализовать эту функцию в виде конкретной электрической схемы.

Идея, положенная в основу формирования схемы четырехполюсника, весьма близка к той, которая использовалась в § 8.2 при рассмотрении метода формирования схемы двухполюсника путем последовательного выделения простейших ее составляющих. Передаточную функцию четырехполюсника представляют в виде произведения передаточных функций четырехполюсника постоянного затухания, четырехполюсника или четырехполюсников чисто фазового сдвига и минимально фазового четырехполюсника.

Так как произведение передаточных функций четырехполюсников соответствует каскадному соединению этих четырехполюсников, то задача сводится к реализации перечисленных каскадно и согласованно нагруженных четырехполюсников.

Положим, что среди нулей передаточной функции четырехполюсника

$$K(p) = Q\frac{(p-p_1)(p-p_3)(p-p_5)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\dots(p-p_m)}$$

имеется несколько нулей, находящихся в правой полуплоскости. Пусть, например, в правой полуплоскости имеются один нуль $p_1 = a_1$ на вещественной оси и два комплексно сопряженных нуля:

$$p_3 = a_3 + jb_3 \quad \text{и} \quad p_5 = a_3 - jb_3.$$

Остальные нули и все полюсы $K(p)$ расположены в левой полуплоскости.

Чтобы представить $K(p)$ в виде произведения ряда простейших передаточных функций, умножим правую часть $K(p)$ на

$$\frac{p+p_1}{p+p_1}\,\frac{p+p_3}{p+p_3}\,\frac{p+p_5}{p+p_5}$$

и перепишем ее следующим образом:

$$K(p) = Q\frac{p-p_1}{p+p_1}\,\frac{(p-p_3)(p-p_5)}{(p+p_3)(p+p_5)}\,\frac{(p+p_1)(p+p_3)(p+p_5)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\dots(p-p_m)} = K_1(p)\,K_2(p)\,K_3(p)\,K_4(p),$$

где

$$K_1(p) = Q;$$

$$K_2(p) = \frac{p-p_1}{p+p_1};$$

$$K_3(p) = \frac{p-p_3}{p+p_3}\,\frac{p-p_5}{p+p_5};$$

$$K_4(p) = \frac{(p+p_1)(p+p_3)(p+p_5)\dots(p-p_n)}{(p-p_2)(p-p_4)(p-p_6)\dots(p-p_m)}.$$

Передаточная функция четырехполюсника выражена в виде произведения передаточных функций четырех четырехполюсников. Ей соответствуют четыре каскадно включенных четырехполюсника (рис. 8.10).

Передаточная функция первого четырехполюсника $K_1(p) = Q$ не зависит от частоты. Следовательно, первый четырехполюсник

является четырехполюсником постоянного затухания. Он реализуется по мостовой скрещенной схеме рис. 8.11, *а* и имеет входное сопротивление R при нагрузке четырехполюсника на согласованное сопротивление.



Рис. 8.10

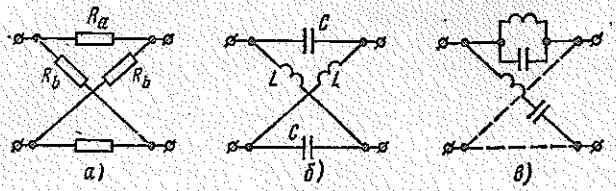


Рис. 8.11

Резистивные сопротивления R_a и R_b, из которых образована схема рис. 8.11, *а*, в соответствии с § 2.3 определяются следующим образом:

$$R_a = R\frac{1-e^{-g}}{1+e^{-g}}, \quad R_b = R\frac{1+e^{-g}}{1-e^{-g}},$$

где $g = \ln\frac{1}{Q}$.

Передаточная функция второго четырехполюсника при частоте ω

$$K_2(j\omega) = (j\omega - a_1)/(j\omega + a_1).$$

Модуль ее равен 1. Следовательно, второй четырехполюсник, учитывающий наличие нуля $p_1 = a_1$ в правой полуплоскости, является четырехполюсником чисто фазового сдвига и осуществляется по схеме рис. 8.11, *б*. Входное сопротивление его при нагрузке на согласованное сопротивление также равно R. В соответствии с § 2.3 $L = R^2C$.

Третий четырехполюсник учитывает наличие в правой полуплоскости пары комплексно сопряженных нулей p_3 и p_5. Его передаточная функция при частоте ω

$$K_3(j\omega) = \frac{j(\omega - b_3) - a_3}{j(\omega + b_3) + a_3} \cdot \frac{(\omega + b_3) - a_3}{j(\omega - b_3) + a_3}.$$

Модуль ее также равен 1 (не зависит от частоты). Осуществляется третий четырехполюсник по схеме чисто фазового сдвига (рис. 8.11, *в*).

В соответствии с § 2.3 L- и C-схемы связаны соотношением

$$L = R^2C.$$

Четвертый четырехполюсник не имеет нулей в правой полуплоскости и поэтому является минимально фазовым четырех-

полюсником. Он реализуется либо путем последовательного деления числителя $K_4(p)$ на знаменатель, подобно тому как это выполнялось для двухполюсника в § 8.2, либо в виде скрещенной мостовой схемы.

В приведенных рассуждениях предполагалось, что в правой полуплоскости у $K(p)$ имеется только один нуль на вещественной оси и только одна пара комплексно сопряженных нулей. Если нулей в правой полуплоскости будет больше, то весь процесс в принципе производится аналогичным образом, только количество каскадно включенных четырехполюсников чисто фазового сдвига увеличивается.

Кроме того, при реализации схемы может возникнуть необходимость не все Q отнести к четырехполюснику постоянного затухания, а часть его отнести к минимально фазовому четырехполюснику.

§ 8.7. РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ МИНИМАЛЬНОГО ФАЗОВОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. НОРМАЛИЗОВАННАЯ НАГРУЗКА

В § 8.6 говорилось, что четвертый четырехполюсник рис. 8.10 (минимально фазовый) может быть реализован в виде скрещенной мостовой схемы. Рассмотрим, как осуществляется эта реализация при нормализованной нагрузке. Нормализованной называют активную нагрузку $R=1$ Ом.

Если нагрузка равна не 1 Ом, а, например, m Ом, то все R, L, C, входящие в Z_1, изменяют таким образом, чтобы Z_1 увеличилось в m раз. По формуле (2.4) пересчитывают Z_2.

Согласно § 2.3 передаточная функция по напряжению при $R=1$ Ом

$$K_U=\frac{1-Z_1}{1+Z_1}=K_4(j\omega).$$

В дальнейшем вместо Z_1 будем писать Z_a и вместо Z_2-Z_b. Полагая, что $K_4=K_U$ является известной функцией p, из последней строки найдем

$$Z_a=\frac{1-K_U}{1+K_U}. \qquad (8.11)$$

При реализации четвертого четырехполюсника в виде мостовой скрещенной схемы сначала следует оценить сложность структуры K_U. Если структура K_U относительно простая, например подходит под одну из структур формул (8.12), то четырехполюсник целесообразно осуществить в виде одной скрещенной мостовой схемы, найдя Z_a по формуле (8.11) и реализуя его как обычный двухполюсник, а затем определить $Z_b=1/Z_a$. Если же функция K_U четвертого четырехполюсника имеет более сложную структуру, то осуществление ее с помощью одного четырехполюсника нецелесообразно. В этом случае следует K_U представить в виде

произведения более простых передаточных функций, например

$$K_U = K_{U1} K_{U2} K_{U3} \dots,$$

и четвертый четырехполюсник заменить каскадным соединением нескольких более простых согласованно нагруженных минимально фазовых четырехполюсников.

Разложение K_U на множители целесообразно потому, что реализация сложной K_U в виде нескольких четырехполюсников приводит, как правило, к более простым схемам, меньшему суммарному количеству элементов и к меньшим суммарным значениям индуктивностей и емкостей, чем если бы это же K_U реализовалось в виде одного четырехполюсника.

Наиболее типичными простейшими передаточными функциями являются следующие:

$$\left.\begin{aligned}
&K_{U1} = \frac{Q^{\mathrm{I}}}{p+a}, \text{ причем } Q^{\mathrm{I}} \leqslant a;\\
&K_{U2} = Q^{\mathrm{II}} \frac{p+c}{p+a}, \text{ причем } Q^{\mathrm{II}} \leqslant \frac{a}{c} \text{ или } Q^{\mathrm{II}} \leqslant 1;\\
&K_{U3} = Q^{\mathrm{III}} \frac{1}{p^2+ap+b}, \text{ причем } Q^{\mathrm{III}} \leqslant b;\\
&K_{U4} = Q^{\mathrm{IV}} \frac{p+c}{p^2+ab+b}; \quad K_{U5} = Q^{\mathrm{V}} \frac{p^2+cp+d}{p^2+ap+b}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.12)$$

Здесь $Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{V}}$ — некоторые численные коэффициенты (множители), влияющие на усиление четырехполюсника. На значение $Q^{\mathrm{I}} - Q^{\mathrm{V}}$ накладываются определенные ограничения, вытекающие из того, что передаточные функции должны быть положительными вещественными функциями. Эти ограничения для Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} записаны ранее. Ограничения на численные значения Q^{IV} и Q^{V} в общем виде достаточно сложны и здесь не приводятся.

Для всех минимально фазовых четырехполюсников коэффициенты a, b, c, d должны быть положительными. Структуры K_{U3}, K_{U4} и K_{U5} могут быть в свою очередь заменены произведениями, составленными из K_{U1} и K_{U2}.

Пример 8.6. Требуется реализовать при нормализованной нагрузке передаточную функцию

$$K_U = Q \frac{p+2}{(p+3)(p+4)}.$$

Решение. Несмотря на относительно простое выражение для K_U, непосредственная реализация в виде одного мостового четырехполюсника привела бы к достаточно сложной схеме, поэтому представим K_U в виде произведения передаточных функций двух четырехполюсников, например, в таком виде:

$$K_U = K_{U1} K_{U2},$$

где

$$K_{U1} = \frac{Q^{\mathrm{I}}}{p+4} \quad \text{и} \quad K_{U2} = Q^{\mathrm{II}} \frac{p+2}{p+3}.$$

Реализуем сначала первый четырехполюсник. По формуле (8.11) находим

$$Z_{a1}=\frac{1-K_{U1}}{1+K_{U1}}=\frac{p+(4-Q^{\mathrm{I}})}{p+(4+Q^{\mathrm{I}})}.$$

Чтобы K_{U1} была положительной вещественной функцией, в соответствии с формулой (8.12) необходимо удовлетворить $Q^{\mathrm{I}}\leqslant a$. Принимаем $Q^{\mathrm{I}}=4$, тогда $Z_{a1}=p/(p+8)$. Сопротивлению вида $\frac{a_k p}{p+m_k}$ соответствуют параллельно соединенные активное сопротивление $R_k=a$ и индуктивность $L_k=R_k/m_k$. Поэтому Z_{a1} образовано параллельным соединением $R_{a1}=1$ Ом и $L_{a1}=1/8$ Гн. Сопротивление мостовой схемы при нормализованной нагрузке

$$Z_{b1}=\frac{1}{Z_{a1}}=\frac{p+8}{p}=1+\frac{1}{p\cdot 1/8}.$$

Оно образовано последовательным соединением активного сопротивления $R_{b1}=1$ Ом и емкости $C_{b1}=1/8$ Ф.

Реализуем второй четырехполюсник

$$Z_{a2}=\frac{1-K_{U2}}{1+K_{U2}}=\frac{p(1-Q^{\mathrm{II}})+(3-2Q^{\mathrm{II}})}{p(1+Q^{\mathrm{II}})+(3+2Q^{\mathrm{II}})}.$$

Чтобы K_{U2} была положительной вещественной функцией [см. формулы (8.12)], необходимо иметь $Q^{\mathrm{II}}\leqslant 3/2$ или $Q^{\mathrm{II}}\leqslant 1$. Принимаем $Q^{\mathrm{II}}=1$. Тогда

$$Z_{a2}=1/(2p+5).$$

Другими словами, Z_{a2} образовано параллельным соединением емкости $C_{a2}=2\Phi$ и активного сопротивления $R_{a2}=1/5$ Ом.

$$Z_{b2}=1/Z_{a2}=2p+5,$$

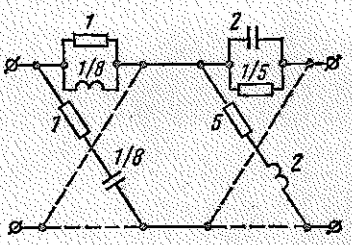


Рис. 8.12

т. е. Z_{b2} образовано последовательным соединением $R_{b2}=5$ Ом и индуктивности $L_{b2}=2$ Гн. Схема четырехполюсника изображена на рис. 8.12.

Результирующее Q минимально-фазовой цепи равно в данном случае $Q^{\mathrm{I}}Q^{\mathrm{II}}=4\cdot 1=4$.

§ 8.8. РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С ПОМОЩЬЮ СПОСОБА РАЗДЕЛЕНИЯ

Положим, что требуется реализовать четырехполюсник по заданной его передаточной функции, например, по функции

$$Z_{12}=N/M.$$

Допустим, что степени полиномов N и M достаточно высоки (например, 3, 4, 5), а нули передаточной функции расположены

на действительной отрицательной оси. В этом случае реализация передаточной функции одним четырехполюсником довольно трудна, так как связана со сложными громоздкими и длительными вычислениями. Чтобы избежать этого, сложные передаточные функции реализуют двумя каскадно включенными четырехполюсниками A и B (рис. 8.13). Если собственные и взаимные сопротивления четырехполюсника A обозначить через Z_{11a}, Z_{22a} и Z_{12a}, а четырехполюсника B — через Z_{11b}, Z_{22b}, Z_{12b}, то, записав систему (8.1) § 8.4 для обоих четырехполюсников и выразив входной ток первого четырехполюсника I_{1a} через выходное напряжение второго четырехполюсника U_{2b} и затем поделив U_{2b}/I_{1a}, найдем взаимное сопротивление двух каскадно соединенных четырехполюсников:

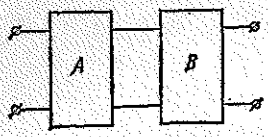


Рис. 8.13

$$Z_{12}=\frac{Z_{12a}Z_{12b}}{Z_{11b}+Z_{22a}}. \tag{8.13}$$

Числитель N заданной передаточной функции представим в виде произведения двух полиномов N_a и N_b:

$$Z_{12}=N_aN_b/M. \tag{8.14}$$

Причем, какую часть N отнести к N_a и какую к N_b, решаем произвольно. Обычно степени N_a и N_b выбирают либо одинаковыми, либо отличающимися на единицу.

Разделим и числитель и знаменатель (8.14) на произведение двух других полиномов M_aM_b. Полиномы M_a и M_b также выбирают в известной мере произвольно, но на них накладываются некоторые ограничения:

1) корни уравнений $M_a=0$ и $M_b=0$ должны чередоваться с корнями $M=0$ и не совпадать с ними;

2) степень произведения M_aM_b должна быть либо равна, либо на единицу меньше степени полинома M.

Будем иметь

$$Z_{12}=\frac{N_a/M_a\cdot N_b/M_b}{M/(M_aM_b)}. \tag{8.15}$$

Сопоставляя с (8.13), можно записать

$$Z_{12a}=N_a/M_a,\quad Z_{12b}=N_b/M_b; \tag{8.16}$$

$$Z_{11b}+Z_{22a}=M/(M_aM_b). \tag{8.17}$$

Чтобы реализовать четырехполюсник A и четырехполюсник B, надо знать, чему равны Z_{12a} и Z_{22a}, а также Z_{12b} и Z_{11b}. Однако Z_{12a} и Z_{12b} уже найдены. Что касается Z_{11b} и Z_{22a}, то известна лишь их сумма. Чтобы найти каждое из них в отдельности, $M/(M_aM_b)$ разлагают на простые дроби вида

$$M/(M_aM_b)=p+a_0+\frac{a_1}{p+p_1}+\frac{a_2}{p+p_2}+\dots$$

и слагаемые данного разложения, которые имеют полюсы, соответствующие полюсам Z_{12a}, относят к Z_{22a}, а слагаемые, которые имеют полюсы, соответствующие полюсам Z_{12b}, относят к Z_{11b}. Такое распределение слагаемых основано на том, что полюсы функций Z_{11}, Z_{12} и Z_{22} у одного и того же четырехполюсника одинаковы.

Если Z_{12a} и Z_{12b} будут иметь слагаемые с одинаковыми полюсами, то слагаемые разложения с такими полюсами следует произвольно разделить между Z_{11b} и Z_{22a}.

Если в состав суммы $Z_{11b}+Z_{22a}$ будет входить некоторое постоянное не зависящее от p слагаемое (a_0), то его следует произвольно разделить на два положительных слагаемых и одно из них отнести к Z_{11a}, а другое к Z_{22a}.

§ 8.9. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОНТУРОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ТЕЛЕФОННОЙ И ТЕЛЕГРАФНОЙ СВЯЗИ

В устройствах связи передача сигналов к приемнику производится обычно по воздушным или кабельным линиям. В диапазоне передаваемых частот волновое сопротивление самих линий и остальных составляющих передающего тракта (трансформаторов, фильтров) близко к активному.

Нагрузочное сопротивление также примем активным и равным волновому сопротивлению линии.

В линиях связи происходят и амплитудные, и фазовые искажения сигналов. Чтобы выправить искажения, внесенные передающим трактом, в конце линии между линией и приемником включают корректирующие контуры.

Эти контуры согласовывают по входному сопротивлению с линией и с нагрузкой. Поэтому результирующее затухание линии и контура $a_р$ равно сумме затуханий линии $a_л$ и контура $a_к$:

$$a_р = a_л + a_к.$$

Аналогично, результирующая фазовая характеристика линии и контура $b_р$ равна сумме фазовых характеристик линии $b_л$ и контура $b_к$:

$$b_р = b_л + b_к.$$

Корректирующие контуры подразделяют на амплитудные и фазовые. Амплитудные производят коррекцию по амплитуде, фазовые — по фазе.

Включение амплитудного контура приводит к тому, что в определенном диапазоне частот затухание на всех частотах этого диапазона становится одинаковым, т. е. $a_р$ становится не зависящим от частоты.

Действие амплитудного контура поясняется рис. 8.14, *а*: *1* — зависимость затухания самой линии от частоты; *2* — зависимость затухания корректирующего контура от частоты; *3* — результирующее затухание линии и контура.

Результирующее затухание не зависит от частоты (прямая *3* расположена параллельно оси абсцисс). Так как при включении амплитудного контура результирующее затухание возрастает, то для компенсации его на конце линии при необходимости включают линейный усилитель.

Принцип фазовой коррекции поясняется рис. 8.14, *б*: *1* — фазовая характеристика линии; *2* — фазовая характеристика корректора; *3* — результирующая фазовая характеристика.

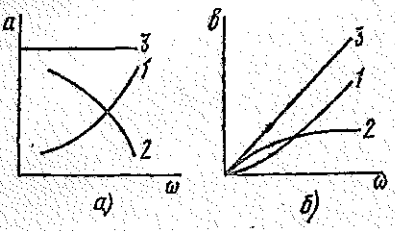


Рис. 8.14

Для фазовой коррекции необходимо, чтобы результирующая фазовая характеристика линейно зависела от частоты.

В линиях связи часто производят либо только амплитудную, либо только фазовую коррекцию, поэтому методику расчета амплитудных и фазовых корректоров рассмотрим отдельно.

При необходимости произвести и амплитудную и фазовую коррекции последовательно включают амплитудный и фазовый корректоры, учитывая при расчете последнего и те фазовые искажения, которые вносит амплитудный контур.

Методика расчета корректоров разработана Цобелем и получила дальнейшее развитие в работах С. Н. Евланова [17], П. К. Акулышина [1], Н. Н. Гарновского и других авторов.

§ 8.10. АМПЛИТУДНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ КОНТУРЫ

Амплитудную коррекцию осуществляют часто с помощью Г-образного четырехполюсника (рис. 8.15), поскольку он содержит меньше элементов, чем другие возможные схемы корректоров. Сопротивления Z_{11} и Z_{21} этой схемы выбирают такими, чтобы входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов *1—1* при нагрузке его чисто резистивным сопротивлением R оказывалось также равным R. Выясним, какое соотношение должно выполняться между сопротивлениями Z_{11}, Z_{21} и R, чтобы входное сопротивление было равно R:

$$\frac{Z_{11}R}{Z_{11}+R}+\frac{Z_{21}R}{Z_{21}+R}=R;$$

отсюда

$$Z_{11}Z_{21}=R^2, \qquad (8.18)$$

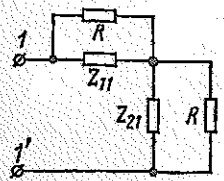


Рис. 8.15

т.е. Z_{11} и Z_{21} — взаимно обратные сопротивления.

Выведем формулу для определения затухания схемы четырехполюсника (рис. 8.15). По определению

$$g_к=\frac{1}{2}\ln\frac{U_1I_1}{U_2I_2}.$$

Но

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{U}_2/Z_{21},$$

а

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 \frac{RZ_{11}}{R+Z_{11}} + \dot{U}_2 \frac{RZ_{11}}{Z_{21}(R+Z_{11})}.$$

После преобразований с учетом (8.18) имеем

$$\frac{\dot{U}_1 I_1}{\dot{U}_2 I_2} = \left(\frac{\sqrt{Z_{21}} + \sqrt{Z_{11}}}{\sqrt{Z_{21}}}\right)^2.$$

Таким образом,

$$g_к = a_к + jb_к = \ln(1 + Z_{11}/R),$$

или

$$e^{g_к} = 1 + Z_{11}/R. \qquad (8.19)$$

В зависимости от того, из каких элементов (R, L, C) составлено Z_{11} и как они соединены друг с другом, затухание $a_к$ различным образом зависит от частоты ω. На рис. 8.16, *а—г*

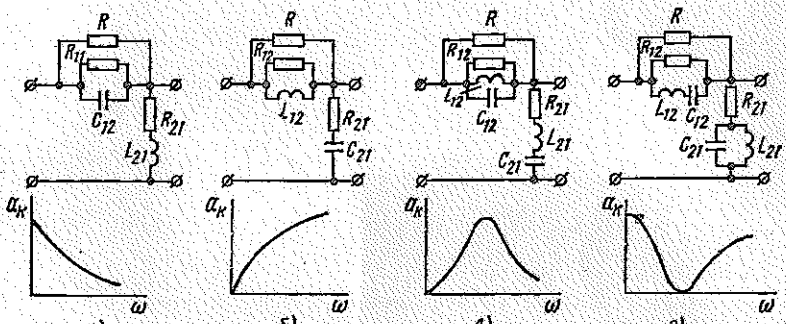


Рис. 8.16

в качестве примера изображены четыре простейшие Г-образные схемы с различными Z_{11} и Z_{21}, применяемые для амплитудной коррекции, и соответствующие им зависимости $a_к = f(\omega)$.

Последовательность расчета контура такова.

1. Выбрав величину результирующего затухания и зная зависимость затухания линии $a_л$ от частоты, находим (см. § 8.9), какой зависимостью $a_к = f(\omega)$ должен обладать амплитудный корректирующий контур.

2. Сопоставляют полученную кривую $a_к = f(\omega)$ с типовыми кривыми $a_к = f(\omega)$ (часть типовых кривых изображена на рис. 8.16; более полный набор типовых кривых читатель найдет в [1] или [17]. Выбирают ту из типовых кривых, которая по форме близка к требуемой.

Так как каждой типовой кривой соответствует вполне определенная схема контура, то, выбрав подходящую типовую кривую, одновременно производят и выбор схемы контура.

3. Используя несколько раз формулу (8.19), составляют уравнения для определения параметров схемы и совместно решают их.

В качестве примера рассмотрим последовательность определения параметров одной из схем рис. 8.16, например схемы рис. 8.16, *а*. Полагаем известными $a=f(\omega)$ и значение R.

В этой схеме неизвестны R_{11} и C_{12} (R_{21} и L_{21} определим по R_{11} и C_{12}, чтобы Z_{11} и Z_{21} были взаимно обратны). На кривой $a=f(\omega)$ следует выбрать столько точек, сколько параметров схемы неизвестно. Для схемы рис. 8.16, *а* неизвестно всего два параметра R_{11} и C_{12}, поэтому на кривой $a=f(\omega)$ выберем две точки, например $\omega_1=0$; $a(0)$ и $\omega=\omega_2$; $a(\omega_2)$.

Для этой схемы $1+\frac{Z_{11}}{R}=1+\frac{R_{11}/R}{1+j\omega R_{11}C_{12}}$.

Из (8.14) следует, что $\left|1+\frac{Z_{11}}{R}\right|^2=e^{2a(\omega)}$. Поэтому

$$\frac{(1+R_{11}/R)^2+(\omega R_{11}C_{12})^2}{1+(\omega R_{11}C_{12})^2}=e^{2a(\omega)}. \qquad (8.20)$$

При $\omega=0$ из (8.20) следует, что $R_{11}=R\,[e^{a(0)}-1]$.

Из уравнения (8.20) при $\omega=\omega_2$ определим $\omega_2 R_{11}C_{12}$ и затем

$$C_{12}=\frac{1}{\omega_2 R\,[e^{a(0)}-1]}\sqrt{\frac{e^{2a(0)}-e^{2a(\omega_2)}}{e^{2a(\omega_2)}-1}}.$$

Из условия $Z_{11}Z_{21}=R^2$ находим $R_{21}=R^2/R_{11}$ и $L_{21}=R^2C_{12}$.

§ 8.11. ФАЗОВЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ КОНТУРЫ

Фазовую коррекцию осуществляют чаще всего путем использования симметричной скрещенной мостовой схемы (рис. 8.17), собранной из чисто реактивных элементов (либо путем применения схемы перекрытого T-моста, рис. 8.18).

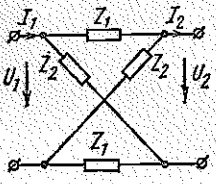


Рис. 8.17

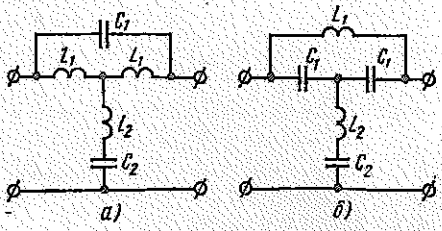


Рис. 8.18

Если продольное сопротивление схемы рис. 8.17 обозначить Z_1, а диагональное Z_2, то при нагрузке схемы на чисто активное сопротивление R входное сопротивление всей схемы будет чисто активным и равным R [если сопротивления Z_1 и Z_2 взаимно обратны друг другу, т. е. если $Z_1Z_2=R^2$ (доказательство см. в § 2.3)].

Таким образом, входное сопротивление фазового корректирующего контура так же, как и амплитудного контура, не зависит от частоты. Выведем формулу для определения постоянной передачи схемы, приведенной на рис. 8.17.

По определению

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 I_1}{\dot{U}_2 I_2},$$

но (см. § 2.3)

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \dot{U}_2 + \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} I_2$$

и

$$I_1 = \frac{2}{Z_2 - Z_1} \dot{U}_2 + \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} I_2.$$

После подстановки выражений для $\dot{U}_1$ и I_1 в правую часть формулы для g и преобразований с учетом соотношения $Z_1 Z_2 = R^2$ получим

$$g = \ln [2R + (Z_1 + Z_2)]$$

или

$$e^g = (\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2})^2. \qquad (8.21)$$

Принято формулу для постоянной передачи g записывать с использованием гиперболического тангенса половинного аргумента. С этой целью используем соотношения

$$\text{th} \frac{g}{2} = \frac{\text{ch} g - 1}{\text{sh} g}; \quad \text{ch} g = \frac{e^g + e^{-g}}{2}; \quad \text{sh} g = \frac{e^g - e^{-g}}{2}$$

и подставим в них (8.21). После преобразований получаем

$$\text{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \qquad (8.22)$$

Поскольку затухание фазового контура на всех частотах должно быть равно нулю, то $g = a + jb$ должно быть чисто мнимым числом. Но для того чтобы g было мнимым, необходимо, чтобы Z_1 и Z_2 были чисто реактивными сопротивлениями. Действительно, если

$$Z_1 = \pm jX_1,$$

а

$$Z_2 = R^2/Z_1,$$

то из (8.22) $\text{th} \frac{g}{2} = \text{th}\left(\frac{a}{2} + j\frac{b}{2}\right) = \pm j\frac{X_1}{R}$.

Согласно последнему выражению имеем:

$$a = 0 \quad \text{и} \quad \text{tg} \frac{b}{2} = \pm \frac{X_1}{R}. \qquad (8.23)$$

Знак плюс перед X_1 в формуле (8.23) ставят в том случае, если X_1 является индуктивным на всех или только на низких частотах; знак минус — если X_1 носит емкостный характер на всех или только на низких частотах. Когда двухполюсник Z_1

имеет путь для постоянного тока, то при $f=0$ $X_1=0$, следовательно, и $b_{f=0}=0$. Когда при $f=0$ $X_1=-\infty$, то $b_{f=0}=-\pi$.

Общий вид схемы фазовой коррекции изображен на рис. 8.19. Если число последовательно включенных в продольное плечо элементов обозначить через n, то сопротивление продольного плеча можно записать следующим образом:

$$Z_1 = j\omega L' \frac{(\omega_3^2-\omega^2)(\omega_4^2-\omega^2)\dots(\omega_{n-1}^2-\omega^2)}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_3^2-\omega^2)\dots(\omega_{n-2}^2-\omega^2)}, \qquad (8.24)$$

где ω_1, ω_2, ... — резонансные частоты 1-го, 2-го, ... контуров; L' — некоторый постоянный коэффициент.

Подставим (8.24) в (8.23):

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\omega L'}{R} \frac{(\omega_2^2-\omega^2)(\omega_4^2-\omega^2)\dots(\omega_{n-1}^2-\omega^2)}{(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_3^2-\omega^2)\dots(\omega_{n-2}^2-\omega^2)}. \qquad (8.25)$$

Придавая ω различные значения, по формуле (8.25) можно построить зависимость $b=f(\omega)$. Эта зависимость показана на

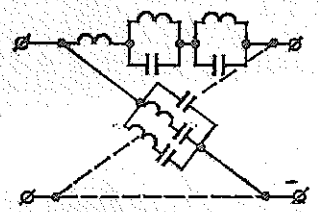


Рис. 8.19

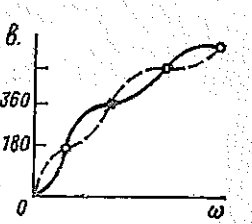


Рис. 8.20

рис. 8.20. При $\omega=0$ $\operatorname{tg} b/2=0$, следовательно, $b=0$; при $\omega=\omega_1$ $\operatorname{tg} b/2=\infty$, следовательно, $b=\pi=180°$; при $\omega=\omega_2$ $\operatorname{tg} b/2=0$, следовательно, $b=2\pi$ и т. д.

С ростом ω увеличивается b. В зависимости от соотношения между параметрами увеличение b может происходить либо по сплошной, либо по пунктирной кривой.

Последовательность расчета фазового контура такова.

1. В соответствии с положениями, высказанными в § 8.9, определяем, какой фазовой характеристикой $b=f(\omega)$ в необходимом диапазоне частот должен обладать корректирующий контур.

2. Выбираем число элементов, включенных в последовательную ветвь контура.

3. Приводим формулу (8.25) к виду

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\alpha_1 f+\alpha_3 f^3+\alpha_5 f^5+\dots}{\beta_0+\beta_2 f^2+\beta_4 f^4+\dots}. \qquad (8.26)$$

4. Выбираем на фазовой характеристике п. 1 (например, на характеристике рис. 8.21) в требующемся диапазоне частот столько точек, сколько коэффициентов α_1, α_2, ..., β_0, β_2, ... входит в уравнение (8.26).

5. Подставляем координаты этих точек (т. е. значения b и f) в уравнение (8.26). Получаем систему уравнений, решая которую определяем коэффициенты α_1, α_3, ..., β_0, β_2, ..., а по ним находим значения индуктивностей и емкостей схемы.

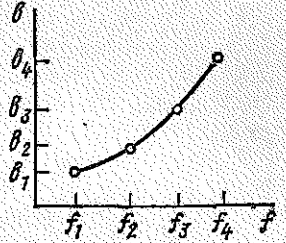


Рис. 8.21

Скрещенные схемы (см. рис. 8.19) имеют два недостатка: в них относительно велико число элементов и вход и выход не имеют общего зажима. Эти недостатки отсутствуют в схеме фазовой коррекции в виде перекрытого T-моста (см. рис. 8.18).

Отметим, что частотную зависимость корректирующего звена иногда задают не в виде зависимости $b = f(\omega)$, а как зависимость группового времени запаздывания от частоты, т. е. в виде

$$t_{зап} = db/d\omega = f(\omega).$$

§ 8.12. ПОНЯТИЕ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ СИНТЕЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В технике связи, автоматике, радиотехнике, а также при электромоделировании различных процессов часто возникает необходимость в аппроксимации частотных характеристик. Под аппроксимацией понимают описание заданной (обычно в виде графика) частотной характеристики некоторым аналитическим выражением, допускающим физическую реализацию.

Можно сказать и несколько иначе: аппроксимация — это замена в определенном частотном диапазоне одной кривой (аппроксимируемой) некоторой другой (аппроксимирующей), причем такой, которая точно совпадает с заданной в некотором ограниченном числе точек, отклоняется от нее в допустимых пределах вне этих точек и в то же время дает реализуемую функцию.

Предполагается, что аппроксимируемая кривая по тем или иным соображениям известна.

Так, если речь идет о расчете корректирующего контура для улучшения частотных характеристик канала связи, то аппроксимируемой кривой является зависимость затухания или фазы корректора от частоты.

Если речь идет о расчете фильтра, то за аппроксимируемую кривую $f(\omega)$ обычно принимают для зоны прозрачности либо кривую постоянного активного входного сопротивления фильтра, равного его волновому сопротивлению, либо зависимость от частоты квадрата модуля его передаточной функции.

Например, идеальным низкочастотным фильтром является фильтр, у которого волновое сопротивление в зоне прозрачности $(0 - \omega_c)$ остается неизменным (постоянным) и резко уменьшается в зоне затухания при $\omega > \omega_c$ (рис. 8.22).

Таким образом, для низкочастотного фильтра надо аппроксимировать отрезок прямой линии, параллельной оси абсцисс, некоторым аналитическим выражением, допускающим физическую реализацию.

Известные методы аппроксимации можно разделить на два основных типа:

1) аппроксимация, в которой максимальные по модулю отклонения между ординатами аппроксимирующей и аппроксимируемой кривых строго не регламентированы;

2) аппроксимация, в которой максимальные по модулю отклонения между ординатами упомянутых кривых не превышают наперед заданной величины.

Аппроксимацию второго типа можно осуществлять различными методами. Из них наиболее распространенными являются гладкая аппроксимация и равноволновая аппроксимация.

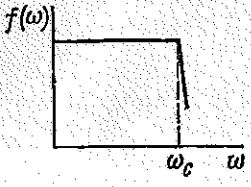


Рис. 8.22

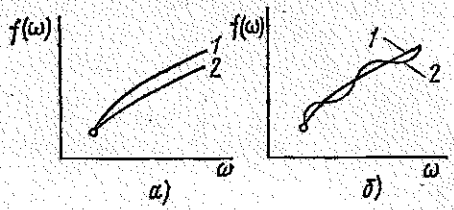


Рис. 8.23

Принцип гладкой аппроксимации поясняет рис. 8.23, *а*: *1* — аппроксимируемая кривая; *2* — аппроксимирующая гладкая кривая. Кривая *2* может быть расположена и иначе по отношению к кривой *1*; однако существенно, что разность ординат кривых *1* и *2*, выражающая собой ошибку аппроксимации, неравномерно распределена в диапазоне аппроксимации.

Принцип равноволновой аппроксимации поясняется рис. 8.23, *б*, кривая *1* этого рисунка повторяет кривую *1* рис. 8.23, *а* и является заданной.

Волнообразная кривая *2* колеблется около кривой *1* таким образом, что абсолютные величины отклонений между кривыми *1* и *2* одинаковы.

В теории аппроксимации пользуются нормализованными величинами. Так, вместо Z_c пользуются величиной $\alpha = Z_c/R$, где R — безразмерная величина. Вместо частоты ω пользуются нормализованной частотой x. Для низкочастотного фильтра $x = \omega/\omega_c$ и для высокочастотного $x = \omega_c/\omega$. Здесь ω_c — безразмерная величина, равная частоте среза фильтра.

Таким образом, вместо зависимости $Z_c = f(\omega)$ имеем $\alpha = f(x)$, а вместо $g = f(\omega)$ будет $a = f(x)$.

Типичная зависимость $\alpha = f(x)$ для низкочастотного фильтра изображена на рис. 8.24.

Для аналитического описания характеристик $\alpha = f(\omega)$ [или $a = f(x)$] применяют полиномы П. Л. Чебышева [27], которые

дают наилучшее приближение. Полиномы Чебышева (обозначают буквой T) могут быть записаны либо в тригонометрической, либо в алгебраической форме.

В тригонометрической форме

$$T_n(x) = \cos n \arccos x,$$

где n — порядок полинома (n — может принимать целочисленные значения: 1, 2, 3, ...).

Приняв $\arccos x = \theta$ (т. е. $x = \cos\theta$), раскрыв $\cos n\theta$ через

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \ldots$$

и заменив $\sin\theta$ на $\sqrt{1-x^2}$, получим алгебраическую форму записи полиномов Чебышева:

$$T_n(x) = x^n + C_n^2 x^{n-2}(x^2-1) + C_n^4 x^{n-4}(x-1)^2 + \ldots, \qquad (8.27)$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

$T_n(x)$ в интервале значений от —1 до 1 изменяется по колебательному закону от —1 до 1, а за этим интервалом монотонно возрастает или убывает.

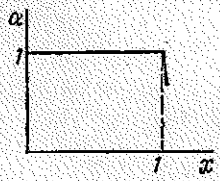


Рис. 8.24

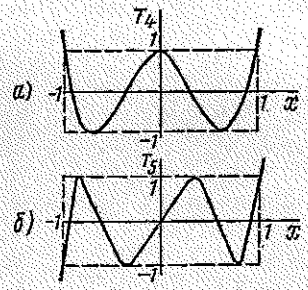


Рис. 8.25

В качестве примера на рис. 8.25 изображены кривые $T_4(x)$ и $T_5(x)$:

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Кривая $T_n(x)$ проходит через нуль при $x = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, и принимает экстремальные значения ± 1 в диапазоне изменений x от —1 до 1 при $x = \cos\frac{k\pi}{n}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

Для описания характеристик $\alpha = f(x)$ используют выражение вида $\frac{1}{1+pT_n(x)} = f(x)$, где p — некоторое число, меньше 1 *.

* Не имеет ничего общего с оператором p.

В качестве примера на рис. 8.26 показана кривая $\frac{1}{1+pT_5(x)}=f(x)$. Так как экстремальные значения $T_n(x)$ в интервале изменений x от 0 до 1 равны ± 1, то максимальное значение функции $f(x)$ равно $1/(1-p)$, а минимальное $1/(1+p)$. Если максимальное отклонение функции $f(x)$ от аппроксимируемой функции, т. е. от 1, обозначить через δ, то $\delta=1/(1-p)-1$, отсюда $p=\delta/(1+\delta)$.

Таким образом, величина коэффициента p, на который умножается $T_n(x)$ при составлении дроби $\frac{1}{1+pT_n(x)}$, определяется по максимально допустимому отклонению δ.

Как упоминалось, аппроксимацию осуществляют либо по отношению к характеристическому сопротивлению, либо по отношению к квадрату модуля передаточной функции. После того как соответствующая характеристика аппроксимирована, надлежит построить сам четырехполюсник (фильтр). Если аппроксимирована зависимость $\alpha=f(x)$, то основные этапы расчета фильтра следующие: 1) выбирают схему фильтра; 2) составляют для нее нормализованные характеристики $\alpha=f(x)$; 3) путем введения эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов по определенным правилам [12] находят резонансные частоты контуров фильтра, при которых $\alpha=f(x)$ будет аппроксимироваться соответствующим полиномом Чебышева; 4) по резонансным частотам определяют параметры фильтра.

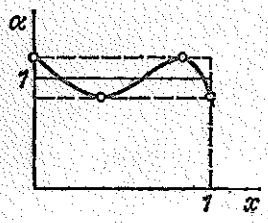


Рис. 8.26

Рассмотрим теперь, как осуществляются гладкая и равноволновая аппроксимация квадрата модуля передаточной функции фильтра.

§ 8.13. АППРОКСИМАЦИЯ КВАДРАТА МОДУЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ФИЛЬТРА НИЗКОЙ ЧАСТОТЫ

Гладкая аппроксимация. Применительно к фильтру НЧ аппроксимацию квадрата модуля передаточной функции четырехполюсника при гладкой аппроксимации осуществляют так:

$$|K(jx)|^2=\frac{1}{1+mx^{2n}}.$$

Принимают, что при $x=1$ $|K(jx)|=1/\sqrt{2}$, откуда $m=1$. Полагая $p=jx$, найдем полюсы $|K(jx)|^2$:

$$K(jx)K(-jx)=\frac{1}{\left(1+\frac{p}{j}\right)^{2n}};\quad 1+(-1)^n p^{2n}=0.$$

При нечетных n

$$p_k=1^{1/(2n)}=e^{jk\pi/n};\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

При четных n

$$p_k=(-1)^{1/(2n)}=e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2n}};\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Полюсы расположены симметрично по окружности единичного радиуса. Полиномы $(p-p_1)\ldots(p-p_n)$ образуют знаменатель $K(jx)$ и называются полиномами Баттерворса. При составлении их используют значения p_k, находящиеся только в левой полуплоскости. Это обеспечивает физическую осуществимость $K(p)$. Запишем полиномы при $n=1,\ 2,\ 3$:

при $n=1$ $\quad(p+1)$;

при $n=2$ $\quad p^2+\sqrt{2}\,p+1$;

при $n=3$ $\quad p^3+2p^2+2p+1$.

Задаваясь величиной требуемого затухания фильтра в децибелах (обычно при $x=2$) $a=10\lg(U_1/U_2)^2$, определим n:

$$|K(jx)|=\left|\frac{U_2}{U_1}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}\approx\frac{1}{x^n};\quad n=\frac{20\lg|U_1/U_2|}{20\lg 2}.$$

Например, при $a=18$ дБ $n=18/(20\lg 2)=2{,}98\approx 3$. В рассматриваемом примере

$$K(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}.$$

Функцию $K(p)$ реализуют известными методами.

Равноволновая аппроксимация. Квадрат модуля нормированной передаточной функции фильтра НЧ с помощью полиномов Чебышева аппроксимируют так:

$$|K(jx)|^2=\frac{1}{1+\gamma^2T_n^2(x)}.$$

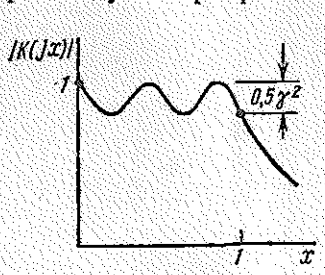


Рис. 8.27

Максимальное отклонение $|K(jx)|$ от 1 равно $\gamma^2/2$:

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\approx 1-\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)=\frac{\gamma^2}{2}.$$

При $x>1$, т. е. в области затухания фильтра НЧ,

$$\gamma^2T_n(x)\gg 1\quad\text{и}\quad|K(jx)|=\frac{1}{\gamma T_n(x)}=\frac{1}{\gamma\,\mathrm{ch}\,(n\,\mathrm{Arch}\,x)}.$$

Примерный вид аппроксимирующей кривой $|K(jx)|$ показан на рис. 8.27.

Для заданного отклонения γ и величины затухания a в децибелах при $x=2a=20\lg|U_1/U_2|=20\lg|1/|K(j2)||$ порядок полинома Чебышева определяют по формуле

$$n=\frac{1}{1{,}32}\,\mathrm{Arch}\,\frac{10^{a/20}}{\gamma},\quad\text{где } 1{,}32=\mathrm{Arch}\,2.$$

Например, для $\gamma=0{,}4$ и $a=30$ дБ при $x=2$

$$|K(jx)|=0{,}0318; \quad n=\frac{1}{1{,}32}\operatorname{Arch}\frac{10^{1{,}5}}{0{,}4}=\frac{5{,}06}{1{,}32}=3{,}84.$$

Принимаем $n=4$.

Для составления $K(jx)$ следует определить полюсы $|K(jx)|^2$, находящиеся в левой полуплоскости. Подставим в $|K(jx)|$ $x=p_k/j$ и приравняем к нулю знаменатель $|K(jx)|^2$:

$$1+\gamma^2 T_n^2(p_k/j)=0 \quad \text{или} \quad T_n(p_k/j)=\pm j/\gamma.$$

При $0\leqslant x\leqslant 1$ $T_n(x)=T_n(p_k/j)=\cos n\left[\arccos\frac{p_k}{j}\right]=\pm\frac{j}{\gamma}$.

При $x>1$ $T_n(x)=T_n\left(\frac{p_k}{j}\right)=\operatorname{ch} n\operatorname{Arch}\frac{p_k}{j}$.

Так как p_k — комплексное число, то $\arccos\frac{p_k}{j}$ — тоже комплексное число, которое положим равным $\alpha_k+j\beta_k$. Тогда $T_n\left(\frac{p_k}{j}\right)=$ $=\cos(n\alpha_k+jn\beta_k)=\cos n\alpha_k\operatorname{ch} n\beta_k-j\sin n\alpha_k\operatorname{sh} n\beta_k=\pm j/\gamma$.

Отсюда $\cos n\alpha_k\operatorname{ch} n\beta_k=0$ и $\sin n\alpha_k\operatorname{sh} n\beta_k=\pm 1/\gamma$.

Так как $\operatorname{ch} n\beta_k\neq 0$, то

$$\cos n\alpha_k=0 \quad \text{и} \quad \alpha_k=(2k+1)\pi/(2n), \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

При этом

$$\sin n\alpha_k=\pm 1; \quad \operatorname{sh} n\beta_k=1/\gamma; \quad \beta_k=\frac{1}{n}\operatorname{Arsh} 1/\gamma.$$

Поскольку $\arccos(p_k/j)=\alpha_k+j\beta_k$, то

$$p_k=a_k+jb_k=j\cos(\alpha_k+j\beta_k).$$

Действительные и мнимые части полюсов p_k, лежащих в левой полуплоскости:

$$a_k=-\operatorname{sh}\beta_k\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}; \quad b_k=\operatorname{ch}\beta_k\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}; \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Из последней строчки следует, что

$$\frac{a_k^2}{\operatorname{sh}^2\beta_k}+\frac{b_k^2}{\operatorname{ch}^2\beta_k}=1,$$

т. е. полюсы p_k расположены на эллипсе, одна полуось которого равна $\operatorname{sh}\beta_k$, другая — $\operatorname{ch}\beta_k$.

В рассматриваемом примере при $n=4$ и $\gamma=0{,}4$ $\beta_k=0{,}412$, $\operatorname{sh}\beta_k=0{,}421$, $\operatorname{ch}\beta_k=1{,}08$.

Для построения эллипса чертим две окружности — одну радиусом $\operatorname{sh}\beta_k$, другую радиусом $\operatorname{ch}\beta_k$ (рис. 8.28) и через начало координат проводим прямые до пересечения с окружностями под углами $\alpha_k=(2k+1)[\pi/(2n)]$, где $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

В примере $\alpha_k\approx 22{,}3°;\ 67°;\ 111°;\ 156°$.

Из точек пересечения лучей с окружностью меньшего радиуса проводим вертикали, а из точек пересечения с окружностью большего радиуса — горизонтали. Точки пересечения соответствующих горизонталей и вертикалей в левой полуплоскости дают искомые

полюсы. В примере $p_{0,3} = -0{,}164 \pm j0{,}995$; $p_{1,2} = -0{,}388 \pm j0{,}416$. Нормированная передаточная функция

$$K(p) = \frac{1}{(p-p_0)(p-p_3)(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{1}{[(p+0{,}164)^2+0{,}995^2][(p+0{,}388)^2+0{,}416^2]}.$$

По $K(p)$ определяют схему и ее нормированные параметры $L_н$, $C_н$. Для перехода от нормированных к действительным параметрам L, C пользуются соотношениями $L = L_н/\omega_c$ и $C = C_н/\omega_c$.

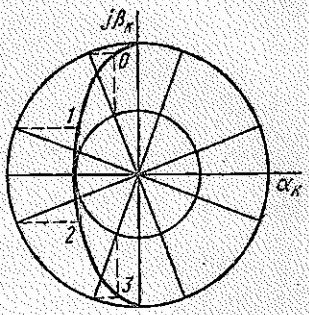


Рис. 8.28

Какому способу синтеза схемы и какой конкретной схеме следует отдать предпочтение, зависит не только от стоимости и от габаритов при практическом осуществлении схемы, но и от того, насколько фазочастотные характеристики получающихся четырехполюсников удовлетворяют поставленной задаче.

Если аппроксимируют не передаточную функцию, а входное сопротивление (проводимость) некоторого двухполюсника, то оно обычно нормируется не только по частоте ω_0, но и по величине. При нормировании $Z(p)$ по величине входное сопротивление (проводимость) делят на некоторую безразмерную величину $R_0 > 0$. При переходе от схемы, реализующей нормированное сопротивление $Z_н$ (ее параметры $R_н$, $L_н$, $C_н$ и частота x), к той же схеме, но с ненормированными параметрами (ее сопротивление Z, а параметры R, L, C) последние определяют, качественно сопоставив почленно одинаковые слагаемые у $Z/R_0 = R/R_0 + j\omega L/R_0 + 1/(j\omega CR_0)$ и у $Z_н = R_н + jxL_н + 1/(jxC_н)$ $(x = \omega/\omega_0)$.

Получим $R = R_н R_0$; $L = L_н R_0/\omega_0$; $C = C_н/(R_0\omega_0)$; ω_0 — величина безразмерная.

Глава девятая

СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

§ 9.1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ И ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Кроме методов, рассмотренных в предыдущей главе, известное распространение получил метод синтеза, основанный на логарифмических частотных характеристиках. Этот метод разработан В. В. Солодовниковым и его учениками и последователями и нашел применение при синтезе систем автоматического управления и

регулирования, а также при синтезе радиотехнических систем, например многокаскадных усилителей.

Систему автоматического управления образует ряд звеньев. Каждое звено характеризуется своей передаточной функцией.

Понятия логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАХ или ЛАЧХ) и логарифмической фазо-частотной характеристики (ЛФХ или ЛФЧХ) применяются к отдельно взятому звену и к системе в целом. Под ЛАХ понимают зависимость двадцатикратного логарифма модуля передаточной функции $A_L = 20 \lg A$ от десятичного логарифма ω. Под ЛФХ понимают зависимость фазы φ передаточной функции от $\lg \omega$. Принято оцифровку по оси абсцисс (по оси ω) производить не в значениях $\lg \omega$, а в значениях ω. Единицей измерения A_L являются децибелы, ω по оси абсцисс откладывают обычно в масштабе, при котором изменение ω в 10 раз (например, от 1 до 10 или от 10 до 100) занимает отрезок в 5 см. Отрезок, на котором частота изменяется в 10 раз, называют *декадой*. Отрезок, на котором частота изменяется в 2 раза, — *октавой*. Так как модуль передаточной функции может быть и меньше 1, то график $A_L = f(\omega)$ может иметь участки, находящиеся в четвертом квадранте. Зависимости $A_L = f(\omega)$ и $\varphi = f(\omega)$ представляют собой плавные кривые. Для облегчения построения этих кривых и облегчения приближенного исследования частотных свойств отдельных звеньев их принято аппроксимировать отрезками прямых линий. ЛАХ и ЛФХ, аппроксимированные отрезками прямых линий, называют *асимптотическими ЛАХ и ЛФХ*.

§ 9.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

1. *Усилительное звено*. Его передаточная функция $W(p) = k$ есть постоянное число k, не зависящее от частоты ω, а аргумент равен нулю. Поэтому

$$A_L = 20 \lg k; \quad \varphi = 0.$$

Зависимости A_L и φ от ω изображены на рис. 9.1, *а*, *б*.

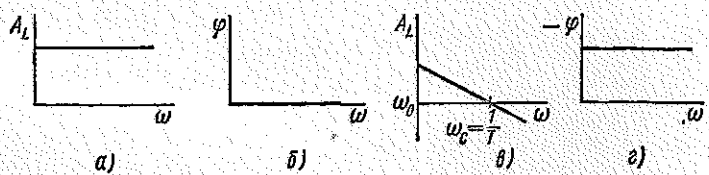


Рис. 9.1

2. *Интегрирующее звено* имеет передаточную функцию $W(p) = 1/(pT)$; следовательно, $W(j\omega) = -j/(\omega T)$,

$$A_L = 20 \lg k - 20 \lg \omega; \quad \varphi = -90°.$$

Зависимости A_L и φ для него изображены на рис. 9.1, *в*, *г*. ω_0 некоторая начальная частота. Частоту $\omega = \omega_c$, при которой A_L проходит через нулевое значение, называют частотой среза $\omega_c = 1/T$. Наклон асимптотической ЛАХ к оси абсцисс на рис. 9.1, *в* равен —20 дБ/декада или —6,02 дБ/октава.

3. *Инерционное звено первого порядка (апериодическое звено).* Звено называют инерционным потому, что сигнал на выходе звена по фазе отстает от сигнала на входе. Для этого звена

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}; \quad W(j\omega) = \frac{k(1-j\omega T)}{1+\omega^2 T^2};$$

$$A_L = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}; \quad \varphi = -\operatorname{arctg}\omega T.$$

Асимптотическая ЛАХ дана на рис. 9.2, *а*. Частоту $\omega_c = 1/T$ называют сопрягающей; до этой частоты зависимость $A_L = f(\omega)$ представляют прямой, параллельной оси абсцисс; при $\omega > \omega_c$ — прямой с наклоном —20 дБ/декада.

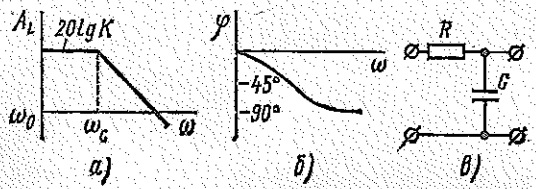


Рис. 9.2

Зависимость $\varphi(\omega)$ представлена на рис. 9.2, *б*. На рис. 9.2, *в* изображен простейший четырехполюсник, который может выполнять роль инерционного звена первого порядка. Для него $T = RC$.

4. *Инерционное звено второго порядка* имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\alpha Tp + 1},$$

поэтому

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2T^2}[(1-\omega^2T^2) - j2\alpha\omega T];$$

$$A_L = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(1-\omega^2T^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2T^2};$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{2\alpha\omega T}{1-\omega^2T^2}.$$

На рис. 9.3, *а* представлен четырехполюсник, который может выполнять роль инерционного звена второго порядка. Для него

$$k = \frac{C_1}{C_1+C_2}; \quad T^2 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}L; \quad 2\alpha T = \frac{C_1C_2R}{C_1+C_2};$$

$$A_L(0) = 20\lg k; \quad A_L(\infty) = 0.$$

ЛАХ для низких и средних частот изображена на рис. 9.3, *б*. Ее можно представить либо в виде, показанном на рис. 9.3, *в*, либо в виде, представленном на рис. 9.3, *г*. Начальное значение A_L, т. е. $A_L(0)$ часто оказывается отрицательным. ЛФХ показана на рис. 9.3, *д*.

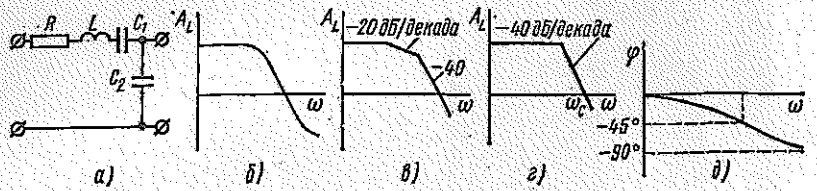


Рис. 9.3

5. *Дифференцирующее звено*. Для этого звена

$$W(p) = Tp; \quad W(j\omega) = j\omega T;$$

$$A_L = 20 \lg \omega T; \quad \varphi = 90°.$$

На рис. 9.4, *а*, *б* даны его ЛАХ и ЛФХ.

6. *Форсирующее звено первого порядка* осуществляет дифференцирование сигнала. Выходной сигнал опережает входной на угол φ. Передаточная функция

$$W_1(p) = \frac{Tp}{Tp+1}, \quad \text{или} \quad W_2(p) = \frac{k(T_1 p+1)}{T_2 p+1}, \quad \text{или} \quad W_3(p) = Tp+1.$$

Звено с передаточной функцией $W_1(p)$ можно осуществить, например, по схеме рис. 9.5, *а*; для него $T = RC$. Звено с передаточной функцией $W_2(p)$ можно осуществить, например, по схеме рис. 9.5, *б*. Для этой схемы

$$k = \frac{R_2}{R_1+R_2}, \quad T_1 = R_1 C$$

и $$T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} C.$$

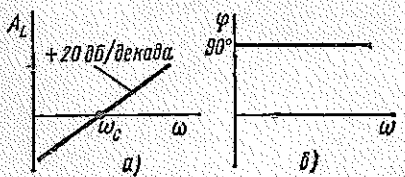


Рис. 9.4

Асимптотическая ЛАХ для четырехполюсника, показанного на рис. 9.5, *а*, дана на рис. 9.5, *в*, а для четырехполюсника, изображенного на рис. 9.5, *б*, — на рис. 9.5, *г*.

Фазочастотная характеристика для схемы 9.5, *а* изображена на рис. 9.5, *д*, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega T}$.

Звено, изображенное на рис. 9.5, *а*, *б*, осуществляет дифференцирование в области относительно низких частот, в области высоких частот дифференцирование практически отсутствует.

Для форсирующего звена с передаточной функцией $W_3(p) = Tp+1$:

$$W(j\omega) = 1 + j\omega T; \quad A_L = \sqrt{1+\omega^2 T^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \omega T.$$

Зависимости $A_L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ изображены на рис. 9.5, *е*, *ж*. Дифференцирование здесь имеет место для относительно высоких частот.

7. *Форсирующее звено второго порядка* имеет передаточную функцию $W(p) = k(T^2p^2 + 2\alpha Tp + 1)$, поэтому

$$W(j\omega) = k[(1 - \omega^2T^2) + j2\alpha\omega T];$$

$$A_L = 20\lg k + 20\lg\sqrt{(1 - \omega^2T^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2T^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\alpha\omega T}{1 - \omega^2T^2}.$$

На рис. 9.6, *а* изображены три асимптотических ЛАХ при разных значениях α: *1* — при $\alpha = 1$; *2* — при $\alpha = 0{,}5$; *3* — при $\alpha = 0{,}05$. Частота $\omega_c = 1/T$. Для кривой *1* наклон сначала равен

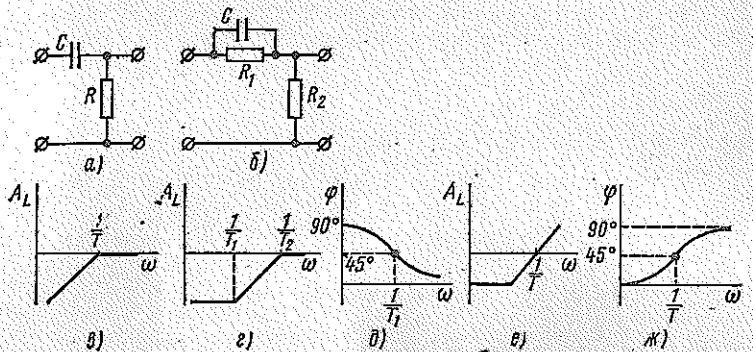


Рис. 9.5

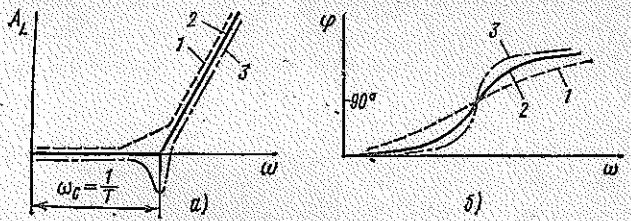


Рис. 9.6

20 дБ/декада, а затем 40 дБ/декада. Для кривой *2* наклон равен 40 дБ/декада. Кривая *3* в окрестности ω_c имеет небольшой всплеск вниз. Фазочастотные характеристики для этих трех случаев представлены на рис. 9.6, *б*.

8. *Интегро-дифференцирующее звено* обладает способностью в одной области частот интегрировать, в другой дифференцировать, а в остальных имеет $A_L(\omega)$ либо приблизительно равную нулю, либо некоторому постоянному числу. На рис. 9.7, *а* изображен четырехполюсник, обладающий такими свойствами.

Общий вид передаточной функции звена, показанного на рис. 9.7, *а*:

$$W(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{a_1 p^2 + a_2 p + 1}.$$

Для схемы рис. 9.7, *а*

$$T_1 = R_2 C_2; \quad T_2 = R_1 C_1; \quad a_1 = R_1 R_2 C_1 C_2.$$

Асимптотическая ЛАХ для схемы рис. 9.7, *а* изображена на рис. 9.7, *б*. В области $1/T_a < \omega < 1/T_1$ четырехполюсник обладает интегрирующими свойствами, в области $1/T_2 < \omega < 1/T_b$ — дифференцирующими.

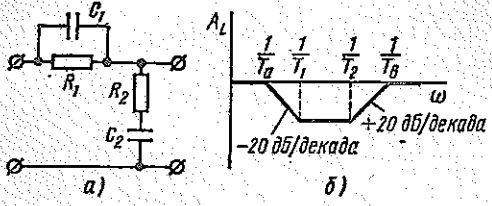


Рис. 9.7

Для уменьшения объема вычислительной работы при построении ЛАХ и ЛФХ различных звеньев применяют нормированные ЛАХ и ЛФХ. Это такие характеристики, по оси абсцисс которых отложена не ω, а отношение ω/ω_c, где ω_c некоторая базисная частота. Передаточная функция каждого из рассмотренных звеньев была записана при холостом ходе на выходных зажимах. В режимах, отличных от режима х. х., передаточная функция зависит также от величины и характера сопротивления нагрузки.

§ 9.3. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ЛАХ И ЛФХ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

При каскадном соединении нескольких звеньев, образующих незамкнутую систему (индекс «н»), передаточная функция всей системы равна произведению передаточных функций звеньев:

$$W_н(p) = W_1(p)\, W_2(p)\, W_3(p).$$

Ординаты ЛАХ всей системы равны сумме соответствующих ординат ЛАХ ее звеньев:

$$A_{Lн}(\omega) = A_{L1}(\omega) + A_{L2}(\omega) + A_{L3}(\omega) + \ldots,$$

а ординаты ЛФХ системы равны сумме ординат ЛФХ отдельных звеньев:

$$\varphi_н(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \ldots$$

Таким образом, результирующая ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы может быть построена по ЛАХ и ЛФХ образующих ее звеньев. Однако такой путь построения результирующей ЛАХ незамкнутой системы довольно трудоемок и не учитывает, что различные участки ЛАХ в различной степени влияют на динамические свойства системы в замкнутом состоянии.

В литературе по синтезу систем автоматического регулирования частотными методами получил распространение метод построения асимптотической ЛАХ незамкнутой системы путем сопряжения асимптот ее отдельных участков. В дальнейшем в построенную таким образом ЛАХ могут быть внесены соответствующие уточнения.

§ 9.4. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЛАХ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Полагаем, что передаточная функция представлена в виде отношения произведений полиномов, приведенных к стандартному виду, когда свободный член в каждом из них равен 1. Рассмотрим характерные случаи.

Первый случай. Имеется множитель p в знаменателе $W(p)$, например:

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p^2 + 2\alpha T_3 p + 1)}$$

Этот множитель свидетельствует о том, что число интегрирующих звеньев больше числа дифференцирующих.

Второй случай. Множитель p находится в числителе. Это свидетельство того, что число дифференцирующих звеньев больше числа интегрирующих.

Третий случай. Множитель p отсутствует в числителе и знаменателе. Это свидетельство того, что интегрирующие и дифференцирующие звенья отсутствуют или имеются в равном количестве.

Построение асимптотической ЛАХ выполняют следующим образом [35, 37 и др.].

1. Разбивают $W(p)$ на множители, каждый из которых представляет собой передаточную функцию одного из звеньев, рассмотренных в § 9.2.

2. Находят сопрягающие частоты ω_{ci} для каждого инерционного и форсирующего звеньев по формуле $\omega_{ci} = 1/T_i$.

3. Отмечают частоты ω_{ci} на диаграмме и тонкими линиями проводят через них вертикали.

4. Строят участки асимптотической характеристики, начиная с низкочастотной асимптоты и последовательно переходя к более высокочастотным участкам. Низкочастотная асимптота начинается с частоты $\omega = 0$ и заканчивается при частоте $\omega_{c1} = 1/T_1$, где T_1 — наибольшая постоянная времени из всех T_i.

Низкочастотная асимптота или ее продолжение проходит через точку с координатами $\omega = 1$ и $A_L = 20 \lg k$ и параллельна оси абсцисс, если множитель p в числителе и знаменателе $W(p)$ отсутствует, с наклоном 20 дБ/декада, если $W(p)$ имеет множитель p в числителе, и под углом —20 дБ/декада, если $W(p)$ имеет множитель p в знаменателе.

Вторая асимптота занимает участок по оси частот от ω_{c1} до $\omega_{c2} = 1/T_2$, где T_2 — вторая по величине постоянная времени.

Наклон каждой последующей асимптоты A_{Lk} изменяется по сравнению с наклоном предыдущей асимптоты $A_{L,k-1}$ на угол,

который зависит от типа звена, создающего сопрягающую частоту $\omega_{c.k-1}$. Так, наклон второй асимптоты A_{L2} зависит от типа звена, создающего сопрягающую частоту ω_{c1}. Если это звено является форсирующим звеном первого или второго порядка, то наклон второй асимптоты изменяется по сравнению с наклоном первой асимптоты соответственно на 20 или 40 дБ/декада. Если это звено является инерционным звеном первого или второго порядка, то наклон второй асимптоты изменяется по сравнению с наклоном первой асимптоты соответственно на —20 или —40 дБ/декада.

Последняя (высокочастотная) асимптота справа по оси частот не ограничена (теоретически простирается в бесконечность). Количество асимптот на 1 больше числа сопрягающих частот.

Пример 9.1. Построить асимптотическую ЛАХ для системы, состоящей из четырех звеньев с передаточными функциями:

$$W_{\text{а}}(p)=\frac{K_{\text{а}}(T_{\text{а}}p+1)}{K_{\text{а}}T_{\text{а}}p+1};\quad W_{\text{б}}(p)=pT_{\text{б}};$$

$$W_{\text{в}}(p)=\frac{K_{\text{в}}}{T_{\text{в}}p^2+2\alpha T_{\text{в}}p+1};\quad W_{\text{г}}(p)=K_{\text{г}}.$$

Здесь $T_{\text{а}}=0{,}05$ с; $T_{\text{б}}=0{,}167$ с; $T_{\text{в}}=0{,}333$ с; $\alpha=0{,}5$; $K_{\text{а}}=1{,}2$; $K_{\text{в}}=2{,}5$; $K_{\text{г}}=200$.

Решение 1. Составляем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(p)=\frac{kp(T_{\text{а}}p+1)}{(k_{\text{а}}T_{\text{а}}p+1)(T_{\text{в}}p^2+2\alpha T_{\text{в}}p+1)}.$$

2. Представляем $W(p)$ в виде произведения пяти множителей:

$W_1(p)=k=k_{\text{а}}k_{\text{в}}k_{\text{г}}T_{\text{б}}=100$ — усилительное звено;

$W_2(p)=p$ — дифференцирующее звено;

$W_3(p)=\frac{1}{T_Ap+1}$ — инерционное звено первого порядка, где $T_A=k_{\text{а}}T_{\text{а}}=0{,}144$;

$W_4(p)=\frac{1}{T_{\text{в}}p^2+2\alpha T_{\text{в}}p+1}$ — инерционное звено второго порядка;

$W_5(p)=(T_{\text{а}}p+1)$ — форсирующее звено первого порядка.

3. Располагаем постоянные времени в порядке убывания: $T_{\text{в}}=0{,}333$, $T_A=0{,}144$, $T_{\text{а}}=0{,}05$ и находим сопрягающие частоты $\omega_{c1}=1/T_{\text{в}}=3$, $\omega_{c2}=1/T_A=6{,}93$, $\omega_{c3}=1/T_{\text{а}}=20$.

4. Через значения ω_{c1}, ω_{c2}, ω_{c3} проводим линии, параллельные оси ординат на рис. 9.8.

5. Строим низкочастотную асимптоту в интервале от $\omega=0$ до $\omega=\omega_{c1}$. Она проходит через точку $\omega=1$ и $A_L=20\lg k=40$ и расположена с наклоном к оси абсцисс в 20 дБ/декада, так как в числителе $W(p)$ имеется множитель p.

6. Вторую асимптоту строим в интервале от $\omega_{c1}=3$ до $\omega_{c2}=6{,}93$, сопрягая ее с первой асимптотой. Так как ω_{c1} обусловлена инерционным звеном второго порядка, то наклон второй асимптоты отличается от наклона первой на —40 дБ/декада и равен $+20-40=-20$ дБ/декада.

7. Третью асимптоту строим в интервале от $\omega_{c2} = 6{,}93$ до $\omega_{c3} = 20$. Наклон ее отличается от наклона второй асимптоты на -20 дБ/декада, так как ω_{c2} определяется инерционным звеном первого порядка, и равен $-20 - 20 = -40$ дБ/декада.

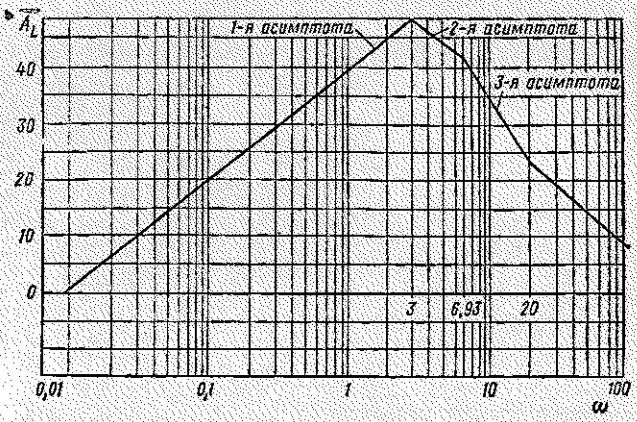


Рис. 9.8

8. Четвертую асимптоту строим в интервале от ω_{c3} до бесконечности. Так как ω_{c3} определяется дифференцирующим звеном первого порядка, то наклон четвертой асимптоты отличается от наклона третьей на 20 дБ/декада и равен $-40 + 20 = -20$ дБ/декада

§ 9.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЛАХ

При некоторой произвольно выбранной частоте ω_0 фаза $\varphi = \varphi(\omega_0)$ может быть определена по формуле (2.20):

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Pi}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} du.$$

Здесь записана ω_0 вместо ω_c [в формуле (2.20)], чтобы не смешивать произвольную частоту ω_0 с сопрягающей частотой ω_c. Так как $u = \ln \omega/\omega_0$ и $\Pi = A_L$, то перепишем формулу так:

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA_L}{du} \ln \operatorname{cth} \frac{|u|}{2} du. \qquad (9.1)$$

Множитель $\ln \operatorname{cth} |u|/2$ под знаком интеграла выполняет роль весовой функции, свидетельствуя о том, что значение $\varphi(\omega_0)$ зависит главным образом от наклона dA_L/du в окрестности частоты ω_0.

В соответствии с формулой (9.1) составлена номограмма [54], представленная на рис. 9.9, позволяющая определить значение фазы φ по асимптотической ЛАХ. По оси абсцисс на ней нане-

сено значение относительной частоты ω/ω_0 (в долях от ω_0). По оси ординат функция

$$S(\omega/\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega/\omega_c} \ln \operatorname{cth}\frac{|u|}{2}\,du.$$

Для определения φ при некотором выбранном значении $\omega = \omega_0$ следует расположить номограмму под ЛАХ так, чтобы ось абсцисс номограммы была параллельна оси абсцисс ЛАХ и чтобы цифра 1 номограммы находилась на одной вертикали с частотой ω_0, для которой хотят найти $\varphi(\omega_0)$.

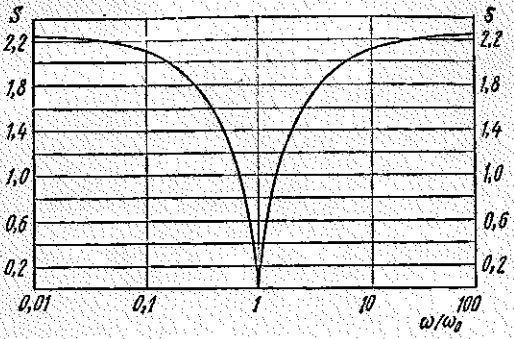


Рис. 9.9

Значение $\varphi(\omega_0)$ будет равно алгебраической сумме произведений наклона участка ЛАХ в дБ/декада на разность значений S, соответствующих границам этого участка. Для построения всей кривой $\varphi = f(\omega)$ следует найти φ при всех сопрягающих частотах и при нескольких промежуточных.

§ 9.6. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛАХ И ОСНОВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Принято считать, что наиболее тяжелым режимом для систем автоматического регулирования и следящих систем является режим, который возникает в системе при поступлении на вход ее ступенчатого воздействия.

Полагают, что если при ступенчатом воздействии основные характеристики процесса установления (показатели качества) удовлетворяют поставленным требованиям, то при других типах воздействий система им также будет удовлетворять.

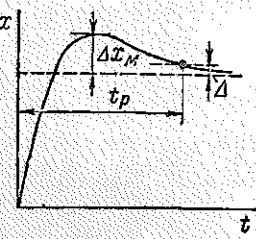


Рис. 9.10

Желательный вид кривой перехода выходной величины x от одного установившегося значения к другому изображен на рис. 9.10. Максимальное превышение x над установившимся значением (оно показано пунктиром) обозначено $\Delta x_м$. Временем регулирования $t_р$ называют время, в течение которого x после прохождения максимума достигнет величины, на Δ отличающейся от установившегося. В относительных единицах $\Delta x_м$ составляет около 0,2—0,4, а Δ около 0,05.

Системы регулирования подразделяют на *статические* и *астатические*.

В статических системах различным значениям внешнего воздействия соответствуют различные значения регулируемой величины, т. е. регулируемая величина поддерживается неодинаковой с некоторой ошибкой в установившемся состоянии.

В астатических системах значение выходной величины не зависит от величины внешнего воздействия, она поддерживается постоянной, поэтому ошибка в установившемся состоянии отсутствует.

Порядок астатизма системы обозначают ν. При $\nu = 0$ система статическая, при $\nu = 1$ — астатическая первого порядка, при $\nu = 2$ — астатическая второго порядка.

Между показателями качества (ν, Δ, $t_р$, $\Delta x_м$), формой ЛАХ разомкнутой системы и вещественной частотной характеристикой замкнутой системы $P(\omega)$ имеют место связи [3, 35 и др.], которые и положены в основу синтеза по логарифмическим частотным характеристикам.

ЛАХ принято подразделять (рис. 9.11) на три области или части: *низкочастотную*, *среднечастотную* и *высокочастотную*.

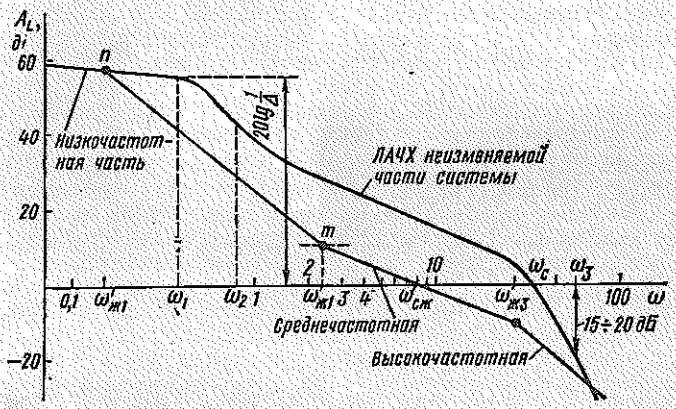


Рис. 9.11

Низкочастотная часть простирается от $\omega = 0$ до некоторой частоты ω_1 и характеризует статические свойства системы. Если наклон ЛАХ в этой области равен нулю, то система является статической, при наклоне —20 дБ/декада — астатической первого порядка, при наклоне —40 дБ/декада — астатической второго порядка и т. д.

Среднечастотная часть простирается от частоты ω_1 до ω_3.

Высокочастотная часть расположена от ω_3 до бесконечности.

Частоты ω_1 и ω_3 определяют на основании связи между $P(\omega)$ и качеством переходного процесса. Из теории известно [16, 18, 19 и др.], что задающее воздействие воспроизводится на выходе

без существенной ошибки, если

$$|1 - P(\omega)| \leqslant \Delta.$$

Границе этой области на ЛАХ разомкнутой системы соответствует частота ω_1, определяемая из соотношения $A_L(\omega_1) = 20 \lg 1/\Delta$. Другими словами, для определения частоты ω_1 надлежит подсчитать величину $20 \lg 1/\Delta$ и найти точку на ЛАХ, ордината которой равна этой величине. Тогда абсцисса найденной точки даст ω_1.

Высокочастотная часть ЛАХ разомкнутой системы соответствует той части $P(\omega)$ замкнутой системы, для которой $|P(\omega)| \leqslant 0{,}1 - 0{,}2$. Этой части $P(\omega)$ соответствует на ЛАХ область, для которой $A_L(\omega) \leqslant 15 \div 20$ дБ. Частоту ω_3 определяют из соотношения $A_L(\omega_3) = 15 \div 20$ дБ.

Высокочастотная часть ЛАХ не оказывает существенного влияния на характер переходного процесса и потому ее в дальнейшем не учитывают. Наибольшее влияние на переходный процесс оказывает среднечастотная часть ЛАХ. Чем более протяженной будет среднечастотная часть и чем меньше будет ее наклон, тем больше будет запас устойчивости. Частоту ω_c, при которой ЛАХ пересекает ось абсцисс, называют частотой среза. Частота среза связана со временем регулирования $t_р$ (см. § 9.7).

§ 9.7. ПОСТРОЕНИЕ ЖЕЛАЕМОЙ ЛАХ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Желаемой ЛАХ называют ЛАХ, которая удовлетворяет заданным требованиям к системе по величине времени регулирования $t_р$, перерегулирования $\Delta x_м$, по величине Δ и коэффициенту статизма s. Ее строят на том же графике, на котором построена ЛАХ неизменяемой части системы. Неизменяемая часть системы состоит из элемента сравнения, усилителя, исполнительного органа, объекта регулирования и измерительного органа.

Последовательность построения желаемой ЛАХ такова.

1. По заданному коэффициенту статизма s определяют передаточный коэффициент в разомкнутом состоянии $K = (1 - s)/s$.

2. Составляют передаточную функцию системы в замкнутом состоянии $W_з(p) = \dfrac{W_н(p)}{1 + W_н(p)}$ и выясняют, например, пользуясь критерием Гурвица, будет ли система устойчивой. Если она окажется неустойчивой, то корректирующее устройство может не только удовлетворить требованиям качества переходного процесса, но и требованиям в смысле устойчивости.

3. Частоту среза $\omega_{сж}$ желаемой ЛАХ определяют по номограмме рис. 9.12. Чтобы воспользоваться ею, надо знать допустимое перерегулирование $\Delta x_м$, коэффициент формы $\lambda = \omega_в/\omega_п$ и дополнительный коэффициент наклона $\varkappa_в = \omega_в/\omega_в$ вещественной частотной характеристики (рис. 9.13). Для ориентировки коэффициенты λ и $\varkappa_в$ берут из данных уже выполненных систем подобного типа. Кривые рис. 9.12, *а*, *б* отличаются значениями λ и $\varkappa_в$. По заданному значению $\Delta x_м$ на рис. 9.12 сначала проводят горизонталь

до пересечения с кривой $\Delta x_м$. В точке пересечения опускают перпендикуляр и на оси абсцисс находят P_{max}. Затем продолжают вертикаль вверх до пересечения с кривой $t_р$ и через точку пересечения проводят горизонтальную прямую. По оцифровке на оси ординат находят соотношение между $t_р$ и частотой среза $\omega_с$.

Построениям на рис. 9.12, *б* соответствует

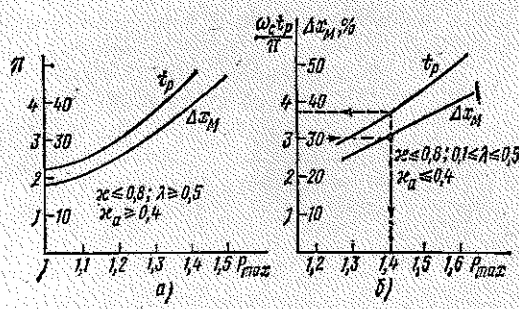


Рис. 9.12

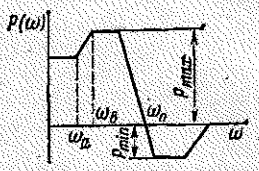


Рис. 9.13

$t_р = 3{,}75\pi/\omega_с$. Следовательно, $\omega_{сж} = 3{,}75\pi/1{,}57 = 7{,}5$ (принято $t_р = 1{,}57$ с).

4. Через точку $\omega = \omega_{сж}$ на оси абсцисс (см. рис. 9.11) проводят прямую с наклоном —20 дБ/декада, поскольку при этом наклоне проще создать необходимый запас устойчивости. Эта прямая будет являться среднечастотной частью желаемой ЛАХ.

Если амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы обозначить $W(j\omega)$, то вещественная частотная характеристика замкнутой системы

$$P(\omega) = \mathrm{Re}\,\frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = \mathrm{Re}\,(A(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}). \qquad (9.2)$$

По формуле (9.2) на плоскости A_L, φ можно построить кривую, для которой $P(\omega) = \mathrm{const}$. Совокупность кривых $A_L = f(\varphi)$, соответствующих различным значениям $P(\omega)$, изображена на рис. 9.15. Логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика не должна заходить в прямоугольник, ограниченный P_{max}, $P_{min} = P_{max} - 1$ и максимальным значением φ, соответствующим P_{max} и P_{min}.

Кривые рис. 9.14 служат для определения необходимого избытка по фазе $\gamma = 180° + \varphi$ по выбранному P (дБ). В соответствии с рис. 9.14 на рис. 9.15 построены зависимости $A_L = f(P_{max})$ и $\gamma = f(P_{max})$ для типовых $P(\omega)$.

5. Для определения левой границы среднечастотной части желаемой ЛАХ полагаем $|P_{min}| = P_{max} - 1$ и по кривым рис. 9.15 находим $A_L(\omega)$ и избыток фазы γ. Для построений на рис. 9.15, выполненных пунктирными линиями, $-11 \leqslant A_L(\omega) \leqslant 11$ дБ и $\gamma \geqslant 35°$. Частоту $\omega_{ж1}$ определим, как абсциссу точки пересечения горизонтали $A_L(\omega) = 11$ с прямой, выражающей среднечастотную часть желаемой ЛАХ. Точку пересечения обозначим $\omega_{ж1}$.

6. Сопрягаем среднечастотную часть желаемой ЛАХ (см. рис. 9.11) с низкочастотной частью, проводя прямую из точки m с наклоном -40 дБ/декада до пересечения ее в точке n с низкочастотной частью желаемой ЛАХ. Частоту, соответствующую точке n, назовем $\omega_{ж1}$.

7. По номограмме рис. 9.9 находят угол φ для частоты $\omega_{ж1}$. Зная φ, находят избыток фазы (запас по фазе) $\gamma = 180° + \varphi$ и найденный угол сопоставляют со значением γ на рис. 9.15. Найденное по номограмме γ должно быть не меньше значения γ, полученного на рис. 9.15. Если же будет получено меньшее значение, то следует расширить среднечастотную часть ЛАХ вправо.

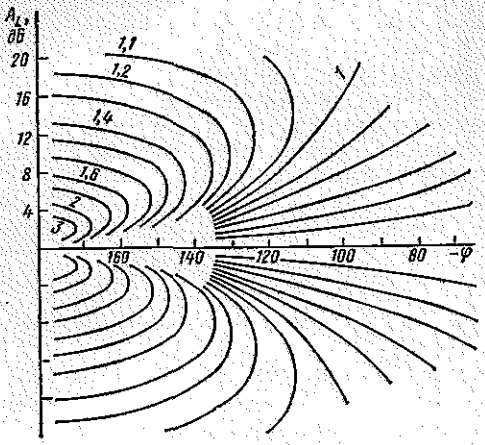


Рис 9.14

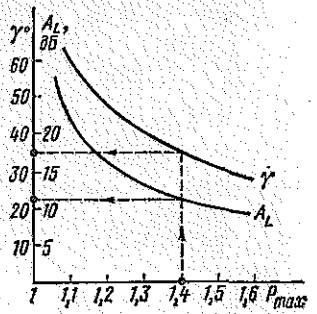


Рис. 9.15

8. Сопрягают среднечастотную часть желаемой ЛАХ с высокочастотной частью. С этой целью на рис. 9.11 проводят пунктиром горизонталь $-A_L(\omega)$. Значение A_L получено в п. 5 и равно в рассматриваемом примере 11 дБ; $-A_L(\omega) = -11$ дБ.

Ордината точки пересечения пунктирной прямой с среднечастотной частью дает частоту $\omega_{ж3}$ (см. рис. 9.11).

9. Высокочастотную асимптоту из точки сопряжения проводят с наклоном -40 дБ/декада.

10. Проверяют избыток фазы при частоте $\omega_{ж3}$ по номограмме рис. 9.9. Определение угла φ по номограмме, изображенной на рис. 9.9, для частоты $\omega_{ж1}$ иллюстрирует рис. 9.16. С этой целью над кривой $s = f(\omega/\omega_0)$ помещают кривую желаемой ЛАХ

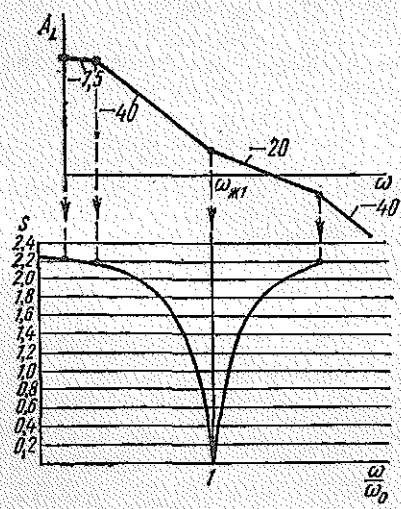


Рис. 9.16

$A_L = f(\omega)$, взятую из рис. 9.11, располагая ее так, чтобы оси абсцисс этих двух рисунков были параллельны, а частота, для которой определяется φ (в рассматриваемом примере $\omega_{ж1}$), находилась на продолжении вертикали, проведенной через точку $\omega/\omega_0 = 1$. Угол $\varphi = \sum_{k=1}^{n} A_{Lk}\Delta s_k$. Здесь n — число участков желаемой ЛАХ с различными наклонами; Δs_k — наклон участка в децибелах на декаду; Δs_k — перепад значений s для крайних точек k участка.

В соответствии с рис. 9.16 для частоты $\omega_{ж1}$:

$$\varphi = -7{,}5\,(2{,}25 - 2{,}15) - 40\,(2{,}15 - 0) - 20\,(2{,}2 - 0) - \\ - 40\,(2{,}25 - 2{,}2) = -132{,}75°.$$

Угол γ для частоты $\omega_{ж1}$ равен $180° + \varphi = 57{,}25°$, т. е. превышает необходимое значение $\gamma = 35°$, найденное из рис. 9.15.

§ 9.8. ПОСТРОЕНИЕ ЛАХ КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Корректирующие устройства (КУ) в системах автоматического регулирования могут быть последовательными, параллельными и последовательно-параллельными.

Последовательное КУ включают в основную цепь передачи сигнала обычно между каскадами усилителя и выполняют в виде пассивного четырехполюсника. Недостатками последовательного КУ являются повышение уровня помех при дифференцировании и уменьшение мощности сигнала при прохождении его через КУ.

Параллельное КУ присоединяют параллельно какому-либо участку основной цепи передачи сигнала и осуществляют как местную отрицательную обратную связь, охватывающую исполнительный орган или исполнительный орган и усилитель.

По сравнению с последовательным КУ параллельное обладает следующими преимуществами: 1) уменьшает влияние нестабильности параметров участков, охваченных параллельным КУ, на динамические свойства системы; 2) помехи в сигнале при его дифференцировании сказываются незначительно.

Иногда с целью упрощения КУ его выполняют комбинированным: часть функций коррекции выполняет последовательное КУ, а остальные параллельное. Выбор типа КУ для конкретной системы проводят путем сопоставления различных вариантов с учетом технической и экономической целесообразности.

Так как в настоящей главе дается только понятие о путях подхода к решению задач синтеза с применением ЛАХ, ограничимся перечислением основных этапов проектирования последовательного КУ.

1. ЛАХ последовательного КУ получают путем вычитания ординат ЛАХ неизменяемой части системы из ординат желаемой ЛАХ (см. рис. 9.11 и 9.17).

2. Запасаются набором асимптотических ЛАХ пассивных четырехполюсников, составленных из элементов R и C, применя-

емых в схемах коррекции, и таблицей зависимости параметров этих четырехполюсников от частот среза, а также частот сопряжения смежных участков асимптотических ЛАХ четырехполюсников. Схемы и таблицы имеются, например, в [3, 35, 37].

3. Пользуясь графиками и таблицами, выбирают схему КУ и определяют значения сопротивлений и емкостей, входящих в нее.

В том случае, когда ЛАХ КУ, полученная в п. 1, имеет более сложную форму, чем ЛАХ четырехполюсников, имеющихся в графиках и таблицах литературных источников, КУ выполняют в виде двух каскадно соединенных четырехполюсников, разделенных электронным усилителем (поскольку ЛАХ каждого четырехполюсника дана в режиме холостого хода).



Рис. 9.17

ЛАХ КУ разделяют на две ЛАХ таким образом, чтобы сумма ординат ЛАХ двух четырехполюсников давала ординаты ЛАХ, которую надо осуществить. При определении параметров R и C КУ по сопрягающим частотам и частотам среза частью значений R и C задаются произвольно, а остальные определяют по приведенным в таблицах зависимостям параметров от частот среза (простейшие случаи приведены в § 9.2). Если в результате расчета окажется, что для некоторых параметров, например значений емкостей, будут получены практически трудно осуществимые значения, то производят пересчет, взяв за основу иные значения произвольно выбираемых параметров.

Заключительная часть состоит в построении временной зависимости и проверке насколько она удовлетворяет заданным требованиям в отношении величин $\Delta x_{\text{н}}$, Δ и $t_{\text{р}}$.

Глава десятая

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ВРЕМЕННО́МУ ОТКЛИКУ

§ 10.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ СИНТЕЗА ПО ВРЕМЕННО́МУ ОТКЛИКУ

Под синтезом цепи по временному отклику понимают синтез по отклику цепи на напряжение заданной формы, чаще всего на единичное напряжение или на напряжение в виде δ-функции.

Для двухполюсника откликом является входной ток, для четырехполюсника — выходное напряжение. Отклик может быть

задан либо в аналитической форме, либо в виде графической зависимости от времени.

Если отклик задан в аналитической форме и операторное изображение его может быть представлено дробно-рациональной функцией, то задача решается относительно легко, так как не представляет труда составить операторное изображение отклика и совместно с изображением входного напряжения составить $Z(p)$ для двухполюсника или $K(p)$ для четырехполюсника, т. е. свести задачу к уже рассмотренной в гл. 8.

В данной главе будут рассмотрены вопросы синтеза, когда отклик задан в виде некоторой графической зависимости. Задача в такой постановке оказывается значительно более сложной, чем в случае задания отклика в аналитической форме.

Будем полагать, что отклик системы задан в виде временно́го графика в достаточно крупном масштабе и на необходимом интервале времени. В литературе известно несколько путей решения этой задачи.

1. По заданной временно́й характеристике строят частотную характеристику цепи, используя, например, формулы (3.10) и (3.11), а затем реализуют цепь с известной частотной характеристикой.

2. Временну́ю функцию представляют решетчатой функцией, заданной своими дискретными значениями через равноотстоящие интервалы времени. Эту функцию аппроксимируют суммой экспонент, применяют к ней преобразование, сходное с дискретным преобразованием Лапласа, записывают преобразованную функцию в виде подходящей дроби, от последней переходят к сумме дробей вида $\frac{A}{m-a}$ и $\frac{c}{m^2+ma_1+a_2}$. Здесь m — оператор преобразования; A, a, c, a_1, a_2 — численные коэффициенты. Заключительный этап состоит в том, что от этой суммы дробей с помощью таблицы соответствия по известным значениям коэффициентов A, a, c, a_1, a_2 определяют содержание каждой ветви. Для ознакомления с этим путем решения рекомендуем обратиться к [38]. В дополнение к этим путям решения рассмотрим решение поставленной задачи несколько иным путем.

§ 10.2. СИНТЕЗ ДВУХПОЛЮСНИКОВ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ВРЕМЕННО́ГО ОТКЛИКА НА ПРОСТЕЙШИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ И РЕАЛИЗАЦИИ ИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Задачу будем решать следующим образом:

1. Сначала выделим из кривой $i(t)$ принужденный ток и получим график свободного тока $i_{св}(t)$. В частном случае принужденный ток может отсутствовать, и тогда первый этап отпадает.

2. Так как свободный ток в линейной цепи всегда может быть представлен в виде суммы затухающих экспонент, всплесков из затухающих экспонент и затухающих синусоидальных колебаний (рис. 10.1), то второй и самый трудоемкий этап расчета состоит в том, чтобы сначала оценить, совокупностью какого типа кривых

(рис. 10.1) можно аппроксимировать имеющуюся кривую $i_{св}(t)$, а затем произвести аппроксимацию.

При этом отклонение суммы ординат аппроксимирующих кривых от ординат $i_{св}(t)$ не должно превышать заданной в процентном или в абсолютном значении величины.

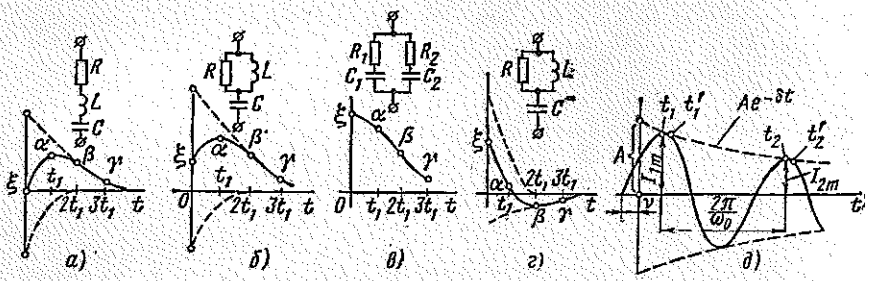


Рис. 10.1

Такого рода разложение в общем случае может быть выполнено не единственным образом. Кроме того, сами аппроксимирующие кривые должны быть такими, чтобы их можно было практически осуществить как свободные токи в ветвях, подобных изображенным на рис. 10.1. Задача может быть решена методом последовательных приближений.

3. В общем случае кривая $i_{св}(t)$ может состоять из составляющих, затухающих с различной скоростью. Поэтому первое, что необходимо сделать, это выделить из состава $i_{св}(t)$ медленно изменяющуюся затухающую составляющую.

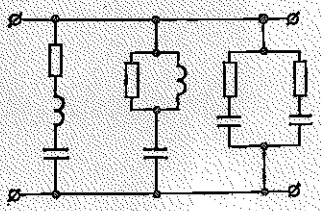


Рис. 10.2

На рис. 10.2 изображен двухполюсник с несколькими параллельными ветвями. Каждая ветвь служит для реализации соответствующей составляющей свободного тока. Одна из ветвей двухполюсника может быть приспособлена путем соответствующего видоизменения так, чтобы обеспечить протекание принужденной составляющей (такая ветвь на рис. 10.2 не показана).

4. Следующий этап состоит в определении значений показателей затухания и начальных значений экспонент, из которых образованы кривые рис. 10.1, *а*, *б*, *в*, *г*, и нахождении начальной амплитуды, фазы, угловой частоты и коэффициента затухания для кривых по типу представленных на рис. 10.1, *д*. Одновременно находим параметры R, L, C ветвей, которые соответствуют каждой из кривых рис. 10.1, *а*, *б*, *в*, *г*.

5. Строим расчетную результирующую кривую и сопоставляем ее с полученной в п. 1. При необходимости производим новое приближение.

Рассмотрим п. 4 более подробно.

Для каждой кривой рис. 10.1, *а*, *б*, *в* решение имеет вид $A_1e^{-at}+A_2e^{-bt}$, причем a и b действительные, неравные положительные числа.

Для кривых на рис. 10.1, *а* $A_2=-A_1$, $a>b$; на рис. 10.1, *б* $-A_1>0$, $A_2<0$, $A_1>|A_2|$, $a>b$;

на рис. 10.1, *в* $-A_1>0$, $A_2>0$; на рис. 10.1, *г* $-a=b$, и решение имеет вид $(A_1+A_2t)e^{-at}$, $A_1>0$, $A_2<0$, $A_1>|A_2|$.

Определение значений A_1, A_2, a и b для кривых рис. 10.1, *а*, *б*, *в* производим по четырем значениям ординат соответствующей кривой (назовем их ξ, α, β, γ), взятых для четырех равноотстоящих значений времени: $t=0$, $t=t_1$, $t=2t_1$, $t=3t_1$.

Для каждой кривой в отдельности момент времени, обозначенный как t_1, берут таким, чтобы четыре точки кривой достаточно точно отобразили свойства всей кривой на интересующем интервале времени. Определим показатели затухания a и b, начальные значения A_1 и A_2 экспонент рис. 10.1, *а* и значения R, L, C ветви, физически осуществляющей свободную составляющую в виде кривой, изображенной на рис. 10.1, *а*. Обозначим $e^{-at_1}=x$, $e^{-a2t_1}=x^2$, $e^{-a3t_1}=x^3$, $e^{-bt_1}=y$, $e^{-b2t_1}=y^2$, $e^{-b3t_1}=y^3$.

Для кривой рис. 10.1, *а* начальное значение (при $t=0$) равно нулю. Поэтому $\xi=0$; $A_1=A$; $A_2=-A$. Решая совместно систему $A(x-y)=\alpha$; $A(x^2-y^2)=\beta$; $A(x^3-y^3)=\gamma$ и введя обозначение $d=(\beta/\alpha)^2-\gamma/\alpha$, найдем:

$$x=\frac{\beta}{2\alpha}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-d};\quad y=\frac{d}{x};\quad A=\frac{\alpha}{x-y};$$

$$a=\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{x};\quad b=\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{y}.$$

Так как x и y должны быть больше нуля и $x>y$, то между ординатами кривой α, β, γ должно выполняться соотношение

$$\beta<\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\alpha\gamma}.$$

После этого находим время $t_{max}=\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$, при достижении которого расчетная кривая с найденными значениями a и b проходит через свой максимум. Находим этот максимум и сопоставляем с максимумом кривой рис. 10.1, *а*.

В случае необходимости несколько корректируем значения α, β, γ. После того как значения a и b определены, находим параметры R, L, C ветви, осуществляющей всплеск тока в виде кривой рис. 10.1, *а*:

$$R/L=a+b,\quad LC=1/(ab).$$

Индуктивность L найдем из дополнительного условия, состоящего в том, что при $t=0$ приложенное к ветви единичное напря-

жение равно напряжению на индуктивности. Это условие дает $L=\frac{1}{A(b-a)}$.

Затем определим A_1, A_2, a и b для кривых рис. 10.1, *б*, *в*. Эти кривые описываются выражением $A_1e^{-at}+A_2e^{-bt}$, причем $A_1\neq A_2$. Составляем систему

$$A_1+A_2=\xi;\quad A_1x=A_2y=\alpha;\quad A_1x^2+A_2y^2=\beta;\quad A_1x^3+A_2y^3=\gamma.$$

Подставив в три последних уравнения $A_2=\xi-A_1$ и поделив их почленно, придем к следующему трансцендентному уравнению относительно y:

$$\frac{\beta-\xi y^3}{\alpha-\xi y}-\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{\gamma-\xi y^3}{\alpha-\xi y}-0{,}75y^2}.$$

После этого находим

$$x=\frac{\beta-\xi y^2}{\alpha-\xi y}-y;\quad A_1=\frac{\alpha-\xi y}{x-y};\quad A_2=\xi-A_1;$$

$$x>y>0;\quad a=\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{x};\quad b=\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{y}.$$

Параметры ветви, описывающей всплеск свободного тока в виде кривой рис. 10.1, *б*, определяем следующим образом:

$$R=1/\xi;\quad C=1/[R(a+b)];\quad L=1/(abC)$$

Активные сопротивления R_1 и R_2, емкости C_1 и C_2 двух параллельных ветвей рис. 10.1, *в* находим так:

$$R_1=1/A_1;\quad R_2=1/A_2;\quad C_1=1/(aR_1);\quad C_2=1/(bR_2).$$

Кривая рис. 10.1, *г* соответствует случаю равных показателей затухания $b=a$ и описывается выражением $(A_1+A_2t)e^{-at}$. Для нахождения A_1, A_2 и a составим уравнения:

$$A_1=\xi;\quad (\xi+A_2t_1)x=\alpha;\quad (\xi+A_2 2t_1)x^2=\beta.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x}=\frac{\alpha}{\beta}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{\xi}{\beta}};\quad A_2=\frac{\alpha}{xt_1}-\frac{\xi}{t_1};\quad a=\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{x}.$$

R, L, C определим по формулам $R=1/\xi$, $C=1/(2aR)$; $L=1/(a^2C)$.

Характеристики A, ν, ω_0 и δ затухающего синусоидального колебания $Ae^{-\delta t}(\omega_0t+\nu)$ находим в соответствии с рис. 10.1, *д*. Функция проходит через максимум при

$$\operatorname{tg}(\omega_0t_1+\nu)=\operatorname{tg}(\omega_0t_2+\nu)=\frac{\omega_0}{\delta};$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{t_2-t_1};\quad \delta=\frac{1}{t_2-t_1}\ln\frac{I_{1m}}{I_{2m}};$$

$$\nu=\operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\delta}-\omega_0t_1;\quad A=\frac{I_{m1}}{e^{-\delta t_1}\sin(\omega_0t_1+\nu)}.$$

§ 10.3. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА СИНТЕЗА РЕАКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ЛЕСТНИЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПО ЗАДАННОМУ ВРЕМЕННО́МУ ОТКЛИКУ

Рассмотрим решение задачи о синтезе четырехполюсника, на выходе которого включена нормированная (нормализованная) нагрузка $Z_н = 1$ Ом. На вход четырехполюсника воздействует постоянное напряжение $U_1 = 1$ В. Напряжение на выходе четырехполюсника задано в виде графика. На функцию времени $f(t)$ накладывается ограничение — ее изображение $F(p)$ таково, что у частотной характеристики $F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, получающейся из $F(p)$ после замены p на $j\omega$, нули $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ расположены на мнимой оси и чередуются.

Таким свойством обладают, например, функции $f(t)$ в виде импульсов, симметричных относительно средней (вертикальной) линии.

В [39] показано, что эту задачу можно решить с помощью четырехполюсника лестничной структуры из чисто реактивных элементов, поскольку у таких четырехполюсников нули действительной и мнимой частей передаточной функции при замене p на $j\omega$ также расположены на мнимой оси и чередуются.

Если параметры четырехполюсника выбрать из условия совпадения нулей у операторного изображения заданной функции времени и у реактивного четырехполюсника, то последний сможет с некоторой степенью точности воспроизводить заданную $f(t)$.

В укрупненном плане последовательность решения задачи этим методом такова.

1. Заданную графически функцию времени $f(t)$ аппроксимируют и находят ее изображение $F_a(p)$.

2. Строят вещественную и мнимую частотные характеристики $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и по ним определяют полосу частот, в которой расположена существенная часть спектра. Находят нули $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, расположенные в этой части спектра.

3. Используют общее выражение для передаточной функции реактивного цепного (лестничного) четырехполюсника и составляют действительную $\mathrm{Re}\,K_u(j\omega)$ и мнимую $\mathrm{Im}\,K_u(j\omega)$ частотные характеристики передаточной функции. Полагают, что ранее найденные нули временно́й функции $P(\omega)$ равны нулям $\mathrm{Re}\,K_U(j\omega)$, а нули $Q(\omega)$ равны нулям $\mathrm{Im}\,K_u(j\omega)$.

Это дает возможность определить проводимости Y_{22} и $-Y_{21}$ искомого четырехполюсника. По найденным Y_{22} и $-Y_{21}$ реализуют четырехполюсник.

§ 10.4. ИМПУЛЬСНЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИМЕНЕНИЕ ЕГО ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

Положим, что функция времени $f(t)$ задана графически и требуется найти ее операторное изображение. В 1953 г. Гиллемин [18] предложил импульсный метод аппроксимации временны́х функций, согласно которому:

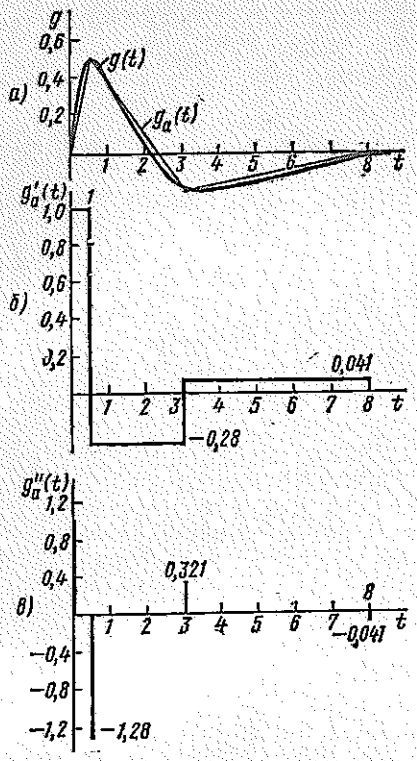


Рис. 10.3

1) аппроксимируют $f(t)$ отрезками парабол или в частном случае отрезками прямых линий так, чтобы время стыка t_k двух соседних участков было кратно некоторому интервалу времени $\Delta\tau$;

2) дифференцируют аппроксимирующую функцию $f_a(t)$ столько (ν) раз, сколько требуется для получения производных в виде импульсных функций; если $f(t)$ аппроксимирована отрезками прямых линий, то $\nu=2$, если отрезками квадратичных парабол, то $\nu=3$;

3) составляют изображение ν-й производной $f_a(t)$ и по нему находят изображение $F_a(p)$.

На рис. 10.3, *а* изображена $f(t)=g(t)$. Она аппроксимирована отрезками прямых. На рис. 10.3, *б* показан график первой производной $f'_a(t)=g'_a(t)$ и на рис. 10.3, *в* — график второй производной $f''_a(t)=g''_a(t)$. Этот график представляет собой серию импульсов в точках t_k. Ордината импульса в точке t_k равна разностям первой производной $f'_a(t)$ после скачка и до скачка. Так, для рис. 10.3, *в*:

t_k	0	0,5	3	8
$f''_a(t)$	1	−1,28	+0,321	−0,041

В данном примере все времена t_k кратны $\Delta\tau=0{,}5$ с.

Если через n обозначить число импульсов, то при аппроксимации должны быть выполнены условия моментов

$$\sum_{k=0}^{n} f''_a(t_k)\,t_k=0$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} f''_a(t_k)=\ ).$$

В рассматриваемом примере эти условия выполнены:

$$\sum f''_a(t_k) = 1 - 1{,}28 + 0{,}321 - 0{,}041 \approx 0;$$
$$\sum f''_a(t_k)\, t_k = -0{,}5 \cdot 1{,}28 + 3 \cdot 0{,}321 - 8 \cdot 0{,}041 \approx 0.$$

Вторую производную функции $f_a(t)$ можно записать через δ-функцию как сумму импульсов амплитудой a_k в моменты t_k:

$$f''_a(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta(t - t_k).$$

В рассматриваемом примере

$$f''_a(t) = 1 \cdot \delta(t) - 1{,}28\delta(t - 0{,}5) + 0{,}321\delta(t - 3) - 0{,}041\delta(t - 8).$$

Далее находят изображение $F_a(p)$, равное передаточной функции четырехполюсника $K_U(p)$ по известной $f''_a(t)$. Имея в виду, что лапласово изображение δ-функции равно единице, изображение $a_k\delta(t)$ равно a_k, а изображение $a_k\delta(t - t_k)$ равно $a_k e^{-pt_k}$, запишем изображение $f''_a(t)$ в виде $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-pt_k}$. Так как ν-кратное дифференцирование $f_a(t)$ по времени t соответствует умножению $K_U(p)$ на p^ν, то

$$K_U(p) \approx F_a(p) = \frac{1}{p^\nu} \int_0^\infty \sum a_k \delta(t - t_k)\, e^{-pt}\, dt = \frac{\sum a_k e^{-pt_k}}{p^\nu}. \qquad (10.1)$$

В рассматриваемом примере

$$K_U(p) = \frac{1}{p^2}[1 - 1{,}28e^{-0{,}5p} + 0{,}321e^{-3p} - 0{,}041e^{-8p}]. \qquad (10.2)$$

Подставим $p = j\omega$ в $K_U(p)$ и выделим действительные и мнимые части $K_U(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$:

$$P(\omega) = \frac{1}{-\omega^2}(1 - 1{,}28\cos 0{,}5\omega + 0{,}321\cos 3\omega - 0{,}041\cos 8\omega);$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{-\omega^2}(1{,}28\sin 0{,}5\omega - 0{,}321\sin 3\omega + 0{,}041\sin 8\omega).$$

Придавая ω различные значения от 0 до ∞, можно построить графики для $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и по ним определить полосу частот, занимаемую существенной частью спектра $K_U(p)$. Уравнения $P(\omega) = 0$ и $Q(\omega) = 0$ в области существенной части спектра могут иметь один или несколько одинаковых корней. Назовем их γ_q. Остальные корни $P(\omega) = 0$ и $Q(\omega) = 0$ в этой части спектра назовем соответственно α_k и β_k.

§ 10.5. СВОЙСТВА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РЕАКТИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ЛЕСТНИЧНОГО ТИПА И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИХ ПРИ СИНТЕЗЕ

На рис. 10.4 изображен четырехполюсник, к выходным зажимам его присоединена нормализованная нагрузка $Z_н = 1$. Четырехполюсник состоит из реактивных элементов L и C. Запишем уравнения четырехполюсника в Y-форме:

$$I_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2;$$
$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$

Положительные направления отсчета $\dot{U}_1$, I_1, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ показаны на рис. 10.4. Передаточная функция

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{U_2(p)\,Y_{21}}{I_2(p) - Y_{22}U_2(p)} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}+1}. \qquad (10.3)$$

При выводе (10.3) учтено, что $\frac{I_2(p)}{U_2(p)} = -\frac{1}{Z_н} = -1$.

Передаточную функцию можно представить в виде отношения двух полиномов

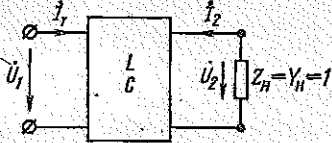


Рис. 10.4

$$K_U(p) = k\,\frac{p^m + \alpha_{m-1}p^{m-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0}{p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0}. \qquad (10.4)$$

Здесь $m \leqslant n$ и $\beta_0 \neq 0$; k — численный коэффициент.

Полином числителя назовем $M(p)$. Знаменатель представим в виде четной и нечетной частей $N_2(p) + A_2 p N_1(p)$. Тогда

$$K_U(p) = \frac{A_1 M(p)}{N_2(p) + A_2 p N_1(p)}. \qquad (10.5)$$

Сопоставим (10.5) с (10.3) и из сопоставления найдем $-Y_{21}$ и Y_{22}. Имея в виду, что $-Y_{21}$ должно быть нечетным [58] при четном $M(p)$, делим правую часть (10.5) на $A_2 p N_1(p)$:

$$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}+1} = \frac{\frac{A_1 M(p)}{A_2 p N_1(p)}}{\frac{N_2(p)}{A_2 p N_1(p)} + 1}; \quad -Y_{21} = \frac{A_1 M(p)}{A_2 p N_1(p)}; \quad Y_{22} = \frac{N_2(p)}{A_2 p N_1(p)}. \qquad (10.6)$$

При нечетном $M(p)$ делим правую часть (10.5) на $N_2(p)$, тогда

$$-Y_{21} = \frac{A_1 M(p)}{N_2(p)}; \quad Y_{22} = \frac{A_2 N_1(p)}{N_2(p)}. \qquad (10.7)$$

В общем случае число полюсов у Y_{22} может превышать число полюсов у $-Y_{21}$ за счет того, что часть нулей $A_1 M(p)$ может совпадать с некоторыми из нулей $N_2(p)$.

Четырехполюсник можно осуществить в виде цепной схемы, если определить $M(p)$, $N_1(p)$ и $N_2(p)$ и найти A_1 и A_2. Все по-

линомы $N_1(p)$, $N_2(p)$ являются четными и имеют нули на мнимой оси.

Нули $M(p)$, не равные нулю, обозначим $\pm jC_q$, тогда

$$M(p) = \prod_{q=1}^{m} (p^2 + C_q^2).$$

Нули $N_2(p) = 0$ назовем $\pm ja_k$, тогда

$$N_2(p) = \prod_{k=1}^{n} (p^2 + a_k^2).$$

Нули $N_1(p) = 0$ обозначим $\pm jb_k$, тогда

$$N_1(p) = \prod_{k=1}^{r} (p^2 + b_k^2).$$

Нули a_k и b_k чередуются.

В формулу (10.5) вместо p подставим $j\omega$ и выделим действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} K_U(j\omega) = \frac{A_1 \prod_q (C_q^2 - \omega^2) \prod_k (a_k^2 - \omega^2)}{N_2^2(\omega^2) + A_2^2\omega^2 N_1^2(\omega^2)}; \qquad (10.8)$$

$$\operatorname{Im} K_U(j\omega) = \frac{-A_1 A_2 \omega \prod_q (C_q^2 - \omega^2) \prod_k (b_k^2 - \omega^2)}{N_2^2(\omega^2) + A_2^2\omega^2 N_1^2(\omega^2)}. \qquad (10.9)$$

Так как четырехполюсник должен воспроизводить аппроксимирующую функцию $f_a(t)$, то в области существенной части спектра нули $P(\omega)$ должны совпадать с нулями $\operatorname{Re} K_U(j\omega)$, а нули $Q(\omega)$ — с нулями $\operatorname{Im} K_U(j\omega)$. Напомним, что совпадающие нули $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ обозначены γ_q, остальные нули $P(\omega)$ названы α_k, а у $Q(\omega)$ — p_k. В свою очередь совпадающие нули у $\operatorname{Re} K_U(j\omega)$ и $\operatorname{Im} K_U(j\omega)$ названы C_q, остальные нули у $\operatorname{Re} K_U(j\omega)$ обозначены a_k, остальные нули у $\operatorname{Im} K_U(j\omega)$ названы b_k. Таким образом, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$ и $\gamma_q = C_q$.

Отсюда следует, что $M(p)$ равно

$$\Pi(p^2 + \gamma_q^2); \qquad N_2(p) = \Pi(p^2 + \alpha_k^2); \qquad N_1(p) = \Pi(p^2 + \beta_k^2).$$

Если обратиться к формулам (10.6) и (10.7), то можно заметить, что для полного определения Y_{22} надо найти еще коэффициенты A_1 и A_2. Их определяют, исходя из того, что численное значение $P(\omega)$ при некоторой ω_l, находящейся в области существенной части спектра, т. е. $P(\omega_l)$, должно равняться $\operatorname{Re} K_U(j\omega)$ при этой частоте, а $Q(\omega_l)$ должно быть $\operatorname{Im} K_U(j\omega_l)$. Так подсчитывают при нескольких ω_l, а затем берут средневзвешенные их значения

$$A_1 = \frac{\sum_l A_{1l} |P_l|}{\Sigma |P_l|}; \qquad A_2 = \frac{\sum_l A_{2l} |Q_l|}{\Sigma |Q_l|}.$$

При реализации цепной схемы по найденным Y_{22} и $-Y_{21}$ руководствуются тем, что Y_{22} является входной проводимостью четырехполюсника со стороны выходных зажимов при короткозамкнутом входе, а $-Y_{21}$ — взаимной проводимостью между входной и выходной ветвями. Учитывая это, сначала выясняют, имеются ли у Y_{22} полюсы, являющиеся избыточными по сравнению с полюсами $-Y_{21}$. Если они имеются, то синтезируемый четырехполюсник имеет одну или несколько ветвей, отвечающих этим полюсам, шунтирующих нагрузку $Z_н = 1$. Каждая из них состоит из последовательно соединенных L и C. Положим, что суммарная проводимость таких ветвей равна Y_1. Тогда останется реализовать $Y_{22} - Y_1 = Y'_{22}$. Дальнейшую реализацию проводят, последовательно выделяя элементы схемы, соответствующие нулям и полюсам Y'_{22}.

Между погрешностями во временно́й и частотной областях имеются связи интегрального вида. При равномерном приближении малой погрешности во временно́й области $\varepsilon(t) = f(t) - f_э(t)$ соответствует малая погрешность в частотной области $F(p) - F_э(p) = \varepsilon(p)$, так как по теореме Рейли

$$\int_0^\infty \varepsilon^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\varepsilon(j\omega)|^2\,d\omega.$$

Глава одиннадцатая

МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 11.1. НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ И УКОРОЧЕННАЯ МАТРИЦЫ УЗЛОВЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ

В литературе по радиоэлектронике [64—66 и др.] широко распространены методы расчета, в которых использованы неопределенная и укороченная матрицы узловых проводимостей и формула для двойного алгебраического дополнения, известная из теории определителей.

Неопределенная матрица узловых проводимостей представляет собой матрицу, составленную для всех узлов схемы, в том числе и для базисного, относительно которого отсчитываются потенциалы. Это квадратная матрица, в которой число строк равно числу столбцов. В клетках таблицы, находящихся на пересечении одноименных строк и столбцов, например, k-строки и k-столбца, помещают взятую со знаком плюс сумму проводимостей ветвей, сходящихся в k-узле. В клетке таблицы, соответствующей k-строке и m-столбцу, записывают сумму проводимостей ветвей, соединяющих k- и m-узлы, взятую со знаком минус. Сумма элементов любого столбца и любой строки неопределенной матрицы равна нулю (это следует учитывать при проверке правильности составления матрицы).

Определитель неопределенной матрицы равен нулю.

Укороченную матрицу составляют из неопределенной, вычеркивая строку и столбец, соответствующие базисному узлу.

Неопределенную матрицу составляют либо непосредственно по схеме, либо получают как сумму матриц отдельных звеньев схемы. Непосредственно по схеме матрицу составляют обычно, когда все проводимости между узлами можно записать относительно легко. Если же в схеме имеются трансформаторы, транзисторы, электронные лампы и элементы схемы связаны различными видами обратных связей, то неопределенную матрицу узловых проводимостей получают суммированием матриц отдельных звеньев с учетом обратных связей непосредственно по схеме. При суммировании матриц узловых проводимостей отдельных звеньев суммируют одноименные элементы этих матриц.

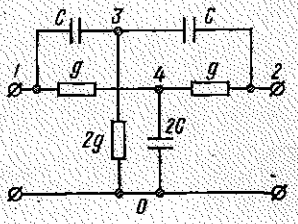


Рис. 11.1

При составлении матрицы нумерация узлов в схеме может быть любая, однако для единообразия в дальнейшем базисный узел будем обозначать 0, входной — 1, выходной — 2, а цифрами 3, 4, ... — внутренние узлы схемы.

В качестве примера составим неопределенную матрицу узловых проводимостей в операторной форме для двойного Т-моста, представленного на рис. 11.1.

Строки	*Узлы*				
	1	2	3	4	0
1	$g+pC$	0	$-pC$	$-g$	0
2	0	$g+pC$	$-pC$	$-g$	0
3	$-pC$	$-pC$	$2g+2pC$	0	$-2g$
4	$-g$	$-g$	0	$2g+2pC$	$-2pC$
0	0	0	$-2g$	$-2pC$	$2g+2pC$

Убеждаемся в том, что сумма элементов любой строки и любого столбца равна нулю. Как правило, проводимость нагрузки и проводимость источника питания в неопределенную матрицу не включают. Так принято в методах расчета, рассмотренных в § 11.4 и 11.5.

§ 11.2. МАТРИЦЫ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

При составлении неопределенной матрицы узловых проводимостей в виде суммы матриц составляющих ее звеньев оперируют с матрицами активных сопротивлений, индуктивностей, емкостей, трансформаторов, транзисторов, электронных ламп и других элементов.

Матрицы отдельных звеньев будем составлять через проводимости.

Нумерация узлов у отдельных элементов должна быть согласована с нумерацией узлов во всей схеме. При составлении матриц отдельных элементов будем считать, что потенциалы узлов отсчитываются относительно некоторого общего уровня отсчета и что токи в элемент подтекают от каждого из узлов, с которыми он соединен.

Для активного сопротивления с проводимостью Y (рис. 11.2) по закону Ома

$$\dot{I}_m = (\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n) Y; \quad \dot{I}_n = (\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_m) Y,$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_m \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_m \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица проводимостей резистивного сопротивления (индуктивности, емкости) равна

$$\begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}. \tag{11.1}$$

Составим матрицу узловых проводимостей трансформатора, у которого индуктивность первичной обмотки L_1, вторичной L_2 и

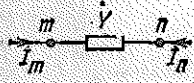


Рис. 11.2

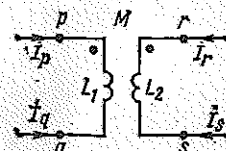


Рис. 11.3

взаимная индуктивность M (рис. 11.3). Одноименные зажимы магнитно-связанных обмоток обозначены точками.

Составим разности потенциалов между точками p и q и затем между точками r и s:

$$\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_q = \dot{I}_p j\omega L_1 + \dot{I}_r j\omega M;$$
$$\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_s = \dot{I}_r j\omega L_2 + \dot{I}_p j\omega M.$$

Из первого уравнения найдем $\dot{I}_r = \dfrac{\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_q - \dot{I}_p j\omega L_1}{j\omega M}$ и подставим во второе:

$$\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_s = \frac{L_2}{M} (\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_q - j\omega L_1 \dot{I}_p) + \dot{I}_p j\omega L_1,$$

или

$$\dot{I}_p = \frac{M}{D} \left(\frac{L_2}{M} \dot{\varphi}_p - \frac{L_2}{M} \dot{\varphi}_q - \dot{\varphi}_r + \dot{\varphi}_s \right) = \frac{1}{D} (L_2 \dot{\varphi}_p - L_2 \dot{\varphi}_q - M\dot{\varphi}_r + M\dot{\varphi}_s),$$

$$D = j\omega (L_1 L_2 - M^2).$$

Аналогично находим

$$I_r = \dot{\varphi}_p\left(\frac{1}{j\omega M} - \frac{L_1L_2}{MD}\right) - \dot{\varphi}_q\left(\frac{1}{j\omega M} - \frac{L_1L_2}{MD}\right) + \frac{L_1}{D}\dot{\varphi}_r - \frac{L_1}{D}\dot{\varphi}_s,$$

или

$$I_r = \frac{1}{D}\left(-M\dot{\varphi}_p + M\dot{\varphi}_q + L_1\dot{\varphi}_r - L_1\dot{\varphi}_s\right).$$

Далее учитываем, что $I_q = -I_p$ и $I_s = -I_r$ и записываем токи через потенциалы узлов:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_q \\ I_r \\ I_s \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \begin{matrix} p \\ L_2 \\ -L_2 \\ -M \\ M \end{matrix} & \begin{matrix} q \\ -L_2 \\ L_2 \\ M \\ -M \end{matrix} & \begin{matrix} r \\ -M \\ M \\ L_1 \\ -L_1 \end{matrix} & \begin{matrix} s \\ M \\ -M \\ -L_1 \\ L_1 \end{matrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_p \\ \dot{\varphi}_q \\ \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_s \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что неопределенная матрица узловых проводимостей трансформатора такова:

$$\frac{1}{D}\begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s \end{matrix}\begin{bmatrix} \begin{matrix} p \\ L_2 \\ -L_2 \\ -M \\ M \end{matrix} & \begin{matrix} q \\ -L_2 \\ L_2 \\ M \\ -M \end{matrix} & \begin{matrix} r \\ -M \\ M \\ L_1 \\ -L_1 \end{matrix} & \begin{matrix} s \\ M \\ -M \\ -L_1 \\ L_1 \end{matrix} \end{bmatrix}. \qquad (11.2)$$

Для синусоидального процесса $D = j\omega(L_1L_2 - M^2)$, для переходного $D = p(L_1L_2 - M^2)$. Если вместо согласного включения будет встречное, M изменит знак на противоположный. Если на схеме

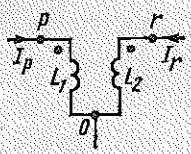


Рис. 11.4

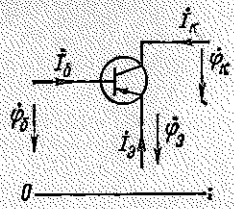


Рис. 11.5

узлы s и q соединены с базисным узлом O (рис. 11.4), определяющим уровень отсчета потенциалов, то $\dot{\varphi}_q = \dot{\varphi}_s = 0$ и тогда укороченную матрицу узловых проводимостей запишем так:

$$\frac{1}{D}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}. \qquad (11.3)$$

Составим неопределенную матрицу проводимостей биполярного транзистора для малых переменных составляющих (т. е. для линеаризованной схемы). Для схемы рис. 11.5

$$I_б = Y_{бб}(\varphi_б - \varphi_э) + Y_{бк}(\varphi_к - \varphi_э);$$

$$I_к = Y_{кб}(\varphi_б - \varphi_э) + Y_{кк}(\varphi_к - \varphi_э);$$

где $Y_{бб}$, $Y_{бк}$, $Y_{кб}$ и $Y_{кк}$ — проводимости для схемы включения с общим эмиттером.

Введем ток $I_б$, учтя, что $I_б + I_к + I_э = 0$:

$$I_б = Y_{бб}\varphi_б - (Y_{бб} + Y_{бк})\varphi_э + Y_{бк}\varphi_к;$$
$$I_э = -(Y_{бб} + Y_{кб})\varphi_б + (Y_{бб} + Y_{бк} + Y_{кб} + Y_{кк})\varphi_э - (Y_{бк} + Y_{кк})\varphi_к;$$
$$I_к = Y_{кб}\varphi_б - (Y_{кб} + Y_{кк})\varphi_э + Y_{кк}\varphi_к,$$

или

$$\begin{bmatrix} I_б \\ I_э \\ I_к \end{bmatrix} = \begin{matrix} б \\ э \\ к \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{б}{Y_{бб}} & \overset{э}{-(Y_{бб} + Y_{бк})} & \overset{к}{Y_{бк}} \\ -(Y_{бб} + Y_{кб}) & Y_{бб} + Y_{бк} + Y_{кб} + Y_{кк} & -(Y_{бк} + Y_{кк}) \\ Y_{кб} & -(Y_{кб} + Y_{кк}) & Y_{кк} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_б \\ \varphi_э \\ \varphi_к \end{bmatrix}.$$

Таким образом, неопределенная матрица узловых проводимостей транзистора

$$\begin{matrix} б \\ э \\ к \end{matrix} \begin{bmatrix} \overset{б}{Y_{бб}} & \overset{э}{-(Y_{бб} + Y_{бк})} & \overset{к}{Y_{бк}} \\ -(Y_{бб} + Y_{кб}) & Y_{бб} + Y_{бк} + Y_{кб} + Y_{кк} & -(Y_{бк} + Y_{кк}) \\ Y_{кб} & -(Y_{кб} + Y_{кк}) & Y_{кк} \end{bmatrix}. \qquad (11.4)$$

В зависимости от того, какой электрод (узел) транзистора заземлен, для получения укороченной матрицы узловых проводимостей в (11.4) надлежит вычеркнуть строку и столбец, соответствующие этому узлу. Так, если будет заземлена база, будет вычеркиваться б-строка и б-столбец. Справедливо и обратное действие: если известна укороченная матрица узловых проводимостей при каком-то заземленном электроде, например базе, и из нее хотят получить матрицу узловых проводимостей при другом заземленном электроде, то сначала матрицу дополняют до неопределенной, заполнив клетки, соответствующие ранее вычеркнутым строке и столбцу, а затем в полученной неопределенной матрице вычеркивают строку и столбец, отвечающие новому заземленному узлу.

Так как транзистор представляет собой невзаимный трехполюсник, то для него $Y_{кб} \neq Y_{бк}$, $Y_{бк}$ и $Y_{кк}$ на несколько порядков меньше $Y_{бб}$ и $Y_{кб}$, поэтому в неопределенной матрице (11.4) частью слагаемых можно пренебречь по сравнению с остальными. Например, вместо $-(Y_{бб} + Y_{бк})$ взять $-Y_{бб}$, вместо

$$Y_{бб} + Y_{бк} + Y_{кб} + Y_{кк} \text{ взять } Y_{бб} + Y_{кб}$$

и т. д.

Если заданы не Y-параметры транзистора, а какие-либо другие, например H-параметры, то от них надлежит перейти к Y-пара-

метрам по соответствующим формулам перехода:

$$Y_{бб}=\frac{1}{H_{11}};\quad Y_{бк}=-\frac{H_{12}}{H_{11}};\quad Y_{кб}=\frac{H_{21}}{H_{11}};\quad Y_{кк}=\frac{\Delta_H}{H_{11}}.$$

Составим неопределенную матрицу узловых проводимостей электронной лампы для малых переменных составляющих при относительно низких частотах. На рис. 11.6 $g_{ск}$ означает внешнюю проводимость, обусловленную внешним по отношению к лампе сопротивлением; на рис. 11.7 $g_{ак}=1/R_i=g_i$ — проводимость анод — катод; $S=\mu/R_i$ — крутизна характеристики, где μ — коэффициент усиления. Источник тока $S(\varphi_с-\varphi_к)$ на рис. 11.7 дает возможность учесть усилительные свойства лампы. В соответствии с рис. 11.7

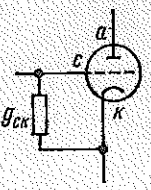


Рис. 11.6

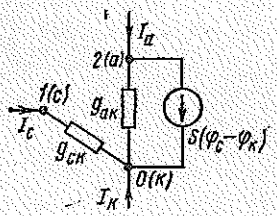


Рис. 11.7

$$I_с=g_{ск}(\varphi_с-\varphi_к);$$
$$I_а=g_{ак}(\varphi_а-\varphi_к)+S(\varphi_с-\varphi_к);$$
$$I_к=g_{ск}(\varphi_к-\varphi_с)+g_{ак}(\varphi_к-\varphi_а)+S(\varphi_к-\varphi_с).$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix}I_с\\I_а\\I_к\end{bmatrix}\begin{matrix}с\\а\\к\end{matrix}=\begin{matrix}\quad с\quad & \quad а\quad & \quad к\quad\\\end{matrix}\begin{bmatrix}g_{ск} & 0 & -g_{ск}\\S & g_{ак} & -(S+g_{ак})\\-(S+g_{ск}) & -g_{ак} & g_{ск}+g_{ак}+S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_с\\\varphi_а\\\varphi_к\end{bmatrix}.$$

Таким образом, неопределенная матрица узловых проводимостей электронной лампы

$$\begin{matrix}\quad с\quad & \quad а\quad & \quad к\quad\\\end{matrix}\begin{matrix}\\с\\а\\к\end{matrix}\begin{bmatrix}g_{ск} & 0 & -g_{ск}\\S & g_{ак} & -(S+g_{ак})\\-(S+g_{ск}) & -g_{ак} & g_{ск}+S+g_{ак}\end{bmatrix}.$$

Составим неопределенную матрицу узловых проводимостей для транзисторной схемы рис. 11.8. Биполярный транзистор включен по схеме с общим эмиттером, где $g_н$ — проводимость нагрузки; $Y_и$ — проводимость источника питания; Y_0 — проводимость ветви обратной связи. Так как схема относительно простая, то матрицу

можно записать, не составляя матрицы отдельных звеньев, $g_н$ и $Y_н$ в матрицу не включаем. Учитываем, что узел *1* соответствует базе, *2* — коллектору, *0* — эмиттеру; при этом

$$\begin{array}{c} \\ 1\,(б) \\ 2\,(к) \\ 0\,(э) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\,(б) & 2\,(к) & 0\,(э) \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{бб}+Y_0 & Y_{бк}-Y_0 & -(Y_{бб}+Y_{бк}) \\ Y_{кб}-Y_0 & Y_{кк}+Y_0 & -(Y_{кб}+Y_{кк}) \\ -(Y_{бб}+Y_{кб}) & -(Y_{бк}+Y_{кк}) & Y_{бб}+Y_{бк}+Y_{кб}+Y_{кк} \end{bmatrix} \end{array}.$$

2. Составим матрицу узловых проводимостей для двухлампового усилителя с обратной связью (рис. 11.9) путем суммирования матриц первой лампы, второй лампы и ветви обратной связи.

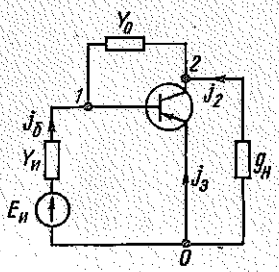


Рис. 11.8

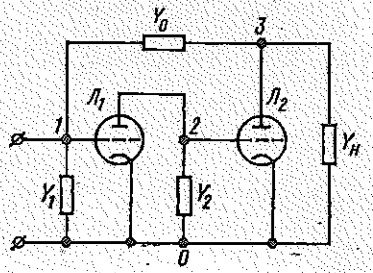


Рис. 11.9

Матрица лампы $Л_1$

$$\begin{array}{c} \\ 1\,(с) \\ 2\,(а) \\ 0\,(к) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\,(с) & 2\,(а) & 0\,(к) \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 \\ S_1 & Y'_{ак} & -(S_1+Y'_{ак}) \\ -(Y_1+S_1) & -Y'_{ак} & Y_1+Y'_{ак}+S_1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица ветви обратной связи

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_0 & -Y_0 \\ -Y_0 & Y_0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица лампы $Л_2$

$$\begin{array}{c} \\ 2\,(с) \\ 3\,(а) \\ 0\,(к) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\,(с) & 3\,(а) & 0\,(к) \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_2 & 0 & -Y_2 \\ S_2 & Y''_{ак} & -(S_2+Y''_{ак}) \\ -(Y_2+S_2) & -Y''_{ак} & Y_2+Y''_{ак}+S_2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Неопределенную матрицу узловых проводимостей всей схемы (не включая в нее проводимость нагрузки) получим, суммируя

соответствующие элементы трех матриц:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_1+Y_0 & 0 & -Y_0 & -Y_1 \\ S_1 & Y'_{ак}+Y_2 & 0 & -Y_2-S_1-Y'_{ак} \\ -Y_0 & S_2 & Y_0+Y''_{ак} & -S_2-Y_{ак} \\ -Y_1-S_1-Y'_{ак}-Y_2-S_2 & & -Y''_{ак} & Y_1+Y'_{ак}+S_1+Y_2+Y''_{ак}+S_2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

§ 11.3 ДВОЙНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

В § 11.1 говорилось, что в матричных методах, применяемых в радиоэлектронике, широко используют формулу для двойного алгебраического дополнения, позволяющую сократить объем вычислительной работы при подсчете разности произведений определителей, деленной на определитель матрицы.

Если через Δ обозначить определитель некоторой матрицы, через Δ_{11} — алгебраическое дополнение, получающееся из Δ при вычеркивании первой строки и первого столбца и умножения его на $(-1)^{1+1}$, через Δ_{22} — алгебраическое дополнение, получающееся из Δ вычеркиванием второй строки и второго столбца и умножения на $(-1)^{2+2}$, через Δ_{km} — алгебраическое дополнение, образованное вычеркиванием k-строки и m-столбца и умножением на $(-1)^{k+m}$, то [2; 86]

$$\frac{\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta}=\Delta_{11,\,22}, \qquad (11.5)$$

где $\Delta_{11,\,22}$ — двойное алгебраическое дополнение, полученное из Δ путем вычеркивания 1-й и 2-й строк и 1-го и 2-го столбцов и умножения на $(-1)^{1+1+2+2}=1$.

§ 11.4. МЕТОД РАСЧЕТА, ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ УКОРОЧЕННОЙ МАТРИЦЫ УЗЛОВЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ И Y-ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Данный метод был предложен в работах [61, 64 и др.]. В качестве исходной в этом методе принимают укороченную матрицу узловых проводимостей $[Y']$, не включая в нее проводимость нагрузки $Y_н$ и проводимость источника питания $Y_и$. Укороченную матрицу составляют, пользуясь общим способом, описанным в § 11.3, обозначив входной узел *1*, выходной *2* и базисный *0* (узел *0* у отрицательного полюса источника э. д. с. $E_и$, как и на рис. 11.12):

$$[Y']=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \qquad (11.6)$$

Систему уравнений, составленную по методу узловых потенциалов:

$$[\dot{I}]=[Y'][\dot{\varphi}], \tag{11.7}$$

разрешим относительно входного и выходного токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, выразив их через потенциалы $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ и проводимости.

Положительные направления для отсчета токов, показанные на рис. 11.10, соответствуют положительным направлениям отсчета в системе Y-параметров:

$$\dot{I}_1=Y_{11}\dot{\varphi}_1+Y_{12}\dot{\varphi}_2; \tag{11.8а}$$

$$\dot{I}_2=Y_{21}\dot{\varphi}_1+Y_{22}\dot{\varphi}_2. \tag{11.8б}$$

Здесь

$$Y_{11}=\Delta_{22}/\Delta_{11,\,22};\quad Y_{12}=-\Delta_{21}/\Delta_{11,\,22};$$
$$Y_{21}=-\Delta_{12}/\Delta_{11,\,22};\quad Y_{22}=\Delta_{11}/\Delta_{11,\,22}, \tag{11.9}$$

где Δ_{km} — алгебраическое дополнение определителя матрицы $[Y']$ вместе с принадлежащим ему знаком, которое получается из определителя матрицы при вычеркивании k-строки и m-столбца и умножении полученного определителя из $(-1)^{k+m}$; $\Delta_{11,\,22}$ — двойное алгебраическое дополнение определителя матрицы, которое получается при вычеркивании 1-й и 2-й строк и 1-го и 2-го столбцов и умножения полученного определителя на $(-1)^{1+1+2+2}$.

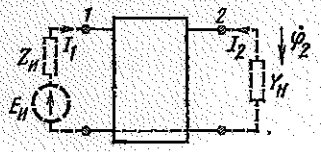


Рис. 11.10

При выводе уравнений (11.8) использована формула (11.5).

В соответствии с выбранными положительными направлениями отсчетов для $\dot{I}_2$ и $\dot{\varphi}_2$

$$\dot{I}_2=-Y_н\dot{\varphi}_2. \tag{11.10}$$

Подставим (11.10) в (11.8б) и выразим $\dot{\varphi}_2$ через $\dot{\varphi}_1$:

$$\dot{\varphi}_2=-\dot{\varphi}_1\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y_н}.$$

Подставив $\dot{\varphi}_2$ в (11.8а), получим

$$\dot{I}_1=\dot{\varphi}_1\left[Y_{11}-\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}+Y_н}\right].$$

Запишем формулы для входной проводимости

$$Y_{вх}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{\varphi}_1}=Y_{11}-\frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}+Y_н}; \tag{11.11}$$

коэффициента передачи напряжения

$$K_U=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1}=-\frac{Y_{21}}{Y_{22}+Y_н}; \tag{11.12}$$

коэффициента передачи тока

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21}Y_н}{Y_{11}(Y_{22}+Y_н)-Y_{12}Y_{21}}. \qquad (11.13)$$

Пример 11.1. Найдем $Y_{вх}$, K_U и K_I для схемы, изображенной на рис. 11.11. В этой схеме четыре узла: входной обозначим *1*, выходной — *2*, базисный — *0*, узел внутри схемы — *3*. Для упрощения расчетов проводимости всех ветвей взяты по 1 См. Проводимость нагрузки $Y_н = 1$ См.

Решение. Составим неопределенную матрицу схемы, не включая в нее проводимость нагрузки:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

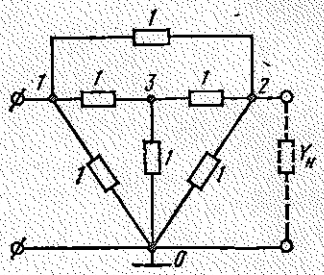


Рис. 11.11

Убеждаемся в том, что сумма элементов любого столбца и любой строки равна нулю. Вычеркивая 0-столбец и 0-строку, получим укороченную матрицу $[Y']$:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Находим Y-параметры эквивалентного четырехполюсника:

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(-1)^{2+2}}{3} = \frac{8}{3}; \quad Y_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}} = \frac{8}{3};$$

$$Y_{12} = \frac{-\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}} = \frac{-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}(-1)^{1+2}}{3} = -\frac{4}{3}; \quad Y_{21} = -\frac{4}{3}.$$

Входная проводимость

$$Y_{вх} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}+Y_н} = \frac{8}{3} - \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}+1} = \frac{24}{11}.$$

Коэффициент передачи напряжения

$$K_U = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}+Y_н} = \frac{4/3}{11/3} = \frac{4}{11}.$$

Коэффициент передачи тока $K_I = 1/6$.

§ 11.5. МЕТОД РАСЧЕТА, ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ УКОРОЧЕННОЙ МАТРИЦЫ УЗЛОВЫХ ПРОВОДИМОСТЕЙ, МИНУЯ ЭТАП ОПРЕДЕЛЕНИЯ Y-ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Как и в § 11.4, обозначим узлы схемы: входной — *1*, выходной — *2*, базисный — *0*. Потенциал первого узла $\dot{\varphi}_1$, второго $\dot{\varphi}_2$. Токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ направим в соответствии с рис. 11.12 (ток $\dot{I}_2$ изменил свое направление по сравнению с изображенным на рис. 11.10).

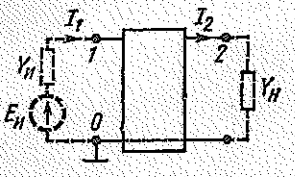


Рис. 11.12

Составим укороченную матрицу узловых проводимостей $[Y]$, не включая в нее проводимость нагрузки $Y_н$ и проводимость источника питания $Y_н$ [64, 66 и др.].

В соответствии с методом узловых потенциалов запишем систему уравнений $[\dot{I}]=[Y][\dot{\varphi}]$. Разрешим эту систему относительно $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\dot{I}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta}(-\dot{I}_2);\\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\dot{I}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}(-\dot{I}_2),\end{aligned}\right\} \qquad (11.14)$$

где Δ — определитель матрицы $[Y]$, Δ_{km} — алгебраическое дополнение вместе с принадлежащим ему знаком; k и m — индексы строки и столбца соответственно.

В уравнениях (11.14) ток $\dot{I}_2$ записан со знаком минус в соответствии с выбранным для него положительным направлением отсчета на рис. 11.12 (встречно принятому в системе Y-параметров).

Подставим значение $\dot{\varphi}=\dot{I}_2/Y_н$ в уравнение (11.14) и выразим $\dot{I}_2$ через $\dot{I}_1$:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\Delta_{12}Y_н}{\Delta+\Delta_{22}Y_н}.$$

Найдем входное сопротивление схемы по отношению к точкам *1 — 0*:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\frac{1}{\Delta}(\Delta_{11}\dot{I}_1 - \Delta_{12}\dot{I}_2)}{\dot{I}_1} = \frac{\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{11}\dot{I}_1 - \Delta_{21}\frac{\Delta_{12}Y_н}{\Delta+\Delta_{22}Y_н}\dot{I}_1\right)}{\dot{I}_1} =$$

$$= \frac{\Delta_{11} + Y_н\frac{\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta}}{\Delta+\Delta_{22}Y_н}. \qquad (11.15)$$

При числе узлов четырехполюсника больше трех в соответствии с формулой (11.5) величину $\frac{\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta}$ заменим на двойное алгебраическое дополнение $\Delta_{11,\,22}$ вместе с принадлежащим ему знаком. Тогда

$$Z_{вх} = \frac{\Delta_{11} + Y_н\Delta_{11,\,22}}{\Delta+\Delta_{22}Y_н}. \qquad (11.16)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулу (11.16) можно получить из формул (11.10) и (11.11).

При холостом ходе на выходе, когда $Y_н = 0$,

$$Z_{вх.\,хх} = \Delta_{11}/\Delta. \tag{11.17}$$

При коротком замыкании на выходе, когда $Y_н = \infty$,

$$Z_{вх.\,кз} = \Delta_{11,22}/\Delta_{22}. \tag{11.18}$$

Коэффициент передачи напряжения

$$K_U = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + Y_н \Delta_{11,\,22}}. \tag{11.19}$$

Коэффициент передачи тока

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{12} Y_н}{\Delta + \Delta_{22} Y_н}. \tag{11.20}$$

Сопоставим число операций в рассматриваемом методе с числом операций в методе § 11.4. Число операций в рассматриваемом методе меньше числа операций в предыдущем методе за счет того, что не требуется находить Y-параметры эквивалентного четырехполюсника. Единственная относительно трудоемкая операция в данном методе — это нахождение определителя Δ. Трудоемкость этой операции иногда можно уменьшить, найдя Δ по формуле

$$\Delta = \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta_{11,\,22}}.$$

Пример 11.2. Определить входное сопротивление схемы рис. 11.11 по отношению к зажимам *1* и *0* и сравнить его с результатом расчета в § 11.4.

Решение. Составляем укороченную матрицу проводимостей, не включая в нее проводимость нагрузки:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Подсчитываем:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{1+1} = 8;$$

$$\Delta_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} = 8; \quad \Delta_{11,\,22} = 3\,(-1)^{1+1+2+2} = 3;$$

$$\Delta = 27 - 1 - 1 - 3 - 3 - 3 = 16; \quad Z_{вх} = \frac{8 + 3 \cdot 1}{16 + 8 \cdot 1} = \frac{11}{24},$$

что совпадает с результатом примера в § 11.4.

Пример 11.3. Вывести формулу для коэффициента передачи напряжения для схемы рис. 11.9.

Решение. Из неопределенной матрицы для этой схемы (см. § 11.2) составляем укороченную, вычеркивая 0-строку и 0-столбец:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_1+Y_0 & 0 & -Y_0 \\ S_1 & Y'_{ак}+Y_2 & 0 \\ -Y_0 & S_1 & Y_0+Y''_{ак} \end{bmatrix} \end{array}.$$

В соответствии с тем, что выходной узел обозначен цифрой *3*, а не *2*, в формуле (11.19) Δ_{12} заменяем на Δ_{13} и $\Delta_{11,22}$ на $\Delta_{11,33}$:

$$K_U = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}+Y_н\Delta_{11,33}};$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} S_1 & Y'_{ак}+Y_2 \\ -Y_0 & S_2 \end{vmatrix}(-1)^{1+3} = S_1S_2+Y_0(Y_2+Y'_{ак});$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} Y'_{ак}+Y_2 & 0 \\ S_2 & Y_0+Y''_{ак} \end{vmatrix}(-1)^{1+1} = (Y_0+Y''_{ак})(Y'_{ак}+Y_2);$$

$$\Delta_{11,33} = Y_2+Y'_{ак};$$

$$K_U = \frac{S_1S_2+Y_0(Y_0+Y'_{ак})}{(Y_2+Y'_{ак})(Y_н+Y_0+Y''_{ак})}.$$

Пример 11.4. На рис. 11.13 изображена схема двухступенчатого усилителя на транзисторах с регулируемой положительной обратной связью. Схема предназначена для получения на зажимах *1—0* регулируемого отрицательного входного сопротивления для малых переменных составляющих сигнала на низких частотах.

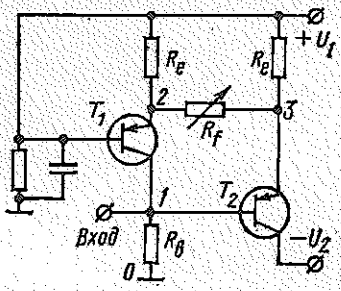


Рис. 11.13

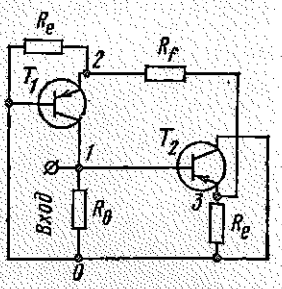


Рис. 11.14

Транзистор T_1 включен по схеме с общей базой, транзистор T_2 — по схеме с общим коллектором. Узлы схемы обозначим цифрами 1, 2, 3, 0. Требуется вывести формулу для входного сопротивления по отношению к зажимам *1—0*.

Решение. На рис. 11.14 представлена схема для малых переменных составляющих. Составим матрицы узловых проводимостей

транзисторов T_1 и T_2, воспользовавшись матрицами транзистора по (11.4).

У транзистора T_1 база — это узел *0*, эмиттер — узел *2*, коллектор — узел *1*. Поэтому матрица транзистора T_1:

$$\begin{array}{c} \\ 2\,(э) \\ 1\,(к) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2\,(э) & 1\,(к) \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{бб}+Y_{бк}+Y_{кб}+Y_{кк} & -(Y_{бк}+Y_{кк}) \\ -(Y_{кб}+Y_{кк}) & Y_{кк} \end{bmatrix} \end{array}.$$

У транзистора T_2 база — это узел *1*, эмиттер — узел *3*, коллектор — узел *0*. Поэтому матрица транзистора T_2

$$\begin{array}{c} \\ 1\,(б) \\ 3\,(э) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\,(б) & 3\,(э) \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{бб} & -(Y_{бб}+Y_{бк}) \\ -(Y_{бб}+Y_{кб}) & Y_{бб}+Y_{бк}+Y_{кб}+Y_{кк} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Укороченная матрица всей схемы

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{кк}+Y_{бб}+g_в & -(Y_{кб}+Y_{кк}) & -(Y_{бб}+Y_{бк}) \\ -(Y_{бк}+Y_{кк}) & Y_{бб}+Y_{бк}+Y_{кб}+ & -g_f \\ & +Y_{кк}+g_e+g_f & \\ -(Y_{бб}+Y_{бк}) & g_f & g_e+g_f+Y_{бб}+Y_{бк}+ \\ & & +Y_{кб}+Y_{кк} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Учитывая, что $g_e \gg g_f$, $Y_{кк} \ll Y_{бб}$, $Y_{бк} \ll Y_{кк}$, $Y_{бб} \gg Y_{бк}$, $Y_{кб} \gg Y_{кк}$, получим укороченную матрицу

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_в+Y_{бб} & -Y_{кб} & -Y_{бб} \\ -Y_{кк} & Y_{кб}+g_e & -g_f \\ -Y_{кб} & -g_f & g_e+Y_{кб} \end{bmatrix} \end{array}.$$

По формуле (11.16), полагая $Y_в = 0$ ($Z_в = \infty$), $R_{вх} = \Delta_{11}/\Delta$, найдем

$$\Delta_{11} = (g_e+Y_{кб})^2 - g_f^2 \approx (g_e+Y_{кб})^2.$$

При нахождении Δ учтем малость $Y_{кк}$. Получим

$$\Delta = (g_e+Y_{кб})^2(g_в+Y_{бб}) - Y_{кб}^2 g_f - \\ -Y_{кб}Y_{бб}(g_e+Y_{кб}) - g_f^2(g_в+Y_{бб});$$

$$R_{вх} = \frac{(g_e+Y_{кб})^2}{(g_в+Y_{бб})[(g_e+Y_{кб})^2-g_f^2]-Y_{кб}[Y_{кб}g_f+Y_{бб}(g_e+Y_{кб})]};$$

$R_{вх} < 0$ при $(g_в+Y_{бб})[(g_e+Y_{кб})^2 - g_f^2] < \\ < Y_{кб}[Y_{кб}g_f + Y_{бб}(g_e+Y_{кб})]$.

§ 11.8. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Напряжение и ток на входе четырехполюсника обозначим $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, на выходе $-\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$.

Наиболее часто за положительные направления их отсчета принимают направления, показанные на рис. 11.15, *а, б*. Различие между ними состоит в выборе направления для тока $\dot{I}_2$

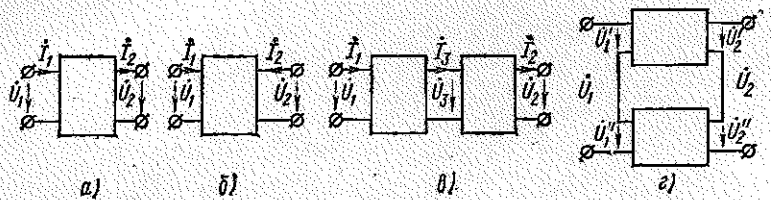


Рис. 11.15

Направление отсчета в соответствии с рис. 11.15, *а* принято для *А*-формы уравнений четырехполюсника

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}.$$

Для остальных часто употребляемых форм (*Z*, *Y*, *H* и *G*) положительные направления отсчета токов и напряжений соответствуют представленным на рис. 11.15, *б*:

для *Z*-формы

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix};$$

для *Y*-формы

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix};$$

для *H*-нормы

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix};$$

для *G*-формы

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}.$$

При различных способах соединения четырехполюсников матрицу эквивалентного четырехполюсника наиболее удобно и просто можно получить при использовании одной из этих форм.

При каскадном соединении двух четырехполюсников по рис. 11.15, *в* матрица эквивалентного четырехполюсника равна произведению *А*-матриц этих четырехполюсников:

$$[A]=[A'][A''].$$

Действительно, для первого четырехполюсника

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix};$$

для второго

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}.$$

Подставляя значение $\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}$ из второго уравнения в первое, получим

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=[A]\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix};\quad [A]=[A'][A'']=\begin{bmatrix}A'A''+B'C'' & A'B''+B'D''\\ C'A''+D'C'' & C'B''+D'D''\end{bmatrix}.$$

При последовательно-последовательном соединении четырехполюсников по рис. 11.15, *г* используют *Z*-форму уравнений, так как *Z*-матрица эквивалентного четырехполюсника равна сумме *Z*-матриц четырехполюсников, его составляющих:

$$[Z]=[Z']+[Z''].\qquad(11.21)$$

Это следует из того, что напряжение на входе $\dot{U}_1=\dot{U}_1'+\dot{U}_1''$ и на выходе $\dot{U}_2=\dot{U}_2'+\dot{U}_2''$, поэтому матричное уравнение эквивалентного четырехполюсника получим, суммируя матричные уравнения первого и второго четырехполюсников:

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1'\\ \dot{U}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}' & Z_{12}'\\ Z_{21}' & Z_{22}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}\dot{U}_1''\\ \dot{U}_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}'' & Z_{12}''\\ Z_{21}'' & Z_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}'+Z_{11}'' & Z_{12}'+Z_{12}''\\ Z_{21}'+Z_{21}'' & Z_{22}'+Z_{22}''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}.$$

При параллельно-параллельном соединении четырехполюсников (рис. 11.16, *а*) используют *Y*-форму, поскольку *Y*-матрица эквивалентного четырехполюсника определяется как сумма *Y*-матриц составляющих его четырехполюсников:

$$[Y]=[Y']+[Y'']=\begin{bmatrix}Y_{11}'+Y_{11}'' & Y_{12}'+Y_{12}''\\ Y_{21}'+Y_{21}'' & Y_{22}'+Y_{22}''\end{bmatrix}.$$

Этот результат следует из того, что напряжения на входе у обоих четырехполюсников равны, равны напряжения и на выходе, а ток $I_1=I_1'+I_1''$ и ток $I_2=I_2'+I_2''$.

При последовательно-параллельном соединении четырехполюсников (рис. 11.16, *б*) используют *H*-форму, так как *H*-матрица

эквивалентного четырехполюсника равна сумме H-матриц составляющих его четырехполюсников:

$$[H]=[H']+[H''].$$

При параллельно-последовательном соединении (рис. 11.16, *в*) используют G-форму, поскольку G-матрица эквивалентного четырехполюсника равна сумме G-матриц составляющих его четырехполюсников:

$$[G]=[G']+[G''].$$

Если три или большее число четырехполюсников соединены неоднородно (смешанно), например два из них (*а* и *б*) последовательно, а третий (*в*) параллельно с ним (рис. 11.16, *г*), то для

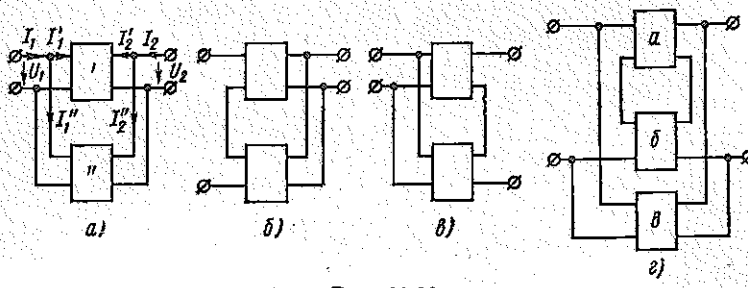


Рис. 11.16

получения матрицы эквивалентного четырехполюсника сначала следует составить Z-матрицу последовательно-последовательно соединенных четырехполюсников (*а* и *б*), затем перейти от Z-матрицы к Y-матрице и составить Y-матрицу эквивалентного четырехполюсника как сумму Y-матриц.

Таким образом, при составных (неоднородных) соединениях четырехполюсников переходят от одной матричной формы записи к другой и соответственно определяют коэффициенты одной матричной формы через коэффициенты другой.

В табл. 11.1 записаны формулы перехода, где Δ_Z, Δ_Y, Δ_H, Δ_G — определители соответствующих матриц. Так, $\Delta_Z=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}$, $\Delta_H=H_{11}H_{22}-H_{12}H_{21}$, $\Delta_Y=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}$ и т. д.

При соединении четырехполюсников необходимо выполнять условие регулярности Под *регулярным соединением четырехполюсников* понимают такое соединение, при котором матрица каждого четырехполюсника не изменяется по сравнению с той, какой она была до соединения этого четырехполюсника с другими. Это будет выполнено, если при соединении четырехполюсников друг с другом не возникнут дополнительные связи или контуры, искажающие их первоначальные схемы, для которых были подсчитаны соответствующие матрицы. Соединение будет регулярным, если через оба первичных зажима каждого четырехполюсника и через оба вторичных зажима каждого четырехполюсника проходят одинаковые (равные по величине и противоположно направленные) токи.

Таблица 11.1

К матрице	От матрицы [Z]	От матрицы [Y]	От матрицы [H]	От матрицы [G]	От матрицы $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$
[Z]		$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$ $-\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}$ $-\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}$ $\frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	$\frac{\Delta_H}{H_{22}}$ $\frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}}$ $\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}}$ $-\frac{G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{11}}$ $\frac{\Delta_G}{G_{11}}$	$\frac{A}{C}$ $\frac{\Delta}{C}$ $\frac{1}{C}$ $\frac{D}{C}$
[Y]	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$ $-\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$ $-\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}$ $\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$		$\frac{1}{H_{11}}$ $-\frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}}$ $\frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{22}}$ $\frac{G_{12}}{G_{22}}$ $-\frac{G_{21}}{G_{22}}$ $\frac{1}{G_{22}}$	$\frac{D}{B}$ $-\frac{\Delta}{B}$ $-\frac{1}{B}$ $\frac{A}{B}$
[H]	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$ $\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$ $\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$ $-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$ $\frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$		$\frac{G_{22}}{\Delta_G}$ $-\frac{G_{12}}{\Delta_G}$ $-\frac{G_{21}}{\Delta_G}$ $\frac{G_{11}}{\Delta_G}$	$\frac{B}{D}$ $\frac{\Delta}{D}$ $-\frac{1}{D}$ $\frac{C}{D}$
[G]	$\frac{1}{Z_{11}}$ $-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$ $\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}$ $\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$ $\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta_H}$ $-\frac{H_{12}}{\Delta_H}$ $-\frac{H_{21}}{\Delta_H}$ $\frac{H_{11}}{\Delta_H}$		$\frac{C}{A}$ $-\frac{\Delta}{A}$ $\frac{1}{A}$ $\frac{B}{A}$
$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$ $\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}}$ $\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$ $-\frac{1}{Y_{21}}$ $-\frac{\Delta_Y}{Y_{21}}$ $-\frac{Y_{11}}{Y_{22}}$	$-\frac{\Delta_H}{H_{21}}$ $-\frac{H_{11}}{H_{21}}$ $-\frac{H_{22}}{H_{21}}$ $-\frac{1}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}$ $\frac{G_{22}}{G_{21}}$ $\frac{G_{11}}{G_{21}}$ $\frac{\Delta_G}{G_{21}}$	

Покажем правильное и неправильное последовательно-последовательное соединения четырехполюсников на рис. 11.17, *а*, *б*. На рис. 11.17, *в* приведено их неправильное (нерегулярное) соединение, на рис. 11.17, *г* — правильное (регулярное). В схеме рис. 11.17, *в* элементы R_2 и C_2 соединены параллельно, чего в исходной схеме рис. 11.17, *б* не было. Таким образом, *Z*-матрица четырехполюсника *II* на рис. 11.17, *в* не равна *Z*-матрице четырехполюсника на рис. 11.17, *б*, а это недопустимо при матричном методе расчета. При правильном соединении — схема рис. 11.17, *г* — ни в одном из четырехполюсников не возникло дополнительных связей по сравнению с исходными схемами рис. 11.17, *а*, *б*. Однако в схеме рис. 11.17, *г* пришлось осуществить перекрещивание проводов, идущих ко входным и выходным зажимам у второго четырехполюсника, по сравнению с расположением их на рис. 11.17, *б*.

Если перекрещивание проводов произведено на входных и выходных зажимах четырехполюсника (как это имеет место, напри-

мер, в схеме рис. 11.17, *г*), то все элементы его A-матрицы (и остальных матриц) не меняют знак. Если же для выполнения регулярности соединения перекрещивание проводов произведено на одной из сторон четырехполюсника, то меняют знаки все элементы его A-матрицы, а в остальных матричных формах записи

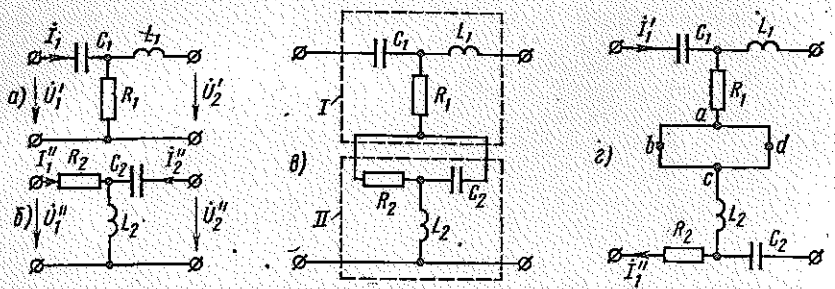


Рис. 11.17

меняют знаки только взаимные элементы (Z_{12} и Z_{21} в Z-матрице, Y_{12} и Y_{21} в Y-матрице и т. д.). То, что в этом случае изменят знаки только взаимные элементы, можно убедиться с помощью табл. 11.1. Действительно, если изменяют знаки и числитель и знаменатель, то знак дроби останется прежним.

Проиллюстрируем сказанное на примере последовательно-параллельного (рис. 11.18, *а*) и параллельно-последовательного (рис. 11.18, *б*) соединений.

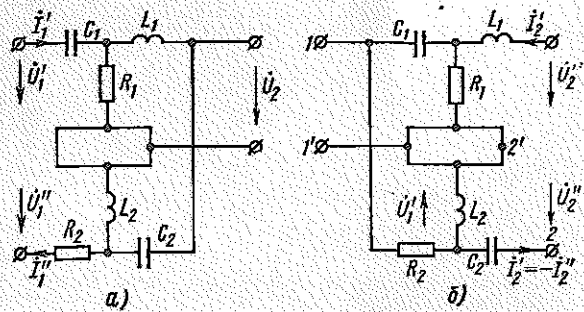


Рис. 11.18

На рис. 11.18, *а* провода перекрещены на входе второго четырехполюсника. Это привело к изменению знаков $\dot{U}_1''$ и $\dot{I}_1''$ по сравнению с положительными направлениями для них на рис. 11.17, *б*. Поэтому для второго четырехполюсника

$$-\dot{U}_1'' = A''\dot{U}_2'' + B''\dot{I}_2'' \quad \text{и} \quad -\dot{I}_1'' = C''\dot{U}_2'' + D''\dot{I}_2''$$

или

$$\dot{U}_1'' = (-A'')\dot{U}_2'' + (-B'')\dot{I}_2'' \quad \text{и} \quad \dot{I}_1'' = (-C'')\dot{U}_2'' + (-D'')\dot{I}_2'',$$

т. е. коэффициенты A-матрицы второго четырехполюсника изменили знаки по сравнению со знаками коэффициентов A-матрицы четырехполюсника рис. 11.17, *б*.

Чтобы схема внутренних соединений каждого четырехполюсника на рис. 11.17, *а*, *б* при их параллельно-последовательном соединении не изменилась (рис. 11.18, *б*), у второго четырехполюсника перекрещены провода на выходных зажимах. Стрелка, указывающая положительное направление отсчета для напряжения $\dot{U}_2''$ на рис. 11.18, *б*, направлена от точки $2'$ к точке 2, т. е. противоположно направлению отсчета для напряжения $\dot{U}_2''$ на рис. 11.17, *б*. Изменилось направление отсчета и для тока $\dot{I}_2''$ второго четырехполюсника. Поэтому в уравнении второго четырехполюсника $\dot{U}_2''$ и $\dot{I}_2''$ войдут со знаком минус. Этот минус можно отнести к коэффициентам и записать:

$$\dot{U}_1'' = (-A'')\dot{U}_2'' + (-B)\dot{I}_2''; \quad \dot{I}_1'' = (-C'')\dot{U}_2'' + (-D'')\dot{I}_2''.$$

Таким образом, действительно, перекрещивание только на входе или только на выходе меняет знак коэффициентов A-матрицы.

В рассмотренных примерах каждый из исходных четырехполюсников рис. 11.17, *а* и *б* являлся по существу трехполюсником. Когда имеют дело с трехполюсниками, их всегда можно соединять между собой так, что условие регулярности будет выполнено. С четырехполюсниками, не сводящимися к трехполюсникам, дело обстоит сложнее. Только каскадно можно соединять любые четырехполюсники. Остальные виды соединений (последовательно-последовательное, параллельно-параллельное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное) можно осуществлять только для относительно небольшого числа типов четырехполюсников. К их числу относятся так называемые разорванные четырехполюсники (рис. 11.19, *а*). На рис. 11.19, *а* цифрами *1* и *2* обозначены любые электрические схемы. Четырехполюсник, симметричный относительно пунктирной горизонтальной оси (рис. 11.19, *б*), можно соединять с другими только каскадно.

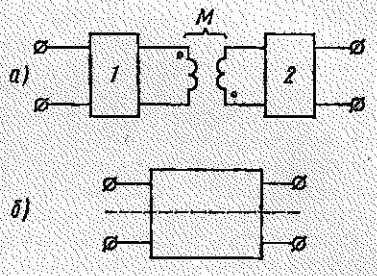


Рис. 11.19

Не приводя доказательства, покажем, как опытным или расчетным путем проверить, являются ли регулярными последовательное и параллельное соединения четырехполюсников.

Чтобы параллельно-параллельное соединение четырехполюсников было регулярным, напряжение U (рис. 11.20, *а*) между короткозамкнутыми и не соединенными друг с другом выходами обоих четырехполюсников должно быть равно нулю.

Последовательно-последовательное соединение четырехполюсников будет регулярным, если напряжение U (рис. 11.20, *б*) между разомкнутыми и не соединенными друг с другом выходными зажимами *2'* и *2* будет равно нулю. Для наиболее часто встречающихся четырехполюсников (трехполюсников) составлены их Z-, Y-, H-, G- и A-матрицы, приведенные в табл. 11.2. Если перед матрицей записан множитель, он относится к каждому элементу матрицы. Черта в клетке таблицы означает, что матрица данного типа для рассматриваемого четырехполюсника отсутствует.

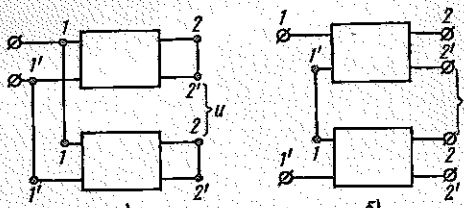


Рис. 11.20

Расчет электрических схем рассматриваемым методом осуществляют следующим образом:

1) схему представляют в виде соответствующего соединения нескольких простых четырехполюсников, матрицы которых могут быть взяты обычно из таблицы;

2) проверяют, выполняется ли условие регулярности для всех четырехполюсников п. 1; если четырехполюсник не является трехполюсником, этот этап наиболее трудоемок;

3) составляют матрицу эквивалентного четырехполюсника и затем используют ее для определения искомой величины.

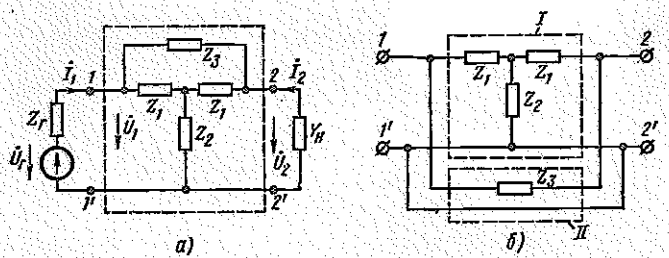
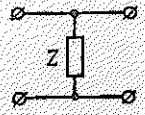
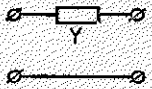
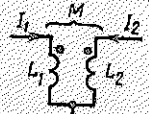


Рис. 11.21

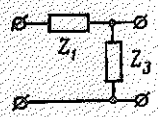
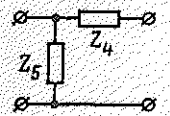
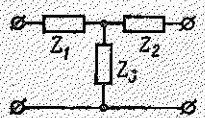
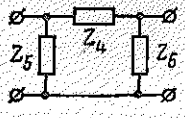
Применим эту методику к расчету схемы рис. 11.21, *а*. Схема состоит из генератора напряжения $\dot{U}_г$ (сопротивление генератора $Z_г$), четырехполюсника мостового типа (обведен пунктиром) и нагрузки $Y_н$. Составим выражение для входного сопротивления схемы относительно зажимов $1-1'$.

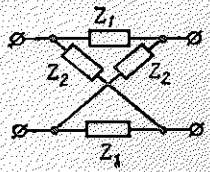
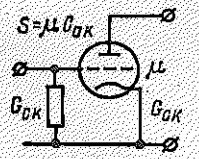
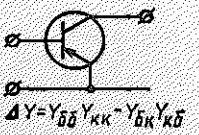
Обведенный пунктиром четырехполюсник представим в виде параллельно-параллельного соединения четырехполюсников *I* и *II* (рис. 11.21, *б*). Убеждаемся в регулярности соединения. Положим $m = Z_1^2 + 2Z_1Z_2$ и $Y_э = 1/Z_3$ и, имея в виду обозначения на рис. 11.21, *а*, по данным табл. 11.2 запишем Y-матрицы обоих

Таблица 11.2

	$[Z]$	$[Y]$	$[H]$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$
	$\begin{matrix} Z & Z \\ Z & Z \end{matrix}$	—	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{matrix}$
	—	$\begin{matrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y} & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & \frac{1}{Y} \\ 0 & 1 \end{matrix}$
Идеальный трансформатор 	—	—	$\begin{matrix} 0 & \frac{w_1}{w_2} \\ -\frac{w_1}{w_2} & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{w_1}{w_2} & 0 \\ 0 & \frac{w_2}{w_1} \end{matrix}$
Неидеальный трансформатор  $D = j\omega(L_1 L_2 - M^2)$	$\begin{matrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{L_2}{D} & -\frac{M}{D} \\ -\frac{M}{D} & \frac{L_1}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{L_2} & \frac{M}{L_2} \\ -\frac{M}{L_2} & \frac{1}{j\omega L_2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{L_1}{M} & \frac{D}{M} \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{matrix}$

Продолжение табл. 11.2

	$[Z]$	$[Y]$	$[H]$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$
	$\begin{matrix} Z_1+Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_3 \end{matrix}$	$\frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\frac{Z_1}{Z_3} \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_3} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1+\frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} Z_5 & Z_5 \\ Z_5 & Z_4+Z_5 \end{matrix}$	$\frac{1}{Z_4}\begin{bmatrix} \frac{Z_4+Z_5}{Z_5} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_4+Z_5}\begin{bmatrix} Z_4Z_5 & Z_5 \\ -Z_5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 1 & Z_4 \\ \frac{1}{Z_5} & 1+\frac{Z_4}{Z_5} \end{matrix}$
	$\begin{matrix} Z_1+Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2+Z_3 \end{matrix}$	$\frac{1}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3} \times$ $\times\begin{bmatrix} Z_2+Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1+Z_3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_2+Z_3} \times$ $\times\begin{bmatrix} Z_1Z_2+Z_1Z_3+ & Z_3 \\ +Z_2Z_3 & \\ -Z_3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 1+\frac{Z_1}{Z_3} & Z_1+Z_2+\frac{Z_1Z_2}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & 1+\frac{Z_2}{Z_3} \end{matrix}$
	$\frac{Z_5}{Z_4+Z_5+Z_6} \times$ $\times\begin{bmatrix} Z_4+Z_5 & Z_5 \\ Z_5 & \frac{(Z_4+Z_5)Z_6}{Z_5} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_4}\begin{bmatrix} \frac{Z_4+Z_5}{Z_5} & -1 \\ -1 & \frac{Z_4+Z_6}{Z_6} \end{bmatrix}$	$\frac{Z_5}{Z_4+Z_5} \times$ $\times\begin{bmatrix} Z_4 & 1 \\ -1 & \frac{Z_4+Z_5+Z_6}{Z_5Z_6} \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 1+\frac{Z_4}{Z_6} & Z_4 \\ \frac{1}{Z_6}+\frac{1}{Z_5}+\frac{Z_4}{Z_5Z_6} & 1+\frac{Z_4}{Z_5} \end{matrix}$

	$\|Z\|$	$\|Y\|$	$\|H\|$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$
	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_2-Z_1 \\ Z_2-Z_1 & Z_1+Z_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2Z_1Z_2}\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_1-Z_2 \\ Z_1-Z_2 & Z_1+Z_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_1+Z_2}\times$ $\times\begin{bmatrix} 2Z_1Z_2 & Z_2-Z_1 \\ Z_1-Z_2 & 2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Z_2-Z_1}\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & 2Z_1Z_2 \\ 2 & Z_1+Z_2 \end{bmatrix}$
	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{ск}} & 0 \\ \frac{-\mu}{G_{ск}} & \frac{1}{G_{ак}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{ск} & 0 \\ S & G_{ак} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{ск}} & 0 \\ \frac{\mu G_{ак}}{G_{ск}} & G_{ск} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{G_{ак}}{S} & -\frac{1}{S} \\ -\frac{G_{ск}G_{ак}}{S} & -\frac{G_{ск}}{S} \end{matrix}$
 $\Delta Y=Y_{бб}Y_{кк}-Y_{бк}Y_{кб}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{кк}}{\Delta_Y} & -\frac{Y_{бк}}{\Delta_Y} \\ -\frac{Y_{кб}}{\Delta_Y} & \frac{Y_{бб}}{\Delta_Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{бб} & Y_{бк} \\ Y_{кб} & Y_{кк} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{бб}} & -\frac{Y_{бк}}{Y_{бб}} \\ \frac{Y_{кб}}{Y_{бб}} & \frac{\Delta_Y}{Y_{бб}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{Y_{кк}}{Y_{кб}} & -\frac{1}{Y_{кб}} \\ -\frac{\Delta_Y}{Y_{кб}} & -\frac{Y_{бб}}{Y_{кб}} \end{matrix}$

четырехполюсников:

$$[Y^{I}]=\begin{bmatrix}\frac{Z_1+Z_3}{m} & -\frac{Z_3}{m}\\ -\frac{Z_3}{m} & \frac{Z_1+Z_3}{m}\end{bmatrix};\quad [Y^{II}]=\begin{bmatrix}Y_3 & -Y_3\\ -Y_3 & Y_3\end{bmatrix};$$

Y-матрица эквивалентного четырехполюсника

$$[Y^{I,\ II}]=[Y^{I}]+[Y^{II}]=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}.$$

Здесь

$$Y_{11}=Y_{22}=\frac{Z_1+Z_3}{m}+Y_3;\ \ Y_{12}=Y_{21}=-\left(\frac{Z_3}{m}+Y_3\right).$$

Учтя, что $I_1=Y_{11}\dot{U}_1+Y_{12}\dot{U}_2$, $I_2=Y_{21}\dot{U}_1+Y_{22}\dot{U}_2$, а $I_2=-\dot{U}_2Y_н$, найдем

$$Z_{вх\ II}=\frac{\dot{U}_1}{I_1}=\frac{Y_{22}+Y_н}{\Delta_Y+Y_{11}Y_н}.$$

Глава двенадцатая

АКТИВНЫЕ СХЕМНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 12.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АКТИВНЫХ СХЕМНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

За последние годы в теории цепей все большее распространение получили относительно новые схемные элементы: конверторы и инверторы сопротивлений, гираторы, операционные усилители и получаемые на их основе имитированные индуктивности, отрицательные резистивные, индуктивные и емкостные сопротивления, частотно-зависимые отрицательные резистивные сопротивления, источники напряжения или тока, управляемые напряжением (или током) и т. п. Эти элементы используются в различных устройствах, в частности в активных RC-фильтрах. В данной главе рассмотрены свойства этих элементов и методика расчета цепей с ними. Будут рассмотрены также идеализированные схемные элементы, получившие названия нулатора, норатора, нулора.

§ 12.2. КОНВЕРТОР И ИНВЕРТОР СОПРОТИВЛЕНИЯ

Четырехполюсник, у которого взаимные проводимости не равны, т. е. $Y_{12}\neq Y_{21}$, называют невзаимным. Конвертор, инвертор, гиратор, транзистор, операционный усилитель — невзаимные четырехполюсники.

Конвертором сопротивления называют невзаимный четырехполюсник, у которого при записи уравнений в A-форме коэффициенты $B=C=0$. Если его на выходных зажимах нагрузить на

сопротивление $Z_н$, то входное сопротивление четырехполюсника

$$Z_{вх} = (AZ_н + B)/(CZ_н + D) = Z_н/k_1,$$

где $k_1 = D/A$.

Четырехполюсник преобразует (конвертирует) сопротивление $Z_н$ в сопротивление $Z_н/k_1$. Коэффициент k_1 называют коэффициентом конвертирования

Если коэффициенты A и D имеют одинаковые знаки, то $Z_{вх}$ имеет тот же знак, что и $Z_н$ (в этом случае конвертор называют конвертором положительного сопротивления), если разные, то знак $Z_{вх}$ противоположен знаку $Z_н$ (конвертор отрицательного сопротивления).

Если у конвертора $A = 1$, то $k_1 = D$, $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, $I_1 = k_1 I_2$. В этом случае конвертор называют идеальным конвертором с преобразованием тока (при неизменном напряжении).

Если у конвертора $D = 1$, то $k_1 = 1/A$; $\dot{U}_1 = \dot{U}_2/k_1$, $I_1 = I_2$. Такой конвертор называют идеальным конвертором с преобразованием напряжения.

У конвертора имеются H- и G-матрицы, но отсутствуют Z- и Y-матрицы.

Если у невзаимного четырехполюсника $A = D = 0$ и он нагружен на $Z_н$, то входное сопротивление четырехполюсника $Z_{вх} = B/(CZ_н)$. Четырехполюсник в этом случае инвертирует сопротивление $Z_н$ и потому его называют инвертором сопротивления, $k_2 = B/C$ называют коэффициентом инвертирования.

Если коэффициенты B и C имеют одинаковые знаки, то $Z_{вх} = 1/Z_н$ и его называют инвертором положительного сопротивления; если знаки у коэффициентов B и C различные, то $Z_{вх} = -1/Z_н$ и его называют инвертором отрицательного сопротивления.

У идеального инвертора входное сопротивление остается неизменным, если поменять местами входные и выходные зажимы.

Инвертор имеет Y- и Z-матрицы, но у него отсутствуют H- и G-матрицы.

Частным случаем инвертора отрицательного сопротивления является гиратор. Гиратор — это невзаимный четырехполюсник (трехполюсник), имеющий следующую Y-матрицу:

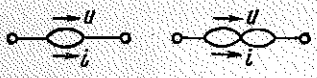
$$[Y] = \begin{vmatrix} 0 & \pm G \\ \mp G & 0 \end{vmatrix}.$$

Для идеального гиратора проводимость G — вещественное число.

§ 12.3. НУЛАТОР, НОРАТОР И НУЛОР

Нулатор, норатор и нулор — это идеализированные элементы электрических цепей, которые в последнее время применяют в литературе при анализе схем с транзисторами, электронными лампами, операционными усилителями и преобразователями сопротивлений. Впервые нулатор и норатор описаны в 1961 г.

Нулатор — это такой идеализированный двухполюсник, напряжение и ток которого равны нулю. На электрической схеме его изображают в соответствии с рис. 12.1, *а*. Если нулатор включен между узлами *а* и *б* некоторой схемы, то ток через него и напряжение на нем равны нулю.



а) *б)*

Рис. 12.1

Норатор — это неопределенный элемент цепи, напряжение и ток его неопределенны (т. е. могут принимать любые значения), поэтому его называют также свободным элементом. Норатор представляет собой активный невзаимный двухполюсник, который изображают в соответствии с рис. 12.1, *б*. Формально его свойства можно описать следующим уравнением:

$$\begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}.$$

Нулор — это идеализированный активный невзаимный четырехполюсник, составленный из одного нулатора и одного норатора. Напряжение u_1 и ток i_1 на входе его равны нулю, а напряжение u_2 и ток i_2 на выходе его неопределены. Свойства его можно описать уравнением

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

На электрических схемах нулор изображают в виде неуравновешенного четырехполюсника рис. 12.2, *а*, когда входные и выходные зажимы его не имеют общей точки, или в виде уравновешенного (заземленного) четырехполюсника рис. 12.2, *б*.

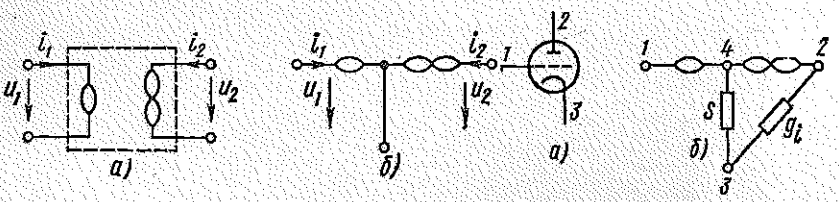


Рис. 12.2

Рис. 12.3

Уравновешенный нулор используют в схемах замещения электронных ламп и транзисторов.

Электронную лампу рис. 12.3, *а*, имеющую внутреннюю проводимость между анодом и катодом g_i и коэффициент усиления μ, представляют схемой замещения рис. 12.3, *б*. Крутизна характеристики $S = \mu g_i$. Под идеальным транзистором понимают транзистор, у которого коэффициент усиления $\alpha = 1$ и который

имеет следующие значения H-параметров: $H_{11}=H_{12}=H_{22}=0$, $H_{21}=-1$.

Схема замещения реального транзистора, у которого $\alpha \neq 1$ (рис. 12.4, *а*), с использованием нулатора и норатора изображена на рис. 12.4, *б*. Чтобы напряжение на любых участках некоторой схемы было определенным, число нулаторов в схеме замещения ее должно быть равно числу нораторов.

Для расчетов схем с нулаторами и нораторами предложено несколько различных приемов. Наиболее короткий путь состоит в следующем.

Сначала составляют матрицу узловых проводимостей рассматриваемой схемы, полагая, что все ветви, содержащие нулаторы и нораторы, разомкнуты. Поскольку напряжение на нулаторе равно

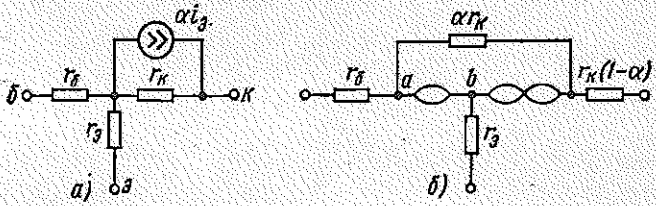


Рис. 12.4

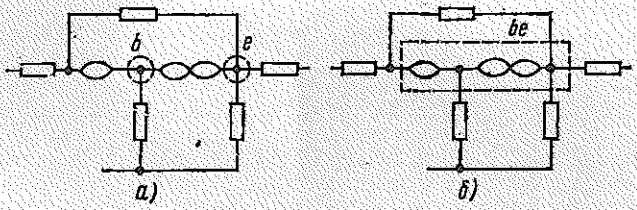


Рис. 12.5

нулю, узлы, между которыми находится нулатор, имеют одинаковый потенциал. Поэтому первый этап упрощения составленной матрицы состоит в том, что складывают столбцы матрицы, соответствующие узлам, между которыми находится нулатор.

Например, если в схеме имеются два нулатора, один из которых находится между узлами a и b, а другой — между c и d, то суммируют столбец a со столбцом b, а столбец c со столбцом d. Второй этап упрощения матрицы состоит в том, что суммируют строки матрицы, между которыми в схеме находится норатор. Так, если в схеме есть два норатора, один из которых между узлами b и e, а другой — между узлами d и f, то суммируют строку b со строкой e и строку d со строкой f. Поясним обоснованность этого этапа упрощения матрицы с помощью рис. 12.5, *а*, *б*. На рис. 12.5, *а* между узлами b и e имеется норатор. Эти узлы обведены пунктиром. Алгебраическая сумма токов в узлах b и e

равна нулю по первому закону Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов в объединенном узле *be* (обведен пунктирным прямоугольником на рис. 12.5, *б*) равна алгебраической сумме токов в узлах *b* и *e* и также равна нулю.

Пример 12.1. На рис. 12.6, *а* изображена некоторая схема на транзисторе. На вход ее поступает ток $I_1 < 0$ от источника тока. Полагая транзистор идеальным, составить схему замещения с нулатором и норатором, определить входное сопротивление и потенциалы узлов *1* и *2*. Схема замещения изображена на рис. 12.6, *б*.

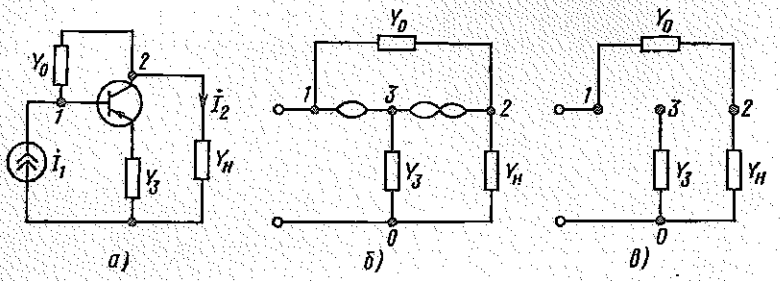


Рис. 12.6

Решение. В соответствии с рассмотренной методикой размыкаем ветви с нулатором и норатором, получаем схему рис. 12.6, *в*. Для нее составляем укороченную матрицу узловых проводимостей (без узла *О*):

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_0 & -Y_0 & 0 \\ -Y_0 & Y_0+Y_н & 0 \\ 0 & 0 & Y_з \end{bmatrix} \end{array}.$$

Так как между узлами *1* и *3* имеется нулатор, то складываем 1-й и 3-й столбцы. Между узлами *2* и *3* имеется норатор, поэтому складываем 2-ю и 3-ю строки. В результате получаем матрицу

$$\begin{array}{c} \\ 1+3 \\ 2+3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1+3 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_0 & -Y_0 \\ Y_з-Y_0 & Y_0+Y_н \end{bmatrix} \end{array}.$$

Из нее следует, что входное сопротивление

$$Z_{вх}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}=\frac{Y_0+Y_н}{Y_0(Y_з+Y_н)}.$$

Потенциалы узлов

$$\Phi_1=I_1Z_{вх}=\frac{I_1(Y_0+Y_н)}{Y_0(Y_н+Y_з)};\quad \Phi_2=\Phi_1\frac{Y_0-Y_з}{Y_0+Y_н}=\frac{I_1(Y_0-Y_з)}{Y_0(Y_н+Y_з)}.$$

Как говорилось в § 12.2, *гиратором* называют трехполюсник, у которого входные и выходные токи и напряжения связаны соотношением

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \qquad (12.1)$$

Гиратор обозначают либо так, как показано на рис. 12.7, *а*, либо как на рис. 12.7, *б*.

Из (12.1) следует, что ток $\dot{I}_1 = G\dot{U}_2$, а ток $\dot{I}_2 = -G\dot{U}_1$. Величину G, имеющую размерность проводимости, называют иногда коэффициентом гирации. Впервые гиратор был описан Теллегеном в 1948 г.

Гиратор является невзаимным элементом электрической цепи. В общем случае невзаимный трехполюсник рис. 12.7, *а*, в котором зажим 3 является общим для входа и выхода, может быть описан Y-матрицей, в которой $Y_{12} \neq Y_{21}$:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}.$$

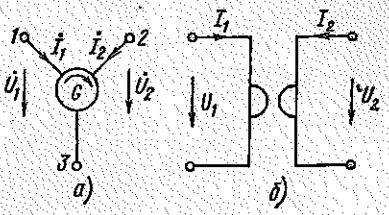


Рис. 12.7

Невзаимный трехполюсник можно представить как параллельно-параллельное соединение взаимного и невзаимного трехполюсников. В соответствии с этим Y-матрицу представим как сумму двух матриц:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \frac{1}{2}(Y_{12}+Y_{21}) \\ \frac{1}{2}(Y_{12}+Y_{21}) & Y_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(Y_{12}-Y_{21}) \\ -\frac{1}{2}(Y_{12}-Y_{21}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Первая матрица соответствует взаимному трехполюснику, вторая — невзаимному. Замечаем, что матрица невзаимного трехполюсника совпадает с матрицей гиратора, причем

$$G = \frac{1}{2}(Y_{12}-Y_{21}).$$

Невзаимный трехполюсник можно представить в виде схемы рис. 12.8, *б*, характеризующейся четырьмя проводимостями Y_1, Y_2, Y_3 и G. Выразим их через Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}. С этой целью Y-матрицу схемы рис. 12.8, *б* представим как сумму Y-матриц схем рис. 12.8, *в*, *г*.

По методу узловых потенциалов для схемы рис. 12.8, *в*

$$\left.\begin{aligned} I'_1 &= (Y_2+Y_3)\dot U_1+(-Y_3)\dot U_2;\\ I'_2 &= (-Y_3)\dot U_1+(Y_1+Y_3)\dot U_2. \end{aligned}\right\} \qquad (12.2)$$

В то же время

$$\left.\begin{aligned} I'_1 &= Y'_{11}\dot U_1+Y'_{12}\dot U_2;\\ I'_2 &= Y'_{21}\dot U_1+Y'_{22}\dot U_2. \end{aligned}\right\} \qquad (12.3)$$

Сопоставляя (12.2) и (12.3), находим

$$Y'_{11}=Y_2+Y_3;\quad Y'_{12}=-Y_3;$$
$$Y'_{21}=-Y_3;\quad Y'_{22}=Y_1+Y_3.$$

Запишем токи гиратора рис. 12.8, *г*, сначала исходя из матрицы гиратора (12.1), а затем исходя из уравнений четырехполюсника в Y-форме:

$$\dot I''_1=0\dot U_1+G\dot U_2=Y''_{11}\dot U_1+Y''_{12}\dot U_2;$$
$$\dot I''_2=(-G)\dot U_1+0\dot U_2=Y''_{21}\dot U_1+Y''_{22}\dot U_2.$$

Следовательно $Y''_{11}=0$, $Y''_{12}=G$; $Y''_{21}=-G$; $Y''_{22}=0$.

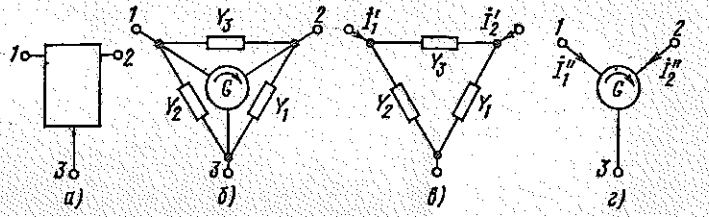


Рис. 12.8

Если учесть, что токи I_1, I_2, I_3 в ветвях схемы рис. 12.8, *б* равны сумме соответствующих токов в ветвях схемы рис. 12.8, *в*, *г*:

$$\dot I_1=\dot I'_1+\dot I''_1;\quad \dot I_2=\dot I'_2+\dot I''_2,$$

то имеем

$$\begin{bmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y'_{11}+Y''_{11} & Y'_{12}+Y''_{12}\\ Y'_{21}+Y''_{21} & Y'_{22}+Y''_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} &= Y_2+Y_3;\quad Y_{12}=G-Y_3;\\ Y_{21} &= -G-Y_3;\quad Y_{22}=Y_1+Y_3. \end{aligned}\right\} \qquad (12.4)$$

Из (12.4) выразим Y_1, Y_2, Y_3 и G через Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} и Y_{22}:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Y_{22}+\tfrac{1}{2}(Y_{12}+Y_{21});\quad Y_2=Y_{11}+\tfrac{1}{2}(Y_{12}+Y_{21});\\ Y_3 &= -\tfrac{1}{2}(Y_{12}+Y_{21});\quad G=\tfrac{1}{2}(Y_{12}-Y_{21}). \end{aligned}\right\} \qquad (12.5)$$

В схеме рис. 12.9, *а* (оставив схему неподвижной) по направлению часовой стрелки изменим чередование индексов зажимов на схеме так, что сначала получим схему рис. 12.9, *б* с заземленным узлом *2*, а затем схему рис. 12.9, *в* с заземленным узлом *1*, и выясним, какова будет при этом проводимость гиратора.

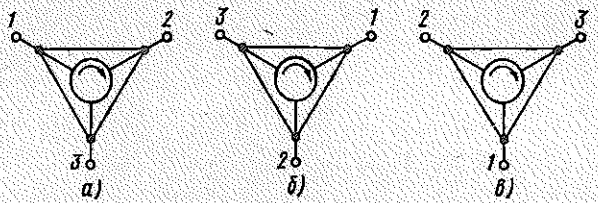


Рис 12.9

Для схемы рис. 12.9, *б* Y-матрица такова:

$$\begin{bmatrix} Y_{33} & Y_{31} \\ Y_{13} & Y_{11} \end{bmatrix}.$$

Для нахождения проводимости гиратора в схеме рис. 12.9, *б* воспользуемся формулой (12.5), соответственно изменив чередование индексов у проводимостей:

$$G = \frac{1}{2}(Y_{31} - Y_{13}).$$

Но для неопределенной матрицы схемы рис. 12.9, *б*

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{33} & Y_{31} & Y_{32} \\ Y_{13} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{23} & Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Так как сумма элементов любой строки и любого столбца неопределенной матрицы равна нулю, то

$$Y_{31} = -(Y_{11} + Y_{21}); \quad Y_{13} = -(Y_{11} + Y_{12});$$

$$G = \frac{1}{2}(Y_{31} - Y_{13}) = \frac{1}{2}(Y_{12} - Y_{21}).$$

Таким образом, проводимость гиратора при измененном по направлению часовой стрелки чередовании индексов у его зажимов (рис. 12.9, *б*) осталась такой же, что и до изменения чередования индексов (рис. 12.9, *а*). Аналогично доказывается, что при последующем изменении чередования индексов (рис. 12.9, *в*) проводимость гиратора останется неизменной.

Стрелка на гираторе (рис. 12.9) означает, что при изменении чередования индексов в направлении стрелки проводимость гиратора не изменяется.

Если же изменение чередования индексов осуществить в направлении, противоположном направлению стрелки на гираторе, например, как показано на рис. 12.10, то проводимость гиратора изменит знак.

Для схемы рис. 12.10 при замене индексов в (12.5) получим $G=\frac{1}{2}(Y_{13}-Y_{31})$. Но

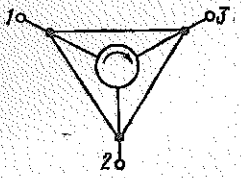


Рис. 12.10

$$Y_{13}=-\frac{1}{2}(Y_{11}+Y_{12})$$

и $$Y_{31}=-\frac{1}{2}(Y_{11}+Y_{21}).$$

Поэтому

$$G=-\frac{1}{2}(Y_{12}-Y_{21}).$$

Другими словами, гиратор в схеме рис. 12.10 имеет проводимость, знак которой отличен от знака проводимости гиратора на рис. 12.9, *а*, *б*, *в*. Не затрагивая здесь вопроса о том, как физически выполнить отрицательные проводимости, заметим, что гиратор может быть осуществлен, например, по схеме рис. 12.11, *а*.

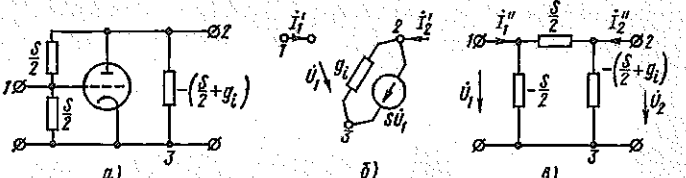


Рис. 12.11

Эта схема состоит из лампового триода (схема замещения дана на рис. 12.11, *б*) и параллельно с ним соединенного четырехполюсника (рис. 12.11, *в*) с двумя отрицательными и одной положительной проводимостями (на рис. 12. 11, *а* у нижнего резистора слева вместо $S/2$ должно быть $-S/2$).

Матричное уравнение триода

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1'\\ \dot{I}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ S & g_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение П-схемы

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1''\\ \dot{I}_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}S\\ -\frac{1}{2}S & -g_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}.$$

Так как $\dot{I}_1=\dot{I}_1'+\dot{I}_1''$, $\dot{I}_2=\dot{I}_2'+\dot{I}_2''$, то для всей схемы

$$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{S}{2}\\ \frac{S}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{bmatrix}.$$

Гиратор можно рассматривать как преобразователь тока в напряжение.

Действительно, из уравнения (12.1) следует, что $\dot{I}_1 = G\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2 = -G\dot{U}_1$. Если два гиратора с проводимостями G_a и G_b соединить, как показано на рис. 12.12, *а*, то это соединение эквива-

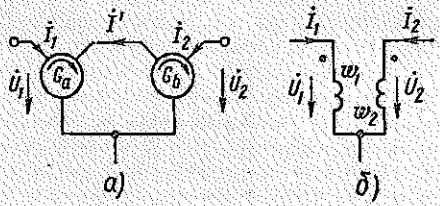


Рис. 12.12

лентно идеальному трансформатору рис. 12.12, *б* с количеством витков w_1 и w_2, причем $w_1/w_2 = G_b/G_a$.

Для первого гиратора

$$\dot{I}_1 = G_a\dot{U}', \quad \dot{I}' = -G_a\dot{U}_1;$$

для второго

$$-\dot{I}' = G_b\dot{U}_2, \quad \dot{I}_2 = -G_b\dot{U}'.$$

Отсюда

$$\dot{U}_1/\dot{U}_2 = G_b/G_a, \quad \dot{I}_1/\dot{I}_2 = -G_a/G_b.$$

§ 12.5. ПРИМЕНЕНИЕ ГИРАТОРА ДЛЯ ИМИТАЦИИ ИНДУКТИВНОСТИ И ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

На выходе гиратора схемы рис. 12.13 включен конденсатор емкостью C. Входное сопротивление схемы равно $j\omega C/G^2$. Выведем это соотношение. Для гиратора

$$\dot{I}_1 = G\dot{U}_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = -G\dot{U}_1.$$

Если учесть положительные направления отсчетов тока $\dot{I}_2$ и напряжения $\dot{U}_2$, то

$$\dot{I}_2 = (-j\omega C)\,\dot{U}_2 = -G\dot{U}_1.$$

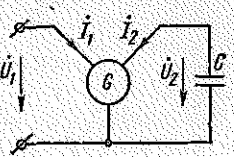


Рис. 12.13

Следовательно,

$$\dot{U}_2 = G\dot{U}_1/(j\omega C);$$

$$Z_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_1/(G\dot{U}_2) = j\omega C\dot{U}_1/(G^2\dot{U}_1) = j\omega C/G^2.$$

Таким образом, идеальный гиратор позволяет с помощью емкости имитировать индуктивность с очень большой, теоретически бесконечно большой добротностью. С учетом неидеальности самого гиратора добротность достигает нескольких сотен.

Практически преобразователи сопротивлений выполняют на транзисторах и резистивных сопротивлениях, включая на выходе преобразователя обычно емкость. Изменяя одно или два сопротивления в схеме, регулируют коэффициент преобразования.

На рис. 12.14, *а* изображена одна из схем инвертора отрицательного сопротивления. В этой схеме три транзистора и шесть резисторов с проводимостями $g_1 - g_6$. На выходе между узлами *2* и *3* включен конденсатор емкостью C ($Y = j\omega C$). Далее показано, что входное сопротивление схемы по отношению к зажимам *1—3*

$$Z_{вх} = \frac{-Y}{g_1 g_2}.$$

Вывод этого соотношения проведем, считая транзисторы идеальными. На рис. 12.14, *б* изображена схема замещения с нулаторами и нораторами. Всего в схеме семь узлов (третий узел заземлен). Составляем укороченную матрицу узловых проводимостей

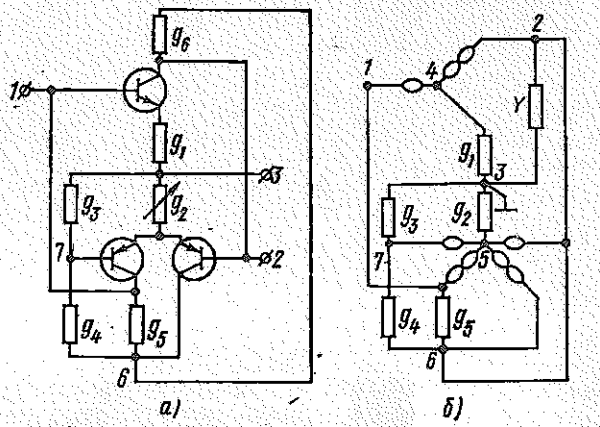


Рис. 12.14

для схемы рис. 12.14, *б*, полагая ветви с нулаторами и нораторами разомкнутыми (на рис. 12.14, *б* не показано g_6). Проводимость нагрузки Y включим в матрицу

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_5 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & 0 \\ 0 & Y+g_6 & 0 & 0 & -g_6 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 \\ -g_5 & -g_6 & 0 & 0 & g_4+g_5+g_6 & -g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_4 & g_3+g_4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Складываем столбцы 1, 4 и 7, 5, 2 и строки 2, 4 и 1, 5, 6. Получаем матрицу

$$[Y_1] = \begin{array}{c} \\ 1+5+6 \\ 2+4 \\ 7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1+4 & 2+5+7 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & g_2-g_4-g_6 & g_4+g_6 \\ g_1 & Y+g_6 & -g_6 \\ 0 & g_3+g_4 & -g_4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Входное сопротивление между точкой *1* и заземленной точкой *3*

$$Z_{вх}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta};\quad \Delta_{11}=\begin{vmatrix} Y+g_6 & -g_6 \\ g_3+g_4 & -g_4 \end{vmatrix}=g_3g_6-Yg_4.$$

Определитель Δ матрицы $[Y_1]$ равен $g_1[g_3(g_4+g_6)+g_2g_4]$.

Если $g_3=0$ и $Y=j\omega C$, то $Z_{вх}=-j\omega C/(g_1g_2)$.

По матрице $[Y_1]$, исключив из нее проводимость нагрузки Y, составим Y-матрицу $\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ для схемы рис. 12.14, *а*:

$$Y_{11}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11,22}}=0;\quad Y_{12}=\frac{-\Delta_{21}}{\Delta_{11,22}}(-1)^{1+2}=g_2;$$

$$Y_{21}=\frac{-\Delta_{12}}{\Delta_{11,22}}(-1)^{1+2}=g_1;\quad Y_{22}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11,22}}=-\frac{g_6g_3}{g_4}.$$

При $g_3=0$ $Y_{22}=0$ и $\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & g_2 \\ g_1 & 0 \end{bmatrix}$.

§ 12.6. УПРАВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ НАПРЯЖЕНИЯ (ТОКА)

Управляемый источник напряжения (тока) представляет собой невзаимный четырехполюсник (трехполюсник), выходное напряжение (ток) которого пропорционально входному напряжению (току) этого четырехполюсника, а сам он обладает свойствами, соответственно источника тока (выходной ток не зависит от величины нагрузки, присоединяемой к его выходным зажимам) или источника напряжения (напряжение на его выходных зажимах не зависит от проходящего через выходные зажимы тока).

Управляемые источники на электрических схемах в последнее время стали обозначать в виде ромба, внутри которого показывают либо символ источника э. д. с. (стрелку), либо соответственно символ источника тока (два уголка). Рядом с ромбом записывают величину, управляющую выходной величиной этого источника, умноженную на некоторый масштабный множитель.

Известны четыре типа идеализированных управляемых источников:

1. *Источник тока, управляемый напряжением* (сокращенно ИТУН). Принципиальная схема его изображена на рис. 12.15, *а*. Входной ток $I_1=0$, выходной ток пропорционален входному напряжению $I_2=GU_1$. Входное и выходное сопротивления бесконечно велики. Y-матрица ИТУН такова: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix}$.

2. *Источник напряжения, управляемый током* (ИНУТ). Принципиальная схема представлена на рис. 12.15, *б*. Входное напряжение $U_1=0$, выходное напряжение его пропорционально входному току $U_2=RI_1$. Входное и выходное сопротивления равны нулю. Его Z-матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix}$.

3. *Источник напряжения, управляемый напряжением* (ИНУН). Принципиальная схема представлена на рис. 12.15, *в*. Входной ток $I_1 = 0$. Выходное напряжение пропорционально входному $U_2 = k_1 U_1$. Входное сопротивление его бесконечно велико, выходное равно нулю. Его G-матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. *Источник тока, управляемый током* (ИТУТ). Принципиальная схема его изображена на рис. 12.15, *г*. Входное напряжение

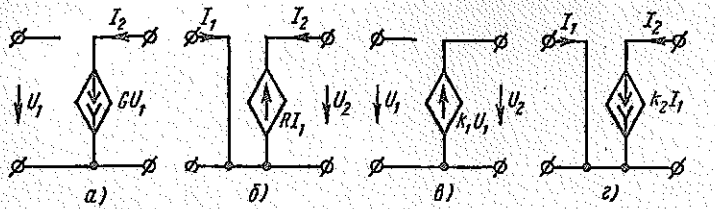


Рис. 12.15

$U_1 = 0$. Выходной ток пропорционален входному $I_2 = k_2 I_1$. Входное сопротивление равно нулю, выходное — бесконечности. Матрица его H-параметров $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$.

Каскадное соединение ИНУТ с ИТУН обладает свойством элемента ИТУТ, а каскадное соединение ИТУН с ИНУТ — свойством элемента ИНУН. Для всех перечисленных управляемых источников выходная величина не влияет на входную, а входная мощность равна нулю, так как либо входной ток, либо входное напряжение равны нулю.

§ 12.7. ОПЕРАЦИОННЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Операционный усилитель (ОУ) — это усилитель, обладающий очень большим входным сопротивлением (порядка 10^5 Ом и более), очень малым выходным сопротивлением и очень большим коэффициентом усиления (порядка 10^4—10^5 и более).

В настоящее время ОУ выполняют по интегральной технологии в виде одного кристалла. Поэтому ОУ можно считать самостоятельным активным элементом, подобным транзистору. ОУ имеет восемь выводов (но может быть и больше): два входных или управляющих, один выходной, один заземленный, два вывода для источника питания и два для регулировки. Четыре последних вывода на электрической схеме ОУ не изображают. На схеме ОУ (рис. 12.16, *а*) изображают в виде треугольника с тремя выводами. Потенциал «—» зажима (точки *1*) обозначим φ_1, потенциал «+» зажима (точки *2*) φ_2. При включении ОУ по дифференциальной схеме входное напряжение его $u_{вх} = \varphi_1 - \varphi_2$. Выходное напряжение ОУ равно разности потенциалов между точкой *3* и заземлен-

ной точкой, оно в k раз больше входного:

$$u_{вых} = \varphi_3 - 0 = k(\varphi_1 - \varphi_2) = ku_{вх}.$$

ОУ может быть включен в схему при использовании одного входа и заземлении второго. На рис. 12.16, *в* «+» вход заземлен. В этом случае $u_{вых} = \varphi_3 = k'\varphi_1$. Коэффициент усиления k на схемах записывают либо рядом с ОУ, либо внутри треугольника (иногда вместо k записывают знак ∞). Так как $k \to \infty$, а $u_{вых}$ величина конечная, то, как правило, $u_{вх} \to 0$. Входной ток тоже стремится к нулю.

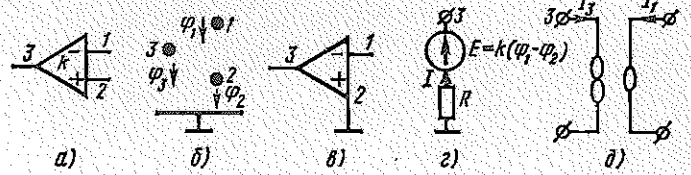


Рис. 12.16

На рис. 12.16, *б* показаны выводы ОУ и их потенциалы относительно заземленной точки.

Расчет электрических схем, содержащих ОУ, можно проводить любым из известных методов расчета электрических цепей, только надо правильно выбрать схему замещения самого ОУ. Входное напряжение и ток на входе ОУ обычно полагают равными нулю. Относительно редко входную цепь замещают резистивным сопротивлением порядка 10^5 Ом. Выходную цепь ОУ замещают источником э. д. с., у которого $E = k(\varphi_1 - \varphi_2)$ или $k'\varphi_1$ соответственно, где $k \approx 10^4 \div 10^5$, и последовательно с ним соединенным очень малым резистивным сопротивлением порядка единиц или десятка омов (рис. 12.16, *г*), через которые проходит некоторый ток I.

Операционный усилитель пропускает частоты от 0 до нескольких мегагерц, и коэффициент усиления k его в этой области частот практически постоянен. Поэтому до частот в несколько мегагерц можно не вводить в схему замещения ОУ элементов, зависящих от частоты. Идеализированный ОУ иногда представляют на электрических схемах так, как показано на рис. 12.16, *д*, содержащим один нулатор и один норатор.

§ 12.8. ПРИМЕНЕНИЕ ОУ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ НАПРЯЖЕНИЯ (ТОКА)

На рис. 12.17, *а* изображена одна из возможных схем источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН). На этой схеме через R_2 осуществлена обратная связь. Анализ этой простой схемы проведем, не прибегая к эквивалентной замене выходной цепи по рис. 12.16, *г*. В соответствии с обозначениями на рис. 12.17, *а* запишем $\varphi_3 = k\varphi_1$.

Ток $I_2 = (\varphi_3 - \varphi_1)/R_2 = \varphi_1 (k-1)/R_2 \approx \varphi_1 k/R_2$.

По первому закону Кирхгофа $I_1 = -I_2$ (ток на входе ОУ равен нулю). Поэтому $I_1 = -\varphi_1 k/R_2$.

Входное напряжение схемы $\varphi_1' = I_1 R_1 + \varphi_1$. Учитывая, что $\varphi_1 \approx 0$, определим $\varphi_1' = -k\varphi_1 R_1/R_2$. Отсюда $\varphi_3 = \varphi_1' (-R_2/R_1)$, т. е. выходное напряжение оказывается зависящим от управляющего напряжения φ_1' и не зависит от сопротивления нагрузки (ее включают между узлом 3 и «землей»).

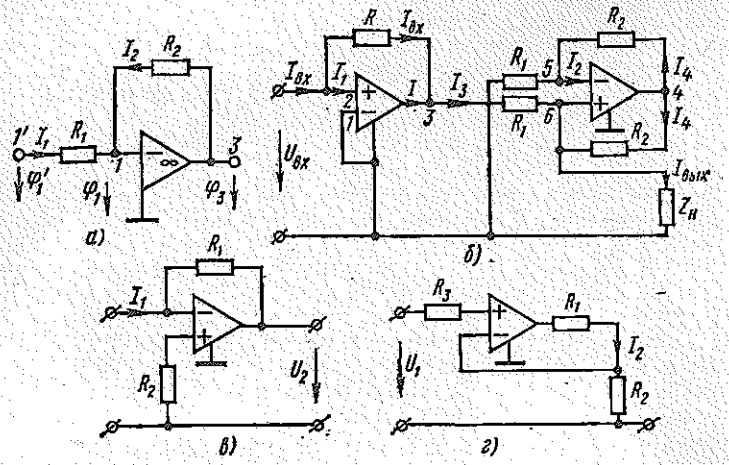


Рис. 12.17

На рис. 12.17, *б* изображена одна из возможных схем источника тока, управляемого током (ИТУТ). Покажем, что схема действительно обладает свойствами ИТУТ. Будем пользоваться обозначениями токов и потенциалов в соответствии с этой схемой.

Так как входное напряжение первого ОУ равно нулю, а $\varphi_1 = 0$ (точка *1* заземлена), то и $\varphi_2 \approx 0$. Входной ток первого ОУ $I_1 = 0$, входной ток второго ОУ $I_2 = 0$. Входной ток схемы $I_{вх} = -\varphi_3/R$, отсюда $\varphi_3 = -I_{вх}R$. Выходной ток первого ОУ обозначим I. Для узла *3* по первому закону Кирхгофа $I_3 = I_{вх} + I$. Так как $I_2 = 0$, то

$$I_4 = \varphi_4/(R_1 + R_2) \qquad (а)$$

и потенциал точки *6* $\varphi_6 = \varphi_3 - I_3 R_1 = \varphi_3 - (I_{вх} + I) R_1$. Входное напряжение второго ОУ стремится к нулю, поэтому $\varphi_5 = \varphi_6$.

Так как сопротивление между точками *4* и *5* равно сопротивлению между точками *4* и *6*, то

$$I_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_6}{R_2} = \frac{\varphi_4 + I_{вх}R + (I_{вх} + I) R_1}{R_2}. \qquad (б)$$

Приравнивая (а) и (б), определим

$$\varphi_4 = -\frac{1}{R_1}[I_{вх}(R + R_1)(R_1 + R_2) - IR_1(R_1 + R_2)] \qquad (в)$$

Подставим (в) в (а):

$$I_4 = -I_{вх}(1 + R/R_1) - I. \qquad (г)$$

Для узла *б* по первому закону Кирхгофа

$$I_{вых} = I_3 + I_4 = I_{вх} + I - I_{вх}(1 + R/R_1) - I = -I_{вх}\frac{R}{R_1}.$$

Так как $I_{вых}$ пропорционально $I_{вх}$, $U_{вх} \to 0$, а выходной ток $I_{вых}$ не зависит от сопротивления нагрузки $Z_н$, то схема рис. 12.17, *б* по отношению к выходной цепи обладает свойством источника тока, управляемого входным током $I_{вх}$.

Одна из возможных схем ИНУТ изображена на рис. 12.17, *в* и одна из возможных схем ИТУН — на рис. 12.17, *г*.

§ 12.9. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОУ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ГИРАТОРА

При схемной реализации гираторов часто применяют операционные усилители. На рис. 12.18, *а*, *б* изображены две схемы, осуществляющие функции гиратора [71]. В схеме рис. 12.18, *а* заземлены входы «плюс» трех ОУ. Источник сигнала и нагрузка, строго говоря, не соединены с заземленной точкой. Это является известным недостатком схемы. Сопротивления R_{g1} и R_{g2} играют

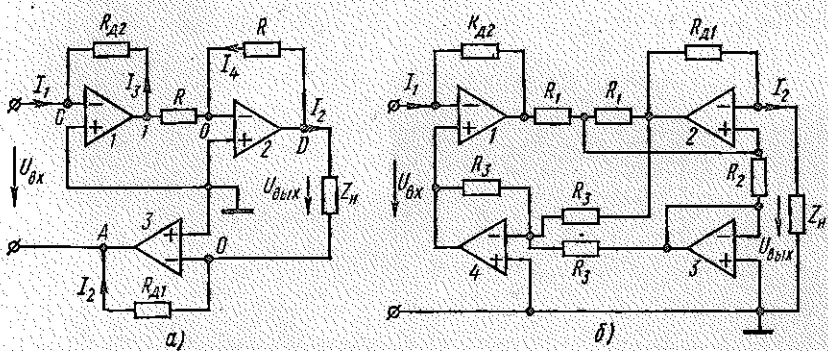


Рис 12.18

роль сопротивлений гирации. В схеме рис. 12.18, *б* использованы четыре ОУ. Один зажим источника сигнала и один зажим нагрузки соединены с заземленной точкой. Сопротивления, обозначенные на схеме $R_{д1} = R_{g1}$ и $R_{д2} = R_{g2}$ выполняют роль сопротивлений гирации. Если входной ток обозначить I_1, выходной $-I_2$, входное напряжение $-U_{вх}$ и выходное $-U_{вых}$, то

$$U_{вх} = -R_{g1}I_2; \qquad (а)$$

$$U_{вых} = -R_{g2}I_1. \qquad (б)$$

Покажем, что схема рис. 12.18, *а* может выполнять функции гиратора. С этой целью обозначим токи в ветвях этой схемы

через I_1, I_2, I_3, I_4. Учтем, что напряжение на входе каждого ОУ стремится к нулю, что точки, обозначенные буквой O, и точка C практически имеют нулевой потенциал и что входные токи всех ОУ стремятся к нулю. Ток $I_4 = U_{вых}/R$. Потенциал точки 1

$$\varphi_1 = -I_4 R = -U_{вых}.$$

Потенциал точки C $\varphi_C = \varphi_1 - I_3 R_{g2} \approx 0$, отсюда $I_3 = \varphi_1/R_{g2} = -U_{вых}/R_{g2}$. Но $I_1 = -I_3$, поэтому

$$I_1 = U_{вых}/R_{g2}. \qquad (в)$$

Потенциал точки A $\varphi_A = -I_2 R_{g1}$.

Входное напряжение

$$U_{вх} = \varphi_C - \varphi_A = 0 + I_2 R_{g1}, \qquad (г)$$

Если учесть, что направление тока I_2 на рис. 12.18, *а* противоположно положительному направлению для тока I_2, принятому при записи Y-формы уравнений четырехполюсника, то можно заметить, что уравнения (в) и (г) представляют собой уравнения гиратора. Замечание о знаке тока I_2 относится и к уравнению (а) для схемы рис. 12.18, *б*.

§ 12.10. ПРИМЕНЕНИЕ ОУ ДЛЯ ИМИТАЦИИ ИНДУКТИВНОСТИ

На рис. 12.19, *а* изображена схема (ее называют схемой Риордана) с двумя ОУ, применяемая для различных целей, в том числе для создания имитированной индуктивности. В схеме пять

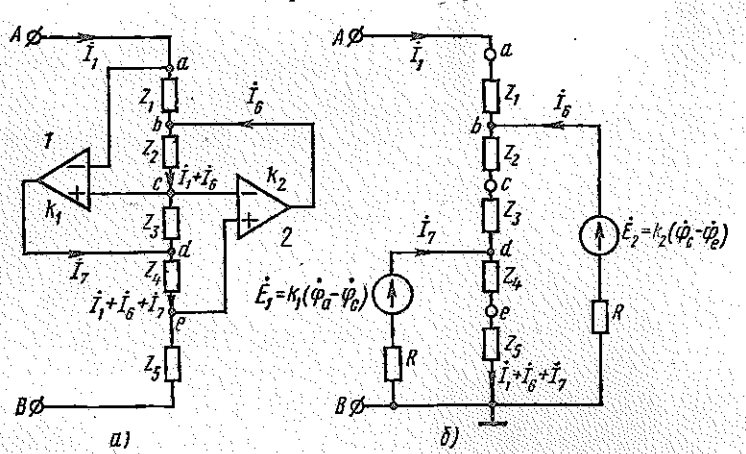


Рис 12.19

сопротивлений $Z_1 - Z_5$. Каждый ОУ включен по дифференциальной схеме.

Выведем формулу для входного сопротивления схемы $Z_{вх\,AB}$ относительно точек A и B. С этой целью ток на выходе первого ОУ (с коэффициентом усиления k_1) обозначим I_7, а ток на выходе

второго ОУ (с коэффициентом усиления k_2) назовем $\dot{I}_6$. Учтем, что входные токи обоих усилителей практически нулевые.

Составим схему замещения, изображенную на рис. 12.19, *б*. В ней выходные цепи ОУ замещены ветвями с источниками э. д. с. $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ и весьма малыми сопротивлениями R. По этим ветвям проходят токи $\dot{I}_7$ и $\dot{I}_6$. Составим выражения для входных напряжений ОУ и приравняем их нулю:

$$\dot{U}_{вх1} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_c = \dot{I}_1 Z_1 + (\dot{I}_1 + \dot{I}_6) Z_2 = 0, \qquad (а)$$

$$\dot{U}_{вх2} = \dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_e = (\dot{I}_1 + \dot{I}_6) Z_3 + (\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7) Z_4 = 0. \qquad (б)$$

Из уравнения (а) находим

$$(\dot{I}_1 + \dot{I}_6) = -\dot{I}_1 \frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (в)$$

Из (б) с учетом (в) имеем $(\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7) = \dot{I}_1 \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$. Входное напряжение $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AC} + \dot{U}_{ce} + (\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7) Z_5$. Так как

$$\dot{U}_{AC} = \dot{U}_{ce} = 0, \quad \text{то} \quad \dot{U}_{AB} = (\dot{I}_1 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7) Z_5 = \dot{I}_1 \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}.$$

Следовательно, входное сопротивление схемы рис. 12.19, *а* относительно зажимов A и B

$$Z_{AB} = Z_1 Z_3 Z_5 / (Z_2 Z_4). \qquad (12.6)$$

Если в схеме рис. 12.19, *а* принять $Z_1 = R_1$, $Z_3 = R_3$, $Z_5 = R_5$, $Z_2 = R_2$ и $Z_4 = 1/(j\omega C)$, то $Z_{AB} = R_1 R_3 R_5 j\omega C / R_2$, т. е. входное сопротивление имеет индуктивный характер и величина имитированной индуктивности $L = R_1 R_3 R_5 C / R_2$.

§ 12.11. ПРИМЕНЕНИЕ ОУ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЧАСТОТНО-ЗАВИСИМОГО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕЗИСТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Если в схеме рис. 12.19, *а* положить $Z_1 = Z_3 = 1/(j\omega C)$ и $Z_2 = Z_4 = Z_5 = R$, то $Z_{AB} = -\frac{1}{\omega^2 C^2 R}$. В этом случае входное сопротивление оказывается частотно-зависимым отрицательным резистивным сопротивлением (ЧЗОС).

Второй тип ЧЗОС получим, если в схеме рис. 12.19, *а* положим $Z_2 = Z_4 = 1/(j\omega C)$ и $Z_1 = Z_3 = Z_5 = R$. Тогда $Z_{AB} = -\omega^2 C^2 R^3$.

Если в первом типе ЧЗОС входное сопротивление обратно пропорционально квадрату частоты, то во втором типе оно прямо пропорционально квадрату частоты.

§ 12.12. ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ АКТИВНЫХ *RC*-ФИЛЬТРОВ

Обычные пассивные фильтры составляют из конденсаторов и индуктивных катушек. Однако индуктивные катушки имеют существенный недостаток — они не могут быть выполнены методами интегральной технологии и, кроме того, при низких (инфра-

низких) частотах, используемых, например, в гидролокации и акустике, трудно изготовить индуктивные катушки с высокой добротностью. Этим и объясняется потребность в активных RC-фильтрах как при низких, так и при высоких частотах.

Активными RC-фильтрами называют электрические фильтры, составленные из элементов R и C и одного или нескольких активных резистивных элементов (операционных усилителей, транзисторов, туннельных диодов). В активных RC-фильтрах индуктивные катушки, как таковые, отсутствуют; вместо них используют элементы R и C, имитированные индуктивности либо другие имитированные элементы, как, например, ЧЗОС.

Известны два основных направления реализации активных RC-фильтров. Первое направление — это схемы, построенные на основе операционных усилителей с обратными связями, второе — схемы с имитированными индуктивностями и частотно-зависимыми резистивными сопротивлениями.

Первое направление представлено широко распространенными структурами Саллен Ки, Рауха и др. В этих структурах используются усилители с обратной связью. Различные схемы и их характеристики рассмотрены в [70—73].

В качестве примера на рис. 12.20, *а* и 12.21, *а, б* изображены три структуры Рауха. На рис. 12.20, *а* — схема низкочастотного активного RC-фильтра второго порядка. Его передаточная функция

$$H(p)=\frac{-1}{\frac{R_1}{R_3}+\frac{R_1R_2}{R_3}C_2p+(R_1+R_2)C_2p+R_1R_2C_1C_2p^2}.$$

Знак минус обусловлен инвертирующим включением ОУ. Частота $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_2R_3C_1C_2}}$. Если $R_1=R_2=R_3=R$, то $H(p)=\frac{-1}{1+3RC_2p+R^2C_1C_2p^2}$.

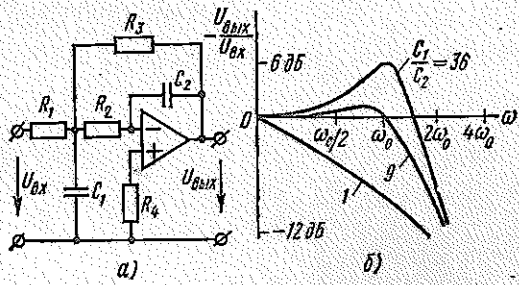


Рис. 12.20

На рис. 12.20, *б* показана зависимость $-U_{вых}/U_{вх}$ в децибелах в функции ω для НЧ-фильтра рис. 12.20, *а* при $R_1=R_2=R_3=R$ и различных отношениях C_1/C_2. Зависимость $U_{вых}/U_{вх}=f(\omega)$ представляет собой амплитудно-частотную характеристику фильтра.

В полосе пропускания выходное напряжение может быть больше входного за счет наличия в схеме операционного усилителя.

Схема высокочастотного активного RC-фильтра второго порядка изображена на рис. 12.21, *а*. Она получена из схемы рис. 12.20, *а* перестановкой конденсаторов и резисторов (на рис. 12. 21, *а* внизу вместо R_2 должно быть R_4). Передаточная функция этого фильтра

$$H(p)=\frac{-R_1R_2C_1C_2p^2}{1+R_1(C_1+C_2+C_3)p+R_1R_2C_1C_3p^2};$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_3}}.$$

Если $C_1=C_2=C_3=C$, то $H(p)=\frac{-R_1R_2C^2p}{1+3R_1Cp+R_1R_2C^2p^2}$. Кривые $U_{вых}/U_{вх}=f(\omega)$ этого фильтра получаются из кривых рис. 12.20, *б*, если последние зеркально отразить относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $\omega=\omega_0$ на оси абсцисс.

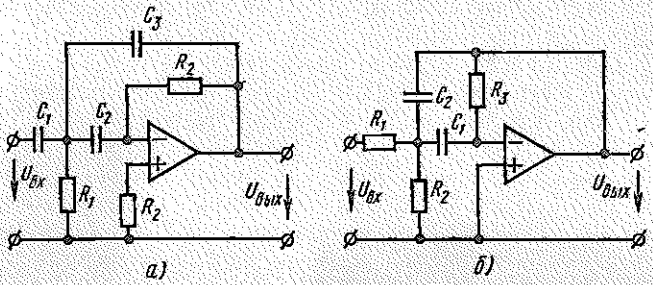


Рис. 12.21

Схема простого полосового активного RC-фильтра изображена на рис. 12.21, *б*. Его передаточная функция

$$H(p)=\frac{\frac{R_2R_3}{R_1R_3}C_1p}{1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1+C_2)p+\frac{R_1R_3R_3}{R_1+R_2}C_1C_2p^2}.$$

Резонансная частота $\omega_0=\sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2R_3C_1C_2}}$. На частоте

$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}}=\frac{R_1(C_1+C_2)}{R_3C_1}.$$

Обратим внимание на два обстоятельства:

1. Выходные сопротивления всех активных RC-фильтров, изображенных на рис. 12.20, *а* и 12.21, *а*, *б*, весьма малы.

2. Сопротивление нагрузки, включенной на выходе каждого RC-фильтра, во много раз больше выходного сопротивления фильтра (сопротивление нагрузки фильтра теоретически стремится

к бесконечности). Эти обстоятельства объясняют, почему свойства фильтра (или одного каскада его) с достаточной степенью приближения можно описать передаточной функцией $H(p)$, определенной из режима холостого хода.

Если в активных RC-фильтрах $H(p)$ будет иметь третий порядок, то их называют фильтрами третьего порядка. Такие фильтры позволяют получать более разнообразные характеристики $U_{вых}/U_{вх} = f(\omega)$, чем фильтры второго порядка. По виду характеристик их подразделяют на фильтры Баттерворта — полосовые фильтры с плоской частотной характеристикой в полосе пропускания, фильтры Чебышева — полосовые фильтры без ослабления, у которых частотная характеристика имеет волнообразный характер, фильтры Бесселя, обладающие линейной фазовой характеристикой, предназначенной для передачи импульсов без всплесков, фильтры Папулиса — оптимальные фильтры — среднее между фильтрами Баттерворта и Чебышева.

Какие соотношения между параметрами фильтра третьего порядка должны быть взяты, чтобы получить тот или иной вид частотной характеристики? Этот вопрос рассмотрен и параметры фильтров табулированы, например, в книге Марше [71].

Анализ свойств сложных схем активных RC-фильтров можно проводить либо в общем виде, полагая, что операционный усилитель является идеальным и представив передаточную функцию фильтра в виде ряда сомножителей, каждому из которых в схеме сложного фильтра соответствует свое звено, либо полагая, что операционный усилитель не является идеальным. В этом случае ОУ следует заменить схемой замещения, рассмотренной в § 12.7, для составления передаточной функции фильтра воспользоваться, например, методом узловых потенциалов и расчет проводить численным методом.

Осуществляя фильтр в виде каскадного соединения звеньев, полагают часто, что передаточная функция каждого предыдущего звена не зависит от последующего, т. е. что отдельные звенья «развязаны» друг от друга. Практически же «развязка» далеко не всегда имеет место, потому последующие звенья в какой-то степени влияют на частотную характеристику предыдущего звена, в особенности при высокодобротных элементах фильтра. Кроме того, активные RC-фильтры, осуществленные по способу каскадной реализации, часто обладают недопустимо высокой чувствительностью к изменению величины того или иного параметра. Вследствие указанных причин в настоящее время имеется тенденция считать более перспективным второе направление реализации активных RC-фильтров, которое имеет два пути осуществления.

Первый путь состоит в замене в обычных пассивных LC-фильтрах индуктивностей на имитированные индуктивности. Второй — в замене схемы обычного пассивного RC-фильтра его преобразованным эквивалентом, в котором имеются только конденсаторы, резистивные сопротивления и ЧЗОС.

Фильтры, реализованные методами второго направления, обычно менее чувствительны к изменению параметров, чем RC-фильтры первого направления. Рассмотрим идеи двух методов (путей) реализации второго направления.

§ 12.13. АКТИВНЫЕ RC-ФИЛЬТРЫ С ИМИТИРОВАННЫМИ ИНДУКТИВНОСТЯМИ

При построении активных RC-фильтров с имитированными индуктивностями в обычных LC-фильтрах индуктивные элементы заменяют на имитированные. При этом следует различать, является ли индуктивность в исходном LC-фильтре (которую собираются имитировать) заземленной, например, в высокочастотном T-фильтре (рис. 12.22, *а*) или незаземленной, например, в низкочастотном фильтре (рис. 12.22, *б*). Реализация заземленной и незаземленной индуктивностей осуществляется различно.

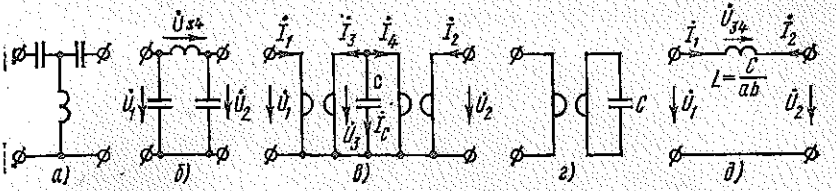


Рис. 12.22

Заземленную индуктивность имитируют, например, с помощью схемы рис. 12.19, *а*, в которой берут сопротивление $Z_4 = 1/j\omega C$, а все остальные сопротивления осуществляют в виде резисторов.

Незаземленную индуктивность реализуют, например, с помощью схемы рис. 12.22, *в*, в которой имеются два гиратора и конденсатор емкостью C, или применяя гиратор со взвешенными зажимами, нагружая его конденсатором емкостью C (рис. 12.22, *г*).

Убедимся в том, что при определенных условиях схема рис. 12.22, *в* эквивалентирует индуктивность в схеме рис. 12.22, *б*. Гираторы в схеме рис. 12.22, *в* имеют неодинаковые, но в известном смысле симметричные Y-матрицы. Y-матрица первого гиратора $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$, второго $-\begin{bmatrix} 0 & b \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.

Если использовать обозначения токов и напряжений на схеме рис. 12.22, *в*, то для этой схемы имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

Отсюда

$$\dot{I}_1 = a\dot{U}_3; \quad \dot{I}_3 = -b\dot{U}_1; \quad \dot{I}_4 = b\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = -a\dot{U}_3. \qquad \text{(а)}$$

В свою очередь ток

$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_3. \qquad \text{(б)}$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_3+\dot{I}_4+\dot{I}_C=0. \qquad (в)$$

В уравнение (в) подставим $\dot{I}_3$ и $\dot{I}_4$ из (а) и $\dot{I}_C$ из (б). Получим

$$\dot{U}_1-\dot{U}_2=\frac{j\omega C}{b}\dot{U}_3. \qquad (г)$$

Из (а) найдем $\dot{U}_3=\dot{I}_1/a=-\dot{I}_2/a$. Следовательно,

$$\dot{I}_2=-\dot{I}_1. \qquad (д)$$

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 12.22, *в*:

$$\dot{U}_2-\dot{U}_1+\dot{U}_{34}=0. \qquad (е)$$

Из (е) следует, что

$$\dot{U}_{34}=\dot{U}_1-\dot{U}_2. \qquad (ж)$$

В соответствии с формулой (г) заменим $\dot{U}_1-\dot{U}_2$ на $\frac{j\omega C}{b}\dot{U}_3$, а $\dot{U}_3$ на $\dot{I}_1/a$, тогда

$$\dot{U}_{34}=j\frac{\omega C}{ab}\dot{I}_1. \qquad (з)$$

Таким образом, в схеме рис. 12.22, *в* ток $\dot{I}_2=-\dot{I}_1$, а напряжение $\dot{U}_{34}$ может быть представлено как $\dot{I}_1/\omega L$, где имитированная незаземленная индуктивность

$$L=C/(ab). \qquad (и)$$

Перечисленным соотношениям соответствует схема рис. 12.22, *д*. Обратим внимание на то, что схема рис. 12.22, *в* будет имитировать незаземленную индуктивность, если между элементами Y-матриц двух гираторов имеется симметрия в отмеченном смысле. Если же Y-матрицы гираторов несимметричны, то на входе и выходе эквивалентной схемы рис. 12.22, *д* появятся еще поперечные индуктивности, что приведет к нарушению нормальной работы схемы.

§ 12.14. АКТИВНЫЕ *RC*-ФИЛЬТРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧЗОС

Если в обычном *LC*-фильтре, например в низкочастотном (рис. 12.23, *а*) T-фильтре, взятом в качестве прототипа, все сопротивления разделить на комплексную частоту p (для синусоидального режима $p=j\omega$), то резистивное сопротивление источника питания $R_г$ перейдет в емкостное с емкостью $C_г=1/R_г$, резистивное сопротивление нагрузки $R_н$ — в емкостное с емкостью $C_н=1/R_н$, индуктивные сопротивления pL в резистивные $R_1=R_2=L$ и емкостное сопротивление $1/(pC)$ — в частотно-зависимое отрицательное резистивное сопротивление $-1/(\omega^2 C)$.

В результате получим схему рис. 12.23, *б*. Токи и напряжения в обеих схемах обозначим в соответствии с рисунками и по-

строим векторные диаграммы, приняв для простоты $L=C=\omega=R_н=R_г=1$. Векторная диаграмма токов и напряжений для исходной схемы (схемы прототипа) изображена на рис. 12.23, *в*, а для преобразованной — на рис. 12.23, *г*.

Из сопоставления диаграмм видно, что отношения $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ и $\dot{I}_2/\dot{I}_1$ в обеих схемах одинаковы, углы между $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ и между $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$

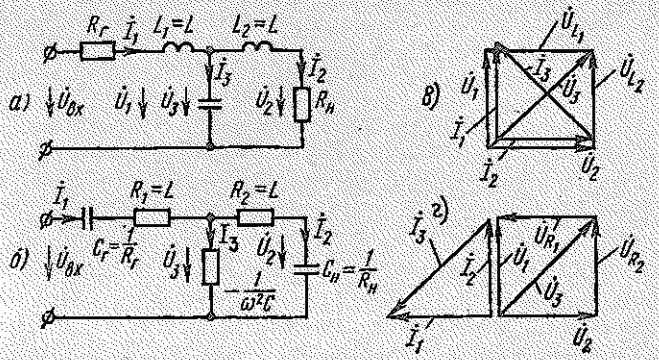


Рис. 12.23

тоже одинаковы, но входные сопротивления различны: для исходной схемы входное сопротивление резистивное, а для преобразованной емкостное.

Чтобы преобразованную схему рис. 12.23, *б* можно было использовать в качестве фильтра, нагрузкой ее должна служить высокоомная нагрузка, присоединяемая параллельно конденсатору емкостью $C_н$. Тогда отношение $\dot{U}_1/\dot{U}_2$ в схеме рис. 12.23, *б* такое же, как и в схеме-прототипе рис. 12.23, *а*. Наличие в схеме частотнозависимого резистивного сопротивления в ряде случаев позволяет получить улучшенные частотные характеристики по сравнению с частотными характеристиками фильтра прототипа.

Глава тринадцатая

ОСНОВЫ МАТРИЧНО-ТОПОЛОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 13.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ДВУХ НАПРАВЛЕНИЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

В гл. 13—15 рассматривается совокупность вопросов теории электрических цепей, в основу которых положено понятие графа. Обобщенно граф — это совокупность узлов и соединяющих их ветвей. В теории цепей применяют несколько типов графов: ненаправленные, направленные (сигнальные), унисторные и др. Ненаправленный граф представляет собой остов электрической цепи. Узлы ненаправленного графа — это узлы схемы, а линии, соединяющие узлы, соответствуют ветвям схемы. На ветвях ненаправ-

ленного графа в одних случаях ставят стрелки (гл. 13), в других не ставят (гл. 15). Направленный граф (гл. 14) — это графический эквивалент системы уравнений, описывающей процессы в цепи. Его узлы соответствуют токам и (или) потенциалам точек цепи, а каждая ветвь (на всех ветвях ставят стрелки) характеризуется величиной передачи в направлении стрелки.

Теория графов развивалась в двух направлениях. Первое — матрично-топологическое, основанное на использовании топологических понятий дерева, ветви дерева, ветви связи, главного сечения, главного контура и других и на применении связанных с этими понятиями топологических матриц. Это направление теории графов зародилось еще во времена Кирхгофа и Максвелла, но получило относительно широкое распространение сравнительно недавно, после того как в практике расчета электрических цепей стали широко использовать ЭВМ.

Второе направление теории графов чисто топологическое. Оно начало интенсивно развиваться примерно с 1956 г. после появления работы Мезона, которому удалось дать электротехническую трактовку давно известного в математике правила Крамера и на основе ее разработать упорядоченный метод подсчета определителя системы. В данной главе рассмотрено первое направление теории графов, второе направление — в гл. 14 и 15.

§ 13.2. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ

На рис. 13.1, *а* изображен остов некоторой электрической цепи, т. е. ненаправленный граф. В нем четыре узла и шесть ветвей. Узлы обозначим цифрами *1—4*. Под *деревом графа* понимают совокупность узлов и соединяющих их ветвей, которые касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура.

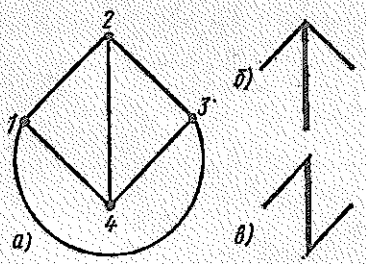


Рис. 13.1

Если в графе y узлов и $в$ ветвей (полагаем, что каждая пара узлов соединена одной ветвью), то число ветвей дерева равно $y-1$.

Из одного и того же графа можно образовать несколько деревьев. Общее правило, позволяющее определить число деревьев графа, дано в гл. 15. В качестве примера на рис. 13.1, *б, в* показаны два дерева для графа рис. 13.1, *а* (всего же для графа рис. 13.1, *а* можно образовать 16 деревьев). В матрично топологической теории цепей за основу принимают всего одно дерево. Ветвям этого дерева придают номера с 1 по $y-1$. Остальные номера с y по $в$ придают ветвям графа, не вошедшим в выбранное дерево; их называют ветвями связи или хордами. Для дальнейших рассуждений возьмем дерево на рис. 13.1, *в*. Его ветви нумеруем цифрами *1, 2, 3*. Нумерация всех ветвей графа показана на рис. 13.2, *а*. Утолщенными ли-

ниями показаны ветви дерева, тонкими — ветви связи (их номера с *4* по *6*).

В теории графов используют понятие *главное сечение*. Каждое главное сечение (изображают в виде овала) проводят так, чтобы оно рассекало несколько ветвей связи и только одну ветвь дерева. Таким образом, число главных сечений равно числу ветвей дерева.

Дерево на рис. 13.1, *в* имеет три ветви, следовательно, в графе рис. 13.1, *а* должно быть сделано три главных сечения. Эти сечения показаны на рис. 13.2, *а*. *Номер главного сечения соответствует номеру рассекаемой этим сечением ветви дерева*. В соответствии с этим главные сечения на рис. 13.2, *а* обозначены цифрами *1*, *2*, *3*.

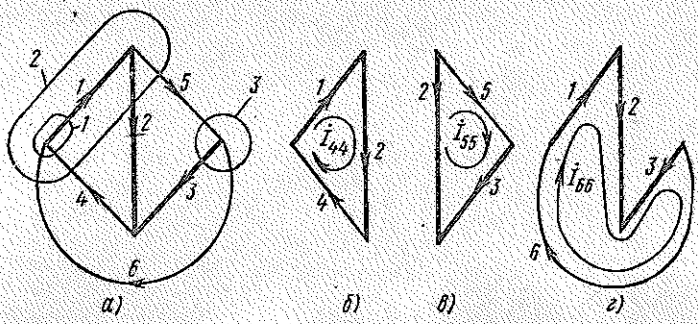


Рис. 13.2

Главное сечение *1* рассекает ветвь *1* и ветви связи *4* и *6*. Сечение *2* рассекает ветвь *2* и ветви связи *5*, *4*, *6* (ветвь *1* целиком входит в овал *2* и не рассекается им). Сечение *3* рассекает ветвь *3* и ветви связи *5* и *6*.

На всех ветвях графа ставят стрелки. Направление стрелок выбирают произвольно. Стрелки указывают направление отсчета тока и напряжения на каждой ветви. Познакомимся с понятием *главные контуры*. Это контуры, в каждый из которых входит только по одной ветви связи. Так, в рассматриваемом примере применительно к дереву на рис. 13.1, *в* главные контуры показаны на рис. 13.2, *б*, *в*, *г* и имеют номера *4*, *5*, *6*. *Главные контуры имеют те же номера, что и входящие в них ветви связи*. Утолщенными линиями на рисунках показаны ветви дерева, тонкими — ветви связи.

§ 13.3 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

В матрично-топологическом методе используют следующие топологические матрицы: *узловую матрицу* $[A]$, *матрицу главных сечений* $[Q_г]$ (обозначают также $[D]$), *матрицу главных контуров* $[K_г]$ (обозначают также $[B]$ и $[C]$). Элементами всех этих матриц

являются числа 1, —1, 0, которые по определенным правилам подставляют в клетки матрицы. Кроме того, используют *диагональную матрицу сопротивлений ветвей* $[Z_в]$, диагональную матрицу проводимостей ветвей $[Y_в]$ и ряд подматриц ранее названных матриц.

Узловую матрицу $[A]$ составляют для всех узлов графа, кроме одного. *Номер строки i в ней соответствует номеру узла, а номер столбца j* — номеру ветви. Если узел, для которого составляется строка $[A]$-матрицы охватить кружком, то в соответствующей ячейке ставят 1, если стрелка на j ветви направлена из кружка, —1, если в кружок и 0, если ветвь не затронута этим кружком. Полагая узел *4* заземленным, составим $[A]$-матрицу для узлов *1*, *2*, *3*:

$$[A]=\begin{array}{c} \\ \text{Узлы} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\text{Ветви}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Замечаем, что $[A]$-матрица может быть представлена двумя подматрицами

$$[A]=\begin{array}{c} \\ \text{Узлы} \\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\ldots(y-1) & y\ldots в \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \end{array}\right] \end{array}. \qquad (13.1)$$

Матрицу главных сечений $[Q_г]$ составляют для главных сечений. *Строки ее соответствуют сечениям, а столбцы — ветви дерева и ветвям связи.* В клетках соответствующей строки ее ставят 1 для рассекаемой этим сечением ветви дерева и 1 для всех ветвей связи, стрелки на которых ориентированы по отношению к этому сечению (овалу) так же, как и стрелка на рассекаемой этим сечением ветви дерева. Если стрелка на ветви связи направлена по отношению к овалу иначе, чем стрелка на ветви дерева, ставят —1, если ветвь связи не рассечена, ставят 0.

Применительно к дереву на рис. 13.1, *в* для главных сечений *1*, *2*, *3* (рис. 13.2, *а*) имеем

$$[Q_г]=\begin{array}{c} \\ \text{Сечения} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\text{Ветви}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В общем случае $[Q_г]$ может быть представлена двумя подматрицами

$$[Q_г]=\begin{array}{c}\\ \text{Сечения}\\ \begin{matrix}1\\ \vdots\\ (y-1)\end{matrix}\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}\text{Ветви}\\ 1\ldots(y-1)\end{matrix}\quad\begin{matrix}y\ldots в\end{matrix}\\ \left[\begin{matrix}\quad Q_1\quad\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\quad Q_2\quad\end{matrix}\right]\end{array}. \tag{13.2}$$

Каждая строка $[Q_1]$ имеет только по одному элементу $+1$ и находится он на ее главной диагонали, поэтому $[Q_1]$ представляет собой единичную матрицу $[1]$ и потому

$$[Q_г]=[1\,|\,Q_2]. \tag{13.3}$$

Матрицей главных контуров называют матрицу, строки которой соответствуют номеру контура, а столбцы — номеру ветви. Если при обходе контура в направлении стрелки на ветви связи направление стрелки на какой-либо ветви этого контура совпадает с направлением обхода контура, то в соответствующую клетку $[K_г]$ ставят 1; если не совпадает, то —1, если ветвь не обходится, то 0. Применительно к контурам *4*, *5*, *6* рис. 13.2, *б*, *в*, *г* имеем

$$[K_г]=\begin{array}{c}\\ \text{Контуры}\\ 4\\ 5\\ 6\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}\text{Ветви}\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

В общем случае $[K_г]$ может быть представлена двумя подматрицами и имеет следующую нумерацию строк и столбцов:

$$[K_г]=\begin{array}{c}\\ \text{Контуры}\\ \begin{matrix}y\\ \vdots\\ в\end{matrix}\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}\text{Ветви}\\ 1\ldots(y-1)\end{matrix}\quad\begin{matrix}y\ldots в\end{matrix}\\ \left[\begin{matrix}\quad K_1\quad\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}\quad K_2\quad\end{matrix}\right]\end{array}. \tag{13.4а}$$

Так как номер строки (т. е. номер контура) в $[K_2]$ определяется номером ветви связи этого контура и обход контура происходит по стрелке на ней, то каждая строка подматрицы $[K_2]$ имеет только один элемент, расположенный на ее главной диагонали и равный 1, т. е. $[K_2]$ представляет собой единичную матрицу $[1]$ и

$$[K_г]=[K_1\,\vdots\,1]. \tag{13.4б}$$

§ 13.4. ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА С ПОМОЩЬЮ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Совокупност уравнений по первому закону Кирхгофа может быть записана следующим образом:

$$[A][I_в]=0. \tag{13.5а}$$

Здесь $[\dot{I}_в]$ матрица-столбец токов ветвей. Применительно к графу рис. 13.2, *а* имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = 0.$$

Совокупность уравнений по второму закону Кирхгофа

$$[K_г][\dot{U}_в] = 0. \qquad (13.5б)$$

Здесь $[\dot{U}_в]$ матрица-столбец напряжений ветвей. Применительно к графу рис. 13.2, *а*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix} = 0.$$

§ 13.5. ОБОБЩЕННАЯ ВЕТВЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Обобщенная ветвь изображена на рис. 13.3. Она состоит из двух параллельных ветвей. В первой имеется сопротивление $Z_в$ (проводимостью $Y_в$) и источник э. д. с. $\dot{E}_в$. Во второй — источник тока $\dot{I}_k$. Для принятых на рис. 13.3 положительных направлений токов ток через $Z_в$ равен $\dot{I}_в + \dot{I}_k$. Напряжение между точками *a* и *b* ветви обозначим $\dot{U}_в$. Тогда по закону Ома для участка цепи с э. д. с.

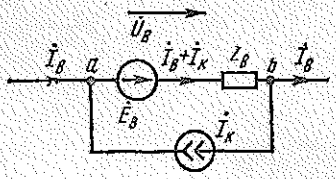


Рис. 13.3

$$(\dot{U}_в + \dot{E}_в) = Z_в(\dot{I}_в + \dot{I}_k), \qquad (13.6)$$

отсюда

$$(\dot{I}_в + \dot{I}_k) = Y_в(\dot{U}_в + \dot{E}_в). \qquad (13.7)$$

§ 13.6. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Уравнение (13.6) справедливо для любой обобщенной ветви схемы. Справедливо оно и для совокупности ветвей, входящих в любой главный контур. Запишем совокупность уравнений (13.6) для всех ветвей, входящих во все главные контуры:

$$[K_г][\dot{U}_в] + [K_г][\dot{E}_в] = [K_г][Z_в]\{[\dot{I}_в] + [\dot{I}_k]\}. \qquad (13.8)$$

Через $[Z_в]$ здесь обозначена диагональная матрица сопротивлений ветвей:

$$[Z_в]=\begin{bmatrix} Z_1 & & & & \\ & Z_2 & & & \\ & & Z_3 & & \\ & & & \dots & \\ & & & \dots & \\ & & & & Z_в \end{bmatrix}.$$

Учтем, что по второму закону Кирхгофа сумма напряжений по любому замкнутому контуру электрической цепи равна нулю, поэтому $[K_г]\,[\dot{U}_в]=0$. Учтем также, что матрица-столбец токов ветвей может быть записана через матрицу-столбец контурных токов $[\dot{I}_{kk}]$ и транспонированную матрицу главных контуров $[K_г]^T$:

$$[\dot{I}_в]=[K_г]^T\,[\dot{I}_{kk}]. \qquad (13.9)$$

При этом полагаем, что контурный ток каждого главного контура направлен по стрелке на ветви связи этого контура. Так, контурные токи $\dot{I}_{44}$, $\dot{I}_{55}$, $\dot{I}_{66}$ для схемы рис. 13.2, *а* показаны на рис. 13,2, *б*, *в*, *г*. Для этой схемы

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_{44} \\ \dot{I}_{55} \\ \dot{I}_{66} \end{bmatrix}.$$

Отсюда $\dot{I}_1=\dot{I}_{44}+\dot{I}_{66}$; $\dot{I}_2=\dot{I}_{44}-\dot{I}_{55}+\dot{I}_{66}$; $\dot{I}_3=\dot{I}_{55}-\dot{I}_{66}$; $\dot{I}_4=\dot{I}_{44}$; $\dot{I}_5=\dot{I}_{55}$; $\dot{I}_6=\dot{I}_{66}$.

Подставив (13.9) в (13.8), получим

$$[K_г][Z_в][K_г]^T[\dot{I}_{кк}]=[K_г]\{[\dot{E}_в]-[Z_в][\dot{I}_k]\}. \qquad (13.10)$$

Произведение $[K_г][Z_в][K_г]^T=[Z]$ — есть не что иное, как матрица $[Z]$ контурных сопротивлений метода контурных токов. Так как контуры нумеруем цифрами от $у$ до $в$, то

$$[Z]=\begin{bmatrix} Z_{у,\,у} & Z_{у,\,у+1} & \dots & Z_{у,\,в} \\ Z_{у+1,\,у} & Z_{у+1,\,у+1} & \dots & Z_{у+1,\,в} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{в,\,у} & Z_{в,\,у+1} & \dots & Z_{в,\,в} \end{bmatrix}.$$

Здесь Z_{mm} — полное сопротивление m-контура; $Z_{m,\,n}$ — сопротивление ветви (ветвей), смежной между m- и n-контурами. Оно имеет знак плюс, если контурные токи $\dot{I}_{mm}$ и $\dot{I}_{nn}$ через смежную ветвь проходят согласно, и знак минус, если встречно. Применительно к схеме рис. 13.2, *а*, полагая сопротивления ветвей рав-

ными $Z_1 - Z_6$, имеем

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} \\ Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} \\ Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1+Z_2+Z_4 & -Z_2 & Z_1 \\ -Z_2 & Z_2+Z_3+Z_5 & -(Z_2+Z_3) \\ Z_1 & -(Z_2+Z_3) & Z_1+Z_2+Z_3+Z_6 \end{bmatrix}.$$

Запишем решение (13.10) относительно $[\dot{I}_{hh}]$:

$$[\dot{I}_{hh}] = \{[K_r][Z_в][K_r]^T\}^{-1}[K_r]\{[\dot{E}_в] - [Z_в][\dot{I}_k]\}. \qquad (13.11)$$

§ 13.7. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МЕТОДА УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Совокупность уравнений (13.7) для $(y-1)$ узлов схемы заменим матричным уравнением

$$[A][\dot{I}_в] + [A][\dot{I}_h] = [A][Y_в][\dot{U}_в] + [A][Y_в][\dot{E}_в].$$

Учтем, что по первому закону Кирхгофа $[A][\dot{I}_в] = 0$ и что матрицу-столбец напряжений ветвей $[\dot{U}_в]$ можно записать через транспонированную $[A]$-матрицу и матрицу-столбец потенциалов незаземленных узлов $[\dot{\varphi}]$, т. е. $[\dot{U}_в] = [A]^T[\dot{\varphi}]$. Так, применительно к схеме (графу) рис. 13.2, *а*, полагая узел *4* (рис. 13.1, *а*) заземленным, имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \\ \dot{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}.$$

Действительно, $\dot{U}_1 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$; $\dot{U}_2 = \dot{\varphi}_2$; $\dot{U}_3 = \dot{\varphi}_3$; $\dot{U}_4 = -\dot{\varphi}_1$; $\dot{U}_5 = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3$; $\dot{U}_6 = \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1$. С учетом сказанного систему уравнений метода узловых потенциалов запишем так:

$$[A][Y_в][A]^T[\dot{\varphi}] = [A]\{[\dot{I}_h] - [Y_в][\dot{E}_в]\}. \qquad (13.12)$$

Здесь произведение $[A][Y_в][A]^T = [Y]$ представляет собой матрицу узловых проводимостей метода узловых потенциалов при заземленном y-узле, равную

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1,y-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & & Y_{2,y-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{y-1,1} & Y_{y-1,2} & \dots & Y_{y-1,y-1} \end{bmatrix}.$$

Применительно к схеме рис. 13.1, *а*

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1+Y_4+Y_6 & -Y_1 & -Y_6 \\ -Y_1 & Y_1+Y_2+Y_5 & -Y_5 \\ -Y_6 & -Y_5 & Y_3+Y_5+Y_6 \end{bmatrix}.$$

Правая часть системы (13.12), т. е. $[A]\{[\dot{I}_k]-[Y_в][\dot{E}_в]\}$ представляет собой матрицу-столбец узловых токов. Запишем решение системы (13.12) относительно $[\varphi]$:

$$[\varphi]=\{[A][Y_в][A]^T\}^{-1}[A]\{[\dot{I}_k]-[Y_в][\dot{E}_в]\}. \qquad (13.13)$$

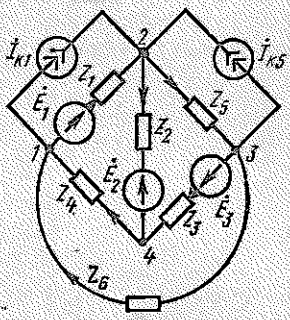


Рис. 13.4

В уравнениях (13.10) и (13.12) э. д. с. $E_в$ некоторой ветви входит в соответствующую клетку $[\dot{E}_в]$ матрицы-столбца со знаком плюс, если направление э. д. с. совпадает со стрелкой на этой ветви. Ток $\dot{I}_k$ источника тока некоторой обобщенной ветви входит в соответствующую клетку матрицы-столбца $[\dot{I}_k]$ со знаком плюс, если ток $\dot{I}_k$ проходит через $Z_в$ согласно со стрелкой на ветви $Z_в$. В качестве примера составим систему (13.12) для схемы рис. 13.4. Граф ее соответствует графу схемы рис. 13.1, *а*. Узел *4* заземлим. Ветви пронумеруем и стрелки на них направим так же, как на рис. 13.2, *а*. Имеем

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&-1&0&-1\\ -1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&-1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1&&&&&\\ &Y_2&&&&\\ &&Y_3&&&\\ &&&Y_4&&\\ &&&&Y_5&\\ &&&&&Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\\ -1&0&0\\ 0&1&-1\\ -1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1&0&0&-1&0&-1\\ -1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&-1&1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\dot{I}_{k1}\\ 0\\ 0\\ 0\\ \dot{I}_{k5}\\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1&&&&&\\ &Y_2&&&&\\ &&Y_3&&&\\ &&&Y_4&&\\ &&&&Y_5&\\ &&&&&Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1\\ -\dot{E}_2\\ \dot{E}_3\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

§ 13.8. ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦ ДЛЯ ВЫВОДА ФОРМУЛ МЕТОДА НАЛОЖЕНИЯ

Уравнение (13.10) запишем в виде

$$[Z][\dot{I}_{kk}]=[\dot{E}_{kk}]. \qquad (13.14)$$

Здесь

$$[Z]=[K_г][Z_в][K_г]^T \quad \text{и} \quad [\dot{E}_{kk}]=[K_г]\{[\dot{E}_в]-[Z_в][\dot{I}_k]\}.$$

Умножим (13.14) слева на $[Z]^{-1}$. Получим $[\dot{I}_k]=[Z]^{-1}[\dot{E}_{kk}]$. В соответствии с (13.9) определим токи ветвей через контурные:

$$[\dot{I}_в]=[Y_{mn}][\dot{E}_{kk}]. \qquad (13.15)$$

Здесь $[Y_{mn}]=[K_г]^T[Z]^{-1}$.

Запишем p-строку уравнения (13.15)

$$\dot{I}_p=Y_{p1}\dot{E}_1+Y_{p2}\dot{E}_2+\ldots \qquad (13.16)$$

Формула (13.16) определяет ток p-ветви через э. д. с. ветвей и входные и взаимные проводимости ветвей, т. е. выражает принцип наложения.

§ 13.9. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ

Полагаем, что при составлении $[A]$-, $[Q_г]$-, $[K_г]$-матриц выполнены условия, оговоренные в § 13.3. Тогда

$$[A]=\begin{array}{c} \\ \text{Узлы}\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{array}\begin{array}{c} \text{Ветви} \\ 1\ldots(y-1)\quad y\ldots в \\ \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \end{array}\right] \end{array};\qquad [Q_г]=\begin{array}{c} \\ \text{Сечения}\ 1 \\ \vdots \\ (y-1) \end{array}\begin{array}{c} \text{Ветви} \\ 1\ldots(y-1)\quad y\ldots в \\ \left[\begin{array}{c|c} 1 & Q_2 \end{array}\right] \end{array};$$

$$[K_г]=\begin{array}{c} \\ \text{Контуры}\ y \\ \vdots \\ в \end{array}\begin{array}{c} \text{Ветви} \\ 1\ldots(y-1)\quad y\ldots в \\ \left[\begin{array}{c|c} K_1 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Представим матрицу-столбец токов ветвей $[\dot{I}_в]$ в виде подматрицы токов ветвей дерева $[\dot{I}_д]$ и подматрицы токов ветвей связи $[\dot{I}_с]$:

$$[\dot{I}_в]=\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ y-1 \\ y \\ \vdots \\ в \end{array}\begin{bmatrix} \dot{I}_д \\ \hdashline \dot{I}_с \end{bmatrix}.$$

Матрицу-столбец напряжений ветвей также представим в виде подматрицы напряжений ветвей дерева $[\dot{U}_д]$ и подматрицы напряжений ветвей связи $[\dot{U}_с]$:

$$[\dot{U}_в]=\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ y-1 \\ y \\ \vdots \\ в \end{array}\begin{bmatrix} \dot{U}_д \\ \hdashline \dot{U}_с \end{bmatrix}.$$

По первому закону Кирхгофа $[A][\dot{I}_в]=0$ или

$$[A_1][\dot{I}_д]+[\dot{A}_2][\dot{I}_с]=0. \qquad (13\ 17)$$

Алгебраическая сумма токов в любом сечении схемы равна нулю, поэтому $[Q_г][\dot{I}_в]=0$. Следовательно,

$$[1\,|\,Q_2]\begin{bmatrix} \dot{I}_д \\ \hdashline \dot{I}_с \end{bmatrix}=[1][\dot{I}_д]+[Q_2][\dot{I}_с]=0. \qquad (13.18)$$

По второму закону Кирхгофа $[K_г][\dot{U}_в]=0$, поэтому

$$[K_г \vdots 1]\begin{bmatrix}\dot{U}_д\\ \dot{U}_с\end{bmatrix}=[K_1][\dot{U}_д]+[1][\dot{U}_с]=0. \qquad (13.19)$$

Учтем, что столбцы $[K_1]$ соответствуют строкам $[Q_2]$, если у всех ненулевых элементов изменить знаки. Следовательно,

$$[K_1]=-[Q_2]^T \quad \text{и} \quad [Q_2]=-[K_1]^T. \qquad (13.20)$$

Обозначим

$$[F]=[K_1]=-[Q_2]^T. \qquad (13.21)$$

Тогда

$$[K_г]=[F \vdots 1], \qquad (13.22)$$

$$[Q_г]=[1 \vdots -F^T]. \qquad (13.23)$$

Умножив (13.17) слева на $[A]^{-1}$, получим

$$[\dot{I}_д]=-[A_1]^{-1}[A_2][\dot{I}_с]. \qquad (13.24)$$

Но из (13.18) имеем $[1][\dot{I}_д]=-[Q_2][\dot{I}_с]$, поэтому

$$[Q_2]=[A_1]^{-1}[A_2]. \qquad (13.25)$$

Дадим обоснование еще одному соотношению

$$[A][K_г]^T=0. \qquad (13.26)$$

В каждой строке этого матричного произведения складываются произведения элементов i-строки a_{ij} на элементы k-столбца b_{kj}. Произведение $a_{ij}b_{kj}$ не будет нулем, если j-ветвь подходит к узлу i и входит в контур k (рис. 13.5). Но в контуре k узел i соединен не с одним, а с двумя узлами ветвями m и j, поэтому всегда будет еще ненулевое произведение $a_{im}b_{km}$, отвечающее ветви m, независимо от того, как направлены стрелки на ветвях и каково направление обхода контура k. Следовательно, каждая строка (13.26) $a_{ij}b_{kj}+a_{im}b_{km}=0$. Соотношения между топологическими матрицами существенны для формализации расчета цепей на ЭВМ. Например, записав $[Q_2]=-[F]^T$, определяем $[F]$ и по ней $-[K_г]$.

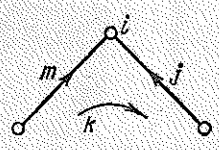


Рис. 13.5.

§ 13.10. СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТРИЧНО-ТОПОЛОГИЧЕСКОГО И ТРАДИЦИОННОГО НАПРАВЛЕНИЙ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Известно, что основными методами расчета электрических цепей являются метод узловых потенциалов (МУП) и метод контурных токов (МКТ). Оба эти метода могут быть применены в своей традиционной форме записи: $[Y][\varphi]=[J]$ для МУП и $[Z][\dot{I}_{кк}]=[\dot{E}_{кк}]$ для МКТ, либо в матрично-топологической—в виде уравнений (13.10) и (13.12). Ясно, что составление систем уравнений по МУП и МКТ традиционным способом осуществляется

значительно проще, быстрее, удобнее и надежнее, чем матрично-топологическим. Проще и быстрее выполняется и проверка правильности составленных уравнений. Что касается решения составленных уравнений, то системы с небольшим числом уравнений, записанные в традиционной форме, могут быть решены, например, с помощью микрокалькулятора. Системы с большим числом уравнений, в том и другом случае решают на ЭВМ. Положительной стороной матрично-топологического направления теории цепей является то, что благодаря большой степени упорядоченности методики основные формулы МУП и МКТ, записанные в виде (13.10) и (13.12), могут быть приспособлены для машинного проектирования. Под ним понимают процесс проектирования электрических цепей с помощью ЭВМ на оптимальный в том или ином смысле режим работы. В настоящее время совокупность вопросов, относящихся к машинному проектированию, разрабатывается и в литературе появляются публикации на эту тему. Общая канва такова: в ЭВМ по определенным правилам вводятся данные о структуре электрической цепи, об элементной базе, управляемых источниках, о наличии или отсутствии индуктивных сечений и емкостных контуров и другие сведения, а также данные о возможных изменениях параметров. При составлении систем уравнений с помощью машин должна соблюдаться определенная иерархия ветвей в зависимости от наличия в них тех или иных схемных элементов. В идеале машина сама должна составить систему уравнений, просчитать множество вариантов при различных сочетаниях параметров и путем сопоставления решений, руководствуясь тем или иным критерием, выбрать оптимальный режим.

Глава четырнадцатая

НАПРАВЛЕННЫЕ (СИГНАЛЬНЫЕ) ГРАФЫ

§ 14.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Направленным графом или *линейным графом* (графом сигнала, диаграммой прохождения сигнала) называют совокупность узлов и соединяющих их ветвей, стрелки на которых указывают направление передачи сигнала (воздействия) от одного узла к другому.

Направленный граф отражает функциональные зависимости процессов в исследуемых цепях.

Узлами в направленных графах обычно являются токи и (или) напряжения исследуемых электрических цепей, а не узловые точки этих цепей, как это имеет место в ненаправленных графах (см. гл. 15). Каждая ветвь графа характеризуется величиной передачи. Под передачей ветви понимают отношение выходной величины ветви к входной величине этой ветви. Например, выходная величина x_2 ветви (рис. 14.1, *а*) равна произведению входной величины (входного сигнала) x_1 на передачу a: $x_2 = x_1 a$.

Передача ветви может иметь размерность проводимости, сопротивления или нулевую размерность.

К узлу графа, кроме входного и выходного, в общем случае может подходить и от него отходить по нескольку ветвей. На рис. 14.1, *б* изображен некоторый граф с узлами *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6*. Передачи ветвей этого графа обозначены буквами a, b, c, ... Направление передачи указано стрелками.

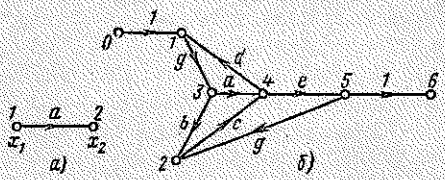


Рис. 14.1

Под x_1 будем понимать узловой сигнал первого узла, под x_2 — узловой сигнал второго узла и т. д.

Узловой сигнал k-го узла равен сумме сигналов, приходящих к k-му узлу. Обратим внимание на то, что при составлении узлового сигнала k-го узла *выходящие из k-го узла сигналы не учитываются* — они учитываются при составлении узловых сигналов тех узлов, к которым эти сигналы подходят.

Так, узловой сигнал первого узла графа (рис. 14.1, *б*) $x_1 = 1x_0 + dx_4$; второго узла $x_2 = bx_3 + gx_5$; третьего узла $x_3 = gx_1$ и т. д.

Узел графа, выражающий собой величину, принятую в изучаемой системе за входную, изображают на чертеже слева, а узел графа, соответствующий выходной величине, — справа.

При вычерчивании графа принято его изображать так, чтобы от входного узла отходила только одна ветвь и чтобы подходящих ко входному узлу ветвей вообще не было.

К выходному узлу должна подходить только одна ветвь (отходящих от него ветвей не должно быть). Это всегда можно сделать, введя, если требуется, в граф дополнительные узлы и ветви, передачи которых равны 1. Так, в графе рис. 14.1, *б* дополнительными узлами являются узлы *1* и *5*. Между входным узлом *0* и дополнительным узлом *1* имеется ветвь с передачей *1*. Аналогично, дополнительный узел *5* соединен с выходным узлом *6* ветвью с передачей, равной 1. Часто узлы, передача между которыми равна 1, обозначают одинаково. Например, для схемы рис. 14.1, *б* узел *0* можно назвать узлом *1* (и тогда на рисунке будет два узла, обозначенных цифрой *1*).

§ 14.2. ПЕРЕХОД ОТ ИЗУЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ К НАПРАВЛЕННОМУ ГРАФУ

Для того чтобы от изучаемой системы, например какой-либо электрической цепи, перейти к соответствующему ей направленному графу, можно применять различные методы в соответствии с тем, что уравнения для этих цепей могут быть записаны либо на основании законов Кирхгофа, либо путем использования метода узловых потенциалов, либо путем использования метода контурных токов и т. п.

Направленный граф заключает в себе ту же информацию, что и система уравнений. Только информация эта выражена графически.

Если при составлении графа за основу взять уравнения, полученные путем непосредственного применения законов Кирхгофа, то узлами графа будут токи ветвей и напряжения на элементах схемы.

В том случае, когда за основу взяты уравнения, составленные путем применения метода узловых потенциалов, узлы графа будут выражать собой потенциалы узловых точек схемы, узловые и искомые токи (и напряжения).

Если за основу взяты уравнения метода контурных токов, то узлами графа будут контурные токи, контурные э. д. с. и искомый ток (напряжение).

При некотором навыке граф вычерчивают, даже не записывая сами уравнения, послужившие основой для его составления. Рассмотрим примеры на составление графов.

Порядок расположения узлов на чертеже может быть любым (о расположении узлов входа и выхода уже говорилось), однако узлы рекомендуется располагать таким образом, чтобы последовательность их при движении слева направо в наибольшей степени соответствовала фактическому прохождению сигнала (информации) от входа к выходу.

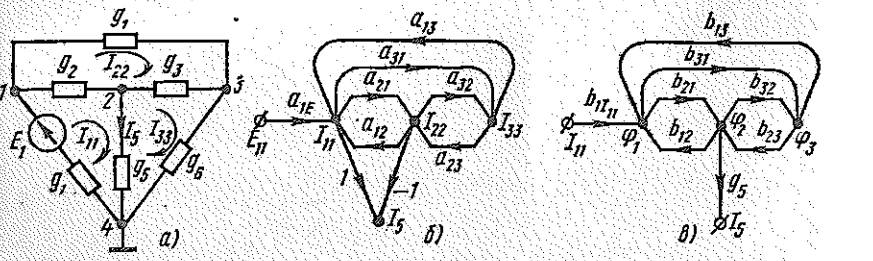


Рис. 14.2

В зависимости от того, какие величины выбраны в качестве узлов, для одной и той же схемы граф будет иметь различную структуру и различную сложность. Если в схеме имеется несколько источников сигнала (несколько источников тока или э. д. с.), то используют принцип наложения, а именно: сначала определяют выходную величину для графа, в котором сигнал действует от первого источника, затем выходную величину для графа, в котором сигнал действует от второго источника, и т. д. После этого суммируют выражения для выходной величины.

Рассмотрим упорядоченный переход от некоторой заданной электрической схемы к направленному графу.

Способ перехода рассмотрим сначала на примере составления графа для схемы рис. 14.2, *а*, исходя из метода контурных токов, а затем, исходя из метода узловых потенциалов (на рис. 14.2, *а* вместо нижнего g_1 должно быть g_4).

Пример 14.1. Составить граф для схемы рис. 14.2, *а*, положив в основу метод контурных токов. В схеме одна э. д. с. E_1, проводимости ветвей обозначены $g_1 - g_6$, а сопротивления $R_1 - R_6$. Искомой величиной считать ток I_5.

Решение. Выберем направления для контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33} по часовой стрелке и составим систему уравнений

$$I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11}; \quad (а)$$

$$I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = 0; \quad (б)$$

$$I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = 0. \quad (в)$$

Здесь $R_{11} = R_1 + R_2 + R_5$; $R_{22} = R_1 + R_2 + R_3$; $R_{33} = R_5 + R_3 + R_6$; $R_{12} = R_{21} = -R_2$; $R_{13} = R_{31} = -R_5$. $R_{23} = R_{32} = -R_3$; $E_{11} = E_1$. Разделим (а) на R_{11} и решим его относительно I_{11}, аналогично определим I_{22} и I_{33}. Получим

$$I_{11} = a_{1E_1}E_{11} + a_{12}I_{22} + a_{13}I_{33}; \quad (а')$$

$$I_{23} = a_{21}I_{11} + a_{23}I_{33}, \quad (б')$$

$$I_{33} = a_{31}I_{11} + a_{32}I_{22}. \quad (в')$$

Здесь $a_{1E_1} = 1/R_{11}$; $a_{12} = -R_{12}/R_{11}$; $a_{13} = -R_{13}/R_{11}$; $a_{21} = -R_{12}/R_{22}$; $a_{23} = -R_{23}/R_{22}$.

В общем случае $a_{km} = -R_{km}/R_{kk}$ и $a_{mk} = -R_{mk}/R_{mm}$.

Граф, изображенный на рис. 14.2, *б*, содержит пять узлов: узел источника сигнала E_{11}, три узла контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33} и узел искомой величины $I_5 = I_{11} - I_{33} = 1I_{11} + (-1)I_{33}$. Каждый узел, изображающий некоторый контурный ток I_{pp}, соединен с другим узлом, выражающим другой контурный ток, например I_{mm}, двумя ветвями, передачи которых a_{pm} и a_{mp} не равны друг другу, так как у них при одинаковом числителе различные знаменатели (R_{pp} и R_{mm} соответственно). Условимся о том, что стрелки на ветвях всегда будут направлены к узлу, соответствующему первому индексу передачи, т. е. стрелка у ветви с передачей a_{mp} направлена к узлу I_{mm} от узла I_{pp}, а стрелка у ветви с передачей a_{pm} — к узлу I_{pp} от узла I_{mm}. Если между контуром p и контуром m нет общей ветви, то $R_{pm} = 0$ и $a_{pm} = a_{mp} = 0$. При согласном направлении всех контурных токов все $a_{pm} > 0$, так как все $R_{pm} < 0$, а все $R_{pp} > 0$. Стрелка на ветви с передачей a_{1E_1} направлена к узлу I_{11} (первому индексу). Если э. д. с. изменит знак по сравнению с рис. 14.2, *а*, то знак минус следует отнести к a_{1E_1}.

Пример 14.2. Построить граф для схемы рис. 14.2, *а*, положив в основу его составления уравнения метода узловых потенциалов и за выходную величину приняв ток I_5.

Решение. Обозначим узлы схемы цифрами *1* — *4* и узел *4* заземлим. Составим три уравнения относительно потенциалов φ_1, φ_2, φ_3 узлов *1*, *2*, *3*:

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}, \quad (г)$$

$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = 0, \quad (д)$$

$$\varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = 0. \quad (е)$$

Здесь $G_{11}=g_1+g_2+g_4$; $G_{22}=g_2+g_3+g_5$; $G_{33}=g_1+g_3+g_6$; $G_{12}=G_{21}=-g_2$; $G_{13}=G_{31}=-g_1$; $G_{23}=G_{32}=-g_3$; узловой ток $I_{11}=E_1g_4$.

Уравнение (г) разделим на G_{11} и решим относительно φ_1; уравнение (д) разделим на G_{22} и решим относительно φ_2, уравнение (е) разделим на G_{33} и определим φ_3. Получим

$$\varphi_1=b_{1I_{11}}I_{11}+b_{12}\varphi_2+b_{13}\varphi_3, \qquad (г')$$

$$\varphi_2=b_{21}\varphi_1+b_{23}\varphi_3, \qquad (д')$$

$$\varphi_3=b_{31}\varphi_1+b_{32}\varphi_2. \qquad (е')$$

Здесь $b_{1I_{11}}=1/G_{11}$; $b_{12}=-G_{12}/G_{11}$; $b_{13}=-G_{13}/G_{11}$; $b_{21}=-G_{21}/G_{22}$; $b_{23}=-G_{23}/G_{22}$ и т. д.

В общем случае $b_{km}=-G_{km}/G_{kk}$; $b_{mk}=-G_{mk}/G_{mm}$ ($G_{km}=G_{mk}$). К уравнениям (г′) – (е′) добавим уравнение, определяющее сток (ток I_5) через потенциалы. По закону Ома $I_5=g_5\varphi_2$. Граф рис. 14.2, *в* содержит пять узлов: узел истока I_{11}, три узла потенциалов φ_1, φ_2, φ_3 и узел стока I_5. Так как узлы *1*, *2*, *3* в схеме рис. 14.2, *а* соединены ветвями с конечной проводимостью, то между каждой парой узлов φ_1, φ_2, φ_3 имеются по две ветви, стрелки на которых направлены в противоположные стороны.

Стрелки на каждой ветви направлены к узлу, соответствующему первому индексу передачи этой ветви. Все передачи b_{km} и b_{mk} положительны.

К узлу стока I_5 имеется передача g_5 от узла φ_2. При небольшом навыке можно научиться строить граф и записывать передачи ветвей, не составляя систему уравнений, графическим изображением которой он является.

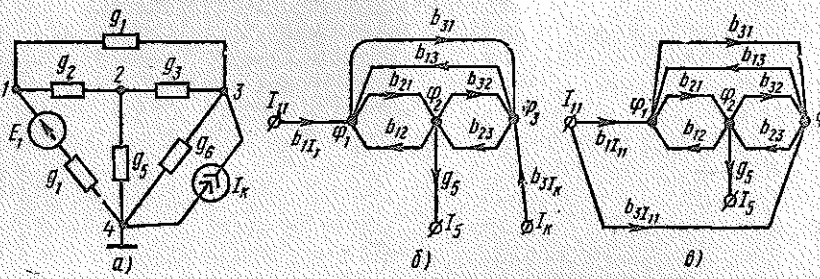


Рис. 14.3

Если в исходной электрической цепи имеется несколько источников э. д. с. или тока, то в графе будет несколько истоков. В этом случае выходную величину (сток) можно определить по графу на основании принципа наложения как сумму сигналов, найденных от каждого из источников в отдельности. Однако более целесообразно поступать иначе, а именно свести граф с несколькими источниками к графу с общим истоком. Рассмотрим, как это делается на примере схемы рис. 14.3, *а*. Она отличается от

схемы рис. 14.2, *а* только тем, что между узлами *3* и *4* добавлен источник тока I_k. Поэтому уравнения (г′) и (д′) останутся без изменений, а в правой части уравнения (е′) добавится слагаемое с током I_k:

$$\varphi_3 = b_{31}\varphi_1 + b_{32}\varphi_2 + b_{3I_k} I_k. \qquad (е'')$$

Здесь $b_{3I_k} = 1/G_{33}$. В соответствии с этим на графе рис. 14.3, *б* появился узел тока I_k, передача от которого к узлу φ_3 равна b_{3I_k}. В остальном граф рис. 14.3, *б* такой же, что и граф рис. 14.2, *в*.

Из двух источников сигнала I_{11} и I_k оставим на графе только один, например I_{11}, а источник I_k устраним. При этом сигналы во всех узлах должны остаться без изменений. Чтобы сигнал в узел φ_3 не изменился, от источника сигнала I_{11} проведем в этот узел ветвь с передачей $b_{3I_{11}}$, определенной из условия $b_{3I_{11}} = b_{3I_k} I_k$, отсюда $b_{3I_{11}} = b_{3I_k} \dfrac{I_k}{I_{11}}$.

Преобразованный граф изображен на рис. 14.3, *в*, на нем один источник сигнала вместо двух.

После того как граф составлен, его применяют для определения передачи от истока к стоку. Определение передачи графа можно производить двумя способами:

1) последовательным упрощением его путем применения правил, рассмотренных в § 14.3;

2) применением общего выражения для определения передачи направленного графа (правила Мэзона — см. § 14.5). Возможен и промежуточный путь, когда сначала граф частично упрощают, а затем применяют правило Мэзона.

Основным способом является применение правила Мэзона.

§ 14.3. ПРАВИЛА УПРОЩЕНИЯ НАПРАВЛЕННЫХ ГРАФОВ

Познакомимся с правилами упрощения графов.

1. *Передача последовательно соединенных ветвей* (рис. 14.4, *а*) равна произведению передач этих ветвей (рис. 14.4, *б*). Действительно, $x_2 = ax_1$; $x_3 = bx_2$.

Подставим в последнее выражение вместо x_2 его эквивалент из предыдущего. Получим $x_3 = abx_1$.

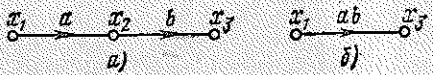


Рис. 14.4

2. *Передача двух параллельных одинаково направленных ветвей* равна сумме передач этих ветвей (рис. 14.5, *а*, *б*):

$$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a + b)\, x_1. \qquad (14.1)$$

Рассмотренное преобразование не может быть применено к параллельным ветвям, стрелки на которых направлены не одинаково. Так, например, это преобразование не распространяется на рис. 14.5, *в*.

3. *Устранение простой узловой точки.* Условимся простой узловой точкой называть точку графа, к которой в общем случае подходят и от которой уходят несколько ветвей и которая не входит в петлю обратной связи. Простыми узловыми точками на рис. 14.6, *а*, *в* являются соответственно точки *4* и *5*. Для графа рис. 14.6, *а*

$$x_4 = ax_1; \quad x_3 = bx_4;$$
$$x_3 = cx_4.$$

Следовательно,

$$x_2 = abx; \quad x_3 = acx_1. \quad (14.2)$$

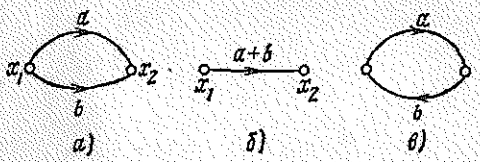


Рис. 14.5

Граф рис. 14.6, *б* эквивалентен графу рис. 14.6, *а*. Для графа рис. 14.6, *в*:

$$x_5 = ax_1 + cx_4;$$
$$x_2 = bx_5 = abx_1 + bcx_4;$$
$$x_3 = dx_5 = adx_1 + dcx_4.$$

Граф рис. 14.6, *г* эквивалентен графу рис. 14.6, *в*.

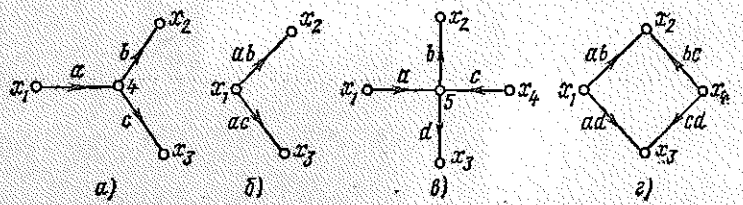


Рис. 14.6

4. *Устранение контура на пути.* Граф рис. 14.7, *а* имеет ветвь обратной связи с передачей *c* между узлами *3* и *2*. Контур, образованный ветвями *b* и *c*, называют контуром на пути (контуром в пути). Простейшими преобразованиями этот контур может быть устранен, и граф может быть сведен к представленному на рис. 14.7, *б*. Для графа рис. 14.7, *а* имеем: $x_2 = ax_1 + cx_3$; $x_3 = bx_2$.

Следовательно,

$$x_3 = abx_1 + bcx_3. \quad (14.3)$$

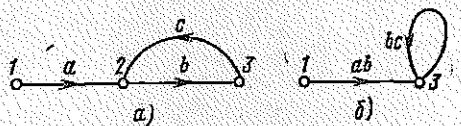


Рис. 14.7

Ветвь, выходящую из некоторого узла и подходящую к этому же узлу, будем называть петлей

Петля *bc* на рис. 14.7, *б* соответствует слагаемому bcx_3 правой части равенства (14.3).

5а. *Исключение петли, когда к узлу подходит и от него отходит по одной ветви.* Граф на рис. 14.8, *а* имеет петлю с передачей *c*. Эту петлю можно устранить и свести граф к изображенному на рис. 14.8, *б*.

Действительно, для графа рис. 14.8, *а* можно записать

$$x_2 = ax_1 + cx_2 \quad \text{и} \quad x_3 = bx_2.$$

Из первого уравнения находим $x_2 = ax_1/(1-c)$ и подставляем на второе:

$$x_3 = \frac{ab}{1-c}\, x_1. \tag{14.4}$$

Предполагается, что $|c| < 1$.

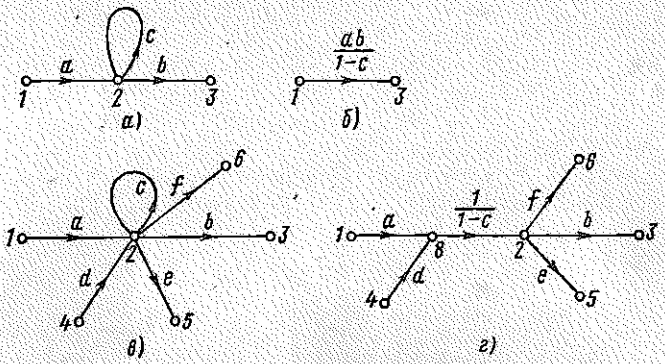


Рис. 14.8

5б. *Исключение петли, когда к узлу подходят и от него отходят по нескольку ветвей.* В графе рис. 14.8, *в* к узлу *2*, у которого имеется петля с передачей *c*, подходят ветви с передачами *a* и *d* и от него отходят ветви с передачами *f*, *b*, *e*.

Устранение петли с передачей *c* в этом случае производят путем введения дополнительного узла (в данном случае он назван узлом *8*) в соответствии с рис. 14.8, *г*.

К узлу *8* подходят ветви, ранее подходившие к узлу *2*. От узла *2* в графе рис. 14.8, *г* отходят те же ветви, что и в графе рис. 14.8, *в*. Передача к любому узлу сохранилась неизменной. Убедимся в этом. Для графа рис. 14.8, *в*

$$x_2 = ax_1 + cx_2 + dx_4 \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{1}{1-c}(ax_1 + dx_4);$$

$$x_3 = bx_2 = b\frac{1}{1-c}(ax_1 + dx_4);$$

$$x_6 = fx_2 = f\frac{1}{1-c}(ax_1 + dx_4).$$

Такие же соотношения имеют место и для графа рис. 14.8, *г*.

6. *Замена двух и большего числа петель одной петлей.* Петли с передачами b и c на рис. 14.9, *а* можно заменить одной петлей рис. 14.9, *б* с передачей $b+c$. Это вытекает из следующих преобразований для схемы рис. 14.9, *а*:

$$x_2 = ax_1 + bx_2 + cx_2 = ax_1 + (b+c)\,x_2.$$

Схема рис. 14.9, *б* удовлетворяет этой строчке.

7. *Удлинение (растяжение) узла.* В некоторых случаях при преобразованиях графов оказывается полезным удлинить (растянуть) узел. Положим, что требуется удлинить узел *2* графа, изображенного на рис. 14.10, *а*. С этой целью:

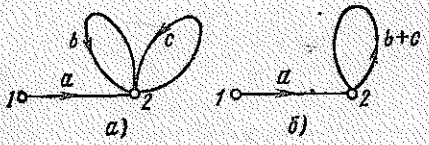


Рис. 14.9

а) узел *2* подразделяют на два узла (рис. 14.10, *б*): на старый узел *2*, от которого отходят те же ветви, что и в первоначальном графе, и на новый узел *2′*, к которому подходят те же ветви, которые в исходном графе подходили к узлу *2*;

б) узлы *2′* и *2* соединяют ветвью, передача которой равна 1.

Проверим справедливость преобразования. С этой целью для исходного графа рис. 14.10, *а* запишем узловой сигнал в узле *2*:

$$x_2 = ax_1 + cx_4.$$

Узловые сигналы узлов *2′* и *2* графа рис. 14.10, *б* таковы:

$$x_{2'} = ax_1 + cx_4 \quad \text{и} \quad x_2 = 1 \cdot x_{2'}.$$

Таким образом, узловой сигнал в узле *2* остался без изменения. Не изменились и узловые сигналы в остальных узлах графа.

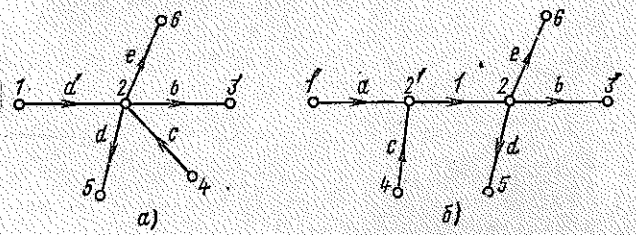


Рис. 14.10

8. *Перенос конца ветви из одной узловой точки в другую* *. Преобразование показано на рис. 14.11, *а*, *б*, *в* и состоит в том, что конец ветви *24* исходного графа рис. 14.11, *а* переносят из узловой точки *2* в узловую точку *3* (рис. 14.11, *в*). При этом

* Преобразования 8 и 9, применяющиеся относительно редко, предложены Тракселом, остальные — Мэзоном.

передача ветви изменяется с величины c до cb, а узлы *4* и *5* должны быть при этом связаны ветвью с передачей cd.

Ветви, затронутые преобразованием, на рис. 14.11, *а*, *в* вычерчены утолщенными линиями.

Преобразование выполняется в два этапа.

Первый этап состоит в переходе от схемы рис. 14.11, *а* к схеме рис. 14.11, *б* и заключается в том, что узел *2* удлиняется. При этом кроме узла *2* появляется узел *2'*.

В соответствии с п. 7 передача ветви между узлами *2* и *2'* равна 1, но в отличие от преобразования в п. 7 конец ветви *24* остается в точке *2*. Начало же ветви с передачей d переносится в точку *2'*. Узлы *4* и *5* соединяются ветвью с передачей cd.

На втором этапе преобразований (переход от рис. 14.11, *б* к рис. 14.11, *в*) ветвь *24* с передачей c заменяется ветвью *34* с передачей cb. Тождественность преобразований следует из эквивалентности соответствующих узловых сигналов.

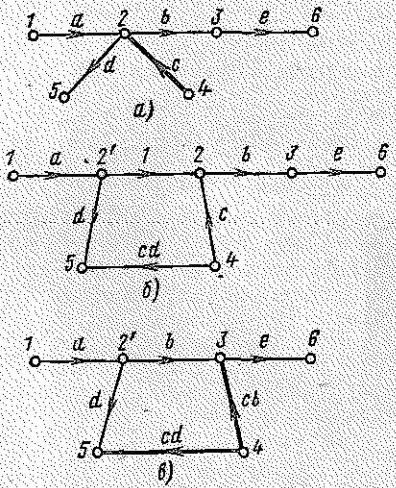


Рис. 14.11

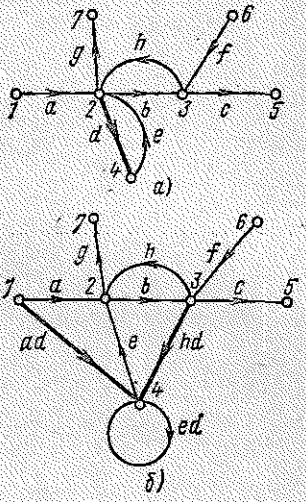


Рис. 14.12

Так, для схемы рис. 14.11, *а* $x_2 = ax_1 + cx_4$; $x_3 = bx_2 = abx_1 + cbx_4$; $x_5 = dx_2$.

Для схемы рис. 14.11, *б*:

$$x_2' = ax_1; \quad x_2 = 1 \cdot x_2' + cx_4 = ax_1 + cx_4;$$

$$x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_4);$$

$$x_5 = dx_2' + c\,dx_4 = (x_2 - cx_4)\,d + c\,dx_4 = dx_2.$$

Для схемы рис. 14.11, *в*: $x_2' = ax_1$; $x_3 = bx_2' + cbx_4 = abx_1 + cbx_4$.

9. *Перенос начала ветви из одной узловой точки в другую.* Преобразование поясняется рис. 14.12, *а*, *б*. Начало ветви *24* может быть перенесено из узловой точки *2* в узловую точку *3*.

При этом кроме новой ветви *34* с передачей *hd* появляется ветвь *14* с передачей *ad* и петля в точке *4* с передачей *ed*.

Тождественность схем следует из эквивалентности узловых сигналов в соответствующих узлах этих двух схем.

Для схемы рис. 14.12, *а*:

$$x_2 = ax_1 + hx_3 + ex_4;$$
$$x_3 = bx_2 + fx_6;$$
$$x_4 = dx_2 = a\,dx_1 + h\,dx_3 + e\,dx_4.$$

Для схемы рис. 14.12, б:

$$x_2 = ax_1 + hx_3 + ex_4;$$
$$x_3 = bx_2 + fx_6;$$
$$x_4 = a\,dx_1 + h\,dx_3 + e\,dx_4.$$

10. *Инверсия пути.* Ранее говорилось, что информация, содержащаяся в графе, эквивалентна информации в некоторой системе уравнений. Положим, что имеется уравнение

$$x_3 = c(ax_1 + bx_2). \qquad (14.5)$$

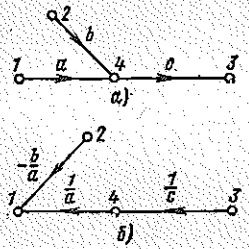


Рис. 14.13

Этому уравнению соответствует граф рис. 14.13, *а*. В нем x_1 и x_2 являются причинами, а x_3 — следствием. Можно изменить причину и следствие, решив уравнение (14.5) относительно x_1 или x_2. Так, если считать x_3 и x_2 причиной, а x_1 следствием, то

$$x_1 = \frac{1}{ac}x_3 + \left(-\frac{b}{a}\right)x_2.$$

Последнему уравнению соответствует граф рис. 14.13, *б*, в нем осуществлена инверсия пути по сравнению с исходным графом рис. 14.13, *а*.

Для перехода от исходного графа к инвертированному необходимо:

а) изменить направление стрелок в ветвях на противоположное;

б) изменить передачи ветвей, находящихся на пути от новой причины к новому следствию на обратные (т. е. вместо *a* и *c* взять соответственно $1/a$ и $1/c$);

в) перенести конец ветви *24* с передачей *b*, соединяющей узлы, не являющиеся причиной и следствием, в узел стока (в точку *1*) и взять передачу этой ветви, равной $-b/a$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий полезность инверсии пути.

Пример 14.3. Положим, что требуется найти передачу трехкаскадного усилителя, граф которого изображен на рис. 14.14, *а*.

Решение. В усилителе имеются четыре петли обратной связи (bf, cg, dh, $bc\,dl$). Инвертированный граф представлен на рис. 14.14, *б*. В нем уже нет петель обратной связи и обратную величину передачи для него находят проще, чем для исходного графа:

$$x_1 = \frac{1}{e}\left[\left(\frac{1}{cd} - \frac{h}{c}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{ab} - \frac{f}{a}\right) - \frac{g}{abd} - \frac{l}{a}\right] x_0.$$

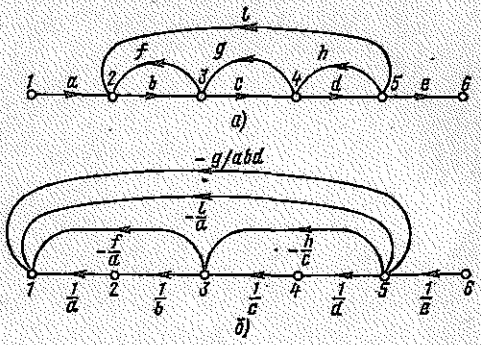


Рис. 14.14

Обратим внимание на то, что конец ветви g перенесен из узла *3* через узел *2* в узел *1*, а начало этой ветви перенесено из узла *4* в узел *5*. Поэтому у передачи инвертированной ветви $-g/abd$ в знаменателе находится произведение передач трех ветвей, через которые переносились начало и конец этой ветви.

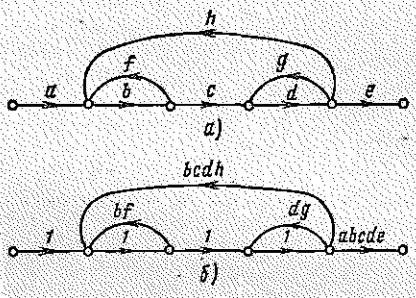


Рис. 14.15

11. *Нормирование графов* представляет собой способ изменения передач отдельных ветвей графа, при котором для части ветвей передачи принимают равными 1 (нормируют), а для остальных ветвей их изменяют таким образом, что для любого пути от истока к стоку и для любой петли обратной связи результирующие передачи остаются без изменений. (Предполагалось, что для любого из этих путей ни один из узлов

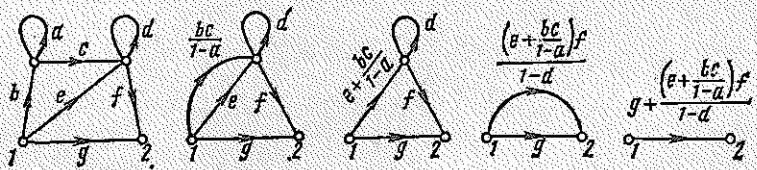


Рис. 14.16

графа не проходится дважды.) На рис. 14.15, *а* изображен граф двухкаскадного усилителя до нормирования и на рис. 14.15, *б* — после нормирования.

На рис. 14.16 и 14.17 рассмотрены два примера на определение передач графов путем последовательного их упрощения.

В каждом из этих примеров по нескольку раз используются правила п. 5.

Поясним определение передачи для графа рис. 14.17. Положим, что верхняя и нижняя петли g и h отсутствуют и что имеется только петля ef. Составим передачу от *1* к *2*:

$$j+\frac{ac+bd+afd+bec}{1-ef}.$$

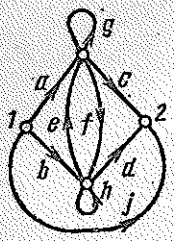


Рис. 14.17

Затем учтем наличие верхней и нижней петель, поделив соответствующие члены на $1-g$ и $1-h$. Получим

$$j+\frac{\dfrac{ac}{1-g}+\dfrac{bd}{1-h}+\dfrac{afd+bec}{(1-h)(1-g)}}{1-\dfrac{ef}{(1-g)(1-h)}}.$$

§ 14.4. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ГРАФАМ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Для направленных графов с обратными связями вводят три дополнительных понятия: контурная передача узла, контурная передача ветви и обратная разность.

Контурной передачей узла T называют отношение сигнала, возвращающегося к этому узлу, к сигналу, выходящему из данного узла при отсутствии сигнала на входе всей системы.

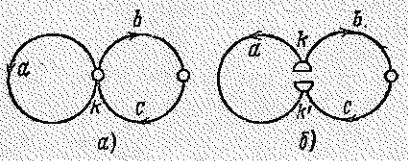


Рис. 14.18

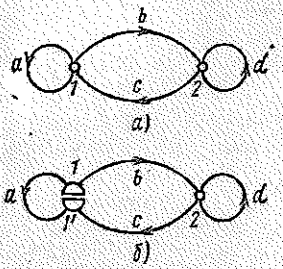


Рис. 14.19

Для нахождения контурной передачи k-узла с петлей обратной связи необходимо расщепить этот узел на узлы k и k', выразить приходящий к узлу k' узловой сигнал (т. е. x_k') через сигнал k-узла (т. е. через x_k) и найти отношение x_k'/x_k. Так, для схемы рис. 14.18

$$T_k=x_k'/x_k=(ax_k+bcx_k)/x_k=a+bc.$$

Контурную передачу узла *1* схемы рис. 14.19, *а* определяют следующим образом:

$$x_1'=ax_1+\frac{bc}{1-d}x_1 \qquad (\text{при } x_1=1);$$

$$T_1=x_1'/x_1=a+bc/(1-d).$$

Контурная передача ветви. При определении контурной передачи некоторой ветви графа с обратной связью поступают следующим образом:

1) на этой ветви ставят точку, образуя дополнительный или внутренний узел, который именуют, скажем, узлом k. Величины передач двух частей ветви, на которые этот узел делит ее, выбирают в известной мере произвольно, но так, чтобы произведение этих передач было равно передаче ветви до разделения ее на две части;

2) расщепляют внутренний узел k на два узла: k' и k, и из узла k посылают сигнал, равный 1, при отсутствии сигнала на входе всего графа.

Отношение сигнала, возвращающегося к узлу k', к сигналу, выходящему из узла k, представляет собой контурную передачу ветви.

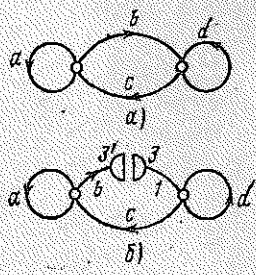


Рис. 14.20

Таким образом, контурная передача ветви является контурной передачей относительно вновь образованного узла в этой ветви. Так, для определения контурной передачи относительно ветви b графа рис. 14.20, *а* образуем дополнительный узел *3*, расщепляем его, образуя узлы *3'* и *3* (рис. 14.20, *б*), и находим отношение сигнала, возвращающегося к узлу *3'*, к сигналу $x_3 = 1$, выходящему из узла *3*.

Принимаем, что разделенная на две части ветвь b имеет передачи b и 1 ($b \cdot 1 = b$). Тогда

$$x_3' = \frac{1 \cdot c}{1-d} \frac{b}{1-a} x_3.$$

Следовательно,

$$\frac{x_3'}{x_3} = \frac{bc}{(1-d)(1-a)}.$$

Обратная разность. Обратной разностью D называют разность между единичным сигналом, вышедшим из некоторого узла k, и сигналом, возвратившимся к этому узлу по петле обратной связи при отсутствии сигнала на входе графа.

Обратную разность определяют через контурную передачу узла T_k:

$$D_k = 1 - T_k. \qquad (14.6)$$

Обратную разность применяют при оценке качества работы систем с обратными связями. Ее используем также при качественном обосновании общего выражения для передачи графа в § 14.6.

§ 14.5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ГРАФА

В 1956 г. Мэзон предложил общую формулу для определения передачи графа, которая и является основной формулой при расчете графов. Прежде чем перейти к ней, познакомимся с некоторыми новыми понятиями.

Прямой путь P — это путь вдоль стрелок от истока к стоку, при прохождении которого ни один из узлов не встречается более одного раза. Передача прямого пути равна произведению передач ветвей этого пути.

Между истоком и стоком графа может быть несколько прямых путей. Например, для схемы рис. 14.21 между истоком (узел *1*) и стоком (узел *2*) есть два прямых пути. Первый прямой путь по ветвям с передачами a и b. Передача этого пути $P_1 = ab$. Второй прямой путь по ветвям с передачами c, e, b. Передача его $P_2 = ceb$.

Ни один из других мыслимых путей от узла *1* к узлу *2* в этом графе не будет относиться к категории прямых путей. Например, путь через ветви c, f, g, e, b не является прямым, так как на этом пути узел *3* встречается дважды. В общей формуле, о которой говорится в данном параграфе, необходимо учитывать также передачи петель обратной связи.

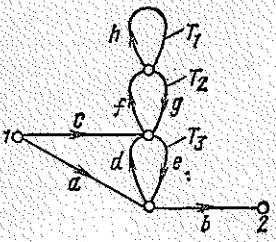


Рис. 14.21

Петля обратной связи представляет собой замкнутый путь, вдоль которого (по кругу) каждый узел может встретиться только один раз.

Передача петли обратной связи обозначается T с соответствующим индексом, позволяющим отличить ее от передач других петель. Передача петли обратной связи равна произведению передач ветвей, образующих эту петлю.

В графе на рис. 14.21 три петли обратной связи. Первая петля с передачей $T_1 = h$, вторая с передачей $T_2 = fg$, третья с передачей $T_3 = ed$.

Общую формулу для определения передачи графа записывают следующим образом:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + \ldots + P_n\Delta_n}{\Delta}. \qquad (14.7)$$

Здесь P_k — передача k-го прямого пути от истока к стоку; n — число прямых путей.

Определитель Δ_k равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей, не касающихся k-го прямого пути (но эти петли могут касаться друг друга), плюс сумма попарных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга и k-го прямого пути, минус сумма тройного произведения петель обратных связей, не касающихся друг друга и k-го прямого пути, плюс и т. д.

Определитель Δ равен единице минус сумма взятых поодиночке передач петель обратных связей (касающихся и не касающихся друг друга) плюс сумма попарных произведений передач

петель обратных связей, не касающихся друг друга, минус сумма тройных произведений передач петель обратных связей, не касающихся друг друга, плюс и т. д.

Пример 14.4. Применим формулу (14.7) к графу, изображенному на рис. 14.21.

Решение. Для первого прямого пути с передачей $P_1 = ab$ множитель Δ_1 равен единице минус сумма передач петель обратной связи, взятых поодиночке и не касающихся этого прямого пути $(T_1 + T_2)$, плюс попарное произведение передач петель обратной связи, не касающихся друг друга и выбранного прямого пути. В графе рис. 14.21 отсутствуют петли, которые бы не касались друг друга и в то же время не касались первого прямого пути. Поэтому слагаемое с попарным произведением передач петель обратной связи, а также слагаемое с произведением передач петель обратной связи, взятых по трое (и более), в выражении для Δ_1 будут отсутствовать.

Следовательно, $\Delta_1 = 1 - (T_1 + T_2)$, где $T_1 = h$; $T_2 = fg$.

Для второго прямого пути $P_2 = ceb$, $\Delta_2 = 1 - T_1$.

Знаменатель формулы (6.7)

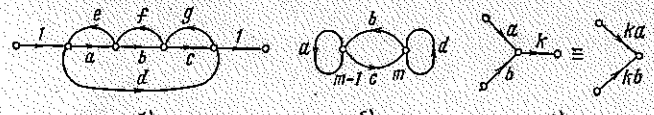
$$\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3 \quad (T_3 = ed).$$

В выражение для Δ вошло произведение передач T_1 и T_3 двух несоприкасающихся петель графа.

Таким образом,

$$G = \frac{ab\,(1 - T_1 - T_2) + ceb\,(1 - T_1)}{1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3}. \qquad (14.8)$$

Пример 14.5. Найдем передачу для графа, изображенного на рис. 14.22, *а*.



а) *б)* *в)*

Рис. 14.22

Решение. В этом графе имеются два прямых пути: $P_1 = 1 \cdot a \times \times b \cdot c \cdot 1$ и $P_2 = 1 \cdot d \cdot 1$. В нем четыре петли обратной связи с передачами ae, bf, cg, $dgfe$. Все петли обратной связи касаются первого прямого пути, поэтому $\Delta_1 = 1$.

Второго прямого пути не касается петля с передачей bf. Поэтому $\Delta_2 = 1 - bf$.

В выражение для Δ кроме взятых поодиночке передач всех четырех петель входит еще произведение передач двух несоприкасающихся петель ae и cg:

$$G = \frac{abc + d\,(1 - bf)}{1 - (ae + bf + cg + dgfe) + ae \cdot cg}. \qquad (14.9)$$

§ 14.6. ПОЯСНЕНИЯ К ОБЩЕЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ГРАФА

Формула (14.7) в § 14.5 дана без вывода; ее вывод на основе свойств определителей приведен в § 14.7. Здесь же, следуя Мэзону, поясняется структура общей формулы путем использования понятия обратной разности. Положим, что некоторый граф содержит 1, 2, ..., n узлов. Удалим из него все узлы номеров $(m+1)$, $(m+2)$, ... n вместе с принадлежащими им ветвями. В оставшемся графе будет m узлов.

Путем последовательных преобразований сведем его к остаточному графу с узлами $m-1$ и m (рис. 14.22, *б*). В этом графе ветви a, b, c, d выражают результирующие связи между узлами $m-1$ и m исходного графа.

Истоки и стоки исходного графа при этом не учитываются, так как граф рис. 14.22, *б* будет служить лишь для подсчета обратной разности (см. § 14.4).

Найдем частичную обратную разность D'_k как обратную разность для узла k. При нахождении ее будем принимать во внимание только первые k узлов. Для узла m (рис. 14.22, *б*)

$$D'_m = 1 - d - bc/(1-a).$$

Для узла $m-1$

$$D'_m = 1 - a.$$

Произведение $D'_{m-1}D_m = (1-a)(1-d) - bc$.

Если поменять номера узлов на рис. 14.22, *б*, то

$$D'_m = 1 - a - \frac{bc}{1-d} \text{ и } D'_{m-1} = 1 - d;$$

произведение $D'_m D'_{m-1}$ остается без изменений.

Этот результат справедлив для любого узла m. Следовательно, произведение $\Delta'_m = D'_1 D'_2 \dots D'_{m-1} D'_m$ не зависит от того, в каком порядке пронумерованы первые m узлов графа.

Для всех n узлов определитель графа

$$\Delta = D'_1 D'_2 \dots D'_{m-1} D'_m \dots D'_{n-1} D'_n.$$

Он может быть выражен в виде произведения частичных обратных разностей для всех узлов графа, подсчитанных при игнорировании узлов более высоких номеров. Так как каждая частичная обратная разность D'_k по структуре состоит из единицы минус контурная передача k-узла, то определитель графа Δ равен единице плюс алгебраическая сумма произведений передач различных ветвей.

Но произведение передач различных ветвей не может содержать произведения передач соприкасающихся петель обратной связи.

Это утверждение основывается на том, что определитель графа Δ должен быть линейной функцией передачи любой ветви графа (граф эквивалентен системе уравнений, линейной относительно любого параметра).

Допущение, что в Δ могут входить произведения передач соприкасающихся ветвей, противоречит тому, что передача любой ветви графа должна входить в Δ в первой степени.

Действительно, если допустить, что в Δ могут входить произведения передач петель, каждая из которых проходит через ветвь k, рис. 14.22, *в* (а это равносильно тому, что в одну петлю входит ветвь с передачей ka, а в другую петлю ветвь с передачей kb), то Δ зависело бы от квадрата передачи ветви k (т. е. от k^2), чего не может быть.

Но если в Δ не может быть произведений передач соприкасающихся петель обратной связи, то таких произведений не может быть и в определителях подграфов Δ_k в числителе формулы (14.4), поскольку каждый член Δ_k есть член некоторого подграфа Δ.

§ 14.7. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ГРАФА *

Положим, что граф имеет n узлов. Для любого (k-го) узла справедливо уравнение

$$x_k = f_n(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n),$$

где x_k — переменная линейного графа или независимая переменная.

Обозначим проводимость ветви, соединяющей произвольно выбранные узлы j и k, через t_{jk}. Матрица проводимостей ветвей графа будет иметь порядок n и ее можно записать следующим образом:

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11}t_{21}t_{31}\ldots t_{n1} \\ t_{12}t_{22}t_{32}\ldots t_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_{1n}t_{2n}t_{3n}\ldots t_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (14.10)$$

Элементами матрицы являются производные

$$t_{jk} = df_k/dx_j. \qquad (14.11)$$

Все элементы k-строки будут нулями, если x_k — независимая переменная.

Матрицу-столбец, составленную из переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, обозначим через $[X]$:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad (14.12)$$

---

* При первом чтении § 14.7 можно опустить.

Единичную матрицу порядка n назовем $[U]$;

$$[U]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}. \tag{14.13}$$

Обозначим матрицу-столбец независимых переменных через $\varphi_k = x_k - f_k$. Систему уравнений, выражаемую графом, запишем так:

$$[U-T][X]=[\varphi], \tag{14.14}$$

$$[U-T]=\begin{bmatrix}1-t_{11} & -t_{21} & \dots & -t_{n1}\\ -t_{12} & 1-t_{22} & \dots & -t_{n2}\\ -t_{13} & -t_{23} & \dots & -t_{n3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -t_{1n} & -t_{2n} & \dots & 1-t_{nn}\end{bmatrix}. \tag{14.15}$$

Введем систему уравнений, матрица которой $[A]=[U-T]$:

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\end{bmatrix}. \tag{14.16}$$

Напомним, что называют инверсией индексов при раскрытии определителей. Инверсией некоторого индекса называют такое его чередование rs, при котором $r>s$. Если в некотором произведении несколько множителей, то при подсчете числа инверсий данного индекса в этом произведении следует просуммировать все инверсии, которые образуются при переходе каждой предыдущей цифры этого индекса ко всем последующим.

Положим, например, что какой-то индекс, скажем первый, имеет следующее чередование цифр: 461352. Так как за цифрой 4 имеются цифры 1, 3, 2, меньшие 4, то это дает первые три инверсии. За цифрой 6 находятся цифры 1, 5, 3, 2, меньшие чем 6, это дает следующие четыре инверсии. Все цифры, стоящие справа от 1, больше 1, поэтому за 1 — нуль инверсий. За цифрой 3 находится цифра 2 — еще одна инверсия. За цифрой 5 находится цифра 2 — последняя инверсия. Всего в последовательности цифр 461 352 имеется $3+4+1+1=9$ инверсий.

Из линейной алгебры известно, что определитель Δ матрицы $[A]$ может быть записан следующим образом:

$$\Delta=\sum(-1)^{l+l'}(a_{\alpha\alpha'}, a_{\beta\beta'}, a_{\gamma\gamma'}, a_{nn'}). \tag{14.17}$$

Каждый член суммы содержит n множителей. У каждого множителя имеется по два индекса. Первый индекс соответствует строке, второй — столбцу.

I — число инверсий чисел 1, 2, ..., n в последовательности обозначений α, β, γ, ..., n для первого индекса.

I' — число инверсий чисел 1, 2, ..., n в последовательности обозначений α', β', γ', ..., n' для второго индекса.

Запишем возможные комбинации чередования индексов, образующих замкнутые последовательности:

$$ij,\ jk,\ kl,\ lx,\ \ldots,\ yp,\ pi; \tag{14.18}$$

$$ij,\ ji,\ \ldots,\ nm,\ mp,\ pn,\ \ldots,\ qu,\ up. \tag{14.19}$$

В комбинации (14.18) замкнутая последовательность образована n множителями. Первый индекс в ней начал изменяться со значения i, а второй со значения j.

Последовательность является замкнутой, так как у последнего члена второй индекс принимает то же значение i, с которого начал изменяться индекс первого члена.

Как уже говорилось, I — число инверсий первого индекса, I' — число инверсий второго индекса.

Для последовательности (14.18) число инверсий второго индекса на $n-1$ больше числа инверсий первого индекса. Действительно, число инверсий первого индекса в (14.18) $I=0$. Число инверсий второго индекса $n-1$. Объясняется это тем, что за цифрами j, k, l, x, ..., p, а их всего $n-1$, находится цифра i.

Следовательно, $I'-I=n-1$.

Множители в чередовании (14.19) разделены на k групп. Первая группа состоит из $d_1=2$ множителей. Вторая подгруппа состоит из $d_2=3$ множителей. Последняя k-я группа состоит из $k+1$ множителей. Количество всех множителей в (14.19) равно порядку определителя, т. е. равно n. Поэтому $d_1+d_2+d_3+\ldots+d_k=n$. Для каждой из подгрупп множителей имеет силу формула $I'-I=d-1$. Найдем, на сколько различаются I' и I для всей последовательности (14.19), имеющей k групп:

$$I'-I=d_1-1+d_2-1+d_3-1+\ldots+d_k-1=$$
$$=(d_1+d_2+d_3+\ldots+d_k)-k=n-k,$$

или

$$I'=I+n-k. \tag{14.20}$$

В произведениях типа (14.19) могут быть множители, имеющие одинаковые индексы, например mm. Каждый такой множитель в (14.19) можно рассматривать, как самостоятельную замкнутую группу из одного множителя. Для такой группы $d=1$ и $I'=I=0$, т. е. для такой группы также выполняется условие $I'-I=d-1$.

При определении знака каждого слагаемого в (14.17) следует учесть, что при любом числе k-инверсия в $2k$ не скажется на знаке, так как $(-1)^{2k}=1$. Поэтому в правую часть (14.20) можно добавить $2k$. Тогда

$$I'=I+n+k. \tag{14.21}$$

Распространим полученный результат на определитель матрицы (14.15). При раскрытии определителя матрицы (14.15) возможны произведения множителей двух типов. Первый тип множителя — это $1^n = 1$. Второй тип — произведение n отрицательных множителей вида $(-t_{ij})$. Таким образом, для матрицы (14.15) знак перед каждым слагаемым определителя зависит от знака произведения $(-1)^{l+l'}(-1)^n$, т. е. знак перед каждым слагаемым второго типа определяется значением $l+l'+n$. Но с учетом (14.21)

$$(-1)^{l+l'+n} = (-1)^{l+l+n+k+n} = (-1)^{2(l+n)+k} = (-1)^k. \quad (14.22)$$

Следовательно, знак перед каждым слагаемым второго типа определяется числом k групп замкнутых последовательностей в нем.

Множители второго типа могут быть нескольких разновидностей. Первую разновидность образуют замкнутые последовательности по типу (14.19). В каждой из них только одна последовательность чередования индексов ($k=1$). Поэтому перед каждым слагаемым этой разновидности в соответствии с формулой (14.22) следует поставить знак минус. Вторую разновидность образуют произведения множителей в виде двух замкнутых последовательностей чередования индексов ($k=2$). Перед каждым слагаемым этой разновидности должен быть поставлен знак плюс $(-1)^2 = 1$. Третью разновидность образуют произведения множителей с тремя ($k=3$) замкнутыми последовательностями чередования индексов и т. д.

Таким образом,

$$\Delta = 1 - \sum M_1 + \sum M_2 - \sum M_3 + \ldots$$

Положим, что выходным сигналом является сигнал второго узла x_2, а входным — сигнал первого узла x_1. Воздействия на остальные узлы равны нулю.

Для нахождения x_2 следует составить выражение

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & x_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\Delta}. \quad (14.23)$$

Разложим числитель (14.23) на слагаемые. Каждое из них после перегруппировки множителей будет иметь вид

$$x_1 t_{1k} t_{kj} t_{j2} \ldots t_{rr} \ldots t_{ps} t_{sq} t_{qp}$$

и может быть записано в виде $x_1 P_k \Delta_k$, где x_1 — входной сигнал; P_k — произведение множителей, индексы которых такие, что первый индекс у первого множителя 1, а второй индекс у последнего множителя 2.

Следовательно, P_k представляет собой передачу прямого пути из узла *1* в узел *2*. Δ_k представляет собой множители, индексы которых не содержат цифр 1 и 2 (индексов входного и выходного

узлов) и всех тех цифр, которые встречаются в индексах у множителей P_k.

После перегруппировки множителей Δ_k они будут представлять собой замкнутые последовательности, у которых первый индекс первого множителя и второй индекс последнего множителя одинаковы. Это означает, что все Δ_k будут представлять собой передачи замкнутых петель, не касающихся прямого пути P_k между входным и выходным узлами.

Окончательно

$$x_2 = x_1 \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}. \tag{14.24}$$

Формулу (14.24) в литературе иногда называют *топологическим законом передачи*.

§ 14.8. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НАПРАВЛЕННЫХ ГРАФОВ СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Система k уравнений, составленных относительно контурных токов или узловых потенциалов, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k &= b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k &= b_k. \end{aligned}\right\} \tag{14.25}$$

По правилу Крамера

$$x_p = \Delta_p/\Delta. \tag{14.26}$$

Рассмотрим методику упорядоченного составления Δ и Δ_p, изложенную в [69]. Для подсчета Δ надлежит составить направленный граф, в котором точки (узлы) в верхнем ряду соответствуют правым частям уравнения (т. е. $b_1 \ldots b_k$), а точки нижнего ряда неизвестным $x_1 \ldots x_k$, так что узел b_j находится над узлом x_j.

Затем в соответствии с уравнением (14.25) следует провести линии между x и b, поставить на них стрелки к узлу b и у стрелок записать величину передачи a.

Например, для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2; \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{14.27}$$

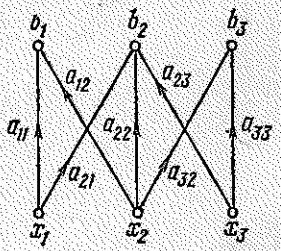


Рис. 14.23

будет граф, показанный на рис. 14.23.

Для нахождения определителя этого графа необходимо составить все возможные подграфы с участием всех узлов b_1, b_2, b_3 и x_1, x_2, x_3, руководствуясь тем, что к каждому узлу b может подходить от каждого узла x только одна ветвь из имеющихся в графе и не должно быть узлов, у которых нет ни одной ветви.

В рассматриваемом примере будет три подграфа — рис. 14.24, *а*, *б*, *в*. Тогда определитель графа Δ равен сумме определителей всех подграфов этого графа. Определитель каждого подграфа равен произведению передач ветвей этого подграфа, умноженному на $(-1)^m$.

Для тех подграфов, в которых ветви не пересекаются (например, подграфа на рис. 14.24, *а*), $m=0$. Для подграфов, в которых ветви пересекаются симметрично, m равно числу пар симметрично пересекающихся ветвей. Например, для рис. 14.24, *б* $m=1$ (ветвь с передачей a_{11} на этом рисунке ни с какой ветвью не пересекается, поэтому она не влияет на величину m). Если ветви пересекаются несимметрично, то m равно числу пересекающихся ветвей минус 1. Так, для рис. 14.25, *а* $m=3-1=2$. Если ветви пересекаются частично симметрично, а частично несимметрично (это общий случай), то m равно числу пар симметрично

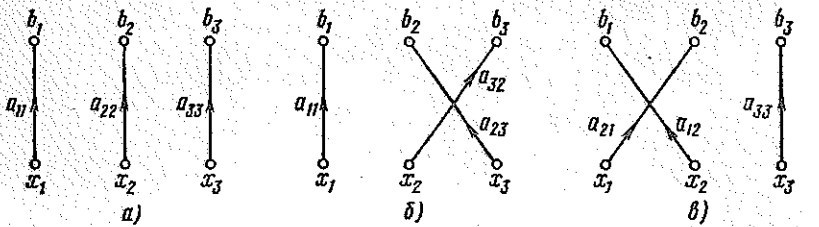


Рис. 14.24

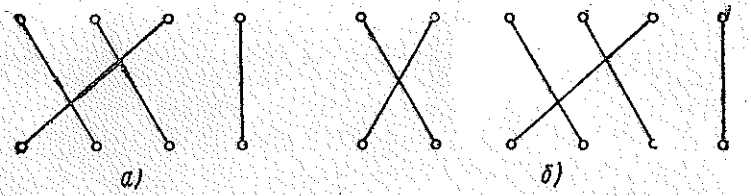


Рис. 14.25

пересекающихся ветвей плюс число несимметрично пересекающихся ветвей минус 1. Например, для рис. 14.25, *б*

$$m=1+3-1=3.$$

Ветвь справа на рис. 14.25, *б* не пересекается с другими ветвями и поэтому не вносит вклада при подсчете m.

Для системы уравнений (14.27) в соответствии с рис. 14.24, *а*, *б*, *в* и изложенным ранее правилом (математическое обоснование его см. в [69]) имеем

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1 a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Для составления определителя Δ_p следует исключить из графа все ветви, исходящие из узла x_p, и провести из узла x_p ветви с передачами b_n в узлы b_n, оставив остальные ветви без измене-

ний. Так, для рассматриваемого примера в соответствии с уравнением (14.27) при подсчете Δ_1 необходимо провести ветви из узла x_1, как показано на рис. 14.26. На этом рисунке узел x_1 соединен с узлом b_1 ветвью с передачей b_1, с узлом b_2 ветвью с передачей b_2, узлом b_3 ветвью с передачей b_3. Все другие ветви остались такими, какими они были в исходном графе.

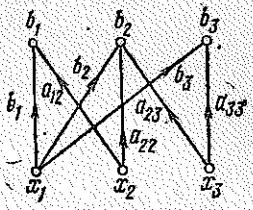


Рис. 14.26

Заметим, что если правая часть r-уравнения системы b_r равна нулю, то узел b_r на рис. 14.26 остается, но r-ветвь с нулевой передачей не изображают.

Δ_p подсчитывают по тем же правилам, что и Δ.

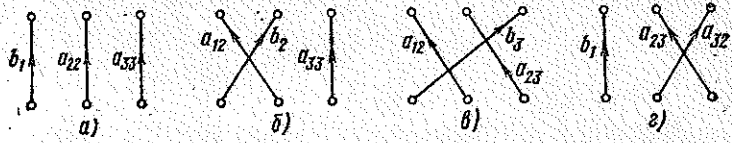


Рис. 14.27

Для рассматриваемого примера при нахождении Δ_1 следует составить четыре подграфа, изображенные на рис. 14.27, *а*, *б*, *в*, *г*.

$$\Delta_1 = (-1)^0 b_1 a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{12} b_2 a_{33} + (-1)^{3-1} a_{12} b_3 a_{23} + (-1)^1 b_1 a_{23} a_{32}.$$

Глава пятнадцатая

НЕНАПРАВЛЕННЫЕ И УНИСТОРНЫЕ ГРАФЫ

§ 15.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА

Ненаправленный граф представляет собой топологическое изображение самой электрической схемы. Узлы и ветви этого графа соответствуют узлам и ветвям исходной электрической схемы. В ненаправленных графах в отличие от направленных стрелок на ветвях не ставят. Свойства ветвей характеризуют их проводимостями. Передачи ветвей, имеющие размерность проводимости, в дальнейшем будем обозначать a, b, c, ... Поскольку каждой планарной электрической цепи соответствует некоторая дуальная ей цепь, то каждому ненаправленному графу может соответствовать дуальный ему граф.

Основной формулой для ненаправленных графов является

$$\frac{I}{B_{mn}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{r=1}^{q} C_r \Delta_r. \qquad (15.1)$$

Правая часть ее по структуре полностью аналогична формуле Мэзона (14.7) для направленных графов.

Формулу (15.1) используют для определения входного сопротивления (входной проводимости), взаимной проводимости ветвей, передачи по току и напряжению и для других целей *.

В формуле (15.1):

I — ток, проходящий по некоторой выбранной ветви графа, по отношению к которой и определяется входная или взаимная проводимость;

B_{mn} — напряжение (или ток) источника питания схемы, присоединенного зажимами к узлам m и n;

C_r — произведение проводимостей ветвей пути между узлами m и n, проходящего по выбранной ветви;

Δ_r — определитель для системы, полученной из исходной при коротком замыкании (закорачивании) ветвей выбранного пути C_r.

Число членов $C_r\Delta_r$ в числителе формулы (15.1) равно числу возможных путей между узлами m и n графа. В число этих путей не входит путь от m к n через источник питания схемы. Δ — определитель исходной электрической схемы. Он мог бы быть получен как определитель матрицы проводимостей схемы, составленной по методу узловых потенциалов.

Однако такой способ нахождения Δ обычно не употребляется ввиду его громоздкости и излишней трудоемкости. При вычислении Δ путем раскрытия определителя пришлось бы иметь дело с большим количеством слагаемых, часть из которых имела бы одинаковые абсолютные значения, но разные знаки (эти слагаемые соответствуют так называемым избыткам в каждой строке определителя).

Подсчет определителя Δ, в котором не возникает взаимно уничтожающих друг друга слагаемых, производят путем вычисления его как суммы величин всех возможных деревьев, которые могут быть образованы из данного графа. Напомним некоторые понятия, рассмотренные в § 13.2.

Под *деревом* понимают совокупность ветвей, которые касаются всех узлов, но не образуют ни одного замкнутого контура. Из одного и того же графа можно образовать несколько деревьев. Так, для графа рис. 15.1, *а* (ветви его имеют проводимости a, b, c) образуемые из него деревья изображены на рис. 15.1, *б*, *в*, *г*.

Величиной дерева называют произведение проводимостей ветвей этого дерева. Величина дерева рис. 15.1, *б* равна ab, дерева рис. 15.1, *в* — bc, дерева рис. 15.1, *г* — ac.

Определитель графа рис. 15.1, *а* равен $\Delta = ab + ac + bc$.

Такой же результат получим, если, заземлив какой-либо узел на рис. 15.1, *а*, например третий, составим матрицу узловых про-

---

* Произведение $C_r\Delta_r$ в формуле (15.1) часто обозначают, например, как $P_k\Delta_k$ [см. формулу (14.24)] либо как $P'_k\Delta'_k$. Если это произведение обозначают $P'_k\Delta'_k$, то слагаемое определителя знаменателя формулы (15.1), т. е. слагаемое Δ, обозначают $P_k\Delta_k$ (см. § 14.7).

водимостей и подсчитаем ее определитель:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a+c & -a \\ -a & a+b \end{bmatrix} = (a+c)(a+b) - a^2 = ab + ac + bc.$$

В рассматриваемом примере избыточными оказались члены a^2 и $-a^2$.

То обстоятельство, что величина определителя матрицы узловых проводимостей равна сумме величин всех возможных деревьев, следует из теоремы Бине — Коши, известной в теории матриц. Эта теорема формулируется следующим образом: определитель произведения двух матриц $[A_1][A_2]$ ($[A_1]$ имеет размер $m \times n$ и матрица $[A_2]$ размер $n \times m$ ($m \leqslant n$)) равен сумме произведений всех соответствующих миноров максимального порядка m этих матриц $[A_1]$ и $[A_2]$. Под соответствующими понимают миноры максимального порядка этих матриц.

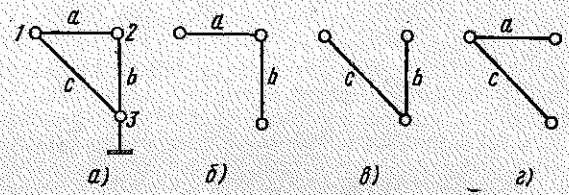


Рис. 15.1

Если теорему Бине — Коши применить к матрице узловых проводимостей $[Y] = [A][Y_B][A]^T$ (см. § 13.2), положив $[A_1] = [A][Y_B]$ и $[A_2] = [A]^T$, где $[A]$ — узловая матрица; $[Y_B]$ — диагональная матрица проводимостей ветвей; $[A]^T$ — транспонированная узловая матрица, то можно доказать (доказательство опускаем), что $\Delta = \det\{[A_1][A_2]\}$ равен сумме величин всех возможных деревьев.

Имея граф, можно легко подсчитать число его деревьев. С этой целью проводимость каждой ветви графа следует положить равной 1, заземлить произвольный узел графа, составить матрицу узловых проводимостей и подсчитать ее определитель. В рассматриваемых условиях величина каждого дерева графа равна 1, поскольку произведение единиц равно 1. Поэтому численное значение определителя, подсчитанного в этих условиях, равно числу деревьев.

Чтобы определить число деревьев графа рис. 15.1, *а*, положим $a = b = c = 1$, заземлим любой, скажем третий, узел и подсчитаем

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Следовательно, граф рис. 15.1, *а* имеет три дерева.

Однако знание числа деревьев мало что дает, так как отыскивать деревья в сложной схеме дело непростое. Поэтому обычно пользуются одним из трех рассматриваемых в следующем параграфе способов упорядоченного подсчета Δ, в которых не по-

являются взаимно уничтожающие друг друга слагаемые. Первый из них основан на разложении определителя Δ по некоторому произвольному узлу схемы; второй — на разложении определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами; третий — на разложении определителя по произвольно выбранной ветви.

§ 15.2. СПОСОБЫ УПОРЯДОЧЕННОГО ПОДСЧЕТА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ГРАФА

а. **Разложение определителя по узлу.** Положим, что к некоторому произвольному узлу S подходит n ветвей с проводимостями $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Определитель Δ раскрывается по узлу с помощью следующей формулы:

$$\Delta = \sum a_i\Delta_i + \sum a_ia_j\Delta_{ij} + \sum a_ia_ja_k\Delta_{ijk} + \ldots + a_ia_j a_k \ldots a_n\Delta_{ijk\ldots n}. \quad (15.2)$$

Здесь $\sum a_i\Delta_i = a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + a_3\Delta_3 + \ldots + a_n\Delta_n$;

Δ_k — определитель, получающийся из определителя исходной схемы путем закорачивания ветви a_k и исключения всех остальных ветвей, подходящих к узлу S (т. е. при холостом ходе всех остальных ветвей этого узла);

$$\sum a_ia_j\Delta_{ij} = a_1a_2\Delta_{12} + a_1a_3\Delta_{13} + a_2a_3\Delta_{23} + \ldots,$$

Δ_{kr} — определитель, получающийся из определителя исходной схемы при одновременном закорачивании ветвей a_k и a_r и исключении из схемы (холостом ходе) всех остальных ветвей, подходящих к узлу S;

$$\sum a_ia_ja_k\Delta_{ijk} = a_1a_2a_3\Delta_{123} + a_1a_2a_4\Delta_{124} + \ldots,$$

Δ_{ijk} — определитель, получающийся из определителя исходной схемы при одновременном закорачивании ветвей i, j, k и при исключении (холостом ходе) всех остальных ветвей, подходящих к узлу S, по которому производится разложение.

При одновременном закорачивании всех ветвей, подходящих к узлу S, схема часто вырождается в одну точку (в один узел S) и тогда определитель $\Delta_{ij\ldots n}$ оказывается равным 1.

б. **Разложение определителя по путям между двумя произвольно выбранными узлами.** В качестве узлов следует выбирать узлы, по отношению к которым схема в геометрическом смысле наиболее симметрична. Это упрощает подсчеты. Разложение определителя Δ в этом методе производится с помощью формулы

$$\Delta = \sum P_k\Delta_k, \quad (15.3)$$

где P_k — произведение проводимостей k-го пути между выбранными узлами; Δ_k — минор k-го пути, подсчитанный по схеме, полученной из исходной при закорачивании ветвей, по которым проходит k-й путь.

в. **Разложение определителя по произвольно выбранной ветви.** Положим, что проводимость произвольно выбранной ветви графа

равна a. Тогда определитель графа подсчитывают по формуле

$$\Delta = a\Delta_a + \Delta^a. \qquad (15.4)$$

Здесь Δ_a — определитель графа при коротком замыкании ветви a; Δ^a — определитель графа при разомкнутой ветви a.

§ 15.3. СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Рассмотрим способы разложения на конкретном примере. Найдем определитель Δ двумя методами для одной и той же мостовой скрещенной схемы рис 15.2, $а$. Сначала найдем Δ путем разложе-

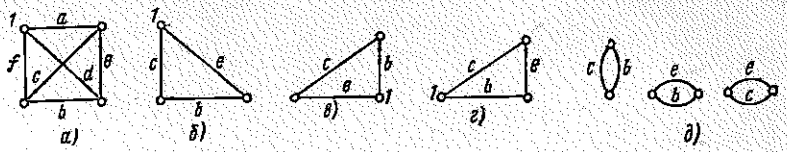


Рис. 15.2

ния по узлу *1*. К этому узлу подходят три ветви [a, d, f вместо a_1, a_2, a_3 в формуле (15.2)], поэтому

$$\Delta = a\Delta_a + d\Delta_d + f\Delta_f + af\Delta_{af} + ad\Delta_{ad} + df\Delta_{df} + adf \cdot 1.$$

Находим Δ_a для подграфа рис. 15.2, $б$, который получен из графа рис. 15.2, $а$ путем закорачивания ветви a и размыкания ветвей d и f:

$$\Delta_a = ce + cb + eb$$

(попарное произведение проводимостей ветвей). Для определения Δ_d служит рис. 15.2, $в$ и для определения Δ_f — рис. 15.2, $г$:

$$\Delta_d = \Delta_f = \Delta_a.$$

В соответствии с рис. 15.2, $д$

$$\Delta_{ad} = b + c; \quad \Delta_{af} = b + e; \quad \Delta_{df} = a + e.$$

Таким образом,

$$\Delta = (a + d + f)(ce + cb + be) + ad(b + c) + \\ + af(b + e) + df(c + e) + adf. \qquad (15.5)$$

Теперь найдем Δ для схемы рис. 15.3, $а$ разложением по путям между узлами *1* и *4* (зачерненные кружки на рис. 15.3, $а$). На рис. 15.3, $б - е$ показаны пять возможных путей между узлами *1* и *4* и соответствующие им подсхемы (подграфы) для нахождения Δ_k.

Передача первого пути P_1 по ветвям a и e равна произведению проводимостей ветвей этого пути: $P_1 = ae$. При закорачивании ветвей a и e подграф будет представлять собой параллельное соединение ветвей f, c, b. Следовательно, $\Delta_1 = f + c + b$.

Второй путь по ветвям f, b (рис. 15.3, $в$):

$$P_2 = fb; \quad \Delta_2 = a + e + a.$$

Третий путь по ветви d (рис. 15.3, *е*):

$$P_3 = d;\ \Delta_3 = (a+e)c + (a+e)(f+b) + c(f+b).$$

Четвертый путь по ветвям a, c, b (рис. 15.3, *д*):

$$P_4 = acb;\quad \Delta_3 = 1$$

(так как при закорачивании ветвей a, c, b граф вырождается в точку).

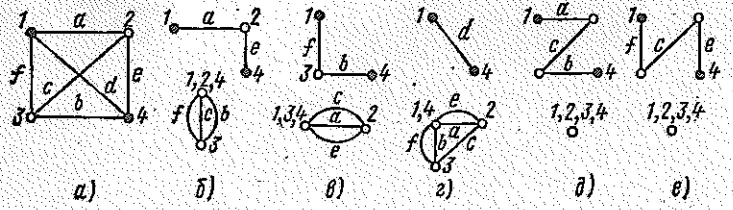


Рис. 15.3

Пятый путь по ветвям f, c, e (рис. 15.3, *е*):

$$P_5 = fce;\quad \Delta_5 = 1.$$

Таким образом,

$$\Delta = \sum P_k \Delta_k = ae(f+c+b) + fb(a+e+c) + \\ + d[(a+e)c + (a+e)(f+b) + (f+b)c] + acb + fce.$$

Результат совпадает с результатом подсчета Δ другим методом.

§ 15.4. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ

Как говорилось в § 15.1, формула (15.1) применяется для определения входной и взаимной проводимостей, для определения передачи тока, передачи напряжения и для других целей.

Рассмотрим вопрос о том, как ею следует пользоваться. Обозначим через m и n узлы графа, к которым присоединяется ветвь, содержащая источник питания схемы. В дальнейшем будем полагать, что источником питания является либо источник э. д. с., либо источник тока, поскольку к ним можно свести любой реальный источник питания. Кроме того, будем полагать, что источник питания только один. Если же источников питания несколько, то надо воспользоваться принципом наложения, последовательно находя искомую величину от действия каждого из источников, учитывая при подсчетах внутренние сопротивления последних.

Роль B_{mn} в формуле (15.1) играет либо напряжение источника питания, если в качестве последнего взят источник э. д. с., либо ток I_{mn} источника тока, если в качестве источника питания схемы взят источник тока. В качестве тока I в числителе левой части формулы (15.1) берут ток по той ветви, по отношению к которой надо найти искомую величину. Так, если надо найти

передачу от источника питания к некоторой S-й ветви, то под I понимают ток в S-й ветви.

Число слагаемых в числителе формулы (15.1) равно числу возможных путей между узлами m и n, причем каждый из них должен проходить по выбранной S-й ветви (как говорилось, путь через источник питания не учитывается).

В сумму $\sum C_r\Delta_r$ часть слагаемых может входить со знаком плюс, часть со знаком минус за счет того, что C_r может иметь знак либо плюс, либо минус. Чтобы определить, какой знак имеет C_r, руководствуются следующим: произвольно выбирают положительное направление вдоль ветви S (ставят стрелку на ветви S). Если при прохождении пути C_r пройдем по ветви S согласно с положительным направлением этой ветви (по стрелке на ветви S), то C_r берут со знаком плюс, в противоположном случае — со знаком минус.

При вычислении определителя системы Δ следует учитывать внутреннее сопротивление источника питания схемы. При питании схемы от источника э. д. с. Δ подсчитывают при закороченных узлах mn (внутреннее сопротивление источника э. д. с. равно нулю). При питании схемы от источника тока ветвь mn, в которой включен источник, при подсчете Δ разрывают.

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы (15.1).

Пример 15.1. Определим взаимную проводимость ветви с источником э. д. с. (подключенной к узлам mn) и ветви с проводимостью e (рис. 15.4, $а$).

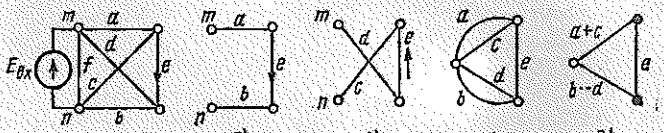


Рис. 15.4

Решение. Для учета знака C_r примем за положительное направление ветви e, указанное стрелкой. Тогда

$$I_e/E_{вх} = \sum C_r\,\Delta_r/\Delta.$$

В графе есть два пути между узлами m и n, которые проходят через ветвь e. Первый путь изображен на рис. 15.4, $а$ — $C_1 = aeb$. Этот путь берем со знаком плюс, так как при прохождении его по ветви e проходим согласно с направлением стрелки в ветви e. Поскольку при закорачивании ветвей a, e, b (ветвей этого пути) граф вырождается в точку, то $\Delta_1 = 1$.

Второй путь C_2 проходит по ветвям d, e, c (рис. 15.4, $в$). Так как при прохождении этого пути по ветви e проходим встречно стрелке этой ветви (сравним рис. 15.4, $б$ и $в$), то $C_2 = -dec$. При закорачивании ветвей d, e, c граф вырождается в точку, поэтому $\Delta_2 = 1$.

Для нахождения определителя системы Δ закорачиваем узлы m, n (схема питания от источника э. д. с.) и получаем граф рис. 15.4, *г*. От последнего переходим к графу рис. 15.4, *д*.

Для вычисления Δ графа рис. 15.4, *д* воспользуемся разложением его по путям между зачерненными точками. Между этими точками два пути: первый по ветви e, второй по ветвям $(a+c)$, $(b+d)$, поэтому

$$\Delta = e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d).$$

Таким образом,

$$\frac{I_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} = \frac{C_1\Delta_1+C_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{aeb-dec}{e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d)}. \qquad (15.6)$$

Для нахождения коэффициента передачи схемы рис. 15.4, *а* по напряжению между входной ветвью (ветвью с источником э. д. с. между узлами m и n) и выходной (e) воспользуемся тем, что выходное напряжение на зажимах ветви e равно току $I_{\text{вых}}$ ветви e, поделенному на проводимость этой ветви.

Следовательно,

$$\frac{U_{\text{вых}}}{E_{\text{вх}}} = k_u = \frac{I_{\text{вых}}/e}{E_{\text{вх}}} = \frac{ab-dc}{e(a+b+c+d)+(a+c)(b+d)}.$$

Пример 15.2. Рассмотрим, какие изменения произошли бы в вычислениях, если бы та же схема питалась не от источника э. д. с., а от источника тока (рис. 15.5) и требовалось бы найти передачу по току к ветви e и отношение напряжения на выходе (на ветви e) к входному току.

Решение. Выходной ветвью по-прежнему является ветвь e, по ней проходит ток $I_{\text{вых}}$. Положительное направление для прохождения по этой ветви (см. стрелку) то же, что и в предыдущем примере.

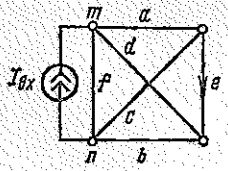


Рис. 15.5

В отличие от предыдущего примера входной величиной является входной ток $I_{\text{вх}}$. Поэтому

$$I_{\text{вых}}/I_{\text{вх}} = \sum C_r\Delta_r/\Delta. \qquad (15.7)$$

Числитель правой части формулы (15.7) такой же, как числитель правой части формулы (15.6). Определитель Δ в формуле (15.7) отличается от определителя Δ в формуле (15.6), потому что для формулы (15.6) он подсчитывался при питании схемы от источника э. д. с., тогда как в рассматриваемом случае он должен быть подсчитан при питании схемы от источника тока. Для подсчета Δ ветвь с источником тока следует считать разомкнутой. Но определитель Δ для этого случая был подсчитан ранее [см. формулу (15.5)]. Поэтому

$$\frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{aeb-dec}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)+adf}.$$

Отношение выходного напряжения на ветви e к входному току

$$\frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вых}}/e}{I_{\text{вх}}} = \frac{ab-dc}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)+adf}.$$

Для определения входной проводимости схемы, питающейся от источника э. д. с., в числителе формулы (15.1) должны быть взяты все возможные пути между узлами m и n (путь через источник э. д. с. исключается). Например, для вычисления входной проводимости схемы рис. 15.6, $а$ в числителе формулы (15.1) должно быть взято четыре слагаемых в соответствии с тем, что возможны четыре пути между узлами m и n (рис. 15.6, $б-д$):

$$\frac{I_{\text{вх}}}{E_{\text{вх}}} = \frac{\Sigma C_r \Delta_r}{\Delta} = \frac{ab(d+c+e)+de(a+c+b)+dcb\cdot 1+ace\cdot 1}{(a+b)(d+e)+(a+b)c+(d+e)c}.$$

Все C_r в числителе взяты со знаком плюс потому, что направления всех четырех путей взяты в виде продолжения по

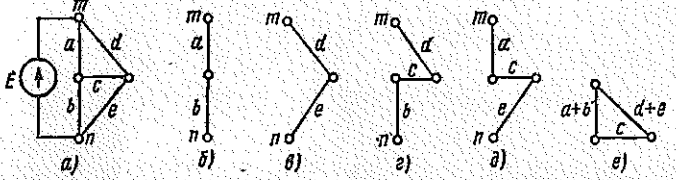


Рис. 15.6

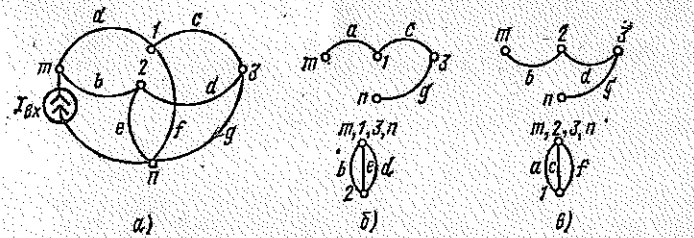


Рис. 15.7

часовой стрелке направления входного тока. Определитель Δ (схема питается от источника э. д. с.) подсчитан в соответствии с рис. 15.6, $е$.

Пример 15.3. Найдем передачу по току в двойном Т-образном мосте, изображенном на рис. 15.7, $а$. Схема питается от источника тока $I_{\text{вх}}$. Выходной ветвью является ветвь g. По ней проходит ток $I_{\text{вых}}$. Положительное направление для него показано стрелкой.

Решение. На рис. 15.7, $б$, $в$ изображены два пути C_1 и C_2 с передачами $C_1 = acg$ и $C_2 = bdg$ и соответствующие им подграфы для нахождения миноров $\Delta_1 = b+e+d$ и $\Delta_2 = a+c+f$.

Определитель графа Δ рис. 15.8, *а* найдем по методу разложения его по ветвям между двумя узлами *1* и *2* (зачернены). Между этими узлами имеется пять путей в соответствии с рис. 15.8, *б — е*.

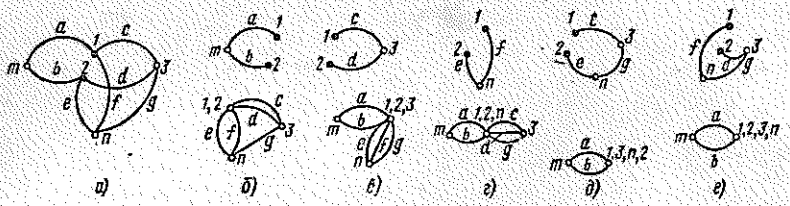


Рис. 15.8

Подграфы этих путей изображены на тех же рисунках. В результате получим

$$\frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2}{\Delta} =$$

$$= \frac{acg\,(b+e+d)+bdg\,(a+c+f)}{ab\,[(e+f)\,g+(e+f)\,(c+d)+(c+d)\,g]+cd\,(a+b)\,(e+f+g)+}\cdots\rightarrow$$

$$\rightarrow\cdots\frac{acg\,(b+e+d)+bdg\,(a+c+f)}{+ef\,(a+b)\,(c+d+g)+cge\,(a+b)+fgd\,(a+b)}.$$

§ 15.5. УНИСТОРНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Электронные схемы иногда рассчитывают, составляя для них графы, содержащие схемные элементы, называемые унисторами. Унистор обозначают, как показано на рис. 15.9, *а*; унистор представляет собой элемент, проводимость которого в направлении стрелки равна, скажем, S, а в направлении, противоположном стрелке, нулю. Ток, проходящий через унистор в направлении стрелки, определяется потенциалом его широкой стороны и для схемы рис. 15.9, *а* равен $\varphi_1 S$ (φ_1 — потенциал точки *1*, φ_2 — точки *2*),

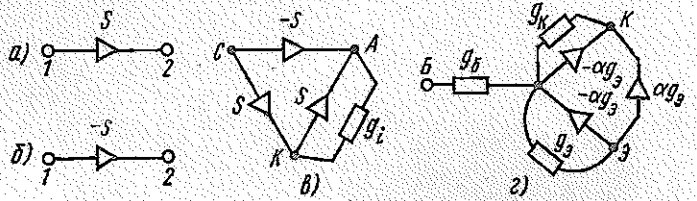


Рис. 15.9

тогда как для обычного элемента с проводимостью S он равнялся бы $(\varphi_1 - \varphi_2)\,S$. Проводимость в направлении стрелки может быть либо положительной (рис. 15.9, *а*), либо отрицательной (рис. 15.9, *б*).

Схема замещения электронной лампы с применением унисторов изображена на рис. 15.9, *в*. Анод, сетка и катод обозначены буквами A, C, K; S — крутизна лампы, равная проводимости

унистора; g_i — внутренняя проводимость лампы между катодом и анодом.

Схема замещения биполярного транзистора с применением униторов показана на рис. 15.9, *г*. В ней *Б*, *К*, *Э* — соответственно база, коллектор, эмиттер. В схеме замещения шесть элементов: три унистора (один с проводимостью $\alpha g_э$ и два с проводимостью $-\alpha g_э$), три проводимости — базы ($g_б$), коллектора ($g_к$) и эмиттера ($g_э$). Произведение $\alpha g_э$ играет роль крутизны транзистора, подобно тому, как S — крутизна лампы.

§ 15.6. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ МЭЗОНА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

После составления графа электронной схемы искомую передачу определяют по формуле Мэзона для ненаправленных графов $\frac{\sum P'_k \Delta'_k}{\sum P_k \Delta_k}$, соблюдая три правила, которые не надо было выполнять при расчетах обычных ненаправленных графов, не содержащих унисторы.

Эти правила следующие:

1. Если выходной величиной является ток, то в выходную ветвь включают амперметр с проводимостью, равной 1.

2. Если выходной величиной является напряжение между двумя точками схемы, то на графе между этими точками включают вольтметр с проводимостью, равной 1.

3. При подсчете числителя формулы Мэзона $\sum P'_k \Delta'_k$ один из узлов выходной ветви (измерительного прибора) заземляют и не учитывают унисторы, отходящие от заземленного узла. При подсчете знаменателя $\sum P_k \Delta_k$ заземляют тот же или какой-либо иной узел схемы и также не учитывают унисторы, направленные от заземленного узла.

Перед тем как составлять числитель и знаменатель по формуле Мэзона, следует разобраться, в каком направлении (по или против часовой стрелки) следует обходить граф от истока к стоку. Если в графе имеется хотя бы один унистор с проводимостью $\pm S$ (или $\pm \alpha g_э$ для транзистора), направленный на пути обхода от заземленного узла и шунтированный линейной проводимостью g, то неучет унистора, направленного от заземленного узла, распространяется и на шунтирующую его линейную проводимость g.

Дело в том, что эту проводимость можно заменить на две параллельные ветви со встречно направленными унисторами с проводимостью g. Тогда от заземленного узла будет направлен неучитываемый унистор с проводимостью $\pm S + g$, а к заземленному — унистор с проводимостью g, который окажется направленным встречно направлению обхода и также не должен приниматься во внимание. Если учесть указанное обстоятельство, то направление обхода становится единственным. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 15.4. Определить передачу i_1/E для схемы рис. 15.10, *а*. Цифрами *1*, *2*, *3* обозначены узлы схемы. Положительное направление входного тока i_1 показано на рисунке.

Решение. Граф изображен на рис. 15.10, *а*. Так как выходной величиной является ток i_1, то граф содержит амперметр с проводимостью, равной 1. Для подсчета числителя формулы Мэзона узел *1* (один из концов измерительного прибора) заземлен, обход графа от истока E к стоку i_1 в рассматриваемом примере должен быть осуществлен против часовой стрелки. Обход по часовой стрелке

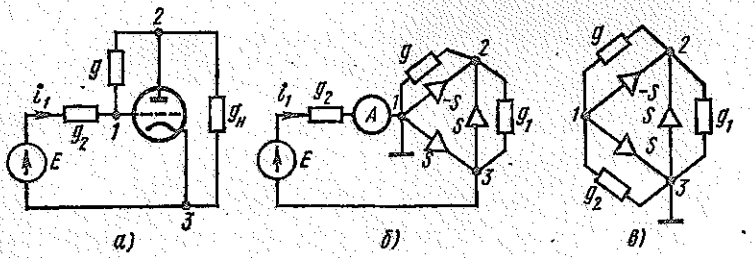


Рис. 15.10

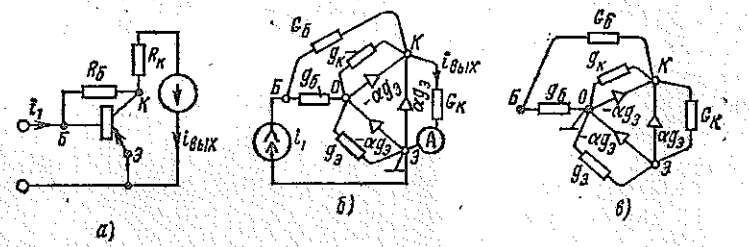


Рис. 15.11

ничего не даст, так как, если не учитывать унистор с проводимостью $-S$, направленный от заземленного узла *1*, то не должна учитываться и ветвь с проводимостью g, шунтирующая этот унистор. Другими словами, при обходе по часовой стрелке встречаемся с разрывом.

При обходе против часовой стрелки между узлами *3* и *2* имеется унистор с проводимостью S, направленный согласно с обходом. Путь единственный: $P_1' = 1 \cdot g_2 (S + g_1) g$; $\Delta_1 = 1$ (закорочены все узлы графа).

Определитель $\Delta = \sum P_k \Delta_k$ подсчитываем с помощью графа рис. 15.10, *в* при заземленном узле *3* путем разложения по путям между узлами *2* и *3*:

$$\Delta = g_1 (g_2 + g) + g (g_2 + S).$$

Искомая передача

$$-i_1/(-E) = i_1/E = g_2 g (S + g_1)/\Delta; \quad g_1 = g_н + g_i.$$

Пример 15.5. Определить коэффициент передачи тока усилителя с обратной связью в схеме с общим эмиттером (рис. 15.11. *а*), на вход которой поступает сигнал от источника тока i_1. Граф изображен на рис. 15.11, *б*.

Решение. Для подсчета числителя передачи узел *Э* заземлим. В выходную ветвь включим амперметр с проводимостью, равной 1:

$$\frac{i_{вых}}{i_{вх}} = \frac{P'_1\Delta'_1 + P'_2\Delta'_2}{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3};$$

$$P'_1 = G_б G_к; \quad \Delta'_1 = g_б + g_к - \alpha g_э + g_э;$$

$$P'_2 = g_б (g_к - \alpha g_э) G_к, \quad \Delta'_2 = 1.$$

Для подсчета знаменателя Δ входную ветвь разомкнем (на вход поступает сигнал от источника тока) и разложим определитель Δ относительно узлов *Б* и *0* (рис. 15.11, *в*, заземлив узел *0*). Получим

$$P_1 = g_б, \quad \Delta_1 = (G_б + g_к - \alpha g_э)(g_э + G_к) + g_э(\alpha g_э + G_к);$$

$$P_2 = G_б g_к, \quad \Delta_2 = g_э + G_к;$$

$$P_3 = G_б G_к (g_э - \alpha g_э), \quad \Delta_3 = 1;$$

$$\frac{i_{вых}}{i_{вх}} = \frac{G_б G_к (g_б + g_к + g_э - \alpha g_э) + g_б G_к (g_к - \alpha g_э)}{g_к (g_э + G_к)(g_б + G_б) + g_э G_к (1 - \alpha)(g_б + G_б) + g_б G_б (g_э + G_к)}.$$

§ 15.7. УПРОЩЕНИЕ РАСЧЕТА СИММЕТРИЧНЫХ БАЛАНСНЫХ СХЕМ

Относительно широкое распространение симметричных балансных схем объясняется рядом преимуществ их по сравнению с небалансными. Преимущества заключаются в значительно меньшем (в сотни раз) влиянии на работу схем таких факторов, как колебание величины напряжения источника анодного питания, температуры окружающей среды, старения элементов схемы, влияния положительной обратной связи через источник анодного напряжения.

В то же время балансные схемы внешне выглядят довольно громоздкими и сложными, поскольку они содержат много узлов и ветвей. Поэтому естественно стремление перейти при расчете балансной схемы к ее половине.

Правило перехода от полной схемы к половине схемы было предложено А. А. Соколовым.

Для пояснения этого правила сначала рассмотрим неэлектронную схему рис. 15.12, *а* (пунктиром показана линия или ось симметрии).

На рис. 15.12, *б* изображена скелетная схема, соответствующая рис. 15.12, *а*, и на ней приведены значения токов ветвей и потенциалов узлов при $u_{вх}/2 = 6{,}6$ В; $R_1 = 1$; $R_2 = 3{,}6$; $R_3 = 0{,}8$; $R_5 = 2$; $0{,}5R_н = 2$ Ом, когда заземлена средняя точка сопротивления нагрузки $R_н$.

Распределение токов в схеме не зависит от величины сопротивления R_4, расположенного вдоль оси симметрии схемы, так как ток в этом сопротивлении равен нулю. Поскольку ток в этом

сопротивлении равен нулю, его можно закоротить. Точки *1*, *2*, *3* так же, как и точка *4*, имеют нулевой потенциал, поэтому их можно объединить в одну точку.

На рис. 15.12, *в* изображена схема, эквивалентная исходной схеме рис. 15.12, *а* в смысле соотношения между входными и выходными величинами. Входное напряжение взято $u_{вх}/2$.

Таким образом, для перехода от симметричной балансной схемы к ее половине необходимо: 1) закоротить все сопротивления, расположенные вдоль линии симметрии схемы; 2) объединить все равнопотенциальные точки в одну точку; 3) входное напряжение $u_{вх}/2$ считать приложенным к входу половины; 4) сопротивление нагрузки в половине схемы взять равным $R_н/2$.

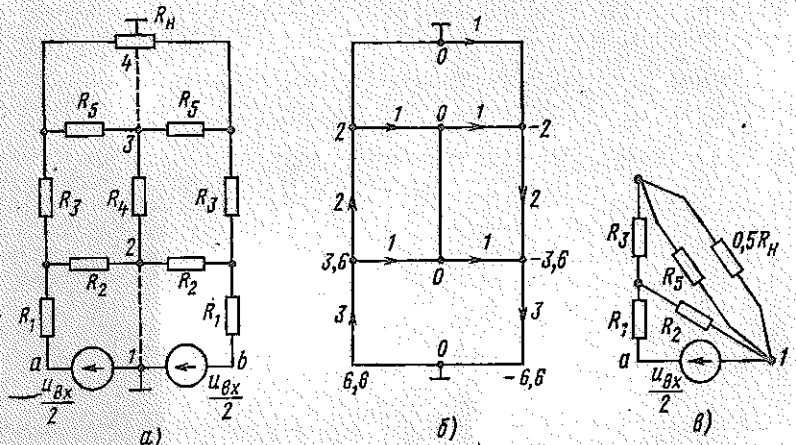


Рис. 15.12

Токи во всех ветвях укороченной схемы рис. 15.12, *в* такие же, как и токи в соответствующих ветвях исходной схемы рис. 15.12, *а*. Поскольку схема рис. 15.12, *в* является половиной схемы рис. 15.12, *а*, то входное сопротивление ее в два раза меньше входного сопротивления исходной схемы, а входная проводимость и взаимная проводимость между любыми ветвями укороченной схемы (исключая ветви, находящиеся на линии симметрии 0—0) в два раза больше соответствующей проводимости исходной схемы рис. 15.12, *а*.

Таким образом, для нахождения входной или взаимной проводимости исходной схемы рис. 15.12, *а* необходимо определить входную или взаимную проводимость между соответствующими ветвями укороченной схемы рис. 15.12, *в* и поделить ее на два.

Мощность, выделенная в сопротивлении нагрузки $R_н$ схемы рис. 15.12, *а*, в два раза больше мощности, выделенной в сопротивлении нагрузки $0{,}5R_н$ схемы рис. 15.12, *в*.

Правило перехода применим к схеме симметричного балансного каскода рис. 15.13, *а*. В ней имеются четыре лампы. Внутренняя

проводимость и крутизна характеристики нижних ламп обозначены через g_i и S, верхних ламп — через g_i' и S'. Пунктиром показана ось симметрии. Узлы обозначены цифрами.

На рис. 15.13, *б* показана половина симметричной схемы для расчета действия синусоидального сигнала. В эту схему сопротивление $R_к$ не входит, так как оно расположено вдоль оси симметрии схемы. Источник синусоидального напряжения сигнала $u_{вх}/2$ присоединен к сетке нижней лампы. Проводимость нагрузки взята в два раза больше проводимости $g_н = 1/R_н$. Напряжение на выходе обозначено $u_{вых}/2$.

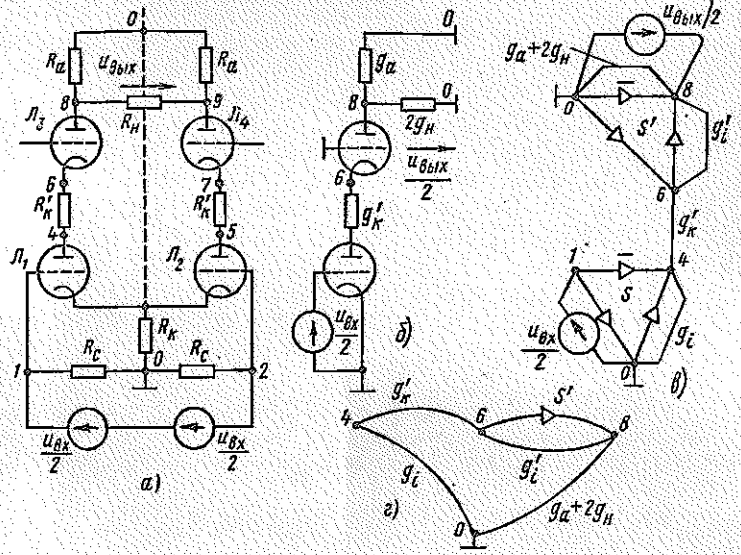


Рис. 15.13

На рис. 15.13, *в* изображена схема, в которой лампы $Л_1$ и $Л_3$ в расчетном смысле заменены их эквивалентами — внутренней проводимостью и тремя унисторами с проводимостями, равными крутизне характеристики соответствующей лампы.

Пример 15.6. Составим выражение для коэффициента передачи напряжения для схемы рис. 15.13, *в*.

Решение. В схеме только один прямой путь от истока к стоку, поэтому

$$\sum P_к' \Delta_к' = P_1' \Delta_1',$$

где $P_1' = -Sg_к' (g_i' + S')$ и $\Delta_1' = 1$.

Для подсчета знаменателя коэффициента передачи служит схема рис. 15.13, *г*. В ней узел *0* соединен с узлом *4* ветвью с проводимостью g_i. Остальные ветви нижней лампы на схеме рис. 15.13, *г* не показаны, так как внутреннее сопротивление источника входного напряжения равно нулю и потому унистор,

направленный от точки *1* к точке *0*, закорочен, а унисторы двух параллельных ветвей между точками *1* и *4* имеют проводимости $+S$ и $-S$ и в сумме их проводимость равна нулю.

Определитель знаменателя найдем путем разложения по путям между узлами *6* и *0*. Он состоит из двух слагаемых в соответствии с тем, что между точкой *6* и точкой *0* есть два пути: первый путь по ветвям $g'_к$ и g_i, ему соответствует

$$P_1 = g_i g'_к \text{ и } \Delta_1 = g'_i + S' + g_а + 2g_н,$$

второй путь по параллельным ветвям S' и g'_i и ветви с проводимостью $g_а + 2g_н$, ему соответствует $\Delta_2 = g'_к + g_i$.

Окончательно

$$\frac{u_{вых}}{u_{вх}} = \frac{-Sg'_к(g'_i+S')}{g_i g'_к(g_а+g'_i+2g_н)+(g_а+2g_н)(g'_i+S')(g_i+g'_к)}.$$

Иногда симметричные схемы имеют перекрестные ветви. Например, в схеме рис. 15.14, *а* перекрестные ветви образованы сопротивлениями Z_6. Покажем, что переход к укороченной схеме рис. 15.14, *в* в этом случае также возможен, целесообразен и

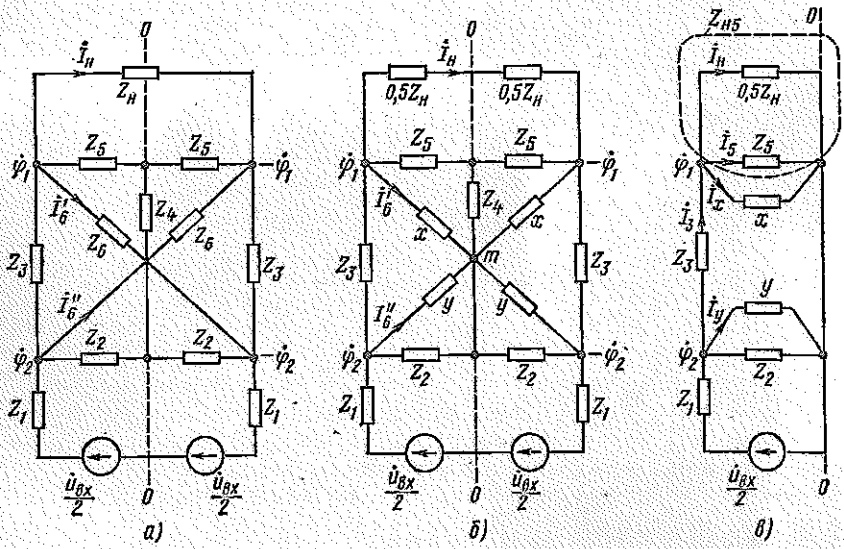


Рис. 15.14

осуществляется весьма просто, хотя с перекрестными ветвями придется проделать элементарное преобразование. Каждое перекрестное сопротивление Z_6 разделим на две части x и y (рис. 15.14, *б*) таким образом, чтобы точка m между ними имела нулевой потенциал. Когда это выполним, схема будет разделена на две симметричные части по линии *0—0*, одна из которых показана на рис. 15.14, *в*.

Для нахождения сопротивлений x и y поступаем следующим образом. Прежде всего убеждаемся, что токи $I'_б$ и $I''_б$ в схеме рис. 15.14, *а* одинаковы и равны $(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2)/Z_в$. Но эти токи проходят через два последовательно соединенных сопротивления x и y. Следовательно, в укороченной схеме рис. 15.14, *в* токи $\dot{I}_x$ и $\dot{I}_y$ должны быть одинаковы.

Обозначим сопротивление двух параллельных ветвей $0{,}5Z_н$ и $Z_б$ через $Z_{нб}=\frac{0{,}5Z_н Z_б}{0{,}5Z_н+Z_б}$. Тогда для укороченной схемы рис. 15.14, *в*

$$\dot{I}_э=\frac{\dot{\varphi}_2}{Z_э+\frac{xZ_{нб}}{x+Z_{нб}}};\quad \dot{I}_x=\dot{I}_э\frac{Z_{нб}}{x+Z_{нб}}=\frac{\dot{\varphi}_2 Z_{нб}}{xZ_{нб}+(x+Z_{нб})Z_э};\quad \dot{I}_y=\frac{\dot{\varphi}_2}{y}.$$

Имея в виду, что $x+y=Z_в$ и $\dot{I}_x=\dot{I}_y$, получаем

$$x=Z_{нб}\frac{Z_в-Z_э}{2Z_{нб}+Z_э},\quad y=Z_в-x.$$

Из равенства $\dot{I}_x=\dot{I}_y$ следует пропорция $\dot{\varphi}_1/x=\dot{\varphi}_2/y$. Составив производную пропорцию $\frac{\dot{\varphi}_1}{x}=\frac{\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2}{x+y}$, убеждаемся, что токи $\dot{I}_x=\dot{I}_y$ в схеме рис. 15.14, *в* равны токам $\dot{I}'_б$ и $\dot{I}''_б$ в схеме рис. 15.14, *а*.

Рассмотрим простейший числовой пример на схему с перекрестными связями.

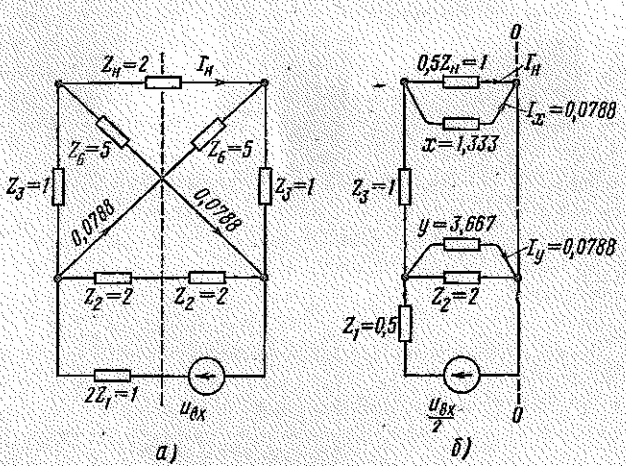


Рис. 15.15

Пример 15.7. На рис. 15.15, *а* изображена исходная схема с перекрестными связями. Значения сопротивлений указаны на схеме. $Z_б=\infty$. Напряжение на входе схемы $u_{вх}=1{,}766$В.

Решение. Сопротивление $x=\frac{0{,}5Z_н(Z_в-Z_э)}{Z_н+Z_э}=1{,}333$ Ом, сопротивление $y=Z_в-x=3{,}667$ Ом. Токи в ветвях указаны на схеме.

Взаимная проводимость между входной ветвью с сопротивлением Z_1 и выходной ветвью с сопротивлением $0{,}5Z_н$ укороченной схемы рис.15.15, *б*

$$Y_{\substack{\text{н. вх}\\ \text{укор}}} = \frac{I_н}{\dot{U}_{вх}/2} =$$

$$= \frac{1}{0{,}5Z_н + Z_3 + Z_1 + \dfrac{Z_1 Z_3}{yZ_2} + \dfrac{0{,}5Z_н}{x}(Z_1 + Z_3) + \dfrac{0{,}5Z_н Z_1}{yZ_2} + \dfrac{0{,}5Z_н Z_3 Z_1}{x\,yZ_2}}.$$

Взаимная проводимость между нагрузочной и входной ветвями исходной схемы рис. 15.15, *а*

$$Y_{\substack{\text{н. вх}\\ \text{исх}}} = \frac{I_н}{2\dfrac{\dot{U}_{вх}}{2}} = \frac{1}{2} Y_{\substack{\text{н. вх}\\ \text{укор}}}.$$

Глава шестнадцатая

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ

§ 16.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТЬ

Положим, что в некотором многократно повторенном опыте, проводившемся при одном и том же комплексе условий, представляющая интерес величина ξ может принимать различные значения, находящиеся теоретически в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Частота осуществления событий с различными значениями ξ в общем случае различна. Пусть проведено всего n опытов. В этих опытах m_1 раз наблюдалось значение x_1, m_2 раз значение x_2 и т. д. Тогда частота появления значения x_1 равна m_1/n, частота появления x_2 равна m_2/n и т. д.

Частоту появления того или иного значения ξ, имеющую место при достаточно большом значении n (при большом числе опытов) называют *вероятностью* и обозначают p.

Таким образом, каждому событию (значению ξ) может быть сопоставлена некоторая вероятность p появления этого события. В теории вероятности как разделе математики изучают правила исчисления вероятностей, на основании которых можно предсказывать вероятность наступления тех или иных событий, если известен комплекс условий, характеризующих эти события.

§ 16.2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В теории вероятностей обычно исходят из функции распределения вероятностей $F(x)$ (ее называют также интегральной функцией распределения).

Функция распределения $F(x)$ представляет собой вероятность наступления события ξ, при котором значения величины, характеризующей это событие, находится в интервале от $-\infty$ до некоторого фиксированного значения x.

Так, $F(x_1)$ есть вероятность наступления события ξ, находящегося в интервале значений x от $-\infty$ до x_1; $F(x_2)$ — вероятность наступления события, находящегося в интервале от $-\infty$ до x_2, и т. д.

Следовательно, вероятность задается так, что для всех вероятностей левый предел диапазона один и тот же ($-\infty$), а правый различен. Такой способ задания выгоден тем, что вероятность оказывается зависящей только от одного фиксированного значения величины, а не от двух, что было бы, если в качестве левой границы была взята не $-\infty$.

Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

а) при x, стремящемся к $-\infty$, она равна нулю;

б) при x, стремящемся к $+\infty$, равна 1;

в) представляет собой неубывающую функцию.

Эти свойства функции распределения можно иллюстрировать с помощью следующего рассуждения.

Положим, что в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ в дискретных точках вдоль оси x с различной плотностью распределена некоторая масса, в целом равная 1.

Плотность распределения массы вдоль оси можно сопоставить с вероятностью p наступления некоторого события. Поскольку слева от точки $x=-\infty$ масса будет сколь угодно мала, то

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0.$$

Если продвигаться вдоль оси x от $-\infty$ до некоторого фиксированного значения x, то количество массы, находящейся на отрезке $-\infty$, x, будет возрастать.

Поскольку количество массы на отрезке $-\infty$, x есть аналог $F(x)$, то можно сказать, что с увеличением x будет возрастать $F(x)$, т. е. $F(x)$ — неубывающая функция.

При x, стремящемся к $+\infty$, вся масса, по условию равная 1, будет находиться слева от фиксированного значения $x\to\infty$; следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=1.$$

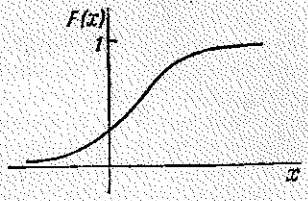


Рис. 16.1

Последнее означает, что вероятность наступления события, характеризующегося значениями x, находящимися в интервале от $-\infty$ до $+\infty$, равна 1.

Функция распределения вероятностей $F(x)$ может быть либо ступенчатой, либо непрерывной. В дальнейшем, за исключением § 16.5, будем иметь дело с непрерывными дифференцируемыми по x функциями $F(x)$.

На рис. 16.1 дан примерный вид функции $F(x)$ при непрерывном распределении. Эта зависимость может быть получена опытным путем и в дальнейшем будем полагать ее известной.

§ 16.3. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятность того, что x окажется на интервале $x, x+\Delta x$, равна $F(x+\Delta x)-F(x)$. Разлагая $F(x+\Delta x)$ в ряд Тейлора по степеням Δx и пренебрегая в силу малости Δx членами разложения со степенями Δx выше первой, получим

$$F(x+\Delta x)-F(x)=F(x)+\Delta x F'(x)-F(x)=F'(x)\,\Delta x.$$

Таким образом, вероятность того, что x окажется на отрезке $x, x+dx\,(\Delta x\to dx)$, равна $F'(x)\,dx$.

Величину $F'(x)$ обозначают либо как $W(x)$, либо как $\Phi(x)$, либо как $P(x)$ и называют *плотностью вероятности*. Кривая зависимости $W(x)=dF(x)/dx$ от x может быть получена из кривой $F(x)$ и представляет собой график первой производной функции $F(x)$ по x. Примерный вид кривой $W(x)$, соответствующей кривой рис. 16.1, дан на рис. 16.2.

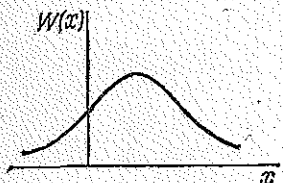


Рис. 16.2

Вероятность нахождения x в интервале от x_1 до x_2

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} W(x)\,dx.$$

Так как вероятность нахождения x в интервале от $-\infty$ до $+\infty$ равна 1, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,dx=1. \qquad (16.1)$$

Условие (16.1) нередко называют условием нормировки. Характер зависимости $W(x)=f(x)$ для различных случайных процессов различен. В практических задачах наиболее часто приходится встречаться со следующими видами распределения плотности вероятности: 1) нормальное распределение или распределение Гаусса; 2) биномиальное распределение (распределение Бернулли) и распределение Пуассона; 3) распределение Максвелла; 4) распределение Коши; 5) равномерное распределение *.

§ 16.4. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА

Нормальным распределением называют распределение плотности вероятности, подчиняющееся следующему закону:

$$W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (16.2)$$

где σ и a — некоторые параметры (коэффициенты).

* В радиотехнических задачах применяют также другие виды распределений, для ознакомления с ними рекомендуем [89].

Множитель $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ в (16.2) свидетельствует о том, что должно быть выполнено условие нормировки (16.1). Вид кривой $W(x)$ как функции x зависит от численного значения параметров σ и a.

На рис. 16.3 показаны две кривые при $a=0$. Для одной из них $\sigma=1$, для другой $\sigma=0{,}5$. Чем меньше σ, тем острее форма кривой.

На рис. 16.4 изображены три кривые при одном и том же σ, но различных a. Параметр a указывает, при каком значении имеет место наибольшая плотность вероятности. Параметр σ в формуле (16.2) имеет смысл среднеквадратичного отклонения (дисперсии) случайной величины от ее среднего значения (определение дисперсии см. в § 16.8).

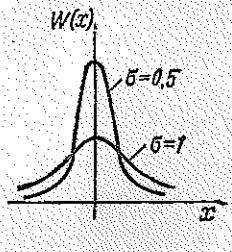


Рис. 16.3

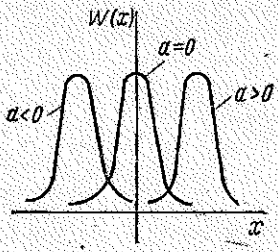


Рис. 16.4

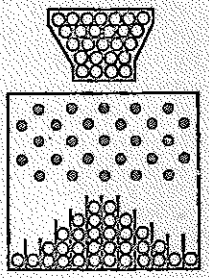


Рис. 16.5

Если σ мало, то разброс значений x мал, и значения x, сильно отличающиеся от a, маловероятны.

Если же σ велико, то разброс значений x велик, и вероятность получить значение x, сильно отличающееся от a, больше.

Рассмотрим простейший опыт, в результате проведения которого можно получить кривую плотности вероятности по Гауссу.

Из воронки высыпаются на слегка наклоненную доску (доску Гальтона) шарики одинакового диаметра (рис. 16.5). На доске в шахматном порядке вбиты гвоздики без шляпок. Расстояние в свету между каждыми двумя смежными гвоздиками немного больше диаметра шарика.

Шарики, скатываясь, укладываются в отделения внизу доски. Огибающая кучки шариков при достаточно большом их числе будет представлять собой кривую нормального распределения.

Вероятность получить в опыте значение $x=x_1$ при нормальном распределении

$$F(x_1)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx. \qquad (16.3)$$

Полагая $\sigma=1$, $a=0$ и обозначив переменную интегрирования z,

x_1 через x и $F(x_1)$ через $\Phi(x)$, из формулы (16.3) получим интеграл вероятностей

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz. \qquad (16.4)$$

§ 16.5. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ). РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

В теории связи, а также в теории стрельбы часто имеют дело с дискретным распределением вероятностей, получившим название биномиального распределения или распределения Бернулли. Рассмотрим одну из задач, подходящих под такое распределение.

Положим, что совокупность одинаковых условий повторяется в n опытах. Вероятность осуществления события в одном опыте, например вероятность попадания в мишень при стрельбе, равна p. Требуется найти вероятность того, что в n опытах (т. е. при стрельбе n раз) попадание произойдет k раз.

Если вероятность неосуществления события (непопадания) в одном опыте обозначить через q и учесть, что $p+q=1$, то $q=1-p$. Искомая вероятность равна

$$C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (16.5)$$

Здесь C_n^k — число сочетаний из n по k. Этот множитель появился в (16.5) потому, что попадание может быть в различные клетки мишени, поэтому следует взять все возможные сочетания попаданий.

Распределение вероятностей, которое дается формулой (16.5), называют биномиальным распределением или распределением Бернулли. Если числа n и k достаточно велики, например исчисляются десятками тысяч, то подсчет по формуле (16.5) оказывается затруднительным. В этом случае вместо (16.5) расчет ведут по приближенной формуле, которая выражает собой распределение Пуассона:

$$\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} \qquad (16.6)$$

$$(\alpha=pn;\ n\geqslant k;\ p\ll 1).$$

Результат подсчета по формуле (16.6) тем ближе к результату подсчета по формуле (16.5), чем больше n и чем меньше p. Величина k может быть любым целым неотрицательным числом.

§ 16.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Под распределением Максвелла понимают распределение плотности вероятности, описываемое формулой

$$W(x)=\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-h^2x^2}\ (x\geqslant 0). \qquad (16.7)$$

Под x в ней понимают, например, скорость отдельных частиц газа; h — некоторая постоянная, зависящая от физической природы частиц. Зависимость по формуле (16.7) качественно иллюстрируется рис. 16.6, *а*.

Формула (16.7) описывает, например, плотность вероятности скоростей отдельных молекул газа или каких-либо иных частиц в произвольно выбранный момент времени.

Распределение плотности вероятности по Коши описывается формулой

$$W(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-b)^2}, \qquad (16.7')$$

где λ и b — некоторые параметры.

График $W(x)$ (рис. 16.6, *б*) симметричен относительно вертикали, мысленно проведенной через точку $x=b$.

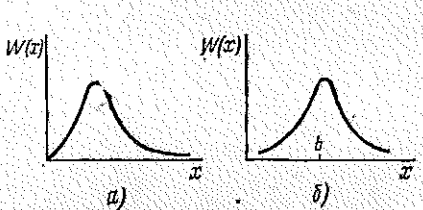


Рис. 16.6

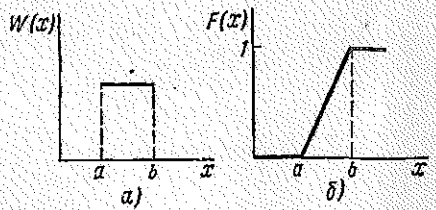


Рис. 16.7

Функция $F(x)$ при распределении по Коши

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} W(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-b}{\lambda}+\frac{1}{2}.$$

Равномерное распределение [при нем в некоторых границах $W(x)=\text{const}$] показано на рис. 16.7, *а*. В пределах от $x=a$ до $x=b$

$$W(x)=1/(b-a).$$

Вне этого интервала $W(x)=0$. График функции распределения при равномерном распределении изображен на рис. 16.7, *б*:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -\infty<x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{b-a}(x-a) & \text{при } a<x<b,\\ 1 & \text{при } b\leqslant x\leqslant\infty. \end{cases}$$

§ 16.7. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Положим, что было проведено n опытов. В этих опытах α_1 раз было получено значение x_1, α_2 раз значение x_2 и α_k раз значение x_k:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\ldots+\alpha_k=n.$$

Требуется найти среднее значение x в этих опытах. Условимся среднее значение случайной величины обозначать через $\bar{x}$ (в литературе иногда его обозначают $\tilde{x}$), тогда

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k}{n} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{n} x_1 + \frac{\alpha_2}{n} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_p}{n} x_p + \ldots + \frac{\alpha_k}{n} x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{n} x_i.$$

При достаточно большом числе опытов отношение α_i/n выражает собой частоту появлений значений x_i и может быть заменено на вероятность $W(x)\,dx$, соответствующую x_i (см. § 16.3). Поэтому

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i W(x_i)\,dx,$$

или при $n \to \infty$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)\,dx. \qquad (16.8)$$

При нормальном распределении $\bar{x} = a$; при распределении по Пуассону $\bar{x} = \alpha$; при равномерном распределении $\bar{x} = (a+b)/2$; при распределении Коши среднее значение не существует — интеграл в (16.8) расходится; при распределении Максвелла $\bar{x} = 2/(h\sqrt{\pi})$.

Некоторые правила, используемые при вычислении средних значений:

а) среднее значение постоянной есть сама постоянная:

$$\bar{A} = A;$$

б) среднее значение суммы двух случайных величин равно сумме средних значений этих величин:

$$\overline{(x+y)} = \bar{x} + \bar{y};$$

в) среднее значение произведения двух независимых случайных величин равно произведению средних значений этих величин:

$$\overline{(xy)} = \bar{x}\bar{y};$$

г) постоянный множитель можно выносить за знак среднего значения

$$\overline{(Ax)} = A\bar{x}.$$

§ 16.8. ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Отклонение случайной величины x от ее среднего значения $\bar{x}$ равно $(x - \bar{x})$. Среднее значение отклонения

$$\overline{(x - \bar{x})} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Найдем теперь среднее значение квадрата отклонения случайной величины x от ее среднего значения $\bar{x}$:

$$\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{(x^2-2x\bar{x}+\bar{x}^2)}.$$

Учтем, что среднее значение суммы равно сумме средних значений и что $2\overline{\bar{x}x}=2\bar{x}^2$. В соответствии с этим

$$\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{x^2}-2\bar{x}^2+\bar{x}^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2.$$

Среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения называют дисперсией и обозначают

$$D=\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2. \qquad (16.9)$$

Чем меньше дисперсия, тем меньше рассеяны случайные величины около среднего значения.

При нормальном распределении $D=\sigma$. При распределении по Пуассону $D=\alpha$. При равномерном распределении

$$D=(b-a)^2/12.$$

Некоторые свойства дисперсии.

1. Постоянную C можно выносить за знак дисперсии, т. е.

$$D(C\xi)=C^2D(\xi).$$

2. Если случайные величины ξ и ν независимы и они умножаются на некоторые постоянные числа A и B, то

$$D(A\xi+B\nu)=A^2D(\xi)+B^2D(\nu).$$

При $A=B=1$

$$D(\xi\pm\nu)=D(\xi)\pm D(\nu).$$

§ 16.9. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА И ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Для любого закона распределения вероятность отклонения случайной величины ξ от ее среднего значения $\bar{\xi}$ на величину, не меньшую некоторого положительного числа η, может быть оценена с помощью следующего неравенства, доказанного Чебышевым:

$$P(|\xi-\bar{\xi}|\geqslant\eta)\leqslant\frac{D(\xi)}{\eta^2}. \qquad (16.10)$$

Если $\eta\gg D(\xi)$, то $D(\xi)/\eta^2\ll 1$.

Это означает, что мала вероятность отклонения, значительно превышающего дисперсию. Чебышев сформулировал также закон больших чисел.

Сущность закона больших чисел состоит в следующем: если в опыте производилось достаточно большое число измерений некоторой величины, то среднее значение этой величины, полученное из опыта и подсчитанное как среднее арифметическое, будет почти достоверно совпадать с теоретическим средним значением этой величины.

§ 16.10. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В литературе, посвященной теории вероятности и ее приложениям, можно встретить термины: момент случайной величины первого и второго порядков, а также центральный момент первого, второго и более высоких порядков.

Момент первого порядка случайной величины x называют

$$m_x = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x)\,dx. \qquad (16.11)$$

Сопоставляя формулу (16.11) с формулой (16.8), замечаем, что момент первого порядка есть среднее по множеству случайной величины или ее математическое ожидание.

Момент второго порядка

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 W(x)\,dx.$$

Разность $x - m_x$ называют центрированной случайной величиной (функцией). От разности $x - m_x$ образуют центральные моменты первого, второго, третьего и более высоких порядков. Так, центральный момент первого порядка

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)\,W(x)\,dx = 0.$$

Центральный момент второго порядка представляет собой среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее среднего по множеству значения и равен дисперсии D:

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2\,W(x)\,dx = D.$$

Центральный момент третьего порядка

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^3\,W(x)\,dx.$$

В одних книгах пользуются терминами среднее значение и дисперсия, в других эквивалентными им терминами — момент первого порядка и центральный момент второго порядка.

§ 16.11. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСКОЛЬКИХ СОБЫТИЙ

Принято вероятность наступления некоторого события, например события A, обозначать $P(A)$. Для любого события $P(A)$ представляет собой положительное число не больше 1.

Будем интересоваться в дальнейшем событиями A и B.

События A и B называют *несовместимыми*, если они не могут осуществляться одновременно. Вероятность осуществления *двух*

несовместимых событий A или B [записывают в виде $P(A$ или $B)$] равна сумме вероятностей осуществления этих событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B). \qquad (16.12)$$

Если событие B представляет собой частный случай события A, вероятность осуществления события B меньше вероятности осуществления события A.

Два или большее число событий называют *независимыми*, когда между ними нет никакой причинной связи, даже через какое-нибудь третье событие.

Вероятности осуществления событий могут быть безусловные (или абсолютные) и условные.

Безусловные вероятности представляют собой вероятности, определенные для случая, когда никаких дополнительных условий, кроме первоначальных, на проведение опыта не накладывается.

Вероятность осуществления события при наложении некоторого дополнительного условия на проведение опыта называют *условной вероятностью*. Например, если в урне имеются 5 белых, 6 красных и 9 черных шаров, то безусловная (абсолютная) вероятность вытянуть черный шар равна 9/20. Наложим теперь на проведение опыта дополнительное условие вытянуть непременно цветной шар. Для осуществления этого сделаем все белые шары более легкими, например деревянными, а все цветные более тяжелыми (металлическими). Тогда можно быть уверенным, что по весу будет вытащен именно цветной шар. Условная вероятность вытаскивания черного шара при условии, что будет вытащен непременно цветной шар $P_{\text{ц}}(\text{ч}) = 9/15$.

Поскольку в этом опыте белые шары заведомо не будут вытаскивать, то вероятность вытянуть белый шар $P_{\text{ц}}(б) = 0$.

Вероятностью осуществления событий A и B [записывают в виде $P(A$ и $B)$ или в виде $P(AB)$] называют событие, при котором осуществились события A и B.

Вероятность осуществления двух зависимых событий A и B равна вероятности осуществления события B, умноженной на условную вероятность осуществления событий A при условии B:

$$P(A \text{ и } B) = P(B)\,P_B(A). \qquad (16.13)$$

Формулу (16.13) выводят следующим образом.

Положим, что возможное число событий равно c. Из них b событий благоприятствуют осуществлению события B. Пусть событию A благоприятствуют не все b события, а только a из них. Для определения вероятности осуществления события A и B сначала следует найти вероятность осуществления события B (она равна b/c), а затем учесть, что не все события B благоприятствуют событию A, а только часть из них, равная a/b. Поэтому

$$P(A \text{ и } B) = \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = P(B)\,P_B(A).$$

Если события A и B независимы, то

$$P(A \text{ и } B) = P(A)\,P(B), \qquad (16.14)$$

так как в этом случае

$$P_B(A) = P(A).$$

Рассмотрим теперь постановку задачи, с помощью которой можно пояснить формулу, получившую название *формулы полной вероятности*.

Положим, что имеется несколько урн, например, четыре урны. В каждой урне имеются белые и красные шары. Пусть в первой урне (назовем ее A_1) имеется 5 белых и 8 красных, во второй урне (A_2) — 4 белых и 9 красных, в третьей (A_3) — 7 и 6, в четвертой (A_4) — 2 и 3.

Опыт проводят следующим образом: произвольно выбирают урну и из нее наудачу вытаскивают один шар. Спрашивается, какова вероятность вытащить красный шар в этом опыте, если вероятность выбрать первую урну равна 1/8, вторую 1/4, третью 3/8 и четвертую 2/8.

Назовем событие, состоящее в том, что выбирают первую урну A_1, вторую — A_2, третью — A_3 и четвертую — A_4. Обозначим событие, состоящее в вытаскивании красного шара B. Тогда вероятность того, что красный шар будет вытянут из первой урны, равна $P(A_1 \text{ и } B)$. Вероятность вытаскивания красного шара из второй урны $P(A_2 \text{ и } B)$ и т. д.

Если шар вытаскивают только из первой урны, то он не может быть вытащен из остальных, поэтому события являются несовместимыми.

В соответствии с формулой (16.12) вероятность осуществления несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий, поэтому

$$P(B) = P(A_1 \text{ и } B) + P(A_2 \text{ и } B) + P(A_3 \text{ и } B) + P(A_4 \text{ и } B).$$

Используя формулу (8.13), найдем

$$P(B) = P(A_1)\,P_{A_1}(B) + P(A_2)\,P_{A_2}(B) + \\ + P(A_3)\,P_{A_3}(B) + P(A_4)\,P_{A_4}(B). \qquad (16.15)$$

Формулу (16.15) называют формулой полной вероятности. В рассматриваемом примере вероятность вынуть красный шар

$$P(B) = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{13} + \frac{2}{8}\cdot\frac{9}{13} + \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{13} + \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5} = 0{,}448.$$

Рассмотрим задачу, обратную предыдущей. Положим, что событие вытянуть красный шар осуществилось. Спрашивается, какова вероятность того, что шар вытянут из первой урны. Так как вероятность вытянуть красный шар из первой урны равна $P(A_1)\,P_{A_1}(B)$, а полная вероятность есть $P(B)$, то искомая

вероятность

$$P_B(A_1) = P(A_1) P_{A_1}(B)/P(B), \qquad (16.16)$$

где $P(B)$ определяется по формуле (16.15).

В рассматриваемом примере

$$P_B(A_1) = 0{,}077/0{,}448 = 0{,}171.$$

До сих пор имели дело с одной случайной величиной ξ, которая могла принимать значения x, находящиеся в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. Причем значение случайной величины можно было представить в виде точек на оси x плоскости x, y.

Но может идти речь не об одной, а о двух и большем числе случайных величин. Если имеем дело с двумя случайными величинами ξ и η, то их совокупность можно представить в виде точек на плоскости x, y. Для этого условимся, например, значения ξ откладывать по оси x, а значения η по оси y.

Теперь вероятность будет двумерной. Обозначим ее $W(x, y)$. Плотность вероятности для x

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y)\, dy. \qquad (16.17)$$

Плотность вероятности для y

$$W(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y)\, dx. \qquad (16.18)$$

Вероятность того, что $-\infty < x < \infty$ и $-\infty < y < \infty$, равна 1. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y)\, dx\, dy = 1. \qquad (16.19)$$

§ 16.12. ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ

Положим, что имеется несколько однотипных систем, находящихся в одинаковых условиях. В этих системах происходят некоторые случайные процессы, являющиеся функциями времени. В силу тех или иных причин процессы в различных системах могут несколько отличаться друг от друга. Так, в один и тот же момент времени t_1 величина, характеризующая процесс в какой-то одной системе, имеет значение x', а в другой системе x'', в общем случае отличающееся от x', в третьей x''' и т. д.

Наблюдением можно установить, какое из значений x (x', x'', ...) в момент времени t_1 является наиболее вероятным. Подобно тому как в § 16.3 было введено понятие плотности вероятности случайного события $W(x)$ и о вероятности нахождения x в интервале от x до $x + dx$ можно было судить по величине $W(x)\, dx$, вводится понятие о плотности вероятности случайного процесса $W_1(x, t)$.

В этом случае плотность вероятности является функцией времени. Величина $W_1(x, t)$ представляет собой вероятность того, что в момент времени t значение величины x находится в интервале от x до $x+dx$.

Но такого рода характеристика случайного процесса не является единственно возможной. Кроме нее используется также понятие плотности вероятности совпадения двух событий $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$.

Вероятность того, что в момент t_1 x находится в интервале от x_1 до x_1+dx, а в момент t_2 — в интервале от x_2 до x_2+dx_2, равна $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$.

Может быть введено понятие плотности вероятности совпадения и большего чем два числа событий.

Если известна плотность вероятности совпадения двух событий (W_2), то через нее может быть найдена плотность вероятности W_1, т. е. плотность вероятности меньшего числа событий, и условная вероятность осуществления x_2, t_2 при условии осуществления x_1, t_1, которую назовем $P_{x_1, t_1}(x_2, t_2)$.

Так, если известна $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, то через нее можно найти $W_1(x_1, t_1)$.

В соответствии с формулой (16.13) $P(A \text{ и } B) = P(B) P_B(A)$. Поэтому $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2 = W_1(x_1, t_1)\, dx_1\, P_{x_1, t_1}(x_2, t_2)\, dx_2$.

Отсюда вероятность осуществления события x_2, t_2 при условии, что событие x_1, t_1 осуществилось:

$$P_{x_1, t_1}(x_2, t_2) = \frac{W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{W_1(x_1, t_1)}. \qquad (16.20)$$

Так как плотность вероятности для одной случайной величины может быть выражена в соответствии с формулой (16.17), то

$$W_1(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_2. \qquad (16.21)$$

Подставляя (16.21) в (16.20), получим

$$P_{x_1, t_1}(x_2, t_2) = \frac{W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_2}. \qquad (16.22)$$

§ 16.13. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Случайные процессы могут быть классифицированы по нескольким признакам.

1. По плотности вероятности совпадения одного, двух, трех и большего числа процессов.

В соответствии с этим признаком случайные процессы могут быть подразделены на процессы, для которых известна только $W_1(x_1, t_1)$, на процессы с известной плотностью вероятности совпадения двух событий $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, на процессы с извест-

ной плотностью вероятности совпадения трех событий $W_3(x_1\ t_1;\ x_2,\ t_2,\ x_3,\ t_3)$ и т. д.

2. По зависимости от предыстории.

Случайные процессы могут быть разделены на процессы, не зависящие от предыстории и зависящие от нее. Когда говорится о независимости процесса от предыстории, то имеется в виду, что вероятность нахождения системы в некотором состоянии зависит лишь от того состояния, в котором система находилась, например, в момент времени, бесконечно близкий к рассматриваемому, и не зависит от тех состояний, в которых система находилась в более ранние моменты времени. (Теоретически возможны еще чисто случайные процессы, когда значение величины в некоторый момент времени не зависит от значения этой величины даже и в бесконечно близкий момент времени, но такие процессы являются только идеализацией.)

Процессы, не зависящие от предыстории, называют марковскими (по имени ученого А. А. Маркова, впервые открывшего и исследовавшего эти типы процессов). Для марковских процессов условная вероятность наблюдения некоторого события x_3, t_3 не должна измениться от дополнительного знания тех значений x_2, t_2 и x_1, t_1, которые наблюдались в предшествующие моменты времени.

Для марковского процесса условная вероятность

$$P_{x_1, t_1}(x_2,\ t_2) = P_{x_2, t_2}(x_3,\ t_3).$$

Поэтому

$$\frac{W_2(x_2,\ t_2;\ x_3,\ t_3)}{W_1(x_2,\ t_2)} = \frac{W_3(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ x_3,\ t_3)}{W_2(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)}.$$

Под $W_3(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;\ x_3,\ t_3)$ понимают плотность вероятности совпадения трех событий. Отсюда

$$W_3(x_1,\ t_1,\ x_2,\ t_2;\ x_3,\ t_3) = \frac{W_2(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)\, W_2(x_2,\ t_2;\ x_3,\ t_3)}{W_1(x_2,\ t_2)}, \qquad (16.23)$$

т. е. для марковских процессов плотность вероятности совпадения трех событий W_3 и другие более старшие плотности вероятности могут быть найдены через плотность вероятности совпадения двух событий W_2.

3. По степени стационарности случайные процессы подразделяют на стационарные и нестационарные. Стационарными случайными процессами называют процессы, для которых все функции распределения не зависят от изменения начала счета времени (т. е. не зависят от времени). Для нестационарных случайных процессов функции распределения зависят от времени.

Для пояснения разделения случайных процессов на стационарные и нестационарные обратимся к рис. 16.8.

На рис. 16.8, *а*, *б* изображены кривые $x(t)$ некоторого стационарного случайного процесса. Для кривых на этих двух рисунках характерно, что вероятность возникновения колебания

с некоторой амплитудой остается той же, если сдвинуть начало счета времени. Совсем иная картина имеет место, например, для кривых рис. 16.8, *в*, *г*. На этих рисунках изображены кривые $x(t)$ для некоторых нестационарных случайных процессов. На рис. 16.8, *в* значение x с некоторого момента неограниченно возрастает во времени, а на рис. 16.8, *г* стремится к нулю. Для этих кривых сдвиг начала счета времени изменяет вероятностные зависимости.

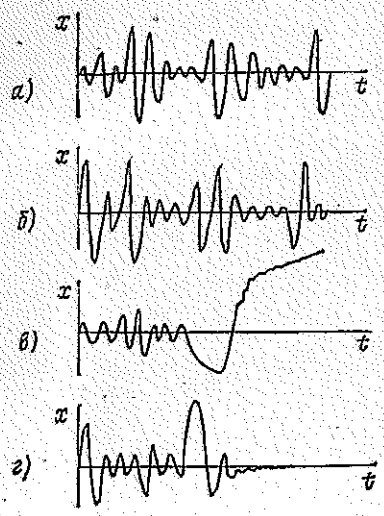


Рис. 16.8

Можно провести аналогию между стационарными и нестационарными процессами, с одной стороны, и установившимися и переходными процессами — с другой.

Стационарный случайный процесс может быть сопоставлен с установившимся, а нестационарный случайный процесс — с переходным.

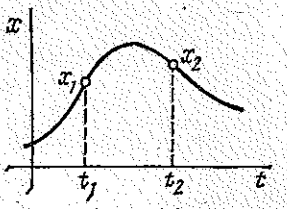


Рис. 16.9

Для плотности вероятности $W_1(x, t)$ при стационарном случайном процессе в силу самого его определения должно выполняться условие

$$W_1(x_1, t_1) = W_1(x_1, t_1 + \tau). \qquad (16.24)$$

Отсюда следует, что W_1 не зависит от времени, т. е.

$$W_1(x_1, t_1) = W_1(x_1). \qquad (16.25)$$

При этом среднее значение $\bar{x}$, определенное по формуле

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x_1, t_1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x)\,dx,$$

не зависит от времени.

Для плотности вероятности совпадения двух событий $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ при стационарных случайных процессах должно выполняться условие

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_2(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau). \qquad (16.26)$$

Отсюда следует, что

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_2(x_1, x_2, \tau), \qquad (16.27)$$

т. е. плотность вероятности совпадения двух событий при стационарном случайном процессе одинакова для одних и тех же x_1 и x_2, если разность $t_2 - t_1 = \tau$ постоянна (рис. 16.9).

Аналогично для плотности вероятности совпадения трех событий

$$W_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = \\ = W_3(x_1, t_1+\tau; x_2, t_2+\tau; x_3, t_3+\tau). \quad (16.28)$$

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело со стационарными случайными процессами. Действия над ними производят путем введения усредненных по времени функций, которые называют корреляционными (см. § 16.15—16.18).

В заключение заметим, что классификация по п. 2 не противопоставляется классификации по п. 3, т. е. стационарный случайный процесс может не зависеть от предыстории (быть марковским), но может и зависеть от нее (быть не марковским).

§ 16.14. СРЕДНЕЕ ПО МНОЖЕСТВУ И СРЕДНЕЕ ПО ВРЕМЕНИ

В § 16.7 приводилась формула (16.8) для определения среднего значения случайной величины

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x)\,dx.$$

Эта формула может быть применена и к случайным процессам. Но так как плотность вероятности при этом является не только функцией x, но и функцией времени t, то для случайных процессов

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x, t)\,dx. \quad (16.29)$$

Формула (16.29) дает возможность найти среднее значение для однотипных систем в *фиксированный* момент времени t; $\bar{x}$ называют средним по множеству или средним по ансамблю. Средним по времени называют величину

$$\langle x \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt. \quad (16.30)$$

Иногда среднее по времени обозначают также через $\overline{x}$ (жирная черта над x). Среднее по времени не зависит от времени t, но зависит от того, для какой случайной величины оно определено.

§ 16.15. ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА

Эргодическая теорема формулируется следующим образом: для стационарных случайных процессов среднее по множеству равно среднему по времени, т. е.

$$\bar{x} = \langle x \rangle. \quad (16.31)$$

Доказательство этой теоремы здесь не приводится. Доказательство ее, справедливое для многих типов случайных процессов, можно найти, например, в [80].

В том случае, когда соотношение (16.31) распространяют на такие случайные процессы, для которых справедливость применения его не доказана, говорят об *эргодической гипотезе*. Эргодическая теорема (гипотеза) имеет существенное практическое значение. Она служит теоретическим основанием для того, чтобы, обрабатывая всего одну из временны́х зависимостей $x(t)$, полученную экспериментально, судить о статистических свойствах всех зависимостей $x(t)$ при стационарных случайных процессах в изучаемой системе.

§ 16.16. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Под автокорреляционной функцией $R(\tau)$ функции времени $x(t)$ понимают величину, определяемую следующим образом:

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt. \qquad (16.32)$$

$R(\tau)$ является мерой взаимной связи функции $x(t)$ и функции $x(t+\tau)$, смещенной по отношению к $x(t)$ на время τ.

Хотя в формуле (16.32) время T взято равным ∞, но практически его берут конечным. Так, например, его берут всего раз в 5 — 10 большим периода низкочастотной составляющей, которая может входить в состав $x(t)$.

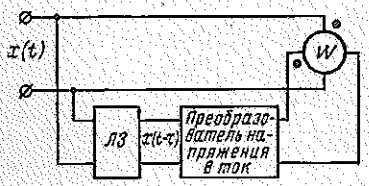


Рис. 16.10

Чтобы физический смысл функции $R(\tau)$ стал более понятным, проведем следующий опыт (рис. 16.10).

Положим, что функция $x(t)$ представляет собой некоторое напряжение, доставляемое источником э. д. с. Подведем это напряжение к обмотке напряжения ваттметра. Токовую обмотку ваттметра присоединим к этому же напряжению через линию задержки [18] и преобразователь напряжения в ток.

Линия задержки вызывает задержку на τ секунд, не изменяя формы напряжения. Поэтому на выходе ее $x(t-\tau)$.

Вращающий момент подвижной системы ваттметра пропорционален произведению $x(t)\, x(t-\tau)$. Ваттметр усредняет это произведение во времени и потому его показание пропорционально величине $R(\tau)$. При этом предполагается, что период усреднения ваттметра значительно больше времени задержки τ.

В большинстве случаев автокорреляционные функции подсчитывают для непериодических процессов, но свойства автокорре-

ляционной функции удобнее всего проиллюстрировать, обратившись к периодическим функциям.

В качестве примера найдем $R(\tau)$ для синусоиды $x(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Так как в данном случае $x(t)$ — функция периодическая, то при интегрировании по формуле (16.32) можно взять T равным не бесконечности, а всего одному периоду:

$$R(\tau) = \frac{1}{\omega \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-\pi}^{\pi} E_m^2 \sin(\omega t + \psi) \sin(\omega t + \omega\tau + \psi)\, d\omega t = \frac{E_m^2}{2} \cos\omega\tau.$$

§ 16.17. СВОЙСТВА АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

1. $R(\tau)$ является функцией четной, т. е. $R(-\tau) = R(\tau)$. Это свойство можно доказать, введя в (16.32) новую переменную $z = t + \tau$ и учтя, что пределы интегрирования останутся прежними. Тогда в правой части (16.32) будет $R(-\tau)$.

2. Если $x(t)$ — функция периодическая, то $R(\tau)$ для нее может быть представлена в виде суммы автокорреляционных функций от постоянной составляющей и от синусоидально изменяющихся составляющих.

3. Так как автокорреляционная функция для каждой из гармоник, содержащихся в $x(t)$, не зависит от начальной фазы этой гармоники, то $R(\tau)$ не дает информации о начальных фазах гармоник функции $x(t)$.

Отсюда следует, что если имеется несколько различных периодических функций с одинаковыми постоянной составляющей и амплитудными значениями гармоник, то автокорреляционные функции у них будут одинаковы.

4. Заданной $x(t)$ соответствует вполне определенная $R(\tau)$, но одной и той же $R(\tau)$ может соответствовать несколько различных $x(t)$. Функции $x(t)$, имеющие одинаковые $R(\tau)$, называют эквивалентными функциями времени.

5. Для $x(t)$ без постоянной и синусоидальных составляющих функция $R(\tau)$ максимальна по модулю при $\tau = 0$, при этом она равна $R(0)$. Объясняется это тем, что функция умножается сама на себя без сдвига во времени.

6. Для случайных (без постоянной и гармонических составляющих функций времени) $R(\tau)$ уменьшается с увеличением τ и уже при сравнительно небольших τ становится достаточно малой. Физически это объясняется тем, что для случайных процессов при значительных τ значение функции $x(t+\tau)$ не зависит от значения функции, которое она имела в момент времени t. В силу этого имеется одинаковая вероятность получить произведение $x(t)\,x(t+\tau)$ положительным и отрицательным. Интервал времени от $\tau = 0$ до $\tau = \tau_0$, при котором $R(\tau)$ становится равной нулю, называют *интервалом автокорреляции*.

§ 16.18. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(\tau)$ двух функций времени $x(t)$ и $y(t)$ называют функцию, определенную следующим образом:

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2T}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T}x(t)\,y(t+\tau)\,dt. \qquad (16.33)$$

На рис. 16.11 изображены функции $x(t)$ и $y(t)$, с помощью которых свойства $R_{xy}(\tau)$ можно пояснить наиболее наглядно. В интервале времени от $t=0$ до $t=t_1$ функция $x(t)=0$, а $y(t)\neq 0$. В следующем интервале времени при $t>t_1$ функция $x(t)\neq 0$, а $y(t)=0$.

Свойства взаимной корреляционной функции следующие.

1. Значение функции $R_{xy}(\tau)$ зависит от того, производится ли сдвиг функции $y(t)$ на время $+\tau$ или на время $-\tau$, т. е. в общем случае $R_{xy}(-\tau)\neq R_{xy}(+\tau)$.

Действительно, если всю кривую $y(t)$ на рис. 16.11, *б* сдвинуть на τ влево, то произведение ординат кривой $x(t)$ на соответствующие ординаты кривой $y(t+\tau)$ будет равно нулю и для изображенных на рис. 16.11 функций $R_{xy}(\tau)=0$.

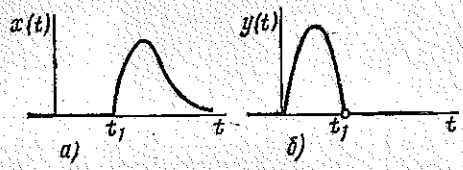


Рис. 16.11

Если же кривую $y(t)$ на рис. 16.11, *б* сдвинуть на то же время вправо, т. е. взять функцию $y(t-\tau)$, то произведение ординат кривых $x(t)$ и $y(t-\tau)$ в некотором интервале времени не будет равно нулю, не будет равна нулю и $R_{xy}(-\tau)$.

2. Взаимная корреляционная функция остается неизменной при перемене чередования индексов и изменении знака аргумента, т. е.

$$R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau).$$

Другими словами,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x(t)\,y(t+\tau)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}y(t)\,x(t-\tau)\,dt.$$

Следовательно, сдвиг функции $y(t)$ влево на τ дает тот же результат, что и сдвиг функции $x(t)$ вправо на $-\tau$.

3. Максимальное значение функции $R_{xy}(\tau)$ может быть и не при $\tau=0$.

4. Если случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ не содержат постоянных составляющих и создаются независимыми источниками, то для них $R_{xy}(\tau)=0$. Такие функции называют *некоррелированными*.

§ 16.19. ПОЛУЧЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ПРОЦЕССА, $x(t)$ КОТОРОГО ИЗВЕСТНА

Положим, что известна функция $x(t)$ (рис. 16.12, *а*), для которой надо найти автокорреляционную функцию $R_x(\tau)$. Для определения $R_x(\tau)$ следует:

1) на рис. 16.12, *а* нанести по оси времени деления через равные интервалы времени Δt;

2) для получения кривой $x(t+\tau)$ при некотором выбранном $\tau = k\Delta t$ сдвинуть * функцию $x(t)$ влево на это время (рис. 16.12, *б*); k — может принимать целочисленные значения 1, 2, 3, ...; сдвиг на целочисленное значение $k\Delta t$ дает возможность использовать ранее полученные значения ординат кривой $x(t)$;

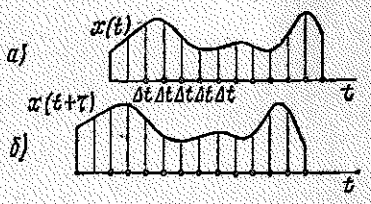


Рис. 16.12

3) перемножить соответствующие ординаты кривых $x(t)$ и $x(t+\tau)$, подсчитать сумму произведений $\sum x(t)\,x(t+k\Delta t)\,\Delta t$ и разделить ее на $2T$. Величину T берут примерно в 10 раз большей самой низкочастотной составляющей, имеющейся в $x(t)$.

Аналогично опытным путем определяют и взаимную корреляционную функцию.

§ 16.20. ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ. ФОРМУЛЫ ВИНЕРА—ХИНЧИНА

Прямое преобразование Фурье функции времени $f(t)$ записывают следующим образом:

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \qquad (16.34)$$

Интеграл (16.34) будет сходиться, если $f(t) = 0$ при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

Преобразование Фурье может быть распространено и на случайные функции времени **.

---

* Вместо того чтобы сдвигать одну кривую относительно другой, достаточно перемножать ординаты кривых, отстоящие на $\tau = k\Delta t$.

** Случайные функции времени $x(t)$ в общем случае могут не стремиться к нулю при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ и потому к ним, строго говоря, нельзя применить преобразование Фурье. Чтобы обойти это затруднение, поступают следующим образом: полагают, что вместо функции $x(t)$ действует функция $x_1(t)$, в общем случае не равная нулю в интервале от $t = -T$ до $t = +T$ и равная нулю вне этого интервала. К функции $x_1(t)$ можно применить преобразование Фурье. Если положить теперь $T \to \infty$, то $x_1(t)$ будет стремиться к $x(t)$, а Фурье-изображение $S_{x1}(\omega)$ функции $x_1(t)$ к Фурье-изображению $S_x(\omega)$ функции $x(t)$.

Фурье-изображение автокорреляционной функции $R_x(\tau)$:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau, \qquad (16.35)$$

но

$$R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} = R_x(\tau)(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau).$$

Если учесть четность функций $R_x(\tau)$ и $\cos\omega\tau$ и нечетность $\sin\omega\tau$, то

$$S_x(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (16.35')$$

$S_x(\omega)$ называют спектральной плотностью (интенсивностью) автокорреляционной функции. Поскольку для случайных процессов, не содержащих постоянной и периодических составляющих, функция $R_x(\tau)$ быстро стремится к нулю при увеличении τ, верхний предел у интеграла, равный ∞, может быть заменен на интервал автокорреляции τ_0. $S_x(\omega)$ обладает следующими свойствами:

1) она действительна и положительна при всех частотах;

2) является функцией четной;

3) так же, как и $R_x(\tau)$, она не содержит информации о фазе, поэтому одной и той же $S_x(\omega)$ может соответствовать несколько различных в смысле начальной фазы функций времени.

Подобно тому как по Фурье-изображению определяют функцию времени

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

по Фурье-изображению $S_x(\omega)$ можно найти автокорреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega. \qquad (16.36)$$

Используя свойство четности, имеем

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos\tau\omega\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (16.36')$$

Формулы (16.35) и (16.36) и соответственно формулы (16.35′) и (16.36′) были предложены А. Я. Хинчиным и Н. Винером. В литературе их называют *формулами Винера — Хинчина*.

Положим в формуле (16.36) $\tau = 0$, получим

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega, \qquad (16.37)$$

т. е. значение автокорреляционной функции при $\tau = 0$ можно просто определить через $S_x(\omega)$.

§ 16.21. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ И ЕЕ СВЯЗЬ С КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

В соответствии с теоремой Рейли между квадратом функции времени $f(t)$ и квадратом модуля ее Фурье-изображения существует следующая связь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |A(j\omega)|^2\,d\omega. \qquad (16.38)$$

Если принять, что $f(t)$ есть напряжение, приложенное к активному сопротивлению в 1 Ом, то левая часть в (16.38) есть энергия, выделяющаяся в этом сопротивлении.

Таким образом, площадь квадрата модуля спектральной плотности функции времени является мерой энергии, рассеиваемой в активном сопротивлении $R=1$ Ом, на которое воздействует $f(t)$.

Положим, что функция времени $f(t)=x(t)$ равна сумме двух функций времени $x_1(t)+x_2(t)$, причем $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют свои Фурье-изображения $A_1(j\omega)$ и $A_2(j\omega)$.

В силу линейности преобразования Фурье и в соответствии с формулой (16.38) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)+x_2(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A_1(j\omega)+A_2(j\omega)]^2\,d\omega.$$

Перепишем последнюю строку следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)]^2 dt + 2\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,x_2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)]^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |A_1(j\omega)|^2\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A_1(j\omega)\,\overset{*}{A}_2(j\omega) + \overset{*}{A}_1(j\omega)\,A_2(j\omega)]\,d\omega +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |A_2(j\omega)|^2\,d\omega. \qquad (16.39)$$

При записи правой части учтено, что квадрат модуля суммы двух комплексов равен сумме квадратов модулей этих комплексов плюс произведение первого комплекса на сопряженный комплекс второго и плюс произведение второго на сопряженный комплекс первого.

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |A_1(j\omega)|^2\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |A_2(j\omega)|^2\,d\omega,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, x_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} [A_1(j\omega)\, \overset{*}{A}_2(j\omega) + \overset{*}{A}_1(j\omega)\, A_2(j\omega)]\, d\omega. \quad (16.40)$$

Если учесть, что

$$\overset{*}{A}_2(j\omega) = A_2(-j\omega) \text{ и } \overset{*}{A}_1(j\omega) = A_1(-j\omega),$$

то интеграл в правой части (16.40) равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} [A_1(j\omega)\, A_2(-j\omega) + A_1(-j\omega) A_2(j\omega)] d\omega.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} A_1(-j\omega)\, A_2(j\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} A_1(j\omega)\, A_2(-j\omega)\, d\omega.$$

В этом можно убедиться, введя новую переменную $y = -\omega$, $d\omega = -dy$ и затем возвратясь к прежней переменной. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, x_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(j\omega)\, A_2(-j\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(j\omega)\, \overset{*}{A}_2(j\omega)]\, d\omega. \quad (16.41)$$

Чтобы от формулы (16.41) перейти к соотношению между автокорреляционной функцией и квадратом модуля спектра функции $x_1(t)$, т. е. к $|A_1(j\omega)|^2$, положим, что $x_2(t) = x_1(t+\tau)$. Тогда, если Фурье-изображение $x_1(t)$ равно $A_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt$, то Фурье-изображение $x_2(t)$ будет $A_1(j\omega) e^{j\omega\tau}$. Это следует из того, что

$$x_2(t) = x_1(t+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(j\omega)\, e^{j\omega(t+\tau)}\, d\omega.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, x_1(t+\tau)\, dt = R_x(\tau), \quad \overset{*}{A}_2(j\omega) = \overset{*}{A}_1(j\omega)\, e^{-j\omega\tau}$$

и поэтому

$$A_1(j\omega)\, \overset{*}{A}_2(j\omega) = |A_1(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau};$$

отбрасывая у $A_1(j\omega)$ индекс 1, получаем

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \qquad (16.42)$$

Заменив $e^{-j\omega\tau}$ на $\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$ и учитывая четность $|A(j\omega)|^2$ и $\cos\omega\tau$ и нечетность $\sin\omega\tau$, имеем

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |A(j\omega)|^2 \cos\omega\tau\, d\omega. \qquad (16.43)$$

Формула (16.43) дает возможность определить корреляционную функцию $R_x(\tau)$ через квадрат модуля Фурье-изображения функции времени $x(t)$. Если в ней принять $\tau = 0$, то

$$R_x(0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (16.44)$$

Формула (16.44) описывает связь корреляционной функции с энергией. Действительно, из (16.38) следует, что $\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega$ представляет собой энергию в полосе частот от 0 до ∞, а $\frac{1}{\pi}|A(j\omega)|^2$ есть энергия в полосе частот $d\omega$.

§ 16.22. БЕЛЫЙ ШУМ И ЕГО СВОЙСТВА

Представим себе прямоугольный импульс весьма малой, в пределе бесконечно малой длительности Δt (рис. 16.13, *а*). Качественно построим для него автокорреляционную функцию $R_x(\tau)$ (рис. 16.13, *б*). Нетрудно убедиться в том, что $R_x(\tau)$ не равна нулю только при $|\tau| < \left|\pm\frac{\Delta t}{2}\right|$. Вне этого интервала $R_x(\tau) = 0$.

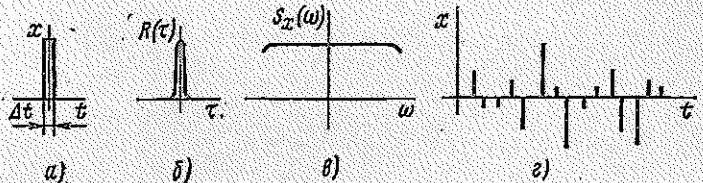


Рис. 16.13

Из предыдущего (§ 16.16, 16.17) ясно, что если $R_x(\tau)$ не равна нулю только при очень малых τ, то процесс, которому соответствует эта функция, является случайным.

Положим, теперь, что $R_x(\tau) = e^{-\delta|\tau|}$, где δ очень велико, т. е. положим, что автокорреляционная функция очень быстро спадает

в функции τ по закону экспоненты. Найдем $S_x(\omega)$ для этого случая.

По определению

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = 2\,\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty} R_x(\tau)^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta\tau} e^{-j\omega\tau}\, d\tau = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\delta - j\omega}{\delta^2+\omega^2}\right] = \frac{2\delta}{\delta^2+\omega^2}.$$

На рис. 16.13, *в* качественно построим график $S_x(\omega)$, полагая, что δ очень велико. Если δ очень велико, то влияние ω^2 на величину знаменателя $S_x(\omega)$ будет сказываться только при очень больших ω, соизмеримых с δ. Другими словами, спектральная плотность энергии $S_x(\omega)$ кратковременного «игольчатого» импульса постоянна в очень широком диапазоне частот. На основании изложенного можно сказать, что чем уже импульс, чем он короче во времени, тем шире его частотный спектр.

Белый шум представляет собой совокупность множества беспорядочно и без всякой связи следующих друг за другом игольчатых импульсов, амплитуды которых имеют случайный характер и подчиняются закону нормального распределения (рис. 16.13, *г*). Так как спектральная плотность каждого импульса постоянна в достаточно широком диапазоне частот, то и для белого шума $S_x(\omega) = \mathrm{const}$.

§ 16.23. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ ЧЕРЕЗ СПЕКТРАЛЬНУЮ ПЛОТНОСТЬ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И ЧЕРЕЗ КВАДРАТ МОДУЛЯ ФУРЬЕ-ИЗОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ

По определению среднее во времени значение квадрата некоторой функции времени $x(t)$ в интервале $2T$

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\, dt.$$

В свою очередь из самого определения автокорреляционной функции (16.32) следует, что при $\tau = 0$

$$R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\, dt,$$

поэтому $R_x(0) = \langle x^2 \rangle$.

Но в соответствии с формулой (16.37) автокорреляционная функция $R_x(0)$ может быть выражена через спектральную плотность $S_x(\omega)$, а в соответствии с формулой (16.44) — через квадрат

модуля $|A(j\omega)|^2$ Фурье-изображения функции $x(t)$. Поэтому

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |A(j\omega)|^2\,d\omega. \qquad (16.45)$$

После определения среднего значения квадрата $\langle x^2\rangle$ находим среднеквадратичное значение величины x:

$$\sqrt{\langle x^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty |A(j\omega)|^2\,d\omega}. \qquad (16.46)$$

§ 16.24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЫХОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЧЕРЕЗ СПЕКТРАЛЬНУЮ ПЛОТНОСТЬ ВХОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И КВАДРАТ МОДУЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

На вход некоторого четырехполюсника (рис. 16.14) воздействует $x_{вх}(t)$ и вызывает на выходе $x_{вых}(t)$. Четырехполюсник характеризуется либо импульсной переходной функцией $h'(t)$, которую в дальнейшем, чтобы не писать символ производной (штриха), обозначим $\gamma(t)$, либо коэффициентом передачи на частоте ω

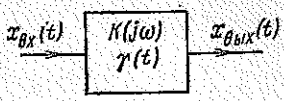


Рис. 16.14

$$K(j\omega) = \frac{X_{вых}(j\omega)}{X_{вх}(j\omega)};$$

$K(j\omega)$ и $\gamma(t)$ связаны преобразованием Фурье [см. формулы (3.4) и (3.5)]:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t)\,e^{-j\omega t}\,dt; \qquad (16.47)$$

$$\gamma(t) = h'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad (16.48)$$

Требуется найти спектральную плотность выходной величины.

Последовательность решения такова:

1. Выразим Фурье-изображение выходной величины $X_{вых}(j\omega)$ через Фурье-изображение входной величины $X_{вх}(j\omega)$ и коэффициент передачи $K(j\omega)$:

$$X_{вых}(j\omega) = X_{вх}(j\omega)\,K(j\omega). \qquad (16.49)$$

2. Запишем с помощью интеграла Дюамеля выражение для мгновенного значения выходной величины:

$$x_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{вх}(t-\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau. \qquad (16.50)$$

Формула (16.50) справедлива при условии, что значение переходной функции $h(t) = 0$ при $t = 0$.

3. Воспользуемся общим выражением для автокорреляционной функции

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

и вместо $x(t)$ возьмем в нем $x_{вых}(t)$. Получим

$$R_{x_{вых}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{вых}(t)\, x_{вых}(t+\tau)\, dt. \qquad (16.51)$$

4. В правую часть (16.51) вместо $x_{вых}(t)$ подставим правую часть (16.50), заменив в ней переменную интегрирования τ на q, а вместо $x_{вых}(t+\tau)$ подставим выражение, полученное из (16.50), заменив переменную интегрирования на p:

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_{вх}(t-q)\, \gamma(q)\, dq \times \right.$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} x_{вх}(t+\tau-p)\, \gamma(p)\, dp \right] dt. \qquad (16.52)$$

5. В (16.52) изменим порядок интегрирования

$$R_{x_{вых}}(\tau) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(q) \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_{вх}(t-q)\, x_{вх}(t+\tau-p)\, dt \right] \gamma(p)\, dp. \qquad (16.53)$$

Выражение, стоящее в (16.53) в квадратных скобках, представляет собой автокорреляционную функцию от аргумента

$$(t+\tau-p)-(t-q) = \tau+q-p, \text{ т. е. } R_{x_{вх}}(\tau+q-p),$$

поэтому

$$R_{x_{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(q) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(p)\, R_{x_{вх}}(\tau+q-p) \right] dp. \qquad (16.54)$$

6. По $R_{x_{вх}}(\tau)$ найдем его спектральную плотность, воспользовавшись формулой (16.35):

$$S_{x_{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_{вых}}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

или

$$S_{x_{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(\tau+q-p)} \times$$
$$\times e^{-j\omega p} R_{x_{вх}}(\tau+q-p)\, \gamma(q)\, \gamma(p)\, dp. \qquad (16.55)$$

7. Заменим $\tau+q-p$ на некоторое τ'. Произведем сначала интегрирование по τ', затем по p и после этого по q. При интегрировании по τ' учтем, что p и q постоянны. В результате, перейдя снова к τ, правую часть (16.55) можно представить в виде произведения трех интегралов:

$$S_{x_{\text{вых}}}(\tau)=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(q)\,e^{j\omega q}\,dq\right\}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(p)\,e^{-j\omega p}\,dp\right\}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{x_{\text{вх}}}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right\}.$$

В соответствии с формулой (16.47)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(q)\,e^{j\omega q}\,dq=K(j\omega);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(p)\,e^{-j\omega p}\,dp=K(-j\omega)=\overset{*}{K}(j\omega).$$

По формуле (16.35)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R_{x_{\text{вх}}}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau=S_{x_{\text{вх}}}(\omega),$$

поэтому

$$S_{x_{\text{вых}}}(\omega)=|K(j\omega)|^2\,S_{x_{\text{вх}}}(\omega). \qquad (16.56)$$

Таким образом, спектральная плотность автокорреляционной функции выходной величины $S_{x_{\text{вых}}}(\omega)$ может быть определена путем умножения квадрата модуля передаточной функции четырехполюсника на спектральную плотность автокорреляционной функции входной величины $S_{x_{\text{вх}}}(\omega)$.

§ 16.25. ПОДХОД К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ, ОСНОВАННЫЙ НА МИНИМУМЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ

Параметры замкнутых систем, например систем автоматического регулирования, систем связи при стационарных случайных процессах, иногда рассчитывают, исходя из минимума среднеквадратичной ошибки, используя формулы, подобные формулам (16.56) и (16.36).

Начало применению критерия минимума среднеквадратичной ошибки к расчету систем при случайных воздействиях было положено работами Н. Винера, В. А. Котельникова, Г. Боде, К. Шеннона, А. А. Фельдбаума и др.

Пусть система, находясь в разомкнутом состоянии (рис. 16.15, *а*), характеризуется комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega)$. В замкнутом состоянии (рис. 16.15, *б*) та же система характеризуется коэффициентом передачи

$$K_{\text{з}}(j\omega)=\frac{K(j\omega)}{1+K(j\omega)}.$$

Здесь и далее индекс «з» означает, что величина относится к замкнутой системе.

Рассмотрим две наиболее типичные задачи.

Первая задача. На вход системы взаимодействует поступающая извне некоторая случайная величина x_1, являющаяся функцией времени, и величина, поступающая с выхода системы x_2, характеризующая фактическое положение системы в данный момент времени (рис. 16.15, *б*). В этой задаче будем полагать, что помеха отсутствует. Погрешность δ_x будет представлять собой разность между воздействующей величиной $x_1(t)$ и фактическим положением системы $x_2(t)$, т. е.

$$\delta_x = x_1(t) - x_2(t).$$

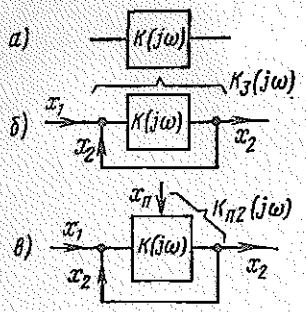


Рис. 16.15

Вторая задача. На вход системы поступает $x_1(t)$ и на некоторое звено ее воздействует помеха $x_п(t)$ (рис. 16.15, *в*) так, что комплексный коэффициент передачи от этого звена к выходу равен $K_{п2}$. В этой задаче x_2 зависит не только от воздействия x_1, но и от воздействия $x_п$.

В обеих задачах требуется рассмотреть подход к расчету системы исходя из минимума среднеквадратичной ошибки. Задачи будем решать одновременно.

Будем полагать известными корреляционную функцию поступающей входной величины x_1, т. е. $R_{x_1}(\tau)$, и соответствующую ей спектральную плотность $S_{x_1}(\omega)$, а также корреляционную функцию помехи $R_п(\tau)$, ее спектральную плотность $S_п(\omega)$ и спектральную плотность взаимных корреляционных функций сигнала и помехи $S_{x_1, п}(\omega)$ и помехи и сигнала $S_{п, x_1}(\omega)$.

Запишем операторное изображение выходной величины $X_2(p)$ сначала при отсутствии помехи $x_п$, а затем при наличии ее.

При отсутствии помехи

$$\frac{X_2(p)}{X_1(p) - X_2(p)} = K(p),$$

или

$$X_2(p) = X_1(p)\frac{K(p)}{1+K(p)} = X_1(p)K_э(p).$$

Операторное изображение погрешности

$$\delta(p) = X_1(p) - X_1(p)K_э(p) = X_1(p)[1 - K_э(p)] = X_1(p)K_p(p), \quad (16.57)$$

где

$$K_p(p) = 1 - K_э(p). \quad (16.58)$$

При наличии помехи

$$X_2(p) = [X_1(p) - X_2(p)]K(p) + X_п(p)K_{п2}(p)$$

или

$$X_2(p) = X_1(p)\frac{K(p)}{1+K(p)} + X_{\text{п}}(p)\frac{K_{\text{п}2}(p)}{1+K(p)}.$$

Операторное изображение погрешности

$$\delta(p) = X_1(p)K_p(p) + X_{\text{п}}(p)K_{\text{п}}(p), \qquad (16.59)$$

где

$$K_{\text{п}}(p) = -\frac{K_{\text{п}2}(p)}{1+K(p)}.$$

Полагая, что функции $x_1(t)$ и $x_{\text{п}}(t)$ таковы, что имеют Фурье-изображения, вместо операторных соотношений (16.57) и (16.59′) запишем соотношения для Фурье-изображения погрешности.

В отсутствие помехи

$$\delta(j\omega) = X_1(j\omega)K_p(j\omega). \qquad (16.57')$$

При наличии помехи

$$\delta(j\omega) = X_1(j\omega)K_p(j\omega) + X_{\text{п}}(j\omega)K_{\text{п}}(j\omega), \qquad (16.59')$$

где

$$K_{\text{п}}(j\omega) = -\frac{K_{\text{п}2}(j\omega)}{1+K(j\omega)}.$$

Формула (16.57′) аналогична формуле (16.49), только вместо $X_{\text{вх}}(j\omega)$ в ней участвует $X_1(j\omega)$, а вместо $K(j\omega) - K_p(j\omega)$. Поэтому, применяя формулу (16.56), вытекающую из (16.49), и формулу (16.46), в которой x заменяем на δ, получим следующую формулу для определения среднеквадратичного значения погрешности при отсутствии помехи:

$$\sqrt{\langle\delta^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty |K_p(j\omega)|^2 S_{x_1}(\omega)\,d\omega}. \qquad (16.60)$$

При наличии помехи Фурье-изображение погрешности определяется формулой (16.59′). Проделав для нее выкладки, сходные с теми, которые выполнены в § 16.24, получим следующую формулу для спектральной помехи (ее можно сопоставить с формулой (16.56):

$$S_x(\omega) = |K_p(j\omega)|^2 S_{x_1}(\omega) + |K_{\text{п}}(j\omega)|^2 S_{\text{п}}(\omega) + K_p^*(j\omega)K_{\text{п}}(j\omega)S_{x_1,\,\text{п}}(\omega) + K_p(j\omega)K_{\text{п}}^*(j\omega)S_{\text{п},\,x_1}(\omega), \qquad (16.61)$$

где $S_{x_1,\,\text{п}}$ — Фурье-изображение взаимной корреляционной функции входного сигнала и помехи; $S_{\text{п},\,x_1}(\omega)$ — Фурье-изображение взаимной корреляционной функции помехи и входного сигнала.

Если входной сигнал $x_1(t)$ и помеха $x_{\text{п}}(t)$ являются независимыми случайными величинами, то

$$S_{x_1,\,\text{п}}(\omega) = S_{\text{п},\,x_1}(\omega) = 0$$

и тогда в соответствии с формулой (16.46) среднеквадратичное значение погрешности при наличии помехи

$$\sqrt{\langle \delta^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ |K_p(j\omega)|^2 S_{x_1}(\omega) + |K_п(j\omega)|^2 S_п(\omega) \} d\omega}. \quad (16.62)$$

В результате подсчетов по формулам (16.60) или (16.62) получают выражение, зависящее от параметров самой замкнутой системы. Пользуясь им, подбирают параметры так, чтобы это выражение оказалось минимальным.

Расчет систем при стационарных случайных воздействиях, исходя из минимума среднеквадратичной ошибки, целесообразно производить лишь в тех случаях, когда не ухудшаются или ухудшаются, но в допустимых пределах характеристики систем при других возможных в системе процессах, например при переходных процессах.

§ 16.26. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Рассмотрим задачу об оптимальном линейном фильтре. На вход линейного фильтра поступает сигнал $u_с(t)$ и помеха $u_п(t)$.

Спектральная плотность сигнала равна $A(j\omega)$. Полагают, что помеха представляет собой белый шум, имеющий равномерный, не зависящий от ω частотный спектр в полосе частот от 0 до Δf с удельной плотностью на единицу полосы, равной N_0.

Напряжение на выходе фильтра равно сумме напряжений от сигнала и от помехи

$$u_{вых}(t) = u_{вых.с}(t) + u_{вых.п}(t).$$

Обозначим комплексный коэффициент передачи фильтра через $K(j\omega)$. Фурье-изображение $u_{вых.с}(t)$ равно $K(j\omega)A(j\omega)$, поэтому

$$u_{вых.с}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\omega) A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (16.63)$$

В соответствии с формулой (16.56) спектральная плотность корреляционной функции помехи на выходе фильтра

$$S_{вых.п}(\omega) = |K(j\omega)|^2 N_0. \quad (16.64)$$

Среднеквадратичное значение напряжения помехи на выходе фильтра в соответствии с формулой (16.46)

$$\sqrt{\langle u_п^2 \rangle} = \sqrt{\frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (16.65)$$

Отношение напряжения сигнала на выходе фильтра в некоторый произвольный момент времени t_0, т. е. $u_{вых.с}(t_0)$ к средне-

квадратичному значению помехи на выходе,

$$q=\frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(j\omega)\,A(j\omega)\,e^{j\omega t_0}\,d\omega}{\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}|K(j\omega)|^2\,d\omega}}, \qquad (16.66)$$

Оптимальным называют фильтр, для которого отношение мгновенного значения сигнала в заданный момент времени t_0 к среднеквадратичному значению помехи максимально, т. е. $q=\max$. При заданном частотном спектре сигнала $A(j\omega)$ задача сводится к определению комплексного коэффициента передачи фильтра $K(j\omega)$.

Задачу можно решить различными путями. Далее приводится решение, предложенное Ван-Флеком и Мидльтоном [77] путем использования неравенства Шварца (см. о неравенстве Шварца [87]).

Если обозначить модуль и аргумент $K(j\omega)$ соответственно через $|K(j\omega)|$ и $\varphi_K(\omega)$, а модуль и аргумент $A(j\omega)\,e^{j\omega t_0}$ через $|A(j\omega)|$ и $\varphi_A(\omega)+\omega t_0$, то согласно одной из формулировок неравенства Шварца

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(j\omega)\,A(j\omega)\,d\omega\right|^2\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K(j\omega)|^2\,d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(j\omega)|^2\,d\omega,$$

откуда

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K(j\omega)|\,|A(j\omega)|\,e^{j[\omega t_0+\varphi_K(\omega)+\varphi_A(\omega)]}\,d\omega\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K(j\omega)|^2\,d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(j\omega)|^2\,d\omega.$$

Домножаем и делим на $N_0/2\pi$ и извлекаем корень из обеих частей последней строки:

$$\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K(j\omega)|\,|A(j\omega)|\,e^{j[\omega t_0+\varphi_K(\omega)+\varphi_A(\omega)]}\,d\omega\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K(j\omega)|^2\,d\omega}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{4\pi^2\frac{N_0}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(j\omega)|^2\,d\omega}. \qquad (16.67)$$

Отношение (16.66) достигает максимума, когда неравенство (16.67) становится равенством. Это имеет место при

$$K(j\omega)\,A(j\omega)=|K(j\omega)|^2=|A(j\omega)|^2,$$

т. е. когда

$$|K(j\omega)||A(j\omega)|e^{j[\omega t_0+\varphi_K(\omega)+\varphi_A(\omega)]}=K(j\omega)|^2=|A(j\omega)|^2.$$

Отсюда следует, что

$$K(j\omega)=|K(j\omega)|e^{j\varphi_K(\omega)}=|A(j\omega)|e^{-j\omega t_0}e^{-j\varphi_A(\omega)}=\overset{*}{A}(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Итак, $q=\max$ и не зависит от момента времени t_0, если взять

$$K(j\omega)=\overset{*}{A}(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \qquad (16.68)$$

Другими словами, отношение сигнала к шуму одинаково во все моменты времени и не зависит от t_0 [ибо правая часть формулы (16.67) не зависит от t_0], если взять $K(j\omega)$ в соответствии с (16.68).

Если это значение $K(j\omega)$ подставить в (16.66) и возвести в квадрат, то окажется, что

$$q^2_{\max}=\frac{1}{\pi N_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(j\omega)|^2\,d\omega.$$

Так как по теореме Рейли (§ 3.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(j\omega)|^2\,d\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u^2_{\text{вх. с}}(t)\,dt=Q_c,$$

где Q_c — энергия, выделяемая сигналом на входе фильтра, то

$$q^2_{\max}=2Q_c/N_0. \qquad (16.69)$$

Таким образом, максимальное отношение сигнала к помехе равно квадратному корню из удвоенного значения энергии сигнала $2Q_c$, поделенной на удельную мощность помехи N_0, приходящуюся на единицу полосы частот.

Фильтр с комплексным коэффициентом передачи (16.68) физически осуществим тогда, когда его импульсная переходная функция, которая соответствует $K(j\omega)$,

$$\gamma(t)=u_{\text{вых. с}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overset{*}{A}(j\omega)e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (16.70)$$

и представляет собой напряжение на выходе $u_{\text{вых. с}}(t)$, при $t<0$ равна нулю. Это требование вытекает из того, что напряжение на выходе фильтра не может появиться раньше, чем оно будет приложено на входе. Правую часть формулы (16.70) можно заменить на правую часть формулы

$$\gamma(t)=u_{\text{вых. с}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A(j\omega)e^{j\omega(t_0-t)}\,d\omega. \qquad (16.70')$$

В справедливости перехода от (16.70) к (16.70′) можно убедиться, раскрыв правые части по Эйлеру и учтя нечетность аргумента $K(j\omega)$ от ω.

Так как напряжение сигнала на входе

$$u_{\text{вх. с}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

то

$$u_{\text{вх. с}}(t_0 - t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(j\omega)\, e^{j\omega(t_0 - t)}\, d\omega. \qquad (16.71)$$

Сопоставляя (16.70′) и (16.71), замечаем, что

$$u_{\text{вых. с}}(t) = \gamma(t) = u_{\text{вх. с}}(t_0 - t). \qquad (16.72)$$

Так как $u_{\text{вых. с}}$ при $t < 0$ должно отсутствовать, то $u_{\text{вых. с}}$ при $t_0 - t < 0$ должно быть равно нулю. Отсюда следует, что для оптимального фильтра в момент $t - t_0$ входное напряжение сигнала должно стать равным нулю (т. е. как бы накладывается определенное условие на сам входной сигнал).

В этот момент времени напряжение на выходе $u_{\text{вых. с}}(t)$ достигает своего максимального значения.

Пример 16.1. На входе фильтра в момент $t = 0$ появляется одиночный импульс напряжения с амплитудой 1 В и длительностью $\Delta\tau$ (рис. 16.16, *а*). Найти, каким $K(j\omega)$ должен обладать фильтр, чтобы он являлся оптимальным.

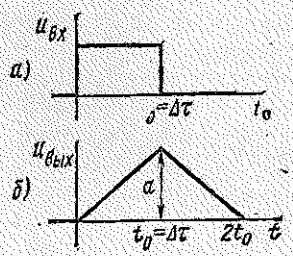


Рис. 16.16

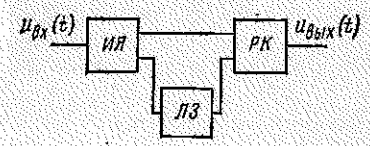


Рис. 16.17

Решение. Спектральная плотность одиночного импульса

$$A(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\Delta\tau}}{j\omega}.$$

Положим $t_0 = \Delta\tau$. Коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \overset{*}{A}(j\omega) e^{-j\omega\Delta\tau} =$$

$$= \frac{1}{-j\omega}(1 - e^{j\omega\Delta\tau}) e^{-j\omega\Delta\tau} = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega\Delta\tau}). \qquad (16.73)$$

В соответствии с выражением (16.73) для $K(j\omega)$ фильтр осуществляется интегрирующей ячейкой [множитель $1/(j\omega)$], линией задержки на время $\Delta\tau$ и разностным каскадом (рис. 16.17).

Напряжение на выходе $u_{вых}(t) = u_{вх}(t_0 - t)$ изображено на рис. 16.16, *б*. Оно имеет треугольную форму. Длительность импульса на выходе равна $2t_0$.

§ 16.27. МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ К БЕЛОМУ ШУМУ

При проектировании радиоприемных устройств и устройств автоматики получил распространение метод определения структуры устройств и параметров входящих в них элементов, который принято называть методом приведения к белому шуму.

Идея метода приведения к белому шуму применительно к радиотехническим устройствам была высказана в докторской диссертации В. А. Котельникова в 1946 г.

Рассмотрим идею метода по работе В. А. Котельникова.

Положим, что на входные зажимы *1—1* системы (рис. 16.18, *а*) поступает сигнал и помеха. Комплексный спектр Фурье-изображения сигнала $A(j\omega)$. Спектральная плотность корреляционной функции помехи $S(\omega)$. Полагаем, что сигнал и помеха некоррелированы. Допустим, что система может быть мысленно представлена в виде каскадного соединения двух блоков. Первый из них пусть имеет коэффициент передачи $K_1(j\omega)$ и второй $K_2(j\omega)$ (рис. 16.18, *б*). Выберем $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$ таким образом, чтобы отношение сигнала к помехе на выходе устройства было максимальным.

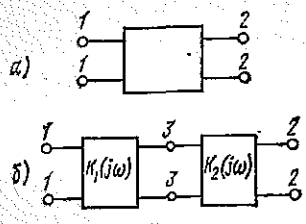


Рис. 16.18

С этой целью возьмем $K_1(j\omega)$ таким, чтобы на выходе первого блока, т. е. на зажимах *3—3*, помеха оказалась преобразованной в белый шум. Так как белый шум имеет не зависящий от частоты частотный спектр, то для образования помехи первым блоком необходимо, чтобы $K_1(j\omega)$ был определен из условия

$$|K_1(j\omega)|^2 S(\omega) = a_1, \qquad (16.74)$$

где a_1 — некоторое постоянное число, выражающее собой спектральную плотность белого шума.

Формула (16.74) записана на основании соотношения (16.56). Отсюда

$$|K_1(j\omega)|^2 = a_1/S(\omega). \qquad (16.75)$$

На вход второго блока поступает сигнал, Фурье-изображение которого равно $A_{33}(j\omega) = A(j\omega) K_1(j\omega)$ и белый шум со спектральной плотностью a_1.

Чтобы на выходе второго блока отношение сигнала к помехе было максимальным, надо коэффициент передачи второго блока взять в соответствии с формулой (16.68), т. е.

$$K_2(j\omega) = a_2 \overset{*}{A}_{33}(j\omega) e^{-j\omega t_0},$$

где a_2 — некоторая постоянная;

$$\overset{*}{A}_{33}(j\omega) = \overset{*}{A}(j\omega)\,\overset{*}{K}_1(j\omega).$$

Множитель $e^{-j\omega t_0}$ учитывает запаздывание на время t_0.

Коэффициент передачи всей системы, состоящей из двух блоков:

$$K(j\omega) = K_1(j\omega)\,K_2(j\omega),$$

или

$$K(j\omega) = K_1(j\omega)\,\overset{*}{K}_1(j\omega)\,a_2\overset{*}{A}(j\omega)\,e^{-j\omega t_0} = \frac{a_1 a_2}{S(\omega)}\,\overset{*}{A}(j\omega)\,e^{-j\omega t_0}. \qquad (16.76)$$

Таким образом, для получения коэффициента передачи системы в целом в соответствии с формулой (16.76) комплексно сопряженное Фурье-изображение сигнала $\overset{*}{A}(j\omega)$ следует разделить на спектральную плотность корреляционной функции помехи $S(\omega)$ и умножить на величину $e^{-j\omega t_0}$, учитывающую допустимое для системы запаздывание на время t_0. Произведение $a_1 a_2$ представляет собой некоторое постоянное число, играющее роль масштабного множителя.

Разделение системы на два каскадно включенных блока нужно было только в качестве наглядного расчетного приема, который позволил вывести формулу (16.76). Практически же нет необходимости осуществлять систему в виде двух блоков с коэффициентами передачи $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$. Нужно лишь, чтобы система в целом имела $K(j\omega)$, определяемый по формуле (16.76).

§ 16.28. ПОНЯТИЕ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРИЕМНИКЕ

Оптимальным называют приемник, который путем анализа принимаемого колебания $u_y(t)$, содержащего полезное сообщение $u_п(t)$ и шум $u_ш(t)$, используя тот или иной критерий оптимальности, дает ответ о том, какое полезное сообщение $x(t)$ содержится в принимаемом колебании.

Известно несколько критериев оптимальности: критерий максимальной обратной вероятности; критерий минимальной полной вероятности ошибки; критерий минимальной среднеквадратичной ошибки; обобщенный критерий Вальда с учетом веса ошибок и др.

Рассмотрим подход к вопросу об оптимальном приемнике по работе Котельникова [85, 81 и др.], используя первый из упомянутых критериев оптимальности.

Положим, что в течение некоторого интервала времени T на вход приемника воздействует $u_y(t)$, состоящее из полезного колебания $u_п(t)$, в котором запечатлен полезный сигнал $x(t)$, и шума $u_ш(t)$:

$$u_y(t) = u_п(t) + u_ш(t). \qquad (16.77)$$

Полагаем известными $u_y(t)$ и $u_п(t)$. Требуется определить $x(t)$. Полезный сигнал $x = x(t)$ и принимаемое на входе колебание $y = y(t)$ являются случайными величинами.

Совместная вероятность двух случайных величин $P(x, y)$ может быть [см. формулу (16.13)] записана двояко:

$$P(x, y) = P(x) P_x(y) = P(y) P_y(x). \quad (16.78)$$

Здесь $P(x)$ — безусловная вероятность осуществления события x; $P_x(y)$ — обратная или условная вероятность осуществления события y при условии, что событие x уже осуществилось.

Аналогично, $P(y)$ — безусловная вероятность осуществления события y, $P_y(x)$ — обратная или условная вероятность осуществления события x при условии, что событие y осуществилось.

Из (16.78) найдем

$$P_y(x) = \frac{P(x) P_x(y)}{P(y)}. \quad (16.79)$$

Так как вероятность осуществления всех возможных значений x при неизменном y равна 1, то

$$\int_{m_x} P_y(x)\, dx = 1,$$

где m_x — область всех возможных значений x.

Принимая во внимание, что вероятность $P(y)$ при неизменном y постоянна, $1/P(y)$ можно заменить на некоторый постоянный множитель k_1. Тогда

$$P_y(x) = k_1 P(x) P_x(y). \quad (16.80)$$

Коэффициент k_1 находим из условия нормировки

$$\int_{m_x} P_y(x)\, dx = 1,$$

отсюда

$$k_1 = \frac{1}{\int_{m_x} P(x) P_x(y)\, dx}. \quad (16.81)$$

Если в качестве оптимального выбран критерий максимальной обратной вероятности $P_y(x)$, то приемник должен давать ответ об x, которому соответствует максимум $P_y(x)$; рис. 16.19 поясняет это.

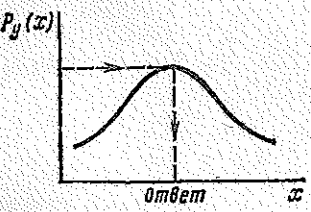


Рис. 16.19

Но для определения $P_y(x)$ по формуле (16.80) надо знать $P(x)$ и $P_x(y)$.

Безусловная вероятность $P(x)$ в каком-то конечном опыте неизвестна и может быть выбрана произвольно. Принято полагать ее постоянной — $P(x) = \text{const}$, т. е. принято считать все значения x равновероятными. Допустимость принятия $P(x) = \text{const}$ подтверждается следующими двумя соображениями: для ряда задач доказано, что расчет, если исходить из $P(x) = \text{const}$, представляет собой расчет на наихудший случай. Если отношение сигнала к помехе велико, то влияние

зависимости $P(x)$ на $P_y(x)$ относительно мало. Итак, полагаем $P(x) = \text{const}$. $P_x(y)$ представляет собой вероятность осуществления y при известном x Но если известно сообщение x, то известно и несущее его полезное колебание $u_п(t)$.

При данном x вероятность осуществления y равна вероятности осуществления шума

$$u_ш(t) = u_y(t) - u_п(t).$$

Если полезный сигнал $u_п(t)$ и шум $u_ш(t)$ статистически независимы (что обычно и бывает), то одномерная плотность вероятности белого шума подчиняется закону нормального распределения:

$$W(u_ш) = \frac{1}{\sqrt{2\pi U_ш^2}} e^{-\frac{u_ш^2}{2U_ш^2}},$$

где $U_ш^2$ — средний квадрат напряжения шума, равный его дисперсии.

По условию колебание известно за период времени T. Если за это время произведено n отсчетов значений белого шума через равностоящие интервалы времени $\Delta t = T/n$ и им соответствует полоса частот Δf, то на основании теоремы Котельникова должно выполняться равенство $n = 2\Delta f T$.

Вероятность наблюдать значения $u_{ш_1}, u_{ш_2}, \ldots, u_{ш_n}$ в моменты времени соответственно $\Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t$ определяется n-мерной плотностью вероятности, равной произведению вероятностей отдельных значений, т. е.

$$W(u_{ш_1}, u_{ш_2}, \ldots, u_{ш_n}) = W(u_{ш_1}) W(u_{ш_2}) \ldots W(u_{ш_n}).$$

Так как все вероятности осуществления различных значений подчиняются закону нормального распределения, то

$$W(u_{ш_1}, u_{ш_2}, \ldots, u_{ш_n}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi U_ш^2})^n} e^{-\frac{1}{2U_ш^2}\sum_{r=1}^{n} u_{ш_r}^2}. \quad (16.82)$$

Воспользуемся понятием удельной мощности шума N_0 как мощности, развиваемой напряжением шума $u_ш(t)$ на сопротивлении 1 Ом и отнесенной к единице полосы частот Δf:

$$N_0 = U_ш^2/\Delta f \text{ или } U_ш^2 = N_0 \Delta f.$$

Это выражение справедливо в полосе частот от 0 до Δf. Вне этой полосы удельная мощность N_0 равна нулю. Вместо $2U_ш^2$ в показателе степени (16.82) подставим

$$2N_0\Delta f = 2N_0 \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N_0}{\Delta t}.$$

Перейдем от Δt к dt, заменим сумму на интеграл и получим

$$\frac{1}{2U_ш^2}\sum_{r=1}^{n} u_{ш_r}^2 = \frac{1}{N_0}\int_0^T u_{ш_r}^2\, dt.$$

Следовательно,

$$W(u_{ш_1}, u_{ш_2}, \ldots, u_{ш_n}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi U_ш^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{N_0}\int_0^T u_ш^2 dt}. \quad (16.82')$$

Вернемся к формуле (16.80). Как уже говорилось, $P_x(y)$ представляет собой вероятность осуществления шума, равного $u_y(t) - u_n(t)$. Поэтому в соответствии с формулами (16.80) и (16.82′) имеем

$$P_y(x) = k_1 \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi U_ш^2}\right)^n} P(x) e^{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [u_y(t) - u_n(t)]^2 dt}. \quad (16.83)$$

Возводя разность $u_y(t) - u_n(t)$ в квадрат и вводя дополнительные обозначения, получим

$$P_y(x) = k_2 P(x) e^{-\frac{B_x}{N_0}} e^{r_x}, \quad (16.84)$$

где

$$k_2 = \frac{k_1}{\left(\sqrt{2\pi U_ш^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{N_0}\int_0^T u_y^2(t)\,dt};$$

$$B_x = \int_0^T u_п^2(t)\,dt;$$

$$r_x = \frac{2}{N_0}\int_0^T u_y(t)\,u_п(t)\,dt;$$

k_2 учитывает автокорреляцию входного сигнала при времени корреляции $\tau = 0$; B_x — автокорреляцию полезного сигнала при $\tau = 0$; r_x — взаимную корреляцию между принимаемым колебанием $u_y(t)$ и полезным сигналом $u_п(t)$ при $\tau = 0$.

Логарифмируя (16.84), находим

$$\ln P_y(x) = \ln k_2 + \ln P(x) - \frac{B_x}{N_0} + r_x, \quad (16.85)$$

где $\ln k_2$ можно принять равным нулю, так как он определяет собой лишь уровень отсчета значений $\ln P_y(x)$. Учитывая это, имеем

$$\ln P_y(x) = \ln P(x) - \frac{B_x}{N_0} + r_x. \quad (16.85')$$

Формула (16.85′) применима для дискретных сообщений, для отдельных значений непрерывных сообщений и в более общем случае, когда $x = x(t)$.

В качестве примера рассмотрим применение формулы (16.85′) при бинарном обнаружении, когда в составе $u_y(t)$ сигнал может либо быть, либо не быть.

Будем различать два случая: 1) когда есть полезный сигнал и при этом на вход приемника действует сигнал и шум и 2) когда сигнал отсутствует и при этом на вход воздействует только шум.

В первом случае

$$\ln P_y(x)_{\mathrm{I}} = \ln P(x) - \frac{B_x}{N_0} + r_x;$$

во втором

$$\ln P_y(0)_{\mathrm{II}} = \ln P(0).$$

Приемник должен дать положительный ответ о наличии полезного сигнала при сравнении $\ln P_y(x)_{\mathrm{I}}$ и $\ln P_y(0)_{\mathrm{II}}$. Если $\ln P_y(x)_{\mathrm{I}} - \ln P_y(0) > 0$, приемник должен дать ответ о наличии сигнала.

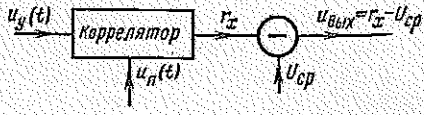


Рис. 16.20

Структура оптимального приемника при бинарном обнаружении изображена на рис. 16.20. Приемник состоит из коррелятора и сравнивающего (порогового) устройства. На один вход коррелятора поступает $u_y(t)$, на второй $u_п(t)$. Коррелятор выдает r_x, которое затем сравнивается с величиной

$$U_{ср} = \frac{B_x}{N_0} - \ln P(x) + \ln P(0).$$

Положительный ответ на выходе приемника появляется, если $r_x > U_{ср}$.

§ 16.29. ПОНЯТИЕ О ЗАДАЧЕ ПРЕДСКАЗЫВАНИЯ

Положим, что на вход некоторого устройства (четырехполюсника, фильтра) воздействует сигнал $u_c(t)$ и помеха $u_п(t)$, являющиеся типичными эргодическими функциями *, причем зависимости от времени $u_c(t)$ и $u_п(t)$ неизвестны, а известны лишь Фурье-изображения их автокорреляционных функций, т. е. $S_c(\omega)$ и $S_п(\omega)$, их называют также сглаженными спектрами мощности.

Задачей о предсказании называют задачу о четырехполюснике, выходная величина которого в статистическом смысле предвосхищает на некоторое относительно небольшое время α тот полезный сигнал, который появится на входе четырехполюсника.

С задачей предсказывания тесно связана задача о сглаживании. Сглаживанием называют выделение сигнала из совокупности сигнала и помехи (шума), т. е. сглаживание есть приближенное подавление шумов.

Одновременно с задачей предсказывания решается и задача о сглаживании. Четырехполюсник, решающий задачу предсказывания и сглаживания, схематически может быть представлен в соответствии с рис. 16.21. На вход его поступает сигнал и помеха

* Для которых справедлива эргодическая теорема.

$u_c(t)+u_п(t)$, а на выходе его получают предсказанный на время α сигнал $u_c(t+\alpha)$, где $\alpha>0$ и по величине относительно невелико. Чем больше α, тем меньше точность предсказывания.

Важно подчеркнуть, что предсказывание осуществляют по статистическим характеристикам сигнала и помехи [по $S_c(\omega)$ и $S_п(\omega)$], не зная самих функций $u_c(t)$ и $u_п(t)$.

Понятие о задаче предсказывания можно пояснить рис. 16.22. На рис. 16.22, *а* изображен полезный сигнал $u_c(t)$, на рис. 16.22, *б* — помеха $u_п(t)$. На рис. 16.22, *в* входной сигнал $u_{вх}=u_c(t)+u_п(t)$.

Графики выходной величины для трех различных случаев даны на рис. 16.22, *г*, *д*, *е*. Сглаживание без предсказывания иллюстрирует рис. 16.22, *г*, в этом случае $\alpha=\alpha_1$ отрицательно; рис. 16.22, *д*, *е* поясняют сглаживание и предсказывание; для рис. 16.22, *д* $\alpha=\alpha_2$ положительно и относительно невелико; для рис. 16.22, *е* α также положительно, но больше α_2.

Сопоставляя рис. 16.22, *д* с рис. 16.22, *а*, видим, что выходная величина предсказывает свойства входного полезного сигнала, т.е. описывает его свойства еще до того, как он появился. Предсказывание основано на предположении, что вероятностные закономерности, имевшие место в прошлом, будут справедливы и для ближайшего будущего. Задача о статистическом предсказывании стационарных временных рядов может быть в некотором смысле сопоставлена с задачей о предсказывании значений функции $f(x)$, которые она будет иметь при аргументе $x+\Delta x$ по ее значению при аргументе x, что можно осуществить, например, путем разложения функции в ряд Тейлора.



Рис. 16.21

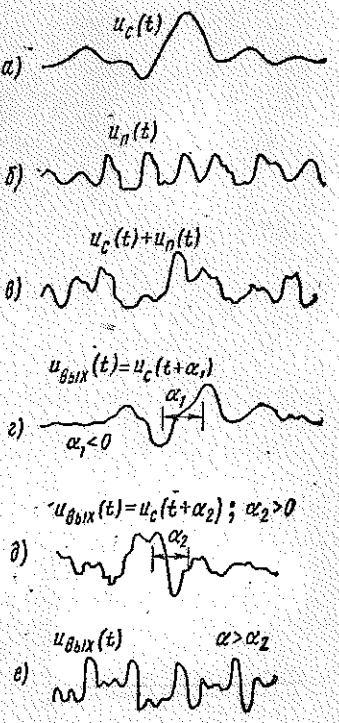


Рис. 16.22

Задача о предсказывании и сглаживании была поставлена и решена в работах А. Колмогорова [75], Н. Винера, Х. Боде и К. Шеннона и развита в работах С. Голдмана [77], Р. Филипса [76], Д. Тракселя [18] и др.

Задача о предсказывании и сглаживании решается при трех основных допущениях:

1) сигнал и шум являются стационарными временными последовательностями, т. е. такими случайными функциями времени, среднее распределение вероятностей которых не зависит от времени;

2) за основу взята предпосылка о минимуме среднеквадратичной ошибки между выходным сигналом и входным полезным сигналом, сдвинутым во времени в сторону опережения на α;

3) система предполагается линейной.

§ 16.30. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПРЕДСКАЗЫВАНИЯ И СГЛАЖИВАНИЯ

На вход четырехполюсника рис. 16.23 с передаточной функцией $K(j\omega)$, которую нужно определить, поступает $u_{вх}(t) = u_c(t) + u_п(t)$. Сигнал $u_c(t)$ и помеха $u_п(t)$ некоррелированы.

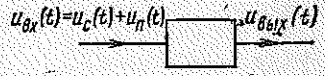


Рис. 16.23

Известны сглаженные спектры мощности (Фурье-изображения автокорреляционных функций) сигнала $S_c(\omega)$ и помехи $S_п(\omega)$. Будем исходить из минимума среднеквадратичной ошибки $\delta(t)$, равной разности между входным полезным сигналом, сдвинутым во время на α, т. е. $u_c(t+\alpha)$ и выходным сигналом $u_{вых}(t)$:

$$\delta(t) = u_c(t+\alpha) - u_{вых}(t). \qquad (16.86)$$

Полагаем, что в интервале времени от $-T$ до $+T$, где T достаточно велико, $\delta(t)$ не равно нулю и равно нулю вне этого интервала. При этом

$$\langle[\delta(t)]^2\rangle = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t)]^2\,dt. \qquad (16.87)$$

В соответствии с теоремой Рейли (16.38) и соотношением (16.45)

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t)]^2\,dt = \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|A_\delta(j\omega)|^2\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}S_\delta(\omega)\,df, \qquad (16.88)$$

где $A_\delta(j\omega)$ — Фурье-изображение $\delta(t)$; $S_\delta(\omega)$ — сглаженный спектр мощности или Фурье-изображение автокорреляционной функции для $\delta(t)$.

Составим выражение для $S_\delta(\omega)$. С этой целью предварительно найдем Фурье-изображения слагаемых правой части формулы (16.86) через Фурье-изображение сигнала $U_c(j\omega)$ и помехи $U_п(j\omega)$ и передаточную функцию четырехполюсника $K(j\omega)$:

$$U_{вых}(j\omega) = K(j\omega)\,[U_c(j\omega) + U_п(j\omega)].$$

Фурье-изображение $u_c(t+\alpha)$ равно изображению $u_c(t)$, сдвинутому на время α, т. е. равно $U_c(j\omega)\,e^{j\omega\alpha}$.

Таким образом,

$$A_\delta(j\omega) = U_c(j\omega)\left[e^{j\omega\alpha} - K(j\omega)\right] - K(j\omega)U_п(j\omega). \qquad (16.89)$$

Сглаженный спектр мощности $S_\delta(\omega)$ найдем, применяя формулу, аналогичную формуле (16.56), и используя формулу (16.89):

$$S_\delta(\omega) = |e^{j\omega\alpha} - K(j\omega)|^2 S_c(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_п(\omega), \qquad (16.90)$$

где $|e^{j\omega\alpha} - K(j\omega)|^2$ — квадрат модуля разности $e^{j\omega\alpha} - K(j\omega)$; $S_c(\omega)$ и $S_п(\omega)$ — сглаженные спектры мощности полезного сигнала и помехи соответственно.

Подставляя (16.90) в (16.88) и учитывая (16.87), получаем

$$\langle[\delta(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{|e^{j\omega\alpha} - K(j\omega)|^2 S_c(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_п(\omega)\}\, df. \qquad (16.91)$$

§ 16.31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ $K(j\omega)$ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА, РЕШАЮЩЕГО ЗАДАЧУ ПРЕДСКАЗЫВАНИЯ [НЕ ПРИНИМАЯ ВО ВНИМАНИЕ, РЕАЛИЗУЕМА ЛИ ФИЗИЧЕСКИ ФУНКЦИЯ $K(j\omega)$]

Модуль комплексного числа $K(j\omega)$ назовем $|K(j\omega)|$, а аргумент $\beta = \beta(\omega)$, т. е. положим

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|\, e^{j\beta}. \qquad (16.92)$$

Подставим (16.92) в (16.91) и, воспользовавшись формулой Эйлера, перейдем от показательной формы комплексов к алгебраической:

$$\langle[\delta(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{[|K(j\omega)|^2 + 1 - 2|K(j\omega)|\cos(\omega\alpha - \beta)]\, S_c(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_п(\omega)\}\, df. \qquad (16.93)$$

Интеграл имеет минимальное значение при $\cos(\omega\alpha - \beta) = 1$, т. е. при $\omega\alpha = \beta$. В этом случае

$$\langle[\delta(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \{[|K(j\omega)|^2 + 1 - 2|K(j\omega)|]\, S_c(\omega) + |K(j\omega)|^2 S_п(\omega)\}\, df.$$

Подынтегральное выражение преобразуем следующим образом:

$$\langle[\delta(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\left[\sqrt{S_c(\omega) + S_п(\omega)}\,|K(j\omega)| - \frac{S_c(\omega)}{\sqrt{S_c(\omega) + S_п(\omega)}}\right]^2 + \frac{S_c(\omega) S_п(\omega)}{S_c(\omega) + S_п(\omega)}\right\} df. \qquad (16.94)$$

Интеграл минимален, когда слагаемое в квадратной скобке равно нулю. Отсюда находим модуль передаточной функции

$$|K(j\omega)| = \frac{S_c(\omega)}{S_c(\omega) + S_п(\omega)} \qquad (16.95)$$

Поскольку аргумент передаточной функции $\beta = \omega\alpha$, где α — желаемое время упреждения, то искомое комплексное значение передаточной функции четырехполюсника в соответствии с (16.92)

$$K(j\omega) = \frac{S_c(\omega)}{S_c(\omega) + S_п(\omega)} e^{j\omega\alpha}. \qquad (16.96)$$

При этом среднеквадратичная ошибка в соответствии с (16.94) и (16.95)

$$\langle[\delta(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_c(\omega) S_п(\omega)}{S_c(\omega) + S_п(\omega)} df. \qquad (16.97)$$

Казалось бы, что формула (16.96) дает решение задачи. Однако реализовать $K(j\omega)$, определенное по формуле (16.96), оказывается практически невозможно, поскольку в число полюсов его входят полюса, лежащие в правой полуплоскости.

Поэтому при построении упреждающих четырехполюсников (фильтров) не применяют формулу (16.96), а идут несколько иным путем (см. § 16.32 и 16.33).

Несмотря на то, что формула (16.97) соответствует физически нереализуемому фильтру, она имеет существенное значение, ибо она позволяет найти минимальную среднеквадратичную ошибку при известных $S_c(\omega)$ и $S_п(\omega)$. В реальном четырехполюснике, решающем задачу упреждения, минимальная среднеквадратичная ошибка не может быть меньше ошибки, определяемой по формуле (16.97).

§ 16.32. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРЕ ПРЕДСКАЗЫВАНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОМЕХИ

Известен сглаженный спектр мощности сигнала $S_c(\omega)$ и желаемое время упреждения α. Требуется найти $K(j\omega)$ четырехполюсника. Решение состоит из следующих этапов.

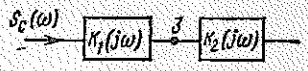


Рис. 16.24

1. Представляют $S_c(\omega)$ в виде произведения двух множителей:

$$S_c(\omega) = S_c^+(\omega) S_c^-(\omega).$$

Первый из них, если перейти к $p = j\omega$ ($p^2 = -\omega^2$), имеет нули и полюсы в левой полуплоскости, а второй — в правой. Второй множитель $S_c^-(\omega)$ в дальнейшем не используется.

2. Искомый четырехполюсник мысленно представляют в виде двух каскадно соединенных четырехполюсников (рис. 16.24) с передаточными функциями $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$.

3. Полагают

$$K_1(j\omega) = \frac{1}{S_c^+(\omega)} \quad \text{или} \quad K_1(p) = \frac{1}{S_c^+(p)}.$$

Тогда на выходе первого четырехполюсника (точка 3) возникает белый шум (сопоставьте с рассуждениями в § 16.27), спектраль-

ная мощность которого $S_3(\omega)$ не зависит от частоты:

$$S_3(\omega) = S_c(\omega)\,|K_1(j\omega)|^2 = \frac{S_c^+(\omega)\,S_c^-(\omega)}{S_c^+ S_c^-(\omega)} = 1.$$

Здесь учтено, что квадрат модуля

$$|K_1(j\omega)|^2 = K_1(j\omega)\,K_1^*(j\omega) = \frac{1}{S_c^+(\omega)\,S_c^-(\omega)}.$$

4. Белый шум рассматривают как совокупность близко расположенных, узких, случайных и статистически независимых импульсов. Второй четырехполюсник с $K_2(j\omega)$ должен обеспечить наилучшее восстановление сигнала из белого шума и его упреждение на время α.

Сигнал на выходе второго четырехполюсника состоит из двух частей. Первая часть представляет собой отклики на те импульсы белого шума, которые были до момента времени $t = t_0$, по отношению к которому отсчитывается упреждение α.

Эта часть может быть полностью предсказана, так как взаимные связи в сигнале до этого времени имеются полностью. Вторая часть представляет собой отклики второго четырехполюсника на ту часть белого шума в точке *3*, которая будет от момента времени t до $t+\alpha$. Эта часть откликов не может быть предсказана. (Более подробное рассмотрение вопроса об откликах на эти две части белого шума см. в § 16.6 книги Голдмана [77].)

5. Чтобы найти $K_2(j\omega)$, поступают следующим образом:

а) сначала находят импульсную переходную функцию второго четырехполюсника $\gamma_2(t)$ как обратное преобразование Фурье от функции $S_c^+(\omega)$;

б) затем находят $\gamma_2(t+\alpha)$, заменив t на $t+\alpha$, и этим осуществляют упреждение на α;

в) так как условия физической осуществимости требуют, чтобы $\gamma_2(t+\alpha) = 0$ при $t < 0$, то у функции $\gamma_2(t+\alpha)$ учитывают в дальнейшем только ту ее часть, которая соответствует $t \geqslant 0$ и вовсе не учитывают часть, находящуюся левее $t = 0$; полученную таким образом функцию $\gamma_2(t+\alpha)$ назовем физически реализуемой и обозначим $\gamma_{2\text{ф. р}}(t+\alpha)$;

г) с помощью прямого преобразования Фурье находим физически реализуемое $K_2(j\omega)$:

$$K_2(j\omega) = \int_0^\infty \gamma_{2\text{ф. р}}(t+\alpha)\,e^{-j\omega t}\,dt;$$

нижний предел интегрирования взят здесь равным нулю потому, что $\gamma_{2\text{ф. р}}(t+\alpha) = 0$ при $t < 0$.

6. В $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$, заменяя $j\omega$ на p, получают $K_1(p)$ и $K_2(p)$. Искомое $K(p) = K_1(p)\,K_2(p)$.

7. Далее производят синтез четырехполюсника по известному $K(p)$.

8. Среднеквадратичную относительную ошибку определяют в виде отношения среднеквадратичного значения ошибки, которую вводят, пренебрегая импульсами от $t=0$ до $t=\alpha$, к среднеквадратичному значению напряжения на выходе:

$$\frac{\langle[\delta(t)]^2\rangle}{\langle[u_{\text{вых}}(t)]^2\rangle}=\frac{\int_0^{\alpha}\gamma_2^2(t+\alpha)\,dt}{\int_0^{\infty}\gamma_2^2(t+\alpha)\,dt}. \qquad (16.98)$$

Рассмотрим пример, приведенный в книге Траксела [18].

Пример 16.2. Задан спектр мощности сигнала

$$S_c(\omega)=\frac{36}{(\omega^2+1)(\omega^2+36)}$$

и время упреждения $\alpha=1/6$ с. Требуется найти $K(j\omega)$.

Решение. Заменяя ω^2 на $-p^2$, получаем

$$S_c(p)=\frac{36}{(p^2-1)(p^2-36)};$$

разбиваем $S_c(p)$ на два множителя:

$$S_c(p)=S_c^+(p)\,S_c^-(p),$$

где

$$S_c^+(p)=\frac{6}{(p+1)(p+6)} \quad \text{и} \quad S_c^-(p)=\frac{6}{(p-1)(p-6)}.$$

Находим

$$K_1(p)=\frac{1}{S_c^+(p)}=\frac{(p+1)(p+6)}{6}.$$

Чтобы найти $K_2(p)$ в соответствии с п. 5, поступаем следующим образом:

а) находим импульсную переходную функцию $\gamma_2(t)$ по ее изображению:

$$S_c^+(p)=\frac{6}{(p+1)(p+6)}, \quad \gamma_2(t)=\frac{6}{5}(e^{-t}-e^{-6t});$$

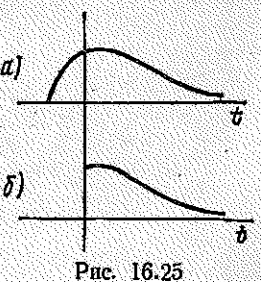


Рис. 16.25

б) заменяем t на $t+\alpha$, где по условию $\alpha=1/6$ с, и находим

$$\gamma_2(t+\alpha)=\frac{6}{5}\left[e^{-\left(t+\frac{1}{6}\right)}-e^{-6\left(t+\frac{1}{6}\right)}\right]=$$
$$=1{,}016\,(e^{-t}-0{,}435e^{-6t}).$$

На рис. 16.25, *а* изображена кривая $\gamma_2(t+\alpha)$. Она начинается с момента времени $t=-\alpha=-1/6$. При $t=0$

$$\gamma_2(t+\alpha)=0{,}575;$$

в) физически реализуемая часть $\gamma_2(t+\alpha)$ изображена на рис. 16.25, *б*. Она получена из кривой рис. 16.25, *а* путем отсе-

чения участка ее от $t=-\alpha$ до $t=0$. При $t\geqslant 0$ физически реализуемая функция $\gamma_2(t+\alpha)$ описывается уравнением

$$\gamma_{2\text{ф. р}}(t+\alpha)=1{,}016\,(e^{-t}-0{,}435e^{-0{,}t});$$

г) по $\gamma_{2\text{ф. р}}(t+\alpha)$ находим соответствующий ей $K_2(p)$:

$$K_2(p)=1{,}016\left(\frac{1}{p+1}-\frac{0{,}435}{p+6}\right)=5{,}65\,\frac{0{,}1015p+1}{(p+1)(p+6)}.$$

Передаточная функция упреждающего устройства в целом

$$K(p)=K_1(p)\,K_2(p)=0{,}942\,(1+0{,}1015p).$$

§ 16.33. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРЕ ПРЕДСКАЗЫВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ

Известны $S_{\text{с}}(\omega)$, $S_{\text{п}}(\omega)$ и время упреждения α Как и раньше, предполагается, что сигнал и помеха некоррелированы. Последовательность решения такова.

1. Находят сумму спектров мощности

$$S_{\text{вх}}(\omega)=S_{\text{с}}(\omega)+S_{\text{п}}(\omega)$$

и переходят от $S_{\text{вх}}(\omega)$ к $S_{\text{вх}}(p)$.

2. Представляют $S_{\text{вх}}(p)$ в виде произведения:

$$S_{\text{вх}}(p)=S^{+}_{\text{вх}}(p)\,S^{-}_{\text{вх}}(p),$$

где $S^{+}_{\text{вх}}(p)$ имеет полюсы и нули в левой полуплоскости, а $S^{-}_{\text{вх}}(p)$ — в правой.

3. Находят передаточную функцию первого четырехполюсника

$$K_1(p)=\frac{1}{S^{+}_{\text{вх}}(p)}.$$

4. Передаточную функцию второго четырехполюсника, не учитывая условия физической реализуемости, определяют по формуле

$$K_2(p)=\frac{S_{\text{с}}(p)}{S^{-}_{\text{вх}}(p)}\,e^{p\alpha}.$$

5. По $K_2(p)$ находят соответствующую ей импульсную переходную функцию второго четырехполюсника $\gamma_2(t+\alpha)$.

6. Физически реализуемое $K_{2\text{ф. р}}(p)$ берут равным операторному изображению той части $\gamma_2(t+\alpha)$, которая имеет место при $t\geqslant 0$.

7. Передаточная функция всего упреждающего и сглаживающего устройства

$$K(p)=K_1(p)\,K_{2\text{ф. р}}(p).$$

8. Относительную ошибку находят по формуле (16.98).

§ 16.34. ПРИМЕНЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ

Полезный сигнал всегда принимается на фоне помех. Чтобы определить, имеется ли полезный сигнал в поступающем на вход приемника сигнале, применяют корреляционные методы.

Идею применения их рассмотрим на простейшем примере, когда помеха и сигнал представляют собой прямоугольные импульсы положительной или отрицательной полярности по амплитуде, равные 1, и длительностью, также равной 1. Помеха $u_{п1}$ изображена на рис. 16.26, *а*; помеха $u_{п2}$ — на рис. 16.26, *б*.

Помеха носит случайный характер и потому на достаточно длинном отрезке времени количество положительных импульсов равно или почти равно количеству отрицательных импульсов. Полезный сигнал на рис. 16.26, *в* представлен в виде упорядоченно сменяющих друг друга положительных и отрицательных импульсов.

На рис. 16.26, *г* изображен полезный сигнал, сопровождаемый помехой $u_{п1}$, а на рис. 16.26, *д* — сигнал и помеха $u_{п2}$.

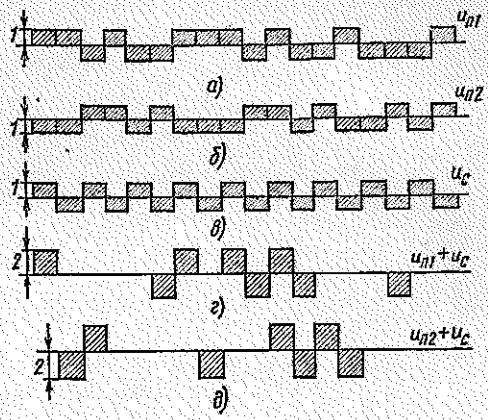


Рис. 16.26

Чтобы выяснить, содержится ли в принимаемом сигнале полезный, внутри приемника имеется коррелирующее устройство. На вход последнего поступают два колебания: сигнал, принимаемый приемником, и колебание, вырабатываемое в самом приемнике, по форме, длительности и фазе полностью совпадающее с полезным сигналом u_c. Выходная величина коррелятора

$$u_{вых} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u_{вх}u_c\,dt,$$

где $2T$ — время выборки.

Если в принимаемом колебании $u_{вх}$ полезный сигнал содержится, то $u_{вых}$ оказывается относительно большим, если не содержится — значительно меньшим.

В качестве примера подсчитаем, чему равнялось бы $u_{вых}$ для кривых рис. 16.26 при времени выборки $2T = 18$ единиц для четырех случаев, когда на вход приемника поступают:

1) помеха $u_{п1}$ (рис. 16.26, *а*): $u_{вых} = \frac{1}{18}(8-10) = -0{,}111$;

2) помеха $u_{п2}$ (рис. 16.26, *б*): $u_{вых} = \frac{1}{18}(7-11) = -0{,}222$;

3) полезный сигнал и помеха $u_{п1}$ (рис. 16.26, *г*): $u_{вых} = \frac{1}{18}\cdot 2\cdot 8 = 0{,}889$;

4) полезный сигнал и помеха $u_{п2}$ (рис. 16.26, *д*): $u_{вых} = \frac{1}{18}\cdot 2\cdot 7 = 0{,}777$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Две приведенные программы написаны на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV и предназначены для работы на машинах серии ЕС ЭВМ с операционной системой ДОС. В составлении их участвовали Л. П. Гаврилов и С. И. Коршаковский.

Приложение 1

Программа решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, составленных в форме Коши, для расчета переходных процессов

1. *Назначение программы.* Программа предназначена для решения методом Рунге—Кутта системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши):

$$\bar{\dot{y}} = [A]\,\bar{y} + [B]\,\bar{F} \qquad (П1.1)$$

с начальными условиями $\bar{y}(0)$.

Здесь $\bar{y}$ — вектор переменных состояния (токи через L и напряжения на C); $\bar{\dot{y}} = d\bar{y}/dx$ — вектор первых производных $\bar{y}$ по x (x — время); $\bar{F}$ — вектор воздействующих функций (источники э. д. с. и тока); $[A]$, $[B]$ — матрицы действительных коэффициентов; $\bar{y}(0)$ — вектор-столбец начальных значений. Например, для схемы, изображенной на рис. П.1, система (П1.1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L_2}\left[R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right] i_L + \frac{R_1}{(R_1+R_3)\,L_2}\,u_C + \frac{R_3}{(R_1+R_3)\,L_2}\,E,\\
\frac{du_C}{dt} &= -\frac{R_1}{(R_1+R_3)\,C_3}\,i_L - \frac{1}{(R_1+R_3)\,C_3}\,u_C + \frac{1}{(R_1+R_3)\,C_3}\,E,\\
\bar{y}(0) &= \begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_C(0_-) \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (П1.2)$$

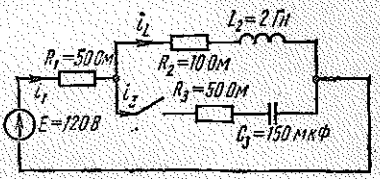


Рис. П.1

II. *Описание программы.* Программа состоит из основной части и трех стандартных подпрограмм

Программа решения системы (П1.1):

Номер оператора		
1		EXTERNAL F, OU
2		DIMENSION PR(5), Y(2), D(2), AU(16)
3		COMMON XT
4		WRITE (3,2)
5	2	FORMAT (T14, 'МЕТОД РУНГЕ-КУТТА')
6		PR(1)=0. 0
7		PR(2)=0. 4
8		PR(3)=0. 01
9		PR(4)=0. 1E-03
10		XT=0. 0
11		Y(1)=2. 0
12		Y(2)=0. 0
13		DO 4 I=1, 2
14	4	D(I)=1. 0/3
15		CALL RKGS (PR, Y, D, 2, IH, F, OU, AU)
16		STOP
17		END
18		SUBROUTINE F(X, Y, D)
19		DIMENSION Y(2), D(2)
20		(D1)=-17.5 * Y(1)+0. 25 * Y(2)+30. 0
21		D(2)=-3333.3 * Y(1)-66.7 * Y (2)+8000
22		RETURN
23		END
24		SUBROUTINE OU(X, Y, D, IH, N, PR)
25		DIMENSION PR(5), Y(2), D(2)
26		COMMON A
27		IF(ABS(X-A)-0. 0 0 0 1) 8, 8, 6
28	8	WRITE (3, 12) X, Y
29	12	FORMAT (T6, 3F 12.5)
30		A=A+0. 0 15
31	6	RETURN
32		END

III. *Пояснения к тексту программы.* Операторы 1—5 выполняют следующие функции:

— оператор 1 объявляет имена F и OU внешних подпрограмм, являющихся физическими аргументами при обращении к стандартной подпрограмме RKGS:

— операторы 2 и 3 задают описание массивов RR, YD, AU и переменной XT для выделения необходимого объема памяти; причем PR (5) — количество параметров интегрирования одинаково для всех задач; Y (n), D (n) и AU ($8\times n$) изменяются в зависимости от n, где n — количество уравнений в системе (П1.1);

— с помощью операторов 4 и 5 осуществляется вывод на печать заголовка «Метод Рунге — Кутта».

Операторы (6—9) — изменяемые для каждой задачи, оператором 6 задается нижняя граница интервала интегрирования, оператором 7 — верхняя граница, оператором 8 — начальный шаг интегрирования. С помощью оператора 9 задается точность вычислений. Оператор 10 определяет значение x, с которого будет начат вывод результатов.

Следующие после 10-го n операторов [для системы (П1.2) — два оператора 11 и 12] определяют векторы начальных значений $\bar{y}$ (0).

Операторы 13 и 14 (а при $n > 2$ и более старшие номера) — операторы цикла для задания весовых коэффициентов погрешности в массиве D. Оператор 13 — изменяемый и имеет вид DO4 $1=1, n$. Оператор 15 осуществляет обращение к стандартной подпрограмме RKGS. В нем четвертый параметр равен n. Операторы 16 и 17 указывают на окончание основной программы. После текста основной программы следуют две подпрограммы с именами F (номера операторов 18—23) и OU (номера 24—32). Оператор 19 задает размерность массивов Y (n) и D (n).

Следующие за 19-м n операторов (в примере операторы 20 и 21) определяют правые части системы уравнений (ПІ.2).

Подпрограмма OU осуществляет вывод результатов на печать в заданных точках интервала интегрирования. Массивы Y (n) и D (n) имеют тот же смысл, что и в операторе 19.

Оператор 29 в общем случае имеет вид

```
12  FORMAT (T6, n+1) F8.5)
```

Оператор 30 — A = A + h, где h — шаг вывода по переменной x.

IV. *Порядок решения системы дифференциальных уравнений на ЦВМ.* Для использования программы ее необходимо дополнить стандартными управ-

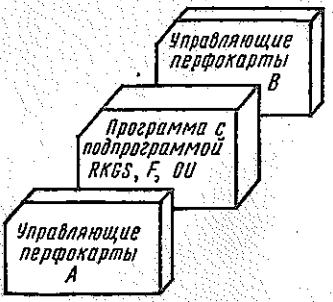


Рис. П 2

ляющими перфокартами (комплекты *A* и *B* на рис. П.2). В алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV, на котором написана эта программа, для операционной системы ДОС управляющие перфокарты имеют вид

	// JOB № темы фамилия исполнителя
Управляющие	// ASSGN SYSRLB, X' 192'
перфокарты	// OPTION LINK
A	// EXEC FFORTRAN
	Текст программы
Управляющие	/*
перфокарты	// EXEC LNKEDT
B	// EXEC
	Исходные данные
Управляющие	/*
перфокарты	/&
C	

Программа вычисления корней полинома

I. *Назначение программы.* Программа предназначена для нахождения корней (действительных и комплексных) уравнения с действительными коэффициентами вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (П2.1)$$

с помощью стандартной подпрограммы POLRT, которая для нахождения отдельного корня использует метод Ньютона — Рафсона *.

II. *Описание программы.* Текст программы следующий:

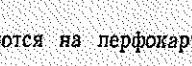
Номера		
1		DIMENSION XCOF (n+1), COF (n+1), RR(n), RI(n)
2		WRITE (3,9)
3	9	FORMAT (T20, 'КОРНИ ПОЛИНОМА')
4		READ (1,10) XCOF
5	10	FORMAT ((n+1) F6.2)
6		CALL POLRT (XCOF, COF, n, RR, RI, IER)
7		WRITE (3,11) RR, RI, IER
8	11	FORMAT (T6, nF 8.5/T6, nF 8.5/T6, 'IER=' I3)
9		STOP
10		END

Назначение операторов в программе следующее:
оператор 1 задает описание массивов XCOF, COF, RR, RI и их размерностей, где XCOF — вектор из (n+1) коэффициентов полинома, упорядоченный от наименьшей к наибольшей степени; COF — рабочий вектор длиной n+1; n — степень полинома, не превышающая 36; RR — массив действительных частей корней полинома из n элементов; RI — массив мнимых частей корней полинома из n элементов. Операторы 2, 3 предназначены для вывода на печать заголовка. С помощью оператора 4 осуществляется ввод n+1 коэффициентов уравнения (П2.1) по формату, указанному в операторе 5, и размещение их в массиве XCOF. Оператор 6 осуществляет обращение к стандартной подпрограмме POLRT. Здесь фактический аргумент IER — код ошибки. Операторы 7—8 выводят на печать результат — корни полинома и код ошибки. Операторы 9, 10 указывают на конец вычислений и окончание программы.

III. *Подготовка исходных данных.*

1. Составить уравнение вида (П2.1).

2. Записать и набить на перфокарте упорядоченные от наименьшей к наибольшей степени коэффициенты в формате F 6.2. Например, число —4,25 при набивке на перфокарту по указанному формату запишется так:



6 позиций

Коэффициенты набиваются на перфокарте друг за другом без разделения запятой.

---

* См., например: Светозаров Г. И., Козловский А. В., Сигитов Е. В. Практикум по программированию на алгоритмических языках. М., Наука, 1980.

IV. *Порядок использования программы.* Для использования программы ее необходимо дополнить стандартными управляющими перфокартами (комплекты

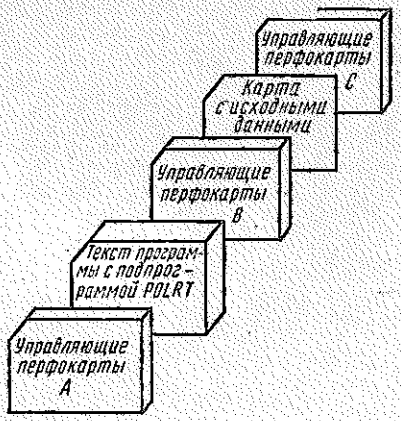


Рис. П 3

A, B, C) и перфокартами с исходными данными согласно рис. П.3. В алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV, на котором написана эта программа, для операционной системы ДОС управляющие перфокарты имеют вид

Управляющие перфокарты A	// JOB № темы фамилия исполнителя // ASSGN SYSRLB, X' 192' // OPTION LINK // EXEC FFORTRAN
	Текст программы
Управляющие перфокарты B	/* // EXEC LNKEDT // EXEC
	Исходные данные
Управляющие перфокарты C	/* /&

V. *Распечатка программы и результаты расчета для уравнения* $x^5+15x^4+85x^3+225x^2+274x+120=0$.

```
      DIMENSION XCOF (6), COF (6), RR (5), RI(5)
      WRITE (3,9)
    9 FORMAT (T2Ø, 'КОРНИ ПОЛИНОМА')
      READ (1,1Ø) XCOF
   1Ø FORMAT (6F6.2)
      CALL POLRT (XCOF, COF,5,RR,RI,IER)
      WRITE (3,11) RR, RI, IER
   11 FORMAT (T6, 5F8, 5/T6, 5F8, 5/T6, 'IER=',13)
      STOP
      END
```

КОРНИ ПОЛИНОМА

```
-1.ØØØØØ  -2.ØØØØØ  -3.ØØØØØ  -4.ØØØØ  -5.ØØØØØ
 Ø.Ø        Ø.Ø        Ø.Ø        Ø.Ø      Ø.Ø
IER= Ø
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Акульшин П. К., Кощеев И. А., Кульбацкий К. Е. Теория связи по проводам. — М.: Связьиздат, 1940.
2. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. — М.: Связь, 1970.
3. Солодовников В. В., Топчиев Ю. И., Крутикова Г. В. Частотный метод построения переходных процессов с приложением таблиц и номограмм. — М: ГИТТЛ, 1955.
4. Булгаков Б. В. Колебания. — М.: ГИТТЛ, 1953.
5. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1958.
6. Харкевич А. А. Спектры и анализ. — М.: ГИТТЛ, 1953.
7. Фельдбаум А. А. Электрические системы автоматического регулирования. — М.: Оборонгиз, 1957.
8. Максимович Н. Г. Линейные электрические цепи и их преобразования. — М.: ГЭИ, 1961.
9. Круг К. А. Переходные и установившиеся процессы в линейных электрических цепях. — М.: ГЭИ, 1948.
10. Крылов Н. Н. Импульсная техника. — М.: Связьиздат, 1950.
11. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. — М.: ГИТТЛ, 1954.
12. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. — М.: ГЭИ, 1961.
13. Баев Н. А., Удалов А. П. Лекции по теории цепей с сосредоточенными элементами. — М.: Связьиздат, 1955.
14. Турбович И. Т. Метод близких систем и его применение для создания инженерных методов расчета линейных и нелинейных радиотехнических систем. — М.: Изд. АН СССР, 1961.
15. Меерович Л. А., Зеличенко Л. Г. Импульсная техника. — М.: Советское радио, 1953.
16. Белецкий А. Ф. Основы теории линейных электрических цепей. — М.: Связь, 1967.
17. Евланов С. Н. Корректирующие контуры в телеграфных и телефонных цепях. — М.: Связь, 1937.
18. Тракселл Д. Синтез систем автоматического регулирования. — М.: Машгиз, 1959.
19. Гарднер М. Ф., Бернс Д. Л. Переходные процессы в линейных системах. — М.: Гостехиздат, 1949.
20. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. — М.: Изд. АН СССР, 1951.
21. Харкевич А. А. Очерки общей теории связи. — М.: Гостехиздат, 1945.
22. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: ГЭИ, 1956.
23. Меерович Л. А. О синтезе цепей по заданной временной характеристике. — Изв. вузов СССР. Сер. радиотехника, 1948, № 5.
24. Сигорский В. П. Общая теория четырехполосника. — М.: Изд. АН СССР, 1955.
25. Добровольский Г. В. Передача импульсов по каналам связи. — М.: Связьиздат, 1960.
26. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: 1977.
27. Чебышев Л. П. Избранные математические труды. — М.; Гостехиздат, 1946.
28. Айзинов М. М. Анализ и синтез линейных радиотехнических цепей в переходном режиме. — М.: Энергия, 1964.

29. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Гостехиздат, 1952.
30. Гиллемин Е. А. Синтез пассивных цепей. — М.: Связь, 1970.
31. Laurent T. Vierpoltheorie und Frequenztransformation, 1956.
32. Антокольский М. Л. О связи между частотными и фазовыми характеристиками в линейных системах. — ЖТФ, 1947, № 2.
33. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. — М.: Наука, 1971.
34. Тафт В. А. Спектральные методы расчета нестационарных цепей и систем. — М.: Энергия, 1978.
35. Основы автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. — М.: Машгиз, 1954—1959, т. I—III.
36. Рязанов Ю. А. Проектирование систем автоматического регулирования. — М.: Машгиз, 1963.
37. Менский Б. М. Корректирующие устройства и их синтез частотным методом. — М.: Изд. ВЗЭИ, 1964.
38. Кочанов Н. С. Основы синтеза линейных цепей во временной области. — М.: Связь, 1967.
39. Матханов П. Н. Синтез реактивных четырехполюсников по временным функциям. — М.: Энергия, 1970.
40. Артым А. Д. Электрические корректирующие цепи и усилители. — М.: Энергия, 1965.
41. Шварц. Математические методы для физических наук. — М.: Мир, 1965.
42. Розенфельд А. С., Яхинсон Б. И. Переходные процессы и обобщенные функции. — М.: Наука, 1966.
43. Ризкин А. А. Основы теории и расчета электронных усилителей. — М.: Энергия, 1965.
44. Elmore W. C. Transient responce of damped linear networks with particular regard to wideband amplifiers. Journal Appl. Phys. 1948, 19, № 1.
45. Меерович Л. А., Тартаковский Г. П. К расчету временных и частотных характеристик многокаскадных усилителей. — ЖТФ, 1952, № 7.
46. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений — Киев: Наукова думка, 1980.
47. Ицхоки Я. С. Приближенный метод анализа переходных процессов в сложных линейных цепях. — М.: Советское радио, 1969.
48. Новак М. Частотные преобразования в теории цепей. — М.: Советское радио, 1975.
49. Современная теория фильтров и их проектирование / Под ред. Г. Темеша и С. Митра. — М.: Мир, 1977.
50. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1976.
51. Ланнэ А. А. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. — М.: Связь, 1969.
52. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления / Под ред. Е. П. Попова и Ю. И. Топчиева. — М.: Машиностроение, 1970.
53. Zadeh L. A. Frequency analysis of variable networks. PIRE. V.38. March, 1950.
54. Рудницкий Б. Е. Определение передаточных функций некоторых систем с переменными параметрами. Автоматика и Телемеханика, 1960, № 12.
55. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. — М.: Наука, 1970.
56. Воробьев Н. Н. Теория рядов. — М.: Наука, 1970.
57. Пухов Г. Е. Преобразование Тейлора и их применения в электротехнике и электронике. — Киев: Наукова думка, 1978.
58. Гаврилов Л. П. Аналитический метод расчета электрических цепей с применением ЦВМ. — М.: Изд-во МГУ, 1975.
59. Barrucand P. A. Transformation de Mellin et ses applications. Annales des Telecommunications. 1950. № 11
60. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. — М.: Физматгиз, 1962.

61. Мезон С., Циммерман Г. Электронные цепи, системы и сигналы. — М.: ИЛ, 1963.
62. Робишо Л. Р., Буавер М., Робер Д. Сигнальные графы. — М.: Энергия, 1964.
63. Shu—Park—Chan. Jntoductory Topological Analysis of Electrical Networks. N Y. 1969.
64. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем. — М: Техника, 1967.
65. Трохименко Я. К. Метод анализа сложных схем с кристаллическими триодами. — «Радиотехника», 1956, № 3.
66. Нагорный Л. Я. Анализ и расчет усилительных схем. — М.: ГИТТЛ, 1963.
67. Ионкин П. А. и др. Основы инженерной электрофизики. — М.: Высшая школа, 1972, ч. II.
68. Луи де Пиан. Теория линейных активных цепей. — М.: Энергия, 1967.
69. Chan—Shu—Park Mai H. N. Flow—graph method for the Analysis of Linear Systems. IEEE Trans. on circuit Theory. VCT-14, № 3 1967.
70. Знаменский А. Е., Теплюк И. Н. Активные RC-фильтры. — М.: Связь, 1970.
71. Марше Ж. Операционные усилители и их применение. — М.: Энергия, 1974.
72. Шило Е. Л. Линейные интегральные схемы. — М.: Советское радио, 1979.
73. Седов К. И. Введение в синтез активных цепей. — М.: Энергия, 1973.
74. Толстов Ю. Г. Теория линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1978.
75. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1941, № 5.
76. Джеймс Х., Никольс Н,. Филипс Р. Теория следящих систем. — М.: ИЛ, 1953.
77. Голдман С. Теория информации. — М.: ИЛ, 1957.
78. Цень Сюэ Сянь. Техническая кибернетика. — М.: ИЛ, 1956.
79. Лебедев В. Л. Случайные процессы в электрических и механических системах — М.: Физматгиз, 1958.
80. Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. — М.: Советское радио, 1952.
81. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. — М.: Советское радио, 1960.
82. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1960.
83. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. — М.: Госэнергоиздат, 1962.
84. Харкевич А. А. Основы радиотехники. — М.: Связьиздат, 1963.
85. Гуткин Л. С., Лебедев В. Л., Сидоров В. И. Радиоприемные устройства. — М.: Советское радио, 1963, ч. II.
86. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: ГТТИ, 1957.
87. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Гостехиздат, 1951, т. II.
88. Фельдбаум А. А. и др. Теоретические основы связи и управления. — М.: Физматгиз, 1963.
89. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Советское радио, 1966.
90. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. — М.: Советское радио, 1972.
91. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигнала. — М.: Советское радио, 1970.
92. Чуа Л. О., Пен Мин Лин. Машинный анализ электронных схем — М.: Энергия, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава первая. Двухполюсники 4

§ 1.1. Входное сопротивление 4
§ 1.2. Комплексная частота 6
§ 1.3. Нули и полюсы входного сопротивления 6
§ 1.4. Интегрирование на комплексной плоскости 8
§ 1.5. Оценка абсолютного значения интеграла $\int_{p_1}^{p_2} f(p)\,dp$ 9
§ 1.6. Теорема Коши 12
§ 1.7. Понятие о физически реализуемом двухполюснике 12
§ 1.8. Нули и полюсы физически реализуемого двухполюсника . . . 13
§ 1.9. Об условии, которому должна удовлетворять действительная часть $Z(p)$ физически реализуемого двухполюсника, когда действительная часть p больше нуля 14
§ 1.10. Условия, которым должна удовлетворять функция входного сопротивления физически реализуемого двухполюсника . . . 15
§ 1.11. Понятие о двухполюсниках типа минимального реактивного сопротивления и типа минимальной реактивной проводимости 18
§ 1.12. Представление входного сопротивления или входной проводимости в виде непрерывной дроби 18
§ 1.13. Четность действительной и нечетность мнимой частей $Z(p)$ при синусоидальном процессе 19
§ 1.14. Представление входного сопротивления двухполюсника при малых и больших p в виде степенных рядов 20
§ 1.15. Теорема об интеграле от действительной части 21
§ 1.16. Теорема об интеграле от мнимой части 24
§ 1.17. Соотношения между действительной и мнимой частями входного сопротивления двухполюсника на любых частотах . . . 26

Глава вторая. Четырехполюсники 30

§ 2.1. Передаточная функция 30
§ 2.2. Минимально фазовые и неминимально фазовые четырехполюсники 31
§ 2.3. Мостовые и скрещенные схемы фазового сдвига 33
§ 2.4. Представление передаточной функции неминимально фазового четырехполюсника в виде произведения двух передаточных функций 35
§ 2.5. Условия, которым должны удовлетворять Z- и Y-параметры и передаточная функция физически реализуемых четырехполюсников 37
§ 2.6. Определение аргумента передаточной функции по ее модулю 41

Глава третья. Некоторые теоремы общего характера 43
§ 3.1. Связь частотных и временных характеристик четырехполюсника 43
§ 3.2. Определение действительной и мнимой частотных характеристик через импульсную переходную функцию $h'(t)$ 45
§ 3.3. Теорема Котельникова 48
§ 3.4. Теорема Пэли — Винера 51

Глава четвертая. Частотные преобразования электрических цепей 51
§ 4.1. Общая характеристика частотных преобразований 51
§ 4.2. Частотные преобразования первого рода 52
§ 4.3. Частотные преобразования второго рода 56
§ 4.4. Частотные преобразования цепей с распределенными параметрами 57

Глава пятая. Метод пространства состояний. Интеграл Дюамеля для огибающей. Дискретное преобразование Лапласа. Применение обобщенных функций 59

§ 5.1. Метод пространства состояний 59
§ 5.2. Вывод основной формулы метода пространства состояний . . . 64
§ 5.3. Понятие об огибающей переходной функции при воздействии на вход электрической цепи синусоидальным колебанием с неизменной амплитудой 65
§ 5.4. Интеграл Дюамеля для огибающей 69
§ 5.5. Понятие о решетчатой функции 71
§ 5.6. Разность k-го порядка решетчатых функций 72
§ 5.7. Уравнение в конечных разностях (разностное уравнение) 72
§ 5.8. Прямое дискретное преобразование Лапласа (прямое D-преобразование) 74
§ 5.9. Теоремы дискретного преобразования Лапласа 75
§ 5.10. Обратное D-преобразование 78
§ 5.11. Обобщенные функции и их применение при расчете переходных процессов 81

Глава шестая. Приближенные методы расчета переходных процессов . . . 85

§ 6.1. Связь между вещественной частотной характеристикой и временной характеристикой 85
§ 6.2. Метод трапецеидальных частотных характеристик 87
§ 6.3. Расчет переходных процессов путем периодизации временной характеристики 92
§ 6.4. Определение результатов воздействия на электрическую цепь кратковременным импульсом напряжения 94
§ 6.5. Реакция цепи на медленно изменяющееся напряжение 95
§ 6.6. Метод динамического коэффициента передачи 97
§ 6.7. Определение времени установления монотонных переходных процессов методом моментов 100

Глава седьмая. Преобразование Тейлора и преобразование Меллина . . . 104

§ 7.1. Степенной ряд Тейлора 104
§ 7.2. Прямое и обратное преобразования Тейлора 105
§ 7.3. T-изображения некоторых функций времени 106
§ 7.4. Методика решения дифференциальных уравнений путем использования преобразования Тейлора 108
§ 7.5. Прямое и обратное преобразования Меллина 111
§ 7.6. M-преобразования некоторых практически важных функций 112
§ 7.7. Формула разложения для преобразования Меллина 113
§ 7.8. Решение дифференциальных уравнений, описывающих процессы в цепях с переменными во времени параметрами путем применения преобразования Меллина 114
§ 7.9. Передаточная функция четырехполюсника, параметры которого медленно изменяются во времени 116

Глава восьмая. Синтез электрических цепей по их свойствам в области комплексной частоты 120
§ 8.1. Характеристика задач синтеза электрических цепей 120
§ 8.2. Синтез двухполюсников, основанный на последовательном выделении из функции входного сопротивления простейших составляющих 121
§ 8.3. Синтез двухполюсников, основанный на представлении входного сопротивления или входной проводимости непрерывной дробью 125
§ 8.4. Метод Бруне 129
§ 8.5. Синтез Г-образных *RC*- и *RL*-четырехполюсников 133
§ 8.6. Синтез четырехполюсников, основанный на последовательном выделении простейших четырехполюсников 134
§ 8.7. Реализация передаточной функции минимально фазового четырехполюсника. Нормализованная нагрузка 137
§ 8.8. Реализация передаточной функции четырехполюсника с помощью способа разделения 139
§ 8.9 Общая характеристика корректирующих контуров, применяемых в телефонной и телеграфной связи 141
§ 8.10. Амплитудные корректирующие контуры 142
§ 8.11. Фазовые корректирующие контуры 144
§ 8.12. Понятие об аппроксимации частотных характеристик 147
§ 8.13. Аппроксимация квадрата модуля передаточной функции фильтра низкой частоты 150

Глава девятая. Синтез четырехполюсников по логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам 153
§ 9.1. Логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики 153
§ 9.2. Логарифмические частотные характеристики типовых звеньев 154
§ 9.3. Общая характеристика методов построения ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы 158
§ 9.4. Построение асимптотической ЛАХ разомкнутой системы . . . 159
§ 9.5. Определение фазы по асимптотической ЛАХ 161
§ 9.6. Связь между ЛАХ и основными характеристиками переходного процесса 162
§ 9.7. Построение желаемой ЛАХ разомкнутой системы 164
§ 9.8. Построение ЛАХ корректирующего устройства 167

Глава десятая. Синтез электрических цепей по временно́му отклику . . . 168
§ 10.1. Характеристика задач синтеза цепей по временно́му отклику 168
§ 10.2. Синтез двухполюсников путем разложения временно́го отклика на простейшие составляющие и реализация их элементарными звеньями 169
§ 10.3 Основные положения метода синтеза реактивных четырехполюсников лестничной структуры по заданному временно́му отклику 173
§ 10.4. Импульсный метод аппроксимации временны́х функций и применение его для нахождения операторного изображения функций времени 173
§ 10.5. Свойства передаточных функций реактивного четырехполюсника лестничного типа и использование их при синтезе 176

Глава одиннадцатая. Матричные методы расчета электрических цепей . . . 178
§ 11.1. Неопределенная и укороченная матрицы узловых проводимостей 178
§ 11.2. Матрицы типовых элементов электрических цепей 179
§ 11.3. Двойное алгебраическое дополнение 185
§ 11.4. Метод расчета, основанный на использовании укороченной матрицы узловых проводимостей и Y-параметров эквивалентного четырехполюсника 185

§ 11.5. Метод расчета, основанный на использовании укороченной матрицы узловых проводимостей, минуя этап определения Y-параметров эквивалентного четырехполюсника 188
§ 11.6. Матричный метод, основанный на использовании различных форм записи уравнений четырехполюсников 192

Глава двенадцатая. Активные схемные элементы и некоторые их применения 202

§ 12.1. Общая характеристика активных схемных элементов 202
§ 12.2. Конвертор и инвертор сопротивления 202
§ 12.3. Нулатор, норатор, нулор 203
§ 12.4. Гиратор 207
§ 12.5. Применение гиратора для имитации индуктивности и для получения отрицательных сопротивлений 211
§ 12.6. Управляемые источники напряжения (тока) 213
§ 12.7. Операционный усилитель 214
§ 12.8. Применение ОУ для получения управляемых источников напряжения (тока) 215
§ 12.9. Использование ОУ для реализации гиратора 217
§ 12.10. Применение ОУ для имитации индуктивности 218
§ 12.11. Применение ОУ для получения частотно-зависимого отрицательного резистивного сопротивления 219
§ 12.12. Основы построения активных *RC*-фильтров 219
§ 12.13. Активные *RC*-фильтры с имитированными индуктивностями 223
§ 12.14. Активные *RC*-фильтры с использованием ЧЗОС 224

Глава тринадцатая. Основы матрично-топологического направления теории электрических цепей 225

§ 13.1. Характеристика двух направлений теории графов 225
§ 13.2. Некоторые понятия из топологии 226
§ 13.3. Топологические матрицы 227
§ 13.4. Запись уравнений по законам Кирхгофа с помощью топологических матриц 229
§ 13.5. Обобщенная ветвь электрической цепи 230
§ 13.6. Вывод уравнений метода контурных токов 230
§ 13.7. Вывод уравнений метода узловых потенциалов 232
§ 13.8. Применение топологических матриц для вывода формул метода наложения 233
§ 13.9. Соотношения между топологическими матрицами 234
§ 13.10. Сопоставление матрично-топологического и традиционного направлений теории цепей 235

Глава четырнадцатая. Направленные (сигнальные) графы 236

§ 14.1. Основные определения 236
§ 14.2. Переход от изучаемой системы к направленному графу . . . 237
§ 14.3. Правила упрощения направленных графов 241
§ 14.4. Некоторые дополнительные понятия, относящиеся к графам с обратными связями 248
§ 14.5. Общая формула для передачи графа 249
§ 14.6. Пояснения к общей формуле для передачи графа 252
§ 14.7. Вывод формулы для передачи графа 253
§ 14.8. Решение систем уравнений путем использования направленных графов специальной структуры 257

Глава пятнадцатая. Ненаправленные и унисторные графы 259

§ 15.1. Определения и основная формула 259
§ 15.2. Способы упорядоченного подсчета определителя графа . . . 262
§ 15.3. Сравнение способов разложения определителя 263
§ 15.4. Применение основной формулы 264
§ 15.5. Унисторные схемы замещения электронных приборов 268
§ 15.6. Применение формулы Мэзона для расчета электронных схем
§ 15.7. Упрощение расчета симметричных балансных схем 269

Глава шестнадцатая. Линейные электрические цепи при случайных процессах 276

§ 16.1. Случайные события и их вероятность 276
§ 16.2. Функция распределения вероятностей 276
§ 16.3. Плотность вероятности 278
§ 16.4. Нормальное распределение или распределение Гаусса . . . 278
§ 16.5. Биномиальное распределение (распределение Бернулли). Распределение Пуассона 280
§ 16.6. Распределение Максвелла Распределение Коши. Равномерное распределение 280
§ 16.7. Среднее значение случайной величины 281
§ 16.8. Дисперсия случайной величины 282
§ 16.9. Неравенство Чебышева и закон больших чисел 283
§ 16.10. Моменты случайных величин 284
§ 16.11. Правила вычисления вероятностей нескольких событий . . . 284
§ 16.12. Понятие о случайных процессах 286
§ 16.13. Классификация случайных процессов 287
§ 16.14. Среднее по множеству и среднее по времени 291
§ 16.15. Эргодическая теорема и эргодическая гипотеза 291
§ 16.16. Автокорреляционная функция 292
§ 16.17. Свойства автокорреляционной функции 293
§ 16.18. Взаимная корреляционная функция и ее свойства 294
§ 16.19. Получение корреляционной функции для некоторого процесса, $x(t)$ которого известна 295
§ 16.20. Прямое и обратное преобразования Фурье для корреляционных функций. Формулы Винера — Хинчина 295
§ 16.21. Спектральная плотность энергии и ее связь с корреляционной функцией 297
§ 16.22. Белый шум и его свойства 299
§ 16.23. Определение среднеквадратичного значения функции времени через спектральную плотность автокорреляционной функции и через квадрат модуля Фурье-изображения функции времени 300
§ 16.24. Определение спектральной плотности выходной величины через спектральную плотность входной величины и квадрат модуля передаточной функции 301
§ 16.25. Подход к расчету параметров замкнутых систем при стационарных случайных воздействиях, основанный на минимуме среднеквадратичной ошибки 303
§ 16.26. Оптимальные линейные фильтры 306
§ 16.27. Метод приведения к белому шуму 310
§ 16.28. Понятие об оптимальном приемнике 311
§ 16.29. Понятие о задаче предсказывания 315
§ 16.30. Вывод выражения для среднеквадратичной ошибки при решении задачи предсказывания и сглаживания 317
§ 16.31. Определение передаточной функции $K(j\omega)$ четырехполосника, решающего задачу предсказывания [не принимая во внимание, реализуема ли физически функция $K(j\omega)$] 318
§ 16.32. Приближенное решение задачи о фильтре предсказывания при отсутствии помехи 319
§ 16.33. Приближенное решение задачи о фильтре предсказывания при наличии помехи 322
§ 16.34. Применение корреляционных методов для обнаружения повторяющихся сигналов на фоне помех 322

Приложения 324

Литература 329