П. А. ИОНКИН, Н. Н. КУРДЮКОВ, Е. С. КУХАРКИН

# ТИПОВЫЕ ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено*
*Министерством высшего и среднего*
*специального образования СССР*
*в качестве учебного пособия*
*для студентов*
*электротехнических*
*специальностей вузов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1965

Книга предназначается в качестве учебного пособия для студентов электротехнических вузов и факультетов.

В книге даны примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и некоторые справочные материалы.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Примеры и задачи занимают важное место в курсе теоретических основ электротехники, так как в процессе их решения проверяется степень усвоения теоретического материала и приобретаются некоторые навыки, необходимые для применения теории к практике. Большинство приведенных в сборнике задач имеет решение или подробные указания к решению. При этом надо учесть, что изучение методов решения задач по данному учебному пособию принесет пользу только в том случае, если студент предварительно изучит основные теоретические положения курса по учебнику.

Четвертое издание пособия включает переработанные примеры и задачи из третьего издания. Часть задач составлена заново.

В подготовке сборника принимали участие А. И. Даревский и В. И. Константинов, которым авторы выражают глубокую благодарность. Авторы выражают признательность рецензенту проф. Караеву Р. И. за ряд весьма полезных замечаний и указаний по содержанию рукописи.

Все пожелания и отзывы просим направлять по адресу: Москва, И-51, Трубная, 29/14, издательство «Высшая школа».

*РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ*

# СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

## Тема 1

## Общие методы расчета и основные свойства электрических цепей

Основными законами электрического состояния любой цепи являются законы Кирхгофа. Для быстрого и правильного расчета электрических цепей с помощью законов Кирхгофа необходимо приобрести навыки в составлении уравнений на основании этих законов.

Линейную электрическую цепь любого вида можно также рассчитать методом контурных токов или методом узловых потенциалов. Если число взаимно независимых контуров $k$ и число узлов схемы $n$ связаны между собой неравенством $k < (n - 1)$, то для расчета такой цепи пользуются методом контурных токов. В случаях когда выполняется неравенство $(n - 1) < k$, для расчета цепей рекомендуется применять метод узловых потенциалов.

Расчет линейных электрических цепей можно значительно упростить с помощью принципа наложения и свойства взаимности. В связи с этим пользуются входными и взаимными проводимостями ветвей. Важным свойством линейных электрических цепей является линейная связь между током и напряжением или между токами различных ветвей при изменении сопротивлений этих ветвей от нуля до бесконечности. Линейные соотношения можно с успехом применять при расчете цепей с изменяющимися параметрами.

### *Примеры и задачи*

1-1. Сколько уравнений необходимо составить на основании первого и второго законов Кирхгофа для определения токов разветвленной электрической цепи, состоящей из $m$ ветвей и содержащей $n$ узлов? Ответ обосновать соответствующим доказательством, принимая заданными э. д. с. и сопротивления ветвей.

1-2. На каком законе основывается метод контурных токов?

1-3. На каких законах основывается метод узловых потенциалов?

1-4. В чем сущность свойства взаимности? Дать формулировку этого свойства.

1-5. В сложной схеме действует несколько э. д. с., причем ток в каждой ветви может быть найден путем наложения частичных токов, создаваемых каждой э. д. с.

Можно ли определить мощность каждой ветви суммированием мощностей, обусловленных каждым частичным током?

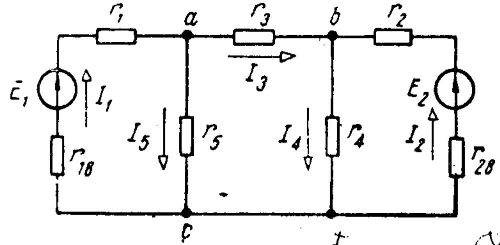



Рис. 1-1

1-6. Дать определение входной и взаимной проводимостей ветвей. Для каких цепей взаимная проводимость $g_{12}$ между первой и второй ветвями, найденная из выражения $g_{12} = \frac{I_1}{E_2}$, будет равна $g_{21} = \frac{I_2}{E_1}$?

1-7. Пользуясь методом контурных токов, определить токи во всех ветвях схемы рис. 1-1, если

$$E_1 = 48\ в;\quad E_2 = 24\ в;\quad r_1 + r_{1в} = 4\ ом;$$

$$r_2 + r_{2в} = 4\ ом;\quad r_3 = 2\ ом;\quad r_4 = r_5 = 4\ ом.$$

## Решение

Пользуясь методом контурных токов, напишем для этой схемы следующие уравнения:

$$E_1 = (r_{1в} + r_1 + r_5)\,I_1 - r_5 I_3;$$

$$0 = (r_3 + r_4 + r_5)\,I_3 - r_5 I_1 + r_4 I_2;$$

$$E_2 = (r_{2в} + r_2 + r_4)\,I_2 + r_4 I_3.$$

После подстановки числовых значений э. д. с. и сопротивлений и совместного решения этих уравнений получим

$$I_1 = 7a,\quad I_2 = 2a\quad и\quad I_3 = 2a.$$

Токи в ветвях с сопротивлениями $r_4$ и $r_5$ соответственно равны $I_4 = I_2 + I_3 = 4a$ и $I_5 = I_1 - I_3 = 5a$.

**1-8.** Пользуясь методом узловых потенциалов, найти токи во всех ветвях схемы рис. 1-1.

Решение

Примем потенциал $\varphi_c$ узла $c$ равным нулю ($\varphi_c = 0$). Для узлов $a$ и $b$ напишем соответственно следующие уравнения (независимо от положительных направлений токов в ветвях):

$$\varphi_a (g_1 + g_5 + g_3) - \varphi_b g_3 = E_1 g_1;$$

$$-\varphi_a g_3 + \varphi_b (g_3 + g_4 + g_2) = E_2 g_2.$$

В этих уравнениях

$$g_1 = \frac{1}{r_1 + r_{1в}} = 0,25 \text{ сим},$$

$$g_2 = \frac{1}{r_2 + r_{2в}} = 0,25 \text{ сим},$$

$$g_3 = 0,5 \text{ сим}, \quad g_4 = g_5 = 0,25 \text{ сим}.$$

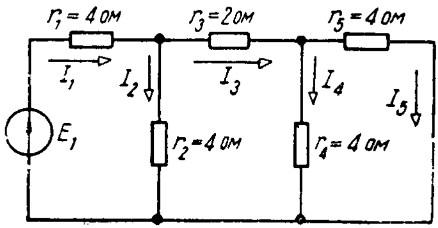


Рис. 1-2

После подстановки числовых значений э. д. с. и проводимостей ветвей получим

$$\varphi_a - 0,5\varphi_b = 12;$$

$$-0,5\varphi_a + \varphi_b = 6.$$

Из этих уравнений имеем: $\varphi_a = 20$ *в* и $\varphi_b = 16$ *в*. Зададимся положительными направлениями токов в ветвях схемы рис. 1-1, после чего получим

$$I_1 = (E_1 - \varphi_a) g_1 = (48 - 20)\, 0,25 = 7a;$$

$$I_2 = (E_2 - \varphi_b) g_2 = (24 - 16)\, 0,25 = 2a;$$

$$I_3 = (\varphi_a - \varphi_b) g_3 = (20 - 16)\, 0,5 = 2a;$$

$$I_4 = \varphi_b g_4 = 16 \cdot 0,25 = 4a \quad \text{и} \quad I_5 = \varphi_a g_5 = 20 \cdot 0,25 = 5a.$$

**1-9.** Определить входные и взаимные проводимости ветвей схемы рис. 1-2.

Решение

Для определения входной проводимости $g_{11}$ и взаимных проводимостей между первой и остальными ветвями зададимся током в ветви с сопротивлением $r_5$, например $I_5 = 1a$, и найдем токи в остальных ветвях и э. д. с. $E_1$. Так как сопротивление $r_4 = r_5$, то $I_4 = I_5 = 1a$ и $I_3 = I_4 + I_5 = 2a$.

Напряжение на сопротивлении $r_2$

$$U_2 = r_5 I_5 + r_3 I_3 = 4 + 4 = 8в$$

и ток

$$I_2 = \frac{U_2}{r_2} = 2a.$$

Ток

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 2 = 4a,$$

а э. д. с.

$$E_1 = U_2 + r_1 I_1 = 24в.$$

Входная проводимость

$$g_{11} = \frac{I_1}{E_1} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \text{ сим}.$$

Взаимные проводимости между первой и остальными ветвями:

$$g_{12} = g_{21} = \frac{I_2}{E_1} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ сим};$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{I_3}{E_1} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ сим};$$

$$g_{14} = g_{41} = \frac{I_4}{E_1} = \frac{1}{24} \text{ сим}$$

$$g_{15} = g_{51} = g_{14} = \frac{1}{24} \text{ сим}.$$

Аналогичным путем определяются входные и взаимные проводимости остальных ветвей:

$$g_{22} = g_{33} = g_{44} = g_{55} = g_{11} = \frac{1}{6} \text{ сим};$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{1}{12} \text{ сим};$$

$$g_{24} = g_{42} = g_{25} = g_{52} = \frac{1}{24} \text{ сим};$$

$$g_{34} = g_{43} = g_{35} = g_{53} = \frac{1}{12} \text{ сим}; \quad g_{45} = g_{54} = \frac{1}{12} \text{ сим}.$$

1-10. В ветви с сопротивлениями $r_3$ и $r_5$ схемы рис. 1-2 включены э. д. с. $E_3 = 12$ *в* и $E_5 = 24$ *в* (рис. 1-3).

Определить токи во всех ветвях, если э. д. с. $E_1 = 24$ *в*.

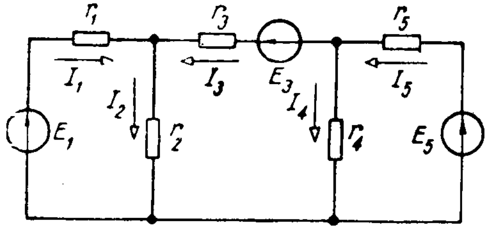



Рис. 1-3

## Решение

Зная из предыдущей задачи входные и взаимные проводимости ветвей этой схемы, токи в ветвях легко определить на основании принципа наложения, т. е.

$$I_1 = E_1 g_{11} - E_3 g_{13} - E_5 g_{15} = 24\,\frac{1}{6} - 12\,\frac{1}{12} - 24\,\frac{1}{24} = 2a;$$

$$I_2 = E_1 g_{21} + E_3 g_{23} + E_5 g_{25} = 24\,\frac{1}{12} + 12\,\frac{1}{12} + 24\,\frac{1}{24} = 4a;$$

$$I_3 = E_3 g_{33} - E_1 g_{31} + E_5 g_{35} = 12\,\frac{1}{6} - 24\,\frac{1}{12} + 24\,\frac{1}{12} = 2a;$$

$$I_4 = E_1 g_{41} - E_3 g_{43} + E_5 g_{45} = 24\,\frac{1}{24} - 12\,\frac{1}{12} + 24\,\frac{1}{12} = 2a;$$

$$I_5 = E_5 g_{55} + E_3 g_{53} - E_1 g_{51} = 24\,\frac{1}{6} + 12\,\frac{1}{12} - 24\,\frac{1}{24} = 4a.$$

1-11. В схеме рис. 1-4 сопротивление $r$ изменяется от $r = 0$ до $r = \infty$. Найти зависимость тока в каждой ветви от напряжения $U$ на сопротивлении $r$.

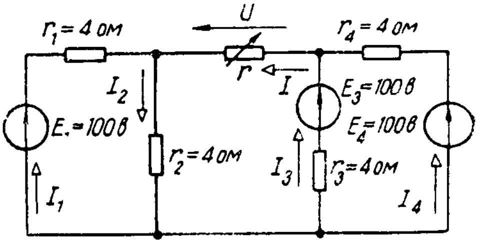



Рис. 1-4

## Решение

Найдем предельные значения напряжения $U$ и тока $I$ при сопротивлении $r = \infty$ и $r = 0$. При $r = \infty$ ток $I = 0$, а напряжение $U = U_x$. Из схемы рис. 1-5 имеем $U_x = 50$ *в*. При $r = 0$ напряжение $U = 0$, а ток $I = I_к$. Для определения тока $I_к$ (рис. 1-6) предварительно найдем напряжение на зажимах четырех параллельных ветвей по формуле

$$U_{12} = \frac{E_1 g_1 + E_4 g_4 + E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4} = \frac{100\frac{1}{4} + 100\frac{1}{4} + 100\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 75\ в.$$

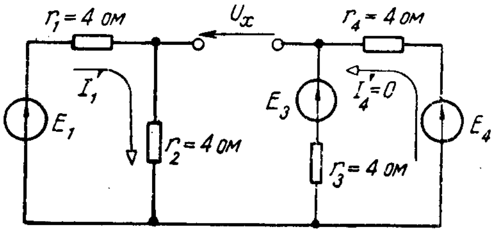



Рис. 1-5

Токи в ветвях равны:

$$I_{1к} = (E_1 - U_{12})\, g_1 = (100 - 75)\, 0{,}25 = 6{,}25\ a;$$

$$I_{2к} = U_{12}\, g_2 = 75 \cdot 0{,}25 = 18{,}75\ a;$$

$$I_{3к} = (E_3 - U_{12})\, g_3 = (100 - 75)\, 0{,}25 = 6{,}25\ a;$$

$$I_{4к} = (E_4 - U_{12})\, g_4 = (100 - 75)\, 0{,}25 = 6{,}25\ a;$$

$$I_к = I_{3к} + I_{4к} = 12{,}5\ a.$$

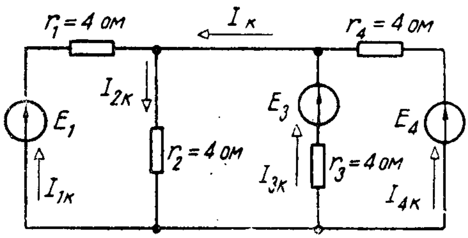



Рис. 1-6

Ток в каждой ветви изменяется в зависимости от напряжения $U$ по линейному закону. Найдем зависимость тока $I$ (см. рис. 1-4) в ветви с сопротивлением $r$ от напряжения $U$.

Пусть $I = a + bU$, где $a$ и $b$ — некоторые постоянные коэффициенты, определяемые из режимов холостого хода и короткого замыкания.

При $r=0$ $U=0$, а $I=I_к=a=12{,}5$ $a$; при $r=\infty$ $I=0$, а $U=U_x$ и $0=I_к+bU_x$,
откуда

$$b=-\frac{I_к}{U_x}=-\frac{12{,}5}{50}=-0{,}25.$$

В результате

$$I=12{,}5-0{,}25\,U.$$

Пусть ток $I_1$ в ветви с сопротивлением $r_1$ и э. д. с. $E_1$ (см. рис. 1-4) изменяется по закону $I_1=a_1+b_1U$.

Для определения коэффициентов $a_1$ и $b_1$ воспользуемся режимами холостого хода и короткого замыкания ветви с переменным сопротивлением $r$.

При $r=0$

$$U=0,\ \text{ток}\ I_{1к}=6{,}25\ a,$$

а при $r=\infty$

$$I_{1x}=\frac{E_1}{r_1+r_2}=I_{2x}=\frac{100}{8}=12{,}5\ a.$$

В свою очередь $I_{1x}=I_{1к}+b_1U_x$, откуда

$$b_1=\frac{I_{1x}-I_{1к}}{U_x}=\frac{12{,}5-6{,}25}{50}=0{,}125.$$

Следовательно,

$$I_1=6{,}25+0{,}125\,U.$$

Аналогичным путем определяются токи в остальных ветвях:

$$I_2=18{,}75-0{,}125\,U;$$

$$I_3=I_4=6{,}25-0{,}125\,U.$$

Закон изменения напряжения или тока любой ветви от переменного напряжения $U$ или тока $I$ может быть найден путем непосредственного применения законов Кирхгофа к заданной схеме. Например, для нахождения зависимости тока $I$ от напряжения $U$ напишем следующие уравнения:

$$E_1=r_1I_1+r_2I_2;\quad E_3-E_4=r_3I_3-r_4I_4;$$

$$E_3=r_3I_3+U+r_2I_2;\quad I=I_3+I_4\quad\text{и}\quad I=I_2-I_1.$$

Из этих уравнений (первое, второе, четвертое и пятое) найдем токи

$$I_3=\frac{E_3-E_4+r_4I}{r_3+r_4};\quad I_2=\frac{E_1+r_1I}{r_1+r_2}$$

и подставим их выражения в третье уравнение. В результате имеем

$$E_{34} - E_{12} = U + (r_{12} + r_{34}) I,$$

где

$$E_{34} = \frac{E_3 r_4 + E_4 r_3}{r_3 + r_4};$$

$$E_{12} = \frac{E_1 r_2}{r_1 + r_2};$$

$$r_{34} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4};$$

$$r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

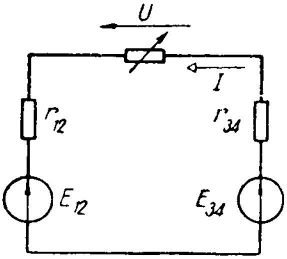



Рис. 1-7

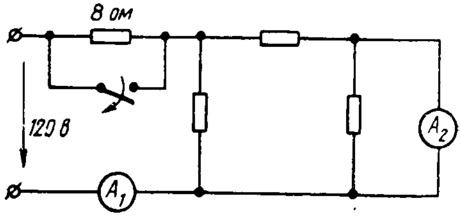



Рис. 1-8

Отметим, что уравнению $E_{34} - E_{12} = U + (r_{12} + r_{34})I$ удовлетворяет эквивалентная схема рис. 1-7. После подстановки в это выражение числовых значений соответствующих величин имеем $I =$

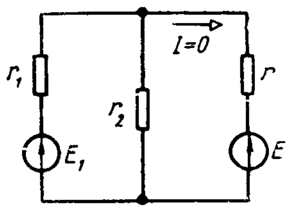



Рис. 1-9

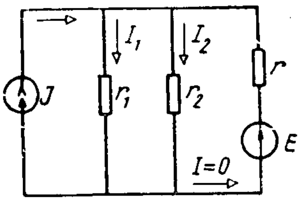



Рис. 1-10

$= 12{,}5 - 0{,}25\ U$, что совпадает с ранее полученным линейным соотношением.

**1-12.** В схеме рис. 1-8 при замкнутом рубильнике амперметры показывают следующие токи: $I_1 = 10\ a$ и $I_2 = 1\ a$.

Каковы будут величины этих токов, если рубильник разомкнуть?

*Ответ.* $I_1 = 6\ a$; $I_2 = 0{,}6\ a$.

1-13. Определить величины электродвижущих сил источников напряжения в схемах рис. 1-9 и 1-10, если токи в ветвях с источниками напряжения будут равны нулю.

*Ответ.* В схеме рис. 1-9 $E = E_1 \frac{r_2}{r_1 + r_2}$ (не зависит от сопротивления $r$).

В схеме рис. 1-10 $E = \mathscr{S} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ (не зависит от сопротивления $r$).

## Тема 2

## Преобразования линейных электрических схем

Для расчета разветвленных электрических цепей очень часто используют преобразования заданных сложных схем в более простые схемы. В результате рационального преобразования схемы обычно уменьшается число неизвестных токов, для определения которых составляется меньшее число уравнений. Это положение особенно важно в таких случаях, когда нет необходимости определять токи во всех ветвях заданной схемы.

Необходимо подчеркнуть, что преобразование схемы одного вида в другую эквивалентную схему во многих случаях является следствием алгебраических преобразований уравнений электрического состояния цепи.

### *Примеры и задачи*

1-14. Какие условия должны быть обязательно выполнены при преобразовании схем одного вида в другие схемы?

1-15. Выполняется ли в общем случае неизменность мощностей, потребляемых заданной схемой до преобразования и после преобразования, если схема содержит источники электрической энергии?

1-16. Требуется доказать, что мощности заданного треугольника без э. д. с. и его эквивалентной звезды будут равны друг другу при неизменных токах и напряжениях на соответствующих зажимах, к которым присоединены сопротивления.

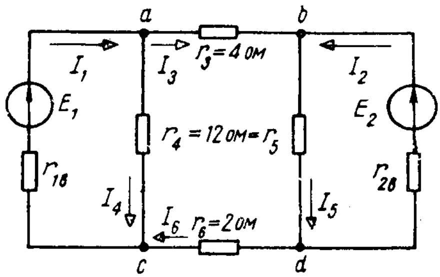



Рис. 1-11

1-17. При последовательном соединении двух сопротивлений $r_1$ и $r_2$ их эквивалентное сопротивление $r_{12} = 50$ *ом*, а при параллельном соединении тех же сопротивлений эквивалентное сопротивление $r'_{12} = 12$ *ом.*

Определить величину каждого сопротивления.

*Ответ.* $r_1' = 20$ *ом*; $r_1'' = 30$ *ом*; $r_2' = 30$ *ом* и $r_2'' = 20$ *ом*.

**1-18.** Э. д. с. первого генератора (рис. 1-11) $E_1 = 120$ *в*, а э. д. с. второго генератора $E_2 = 88$ *в*. Внутренние сопротивления $r_{1в} = 2$ *ом*, $r_{2в} = 8$ *ом*.

Определить токи в генераторах и напряжения на их зажимах.

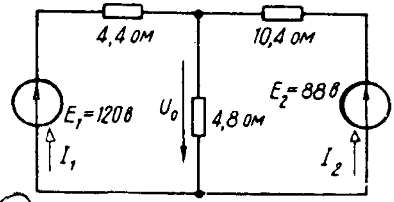



Рис. 1-12

Решение

Так как токи в ветвях $a—b$ и $c—d$ одинаковы, то перенесем сопротивление ветви $c — d$ в ветвь с сопротивлением $a — b$.

После преобразования треугольника в эквивалентную звезду и объединения соответствующих сопротивлений эквивалентной звезды с внутренними сопротивлениями источников получим схему рис. 1-12 с тремя ветвями и двумя узлами. Напряжение между узлами найдем по формуле

$$U_0 = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{120\frac{1}{4,4} + 88\frac{1}{10,4}}{\frac{1}{4,4} + \frac{1}{4,8} + \frac{1}{10,4}} = 67,2 \text{ в}.$$

Токи в генераторах

$$I_1 = (E_1 - U_0) g_1 = (120 - 67,2)\frac{1}{4,4} = 12 \text{ а};$$

$$I_2 = (E_2 - U_0) g_2 = (88 - 67,2)\frac{1}{10,4} = 2 \text{ а}.$$

Напряжения на зажимах генераторов

$$U_1 = E_1 - r_{1в} I_1 = 120 - 2\cdot 12 = 96 \text{ в};$$

$$U_2 = E_2 - r_{2в} I_2 = 88 - 8\cdot 2 = 72 \text{ в}.$$

**1-19.** В условиях задачи 1-18 определить токи в остальных ветвях заданной схемы рис. 1-11.

Решение

Ток

$$I_4 = \frac{U_1}{r_4} = \frac{96}{12} = 8 \text{ а};$$

$$I_5 = \frac{U_2}{r_5} = \frac{72}{12} = 6 \text{ а}.$$

Ток

$$I_3 = I_6 = I_1 - I_4 = I_5 - I_2 = 6 - 2 = 4 \ a.$$

Для проверки правильности определения токов следует подставить их значения в уравнения, которые можно написать на основании второго закона Кирхгофа. Например, для контура $a - b - d - c - a$ (см. рис. 1-11) имеем

$$r_3 I_3 + r_5 I_5 + r_6 I_6 - r_4 I_4 = 0,$$

или

$$4 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 8 \cdot 12 = 0.$$

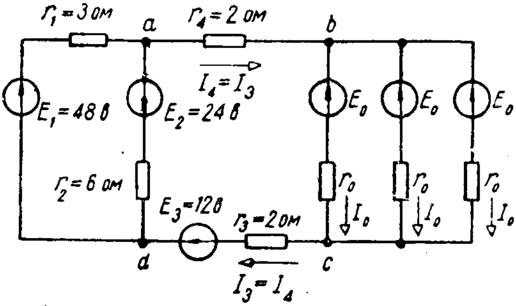



Рис. 1-13

1-20. На рис. 1-13 изображена электрическая схема с семью ветвями. К узлам $b$ и $c$ присоединены параллельно три одинаковых источника электрической энергии с э. д. с. $E_0 = 12$ *в* и сопротивлением $r_0 = 6$ *ом*.

Определить токи во всех ветвях и составить уравнение баланса мощностей.

## Решение

Для определения токов $I_4$ и $I_3$ в ветвях $a - b$ и $c - d$ (токи в этих ветвях одинаковы) предварительно заменим параллельно соединенные ветви с э. д. с. $E_1$ и $E_2$ одной эквивалентной ветвью. Э. д. с. эквивалентной ветви и ее сопротивление найдем, пользуясь выражениями

$$E_{12} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2}{g_1 + g_2} = \frac{48 \frac{1}{3} - 24 \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 24 \ в$$

и

$$r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \ ом.$$

Аналогично найдем эквивалентное сопротивление и эквивалентную э. д. с. для трех параллельных ветвей, присоединенных к узлам $b$ и $c$, т. е.

$$E = \frac{3E_0 \frac{1}{r_0}}{3 \frac{1}{r_0}} = E_0 = 12 \text{ в} \quad \text{и} \quad r = \frac{r_0}{3} = 2 \text{ ом}.$$

В результате такого преобразования получаем схему рис. 1-14, представляющую собой последовательное соединение четырех сопротивлений с напряжениями $U_{ab}$, $U_{bc}$, $U_{cd}$ и $U_{da}$ между соответствующими точками эквивалентной схемы рис. 1-14, равными действительным напряжениям в схеме рис. 1-13.

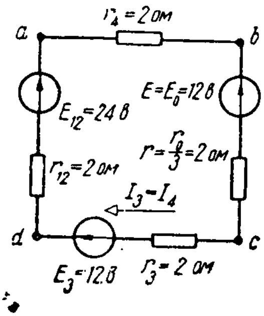



Рис. 1-14

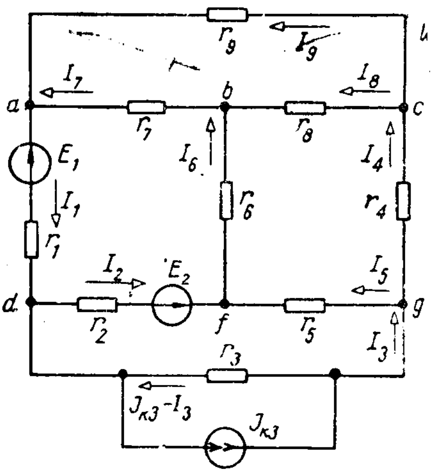



Рис. 1-15

Из схемы рис. 1-14 имеем ток

$$I_3 = \frac{E_3 + E_{12} - E_0}{r_3 + r_{12} + r_4 + r} = \frac{12 + 24 - 12}{2 + 2 + 2 + 2} = 3 \ a,$$

напряжения

$$U_{ad} = E_{12} - r_{12} I_3 = 24 - 2 \cdot 3 = 18 \text{ в};$$

$$U_{bc} = E + rI_3 = 12 + 2 \cdot 3 = 18 \text{ в}.$$

Токи в ветвях заданной схемы найдем, пользуясь выражениями

$$I_2 = (E_2 + U_{ad})\, g_2 = (24 + 18) \frac{1}{6} = 7 \ a;$$

$$I_1 = (E_1 - U_{ad})\, g_1 = (48 - 18) \frac{1}{3} = 10 \ a.$$

Токи в генераторах с одинаковыми э. д. с. $E_0$ равны друг другу и направлены против э. д. с.:

$$I_0 = (U_{bc} - E_0) g_0 = (18 - 12) \frac{1}{6} = 1 \ a.$$

Суммарная мощность всех источников электрической энергии

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 - 3E_0 I_0 = 48 \cdot 10 + 24 \cdot 7 + \\ + 12 \cdot 3 - 3 \cdot 12 = 648 \ \textit{вт}.$$

Мощность приемников электрической энергии должна равняться суммарной мощности источников, т. е.

$$r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + (r_3 + r_4) I_3^2 + 3r_0 I_0^2 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 7^2 + \\ + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 6 \cdot 1^2 = 648 \ \textit{вт}.$$

Отметим, что источники с э. д. с. $E_0$ в данной схеме работают в режиме приемников.

1-21. Определить токи во всех ветвях схемы рис. 1-13, если сопротивления $r_1 = 6$ *ом* и $r_2 = 3$ *ом*.

Данные для остальных ветвей остаются без изменения.

*Ответ*. $I_1 = I_2 = 8a$; $I_3 = I_4 = 0$; $I_0 = 0$.

1-22. На рис. 1-15 изображена электрическая схема с девятью неизвестными токами. Сопротивления ветвей $r_1 = 1$ *ом*;

$$r_2 = r_3 = 2 \ \textit{ом}; \quad r_4 = r_6 = 5 \ \textit{ом}; \quad r_5 = 6 \ \textit{ом};$$

$$r_7 = r_8 = r_9 = 3 \ \textit{ом}.$$

Э. д. с. источников $E_1 = 6$ *в*; $E_2 = 12$ *в*; ток источника тока $I_{к3} = 9 a$.

Пользуясь методом контурных токов и методом узловых потенциалов, найти токи во всех ветвях.

Кроме того, написать систему независимых уравнений на основании законов Кирхгофа и проверить баланс мощностей для заданной схемы.

### Решение

Преобразуем треугольник сопротивлений $r_7$, $r_8$ и $r_9$ в эквивалентную звезду и заменим источник тока источником с э. д. с. $E_{к3} = r_3 \mathcal{I}_{к3} = 2 \cdot 9 = 18$ *в*. В результате преобразований получим эквивалентную схему с тремя независимыми контурами (рис. 1-16). Для этой схемы напишем следующие уравнения:

$$(r_1 + r_{79} + r_{87} + r_6 + r_2) I_1 + (r_6 + r_{87}) I_4 + r_2 I_3 = E_1 - E_2;$$
$$(r_6 + r_{87}) I_1 + (r_{87} + r_{98} + r_4 + r_5 + r_6) I_4 - r_5 I_3 = 0;$$
$$r_2 I_1 - r_5 I_4 + (r_2 + r_5 + r_3) I_3 = E_{к3} - E_2$$

или

$$10I_1 + 6I_4 + 2I_3 = -6;$$

$$6I_1 + 18I_4 - 6I_3 = 0;$$

$$2I_1 - 6I_4 + 10I_3 = 6.$$

После решения этих уравнений получим

$$I_1 = -1{,}5a; \quad I_3 = 1{,}5a \quad \text{и} \quad I_4 = 1a.$$

Токи в отдельных ветвях эквивалентной схемы рис. 1-16 находим по формулам

$$I_2 = I_1 + I_3 = 0; \quad I_6 = I_1 + I_4 = -0{,}5a;$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = 0{,}5a.$$

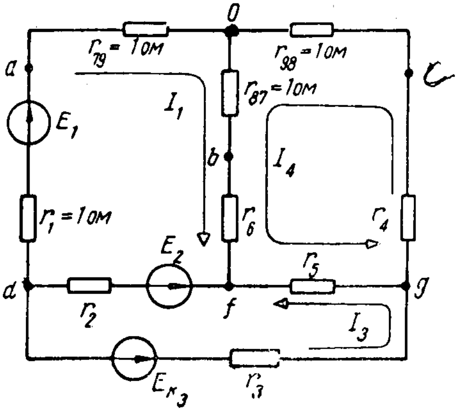



Рис. 1-16

Токи в ветвях заданного треугольника сопротивлений $r_7$, $r_8$ и $r_9$ (рис. 1-15) определим из уравнений:

$$r_7 I_7 + r_{79} I_1 + r_{87} I_6 = 0;$$

$$r_8 I_8 - r_{87} I_6 - r_{98} I_4 = 0 \quad \text{и} \quad r_9 I_9 + r_{79} I_1 - r_{98} I_4 = 0,$$

т. е.

$$I_7 = \frac{2}{3}a, \quad I_8 = \frac{1}{6}a \quad \text{и} \quad I_9 = \frac{5}{6}a.$$

Наконец, ток в сопротивлении $r_3$ (см. рис. 1-15), очевидно, равен разности токов $\mathcal{I}_3$ и $I_3$.

Для определения токов в ветвях методом узловых потенциалов целесообразно, так же как для расчета цепи методом контурных токов, воспользоваться эквивалентной схемой рис. 1-16, так как эта схема содержит лишь четыре узла. Приняв потенциал точки «$O$» равным нулю, напишем уравнения для определения потенциалов $\varphi_d$, $\varphi_f$ и $\varphi_g$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_d(g_1+g_2+g_3)-\varphi_f g_2-\varphi_g g_3 &= -E_1 g_1-E_2 g_2-E_{к3} g_3; \\ -\varphi_d g_2+\varphi_f(g_2+g_6+g_5)-\varphi_g g_5 &= E_2 g_2; \\ -\varphi_d g_3-\varphi_f g_5+\varphi_g(g_4+g_5+g_3) &= E_{к3} g_3, \end{aligned}$$

где

$$g_1=\frac{1}{r_1+r_{79}};\quad g_6=\frac{1}{r_6+r_{87}};\quad g_4=\frac{1}{r_4+r_{98}}.$$

Подставим в эти уравнения числовые значения проводимостей ветвей:

$$\begin{aligned} 3\varphi_d-\varphi_f-\varphi_g &= -36; \\ -3\varphi_d+5\varphi_f-\varphi_g &= 36; \\ -3\varphi_d-\varphi_f+5\varphi_g &= 54. \end{aligned}$$

В результате совместного решения этих уравнений найдем искомые значения потенциалов: $\varphi_d=-9в$, $\varphi_f=3в$ и $\varphi_g=6в$.

Токи в ветвях эквивалентной схемы рис. 1-16 определим по формулам

$$I_1=(\varphi_0-\varphi_d-E_1)g_1=(0+9-6)\frac{1}{2}=1{,}5\,a;$$

$$I_2=(\varphi_d-\varphi_f+E_2)g_2=(-9-3+12)\frac{1}{2}=0;$$

$$I_3=(\varphi_d-\varphi_g+E_{к3})g_3=(-9-6+18)\frac{1}{2}=1{,}5a;$$

$$I_4=(\varphi_g-\varphi_0)g_4=(6-0)\frac{1}{6}=1a;$$

$$I_5=(\varphi_g-\varphi_f)g_5=(6-3)\frac{1}{6}=0{,}5a;$$

$$I_6=(\varphi_f-\varphi_0)g_6=(3-0)\frac{1}{6}=0{,}5a.$$

Зная токи в ветвях эквивалентной схемы рис. 1-16, легко найти токи в ветвях заданного треугольника сопротивлений $r_7$, $r_8$ и $r_9$ и в сопротивлении $r_3$ (см. рис. 1-15).

Поскольку в схеме имеется шесть узлов (точки присоединения источника тока не считаются узлами), то на основании первого закона Кирхгофа составляем пять уравнений, например, для узлов $a$, $b$, $c$, $d$, $f$:

$$I_1 - I_7 - I_9 = 0; \quad I_7 - I_8 - I_6 = 0; \quad I_8 + I_9 - I_4 = 0;$$

$$I_3 + I_2 - I_1 = 0 \quad \text{и} \quad I_6 - I_5 - I_2 = 0.$$

Остальные четыре уравнения легко получить на основании второго закона Кирхгофа для контуров $a-d-f-b-a$, $b-f-g-c-b$, $d-f-g-d$ и $a-b-c-a$:

$$r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_6 I_6 + r_7 I_7 = E_2 - E_1;$$

$$r_4 I_4 + r_8 I_8 - r_6 I_6 - r_5 I_5 = 0;$$

$$r_2 I_2 - r_5 I_5 + r_3 (\mathcal{J}_{к3} - I_3) = E_2;$$

$$r_9 I_9 - r_7 I_7 - r_8 I_8 = 0.$$

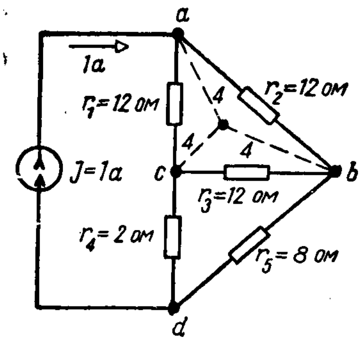


Рис. 1-17

Так как ток $I_1$ направлен навстречу э. д. с. $E_1$, то источник с э. д. с. $E_1$ потребляет мощность

$$P_1 = -E_1 \; I_1 = -6 \cdot 1{,}5 = -9 \; вт.$$

Мощность источника с э. д. с. $E_2$ равна 0, поскольку $I_2 = 0$.

Мощность источника тока равна произведению напряжения на его зажимах на ток $\mathcal{J}_{к3}$, т. е.

$$P_{т3} = U_{т3} \mathcal{J}_{к3} = (\mathcal{J}_{к3} - I_3) r_3 \mathcal{J}_{к3} = 7{,}5 \cdot 2 \cdot 9 = 135 \; вт.$$

Мощность, отдаваемая источниками,

$$\sum P = P_1 + P_2 + P_{т3} = -9 + 0 + 135 = 126 \; вт.$$

Сумма мощностей в сопротивлениях схемы

$$\sum rI^2 = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 (\mathcal{J}_{к3} - I_3)^2 + r_4 I_4^2 + r_5 I_5^2 + r_6 I_6^2 +$$

$$+ r_7 I_7^2 + r_8 I_8^2 + r_9 I_9^2 = 1 \cdot 1{,}5^2 + 0 + 2 \cdot 7{,}5^2 + 5 \cdot 1^2 +$$

$$+ 6 \cdot 0{,}5^2 + 5 \cdot 0{,}5^2 + 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right] = 126 \; вт,$$

т. е.

$$\sum P = \sum rI^2.$$

1-23. Определить токи в ветвях схемы рис. 1-17. При решении задачи воспользоваться формулами преобразования треугольника в звезду.

## Решение

После преобразования треугольника, состоящего из сопротивлений $r_1$, $r_2$ и $r_3$, в эквивалентную звезду (показана на рис. 1-17 пунктирными прямыми) токи в ветвях с сопротивлениями $r_4$ и $r_5$ можно определить по формулам

$$I_4 = \mathscr{I} \frac{(4 + r_4)(4 + r_5)}{(8 + r_4 + r_5)(4 + r_4)} = \frac{6 \cdot 12}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3} a;$$

$$I_5 = \mathscr{I} \frac{(4 + r_4)(4 + r_5)}{(8 + r_4 + r_5)(4 + r_5)} = \frac{6 \cdot 12}{18 \cdot 12} = \frac{1}{3} a.$$

Ток в ветви с сопротивлением $r_3$ можно определить из уравнения

$$r_5 I_5 - r_3 I_3 - r_4 I_4 = 0;$$

$$I_3 = \frac{r_5 I_5 - r_4 I_4}{r_3} = \frac{\frac{4}{3}}{12} = \frac{1}{9} a.$$

Токи $I_1$ и $I_2$ легко найти из выражения

$$I_1 = \mathscr{I} - I_2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9},$$

где

$$I_2 = I_3 + I_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} a.$$

## Тема 3

## Двухполюсники и четырехполюсники

Важной теоремой, позволяющей находить ток в любой ветви электрической цепи, является теорема об активном двухполюснике, или, как ее иногда называют, теорема об эквивалентном генераторе. С помощью этой теоремы можно в некоторых случаях определять токи не только в тех ветвях, к которым она непосредственно применяется, но и в других ветвях, используя при этом принцип наложения.

Основные положения теории четырехполюсника определяются уравнениями, связывающими ток и напряжение на входных зажимах с напряжением и током на выходных зажимах с помощью коэффициентов четырехполюсника $a$, $b$, $c$ и $d$. Эти коэффициенты могут быть найдены опытным путем или расчетом. Во всех проверочных расчетах полезно учитывать связь между самими коэффициентами, выражающуюся уравнением $ad - bc = 1$.

### *Примеры и задачи*

**1-24.** Сформулировать и доказать теорему об активном двухполюснике.

**1-25.** При каком соотношении между мощностями источника и приемника должна работать линия передачи электрической энергии (при максимальной мощности приемника или при максимально возможном к. п. д.)?

1-26. При каком соотношении между сопротивлением линии $r_л$ и сопротивлением нагрузки $r_2$ должна работать линия передачи электрической энергии, чтобы потери в линии не превышали 5% от передаваемой приемнику мощности?

1-27. Будет ли к. п. д. реальной установки равен к. п. д. эквивалентной схемы, в которой реальные источники электрической энергии представлены в виде последовательного соединения эквивалентной э. д. с. и внутреннего сопротивления активного двухполюсника?

1-28. Требуется, пользуясь линейным соотношением вида $I = I_к\left(1 - \frac{U}{U_x}\right)$, получить формулу, дающую аналитическое выражение теоремы об активном двухполюснике.

Решение

Пусть сопротивление ветви, в которой определяется ток $I$, равно $r$; тогда напряжение на зажимах этого сопротивления будет $U = rI$. Подставляя значение $U$ в формулу, указанную в условии задачи, и заменяя

$$I_к = \frac{U_x}{r_в},$$

получим

$$I = \frac{U_x}{r_в + r}.$$

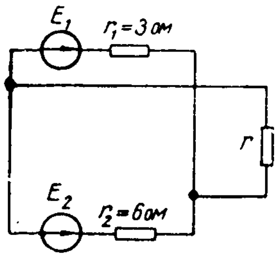


Рис. 1-18

1-29. Каким соотношением связаны между собой коэффициенты симметричного четырехполюсника?

1-30. Как определить параметры Т-образной эквивалентной схемы четырехполюсника, если известны параметры П-образной эквивалентной схемы?

1-31. В сопротивлении $r$ приемника (рис. 1-18) определяется ток на основании теоремы об активном двухполюснике. Чему равно внутреннее сопротивление $r_в$ для этой схемы?

*Ответ.* $r_в = 2$ *ом.*

1-32. В условиях предыдущей задачи (см. рис. 1-18) найти сопротивление приемника, при котором мощность приемника имеет максимальное значение.

*Ответ.* При максимальной мощности приемника величина его сопротивления равна внутреннему сопротивлению эквивалентного источника, т. е.

$$r = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2 \text{ ом}.$$

1-33. В условиях задачи 1-31 найти величину к. п. д. установки, если э. д. с. $E_1 = 48$ *в*, $E_2 = 24$ *в*, а сопротивление приемника $r = 2$ *ом*. Сравнить значение к. п. д. установки с к. п. д. эквивалентной схемы, в которой источники электрической энергии заменяются эквивалентным генератором с э. д. с. $E_э$ и внутренним сопротивлением $r_в = 2$ *ом*.

Решение

Для определения тока в приемнике найдем величину эквивалентной э. д. с.:

$$E_э = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2} = \frac{48\frac{1}{3} + 24\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 40 \text{ в}.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора

$$r_в = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ ом}.$$

Ток приемника определяется из выражения

$$I = \frac{E_э}{r_в + r} = \frac{40}{4} = 10 a.$$

Токи в генераторах легко найти, пользуясь выражениями

$$I_1 = (E_1 - rI) g_1 = (48 - 2 \cdot 10)\frac{1}{3} = \frac{28}{3} a;$$

$$I_2 = (E_2 - rI) g_2 = (24 - 2 \cdot 10)\frac{1}{6} = \frac{4}{6} a.$$

К. п. д. установки определяется отношением мощности приемника к суммарной мощности генераторов, т. е.

$$\eta = \frac{rI^2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = \frac{2 \cdot 100}{48\frac{28}{3} + 24\frac{4}{6}} = \frac{200}{464} \approx 0{,}43.$$

К. п. д. эквивалентной схемы

$$\eta_э = \frac{rI^2}{E_э I} = \frac{2 \cdot 100}{40 \cdot 10} = 0{,}5.$$

Мощность эквивалентного генератора меньше суммарной мощности реальных источников на величину потерь в сопротивлениях $r_1$ и $r_2$, возникающих в цепи генераторов при отключении приемника.

Действительно, при $r = \infty$ ток внутри генераторов

$$I_г = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \frac{48 - 24}{9} = \frac{8}{3} a,$$

следовательно, потери в сопротивлениях $r_1$ и $r_2$ будут

$$(r_1 + r_2) I_г^2 = 9 \frac{64}{9} = 64 \text{ вт}.$$

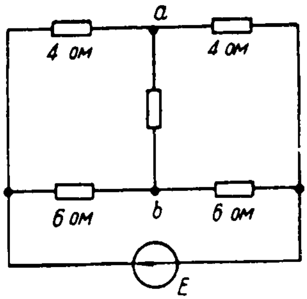



Рис. 1-19

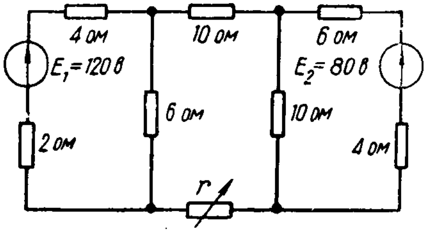



Рис. 1-20

1-34. На основании теоремы об активном двухполюснике требуется выразить ток в ветви $a - b$ (рис. 1-19). Чему равно внутреннее сопротивление этой схемы по отношению к зажимам $a - b$?

*Ответ.* $r = 5$ *ом.*

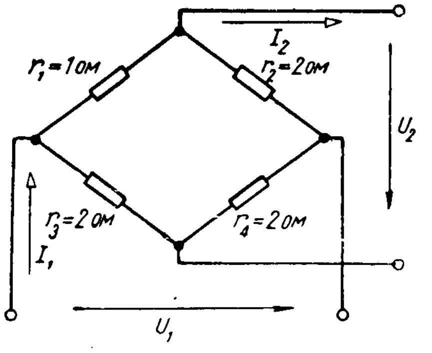



Рис. 1-21

1-35. При каком значении сопротивления $r$ (рис. 1-20) в нем будет максимальная мощность? Определить величину этой мощности.

*Указание и ответ.* Задача решается на основании теоремы об активном двухполюснике; $r = 18$ *ом*, $P_{max} = 5{,}55$ *вт.*

1-36. На рис. 1-21 изображена мостовая схема четырехполюсника. Сопротивления ветвей указаны на схеме. Определить коэффициенты четырехполюсника.

*Указание.* Так как коэффициент $a = \sqrt{\frac{r_{1x}}{r_{2x} - r_{2к}}}$, то для его определения необходимо найти $r_{1x}$, $r_{2x}$ и $r_{2к}$.

Эти сопротивления определяются из выражений

$$r_{1x}=\frac{(r_1+r_2)(r_3+r_4)}{r_1+r_2+r_3+r_4}=\frac{4\cdot 4}{8}=2\ ом;$$

$$r_{2x}=\frac{(r_1+r_3)(r_2+r_4)}{r_1+r_2+r_3+r_4}=\frac{3\cdot 5}{8}=\frac{15}{8}\ ом;$$

$$r_{2к}=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}+\frac{r_3 r_4}{r_3+r_4}=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}\ ом.$$

Следовательно, $a=4$, а остальные коэффициенты легко определяются по формулам

$$c=\frac{a}{r_{1x}}=\frac{4}{2}=2\ сим;$$

$$b=ar_{2к}=4\cdot\frac{7}{4}=7\ ом;$$

$$d=cr_{2x}=2\frac{15}{8}=3{,}75.$$

Проверка правильности определения коэффициентов осуществляется путем подстановки их значений в выражение

$$ad-bc=1.$$

1-37. Симметричный пассивный четырехполюсник включен между источником электрической энергии и приемником.

Определить коэффициенты четырехполюсника, а также э. д. с. и внутреннее сопротивление источника, если для двух режимов четырехполюсника известны следующие величины:

$$r_2=10\ ом;\quad U_1=32\ в\quad и\quad U_2=20\ в;$$

$$r_2=2\ ом;\quad U_1=30\ в\quad и\quad U_2=9\ в.$$

*Ответ.* $a=\frac{7}{6}=d;\quad b=\frac{13}{3}\ ом;$

$$c=\frac{1}{12}\ сим;$$

$$E_1=36\ в\quad и\quad r_в=1\ ом.$$

1-38. В условиях задачи 1-37 определить величину сопротивления приемника, при котором к. п. д. четырехполюсника $\eta=\frac{P_2}{P_1}=\frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}$ будет иметь максимальное значение.

Определить числовое значение к. п. д. при указанном сопротивлении, если напряжение на входных зажимах четырехполюсника $U_1=30\ в$.

*Ответ.* $r = \sqrt{\frac{b}{c}} = 7{,}2;\ \eta = 0{,}32.$

**1-39.** Сопротивления схемы рис. 1-22 $r_1 = 100$ *ом*, $r_2 = 200$ *ом* и $r_3 = 50$ *ом*. Напряжение на входных зажимах $U_1 = 140$ *в*.

Определить коэффициенты $a$, $b$, $c$ и $d$, а также токи $I_1$ и $I_2$ при замкнутом рубильнике $K$.

*Ответ.* $a = 3$; $b = 700$ *ом*; $c = 0{,}02$ *сим* и $d = 5$;

$$I_1 = 1a \quad \text{и} \quad I_2 = 0{,}2a.$$

**1-40.** В условиях задачи 1-39 определить напряжение $U_2$, токи $I_2$ и $I_1$, если сопротивление $r_4 = 700$ *ом* (рубильник $K$ разомкнут).

*Ответ.* $I_2 = 0{,}05$ *а*; $U_2 = 35$ *в*; $I_1 = 0{,}95$ *а*.

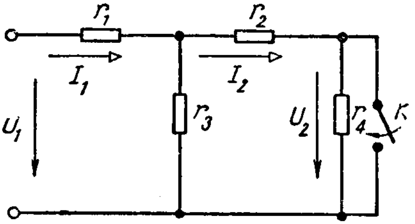



Рис. 1-22

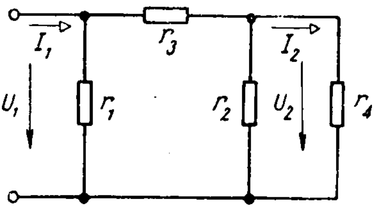



Рис. 1-23

**1-41.** Сопротивления схемы рис. 1-23 $r_1 = 10$ *ом*; $r_2 = 20$ *ом*; $r_3 = 80$ *ом*; $r_4 = 40$ *ом*.

Напряжение на входных зажимах $U_1 = 280$ *в*.

Определить коэффициенты четырехполюсника, токи $I_1$ и $I_2$ и напряжение $U_2$.

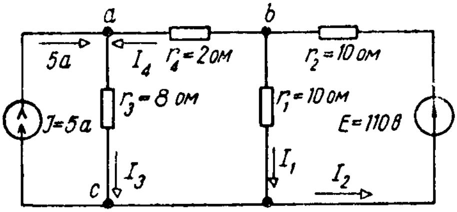



Рис. 1-24

*Ответ.* $a = 1 + \frac{r_3}{r_2} = 1 + 4 = 5;\quad b = r_3 = 80$ *ом*;

$$c = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{r_3}{r_1 r_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{80} + \frac{80}{10 \cdot 20} = 0{,}55 \text{ сим}$$

и $d = 1 + \frac{r_3}{r_1} = 1 + 8 = 9;$

$$I_1 = 31a,\ I_2 = 1a \ \text{ и } \ U_2 = 40 \text{ в}.$$

1-42. Пользуясь теоремой об активном двухполюснике, определить ток в ветви с сопротивлением $r_4$ в схеме рис. 1-24.

Решение

Для определения тока $I_4$ по формуле

$$I_4 = \frac{U_x}{r_{вх} + r_4}$$

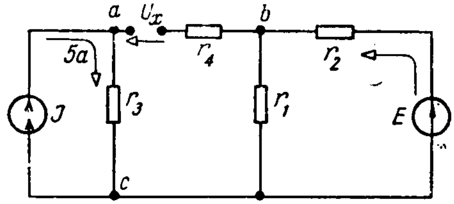



Рис. 1-25

надо предварительно найти напряжение $U_x$ (рис. 1-25) и входное сопротивление $r_{вх}$ (рис. 1-26). Из схемы рис. 1-25 имеем уравнение

$$U_x + \mathcal{J} r_3 - \frac{E r_1}{r_1 + r_2} = 0.$$

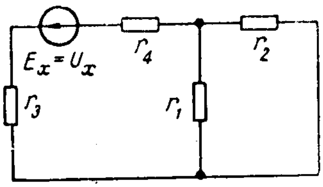



Рис. 1-26

Отсюда

$$U_x = 55 - 40 = 15\ в.$$

Входное сопротивление $r_{вх}$ легко определить из схемы рис. 1-26 по формуле

$$r_{вх} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 = 13\ ом.$$

Искомый ток

$$I_4 = \frac{U_x}{r_{вх} + r_4} = \frac{15}{13 + 2} = 1a.$$

После определения тока $I_4$ легко найти токи в остальных ветвях из уравнений

$$I_3 = \mathcal{J} + I_4 = 5 + 1 = 6a;$$

$$I_1 = \frac{r_3 I_3 + r_4 I_4}{r_1} = \frac{8 \cdot 6 + 2 \cdot 1}{10} = 5a;$$

$$I_2 = I_4 + I_1 = 1 + 5 = 6a.$$

## Тема 4

### Простейшие нелинейные электрические цепи

Поскольку вольтамперные характеристики для большинства нелинейных элементов не определяются точными аналитическими выражениями, то расчет электрических цепей с нелинейными элементами в общем случае нельзя осуществлять аналитическим путем.

Основой для расчета нелинейных электрических цепей являются законы Кирхгофа, связывающие между собой реальные токи, напряжения и э. д. с. на отдельных участках цепи. Все методы расчета цепей, основанные на применении принципа наложения и свойства взаимности, не могут быть в общем случае применены для расчета нелинейных цепей. Вместе с тем если режим нелинейного элемента определяется прямолинейным участком его вольтамперной характеристики, то для расчета можно воспользоваться эквивалентной схемой нелинейного элемента с постоянной э. д. с. и постоянным дифференциальным (динамическим) сопротивлением.

Здесь рассматриваются преимущественно графо-аналитические приемы расчета простейших нелинейных цепей, основанные на графическом решении уравнений Кирхгофа и на применении теоремы об активном двухполюснике и основных уравнений четырехполюсника.

*Примеры и задачи*

1-43. Назвать примеры нелинейных элементов электрических цепей.

1-44. Что называется статическим и дифференциальным сопротивлением нелинейного элемента? Для каких нелинейных элементов это сопротивление имеет отрицательный знак?

1-45. Для какой цепи и при каких условиях можно заменить нелинейный элемент его эквивалентной схемой с постоянной э. д. с. и постоянным дифференциальным сопротивлением?

1-46. Почему для расчета электрических цепей с нелинейными элементами нельзя в общем случае применять принцип наложения и свойство взаимности?

1-47. Можно ли для расчета электрических цепей с нелинейными элементами применять метод контурных токов?

1-48. Начертить одну из схем для стабилизации напряжения.

1-49. Какие надо выполнить условия для получения устойчивого режима в простейшей последовательной цепи с нелинейными элементами?

1-50. Внешняя характеристика генератора последовательного возбуждения определяется данными табл. 1-1.

Таблица 1-1

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_г$, *в* . . . . . . . . . . . | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 | 240 |
| $I$, *а* . . . . . . . . . . . . | 0 | 5 | 10 | 15 | 22 | 27,5 | 35 | 43 | 54 | 69 | 100 |

К зажимам генератора присоединен приемник с сопротивлением $r = 3$ *ом*. Определить ток в цепи и напряжение на зажимах генератора.

### Решение

По данным таблицы, приведенным в условии задачи, построена кривая изменения напряжения на зажимах генератора от тока $I$, т. е. $U_г = f_1(I)$ (рис. 1-27).

На этом же рисунке построена прямая $U = f(I)$, характеризующая изменение напряжения на зажимах сопротивления от тока $I$. Так как напряжение на зажимах генератора должно равняться напряжению на сопротивлении $r$, т. е. $U_г = rI$, то ордината точки $a$ пересечения этих кривых определяет искомое напряжение $U_г = 226$ *в*. Опуская перпендикуляр

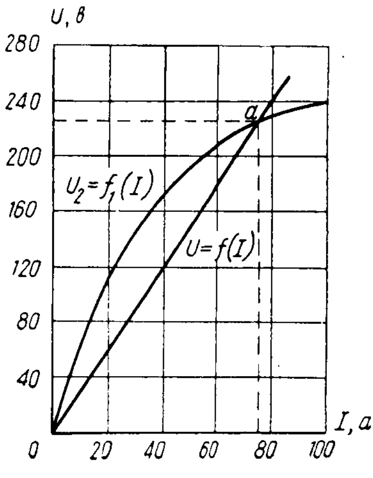



Рис. 1-27

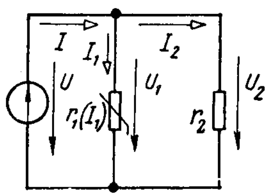



Рис. 1-28

из точки $a$ на ось абсцисс, получим ток в цепи $I = 75,4$ *а*.

1-51. Внешняя характеристика генератора с параллельным возбуждением определяется данными табл. 1-2.

Таблица 1-2

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U$, *в* . . . . . . . . | 220 | 212 | 208 | 204 | 200 | 195 | 188 | 180 | 172 | 160 | 145 | 133 |
| $I$, *а* . . . . . . . . | 0 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 115 |

Нелинейный элемент $r_1(I_1)$ (рис. 1-28) характеризуется следующей вольтамперной характеристикой (табл. 1-3):

Таблица 1-3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$, *в* . . . . . . . . . . . . . | 0 | 10 | 25 | 60 | 110 | 180 | 260 |
| $I_1$, *а* . . . . . . . . . . . . . | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 90 | 95 |

Сопротивление $r_2 = 6$ *ом* не зависит от тока.

Определить токи во всех ветвях схемы рис. 1-28.

*Ответ.* На рис. 1-29 построены все необходимые характеристики, из которых находятся искомые величины: $I = 110 a$, $I_1 = 86$ *а*, $I_2 = 24$ *а*, $U = 144$ *в*.

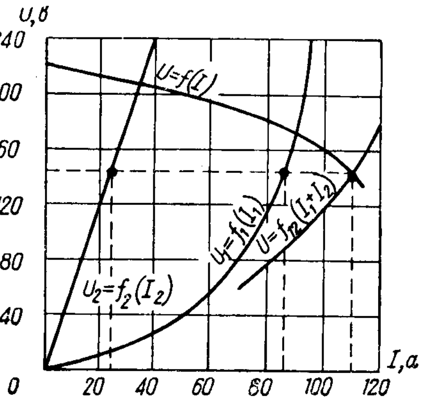



Рис. 1-29

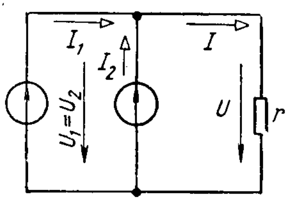



Рис. 1-30а

1-52. На рис. 1-30а изображена схема параллельного соединения двух генераторов и приемника с сопротивлением $r = 1{,}5$ *ом*. Напряжение на зажимах первого генератора $U_1$ изменяется в зависимости от тока $I_1$ по кривой, определяемой данными таблицы в задаче 1-50, а напряжение на зажимах второго генератора определяется данными таблицы в задаче 1-51.

Определить напряжение на зажимах приемника и токи во всех ветвях.

## Решение

Основные уравнения, определяющие режим рассматриваемой цепи,

$$U_1 = U_2 = rI \quad \text{и} \quad I_1 + I_2 = I$$

решаются графическим путем.

На рис. 1-30б построены три вольтамперные характеристики:

$$U_1 = f_1(I_1); \quad U_2 = f_2(I_2) \quad \text{и} \quad U = f(I).$$

По первым двум характеристикам построена вспомогательная кривая, устанавливающая зависимость напряжения

$$U_{12} = f_{12}(I_1 + I_2)$$

на зажимах генератора от суммарного тока $I = I_1 + I_2$.

Эта кривая построена по точкам путем суммирования токов $I_1$ и $I_2$ для одних и тех же значений напряжений $U_1$ и $U_2$. Для точки пересечения $a$ кривой $U_{12} = f_{12}(I_1 + I_2)$ с прямой $U = f(I)$ справедливы основные уравнения. Суммарный ток $I$ определяется в некотором масштабе отрезком $ob$, токи в генераторах — отрезками $oc$ и $od$, а напряжение на зажимах — ординатой $ba$. Из кривых, приведенных на рис. 1-30 б, имеем $I = 121{,}5$ *а*, $I_1 = 43{,}5$ *а*, $I_2 = 78$ *а* и $U = 182$ *в*.

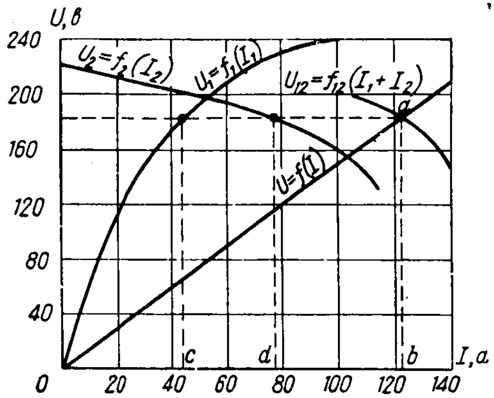



Рис. 1-30б

1-53. На рис. 1-31а изображена электрическая схема с тремя одинаковыми нелинейными элементами.

Вольтамперные характеристики для этих элементов заданы табл. 1-4.

Таблица 1-4

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pm U$, *в* . . . . . . . . . . . | 0 | 5 | 20 | 30 | 50 | 70 | 100 |
| $\pm I$, *ма* . . . . . . . . . . . | 0 | 10 | 30 | 39 | 50 | 55 | 60 |

Э. д. с. источников постоянного напряжения: $E_1 = 100$ *в*; $E_2 = 10$ *в* и $E_3 = 20$ *в*.

Определить токи во всех ветвях, пренебрегая внутренними сопротивлениями источников.

## Решение

Задаемся положительными направлениями токов $I_1$, $I_2$ и $I_3$ и строим характеристики (рис. 1-31б):

$$I_1 = f_1(U_{BA}) = f_1(E_1 - U_1);$$

$$I_2 = f_2(U_{BA}) = f_2(E_2 - U_2);$$

$$I_3 = f_3(U_{BA}) = f_3(-E_3 + U_3),$$

где $U_1$, $U_2$ и $U_3$ — напряжения на зажимах соответствующих нелинейных элементов (рис. 1-31а).

Затем строим вспомогательную характеристику:

$$I_1 + I_2 = f_{12}(U_{BA})$$

и находим точку $a$ пересечения этой кривой с характеристикой $I_3 =$

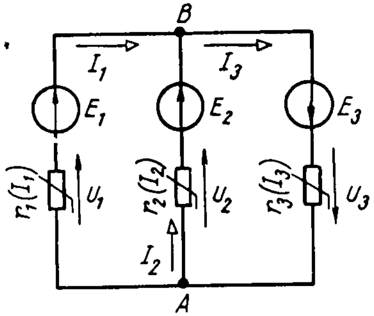



Рис. 1-31а

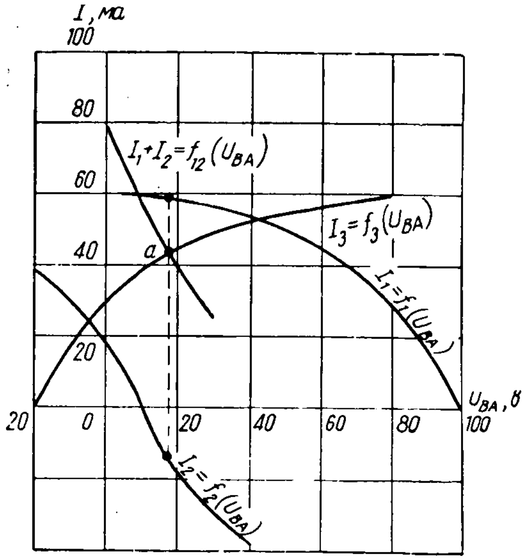



Рис. 1-31б

$= f_3(U_{BA})$. Так как ток $I_3 = I_1 + I_2$, а напряжение $E_1 - U_1 = E_2 - U_2 = -E_3 + U_3$, то ордината точки $a$ определяет ток $I_3$. Из рис. 1-31б получаем

$$I_3 = 43 \text{ ма}, \quad I_1 = 58 \text{ ма} \quad \text{и} \quad I_2 = -15 \text{ ма}.$$

Отрицательный знак у $I_2$ означает, что действительное направление этого тока противоположно принятому за положительное.

1-54. На рис. 1-32а изображена схема моста с нелинейным элементом $r_1(I_1)$ в ветви $a - b$. Вольтамперная характеристика этого нелинейного элемента задана в виде кривой $I_1 = f_1(U_1)$ на рис. 1-32б. Сопротивления остальных ветвей равны: $r_2 = 4$ *ом*, $r_3 = 6$ *ом*, $r_4 = 12$ *ом* и $r_5 = 2$ *ом*.

Напряжение $U = 12$ *в*.

Определить токи во всех ветвях.

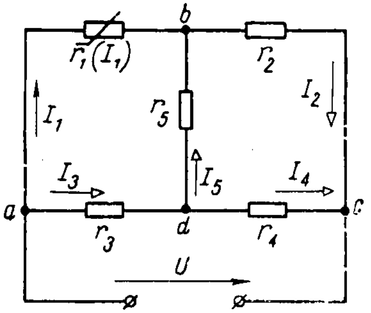



Рис. 1-32а

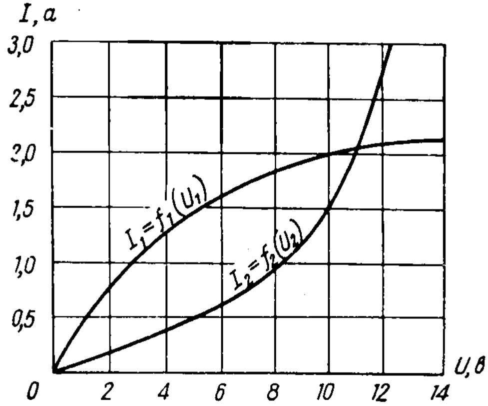



Рис. 1-32б

## Решение

Для определения тока $I_1$ воспользуемся теоремой об активном двухполюснике.

Разомкнем ветвь с элементом $r_1(I_1)$ и найдем напряжение $U_{1x}$ на зажимах $a$ — $b$ (рис. 1-33), пользуясь вторым законом Кирхгофа:

$$U_{1x} = r_3 I_{3x} + r_5 I_{5x},$$

где

$$I_{3x} = \frac{U}{r_3 + \frac{r_4(r_2 + r_5)}{r_2 + r_4 + r_5}} = \frac{12}{6 + \frac{12 \cdot 6}{18}} = 1{,}2a,$$

а

$$I_{5x} = I_{3x} \frac{r_4}{r_2 + r_4 + r_5} = 1{,}2 \frac{12}{18} = 0{,}8 \ a.$$

Следовательно,

$$U_{1x} = 6 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 8{,}8 \ в.$$

Определим входное сопротивление $r_{вх}$ всей цепи по отношению к зажимам ветви $a-b$ при коротком замыкании зажимов $c$ и $a$ (рис. 1-34) по формуле

$$r_{вх}=\frac{\left(r_5+\frac{r_3 r_4}{r_3+r_4}\right)r_2}{r_2+r_5+\frac{r_3 r_4}{r_3+r_4}}=\frac{(2+4)\,4}{2+4+4}=2{,}4\ ом.$$

В результате вся линейная часть цепи заменяется одной ветвью с э. д. с. $E_{1x}=U_{1x}$ и сопротивлением $r_{вх}$.

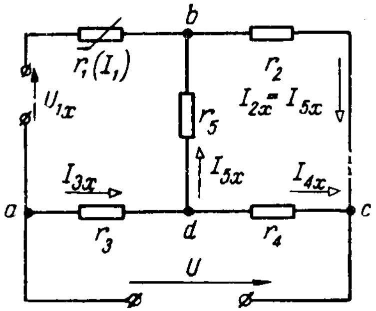



Рис. 1-33

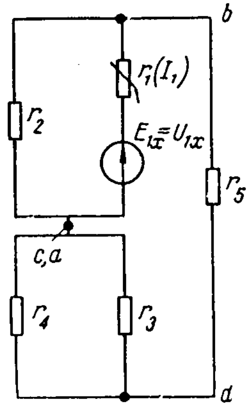



Рис. 1-34

На рис. 1-35а изображена эквивалентная схема в виде последовательного соединения источника э. д. с. $E_{x1}$, $r_{вх}$ и нелинейного элемента $r_1(I_1)$ с током $I_1$, равным действительному току в заданной схеме (см. рис. 1-32а).

Для определения тока $I_1$ на рис. 1-35б построены характеристики $I_1=f_1(U_1)$ и $I_1=f_2(U_{1x}-r_{вх}\,I_1)$. Координаты точки $a$ пересечения этих характеристик определяют рабочий режим данной эквивалентной схемы.

Из рис. 1-35б имеем ток $I_1=1{,}5\ a$ и напряжение на зажимах нелинейного элемента $U_1=U_{ab}=5{,}2\ в$. Возвращаясь к исходной схеме рис. 1-32а, находим

$$I_2=\frac{U-U_1}{r_2}=\frac{12-5{,}2}{4}=1{,}7\ a;$$

$$I_5=I_2-I_1=0{,}2\ a;$$

$$I_4=\frac{r_5 I_5+r_2 I_2}{r_4}=\frac{2\cdot 0{,}2+4\cdot 1{,}7}{12}=0{,}6\ a;$$

$$I_3=I_5+I_4=0{,}2+0{,}6=0{,}8\ a.$$

1-55. Пользуясь формулами преобразования треугольника в эквивалентную звезду или формулами преобразования звезды в эквивалентный треугольник, определить в условиях задачи 1-5 токи во всех ветвях.

1-56. Пользуясь методом контурных токов, получить уравнение для определения тока $I_1$ в ветви с нелинейным элементом $r_1(I_1)$ (см. рис. 1-32а), совпадающее с аналитическим выражением теоремы об активном двухполюснике.

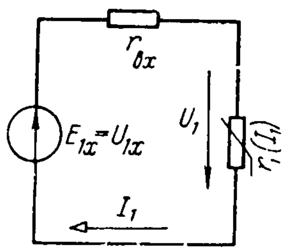



Рис. 1-35а

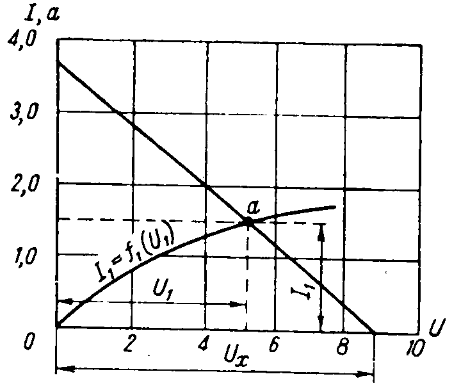



Рис. 1-35б

## Решение

Выберем независимые контуры таким образом, чтобы контурный ток $I_1$ был равен действительному току в нелинейном элементе $r_1(I_1)$, а токи $I_2$ и $I_3$ были действительными токами ветвей с сопротивлением $r_2$ и $r_3$. Отметим, что последнее условие не является обязательным. Пользуясь методом контурных токов, напишем соответственно для контуров

$$a - b - d - a, \quad b - c - d - b \quad \text{и} \quad a - d - c - a$$

(см. рис. 1-32а) следующие уравнения:

$$U_1 + (r_5 + r_3) I_1 - r_5 I_2 - r_3 I_3 = 0;$$

$$-r_5 I_1 + (r_2 + r_5 + r_4) I_2 - r_4 I_3 = 0;$$

$$-r_3 I_1 - r_4 I_2 + (r_3 + r_4) I_3 = U.$$

Из последних двух уравнений выразим токи $I_2$ и $I_3$:

$$I_2 = \frac{U r_4 + [r_5 (r_3 + r_4) + r_3 r_4] I_1}{(r_2 + r_5)(r_3 + r_4) + r_3 r_4};$$

$$I_3 = \frac{U (r_2 + r_5 + r_4) + [r_3 (r_2 + r_5 + r_4) + r_4 r_5] I_1}{(r_2 + r_5)(r_3 + r_4) + r_3 r_4}.$$

Полученные выражения для токов $I_2$ и $I_3$ подставим в уравнение для контура $a - b - d - a$; в результате преобразований имеем

$$r_2 \frac{[r_5(r_3 + r_4) + r_3 r_4]}{(r_2 + r_5)(r_3 + r_4) + r_3 r_4} I_1 = U \frac{r_4 r_5 + r_3(r_2 + r_4 + r_5)}{(r_2 + r_5)(r_3 + r_4) + r_3 r_4} - U_1.$$

Положив в этом уравнении $I_1 = 0$ (размыкание ветви с нелинейным элементом), получим выражение для напряжения

$$U_{1x} = U \frac{r_4 r_5 + r_3(r_2 + r_4 + r_5)}{(r_2 + r_5)(r_3 + r_4) + r_3 r_4},$$

которое полностью совпадает с выражением для того же напряжения, найденным в задаче 1-54 другим способом. В том же уравнении сомножитель при токе $I_1$, очевидно, равен входному сопротивлению $r_{вх}$. Следовательно, $r_{вх} I_1 = U_{1x} - U_1$, что и требовалось доказать.

1-57. В схему рис. 1-32а включен вместо постоянного сопротивления $r_2$ нелинейный элемент $r_2(I_2)$, вольтамперная характеристика которого задана в виде кривой $I_2 = f_2(U_2)$ на рис. 1-32б.

Величины сопротивлений $r_3$, $r_4$ и $r_5$ и напряжение на зажимах всей цепи считать известными из задачи 1-54.

Определить токи во всех ветвях этой схемы.

### Решение

Для определения токов $I_1$ и $I_2$ в ветвях с нелинейными элементами разомкнем эти ветви и найдем напряжения $U_{1x}$ и $U_{2x}$ из схемы рис. 1-36:

$$U_{1x} = \frac{U r_3}{r_3 + r_4} = \frac{12}{18} \cdot 6 = 4 \text{ в};$$

$$U_{2x} = \frac{U r_4}{r_3 + r_4} = \frac{12}{18} 12 = 8 \text{ в}.$$

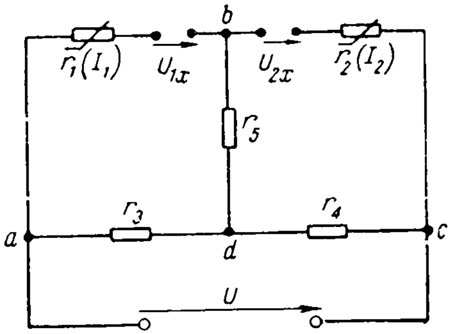



Рис. 1-36

Примечание. Если в результате размыкания ветвей с нелинейными элементами они отсоединяются от остальной части цепи и возникает неопределенность в нахождении напряжений холостого хода на зажимах соответствующих ветвей рис. 1-37 *, то в таких схемах можно принять напряжение на зажимах одной из ветвей, например $U_{5x}$, равным нулю. После этого легко найти напряжения холостого хода $U_{1x}$ и $U_{2x}$ на зажимах остальных ветвей.

Включим в соответствующие ветви с нелинейными элементами э. д. с. $E_{1x} = U_{1x}$ и $E_{2x} = U_{2x}$ и замкнем накоротко зажимы $a$ и $c$,

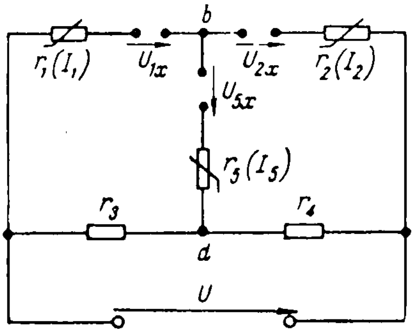



Рис. 1-37

к которым присоединен внешний источник напряжения (рис. 1-38). Токи $I_1$ и $I_2$ в схеме рис. 1-38 будут равны действительным токам в соответствующих ветвях заданной схемы. После замены двух

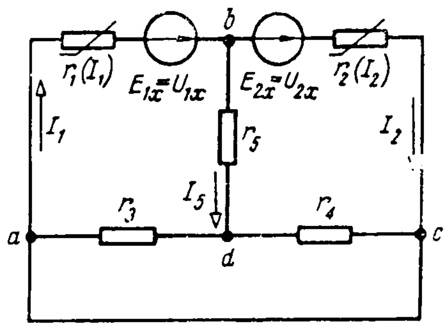



Рис. 1-38

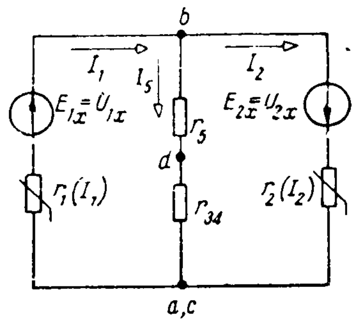



Рис. 1-39

параллельных ветвей с сопротивлениями $r_3$ и $r_4$ одной эквивалентной ветвью получаем схему с двумя узлами рис. 1-39, где $r_5 = 2$ *ом* и

$$r_{34} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = 4 \text{ ом}.$$

---

* См. также «Основы электротехники». Под. ред. К. А. Круга. Госэнергоиздат, 1952, стр. 67, рис. 5-22.

Пользуясь этой схемой, можно токи $I_1$ и $I_2$ определить графическим путем, так же как в задаче 1-53.

На рис. 1-40 построены необходимые характеристики для определения токов $I_1$ и $I_2$. Так как $I_1$ и $I_2$ являются реальными токами соответствующих ветвей заданной схемы, то ток $I_5 = I_1 - I_2$

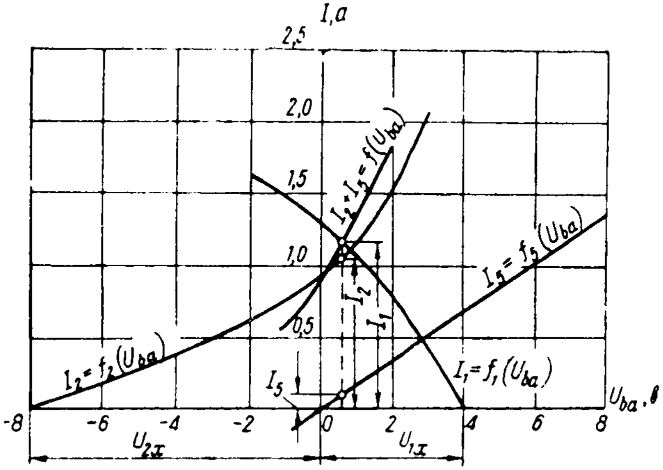



Рис. 1-40

в эквивалентной схеме рис. 1-38 имеет также реальное значение. Токи $I_3$ и $I_4$ определяют на основании законов Кирхгофа из первоначальной схемы. В результате $I_1 = 1{,}15$ *a*, $I_2 = 1{,}05$ *a*, $I_5 = 0{,}1$ *a*, $I_3 = 0{,}6$ *a* и $I_4 = 0{,}7$ *a*; напряжения на зажимах соответствующих нелинейных элементов $U_1 = 3{,}4$ *в* и $U_2 = 8{,}6$ *в*.

1-58. Пользуясь методом контурных токов, требуется в задаче 1-57 получить такие уравнения, чтобы с их помощью можно было найти напряжения $U_{1x}$ и $U_{2x}$, не размыкая ветвей с нелинейными элементами $r_1(I_1)$ и $r_2(I_2)$.

## Решение

Выберем независимые контуры так, чтобы контурные токи $I_1$ и $I_2$ были равны действительным токам в ветвях с соответствующими нелинейными элементами, а контурный ток $I_3$ был бы равен действительному току в ветви с сопротивлением $r_3$. Пользуясь методом контурных токов, напишем для контуров $a - b - d - a$, $b - c - d - b$ и $a - d - c - a$ соответственно следующие уравнения:

$$U_1 + (r_5 + r_3) I_1 - r_5 I_2 - r_3 I_3 = 0;$$

$$-r_5 I_1 + U_2 + (r_5 + r_4) I_2 - r_4 I_3 = 0;$$
$$-r_3 I_1 - r_4 I_2 + (r_3 + r_4) I_3 = U.$$

Определив из последнего уравнения ток $I_3$ и подставив его выражение в остальные уравнения, получим

$$\left(r_5 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}\right) I_1 - \left(r_5 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}\right) I_2 = U \frac{r_3}{r_3 + r_4} - U_1;$$
$$-\left(r_5 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}\right) I_1 + \left(r_5 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}\right) I_2 = U \frac{r_4}{r_3 + r_4} - U_2.$$

Из этих уравнений непосредственно имеем, что при $I_1 = I_2 = 0$

$$U_{1x} = U \frac{r_3}{r_3 + r_4} \quad \text{и} \quad U_{2x} = U \frac{r_4}{r_3 + r_4}.$$

1-59. Пользуясь формулами преобразования звезды в треугольник, определить в условиях задачи 1-57 токи во всех ветвях.

1-60. В условиях задачи 1-59 найти токи во всех ветвях, если напряжение на зажимах цепи $U = 18$ *в*.

## Тема 5

### Магнитные цепи

Расчет магнитных цепей основывается на законе полного тока. Следствием этого закона является закон Кирхгофа для магнитных цепей, аналогичный второму закону Кирхгофа для электрических цепей.

Для расчета разветвленных магнитных цепей пользуются также первым законом Кирхгофа (вытекающим из непрерывности индукционных линий магнитного поля), аналогичным первому закону Кирхгофа для электрических цепей. Расчет магнитных цепей, выполненных из ферромагнитных материалов, аналогичен расчету электрических цепей с нелинейными элементами.

Для расчета магнитных цепей с участками из ферромагнитных материалов нельзя в общем случае пользоваться принципом наложения.

При изучении методов расчета магнитных цепей следует обратить особое внимание на два основных типа задач. В одних задачах обычно задается магнитный поток и требуется определить намагничивающие силы или токи в обмотках; в других задачах известны токи или намагничивающие силы обмоток, требуется найти магнитные потоки в соответствующих участках магнитной цепи. Задачи второго вида гораздо сложнее первых, так как для определения магнитных потоков по заданным намагничивающим силам чаще всего приходится строить вспомогательные магнитные характеристики, представляющие собой зависимости магнитных потоков от магнитных напряжений соответствующих участков магнитной цепи.

## *Примеры и задачи*

**1-61.** Сформулировать законы Кирхгофа для магнитных цепей и провести аналогию между величинами, характеризующими электрические и магнитные цепи.

**1-62.** В чем принципиальное отличие магнитных цепей от электрических?

**1-63.** Можно ли применять принцип наложения для расчета магнитных цепей, выполненных из ферромагнитных материалов?

**1-64.** Сформулировать закон полного тока и, пользуясь этим законом, вывести второй закон Кирхгофа для магнитных цепей.

**1-65.** Какое свойство магнитного поля положено в основу вывода первого закона Кирхгофа?

**1-66.** Чему равен поток вектора магнитной индукции сквозь замкнутую поверхность, выделенную в магнитном поле?

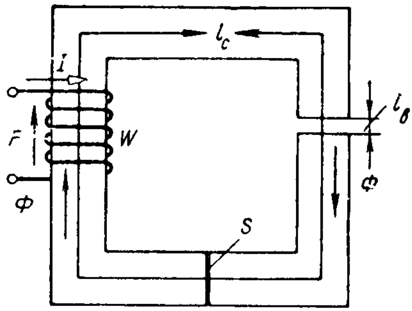


Рис. 1-41

**1-67.** В каких единицах измеряется магнитный поток, намагничивающая сила, магнитная индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля?

**1-68.** В воздушном зазоре электромагнита (рис. 1-41) требуется создать магнитную индукцию $B = 8\,000$ *гс* $= 0{,}8$ *тл*.

Определить намагничивающую силу, необходимую для создания магнитного потока с заданной индукцией, если $l_с = 100$ *см*, $l_в = 1$ *мм*, а сечение сердечника $S = 16$ *см*$^2$ одинаково по всей длине электромагнита. Кривая намагничивания задана таблицей в задаче 1-70 (см. ниже).

### Решение

На основании закона полного тока имеем

$$H_с\, l_с + H_в l_в = Iw = F.$$

Из таблицы находим для $B = 0{,}8$ *тл* $H_с = 4{,}1$ *а/см*. Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_в = 0{,}8\, B_в = 6\,400 \text{ а/см}.$$

Пренебрегая длиной $l_в$ по сравнению с длиной стального сердечника, получим

$$4{,}1 \cdot 100 + 6\,400 \cdot 0{,}1 = 1\,050\,a = F.$$

**1-69.** В условиях задачи 1-68 намагничивающая сила $F = 1\,500$ *а*. Считая заданными геометрические размеры сердечника и кривую намагничивания, найти магнитный поток, создаваемый в электромагните.

### Решение

Для определения магнитного потока предварительно построим магнитную характеристику в виде кривой $\Phi = f(\sum Hl)$. Будем задаваться произвольными значениями магнитного потока, например,

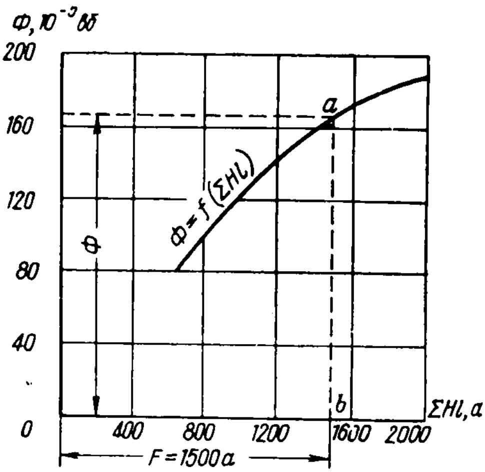



Рис. 1-42

в пределах от $\Phi = 80 \cdot 10^{-5}$ *вб* до $\Phi = 192 \cdot 10^{-5}$ *вб*, что соответствует изменению индукции от $B = 0{,}5$ *тл* до $B = 1{,}2$ *тл* и составим для построения указанной характеристики следующую таблицу:

Таблица 1-5

| $\Phi\,10^{-5}$ *вб* | $B$, *тл* | $H_c$, *а/см* | $H_в$, *а/см* | $H_c\,l_c$, *а* | $H_в\,l_в$, *а* | $\sum Hl = H_c l_c + H_в l_в$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 0,5 | 2,45 | 4000 | 245 | 400 | 645 |
| 96 | 0,6 | 2,95 | 4800 | 295 | 480 | 775 |
| 112 | 0,7 | 3,50 | 5600 | 350 | 560 | 910 |
| 128 | 0,8 | 4,1 | 6400 | 410 | 640 | 1050 |
| 144 | 0,9 | 4,95 | 7200 | 495 | 720 | 1215 |
| 160 | 1,0 | 6,0 | 8000 | 600 | 800 | 1400 |
| 176 | 1,1 | 7,55 | 8800 | 755 | 880 | 1635 |
| 192 | 1,2 | 10 | 9600 | 1000 | 960 | 1960 |

По данным табл. 1-5 на рис. 1-42 построена кривая $\Phi = f(\sum Hl)$.

На основании закона полного тока $F = Iw = \sum Hl$. Поэтому отложим заданную намагничивающую силу $F = 1\,500$ *а* на оси абсцисс и из точки *b* проведем прямую, параллельную оси ординат, до пересечения с кривой $\Phi = f(\sum Hl)$. Ордината точки *а* и определит поток $\Phi = 174 \cdot 10^{-5}$ *вб*.

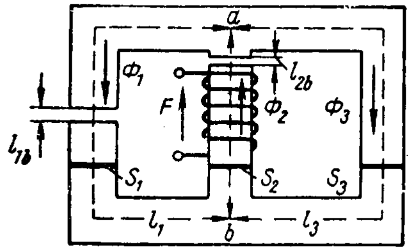



Рис. 1-43а

**1-70.** На рис. 1-43а показана разветвленная магнитная цепь, изготовленная из литой стали. Кривая намагничивания для этой стали задана табл. 1-6.

Таблица 1-6

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *B*, *тл* . . . . . . . | 0,051 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| *H*, *а/см* . . . . . . | 0,71 | 1,36 | 1,65 | 2 | 2,45 | 2,95 | 3,5 | 4,1 | 4,95 | 6,0 |
| *B*, *тл* . . . . . . . | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,75 | 1,8 | 1,85 |
| *H*, *а/см* . . . . . . | 7,55 | 10 | 13 | 18,2 | 25 | 40 | 65 | 80 | 100 | 120 |

Размеры магнитной цепи: $S_1 = 5$ *см*², $S_2 = 9{,}6$ *см*², $S_3 = 7$ *см*², $l_1 = 46$ *см*, $l_{1в} = 0{,}1$ *см*, $l_2 = 18$ *см*, $l_{2в} = 0{,}1$ *см* и $l_3 = 142$ *см*. Катушка с током расположена на среднем стержне. Намагничивающая сила равна $F = Iw = 1870$ *а*.

Определить магнитные потоки во всех участках магнитной цепи.

## Решение

Задаемся значениями магнитных потоков и определяем индукцию в соответствующих участках по формуле $B = \frac{\Phi}{S}$. По таблице находим значения напряженности магнитного поля и подсчитываем магнитные напряжения для соответствующих участков магнитной цепи. Все расчеты сводим в табл. 1-7, 1-8 и 1-9.

Таблица 1-7

| $\Phi_1$ $10^{-5}$ *вб* | $B_1$, *тл* | $H_1$, *а/см* | $H_{1в}$, *а/см* | $H_1 l_1$, *а* | $H_{1в}\, l_{1в}$, *а* | $(\sum Hl)_1 = H_1 l_1 + H_{1в}\, l_{1в}$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,1 | 1,0 | 800 | 46 | 80 | 126 |
| 10 | 0,2 | 1,36 | 1600 | 62,6 | 160 | 222,6 |
| 20 | 0,4 | 2,0 | 3200 | 92,0 | 320 | 412,0 |
| 30 | 0,6 | 2,95 | 4800 | 136 | 480 | 616,0 |
| 40 | 0,8 | 4,10 | 6400 | 189 | 640 | 829,0 |
| 50 | 1,0 | 6,0 | 8000 | 276 | 800 | 1076,0 |
| 60 | 1,2 | 10 | 9600 | 460 | 960 | 1420 |

Таблица 1-8

| $\Phi_2$ $10^{-5}$ *вб* | $B_2$, *тл* | $H_2$, *а/см* | $H_{2в}$, *а/см* | $H_2 l_2$, *а* | $H_{2в}\, l_{2в}$, *а* | $(\sum Hl)_2$, *а* | $F - (\sum Hl)_2$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19,2 | 0,2 | 1,36 | 1600 | 25,0 | 160 | 185 | 1685 |
| 32,4 | 0,4 | 2,0 | 3200 | 36 | 320 | 356 | 1514 |
| 57,6 | 0,6 | 2,95 | 4800 | 53 | 480 | 533 | 1337 |
| 76,8 | 0,8 | 4,10 | 6400 | 74 | 640 | 714 | 1156 |
| 96 | 1,0 | 6,0 | 8000 | 108 | 800 | 908 | 962 |
| 115 | 1,2 | 10 | 9600 | 180 | 960 | 1140 | 730 |
| 134 | 1,4 | 18,2 | 11200 | 327 | 1120 | 1447 | 473 |

На основании данных табл. 1-7, 1-8, 1-9 строим на рис. 1-43б магнитные характеристики $\Phi_1 = f_1(\sum Hl)_1$, $\Phi_2 = f_2[F - (\sum Hl)_2]$ и $\Phi_3 = f_3(H_3 l_3)$.

Суммируя ординаты кривых $\Phi_1 = f_2(\sum Hl)_1$ и $\Phi_3 = f_3(H_3 l_3)$ составим табл. 1-9

Таблица 1-9

| $\Phi_3$ $10^{-5}$ *вб* | $B_3$, *тл* | $H_3$, *а/см* | $H_3 l_3$, *а* |
|---|---|---|---|
| 7 | 0,1 | 1,0 | 142 |
| 14 | 0,2 | 1,36 | 193 |
| 28 | 0,4 | 2,0 | 284 |
| 42 | 0,6 | 2,95 | 419 |
| 56 | 0,8 | 4,10 | 582 |
| 70 | 1,0 | 6,0 | 852 |
| 84 | 1,2 | 10,0 | 1420 |

Для одних и тех же значений магнитного напряжения $U_{abм}$ получим характеристику $\Phi_1 + \Phi_3 = f_{13}(U_{abм})$. Ордината точки *a* дает значение магнитного потока $\Phi_2$, так как $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$. Опуская из точки $a$ перпендикуляр на ось абсцисс, получим точки $d$ и $c$ пересечения с кривыми $\Phi_2 = f_3(H_3 l_3)$ и $\Phi_1 = f_1(\Sigma Hl)_1$, ординаты которых определяют магнитные потоки $\Phi_3$ и $\Phi_1$.

**1-71.** Сердечник разветвленной магнитной цепи (рис. 1-44а) изготовлен из электротехнической стали Э-11. По обмоткам проходит ток $I = 10$ *а*; число витков первой катушки $w_1 = 50$ и второй $w_2 = 35$. Длины отдельных участков магнитной цепи $l_1 = l_3' + l_3'' = 30$ *см* и $l_2 = 12$ *см*. Сечения участков магнитной цепи одинаковы

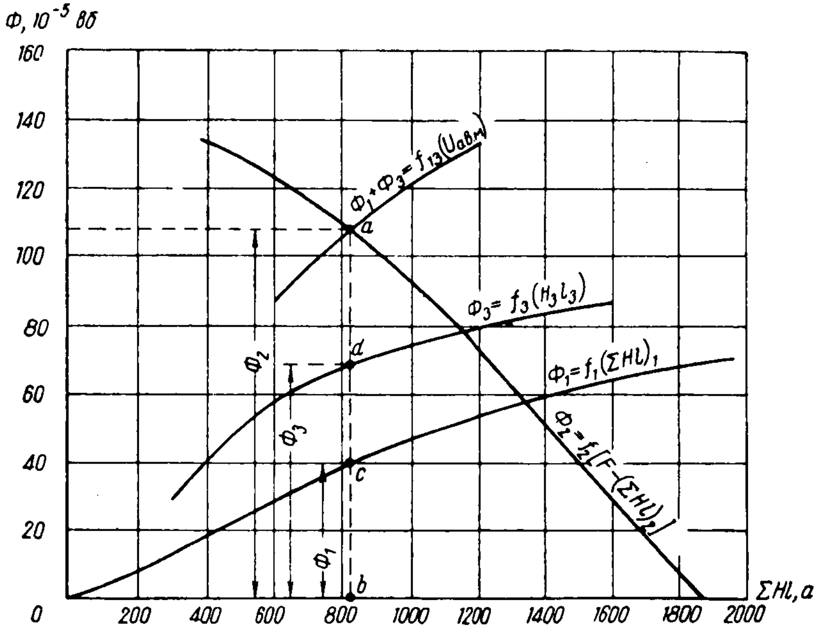



Рис. 1-43б

и равны $S_1 = S_2 = S_3 = 15$ *см*$^2$. Длина воздушного зазора $l_в = 0{,}1$ *см*.

Определить магнитные потоки на всех участках магнитной цепи.

*Указания к решению задачи и ответ.* Для решения задачи надо воспользоваться следующими уравнениями:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3;$$

$$F_1 = w_1 I_1 = H_1 l_1 + H_3 (l_3' + l_3'') + H_в l_в;$$

$$F_2 = w_2 I_2 = H_2 l_2 + H_3 (l_3' + l_3'') + H_в l_в.$$

Пользуясь этими выражениями и кривой намагничивания, необходимо построить следующие магнитные характеристики:

$$\Phi_1 = f_1 (U_{ab\text{м}}) = f_1 (w_1 I_1 - H_1 l_1);$$

$$\Phi_2 = f_2 (U_{ab\text{м}}) = f_2 (w_2 I_2 - H_2 l_2)$$

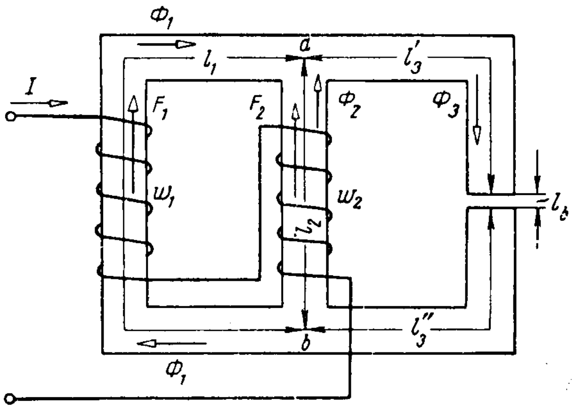



Рис. 1-44а

и

$$\Phi_3 = f_3 (U_{ab\text{м}}) = f_3 \left[H_3 (l_3' + l_3'') + H_\text{в} l_\text{в}\right],$$

где магнитное напряжение

$$U_{ab\text{м}} = H_3 (l_3' + l_3'') + H_\text{в} l_\text{в}.$$

Для построения первых двух характеристик необходимо составить табл. 1-10 и 1-11.

Таблица 1-10

| $\Phi_1 = \Phi_2 = BS$ *вб* $\cdot 10^{-4}$ | $B_1 = B_2$, *тл* | $H_1 = H_2$, *а/см* | $U_{ab\text{м}} = w_1 I_1 - H_1 l_1$, *а* | $U_{ab\text{м}} = w_2 I_2 - H_2 l_2$, *а* |
|---|---|---|---|---|
| 10,50 | 0,70 | 2,5 | 425 | 320 |
| 15,00 | 1,00 | 5,0 | 350 | 290 |
| 18,75 | 1,25 | 10 | 200 | 230 |
| 21,00 | 1,40 | 15 | 50 | 170 |
| 21,75 | 1,45 | 20 | —100 | 110 |

Для построения характеристики $\Phi_3 = f_3 (U_{ab\text{м}})$ третьего участка магнитной цепи достаточно иметь три точки.

Таблица 1-11

| $\Phi_з = B_з S_з$ $вб \cdot 10^{-4}$ | $B_з$, $тл$ | $H_з$, $а/см$ | $H_в = 0{,}8 B_з$, $а/см$ | $H_з (l'_з + l''_з)$, $а$ | $H_в l_в$, $а$ | $U_{abм}$, $а$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,5 | 0,5 | 1,25 | 4000 | 37,5 | 400,0 | 437,5 |
| 10,5 | 0,7 | 2,5 | 5600 | 75,0 | 560 | 635,0 |

На рис. 1-44б построены характеристики $\Phi_1 = f_1(U_{abм})$, $\Phi_2 = f_2(U_{abм})$ и $\Phi_3 = f_3(U_{abм})$.

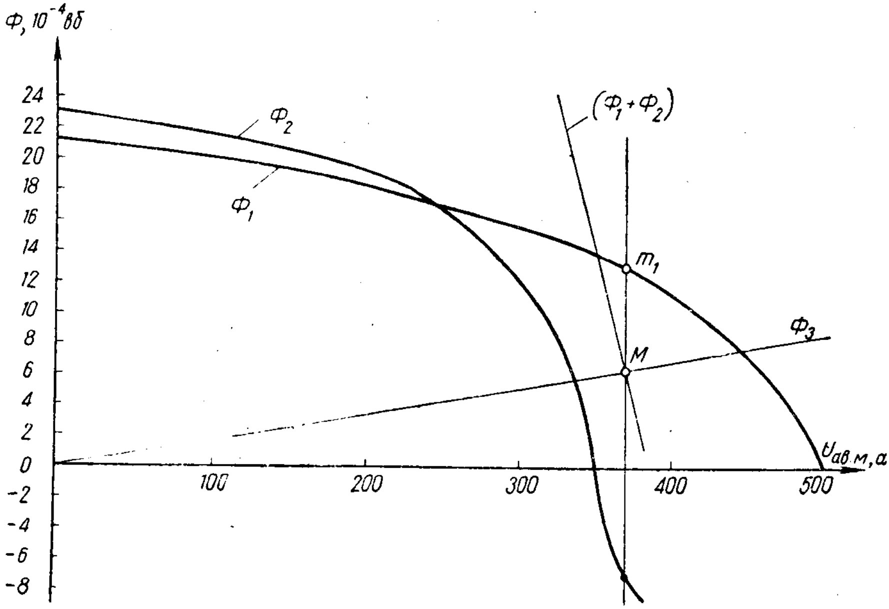



Рис. 1-44б

Кроме того, построена вспомогательная магнитная характеристика $\Phi_1 + \Phi_2 = f_{12}(U_{abм})$.

Точка $m$ пересечения этой характеристики с кривой $\Phi_3 = f_3(U_{abм})$ определяет искомое значение магнитного потока, так как в этой точке полностью удовлетворяются основные уравнения

$$w_1 I_1 - H_1 l_1 = w_2 I_2 - H_2 l_2 = H_3 (l'_3 + l''_3) + H_в l_в$$

и

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3.$$

Из рис. 1-44б получается

$\Phi_1 = 13{,}9 \cdot 10^{-4}$ *вб*; $\Phi_2 = -7{,}2 \cdot 10^{-4}$ *вб* и $\Phi_3 = 6{,}7 \cdot 10^{-4}$ *вб*.

*РАЗДЕЛ ВТОРОЙ*

# СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

## Тема 1

## Основные понятия о цепях синусоидального тока

Расчет электрических цепей при синусоидальных токах и напряжениях значительно упрощается с применением комплексных чисел. Поэтому необходимо тщательно изучить и понять принципы изображения векторов синусоидальных колебаний в виде комплексов в осях комплексной плоскости и усвоить обратный переход — от комплексов тока, напряжения и э. д. с. к их мгновенным значениям.

Важно усвоить соотношения между токами и напряжениями для идеализированных элементов электрических цепей в виде активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей. Надо помнить, что ток в активном сопротивлении совпадает по фазе с напряжением на его зажимах, ток в индуктивности отстает, а в емкости — опережает соответствующее напряжение на четверть периода.

При изучении свойств идеализированных элементов электрических цепей следует учитывать, что реактивные сопротивления индуктивности и емкости есть функции частоты и с помощью этих сопротивлений учитывается влияние соответственно э. д. с., самоиндукции и токов смещения на режим цепи. Необходимо запомнить выражения комплексов сопротивлений и проводимостей для цепей с различными элементами. Кроме того, полезно установить аналитическим и графическим путем (пользуясь векторной диаграммой) связь между активными и реактивными составляющими токов и напряжений для пассивного двухполюсника с опережающим и с отстающим токами.

### *Примеры и задачи*

2-1. Чему равно среднее и действующее значения тока за первую четверть периода и за полный период, если его мгновенное значение определяется уравнением

$$i=14{,}1\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right).$$

*Ответ.* За период $I_{ср}=0$, $I=10$ *а*; за первую четверть периода: $I_{ср}=9$ *а*, $I=10$ *а*.

2-2. Мгновенные значения тока и напряжения на некотором участке цепи определяются уравнениями

$$i=25\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$$

и

$$u=500\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right).$$

Написать выражения для комплексных амплитуд тока и напряжения и найти сдвиг фаз между током и напряжением.

*Ответ.* $\dot{I}_m=25\,e^{j45^\circ}$ и $\dot{U}_m=500\,e^{-j30^\circ}$. Сдвиг фаз $\varphi=-75^\circ$.

2-3. Комплексы действующих значений тока и напряжения на некотором участке цепи определяются следующими выражениями:

$$\dot{I}=(5+j5)\ а \quad и \quad \dot{U}=(20-j20)\ в.$$

Написать выражения для мгновенных значений тока и напряжения и найти сопротивление этого участка в комплексной форме.

*Ответ.* $i=10\sin(\omega t+45^\circ)$ *а*;

$$u=40\sin(\omega t-45^\circ)\ в;\quad Z=-j4\ ом.$$

2-4. Комплекс сопротивления участка цепи $Z=(10+j10)$ *ом*, напряжение на зажимах этого участка определяется уравнением

$$u=.00\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\ в.$$

Определить комплекс действующего значения тока.

*Ответ.* $\dot{I}=I=5$ *а*.

2-5. При частоте $f=50$ *гц* активное сопротивление катушки (принимаем не зависящим от частоты) $r=20$ *ом*, а реактивное $x_L=10$ *ом*. Напряжение на зажимах катушки определяется уравнением

$$u=100\sin(\omega t+45^\circ)\ в.$$

Определить комплекс действующего значения тока, а также активную, реактивную и кажущуюся мощности катушки, если частота источника возрастает в два раза.

*Ответ.* $\dot{I} = I = 2{,}5$ *а*; $P = 125$ *вт*; $Q = 125$ *вар*; $S = 125\sqrt{2}$ *ва*.

**2-6.** В условиях задачи 2-5 найти активную, реактивную и полную проводимости цепи.

*Ответ.* $g = 0{,}025$ *сим*; $b = 0{,}025$ *сим*; $y = 0{,}025\sqrt{2}$ *сим*.

**2-7.** В цепь катушки (см. условие задачи 2-5) включен конденсатор сопротивлением $x_C = \frac{1}{\omega C} = 20$ *ом* при частоте $f = 100$ *гц*.

Найти ток, напряжение на катушке и на конденсаторе, а также активную и реактивную мощности при действующем значении напряжения сети $U = 120$ *в*.

*Ответ.* $I = 6$ *а*; $U_к = 120\sqrt{2}$ *в*; $U_C = 120$ *в*; $P = 720$ *вт* и $Q = 0$.

**2-8.** Комплекс сопротивления участка цепи равен $Z = (10 - j10)$ *ом*. Мгновенное значение напряжения на зажимах всего участка цепи $u = 100 \sin(\omega t + 45°)$ *в*.

Определить мгновенное значение тока, а также активную и реактивную мощности.

*Ответ.* $i = \frac{10}{\sqrt{2}} \cos \omega t$ *а*; $P = 250$ *вт*; $Q = -250$ *вар*.

**2-9.** Комплексы тока и напряжения на зажимах пассивного двухполюсника соответственно равны

$$\dot{I} = (10 + j10)\ а \quad и \quad \dot{U} = (200 - j100)\ в.$$

Определить активную, реактивную и кажущуюся мощности двухполюсника.

*Ответ.* $P = 1\,000$ *вт*; $Q = -3\,000$ *вар*; $S = 1\,000\sqrt{10}$ *ва*.

**2-10.** Комплекс кажущейся мощности, найденный путем умножения напряжения на сопряженный комплекс тока, для некоторого пассивного двухполюсника равен $\dot{S} = 3\,000 + j\,4\,000$.

Определить угол сдвига фаз между током и напряжением на зажимах двухполюсника.

*Ответ.* $\cos \varphi = 0{,}6$. Ток отстает по фазе от напряжения на угол $\varphi$.

## Тема 2

## Расчет цепей при синусоидальных токах

Все методы расчета линейных электрических цепей при постоянных токах и напряжениях целиком распространяются на электрические цепи без взаимной индукции при синусоидальных токах и напряжениях. При этом токи, э. д. с. и сопротивления должны входить в уравнения электрического состояния в виде комплексов. Основными законами, применяемыми для расчета электрических цепей, являются законы Кирхгофа.

Полезной иллюстрацией расчета любой электрической цепи является ее топографическая диаграмма, которая позволяет находить графическим путем напряжения между любыми точками электрической цепи без дополнительных вычислений.

В цепях с взаимной индуктивностью появляется новая разновидность составляющих напряжения, обусловленная э. д. с. взаимной индукции. В связи с этим расчет цепей с взаимной индукцией несколько сложней расчета цепей аналогичной конфигурации без взаимной индукции. На примерах сравнительно легко усвоить методику расчета таких цепей. Важным для практики примером цепи с взаимной индукцией является трансформатор без стального сердечника.

## *Примеры и задачи*

**2-11.** Общее напряжение на зажимах двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями $L_1$ и $L_2$ и сопротивлениями $r_1$ и $r_2$ определяется уравнением

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \ в,$$

где $\psi$ — начальная фаза.

Написать закон изменения тока.

*Ответ.*

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) \ a,$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2}} \ a;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega (L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)}.$$

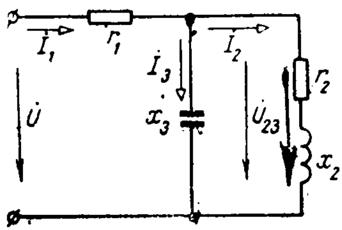



Рис. 2-1

**2-12.** Определить ток $I$ в неразветвленной части цепи, если токи в двух параллельных ветвях этой цепи равны друг другу, т. е. $I_1 = I_2$, а угол сдвига между ними равен 90°.

*Ответ.*

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = I_1\sqrt{2} = I_2\sqrt{2}.$$

**2-13.** На рис. 2-1 показана электрическая схема, в которой $r_1 = 6$ *ом*, $r_2 = 4$ *ом*, $x_2 = 4$ *ом* и $x_3 = 4$ *ом*. Напряжение на зажимах всей цепи $U = 120$ *в*.

Определить токи $I_1$, $I_2$ и $I_3$ и построить векторную диаграмму.

## Решение

Для определения тока $I_1$ найдем комплекс суммарного сопротивления всей цепи по формуле

$$Z_1 = r_1 + \frac{(r_2 + jx_2)(-jx_3)}{r_2 + j(x_2 - x_3)} = 6 + \frac{(4 + j4)(-j4)}{4} = (10 - j4) \text{ ом.}$$

Ток

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{120}{10 - j4} = \frac{120\,(10 + j4)}{116} = (10{,}36 + j4{,}14) \text{ а.}$$

Напряжение на зажимах параллельных ветвей

$$\dot{U}_{23} = Z_{23}\dot{I}_1 = (4 - j4)(10{,}36 + j4{,}14) = (58 - j25) \text{ в.}$$

Токи

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{Z_2} = \frac{58 - j25}{4 + j4} = \frac{(58 - j25)(4 - j4)}{32} = (4{,}13 - j10{,}34) \text{ а;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{-jx_3} = \frac{58 - j25}{-4j} = (6{,}25 + j14{,}5) \text{ а.}$$

На рис. 2-2 построена векторная диаграмма токов и напряжений.

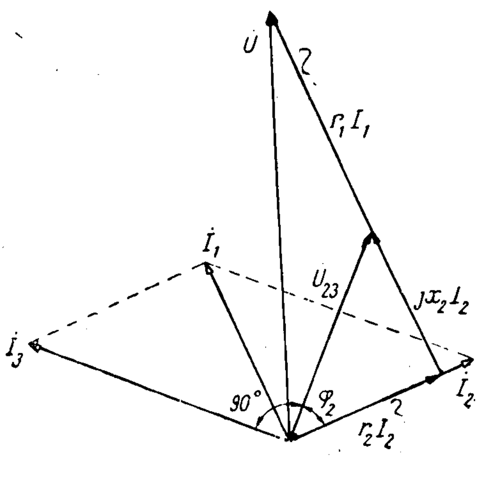



Рис. 2-2

**2-14.** В условиях задачи 2-13 определить величину реактивного сопротивления катушки, при котором ток $\dot{I}_1$ будет совпадать по фазе с напряжением $\dot{U}$, если сопротивление $x_3 = 10$ *ом*.

## Решение

Для того чтобы ток $\dot{I}_1$ совпадал по фазе с напряжением, необходимо выполнить условие, при котором реактивное сопротивление всей схемы должно равняться нулю:

$$Z_{23} = \frac{(r_2 + jx_2)(-jx_3)}{r_2 + j(x_2 - x_3)} = \frac{r_2 x_3^2}{r_2^2 + (x_2 - x_3)^2} + j\frac{x_2 x_3^2 - x_2^2 x_3 - x_3 r_2^2}{r_2^2 + (x_2 - x_3)^2}.$$

Приравнивая мнимую часть этого сопротивления нулю, имеем

$$x_2^2 - x_2 x_3 + r_2^2 = 0,$$

откуда

$$x_2 = \frac{1}{2} x_3 \pm \sqrt{\frac{1}{4} x_3^2 - r_2^2} = 5 \pm 3.$$

Из полученного выражения следует, что при двух значениях сопротивления $x_2' = 8$ *ом* и $x_2'' = 2$ *ом* ток $\dot{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}$.

**2-15.** В условиях задачи 2-14 найти токи во всех ветвях и построить векторную диаграмму, приняв напряжение $U = 120$ *в*, а сопротивление $r_1 = 6$ *ом*.

## Решение

Ток $\dot{I}_1$ в неразветвленной части цепи будет иметь два значения в соответствии с двумя значениями сопротивления $x_2' = 8$ *ом* и $x_2'' = 2$ *ом*:

$$\dot{I}_1' = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 x_3^2}{r_2^2 + (x_2' - x_3)^2}} = \frac{120}{6 + \frac{4 \cdot 100}{16 + 4}} = 4{,}62\ a;$$

$$\dot{I}_1'' = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 x_3^2}{r_2^2 + (x_2'' - x_3)^2}} = \frac{120}{6 + \frac{4 \cdot 100}{16 + 64}} = 10{,}9\ a.$$

Напряжение на зажимах параллельного соединения также будет иметь два значения:

$$\dot{U}_{23}' = \dot{I}_1' \frac{r_2 x_3^2}{r_2^2 + (x_2' - x_3)^2} = 4{,}62 \cdot 20 = 92{,}4\ в;$$

$$\dot{U}_{23}'' = \dot{I}_1'' \frac{r_2 x_3^2}{r_2^2 + (x_2'' - x_3)^2} = 10{,}9 \cdot 5 = 54{,}5\ в.$$

В соответствии с двумя значениями напряжения $U'_{23}$ и $U''_{23}$ токи в ветвях будут иметь также два значения:

$$\dot{I}'_2 = \frac{U'_{23}}{r_2 + jx'_2} = \frac{92,4}{4 + j8} = (4,62 - j9,24)\ a;$$

$$\dot{I}''_2 = \frac{U''_{23}}{r_2 + jx''_2} = \frac{54,5}{4 + j2} = (10,9 - j5,45)\ a.$$

$$\dot{I}'_3 = \frac{\dot{U}'_{23}}{-jx_3} = \frac{92,4}{-j10} = j9,24\ a;$$

$$\dot{I}''_3 = \frac{U''_{23}}{-jx_3} = \frac{54,5}{-j10} = j5,45\ a.$$

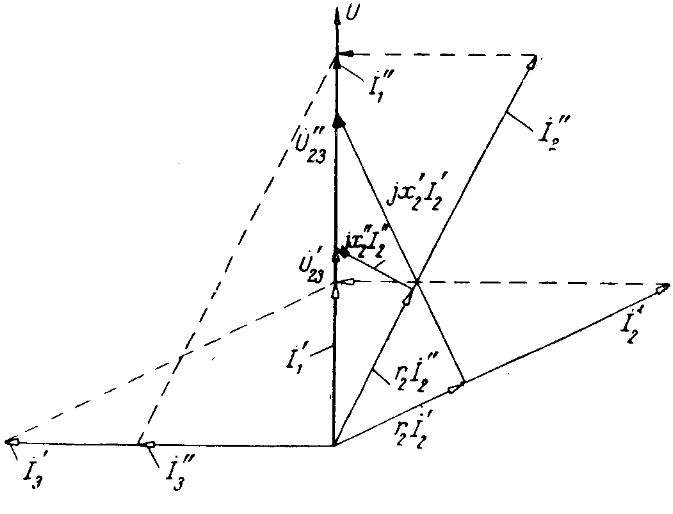



Рис. 2-3

На основании полученных данных на рис. 2-3 построена полная векторная диаграмма, из которой видно, что все значения токов и напряжений удовлетворяют первому и второму законам Кирхгофа для рассматриваемой цепи.

**2-16.** Определить токи во всех ветвях схемы рис. 2-4, если $r = 10$ *ом*, $r_1 = 5$ *ом*, $r_2 = 6$ *ом*, $L = 0,05$ *гн*, $L_2 = 0,1$ *гн*, $C_1 = 100$ *мкф*, $f = 50$ *гц* и $U = 250$ *в*.

*Ответ.* $I = 2,34$ *а*; $I_1 = 6,96$ *а* и $I_2 = 6,91$ *а*.

**2-17.** Определить сопротивление $r_2$, при котором сдвиг фаз между током $I_1$ неразветвленной части цепи рис. 2-5 и напряжением $U$ будет: $\varphi = 0$; $\varphi = 30^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$, если $r_1 = 5$ *ом* и $x_1 =$ $= 5$ *ом*.

*Ответ.* $r_2 = 0$; $r_2 = 10{,}23$ *ом* и $r_2 = \infty$.

2-18. На рис. 2-6 изображена схема моста, питаемого от источника переменного тока.

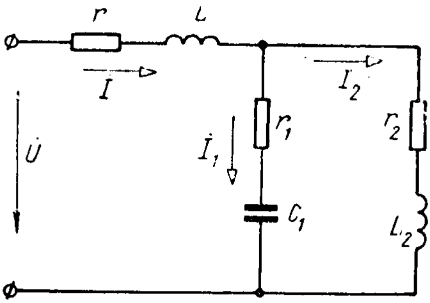



Рис. 2-4

Определить сопротивление $Z_4$, при котором ток в ветви с телефоном отсутствует.

Сопротивления остальных ветвей равны: $Z_1 = r_1 = 50$ *ом*, $Z_2 = (40 - j80)$ *ом* и $Z_3 = (160 + j80)$ *ом*.

Найти токи во всех ветвях для уравновешенного моста и построить векторную диаграмму, если $U = 14{,}5$ *в*.

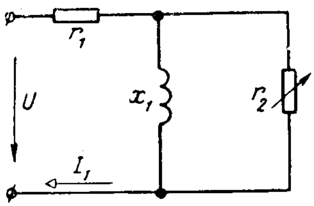



Рис. 2-5

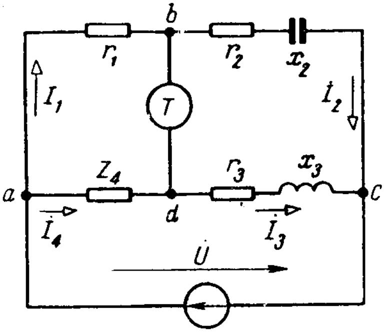



Рис. 2-6

## Решение

Для того чтобы ток в ветви $b - d$ был равен нулю, необходимо выполнить условие $\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ad}$ или $\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{dc}$, что дает $Z_1 \dot{I}_1 = Z_4 \dot{I}_4$ или $Z_2 \dot{I}_2 = Z_3 \dot{I}_3$. Разделив левые и правые части этих уравнений друг на друга и принимая во внимание, что $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$ и $\dot{I}_4 = \dot{I}_3$, получим

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3}.$$

Из этого уравнения имеем

$$Z_4 = Z_1 \frac{Z_3}{Z_2} = 50 \cdot \frac{160 + j80}{40 - j80} = j100 \textit{ ом}.$$

Токи в ветвях найдем из выражений

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1 + Z_2} = \frac{14,5}{50 + 40 - j80} = (0,09 + j0,08) \textit{ а};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_4 = \frac{\dot{U}}{Z_3 + Z_4} = \frac{14,5}{j100 + 160 + j80} = (0,04 - j0,045) \textit{ а}.$$

Напряжения на участках равны:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{ad} = Z_1 \dot{I}_1 = 50\,(0,09 + j0,08) = (4,5 + j4) \textit{ в};$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{dc} = Z_2 \dot{I}_2 = (40 - j80)(0,09 + j0,08) = (10 - j4) \textit{ в}.$$

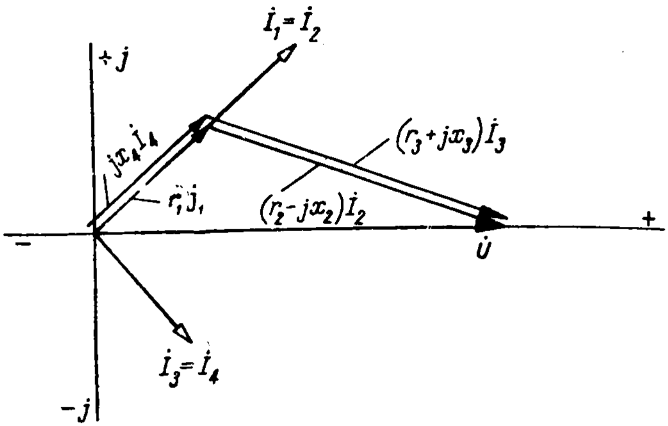



Рис. 2-7

На рис. 2-7 построена полная векторная диаграмма.

2-19. Параметры электрической схемы указаны на рис. 2-8. Требуется, рассматривая эту цепь в виде четырехполюсника, определить коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$.

## Решение

Для определения коэффициентов четырехполюсника необходимо предварительно найти сопротивления $Z_{1x}$, $Z_{2x}$ и $Z_{2к}$, так как

$$A=\sqrt{\frac{Z_{1x}}{Z_{2x}-Z_{2к}}};\quad B=AZ_{2к};C=\frac{A}{Z_{1x}}\ \text{и}\ D=CZ_{2x}.$$

Из схемы рис. 2-8 имеем

$$Z_{1x}=(8-j6)\ ом,\quad Z_{2x}=-j3\ ом$$

и

$$Z_{2к}=(2{,}88-j0{,}84)\ ом.$$

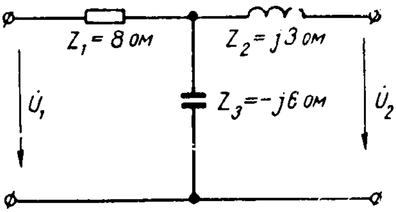



Рис. 2-8

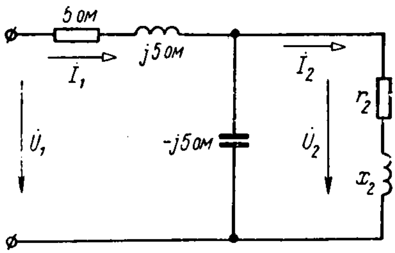



Рис. 2-9

Подставляя полученные значения сопротивлений в выражения для коэффициентов, получим

$$A=\left(1+j\frac{4}{3}\right);\quad B=(4+j3)\ ом;$$

$$C=j\frac{1}{6}\ сим\ \text{и}\ D=0{,}5.$$

Отметим, что коэффициенты четырехполюсника можно определить непосредственно через заданные сопротивления схемы рис. 2-8 по формулам

$$A=1+\frac{Z_1}{Z_3};\quad B=Z_1+Z_2+\frac{Z_1Z_2}{Z_3};$$

$$C=\frac{1}{Z_3}\ \text{и}\ D=1+\frac{Z_2}{Z_3}.$$

Необходимо доказать справедливость этих выражений.

2-20. На рис. 2-9 приведены сопротивления электрической схемы. Рассматривая эту цепь в виде четырехполюсника, определить его коэффициенты. Кроме того, пользуясь уравнениями четырехполюсника и принципом наложения, определить ток $\dot I_1$ и напряжение $\dot U_1$ на входных зажимах четырехполюсника, если $U_2=100\ в$, $I_2=10\ а$ и $\varphi_2=45°$.

*Указание к решению и ответ.* $A = j1$; $B = (5 + j5)$ *ом*, $C = j0{,}2$ *сим* и $D = 1$.

Из уравнений четырехполюсника имеем

$$\dot U_1 = A\dot U_2 + B\dot I_2 = \dot U_{1x} + \dot U_{1к};$$

$$\dot I_1 = C\dot U_2 + D\dot I_2 = \dot I_{1x} + \dot I_{1к},$$

где

$$\dot U_{1x} = A\dot U_2 = j1 \cdot 100,$$

$$\dot U_{1к} = B\dot I_2 = (5 + j5)\, 10\, e^{-j45^\circ} = 50\sqrt{2},$$

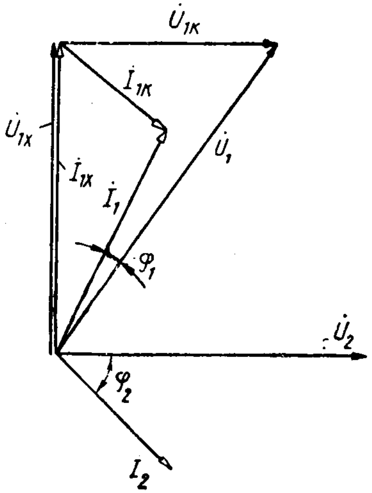



Рис. 2-10

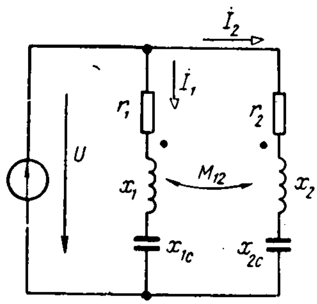



Рис. 2-11

$$\dot I_{1x} = C\dot U_2 = j\,0{,}2 \cdot 100 = j20$$

и

$$\dot I_{1к} = D\dot I_2 = 1 \cdot 10\, e^{-j45^\circ} = 10\, e^{-j45^\circ}.$$

В этих уравнениях вектор $\dot U_2$ принят совпадающим с осью вещественных величин.

На рис. 2-10 построены векторы $\dot U_2 = 100$ *в*, $\dot I_2 = 10e^{-j45^\circ}$, а также $\dot U_{1x}$, $\dot U_{1к}$, $\dot I_{1x}$ и $\dot I_{1к}$. Геометрическая сумма векторов $\dot U_{1x}$ и $\dot U_{1к}$ дает вектор напряжения $\dot U_1 = (70{,}7 + j\,100)$ *в*, а векторов $\dot I_{1x}$ и $\dot I_{1к}$ — ток $\dot I_1 = (7{,}07 + j\,12{,}93)$ *а*.

**2-21.** На рис. 2-11 изображена схема параллельного соединения двух катушек с взаимной индуктивностью между ними.

Определить токи, построить полную векторную диаграмму и составить уравнение баланса активных мощностей, если $U = 150$ *в*, $x_1 = \omega L_1 = 8$ *ом*, $x_2 = \omega L_2 = 15$ *ом*, $r_1 = 5$ *ом*, $r_2 = 10$ *ом*, $\omega M = 10$ *ом*.

Кроме того, в первую ветвь включены конденсатор сопротивлением $x_{1C} = 8$ *ом*, а во вторую — конденсатор сопротивлением $x_{2C} = 15$ *ом*.

Решение

Токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ найдем из выражений

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}\,[r_2 + j\,(x_2 - x_{2C}) - j\omega M}{[r_1 + j\,(x_1 - x_{1C})]\,[r_2 + j\,(x_2 - x_{2C})] + \omega^2 M^2} =$$

$$= \frac{150\,(10 - j10)}{50 + 100} = (10 - j10)\ a;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}\,(r_1 - j\omega M)}{r_1 r_2 + \omega^2 M^2} = \frac{150\,(5 - j10)}{50 + 100} = (5 - j10)\ a.$$

Активная мощность, потребляемая первой и второй ветвями из сети.

$$P_1 = UI_1 \cos\varphi_1 = 150 \cdot 10\sqrt{2} \cos 45^\circ = 1\,500\ \text{вт};$$

$$P_2 = UI_2 \cos\varphi_2 = 150 \cdot 11{,}2 \cos 63{,}5^\circ = 750\ \text{вт}.$$

Потери в сопротивлении $r_1$ первой ветви $r_1 I_1^2 = 5 \cdot 100 \cdot 2 = 1000$ *вт*. Следовательно, активная мощность, передаваемая из первой ветви во вторую:

$$P_{12} = P_1 - r_1 I_1^2 = \omega M I_1 I_2 \sin(-45^\circ + 63^\circ{}'5) = 500\ \text{вт}.$$

Потери во второй ветви определяются из выражения

$$r_2 I_2^2 = 10 \cdot 11{,}2^2 = 1\,250\ \text{вт}.$$

Активная мощность, поступающая из сети во вторую ветвь, $P_{12} = 750$ *вт*. Таким образом, недостаток активной мощности для покрытия потерь во второй ветви $P_{21} = 500$ *вт* поступает из сети через первую ветвь. Отсюда ясно, что сумма активных мощностей, потребляемых из сети обеими ветвями, равна сумме потерь в обеих ветвях.

Для построения векторной диаграммы найдем:

$$r_1 \dot{I}_1 = 5\,(10 - j10) = (50 - j50)\ в;$$

$$r_2 \dot{I}_2 = 10\,(5 - j10) = (50 - j100)\ в;$$

$$j\omega M \dot{I}_2 = j10\,(5 - j10) = (100 + j50)\ в;$$

$$j\omega M \dot{I}_1 = j10\,(10 - j10) = (100 + j100)\ в;$$

$$jx_1 \dot{I}_1 = j8\,(10 - j10) = (80 + j80)\ в;$$

$$jx_2 \dot{I}_2 = j15\,(5 - j10) = (150 + j75)\ в;$$

$$-jx_{1C}\dot{I}_1 = -j8(10 - j10) = -(80 + j80)\ в;$$

$$-jx_{2C}\dot{I}_2 = -(150 + j75)\ в.$$

По этим данным на рис. 2-12 построена полная векторная диаграмма, из которой видно, что

$$\dot{U}_1 = r_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$$

и

$$\dot{U} = r_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1,$$

так как

$$-jx_{1C}\dot{I}_1 + jx_1\dot{I}_1 = 0.$$

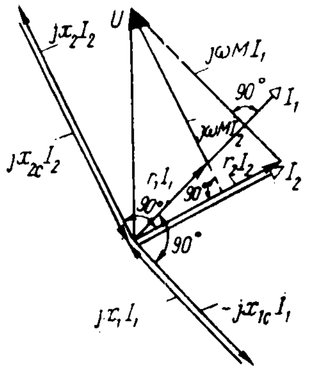



Рис. 2-12

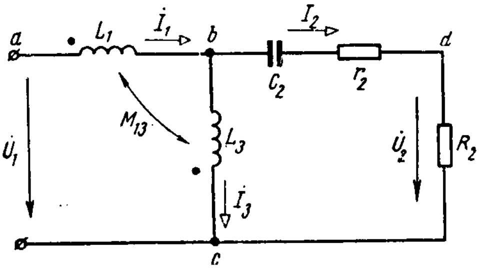



Рис. 2-13

и

$$jx_2\dot{I}_2 - jx_{2C}\dot{I}_2 = 0.$$

**2-22.** На рис. 2-13 изображена электрическая схема с взаимной индуктивностью $M_{13}$ между двумя катушками с индуктивностями $L_1$ и $L_3$.

Дано:

$$x_1 = \omega L_1 = 5\ ом;$$

$$x_3 = \omega L_3 = 10\ ом;$$

$$\frac{1}{\omega C_2} = 5\ ом;\ r_2 = 5\ ом;\ \omega M_{13} = 5\ ом.$$

Рассматривая эту цепь в виде четырехполюсника, определить коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$. Найти токи и напряжения на участках и построить векторную диаграмму, если напряжение $U = 120\ в$, а сопротивление нагрузки $R_2 = 5\ ом$.

Решение

На основании законов Кирхгофа составим для этой схемы следующие уравнения:

$$\dot U_1 = Z_1 \dot I_1 - jx_{13}(\dot I_1 - \dot I_2) + Z_2 \dot I_2 + \dot U_2;$$

$$Z_3(\dot I_1 - \dot I_2) = Z_2 \dot I_2 + jx_{13} \dot I_1 + \dot U_2.$$

Из второго уравнения непосредственно имеем

$$\dot I_1 = \frac{1}{Z_3 - jx_{13}} \dot U_2 + \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 - jx_{13}} \dot I_2.$$

Если выражение для тока $\dot I_1$ подставить в первое уравнение, то после группировки слагаемых получим

$$\dot U_1 = \left(1 + \frac{Z_1 - jx_{13}}{Z_3 - jx_{13}}\right) \dot U_2 + \left[Z_2 + jx_{13} + (Z_2 + Z_3)\frac{Z_1 - jx_{13}}{Z_3 - jx_{13}}\right] \dot I_2.$$

Эти соотношения справедливы при любом напряжении $\dot U_2$ и и любом токе $\dot I_2$. Поэтому, приравнивая сомножители при напряжении $\dot U_2$ и токе $\dot I_2$ соответствующим коэффициентам в уравнениях пассивного четырехполюсника, получим

$$A = 1 + \frac{Z_1 - jx_{13}}{Z_3 - jx_{13}}; \quad B = Z_2 + jx_{13} + \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_1 - jx_{13})}{Z_3 - jx_{13}};$$

$$C = \frac{1}{Z_3 - jx_{13}}; \quad D = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 - jx_{13}}.$$

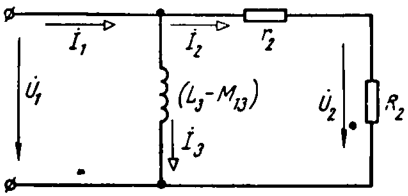



Рис. 2-14

Для определения токов во всех ветвях целесообразно воспользоваться эквивалентной электрической схемой без взаимной индуктивности (рис. 2-14), справедливость которой непосредственно следует из основных уравнений

$$\dot U = (Z_1 - jx_{13})\dot I_1 + (Z_3 - jx_{13})\dot I_3;$$

$$(Z_3 - jx_{13})\dot I_3 = (Z_2 + jx_{13})\dot I_2 + \dot U_2.$$

После подстановки значений сопротивлений в эти уравнения получим

$$\dot I_3 = \frac{120}{j5} = -j24\ a;$$

$$\dot I_2 = \frac{120}{10} = 12a;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = (12 - j24) \ a.$$

На рис. 2-15 построена векторная диаграмма токов и напряжений, полностью удовлетворяющая основным законам Кирхгофа.

2-23. На кольцевой сердечник, изготовленный из неферромагнитного материала, намотаны три катушки с активными сопротивлениями $r_1 = r_2 = r_3 = 5$ *ом* и с индуктивными сопротивлениями

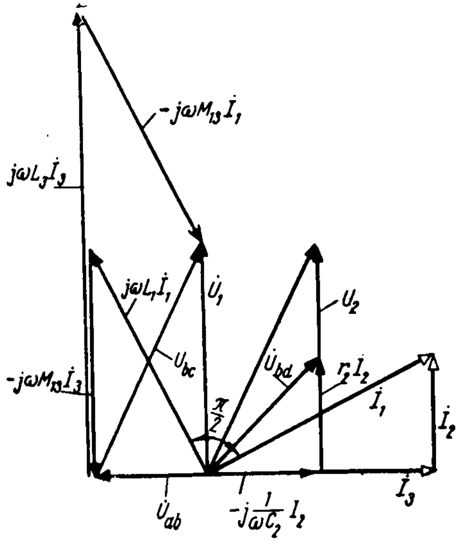



Рис. 2-15

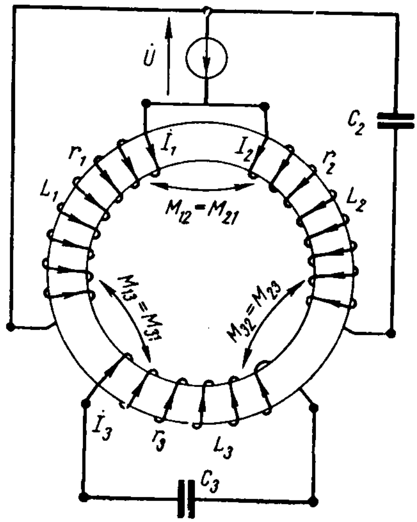



Рис. 2-16

$x_1 = \omega L_1 = 10$ *ом*, $x_2 = \omega L_2 = 20$ *ом* и $x_3 = \omega L_3 = 15$ *ом*. Сопротивления, обусловленные взаимными индуктивностями между соответствующими парами катушек, заданы равными: $x_{12} = x_{21} = \omega M_{12} = 10$ *ом*, $x_{23} = x_{32} = \omega M_{23} = 15$ *ом* и $x_{13} = x_{31} = \omega M_{13} = 10$ *ом*. Первая и вторая катушки соединены между собой параллельно. Напряжение на их зажимах $U = 200$ *в*. Во вторую ветвь включен конденсатор с сопротивлением (при заданной частоте) $x_{2C} = 20$ *ом* (рис. 2-16). Третья катушка замкнута на конденсатор с сопротивлением $x_{3C} = 15$ *ом*.

Определить токи во всех ветвях, построить полную векторную диаграмму и составить уравнение баланса активных мощностей для всей цепи.

*Указание к решению задачи и ответ.* Токи в ветвях определяются из уравнений

$$\dot{U} = Z_1\dot{I}_1 + jx_{12}\dot{I}_2 + jx_{13}\dot{I}_3;$$

$$\dot{U} = Z_2\dot{I}_2 + jx_{21}\dot{I}_1 + jx_{23}\dot{I}_3;$$

$$0 = Z_3 \dot{I}_3 + jx_{31} \dot{I}_1 + jx_{32} \dot{I}_2.$$

В результате совместного решения этих уравнений получаем

$$\dot{I}_1 = \dot{U} \frac{Z_{2э} - Z_{12}}{Z_{1э} Z_{2э} - Z_{12} Z_{21}};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U} \frac{Z_{1э} - Z_{21}}{Z_{1э} Z_{2э} - Z_{12} Z_{21}};$$

$$\dot{I}_3 = -j \frac{x_{31}}{r_3} \dot{I}_1 - j \frac{x_{32}}{r_3} \dot{I}_2,$$

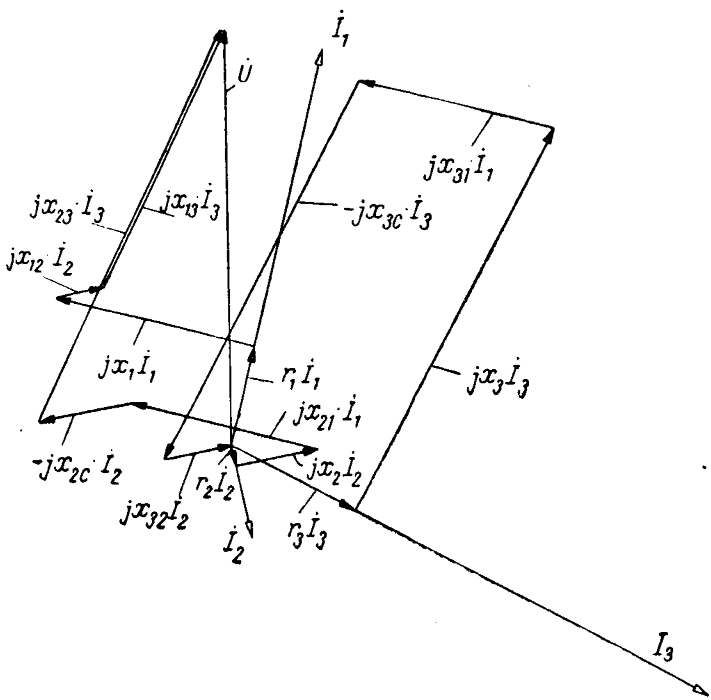



Рис. 2-17

где

$$Z_{1э} = Z_1 + \frac{x_{31}^2}{r_3};$$

$$Z_{2э} = Z_2 + \frac{x_{23}^2}{r_3};$$

$$Z_{12} = Z_{21} = jx_{12} + \frac{x_{13} x_{32}}{r_3}.$$

Подставляя заданные значения параметров в выражения для токов, получим

$$\dot{I}_1 = (9{,}4 - j2{,}35)\ a;$$

$$\dot{I}_2 = (-2{,}12 - j0{,}47)\ a;$$

$$\dot{I}_3 = (-6{,}11 - j12{,}44)\ a.$$

На рис. 2-17 построена полная векторная диаграмма токов и напряжений, наглядно показывающая взаимное положение и связь векторов токов и напряжений на всех участках цепи.

Уравнение баланса активных мощностей для рассматриваемой цепи запишется в следующем виде:

$$P_1 + P_2 = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2,$$

где

$$P_1 = \operatorname{Re}(\dot{U}\overset{*}{I}_1) \quad \text{и} \quad P_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}\overset{*}{I}_2).$$

Интересно подчеркнуть, что мощность $P_2$ в рассматриваемом случае имеет отрицательный знак.

## Тема 3

## Круговые диаграммы

При исследовании режимов электрических цепей очень часто пользуются построениями геометрических мест векторов токов и напряжений для различных параметров электрических цепей. Необходимость таких исследований возникает в связи с изменением режимов у приемников электрической энергии.

Поскольку любая линейная активная электрическая цепь может быть представлена по отношению к зажимам рассматриваемой ветви эквивалентной схемой двухполюсника, то следует специально рассмотреть случай построения круговой диаграммы для активного двухполюсника. Большое практическое значение имеет круговая диаграмма для пассивного и активного четырехполюсников.

### *Примеры и задачи*

**2-24.** В цепи, состоящей из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений, активное сопротивление изменяется от нуля до бесконечности.

Какое геометрическое место будет описывать конец вектора напряжения на реактивном сопротивлении при постоянной величине напряжения на зажимах всей цепи?

**2-25.** Как находится центр окружности тока для активного двухполюсника, если сопротивление приемника изменяется от нуля до бесконечности при постоянном положительном угле сдвига фаз $\varphi_2$ между током и напряжением на его зажимах в случае $\varphi_2 \neq \varphi_к$.

2-26. Какими отрезками определяются величины напряжения $U_2$ и мощностей $P_1$ и $P_2$ на круговой диаграмме активного двухполюсника?

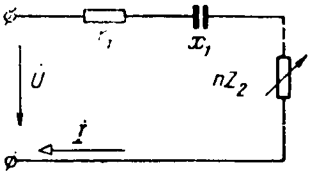



Рис. 2-18

2-27. Как строится по опытным данным круговая диаграмма пассивного четырехполюсника?

2-28. На рис. 2-18 показана электрическая схема с постоянными сопротивлениями $r_1 = 3$ *ом*, $x_1 = 4$ *ом* и изменяющимся сопротивлением $nZ_2$. Сдвиг фаз между напряжением $\dot U_2$ и током равен $\dot I$ $\varphi_2 = 45°$ и не зависит от величины сопротивления $nZ_2$.

Построить круговую диаграмму тока $\dot I$ и по ней найти сопротивление $nZ_2$, при котором ток $\dot I$ будет совпадать по фазе с напряжением $\dot U = 120$ *в*. Для найденного сопротивления определить напряжение $U_2$ и активную мощность $P_2$.

## Решение

Для построения круговой диаграммы тока $\dot I$ необходимо определить его значение при $nZ_2 = 0$ и найти центр окружности. Направим вектор напряжения $\dot U$ по оси вещественных величин (рис. 2-19). При коротком замыкании сопротивления нагрузки ($nZ_2 = 0$) ток

$$\dot I_к = \frac{\dot U}{r_1 - jx_1} = \frac{120}{3 - j4} = (14{,}4 + j19{,}2)\ a.$$

Модуль этого тока $I_к = 24\,a$. Сдвиг фаз $\varphi_1 = \varphi_к$ между напряжением $\dot U$ и током $\dot I_к$

$$\varphi_к = \varphi_1 = \arcsin\frac{-x_1}{\sqrt{r_1^2 + x_1^2}} = \arcsin(-0{,}8) = -53{,}°1.$$

Угол $\psi = \varphi_2 - \varphi_к = 45° - (-53°{,}1) = 98°{,}1$.

На рис. 2-19 построен в масштабе $m_I = 4{,}8$ *а/см* вектор тока $\dot I_к$ и из конца этого вектора проведена прямая $KN'$ под углом $-\psi = -98°{,}1$, отложенным по движению часовой стрелки, к продолжению вектора тока $\dot I_к$. Центр $C$ окружности тока определяется на пересечении перпендикуляров $OD$ к прямой $N'K$ и $CF$ к середине хорды $OK$. Рабочая дуга $OMK$ окружности лежит по правую сторону от хорды (угол $\varphi_к - \varphi_2 < 0$)*.

---

* Если смотреть на конец вектора $\dot I_к$.

Прямая $KN'$ является линией переменного сопротивления $nZ_2$.

При резонансе ток $\dot{I}_p$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}$. Продолжив вектор тока $\dot{I}_p$ до пересечения с прямой $KN'$ в точке $N$, получим отрезок $KN$, определяющий модуль искомого сопротивления $nZ_2$.

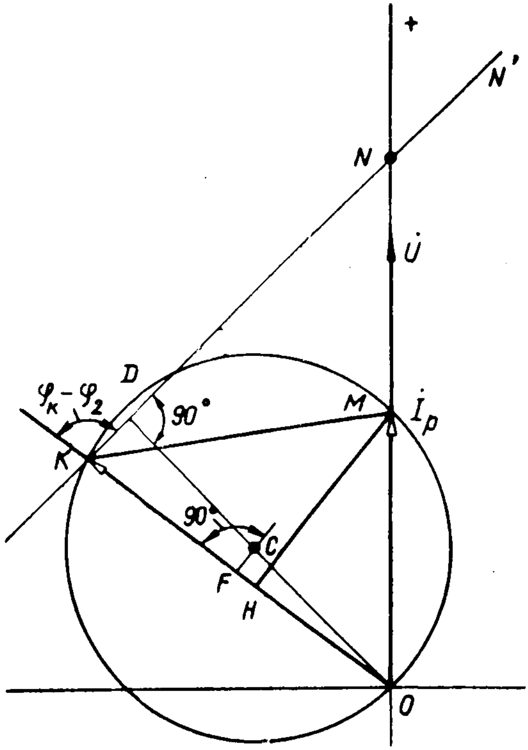



Рис. 2-19

Масштаб сопротивления $mz_2$ найдем из выражения

$$m_{z_2} = \frac{z_1}{OK} = \frac{5}{5} = 1 \text{ ом/см}.$$

В результате величина искомого сопротивления

$$z_2 = m_{z_2} kN = 1 \cdot 5{,}65 = 5{,}65 \text{ ом}.$$

Так как $\varphi_2 = 45°$, то активная составляющая сопротивления $z_2$ равна реактивной. Поэтому величина реактивного сопротивления приемника

$$x_2 = r_2 = \frac{z_2}{\sqrt{2}} = \frac{5{,}65}{\sqrt{2}} = 4 \text{ ом}.$$

Отрезок $KM$ определяет напряжение $U_2$ на зажимах приемника. Масштаб $m_{U_2}$ для напряжения $U_2$ находится из выражения

$$m_{U_2} = \frac{U}{OK} = \frac{120}{5} = 24 \text{ в/см}.$$

Величина напряжения

$$U_2 = m_{U_2} kM = 24 \cdot 4{,}05 = 97 \text{ в}.$$

Перпендикуляр $MH$, опущенный из точки $M$ на хорду $OK$, определяет мощность $P_2$. Масштаб $m_{P_2}$ найдем из выражения

$$m_{P_2} \doteq \frac{S_2 \cos\varphi_2}{MH} = \frac{U_2 I_p \cos\varphi_2}{MH} = \frac{97 \cdot 17{,}2}{2{,}85} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 414 \text{ вт/см},$$

где ток $I_p = 17{,}2$ $a$ найден из диаграммы.

Мощность приемника

$$P_2 = U_2 I_p \cos\varphi_2 = m_{P_2} MH = 414 \cdot 2{,}85 = 1\,180 \text{ вт}.$$

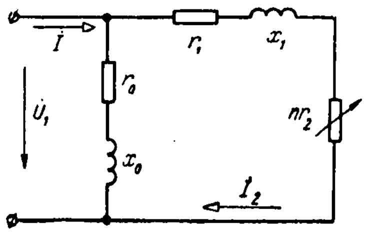



Рис. 2-20

**2-29.** В условиях задачи 2-28 определить сопротивление $nz_2$, при котором ток в цепи имеет максимальное значение.

*Ответ.* $nz_2 = 0{,}75$ *ом.*

**2-30.** На рис. 2-20 изображена электрическая схема, состоящая из двух параллельных ветвей. В одной ветви включена катушка с сопротивлениями $r_1 = 6$ *ом* и $x_1 = 8$ *ом* и активное сопротивление $nr_2$, изменяющееся от нуля до бесконечности. В другой ветви включена катушка с активным сопротивлением $r_0 = 8$ *ом* и реактивным $x_0 = 20$ *ом*. Напряжение на зажимах цепи $U = 220$ *в* = const.

Построить круговую диаграмму суммарного тока $\dot{I}$.

## Решение

Вычислим ток $\dot{I}_к$ при коротком замыкании сопротивления нагрузки, т. е. при $nr_2 = 0$:

$$\dot{I}_{2к} = \frac{\dot{U}}{r_1 + jx_1} = \frac{220}{6 + j8} = (13{,}2 - j17{,}6)\ a.$$

При размыкании этой ветви $(nr_2 = \infty)$ $I_{2x} = 0$.

Для построения круговой диаграммы суммарного тока $\dot{I}$ достаточно построить круговую диаграмму тока $\dot{I}_2$ и учесть постоянное значение тока $\dot{I}_0$ в ответвлении с сопротивлениями $r_0$ и $x_0$.

На рис. 2-21 построен вектор тока $\dot{I}_{2к}$ и прямая $KN'$ под углом $-\psi = \varphi_1 - \varphi_2 = 53°,1$ $(\varphi_1 = \varphi_{2к})$ к вектору тока $\dot{I}_{2к}$. Точка пересечения перпендикуляра $O_1D$ к продолжению прямой $KN'$ и перпендикуляра к середине хорды $O_1K$ определяет центр $C$ окружности тока $\dot{I}_2$. Так как ток $\dot{I} = \dot{I}_0 + \dot{I}_2$, то для получения круговой диаграммы суммарного тока $\dot{I}$ достаточно перенести

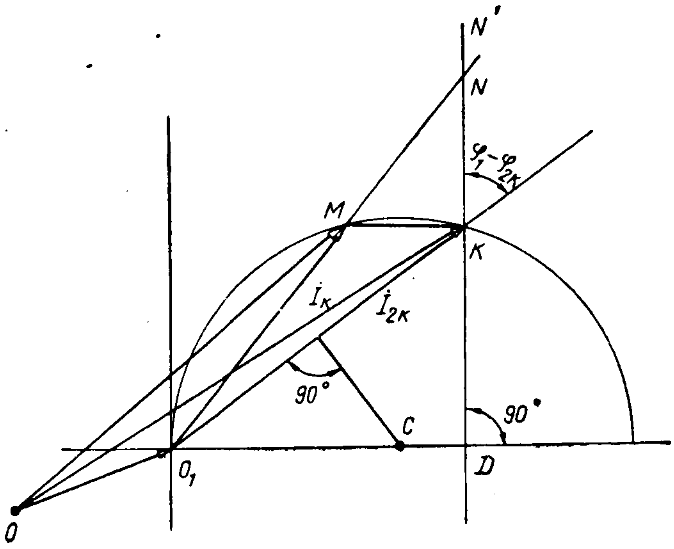



Рис. 2-21

начало координат в точку $O$, т. е. сместить его на постоянную величину, равную вектору тока:

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{r_0 + jx_0} = \frac{220}{8 + j20} = (3,78 - j9,5)\ a.$$

Составляющие этого вектора должны быть отложены в том же масштабе $m_{I_2}$, в каком построена круговая диаграмма тока $I_2$. Геометрическим местом концов вектора тока $I$ будет та же окружность. Пределы изменения этого тока в зависимости от сопротивления $nr_2$ нагрузки ограничиваются векторами

$$\dot{I} = \dot{I}_0 = (3,78 - j9,5)\ a$$

при $nr_2 = \infty$

и

$$\dot{I} = \dot{I}_к = \dot{I}_0 + \dot{I}_{2к} = 3{,}78 - j9{,}5 + 13{,}2 - j17{,}6 = (17 - j27{,}1)\ a$$

при $nr_2 = 0$.

**2-31.** В условиях задачи 2-30 определить токи $\dot{I}$ и $\dot{I}_2$, мощности $P$ и $P_2$ и напряжение $U_2$ для сопротивления нагрузки $nr_2 = 4$ *ом.*

*Ответ.* $\dot{I} = 26{,}5$ *a*; $\dot{I}_2 = 17{,}2$ *a*; $P = 3\,780$ *вт*; $P_2 = 1\,180$ *вт*; $U_2 = 68$ *в.*

**2-32.** Построить круговую диаграмму тока $I_2$ для схемы рис. 2-22, если $Z_1 = r_1 + jx_1 = (3 + j4)$ *ом*, а сопротивление $nr_2$

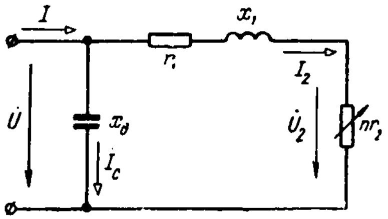



Рис. 2-22

изменяется от нуля до бесконечности. Пользуясь круговой диаграммой, найти величину сопротивления $x_C$ конденсатора, при котором модуль вектора тока $\dot{I}$ будет оставаться постоянным независимо от сопротивления $nr_2$.

Напряжение $U = 120$ *в* $=$ const.

## Решение

Вычислим ток $\dot{I}_{2к}$ при коротком замыкании (сопротивление $nr_2 = 0$):

$$\dot{I}_{2к} = \frac{\dot{U}}{r_1 + jx_1} = \frac{120}{3 + j4} = (14{,}4 - j19{,}2)\ a.$$

На рис. 2-23 построена известным способом круговая диаграмма тока $\dot{I}_2$. Суммарный ток

$$\dot{I} = \dot{I}_2 + \dot{I}_C.$$

Для того чтобы модуль тока $\dot{I}$ был постоянным, надо подобрать величину сопротивления конденсатора так, чтобы вектор суммарного тока $\dot{I}$ определялся радиусом окружности (рис. 2-23) тока $\dot{I}_2$.

Иначе говоря, начало координат должно совпасть с точкой $C$; величина сопротивления

$$x_C = \frac{U}{I_C} = \frac{120}{15} = 8 \text{ ом}.$$

При таком сопротивлении вектор суммарного тока $\dot{I}$, оставаясь постоянным по величине, изменяется лишь по фазе с изменением сопротивления нагрузки. Пределы изменения тока $\dot{I}$ ограничиваются векторами

$$\dot{I}_х = \dot{I}_C = j15a$$

при $nr_2 = \infty$

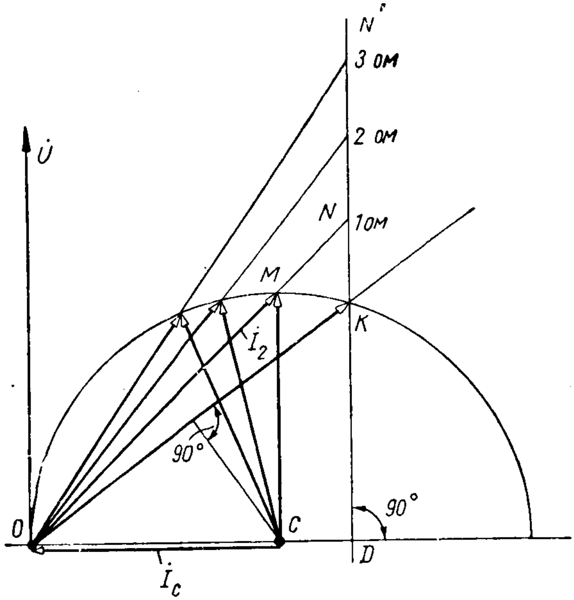



Рис. 2-23

и

$$\dot{I}_к = \dot{I}_C + \dot{I}_{2к} = j15 + 14{,}4 - j\,19{,}2 = (14{,}4 - j4{,}2)\ a$$

при $nr_2 = 0$.

**2-33.** В условиях задачи 2-32 найти значения токов $I$ и $I_2$, мощностей $P$ и $P_2$, а также определить напряжение $U_2$ для сопротивления $nr_2$, равного 1 *ом*, 2 *ом* и 3 *ом*.

*Ответ.* Из круговой диаграммы имеем табл. 2-1.

**2-34.** В схеме четырехполюсника (см. рис. 2-8) сопротивление приемника изменяется от нуля до бесконечности при постоянном угле сдвига $\varphi_2 = 45°$ между $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Напряжение $U_1$ на входных зажимах четырехполюсника 100 *в*.

Построить круговую диаграмму для тока $I_1$.

Таблица 2-1

| $nr_2$, *ом* | $I_2$, *а* | $I$, *а* | $P$, *вт* | $P_2$, *вт* | $U_2$, *в* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 21,2 | 15 | 1800 | 448 | 21,2 |
| 2 | 18,7 | 15 | 1750 | 700 | 37,4 |
| 3 | 16,8 | 15 | 1690 | 845 | 50,4 |

## Решение

Для построения круговой диаграммы найдем токи $\dot{I}_{1\text{x}}$, $\dot{I}_{1\text{к}}$ и угол $\varphi_{2\text{к}}$.

Ток при разомкнутых выходных зажимах четырехполюсника

$$\dot{I}_{1\text{x}} = \frac{\dot{U}_1}{r_1 - jx_3} = \frac{100}{8 - j6} = (8 + j6)\ a.$$

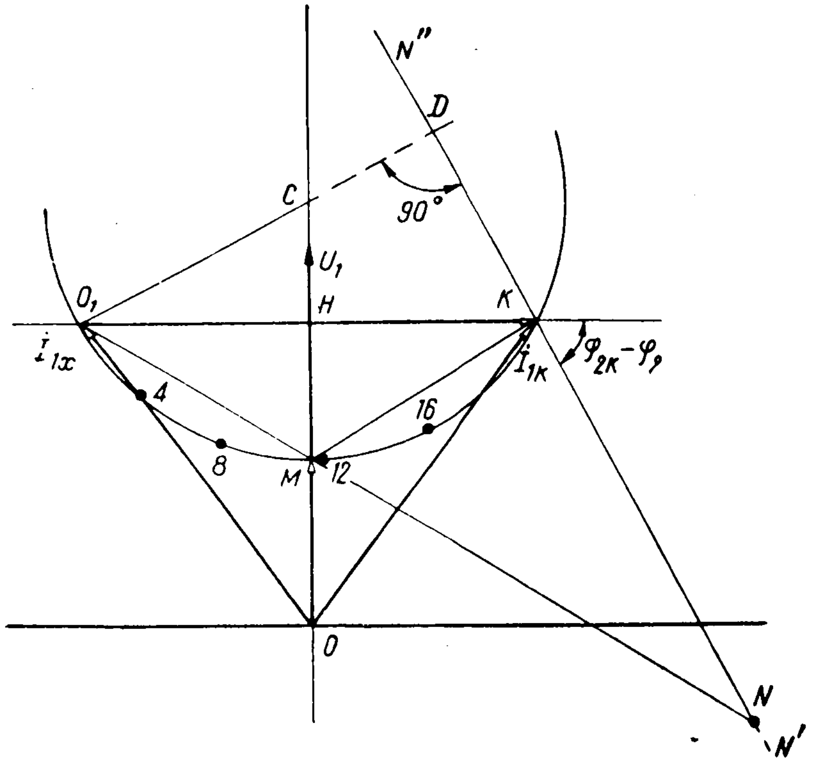



Рис. 2-24

Ток $\dot{I}_{1к}$ при $n\dot{Z}_2 = 0$ определяется из выражения

$$\dot{I}_{1к} = \frac{\dot{U}_1}{r_1 + \dfrac{-jx_3\, jx_2}{j(x_2 - x_3)}} = \frac{100}{8 + j6} = (8 - j6)\ a.$$

Для определения $\varphi_{2к}$ найдем входное сопротивление четырехполюсника со стороны выходных зажимов при закороченных входных по формуле

$$Z_{2к} = jx_2 + \frac{r_1(-jx_3)}{r_1 - jx_3} = (3{,}88 - j0{,}84)\ ом.$$

Аргумент этого комплекса $\varphi_{2к} = -16°{,}25$.

На рис. 2-24 построены векторы тока $\dot{I}_{1x}$ и $\dot{I}_{1к}$. Концы этих векторов должны лежать на окружности тока $\dot{I}_1$. Для определения центра этой окружности проведем под углом $\varphi_{2к} - \varphi_2 = -61°{,}25$ к продолжению хорды $O_1K$ линию $KN'$ переменного сопротивления $nZ_2$ и из точки $O_1$ восставим перпендикуляр $O_1D$ к прямой $KN''$, являющейся продолжением линии переменного сопротивления. Точка $C$ пересечения прямой $O_1D$ и перпендикуляра, восстановленного к середине хорды $O_1K$, является центром искомой окружности тока $\dot{I}_1$. Рабочая дуга $O_1MK$ окружности тока $\dot{I}_1$ лежит по правую сторону от хорды $O_1K$.

**2-35.** В условиях задачи 2-34 найти величину сопротивления приемника, при котором ток $\dot{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_1$. Кроме того, пользуясь круговой диаграммой, построить кривые зависимости $I_1$, $U_2$, $P_1$ и $P_2$ от тока $I_2$.

## Решение

Для определения сопротивления $nZ_2$ приемника, при котором ток $I_1$ совпадает по фазе с напряжением $U_1$, проведем через точки $O_1$ и $M$ прямую до пересечения с линией переменного сопротивления $KN'$. Отрезок $KN$ в масштабе

$$m_{z_2} = \frac{z_{2к}}{O_1K} = \frac{3}{6} = 0{,}5\ ом/см$$

дает величину сопротивления $nz_2 = 0{,}5 \cdot 6 = 3\ ом$.

Так как $\varphi_2 = 45°$, то активное сопротивление $r_2$ приемника равно реактивному $x_2$.

Для построения необходимых по условию задачи характеристик найдем предварительно масштабы величин $U_2$, $I_2$ и $P_1$:

$$m_{U_2} = \frac{U_{2x}}{O_1K} = \frac{60}{6} = 10\ в/см;\quad m_{I_2} = \frac{I_{2к}}{O_1K} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}\ а/см;$$

$$m_{P_1} = m_{I_1} U_1 = 2\ а/см \cdot 100\ в = 200\ вт/см.$$

Масштаб для мощности $P_2$ находим из выражения

$$m_{P_2} = \frac{U_2 I_2 \cos\varphi_2}{MH} = \frac{S_2 \cos\varphi_2}{MH}.$$

Точка $M$ на круговой диаграмме соответствует режиму, при котором ток $I_1$ совпадает по фазе с напряжением $U_1$, а отрезок $MH$, пропорциональный мощности $P_2$, является перпендикуляром к хорде $O_1K$. Определив из круговой диаграммы напряжение

$$U_2 = m_{U_2} MK = 10 \cdot 3{,}5 = 35 \; в$$

и ток

$$I_2 = m_{I_2} O_1 M = \frac{10}{3} \cdot 3{,}5 = 11{,}65 \; а,$$

получим для масштаба $m_{P_2}$ величину, равную

$$m_{P_2} = \frac{35 \cdot 11{,}65 \cdot 0{,}707}{1{,}78} = 162 \; вт/см.$$

Для построения характеристик

$$I_1 = f_1(I_2); \; U_2 = f_2(I_2); \; P_1 = F_1(I_2) \text{ и } P_2 = F_2(I_2)$$

задаемся значениями тока $I_2$, равными 0 *а*, 4 *а*, 8 *а*, 12 *а*, 16 *а*, 20 *а* и, пользуясь масштабами для соответствующих величин, находим из круговой диаграммы $I_1$, $U_2$, $P_1$ и $P_2$. Результаты всех расчетов сведены в табл. 2-2.

Таблица 2-2

| $I_2$, *а* | $I_1$, *а* | $U_2$, *в* | $P_1$, *вт* | $P_2$, *вт* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 60 | 800 | 0 |
| 4 | 7,6 | 53,5 | 615 | 150 |
| 8 | 5,5 | 45 | 490 | 251 |
| 12 | 4,4 | 31,2 | 440 | 292 |
| 16 | 6,1 | 20,0 | 520 | 227 |
| 20 | 10 | 0 | 800 | 0 |

На основании данных табл. 2-2 на рис. 2-25 построены соответствующие характеристики.

**2-36.** Параметры мостовой схемы показаны на рис. 2-26. Рассматривая эту цепь в качестве четырехполюсника, определить коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ и построить круговую диаграмму для тока $I_1$ при постоянном угле $\varphi_2 = -45°$ и при изменении сопротивления $nZ_2 = n(r_2 - jx_2)$ от нуля до бесконечности. Пользуясь круговой диаграммой, определить сопротивление нагрузки $nZ_2$, если ток $I_1$ будет совпадать по фазе с напряжением $U_1$.

## Решение

Для определения коэффициента $A$ можно воспользоваться формулой

$$A = \sqrt{\frac{Z_{1x}}{Z_{2x} - Z_{2к}}}.$$

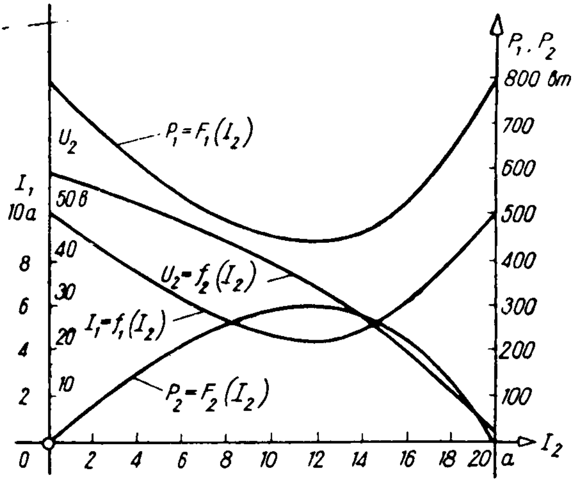



Рис. 2-25

Из схемы рис. 2-26 при размыкании выходных зажимов легко получить

$$Z_{1x} = \frac{1}{2}(j10 - j20) = -j5 \text{ ом}.$$

Поскольку четырехполюсник симметричный, то сопротивление $Z_{2x}$, очевидно, будет равно $Z_{1x}$.

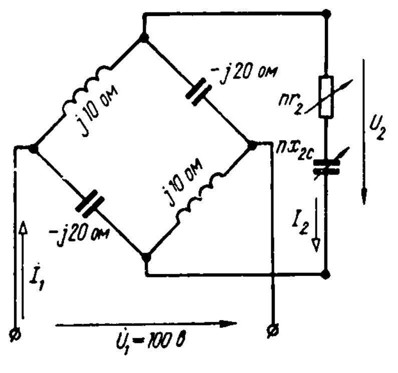



Рис. 2-26

Сопротивление при коротком замыкании на входных зажимах при питании четырехполюсника со стороны выходных

$$Z_{2к} = 2\frac{j10(-j20)}{j10 - j20} = j40 \text{ ом}.$$

Таким образом,

$$A = \sqrt{\frac{-j5}{-j5 - j40}} = \frac{1}{3}.$$

Остальные коэффициенты легко определить по формулам

$$B = AZ_{2к} = \frac{1}{3}j40 = j\frac{40}{3} \text{ ом};$$

$$\dot{C} = \frac{\dot{A}}{Z_{1x}} = \frac{1}{3(-j5)} = j\frac{1}{15}\ сим;$$

$$D = CZ_{2x} = j\frac{1}{15}(-j5) = \frac{1}{3} = A.$$

Для построения круговой диаграммы надо предварительно определить

$$I_{1x} = \frac{U}{Z_{1x}} = \frac{100}{-j5} = j20\ a.$$

и

$$\dot{I}_{1к} = \frac{100}{j40} = -j2,5\ a.$$

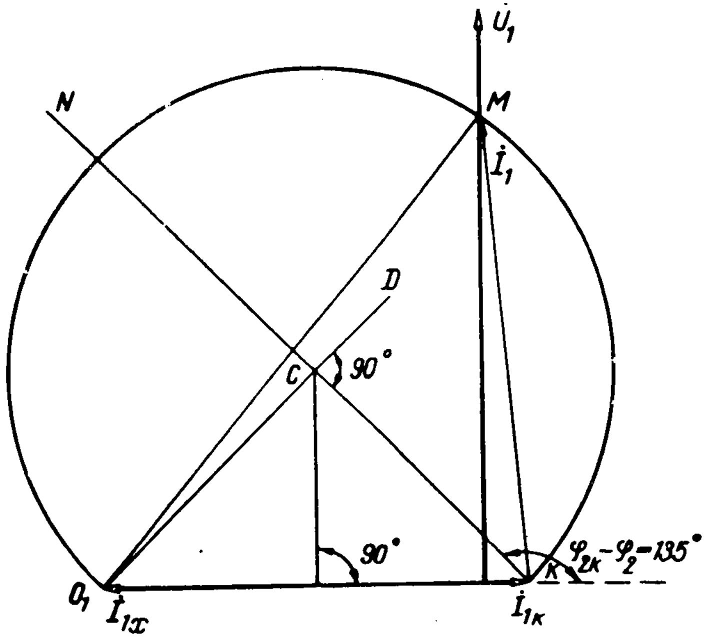



Рис. 2-27

Чтобы найти центр окружности, необходимо определить угол $\varphi_{2к}$, являющийся аргументом сопротивления $Z_{2к} : \varphi_{2к} = +90°$.

На рис. 2-27 построена круговая диаграмма для тока $I_1$, причем рабочая часть находится по левую сторону относительно хорды $O_1K$. Масштаб для тока $I_1$ выбран $m_{I_1} = 4$ $a/см$. Масштабы для тока $I_2$, напряжения $U_2$, сопротивления $nZ_2$ и мощности $P_2$ определяются по формулам

$$m_{U_2} = bm_{I_1} = \frac{40}{3}4 = \frac{160}{3}\ в/см;$$

$$m_{I_2} = a m_{I_1} = \frac{1}{3} 4 = \frac{4}{3} \ a/см;$$

$$m_{z_2} = \frac{b^2 m_{I_1}}{U_1} = \frac{1\,600}{1\,00 \cdot 9} 4 = \frac{64}{9} \ ом/см;$$

$$P_2 = m_{I_1} U_1 \cos \varphi_2 = 4 \cdot 100 \cdot 0{,}707 = 283 \ вт/см.$$

Для определения сопротивления нагрузки $nZ_2$, при котором вектор тока $\dot{I}_1$ совпадает по фазе с напряжением $\dot{U}_1$, достаточно соединить точку $M$ с точкой $O_1$ (см. рис. 2-27). Отрезок $KN_1$

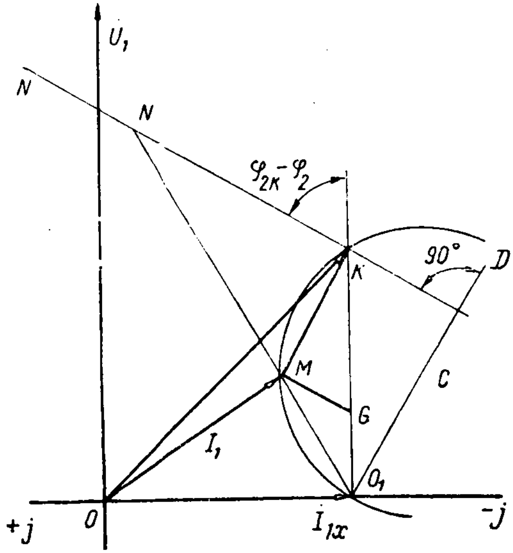



Рис. 2-28

даст в масштабе $m_{z_2}$ величину сопротивления нагрузки, соответствующую току $\dot{I}_1$, совпадающему по фазе с напряжением $\dot{U}_1$. Величина комплексного сопротивления $Z_2 = (22 - j22)$ $ом =$ $= 31{,}1\, e^{-j45°}$ $ом$.

Пользуясь круговой диаграммой рис. 2-27, можно определить остальные величины.

2-37. К входным зажимам четырехполюсника (см. рис. 2-13) присоединено сопротивление $nZ_2$ (вместо $R_2$), изменяющееся от нуля до бесконечности при постоянном угле сдвига фаз между $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, равном $\varphi_2 = -60°$.

Построить круговую диаграмму для тока $\dot{I}_1$ и, пользуясь этой диаграммой, найти сопротивление нагрузки $nZ_2$, при котором активная мощность $P_2$ в найденном сопротивлении имеет максимальное значение.

*Указание к решению задачи и ответ.* В качестве ответа на рис. 2-28 построена круговая диаграмма тока $\dot{I}_1$. На этой диаграмме выполнены необходимые построения для определения сопротивления $nZ_2$ при максимальной мощности $P_2$, измеряемой отрезком $MG$. Сопротивление $nZ_2 = (2{,}5 - j4{,}32)$ *ом*.

## Тема 4

## Трехфазные цепи

Прежде чем изучать методы расчета трехфазных цепей, необходимо обратить внимание на связь между фазными и линейными токами, а также между фазными и линейными напряжениями для соединений звездой и треугольником как при симметричной, так и при несимметричной нагрузках.

В уравновешенной многофазной системе сумма мгновенных мощностей всех фаз не зависит от времени и равна числу фаз системы, умноженному на среднюю активную мощность одной фазы. Полезно сравнить кривые суммарной мгновенной мощности трехфазной системы при симметричной и несимметричной нагрузках и установить принципиальное различие в этих кривых. При расчете несимметричных трехфазных систем очень полезно применение топографических диаграмм.

Поскольку любая трехфазная система может иметь различую последовательность фаз, то для ее определения применяются различные указатели фаз. Для измерения мощности трехфазной системы применяется схема с двумя ваттметрами, получившая широкое распространение в электротехнической практике.

В трехфазных цепях изучается одно из важных явлений — вращающееся магнитное поле. Это явление положено в основу работы трехфазных асинхронных двигателей, получивших широкое распространение в промышленности. Следует понять и запомнить, что для получения вращающегося магнитного поля необходимо иметь систему катушек, сдвинутых в пространстве, с токами, не совпадающими по фазе. Отсутствие одного из этих условий не дает вращающегося магнитного поля.

### *Примеры и задачи*

2-38. Как изменяется величина линейного тока и величина мощности, если симметричную нагрузку, соединенную звездой без нейтрали, пересоединить в треугольник при одном и том же линейном напряжении?

*Ответ.* Линейные токи и суммарная мощность увеличиваются в три раза.

2-39. Как изменяются токи и фазные напряжения симметричной звезды нагрузки, если одну фазу закоротить?

*Ответ.* В закороченной фазе ток возрастает в три раза, в двух других фазах — в $\sqrt{3}$ раза.

**2-40.** Как изменятся фазные и линейные токи и фазные напряжения на зажимах треугольника нагрузки с одинаковыми сопротивлениями, если оборвать один линейный провод?

*Ответ.* В одной фазе ток останется без изменения, а в двух других фазах токи уменьшатся в два раза.

**2-41.** В условиях примера 2-40 определить разность потенциалов между точками разрыва линейного провода.

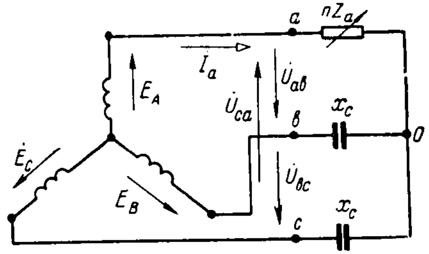



Рис. 2-29

*Ответ.* $U = U_л \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**2-42.** Как определить показание вольтметра, включенного между нейтралью нагрузки и нейтралью генератора при несимметричной нагрузке?

*Ответ.*

$$|\dot U_N| = \left| \frac{\dot E_A Y_A + \dot E_B Y_B + \dot E_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} \right|,$$

где $|\dot U_N|$ — модуль комплекса разности потенциалов между нейтральными точками генератора и нагрузки.

**2-43.** Как при расчете воспользоваться формулой смещения нейтрали для определения токов несимметричной звезды, приключенной к сети с несимметричными линейными напряжениями?

*Ответ.* В этом случае формула смещения нейтрали дает возможность определить разность потенциалов между нейтралью нагрузки и центром тяжести треугольника линейных напряжений.

**2-44.** На рис. 2-29 изображена схема трехфазной цепи, соединенной звездой. Сопротивления $x_C$ в фазах $b$ и $c$ одинаковы и равны $x_C = 20$ *ом*; сопротивление $nZ_a$ фазы $a$ изменяется от нуля до бесконечности при постоянном угле сдвига фаз между током $\dot I_a$ и напряжением $\dot U_a$ $\varphi_a = 30°$. Векторы линейных напряжений $\dot U_{ab}$, $\dot U_{bc}$ и $\dot U_{ca}$ образуют равносторонний треугольник и по абсолютной величине равны:

$$U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = 220 \text{ в}.$$

Пользуясь теоремой об активном двухполюснике, построить круговую диаграмму тока $\dot{I}_a$ и из круговой диаграммы найти сопротивление фазы $a$, при котором ток $\dot{I}_a$ и напряжение $\dot{U}_a$ имеют максимальные значения.

Внутренним сопротивлением обмотки генератора пренебречь.

## Решение

При $nZ_a = \infty$ (размыкание фазы $a$) напряжение между точками $a$ и $o$ определяется вектором $\dot{U}_{ao} = 190$ *в* (рис. 2-31).

Входное сопротивление всей схемы по отношению к зажимам $a$ — $o$ равно половине фазного сопротивления $x_c$, т. е. $Z_{вх} = -j\frac{x_c}{2}$.

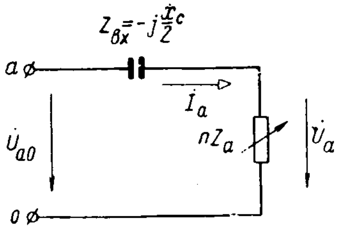



Рис. 2-30

В результате эквивалентная схема активного двухполюсника представится в виде последовательного соединения сопротивлений $Z_{вх}$ и $nZ_a$ (рис. 2-30) с напряжением на зажимах, равным $\dot{U}_{ao}$.

Ток короткого замыкания при $nZ_a = 0$

$$\dot{I}_{ак} = \frac{\dot{U}_{ao}}{Z_{вх}} = \frac{190}{-j10} = j19\ a.$$

Вектор $\dot{U}_{ao}$ направлен по оси вещественных величин.

На рис. 2-31 вектор тока $\dot{I}_{ак}$ отложен по оси мнимых величин в сторону опережения напряжения $\dot{U}_{ao}$ на угол 90°. Для построения

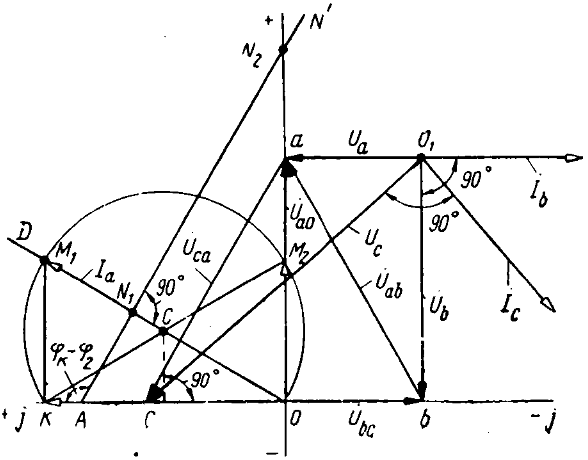



Рис. 2-31

круговой диаграммы тока $I_a$ выбираем масштаб $m_z = 3{,}65$ *ом/см* и откладываем отрезок

$$OA = \frac{z_{вх}}{m_z} = \frac{10}{3{,}65} = 2{,}74 \text{ см}$$

по направлению вектора $\dot{I}_{ак}$. Из точки $A$ проводим под углом $\varphi_к - \varphi_2 = -90° - 30° = -120°$ к вектору $\dot{I}_{ак}$ прямую $AN'$, являющуюся линией переменного сопротивления $nz_a$. Для нахождения центра окружности тока $\dot{I}_a$ проводим из начала координат перпендикуляр $OD$ к прямой $AN'$ и восстанавливаем перпендикуляр к середине хорды $OK$. Точка $C$ пересечения этих перпендикуляров определяет центр окружности. Рабочая дуга окружности лежит по правую сторону хорды $OK$.

Из круговой диаграммы видно, что максимальное значение тока $I_a$ определяется отрезком $OM_1$, равным диаметру окружности, при этом сопротивление

$$nz_a = m_z AN_1 = 3{,}65 \cdot 1{,}73 = 5 \text{ ом}.$$

Максимальное напряжение $U_a$ на фазе $a$ определяется отрезком $KM_2$, равным, так же как ток, диаметру окружности. Масштаб для напряжения найдем из выражения

$$m_U = \frac{U_{ao}}{OK} = \frac{190}{3{,}3} = 57{,}5 \text{ в/см}.$$

Величина максимального напряжения равна

$$U_{a\,max} = m_U KM_2 = 57{,}5 \cdot 3{,}8 = 220 \text{ в};$$

при этом сопротивление

$$nz_a = m_z AN_2 = 3{,}64 \cdot 5{,}5 = 20 \text{ ом}.$$

**2-45.** В условиях задачи 2-44 определить токи $\dot{I}_b$, $\dot{I}_c$ и напряжения $\dot{U}_b$, $\dot{U}_c$ при сопротивлении нагрузки $nZ_a = 5$ *ом*. Кроме того, при указанном сопротивлении фазы $a$ проверить аналитическим путем комплексные значения токов и напряжений.

## Решение

Из круговой диаграммы рис. 2-31 при $nz_a = 5$ *ом* имеем $\dot{I}_a = 22e^{j60°}$. При этом фазное напряжение $\dot{U}_a = nZ_a \dot{I}_a = 5e^{j30°} \times 22e^{j60°} = 110e^{j90°}$. Отметим, что модуль вектора напряжения $\dot{U}_a$ равен в масштабе $m_U = 57{,}5$ *в/см* отрезку $KM_1$. Построим вектор $\dot{U}_a$ на диаграмме рис. 2-31 так, чтобы его конец был направлен к точке $a$, и соединим точку $O_1$ с точками $b$ и $C$. В результате получим векторы напряжений $\dot{U}_b = -190$ *в* и $\dot{U}_c =$

$= (-190 + j220)$ *в*. Зная эти напряжения, находим токи $\dot{I}_b = \dot{U}_b Y_b = -j9{,}5$ *а* и $\dot{I}_c = \dot{U}_c Y_c = (-11 - j9{,}5)$ *а* (см. рис. 2-31).

Для аналитического определения комплексов напряжений воспользуемся известными формулами

$$\dot{U}_a = \frac{\dot{U}_{ab} Y_b + \dot{U}_{ac} Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} = \frac{220\, e^{j30^\circ}\, j0{,}05 + 220 e^{-j30^\circ}\, j0{,}05}{0{,}2\, e^{-j30^\circ} + j0{,}1} = j110\ в;$$

$$\dot{U}_b = \frac{\dot{U}_{bc} Y_c + \dot{U}_{ba} Y_a}{\sum Y} = \frac{-j220\, j0{,}05 - 220 e^{+j30^\circ} 0{,}2\, e^{-j30^\circ}}{0{,}2 e^{-j30^\circ} + j0{,}1} = -190\ в;$$

$$\dot{U}_c = \frac{\dot{U}_{ca} Y_a + \dot{U}_{cb} Y_b}{\sum Y} =$$

$$= \frac{220\, e^{j150^\circ}\, 0{,}2\, e^{-j30^\circ} + j220\, j0{,}05}{0{,}2\, e^{-j30^\circ} + j0{,}1} = (-190 + j220)\ в.$$

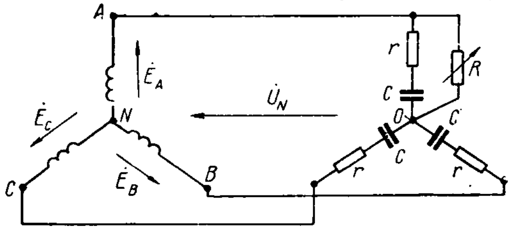



Рис. 2-32

Зная напряжения $\dot{U}_a$, $\dot{U}_b$ и $\dot{U}_c$, легко найти токи во всех фазах.

**2-46.** Сопротивление каждой фазы звезды (рис. 2-32) $Z = (10 - j10)$ *ом*. Параллельно сопротивлению фазы $a$ присоединено активное сопротивление $R$, изменяющееся от нуля до бесконечности.

Требуется построить геометрическое место концов вектора напряжения смещения нейтрали $\dot{U}_N$ и, пользуясь этим построением, найти напряжения на фазах нагрузки при $R = 10$ *ом*. Фазное напряжение на зажимах генератора 100 *в*.

## Решение

Обозначим проводимость изменяющегося сопротивления $g = \frac{1}{R}$.

Проводимости каждой фазы звезды

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{(10 - j10)} = (0{,}05 + j0{,}05)\ сим.$$

Напряжение смещения нейтрали найдем по формуле

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_a (Y + g) + \dot{U}_b Y + \dot{U}_c Y}{3Y + g} =$$

$$= \frac{(\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c) Y + \dot{U}_a g}{3Y + g} = \frac{\dot{U}_a g}{3Y + g},$$

так как

$$\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0.$$

Из полученного уравнения

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_a}{1 + 3YR} = \frac{\dot{U}_a}{1 + ne^{j\frac{\pi}{4}}},$$

где $n = 3Ry$ — коэффициент, изменяющийся от нуля при $R = 0$ до бесконечности при $R = \infty$.

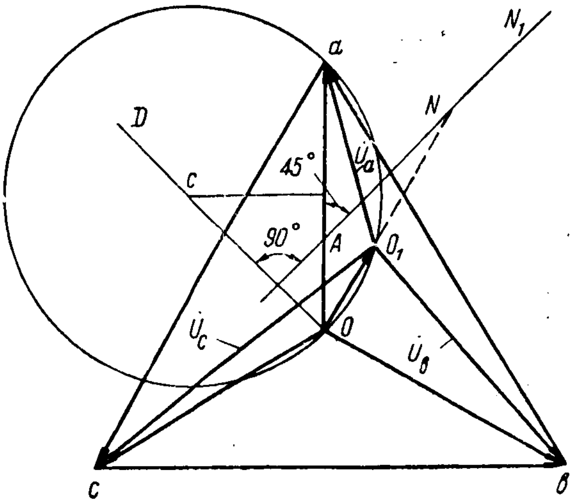



Рис. 2-33

Полученное уравнение определяет окружность, проходящую через точки $O$ и $a$ (рис. 2-33). Вектор напряжения $\dot{U}_a$ генератора является хордой этой окружности. Для построения окружности напряжения $\dot{U}_N$ поступаем так же, как в предыдущем примере. Центр окружности определяется точкой пересечения перпендикуляра $OD$ к линии переменного параметра $AN_1$ и перпендикуляра, восстановленного к середине хорды $Oa$. Отрезок $OA$ соответствует единице. Для определения напряжений на фазах нагрузки при $R = 10$ *ом* отложим на линии переменного параметра отрезок;

равный в масштабе $m_n = 1 \frac{1}{см}$ ($n$ не имеет размерности),

$$n = 3yR = 0{,}212 \cdot 10 = 2{,}12,$$

т. е.

$$AN = 2{,}12\, OA = 2{,}54 \ см.$$

Отрезок $OO_1$ определяет напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_N$ для сопротивления $R = 10$ *ом*. Так как масштаб для напряжения равен $m_U = 28$ *в/см*, то $U_N \approx 35$ *в*. Напряжения на фазах нагрузки определяются векторами $\dot{U}_a$, $\dot{U}_b$ и $\dot{U}_c$ (рис. 2-33).

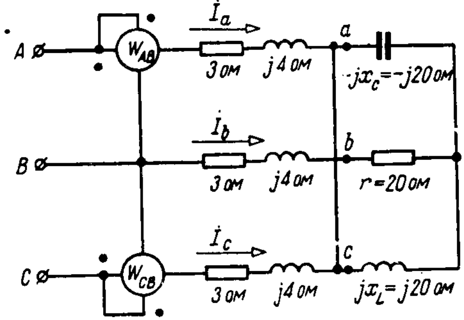



Рис. 2-34

**2-47.** Для измерения активной мощности симметричной трехфазной цепи, соединенной звездой или треугольником, включены два ваттметра. Найти зависимость показаний каждого ваттметра от угла сдвига между фазным током и фазным напряжением, если при неизменных по абсолютной величине полных сопротивлениях фаз угол сдвига фаз изменяется в пределах от $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ до $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

*Ответ.* $P_{AB} = U_л I_л \cos(\varphi + 30°)$ и $P_{CB} = U_л I_л \cos(\varphi - 30°)$.

**2-48.** К зажимам сети трехфазного тока с симметричными линейными напряжениями $U = 220$ *в* присоединена электрическая цепь (рис. 2-34). Между точками *a* и *c* электрической цепи произошло короткое замыкание.

Построить полную векторную диаграмму и определить показания ваттметров, включенных в схеме. Суммарную мощность, показываемую ваттметрами, сравнить с потерями в цепи.

## Решение

Из схемы рис. 2-34 следует, что $\dot{I}_b = 0$, так как ветви *a* и *c* включены параллельно и содержат равные реактивные сопротивления, противоположные по знаку. Следовательно, токи $\dot{I}_a$ и $\dot{I}_c$ будут связаны между собой равенством $\dot{I}_a = -\dot{I}_c$, Числовые значения этих токов находим из выражения

$$I_a = I_c = \frac{220}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 22a.$$

В комплексной форме эти токи определяем по формуле

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{U}_{CA}}{2Z} = \frac{-190 + j110}{6 + j8} = (-2{,}6 + j21{,}8)\ a\ = -\dot{I}_a.$$

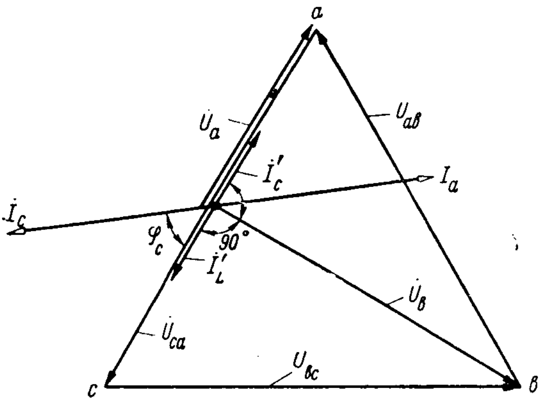



Рис. 2-35

Напряжения $\dot{U}_a$ и $\dot{U}_c$ будут связаны между собой равенством

$$U_c = Z\dot{I}_c = (3 + j4)(-2{,}6 + j21{,}8) = (-95 + j55)\ в\ = -U_a.$$

Для определения токов $\dot{I}'_C$ и $\dot{I}'_L$ необходимо найти напряжение $\dot{U}_b$:

$$\dot{U}_b = \dot{U}_{bc} + \dot{U}_c = -j220 - 95 + j55 = (-95 - j165)\ в.$$

Токи $\dot{I}'_C$ и $\dot{I}'_L$ найдем по формуле

$$\dot{I}'_C = -\dot{I}'_L = \frac{\dot{U}_b}{-jx_C} = \frac{(-95 - j165)}{-j20} = (8{,}25 - j4{,}75)\ a.$$

По найденным комплексам токов и напряжений строим полную векторную диаграмму (рис. 2-35).

Показания ваттметров легко определить по формулам

$$P_{AB} = (\dot{U}_{AB}\overset{*}{I}_a)_{\text{действ}} \quad \text{и} \quad P_{CB} = (\dot{U}_{CB}\overset{*}{I}_c)_{\text{действ}},$$

где $\overset{*}{I}_a$ и $\overset{*}{I}_c$ — сопряженные комплексы соответствующих токов, а $\dot{U}_{CB} = -\dot{U}_{BC}$.

Подставляя числовые значения величин в соответствующие формулы, получаем $P_{AB}=[(190+j\,110)(2{,}6+j21{,}8)_{\text{действ}}=-1\,900$ *вт*;

$$P_{CB}=[j220(-2{,}6-j21{,}8)]_{\text{действ}}=4\,800 \text{ вт}.$$

Сумма показаний ваттметров

$$P=P_{AB}+P_{CB}=2\,900 \text{ вт}.$$

Потери в цепи определяем из выражения

$$P_{\text{пот}}=rI_a^2+rI_c^2=2\,900 \text{ вт}.$$

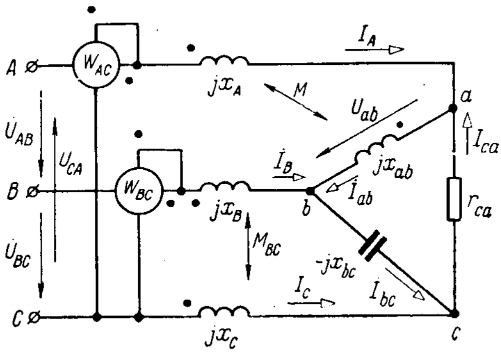



Рис. 2-36

**2-49.** К зажимам трехфазной сети с симметричными линейными напряжениями $U_{\text{л}}=220$ *в* присоединена электрическая цепь (рис. 2-36).

Сопротивления элементов схемы равны:

$$x_A=x_B=x_C=3 \text{ ом},\ x_{ab}=3 \text{ ом},\ x_{bc}=5 \text{ ом},$$

$$r_{ca}=2 \text{ ом},\ \omega M=\omega M_{BC}=2 \text{ ом}.$$

Однополярные зажимы катушек отмечены точками.

Построить полную векторную диаграмму и определить показания ваттметров, включенных для измерения активной мощности. Суммарную мощность, показываемую ваттметрами, сравнить с тепловыми потерями в цепи.

## Решение

На основании второго и первого законов Кирхгофа для заданной схемы будем иметь следующие уравнения:

$$\dot{U}_{AB}=jx_A\dot{I}_A+j\omega M\dot{I}_{ab}+jx_{ab}\dot{I}_{ab}+j\omega M\dot{I}_A-$$

$$-jx_B\dot{I}_B-j\omega M_{BC}\dot{I}_C=j(x_A+\omega M)\dot{I}_A+$$

$$+ j(x_{ab} + \omega M)\dot{I}_{ab} - jx_B\dot{I}_B - j\omega M_{BC}\dot{I}_C;$$

$$\dot{U}_{BC} = j(x_B - \omega M_{BC})\dot{I}_B - j(x_C - \omega M_{BC})\dot{I}_C + \dot{U}_{bc};$$

$$\dot{U}_{CA} = jx_C\dot{I}_C + j\omega M_{BC}\dot{I}_B + \dot{U}_{ca} - jx_A\dot{I}_A - j\omega M\dot{I}_{ab};$$

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0; \quad \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \quad \text{и} \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

В результате решения этих уравнений можно определить токи во всех ветвях и напряжения на участках заданной схемы. Однако совместное решение шести уравнений с шестью неизвестными комплексами токов громоздко. С целью упростить решение данной задачи предварительно найдем параметры эквивалентной схемы без

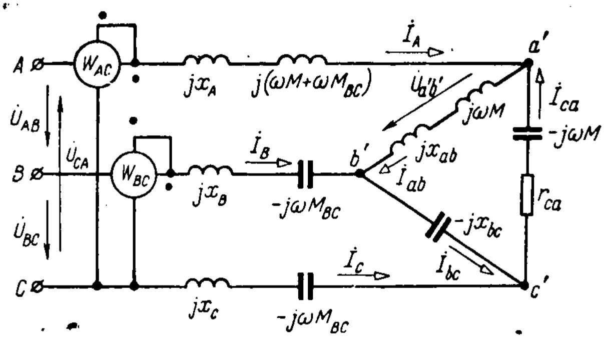



Рис. 2-37

индуктивной связи (рис. 2-37). Для этого, пользуясь первым законом Кирхгофа, исключим из уравнений, написанных на основании второго закона Кирхгофа, токи тех ветвей, которые не входят в соответствующие контуры. Например, из уравнения для контура $A - a - в - B$ исключим ток $\dot{I}_C$, в результате получим

$$\dot{U}_{AB} = j(x_A + \omega M + \omega M_{BC})\dot{I}_A + j(x_{ab} + \omega M)\dot{I}_{ab} -$$

$$- j(x_B - \omega M_{BC})\dot{I}_B.$$

Аналогичным путем преобразуем уравнение для контура $C - c - a - A$:

$$\dot{U}_{CA} = j(x_C - \omega M_{BC})\dot{I}_C - j(x_A + \omega M_{BC} + \omega M)\dot{I}_A + \dot{U}_{ca} - j\omega M\dot{I}_{ca}.$$

Уравнение для контура $B - b - c - C$ остается без изменения:

$$\dot{U}_{BC} = j(x_B - \omega M_{BC})\dot{I}_B - j(x_C - \omega M_{BC})\dot{I}_C + \dot{U}_{bc}.$$

Этим трем уравнениям удовлетворяет эквивалентная схема без индуктивной связи (см. рис. 2-37) с токами, равными действительным токам в соответствующих ветвях заданной схемы.

Интересно отметить, что влияние электродвижущих сил взаимной индукции на распределение токов в заданной схеме эквивалентно включению дополнительных реактивных сопротивлений индуктивности в ветви $A - a$, $a - b$ и реактивных емкостных сопротивлений в ветви $B - b$, $C - c$ и $c - a$.

Следует также подчеркнуть, что напряжения на зажимах ветвей эквивалентной схемы (рис. 2-37) не равны напряжениям на соответствующих участках заданной цепи (рис. 2-36), что легко установить непосредственным сравнением. Например, напряжение $\dot{U}_{ab}$ на зажимах $a - b$ (рис. 2-36), определяемое выражением $\dot{U}_{ab} = jx_{ab}\dot{I}_{ab} + j\omega M\dot{I}_A$, не равно напряжению на зажимах $a' - b'$ (рис. 2-37) $\dot{U}_{a'b'} = j(x_{ab} + \omega M)\dot{I}_{ab}$.

Для определения токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$ преобразуем треугольник в схеме рис. 2-37 в эквивалентную звезду по формулам

$$Z_a = \frac{j(x_{ab} + \omega M)(r_{ca} - j\omega M)}{j(x_{ab} + \omega M) + r_{ca} - j\omega M - jx_{bc}} = \frac{j(2 - j2)\,5}{2 - j2} = j5 \text{ ом};$$

$$Z_b = \frac{j(x_{ab} + \omega M)(-jx_{bc})}{r_{ca} + jx_{ab} - jx_{bc}} = \frac{j5(-j5)}{2 - j2} = (6{,}25 + j\,6{,}25) \text{ ом};$$

$$Z_c = \frac{-jx_{bc}(r_{ca} - j\omega M)}{r_{ca} + jx_{ab} - jx_{bc}} = \frac{-j5(2 - j2)}{2 - j2} = -j\,5 \text{ ом}.$$

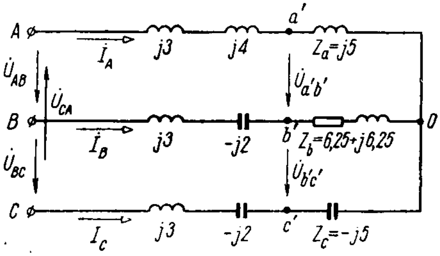



Рис. 2-38

После преобразования получим эквивалентную схему рис. 2-38. Для определения напряжений на фазах эквивалентной несимметричной звезды (рис. 2-38) предварительно найдем проводимости фаз:

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{j12} = -j\,0{,}0833 \text{ сим};$$

$$Y_B = (0{,}0682 - j\,0{,}0792) \text{ сим};$$

$$Y_C = j\,0{,}25 \text{ сим}.$$

Представим заданные линейные напряжения $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ в комплексной форме: $\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 220$ *в*, $\dot{U}_{BC} = 220\,e^{-j\,120^\circ}$ и $\dot{U}_{CA} = 220\,e^{j120^\circ}$.

После подстановки значений проводимостей и линейных напряжений в выражения для фазных напряжений $\dot{U}_{AO}$, $\dot{U}_{BO}$ и $\dot{U}_{CO}$ получим

$$\dot{U}_{AO} = \frac{\dot{U}_{AB} Y_B + \dot{U}_{AC} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} =$$

$$= \frac{220\,(0{,}0682 - j\,0{,}0792) + 220\, e^{-j60^\circ} j\,0{,}25}{0{,}0682 + j\,0{,}0875} = 572\, e^{-j42^\circ 50'};$$

$$\dot{U}_{BO} = \frac{\dot{U}_{BC} Y_C + \dot{U}_{BA} Y_A}{Y_A + Y_B + Y_C} =$$

$$= \frac{220\, e^{-j120^\circ} j\,0{,}25 + 220 j\,0{,}0833}{0{,}0682 + j\,0{,}0875} = 435\, e^{-j62^\circ 57'};$$

$$\dot{U}_{CO} = \frac{\dot{U}_{CA} Y_A + \dot{U}_{CB} Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C} =$$

$$= \frac{220\, e^{j120^\circ}(-j\,0{,}0833) + 220\, e^{j60^\circ}\, 0{,}104\, e^{-j49^\circ 15'}}{0{,}0628 + j\,0{,}0875} = 369\, e^{-j32^\circ 43'}.$$

Отметим, что в этих уравнениях

$$\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA}; \quad \dot{U}_{BA} = -\dot{U}_{AB} \quad \text{и} \quad \dot{U}_{CB} = -\dot{U}_{BC}.$$

Линейные токи находим по формулам

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AO} Y_A = 572\, e^{-j42^\circ 50'}(-j\,0{,}0833) =$$

$$= 47{,}7\, e^{-j132^\circ 50'} = (-32{,}4 - j\,35{,}8)\ a;$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{BO} Y_B = 435\, e^{-j62^\circ 57'}\, 0{,}104\, e^{-j49^\circ 15'} =$$

$$= 45{,}5\, e^{-j112^\circ 12'} = (-17{,}2 - j\,42)\ a;$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{CO} Y_C = 369\, e^{-j32^\circ 43'} j\,0{,}25 =$$

$$= 92{,}3\, e^{j57^\circ 17'} = (49{,}8 + j\,77{,}7)\ a.$$

Токи в ветвях треугольника определим из уравнений:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{a'b'}}{jx_{ab} + j\omega M} = \frac{Z_a \dot{I}_A - Z_b \dot{I}_B}{jx_{ab} + j\omega M} =$$

$$= \frac{j\,5 \cdot 47{,}7\, e^{-j132^\circ 50'} - 8{,}83\, e^{j45^\circ} \cdot 45{,}5\, e^{-j112^\circ 12'}}{j\,5} = 41{,}8\, e^{-j5^\circ 14'};$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{b'c'}}{-jx_{bc}} = \frac{Z_b \dot{I}_B - Z_c \dot{I}_C}{-jx_{bc}} =$$

$$= \frac{8{,}83\, e^{j45^\circ}\, 45{,}5\, e^{-j112^\circ 12'} + j\,5 \cdot 92{,}3\, e^{j57^\circ 17'}}{-j\,5} = 52{,}2\, e^{-j62^\circ 20'};$$

$$\dot I_{ca}=\frac{\dot U_{c'a'}}{r_{ca}-j\omega M}=\frac{Z_c\dot I_C-Z_a\dot I_A}{r_{ca}-j\omega M}=$$

$$=\frac{-j\,5\cdot 92{,}3\,e^{j57°17'}-j\,5\cdot 47{,}7\,e^{-j132°50'}}{2-j2}=81\,e^{j22°40'}.$$

Для построения векторной диаграммы найдем составляющие напряжений на участках цепи:

$$jx_A\dot I_A=j3\cdot 47{,}7\,e^{-j132°50'}=143\,e^{-j42°50'}=(105-j\,97)\ в;$$

$$j\omega M\dot I_{ab}=j\,2\cdot 41{,}8\,e^{-j5°14'}=83{,}6\,e^{j84°46'}=(7{,}6+j\,82{,}7)\ в;$$

$$jx_B\dot I_B=j\,3\cdot 45{,}5\,e^{-j112°12'}=136{,}5\,e^{-j22°12'}=(126-j\,51{,}5)\ в;$$

$$j\omega M_{BC}\dot I_C=j\,2\cdot 92{,}3\,e^{j57°17'}=184{,}6\,e^{j147°17'}=(-155+j\,100)\ в;$$

$$jx_C\dot I_C=j\,3\cdot 92{,}3\,e^{j57°17'}=276{,}9\,e^{j147°17'}=(-233+j\,149{,}5)\ в;$$

$$j\omega M_{BC}\dot I_B=j\,2\cdot 45{,}5\,e^{-j112°12'}=91\,e^{-j22°12'}=(84{,}2-j\,34{,}5)\ в.$$

Напряжения на неразветвленных участках цепи:

$$\dot U_{Aa}=jx_A\dot I_A+j\omega M\dot I_{ab}=(112{,}6-j\,14{,}3)\ в;$$

$$\dot U_{Bb}=jx_B\dot I_B+j\omega M_{BC}\dot I_C=(-29+j\,48{,}5)\ в;$$

$$\dot U_{Cc}=jx_C\dot I_C+j\omega M_{BC}\dot I_B=(-148{,}8+j115{,}2)\ в.$$

По полученным комплексам токов и напряжений строим векторную диаграмму, на которой показаны токи, напряжения на участках и их составляющие (рис. 2-39).

Для определения показаний ваттметров воспользуемся выражениями

$$P_{AC}=(\dot U_{AC}\overset{*}{I}_A)_{\text{действ}}=(220\,e^{-j60°}\cdot 47{,}7\,e^{j132°50'})_{\text{действ}}=2\,950\ вт;$$

$$P_{BC}=(\dot U_{CB}\overset{*}{I}_B)_{\text{действ}}=(220\,e^{-j120°}\cdot 45{,}5\,e^{j112°12'})_{\text{действ}}=9\,906\ вт.$$

Сумма показаний ваттметров $P_{AC}+P_{BC}$ должна равняться активной мощности цепи $r_{ca}I^2_{ca}$. При подстановке в указанное равенство числовых значений получим расхождение, не превышающее двух процентов, что вполне допустимо при подсчетах с помощью счетной линейки.

**2-50.** Оси двух одинаковых катушек сдвинуты в пространстве на 90°. По катушкам проходят синусоидальные токи, равные по величине и совпадающие по фазе.

Необходимо убедиться в том, что вектор магнитной индукции суммарного поля в центре катушек будет пульсировать в определенном направлении. Найти положение оси пульсации вектора магнитной индукции.

*Ответ.* Ось пульсации образует с осью любой катушки угол в 45°.

2-51. Оси двух одинаковых катушек сдвинуты в пространство на угол в 60°. По катушкам проходят токи с одинаковыми амплитудами, сдвинутые по фазе на 120°.

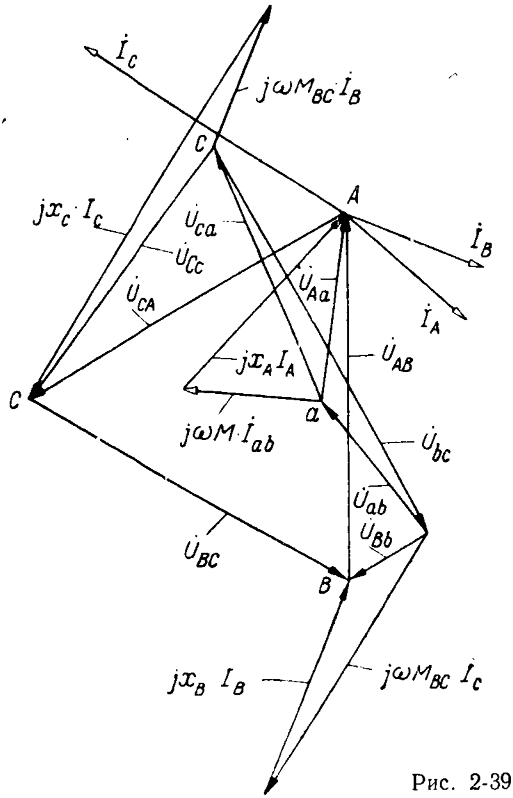



Рис. 2-39

Определить в центре катушек амплитуду вектора магнитной индукции суммарного вращающегося поля, если амплитуда вектора магнитной индукции каждой катушки равна $B_m$.

*Ответ.* $B_р = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m$.

## Тема 5

### Метод симметричных составляющих

Основой метода симметричных составляющих является аналитическое (возможно и графическое) разложение заданной системы векторов напряжений или токов на симметричные составляющие нулевой, прямой и обратной последовательностей. Метод симметричных составляющих удобно применять для расчета несимметричных режимов в симметричных линейных цепях. При этом имеется в виду, что сама трехфазная система (генераторы, трансформаторы, линии передачи) линейна и симметрична, а несимметрия режима создается, например, путем разрыва или короткого замыкания отдельных элементов системы. В таких цепях расчет сводится к рассмотрению одной фазы и применению принципа наложения.

Прежде чем перейти к изучению методики расчета электрических цепей с помощью симметричных составляющих, следует ответить на такой вопрос: почему сопротивления для токов прямой и обратной последовательностей для статической трехфазной системы (без вращающихся элементов — двигателей и генераторов) будут одинаковыми, а для системы с вращающимися элементами — разными?

## *Примеры и задачи*

**2-52.** На рис. 2-40 изображена схема обмотки статора генератора с заземленной нейтралью. У приемника фаза $A$ закорочена, а фазы $B$ и $C$ разомкнуты.

Найти симметричные составляющие токов различных последовательностей, если ток $\dot{I}_A$ равен 15 *а*.

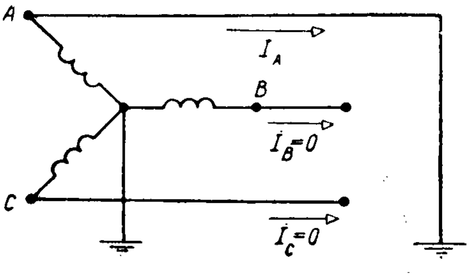



Рис. 2-40

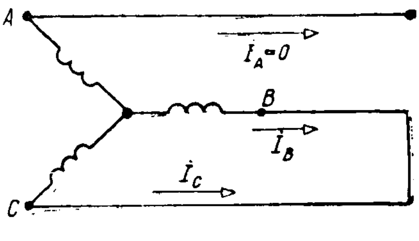



Рис. 2-41

*Ответ.* $\dot{I}_{A_0}=\dot{I}_{A_1}=\dot{I}_{A_2}=5$ *а*.

**2-53.** На зажимах трехфазного генератора произошло короткое замыкание между фазами $B$ и $C$ (рис. 2-41). Фаза $A$ разомкнута.

Найти симметричные составляющие токов различных последовательностей, если ток в фазе $B$ $I_B = 173$ *а*.

Построить векторную диаграмму симметричных составляющих токов во всех фазах.

### Решение

Пусть положительные направления токов будут от нейтрали генератора (см. рис. 2-41). Ток в фазе $A$ $I_A = 0$. Токи в двух других фазах связаны между собой равенством $\dot{I}_C = -\dot{I}_B$. Если вектор $\dot{I}_B$ направить по оси вещественных величин, т. е. $\dot{I}_B=173$ *a*, то $\dot{I}_C = -173$ *a*. Найдем симметричные составляющие токов фазы *A* по формулам

$$\dot{I}_{A_0} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) = 0; \quad \dot{I}_{A_1} = \frac{1}{3}(a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C) =$$

$$= \frac{173}{3}(a - a^2) = \frac{173}{3}(-0{,}5 + j\,0{,}865 + 0{,}5 + j\,0{,}865) = j\,100\ a;$$

$$\dot{I}_{A_2} = \frac{1}{3}(a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C) = \frac{173}{3}(a^2 - a) = -j\,100\ a.$$

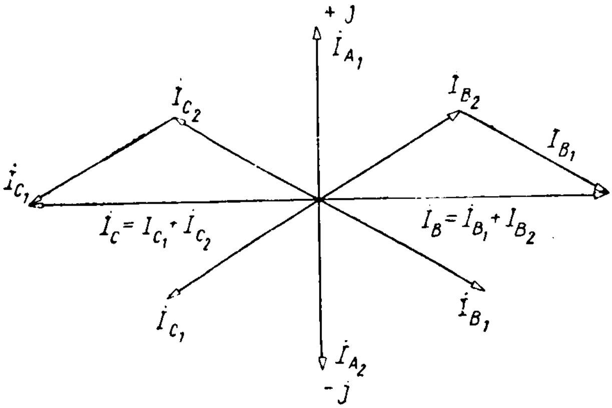



Рис. 2-42

Симметричные составляющие токов фаз *B* и *C* будут определяться следующими выражениями:

$$\dot{I}_{B_1} = a^2\dot{I}_{A_1}; \quad \dot{I}_{C_1} = a\dot{I}_{A_1}; \quad \dot{I}_{B_2} = a\dot{I}_{A_2} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{C_2} = a^2\dot{I}_{A_2}.$$

Составляющие токов нулевой последовательности во всех фазах равны нулю, т. е.

$$\dot{I}_{C_0} = \dot{I}_{B_0} = \dot{I}_{A_0} = 0.$$

На рис. 2-42 построены симметричные составляющие токов для всех трех фаз. Из этой диаграммы видно, что

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} = 0; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{B_2} = 173\ a$$

и

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} = -\dot{I}_B = -173\ a.$$

**2-54.** В условиях задачи 2-48 найти симметричные составляющие линейных токов и фазных напряжений.

Решение

Симметричные составляющие токов определяем по формулам

$$\dot I_{a_0} = \dot I_{b_0} = \dot I_{c_0} = \frac{1}{3}(\dot I_a + \dot I_b + \dot I_c) = 0;$$

$$\dot I_{a_1} = \frac{1}{3}(\dot I_a + a\dot I_b + a^2\dot I_c) = (7{,}6 - j\,10{,}2)\ a$$

и

$$\dot I_{a_2} = \frac{1}{3}(\dot I_a + a^2\dot I_b + a\dot I_c) = (-5 - j\,11{,}6)\ a.$$

Симметричные составляющие фазных напряжений находим по аналогичным формулам, т. е.

$$\dot U_{a_0} = \dot U_{b_0} = \dot U_{c_0} = \frac{\dot U_a + \dot U_b + \dot U_c}{3} = \frac{-95 - j\,165}{3} = (-32 - j\,55)\ в;$$

$$\dot U_{a_1} = \frac{\dot U_a + a\dot U_b + a^2\dot U_c}{3} =$$

$$= \frac{95 - j\,55 + a(-95 + j\,165) + a^2(-95 + j\,55)}{3} = 127\ в;$$

$$\dot U_{a_2} = \frac{\dot U_a + a^2\dot U_b + a\dot U_c}{3} =$$

$$= \frac{95 - j\,55 + a^2(-95 - j\,165) + a(-95 + j\,55)}{3} = 0.$$

Необходимо отметить, что в тех случаях, когда несимметричная статическая нагрузка присоединена к симметричным линейным напряжениям, фазные несимметричные напряжения на нагрузке не содержат составляющих обратной последовательности, что легко доказать в самом общем случае. Действительно, если в выражении $\dot U_{a_2}$ фазные напряжения $\dot U_a$, $\dot U_b$ и $\dot U_c$ заменить линейными напряжениями и проводимостями несимметричной звезды, то получим

$$\dot U_{a_2} = \frac{\dot U_{ab}Y_b - \dot U_{ca}Y_c + a^2(\dot U_{bc}Y_c - \dot U_{ab}Y_a) + a(\dot U_{ca}Y_a - \dot U_{bc}Y_b)}{3(Y_a + Y_b + Y_c)}.$$

Учитывая, что при симметричных линейных напряжениях $\dot U_{ca} = a\dot U_{ab}$ и $\dot U_{bc} = a^2\dot U_{ab}$, и подставляя напряжения $\dot U_{ca}$ и $\dot U_{bc}$ в выражение $\dot U_{a_2}$, получим $\dot U_{a_2} = 0$.

**2-55.** Три одинаковые катушки с взаимной индуктивностью $M$ соединены звездой (рис. 2-43). В нейтральный провод включена четвертая катушка, магнитно связанная с тремя остальными катуш-

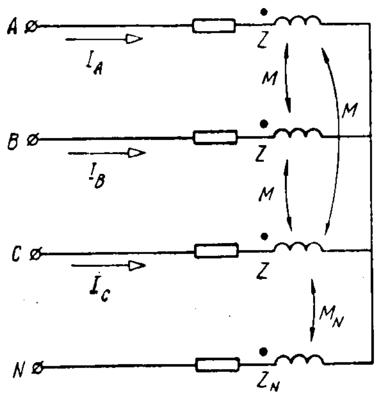



Рис. 2-43

ками. Взаимная индуктивность между катушкой $Z_N$ и каждой из трех других катушек $Z$ одинакова и равна $M_N$.

Определить сопротивления для токов различных последовательностей. Однополярные зажимы отмечены на рис. 2-43 точками.

### Решение

Для определения сопротивления этой цепи токам прямой последовательности предположим, что токи $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ образуют симметричную систему векторов прямой последовательности. Так как катушки одинаковы, то фазные напряжения звезды равны друг другу и сдвинуты по фазе на 120°. Ток в нейтрали

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Поэтому для фазы $A$

$$\dot{U}_{An} = \dot{U}_{A_1} = Z\dot{I}_A + j\omega M\dot{I}_B + j\omega M\dot{I}_C = (Z - j\omega M)\,\dot{I}_A = Z_1\dot{I}_{A_1}.$$

Если к зажимам $A$, $B$ и $C$ трехфазной системы подвести симметричную систему векторов напряжений обратной последовательности, то соотношения между симметричной системой токов и напряжений обратной последовательности будут такими же, как для прямой последовательности, т. е. $\dot{U}_{A_2} = Z_2\dot{I}_{A2}$. Иначе говоря, для симметричной статической трехфазной цепи сопротивления токам прямой и обратной последовательности одинаковы и равны $Z_1 = Z_2 = Z - j\omega M$.

Для определения сопротивления токам нулевой последовательности надо создать в системе такие условия, при которых токи в фазах нагрузки будут совпадать по фазе друг с другом. Этим условиям удовлетворяет схема рис. 2-44, где три обмотки соединены параллельно между собой и последовательно с сопротивлением $Z_N$ нейтрали. На зажимах этой цепи действует однофазное напряжение $\dot{U}_0$. Для этой цепи имеем на основании законов Кирхгофа следующее уравнение:

$$\dot{U}_0 = Z\dot{I}_0 + 2j\omega M\dot{I}_0 + 3j\omega M_N \dot{I}_0 + Z_N 3\dot{I}_0 -$$

$$-3j\omega M_N \dot{I}_0 = (Z + 3Z_N + 2j\omega M - j6\omega M_N)\dot{I}_0 = Z_0\dot{I}_0,$$

где

$$Z_0 = Z + 3Z_N + 2j\omega M - 6j\omega M_N$$

определяет сопротивление для токов нулевой последовательности.

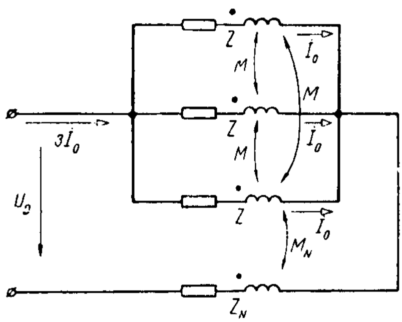



Рис. 2-44

Отметим, что схемы рис. 2-43 и 2-44 применяются соответственно для определения сопротивлений токам прямой и нулевой последовательностей опытным путем.

**2-56.** В схеме рис. 2-41 известны сопротивления генератора для токов прямой и обратной последовательностей

$$Z_{г1} = j\,8 \text{ ом} \quad \text{и} \quad Z_{г2} = j\,2 \text{ ом}.$$

Фазная э. д. с. генератора $E_ф = 100$ *в*.

Определить ток короткого замыкания в фазах *B* и *C* генератора.

Решение

В дальнейшем будем вести расчеты применительно к фазе *A* трехфазной системы, вследствие чего индексы, отмечающие фазы, опустим.

Основные уравнения для составляющих прямой и обратной последовательностей имеют следующий вид:

$$\dot{E}_1 = Z_{г1}\dot{I}_1 + \dot{U}_1 \quad \text{и} \quad 0 = Z_{г2}\dot{I}_2 + \dot{U}_2.$$

Добавочные уравнения получаются из условий режима цепи, т. е. $\dot{I}_A = 0$ и $\dot{U}_B = \dot{U}_C$.

Так как ток фазы $A$ равен $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0$, а составляющая тока нулевой последовательности равна нулю, то $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$. Из уравнений $\dot{U}_B = \dot{U}_C$ имеем

$$a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0,$$

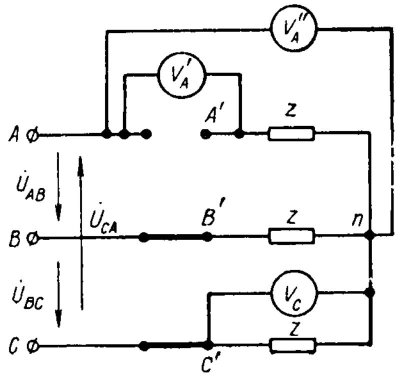



Рис. 2-45

откуда

$$(a^2 - a)\dot{U}_1 = (a^2 - a)\dot{U}_2$$

или

$$\dot{U}_1 = U_2.$$

Из основных уравнений с учетом $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ и $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$ получаем

$$\dot{E}_1 = (Z_{г1} + Z_{г2})\dot{I}_1,$$

откуда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_{г1} + Z_{г2}} = \frac{100}{j10} = -j\,10\ a.$$

Ток при коротком замыкании

$$\dot{I}_B = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 = (a^2 - a)\dot{I}_1 = -j\sqrt{3}\,\dot{I}_1 = -\sqrt{3}\cdot 10a.$$

**2-57.** На рис. 2-45 изображена схема трехфазного приемника электрической энергии. В ней известны сопротивления для токов прямой и обратной последовательностей

$$Z_1 = j\,8\ ом \quad \text{и} \quad Z_2 = j2\ ом,$$

Линейные напряжения одинаковы и равны

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \sqrt{3} \cdot 100 \text{ в}.$$

Определить токи, показания вольтметров и построить топографическую диаграмму для случая нарушения режима путем обрыва в фазе $A$.

## Решение

Эквивалентные схемы для токов различных последовательностей изображены на рис. 2-46.

В схеме рис. 2-46 для токов прямой последовательности показана, кроме сопротивления $Z_1$, фазная э. д. с. прямой последовательности эквивалентного генератора с внутренним сопротивлением, равным нулю.

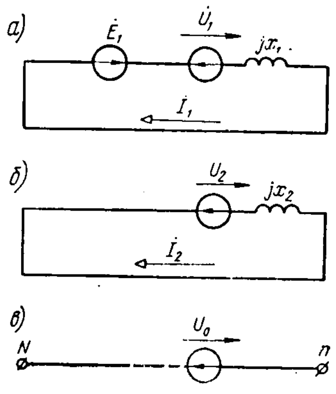


Рис. 2-46

Так как линейные напряжения симметричны, то фазная э. д. с. обратной последовательности в схеме для токов обратной последовательности равна нулю (рис. 2-46). Токи нулевой последовательности в заданной схеме равны нулю, что условно изображено на рис. 2-46 в виде разомкнутого контура, сопротивление которого для токов нулевой последовательности $Z_0 = \infty$.

Для схем рис. 2-46 имеем уравнения

$$\dot{E} = Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_1 \quad \text{и} \quad 0 = Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2.$$

Добавочные уравнения получаем из рассмотрения заданной схемы рис. 2-45 в виде

$$\dot{I}_A = 0; \quad \dot{U}_{BB'} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{CC'} = 0.$$

Из последних уравнений имеем

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0; \quad a^2 \dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0$$

и

$$a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0,$$

откуда

$$(a^2 - a)\dot{U}_1 + (a - a^2)\dot{U}_2 = 0 \quad \text{и} \quad \dot{U}_1 = \dot{U}_2$$

Кроме того, из уравнения $(a^2+a)\dot{U}_1+\dot{U}_0=0$ имеем

$$\dot{U}_0=\dot{U}_1.$$

Принимая во внимание $\dot{I}_1=-\dot{I}_2$, из основных уравнений получим

$$\dot{E}_1=(Z_1+Z_2)\dot{I}_1,$$

или

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}}{Z_1+Z_2}=\frac{100}{j10}=-j\,10\ a,$$

где вектор

$$\dot{E}_1=\frac{U_л}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot100}{\sqrt{3}}=100\ в$$

направлен по оси вещественных величин. Составляющая тока обратной последовательности

$$\dot{I}_2=-\dot{I}_1=j\,10\ a.$$

Токи $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ определяются из выражений

$$\dot{I}_B=a^2\dot{I}_1+a\dot{I}_2=(a^2-a)\dot{I}_1=-10\sqrt{3}\ a$$

и

$$\dot{I}_C=-\dot{I}_B=10\sqrt{3}\ a.$$

Напряжения от токов различных последовательностей легко находим из уравнения

$$\dot{U}_2=-Z_2\dot{I}_2=-j\,2j\,10=20\ в=\dot{U}_1=\dot{U}_0.$$

Напряжение между точками обрыва $A$ и $A'$ (см. рис. 2-45)

$$\dot{U}_{AA'}=\dot{U}_0+\dot{U}_1+\dot{U}_2=60\ в.$$

Напряжение между точками $A'$ и $n$ находим из выражения

$$\dot{U}_{A'n}=Z_1\dot{I}_1+Z_2\dot{I}_2=(Z_1-Z_2)\dot{I}_1=(j\,8-j2)(-j\,10)=60\ в.$$

Следовательно, вольтметр $V_A''$, включенный между нейтральной точкой $n$ и фазой $A$, будет показывать

$$\dot{U}_{An}=\dot{U}_{AA'}+\dot{U}_{A'n}=60+60=120\ в.$$

По полученным данным на рис. 2-47 построена топографическая диаграмма. Пользуясь топографической диаграммой, легко определить напряжение, показываемое вольтметром $V_C$, по формуле

$$U_{Cn}=\sqrt{\left(\frac{100\sqrt{3}}{2}\right)^2+30^2}=10\sqrt{\frac{100\cdot 3}{4}+9}=92\ в.$$

2-58. На рис. 2-48 изображена схема симметричной трехфазной цепи, состоящей из генератора, линии и приемника, соединенного

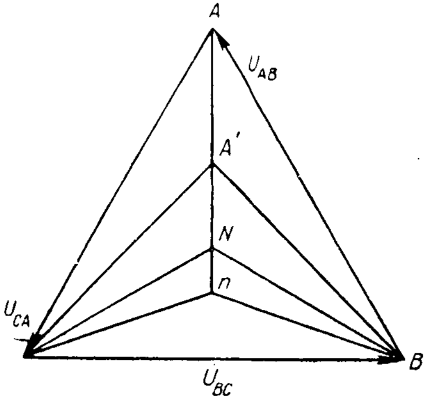



Рис. 2-47

звездой. Нейтраль генератора заземлена через индуктивность $L$, а нейтраль нагрузки соединена с землей проводником, не обладающим сопротивлением.

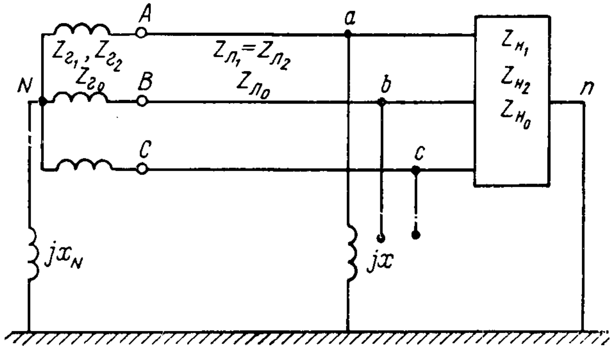



Рис. 2-48

Несимметрия режима создается однофазной реактивной нагрузкой, включенной в конце линии между фазой $a$ и землей (рис. 2-48). Считая известными сопротивления всех элементов цепи для токов различных последовательностей, необходимо составить для них эквивалентные схемы.

*Ответ.* На рис. 2-49 изображены эквивалентные схемы для токов различных последовательностей.

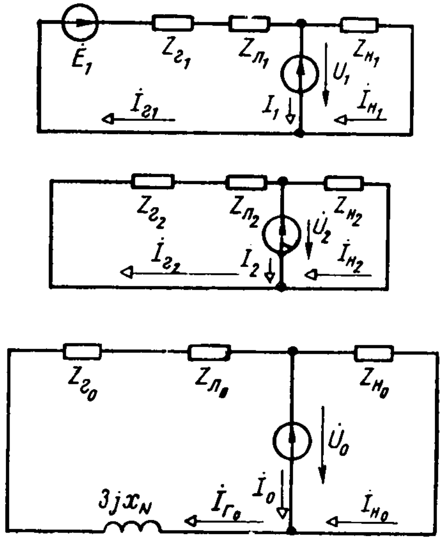



Рис. 2-49

## Тема 6

## Цепи с распределенными параметрами

Передача электромагнитной энергии с помощью длинной линии сопровождается потерями энергии в линии, а также изменением тока и напряжения вдоль линии как по величине, так и по фазе.

Изменение тока и напряжения вдоль линии зависит от параметров линии, т. е. от емкости, индуктивности, сопротивления и проводимости утечки на единицу длины линии. С целью упрощения расчета эти параметры принимаются равномерно распределенными по длине линии. Распространение электромагнитной энергии вдоль проводов бесконечной линии происходит в виде волны, при этом даже линия без потерь потребляет энергию от источника. В линиях с потерями происходит затухание распространяющейся волны, и энергия, потребляемая от источника, расходуется на покрытие тепловых потерь в линии и запасается в электромагнитном поле. Режим в линии конечной длины, замкнутой на сопротивление, равное волновому, аналогичен режиму в бесконечной линии. При анализе явлений в линиях конечной длины вводятся понятия главной и отраженной волн, движущихся в противоположных направлениях. Эти понятия для установившегося режима в линиях имеют, по существу, расчетный смысл.

Для линии с потерями амплитуды главной и отраженной волн затухают по направлению движения. Если линия без потерь и в конце ее отсутствует активная нагрузка, иначе говоря, по линии не передается активная мощность, то на линии возникнут стоячие волны, характеризующиеся узлами и пучностями. В зависимости от условий на конце линии узлы и пучности находятся в определенных точках, не смещаясь по длине линии.

Для анализа явлений в линиях передачи часто пользуются эквивалентными схемами, представляющими собой сочетание сосредоточенных параметров. Переход от равномерно распределенных параметров линии к сосредоточенным в виде схем замещения вида П или Т учитывается соответствующими коэффициентами.

Для моделирования процессов в реальных линиях обычно собирают эквивалентные схемы в виде целого ряда симметричных четырехполюсников, соединенных в каскад. Такие схемы называются цепочечными схемами. Цепочечные схемы очень часто встречаются и в реальных условиях. Например, процессы в обмотках машин и трансформаторов изучаются с помощью цепочечных схем.

## *Примеры и задачи*

**2-59.** Какая линия называется однородной?

**2-60.** Чем отличаются дифференциальные уравнения длинной линии при начале отсчета координаты $x$ в начале линии и в ее конце?

**2-61.** Какой смысл имеет каждая составляющая в решении дифференциального уравнения длинной линии при начале отсчета координаты $x$ в начале линии и в ее конце, если напряжение и ток изменяются в зависимости от времени по синусоидальному закону?

**2-62.** В каких случаях образуются на линии стоячие волны тока и напряжения и что является характерным для стоячих волн?

**2-63.** Может ли быть напряжение в начале линии с потерями ниже напряжения на ее конце при режиме холостого хода?

**2-64.** Влияет ли нагрузка на величину входного сопротивления линии?

**2-65.** Определить величину входного сопротивления воздушной линии без потерь, закороченной на конце, если волновое сопротивление линии $Z_c$, длина линии $l$, а частота синусоидального напряжения, приложенного в начале линии, $f$.

**2-66.** Параметры линии без потерь равны $\omega L_0 = 0{,}5$ *ом/км* и $\omega C_0 = 2\cdot 10^{-6}$ *сим/км*.

Определить величину и характер сопротивления приемника, при котором не будет отраженных волн.

*Ответ.* $z_c = 500$ *ом* (сопротивление активное).

**2-67.** Параметры кабельной линии равны:

$r_0 = 1$ *ом/км* и $\omega C_0 = 4\cdot 10^{-4}$ *сим/км*, Индуктивностью и утечкой пренебречь.

Определить величину и характер сопротивления нагрузки, при котором не будет отраженных волн.

*Ответ.* $Z_2 = Z_c = 50\, e^{-j\, 45°}$ *ом.*

**2-68.** Построить кривые изменения сопротивления $Z_{вх.к}$ в зависимости от расстояния от конца закороченной линии без потерь, если волновое сопротивление $z_c = 500$ *ом*, длина линии $l = 70$ *м*, а длина волны $\lambda = 60$ *м*.

Решение

Пользуясь формулой $Z_{вх.\,к} = jz_c \operatorname{tg} \beta x$, найдем величину этого сопротивления для различных значений $x$.

При $x = 0$ $Z_{вх.\,к} = 0$, а при $x = \frac{\lambda}{4} Z_{вх.\,к} = \infty$; при этом сопротивление $Z_{вх.\,к}$ является индуктивным для всех значений $x$: от нуля до $x = \frac{\lambda}{4}$.

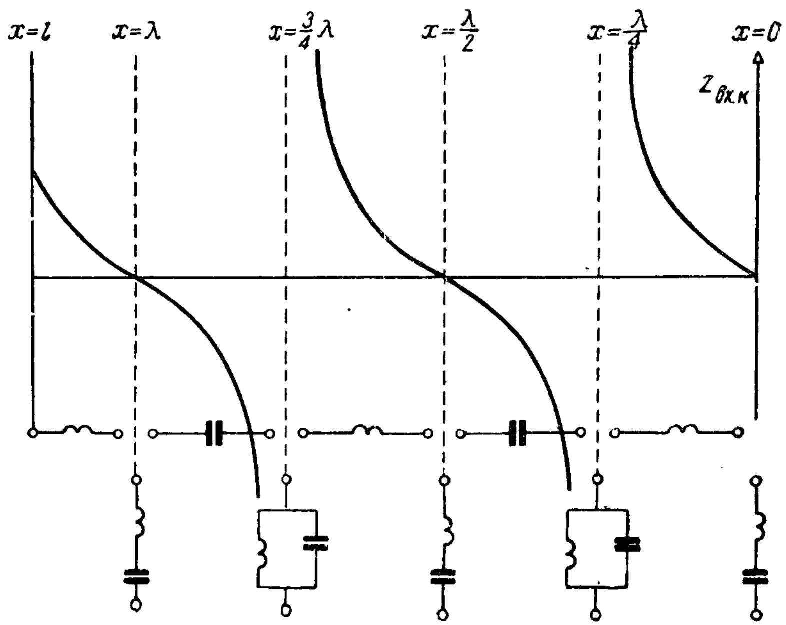



Рис. 2-50

При изменении координаты $x$ от $x = \frac{\lambda}{4}$ до $x = \frac{\lambda}{2}$ сопротивление $Z_{вх.\,к}$ меняется в пределах от $Z_{вх.\,к} = -\infty$ до $Z_{вх.\,к} = 0$ и является емкостным. Дальнейшее изменение этого сопротивления видно из рис. 2-50. Отметим, что в точках нулевого значений сопротивления имеются пучности тока и узлы напряжения, а в точках бесконечно большего сопротивления $Z_{вх.\,к}$ имеются узлы тока и пучности напряжения.

Входное сопротивление линии

$$Z_{вх.\,к} = jz_с \operatorname{tg} \beta l = j\,500 \operatorname{tg} \frac{360 \cdot 70}{60} = j\,873 \text{ ом}$$

и является индуктивным.

**2-69.** Определить, на каком расстоянии $l$ должна быть закорочена линия без потерь, чтобы она была эквивалентна индуктивности $L=10^{-5}$ *гн*, если $z_с=500$ *ом*, $\lambda=60$ *м* и $v=3 \cdot 10^5$ *км/сек*.

Решение

Входное сопротивление линии

$$Z_{вх.\,к} = jz_с \operatorname{tg} \beta l = j\omega L,$$

где

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi v}{\lambda} = \pi \cdot 10^7 \text{ рад/сек}$$

Найдем величину $\operatorname{tg} \beta l$ из выражения

$$\operatorname{tg} \beta l = \frac{\omega L}{z_с} = \frac{\pi \cdot 10^7 \cdot 10^{-5}}{500} = 0{,}629.$$

откуда $\beta l = 31^\circ{,}17$.

Так как

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^5} = 33{,}3\,\pi,$$

то

$$l = \frac{32{,}17\,\pi}{180 \cdot 33{,}33\,\pi} = 5{,}36 \cdot 10^{-3} \text{ км} = 5{,}36 \text{ м}.$$

**2-70.** В конце кабельной линии включено сопротивление $Z_2 = z_с$. Напряжение $U_2=30$ *кв*, длина линии $l=70{,}8$ *км*.

Параметры линии: $r_0 = 1$ *ом/км*, $\omega C = 4 \cdot 10^{-4}$ *сим/км*, $g_0 = 0$, $\omega L_0 = 0$.

Определить напряжение $U_1$ и ток $I_1$ в начале линии и построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Решение

Величина волнового сопротивления

$$Z_с = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{1}{j\,4 \cdot 10^{-4}}} = 50 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ ом}.$$

Ток в конце линии

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} = \frac{30\,000}{50} e^{+j45^\circ} = 600\, e^{j45^\circ}\ a.$$

Коэффициент распространения $\gamma$ определяется из выражения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{1\cdot 4\cdot 10^{-4} j} =$$

$$= 2\cdot 10^{-2} e^{+j45^\circ} = (\sqrt{2} + j\sqrt{2})\, 10^{-2}\ км^{-1}.$$

Так как сопротивление приемника равно волновому сопротивлению линии, то напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ будут

$$\dot{U}_1 = U_2 e^{\gamma l} = 30\, e^{\sqrt{2}\cdot 10^{-2}\cdot 70,8}\, e^{j\sqrt{2}\cdot 10^{-2}\cdot 70,8} =$$

$$= 30\, e e^{j} = 81,6\, e^{j57^\circ,3}\ кв,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\gamma l} = 2,72\cdot 600\, e^{j(45^\circ + 57^\circ,3)} = 1\,630\, e^{j102^\circ,3}\ a,$$

По полученным данным построена на рис. 2-51 векторная диаграмма токов и напряжений.

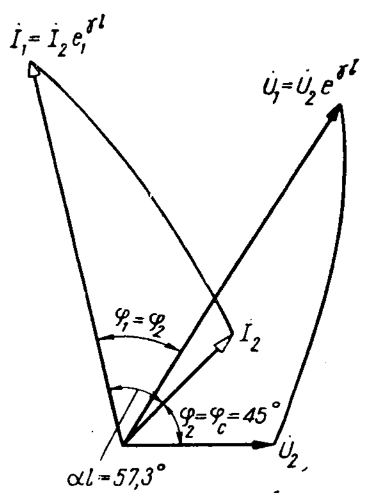



Рис. 2-51

**2-71.** Городская подстанция мощностью $P_2 = 10$ *Мвт*, линейным напряжением $U_{2л} = 110$ *кв*, $\cos\varphi_2 = 0,85$ (индуктивный), $f = 50$ *гц* получает энергию от трехфазной линии электропередачи с параметрами каждой фазы:

$r_0 = 0,3$ *ом/км*; $L_0 = 1,3\cdot 10^{-3}$ *гн/км*;

$C_0 = 8\cdot 10^{-9}$ *ф/км*; $g_0 = 0$. Длина линии 180 *км*.

Пользуясь уравнениями в гиперболических функциях, определить линейное напряжение, ток и мощность в начале линии.

## Решение

Сопротивление и проводимость одного провода линии на километр равны:

$$Z_0 = r_0 + j\omega L_0 = 0,3 + j\,314\cdot 1,3\cdot 10^{-3} = 0,3 + j\,0,408 =$$

$$= 0,506\, e^{j53^\circ 40'}\ ом/км;$$

$$Y_0 = g_0 + j\omega C_0 = 0 + j\,314\cdot 8,10^{-9} = 2,51\cdot 10^{-6} e^{j90^\circ}\ сим/км.$$

Волновое сопротивление

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0,506\, e^{j53^\circ40'}}{2,51\cdot10^{-6}\, e^{j90^\circ}}} = 450\, e^{-j18^\circ10'}\ \text{ом}.$$

Коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{0,506\, e^{j53^\circ40'}\, 2,51\cdot10^{-6}\, e^{j90}} =$$

$$= 1,13\cdot10^{-3}\, e^{j71^\circ50'} = 0,353\cdot10^{-3} + j\,1,07\cdot10^{-3};$$

$$\operatorname{sh}\gamma l = \operatorname{sh}(0,353\cdot10^{-3} + j\,1,07\cdot10^{-3})\,180 = \operatorname{sh}(63,5\cdot10^{-3} + j\,193\cdot10^{-3}) =$$

$$= \operatorname{sh}63,5\cdot10^{-3}\cos 193\cdot10^{-3} + j\operatorname{ch}63,5\cdot10^{-3}\sin 193\cdot10^{-3} =$$

$$= \operatorname{sh}0,0635\cos 11^\circ + j\operatorname{ch}0,0635\sin 11^\circ = 0,0635\cdot0,982 + j1\cdot0,191 =$$

$$= 0,063 + j\,0,191 \cong 0,203\, e^{j71^\circ30'};$$

$$\operatorname{ch}\gamma l = \operatorname{ch}0,0635\cos 11^\circ + j\operatorname{sh}0,0635\sin 11^\circ =$$

$$= 1\cdot0,982 + j\,0,0635\cdot0,191 = 0,982 + j\,0,0121 \cong 0,982\, e^{j0^\circ42'}.$$

Принимая нагрузку равномерной и однородной, находим фазное напряжение

$$U_{2\text{ф}} = \frac{U_{2\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{110\cdot10^3}{\sqrt{3}} = 63,5\cdot10^3\ \text{в}$$

и ток

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3}\, U_{2\text{л}}\cos\varphi_2} = \frac{10\cdot10^6}{\sqrt{3}\cdot110\cdot10^3\cdot0,85} = 62,2\ \text{а}.$$

В комплексной форме, полагая

$$\dot U_{2\text{ф}} = U_{2\text{ф}} = 63,5\cdot10^3\ \text{в},$$

$$\dot I_2 = I_2\, e^{-j\varphi_2} = 62,2\, e^{-j31^\circ50'},$$

так как по условию ток должен отставать по фазе от напряжения на угол $\varphi_2 = 31^\circ 51'$.

Расчет трехфазной линии производится на одну фазу:

$$U_{1\text{ф}} = U_{2\text{ф}}\operatorname{ch}\gamma l + Z_c \dot I_2 \operatorname{sh}\gamma l = 63,5\cdot10^3\cdot0,982 +$$

$$+ 450\, e^{j18^\circ10'}\, 62,2\, e^{-j31^\circ50'}\, 0,203\, e^{j71^\circ30'} =$$

$$= 62,4\cdot10^3\, e^{j0^\circ42'} + 5,68\cdot10^3\, e^{j21^\circ30'} = 67,1\cdot10^3\, e^{j2^\circ37'};$$

$$U_{1\text{л}} = \sqrt{3}\, U_{1\text{ф}} = \sqrt{3}\cdot67,1\cdot10^3 = 116\cdot10^3\ \text{в}.$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{2\text{ф}}}{Z_c}\,\text{sh}\,\gamma l + \dot{I}_2\,\text{ch}\,\gamma l = \frac{63{,}5\cdot 10^3}{450\,e^{-j18^\circ 10'}}\,0{,}203\,e^{j71^\circ 30'} +$$

$$+ 67{,}2\,e^{-j31^\circ 50'}\,0{,}982\,e^{j0^\circ 42'} = 28{,}6\,e^{j89^\circ 40'} + 61{,}0\,e^{-j31^\circ 08'} =$$

$$= 52{,}6\,e^{-j3^\circ 20'}\ a;$$

$$P_1 = 3\text{Re}\,(\dot{U}_{1\text{ф}}\overset{*}{I}_1) = 3\text{Re}\,(67{,}1\cdot 10^3\,e^{j2^\circ 37'}\,52{,}6\,e^{+j3^\circ 20'}) =$$

$$= 3\text{Re}\,(3{,}54\cdot 10^6\,e^{j5^\circ 57'}) = 3\cdot 3{,}54\cdot 10^6\cos 5^\circ 57' =$$

$$= 3\cdot 3{,}54\cdot 10^6\cdot 0{,}995 = 10{,}6\ \textit{Мвт}.$$

**2-72.** Воздушная линия передачи электрической энергии без потерь с волновым сопротивлением $z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ имеет на конце реактивную нагрузку, состоящую из параллельно соединенных емкостного сопротивления $x_C$ и индуктивного $x_L < x_C$.

Требуется доказать, что в линии имеются стоячие волны.

*Ответ.* Комплексные значения напряжения и тока на расстоянии $x$ от конца линии определяются уравнениями

$$\dot{U} = \dot{U}_2\sqrt{1 + \frac{z_c^2}{x_{LC}^2}}\cos(\beta x - \varphi)$$

и

$$\dot{I} = j\,\frac{\dot{U}_2}{z_c}\sqrt{1 + \frac{z_c^2}{x_{LC}^2}}\sin(\beta x - \varphi),$$

где

$$x_{LC} = \frac{x_L x_C}{x_C - x_L} \quad \text{и} \quad \varphi = \text{arctg}\,\frac{z_c}{x_{LC}}.$$

**2-73.** В условиях задачи 2-72 определить расстояние от конца линии до ближайшей пучности тока и напряжения, если $x_L = 200$ *ом*, $x_c = 400$ *ом*, $z_c = 400$ *ом* и длина волны $\lambda = 60$ *м*.

*Ответ.* Ближайшая от конца линии пучность напряжения и узел тока будет на расстоянии

$$x = \frac{\varphi}{2\pi}\lambda = \frac{\pi}{4\cdot 2\pi}\lambda = 7{,}5\ \textit{м}.$$

**2-74.** На рис. 2-52 показано последовательное соединение двух линий без потерь с волновыми сопротивлениями $z_{1c} = 420$ *ом* и $z_{2c} = 720$ *ом*. Длина первой линии $l_1 = 15$ *м*, длина второй линии $l_2 = 8{,}5$ *м*.

Определить входное сопротивление в начале первой линии, если длина волны $\lambda = 40$ *м*, а конец второй линии разомкнут.

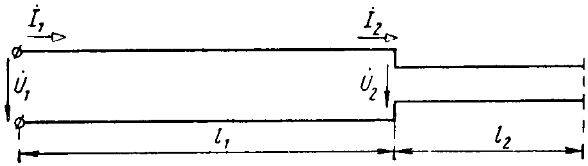



Рис. 2-52

## Решение

Входное сопротивление в начале второй линии (или в конце первой)

$$Z_{\text{вх.х}} = jz_{2c}\operatorname{ctg}\beta l_2 = -jz_2,$$

где $z_2 = z_{2c}\operatorname{ctg}\beta l_2$.

Следовательно, в конце первой линии можно включить вместо второй линии сопротивление $-jz_2$. Если в конце первой линии действуют напряжение $\dot U_2$ и ток $\dot I_2$, то напряжение и ток на входных зажимах первой линии (у генератора) определяются выражениями

$$\dot U_1 = \dot U_2\cos\beta l_1 + jz_{1c}\dot I_2\sin\beta l_1$$

и

$$\dot I_1 = \dot I_2\cos\beta l_1 + j\frac{\dot U_2}{z_{1c}}\sin\beta l_1.$$

Входное сопротивление в начале первой линии

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = \frac{\dot U_2\cos\beta l_1 + jz_{1c}\dot I_2\sin\beta l_1}{\dot I_2\cos\beta l_1 + j\dfrac{\dot U_2}{z_{1c}}\sin\beta l_1}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части на $\dfrac{z_{1c}}{\dot I_2\sin\beta l_1}$, в результате получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dfrac{\dot U_2}{\dot I_2}z_{1c}\operatorname{ctg}\beta l_1 + jz_{1c}^2}{z_{1c}\operatorname{ctg}\beta l_1 + j\dfrac{\dot U_2}{\dot I_2}}.$$

Обозначая в этом уравнении

$$z_{1c}\operatorname{ctg}\beta l_1 = z_1 \quad \text{и} \quad \frac{\dot U_2}{\dot I_2} = -jz_2,$$

получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{-j\left(z_1 z_2 - z_{1c}^2\right)}{z_1 + z_2}.$$

Найдем числовые значения сопротивлений $z_1$, $z_2$ и $Z_{\text{вх}}$:

$$z_1 = z_{1c}\operatorname{ctg}\beta l_1 = 420\operatorname{ctg}\frac{360\cdot 15}{40} = -420 \text{ ом};$$

$$z_2 = z_{2c}\operatorname{ctg}\beta l_2 = 720\operatorname{ctg}\frac{360\cdot 8{,}5}{40} = 173 \text{ ом};$$

$$Z_{\text{вх}} = -j\frac{-420\cdot 173 - 420^2}{-420 + 173} \approx -j\,10\,000 \text{ ом}.$$

Из полученного выражения для $Z_{\text{вх}}$ видно, что входное сопротивление рассматриваемой системы является емкостным.

2-75. В начале двухпроводной воздушной линии длиной $l = 12$ *м* с волновым сопротивлением $z_c = 400$ *ом* включен генератор с э. д. с. $E = 2000$ *в* и внутренним сопротивлением $r_0 = 400$ *ом*. Длина волны $\lambda = 2{,}5$ *м*.

Определить токи и напряжения в начале линии и в пучности, если линия в конце: а) разомкнута; б) замкнута накоротко.

## Решение

При холостом ходе линии без потерь комплексы напряжения и тока на расстоянии $x$ от конца:

$$\dot U = \dot U_2\cos\beta x; \quad \dot I = j\frac{\dot U_2}{z_c}\sin\beta x.$$

В начале линии при $x = l$

$$\dot U_1 = \dot U_2\cos\beta l; \quad \dot I_1 = j\frac{\dot U_2}{z_c}\sin\beta l;$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = -jz_c\operatorname{ctg}\beta l.$$

В пучности напряжения $\cos\beta x = 1$, в пучности тока $\sin\beta x = 1$, поэтому

$$\dot U_{\text{пучн}} = \dot U_2; \quad \dot I_{\text{пучн}} = j\frac{\dot U_2}{z_c} = j\frac{\dot U_{\text{пучн}}}{z_c}.$$

Определяем $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, или, заменяя радианы градусами,

$$\beta = \frac{360^\circ}{\lambda} = \frac{360^\circ}{2{,}5\ \textit{м}} = 144\ \textit{град/м}.$$

Далее имеем

$$\beta l = 144^\circ \cdot 12 = 1728^\circ;$$

$$\cos\beta l = \cos 1728^\circ = \cos(1728^\circ - 5\cdot 360^\circ) = \cos(-72^\circ) = 0{,}309;$$

$$\text{isn}\,\beta l = \sin(-72^\circ) = -0{,}951; \quad \operatorname{tg}\beta l = -3{,}078; \quad \operatorname{ctg}\beta l = -0{,}325.$$

Входное сопротивление линии

$$Z_{\text{вх}} = -jz_c \operatorname{ctg}\beta l = -j\cdot 400(-0{,}325) = j\,130 = 130\,e^{j90^\circ}\ \textit{ом}.$$

Общее сопротивление

$$Z_{\text{общ}} = r_0 + Z_{\text{вх}} = 400 + j\,130 = 422\,e^{j18^\circ}\ \textit{ом}.$$

Ток в начале линии

$$\dot I_1 = \frac{\dot E}{Z_{\text{общ}}} = \frac{2\,000}{422\,e^{j18^\circ}} = 4{,}75\,e^{-j18^\circ}\ \textit{а}.$$

Напряжение в начале

$$\dot U_1 = \dot I_1 Z_{\text{вх}} = 4{,}75\,e^{-j18^\circ}\cdot 130\,e^{j90^\circ} = 618\,e^{j72^\circ}\ \textit{в}.$$

Напряжение в конце линии

$$\dot U_2 = \dot U_{\text{пучн}} = \frac{\dot U_1}{\cos\beta l} = \frac{618\,e^{j72^\circ}}{0{,}309} = 2\,000\,e^{j72^\circ}\ \textit{в}.$$

Наконец,

$$\dot I_{\text{пучн}} = j\,\frac{\dot U_{\text{пучн}}}{z_c} = j\,\frac{2\,000\,e^{j72^\circ}}{400} = 5\,e^{j162^\circ}\ \textit{а}.$$

При коротком замыкании в конце линии напряжение на расстоянии $x$ от конца

$$\dot U = j\dot I_2 z_c \sin\beta x; \quad \dot I = \dot I_2 \cos\beta x.$$

В начале линии

$$\dot U_1 = j\dot I_2 z_c \sin\beta l; \quad \dot I_1 = \dot I_2\cos\beta l; \quad Z_{\text{вх}} = \frac{\dot U_1}{\dot I_1} = jz_c \operatorname{tg}\beta l.$$

В пучности тока $\cos\beta x = 1$ и

$$\dot I_{\text{пучн}} = \dot I_2$$

В пучности напряжения $\sin\beta x = 1$ и

$$\dot{U}_{\text{пучн}} = j\dot{I}_2 z_c = j\dot{I}_{\text{пучн}} z_c.$$

Таким образом,

$$Z_{\text{вх}} = jz_c \operatorname{tg}\beta l = j\,400\,(-3{,}078) = -j\,1231 = 1231\,e^{-j90^\circ}\ \textit{ом};$$

$$Z_{\text{общ}} = r_0 + Z_{\text{вх}} = 400 - j\,1231 = 1\,300\,e^{-j72^\circ}\ \textit{ом};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{E}{Z_{\text{общ}}} = \frac{2\,000}{1\,300\,e^{-j72^\circ}} = 1{,}54\,e^{j72^\circ}\ \textit{а};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{\text{вх}} = 1{,}54\,e^{-j72^\circ}\cdot 1231\,e^{-j90^\circ} = 1895\,e^{-j18^\circ}\ \textit{в};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{\text{пучн}} = \frac{\dot{I}_1}{\cos\beta l} = \frac{1{,}54\,e^{j72^\circ}}{0{,}309} = 5\,e^{j72^\circ}\ \textit{а};$$

$$\dot{U}_{\text{пучн}} = j\dot{I}_{\text{пучн}} z_c = j\,5e^{j72^\circ}\cdot 400 = 2\,000\,e^{j162^\circ}\ \textit{в}.$$

**2-76.** На конце линии, рассмотренной в предыдущей задаче, имеется нагрузочное сопротивление

$$Z_2 = 640 + j\,480 = 800\,e^{j36^\circ 50'}\ \textit{ом}.$$

Определить ток и напряжение в начале и конце линии, активную мощность, поступающую в линию (мощность нагрузки), а также наибольшие и наименьшие (действующие) значения напряжения и тока в линии и их месторасположение.

Решение

При нагрузочном режиме комплексы напряжения и тока в начале линии равны:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2\cos\beta l + j\dot{I}_2 z_c \sin\beta l;$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2\cos\beta l + j\,\frac{\dot{U}_2}{z_c}\sin\beta l,$$

причем

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2.$$

Вычисляем входное сопротивление линии с нагрузкой

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_2 + jz_c \operatorname{tg}\beta l}{1 + j\dfrac{Z_2}{z_c}\operatorname{tg}\beta l} = \frac{640 + j\,480 - j\,400\cdot 3{,}078}{1 + j\,\dfrac{640 + j\,480}{400}(-3{,}078)} =$$

$$= \frac{640 - j\,751}{4{,}69 - j\,4{,}92} = \frac{987\,e^{-j49^\circ 30'}}{6{,}8\,e^{-j46^\circ 20'}} = 145\,e^{-j3^\circ 10'} \approx 145\ \textit{ом}.$$

Общее сопротивление

$$Z_{общ} = r_0 + Z_{вх} = 400 + 145 = 545 \text{ ом}.$$

Ток в начале линии

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_{общ}} = \frac{2\,000}{545} = 3{,}67 \text{ а}.$$

Напряжение в начале линии

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{вх} = 3{,}67 \cdot 145\, e^{-j3°10'} = 532\, e^{-j3°10'} \text{ в}.$$

Ток в конце линии

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_2 \cos\beta l + jz_c \sin\beta l} = \frac{532\, e^{-j3°10'}}{(640 + j\,480)\,0{,}309 - j\,400 \cdot 0{,}951} =$$

$$= \frac{532\, e^{-j3°10'}}{198 - j\,232} = \frac{532\, e^{-j3°10'}}{305\, e^{-j49°30'}} = 1{,}74\, e^{j46°20'} \text{ а}.$$

Напряжение в конце линии

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_2 = 1{,}74\, e^{j46°20'}\, 800\, e^{j36°50'} = 1392\, e^{j83°10'} \text{ в}.$$

Мощность

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = 532 \cdot 3{,}67 \cdot \cos 3° = 1942 \text{ вт},$$

или

$$P = I_2^2 r_2 = 1{,}74^2 \cdot 640 = 1940 \text{ вт}.$$

Наибольшие значения напряжения $U_{наиб}$ будут, очевидно, получаться в тех точках линии, где напряжения падающей и отраженной волн совпадают по фазе (амплитуды $U_{m пад}$ и $U_{m отр}$ арифметически складываются). В этих же точках получаются наименьшие значения тока $I_{наим}$, так как амплитуды $I_{m пад}$ и $I_{m отр}$ здесь арифметически вычитаются. Там же, где $U_{пад}$ и $U_{отр}$ находятся в противофазе, будем иметь наименьшие значения напряжения $U_{наим}$ и наибольшие значения тока $I_{наиб}$.

Действительно, обратимся к уравнениям длинной линии, выраженным в форме падающих и отраженных волн:

$$\dot{U} = \dot{U}_{пад}\, e^{j\beta x} + \dot{U}_{отр}\, e^{-j\beta x},$$

где

$$\dot{U}_{пад} = U_{пад}\, e^{j\psi_{пад}}, \quad \dot{U}_{отр} = U_{отр}\, e^{j\psi_{отр}},$$

а $x$ отсчитывается от конца линии. Ток

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{пад}}{z_c} e^{j\beta x} - \frac{\dot{U}_{отр}}{z_c} e^{-j\beta x}.$$

Переходя к мгновенным значениям, получаем

$$u = U_{m\text{пад}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{\text{пад}}) + U_{m\text{отр}} \sin(\omega t - \beta x + \psi_{\text{отр}});$$

$$i = \frac{U_{m\text{пад}}}{z_{\text{c}}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{\text{пад}}) - \frac{U_{m\text{отр}}}{z_{\text{c}}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_{\text{отр}}).$$

Напряжения совпадут по фазе в тех точках, где

$$(\omega t + \beta x + \psi_{\text{пад}}) - (\omega t - \beta x + \psi_{\text{отр}}) = 0;\ 2\pi;\ 4\pi\ldots$$

или

$$2\beta x = \psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}} + 2k\pi\ (k = 0;\ 1;\ 2\ldots),$$

откуда

$$x = \frac{\psi_{\text{отр}} - \psi_{\text{пад}}}{2a} + k\frac{\lambda}{2}.$$

В этих точках (переходим к действующим значениям)

$$U_{\text{наиб}} = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}};$$

$$I_{\text{наим}} = \frac{U_{\text{пад}}}{z_{\text{c}}} - \frac{U_{\text{отр}}}{z_{\text{c}}} = I_{\text{пад}} - I_{\text{отр}}.$$

Если же сдвинуться от каждой из этих точек на расстояние $\frac{\lambda}{4}$, то разность фаз станет равной $\pi$; $3\pi$; $5\pi$; ... и здесь будут получаться

$$U_{\text{наим}} = U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}} = I_{\text{наим}} z_{\text{c}}$$

и

$$I_{\text{наиб}} = \frac{U_{\text{пад}}}{z_{\text{c}}} + \frac{U_{\text{отр}}}{z_{\text{c}}} = \frac{U_{\text{наиб}}}{z_{\text{c}}}.$$

Обратимся к расчету:

$$\dot{U}_{\text{пад}} = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 z_{\text{c}}}{2} = \frac{\dot{I}_2}{2}(Z_2 + z_{\text{c}}) = 0{,}87\, e^{j46°20'}(1040 + j\,480) =$$

$$= 1\,000\, e^{j71°05'}\ \text{в};$$

$$\dot{U}_{\text{отр}} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 z_{\text{c}}}{1} = \frac{\dot{I}_2}{2}(Z_2 - z_{\text{c}}) = 0{,}87\, e^{j46°20'}(240 + j\,480) =$$

$$= 470\, e^{j110°05'}\ \text{в}.$$

Таким образом,

$$U_{\text{пад}} = 1\,000\ \text{в},\quad \psi_{\text{пад}} = 71°05';$$

$$U_{\text{отр}} = 470\ \text{в},\quad \psi_{\text{отр}} = 110°05'.$$

На расстоянии от конца линии

$$x = \frac{\psi_{отр} - \psi_{пад}}{2\beta} = \frac{39}{288} = 0{,}135 \text{ м}$$

напряжение имеет наибольшее значение:

$$U_{наиб} = U_{пад} + U_{отр} = 1\,000 + 470 = 1\,470 \text{ в},$$

а ток — наименьшее:

$$I_{наим} = \frac{U_{пад} - U_{отр}}{z_c} = \frac{1\,000 - 470}{400} = \frac{530}{400} = 1{,}32 \text{ а}.$$

Так как ток и напряжение здесь совпадают по фазе, то входная проводимость имеет чисто активный характер и наименьшее значение:

$$Y_{вх.наим} = y_{вх.наим} = \frac{I_{наим}}{U_{наиб}} = \frac{1{,}32}{1\,470} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ сим},$$

а мощность

$$P = U_{наиб} I_{наим} = 1470 \cdot 1{,}32 = 1940 \text{ вт},$$

что и следовало ожидать.

Эти значения тока и напряжения повторяются каждые $\frac{\lambda}{2}$ *м*.

На расстоянии

$$x = \frac{\psi_{отр} - \psi_{пад}}{2\beta} + \frac{\lambda}{4} = 0{,}135 + \frac{2{,}5}{4} = 0{,}76 \text{ м}$$

от конца линии напряжение имеет наименьшее значение;

$$U_{наим} = I_{наим} z_c = 1{,}32 \cdot 400 = 528 \text{ в},$$

а ток — наибольшее:

$$I_{наиб} = \frac{U_{наиб}}{z_c} = \frac{1\,470}{400} = 3{,}68 \text{ а}.$$

Входная проводимость и здесь имеет чисто активный характер, но наибольшее значение

$$Y_{вх.наиб} = y_{вх.наиб} = \frac{I_{наиб}}{U_{наим}} = \frac{3{,}68}{528} = 69{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ сим}.$$

Мощность

$$P = U_{наим} I_{наиб} = 528 \cdot 3{,}68 = 1940 \text{ вт}.$$

Степень несогласованности линии с нагрузкой характеризуется так называемым коэффициентом стоячей волны (к. с. в.), который может быть определен любым из следующих выражений:

$$(\text{к. с. в.}) = \frac{U_{\text{наиб}}}{U_{\text{наим}}} = \frac{I_{\text{наиб}}}{I_{\text{наим}}} = z_c Y_{\text{вх.наиб}} = \frac{1}{z_c y_{\text{вх.наим}}}.$$

В нашем случае

$$(\text{к. с. в.}) = \frac{U_{\text{наиб}}}{U_{\text{наим}}} = \frac{1\,470}{528} = 2{,}79.$$

2-77. Для определения параметров телефонной линии длиной $l = 200$ *км* измерены при угловой частоте $\omega = 5\,000$ *сек*$^{-1}$ сопротивления: при холостом ходе линии $Z_x = 747 \angle -27°41'$ *ом* и при коротком замыкании $Z_к = 516 \angle 0°35'$ *ом*.

По формуле $Z_c = \sqrt{Z_x Z_к}$ и с помощью выражения $\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\frac{Z_к}{Z_x}}$* найдены: волновое сопротивление $Z_c = 621 \angle -13°33'$ *ом* и $\gamma = 0{,}0046 + j\,0{,}018 = 0{,}0186 \angle 75°40'$ *км*$^{-1}$.

Определить параметры однородной линии: $r_0$, $g_0$, $C_0$ и $L_0$.

Решение

Для определения $r_0$ и $L_0$ перемножим

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} \quad \text{на} \quad Z_c = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}},$$

в результате получим

$$\gamma Z_c = r_0 + j\omega L_0 = (5{,}4 + j\,10{,}21)\ \text{ом}.$$

Следовательно, активное сопротивление $r_0$ и индуктивность $L_0$ на единицу длины линии равны:

$$r_0 = 5{,}4\ \text{ом/км} \quad \text{и} \quad L_0 = \frac{10{,}21}{5\,000} = 0{,}002\ \text{гн/км}.$$

Аналогичным путем найдем $g_0$ и $C_0$:

$$\frac{\gamma}{Z_c} = g_0 + j\omega C_0 = (4{,}1 \cdot 10^{-7} + j\,3 \cdot 10^{-5})\ \text{сим}.$$

Из этого выражения имеем

$$g_0 = 4{,}1 \cdot 10^{-7}\ \text{сим/км} \quad \text{и} \quad C_0 = 0{,}006 \cdot 10^{-6}\ \text{ф/км}.$$

2-78. На какую величину следует повысить индуктивность воздушной линии, чтобы она не имела искажения, и как велик

---

* Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы электротехники. Ч. II, Госэнергоиздат, стр. 20.

при этом коэффициент затухания линии с параметрами: $r_0 = 5{,}44$ *ом/км*, $C_0 = 6 \cdot 10^{-9}$ *ф/км*, $g_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ *сим/км*, $L_0 = 0{,}002$ *гн/км*?

### Решение

Для линии без искажения справедливо соотношение

$$\frac{r_0}{L_0} = \frac{g_0}{C_0},$$

откуда

$$L_0 = r_0 \frac{C_0}{g_0} = \frac{6 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-7}} \cdot 5{,}44 \approx 0{,}0653 \text{ гн/км}.$$

Следовательно, путем включения добавочной катушки индуктивность должна быть увеличена примерно в 30 раз. При этом коэффициент затухания

$$\alpha = r_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} = 5{,}44 \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-9}}{65{,}3 \cdot 10^{-3}}} \approx 16{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ неп/км},$$

что значительно ниже его величины для линии без добавочной катушки.

**2-79.** Определить параметры Т-образной схемы замещения для линии без потерь, если длина линии $l = 200$ *км*, $\omega = 10^4$ *сек*$^{-1}$, $L_0 = 0{,}025$ *гн/км* и $C_0 = 1{,}67$ *мкф/км*.

*Ответ.* $Y = j\omega C_0 l \frac{\sin \alpha l}{\alpha l}$; $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$.

**2-80.** Определить из опытов холостого хода и короткого замыкания характеристическое сопротивление $Z_c$ и коэффициент распространения $g$ симметричного четырехполюсника.

### Решение

Для режима холостого хода четырехполюсника имеем

$$\dot{U}_{1x} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} g \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1x} = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} g,$$

откуда

$$Z_{1x} = \frac{Z_c}{\operatorname{th} g}.$$

Для режима короткого замыкания

$$\dot{U}_{1к} = Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} g \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1к} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} g,$$

откуда

$$Z_{1к}=Z_c \operatorname{th} g.$$

Из выражений для $Z_{1х}$ и $Z_{1к}$ имеем

$$Z_c=\sqrt{Z_{1х} Z_{1к}} \quad и \quad \operatorname{th} g=\sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{1х}}}.$$

2-81. Для цепочечной схемы (рис. 2-53), состоящей из двух одинаковых соединенных в каскад четырехполюсников, дано напряжение $\dot{U}_1=1{,}32$ *в*, $\frac{L}{2}=0{,}01$ *гн*, $C=1$ *мкф* и $\omega=5000\,сек^{-1}$.

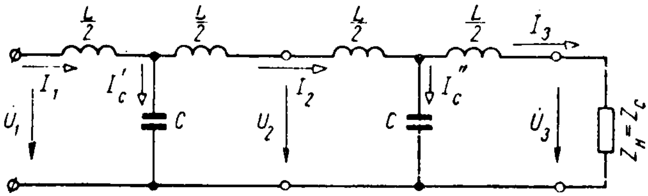



Рис. 2-53

Определить $\dot{I}_1$, $\dot{I}_3$ и $\dot{U}_3$ и построить векторную диаграмму, если сопротивление $Z_н$ равно характеристическому сопротивлению четырехполюсника.

## Решение

Для определения $Z_c$ и $g$ (для одного звена) найдем сопротивление $Z_{1х}$ и $Z_{1к}$ по формулам

$$Z_{1х}=\frac{Z_Т}{2}+\frac{1}{Y_Т}=j\frac{\omega L}{2}+\frac{1}{j\omega C}=j5000\cdot 0{,}01+$$

$$+\frac{10^6}{j5000\cdot 1}=-j150\,ом;$$

$$Z_{1к}=\frac{\frac{Z_Т}{2}\cdot\frac{1}{Y_Т}}{\frac{Z_Т}{2}+\frac{1}{Y_Т}}+\frac{Z_Т}{2}=\frac{j50(-j200)}{j50-j200}+j50=j116{,}6\,ом.$$

Характеристическое сопротивление $z_c$ и коэффициент распространения найдем из уравнений

$$Z_c=\sqrt{-j150\cdot\frac{j350}{3}}=50\sqrt{7}=132{,}2\;ом;$$

$$\operatorname{th} g=\sqrt{\frac{j350}{-j3\cdot 150}}=j\sqrt{0{,}778}=j0{,}881=j\operatorname{tg} a.$$

Из полученных значений следует, что характеристическое сопротивление является активным, коэффициент затухания $b = 0$.

Так как сопротивление нагрузки равно характеристическому сопротивлению четырехполюсника, то напряжения $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_3$ связаны между собой простым соотношением

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_3 e^{2g} = \dot{U}_3 e^{j2\beta}.$$

Из этого уравнения

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_1 e^{-j2\beta}.$$

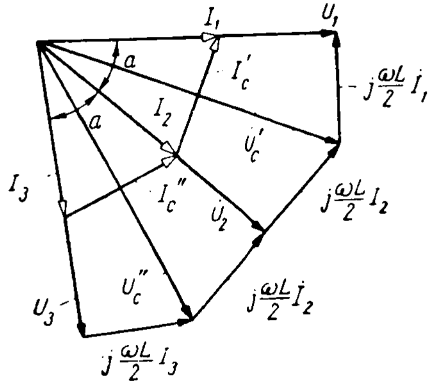



Рис. 2-54

Зная $\operatorname{tg}\beta = 0{,}881$, из таблицы находим $\beta = 41°{,}35$. Следовательно,

$$\dot{U}_3 = 1{,}32\, e^{j82°{,}7}\ \text{в}.$$

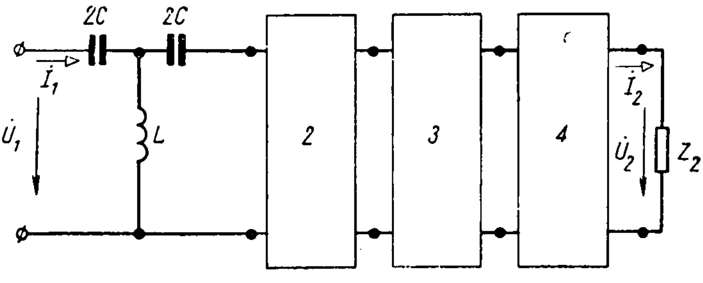



Рис. 2-55

Токи $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_3$ легко определяются из выражений

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_c} = \frac{1{,}32}{132{,}2} = 0{,}01\,a \quad \text{и} \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{Z_c} = 0{,}01 e^{-j82°{,}7}\,a.$$

На рис. 2-54 построена полная векторная диаграмма, из которой видно, что напряжения $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$ и $\dot{U}_3$ одинаковы ($b = 0$), но повернуты на соответствующие углы. Аналогичное соотношение имеет место и для токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$. Токи во всех ветвях и напряжения на их зажимах отмечены на векторной диаграмме.

**2-82.** На рис. 2-55 изображена четырехэлементная цепочечная схема. Все элементы схемы одинаковы и показаны на рис. 2-31 для одного элемента в развернутом виде.

Определить напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ на выходных зажимах этой схемы, если

$$\dot{I}_1 = 0{,}1 a, \quad 2C = 1 \text{ мкф}, \quad L = 0{,}1 \text{ гн}, \quad \omega = 5000 \text{ сек}^{-1}.$$

*Ответ.* $\dot{U}_2 = 40 e^{j212°,5}$; $\dot{I}_2 = 0{,}1 e^{j212°,5}$; $U_1 = 40$ *в*.

## *РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ*

# СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

## Тема 1

### Несинусоидальные токи

Расчет и исследование линейных электрических цепей с несинусоидальными напряжениями и токами основаны на методе наложения. Несинусоидальная кривая напряжения или э. д. с. может быть разложена на гармонические составляющие.

Каждая гармоническая составляющая напряжения или э. д. с. создает свою составляющую тока, и реальный ток в цепи определяется алгебраической суммой мгновенных значений составляющих.

Расчет отдельных составляющих токов выполняется теми же методами, что и расчет цепей при синусоидальных напряжениях.

При измерении несинусоидальных напряжений и токов или вычислении показаний приборов по известным из расчета составляющим нужно учитывать, что приборы различных систем дают различные показания.

Форма кривой тока при заданной кривой напряжения зависит от параметров цепи. Емкость сильно искажает кривую тока, а индуктивность сглаживает ее, т. е. приближает несинусоидальную кривую тока к синусоидальной.

Составляющие токов и напряжений различных порядков (частот) не дают средней мощности. Поэтому среднее значение мощности цепи определяется суммой средних мощностей отдельных гармоник.

Необходимо понять и запомнить, что в трехфазных цепях с несинусоидальными напряжениями соотношения между фазными и линейными напряжениями и фазными и линейными токами при соединении обмоток генератора (или трансформатора) и нагрузки звездой или треугольником не равны $\sqrt{3}$.

*Примеры и задачи*

**3-1.** Будет ли кривая тока в неразветвленной части цепи, состоящей из параллельно включенных активного сопротивления и емкости, похожа по форме на кривую тока одной из ветвей при несинусоидальном напряжении на зажимах этих ветвей?

*Ответ.* Нет, не будет.

**3-2.** Чему равны показания тепловых амперметров, включенных в две ветви электрической цепи, если в одной из ветвей ток определяется уравнением

$$i_1 = [50\sin\omega t + 25\sin 3\omega t + 15\sin 5\omega t + 10\sin 7\omega t]\ a,$$

а в другой —

$$i_2 = [50\sin(\omega t + 30^\circ) - 25\sin(3\omega t + 45^\circ) + $$
$$+ 15\sin(5\omega t + 55^\circ) - 10\sin 7\omega t]\ a?$$

*Ответ.* Показания амперметров будут одинаковы и равны

$$I_1 = I_2 = 41{,}5a$$

**3-3.** К зажимам цепи, состоящей из последовательно соединенных емкости $C$, индуктивности $L$ и активного сопротивления $r$, подведено напряжение, изменяющееся по кривой треугольной формы.

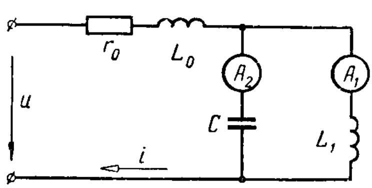


Рис. 3-1

Найти форму кривой напряжения на конденсаторе, если контур настроен в резонанс основного колебания.

$$r = \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

*Ответ.* В напряжении на конденсаторе отношение абсолютных значений амплитуд первой гармоники к $k$-й гармонике определяется выражением

$$\frac{U_m^{(1)}}{U_m^k} = k^3 \sqrt{\frac{k^4+1}{k^2} - 1} \cong k^4,$$

где $k$ — порядковый номер нечетных составляющих (1, 3, 5 и т. д.).

**3-4.** Простейший электрический фильтр составлен из параллельно включенных индуктивности $L_1$ и емкости $C$ и последовательно включенной с ними индуктивности $L_2$.

Определить индуктивности $L_1$ и $L_2$, входящие в состав этого фильтра, который не должен пропускать в нагрузку первую гармонику тока и выделять (пропускать) девятую гармонику, если емкость $C$ и частота основной гармоники заданы.

*Ответ.* $L_1 = \frac{1}{\omega^2 C}$ и $L_2 = \frac{1}{80} L_1$.

**3-5.** Найти выражение мгновенного значения тока в неразветвленной части цепи (рис. 3-1), если сопротивление $r_0 = 20$ *ом* и при основной частоте индуктивные и емкостные сопротивления равны: $\omega L_1 = 5$ *ом*; $\frac{1}{\omega C} = 45$ *ом*; $\omega L_0 = 0{,}62$ *ом*, а подведенное к схеме напряжение изменяется согласно уравнению

$$u = [100 + 276\sin\omega t + 100\sin 3\omega t + 50\sin 9\omega t]\ \text{в}.$$

Определить также действующие значения токов в параллельных ветвях.

### Решение

Найдем распределение токов в схеме от первой гармоники напряжения. Для этого вычислим сопротивление разветвления, а затем сопротивление всей схемы.

Сопротивление разветвления для токов первой гармоники

$$Z_\text{р}^{(1)} = \frac{j\omega L_1\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{j5(-j45)}{j5 - j45} \cong j5{,}6\ \text{ом}.$$

Сопротивление схемы для тока первой гармоники

$$Z^{(1)} = Z_0^{(1)} + Z_\text{р}^{(1)} = 20 + j0{,}62 + j5{,}6 \cong (20 + j6{,}2)\ \text{ом}.$$

Ток первой гармоники в неразветвленной части цепи

$$\dot I_m^{(1)} = \frac{\dot U_m^{(1)}}{Z^{(1)}} = \frac{276}{20 + j6{,}2} = (12{,}6 - j\,3{,}9)\,a$$

и

$$I_m^{(1)} = \sqrt{12{,}6^2 + 3{,}9^2} \cong 13{,}2\ a.$$

Этот ток отстает по фазе от напряжения $\dot U_m^{(1)}$ на угол

$$\varphi^{(1)} = \operatorname{arctg}\frac{x^{(1)}}{r_0} = \operatorname{arctg}\frac{6{,}2}{20} \cong 17^\circ.$$

Ток в первой ветви

$$\dot I_{1m}^{(1)} = \frac{\dot I_m^{(1)} z_\text{р}^{(1)}}{Z_1^{(1)}} = \frac{(12{,}6 - j\,3{,}9)\,j5{,}6}{j5} \cong (14{,}1 + j\,4{,}4)\,a;$$

$$I_1^{(1)} = \sqrt{\frac{14{,}1^2}{2} + \frac{4{,}4^2}{2}} \cong 10{,}5\ a.$$

Ток во второй ветви

$$\dot{I}_{2m}^{(1)} = \frac{\dot{I}_m^{(1)} Z_p^{(1)}}{Z_2^{(1)}} = \frac{(12{,}6 - j3{,}9)\, j5{,}6}{-j45} \cong (-1{,}6 - j0{,}5)\ a;$$

$$I_2^{(1)} = \sqrt{\frac{1{,}6^2}{2} + \frac{0{,}5^2}{2}} \cong 1{,}2a.$$

Для третьей гармоники тока

$$Z_p^{(3)} = \frac{j15(-j15)}{j15 - j15} = \infty.$$

Ток третьей гармоники в неразветвленной части цепи отсутствует. Токи третьей гармоники в ветвях будут равны по величине, но противоположны по фазе.

Ток третьей гармоники в первой ветви

$$\dot{I}_{1m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_{pm}^{(3)}}{Z_1^{(3)}} = \frac{100}{j15} \cong -j6{,}7\ a,$$

во второй ветви

$$\dot{I}_{2m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_{pm}^{(3)}}{Z_2^{(3)}} = \frac{100}{-j15} \cong j6{,}7\ a$$

и

$$I_1^{(3)} = I_2^{(3)} = \frac{6{,}7}{\sqrt{2}} \cong 4{,}72a.$$

Сопротивление разветвления для тока девятой гармоники

$$Z_p^{(9)} = \frac{Z_1^{(9)} Z_2^{(9)}}{Z_1^{(9)} + Z_2^{(9)}} \approx \frac{j45(-j5)}{j45 - j5} \cong -j5{,}6\ [\textit{ом}].$$

Сопротивление схемы для девятой гармоники тока

$$Z^{(9)} = Z_0^{(9)} + Z_p^{(9)} = 20 + j5{,}6 - j5{,}6 = 20\ \textit{ом},$$

следовательно, для девятой гармоники имеет место резонанс напряжений.

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}_m^{(9)} = \frac{\dot{U}_m^{(9)}}{Z^{(9)}} = \frac{50}{20} = 2{,}5a,$$

а угол сдвига этого тока относительно общего напряжения $\varphi^{(9)} = 0$ [комплекс $Z^{(9)}$ не имеет мнимой части].

Напряжение на разветвлении

$$\dot{U}_{pm}^{(9)} = \dot{I}_m^{(9)} Z_p^{(9)} = 2{,}5(-j5{,}6) = -j14\ \textit{в}.$$

Токи в ветвях

$$\dot{I}_{1m}^{(9)} = \frac{\dot{U}_{pm}^{(9)}}{Z_1^{(9)}} = \frac{-j14}{j45} = -0{,}3a;$$

$$I_1^{(9)} = \frac{0{,}3}{\sqrt{2}} \cong 0{,}21a;$$

$$\dot{I}_{2m}^{(9)} = \frac{\dot{U}_{pm}^{(9)}}{Z_2^{(9)}} = \frac{-j14}{-j5} = 2{,}8a;$$

$$I_2^{(9)} = \frac{2{,}8}{\sqrt{2}} \cong 2a.$$

Ток от постоянной составляющей напряжения будет проходить в неразветвленной части цепи и по первой ветви разветвления. Этот ток

$$I_0 = I_1^{(0)} = \frac{U_0}{r_0} = \frac{100}{20} = 5a.$$

Теперь можно написать выражение мгновенного значения тока в неразветвленной части цепи:

$$i = [5 + 13{,}2 \sin(\omega t - 17°) + 2{,}5 \sin 9\omega t]\ a.$$

Действующие значения токов в ветвях

$$I_1 = \sqrt{(I_1^{(1)})^2 + (I_1^{(3)})^2 + (I_1^{(9)})^2 + (I_1^{(0)})^2} =$$

$$= \sqrt{10{,}5^2 + 4{,}72^2 + 0{,}21^2 + 5^2} = 12{,}5a;$$

$$I_2 = \sqrt{(I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(3)})^2 + (I_2^{(9)})^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 4{,}72^2 + 2^2} = 5{,}25a.$$

**3-6.** Электрическая цепь состоит из двух индуктивно и согласно соединенных параллельных ветвей и подключена к источнику переменного тока с несинусоидальным напряжением. В первую ветвь включены индуктивность $L_1$ и емкость $C_1$, причем $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} = 20$ *ом*. Во вторую ветвь включены активное сопротивление $r_2 = 5$ *ом* и индуктивность $L_2$. При частоте основной гармоники $\omega L_2 = 10$ *ом*. Коэффициент связи $K = 0{,}707$. Ток во второй ветви меняется во времени согласно уравнению

$$i_2 = [10 + 10 \sin \omega t + 5 \sin 3\omega t]\ a.$$

Найти закон изменения напряжения на конденсаторе и напряжение сети $U$. Кроме того, определить активную мощность, потребляемую всей цепью и передаваемую из одной ветви в другую путем взаимной индукции.

Решение

Из уравнений электрического состояния для $k$-х составляющих токов и напряжений в первой и второй ветвях

$$\dot U_m^{(k)} = jk\omega L_1 \dot I_{1m}^{(k)} - j\frac{\dot I_{1m}^{(k)}}{k\omega C} + jkM\dot I_{2m}^{(k)} = Z_1^{(k)}\dot I_{1m}^{(k)} + jk\omega M\dot I_{2m}^{(k)},$$

$$\dot U_m^{(k)} = r_2\dot I_{2m}^{(k)} + jk\omega L_2\dot I_{2m}^{(k)} + jk\omega M\dot I_{1m}^{(k)} = Z_2^{(k)}\dot I_{2m}^{(k)} + jk\omega M\dot I_{1m}^{(k)}$$

находим выражение для $k$-й составляющей тока первой ветви:

$$\dot I_{1m}^{(k)} = \frac{Z_2^{(k)} - jk\omega M}{Z_1^{(k)} - jk\omega M}\dot I_{2m}^{(k)}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\dot I_{1m}^{(1)} = j5\,a \quad \text{и} \quad \dot I_{1m}^{(3)} = -j1{,}07\,a.$$

Находим составляющие напряжения на зажимах цепи:

$$\dot U_m^{(1)} = j\omega L_1\dot I_{1m}^{(1)} - j\frac{\dot I_{1m}^{(1)}}{\omega C} + j\omega M\dot I_{2m}^{(1)} = j10\cdot 10 = j100\ \text{в};$$

$$\dot U_m^{(3)} = j3\omega L_1\dot I_{1m}^{(3)} - j\frac{\dot I_{1m}^{(3)}}{3\omega C} + j3\omega M\dot I_{2m}^{(3)} =$$

$$= 57{,}1 + j150 = 160{,}4e^{j69°10'}\ \text{в}.$$

Постоянная составляющая

$$U^{(0)} = r_2 I_2^{(0)} = 5\cdot 10 = 50\ \text{в}.$$

Мгновенное значение напряжения на зажимах цепи определяется уравнением

$$u = \left[50 + 100\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 160{,}4\sin(3\omega t + 69°10')\right]\ \text{в}.$$

Напряжение на конденсаторе будет состоять из постоянной, первой и третьей составляющих. Эти составляющие находим из выражений

$$U_C^{(0)} = r_2 I_2^{(0)} = 50\ \text{в};\quad \dot U_{Cm}^{(1)} = \frac{\dot I_{1m}^{(1)}}{j\omega C} = -j20\cdot j5 = 100\ \text{в};$$

$$\dot U_{Cm}^{(3)} = \frac{1}{j3\omega C}\cdot\dot I_{1m}^{(3)} = -j\frac{20}{3}\cdot(-j1{,}07) = -7\ \text{в}.$$

Мгновенное значение напряжения на конденсаторе

$$u_C = [50 + 100\sin\omega t - 7\sin 3\omega t]\ \text{в}.$$

Активная мощность, потребляемая всей цепью, расходуется на тепловые потери во второй ветви (в первой ветви активное сопротивление равно нулю). Величина этой мощности находится из выражения

$$P = r_2 I_2^2 = 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot \frac{10^2}{2} + 5 \frac{5^2}{2} = 500 + 250 + 62,5 = 812,5 \ \text{вт}$$

и состоит из потерь от постоянной составляющей, первой и третьей гармоник тока второй ветви в сопротивлении $r_2$.

Находим активную мощность, получаемую второй ветвью из сети:

$$P_2 = U_0 I_0 + \left[\dot{U}^{(1)} \overset{*}{I}{}_2^{(1)}\right]_{\text{действ}} + \left[\dot{U}^{(3)} \overset{*}{I}{}_2^{(3)}\right]_{\text{действ}} =$$

$$= 50 \cdot 10 + \left[\frac{j\,100 \cdot 10}{2}\right]_{\text{действ}} + \left[\frac{(57,1 + j\,150)\,5}{2}\right]_{\text{действ}} =$$

$$= 500 + 0 + 142,75 = 642,75 \ \text{вт}.$$

Очевидно, что мощность на покрытие потерь от тока первой гармоники во второй ветви должна получаться из первой ветви и, наоборот, избыток мощности, забираемой третьей гармоникой из сети, должен быть передан в первую ветвь.

Активная мощность, получаемая первой ветвью из сети:

$$P_1 = \left[\dot{U}^{(1)} \overset{*}{I}{}_1^{(1)}\right]_{\text{действ}} + \left[\dot{U}^{(3)} \overset{*}{I}{}_1^{(3)}\right]_{\text{действ}} = \left[\frac{j\,100\,(-j\,5)}{2}\right]_{\text{действ}} +$$

$$+ \left[\frac{(57,1 + j\,150)\,j\,1,07}{2}\right]_{\text{действ}} = 250 - 80,25 = 169,75 \ \text{вт}.$$

Активная мощность первой гармоники полностью передается во вторую ветвь, что может быть проверено непосредственным вычислением передаваемой мощности:

$$\left[\dot{E}_{12}^{(1)} \overset{*}{I}{}_2^{(1)}\right]_{\text{действ}} = \left[\left(-j\,\omega M \dot{I}_1^{(1)} \overset{*}{I}{}_2^{(1)}\right)\right]_{\text{действ}} =$$

$$= \left[\frac{(-j\,10)\,j5 \cdot 10)}{2}\right]_{\text{действ}} = 250 \ \text{вт}.$$

Отрицательное значение активной мощности третьей гармоники означает, что эта мощность поступает из первой ветви в сеть.

Определяя мощность, передаваемую из второй ветви в первую током третьей гармоники, находим

$$\left[\dot{E}_{21}^{(3)} \overset{*}{I}{}_1^{(3)}\right]_{\text{действ}} = \left[\left(-j\,3\omega M \dot{I}_2^{(3)} \overset{*}{I}{}_1^{(3)}\right)\right]_{\text{действ}} =$$

$$= [(-j\,3)\,10 \cdot 5\,(+j\,1,07)]_{\text{действ}} = +80,25 \ \text{вт}.$$

Положительный знак указывает, что эту мощность получает первая ветвь.

Находим активную мощность, расходуемую во второй ветви, как сумму активных мощностей от отдельных гармоник второй и первой ветвей:

$$P_2 = 500 + 250 + 142{,}75 - 80{,}25 = 812{,}5 \textit{ вт.}$$

**3-7.** Что покажет тепловой вольтметр, током которого можно пренебречь, включенный между нулевыми точками трехфазного генератора и симметричной нагрузки, если фазные э. д. с. изменяются согласно уравнениям

$$e_A = [100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t] \textit{ в};$$

$$e_B = \left[100 \sin \omega \left(t - \frac{T}{3}\right) + 50 \sin 3\omega \left(t - \frac{T}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + 30 \sin 5\omega \left(t - \frac{T}{3}\right)\right] \textit{ в};$$

$$e_C = \left[100 \sin \omega \left(t + \frac{T}{3}\right) + 50 \sin 3\omega \left(t + \frac{T}{3}\right) + \right.$$
$$\left. + 30 \sin 5\omega \left(t + \frac{T}{3}\right)\right] \textit{ в}.$$

*Ответ.* $U_{OO'} = 35{,}4$ *в.*

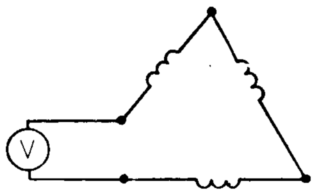


Рис. 3-2

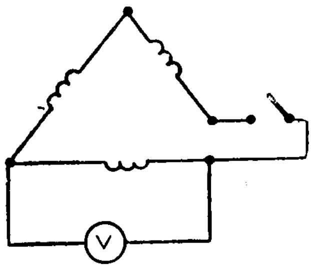


Рис. 3-3

**3-8.** Определить показание теплового вольтметра, включенного на зажимы соединенных звездой вторичных обмоток трансформатора. Нагрузка к трансформатору не присоединена. Фазная э. д. с. задается уравнением

$$e = (150 \sin \omega t + 80 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t) \textit{ в}.$$

Найти отношение линейного напряжения к фазному.

*Ответ.* $U \cong 185$ *в*; $\dfrac{U}{U_ф} = 1{,}53$.

**3-9.** Определить показание теплового вольтметра, включенного в треугольник вторичных обмоток трансформатора (рис. 3-2), если мгновенное значение фазной э. д. с. задано в виде

$$e = [310 \sin \omega t + 48 \sin 3\omega t + 35 \sin 5\omega t + 20 \sin 7\omega t + 17{,}5 \sin 9\omega t] \text{ в.}$$

*Ответ.* $U \cong 108$ *в.*

**3-10.** Определить показание теплового вольтметра, включенного на зажимы соединенных треугольником вторичных обмоток трансформатора (рис. 3-3), если фазная э. д. с. задается уравнением

$$e = [170 \sin \omega t + 100 \sin 3\omega t + 70 \sin 5\omega t] \text{ в.}$$

Найти показание вольтметра, если обмотки треугольника будут разомкнуты.

*Ответ.* При замкнутых обмотках вольтметр покажет 130 *в*, при разомкнутых 148 *в*.

**3-11.** Симметричные фазные э. д. с. вторичных обмоток трансформатора содержат 1, 3, 5, 7 и 9-ю гармоники (частота девятой гармоники 150 *гц*) (рис. 3-4).

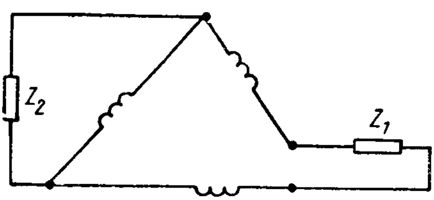



Рис. 3-4

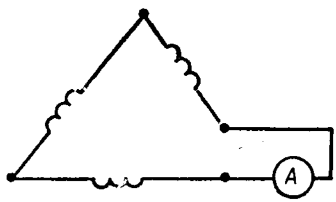



Рис. 3-5

Определить частоту основной гармоники напряжения на зажимах приемника $Z_1$, включенного в треугольник вторичных обмоток, и частоту основной гармоники напряжения на зажимах приемника $Z_2$, включенного на зажимы треугольника обмоток. Приемники $Z_1$ и $Z_2$ включаются неодновременно.

*Ответ.* Основная частота в приемнике $Z_1$ равна 50 *гц* в приемнике $Z_2$ — $16^2/_3$ *гц*.

**3-12.** Определить показание теплового амперметра, включенного в треугольник вторичных обмоток трансформатора (рис. 3-5), если сопротивление фазной обмотки трансформатора $r = 0{,}5$ *ом* и $x = \omega L = 8$ *ом* и фазная э. д. с. задается уравнением

$$e = [210 \sin (\omega t + 15°) + 60 \sin (3\omega t - 20°) + 40 \sin (5\omega t + 10°) + 25 \sin (7\omega t - 5°) + 20 \sin (9\omega t - 40°)] \text{ в.}$$

*Ответ.* $I = 5{,}3$ *а.*

**3-13.** Фазная электродвижущая сила симметричного трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой (рис. 3-6), определяется уравнением

$$e_ф = \left[ 283 \sin 314\, t - 82 \sin \left( 3 \cdot 314t - \frac{\pi}{4} \right) + \right.$$

$$\left. + 42{,}4 \sin \left( 5 \cdot 314t - \frac{\pi}{10} \right) \right] \ в.$$

Сопротивления нагрузки

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = r = 12 \ ом.$$

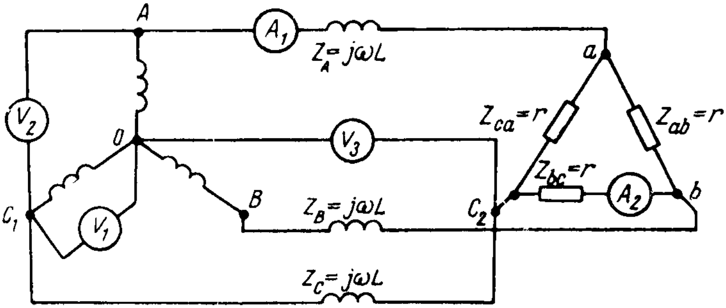



Рис. 3-6

Сопротивления линейных проводов для основной гармоники

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_{пр}^{(1)} = + j3 \ ом,$$

Определить показания электродинамических приборов, указанных на схеме.

### Решение

Преобразуем треугольник сопротивлений нагрузки в эквивалентную звезду.

Сопротивления фаз эквивалентной звезды вместе с сопротивлениями линейных проводов для основной гармоники

$$Z_a^{(1)} = Z_b^{(1)} = Z_c^{(1)} = \frac{12}{3} + j3 = (4 + j3) \ ом.$$

Определим действующие значения основной и пятой гармоник тока:

$$I_A^{(1)} = I_B^{(1)} = I_C^{(1)} = \frac{283}{\sqrt{2}\sqrt{4^2 + 3^2}} = 40 \ а,$$

$$I_A^{(5)} = I_B^{(5)} = I_C^{(5)} = \frac{42{,}4}{\sqrt{2}\sqrt{4^2 + 15^2}} \cong \frac{30}{15{,}5} \cong 1{,}93 \ а.$$

Показание амперметра в линейном проводе

$$I = \sqrt{40^2 + 1{,}93^2} \cong 40 \ а.$$

Так как нагрузка равномерная и в токах отсутствуют гармоники, кратные трем, то фазный ток в треугольнике сопротивлений связан с линейным током отношением

$$I_\Phi = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}} \cong 23{,}1 \ a.$$

Определяем показания вольтметров между зажимами $OC_1$:

$$U_1 = \sqrt{\frac{283^2}{2} + \frac{82^2}{2} + \frac{42{,}4^2}{2}} \cong 210 \ в$$

и между зажимами $AC_1$:

$$U_2 = \sqrt{\left(\frac{283}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{42{,}4}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{\frac{283^2}{2} + \frac{42{,}4^2}{2}} = \sqrt{3}\,203 \approx 351 \ в.$$

Для вычисления показаний вольтметра, включенного между зажимами $OC_2$, находим комплексы действующих значений первой и пятой гармоник тока фазы $C$.

Направляем вектор действующего значения напряжения первой гармоники по оси вещественных величин

$$\dot{U}_C^{(1)} = \frac{283}{\sqrt{2}} = 200 \ в$$

и находим

$$\dot{I}_C^{(1)} = \frac{\dot{U}_C^{(1)}}{Z_C^{(1)}} = \frac{200}{4 + j3} = (32 - j24) \ a.$$

Разность потенциалов между зажимами $OC_2$ от тока первой гармоники будет

$$\dot{U}_3^{(1)} = \dot{U}_C^{(1)} - Z_{пр}^{(1)}\dot{I}_C^{(1)} = 200 - j3\,(32 - j24) = (104 + j72) \ в.$$

Действующее значение

$$U_3^{(1)} = 126 \ в.$$

Аналогично для пятой гармоники имеем

$$\dot{U}_C^{(5)} = \frac{42{,}4}{\sqrt{2}} \approx 30 \ в;$$

$$\dot{I}_C^{(5)} = \frac{30}{4 + j15} \approx (0{,}498 - j1{,}868) \ a;$$

$$\dot{U}_3^{(5)} = \dot{U}_C^{(5)} - Z_{пр}^{(5)}\dot{I}_C^{(5)} = 30 - j15\,(0{,}498 - j1{,}868) \approx$$

$$\approx (2 - j7{,}48)\ в.$$

$$U_3^{(5)} = 7{,}75\ в.$$

Показание вольтметра, включенного между зажимами $O$ и $C_2$:

$$U_3 = \sqrt{126^2 + \frac{82^2}{2} + 7{,}75^2} \approx 139\ в.$$

## Тема 2

## Фильтры

Анализ свойств электрических фильтров основан на замене фильтра эквивалентной цепью с распределенными постоянными. Эта замена позволяет применить к фильтру, представляющему собой пассивный четырехполюсник, понятия о коэффициентах затухания и фазы, а также характеристического сопротивления.

Зависимость коэффициентов затухания, фазы и характеристического сопротивления фильтра от частоты определяет способность фильтра пропускать токи в определенной полосе частот и ослаблять токи, имеющие частоту, не лежащую в полосе пропускания фильтра.

### *Примеры и задачи*

**3-14.** Как изменяются коэффициенты фазы $b$ и затухания $a$ низкочастотного и высокочастотного фильтров, состоящих из чисто реактивных сопротивлений, при изменении угловой частоты от нуля до бесконечности?

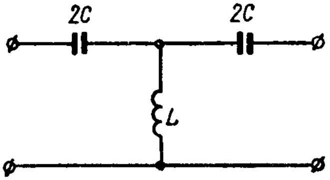



Рис. 3-7

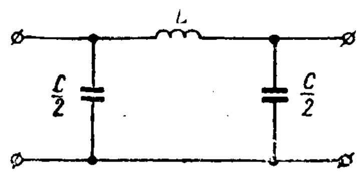



Рис. 3-8

**3-15.** Из каких схем могут быть определены резонансные угловые частоты Т- и П-образных фильтров, если известны величины индуктивности и емкостей, входящих в схему фильтров?

**3-16.** Найти границы области прозрачности фильтра (рис. 3-7), если $2C = 0{,}08$ *мкф*, $L = 0{,}01$ *гн*.

*Ответ*. От $\omega_0 = 25\,000$ *рад/сек* до $\omega = \infty$.

**3-17.** Найти границы области прозрачности фильтра (рис. 3-8), если $\frac{C}{2} = 0{,}25$ *мкф*. $L = 0{,}05$ *гн*.

*Ответ.* От $\omega = 0$ до $\omega_0 = 12\,650$ *рад/сек.*

**3-18.** При частоте $\omega_1$, равной половине резонансной частоты $\omega_0$, сопротивление нагрузки $r_2$ равно характеристическому сопротивлению фильтрующего контура, показанного на рис. 3-9а. Определить комплексы тока $\dot{I}_1$ и напряжения $\dot{U}_1$, выразив их через напряжение $\dot{U}_2$ и параметры контура, если

$$\frac{L}{2} = 0{,}01\ гн,\quad C = 8\ мкф\ и\ U_2 = 10\ в.$$

Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

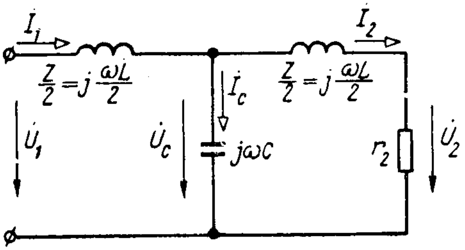



Рис. 3-9а

Решение

Резонансная угловая частота

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} - \frac{2}{\sqrt{0{,}02 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}} = 5000\ рад/сек.$$

По условию

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} = 2\,500\ рад/сек.$$

Из опытов холостого хода и короткого замыкания определяем

$$Z_{1x} = \frac{Z_T}{2} + \frac{1}{Y_T} = j\omega_1 \frac{L}{2} + \frac{1}{j\omega_1 C} = j2\,500 \cdot 0{,}01 +$$

$$+ \frac{1}{j2\,500 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = -j25\ ом;$$

$$Z_{1k} = \frac{Z_T}{2} + \frac{\frac{Z_T}{2} \cdot \frac{1}{Y_T}}{\frac{Z_T}{2} + \frac{1}{Y_T}} = j25 + \frac{j25(-j50)}{j25 - j50} = +j75\ ом.$$

Сопротивление нагрузки $r_2$ и ток $I_2$ будут

$$r_2 = Z_c = \sqrt{Z_{1k} Z_{1x}} = \sqrt{j75\,(-j25)} = 25\sqrt{3}\ \textit{ом},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{r_2} = \frac{10}{25\sqrt{3}} \cong 0{,}23\ a.$$

Коэффициент распространения фильтра $g$ находим по формуле

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{1k}}{Z_{1x}}} = \sqrt{\frac{j75}{-j25}} = j\sqrt{3} = j \operatorname{tg} b.$$

Из этого выражения следует, что вещественная часть комплекса $g = a + jb$ или затухание $a$ равно нулю, а коэффициент фазы $b$ равен $\frac{\pi}{3}$, т. е. $g = +j\frac{\pi}{3}$.

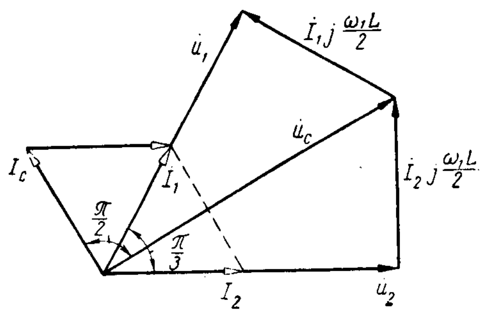



Рис. 3-9б

Из уравнений длинной линии без потерь ($a = \alpha l = 0$) имеем следующие соотношения между напряжениями и токами входа $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ и выхода $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ при $r_2 = Z_C$:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} g + \dot{I}_2 Z_C \operatorname{sh} g = \dot{U}_2 (\operatorname{ch} g + \operatorname{sh} g) =$$

$$= \dot{U}_2 e^g = \dot{U}_2 e^{jb} = 10 e^{j\frac{\pi}{3}}\ \textit{в},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh} g = \dot{I}_2 (\operatorname{ch} g + \operatorname{sh} g) =$$

$$= \dot{I}_2 e^g = \dot{I}_2 e^{jb} = 0{,}23 e^{j\frac{\pi}{3}}\ a.$$

Полная векторная диаграмма дается на рис. 3-9б.

**3-19.** В условиях задачи 3-18 определить комплексы тока $\dot{I}_1$ и напряжения $\dot{U}_1$, если частота источника $\omega_2$ в два раза больше резонансной частоты фильтра, а сопротивление нагрузки $r_2$ осталось без изменения.

Построить полную векторную диаграмму.

Решение

Вычисляем значения:

$$Z_{1x} = j\omega_2 \frac{L}{2} + \frac{1}{j\omega_2 C} = j2\omega_0 \frac{L}{2} + \frac{1}{j2\omega_0 C} = j87{,}5\ \text{ом};$$

$$Z_{1k} = j\,86{,}5\ \text{ом};$$

$$Z_c = j86{,}8\ \text{ом};$$

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{1k}}{Z_{1x}}} = 0{,}99.$$

Вещественное значение $\operatorname{th} g$ указывает, что в комплексе $g = a + jb$ коэффициент фазы $b$ равен $\pi$, что легко установить из выражений

$$\cos b = \left(1 - 2\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{\omega \geqslant \omega_0} = -1$$

и

$$\operatorname{th}(a + jb) = \frac{\operatorname{sh} a \cos b + j \operatorname{ch} a \sin b}{\operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b} = \frac{-\operatorname{sh} a}{-\operatorname{ch} a} = \operatorname{th} a.$$

По таблицам гиперболических функций находим для

$$\operatorname{th} g = 0{,}99; \quad a = 2{,}64; \text{ тогда } g = 2{,}64 + j\pi;$$

$$\operatorname{sh} g = \operatorname{sh} a \cos b = -\operatorname{sh} a = -6{,}97;$$

$$\operatorname{ch} g = \operatorname{ch} a \cos b = -\operatorname{ch} a = -7{,}04.$$

Применяя уравнения длинной линии, получаем

$$\dot U_1 = \dot U_2 \operatorname{ch} g + I_2 Z_c \operatorname{sh} g = 10(-7{,}04) +$$
$$+ 0{,}23 \cdot j86{,}8(-6{,}97) = (-70{,}4 - j\,139)\ \text{в}.$$

$$\dot I_1 = \dot I_2 \operatorname{ch} g + \frac{\dot U_2}{Z_c} \operatorname{sh} g = 0{,}23(-7{,}04) +$$

$$+ \frac{10}{j86{,}8}(-6{,}97) = (-1{,}62 + j0{,}812)\ a.$$

Эти же значения $\dot U_1$ и $\dot I_1$ могут быть вычислены непосредственно по схеме фильтра, т. е.

$$\dot U_C = \dot U_2 + j\omega_2 \frac{L}{2} \dot I_2 = 10 + j\,100 \cdot 0{,}23 = (10 + j23)\ \text{в},$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{-jx_C} = \frac{10+j23}{-j12,5} = (-1,84 + j0,8)\ a,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_C = 0,23 - 1,84 + j0,8 = (-1,61 + j0,8)\ a,$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_C + j\omega_2 \frac{L}{2} \dot{I}_1 = 10 + j23 + j100(-1,61 + j0,8) =$$

$$= (-70 - j\,138)\ в.$$

На рис. 3-10 изображена векторная диаграмма.

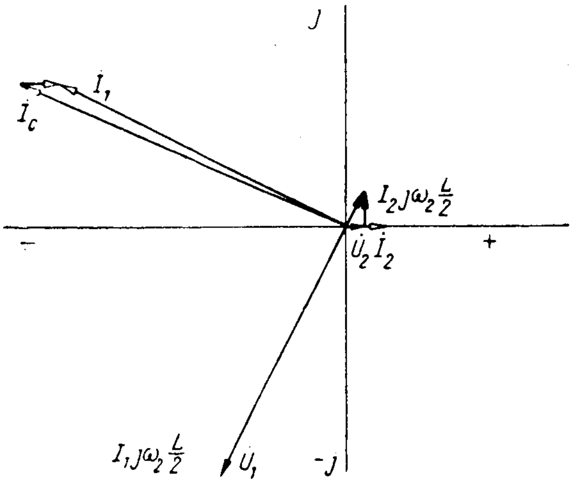



Рис. 3-10

3-20. В условиях задачи 3-19 построить полную векторную диаграмму, если $Z_2 = Z_c = j\ 86,8$ *ом.*

*Ответ.*

$$\dot{I}_2 = (-j0,115)\ a;\quad \dot{I}_1 = (+j1,61)\ a;$$

$$\dot{U}_1 = -140\ в.$$

На рис. 3-11 дана векторная диаграмма.

3-21. Фильтр низкой частоты (см. рис. 3-9а) состоит из постоянной индуктивности $L = 0,1$ *гн* и переменной емкости $C$, которая может иметь значения 0,1; 0,01 и 0,001 *мкф*.

Какие резонансные частоты можно получить в этом звене фильтра?

## Решение

Резонансная угловая частота фильтра определяется по формуле

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{0,1C}}.$$

Подставляя в это выражение различные значения для емкости $C$, получим три значения резонансной частоты:

$$\omega_0' = 2 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}; \quad \omega_0'' = 6{,}325 \cdot 10^4 \textit{ сек}^{-1} \text{ и } \omega_0''' = 2 \cdot 10^5 \textit{ сек}^{-1}.$$

**3-22.** Определить индуктивность $\frac{L}{2}$ и емкость $C$ одного звена

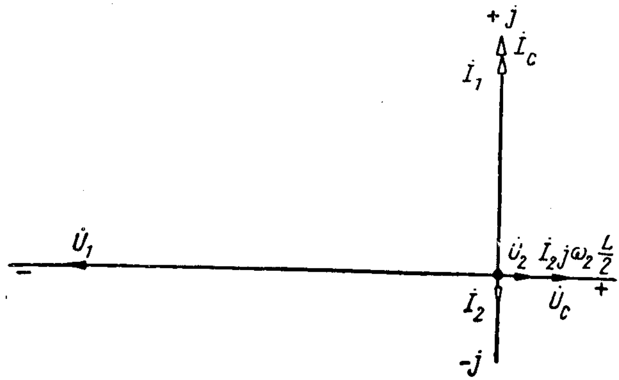



Рис. 3-11

фильтра низкой частоты (рис. 3-9а), если резонансная частота $\omega_0 = 3\,000$ *сек*$^{-1}$ и волновое сопротивление $Z_c = 1\,000$ *ом* при частоте $\omega_1 = 1\,500$ *сек*$^{-1}$.

## Решение

Из формул, определяющих резонансную частоту

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

и волновое сопротивление

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2},$$

находим

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{2Z_c}{\sqrt{3}} \text{ или } \frac{L}{C} = \frac{4Z_c^2}{3} = \frac{4}{3} \cdot 10^6,$$

$$\sqrt{LC} = \frac{2}{\omega_0} \text{ или } LC = \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{9 \cdot 10^6}$$

и получаем

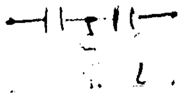
$$L = \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0,77 \ гн,$$

$$\frac{L}{2} = 0,385 \ гн,$$

$$C = \frac{4}{\omega_0^2 L} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{9 \cdot 10^6 \cdot 4} = 0,576 \cdot 10^{-6} \ ф.$$

3-23. Фильтр высокой частоты, состоящий из двух звеньев с волновым сопротивлением $Z_c = j\ 1\ 000$ *ом* каждое, должен иметь затухание, равное 4 *неп* при частоте $\omega_1 = 6\ 000\ сек^{-1}$.

Определить резонансную частоту $\omega_0$, индуктивность $2L$ и емкость $C$ одного звена фильтра.



Решение

Каждое звено фильтра должно иметь затухание $a = 2$ *неп* при частоте $\omega_1 = 6\ 000\ сек^{-1}$.

Резонансную частоту фильтра находим из выражения

$$\operatorname{ch} a = \frac{2}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} - 1 = 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 - 1;$$

$$\omega_0 = \omega_1 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} a + 1}{2}} = 6\ 000 \sqrt{\frac{3,76 + 1}{2}} = 9\ 240\ сек^{-1}.$$

Индуктивность $2L$ и емкость $C$ определим из формул

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \text{ и } Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}};$$

$$\frac{L}{C} = \sqrt{Z_c \sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}} = \sqrt{j1\ 000 \sqrt{1-\left(\frac{9\ 240}{6\ 000}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{j1000 \sqrt{1-2,37}} = 34,2;$$

$$LC = \frac{1}{4\omega_0^2} = \frac{1}{4 \cdot 0,852 \cdot 10^8} = \frac{10^{-8}}{3,4} = 2,94 \cdot 10^{-9};$$

$$L = \sqrt{34,2 \cdot 2.94 \cdot 10^{-9}} = 0,316 \cdot 10^{-3} \ гн;$$

$$2L = 0,632 \cdot 10^{-3} \ гн;$$

$$C = \frac{1}{4\omega_0^2 L} = \frac{2,94 \cdot 10^{-9}}{0,316 \cdot 10^{-3}} = 9,3 \cdot 10^{-6} \ ф.$$

**3-24.** Построить графики изменения коэффициента затухания низкочастотного фильтра с резонансной частотой $\omega_0 = 3\,000$ *сек*$^{-1}$ для одного и двух звеньев при изменении частоты в пределах от $\omega_0$ до $\omega = 5\,000$ *сек*$^{-1}$.

## Решение

Для построения графика $a = f(\omega)$ воспользуемся уравнением $\operatorname{ch} a = 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1$, с помощью которого составим табл. 3-1.

Таблица 3-1

| $\omega$, *сек*$^{-1}$ | 3000 | 3500 | 4000 | 4500 | 5000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\omega}{\omega_0}$ | 1 | 1,166 | 1,33 | 1,5 | 1,67 |
| $a$, *неп* | 0,0 | 1,14 | 1,58 | 1,92 | 2,2 |
| $2a$, *неп* | 0,0 | 2,28 | 3,16 | 3,84 | 4,4 |

На основании данных этой таблицы на рис. 3-12 построены искомые графики.

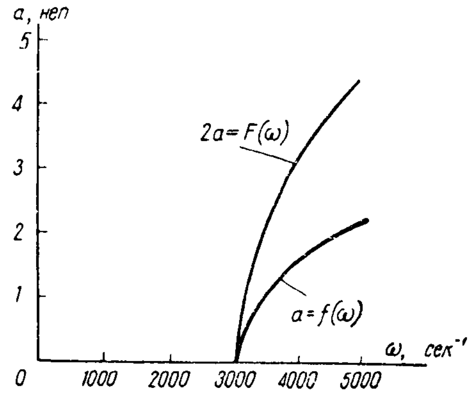



Рис. 3-12

**3-25.** Фильтр высокой частоты (см. рис. 3-7) имеет резонансную частоту $\omega_0 = 25\,000$ *сек*$^{-1}$ и волновое сопротивление $Z_c = -j\,600$ *ом* при $\omega_1 = 20\,000$ *сек*$^{-1}$.

Определить емкость $2C$ и индуктивность $L$ одного звена фильтра.

Из скольких звеньев должен состоять фильтр, если при частоте $\omega_1 = 20\,000$ *сек*$^{-1}$ его затухание $a = 4$ *неп*?

Решение

Из уравнений

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}$$

находим значения индуктивности $L$ и емкости $2C$,

$$LC = \frac{1}{(2\omega_0)^2} = \frac{1}{(2\cdot 25\,000)^2} = 4\cdot 10^{-10};$$

$$\frac{L}{C} = \frac{Z_c^2}{\left[\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}\right]^2} = \frac{(-j\,600)^2}{1-\left(\frac{25\cdot 10^3}{20\cdot 10^3}\right)^2} = 54\cdot 10^4;$$

$$L^2 = LC\frac{L}{C} = 4\cdot 10^{-10}\cdot 64\cdot 10^4; \qquad L = 16\cdot 10^{-3}\ \text{гн};$$

$$C = \frac{LC}{L} = \frac{4\cdot 10^{-10}}{16\cdot 10^{-3}} = 2{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{ф}; \quad 2C = 5\cdot 10^{-6}\ \text{ф}.$$

Затухание одного звена фильтра при угловой частоте найдем из формулы

$$\operatorname{ch} a = 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 - 1 = 2{,}12; \quad a = 1{,}39\ \text{неп}.$$

Следовательно, для получения затухания $a = 4$ *неп* при $\omega_1 = 20\,000\ \text{сек}^{-1}$ необходимо иметь число звеньев

$$n = \frac{4}{1{,}39} \approx 3.$$

## Тема 3

## Катушки и трансформаторы со стальными сердечниками

При синусоидальном напряжении на зажимах катушки со стальным сердечником кривая тока имеет несинусоидальную форму, и, наоборот, в катушке с синусоидальным током на ее зажимах напряжение меняется не по синусоидальному закону.

Формы кривых тока и напряжения в этих случаях зависят от свойств стали и определяются чаще всего графическим способом.

Для анализа процессов в катушках со стальными сердечниками пользуются электрической схемой замещения, параметры которой, за исключением активных сопротивлений обмоток, имеют расчетный смысл. Причина этого заключается в том, что электрическая схема замещения (эквивалентная схема) не может заменить в работе реальную катушку, так как изменение одного из параметров катушки (витков, воздушного зазора и т. д.) или приложенного напряжения меняет значение почти всех параметров схемы замещения. Иначе говоря, электрическая схема замещения является эквивалентной только при вполне определенных условиях работы реальной катушки.

Условия работы трансформатора с разомкнутой вторичной обмоткой тождественны условиям работы катушки с замкнутым стальным сердечником. В связи с этим векторная диаграмма трансформатора при холостом ходе вполне тождественна векторной диаграмме катушки. Здесь важно подчеркнуть, что если во вторичной обмотке трансформатора возникает ток, то намагничивающая сила этого тока оказывает размагничивающее действие и вследствие этого увеличивается ток в первичной обмотке.

## *Примеры и задачи*

**3-26.** Как изменяется ток в обмотке реактивной катушки, включенной на переменное напряжение, если из нее удалить замкнутый стальной сердечник?

*Ответ.* Ток возрастает.

**3-27.** Как изменится активная и реактивная составляющие тока в катушке, если сечение сердечника катушки сделать в два раза меньше, а напряжение на ее зажимах оставить неизменным?

Активным сопротивлением обмотки катушки и рассеянием пренебречь, а потери от гистерезиса считать пропорциональными квадрату индукции.

*Ответ.* $I_а$ увеличится в четыре раза; $I_р$ может возрасти во много раз.

**3-28.** Как изменится активная и реактивная составляющие тока в обмотке катушки с замкнутым стальным сердечником, если напряжение, приложенное к ее зажимам, увеличить в два раза? Активным сопротивлением обмотки катушки и рассеянием пренебречь, а потери в стали считать пропорциональными квадрату индукции.

**3-29.** Как влияет величина воздушного зазора в стальном сердечнике катушки на ее индуктивность и потери в стали, если ток в обмотке остается неизменным? Активным сопротивлением катушки и рассеянием пренебречь.

*Ответ.* При увеличении воздушного зазора индуктивность катушки и потери в стали уменьшаются.

**3-30.** Потери от вихревых токов в стальном сердечнике реактивной катушки при частоте $f = 50$ *гц* равны потерям от гистерезиса. Полные потери в стали равны 1 *квт.*

Определить потери в стали при частоте $f = 60$ *гц*, если максимальная индукция в обоих случаях одинакова.

*Ответ.* 1,32 *квт.*

**3-31.** Как изменится форма кривой тока холостого хода трансформатора при синусоидальном напряжении, если: а) удвоить величину приложенного напряжения при $f = \text{const}$, б) удвоить частоту при $U_1 = \text{const}$, в) одновременно удвоить напряжение и частоту?

*Ответ.* а) Кривая тока будет более сильно искажена;
б) кривая тока будет менее искажена;
в) форма кривой тока останется без изменения.

**3-32.** Может ли быть напряжение на вторичных зажимах трансформатора больше э. д. с. вторичной обмотки при активной, индуктивной и емкостной нагрузках?

*Ответ.* При активной и индуктивной нагрузках вторичное напряжение будет всегда меньше э. д. с.; при емкостной нагрузке напряжение $U_2$ может быть больше $E_2$.

**3-33.** На основании каких опытов можно приближенно определить параметры схемы замещения трансформатора?

*Ответ.* На основании опытов холостого хода и короткого замыкания трансформатора.

**3-34.** Доказать, что в опыте холостого хода трансформатора можно пренебречь потерями в сопротивлении обмотки.

**3-35.** Доказать, что в опыте короткого замыкания трансформатора можно пренебречь потерями в стали сердечника.

**3-36.** Может ли быть ток в первичной обмотке трансформатора при нагрузке меньше тока холостого хода, если вторичная обмотка замкнута на емкостное сопротивление?

*Ответ.* Может.

**3-37.** Стальной сердечник катушки имеет сечение $S = 44 \cdot 10^{-4}$ *м*$^2$ и обмотка катушки $w = 150$ витков.

Длина средней индукционной линии в стали $l_{ст} = 80$ *см* и толщина листов стали марки Э11 равна 0,5 *мм*.

Сердечник катушки имеет четыре стыка, которые при расчетах можно считать за воздушный зазор в сердечнике $l_в = 4 \cdot 0{,}005 = 0{,}02$ *см*.

Определить ток в обмотке катушки и коэффициент мощности, если катушка включена на напряжение 220 *в* при частоте $f = 50$ *гц*.

Сопротивление обмотки и рассеяние при расчетах не учитывать.

Решение

Максимальное значение магнитной индукции в сердечнике получаем из формулы

$$U \simeq E = 4{,}44 f w \Phi_m,$$

откуда

$$B_m = \frac{U}{4{,}44 f w S} = \frac{220 \cdot 10^4}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 44} = 1{,}5 \text{ тл}.$$

На основании закона полного тока амплитудное значение реактивной составляющей тока, или амплитуду намагничивающего тока, находим из соотношения

$$H_{ст} l_{ст} + H_в l_в = I_{pm} w.$$

По кривой намагничивания для листовой стали Э11 при $B_m = 1{,}5$ *тл* имеем $H_{ст} = 15$ *а/см*.

Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_{в} = B_{в} 0{,}8 = 1{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 10^4 = 12\,000 \ а/см.$$

Таким образом, амплитуда намагничивающего тока

$$I_{pm} = \frac{H_{ст} l_{ст} + H_{в} l_{в}}{w} = \frac{15 \cdot 80 + 12\,000 \cdot 0{,}02}{150} = 9{,}6 \ а.$$

Так как кривая намагничивающего тока при значениях магнитной индукции свыше 1,0 *тл* отличается по форме от синусоиды, то действующее значение намагничивающего тока находим из соотношения

$$I_{p} = \frac{I_{pm}}{\xi \sqrt{2}} = \frac{9{,}6}{1{,}5 \sqrt{2}} = 4{,}53 \ а,$$

где $\xi$ — коэффициент, зависящий от величины индукции и сорта стали и обычно лежащий в пределах 1,1 — 1,6 при индукциях $B_m = 1{,}0 - 1{,}6$ *тл*.

Активную составляющую тока $I_а$ катушки определяем из выражения

$$P_{ст} = EI \sin \alpha = EI_{а};$$

где $\alpha$ — угол между вектором тока катушки $I$ и вектором магнитного потока.

Потери в стали Э11 по ГОСТ 802—41 при индукции $B_m = 1{,}5$ *тл* составляют 7,9 *вт* на 1 *кг*.

Вес сердечника составляет

$$G = \gamma l_{ср} S = 7{,}8 \cdot 80 \cdot 44 = 27{,}5 \ кГ,$$

и потери в стали

$$P_{ст} = 27{,}5 \cdot 7{,}9 = 220 \ вт.$$

Тогда активная составляющая тока

$$I_{а} = I \sin \alpha = \frac{P_{ст}}{E} = \frac{220}{220} = 1 а.$$

Ток в обмотке катушки

$$I = \sqrt{I_{p}^2 + I_{а}^2} = 4{,}65 \ а;$$

$$\sin \alpha = \frac{I_{а}}{I} = \frac{1}{4{,}65} = 0{,}215;$$

$$\alpha = 12°25',$$

а коэффициент мощности $\cos \varphi = \sin \alpha$.

3-38. Уточнить результаты решения задачи 3-37, если активное сопротивление обмотки катушки $r = 2$ *ом* и индуктивное сопротивление рассеяния $x_S = 5$ *ом*.

Решение

Из векторной диаграммы (рис. 3-13) следует, что при $E = 220$ *в* напряжение сети должно быть

$$U = \sqrt{(E + rI\sin\alpha + x_S I\cos\alpha)^2 + (rI\cos\alpha - x_S I\sin\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{(220+2\cdot4{,}65\cdot0{,}215+5\cdot4{,}65\cdot0{,}98)^2+(2\cdot4{,}65\cdot0{,}98-5\cdot4{,}65\cdot0{,}215)^2} =$$

$$= \sqrt{244{,}8^2 + 4{,}1^2} \simeq 244{,}8\ в.$$

Так как напряжение сети $U = 220$ *в*, то принятое при решении задачи 3-37 значение $E = 220$ *в* было преувеличено. Поэтому, применяя метод последовательного приближения, нужно принять $E$ меньше $U$, например $E = 205$ *в*. Повторяя весь расчет вновь, находим

$$B_m = 1{,}4\ тл;\quad H_{ст} = 9\ а/см;$$

$$I_{pm} = 6{,}29\ а;$$

$$I_p = \frac{6{,}29}{1{,}3\sqrt{2}} = 3{,}42\ а;$$

$$P'_{ст} = 6{,}9\ вт/кг,\quad P_{ст} = 190\ вт;$$

$$I_a = \frac{190}{205} = 0{,}927\ а;$$

$$I = 3{,}55\ а;\quad \sin\alpha = 0{,}261;$$

$$\alpha = 15°20';\quad \cos\psi = \sin\alpha$$

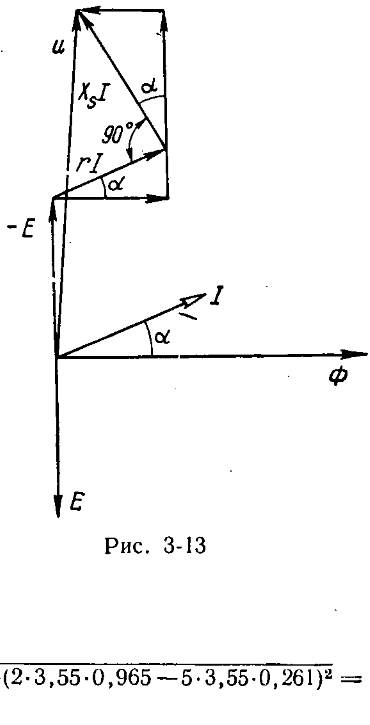



Рис. 3-13

и напряжение сети

$$U = \sqrt{(205+2\cdot3{,}55\cdot0{,}561+5\cdot3{,}55\cdot0{,}965)^2+(2\cdot3{,}55\cdot0{,}965-5\cdot3{,}55\cdot0{,}261)^2} =$$

$$= 224\ в.$$

Дальнейший расчет практически нецелесообразен, так как его точность не превышает точности полученного результата, и окончательно значения всех входящих в расчет величин можно получить, умножив найденные выше значения на отношение $\frac{220}{224}$; при изменении напряжения в узких пределах (3—5%) можно допустить, что эти значения связаны с напряжением линейной зависимостью.

На этом основании

$$B_m = 1{,}4 \cdot \frac{220}{224} = 1{,}375 \text{ тл}; \quad H_{\text{ст}} = 8{,}75 \text{ а/см}; \quad I_{\text{р}m} = 6{,}16 \text{ а};$$

$$I_{\text{р}} = 3{,}36 \text{ а}; \quad I_{\text{а}} = 0{,}91 \text{ а}; \quad I = 3{,}5 \text{ а}; \quad \sin\alpha = 0{,}256; \quad \alpha = 14°50'.$$

**3-39.** Реактивная катушка с параметрами, указанными в задачах 3-37 и 3-38, включается на переменное напряжение $U = 220$ *в* последовательно с активной нагрузкой, напряжение на зажимах которой $U_2$ не должно превышать 150 *в* при токе $I = 8$ *а*.

Определить величину воздушного зазора, который должна иметь магнитная цепь катушки.

## Решение

Так как нагрузка имеет по условию только активное сопротивление, а напряжение на зажимах катушки $U_{\text{к}}$ опережает ток на угол, близкий к 90°, то напряжение $U_{\text{к}}$ находим из соотношения

$$U = \sqrt{U_{\text{к}}^2 + U_2^2}$$

или

$$U_{\text{к}} = \sqrt{U^2 - U_2^2} = \sqrt{220^2 - 150^2} = 161 \text{ в}.$$

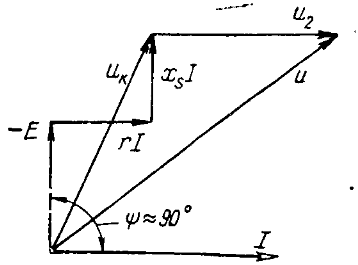



Рис. 3-14

Принимая угол $\alpha = 0$, можно из упрощенной векторной диаграммы (рис. 3-14) с достаточной точностью определить

$$E \simeq U_{\text{к}} - x_s I \simeq 161 - 5 \cdot 8 = 121 \text{ в},$$

что можно проверить из соотношения

$$U_{\text{к}} = \sqrt{(E + x_s I)^2 + (rI)^2} = \sqrt{(121 + 5 \cdot 8)^2 + (2 \cdot 8)^2} = 161 \text{ в},$$

Определяем магнитную индукцию в сердечнике катушки:

$$B_m = \frac{121 \cdot 10^4}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 44} = 0{,}825 \ \textit{тл}.$$

По кривой намагничивания для стали Э11

$$H_{\text{ст}} = 1{,}6 \ \textit{а/см}$$

и магнитное напряжение в стали сердечника

$$H_{\text{ст}} l_{\text{ст}} = 1{,}6 \cdot 80 = 128 \ \textit{а}.$$

Намагничивающая сила обмотки при токе $I = 8$ *а* составляет

$$I_m w = \sqrt{2} \cdot 8 \cdot 150 = 1690 \ \textit{а},$$

так как при магнитной индукции $B_m < 1{,}0$ *тл*

$$I_m = \sqrt{2} \ I \text{ и } \xi = 1.$$

Избыточная намагничивающая сила обмотки представляет собой магнитное напряжение в воздушном зазоре

$$H_{\text{в}} l_{\text{в}} = I_m w - H_{\text{ст}} l_{\text{ст}} = 1\,690 - 128 = 1562 \ \textit{а}.$$

Так как

$$H_{\text{в}} = 0{,}8 \, B_m \, 10^4 = 6600 \ \textit{а/см},$$

то

$$l_{\text{в}} = \frac{1\,562}{6\,600} = 0{,}237 \ \textit{см} = 2{,}37 \ \textit{мм},$$

вместе с зазорами в месте стыков частей магнитной цепи.

Для проверки сделанного допущения $\alpha = 0$ найдем потери в стали при $B_m = 0{,}825$ *тл*:

$$P_{\text{ст}} = 27{,}5 \cdot 2{,}17 = 59{,}7 \ \textit{вт}.$$

Активная составляющая тока

$$I_{\text{а}} = \frac{P_{\text{ст}}}{E} = \frac{59{,}7}{121} \simeq 0{,}493 \ \textit{а};$$

$$\sin \alpha = \frac{I_{\text{а}}}{I} = \frac{0{,}493}{8} = 0{,}0617;$$

$$\alpha \simeq 3°30'.$$

Величина угла $\alpha$ показывает, что сделанное допущение не может значительно повлиять на точность расчета воздушного зазора.

**3-40.** Для однофазного трансформатора ОМ-6667/35 имеются следующие данные: потери холостого хода при номинальном напряжении 17 000 *вт*, потери короткого замыкания при номинальном токе 53 500 *вт*, ток холостого хода составляет 3% от номинального, напряжение короткого замыкания — 8% от номинального. Вторичное напряжение равно 10 *кв*.

Определить активные и реактивные сопротивления обмоток, полагая, что приведенные вторичные значения соответствующих сопротивлений равны первичным. Вычислить коэффициент мощности при холостом ходе трансформатора, считая, что он работает в качестве понижающего трансформатора, и коэффициент полезного действия для случаев работы с номинальной нагрузкой и $\cos\varphi = 0{,}8$, а также при половинной нагрузке и $\cos\varphi = 0{,}8$.

## Решение

Номинальный ток первичной обмотки

$$I_{1\text{ном}} = \frac{S_{\text{ном}}}{U_{1\text{ном}}} = \frac{6\,667}{35} = 190\ \textit{а},$$

где $S_{\text{ном}}$ — номинальная мощность, *ква*;

$U_{1\text{ном}}$ — напряжение обмотки высшего напряжения, *кв*;

Сопротивление короткого замыкания трансформатора

$$Z_{1\text{к}} = \frac{U_{1\text{к}}}{I_{1\text{ном}}} = \frac{8\cdot 35\,000}{100\cdot 190} = 14{,}74\ \textit{ом};$$

активная составляющая этого сопротивления

$$r_{1\text{к}} = \frac{P_{1\text{к}}}{I_{1\text{к}}^2} = \frac{53\,500}{190^2} = 1{,}48\ \textit{ом}$$

и реактивная составляющая

$$x_{1\text{к}} = \sqrt{Z_{1\text{к}}^2 - r_{1\text{к}}^2} = \sqrt{14{,}74^2 - 1{,}48^2} = 14{,}66\ \textit{ом}.$$

По условию приведенные сопротивления обмотки одинаковы:

$$r_1 = r_2' = \frac{1{,}48}{2} = 0{,}74\ \textit{ом}$$

и

$$x_1 = x_2' = \frac{14{,}66}{2} = 7{,}33\ \textit{ом}.$$

Коэффициент трансформации

$$K = \frac{35}{10} = 3{,}5.$$

Тогда активное и реактивное сопротивления вторичной обмотки будут

$$r_2 = \frac{r_2'}{K^2}\ \frac{0,74}{3,5^2} = 0,0605\ \textit{ом}$$

и

$$x_2 = \frac{x_2'}{K^2} = \frac{7,33}{3,5^2} = 0,6\ \textit{ом}.$$

Коэффициент мощности при холостом ходе трансформатора

$$\cos\varphi_{10} = \frac{P_{10}}{U_{1\text{ном}} I_{10}} = \frac{17\,000}{35\,000\cdot 0,03\cdot 190} = 0,085.$$

Коэффициент полезного действия при $\cos\varphi = 0,8$ и номинальной нагрузке

$$\eta = \left[1 - \frac{P_{10} + P_{1\text{к}}}{S_{\text{ном}}\cos\varphi + P_{10} + P_{1\text{к}}}\right] = \left[1 - \frac{17 + 53,5}{6\,667\cdot 0,8 + 17 + 53,5}\right] = 98,7\,\%.$$

Коэффициент полезного действия при $\cos\varphi = 0,8$ и нагрузке, равной 50% от номинальной,

$$\eta = \left[1 - \frac{17 + 0,25\cdot 53,5}{6\,667\cdot 0,8\cdot 0,5 + 17 + 0,25\cdot 53,5}\right] = 98,87\%.$$

## Тема 4

### Нелинейные цепи переменного тока

Основными методами расчета цепей с нелинейными элементами являются или графические, или приближенные аналитические.

При графическом методе, на основании известной характеристики нелинейного элемента и основных законов для электрических и магнитных цепей, производятся графические построения, которые дают достаточно точное решение.

Для аналитического решения характеристику нелинейного элемента выражают приближенно аналитической функцией.

Аналитический метод в большинстве случаев менее точен, чем графический, но позволяет получить расчет в общем виде, что необходимо для анализа явлений в нелинейной цепи.

*Примеры и задачи*

**3-41.** Катушка с сердечником, набранным из листовой стали, подключена к синусоидальному напряжению, действующее значение которого $U = 380$ *в*. Сечение стали сердечника $S = 12\cdot 10^{-4}$ $м^2$; число витков обмотки $w = 600$; средняя длина индукционной линии $l = 36$ *см*; частота напряжения сети $f = 50$ *гц*. Связь между индукцией в сердечнике и напряженностью поля с некоторым приближением выражена уравнением

$$H = 3B + 6B^3,$$

где $H$ измеряется в *а/см*, $B$ — в *тл*.

Пренебрегая рассеянием и потерями в стали и в обмотке катушки, написать уравнение тока в катушке.

*Указание*. Уравнение тока в катушке

$$i = \frac{l}{wS} 3\Phi + \frac{l}{wS^3} 6\Phi^3$$

получаем из уравнения $H = f(B)$, пользуясь соотношениями

$$H = \frac{iw}{l} \quad \text{и} \quad B = \frac{\Phi}{S}.$$

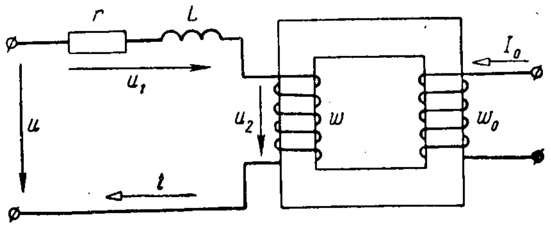



Рис. 3-15а

Магнитный поток в сердечнике катушки будет синусоидальным $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$, так как приложенное напряжение синусоидально и сопротивление обмотки не учитывается. Амплитуда магнитного потока находится из уравнения

$$U = 4{,}44 f w \Phi_m.$$

Уравнение тока получаем после преобразования $\sin^3 \omega t$ по формуле

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t.$$

*Ответ*. $i = [4{,}15 \sin 314\, t + 1{,}24 \sin (942\, t - \pi)]$ *а*.

**3-42.** В обмотке реактивной катушки с витками $w = 200$ (рис. 3-15а) ток $i = 4 \sin \omega t$, где $\omega = 314$ *сек*$^{-1}$. Средняя длина индукционной линии в сердечнике катушки $l = 100$ *см*, сечение сердечника $S = 10.10^{-4}$ *м*$^2$.

Последовательно с реактивной катушкой со стальным сердечником включена реактивная катушка без стального сердечника, параметры которой равны: $L_1 = 0{,}0318$ *гн* и $r_1 = 5$ *ом*. В обмотке с числом витков $w_0 = 100$ постоянный ток $I_0 = 4$ *а*. Пользуясь кривой намагничивания (рис. 3-15б), найти закон изменения напряжения $U_2$ на катушке со стальным сердечником, считая рассеяние, активное сопротивление катушки и потери в стали равными нулю. Построить кривую суммарного напряжения $U$ в зависимости от времени.

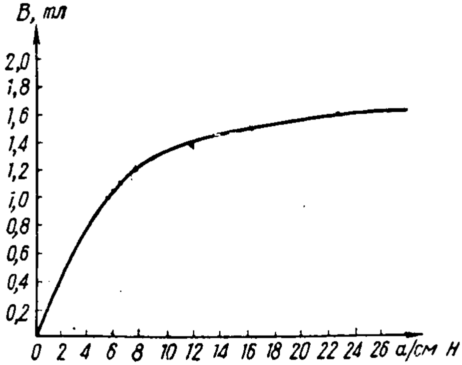



Рис. 3-15б

## Решение

На основании кривой намагничивания (рис. 3-15б) построим кривую зависимости индукции в сердечнике $B = f_1(H)$ (рис. 3-15в) от напряженности магнитного поля $H$.

Для того чтобы найти зависимость напряжения $U_2$ от времени, необходимо построить кривую потокосцепления катушки с витками

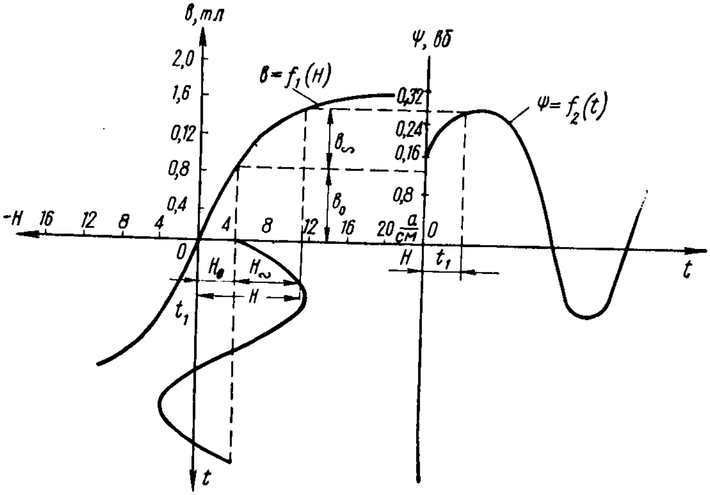



Рис. 3-15в

$w$ в зависимости от времени. С этой же целью на рис. 3-15в построена кривая суммарной напряженности поля

$$H = H_0 + H_\sim = \frac{I_0 w_0}{l} + \frac{w I_m \sin \omega t}{l} = \frac{4 \cdot 100}{100} +$$

$$+ \frac{200 \cdot 4}{100} \sin \omega t = [4 + 8 \sin \omega t] \ a/см$$

в зависимости от времени. По кривым $H = f(t)$ и $B = f_1(H)$ легко построить кривую потокосцепления $\psi = f_2(t)$ катушки с витками $w$, если учесть, что

$$\psi = BSw = B \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 200 = 0{,}2\,B.$$

При $t = 0$ $\psi_0 = B_0 \cdot 0{,}2$ [*вб*], а при $t = t_1$ $\psi = (B_0 + B_\infty)\,0{,}2$ [*вб*] (рис. 3-15*в*).

Аналогичным путем определяются значения потокосцепления для других моментов времени.

Полученную кривую $\psi = f_2(t)$ необходимо разложить в гармонический ряд

$$\psi = \psi_0 + \psi_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + \psi_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \psi_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots$$

Дифференцируя каждую составляющую по времени, получим составляющие напряжения $u_2$ на зажимах катушки, т. е.

$$u_2 = \frac{d\psi}{dt} = \omega \psi_{1m} \cos(\omega t + \alpha_1) + 2\omega \psi_{2m} \cos(2\omega t + \alpha_2) +$$

$$+ 3\omega \psi_{3m} \cos(3\omega t + \alpha_3) + \ldots$$

Напряжение $u_1$ на зажимах катушки без стального сердечника изменяется по синусоидальному закону и будет равно

$$u_1 = I_m \sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2} \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{r_1}.$$

Суммарное напряжение на зажимах всей цепи определяется согласно уравнению

$$u = I_m \sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + \omega \psi_{1m} \cos(\omega t + \alpha_1) +$$

$$+ 2\omega \psi_{2m} \cos(2\omega t + \alpha_2) + 3\omega \psi_{3m} \cos(3\omega t + \alpha_3) + \ldots$$

По полученному уравнению легко построить кривую суммарного напряжения $u$ в зависимости от времени за период.

**3-43.** В условиях задачи 3-42 найти зависимость от времени напряжения $u_2$ на зажимах катушки со стальным сердечником и напряжения $u$ на зажимах цепи, если кривая намагничивания (рис. 3-15б) заменена уравнением, выражающим связь между мгновенными значениями индукции в стали и напряженностью поля аналитически:

$$B=0,16\,H-2\cdot10^{-4}\,H^3,$$

где $H$ измеряется в *а/см*, а В — в *тл*.

Ток $I_0$ в обмотке постоянного тока: 1) равен 0; 2) равен 4 *а*. Найти действующие значения $U_2$ и $U$.

Решение

1. $I_0=0$.

На основании закона полного тока

$$H=\frac{iw}{l}=\frac{i\,200}{100}=2i=8\sin\omega t\ a/см.$$

Подставляя выражение $H$ в уравнение магнитной индукции, получаем

$$B=0,16\cdot8\sin\omega t-2\cdot10^{-4}\cdot8^3\sin^3\omega t=$$
$$=1,28\sin\omega t-1024\cdot10^{-4}\sin^3\omega t=1,28\sin\omega t-1\,024\cdot10^{-4}\times$$
$$\times\left(\frac{3}{4}\sin\omega t-\frac{1}{4}\sin3\omega t\right)=$$
$$=1,28\sin\omega t-768\cdot10^{-4}\sin\omega t+256\cdot10^{-4}\sin3\omega t=$$
$$=(1,2\sin\omega t+0,0256\sin3\omega t)\ тл.$$

Поскольку сопротивлением обмотки пренебрегаем, то

$$u_2=-e_2=w\frac{d\Phi}{dt}=wS\frac{dB}{dt}=0,2\,(1,2\cdot314\cos314\,t+$$
$$+0,0256\cdot3\cdot314\cos942\,t)=(75,4\cos314\,t+4,8\cos942\,t)\ в.$$

Напряжение на зажимах катушки без стального сердечника равно

$$u_1=I_m\sqrt{r_1^2+(\omega L_1)^2}\sin(\omega t-\varphi_1)=4\sqrt{5^2+10^2}\sin(314\,t+63°30')=$$
$$=44,7\sin(314\,t+63°30').$$

Мгновенное значение напряжения на зажимах цепи

$$u=u_1+u_2=44,7\sin(314+63°30')+75,4\cos314\,t+$$
$$+4,8\cos942\,t=[115,4\sin(314\,t+80°20')+4,8\cos942\,t]\ в.$$

Действующие значения напряжений

$$U_2=\sqrt{\frac{75,4^2}{2}+\frac{4,8^2}{2}}=53,8\ в;$$

$$U=\sqrt{\frac{115,4^2}{2}+\frac{4,8^2}{2}}=81,3\ в.$$

2. $I_0=4a$.

Из задачи 3-42 выражение мгновенного значения напряженности поля $H=4+8\sin\omega t$ подставляем в уравнение индукции:

$$B=0,16\,(4+8\sin\omega t)-2\cdot10^{-4}\,(4+8\sin\omega t)^3=0,64+1,28\sin\omega t-$$
$$-2\cdot10^{-4}\,(64+3\cdot16\cdot8\sin\omega t+3\cdot4\cdot64\sin^2\omega t+512\sin^3\omega t)=$$
$$=0,64+1,28\sin\omega t-2\cdot10^{-4}\cdot64-2\cdot10^{-4}\cdot384\sin\omega t-$$
$$-2\cdot10^{-4}\cdot768\sin^2\omega t-2\cdot10^{-4}\cdot512\sin^3\omega t=1,2\sin\omega t-$$
$$-2\cdot10^{-4}\cdot768\left(\frac{1-\cos2\omega t}{2}\right)-2\cdot10^{-4}\cdot512\left(\frac{3}{4}\sin\omega t-\frac{1}{4}\sin3\omega t\right)+$$
$$+C_1=1,2\sin\omega t+768\cdot10^{-4}\cos2\omega t-768\cdot10^{-4}\sin\omega t+$$
$$+256\cdot10^{-4}\cdot\sin3\omega t+C_2=1,13\sin\omega t+0,0768\cos2\omega t+$$
$$+0,0256\sin3\omega t+C_2.$$

Мгновенное значение напряжения

$$u_2=wS\frac{dB}{dt}=0,2\,(1,13\cdot314\cos314\,t-0,0768\cdot2\cdot314\sin628\,t+$$
$$+0,0256\cdot3\cdot314\cos942\,t)=[71\cos314\,t-9,54\sin628\,t+$$
$$+4,85\cos942\,t]\ в.$$

Напряжение на зажимах цепи

$$u=u_1+u_2=44,7\sin(314\,t+63°30')+71\cos314\,t-9,54\sin628\,t+$$
$$+4,85\cos942\,t=[112,5\sin(314\,t+80°)-$$
$$-9,54\sin628\,t+4,85\cos942\,t]\ в.$$

Действующие значения напряжений:

$$U_2=\sqrt{\frac{71^2}{2}+\frac{9,54^2}{2}+\frac{4,85^2}{2}}=50,7\ в,$$

$$U=\sqrt{\frac{112,5^2}{2}+\frac{9,54^2}{2}+\frac{4,8^2}{2}}=79,9\ в.$$

**3-44.** Реактивная катушка (рис. 3-16) со стальным сердечником имеет две обмотки с одинаковым числом витков $w_1=w_0=300$.

В обмотке с витками $w_0$ проходит постоянный (подмагничивающий) ток $I_0 = 0{,}2$ *а*, а в обмотке с витками $w_1$ проходит синусоидальный ток $i_1 = 0{,}5 \sin \omega t$. Связь между мгновенными значениями магнитной индукции $B$ и напряженности магнитного поля $H$ определяется уравнением

$$B = 0{,}5\,H - 0{,}012\,H^3,$$

где $H$ измеряется в *а/см*, а $B$ — в *тл.*

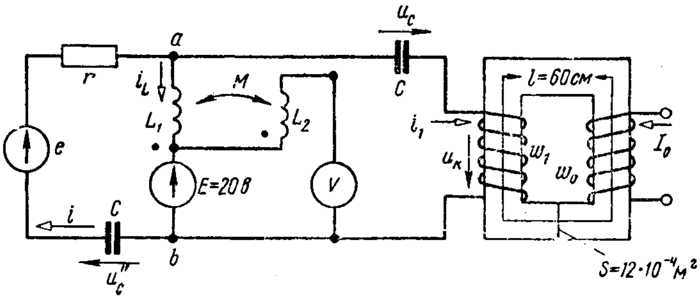



Рис. 3-16

Определить мгновенное значение э. д. с. $e$ и найти показание вольтметра $V$, если $r=50$ *ом*, $\omega L_1=50$ *ом*, $\omega L_2=60$ *ом*, $\omega M = 40$ *ом*, $\frac{1}{\omega C}=60$ *ом*, $l=60$ *см* и $S=12\cdot10^{-4}$ *м*².

Током вольтметра пренебречь.

### Решение

Напряженность магнитного поля определяется с помощью закона полного тока по формуле

$$H = \frac{w_0 I_0 + w_1 i_1}{l} = [1 + 2{,}5 \sin \omega t]\ a/см.$$

Подставим полученное значение $H$ в формулу для магнитной индукции $B$, в результате имеем

$$B = 0{,}5\,(1 + 2{,}5 \sin \omega t) - 0{,}012\,(1 + 2{,}5 \sin \omega t)^3.$$

Пользуясь формулами

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \quad \text{и} \quad \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t,$$

преобразуем выражение для магнитной индукции и получим

$$B = (0{,}376 + 1{,}02 \sin \omega t + 0{,}1125 \cos 2\omega t + 0{,}047 \sin 3\omega t)\ тл.$$

Магнитный поток в катушке

$$\Phi = BS = (45{,}1 + 122{,}5 \sin \omega t + 13{,}5 \cos 2\omega t + 5{,}64 \sin 3\omega t)\, 10^{-5} \text{ вб}.$$

Напряжение на зажимах катушки

$$u_к = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = (115{,}5 \cos \omega t - 25{,}4 \sin 2\omega t + 15{,}9 \cos 3\omega t) \text{ в}.$$

Так как ток в конденсаторе, соединенном последовательно с реактивной катушкой, очевидно, равен току $i_1$, то напряжение на конденсаторе, обусловленное этим током,

$$u'_C = 0{,}5 \cdot 60 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 30 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ в}.$$

Напряжение на конденсаторе содержит, кроме первой гармоники, постоянную составляющую, равную э. д. с. $E = 20$ *в* т. е.

$$u_C = E + u'_C = \left[20 + 30 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ в}.$$

Напряжение $u_{ab}$, очевидно, равно сумме напряжений $u_к$ $u_C$, т. е.

$$u_{ab} = (20 + 85{,}5 \cos \omega t - 25{,}4 \sin 2\omega t + 15{,}9 \cos 3\omega t) \text{ в}.$$

Ток $i_L$ в индуктивности $L_1$ имеет следующие составляющие:

$$i_L^{(1)} = \frac{85{,}5}{50} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}71 \sin \omega t;$$

$$i_L^{(2)} = \frac{25{,}4}{100} \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}254 \cos 2\omega t;$$

$$i_L^{(3)} = \frac{15{,}9}{150} \cos\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}106 \sin 3\omega t.$$

Ток в ветви с источником э. д. с. $e$

$$i = i_L + i_1 = 2{,}21 \sin \omega t + 0{,}254 \cos 2\omega t + 0{,}106 \sin 3\omega t.$$

Э. д. с. $e$ определяется на основании второго закона Кирхгофа:

$$e = ri + u''_C + u_{ab}.$$

В этом выражении напряжение на активном сопротивлении

$$ri = 110{,}5 \sin \omega t + 12{,}6 \cos 2\omega t + 5{,}3 \sin 3\omega t.$$

Напряжение на конденсаторе $u''_C$ равно сумме четырех составляющих:

$$u_C^{(0)} = -E = -20 \text{ в}; \quad u_C^{(1)} = -132{,}6 \cos \omega t;$$

$$u_C^{(2)} = 7{,}62 \sin 2\omega t; \quad u_C^{(3)} = -2{,}12 \cos 3\omega t.$$

После некоторых преобразований получим выражение для искомой э. д. с.:

$$e = [117 \sin (\omega t - 18°30') - 21{,}8 \sin (2\omega t - 35°20') + 14{,}8 \sin (3\omega t + 69°)].$$

Для определения показания вольтметра предварительно найдем составляющие напряжения, уравновешивающего э. д. с. взаимной индукции во второй обмотке от всех составляющих тока в первой обмотке.

Действующие значения этих составляющих будут

$$U_M^{(1)} = \omega M I_L^{(1)} = 40 \frac{1{,}71}{\sqrt{2}} = 48{,}5 \text{ в};$$

$$U_M^{(2)} = 2\omega M I_L^{(2)} = 2 \cdot 40 \frac{0{,}254}{\sqrt{2}} = 14{,}4 \text{ в};$$

$$U_M^{(3)} = 3\omega M I_L^{(3)} = 3 \cdot 40 \frac{0{,}106}{\sqrt{2}} = 8{,}9 \text{ в}.$$

Следовательно, вольтметр покажет напряжение

$$U = \sqrt{E^2 + U_M^{(1)2} + U_M^{(2)2} + U_M^{(3)2}} = \sqrt{20^2 + 48{,}5^2 + 14{,}4^2 + 8{,}9^2} = 55 \text{ в}.$$

3-45. Для получения коротких импульсов напряжения применяется схема, данная на рис. 3-17а

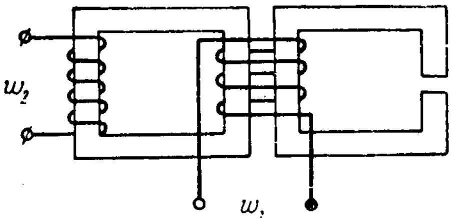


Рис. 3-17а

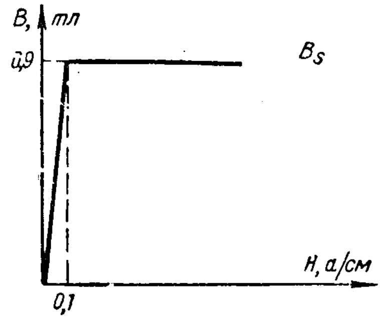


Рис. 3-17б

(пик-трансформатор). Обмотка с $w_1 = 500$ витков, охватывающая оба сердечника, включается в сеть с синусоидальным напряжением $U_1 = 220$ *в* и частотой $f = 50$ *гц*.

Сердечник с вторичной обмоткой $w_2 = 600$ витков изготовлен из пермаллоя, кривая намагничивания которого изображена на рис. 3-17б. Второй сердечник изготовлен из трансформаторной стали и имеет воздушный зазор. Сечение сердечника из пермаллоя $S = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ *м*.

Пренебрегая сопротивлением обмотки $w_1$, рассеянием и потерями в сердечниках, найти максимальное значение э. д. с. $E_{2m}$, наводимой во вторичной обмотке, и длительность импульса этой э. д. с.

## Решение

До насыщения сердечника из пермаллоя практически весь магнитный поток

$$\Phi_2 = \Phi_m \cos \omega t = \frac{U_m}{\omega w} \cos \omega t$$

замыкается только через него. После насыщения, когда магнитный поток в этом сердечнике возрастет до величины $\Phi_{2S} = B_S S = \text{const}$ и далее будет оставаться постоянным, магнитный поток, создаваемый обмоткой $w_1$,

$$\Phi = \Phi_{2S} + \Phi_1 = \Phi_m \cos \omega t$$

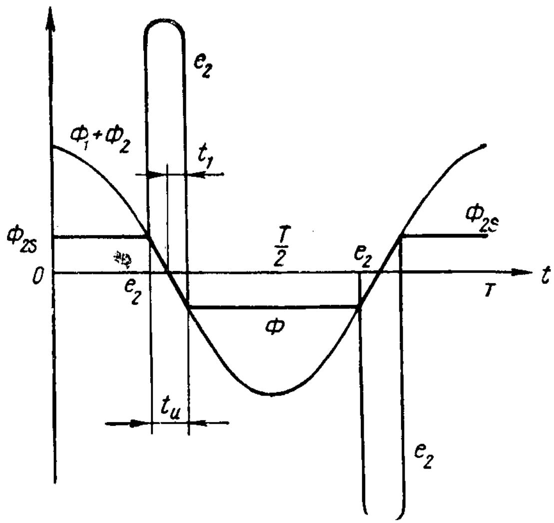



Рис. 3-17в

замыкается также и через сердечник с воздушным зазором и ограничивает величину тока в обмотке $w_1$ (рис. 3-17 в). В обмотке $w_2$ э. д. с. $e_2$ возникает только во время изменения потока $\Phi_2$ от $+\Phi_{2S}$ до $-\Phi_{2S}$, изменяющегося на этом участке по косинусоиде. Поэтому

$$2\Phi_{2S} = 2\Phi_m \cos \omega t_1$$

и

$$\cos \omega t_1 = \frac{\Phi_{2S}}{\Phi_m} = \frac{B_S S \omega w}{U_m} = \frac{0{,}9 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 314 \cdot 500}{\sqrt{2} \cdot 220} = 0{,}0776,$$

что соответствует дополнительному углу $\alpha = 4^\circ{,}33$.

Длительность импульса

$$t_{\text{имп}} = 2t_1 = 2\frac{\alpha}{\omega} = 2\frac{\alpha}{2\pi f} = 2\frac{4^\circ{,}33}{360^\circ \cdot 50} = 4{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ сек}.$$

Амплитуда э. д. с. $e_2$

$$E_{2m} = \sqrt{2}\, U_1 \frac{w_2}{w_1} = \sqrt{2} \cdot 220 \frac{600}{500} = 375 \text{ в}.$$

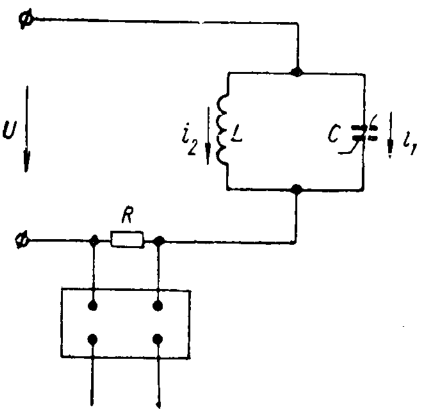



Рис. 3-18

3-46. Конденсатор из сегнетокерамики имеет нелинейную зависимость между зарядом (в кулонах) и напряжением (в вольтах) на электродах конденсатора, которая с достаточной точностью может быть выражена уравнением

$$q = a_1 u + a_2 u^3,$$

где

$$a_1 = 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ к/в}, \quad a_2 = 0{,}35 \cdot 10^{-11} \text{к/в}^3.$$

При параллельном соединении конденсатора и катушки с индуктивностью $L$ и при соответствующем выборе параметров в неразветвленной части цепи на зажимах сопротивления $r$ появится напряжение утроенной частоты, которое может быть подано на вход усилителя измерительного устройства (рис. 3-18).

Найти величину индуктивности катушки, при которой в неразветвленной части цепи не будет тока первой гармоники, и написать уравнение напряжения на сопротивлении $r = 4$ *ом*, если напряжение $U = 100$ *в* и $f = 300$ *гц*. При расчете токов в параллельных ветвях пренебречь сопротивлением $r$ и потерями в конденсаторе и в катушке.

## Решение

Уравнение мгновенного значения напряжения сети

$$u = U_m \sin \omega t$$

подставляем в уравнение заряда конденсатора, которое представим как сумму двух гармонически изменяющихся величин:

$$q = a_1 U_m \sin \omega t + a_2 U_m^3 \sin^3 \omega t = a_1 U_m \sin \omega t +$$

$$+ a_2 U_m^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t\right) = \left(a_1 U_m + 0{,}75\, a_2 U_m^3\right) \sin \omega t -$$

$$- 0{,}25\, a_2 U_m^3 \sin 3\omega t.$$

Ток в ветви с конденсатором

$$i_1 = \frac{dq}{dt} = \left(a_1 U_m + 0{,}75\, a_2 U_m^3\right) \omega \cos \omega t - 0{,}25\, a_2 U_m^3\, 3\omega \cos 3\omega t =$$

$$= I_{1m}^{(1)} \cos \omega t - I_{1m}^{(3)} \cos 3\omega t.$$

Ток в ветви с индуктивностью

$$i_2 = \frac{U_m}{\omega L} \sin (\omega t - 90^\circ) = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t = -I_{2m} \cos \omega t.$$

Из условия

$$I_{1m}^{(1)} \cos \omega t - I_{2m} \cos \omega t = 0$$

или

$$\left(a_1 U_m + 0{,}75\, a_2 U_m^3\right) \omega - \frac{U_m}{\omega L} = 0$$

индуктивность

$$L = \frac{U_m}{\left(a_1 U_m + 0{,}75\, a_2 U_m^3\right) \omega^2} = \frac{1}{\left(a_1 + 0{,}75\, a_2 U_m^2\right) \omega^2} =$$

$$= \frac{1}{\left[4{,}1 \cdot 10^{-7} + 0{,}75 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-11} (100\sqrt{2})^2\right] (2\pi \cdot 300)^2} = \frac{1}{1{,}636} = 0{,}612 \text{ гн}.$$

Напряжение на зажимах сопротивления $r$

$$u_r = -rI_{1m}^{(3)} \cos 3\omega t = rI_{1m}^{(3)} \sin(3\omega t - 90°) =$$

$$= 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-11} U_m^3 \, 3\omega \sin(3\omega t - 90°) =$$

$$= 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-11} (\sqrt{2}\,100)^3 3 \cdot 2\pi \cdot 300 \sin(3\omega t - 90°) =$$

$$= 0{,}036 \sin(3\omega t - 90°) \text{ в}.$$

**3-47.** Трехэлектродная лампа в схеме однокаскадного усилителя напряжения (рис. 3-19а) имеет динамическую анодно-сеточную характеристику (рис. 3-19б). На сетку лампы подводится (зажимы 1, 2) усиливаемое напряжение $u_1 = 4 \sin\omega t$ *в*.

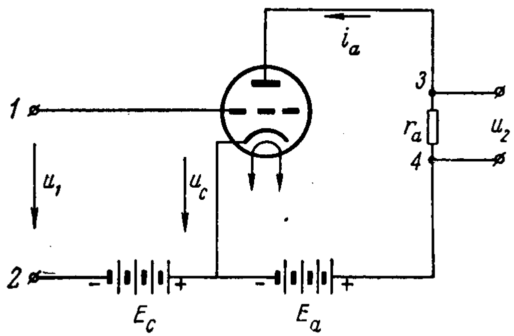



Рис. 3-19а

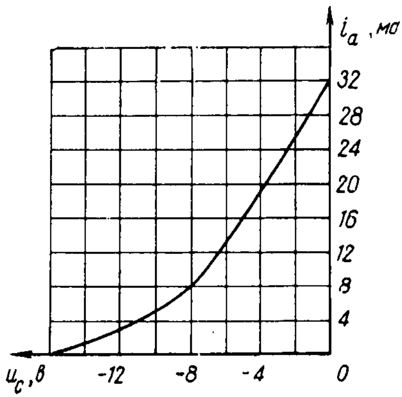



Рис. 3-19б

Найти уравнения напряжения $u_2$, получаемого на зажимах нагрузочного сопротивления $r_a = 3\,000$ *ом*, при напряжениях смещения $E_{c1} = -12$ *в* и при $E_{c2} = -4$ *в*.

## Решение

График анодно-сеточной характеристики делится по условию на два участка. Первый участок — в пределах от $-U_{m1} - E_{c1} = -4 - 12 = -16$ *в* до $+U_{m1} - E_{c1} = +4 - 12 = -8$ *в* и второй от $-U_{m1} - E_{c2} = -4 - 4 = -8$ *в* до $U_{m1} + E_{c1} = +4 - 4 = 0$.

Каждый из этих отрезков характеристики апроксимируем полиномом второй степени $i_a = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2$, исходя из требования совпадения апроксимирующих функций с характеристикой в точках:

при $E_{c1} = -12$ *в*

$u_c = -16$ *в*, $i_a = 0$;

$u_c = -12$ *в*, $i_a = 3$ *ма*;

$u_c = -8$ *в*, $i_a = 8$ *ма*,

при $E_{c2} = -4$ *в*

$u_c = -8$ *в*, $i_a = 8$ *ма*;

$u_c = -4$ *в*, $i_a = 19$ *ма*;

$u_c = 0$, $i_a = 32$ *ма*.

Подставляя в выражение полинома эти числовые величины, получаем по три уравнения

$$0 = a_0 + a_1(-16) + a_2(-16)^2; \quad 8 = a_0 + a_1(-8) + a_2(-8)^2;$$

$$3 = a_0 + a_1(-12) + a_2(-12)^2; \quad 19 = a_0 + a_1(-4) + a_2(-4)^2;$$

$$8 = a_0 + a_1(-8) + a_2(-8)^2; \quad 32 = a_0 + 0 + 0,$$

из которых находим

$$a_0 = 24, \quad a_0 = 32,$$
$$a_1 = 2{,}5, \quad a_1 = 3{,}5,$$
$$a_2 = 0{,}0625; \quad a_2 = 0{,}0625$$

и уравнения анодных токов

$$i_a = (24 + 2{,}5\,u_1 + 0{,}0625\,u_1^2)\ \textit{ма};$$

$$i_a = (32 + 3{,}5\,u_1 + 0{,}0625\,u_1^2)\ \textit{ма}.$$

Отсюда уравнения напряжений на нагрузочном сопротивлении $r_a$

$$u_2 = r_a i_a = 72 + 7{,}5\,u_1 + 0{,}187\,u_1^2 = 72 + 7{,}5 \cdot 4 \sin \omega t + 0{,}187 \cdot 4^2 \sin^2 \omega t =$$
$$= 72 + 30 \sin \omega t + \sin^2 \omega t = 72 + 30 \sin \omega t + 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2\omega t =$$
$$= (72{,}5 + 30 \sin \omega t - 0{,}5 \cos 2\omega t)\ \textit{в};$$

$$u_2 = r_a\,i_a = 96 + 10{,}5\,u_1 + 0{,}187\,u_1^2 = 96 + 42 \sin \omega t + \sin^2 \omega t =$$
$$= (96{,}5 + 42 \sin \omega t - 0{,}5 \cos 2\omega t)\ \textit{в}.$$

Так как постоянные составляющие этих напряжений легко могут быть отфильтрованы, то напряжения на выходе усилителя можно считать состоящими только из первой и второй гармоник. Из сравнения полученных уравнений для $u_2$ следует, что во втором случае коэффициент усиления лампы больше и кривая напряжения менее искажена.

*РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ*

# ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

## Тема 1

## Классический метод расчета переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами

Анализ переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами сводится к решению линейных дифференциальных уравнений, составляемых на основании законов Кирхгофа.

Так как общее решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, то действительный ток или напряжение в цепи во время переходного процесса получаются равными суммам соответственно токов или напряжений принужденного и свободного режимов.

В цепи физически существуют только действительные токи и напряжения, а разложение их на принужденные и свободные составляющие является математическим приемом, упрощающим расчет.

Расчет токов и напряжений принужденного режима (нахождение частного решения неоднородного дифференциального уравнения) не требует применения излагаемых в курсе высшей математики приемов, так как значительно проще токи и напряжения принужденного режима определяются общими методами расчета цепей постоянного или переменного тока.

Общее решение однородного дифференциального уравнения, которое дают ток или напряжение свободного режима, содержит постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, т. е. на основании значений действительных токов в индуктивностях и напряжений на емкостях в момент, когда изменяются условия электрического состояния цепи.

Если число постоянных интегрирования больше одной, что соответствует дифференциальному уравнению второго, третьего и т. д. порядков, то должны быть дополнительно найдены из дифференциальных уравнений величины производных от токов или напряжений в момент коммутации.

### *Примеры и задачи*

**4-1.** Через какой промежуток времени от момента включения цепи с сопротивлением $r = 7$ *ом* и индуктивностью $L = 0{,}35$ *гн* на постоянное напряжение $U = 120$ *в* начнет работать механизм реле, включающий цепь при токе $i = 11$ *а*, если сопротивление обмотки реле $r_2 = 1$ *ом* и индуктивность $L_2 = 0{,}05$ *гн*?

*Ответ.* $t = 0{,}065$ *сек.*

**4-2.** Двухжильный кабель длиной 200 *м* был отсоединен от сети переменного тока с напряжением $U = 6{,}6$ *кв* в момент, когда напряжение сети имело максимальное значение.

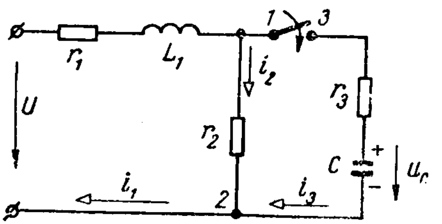



Рис. 4-1

Найти промежуток времени, в течение которого напряжение между жилами кабеля уменьшится до 100 *в*, если емкость между жилами кабеля на 1 *м* длины кабеля равна $0{,}01 \cdot 10^{-6}$ *ф/м*, сопротивление изоляции между жилами на 1 *м* длины $600 \cdot 10^7$ *ом/м* и кабель разомкнут на конце.

*Ответ.* $t \cong 4{,}5$ *мин.*

**4-3.** Определить начальную фазу $\psi$, при которой в цепи катушки, обладающей индуктивностью $L$ и сопротивлением $r$ и включаемой на синусоидальное напряжение, сразу наступит принужденный режим.

*Ответ.* $\psi = \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega L}{r}$.

**4-4.** Зависит ли начальное значение тока в цепи, состоящей из емкости и сопротивления $r$, подключаемой к синусоидальному напряжению, от частоты сети?

*Ответ.* Не зависит.

**4-5.** Две параллельные ветви содержат одинаковые активные сопротивления $r$. Кроме того, в одну ветвь включена индуктивность $L$, а в другую — емкость $C$.

Подобрать такое соотношение между $r$, $L$ и $C$, чтобы при включении данной цепи к источнику постоянного тока в неразветвленной части цепи установился сразу постоянный ток.

*Ответ.* $L = Cr^2$.

√

**4-6.** Для определения постоянных интегрирования найти начальные и конечные значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 4-1), а также начальные значения производных от токов, если $r_1 = 10$ *ом*, $r_2 = 2$ *ом*, $r_3 = 3$ *ом*, $L_1 = 0{,}1$ *гн*, $C = 100$ *мкф*, $U = 120$ *в*.

До замыкания рубильника емкость была заряжена до напряжения $U_C = 120$ *в*.

Решение

Ток в ветви с индуктивностью в момент замыкания рубильника ($t = 0$) не может измениться скачком и

$$i_1(0) = \frac{U}{r_1 + r_2} = 10a.$$

Для определения начальных значений токов в двух других ветвях схемы на основании законов Кирхгофа, учитывая направление напряжения на зажимах заряженного конденсатора (см. рис. 4-1), составляем уравнения

$$U_C(0) = r_2 i_2(0) - r_3 i_3(0);$$

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0).$$

Из них находим

$$i_3(0) = \frac{r_2 i_1(0) - U_C(0)}{r_2 + r_3} = \frac{2 \cdot 10 - 120}{2 + 3} = -20\,a,$$

$$i_2(0) = i_1(0) - i_3(0) = 10 - (-20) = 30a.$$

Начальные значения производных от токов получаем из уравнений

$$U = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2; \tag{1}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_3\,dt = r_2 i_2 - r_3 i_3; \tag{2}$$

$$i_1 = i_2 + i_3. \tag{3}$$

Из уравнения (1) имеем

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U - r_1 i_1(0) - r_2 i_2(0)}{L_1} = -400.$$

Дифференцируем уравнения (2) и (3) и, полагая $t = 0$, находим

$$\frac{1}{C}\,i_3(0)=r_2\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}-r_3\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0};$$

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}+\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0}.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0}=\frac{r_2\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}-\frac{1}{C}\,i_3(0)}{r_2+r_3}=+39\,840,$$

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}-\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0}=-40\,240.$$

Конечные значения токов ($t=\infty$) будут

$$i_1'=i_2'=\frac{U}{r_1+r_2}=10a;\ i_3'=0.$$

**4-7.** Найти начальные значения токов и их производных в условиях задачи 4-6, если напряжение на конденсаторе до замыкания рубильника: а) равно 120 *в*, но противоположно направлению, указанному на рис. 4-1, б) равно нулю.

*Ответ.* а) $i_1(0)=10a;\ i_2(0)=-18a;\ i_3(0)=28a;$

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}=560;\quad \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}=56\,336;$$

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0}=-55\,776.$$

б) $i_1(0)=10a;\ i_2(0)=6a;\ i_3(0)=4a;$

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}=80;\quad \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}=8048;$$

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0}=-7968.$$

**4-8.** К сети с постоянным напряжением $U$ присоединены две последовательно соединенные катушки, имеющие соответственно активные сопротивления $r_1$, $r_2$ и индуктивности $L_1$ и $L_2$. Параллельно ко второй катушке присоединяется активное сопротивление $r_3$.

Определить начальные ($t=0$) и конечные ($t=\infty$) значения токов во всех ветвях, а также значения э. д. с. самоиндукции $e_1$ и $e_2$ для тех же моментов времени.

*Ответ.* При $t=0$

$$i_1(0)=i_2(0)=\frac{U}{r_1+r_2};\quad i_3(0)=0;$$

$$e_1(0) = -\left(L_1\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = -[U - r_1 i_1(0) - r_3 i_3(0)] = -U\,\frac{r_2}{r_1+r_2};$$

$$e_2(0) = -\left(L_2\,\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = -\Bigg[U - r_1 i_1(0) -$$

$$-\left(L_1\,\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} - r_2\,i_2(0)\Bigg] = U\,\frac{r_2}{r_1+r_2}.$$

При $t=\infty$

$$i_1' = \frac{U}{r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2+r_3}};$$

$$i_2' = \frac{U r_3}{\left(r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2+r_3}\right)(r_2+r_3)};$$

$$i_3' = \frac{U r_2}{\left(r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2+r_3}\right)(r_2+r_3)};\quad e_1 = e_2 = 0.$$

**4-9.** Электрическая цепь постоянного тока состоит из последовательно включенных катушки, обладающей индуктивностью $L_1$ и активным сопротивлением $r_1$, и сопротивления $r_2$. На зажимах цепи действует напряжение $U$. Параллельно сопротивлению $r_2$ подключается еще одна катушка, имеющая индуктивность $L_3$ и сопротивление $r_3$.

Определить начальные и конечные значения токов и э. д. с. самоиндукции.

*Ответ.* При $t=0$

$$i_1(0) = i_2(0) = \frac{U}{r_1+r_2};\quad i_3(0) = 0;$$

$$e_{L_1}(0) = -\left(L_1\,\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = -[U - r_1 i_1(0) - r_2 i_2(0)] = 0.$$

$$e_3(0) = -\left(L_3\,\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0} =$$

$$= -\left[U - r_1 i_1(0) - \left(L_1\,\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} - r_3 i_3(0)\right] =$$

$$= -[U - r_1 i_1(0)] = -r_2 i_2(0) = -U\,\frac{r_2}{r_1+r_2};$$

При $t=\infty$ — см. ответ задачи 4-8.

**4-10.** Два индуктивно связанных контура имеют параметры: первый контур — сопротивление $r_1 = 5$ *ом* и индуктивность $L_1 =$

$= 0{,}05$ *гн*; второй контур — сопротивление $r_2 = 10$ *ом* и индуктивность $L_2 = 0{,}1$ *гн*. Взаимная индуктивность $M = 0{,}06$ *гн*.

В первый контур включен источник с постоянной э. д. с. $E = 120$ *в*; второй контур замкнут накоротко.

Найти закон изменения токов первого и второго контуров в зависимости от времени, если путем размыкания рубильника в первый контур включается сопротивление $r_0 = 5$ *ом*.

## Решение

После включения сопротивления $r_0$ имеем на основании второго закона Кирхгофа следующие уравнения:

$$E = (r_1 + r_0)\, i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \tag{1}$$

$$0 = r_2\, i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \tag{2}$$

В результате совместного решения этих уравнений получим дифференциальное уравнение с одним неизвестным, например током $i_2$.

Действительно, из второго уравнения находим

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{r_2}{M}\, i_2 + \frac{L_2}{M} \cdot \frac{di_2}{dt} \tag{3}$$

и

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} = \frac{r_2}{M} \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{L_2}{M} \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2}. \tag{4}$$

Дифференцируем уравнение (1):

$$0 = (r_1 + r_0) \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - M \frac{d^2 i_2}{dt^2} \tag{5}$$

и подставляем выражения первой и второй производной от тока $i_1$ из уравнений (3) и (4) в уравнение (5).

Из уравнения (5) после подстановки и преобразований имеем

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + [(r_1 + r_0) L_2 + r_2 L_1] \frac{di_2}{dt} + (r_1 r_2 + r_0 r_2)\, i_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(L_1 L_2 - M^2)\, p^2 + [(r_1 + r_0) L_2 + r_2 L_1]\, p + r_1 r_2 + r_0 r_2 = 0$$

и его корни —

$$p_1 = -71{,}5; \quad p_2 = -1000.$$

В общей форме уравнения токов могут быть написаны в виде

$$i_1 = i_1' + i_1'' = i_1' + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \tag{6}$$

$$i_2=i_2'+i_2''=i_2'+B_1 e^{p_1 t}+B_2 e^{p_2 t}, \tag{7}$$

где $i_1'$ и $i_2'$ — токи принужденного режима;

$i_1''$ и $i_2''$ — токи свободного режима;

$A_1$, $A_2$, $B_1$ и $B_2$ — постоянные интегрирования.

Токи принужденного режима будут

$$i_1'=\frac{E}{r_1+r_0}=12a;$$

$$i_2'=0.$$

Постоянные интегрирования определяются из уравнений (6) и (7) и исходных дифференциальных уравнений (1) и (2), в которые подставляются значения токов $i_1(0)$ и $i_2(0)$ для момента времени $t=0$.

В момент размыкания рубильника $t=0$ токи первого и второго контуров остаются без изменения, так как в контурах (ветвях) с индуктивностью токи не могут изменяться скачком. Поэтому $i_1(0)=$ $=\frac{E}{r_1}=24\ a$; $i_2(0)=0$. Подставляя значения токов $i_1'$, $i_2'$, $i_1(0)$ и $i_2(0)$ в уравнения (1), (2), (6) и (7) и полагая $t=0$, получаем

$$120=(5+5)\,24+0{,}05\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}-0{,}06\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0};$$

$$0=10\cdot 0+0{,}1\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}-0{,}06\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0};$$

$$24=12+A_1+A_2;$$

$$0=0+B_1+B_2,$$

или

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}=-8571; \tag{8}$$

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}=-5142; \tag{9}$$

$$A_1+A_2=12; \tag{10}$$

$$B_1+B_2=0. \tag{11}$$

Связь между производными от токов при $t=0$ и постоянными интегрирования находим из уравнений (6) и (7), дифференцируя их и полагая $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt}&=0+A_1 p_1 e^{p_1 t}+A_2 p_2 e^{p_2 t};\\ \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}&=A_1 p_1+A_2 p_2; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{di_2}{dt}&=0+B_1p_1e^{p_1t}+B_2p_2\,e^{p_2t};\\ \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}&=B_1\,p_1+B_2\,p_2.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Из уравнений (8) — (13) находим постоянные

$$A_1=3{,}7;\quad A_2=8{,}3;\quad B_1=-5{,}54;\quad B_2=5{,}54.$$

Искомые уравнения токов будут

$$i_1=[12+3{,}7\,e^{-71{,}5t}+8{,}3\,e^{-1000t}]\ a;$$

$$i_2=[-5{,}54\,e^{-71{,}5t}+5{,}54\,e^{-1000t}]\ a.$$

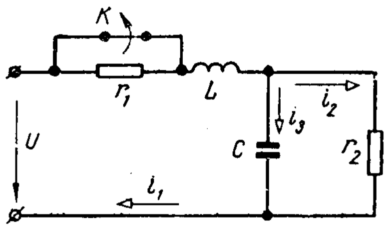



Рис. 4-2

**4-11.** В электрической цепи (рис. 4-2) выключается рубильник $K$. Найти закон изменения токов $i_1$, $i_2$ и $i_3$ в зависимости от времени, если $r_1=r_2=r=100$ *ом*, $L=1{,}0$ *гн*, $C=100$ *мкф* и $U=2\,000$ *в*.

Построить кривую изменения тока в неразветвленной части цепи в зависимости от времени.

Решение

На основании второго и первого законов Кирхгофа для режима (рис. 4-2) после размыкания рубильника напишем следующую систему уравнений:

$$U=r_1i_1+L\,\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C}\int i_3\,dt;\qquad(1)$$

$$U=r_1i_1+L\,\frac{di_1}{dt}+r_2\,i_2;\qquad(2)$$

$$i_1=i_2+i_3.\qquad(3)$$

Из совместного решения этих дифференциальных уравнений относительно тока $i_1$ получим

$$CLr_2\frac{d^2i_1}{dt^2}+(Cr_1r_2+L)\frac{di_1}{dt}+(r_1+r_2)\,i_1=U.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$CLr_2 p^2 + (Cr_1 r_2 + L)\, p + r_1 + r_2 = 0.$$

Подставляя числовые значения и решая это уравнение, получим его корни

$$p_1 = -100 + j\,100 \quad \text{и} \quad p_2 = -100 - j\,100.$$

Общие выражения для токов и их производных будут

$$i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{U}{r_1 + r_2} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$\frac{di_1}{dt} = 0 + A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t};$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = \frac{U}{r_1 + r_2} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t};$$

$$\frac{di_2}{dt} = 0 + B_1 p_1 e^{p_1 t} + B_2 p_2 e^{p_2 t};$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = 0 + D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t};$$

$$\frac{di_3}{dt} = 0 + D_1 p_1 e^{p_1 t} + D_2 p_2 e^{p_2 t},$$

где токи принужденного режима соответственно

$$i_1' = \frac{U}{r_1 + r_2} = 10\,a; \quad i_2' = \frac{U}{r_1 + r_2} = 10\,a \quad \text{и} \quad i_3' = 0.$$

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий.

Так как ток в индуктивности и напряжения на конденсаторе не могут изменяться скачком, то при $t = 0$ имеем

$$i_1(0) = \frac{U}{r_2} = 20\,a;$$

$$U_C(0) = U; \quad i_2(0) = \frac{U_c(0)}{r_2} = 20\,a,$$

$$i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0.$$

Из уравнений (1), (2) и (3) находим величины производных от токов при $t = 0$.

Из уравнения (2)

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U - r_1 i_1(0) - r_2 i_2(0)}{L_1} = \frac{2\,000 - 100\cdot 20 - 100\cdot 20}{1} = -2\,000.$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), находим

$$r_2 i_2 = \frac{1}{C} \int i_3 \, dt$$

и после дифференцирования получаем

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = \frac{i_3(0)}{r_2 C} = \frac{0}{r_2 C} = 0.$$

На основании уравнения (3) находим

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} - \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = -2\,000.$$

Подставляя найденные значения токов и их производных в общие выражения токов и их производных и полагая $t = 0$, получаем шесть уравнений:

$$20 = 10 + A_1 + A_2; \quad A_1 p_1 + A_2 p_2 = -2\,000;$$

$$20 = 10 + B_1 + B_2; \quad B_1 p_1 + B_2 p_2 = 0;$$

$$0 = 0 + D_1 + D_2; \quad D_1 p_1 + D_2 p_2 = -2\,000,$$

из которых находим постоянные интегрирования:

$$A_1 = 5 + j5; \quad B_1 = 5 - j5; \quad D_1 = +j10;$$

$$A_2 = 5 - j5; \quad B_2 = 5 + j5; \quad D_2 = -j10.$$

Токи в ветвях будут

$$i_1 = 10 + (5 + j5)\, e^{(-100 + j100)t} + (5 - j5)\, e^{(-100 - j100)t};$$

$$i_2 = 10 + (5 - j5)\, e^{(-100 + j100)t} + (5 + j5)\, e^{(-100 - j100)t};$$

$$i_3 = j10\, e^{(-100 + j100)t} - j10\, e^{(-100 - j100)t}.$$

После преобразования

$$i_1 = 10\, e^{-100t} [(5 + j5 + 5 - j5) \cos 100t +$$

$$+ j(5 + j5 - 5 + j5) \sin 100t] = 10 + e^{-100t} \times$$

$$\times [10 \cos 100t - 10 \sin 100t] = [10 + 10\sqrt{2}\, e^{-100t} \sin(100t + 135°)]\ a;$$

$$i_2 = [10 + 10\sqrt{2}\, e^{-100t} \sin(100t + 45°)]\ a;$$

$$i_3 = [-20\, e^{-100t} \sin 100t]\ a.$$

Построение кривой тока в неразветвленной части цепи выполняем путем сложения ординат кривых токов принужденного и свободного режимов (рис. 4-3).

Ток свободного режима совершает затухающие колебания и графически изображается кривой, сходной с синусоидой и вписанной в огибающие $\pm 10\sqrt{2}e^{-100t}$, которые строим по данным табл. 4-1.

Таблица 4-1

| $t$, *сек* . . . . . . . . . | 0 | 0,00785 | 0,0157 | 0,0235 | 0,0314 | 0,0392 | 0,0471 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pm 10\sqrt{2}e^{-100t}$ *а* . . . | ±14,1 | ±6,48 | ±2,94 | ±1,84 | ±0,64 | ±0,283 | ±0,127 |

Кривая $i_{1св}$ с достаточной точностью может быть вписана в огибающие по точкам пересечения ее осью абсцисс [$\sin(100t + 135°) = 0$], точкам касания с огибающими [$\sin(100t + 135°) = \pm 1$], по максимальным значениям ординат и начальному значению

$$i_{1св}(0) = i_1(0) - i_{1пр}(0) = 20 - 10 = 10\ a.$$

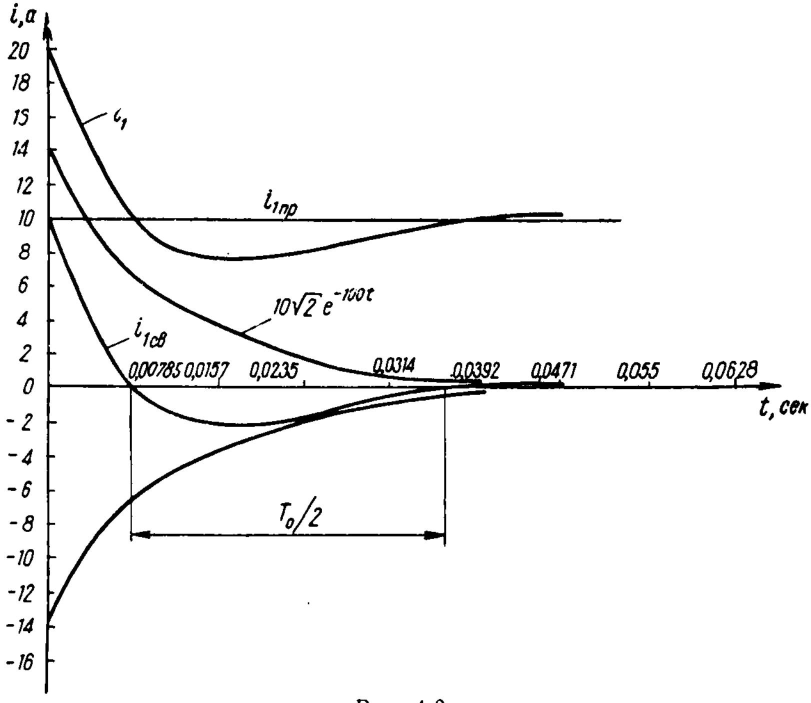



Рис. 4-3

Поскольку максимумы кривой $i_{св}$ не совпадают с точками касания ее с огибающими, то соответствующие им значения времени $t_m$ определяем по известному правилу

$$\frac{di_{1св}}{dt}=0;\quad 10\sqrt{2}e^{-100t}[(-100)\sin(100t+135^\circ)+$$
$$+100\cos(100t+135^\circ)]=0;$$
$$\frac{\sin(100t_m+135^\circ)}{\cos(100t_m+135^\circ)}=\operatorname{tg}(100t_m+135^\circ)=\frac{100}{100}=1;$$
$$100\frac{180^\circ}{\pi}t_m+135^\circ=45^\circ;\quad t_m=\frac{(45^\circ-135^\circ)\pi}{100\cdot180^\circ}=-0{,}0157\ сек.$$

Так как период свободных колебаний

$$T_0=\frac{2\pi}{100}=0{,}0628\ сек,$$

то

$$t_m=-0{,}0157=-\frac{T_0}{4}.$$

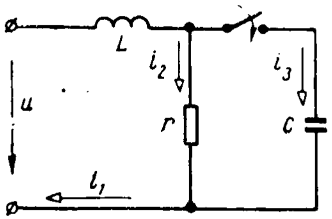



Рис. 4-4

Полученное значение $t_m$ показывает, что ближайший к началу координат положительный максимум кривой $i_{1св}$ лежит влево от начала координат, т. е. реально не существует, а первый действительный максимум кривой будет отрицательным и наступит при

$$t_{m1}=t_m+\frac{T_0}{2}=-0{,}0157+0{,}0314=+0{,}0157\ сек;$$

$$I_{m1}=10\sqrt{2}e^{-100\cdot0{,}0157}\sin(100\cdot0{,}0157+135^\circ)=$$
$$=2{,}94\sin225^\circ=-2{,}08\ a.$$

Следующий максимум тока будет при

$$t_{m2}=t_{m1}+\frac{T_0}{2}=0{,}0157+0{,}0314=0{,}0471\ сек;$$

$$I_{m2}=10\sqrt{2}e^{-100\cdot0{,}0471}\sin(100\cdot0{,}0471+135^\circ)=$$

$$= 0{,}127 \sin 45° \cong 0{,}09\ a.$$

√4-12. К сети с синусоидальным напряжением $u = U_m \times \times \sin(\omega t + \psi)$ присоединена индуктивность $L = 0{,}319$ *гн* и последовательно с ней активное сопротивление $r = 100$ *ом* (рис. 4-4). В момент прохождения напряжения сети через максимальное значение $\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right)$ параллельно к активному сопротивлению подключается конденсатор емкостью $C = 15{,}95$ *мкф*.

Найти закон изменения токов во всех ветвях в зависимости от времени, если $U_m = 2\,000$ *в* и $\omega = 314$ *рад/сек*.

## Решение

Дифференциальные уравнения для заданной цепи имеют следующий вид:

$$u = L\frac{di_1}{dt} + ri_2; \quad ri_2 = \frac{1}{C}\int i_3\,dt \quad \text{и} \quad i_1 = i_2 + i_3.$$

Решая совместно эти уравнения относительно, например, тока $i_1$, получаем

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{rC}\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC}i_1 = \omega U_m \cos(\omega t + \psi) + \frac{1}{rC}U_m \sin(\omega t + \psi)$$

и находим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{1}{rC}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Этот же результат может быть получен более просто из решения системы уравнений для свободных токов после их алгебраизации *:

$$Lpi_1'' + ri_2'' = 0;$$

$$ri_2'' = \frac{i_3''}{Cp};$$

$$i_1'' = i_2'' + i_3''.$$

Решение характеристического уравнения дает корни

$$p_1 = -314 + j314 \quad \text{и} \quad p_2 = -314 - j314.$$

Находим токи до присоединения конденсатора:

* Производная $\frac{d}{dt}$ заменяется на $p$, а интеграл $\int dt$ — на $\frac{1}{p}$.

$$i_{10} = i_{20} = \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{r + j\omega L} \right)_{\text{м.ч}^*} = \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{100\sqrt{2} e^{j45^\circ}} \right)_{\text{м.ч}} =$$

$$= \frac{U_m}{100\sqrt{2}} \sin(\omega t + \psi - 45^\circ) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)\ a; \quad i_{30} = 0.$$

Определяем токи принужденного режима:

$$i_1' = \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{Z_1} \right)_{\text{м.ч}} = \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{j\omega L + \frac{r(-jx_C)}{r - jx_C}} \right)_{\text{м.ч}} =$$

$$= \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{100\, e^{j36^\circ 50'}} \right)_{\text{м.ч}} = \frac{U_m}{100} \sin(\omega t + \psi - 36^\circ 50') =$$

$$= 20 \sin(\omega t + 53^\circ\, 10')\ a;$$

$$i_2' = \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)} - \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{Z_1} j\omega L}{r} \right) =$$

$$= \left( U_m e^{j(\omega t+\psi)} \frac{Z_1 - j\omega L}{Z_1 r} \right)_{\text{м.ч}} = \left( \frac{U_m e^{j(\omega+\psi)}}{50 + j\,100} \right)_{\text{м.ч}} =$$

$$= \frac{U_m}{112} \sin(\omega t + \psi - 63^\circ 25') = 17{,}85 \sin(\omega t + 26^\circ 35')\ a;$$

$$i_3' = \left( U_m e^{j(\omega t+\psi)} \frac{Z_1 - j\omega L}{Z_1(-jx_C)} \right)_{\text{м.ч}} =$$

$$= \left( \frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{200 - j\,100} \right)_{\text{м.ч}} = \frac{U_m}{224} \sin(\omega t + \psi + 26^\circ 35') =$$

$$= 8{,}92 \sin(\omega t + 116^\circ 35')\ a.$$

Определение постоянных интегрирования в цепях переменного тока сложнее, чем в цепях постоянного тока, так как производные от напряжения сети и токов принужденного режима не равны нулю. Для того чтобы упростить методику определения постоянных, воспользуемся системой дифференциальных уравнений для свободных токов:

$$0 = L \frac{di_1''}{dt} + ri_2''; \tag{1}$$

$$ri_2'' = \frac{1}{C} \int i_3''\, dt; \tag{2}$$

$$i_1'' = i_2'' + i_3'', \tag{3}$$

* М. ч. — мнимая часть.

из которой

$$\left(\frac{di_1''}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{r}{L} i_2''(0); \tag{4}$$

$$\left(\frac{di_2''}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{rC} i_3''(0); \tag{5}$$

$$\left(\frac{di_3''}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{di_1''}{dt}\right)_{t=0} - \left(\frac{di_2''}{dt}\right)_{t=0}. \tag{6}$$

Из начальных условий

$$i_1(0) = (i_{10})_{t=0} = 10\sqrt{2}\sin 45^\circ = 10\ a.$$

Так как напряжение на конденсаторе $U_C(0) = 0$, то $ri_2(0)=0$, или $i_2(0) = 0$.

На основании первого закона Кирхгофа $i_1(0) = i_2(0) + i_3(0)$ находим $i_3(0) = i_1(0) = 10\ a$.

Токи принужденного режима при $t = 0$ будут

$$i_1'(0) = 20\sin 53^\circ 10' \cong 16\ a;$$

$$i_2'(0) = 17{,}85\sin 26^\circ 35' \cong 8\ a;$$

$$i_3'(0) = 8{,}92\sin 116^\circ 35' \cong 8\ a.$$

Из уравнений токов находим

$$i_1(0) = i_1'(0) + i_1''(0) \quad \text{или} \quad i_1''(0) = A_1 + A_2 =$$

$$= i_1(0) - i_1'(0) = 10 - 16 = -6\ a; \tag{7}$$

$$i_2(0) = i_2'(0) + i_2''(0) \quad \text{или} \quad i_2''(0) =$$

$$= B_1 + B_2 = i_2(0) - i_2'(0) = 0 - 8 = -8\ a; \tag{8}$$

$$i_3(0) = i_3'(0) + i_3''(0) \quad \text{или} \quad i''(0) =$$

$$= D_1 + D_2 = i_3(0) - i_3'(0) = 10 - 8 = 2\ a. \tag{9}$$

Из уравнений (4), (5), (6) имеем

$$\left(\frac{di_1''}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{100}{0{,}319}(-8) \cong +2512,$$

или

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 2512; \tag{10}$$

$$\left(\frac{di_2''}{dt}\right)_{t=0} = \frac{10^6}{100\cdot 15{,}95}\cdot 2 = 1256,$$

или

$$p_1 B_1 + p_2 B_2 = 1256; \qquad (11)$$

$$\left(\frac{di_3''}{dt}\right)_{t=0} = 2512 - 1256 = 1256,$$

или

$$p_1 D_1 + p_2 D_2 = 1256. \qquad (12)$$

Решая совместно уравнения (7) — (9) и (10) — (12), определяем постоянные интегрирования

$$A_1 = -3 - j; \quad B_1 = -4 + j2; \quad D_1 = 1 - j3;$$

$$A_2 = -3 + j; \quad B_2 = -4 - j2; \quad D_2 = 1 + j3.$$

Токи равны:

$$i_1 = i_1' + i_1'' = i_1' + (-3 - j)\, e^{(-314 + j314)\,t} +$$
$$+ (-3 + j)\, e^{(-314 - j314)\,t} = i_1' + [(-3 - j - 3 + j) \cos 314\,t +$$
$$+ j(-3 - j + 3 - j) \sin 314\,t]\, e^{-314\,t} = i_1' +$$
$$+ e^{-314\,t}[-6 \cos 314\,t + 2 \sin 314\,t] = [20 \sin(\omega t + 53°10') +$$
$$+ 2\sqrt{10}\, e^{-314\,t} \sin(314\,t - 71°30')]\ a;$$

$$i_2 = [17{,}85 \sin(\omega t + 26°35') - 4\sqrt{5}\, e^{-314\,t} \sin(314\,t + 63°25')]\ a;$$

$$i_3 = [8{,}92 \sin(\omega t + 116°35') + 2\sqrt{10}\, e^{-314\,t} \sin(314\,t + 18°25')]\ a.$$

При комплексных корнях характеристического уравнения $p = -\beta \pm j\omega_0 = -314 \pm j314$ решение дифференциальных уравнений может быть написано непосредственно в следующем виде:

$$i_1 = i_1' + K_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi_1); \qquad (13)$$

$$i_2 = i_2' + K_2 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi_2); \qquad (14)$$

$$i_3 = i_3' + K_3 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi_3). \qquad (15)$$

Начальные значения токов $i_1(0)$, $i_2(0)$, $i_3(0)$ и токи принужденного режима в момент $t = 0$ $\left[i_1'(0),\ i_2'(0),\ i_3'(0)\right]$ известны из предыдущего решения. Находим постоянные $K_1$, $K_2$, $K_3$ и начальные фазы $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, полагая $t = 0$ в уравнениях (13), (14) и (15) и подставляя соответствующие значения токов:

$$10 = 16 + K_1 \sin\psi_1; \quad K_1 \sin\psi_1 = -6; \qquad (16)$$

$$0 = 8 + K_2 \sin\psi_2; \quad K_2 \sin\psi_2 = -8; \qquad (17)$$

$$10 = 8 + K_3 \sin\psi_3: \quad K_3 \sin\psi_3 = 2. \tag{18}$$

Дифференцируем уравнения (13), (14) и (15):

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_1'}{dt} + \frac{di_1''}{dt} = 20\,\omega\cos(\omega t + 53°10') +$$

$$+ K_1(-\beta)\, e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi_1) + K_1 e^{-\beta t}\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi_1);$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{di_2'}{dt} + \frac{di_2''}{dt} = 17{,}85\,\omega\cos(\omega t + 26°35') +$$

$$+ K_2(-\beta)\, e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi_2) + K_2 e^{-\beta t}\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi_2);$$

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{di_3'}{dt} + \frac{di_3''}{dt} = 8{,}92\,\omega\cos\cdot(\omega t + 116°35') +$$

$$+ K_3(-\beta)\, e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi_3) + K_3 e^{-\beta t}\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi_3).$$

Полагая $t = 0$ и учитывая уравнения (16), (17) и (18), находим

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = 20\cdot 314\cos 53°10' - K_1\cdot 314\sin\psi_1 + K_1\cdot 314\cos\psi_1 =$$

$$= 20\cdot 314\cdot 0{,}6 - 314(-6) + K_1 314\cos\psi_1 = 5\,652 + K_1 314\cos\psi_1; \tag{19}$$

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = 17{,}85\cdot 314\cos 26°35' - K_2 314\sin\psi_2 + K_2 314\cos\psi_2 =$$

$$= 17{,}85\cdot 314\cdot 0{,}895 - 314(-8) + K_2 314\cos\psi_2 =$$

$$= 7\,536 + K_2 314\cos\psi_2; \tag{20}$$

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0} = 8{,}92\cdot 314\cos 116°35' - K_3 314\sin\psi_3 +$$

$$+ K_3 314\cos\psi_3 = 8{,}92\cdot 314(-0{,}4475) - 314(2) + K_3 314\cos\psi_2 =$$

$$= -1\,884 + K_3 314\cos\psi_3. \tag{21}$$

Численные значения производных от токов при $t=0$ определяем из основных дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U(0) - ri_2(0)}{L} = \frac{U_m \sin\psi - ri_2(0)}{L} = \frac{2\,000 - 100\cdot 0}{0{,}319} = 6\,280;$$

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = \frac{i_3(0)}{rC} = \frac{10\cdot 10^6}{100\cdot 15{,}95} = 6\,280;$$

$$\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} - \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

и, подставляя в уравнения (19), (20), (21), имеем

$$K_1 \cos \psi_1 = \frac{6\,280 - 5\,652}{314} = 2; \tag{22}$$

$$K_2 \cos \psi_2 = \frac{6\,280 - 7\,536}{314} = -4; \tag{23}$$

$$K_3 \cos \psi_3 = \frac{1\,884}{314} = 6. \tag{24}$$

Из уравнений (16) — (18) и (22) — (24) находим

$$K_1 = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}; \quad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{-6}{2} = -3;$$

$$\psi_1 = -71°30';$$

$$K_2 = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}; \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{-8}{-4} = +2;$$

$$\psi_2 = +63°25' - \pi;$$

$$K_3 = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}; \quad \operatorname{tg} \psi_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\psi_3 = +18°25'$$

и, подставляя в уравнения (13), (14) и (15), получаем уравнения токов, полностью совпадающие с найденными выше.

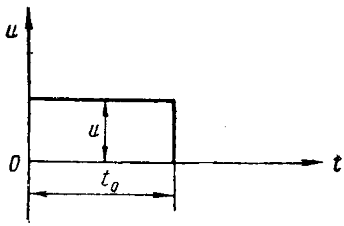



Рис. 4-5

√ 4-13. К электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления $r$ и индуктивности $L$, подводится напряжение в виде прямоугольного импульса (рис. 4-5), действующего в течение времени $t_0$.

Найти закон изменения тока $i$ и напряжения $u_L$ на индуктивности $L$ в зависимости от времени, решив задачу: а) классическим методом, б) методом наложения, в) при помощи интеграла Дюамеля.

## Решение

### *Классический метод*

От начального момента времени $t = 0$ до $t = t_0$ процессы, происходящие в цепи под воздействием импульса напряжения, будут такие же, как при включении цепи к постоянному напряжению $U$.

Поэтому в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (используя известные из учебной литературы решения) закон изменения тока $i$ и напряжения на индуктивности $u$ будет

$$i = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right); \tag{1}$$

$$u_L = -e_L = L\frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{r}{L}t}. \tag{2}$$

При $t > t_0$ внешнее напряжение равно нулю. Поэтому в цепи будет существовать только свободный режим. При этом напряжение и ток поддерживаются за счет энергии магнитного поля, ранее запасенной за время $t_0$.

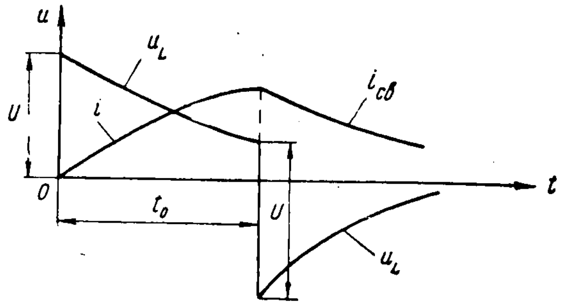



Рис. 4-6

Полагая $t > t_0$ и $U = 0$, закон изменения тока находим из уравнения

$$ri + L\frac{di}{dt} = 0,$$

решением которого является интеграл

$$i = Ae^{-\frac{r}{L}t}. \tag{3}$$

Постоянную интегрирования $A$ находим из новых начальных условий. В момент $t = t_0$ ток в цепи

$$i(t_0) = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t_0}\right). \tag{4}$$

В дальнейшем он будет изменяться, начиная с этого значения, согласно уравнению (3). Поэтому из уравнений (3) и (4)

$$\frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t_0}\right) = Ae^{-\frac{r}{L}t_0}, \text{ или } A = \frac{U}{r}\left(e^{+\frac{r}{L}t_0} - 1\right).$$

После подстановки значения $A$ в выражение (3) получим закон изменения тока для интервала $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$:

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left( e^{+\frac{r}{L}t_0} - 1 \right). \qquad (5)$$

Уравнение для напряжения на индуктивности будет

$$u_L = L \frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{r}{L}t} \left( 1 - e^{+\frac{r}{L}t_0} \right). \qquad (6)$$

На рис. 4-6 построены графики изменения тока и напряжения на индуктивности в зависимости от времени. Напряжение на индуктивности при $t = t_0$, в силу неизменности тока, изменяется скачком на величину $U$.

*Метод наложения*

По методу наложения прямоугольный импульс внешнего напряжения может быть представлен в виде двух постоянных напряжений противоположной полярности, действующих в цепи бесконечно долгое время. При этом отрицательное напряжение $U' = -U$

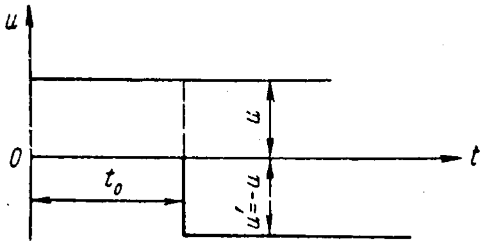



Рис. 4-7

вступает в действие через промежуток времени $t_0$, равный продолжительности импульса (рис. 4-7). Так как за время от 0 до $t_0$ в цепи действует только положительное напряжение $U$, то ток $i$ и напряжение $u_L$ будут определяться по формулам (1) и (2).

При $t > t_0$ ток в цепи можно представить в виде суммы токов от положительного напряжения $U$, действующего в цепи все время, начиная от $t = 0$, и отрицательного напряжения $U' = -U$, вступающего в действие в момент $t = t_0$, т. е.

$$i = i_1 + i_2 = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right) + \frac{-U}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{L}t - t_0} \right] =$$

$$= \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} \left( e^{+\frac{r}{L}t_0} - 1 \right),$$

*Интеграл Дюамеля*

Одной из форм интеграла Дюамеля является выражение

$$i(t)=U(0)\,g(t)+\int_0^t g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau,$$

где $U(0)$ — значение внешнего напряжения в начальный момент;

$g(t)$ — переходная проводимость цепи;

$g(t-\tau)$ — переходная проводимость цепи для момента $t-\tau$;

$u'(\tau)$ — производная от заданной функции напряжения по новой переменной $\tau$.

Поскольку в интервале от $t=0$ до $t=t_0$ внешнее напряжение постоянно, то производная $u(\tau)$ равна нулю и второе слагаемое интеграла, учитывающее изменение напряжения в зависимости от времени, также равно нулю. Первое слагаемое интеграла дает закон изменения тока в цепи при ее включении на постоянное напряжение, равное внешнему напряжению в начальный момент, независимо от дальнейшего изменения напряжения.

В условиях данной задачи $U(0)=U$ закон изменения тока в интервале $0\leqslant t<t_0$ определяется уравнением (1):

$$i_1=\frac{U}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)=U\,\frac{1}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)=U\cdot g(t).$$

Чтобы найти выражение тока при изменении $t$ в пределах $t_0\leqslant t\leqslant\infty$, когда внешнее напряжение равно нулю, необходимо учесть, что при $t=t_0$ внешнее напряжение мгновенно падает до нуля.

Так как при помощи интеграла Дюамеля могут быть найдены токи, возникающие в цепи только под воздействием внешнего напряжения, то падение внешнего напряжения до нуля должно быть представлено как вступление в действие при $t=t_0$ отрицательного напряжения постоянной величины, имеющего начальное значение $U(0)=-U$ и вызывающего ток

$$i_2=U'(0)\,g(t-t_0)=-U\,\frac{1}{r}\left[1-e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right].$$

Ток в интервале $t_0\leqslant t\leqslant\infty$

$$i=i_1+i_2=\frac{U}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)-\frac{U}{r}\left[1-e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right]=$$

$$=\frac{U}{r}e^{-\frac{r}{L}t}\left(e^{+\frac{r}{L}t_0}-1\right).$$

**4-14.** В условиях задачи 4-13 напряжение определяется в интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$ уравнением $u = kt = \frac{U_0}{t_0} t$, а в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$ это напряжение равно нулю (рис. 4-8).

Пользуясь интегралом Дюамеля, найти ток в цепи для указанных интервалов времени.

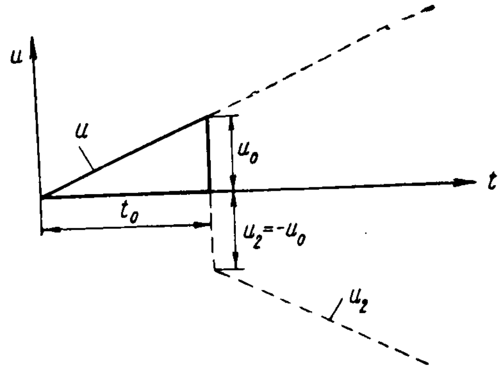



Рис. 4-8

## Решение

В интервале $0 \leqslant t \leqslant t_0$ имеем

$$U(0) = 0; \quad g(t) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right);$$

$$u'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{U_0}{t_0}\tau\right) = \frac{U_0}{t_0};$$

$$i_1 = U(0)\, g(t) + \int_0^t g(t-\tau)\, u'(\tau)\, d\tau = 0 +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{r}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}\right] \frac{U_0}{t_0}\, d\tau = \frac{U_0}{r} \cdot \frac{t}{t_0} - \frac{U_0 L}{r^2 t_0}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

В момент $t = t_0$ внешнее напряжение мгновенно падает до нуля, что эквивалентно вступлению в действие в этот момент напряжения (на рис. 4-8 показано пунктиром)

$$u_2 = U_2 + k(t - t_0),$$

где $U_2 = -U_0$; $k = -\frac{U_0}{t_0}$.

Это напряжение создает в цепи ток

$$i_2 = u_2(t_0)\,g(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)\,u_2'(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{U_0}{r}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right] - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{r}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}\right]\frac{U_0}{t_0}\,d\tau =$$

$$= -\frac{U_0}{r}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right] - \frac{U_0(t-t_0)}{rt_0} +$$

$$+ \frac{U_0 L}{r^2 t_0}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right].$$

При изменении времени $t$ от $t_0$ до $t=\infty$ ток

$$i = i_1 + i_2 = \frac{U_0}{r}e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)} + \frac{U_0 L}{r^2 t_0}\left[e^{-\frac{r}{L}t} - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right].$$

Этот же результат может быть получен из следующего выражения:

$$i = i_1 + i_2 = U(0)\,g(t) + \int_0^t g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau +$$

$$+ u_2(t_0)\,g(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)\,u_2'(\tau)\,d\tau.$$

Второе слагаемое может быть представлено в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^t g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau = \int_0^{t_0} g(t-\tau)u'(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau.$$

Подставив эту сумму интегралов в выражение для $i$ и учитывая, что $U(0)\,g(t) = 0$ и $u'(\tau) = -u_2'(\tau)$, находим

$$i = \int_0^{t_0} g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau +$$

$$+ u_2(t_0)\,g(t-t_0) - \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau = \int_0^{t_0} g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau +$$

$$+ u_2(t_0)\,g(t-t_0) = -\frac{U_0}{r}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right] +$$

$$+\int_0^{t_0}\frac{1}{r}\left[1-e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)}\right]\frac{U_0}{t_0}\,d\tau=\frac{U_0}{r}e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}+$$

$$+\frac{U_0L}{r^2t_0}\left[e^{-\frac{r}{L}t}-e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}\right].$$

√ **4-15.** Пользуясь интегралом Дюамеля, найти закон изменения тока в зависимости от времени в неразветвленной части цепи

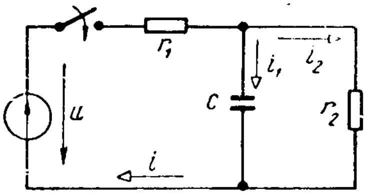



Рис. 4-9

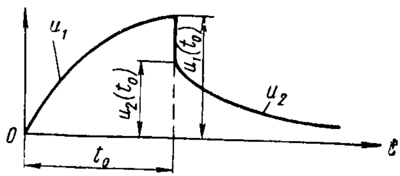



Рис. 4-10

(рис. 4-9) при включении на ее зажимы напряжения, определяемого в интервале $0\leqslant t\leqslant t_0$ уравнением $u_1=U_1(1-e^{-\alpha_1 t})$ и в интервале $t_0\leqslant t\leqslant\infty$ уравнением $u_2=U_2e^{-\alpha_2(t-t_0)}$ (рис. 4-10).

## Решение

Переходную проводимость находим из уравнения тока в неразветвленной части цепи при включении ее на постоянное напряжение $U$. Из уравнений для свободных токов после алгебраизации $r_1i''+r_2i_2''=0$, $r_1i''+\frac{i_1''}{Cp}=0$, $i''=i_1''+i_2''$ получаем характеристическое уравнение $\frac{1}{Cp}+\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}=0$ и его корень $p=-\frac{r_1+r_2}{Cr_1r_2}$.

Ток $i$ определяется уравнением

$$i=i'+Ae^{pt}=\frac{U}{r_1+r_2}+Ae^{pt}.$$

Из начальных условий при $t=0$ имеем $i(0)=\frac{U}{r_1}$ и постоянная интегрирования

$$A=\frac{U}{r_1}-\frac{U}{r_1+r_2}=U\frac{r_2}{(r_1+r_2)r_1}.$$

Из уравнения тока $i$ после подстановки значения $A$

$$i=\frac{U}{r_1+r_2}+U\frac{r_2}{(r_1+r_2)r_1}e^{pt}=U\left[\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{r_2}{(r_1+r_2)r_1}e^{pt}\right]=Ug(t)$$

получаем

$$g(t)=\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{r_2}{(r_1+r_2)\,r_1}\,e^{pt}.$$

Начальное значение напряжения при $t=0$ будет $u_1(0)=0$ и производная от $u_1$ по новой переменной $\tau$ равна $u_1'(\tau)=\alpha_1 U_1 e^{-\alpha_1\tau}$.

Подставляя полученные выражения в интеграл Дюамеля находим закон изменения тока $i$ для интервала $0\leqslant t\leqslant t_0$:

$$i=U_1(0)\,g(t)+\int_0^t\left[\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{r_2}{(r_1+r_2)\,r_1}\,e^{p(t-\tau)}\right]\alpha_1 U_1 e^{-\alpha_1\tau}\,\alpha\tau=$$

$$=\frac{U}{r_1+r_2}(1-e^{-\alpha_1 t})+\frac{U_1\,\alpha_1\,r_2}{r_1(r_1+r_2)(p+\alpha_1)}\,(e^{pt}-e^{-\alpha_1 t}).$$

Отметим, что при $\alpha_1=-p$ второе слагаемое дает неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую раскрываем, беря производную от числителя и знаменателя по $\alpha_1$, после чего имеем следующее уравнение тока:

$$i=\frac{U_1}{r_1+r_2}(1-e^{-\alpha_1 t})+\frac{U_1\,\alpha_1\,r_2}{r_1(r_1-r_2)}\,te^{-\alpha_1 t}.$$

При изменении $t$ в пределах от $t=t_0$ до $t=\infty$ ток может быть представлен в виде суммы трех составляющих:

а) первая составляющая от напряжения $u_1$, действующего от $t=0$ до $t=t_0$ и далее до $t=\infty$;

б) вторая составляющая от напряжения

$$u_3=-\{U_1(t_0)+U_1[1-e^{-\alpha_1(t-t_0)}]\},$$

действующего от $t=t_0$ до $t=\infty$ и в этих пределах равного и противоположного по знаку напряжению $u_1$;

в) третья составляющая от напряжения

$$u_2=U_2\,e^{-\alpha_2(t-t_0)},$$

действующего от $t=t_0$ до $t=\infty$.

Учитывая, что

$$u_3'(\tau)=\frac{d}{d\tau}[-U_1(t_0)-U_1(1-e^{-\alpha_1\tau})]=-\alpha_1 U_1 e^{-\alpha_1\tau}=-u_1'(\tau);$$

$$u_3(t_0)=-u_1(t_0)=-U(1-e^{-\alpha_1 t_0});$$

$$u_2(t_0)=U_2\,e^{-\alpha_2(t_0-t_0)}=U_2;$$

$$u_2'(\tau)=-\alpha_2 U_2 e^{-\alpha_2\tau},$$

находим выражение тока:

$$i=i_1+i_2+i_3=\int\limits_0^t g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau+u_2(t_0)\,g(t-t_0)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^t g(t-\tau)\,u_2'(\tau)\,d\tau+u_3(t_0)\,g(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^t g(t-\tau)\,u_3(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t_0} g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau+\int\limits_{t_0}^t g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau+u_2(t_0)\,g(t-t_0)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^t g(t-\tau)\,u_2'(\tau)\,d\tau+u_3(t_0)\,g(t-t_0)-\int\limits_{t_0}^t g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t_0} g(t-\tau)\,u_1'(\tau)\,d\tau+[u_2(t_0)-u_1(t_0)]\,g(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^t g(t-\tau)\,u_2'(\tau)d\tau.$$

Это выражение тока представляет собой сумму интегралов Дюамеля и может быть непосредственно написано на основании закона изменения напряжения без разложения тока на составляющие.

Подставляем функции напряжений, переходные проводимости и получаем уравнение тока в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$:

$$i=\int\limits_0^{t_0}\left[\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}\,e^{p(t-\tau)}\right]\alpha_1 U_1 e^{-\alpha_1\tau}d\tau+$$

$$+[U_2-U_1(1-e^{-\alpha_1 t_0})]\left[\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}\,e^{p(t-t_0)}\right]+$$

$$+\int\limits_{t_0}^t\left[\frac{1}{r_1+r_2}+\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}\,e^{p(t-\tau)}\right](-\alpha_2 U_2 e^{-\alpha_2\tau})\,d\tau=$$

$$=\frac{U_1}{r_1+r_2}(1-e^{-\alpha_1 t_0})+\frac{U_1\alpha_1 r_2}{r_1(r_1+r_2)(p+\alpha_1)}(e^{pt}-e^{-\alpha_1 t_0})+$$

$$+\frac{U_2-U_1(1-e^{-\alpha_1 t_0})}{r_1+r_2}\left[1+\frac{r_2}{r_1}\,e^{p(t-t_0)}\right]+\frac{U_2}{r_1+r_2}\cdot(e^{-\alpha_2 t}-e^{\alpha_2 t_0})+$$

$$+\frac{U_2\alpha_2 r_2}{r_1(r_1+r_2)(p+\alpha_2)}(e^{-\alpha_2 t}-e^{-\alpha_2 t_0}).$$

**4-16.** Заряженный конденсатор, обладающий емкостью $C_1$, включается в цепь, состоящую из емкости $C_2$, индуктивности $L$ и сопротивления $r$ (рис. 4-11). Начальное напряжение на заряженном конденсаторе $U_{10}$.

Пользуясь классическим методом, найти выражения, определяющие напряжения $u_1$, $u_2$, и ток $i$ в рассматриваемой цепи для любого момента времени.

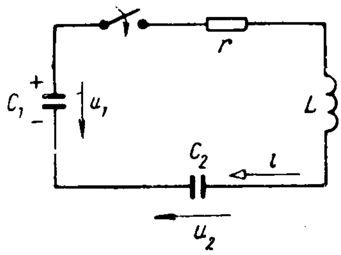



Рис. 4-11

## Решение

Для заданной цепи имеем на основании второго закона Кирхгофа следующее уравнение:

$$u_1 = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i\,dt.$$

Так как в соответствии с выбранными положительными напряжениями

$$u_1 = -\frac{1}{C_1}\int i\,dt,$$

то

$$-\frac{1}{C_1}\int i\,dt = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i\,dt.$$

После дифференцирования и некоторых преобразований имеем

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L}\, i = 0.$$

Решением полученного уравнения является интеграл

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{r_1}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L}}\,.$$

Напряжения $u_2$ и $u_1$ найдем из выражений

$$u_2 = \frac{1}{C_2}\int i\,dt = \frac{1}{C_2}\left[\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t}\right] + A_3$$

$$u_1 = -\frac{1}{C_1}\int i\,dt = -\frac{1}{C_1}\left[\frac{A_1}{p_1}e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2}e^{p_2 t}\right] + A_4,$$

где $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ — постоянные интегрирования.

Определяются они из следующих начальных условий: при $t=0$

$$i(0) = 0 = A_1 + A_2;$$

$$\left(L\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = L(p_1 A_1 + p_2 A_2) = U_{10};$$

$$u_1(0) = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2}\right) + A_4 = U_{10}$$

и

$$u_2(0) = \frac{1}{C_2}\left(\frac{A_1}{p_1} + \frac{A_2}{p_2}\right) + A_3 = 0.$$

В результате совместного решения этих уравнений

$$A_1 = \frac{U_{10}}{L(p_1 - p_2)}; \quad A_2 = -\frac{U_{10}}{L(p_1 - p_2)};$$

$$A_3 = \frac{U_{10}}{LC_2 p_1 p_2}; \quad A_4 = U_{10}\left(1 - \frac{1}{LC_1 p_1 p_2}\right).$$

Так как произведение корней

$$p_1 p_2 = \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2},$$

то

$$A_3 = A_4 = U_{10}\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

После подстановки значений постоянных в уравнения, определяющие ток $i$ и напряжения $u_1$ и $u_2$, получим

$$i = \frac{U_{10}}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad u_1 = U_{10}\frac{C_1}{C_1 + C_2} -$$

$$- U_{10}\frac{C_2}{(p_1 - p_2)(C_1 + C_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

и

$$u_2 = U_{10}\frac{C_1}{C_1 + C_2} + U_{10}\frac{C_1}{(p_1 - p_2)(C_1 + C_2)}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

При установившемся режиме напряжения на обоих конденсаторах будут равны друг другу, т. е.

$$U_1(\infty)=U_2(\infty)=U_{10}\frac{C_1}{C_1+C_2}.$$

**4-17**. Заряженный конденсатор включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления $r$ и емкости $C_2$. Начальное значение напряжения на заряженном конденсаторе $U_{10}$, а его емкость $C_1$.

Найти закон изменения тока $i$ и напряжений на конденсаторах в зависимости от времени.

*Ответ.*

$$i=\frac{U_{10}}{r}e^{pt};\quad u_1=U_{10}\frac{C_1}{C_1+C_2}+U_{10}\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{pt}$$

и

$$u_2=U_{10}\frac{C_1}{C_1+C_2}(1-e^{pt}),$$

где

$$p=-\frac{C_1+C_2}{rC_1C_2}.$$

## Тема 2

### Операторный метод расчета переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами

Операторный метод расчета дает возможность выполнять интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами без определения постоянных интегрирования. Основной трудностью при решении задач классическим методом является определение постоянных интегрирования, особенно если число постоянных больше трех или четырех, что зависит от порядка характеристического уравнения цепи.

При расчете разветвленных цепей количество вычислений может быть большим. В этих случаях целесообразно начальные значения токов и токи принужденного режима вычислять обычными методами расчета цепей переменного тока, а по теореме разложения находить только свободные токи, исходя из системы операторных уравнений для свободных токов.

При помощи теоремы об активном двухполюснике расчет при ненулевых начальных условиях может быть приведен к расчету с нулевыми начальными условиями, благодаря чему становится возможным использование формул включения. Расчет с помощью формул включения значительно проще по сравнению с расчетом по теореме разложения.

**4-18.** Найти закон изменения тока в зависимости от времени в цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления $r = 100$ *ом*, индуктивности $L = 2$ *гн* и емкости $C = 500$ *мкф*, при включении ее в цепь синусоидального напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Угловая частота сети $\omega = 200$ *рад/сек*. Задачу решить при помощи: а) формулы включения для синусоидального напряжения и б) теоремы разложения.

Решение

Находим выражения, входящие в формулу включения:

$$i = \left[\frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{Z(j\omega)} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_m e^{j\psi}}{(p_k - j\omega) Z'(p_k)} e^{p_k t}\right]_{\text{м. ч.}},$$

т. е.

$$Z(j\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 100 + j400 - j\,10 =$$

$$= 402{,}6\, e^{j75°30'} \text{ ом};$$

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC} = \frac{LCp^2 + rCp + 1}{pC};$$

$$Z'(p) = L - \frac{1}{p^2 C}.$$

Корни уравнения

$$Z(p) = 0 = LCp^2 + rCp + 1 = p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}$$

$$p_1 = -25 + j\,19{,}3;$$

$$p_2 = -25 - j\,19{,}3,$$

и, наконец,

$$Z'(p_1) = 1{,}5 - j\,1{,}93; \quad Z'(p_2) = 1{,}5 + j\,1{,}93.$$

Подставляем полученные результаты в формулу включения:

$$i = \left[\frac{U_m e^{j(\omega t+\psi)}}{402{,}6\, e^{j75°30'}} + \frac{U_m e^{j\psi} e^{(-25+j19,3)t}}{(-25 + j\,19{,}3 - j\,200)\,(1{,}5 - j\,1{,}93)} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_m e^{j\psi} e^{(-25-j19,3)t}}{(-25 - j\,19{,}3 - j\,200)\,(1{,}5 + j\,1{,}93)}\right]_{\text{м. ч}} =$$

$$= \left[ \frac{U_m}{402{,}6} e^{j(\omega t+\psi-75°30')} + \frac{U_m e^{-25t} e^{j(19{,}3t+\psi)}}{446\, e^{-j150°}} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_m e^{-25t} e^{-j(19{,}3t-\psi)}}{540\, e^{-j44°30'}} \right]_{\text{м. ч}} = \frac{U_m}{402{,}6} \sin(\omega t + \psi - 75°30') +$$

$$+ \frac{U_m}{446} e^{-25t} \sin(19{,}3\, t + \psi + 150°) -$$

$$- \frac{U_m}{540} e^{-25t} \sin(19{,}3t - \psi - 44°30').$$

Для приведения составляющих свободного тока к одному затухающему гармоническому колебанию должна быть задана величина угла $\psi$, так как от нее зависит начальное значение и фаза свободной составляющей тока.

На основании закона Ома в операторной форме изображение тока в цепи

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}, \tag{1}$$

где $U(p)$ — изображение синусоидального напряжения;

$Z(p)$ — операторное сопротивление цепи.

Для напряжения сети в комплексной форме

$$U = [U_m e^{j(\omega t+\psi)}]_{\text{м. ч}}$$

находим ее изображение из таблиц $U(p) = \frac{U_m e^{j\psi}}{p - j\omega}$ и подставляем в уравнение (1);

$$I(p) = \frac{U_m^{j\psi}}{(p - j\omega) Z(p)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Получив изображение тока в виде рациональной дроби, применим теорему разложения:

$$i = \left[ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right]_{\text{м. ч}},$$

где $p_k$ — корни многочлена $F_2(p)$;

$F_2'(p_k)$ — производная $F_2(p)$, в которую подставляются значения корней $p_k$.

Находим корни многочлена $F_2(p)$, полагая $F_2(p) = 0$ или

$$(p - j\omega) Z(p) = (p - j\omega)\left(r + pL + \frac{1}{Cp}\right) = 0:$$

$$p_1 = j\omega = j\,200; \quad p_2 = -25 + j\,19{,}3; \quad p_3 = -25 - j\,19{,}3.$$

Производная многочлена $F_2(p)$ в общем виде

$$F_2'(p) = Z(p) + (p - j\omega) Z'(p) = \left(r + pL + \frac{1}{Cp}\right) + $$
$$+ (p - j\omega)\left(L - \frac{1}{p^2 C}\right);$$

для частного значения корней имеем

$$F_2'(p_1) = Z(j\omega) + (j\omega - j\omega) Z'(p) = Z(j\omega) = r + j\omega L +$$
$$+ \frac{1}{j\omega C} = 402{,}6\, e^{j75^\circ 30'};$$

$$F_2'(p_2) = Z(p_2) + (p_2 - j\omega) Z'(p_2) =$$
$$= 0 + (p_2 - j\omega)\left(L - \frac{1}{p_2^2 C}\right) = (-25 + j\,19{,}3 - j\,200) \times$$
$$\times (1{,}5 - j\,1{,}93) = 446\, e^{-j150^\circ};$$
$$F_2'(p_3) = 540\, e^{-j44^\circ 30'}.$$

Находим закон изменения тока:

$$i = \left[\frac{U_m e^{j\psi}}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{U_m e^{j\psi}}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{U_m e^{j\psi}}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t}\right]_{\text{м. ч}} =$$
$$= \left[\frac{U_m e^{j\psi}}{402{,}6\, e^{j75^\circ 30'}} e^{j\omega t} + \frac{U_m e^{j\psi}}{446\, e^{-j150^\circ}} e^{(-25 + j19{,}3)t} + \right.$$
$$\left. + \frac{U_m e^{j\psi}}{540\, e^{-j44^\circ 30'}} e^{(-25 - j19{,}3)t}\right]_{\text{м. ч}} = \frac{U_m}{402{,}6} \sin(\omega t + \psi - 75^\circ 30') +$$
$$+ \frac{U_m}{446} e^{-25t} \sin(19{,}3\, t + \psi + 150^\circ) -$$
$$- \frac{U_m}{540} e^{-25t} \sin(19{,}3\, t - \psi - 44^\circ 30').$$

**4-19.** В условиях задачи 4-6 найти законы изменения токов в зависимости от времени, пользуясь теоремой разложения.

## Решение

В соответствии с выбранным направлением токов и заданным направлением начального напряжения на конденсаторе (см. рис. 4-1) пишем уравнения Кирхгофа в операторной форме:

$$U(p) + L_1 i_1(0) - \frac{U_C(0)}{p} = (r_1 + pL_1) I_1(p) +$$

$$+\left(r_3 + \frac{1}{pC}\right) I_3(p);$$

$$U(p) + L_1 i_1(0) = (r_1 + pL_1) I_1(p) + r_2 I_2(p);$$

$$I_1(p) = I_2(p) + I_3(p),$$

причем

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Из совместного решения этих уравнений относительно каждого из токов находим их изображения:

$$I_1(p) = \frac{[U + pL_1 i_1(0)]\,[(r_2 + r_3)\,pC + 1] - r_2 CpU_C(0)}{p\,\{(r_2 + r_3)\,L_1 Cp^2 + [(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)\,C + L_1]\,p + r_1 + r_2\}} =$$

$$= \frac{F_1(p)}{pF_2(p)};$$

$$I_2(p) = \frac{[U + pL_1 i_1(0)]\,[r_3 pC + 1] + pC\,(r_1 + pL_1)\,U_C(0)}{p\{(r_2+r_3)L_1Cp^2+[(r_1r_2+r_2r_3+r_1 r_3)\,C+L_1]\,p+r_1+r_2\}} = \frac{\psi_1(p)}{p\psi_2(p)};$$

$$I_3(p) = \frac{[U + pL_1 i_1(0)]\,r_2\,pC - p\,[(r_1 + r_2)\,C + pL_1 C]\,U_C(0)}{p\{(r_2 + r_3)L_1 Cp^2 + [(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)C + L_1]p + r_1 + r_2\}} = \frac{f_1(p)}{pf_2(p)}.$$

Ток $i_1$, являющийся оригиналом тока $I_1(p)$, находим с помощью теоремы разложения, т. е.

$$i_2 = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^{=n} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)}\, e^{p_k t}.$$

Определяем корни уравнения $F_2(p) = 0$ или

$$(r_2 + r_3)\,L_1 Cp^2 + [(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)\,C + L_1]\,p + r_1 + r_2 = 0,$$

которые равны

$$p_1 = -120{,}5; \qquad p_2 = -1991{,}5.$$

Далее находим

$$F_1(0) = U;$$

$$F_2(0) = r_1 + r_2;$$

$$F_2'(p) = \frac{dF_2(p)}{dp} = 2\,(r_2 + r_3)\,L_1 Cp +$$

$$+ [(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)\,C + L_1];$$

$$F_2'(p_1) = 0{,}0935; \qquad F_2'(p_2) = -0{,}0935;$$

$$F_1(p_1) = [U + p_1 L_1 i_1(0)]\,[(r_2 + r_3)p_1 C + 1] - r_2 C p_1 U_C(0) =$$
$$= [120 + (-120{,}5)\,0{,}1 \cdot 10]\,[(2+3)(-120{,}5)\,100 \times$$
$$\times 10^{-6} + 1] - 2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}(-120{,}5)\,120 = +2{,}41;$$
$$F_1(p_2) = [120 + (-1991{,}5)\,0{,}1 \cdot 10]\,[(2+3)(-1991{,}5)100 \times$$
$$\times 10^{-6} + 1] - 2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}(-1991{,}5)120 = +39{,}8.$$

Подставляем полученные результаты в теорему разложения:

$$i_1 = \frac{U}{r_1 + r_2} + \frac{2{,}41}{-120{,}5 \cdot 0{,}0935}\,e^{p_1 t} + \frac{39{,}8}{-1991{,}5\,(-0{,}0935)}\,e^{p_2 t} =$$
$$= [10 - 0{,}215\,e^{-120{,}5t} + 0{,}215\,e^{-1991{,}5t}]\ a.$$

Аналогично находим токи $i_2$ и $i_3$, учитывая, что $F_2(p) = \psi_2(p) = f_2(p)$:

$$i_2 = [10 - 0{,}22\,e^{-120{,}5t} + 20{,}22\,e^{-1991{,}5t}]\ a;$$
$$i_3 = [0{,}005\,e^{-120{,}5t} - 20\,e^{-1991{,}5t}]\ a$$

**4-20.** В условиях задачи 4-19 найти закон изменения тока в зависимости от времени в ветви с емкостью, пользуясь формулой включения для постоянного напряжения.

### Решение

Так как формула включения выведена из теоремы разложения для нулевых начальных условий, т. е. при включении цепи, в которой токи всех ветвей и напряжения на емкостях равны нулю, то непосредственно использовать ее в данном случае нельзя. Необходимо сначала привести цепь к нулевым начальным условиям.

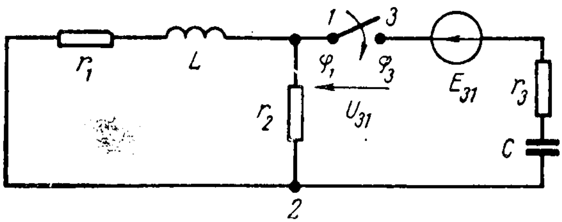



Рис. 4-12

По теореме об активном двухполюснике ток в ветви с емкостью создается э. д. с. $E_{31}$, равной по величине и направлению разности потенциалов на разомкнутом рубильнике в этой ветви.

При включении э. д. с. $E_{31}$ напряжение на конденсаторе и токи во всех ветвях отсутствуют (рис. 4-12).

Величину и направление э. д. с. $E_{31}$ получаем, обходя контур (1, 2, 3) схемы рис. 4-1 (стр. 160) против часовой стрелки, т. е.

$$\varphi_3 = \varphi_1 - r_2 I_2 + U_C(0), \quad \varphi_3 - \varphi_1 = U_{31} = E_{31} =$$
$$= -2 \cdot 10 + 120 = 100 \ \text{в},$$

где $I_2$ — ток в сопротивлении $r_2$ до замыкания рубильника.

Э. д. с. $E_{31}$ направлена от точки *3* к точке *1*, как указано на рис. 4-12.

Операторное сопротивление цепи

$$Z(p) = \frac{a(p)}{b(p)} = Z_3\left((p) + \frac{Z_1(p) Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}\right) = r_3 + \frac{1}{pC} + \frac{(r_1 + pL_1) r_2}{r_1 + r_2 + pL_1} =$$
$$= \frac{(r_2 + r_3) L_1 C p^2 + [(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3) C + L_1] p + r_1 + r_2}{(r_1 + r_2 + L_1 p) pC};$$

$$Z(p) = 0 = (r_2 + r_3) L_1 C p^2 + [(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3) C + L_1] p + r_1 + r_2.$$

Корни уравнения

$$p_1 = -120{,}5 \quad \text{и} \quad p_2 = -1991{,}5.$$

Так как при подстановке корней $p_1$ и $p_2$ в операторное сопротивление $Z(p)$ его числитель $a(p)$ становится равным нулю, то из общего выражения производной отношения двух функций

$$\frac{dZ(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\left[\frac{a(p)}{b(p)}\right] = \frac{a'(p)\, b(p) - a(p)\, b'(p)}{[b(p)]^2} = \frac{a'(p)}{b(p)} - \frac{a(p) b'(p)}{[b(p)]^2}$$

следует, что второе слагаемое производной при подстановке корней также обращается в нуль.

Поэтому производную операторного сопротивления $Z(p)$ находим как отношение производной числителя $a'(p)$ к знаменателю $b(p)$.

Вычисляем значения производных $Z'(p)$ и $Z(0)$.

$$Z'(p_1) = \frac{2(r_2 + r_3) L_1 C p_1 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3) C + L_1}{(r_1 + r_2 + p_1 L_1) p_1 C} = -\frac{18\,700}{p_1};$$

$$Z'(p_2) = \frac{2(r_2 + r_3) L_1 C p_2 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3) C + L_1}{(r_1 + r_2 + p_2 L_1) p_2 C} = \frac{5}{p_2};$$

$$Z(0) = \infty.$$

Подставляем полученные результаты в формулу включения

$$i_3 = \frac{E_{31}}{Z(0)} + \frac{E_{31} e^{p_1 t}}{p_1 Z'(p_1)} + \frac{E_{31} e^{p_2 t}}{p_2 Z'(p_2)} = 0 + \frac{100\, e^{p_1 t}}{p_1 \frac{-18\,700}{p_1}} +$$

$$+ \frac{100\, e^{p_2 t}}{p_2 \frac{5}{p_2}} \simeq [-0{,}005\, e^{-120{,}5t} + 20 e^{-1991{,}5t}] \ a.$$

**4-21**. В электрической цепи рис. 4-13 включается рубильник $K$.

Найти закон изменения токов $i_1$, $i_2$, $i_3$ в зависимости от времени, если $r_1=100$ *ом*, $C=200$ *мкф*, $r_2=10$ *ом*, $L=1$ *гн*, $r_3=$ $=100$ *ом*, $\omega=200$ *рад/сек*, $U_m=828$ *в*.

Рубильник замыкается при начальной фазе напряжения сети $\psi=267°50'$.

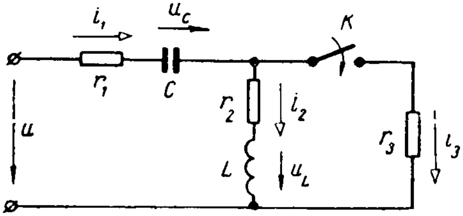



Рис. 4-13

## Решение

Пишем уравнения Кирхгофа в операторной форме:

$$\dot U(p)=r_1\dot I_1(p)+\frac{\dot I_1(p)}{pC}+j\frac{U_C(0)}{p}+r_2\dot I_2(p)+$$

$$+pL\dot I_2(p)-jLi_2(0),$$

$$r_3\dot I_3(p)=r_2\dot I_2(p)+pL\dot I_2(p)-jLi_2(0),$$

$$\dot I_1(p)=\dot I_2(p)+\dot I_3(p),$$

или

$$\dot U(p)=\left(r_1+\frac{1}{pC}\right)\dot I_1(p)+j\frac{U_C(0)}{p}+(r_2+pL)\dot I_2(p)-$$

$$-jLi_2(0)=Z_1(p)\dot I_1(p)+j\frac{U_C(0)}{p}+Z_2(p)\dot I_2(p)-jLi_2(0)_2,$$

$$Z_3(p)\dot I_3(p)=Z_2(p)\dot I_2(p)-jLi_2(0),$$

$$\dot I_1(p)=\dot I_2(p)+\dot I_3(p).$$

Из этой системы уравнения, решая ее относительно каждого из токов, находим изображения токов:

$$\dot I_1(p)=\frac{\left[p\dot U(p)-jU_C(0)\right]\left[Z_2(p)+Z_3(p)\right]+jpLZ_3(p)\,i_2(0)}{p\left[Z_1(p)Z_2(p)+Z_2(p)Z_3(p)+Z_1(p)Z_3(p)\right]}=\frac{A(p)}{pZ(p)};$$

$$\dot I_2(p)=\frac{\left[p\dot U(p)-jU_C(0)\right]Z_3(p)+\left[Z_1(p)+Z_3(p)\right]jpLi_2(0)}{p\left[Z_1(p)Z_2(p)+Z_2(p)Z_3(p)+Z_1(p)Z_3(p)\right]}=\frac{B(p)}{pZ(p)};$$

$$\dot{I}_3(p) = \frac{\left[p\,\dot{U}(p) - jU_C(0)\right] Z_2(p) - jpLZ_1(p)\,i_2(0)}{p\,[Z_1(p)\,Z_2(p) + Z_2(p)\,Z_3(p) + Z_1(p)\,Z_3(p)]} = \frac{D(p)}{pZ(p)}.$$

В изображения токов подставляем изображение комплекса напряжения сети $u=[U_m e^{j(\omega t+\psi)}]$ м. ч, которое находим из таблиц $U(p) = \frac{U_m e^{j\psi}}{p - j\omega}$, и после простых преобразований получаем изображения токов в виде рациональных дробей:

$$\dot{I}_1(p) = \frac{\left[Ume^{j\psi}\,p - j(p-j\omega)U_C(0)\right][Z_2(p) + Z_3(p)] + j(p-j\omega)\,pLZ_3(p)\,i_2(0)}{p\,(p-j\omega)\,Z(p)} =$$

$$= \frac{M(p)}{pF_2(p)}.$$

$$\dot{I}_2(p) = \frac{\left[Ume^{j\psi}p - j(p-j\omega)U_C(0)\right]Z_3(p) + j(p-j\omega)\,[Z_1(p) + Z_3(p)]pLi_2(0)}{p\,(p-j\omega)\,Z(p)} =$$

$$= \frac{N(p)}{pF_2(p)};$$

$$\dot{I}_3(p) = \frac{\left[U_m e^{j\psi}\,p - j(p-j\omega)\,U_C(0)\right] Z_2(p) - j\,(p-j\omega)pLZ_1(p)\,i_2(0)}{p\,(p-j\omega)\,Z(p)} = \frac{K(p)}{pF_2(p)}.$$

Вычисляем корни уравнения $F_2(p)=0$ или

$$(p-j\omega)\,Z(p) = (p-j\omega)\left[\left(r_1 + \frac{1}{pC}\right)(r_2 + pL) + \right.$$

$$\left. + (r_2 + pL)\,r_3 + \left(r_1 + \frac{1}{pC}\right) r_3\right] = (p-j\omega)\times$$

$$\times\frac{(r_1+r_3)LCp^2 + [(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)\,C + L]\,p + r_2 + r_3}{pC} = 0,$$

которые равны

$$p_1 = j\omega = j200; \quad p_2 = -42{,}5 + j\,30{,}7 = 52{,}4\,e^{j144°};$$

$$p_3 = -42{,}5 - j\,30{,}7 = 52{,}4\,e^{-j144°}.$$

Находим производную от $F_2(p)$:

$$F'(p) = Z(p) + (p-j\omega)\,Z'(p)$$

и вычисляем

$$F_2'(p_1) = Z(p_1) + 0 = \left(r_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)(r_2 + j\omega L) + (r_2 + j\omega L)\,r_3 +$$

$$+ \left(r_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) r_3 = 4{,}09\cdot 10^4\,e^{j65°30'};$$

$$F_2'(p_2)=0+(p_2-j\omega)\,Z'(p_2);$$

$$F_2'(p_3)=0+(p_3-j\omega)\,Z'(p_3);$$

$$Z'(p_2)=\frac{2(r_1+r_3)LCp_2+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)C+L}{p_2C}=235\,e^{-j\,54°10'};$$

$$Z'(p_3)=235\,e^{j\,54°10'};$$

$$p_2-j\omega=-42{,}5+j\,30{,}7-j\,200=174{,}5\,e^{-j\,104°05'};$$

$$p_3-j\omega=-42{,}5-j\,30{,}7-j\,200=234\,e^{-j\,100°50'};$$

$$Z_2(p_1)+Z_3(p_1)=10+j\,200+100=110+j\,200=228\,e^{j\,61°10'};$$

$$Z_2(p_2)+Z_3(p_2)=r_2+p_2L+r_3=67{,}5+j\,30{,}7=74\,e^{j\,24°30'};$$

$$Z_2(p_3)+Z_3(p_3)=74\,e^{-j\,24°30'};$$

$$F_2(0)=\infty\,.$$

Находим начальные значения тока в индуктивности $i_2(0)$ и напряжения на конденсаторе $U_C(0)$

До замыкания рубильника ток в цепи

$$i_1=i_2=\left[\frac{U_m\,e^{j(\omega t+\psi)}}{r_1+r_2+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\right]_{\text{м. ч}}=\left[\frac{U_m\,e^{j(\omega t+\psi)}}{110+j\,(200-25)}\right]_{\text{м. ч}}=$$

$$=\left[\frac{U_m\,e^{j(\omega t+\psi)}}{207\,e^{j57°50'}}\right]_{\text{м. ч}}=\frac{828}{207}\sin(\omega t+\psi-57°50')=$$

$$=4\sin(\omega t+\psi-57°50')\ a$$

и напряжение на конденсаторе

$$u_C=I_m\,x_C\sin(\omega t+\psi-57°50'-90°)=$$

$$=4\cdot 25\cdot\sin(\omega t+\psi-147°50')=100\sin(\omega t+\psi-147°50')\ в.$$

В момент замыкания рубильника ($t=0$)

$$i_2(0)=4\sin(\psi-57°50')=4\sin(267°50'-57°50')=4\sin 210°=-2a;$$

$$u_C(0)=100\sin(\psi-147°50')=100\sin(267°50'-147°50')=$$

$$=100\sin 120°=86{,}6\ в.$$

При помощи теоремы разложения находим оригинал тока $I_1(p)$:

$$i_1=\frac{M(0)}{F_2(0)}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{M(p_k)}{p_k\,F_2'(p_k)}\,e^{p_k t}\,.$$

В этом выражении первое слагаемое равно нулю, так как $F_2(0)=\infty$. Второе слагаемое дает уравнения как принужденной составляющей тока, так и свободных токов. Так как в изображения токов было подставлено изображение комплексного напряжения, то теорема разложения дает комплексные изображения токов, мнимая часть которых будет выражением мгновенных значений токов, принужденного и свободного режимов:

$$i_1=\left[\frac{Ume^{j\psi}p_1[Z_2(p_1)+Z_3(p_1)]}{p_1Z'(p_1)}e^{p_1t}+\right.$$

$$+\left\{\frac{\left[U_me^{j\psi}p_2-j(p_2-j\omega)U_C(0)\right][Z_2(p_2)+Z_3(p_2)]}{p_2(p_2-j\omega)Z'(p_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{j(p_2-j\omega)p_2LZ_3(p_2)i_2(0)}{p_2(p_2-j\omega)Z'(p_2)}\right\}e^{p_2t}+$$

$$+\left\{\frac{\left[U_me^{j\psi}p_3-j(p_3-j_\omega)U_C(0)\right][Z_2(p_3)+Z_3(p_3)]}{p_3(p_3-j\omega)Z'(p_3)}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{j(p_3-j\omega)p_3LZ_3(p_3)i_2(0)}{p_3(p_3-j\omega)Z'(p_3)}\right\}e^{p_3t}\right]_{\text{м. ч}}=$$

$$=\left[\frac{U_me^{j\psi}[Z_2(p_1)+Z_3(p_1)}{Z(p_1)}e^{p_1t}+\right.$$

$$+\left(\frac{U_me^{j\psi}[Z_2(p_2)+Z_3(p_2)]}{(p_2-j\omega)Z'(p_2)}-\frac{jU_C(0)[Z_2(p_2)+Z_3(p_2)]}{p_2Z'(p_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{jLZ_3(p_2)i_2(0)}{Z'(p_2)}\right)e^{p_2t}+\left(\frac{U_me^{j\psi}[Z_2(p_3)+Z_3(p_3)]}{(p_3-j\omega)Z'(p_3)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{jU_C(0)[Z_2(p_3)+Z_3(p_3)]}{p_3Z'(p_3)}+\frac{jLZ_3(p_3)i_2(0)}{Z'(p_3)}\right)e^{p_3t}\right]_{\text{м. ч}}=$$

$$=\left[\frac{828\,e^{j\,267°50'}\cdot 228\,e^{j\,61°10'}}{4{,}09\cdot 10^4\,e^{j\,65°30'}}e^{j\omega t}+\right.$$

$$+\left(\frac{828\,e^{j\,267°50'}\cdot 74\,e^{j\,24°30'}}{174{,}5\,e^{-j\,104°05'}\cdot 235\,e^{-j\,54°10'}}-j\frac{86{,}6\cdot 74\,e^{j\,24°30'}}{52{,}4\,e^{j\,144°}\cdot 235\,e^{-j\,54°10'}}+\right.$$

$$\left.+j\frac{1\cdot 100\,(-2)}{235\,e^{-j54°10'}}\right)e^{(-42{,}5+j30{,}7)\,t}+$$

$$+\left(\frac{828\,e^{j\,267°50'}\cdot 74\,e^{-j\,24°20'}}{234\,e^{-j\,100°50'}\cdot 235\,e^{j\,54°10'}}-j\frac{86{,}6\cdot 74\,e^{-j\,24°30'}}{52{,}4\,e^{-j144°}\cdot 235\,e^{j\,54°10'}}+\right.$$

$$\left.\left.+j\frac{1\cdot 100\,(-2)}{235\,e^{j54°10'}}\right)e^{(-42{,}5-j\,30{,}7)\,t}\right]_{\text{м. ч}}=$$

$$=[4{,}62e^{j\,263°30'}e^{j\omega t}+(0{,}200+j\,0{,}785)\,e^{-(42{,}5+j\,30{,}7)\,t}+$$

$$+(-\,0{,}595-j\,1{,}760)\,e^{-(42{,}5-j\,30{,}7)\,t}]_{\text{м. ч}}=\{4{,}62\,e^{j\,(\omega t+263°30')}+$$

$$+e^{-42{,}5\,t}\,[(0{,}200+j\,0{,}785)\,(\cos 30{,}7\,t+j\sin 30{,}7\,t)+$$

$$+(-\,0{,}595-j\,1{,}760)\,(\cos 30{,}7\,t-j\sin 30{,}7t]\}_{\text{м. ч}}=$$

$$=4{,}62\sin(\omega t+263°30')+(0{,}795\sin 30{,}7\,t-0{,}975\cos 30{,}7\,t)\,e^{-42{,}5\,t}=$$

$$=[4{,}62\sin(\omega t+263°30')+1{,}25\,e^{-42{,}5\,t}\sin(30{,}7\,t-51°)]\ a.$$

Аналогично находим уравнения

$$i_2\,[2{,}02\sin(\omega t+202°35']-1{,}32\,e^{-42{,}5\,t}\sin(30{,}7\,t+68°30')]\ a;$$

$$i_3=[4{,}04\sin(\omega t+280°35')+0{,}585\,e^{-42{,}5t}\sin(30{,}7\,t+25°10')]\ a.$$

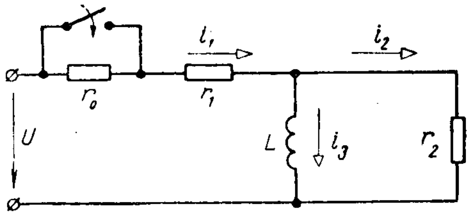



Рис. 4-14

**4-22.** В электрической цепи (рис. 4-14) рубильник замыкает сопротивление $r_0$ накоротко.

Найти закон изменения тока в неразветвленной части цепи в зависимости от времени, если $r_0 = r_1 = r_2 = 20$ *ом*, $L = 0{,}5$ *гн*, $U = 60$ *в*, решив задачу при помощи формулы включения и теоремы разложения.

Решение

Расчет переходного процесса в цепи приводим к нулевым начальным условиям.

Сопротивление $r_0$ может быть заменено источником э. д. с. без внутреннего сопротивления с э. д. с. $E_1$, равной падению напряжения в этом сопротивлении и направленной ему навстречу:

$$E_1 = r_0\,i_1 = r_0\,\frac{U}{r_0+r_1} = 30\ \text{в}$$

(рис. 4-15).

Так как формула включения может применяться при включении в цепь некоторой э. д. с., то замыкание сопротивления $r_0$ или выключение эквивалентной э. д. с. $E_1$ должны быть заменены включением в цепь э. д. с. $E_2$, равной и противоположной $E_1$ (рис. 4-16).

По принципу наложения действительный ток $i_1$ в цепи равен сумме тока $i_{1(1)}=\frac{U-E_1}{r_1}=\frac{60-30}{20}=1{,}5$ *а* (см. рис. 4-15) и тока $i_{1(2)}$, который вызывает в цепи э. д. с. $E_2$ при нулевых начальных условиях (рис. 4-17).

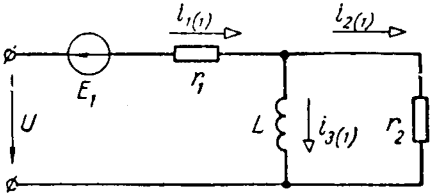



Рис. 4-15

Для применения формулы включения находим: операторное сопротивление цепи

$$Z(p)=Z_1(p)+\frac{Z_2(p)\,Z_3(p)}{Z_2(p)+Z_3(p)}=r_1+\frac{r_2\,pL}{r_2+pL}=\frac{r_1\,r_2+(r_1+r_2)\,pL}{r_2+pL},$$

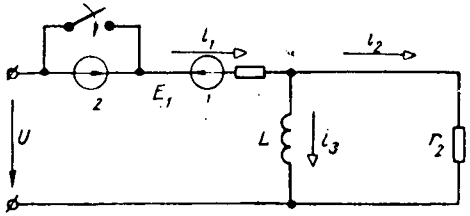



Рис. 4-16

корень $p_1$ характеристического уравнения

$$r_1 r_2+(r_1+r_2)\,pL=0$$

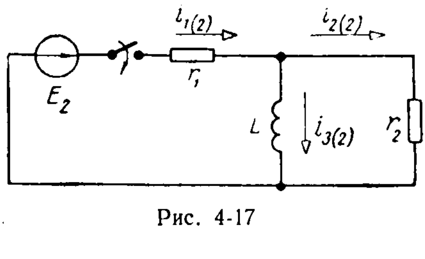



Рис. 4-17

или

$$p_1=\frac{r_1\,r_2}{(r_1+r_2)\,L}=-20$$

и производную

$$Z'(p_1)=\frac{(r_1+r_2)\,L}{r_2+p_1 L}=\frac{40\cdot0,5}{20-20\cdot0,5}=2.$$

Находим уравнение тока

$$i_{1\,(2)}=\frac{E_2}{Z(0)}+\frac{E_2\,e^{p_1 t}}{p_1 Z'(p_1)}=\frac{30}{20}+\frac{30\cdot e^{-20\,t}}{-20\cdot2}=[1,5-0,75\,e^{-20\,t}]\ a.$$

Действительный ток

$$i_1=i_{1\,(1)}+i_{1\,(2)}=1,5+1,5-0,75\,e^{-20\,t}=[3-0,75\,e^{-20\,t}]\ a.$$

Для применения теоремы разложения находим из системы уравнений (см. рис. 4-14)

$$\frac{U}{p}=r_1 I_1(p)+LpI_3(p)-Li_3(0);$$

$$\frac{U}{p}=r_1 I_1(p)+r_2 I_2(p);$$

$$I_1(p)=I_2(p)+I_3(p)$$

изображение тока

$$I_1(p)=\frac{U\,(r_2+Lp)+Lpr_2\,i_3(0)}{p\,[(r_1+r_2)\,Lp+r_1 r_2]}=\frac{F_1(p)}{pF_2(p)}$$

и далее

$$F_1(0)=Ur_2=60\cdot20=1\,200;$$

$$F_2(0)=r_1 r_2=400;$$

$$F_2'(p)=\frac{d}{dp}[(r_1+r_2)\,Lp+r_1 r_2]=(r_1+r_2)\,L=20;$$

$$i_3(0)=\frac{U}{r_1+r_0}=\frac{60}{40}=1,5\ a.$$

Используя найденное выше значение $p_1=-20$, применяем теорему разложения:

$$i_1=\frac{F_1(0)}{F_2(0)}+\frac{F_1(p_1)\,e^{p_1 t}}{p_1 F_2'(p_1)}=$$

$$=\frac{1\,200}{400}+\frac{U\,(r_2+Lp_1)+Lp_1 r_2\,i_3(0)}{p_1\,F_2'(p_1)}\,e^{p_1 t}=$$

$$=3+\frac{60\,(20-0,5\cdot20)+0,5\,(-20)\cdot20\cdot1,5}{-20\cdot20}\,e^{p_1 t}=(3-0,75e^{-20t})\ a.$$

4-23. В условиях задачи 4-22 найти закон изменения тока в неразветвленной части цепи, если рубильник был замкнут и при его размыкании сопротивление $r_0$ вводится в цепь.

*Указание и ответ.* Составляющие тока в неразветвленной части цепи $i_{1(1)}$ и $i_{1(2)}$ находим соответственно из схем рис. 4-18 и 4-19, где

$$E_1 = r_0 \frac{U}{r_0 + r_1} = 30 \text{ в}$$

$$i_1 = i_{1\,(1)} - i_{1\,(2)} = 3 - [1{,}5 - 0{,}5e^{-20t}] = [1{,}5 + 0{,}5\, e^{-20t}]\ a.$$

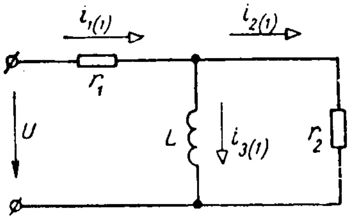



Рис. 4-18

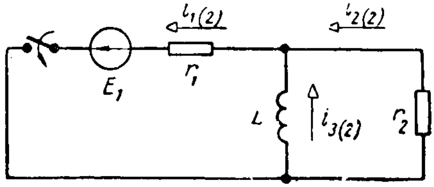



Рис. 4-19

4.24. При действии на цепь (рис. 4-20) импульса напряжения [$u(t) = U$ при $0 < t < \tau$ и $u(t) = 0$ при $t < 0$ $t > \tau$] найти ток в сопротивлении $r_2$ операторным путем для промежутка времени $0 < t < \tau = 0.005$ *сек.*

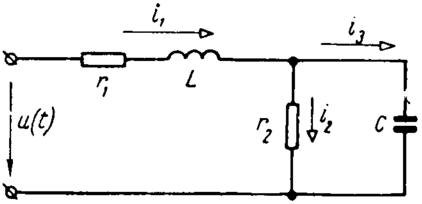



Рис. 4-20

Построить кривую тока $i_2$, если $r_1 = r_2 = 10$ *ом*, $L = 0{,}01$ *гн*, $C = 10^{-4}$ *ф*, $U = 100$ *в*.

## Решение

Для заданного промежутка времени расчет ведется таким же образом, как и при включении цепи к источнику постоянного напряжения.

Наносим на схеме принятые направления токов и составляем уравнения по законам Кирхгофа в операторной форме:

$$(r_1 + pL)\, I_1(p) + r_2 I_2(p) = \frac{U}{p};$$

$$r_2 I_2(p) = \frac{1}{pC} I_3(p)$$

$$I_1(p) = I_2(p) + I_3(p).$$

Решая полученну ) систему уравнений, находим

$$I_2(p) = \frac{U}{p\,[r_2 LCp^2 + (L + r_1 r_2 C)\,p + r_1 + r_2]} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

Уравнение

$$F_2(p) = r_2 LCp^2 + (L + r_1 r_2 C)\,p + r_1 + r_2 = (p^2 + 2\cdot 10^3 p + 2\cdot 10^6)\cdot 10^{-5} = 0$$

имеет два комплексных корня

$$p_{1,2} = -10^3 \pm j\,10^3.$$

Поэтому по теореме разложения

$$i_2(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2\left[\frac{F_1(p)}{p_1 F_2'(p_1)} e^{p_1 t}\right]_{\text{в. ч}} = \frac{100}{10+10} +$$

$$+ 2\left[\frac{100}{(-10^3 + j\,10^3)\,[2\cdot 10^{-2}(-1+j) + 2\cdot 10^{-2}]} e^{(-10^3 + j\,10^3)\,t}\right]_{\text{в. ч}} =$$

$$= 5 - 5e^{-1\,000\,t}(\cos 1\,000\,t + \sin 1\,000\,t) =$$

$$= 5 - 5\sqrt{2}\, e^{-1\,000\,t} \sin(1\,000\,t + 45°).$$

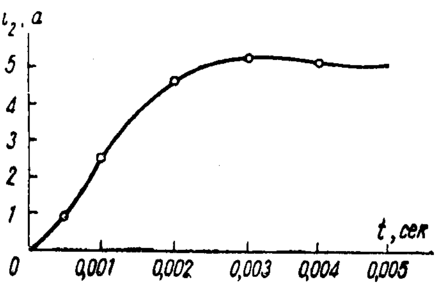



Рис. 4-21

График тока $i_2$ приведен на рис. 4-21.

**4-25.** В условиях задачи 4-24 найти изображение искомого тока с помощью теоремы об активном двухполюснике.

Решение

Составим эквивалентную операторную схему (рис. 4-22) при разомкнутой ветви $r_2$. Из нее находим

$$U_{2x}(p) = E(p)\frac{Z_3(p)}{Z_1(p)+Z_3(p)},$$

$$Z_{вх}(p) = \frac{Z_1(p)\,Z_3(p)}{Z_1(p)+Z_3(p)},$$

где

$$Z_1(p) = r_1 + pL;\quad Z_3(p) = \frac{1}{pC};\quad Z_2(p) = r_2.$$

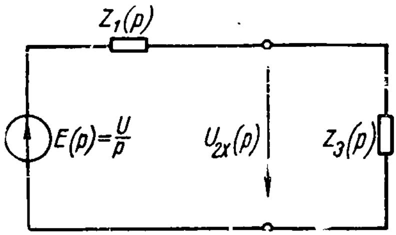



Рис. 4-22

Тогда по теореме об активном двухполюснике

$$I_2(p) = \frac{U_{2x}(p)}{Z_2(p)+Z_{вх}(p)} = \frac{\dfrac{Z_3(p)}{Z_1(p)+Z_3(p)}E(p)}{Z_2(p)+\dfrac{Z_1(p)\,Z_3(p)}{Z_1(p)+Z_3(p)}} =$$

$$= \frac{Z_3(p)\,E(p)}{Z_1(p)\,Z_2(p)+Z_1(p)\,Z_3(p)+Z_2(p)\,Z_3(p)} =$$

$$= \frac{U}{p\,[r_2LCp^2+(L+r_1r_2C)\,p+r_1+r_2]}.$$

## Тема 3

### Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

Данная тема включает вопросы, связанные с распространением электромагнитной энергии вдоль проводов линий передач.

Явление отражения волны имеет место в тех точках линии или узлах, где нарушается однородность линии, например присоединяется линия с другим характеристическим сопротивлением или включаются элементы с сосредоточенными параметрами.

Основным расчетным уравнением, дающим связь между мгновенными значениями падающей или набегающей на узловую точку волны напряжения и мгновенными значениями преломленных или проходящих за узловую точку волн тока и напряжения, является уравнение

$$2u_{\text{пад}} = u_2 + z_{c1} i_2,$$

где $u_2$ и $i_2$ — искомые мгновенные значения напряжения и тока преломленных волн;

$z_{c1}$ — характеристическое сопротивление линии, по которой перемещается падающая волна.

При наличии в узловых точках элементов с сосредоточенными индуктивностями или емкостями данное уравнение преобразуется в дифференциальное, сходное с соответствующим уравнением в цепях с сосредоточенными постоянными, которое решается аналогичными методами.

Из уравнений $u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$ и $i_2 = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}$, используя найденное выражение $u_2$ и $i_2$, определяют $u_{\text{отр}}$ и $i_{\text{отр}}$, после чего распределение тока и напряжения вдоль линии со стороны набегающей на узел волны находится наложением волн падающих и отраженных, а на линии за узловой точкой — преломленными волнами.

Сходство основного расчетного уравнения для узловой точки линии и уравнения, написанного для установления закона изменения тока и напряжений в зависимости от времени в цепи с сосредоточенными параметрами, дает основание пользоваться эквивалентными электрическими схемами при рассмотрении переходных процессов в цепях с распределенными постоянными.

Отличие одних уравнений от других заключается в том, что уравнение для эквивалентной схемы с сосредоточенными параметрами содержит двойное напряжение источника напряжения и, кроме того, характеристическое сопротивление линии заменяется активным сопротивлением той же величины.

## *Примеры и задачи*

**4-26.** Почему при набегании главной волны на конец линии замкнутой на сопротивление, равное характеристическому, не образуется отраженных волн?

**4-27.** При распространении электромагнитной волны вдоль проводов линии, разомкнутой на конце, в электрическом поле запасается энергия $\frac{C_0 U^2}{2}$ ($C_0$ — емкость на единицу длины линии), равная энергии магнитного поля. При обратном пробеге волн энергия магнитного поля переходит в энергию электрического поля. Суммарная энергия электрического поля равна $2C_0U^2$. Из сравнения полученного выражения с выражением энергии электрического поля при прямом пробеге волн видно, что энергия увеличилась в четыре раза.

За счет чего увеличилась энергия электрического поля до такой величины?

**4-28.** За какие промежутки времени энергия потребляется линией, разомкнутой на конце, и за какие промежутки времени она отдается обратно источнику напряжения?

**4-29.** Зависит ли предельное значение тока в короткозамкнутой линии от величины емкости и индуктивности линии, если в начале линии приключен источник с постоянным напряжением?

**4-30.** Чему равно предельное значение тока в короткозамкнутой линии, обладающей сопротивлением $r$, если напряжение в начале линии $U$?

*Ответ.* $I_к = \frac{U}{r}$.

**4-31.** В конце воздушной линии с характеристическим сопротивлением $z_{c1} = 300$ *ом* присоединена другая воздушная линия с $z_{c2}=400$ *ом*, параллельно которой включена кабельная линия с характеристическим сопротивлением $z_{c3} = 50$ *ом*. По первой линии распространяется волна с крутым фронтом, амплитуда которой $U = 100$ *кв*.

Определить напряжения волн, проходящих во вторую и третью линии.

*Ответ.* $U_2 = U_3 = U \frac{2z_{c2} z_{c3}}{z_{c1} z_{c2} + z_{c2} z_{c3} + z_{c1} z_{c3}}$.

**4-32.** В условиях задачи 4-31 определить величину сопротивления $r_0$, которое нужно включить последовательно к началу кабельной линии, чтобы в первой линии отсутствовали отраженные волны.

*Ответ.* $r_0 = \frac{z_{c1}(z_{c2} + z_{c3}) - z_{c2} z_{c3}}{z_{c2} - z_{c1}}$.

**4-33.** По линии, замкнутой на сопротивление $r_2$, равное характеристическому сопротивлению $z_c$, движется волна напряжения, определяемая уравнением $u = U(1 - e^{\alpha t})$.

Найти закон изменения тока в сопротивлении нагрузки в зависимости от времени.

*Ответ.* $i_2 = \frac{U}{r_2}(1 - e^{-\alpha t})$.

**4-34.** Воздушная линия, замкнутая на емкость $C = 1$ *мкф* с параллельно подключенным сопротивлением $r = 1\,000$ *ом*, присоединяется к источнику энергии с постоянным напряжением $U = 300$ *кв*. Характеристическое сопротивление линии $z_c = 500$ *ом*, ее длина $l = 150$ *км*.

Построить кривые изменения напряжения и тока в зависимости от времени в точке $A$, находящейся на расстоянии $l_1 = 60$ *км* от конца линии.

## Решение

Составим эквивалентную схему (рис. 4-23) для конца линии. Из этой схемы

$$Z(p) = z_c + \frac{r\frac{1}{pC}}{r + \frac{1}{pC}}.$$

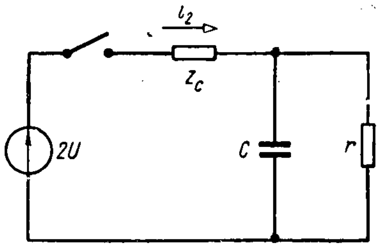



Рис. 4-23

Корень характеристического уравнения

$$p_1 = -\frac{r + z_c}{Crz_c} = -\frac{500 + 1000}{500 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = -3000\ сек^{-1};$$

$$Z(0) = r + z_c = 500 + 1000 = 1500\ ом;$$

$$Z'(p_1) = -\frac{r^2 C}{(rp_1 C + 1)^2} = -\frac{r^2 C}{\left(1 - \frac{r + z_c}{z_c}\right)^2} = -Cz_c^2;$$

$$p_1 Z'(p_1) = \frac{z_c}{r}(r + z_c) = \frac{500}{1000}(1000 + 500) = 750\ ом.$$

Ток в конце линии

$$i_2 = \frac{2U}{Z(0)} + \frac{2U}{p_1 Z'(p_2)} e^{p_1 t} = 400\,(1 + 2e^{-3000\,t})\ a.$$

Ток падающей волны

$$i_{пад} = \frac{U}{z_c} = \frac{300\,000}{500} = 600\ a.$$

Ток отраженной волны

$$i_{отр} = i_{пад} - i_2 = 200\,(1 - 4\,e^{-3000\,t})\ a.$$

Напряжение отраженной волны

$$u_{отр} = z_c\, i_{отр} = 100\,(1 - 4\,e^{-3000\,t})\ кв.$$

Кривые тока и напряжения в точке $A$ в зависимости от времени изображены на рис. 4-24. Отсчет времени здесь ведется от момента включения начала линии к источнику энергии.

На протяжении времени

$$t_1 = \frac{l - l_1}{v} = \frac{150 - 60}{300 \cdot 10^3} = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$$

напряжение и ток в точке $A$ отсутствуют, так как волны тока и напряжения до нее не успели дойти.

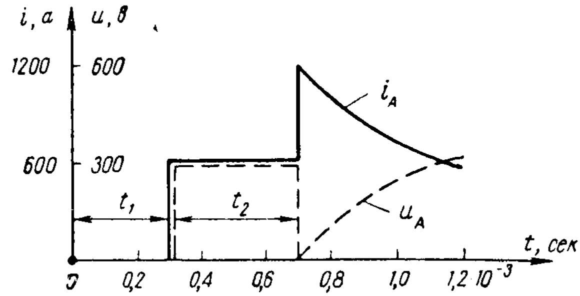



Рис. 4-24

На следующем интервале времени

$$t_2 = \frac{2l_1}{v} = \frac{2 \cdot 60}{3 \cdot 10^5} = 0{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ сек},$$

необходимом для пробега падающих волн до конца линии и прихода в точку $A$ отраженных волн, напряжение и ток определяются только падающими волнами:

$$u_A = u_{\text{пад}} = 300 \text{ кв}; \quad i_A = i_{\text{пад}} = 600 \text{ а}.$$

При $t > t_1 + t_2$ напряжение в точке $A$

$$u_A = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}},$$

а ток

$$i_A = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}}.$$

4-35. К концу линии длиной $l = 80$ *км* с характеристическим сопротивлением $z_c = 400$ *ом* присоединены последовательно включенные катушка, индуктивность которой $L = 50$ *мгн*, и конденсатор емкостью $C = 1$ *мкф*.

Построить графики распределения напряжения и тока вдоль линии через $t = 400$ *мксек*, прошедших с момента включения линии к источнику с постоянным напряжением $U = 100$ *кв*.

**4-36.** На конец линии, замкнутой на конденсатор, имеющий емкость $C = 3$ *мкф*, набегает волна напряжения, изменяющаяся по закону $u(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t})$. Характеристическое сопротивление линии $z_c = 400$ *ом*, длина линии $l = 150$ *км*, $U_0 = 150$ *кв*, $\alpha = 3\,000$ *сек*$^{-1}$.

Построить графики распределения напряжения и тока вдоль линии для момента, когда отраженные от конца линии волны дойдут до середины линии.

**4-37.** На конец воздушной линии, замкнутой на катушку с индуктивностью $L = 0{,}2$ *гн*, набегает волна напряжения, изменяющая-

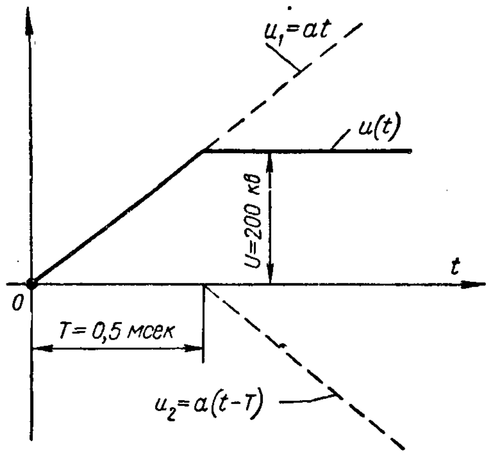



Рис. 4-25

ся в начале линии согласно рис. 4-25. Характеристическое сопротивление линии $z_c = 400$ *ом*, ее длина $l = 300$ *км*.

Построить график распределения тока вдоль линии через $t_1 = 1{,}75$ *мсек* после начала движения волны от начала линии.

## Решение

Заданную по условию волну, распространяющуюся по линии от источника энергии, можно представить как результат наложения друг на друга двух бесконечных косоугольных волн $u_1$ и $u_2$ с крутизной

$$a = \frac{U}{T} = 400 \cdot 10^6 \text{ в/сек},$$

так как $U = 200$ *кв* и $T = 0{,}5$ *мсек* (см. рис. 4-25).

При воздействии на эквивалентную схему (рис. 4-26) с сопротивлением $Z(p) = z_c + pL$ постоянного напряжения она будет иметь переходную проводимость

$$g(t) = \frac{1}{z_c}(1 - e^{p_1 t}),$$

где

$$p_1 = -\frac{z_c}{L} = -2000 \text{ сек}^{-1};$$

Ток в индуктивности под воздействием косоугольной волны $u_1 = at$ найдем при помощи интеграла Дюамеля:

$$i' = 2u_1(0)\, g(t) + \int_0^t g(t - \tau)\, 2u_1'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{2a}{z_c}\left[1 - e^{p_1(t-\tau)}\right] d\tau = \frac{2a}{z_c}t - \frac{2aL}{z_c^2}(1 - e^{p_1 t}).$$

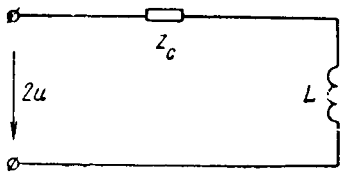



Рис. 4-26

Ток в индуктивности под воздействием косоугольной волны $u_2 = -a(t - T)$ будет

$$i'' = -\frac{2a}{z_c}(t - T) + \frac{2aL}{z_c^2}\left[1 - e^{p_1(t-T)}\right].$$

За время $t_1$ волна может пройти путь

$$x = vt_1 = 300 \cdot 10^3 \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-3} = 525 \text{ км},$$

т. е. прямая волна пройдет всю линию, а отраженная волна не дойдет до начала линии 75 *км*. Так как фронт волны продолжительностью $T$ составляет только половину времени пробега волны всей линии $\frac{l}{v} = 10^{-3}$ *сек*, то к рассматриваемому моменту времени напряжения и ток прямых волн будут вдоль линии постоянны:

$$u_{\text{пад}} = U = 200 \text{ кв};$$

$$i_{\text{пад}} = \frac{U_{\text{пад}}}{z_c} = 500 \text{ а}.$$

Так как отраженные волны к рассматриваемому моменту достигают только точки, находящейся на расстоянии 75 *км* от начала линии, то ток и напряжение на первых 75 *км* будут совпадать с током и напряжением падающей волны.

В дальнейшем будем отсчитывать время $t$ от момента начала движения отраженной волны, а расстояния $x$ — от конца линии. Тогда ток в конце линии на фронте отраженной волны $(0 < t < T)$

$$i'_{\text{отр}} = i_{\text{пад}} - i' = \frac{U}{z_c} - \frac{2a}{z_c} t + \frac{2aL}{z_c^2}(1 - e^{p_1 t}).$$

Соответствующее распределение тока отраженной волны вдоль линии найдем заменой в полученном выражении аргумента $t$ на $t - \frac{x}{v}$:

$$i_{\text{отр}} = \frac{U}{z_c} - \frac{2a}{z_c}\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{2aL}{z_c^2}\left[1 - e^{p_1\left(t - \frac{x}{v}\right)}\right].$$

Действительный ток в линии (на участке фронта отраженной волны)

$$i = i_{\text{пад}} - i'_{\text{отр}} = \frac{2a}{z_c}\left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{2aL}{z_c^2}\left[1 - e^{p_1\left(t - \frac{x}{v}\right)}\right] =$$

$$= 2 \cdot 10^6\left(t - \frac{x}{v}\right) - 10^3\left[1 - e^{-2000\left(t - \frac{x}{v}\right)}\right] a. \qquad (1)$$

Следует обратить внимание на то, что выражение для распределения тока вдоль линии совпадает по форме с уравнением тока в конце линии, отличаясь от него только аргументом ($t - \frac{x}{v}$ вместо $t$). Это всегда имеет место, когда падающие волны на протяжении всей линии имеют одинаковые значения. Воспользовавшись отмеченным общим правилом, напишем уравнение распределения тока в линии на последующих за фронтом участках, когда ток будет определяться совместным действием косоугольных волн $u_1$ и $u_2$:

$$i = i'\left(t - \frac{x}{v}\right) + i''\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2a}{z_c} T +$$

$$+ \frac{2aL}{z_c^2}(1 - e^{-p_1 T})\, e^{p_1\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \left[1000 - 1730\, e^{-2000\left(t - \frac{x}{v}\right)}\right] a, \; (2)$$

причем $t > T$. Соответствующие полученным уравнениям тока графики построены на рис. 4-27, где начало координат (точка $O$) соответствует концу линии. Отметим, что с момента начала движения отраженной волны прошло время

$$t = t_1'' - \frac{l}{v} = 1{,}75 \cdot 10^{-3} - \frac{300}{3 \cdot 10^5} = 0{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ сек}.$$

На участке $0 < x < 75$ *км* использовалось уравнение (2), а на участке $75 < x < 225$ *км* расчет велся по уравнению (1) (см. табл. 4-2).

Таблица 4-2

| $x$, *км* | $\frac{x}{v}$, *мсек* | $t - \frac{x}{v}$, *мсек* | $e^{-2000\left(t - \frac{x}{v}\right)}$ | $i$, *а* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,75 | 0,223 | 615 |
| 75 | 0,25 | 0,50 | 0,368 | 368 |
| 150 | 0,50 | 0,25 | 0,606 | 106 |
| 225 | 0,75 | 0 | 1,000 | 0 |

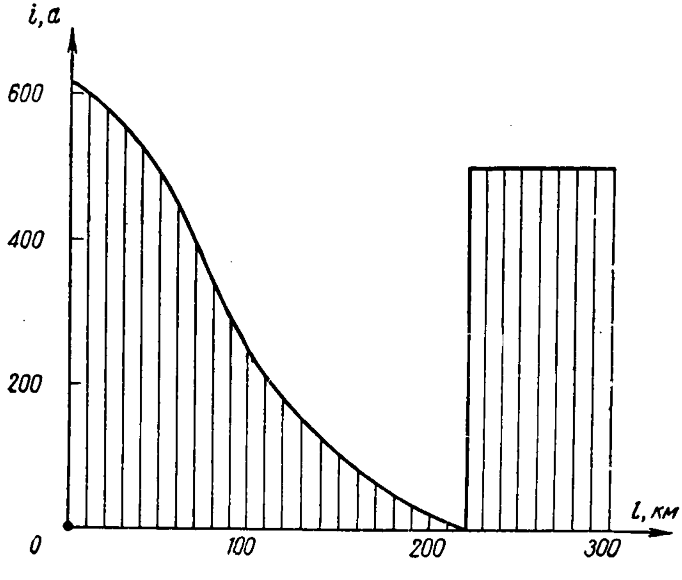



Рис. 4-27

4-38. Две линии, соединенные через активное сопротивление $r$, подключаются к источнику постоянного тока с напряжением $U$ (рис. 4-28). Длина первой линии $l_1$, длина второй линии $l_2$. Характеристические сопротивления первой и второй линии соответственно равны $z_{c1}$ и $z_{c2}$.

Определить ток и напряжение в конце второй линии для момента, когда распространившаяся по второй линии волна, дойдя до ее конца, отразится и дойдет обратно до сопротивления $r$. В конце второй линии включены индуктивность $L_2$ и сопротивление $r_2$.

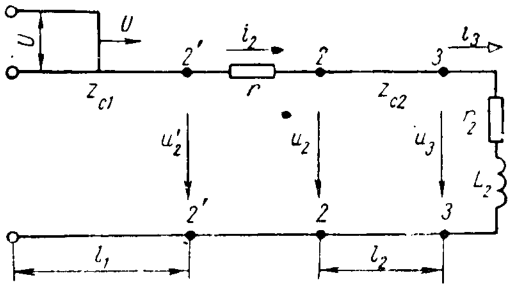



Рис. 4-28

## Решение

Первое отражение волн напряжения и тока, движущихся по первой линии, будет в точках 2′— 2′.

Для этих точек основное расчетное уравнение будет $2U = u_2' + z_{c1} i_2$, которое получаем из совместного решения уравнений

$$u_2' = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} = U + u_{\text{отр}};$$

$$i_2 = i_{\text{пад}} - i_{\text{отр}} = \frac{U - u_{\text{отр}}}{z_{c1}}.$$

Непосредственно из схемы имеем $u_2' = ri_2 + u_2 = ri_2 + z_{c2} i_2$ и после подстановки в расчетное уравнение получаем выражения преломленных волн

$$i_2 = \frac{2U}{z_{c1} + r + z_{c2}}$$

и

$$u_2 = i_2 z_{c2} = \frac{2U z_{c2}}{z_{c1} + r + z_{c2}},$$

которые для второй линии будут являться падающими волнами. В конце второй линии (точки *3-3*) волны напряжения $u_2$ и тока $i_2$ отражаются. Расчетное уравнение для точек *3—3* будет

$$2 u_2 = u_3 + z_{c2} i_3. \tag{1}$$

На основании второго закона Кирхгофа имеем

$$u_3 = r_2 i_3 + L_2 \frac{di_3}{dt}. \tag{2}$$

Подставляя значение $u_3$ в уравнение (1), получаем

$$2 u_2 = (r_2 + z_{c2}) i_3 + L_2 \frac{di_3}{dt}. \tag{3}$$

Из характеристического уравнения $L_2 p + r_2 + z_{c2} = 0$ находим корень $p = -\frac{r_2 + z_{c2}}{L_2}$.

В решении уравнения (3)

$$i_3 = i_3' + i_3'' = i_3' + Ae^{pt}. \tag{4}$$

составляющая принужденного режима

$$i_3' = \frac{2u_2}{r_2 + z_{c2}},$$

а постоянная интегрирования $A$ определяется из начальных условий:

при $t = 0$ $i_3(0) = 0$,

или

$$0 = \frac{2u_2}{r_2 + z_{c2}} + A; \quad A = -\frac{2u_2}{r_2 + z_{c2}}.$$

Уравнения тока и напряжения в конце второй линии

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{2u_2}{r_2 + z_{c2}} - \frac{2u_2}{r_2 + z_{c2}} e^{pt} = \frac{2u_2}{r_2 + z_{c2}}(1 - e^{pt}),$$

$$u_3 = r_2 i_3 + L_2 \frac{di_3}{dt} = \frac{2u_2 r_2}{r_2 + z_{c2}}(1 - e^{pt}) + 2u_2 e^{pt}.$$

На основании этих уравнений вычисляются величины $i_3$ и $u_3$ для момента времени $t_1 = \frac{l_2}{v_2}$, где $v_2$ — скорость движения волн по второй линии.

Закон изменения напряжения и тока в конце второй линии в зависимости от времени может быть также получен путем наложения падающих и отраженных волн:

$$u_3 = u_2 + u_{2\text{отр}} \quad \text{и} \quad i_3 = i_2 - i_{2\text{отр}}.$$

**4-39.** Конец первой линии и начало второй замкнуты на индуктивность $L = 0{,}1$ *гн* и соединены между собой (рис. 4-29).

По первой линии в направлении ко второй распространяется волна с прямоугольным фронтом. Характеристическое сопротивление первой линии $z_{c1} = 300$ *ом*, а второй $z_{c2} = 400$ *ом*. Напряжение главной волны, распространяющейся по первой линии, $U = 100$ *кв*.

Найти закон изменения волн напряжения и тока, проходящих во вторую линию и отраженных от узловой точки; кроме того, определить, на какое расстояние должна переместиться отраженная волна, если ток в индуктивности к этому моменту будет равен току главной волны, и построить графики распределения напряжения и тока вдоль линии для этого момента времени.

## Решение

На рис. 4-30 показана эквивалентная схема для узловой точки, образующей в месте присоединения индуктивности и второй линии к концу первой линии.

Из этой схемы

$$Z(p) = z_{c1} + \frac{pLz_{c2}}{z_{c2}+pL},$$

корень характеристического уравнения

$$p = -\frac{z_{c1}\,z_{c2}}{L\,(z_{c1}+z_{c2})} = -1714.$$

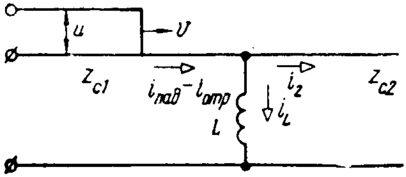



Рис. 4-29

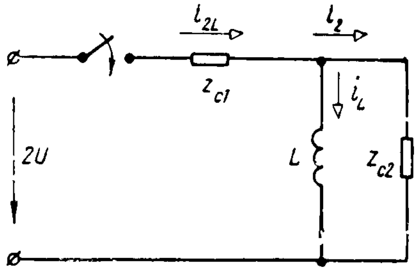



Рис. 4-30

Ток

$$i_{2L} = \frac{2U}{z_{c1}} + i''_{2L} = \frac{2U}{z_{c1}} + Ae^{pt},$$

где $\frac{2U}{z_{c1}}$ — принужденная составляющая тока $i_{2L}$;

$Ae^{pt}$ — свободная составляющая того же тока.

Постоянная интегрирования $A$ определяется из следующих начальных условий:

при $t = 0$

$$i_{2L}(0) = \frac{2U}{z_{c1}+z_{c2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{2U}{z_{c1}+z_{c2}} = \frac{2U}{z_{c1}} + A,$$

откуда

$$A = -\frac{2U\,z_{c2}}{z_{c1}\,(z_{c1}+z_{c2})}.$$

Таким образом,

$$i_{2L} = \frac{2U}{z_{c1}}\left(1 - \frac{z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt}\right).$$

Ток отраженной волны

$$i_{\text{отр}} = i_{\text{пад}} - i_{2L} = \frac{U}{z_{c1}} - \frac{2U}{z_{c1}}\left(1 - \frac{z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{2Uz_{c2}}{z_{c1}(z_{c1} + z_{c2})} e^{pt} - \frac{U}{z_{c1}}. \qquad (1)$$

Напряжение отраженной волны

$$u_{\text{отр}} = z_{c1}\, i_{\text{отр}} = U \frac{2z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt} - U = U\left(\frac{2z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt} - 1\right). \qquad (2)$$

Напряжение волны, проходящей во вторую линию, определяется из эквивалентной схемы выражением

$$u_2 = 2U - z_{c1}\, i_{2L} = \frac{2Uz_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt} \qquad (3)$$

и ток

$$i_2 = \frac{2U}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt}. \qquad (4)$$

Ток, ответвляющийся в индуктивность $L$, находится из выражения

$$i_L = i_{2L} - i_2 = \frac{2U}{z_{c1}}(1 - e^{pt_1}). \qquad (5)$$

Для определения расстояния, на которое распространяется отраженная волна по первой линии при указанном условии, достаточно приравнять ток в индуктивности току главной волны и из этого уравнения определить время $t_1$, т. е.

$$\frac{U}{z_{c1}} = \frac{2U}{z_{c1}}(1 - e^{pt_1}).$$

Подставляя в это уравнение числовые значения величин, получим $0{,}5 = e^{pt_1}$ или $t_1 = \frac{ln 2}{p} = 4{,}08 \cdot 10^{-4}$ *сек*. Так как $x_1 = vt_1$, то, принимая при заданном характеристическом сопротивлении скорость $v = 3 \cdot 10^5$ *км/сек*, получим

$$x_1 = 122{,}6 \text{ км}.$$

Полученные выше уравнения дают закон изменения во времени отраженных и проходящих во вторую линию волн только для узловой точки.

Для построения графиков распределения напряжения и тока вдоль первой и второй линий заменяем в уравнениях (1), (2), (3) и (4) $t$ на $t_1 - \frac{x}{v}$ (при условии $t_1 - \frac{x}{v} > 0$) и получаем

$$i_{отр} = \left[ 381\, e^{-1714\left(t_1 - \frac{x}{v}\right)} - 333 \right] a;$$

$$u_{отр} = \left[ 114 \cdot 10^3\, e^{-1714\left(t_1 - \frac{x}{v}\right)} - 100 \cdot 10^3 \right] в;$$

$$u_2 = \left[ 144 \cdot 10^3\, e^{-1714\left(t_1 - \frac{x}{v}\right)} \right] в;$$

$$i_2 = \left[ 285\, e^{-1714\left(t_1 - \frac{x}{v}\right)} \right] a,$$

где расстояние $x$ отсчитывается от узловой точки для отраженных волн влево, а для преломленных волн — вправо.

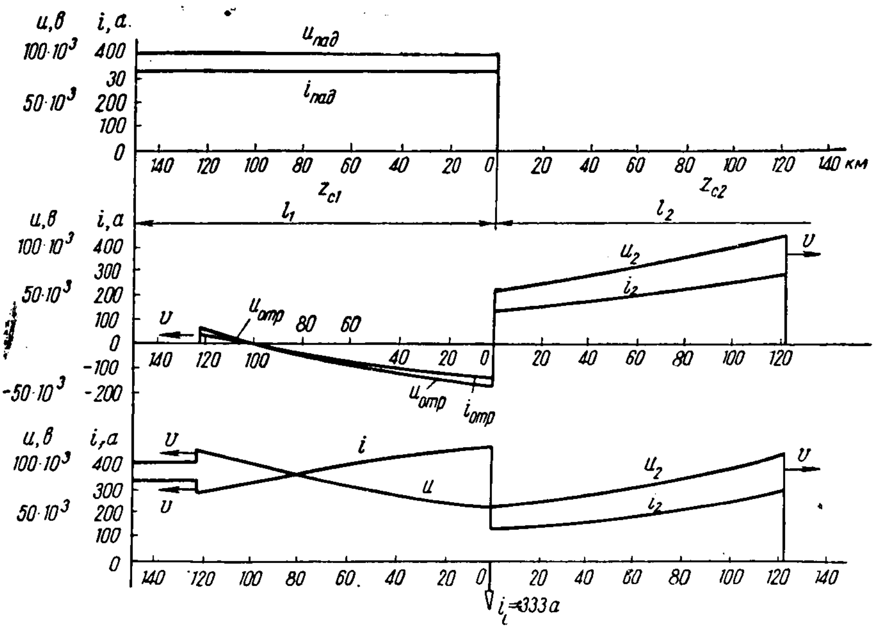



Рис. 4-31

По данным табл. 4-3 на рис. 4-31 построены графики падающих, отраженных и преломленных волн и графики распределения напряжения и тока вдоль первой и второй линий как сумма падающих и отраженных волн напряжения и разность падающих и отраженных волн тока.

Таблица 4-3

| $t_1$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-1714\left(t_1-\frac{x}{v}\right)}$ | $u_2$, *в* | $i_2$, *а* | $u_{отр}$, *в* | $i_{отр}$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 0 | 0,5 | $57\cdot10^3$ | 142,5 | $-43\cdot10^3$ | −142,5 |
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 20 | 0,558 | $63{,}6\cdot10^3$ | 159 | $-35{,}4\cdot10^2$ | −120 |
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 40 | 0,625 | $71{,}2\cdot10^3$ | 178 | $-28{,}8\cdot10^3$ | −95 |
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 60 | 0,712 | $81{,}1\cdot10^3$ | 203 | $-18{,}9\cdot10^3$ | −62 |
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 70 | 0,788 | $89{,}8\cdot10^3$ | 225 | $-10{,}2\cdot10^3$ | −33 |
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 100 | 0,875 | $101\cdot10^3$ | 252 | $+1\cdot10^3$ | +4 |
| $4{,}08\cdot10^{-4}$ | 122,6 | 1 | $114\cdot10^3$ | 285 | $+14\cdot10^3$ | +48 |

**4-40.** К концу воздушной линии присоединяется кабель, разомкнутый на конце. Линия заряжена до напряжения $U_0 = 6{,}6$ *кв* от источника постоянного напряжения (рис. 4-32).

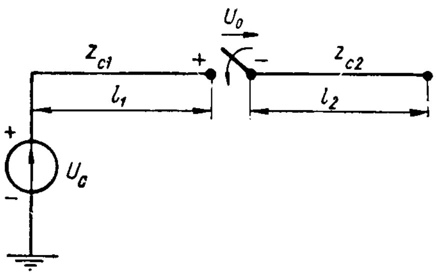



Рис. 4-32

Длина воздушной линии $l_1 = 50$ *км*, характеристическое сопротивление $z_{c1} = 400$ *ом*, скорость распространения волн по линии $v_1 = 3\cdot10^5$ *км/сек*. Длина кабеля $l_2 = 15$ *км*, характеристическое сопротивление $z_{c2} = 100$ *ом*, скорость распространения волн в кабеле $v_2 = 1\cdot5\cdot10^{-5}$ *км/сек*.

Найти распределение напряжения и тока вдоль воздушной линии и кабеля для момента времени $t = 250\cdot10^{-6}$ *сек* после включения кабеля.

## Решение

Процессы в цепи могут рассматриваться по принципу наложения как состоящие из предшествующего подключению кабеля режима и процесса, который возникает при включении между линией и кабелем источника с э. д. с. $E$, равной напряжению и совпадающей с ним по направлению, которое было между разомкнутыми концами линии и кабеля (рис. 4-33).

По линии от ее конца к началу будет распространяться волна напряжения $u_{1пад}$ и волна тока $i_{1пад}$. Эти волны по направлению движения сходны с отраженными волнами.

В кабеле появляются падающие волны $u_{2пад}$ и $i_{2пад}$.

В месте стыка линии и кабеля при выбранных положительных направлениях токов имеем соотношения

$$i_{1пад} = -i_{2под} \quad \text{и} \quad -z_{c1} i_{1пад} + z_{c2} i_{2пад} = U_0,$$

из которых

$$i_{2пад} = \frac{U_0}{z_{c1} + z_{c2}} = \frac{6600}{400 + 100} = 13{,}2 \ a;$$

$$i_{1пад} = -13{,}2 \ a;$$

$$u_{2пад} = z_{c2} i_{2пад} = 100 \cdot 13{,}2 = 1320 \ в;$$

$$u_{1пад} = z_{c1} i_{1пад} = 400(-13{,}2) = -5280 \ в.$$

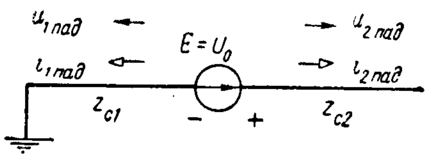



Рис. 4-33

Через $t = 100 \cdot 10^{-6}$ *сек* после включения падающие волны в кабеле распространятся до его конца, т. е. на расстояние $tv_2 = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}5 \cdot 10^5 = 15$ *км*, а в воздушной линии — на расстояние $l = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^5 = 30$ *км*. На этом участке линии устанавливается напряжение

$$u_1 = U_0 + u_{1пад} = 6600 + (-5280) = 1320 \ в$$

и ток

$$i_1 = I_0 - i_{1пад} = 0 - (-13{,}2) = +13{,}2 \ a$$

(до включения кабеля ток в линии $I_0 = 0$).

Данные о распределении напряжения и тока для $t = 100 \cdot 10^{-6}$ *сек* сводим в табл. 4-4.

Таблица 4-4

| *x км* — расстояние от начала линии | *U, в* | *i, a* |
|---|---|---|
| От 0 до 20 . . . . . . . . . . | 6600 | 0 |
| От 20 до 65 . . . . . . . . . . | 1320 | 13,2 |

В этот момент от открытого конца кабеля волны будут отражаться без перемены знака:

$$i_{2\text{отр}} = +13{,}2\ a \quad \text{и} \quad u_{2\text{отр}} = +1320\ в.$$

В момент $t = 166{,}6 \cdot 10^{-6}$ *сек* по всей линии установятся напряжение $u = 1320$ *в* и ток $i = 13{,}2$ *а*.

Источник в начале линии повысит напряжение линии до 6 600 *в*, т. е. по линии начнут распространяться волна напряжения

$$u'_{1\text{пад}} = U_0 - u = 6600 - 1320 = +5280\ в.$$

и волна тока

$$i'_{1\text{пад}} = \frac{u'_{1\text{пад}}}{z_{c1}} = \frac{5280}{400} = +13{,}2\ a.$$

В момент $t = 200 \cdot 10^{-6}$ *сек* распределение напряжения и тока будет (см. табл. 4-5):

Таблица 4-5

| *x, км* — расстояние от начала линии | *U, в* | *i, а* |
|---|---|---|
| От 0 до 10 . . . . . . . . . . | 6600 | 26,4 |
| От 10 до 50 . . . . . . . . . . | 1320 | 13,2 |
| От 50 до 65 . . . . . . . . . . | 2640 | 0 |

Отраженные от конца кабеля волны в месте стыка линии и кабеля вновь отразятся.

Коэффициент отражения

$$n = \frac{z_{c1} - z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} = 0{,}6.$$

По кабелю будут распространяться отраженные волны

$$u'_{2\,\text{отр}} = n u_{2\,\text{отр}} = 0{,}6 \cdot 1320 = 792\ в$$

и

$$i'_{2\text{отр}} = n i_{2\text{отр}} = 0{,}6 \cdot 13{,}2 = 7{,}92\ a;$$

по воздушной линии — преломленные волны:

$$u_{1\text{пр}} = u_{2\text{отр}} + u'_{2\text{отр}} = u_{2\text{отр}} + n u_{2\text{отр}} = (1 + n)\, u_{2\text{отр}} = $$
$$= 1{,}6 \cdot 1320 = 2112\ в$$

и

$$i_{1\text{пр}} = (1 - n)\, i_{2\,\text{отр}} = +0{,}4 \cdot 13{,}2 = +5{,}38\ a.$$

В линии и кабеле от места стыка будут устанавливаться напряжения

$$u_1' = u_1 + u_{1\text{пр}} = 1320+2112=3432 \text{ } в;$$

$$u_2 = u_2 + u_{2\text{отр}}' = 2640+792=3432 \text{ } в$$

и токи

$$i_1' = i_1 - i_{1\text{пр}} = 13{,}2 - 5{,}28 = 7{,}92 \text{ } a;$$

$$i_2' = i_2 + i_{2\text{отр}}' = 0+7{,}92=7{,}92 \text{ } a.$$

В момент времени $t = 250 \cdot 10^{-6}$ *сек* будет следующее распределение напряжения и тока (см. табл. 4-6):

Таблица 4-6

| *x, км* — расстояние от начала линии | $U_1$, *в* | $i_1$, *а* |
|---|---|---|
| От 0 до 25 . . . . . . . . . . . | 6600 | 26,4 |
| От 25 до 35 . . . . . . . . . . | 1320 | 13,2 |
| От 35 до 57,5 . . . . . . . . . | 3420 | 7,92 |
| От 57,5 до 65 . . . . . . . . . | 2640 | 0 |

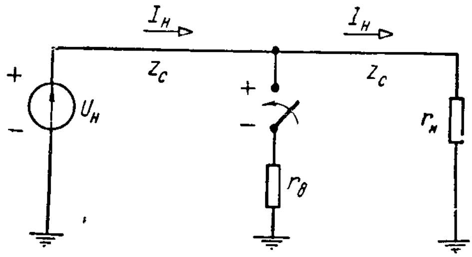



Рис. 4-34

В дальнейшем ток в линии и кабеле убывает до нуля, а напряжение возрастает до установившегося значения 6,6 *кв*.

**4-41.** В середине воздушной линии, находящейся под напряжением $U_н = 26$ *кв* и нагруженной сопротивлением $r_н = 500$ *ом*, подключается дополнительная нагрузка $r_д = 200$ *ом* (рис. 4-34).

Длина воздушной линии $l = 80$ *км*; характеристическое сопротивление $z_c = 400$ *ом*; скорость распространения волн $v = 3 \times \times 10^{-5}$ *км/сек*. Ток в линии до включения дополнительной нагрузки $I_н = \frac{U_н}{r_н} = 52$ *а*.

Найти распределение напряжения и тока вдоль линии через $t = 50 \cdot 10^{-6}$ *сек* после замыкания рубильника.

## Решение

После замыкания рубильника, что эквивалентно включению источника с э. д. с. $E = U_н$, по линии будут распространяться в обе стороны от места присоединения равные по величине волны напряжения и тока (рис. 4-35).

При выбранных положительных направлениях токов для узловой точки $a$ имеем

$$i_д = -2i_{пад}.$$

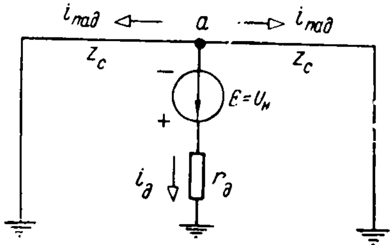



Рис. 4-35

Из уравнения электрического состояния находим выражение тока $i_{пад}$:

$$-z_c\, i_{пад} + r_д\, i_д = U_н,$$

или

$$-z_c\, i_{пад} - 2r_д\, i_{пад} = U_н,$$

откуда

$$i_{пад} = \frac{U_н}{2r_д + z_c} = -32{,}5\ a$$

и

$$u_{пад} = -\frac{V_н z_c}{2r_д + z_c} = -13\ кв.$$

Волна тока $i_{пад}$, распространяющаяся по линии справа налево, аналогично отраженной волне тока вычитается из тока нагрузки $I_н$, а распространяющаяся по линии слева направо — складывается с ним.

Волны напряжения $u_{пад}$ складываются с напряжением линии $U_н$ по обе стороны от точки присоединения дополнительной нагрузки.

Графики распределения напряжения и тока вдоль линии для момента времени $t = 50 \cdot 10^{-6}$ *сек* даны на рис. 4-36.

4-42. По воздушной линии ($z_{c1} = 500$ *ом*, $v_1 = 3 \cdot 10^5$ *км/сек*) распространяется волна напряжения, изменяющаяся по закону

$$u_{пад} = U_0 (1 - e^{-\alpha t}),$$

где

$$U_0 = 26 \text{ кв} \quad и \quad \alpha = 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

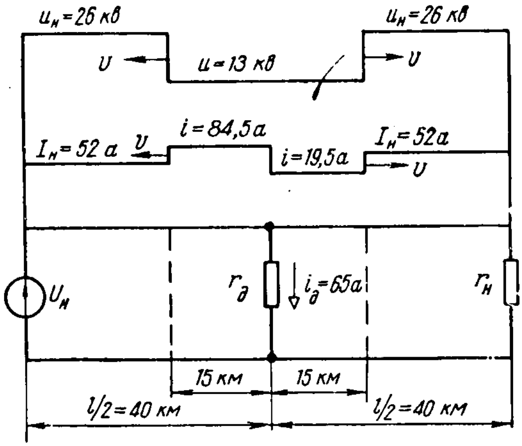



Рис. 4-36

Проходя мимо емкости $C = 5 \cdot 10^{-6}$ *ф*, эквивалентной емкости подстанции, волна переходит в кабель ($z_{c3} = 150$ *ом*, $v_2 = 1{,}5 \times \times 10^5$ *км/сек*) (рис. 4-37).

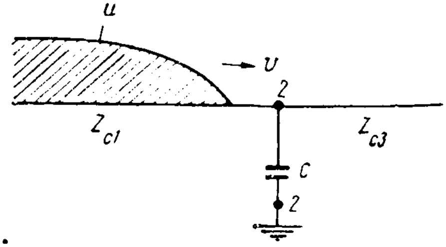



Рис. 4-37

Построить графики распределения напряжения и тока вдоль воздушной линии и кабеля через $t_1 = 1{,}15 \cdot 10^{-6}$ *сек* после перехода волны в кабель.

## Решение

Так как падающая волна напряжения является функцией времени и в линию включен элемент с сосредоточенным реактивным сопротивлением, то при решении задачи будем пользоваться теоремой Дюамеля.

Для применения интеграла Дюамеля необходимо найти переходные проводимости участков цепи при включении линии на источник с неизменным напряжением $U$.

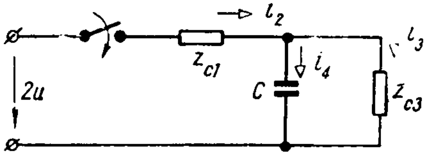



Рис. 4-38

Для узловых точек 2—2 составляем эквивалентную схему (рис. 4-38) и пишем уравнения

$$2U = z_{c1}\, i_2 + z_{c3}\, i_3;$$

$$2U = z_{c1}\, i_2 + \frac{1}{C}\int i_4\, dt;$$

$$i_2 = i_3 + i_4.$$

Из характеристического уравнения

$$z_{c1}\, z_{c3}\, Cp + z_{c1} + z_{c3} = 0$$

находим корень

$$p = -\frac{z_{c1} + z_{c3}}{z_{c1}\, z_{c3}\, C} = -1{,}73 \cdot 10^6$$

Определяем токи принужденного режима

$$i_2' = i_3' = \frac{2U}{z_{c1} + z_{c3}}, \quad i_4' = 0$$

и значения токов в момент включения ($t = 0$)

$$i_2(0) = i_4(0) = \frac{2U}{z_{c1}}, \quad i_3(0) = 0.$$

Из уравнений токов

$$i_2 = i_2' + A_2 e^{pt}; \quad i_3 = i_3' + A_3 e^{pt}; \quad i_4 = i_4' + A_4 e^{pt};$$

полагая $t = 0$, получаем соотношения

$$\frac{2U}{z_{c1}} = \frac{2U}{z_{c1} + z_{c3}} + A_2; \quad 0 = \frac{2U}{z_{c1} + z_{c3}} + A_3; \quad \frac{2U}{z_{c1}} = 0 + A_4,$$

из которых находим постоянные интегрирования

$$A_2 = \frac{2U z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1} + z_{c3})}, \quad A_3 = -\frac{2U}{z_{c1} + z_{c3}} \text{ и } A_4 = \frac{2U}{z_{c1}}.$$

Законы изменения токов в эквивалентной схеме будут

$$i_2 = 2Ug_2(t) = \frac{2U}{z_{c1}+z_{c3}} + \frac{2Uz_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})}e^{pt} =$$

$$= 2U\left(\frac{1}{z_{c1}+z_{c3}} + \frac{z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})}e^{pt}\right);$$

$$i_3 = 2Ug_3(t) = \frac{2U}{z_{c1}+z_{c3}} - \frac{2U}{z_{c1}+z_{c3}}e^{pt} = 2U\left(\frac{1}{z_{c1}+z_{c3}} - \frac{1}{z_{c1}+z_{c3}}e^{pt}\right),$$

$$i_4 = 2Ug_4(t) = 2U\frac{1}{z_{c1}}e^{pt},$$

где переходные проводимости равны:

$$g_2(t) = \frac{1}{z_{c1}+z_{c3}} + \frac{z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})}e^{pt};$$

$$g_3(t) = \frac{1}{z_{c1}+z_{c3}} - \frac{1}{z_{c1}+z_{c3}}e^{pt};$$

$$g_4(t) = \frac{1}{z_{c1}}e^{pt}.$$

Закон изменения токов в зависимости от времени в ветвях эквивалентной схемы при включении ее на напряжение $u = U_0(1 - e^{-\alpha t})$ находим при помощи интеграла

$$i = U(0)\,g(t) + \int_0^t g(t-\tau)\,u'(\tau)\,d\tau,$$

где $U(0) = 2U_0(1 - e^{\circ}) = 0$ — величина напряжения, на которое включается схема в начальный момент ($t = 0$);

$u'(\tau) = 2\alpha U_0 e^{-\alpha\tau}$ — производная от заданной функции напряжения по новой переменной;

$$i_2 = 0\cdot g_2(t) + \int_0^t \left[\frac{1}{z_{c1}+z_{c3}} + \frac{z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})}e^{p(t-\tau)}\right] \times$$

$$\times 2\alpha U_0 e^{-\alpha\tau}\,d\tau = \frac{2\alpha U_0}{z_{c1}+z_{c3}}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\varkappa}\right) +$$

$$+ \frac{2\alpha U_0 z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})}\left[-\frac{e^{pt}}{p+\alpha}\left(e^{-(p+\alpha)t} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{2U_0}{z_{c1}+z_{c3}}(1 - e^{-\alpha t}) - \frac{2\alpha U_0 z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})(p+\alpha)}(e^{-\alpha t} - e^{pt}); \qquad (1)$$

$$i_3=0\cdot g_3(t)+\int\limits_0\left[\frac{1}{z_{c1}+z_{c3}}-\frac{1}{z_{c1}+z_{c3}}e^{p(t-\tau)}\right]2\alpha U_0 e^{-\alpha\tau}d\tau=$$

$$=\frac{2U_0}{z_{c1}+z_{c3}}(1-e^{-\alpha t})+\frac{2\alpha U_0}{(z_{c1}+z_{c3})(p+\alpha)}(e^{-\alpha t}-e^{pt}); \qquad (2)$$

$$i_4=0\cdot g_4 t+\int\limits_0^t\frac{1}{z_{c1}}e^{p(t-\tau)}2\alpha U_0 e^{-\alpha\tau}d\tau=$$

$$=\frac{2\alpha U_0}{z_{c1}(p+\alpha)}(e^{pt}-e^{-\alpha t}). \qquad (3)$$

Токи $i_3$ и $i_4$ являются реальными токами в кабеле и емкости. Кривая изменения тока в емкости, как функция времени, может быть непосредственно построена по уравнению (3).

Ток $i_2$, равный сумме токов $i_3$ и $i_4$, по отношению к воздушной линии, является преломленной волной тока.

Отраженную волну тока в воздушной линии находим из соотношения для узловых точек *2—2*:

$$i_{\text{отр}}=i_{\text{пад}}-i_2=\frac{u_{\text{пад}}}{z_{c1}}-i_2=\frac{U_0}{z_{c1}}(1-e^{-\alpha t})-$$

$$-\frac{2U_0}{z_{c1}+z_{c3}}(1-e^{-\alpha t})+\frac{2\alpha U_0 z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})(p+\alpha)}(e^{-\alpha t}-e^{pt})=$$

$$=\frac{U_0}{z_{c1}}(1-e^{-\alpha t})\frac{z_{c3}-z_{c1}}{z_{c1}+z_{c3}}+\frac{2\alpha U_c z_{c3}}{z_{c1}(z_{c1}+z_{c3})(p+\alpha)}(e^{-\alpha t}-e^{0t}). \qquad (4)$$

Графики распределения напряжения и тока вдоль воздушной линии и кабеля строим по уравнениям напряжений и токов, заменяя переменную $t$ на $t-\frac{x}{v}$;

$$u_{\text{пад}}=U_0\left[1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v}\right)}\right]=26\cdot 10^3\left[1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v_1}\right)}\right]\ в;$$

$$i_{\text{пад}}=\frac{U_0}{z_{c1}}\left[1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v}\right)}\right]=52\left[1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v_1}\right)}\right]\ a;$$

$$i_3=\frac{2U_0}{z_{c1}+z_{c3}}\left[1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v_2}\right)}\right]+\frac{2\alpha U_0}{(z_{c1}+z_{c3})(p+\alpha)}\times$$

$$\times\left[e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v_2}\right)}-e^{p\left(t-\frac{x}{v_2}\right)}\right]=80\left[1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v_2}\right)}\right]-$$

$$-181\left[e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v_2}\right)}-e^{p\left(t-\frac{x}{v_2}\right)}\right]\ a;$$

$$u_3=z_{c3}i_3;$$

$$i_{\text{отр}} = \frac{U_0}{z_{\text{c}1}}\left[1 - e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right]\frac{z_{\text{c}3} - z_{\text{c}1}}{z_{\text{c}1} + z_{\text{c}3}} + \frac{2\alpha U_0 z_{\text{c}3}}{z_{\text{c}1}(z_{\text{c}1} + z_{\text{c}3})(p + \alpha)} \times$$

$$\times \left[e^{\alpha - \left(t - \frac{x}{v_1}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right] = -28\left[1 - e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right] -$$

$$-54{,}5\left[e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right]\ a;$$

$$u_{\text{отр}} = z_{\text{c}1}\, i_{\text{отр}}.$$

В уравнениях отраженных волн в воздушной линии и падающих волн в кабеле расстояние $x$ отсчитывается соответственно влево и вправо от узловых точек *2 — 2*.

В уравнениях падающих волн расстояние $x$ нужно отсчитывать вправо от вспомогательной точки, находящейся влево от узловых точек *2—2* на расстоянии $l_2$, которое должно быть не меньше пробега отраженных волн:

$$l_1 = t_1 v_1 = 1{,}15 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^5 = 0{,}345\ \textit{км}.$$

Выбираем $l_2 = 0{,}4$ *км*. Тогда время для расчета распределения напряжения и тока падающих волн от точки с координатой $l_2 = 0{,}4$ *км* до узловых точек *2-2* будет

$$t_2 = \frac{l_2 + l_1}{v_1} = \frac{0{,}4 + 0{,}345}{3 \cdot 10^5} = 2{,}48 \cdot 10^{-6}\ \textit{сек}.$$

Для построения графиков составляем табл. 4-7, 4-8, 4-9.

Таблица 4-7

**Воздушная линия (падающие волны)**

| $t_2$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-\alpha\left(t_2 - \frac{x}{v_1}\right)}$ | $1 - e^{-\alpha\left(t_2 - \frac{x}{v_1}\right)}$ | $u_{\text{пад}}$, *в* | $i_{\text{пад}}$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|
| $2{,}48 \cdot 10^{-6}$ | 0 | 0,0529 | 0,947 | $24{,}6 \cdot 10^3$ | 49,2 |
| $2{,}48 \cdot 10^{-6}$ | 0,1 | 0,0789 | 0,92 | $23{,}9 \cdot 10^3$ | 47,8 |
| $2{,}48 \cdot 10^{-6}$ | 0,2 | 0,1177 | 0,882 | $22{,}9 \cdot 10^3$ | 45,8 |
| $2{,}48 \cdot 10^{-6}$ | 0,3 | 0,1755 | 0,824 | $21{,}4 \cdot 10^3$ | 42,8 |
| $2{,}48 \cdot 10^{-6}$ | 0,4 | 0,2516 | 0,748 | $19{,}4 \cdot 10^3$ | 38,8 |

Ток в емкости в момент $t_1 = 1{,}15 \cdot 10^{-6}$ *сек* $i_4 = 28$ *а*.

По данным таблиц построены графики на рис. 4-39.

**4-43.** Волна напряжения, изменяющаяся по закону

$$u_{\text{пад}} = U_0 e^{-\alpha t}$$

($\alpha = 3 \cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$; $U_0 = 36$ *кв*), распространяется по воздушной линии ($z_{\text{c}1} = 500$ *ом*; $v_1 = 3 \cdot 10^5$ *км/сек*),

Таблица 4-8

**Воздушная линия (отраженные волны)**

| $t_1$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $1-e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}-e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $u_{отр}$, *в* | $i_{отр}$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0 | 0,2516 | 0,748 | 0,1367 | 0,1149 | —13600 | —27,2 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,1 | 0,375 | 0,625 | 0,244 | 0,131 | —12320 | —24,64 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,2 | 0,559 | 0,441 | 0,443 | 0,125 | — 9575 | —19,15 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,3 | 0,835 | 0,165 | 0,771 | 0,064 | — 4085 | — 8,17 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,345 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 4-9

**Кабельная линия**

| $t_1$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}$ | $1-e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}$ | $e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}$ | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}-e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}$ | $u_з$, *в* | $i_з$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0 | 0,2516 | 0,748 | 0,1367 | 0,1149 | 5860 | 39,15 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,55 | 0,375 | 0,625 | 0,244 | 0,131 | 3940 | 26,3 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,1 | 0,559 | 0,441 | 0,434 | 0,125 | 1890 | 12,6 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,15 | 0,835 | 0,165 | 0,771 | 0,064 | 240 | 1,6 |
| $1,15\cdot10^{-6}$ | 0,1725 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

которая через реактор с индуктивностью $L = 9\cdot10^{-2}$ *гн* (рис. 4-40) соединена с другой линией ($z_{c2} = 400$ *ом*; $v_2 = 3\cdot10^5$ *км/сек*).

Построить графики распределения напряжения и тока вдоль линий для момента времени, когда преломленные волны распространятся по второй линии на расстояние $l_2 = 45$ *км*.

## Решение

Составляем эквивалентную схему для узловых точек *2—2* и определяем ее переходную проводимость (рис. 4-41). Из известного закона изменения тока в зависимости от времени в цепи с активным сопротивлением $z_{c1} + z_{c2}$ и индуктивностью $L$

$$i_2 = \frac{2U}{z_{c1} + z_{c2}} \left(1 - e^{-\frac{z_{c1} + z_{c2}}{L} t}\right) = 2U \left[\frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} - \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt}\right]$$

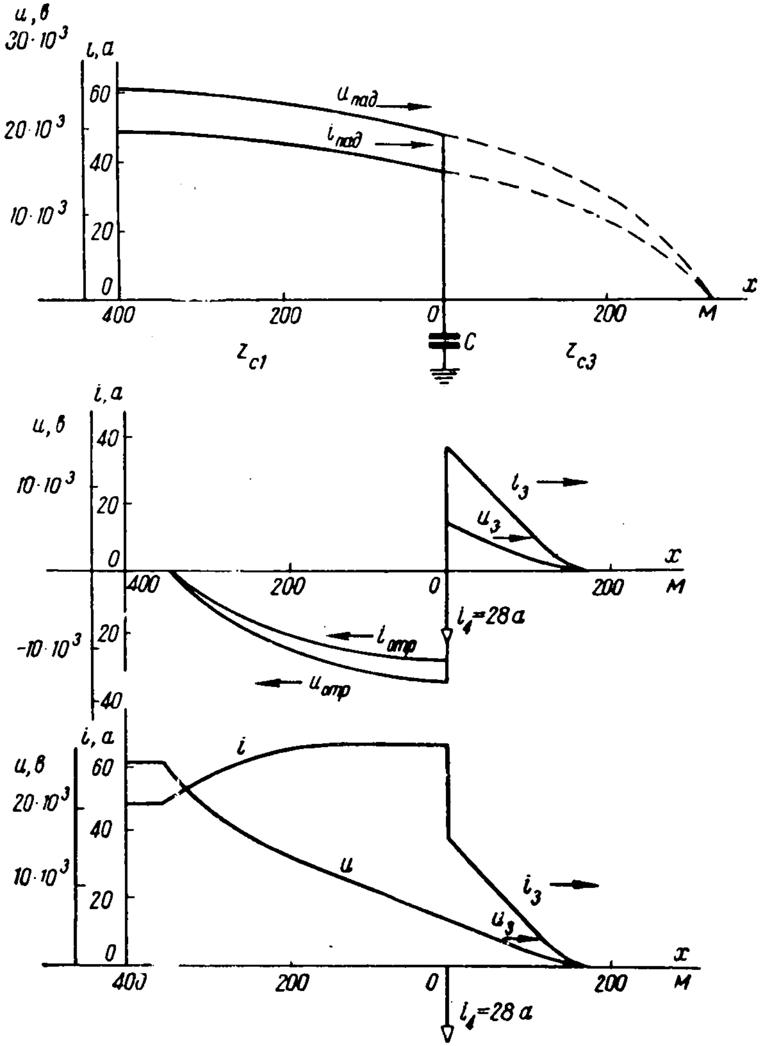



Рис. 4-39

получаем переходную проводимость

$$g(t) = \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} - \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt},$$

где

$$p = -\frac{z_{c1} + z_{c2}}{L} = -0{,}01 \cdot 10^6.$$

Ток в схеме при включении к изменяющемуся напряжению $u = 2U_0 e^{-\alpha t}$ находим из интеграла Дюамеля:

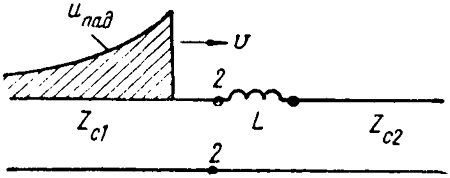



Рис. 4-40

$$i_2 = U(0)\, g(t) + \int_0^t g(t-\tau)\, u'(\tau)\, d\tau,$$

где

$$U(0) = (2U_0 e^{-\alpha t})_{t=0} = 2U_0,$$

$$u'(\tau) = -2\alpha U_0 e^{-\alpha\tau},$$

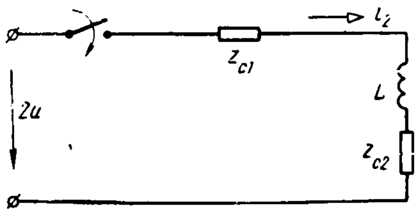



Рис. 4-41

Вычисляем интеграл:

$$i_2 = 2U_0 \left[ \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} - \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt} \right] +$$

$$+ \int_0^t \left[ \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} - \frac{1}{z_{c1} + z_{c2}} e^{p(t-\tau)} \right] (-2\alpha U_0 e^{-\alpha\tau})\, d\tau =$$

$$= \frac{2U_0}{z_{c1} + z_{c2}} (1 - e^{pt}) - \frac{2U_0}{z_{c1} + z_{c2}} (1 - e^{-\alpha t}) -$$

$$- \frac{2\alpha U_0}{(z_{c1} + z_{c2})(p + \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{pt}) = \frac{2U_0}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot \frac{p}{p + \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{pt}).$$

Отраженную волну тока в первой линии находим из соотношения

$$i_{\text{отр}} = i_{\text{пад}} - i_2 = \frac{u_{\text{пад}}}{z_{c1}} - i_2 = \frac{U_0}{z_{c1}} e^{-\alpha t} -$$

$$- \frac{2U_0}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot \frac{p}{p+\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{pt}).$$

Отраженная волна напряжения

$$u_{\text{отр}} = z_{c1}\, i_{\text{отр}} = U_0\, e^{-\alpha t} - \frac{2U_0\, z_{c1}}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot \frac{p}{p+\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{pt}).$$

Для построения графиков в уравнениях падающих, преломленных и отраженных волн заменяем $t$ на $t - \frac{x}{v}$:

$$u_{\text{пад}} = U_0 e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} = \left[36 \cdot 10^3 e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right] \; в;$$

$$i_{\text{пад}} = \frac{U_0}{z_{c1}} e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} = \left[72 e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right] \; a;$$

$$i_2 = \frac{2U_0}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot \frac{p}{p+\alpha} \left[ e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_2}\right)} \right] =$$

$$= \left\{114{,}5\left[e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_2}\right)}\right]\right\} \; a;$$

$$u_2 = z_{c2} i_2 = \left\{45{,}8 \cdot 10^3 \left[e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_2}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_2}\right)}\right]\right\} \; в;$$

$$i_{\text{отр}} = \left\{72 e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} - 114{,}5\left[e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right]\right\} \; a;$$

$$u_{\text{отр}} = \left\{36 \cdot 10^3 e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} - \right.$$

$$\left. - 57{,}25 \cdot 10^3 \left[e^{-\alpha\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} - e^{p\left(t - \frac{x}{v_1}\right)}\right]\right\} \; в.$$

Для отраженных и преломленных волн расстояние $x$ отсчитывается от узловых точек *2—2* соответственно влево и вправо. Время $t_1$ отсчитывается от момента начала отражения волн и по условию

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{l_2}{v_2} = \frac{45}{3 \cdot 10^5} = 150 \cdot 10^{-6} \; сек.$$

Для падающих волн выбираем начало отсчета от вспомогательной точки, находящейся на расстоянии $l_3 = 60$ *км* ( не менее $l_1 = t_1 v_1$)

влево от узловых точек 2-2, и расстояние $x$ отсчитываем от этой точки вправо. Время для падающих волн

$$t_3=\frac{l_3}{v_1}+\frac{l_1}{v_1}=350\cdot10^{-6}\ сек.$$

Результаты расчетов сводим в табл. 4-10, 4-11, 4-12.

Таблица 4-10

**Падающие волны**

| $t_3$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-\alpha\left(t_3-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $u_{пад}$, *в* | $i_{пад}$, *а* |
|---|---|---|---|---|
| $350\cdot10^{-6}$ | 0 | 0,348 | $12{,}5\cdot10^3$ | 25,1 |
| $350\cdot10^{-6}$ | 30 | 0,472 | $17{,}0\cdot10^3$ | 34,0 |
| $350\cdot10^{-6}$ | 60 | 0,638 | $22{,}9\cdot10^3$ | 46,0 |

Таблица 4-11

**Отраженные волны**

| $t_1$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}-e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_1}\right)}$ | $u_{отр}$, *в* | $i_{отр}$, *а* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $150\cdot10^{-6}$ | 0 | 0,638 | 0,223 | 0,415 | $-0{,}85\cdot10^3$ | $-1{,}7$ |
| $150\cdot10^{-6}$ | 15 | 0,741 | 0,368 | 0,373 | $+5{,}45\cdot10^3$ | $+10{,}9$ |
| $150\cdot10^{-6}$ | 30 | 0,861 | 0,607 | 0,254 | $+16{,}6\cdot10^3$ | $+33$ |
| $150\cdot10^{-6}$ | 45 | 1 | 1 | 0 | $+36\cdot10^3$ | $+72$ |

Таблица 4-12

**Преломленные волны**

| $t_1$, *сек* | $x$, *км* | $e^{-\alpha\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}-e^{p\left(t_1-\frac{x}{v_2}\right)}$ | $u_2$, *в* | $i_2$, *а* |
|---|---|---|---|---|
| $150\cdot10^{-6}$ | 0 | 0,415 | $19{,}0\cdot10^3$ | 47,5 |
| $150\cdot10^{-6}$ | 15 | 0,373 | $17{,}1\cdot10^3$ | 42,7 |
| $150\cdot10^{-6}$ | 30 | 0,254 | $11{,}6\cdot10^3$ | 29,1 |
| $150\cdot10^{-6}$ | 45 | 0 | 0 | 0 |

Графики распределения напряжения и тока вдоль линий даны на рис. 4-42.

Скачок напряжения в месте стыка линий (на реакторе) вызван э. д. с. самоиндукции, величина которой для $t_1=150\cdot10^{-6}$ *сек* равна

$$e_L=-L\frac{di_2}{dt}=-L\frac{2U_0}{z_{c1}+z_{c2}}\cdot\frac{p}{p+\alpha}\left[-\alpha e^{-\alpha t_1}-pe^{pt_1}\right]=-3\,190\ в.$$

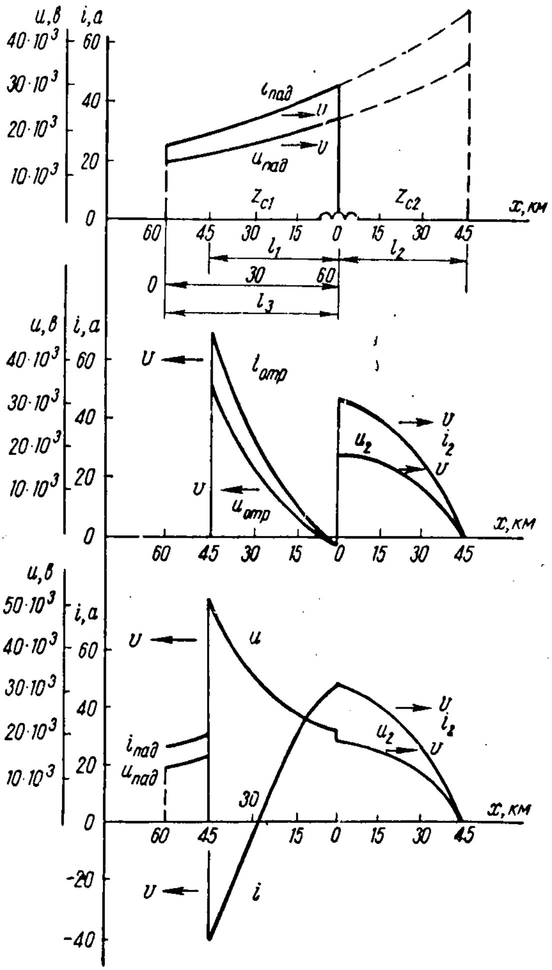


Рис. 4-42

## Тема 4

## Переходные процессы в нелинейных цепях

Расчет переходных процессов в нелинейных цепях принципиально отличается от расчета в линейных цепях. Причиной является невозможность применения принципа наложения, благодаря чему нельзя действительные токи и напряжения в нелинейной цепи представить как сумму принужденных и свободных составляющих.

Следует отметить, что применяемые для решения нелинейных задач методы дают только более или менее приближенное решение.

Выбор метода решения зависит как от условий задачи, так и от требуемой точности расчета. Для расчета переходных процессов довольно часто применяется метод кусочно-линейного выражения нелинейной характеристики и метод последовательных интервалов.

### *Примеры и задачи*

**4-44.** Обмотка катушки, имеющей стальной сердечник, замыкается накоротко (рис. 4-43).

Обмотка катушки имеет сопротивление $r = 20$ *ом* и число витков $w = 300$. До замыкания рубильника напряжение на зажимах обмотки $U = 60$ *в*.

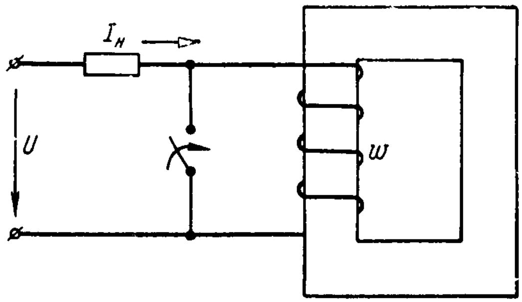



Рис. 4-43

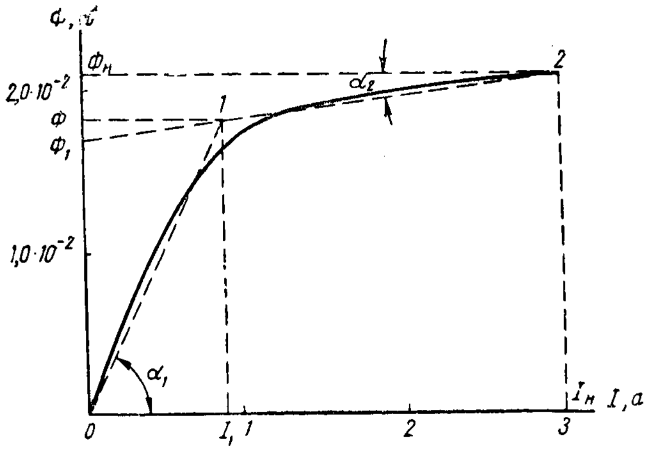



Рис. 4-44

Построить кривую изменения тока в катушке после замыкания рубильника:

а) методом кусочно-линейного выражения нелинейной характеристики (рис. 4-44),

б) методом последовательных интервалов.

Потерями в стали пренебречь.

## Решение

Заменяем нелинейную характеристику намагничивания стального сердечника $\Phi = f(i)$ ломаной линией *0 — 1 — 2* (рис. 4-44), имеющей два прямолинейных участка и достаточно точно воспроизводящей характеристику намагничивания. В соответствии с этими двумя участками решение получается в виде двух уравнений, дающих закон изменения тока для каждого из участков.

На первом участке *2—1* между током и потоком имеется следующая линейная зависимость:

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{L_1 i}{w} \; (I_1 < i < I_н)$$

и на втором участке —

$$\Phi = + \frac{L_2 i}{w} \; (0 < i < i_1).$$

Величину начального потока $\Phi_1$ и динамических индуктивностей $L_1 = w \operatorname{tg} \alpha_1$ и $L_2 = w \operatorname{tg} \alpha_2$ определяем графически (см. рис. 4-44) и получаем

$$\Phi_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \; вб;$$

$$L_1 = w \left(\frac{d\Phi}{di}\right) = 300 \frac{\Phi_н - \Phi_1}{I_н} = 300 \frac{2{,}1 \cdot 10^{-2} - 1{,}7 \cdot 10^{-2}}{3} = 0{,}4 \; гн;$$

$$L_2 = w \left(\frac{d\Phi}{di}\right) = 300 \frac{\Phi - 0}{I_1} = 300 \frac{1{,}82 \cdot 10^{-2}}{0{,}9} = 6{,}06 \; гн.$$

На основании второго закона Кирхгофа для замкнутой накоротко обмотки пишем $w \frac{d\Phi}{dt} + ri = 0$ и соответственно двум выражениям потокосцепления получаем

$$L_1 \frac{di}{dt} + ri = 0 \quad \text{при} \quad I_1 < i < I_н; \quad 0 < t < t_1;$$

$$L_2 \frac{di}{dt} + ri = 0 \quad \text{при} \quad 0 < I < I_1; \quad t_1 < t < \infty.$$

Решение этих уравнений в общем виде будет

$$i = A_1 e^{p_1 t} \quad \text{при} \quad I_1 < i < I_н; \quad 0 < t < t_1,$$

$$i = A_2 e^{p_2 (t - t_1)} \quad \text{при} \quad 0 < i < I_1; \quad t_1 < t < \infty,$$

где

$$p_1 = -\frac{r}{L_1} = -\frac{20}{0{,}4} = -50$$

и

$$p_2 = -\frac{r}{L_2} = -\frac{20}{6{,}06} = -3{,}3.$$

Из начальных условий находим постоянные интегрирования. В момент, когда $t = 0$, $i = I_н = 3a$ и $A_1 = 3$. В момент, когда $t = t_1$, ток, изменяясь по уравнению $i = A_1 e^{p_1 t} = 3e^{-50t}$, уменьшится до $i = I_1 = 0{,}9$ $a$, из условия невозможности изменения тока скачком имеем $A_2 = 0{,}9$ и определяем значение $t_1$ из равенства токов:

$$3e^{-50t_1} = 0{,}9\, e^{p_2 (t_1 - t_1)} = 0{,}9;$$

$$-50\, t_1 = \ln\frac{0{,}9}{3} = \ln 0{,}3 = 2{,}3 \lg 0{,}3 = 2{,}3\,(0{,}477 - 1) = -1{,}2;$$

$$t_1 = 0{,}024 \text{ сек.}$$

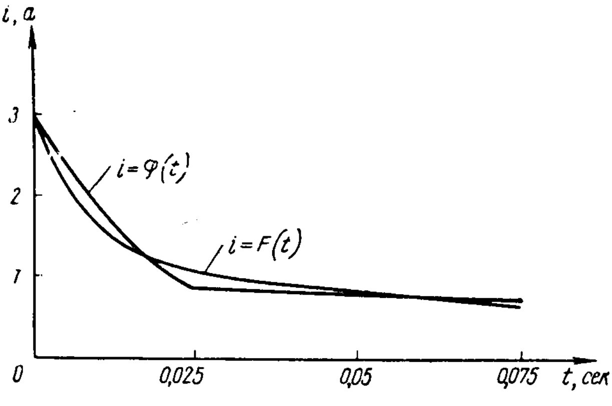



Рис. 4-45

На основании уравнений

$$i = 3e^{-50t} \quad \text{при} \quad 0 < t < 0{,}024 \text{ сек};$$

$$i = 0{,}9\, e^{-3{,}3\,(t - 0{,}024)} \quad \text{при} \quad 0{,}024 \text{ сек} < t < \infty$$

построена кривая $i = \varphi(t)$ (рис. 4-45).

Решение методом последовательных интервалов заключается в том, что, выбрав ориентировочно промежуток времени, в течение которого нужно исследовать переходный процесс, делим его на ряд равных и достаточно малых интервалов $\Delta t$. Выбираем $\Delta t = 0{,}005$ *сек*.

Для любого из интервалов $\Delta t_k$ дифференциальное уравнение электрического состояния может быть записано в следующем виде:

$$w\,\frac{\Delta\Phi_{k+1}}{\Delta t}+ri_k=0,$$

где $k$ — номер интервала времени;
$i_k$ и $\Phi_k$ — ток и поток в начале интервала времени с номером $k$.

Тогда

$$\Delta\Phi_{k+1}=\Phi_{k+1}-\Phi_k=-\frac{r}{w}\,i_k\,\Delta t. \qquad (1)$$

Для момента времени $t=0\,(k=0)$ имеем начальные значения $i_0=I_н=3\ a$; $\Phi_0=\Phi_н=2{,}1\cdot10^{-2}$ *вб* и, подставляя в уравнение (1), находим

$$\Phi_{k+1}=\Phi_1=-\frac{r}{w}\,i_0\,\Delta t+\Phi_0=-\frac{20}{300}\cdot3\cdot0{,}005+2{,}1\cdot10^{-2}=$$

$$=-0{,}1\cdot10^{-2}+2{,}1\cdot10^{-2}=2{,}0\cdot10^{-2}\ вб.$$

По кривой $\Phi=f(i)$ (см. рис. 4-44) значению $\Phi_1=2{,}0\cdot10^{-2}$ *вб* соответствует значение тока $i_{k+1}=i_1=2{,}1\ a$. Для следующего интервала времени $\Delta t_2\,(k=1$ и $t=0{,}005$ *сек*)

$$\Phi_2=-\frac{r}{w}\,i_1\,\Delta t+\Phi_1=-\frac{20}{300}\cdot2{,}1\cdot0{,}005+2{,}0\cdot10^{-2}=$$

$$=-0{,}07\cdot10^{-2}+2{,}0\cdot10^{-2}=1{,}93\cdot10^{-2}\ вб;$$

по кривой $\Phi=f(i)$ значение $i_2=1{,}6\,a$.

Повторяя аналогично расчет для следующих промежутков времени, составляем табл. 4-13.

Таблица 4-13

| $k$ | $\Delta t_k$, *сек* | $i$, *а* | $\Phi$, *вб* | $t$, *сек* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3,0 | $2{,}1\cdot10^{-2}$ | 0 |
| 1 | $5\cdot10^{-3}$ | 2,1 | $2{,}0\cdot10^{-2}$ | $5\cdot10^{-3}$ |
| 2 | $5\cdot10^{-3}$ | 1,6 | $1{,}93\cdot10^{-2}$ | $10\cdot10^{-3}$ |
| 3 | $5\cdot10^{-3}$ | 1,36 | $1{,}88\cdot10^{-2}$ | $15\cdot10^{-3}$ |
| 4 | $5\cdot10^{-3}$ | 1,24 | $1{,}835\cdot10^{-2}$ | $20\cdot10^{-3}$ |
| 5 | $5\cdot10^{-3}$ | 1,08 | $1{,}79\cdot10^{-2}$ | $25\cdot10^{-3}$ |
| 6 | $5\cdot10^{-3}$ | 1,02 | $1{,}74\cdot10^{-2}$ | $30\cdot10^{-3}$ |
| 7 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,96 | $1{,}72\cdot10^{-2}$ | $35\cdot10^{-3}$ |
| 8 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,91 | $1{,}688\cdot10^{-2}$ | $40\cdot10^{-3}$ |
| 9 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,88 | $1{,}657\cdot10^{-2}$ | $45\cdot10^{-3}$ |
| 10 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,84 | $1{,}627\cdot10^{-2}$ | $50\cdot10^{-3}$ |
| 11 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,81 | $1{,}6\cdot10^{-2}$ | $55\cdot10^{-3}$ |
| 12 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,79 | $1{,}53\cdot10^{-2}$ | $60\cdot10^{-3}$ |
| 13 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,76 | $1{,}564\cdot10^{-2}$ | $65\cdot10^{-3}$ |
| 14 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,74 | $1{,}52\cdot10^{-2}$ | $70\cdot10^{-3}$ |
| 15 | $5\cdot10^{-3}$ | 0,73 | $1{,}49\cdot10^{-2}$ | $75\cdot10^{-3}$ |

На основании этой таблицы построена кривая $i = F(t)$ (см. рис. 4-45).

**4-45.** Цепь, состоящая из последовательно соединенных нелинейного безынерционного активного сопротивления и линейной индуктивности $L = 0{,}5$ *гн*, включается на переменное напряжение, заданное графиком $u = f(t)$ (рис. 4-46).

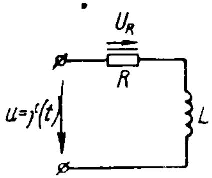


Рис. 4-46

На рис. 4-47 показана вольтамперная характеристика $u_r = f_r(i)$ нелинейного сопротивления.

Применяя метод конечного оператора (метод Прейсмана), построить кривую изменения тока переходного процесса $i = f_u(t)$, если в момент включения напряжение $u = f(t)$ равно нулю.

## Решение

В уравнении электрического состояния цепи при $t \geqslant 0$

$$u = L\frac{di}{dt} + f_r(i) \tag{1}$$

придаем времени $t$ конечное приращение $\Delta t$. За этот промежуток времени напряжение $u$ изменяется на $\Delta u$ и ток $i$ получает приращение $\Delta i$. Для этого момента уравнение (1) запишем в следующем виде:

$$u + \Delta u = L\frac{\Delta i}{\Delta t} + f_r(i + \Delta i),$$

откуда

$$\frac{L}{\Delta t} = \frac{u + \Delta u - f_r(i + \Delta i)}{\Delta i}. \tag{2}$$

В правой части выражения (2) числитель отношения представляет собой разность приращения напряжения источника и приращения напряжения на нелинейном элементе. Эта разность равна напряжению на индуктивности. Левая часть равенства (2) представляет собой сопротивление, равное отношению приращения напряжения к приращению тока. Поскольку на диаграмме рис. 4-47 в масштабе $m_u$ по оси абсцисс откладываются напряжения, а по оси ординат в масштабе $m_i$ токи, то отношение отрезка $u + \Delta u - f_r(i + \Delta i)$ к отрезку $\Delta i$ есть котангенс угла 0, под которым из конца отрезка $\Delta u$ проводится прямая до пересечения с кривой $u_r = f_r(i)$.

Ордината точки пересечения есть искомое приращение тока $\Delta i$ (см. рис. 4-47).

Переходим к построению кривой тока. Период $T$ кривой напряжения источника делится на двенадцать равных частей $\Delta t_1$, $\Delta t_2$,... и т. д. При $T = 0{,}02$ *сек*

$$\Delta t = \frac{T}{12} = \frac{0{,}01}{6} \ сек.$$

Первое приращение напряжения источника $\Delta u_1$, соответствующее приращению времени $\Delta t_1$, откладывается по оси абсцисс от начала координат, так как начальное значение тока в цепи

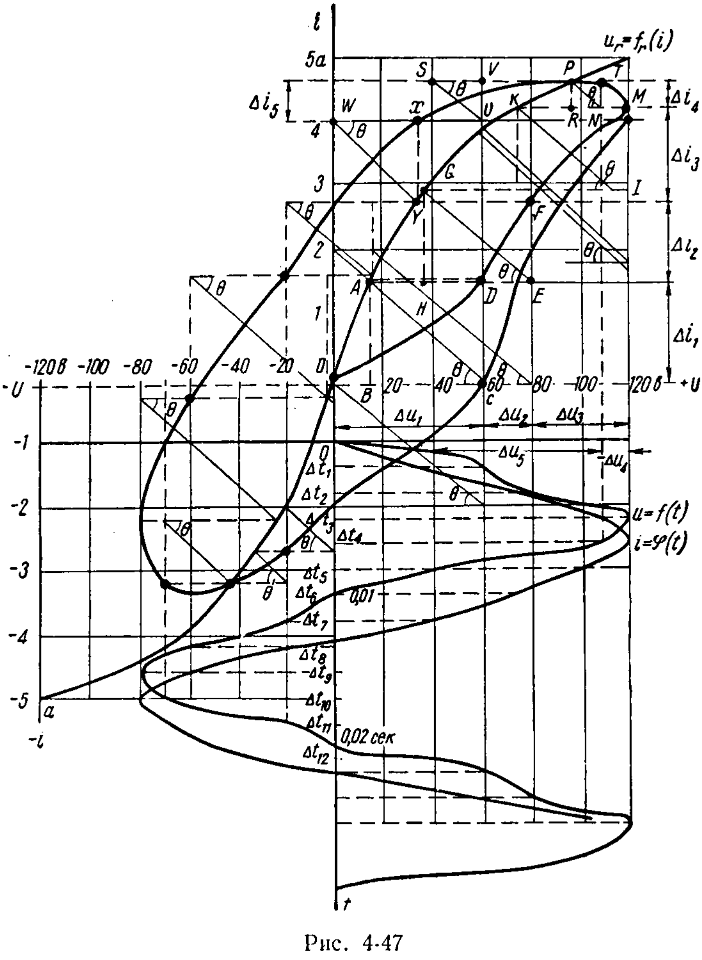



Рис. 4-47

с индуктивностью $i(0)=0$. Из конца отрезка $\Delta u_1$ проводится прямая под углом $\theta = \operatorname{arcctg}\frac{L}{\Delta t}$, где $\frac{L}{\Delta t} = \frac{0{,}5 \cdot 6}{0{,}01} = 300$ *ом*. Эта прямая соединяет точку *60 в* на оси абсцисс и точку 2 *а* на оси ординаты и пересекает кривую $u_r = f_r(i)$ в точке *A*. Ордината точки *A* равна приращению тока $\Delta i_1 = 1{,}5$ *а*. По координатам $\Delta u_1 = 60$ *в* и $\Delta i_1=1{,}5\ a$ находится точка $D$, первая точка переходной вольт-амперной характеристики всей нелинейной цепи в целом $i=f_u(u)$ и по координатам $\Delta t_1=\frac{0{,}01}{6}$ *сек* и $\Delta i_1=1{,}5\ a$ — первая точка кривой $i=\varphi(t)$.

Приращение напряжения $\Delta u_2$ за время $\Delta t_2$ прибавляется к первому приращению $\Delta u_1$. Отрезок $\Delta u_1+\Delta u_2$ откладываем на горизонтальной линии, проходящей через точку $A$ и конец этого отрезка обозначаем буквой $E$. Из точки $E$ под углом $\theta$ проводим прямую до пересечения с характеристикой $u_r=f_r(i)$ в точке $G$. Ордината $GH$ равна приращению тока $\Delta i_2=1{,}4\ a$. По координатам $\Delta u_1+\Delta u_2=80\ в$ и $\Delta i_1+\Delta i_2=2{,}9\ a$ находится вторая точка $F$ кривой $i=f_u(u)$ и по координатам $\Delta t_1+\Delta t_2=\frac{0{,}02}{6}$ *сек* и $\Delta i_1+$ $+\Delta i_2=2{,}9\ a$ — вторая точка графика $i=f(t)$.

Дальнейшее построение ведется аналогично описанному для двух точек.

*РАЗДЕЛ ПЯТЫЙ*

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

## Тема 1

## Электростатическое поле

Изучение свойств и расчет электростатического поля производится исходя из его основных законов, которые математически могуть быть выражены либо в интегральной, либо в дифференциальной форме. Точное их решение обычно бывает возможно при наличии некоторой симметрии поля. Решение дифференциальных уравнений при этом облегчается, если представить уравнения в соответствующей системе координат: прямоугольной, цилиндрической, сферической или эллиптической. Выражения для ротора, дивергенции, градиента и лапласиана даны в учебниках, справочниках и приложении 6.

Если задача не имеет аналитического решения или если решение ее сложно, можно воспользоваться графическими приемами расчета поля, исходя из ортогональности силовых линий и эквипотенциальных поверхностей, а также постоянства потока внутри силовой трубки. Решение задач значительно облегчают такие методы, как метод наложения и метод зеркальных изображений.

При рассмотрении поля в диэлектрике вблизи проводящих тел последние можно формально считать изоляторами с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью. Изложенный прием облегчает решение ряда задач. Так, если известна потенциальная функция диэлектрического цилиндра или шара в однородном поле, то в случае приводящего цилиндра или шара поле вне этих проводников может быть описано прежними потенциальными функциями при условии, что диэлектрическая проницаемость цилиндра или шара принята бесконечно большой.

### *Примеры и задачи*

**5-1.** Какой физический и геометрический смысл имеет градиент потенциала электростатического поля?

5-2. Как может быть получена дифференциальная форма теоремы Гаусса из ее интегральной формы?

5-3. Какой физический и геометрический смысл имеет дивергенция вектора электрического смещения (индукции)?

5-4. Чему равен и как направлен поток вектора электрического смещения сквозь замкнутую поверхность, внутри которой находятся два отрицательных и три положительных заряда, причем величина каждого заряда равна $Q$?

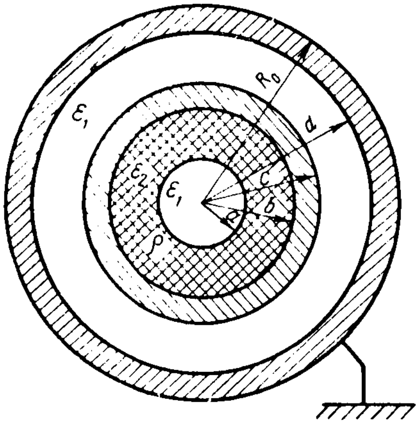



Рис. 5-1

*Ответ.* $Q$.

5-5. Чему равна напряженность поля и потенциал в полости внутри сферы радиуса $R$, находящейся в воздухе и выполненной из диэлектрика толщиной $\delta$, если в диэлектрике равномерно распределен заряд $Q$?

*Ответ.* $E = 0, \quad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

5-6. Внутри полого заземленного металлического шара с радиусами $d$ и $R_0$ находится другой полый металлический шар с радиусами $b$ и $c$ с избыточным зарядом $Q_0$ (рис. 5-1). Сферический слой с внутренним радиусом $a$ и внешним радиусом $b$ заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2$ и с равномерно распределенным зарядом $Q_1$. Относительная диэлектрическая проницаемость в остальных областях $\varepsilon_1$.

Вывести уравнения зависимости потенциала и напряженности поля от расстояния до центра шара. Задачу решить двумя способами: а) при помощи теоремы Гаусса в интегральной форме и б) путем решения уравнений Пуассона и Лапласа в сферической системе координат. При решении следует предполагать, что либо изолирующие трубки и провода, по которым сферическим слоям сообщались соответствующие заряды, убраны, либо вносимыми ими искажениями поля можно пренебречь.

Решение

При использовании теоремы Гаусса

$$\oint\limits_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = q$$

в качестве замкнутой поверхнсссти, по которой будет производиться интегрирование, удсбнее всего взять сферу, совпадающую с одной из эквипотенциальных поверхностей, радиуса $R$. Эту поверхность силовые линии пересекают под прямым углом, и в силу симметрии вектор смещения во всех точках поверхности будет одинаков ıо величине. Поэтому поток вектора смещения через сферическую поверхность

$$\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \oint D\, dS = D \oint dS = D\, 4\pi R^2.$$

Заряд $q$, охватываемый поверхностью интегрирования, зависит от того, в какой области расположена поверхность.

Во внутренней области, где $R < a$, заряд $q_1 = 0$. Поэтому напряженность поля

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 R^2} = 0.$$

В области с равномерно распределенным зарядом $(a < R < b)$

$$q_2 = \frac{R^3 - a^3}{b^3 - a^3}\, Q_1.$$

Поэтому

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0 R^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0}\left(R - \frac{a^3}{R^2}\right)\frac{1}{b^3 - a^3}.$$

В области между металлическими сферами $(c < R < d)$ заряд

$$q_3 = Q_1 + Q_0$$

и

$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 R^2} = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 R^2}.$$

В области, занимаемой проводящей сферой $(b < R < c)$ и $(d < R < R_0)$, электростатическое поле отсутствует и напряженность $E = 0$. В этих областях потенциал не изменяется. Поскольку внешняя металлическая сфера заземлена, то полагаем ее потенциал $\varphi' = 0$. Тогда потенциал произвольной точки, находящейся на расстоянии $R$ от центра,

$$\varphi = \int_R^d E\,dR.$$

Для области $c < R < d$

$$\varphi_3 = \int_R^d E_3\,dR = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\int_R^d \frac{dR}{R^2} = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right).$$

Все точки слоя $b < R < c$ имеют одинаковый потенциал

$$\varphi'' = (\varphi_3)_{R=c} = \frac{Q_1 + Q_0}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right).$$

Для области $a < R < b$

$$\varphi_2 = \int_R^d E\,dR = \int_R^b E_2\,dR + \int_c^d E_3\,dR =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0(b^3 - a^3)}\int_R^b \left(R - \frac{a^3}{R^2}\right)dR + \varphi'' =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0(b^3 - a^3)}\left(\frac{b^2 - R^2}{2} + \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{R}\right) + \varphi''.$$

Для области $0 < R \leqslant a$

$$\varphi_1 = \int_R^a E_1\,dR + \int_a^b E_2\,dR + \int_c^d E_3\,dR = \varphi_2(a) =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0(b^3 - a^3)}\left(\frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{a^3}{b} - a^2\right) + \varphi''.$$

При решении этой задачи другим способом следует воспользоваться лапласианом в сферической системе координат:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{R^2}\cdot\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\varphi}{dR}\right),$$

так как в данной задаче в силу симметрии поля

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0.$$

Во внутренней области $(0 < R < a)$ применяем уравнение Лапласа

$$\frac{1}{R^2}\cdot\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\varphi_1}{dR}\right) = 0.$$

Дважды интегрируя и разделяя переменные, получаем

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{R} + B_1; \tag{1}$$

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dR} = \frac{A_1}{R^2}. \tag{2}$$

В области с пространственным зарядом ($a < R < b$), применяя уравнение Пуассона

$$\frac{1}{R^2}\cdot\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\varphi_2}{dR}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = -\frac{Q_1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon_2\varepsilon_0(b^3 - a^3)},$$

имеем

$$\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\varphi_2}{dR}\right) = -\frac{\rho R^2}{\varepsilon_2\varepsilon_0};$$

$$R^2\frac{d\varphi_2}{dR} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0} - A_2;$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0} + \frac{A_2}{R} + B_2; \tag{3}$$

$$E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dR} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_2\varepsilon_0} + \frac{A_2}{R^2}. \tag{4}$$

В области между металлическими сферами применяем уравнение Лапласа

$$\frac{1}{R^2}\cdot\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\varphi_3}{dR}\right) = 0.$$

Аналогичным путем можно получить

$$\varphi_3 = \frac{A_3}{R} + B_3; \tag{5}$$

$$E_3 = \frac{A_3}{R^2}. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования $A$ и $B$ определяем из граничных условий:

при $R = d$

$$\varphi_3 = 0; \tag{7}$$

$$E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 d^2}; \tag{8}$$

при $R = b$

$$\varphi_2(b) = \varphi'' = \varphi_c(c); \tag{9}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0 b^2}; \tag{10}$$

при $R = a$

$$\varphi_1 = \varphi_2; \tag{11}$$

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \tag{12}$$

Из уравнений (6) и (8)

$$\frac{A_3}{d^2} = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 d^2},$$

откуда

$$A_3 = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0}. \tag{13}$$

Из уравнений (5), (7) и (13)

$$\frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 d} + B_3 = 0,$$

откуда

$$B_3 = -\frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 d}. \tag{14}$$

Из уравнений (4) и (10)

$$\frac{\rho b}{3\varepsilon_2 \varepsilon_0} + \frac{A_2}{b^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0 b^2},$$

откуда

$$A_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\varepsilon_2 \varepsilon_0}. \tag{15}$$

Из уравнений (3), (5), (9), (13), (14) и (15)

$$-\frac{\rho b^2}{6\varepsilon_2 \varepsilon_0} + \frac{1}{b}\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\varepsilon_2 \varepsilon_0}\right) + B_2 = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 c} - \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 d},$$

откуда

$$B_2 = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) + \frac{\rho b^2}{6\varepsilon_2 \varepsilon_0} - \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2 \varepsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\varepsilon_2 \varepsilon_0}\right)\frac{1}{b}. \tag{16}$$

Из уравнений (2), (4) и (12)

$$\varepsilon_1 \frac{A_1}{a^2} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_2}{a^2}\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\varepsilon_2\,\varepsilon_0}\right) = 0,$$

так как

$$Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho\,(b^3 - a^3).$$

Поэтому

$$A_1 = 0, \tag{17}$$

Из уравнений (1), (3), (11), (15), (16) и (17)

$$B_1 = \varphi_2(a) = -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0} + \frac{1}{a}\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\right) +$$

$$+ \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) + \frac{\rho b^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0} - \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\right)\frac{1}{b} =$$

$$= \frac{\rho\,(b^2 - a^2)}{6\varepsilon_2\,\varepsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\varepsilon_1\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right). \tag{18}$$

Окончательные выражения для потенциала и напряженности получаем после подстановки в уравнения (1)—(6) значений постоянных интегрирования из уравнений (13)—(18). Очевидно, уравнения, полученные из решений уравнений Пуассона и Лапласа, должны совпасть с уравнениями, полученными первоначально, исходя из теоремы Гаусса.

**5-7.** В условиях задачи 5-6 вывести формулу для поверхностной плотности свободных зарядов на расстоянии $b$ и связанных зарядов на расстоянии $a$ и $c$ от центра сферической системы (см. рис. 5-1).

## Решение

Исходя из результатов задачи 5-6 поверхностная плотность наведенных зарядов на внутренней поверхности металлической сферы радиуса $b$

$$\sigma_{\text{своб}} = D_2(b) = \varepsilon_2\,\varepsilon_0\,E_2(b) = \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_0\,Q_1}{4\pi b^2},$$

а поверхностная плотность связанных зарядов на расстоянии $c$ от центра сферической системы

$$\sigma_{\text{связ}} = P_3(c) = (\varepsilon_1 - 1)\,\varepsilon_0\,E_3(c) = \frac{(\varepsilon_1 - 1)\,(Q_0 + Q_1)}{4\pi\varepsilon_1\,\varepsilon_0\,c^2}$$

и на расстоянии $a$

$$\sigma_{связ} = P_1(a) - P_2(a) = (\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_1(a) - (\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0 E_2(a) = 0.$$

**5-8.** В условиях задачи 5-6 вывести формулу для энергии поля во внутренней металлической сфере.

### Решение

Энергия электрического поля в области $R \leqslant b$ (см. рис. 5-1)

$$W = \int\limits_{R=0}^{R=b} \frac{\mathbf{ED}}{2} dv = \int\limits_a^b \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi R^2 dR =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{2} \frac{Q_1^2}{(4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0)^2} \left(R - \frac{a^3}{R^2}\right)^2 \frac{4\pi R^2 dR}{(b^3 - a^3)^2} =$$

$$= \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 (b^3 - a^3)^2} \int\limits_a^b \left(R^4 - 2a^3 R + \frac{a^6}{R^2}\right) dR =$$

$$= \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 (b^3 - a^3)^2} \left[\frac{b^5 - a^5}{5} - a^3(b - a^2) - a^6\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right].$$

**5-9.** В условиях задачи 5-6 определить энергию поля между металлическими сферами.

### Решение

Энергия электрического поля конденсатора, образуемого металлическими поверхностями радиусов $c$ и $d$ (см. рис. 5-1), с зарядом $Q = Q_0 + Q_1$ и напряжением

$$U = \varphi_3(c) - \varphi_3(d) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)$$

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{(Q_0 + Q_1)^2}{8\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right).$$

**5-10.** Заземленный круглый прямой нагретый провод радиуса $a$ длиной $l$ испускает электроны по направлению к стенкам полого металлического коаксиального цилиндра радиуса $b$, имеющего потенциал $U$. Вся система находится в сосуде, из которого выкачан воздух.

Определить закон изменения тока $I$ между электродами в зависимости от напряжения (закон 3/2).

## Решение

В условиях этой задачи удобно использовать цилиндрическую систему координат, где

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Решать следует в предположении, что длина цилиндрических электродов достаточно велика по сравнению с их радиусами. Тогда можно не учитывать искажение поля вблизи краев электродов и считать, что потенциал зависит только от одной координаты $r$, а $\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{dz} = 0$.

Испускаемые катодом электроны заполняют все пространство между электродами, образуя так называемый объемный заряд. Поэтому исходным здесь должно быть уравнение Пуассона в следующем виде:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1}$$

где $\rho$ — плотность отрицательных зарядов. Ее можно определить из выражения для плотности тока

$$\delta = \frac{I}{2\pi rl} = \rho v. \tag{2}$$

Скорость, с которой электрон покидает накаленный катод, во много раз меньше той, с которой электрон подходит к аноду. Поэтому можно считать начальную скорость электрона равной нулю, а в другие моменты времени находить ее из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi, \tag{3}$$

где $m$ и $e$ — масса и заряд электрона.

С учетом уравнений (2) и (3) уравнение (1) преобразуется:

$$\sqrt{\varphi}\,\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 l\sqrt{2\frac{e}{m}}}. \tag{4}$$

Для дальнейшего решения уравнения (4) удобно воспользоваться подстановкой

$$s = \ln\frac{r}{a}, \tag{5}$$

которая положительна при $r > a$ и обращается в нуль при $r=a$ (на поверхности катода). После подстановки (5) в уравнение (4) получим

$$\sqrt{\varphi}\,\frac{d^2\varphi}{ds^2} = I\cdot\frac{\sqrt{\frac{m}{2e}}}{2\pi\varepsilon_0 l}\,ae^s. \tag{6}$$

Решение последнего уравнения можно найти в форме степенного ряда:

$$\varphi = a_0 s^{\frac{4}{3}}(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots).$$

Подстановкой этого ряда в уравнение (6) и сравнением коэффициентов в правой и левой частях находим постоянные $a_0$, $a_1$, $a_2$ и т. д. Проделав эти расчеты, можно получить *

$$\varphi = \left(\frac{9a\sqrt{\frac{m}{e}}}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 l}\,I\right)^{\frac{2}{3}} s^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{2}{15}s + \frac{11}{450}s^2 + \frac{41}{14\,850}\,s^3 + \ldots\right).$$

Заменяя в последнем выражении $s$ его значением из уравнения (5) и учитывая, что $\varphi=U$ при $r=b$, получим

$$U = \left(\frac{9a}{8\pi\varepsilon_0 l}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,I\right)^{\frac{2}{3}} \ln^{\frac{4}{3}}\frac{b}{a}\left(1 + \frac{2}{5}\ln\frac{b}{a} + \right.$$
$$\left. + \frac{11}{450}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{41}{14\,850}\ln^3\frac{b}{a} + \ldots\right).$$

Откуда ток

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\beta}\cdot\frac{l}{a}\sqrt{2\frac{e}{m}}\,U^{\frac{3}{2}}, \tag{7}$$

где

$$\beta = \frac{9}{8\pi}\left(1 + \frac{2}{15}\ln\frac{b}{a} + \frac{11}{450}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{41}{14\,850}\ln^3\frac{b}{a} + \ldots\right)^{\frac{3}{2}}\ln^2\frac{b}{a}.$$

Уравнение (7) представляет собой так называемый закон 3/2, используемый при расчете различных электровакуумных приборов, широко применяемых в радиотехнике, автоматике и счетно-решающей технике. При этом необходимо иметь в виду, что закон 3/2 справедлив только для определенных значений анодного напряжения, при которых, в частности, не сказывается явление насыщения и ток практически перестает зависеть от напряжения.

---

* Труды Государственного экспериментального электротехнического института. Вып. 3, 1924, стр. 18—21.

**5-11.** В коаксиальном кабеле с твердой изоляцией ($\varepsilon_2 = 6$) вследствие перегрева образовался между жилой и изоляцией воздушный зазор шириной 5 *мм*, в котором происходит ионизация. Кабель проложен в земле. Радиусы жилы и оболочки (внутренний и внешний соответственно) $R_1 = 5$ *мм*, $R_3 = 20$ *мм*, $R_4 = 24$ *мм* (рис. 5-2).

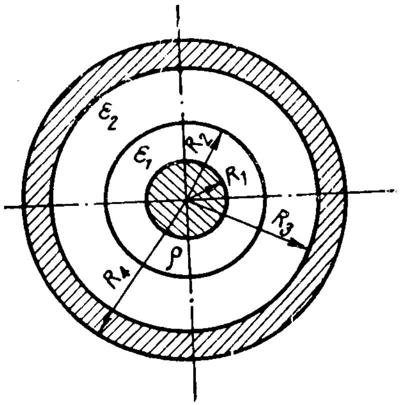


Рис. 5-2

Написать граничные условия, необходимые и достаточные для расчета электростатического поля между жилой и оболочкой кабеля с помощью уравнений Пуассона и Лапласа непосредственно после отключения кабеля и заземления его жилы. В воздушном зазоре объемный заряд $\rho = 10^{-5}$ *к/м*$^3$ распределен равномерно.

*Ответ.* $\varphi_1 = 0$ при $R = R_1$, $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ при $R = R_2$, $\varphi_2 = 0$ при $R = R_3$.

**5-12.** В условиях задачи 5-11 построить графики напряженности и потенциала в зависимости от расстояния от оси, а также определить энергию электрического поля на длине в 1 *км*.

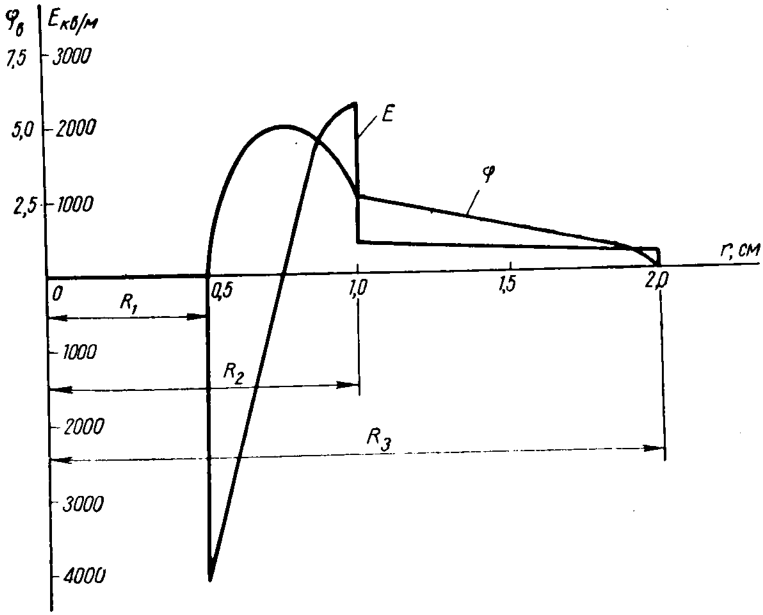


Рис. 5-3

*Ответ.* $W_0 = 2{,}82 \cdot 10^{-6}$ *вт/км.*

Графики приведены на рис. 5-3.

**5-13.** Определить емкость 1 *км* кабеля в условиях задачи 5-11 после полной деионизации промежутка. При каком напряжении между жилой и оболочкой в электростатическом поле кабеля ($\rho = 0$) будет запасена такая же энергия, как и в первый момент после отключения кабеля?

*Ответ.* $C_0 = 6{,}88 \cdot 10^{-8}$ *ф/км*, $U = 9$ *в*.

**5-14.** Внутри полого цилиндра (рис. 5-4) радиуса $r_2 = 1$ *см* параллельно его оси протянута проволока радиуса $r_1 = 0{,}2$ *см*. Расстояние между их осями $d = 0{,}4$ *см*.

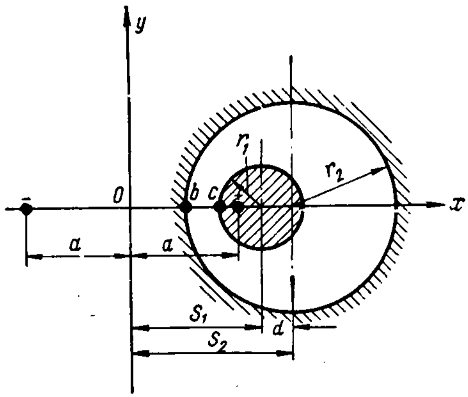



Рис. 5-4

Определить разность потенциалов между цилиндром и проволокой, при которой будет нарушена электрическая прочность воздушной изоляции (коронирование здесь начнется, когда напряженность достигнет значения 52 *кв/см*).

## Решение

Электрический разряд возникнет первоначально в точке $c$ (см. рис. 5-4), где напряженность поля наибольшая. Расчет поля между цилиндром и проволокой сильно упростится, если заменить проволоку и цилиндр их «эквивалентными электрическими осями», находящимися на расстоянии $a$ от начала координат (см. рис. 5-4), с линейной плотностью заряда $\pm\tau$. Положение этих осей находят с помощью уравнений

$$a^2 = s_1^2 - r_1^2,$$

$$a^2 = s_2^2 - r_2^2,$$

$$d = s_2 - s_1,$$

откуда

$$s_2^2 - s_1^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

$$(s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = r_2^2 - r_1^2,$$

$$s_2 + s_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{d},$$

$$s_2 - s_1 = d,$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{d} - d\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1^2 - 0{,}2^2}{0{,}4} - 0{,}4\right) = 1 \text{ см},$$

$$s_2 = s_1 + d = 1{,}0 + 0{,}4 = 1{,}4 \text{ см},$$

$$a = \sqrt{s_1^2 - r_1^2} = \sqrt{1{,}0^2 - 0{,}2^2} = 0{,}98 \text{ см}.$$

Для определения напряженности поля в точке $c$ можно применить принцип наложения, согласно которому искомая напряженность будет равна сумме напряженностей, обусловленных полем каждой заряженной оси.

Составляющая напряженности поля от положительно заряженной оси

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R_{1c}},$$

где расстояние точки $c$ от положительной оси $R_{1c} = r_1 - (s_1 - a) = 0{,}2 - 1{,}0 + 0{,}98 = 0{,}18$ *см*.

Составляющая напряженности поля от отрицательной оси

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R_{2c}},$$

где расстояние точки $c$ от отрицательной оси $R_{2c} = 2a - R_{1c} = 1{,}96 - 0{,}18 = 1{,}78$ *см*.

Поскольку векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ имеют одинаковое направление, то результирующая напряженности поля в точке $c$

$$E_c = E_1 + E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{1c}} + \frac{1}{R_{2c}}\right).$$

Теперь необходимо установить связь между линейной плотностью заряда и напряжением между цилиндром и проволокой. Для этого напишем выражения для потенциалов точек, находящихся на поверхностях цилиндра и проволоки. Потенциал точки $c$

$$\varphi_c = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_{2c}}{R_{1c}}.$$

Потенциал точки $b$ (см. рис. 5-4)

$$\varphi_b = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_{2b}}{R_{1b}},$$

где расстояние точки $b$ от положительной оси

$$R_{1b} = r_2 - (s_2 - a) = 1{,}00 - 1{,}40 + 0{,}98 = 0{,}58 \text{ см},$$

а расстояние от отрицательной оси

$$R_{2b} = 2a - R_{1b} = 1{,}96 - 0{,}58 = 1{,}38 \text{ см}.$$

Напряжение между цилиндром и проводом

$$U = \varphi_c - \varphi_b = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_{1b}\, R_{2c}}{R_{1c}\, R_{2b}}.$$

Заменяя в полученном выражении $\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}$ на его значение из выражения для $E_c$, получим окончательно значение коронного напряжения

$$U = E_c \frac{\ln \dfrac{R_{1b}\, R_{2c}}{R_{1c}\, R_{2b}}}{\dfrac{1}{R_{1c}} + \dfrac{1}{R_{2c}}} = 52 \frac{\ln \dfrac{0{,}58 \cdot 1{,}78}{0{,}18 \cdot 1{,}38}}{\dfrac{1}{0{,}18} + \dfrac{1}{1{,}78}} = 10{,}5 \text{ кв}.$$

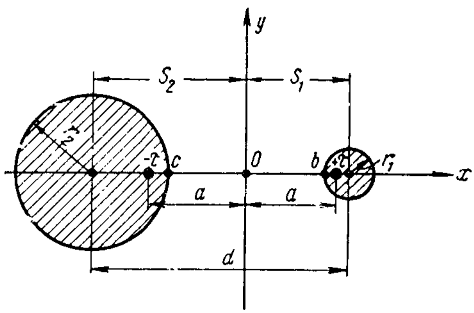



Рис. 5-5

**5-15.** Расстояние между двумя параллельными проводами с радиусами $r_1 = 1$ *мм* и $r_2 = 5$ *мм*, $d = 8$ *мм* (рис. 5-5).

Найти емкость между проводами длиной 1 *м* и плотность заряда на поверхности проволоки радиуса $r_1$ при напряжении между проводами в 1 *кв*.

## Решение

Сначала необходимо найти положение эквивалентных электрических осей с линейной плотностью заряда $\pm\tau$ (рис. 5-5) из уравнений эквипотенциальных поверхностей:

$$s_1^2 - r_1^2 = a^2;$$

$$s_2^2 - r_2^2 = a^2;$$

$$s_1^2 + s_2^2 = d.$$

Решая систему этих уравнений, легко получить

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(d + \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{1^2 - 5^2}{8}\right) = 2{,}5 \textit{ мм},$$

$$s_2 = d - s_1 = 8 - 2{,}5 = 5{,}5 \textit{ мм},$$

$$a = \sqrt{s_1^2 - r_1^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 1^2} = 2{,}29 \textit{ мм}.$$

Потенциал точки $b$ (см. рис. 5-5)

$$\varphi_b = \frac{\tau}{2\ \varepsilon_0} \ln \frac{R_{2b}}{R_{1b}},$$

где расстояние точки $b$ до положительной оси

$$R_{1b} = r_1 - (s_1 - a) = 1 - 2{,}5 + 2{,}29 = 0{,}79 \textit{ мм}$$

и до отрицательной оси

$$R_{2b} = 2a - R_{1b} = 4{,}58 - 0{,}79 = 3{,}79 \textit{ мм}.$$

Потенциал точки $c$ (рис. 5-5)

$$\varphi_c = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_{2c}}{R_{1c}},$$

где аналогично предыдущему

$$R_{2c} = r_2 - (s_2 - a) = 5 - 5{,}5 + 2{,}29 = 1{,}79 \textit{ мм};$$

$$R_{1c} = 2a - R_{2c} = 4{,}58 - 1{,}79 = 2{,}79 \textit{ мм}.$$

Емкость между проводами на единицу длины

$$C = \frac{\tau}{\varphi_b - \varphi_c} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{R_{2b}}{R_{1b}} - \ln \frac{R_{2c}}{R_{1c}}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{R_{1c} R_{2b}}{R_{1b} R_{2c}}} =$$

$$= \frac{2\pi \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}{\ln \frac{2{,}79 \cdot 3{,}79}{0{,}79 \cdot 1{,}79}} = 2{,}76 \cdot 10^{-11} \textit{ ф/м} = 27{,}6 \textit{ пф/м}.$$

Для определения поверхностной плотности заряда перейдем к цилиндрической системе координат, ось которой совмещена с геометрической осью проволоки (рис. 5-6). Для произвольной точки $M$ на поверхности первого провода расстояние до положительной оси

$$R_1 = \sqrt{r^2+(s_1-a)^2+2r(s_1-a)\cos\theta} =$$
$$= \sqrt{r^2+0{,}21^2+0{,}42\,r\cos\theta},$$

а до отрицательной оси —

$$R_2 = \sqrt{r^2+(s_1+a)^2+2r(s_1+a)\cos\theta} =$$
$$= \sqrt{r^2+4{,}79^2+9{,}58\,r\cos\theta},$$

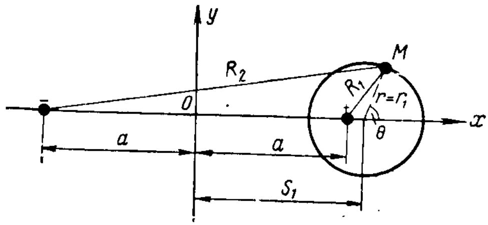



Рис. 5-6

если расстояния измерять в миллиметрах.

Потенциал точки $M$

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r^2+4{,}79^2+9{,}58\,r\cos\theta}{r^2+0{,}21^2+0{,}42\,r\cos\theta}.$$

На поверхности проволоки ($r=r_1$) тангенциальная составляющая напряженности поля

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi_M}{\partial\theta} = 0,$$

так как поверхность эквипотенциальная. Поэтому на поверхности напряженность поля совпадает с нормальной составляющей

$$E = E_r = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=r_1} =$$
$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2r+0{,}42\cos\theta}{r^2+0{,}21^2+0{,}42\,r\cos\theta} - \frac{2r+9{,}58\cos\theta}{r^2+4{,}79^2+9{,}58\,r\cos\theta}\right)_{r=r_1} =$$
$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2+0{,}42\cos\theta}{1{,}44+0{,}42\cos\theta} - \frac{2+9{,}58\cos\theta}{24+9{,}58\cos\theta}\right).$$

При напряжении между проводами $U=\varphi_b-\varphi_c=1$ *кв*

$$\tau=CU=2{,}76\cdot10^{-11}\cdot10^3=2{,}76\cdot10^{-8}\ \textit{к/м}=27{,}6\ \textit{пк/мм}.$$

Плотность заряда на поверхности первого провода

$$\sigma = D = \varepsilon_0 E = 2{,}2\left(\frac{2 + 0{,}42\cos\theta}{1{,}44 + 0{,}42\cos\theta} - \frac{2 + 9{,}58\cos\theta}{24 + 9{,}58\cos\theta}\right) \text{ пк/мм}^2.$$

**5-16.** В условиях задачи 5-14 определить емкость между проволокой и цилиндром, плотность заряда на поверхности проволоки и напряженность поля вдоль линии, проходящей через оси проволоки и цилиндра.

*Ответ.* $C_0 = 39{,}1$ *пф/м*;

$$\sigma = 32{,}8\left[\frac{0{,}4 + 0{,}04\cos\theta}{0{,}0404 + 0{,}008\cos\theta} - \frac{0{,}4 + 3{,}96\cos\theta}{4{,}96 + 1{,}98\cos\theta}\right] \text{ мкк/м}^2,$$

где $\theta$ — полярный угол цилиндрической системы координат, совмещенной с геометрической осью проволоки (рис. 5-6);

$$E = \frac{14{,}5}{x^2 - 0{,}96} \text{ кв/см},$$

где $x$ — расстояние от начала координат (см. рис. 5-4), *см*.

**5-17.** В условиях задачи 5-15 определить напряжение, при котором начнется разряд в воздухе (здесь разрядная напряженность поля $E = 40$ *кв/см*).

*Ответ.* 50,3 *кв*.

**5-18.** В масляной изоляции трансформатора образовался шаровидный воздушный пузырек. Радиус пузырька $a = 0{,}1$ *мм* мал по сравнению с расстоянием $d = 6$ *см* между стенкой бака и поверхностью обмотки трансформатора и по сравнению с расстоянием от вкрапления до стенки или обмотки.

Найти максимальную величину положительного связного заряда, индуцированного на поверхности шарика при амплитуде напряженности электрического поля в воздушном вкраплении $E_1 = 30$ *кв/см*. Относительная диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon_2 = 4$.

## Решение

При работе трансформатора в масле создается переменное электромагнитное поле. Однако при промышленной частоте эту задачу можно решать как для электростатического поля, практически равномерного вдали от воздушного включения. Поэтому здесь можно воспользоваться известным из учебника уравнением потенциала внутри шаровидного включения:

$$\varphi_1 = -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R\cos\theta = -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} z,$$

где $E_0$ — напряженность неискаженного поля;

$\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 4$ — относительные диэлектрические проницаемости шарика и масла (рис. 5-7).

Поскольку в этом случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

то напряженность поля внутри шара

$$E_1 = -\operatorname{grad} \varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathbf{k}E_1.$$

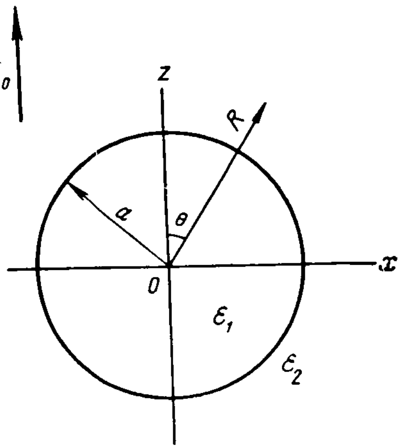



Рис. 5-7

Следовательно,

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_0\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2},$$

откуда

$$E_0 = E_1\frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{3\varepsilon_2}.$$

Потенциальная функция для масла

$$\varphi_2 = E_0\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\cdot\frac{a^3}{R^2} - R\right)\cos\theta.$$

Нормальная составляющая напряженности поля на поверхности шарика

$$E_{2_n} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R=a} E_0\left(2\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} + 1\right)\cos\theta =$$

$$= \frac{3\varepsilon_1 E_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\cos\theta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1\cos\theta.$$

Плотность связанного заряда на поверхности шарика

$$\sigma = P_{2n} - P_{1n} = (\varepsilon_2 - 1)\,\varepsilon_0 E_{2n} - (\varepsilon_1 - 1)\,\varepsilon_0 E_{1n} =$$

$$= (\varepsilon_2 - 1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_0 E_1 \cos\theta.$$

Заряд сферического пояса, находящегося на поверхности шара под полярным углом $\theta$ и имеющего ширину $a d\theta$,

$$dq = \sigma\, ds = \sigma\,(2\pi a \sin\theta)\, a\, d\theta = \sigma\, 2\pi a^2 \sin\theta d\,\theta.$$

Связанный заряд, сосредоточенный на полусфере,

$$q = \int\limits_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dq = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\varepsilon_2 - 1)\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_0 E_1 \cos\theta\, 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta =$$

$$= (\varepsilon_2 - 1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_0 E_1 \pi a^2 = (4 - 1)\,\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4\pi\, 10^9}\,\pi\,(10^{-4})^2\, 30\cdot 10^5 =$$

$$= 5{,}62 \cdot 10^{-12}\ \kappa.$$

**5-19.** В условиях задачи 5-18 образовалось шаровидное вкрапление, заполненное не воздухом, а водой.

Считая воду проводником, определить величину максимальной напряженности поля на поверхности шаровидного включения, а также напряжение между баком и обмоткой.

## Решение

Максимальную напряженность поля на поверхности проводящего шара можно найти из полученного в предыдущей задаче выражения для $E_{2_n}$, положив $\theta=0$, $\varepsilon_1=\infty$ и $E_0=22{,}5$ *кв/см*:

$$E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\,E_0 = 3E_0 = 67{,}5\ \textit{кв/см}.$$

При этом напряжение между баком и обмоткой

$U = E_0 d = 22{,}5\cdot 6 = 135$ *кв*.

**5-20.** В условиях задачи 5-19 определить распределение поверхностной плотности свободного заряда, индуцированного на поверхности шарика.

*Ответ.* $\sigma = 2{,}39\cdot 10^{-4}\cos\theta$ *к/м*$^2$, где $\theta$ — полярный угол сферической системы координат (см. рис. 5-7).

**5-21.** В однородное электрическое поле $E_0 = 10$ *кв/см* вносится металлический цилиндр радиуса $r_0 = 0{,}1$ *мм*, ось которого перпендикулярна полю. Диэлектрическая проницаемость окружающей проводник среды равна $\varepsilon_0$.

Определить величину отрицательного свободного заряда, индуцированного на цилиндре (на 1 *см* длины).

*Ответ.* $q_0 = 4\varepsilon_0 r_0 E_0 = 3{,}34\cdot10^{-11}$ *к/см.*

**5-22.** В однородное поле напряженности $E_0$ внесен полый диэлектрический цилиндр с внутренним радиусом $a$ и внешним $b$. Диэлектрическая (относительная) проницаемость цилиндра $\varepsilon_ц$ и остальной среды $\varepsilon_1$.

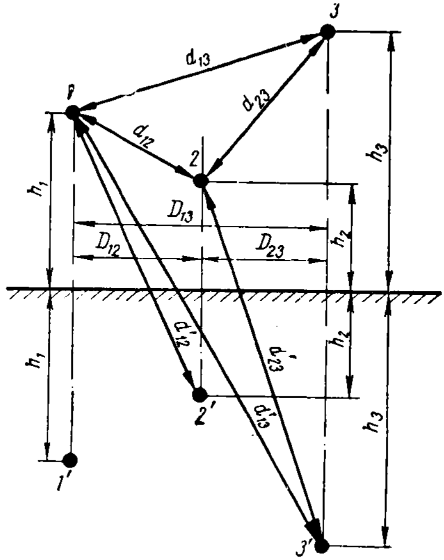



Рис. 5-8

Определить напряженность поля в цилиндрической полости $(0 \leqslant r \leqslant a)$.

*Ответ.* Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах методом разделения переменных для трех областей $(0 \leqslant r \leqslant a,\ a \leqslant r \leqslant b,\ b \leqslant r \leqslant \infty)$ дает

$$E = E_0 \frac{4b^2\,\varepsilon\varepsilon_ц}{b^2(\varepsilon_ц + \varepsilon)^2 - a^2(\varepsilon_ц - \varepsilon)^2}.$$

**5-23.** Линия передачи состоит из трех параллельных проводов радиуса $r = 0{,}6$ *см* (рис. 5-8). Высота подвеса проводов: $h_1 = 600$ *см*, $h_2 = 520$ *см* и $h_3 = 600$ *см*. Расстояния между проводами по горизонтали $D_{12} = 200$ *см*, $D_{23} = 160$ *см*. Потенциалы проводов: $\varphi_1 = 26{,}3$ *кв*, $\varphi_2 = -3{,}7$ *кв*, $\varphi_3 = -23{,}7$ *кв*.

Определить частичные емкости проводов и энергию электростатического поля линии на 1 *км*.

## Решение

Расстояние между первым и вторым проводом

$$d_{12}=\sqrt{(h_1-h_2)^2+D_{12}^2}=\sqrt{(6-5,2)^2+2^2}=2,13 \text{ м}.$$

Аналогично можно найти $d_{13}=3,6$ *м* и $d_{23}=1,79$ *м*. Расстояние между первым проводом и зеркальным изображением второго провода (см. рис. 5-8)

$$d'_{12}=\sqrt{(h_1+h_2)^2+D_{12}^2}=\sqrt{(6+5,2)^2+2^2}=11,4 \text{ м}.$$

Аналогично $d'_{13}=12,5$ *м* и $d'_{23}=11,3$ *м*.

Потенциальные коэффициенты (на единицу длины):

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_1}{r}=\frac{4\pi\, 9\cdot 10^9}{2\pi}\ln\frac{2\cdot 6}{0,006}=3,30\cdot 4,14\cdot 10^{10} \text{ м/ф};$$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_2}{r}=\frac{3,24}{2\pi\varepsilon_0};$$

$$\alpha_{33}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h_3}{r}=\frac{3,30}{2\pi\varepsilon_0};$$

$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d'_{12}}{d_{12}}=\frac{0,728}{2\pi\varepsilon_0};$$

$$\alpha_{13}=\alpha_{31}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d'_{13}}{d_{13}}=\frac{0,540}{2\pi\varepsilon_0};$$

$$\alpha_{23}=\alpha_{32}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d'_{23}}{d_{23}}=\frac{0,801}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Полученные значения потенциальных коэффициентов позволяют определить потенциалы по известным линейным зарядам проводов из следующей системы уравнений:

$$\varphi_1=\alpha_{11}\tau_1+\alpha_{12}\tau_2+\alpha_{13}\tau_3; \qquad (1)$$

$$\varphi_2=\alpha_{21}\tau_1+\alpha_{22}\tau_2+\alpha_{23}\tau_3; \qquad (2)$$

$$\varphi_3=\alpha_{31}\tau_1+\alpha_{32}\tau_2+\alpha_{33}\tau_3. \qquad (3)$$

При определении зарядов по известным потенциалам удобнее пользоваться другой системой уравнений:

$$\tau_1=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2+\beta_{13}\varphi_3; \qquad (4)$$

$$\tau_2=\beta_{21}\varphi_1+\beta_{22}\varphi_2+\beta_{23}\varphi_3; \qquad (5)$$

$$\tau_3=\beta_{31}\varphi_1+\beta_{32}\varphi_2+\beta_{33}\varphi_3. \qquad (6)$$

Значения емкостных коэффициентов $\beta$ могут быть получены путем решения системы уравнений (1)—(3) относительно зарядов $\tau$ и сравнения полученной системы уравнений с уравнениями (4)—(6). Из уравнений (1)—(3) получается

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \varphi_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \varphi_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{D}\varphi_1 + \frac{\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{D}\varphi_2 + \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}}{D}\varphi_3; \quad (4')$$

$$\tau_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \varphi_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \varphi_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \varphi_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{D} =$$

$$= \frac{\alpha_{31}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{33}}{D}\varphi_1 + \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{D}\varphi_2 + \frac{\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{D}\varphi_3; \quad (5')$$

$$\tau_3 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \varphi_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \varphi_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \varphi_3 \end{vmatrix}}{D} =$$

$$= \frac{\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}}{D}\varphi_1 + \frac{\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32}}{D}\varphi_2 + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{D}\varphi_3, \quad (6')$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,30 & 0,728 & 0,540 \\ 0,728 & 3,24 & 0,801 \\ 0,540 & 0,801 & 3,30 \end{vmatrix} \cdot (4,14\cdot 10^{10})^3 = 32,2 \times \times (4,14\cdot 10^{10})^3.$$

Из сравнения уравнений (4′) и (4) следует

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{D} = \frac{3,24\cdot 3,30 - 0,801^2}{32,2\cdot 4,14\cdot 10^{10}} = 7,58\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$\beta_{12} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{D} = \frac{0,540\cdot 0,801 - 0,728\cdot 3,30}{1,33\cdot 10^{12}} = -1,48\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$\beta_{13} = \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}}{D} = \frac{0,728\cdot 0,801 - 0,540\cdot 3,24}{1,33\cdot 10^{12}} = -0,880\cdot 10^{-12}\ ф/м.$$

Из уравнений (5), (6), (5') и (6') аналогично получается

$$\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{D} = \frac{3{,}30^2 - 0{,}540^2}{1{,}33\cdot 10^{12}} = 8{,}0\cdot 10^{-12} ф/м;$$

$$\beta_{23} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{D} = \frac{0{,}728\cdot 0{,}54 - 3{,}30\cdot 0{,}801}{1{,}33\cdot 10^{12}} = -1{,}70\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$\beta_{33} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{D} = \frac{3{,}30\cdot 3{,}24 - 0{,}728^2}{1{,}33\cdot 10^{12}} = 7{,}66\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$\beta_{21} = \beta_{12},\quad \beta_{31} = \beta_{13},\quad \beta_{32} = \beta_{23}.$$

Связь между зарядами и потенциалами с помощью частичных емкостей выражается уравнениями следующего вида

$$\tau_1 = C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3); \tag{7}$$

$$\tau_2 = C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3); \tag{8}$$

$$\tau_3 = C_{33}(\varphi_3 - \varphi_0) + C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2). \tag{9}$$

Сравнивая уравнения (7)—(9) с уравнениями (4)—(6), можно убедиться, что частичные емкости

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} = (7{,}58 - 1{,}48 - 0{,}88)\, 10^{-12} = 5{,}22\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{21} + \beta_{23} = (8{,}00 - 1{,}48 - 1{,}70)\, 10^{-12} = 5{,}82\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$C_{33} = \beta_{33} + \beta_{31} + \beta_{32} = (7{,}66 - 0{,}88 - 1{,}70)\, 10^{-12} = 5{,}08\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$C_{12} = -\beta_{12} = 1{,}48\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$C_{13} = -\beta_{13} = 0{,}88\cdot 10^{-12}\ ф/м;$$

$$C_{23} = -\beta_{23} = 1{,}70\cdot 10^{-12}\ ф/м.$$

Энергия поля линии на единицу длины может быть найдена либо из уравнения

$$W = \frac{1}{2}(\tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2 + \tau_3\varphi_3),$$

которое требует предварительного определения зарядов, либо из уравнения

$$W = \frac{1}{2}\left[C_{11}\varphi_1^2 + C_{22}\varphi_2^2 + C_{33}\varphi_3^2 + \right.$$

$$\left. + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)^2 + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3)^2\right] =$$

$$= 0{,}5\,[5{,}22\cdot 26{,}3^2 + 5{,}82\cdot 3{,}7^2 + 5{,}08\cdot 23{,}7^2 + 1{,}48\,(26{,}3 + 3{,}7)^2 +$$

$$+ 0{,}88\,(26{,}3 + 23{,}7)^2 + 1{,}7(-3{,}7 + 23{,}7)^2]\, 10^{-12}\cdot 10^6 =$$

$$= 0{,}0108\ дж/м = 10{,}8\ дж/км.$$

**5-24.** Определить частичные емкости двухпроводной линии, проходящей вдоль стены каменного дома (считать заземленной), если один провод находится от стены на расстоянии 5 *см*, а второй — 10 *см*. Расстояние между проводами 20,6 *см*, диаметр провода 10 *мм*. Кроме того, определить энергию электрического поля данной системы, если разность потенциалов между проводами 380 *в*, а длина линии 20 *м*.

*Ответ.* $C_{11}=18$ *пф/м*, $C_{22}=14$ *пф/м*, $C_{12}=0{,}98$ *пф/м*, $W=13$ *мкдж*.

5-25. Параллельно стенкам бесконечно простирающегося проводящего прямого угла помещен проводник радиуса $r_0$ (рис. 5-9). Положительный заряд проводника $q$.

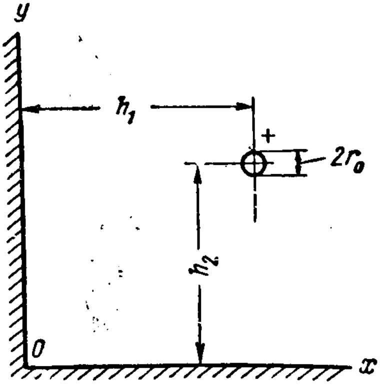



Рис. 5-9

Пользуясь методом зеркальных изображений, найти распределение заряда на поверхностях проводящего угла; длина провода $l$, а остальные размеры указаны на рис. 5-9.

*Ответ.* Поверхностные плотности зарядов на горизонтальной и вертикальной поверхностях соответственно равны

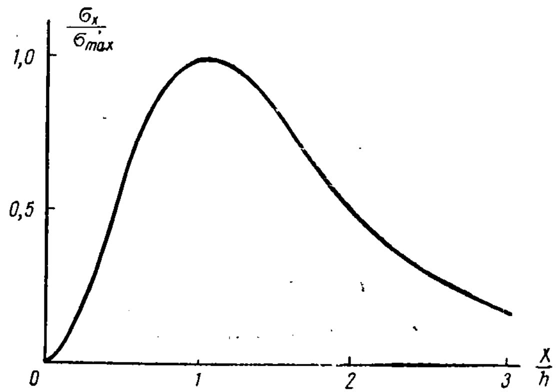



Рис. 5-10

$$\sigma_x = \frac{4h_1 h_2 qx}{\pi l\left[\left(h_1^2+h_2^2+x^2\right)^2-4h_1^2 x^2\right]};$$

$$\sigma_y = \frac{4h_1 h_2 qy}{\pi l\left[\left(h_1^2+h_2^2+y^2\right)^2-4h_2^2 y^2\right]}.$$

График зависимости

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = f\left(\frac{x}{h}\right) \text{ при } h_1 = h_2 = h \text{ приведен на рис. 5-10.}$$

**5-26.** На расстоянии $h = 20$ *см* от плоскости раздела двух диэлектриков с относительными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 6$ и $\varepsilon_2 = 2$ расположен в первом диэлектрике длинный тонкий провод, несущий заряд плотностью $\tau = 21 \cdot 10^{-11}$ *к/м*.

Определить силу, с которой поле наведенных зарядов действует на один метр длины заряженного провода.

Решение

Искомое поле эквивалентно полю линейного заряда

$$\tau' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau = \frac{4}{3} \cdot 10^{-11} \ к/м,$$

расположенного симметрично проводу. Сила

$$F = \tau E' = \tau \frac{\tau'}{2\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 2h} = \frac{\frac{8}{3} 10^{-22} 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{2\pi \cdot 6 \cdot 2 \cdot 0{,}4} = 10^{-12} \ н.$$

## Тема 2

### Электрическое поле в проводящей среде

Решение разбираемых в настоящей теме задач основано на применении законов постоянного тока в дифференциальной форме. Если законы в интегральной форме характеризуют процессы и состояние ветвей или конечных участков электрических цепей и имеют дело с их напряжениями, токами и электродвижущими силами, то дифференциальные законы характеризуют электрические процессы в отдельных точках проводящей среды, имея дело с такими величинами, как потенциалы, плотность тока и напряженность.

Поле тока вне источников тока имеет потенциальный характер. Уравнения линий плотности тока аналогичны уравнениям линий вектора индукции вне свободных зарядов. Аналогия поля в проводниках и диэлектриках облегчает решение многих задач по расчету поля токов, так как позволяет использовать результаты, полученные при изучении электростатического поля соответствующих электродов.

*Примеры и задачи*

**5-27.** Как перейти от дифференциальной формы законов Ома и Ленца — Джоуля к интегральной в случае, когда проводником служит сферический слой и плотность тока направлена по радиусам этого слоя?

**5-28.** Чему равна div $\delta$ для точек цилиндрического проводника с постоянным током $I$ ($\delta$ — плотность тока)?

**5-29.** Написать уравнение, связывающее емкость конденсатора с проводимостью его модели тех же размеров и формы (после замены диэлектрика проводящей средой). Какие свойства и уравнения электрического поля лежат в основе вывода этого уравнения?

**5-30.** Определить проводимость изоляции коаксиального кабеля с радиусом жилы $a$ и внутренним радиусом оболочки $b$.

### Решение

Воспользуемся аналогией между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока. Емкость цилиндрического конденсатора на единицу длины

$$C = \frac{2\,\varepsilon\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}.$$

Следовательно, проводимость изоляции кабеля на единицу его длины

$$G = C\frac{\gamma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{2\pi\gamma}{\ln\frac{b}{a}},$$

где $\gamma$ — удельная проводимость изоляции кабеля.

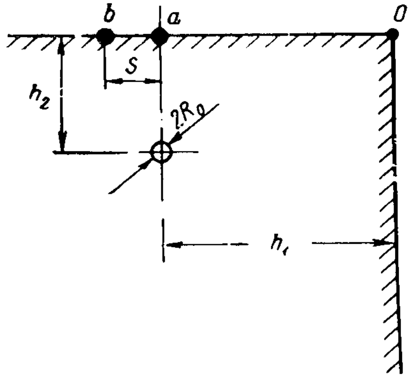


Рис. 5-11

**5-31.** Заземлитель в виде металлического шара радиуса $R_0 = 50$ *см* находится на глубине $h_1 = 5$ *м* от поверхности земли.

Определить, насколько изменится сопротивление растекания заземлителя и шаговое напряжение между точками $a$ и $b$, если на расстоянии $h_2 = h_1$ от заземлителя образуется вертикальный обрыв (рис. 5-11).

Длину шага принять $s = 0{,}75$ *м*.

### Решение

Решим сначала более общую задачу по расчету поля данного заземлителя вблизи обрыва.

Для определения потенциала шара применим метод зеркальных изображений. Линии тока заземлителя на поверхности земли не имеют нормальных составляющих и направлены вдоль поверхности. Поэтому электрическое поле шара в неоднородной проводящей среде будет аналогично электрическому полю четырех шаров в однородной среде только в том случае, когда на зеркальных изображениях будут токи того же знака, что и на шаровом заземлителе (рис. 5-12).

Потенциал шара $\varphi_0$ определим, суммируя потенциалы, обусловленные каждым из шаров:

$$\varphi_0=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4.$$

Радиус шара значительно меньше расстояний между шарами. Поэтому при подсчете потенциала, обусловленного одним каким-либо из шаров, пренебрегаем искажением поля, вносимым другими шарами.

Рассмотрим поле уединенного сферического заземлителя с радиусом $R_0$, током растекания $I$ (рис. 5-13).

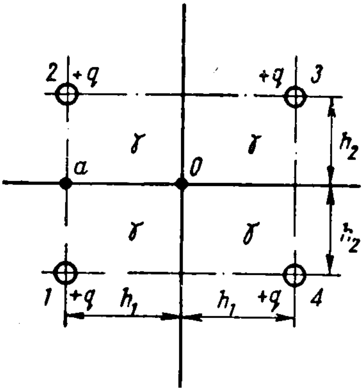


Рис. 5-12

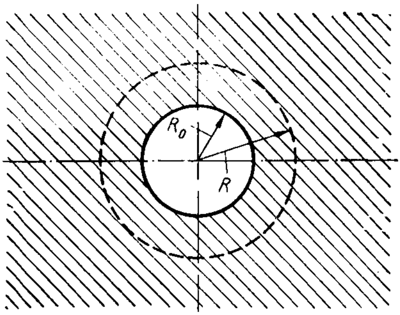


Рис. 5-13

Окружим мысленно заземлитель концентрической сферической поверхностью с радиусом $R>R_0$. В силу симметрии плотность тока на этой поверхности направлена нормально (по радиусам сферы), а по величине одинакова во всех точках и равна

$$\delta=\frac{I}{4\pi R^2}.$$

Напряженность поля на расстоянии $R$ по закону Ома в дифференциальной форме

$$E=\frac{\delta}{\gamma}=\frac{I}{4\pi\gamma R^2},$$

и потенциал

$$\varphi=-\int E\,dR=\frac{I}{4\pi\gamma R}+C,$$

причем $C=0$, если предположим, что $\varphi=0$ при $R\to\infty$.

Поэтому в системе четырех шаров рис. 5-12 с одинаковыми токами $I$

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\gamma R_0}, \quad \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\gamma\, 2h_1},$$

$$\varphi_3 = \frac{I}{4\pi\gamma\, 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \quad \varphi_4 = \frac{I}{4\pi\gamma\, 2h_2}.$$

Сопротивление шарового заземлителя

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{8\pi\gamma}\left(\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right).$$

Потенциал для точки $a$

$$\varphi_a = \varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4' =$$

$$= \frac{I}{4\pi\gamma h_1} + \frac{I}{4\pi\gamma h_1} + \frac{I}{4\pi\gamma\sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} + \frac{I}{4\pi\gamma\sqrt{h_1^2 + (2h_2)^2}} =$$

$$= \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 4h_2^2}}\right).$$

Аналогично для точки $b$

$$\varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + S)^2}}\right).$$

Напряжение между точками $a$ и $b$

$$U_{\text{ш}} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma}\left[\frac{1}{h_1} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 4h_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + S)^2}}\right].$$

При отсутствии обрыва в расчете сопротивления заземлителя и шагового напряжения, очевидно, следует учитывать только одно зеркальное изображение (2). Поэтому при отсутствии обрыва потенциал шара

$$\varphi_0' = \varphi_1 + \varphi_2$$

и сопротивление растекания

$$R' = \frac{\varphi_0'}{I} = \frac{1}{8\pi\gamma}\left(\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1}\right).$$

Потенциал для точки $a$ в этом случае

$$\varphi'_a = \varphi'_1 + \varphi'_2,$$

а для точки $b$ —

$$\varphi'_b = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}}.$$

Шаговое напряжение

$$U'_{ш} = \varphi'_a - \varphi'_b = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}}\right).$$

Таким образом, сопротивление заземлителя после появления обрыва возрастает только на

$$\frac{R - R'}{R'} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1}} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5\sqrt{2}}}{\frac{2}{0{,}5} + \frac{1}{5}} \cdot 100 = 8{,}1\%,$$

а шаговое напряжение возрастает на

$$\frac{U_{ш} - U'_{ш}}{U'_{ш}} \cdot 100 = \frac{\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 4h_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + S)^2}}}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + S^2}}} \cdot 100 =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5^2 + 4 \cdot 5^2}} - \frac{1}{\sqrt{5^2 + 10{,}75^2}}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{5^2 + 0{,}75^2}}} = 260\%,$$

т. е. в 3,6 раза.

**5-32.** Полушаровой заземлитель расположен вблизи вертикального глубокого обрыва (рис. 5-14). Расстояние от центра заземлителя до обрыва 5 *м*, радиус заземлителя 50 *см*, проводимость почвы $\gamma = 10^{-2}$ *сим/м*, ток заземлителя 100 *а*.

Определить шаговое напряжение (длина шага 0,75 *м*) между точками $a$ и $b$, а также сопротивление заземления.

*Ответ.* $R = 3{,}35$ *ом*, $U_{ш} = 191$ *в*.

**5-33.** Определить сопротивление между двумя трубами с радиусами 2 и 10 *см*, расположенными на расстоянии 15 *см* друг от друга на большой глубине в почве с проводимостью $10^{-3}$ *сим/см*.

*Ответ.* 2,83 *ом/м*.

**5-34.** Определить проводимость эллиптического проводящего слоя, удельная проводимость которого равна $\gamma$.

$$\textit{Ответ.}\quad g=\frac{2\pi\gamma l}{\operatorname{arch}\dfrac{L_2}{A}-\operatorname{arch}\dfrac{L_1}{A}},$$

где $l$ — длина по оси эллиптических электродов, ограничивающих проводящий слой;

$L_1$ и $L_2$ — малая и большая полуоси;

$A$ — половина фокусного расстояния.

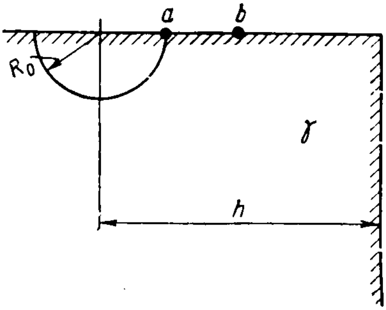



Рис. 5-14

## Тема 3

## Магнитное поле

Основу исследования свойств и расчета магнитных полей составляет закон непрерывности линий поля и закон полного тока, используемые как в интегральной, так и в дифференциальной формах. Понятия векторного и скалярного потенциалов магнитного поля не имеют того непосредственного физического смысла, как потенциал электростатического поля. Потенциалы магнитного поля в значительной мере являются вспомогательными расчетными величинами, первоначальное определение которых оказывается во многих случаях менее сложным, чем непосредственное нахождение напряженности, индукции и потока магнитного поля по заданному распределению токов.

Аналогия в расчете магнитных и электрических полей проявляется, в частности, в том, что для их потенциалов справедливы уравнения Пуассона и Лапласа и есть общие черты в структуре граничных условий. Аналогия уравнений электрических и магнитных полей облегчает математическую сторону их расчета. Во избежание ошибок при этом необходимо не забывать границы применимости этой аналогии и то, что аналогия носит в известной степени формальный характер, связана с общностью количественной характеристики, а не с сущностью качественно различных явлений в магнитных и электрических полях.

## *Примеры и задачи*

**5-35.** Какой физический смысл имеет уравнение $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$?

**5-36.** Развернуть выражение $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A})$.

*Ответ.* $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A})=\mathbf{A}\nabla\varphi+\varphi\operatorname{div}\mathbf{A}$.

**5-37.** Доказать соотношение

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]=\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}.$$

Для доказательства воспользуемся известным соотношением: $\operatorname{div}[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]=\nabla[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}]$. Так как в этом выражении дифференцируется произведение, то введем при знаке оператора индекс, указывающий, по какому переменному производится дифференцирование, и разложим правую часть последней формулы на два слагаемых, после чего получим

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}]=\nabla_a[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}]+\nabla_b[\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}]=\mathbf{B}[\nabla_a\mathbf{A}]+\mathbf{A}[\mathbf{B}\nabla_b]=$$

$$=\mathbf{B}[\nabla_a\mathbf{A}]-\mathbf{A}[\nabla_b\mathbf{B}]=\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}.$$

**5-38.** Какой физический и геометрический смысл имеет $\operatorname{rot}\mathbf{H}$?

**5-39.** Определить $\operatorname{rot}\mathbf{r}$, где радиус-вектор

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z.$$

*Ответ.* $\operatorname{rot}\mathbf{r}=0$.

**5-40.** Доказать, что $\operatorname{rot}[\mathbf{A}\mathbf{r}]=2\mathbf{A}$,

где $\mathbf{A}$ — вектор, постоянный по величине и по направлению;
$\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

**5-41.** Доказать, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$.

### Решение

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\nabla[\nabla\,\mathbf{H}]=[\nabla\nabla]\,\mathbf{H}=0.$$

**5.42.** В двух параллельных алюминиевых шинах проходят токи, одинаковые по величине и противоположные по направлению (рис. 5-15). Токи распределяются равномерно по поперечному сечению шины. Размеры шин удовлетворяют условию $l\gg h\gg 2b\gg a$.

При каком расстоянии $d=2\,b$ между шинами внутренняя индуктивность двух шин будет равна внешней индуктивности шинопровода?

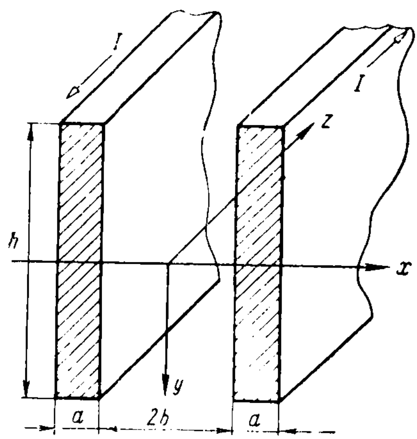



Рис. 5-15

## Решение

Индуктивность может быть найдена по известной индукции магнитного поля. В порядке упражнения в этой задаче индукция будет получена из расчета векторного потенциала поля заданных шин.

Условие $h \gg a$ позволяет пренебречь неравномерным распределением потенциала по высоте шин, т. е. считать $\frac{dA}{dy} = 0$. Условие $l \gg h \gg a$ позволяет пренебречь неравномерным распределением потенциала по длине шин и считать $\frac{dA}{dz} = 0$. Векторный потенциал в данной задаче параллелен вектору плотности тока, поэтому для выбранной системы координат он будет иметь только одну составляющую по оси $z$: $\mathbf{A} = \mathbf{k}A_z$, т. е. $A_z = A$.

С учетом указанных допущений уравнение Пуассона для векторного потенциала $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mu_0 \boldsymbol{\delta}$ в рассматриваемом случае примет вид

$$\nabla^2 A = -\mu\mu_0 \delta,$$

или

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\mu_0 \delta \text{ (для алюминия } \mu = 1).$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\mu_0 \delta x + C;$$

$$A=-\frac{\mu_0 \delta x^2}{2}+Cx+D,$$

где $C$ и $D$ — постоянные интегрирования.

Индукция

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=\begin{vmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}=-\mathbf{j}\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Поэтому $B=B_y=-\frac{\partial A}{\partial x}=\mu_0\,\delta x-C.$

Исходя из полученных решений уравнения Пуассона, напишем выражения для векторного потенциала и индукции магнитного поля для различных $x$.

Между шинами ($|x|<b$), где $\delta_1=0$,

$$A_1=C_1 x+D_1; \tag{1}$$

$$B_1=-C_1. \tag{2}$$

Внутри правой шины ($b+a>x>b$), где $\delta_2=\frac{I}{ah}$,

$$A_2=-\frac{\mu_0 I x^2}{2ah}+C_2 x+D_2; \tag{3}$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I x}{ah}-C_2. \tag{4}$$

Справа от шин ($x>a+b$), где $\delta_3=0$,

$$A_3=C_3 x+D_3; \tag{5}$$

$$B_3=-C_3. \tag{6}$$

Условие $h\gg 2\,b$ позволяет считать магнитную индукцию в пространстве между шинами много больше магнитной индукции во внешнем пространстве, которую в этом случае можно принять равной нулю. Примем также, что потенциал равен нулю в начале координат. Поскольку магнитные проницаемости меди и воздуха практически одинаковы, то векторы **B**, **H** и **A** на поверхности шины не будут испытывать преломления.

Тогда граничные условия запишутся следующим образом:

при $x=0$

$$A_1=0; \tag{7}$$

при $x=b$

$$A_1=A_2; \tag{8}$$

$$B_1=B_2, \tag{9}$$

при $x=a+b$

$$A_2=A_3; \tag{10}$$

$$B_2=B_3=0. \tag{11}$$

Определим постоянные интегрирования, исходя из граничных условий:

из (6) и (11)

$$C_3=0;$$

из (4) и (11)

$$C_2=\frac{\mu_0 I(b+a)}{ah};$$

из (2) и (9)

$$C_1=\frac{\mu_0 I(b+a)}{ah}-\frac{\mu_0 Ib}{ah}=\frac{\mu_0 I}{h};$$

из (1) и (7)

$$D_1=0;$$

из (1), (3) и (8)

$$\frac{\mu_0 I}{h}b=-\frac{\mu_0 Ib^2}{2ah}+\frac{\mu_0 I(b+a)}{ah}b+D_2,$$

$$D_2=-\frac{\mu_0 Ib^2}{2ah};$$

из (3), (5) и (10)

$$D_3=-\frac{\mu_0 I(b+a)^2}{2ah}+\frac{\mu_0 I(b+a)}{ah}(b+a)-\frac{\mu_0 Ib^2}{2ah}=\frac{\mu_0 I}{h}\left(b+\frac{a}{2}\right).$$

Окончательно получаем

$$A_1=\frac{\mu_0 I}{h}\cdot x;$$

$$A_2=-\frac{\mu_0 Ix^2}{2ah}+\frac{\mu_0 I}{h}\cdot\frac{b+a}{a}\cdot x-\frac{\mu_0 Ib^2}{2ah};$$

$$A_3=\frac{\mu_0 I}{2h}(a+2b);$$

$$B_1=-\frac{\mu_0 I}{h};$$

$$B_2=\frac{\mu_0 Ix}{ah}-\frac{\mu_0 I}{h}\cdot\frac{b+a}{a}; \qquad B_3=0.$$

Рассмотрим элементарный магнитный поток, проходящий внутри правой шины через площадку сечением $dS = -ldx$* на расстоянии $x$ от начала координат:

$$d\Phi_2 = B_2\, dS = \frac{\mu_0 I}{ah}(b + a - x)\, l dx.$$

Этот поток сцеплен не с полным током шины, а только с его частью

$$\eta = \frac{I_x}{I} = \frac{I \cdot \dfrac{b + a - x}{a}}{I} = \frac{b + a - x}{a}.$$

Потокосцепление, связанное с рассматриваемым элементарным потоком,

$$d\Psi_2 = \eta d\Phi_2 = \frac{\mu_0 Il}{a^2 h}(b + a - x)(b + a - x)\, dx.$$

Полное внутреннее потокосцепление правой шины

$$\Psi_2 = \int\limits_{x=b}^{x=b+a} d\Psi_2 = \frac{\mu_0 Il}{a^2 h} \int\limits_{b}^{b+a} (b + a - x)^2\, dx =$$

$$= \frac{\mu_0 Ib}{3a^2 h}\left[(b + a - x)^3\right]_{b+a}^{b} = \frac{\mu_0 Ila}{3h}.$$

Поскольку левая шина расположена симметрично правой, то их внутренние потокосцепления одинаковы.

Внешний магнитный поток, замыкающийся между шинами, имеет сечение $S_1 = -2bl$ и равен

$$\Phi_1 = \int\limits_{x=-b}^{x=b} d\Phi_1 = \int\limits_{x=-b}^{x=b} B_1\, dS_1 = B_1 S_1 = \frac{\mu_0 I \cdot 2bl}{h}.$$

Он сцеплен с током петли, образуемой прямой и обратной шинами. Поэтому внешнее потокосцепление $\Psi_1 = \Phi_1$.

Магнитный поток между шинами можно найти и другим способом:

$$\Phi_1 = \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = l\,[A_1]_{x=b} - l\,[A_1]_{x=-b} =$$

$$= l\left\{\frac{\mu_0 I}{h} b - \left[\frac{\mu_0 I}{h}(-b)\right]\right\} = \frac{2\mu_0 Ilb}{h}.$$

---

* Знак «минус» взят потому, что вектор элементарной поверхности $dS$ направлен вдоль положительного направления индукции, т. е. противоположно положительному направлению оси.

Внешняя индуктивность

$$L_{\text{внеш}}=\frac{\Psi_1}{I}=\mu_0\frac{d}{h}l.$$

Внутренняя индуктивность двух шин

$$L_{\text{внутр}}=\frac{2\Psi_2}{I}=\mu_0\frac{2a}{3h}l.$$

По условию задачи расстояние $d$ между лентами должно быть выбрано таким, чтобы $L_{\text{внеш}}=L_{\text{внутр}}$. Из сравнения формул для внешней и внутренней индуктивностей следует, что требование задачи будет выполнено, если $d=\frac{2}{3}a$.

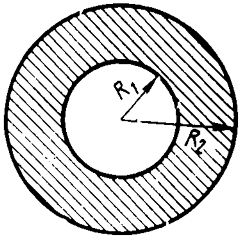


Рис. 5-16

**5-43.** Полый алюминиевый провод с током $I=100$ *а* имеет радиусы $R_1=2$ *см* и $R_2=3$ *см* (рис. 5-16).

Найти распределение векторного потенциала внутри провода, полагая плотность тока одинаковой по всему сечению провода.

### Решение

Полагая провод достаточно длинным и учитывая, что вектор плотности тока имеет в проводе только составляющую по оси $z$, можно заключить, что векторный потенциал имеет также одну осевую составляющую $A=A_z$. Другие составляющие вектора $\mathbf{A}$ равны нулю, т. е.

$$A_r=A_\alpha=0,$$

так как

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\delta}{R}dV.$$

Кроме того, в силу симметрии поля $\frac{\partial A}{\partial \alpha}=\frac{\partial A}{\partial z}=0.$

Указанные соотношения упрощают выражение для лапласиана векторного потенциала, если использовать цилиндрическую систему координат:

$$\Delta A=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right).$$

Для определения векторного потенциала в области, где $R_1\leqslant r\leqslant R_2$, можно воспользоваться уравнением Пуассона

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right)=-\mu_0\delta,$$

где плотность тока

$$\delta = \frac{I}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}.$$

Дважды разделяя переменные и интегрируя, можно получить сначала

$$r\frac{dA}{dr} = -\frac{\mu_0 \delta r^2}{2} + C,$$

а потом

$$A = -\frac{\mu_0 \delta r^2}{4} + C\ln r + D, \tag{1}$$

где $C$ и $D$ — постоянные интегрирования.

Магнитная индукция в условиях задачи

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{r}^\circ}{r} & \boldsymbol{\alpha}^\circ & \frac{\mathbf{z}^\circ}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\alpha & A_z \end{vmatrix} = -\frac{dA}{dr}\boldsymbol{\alpha}^\circ.$$

Поэтому

$$B = -\frac{dA}{dr} = \frac{\mu_0 \delta r}{2} - \frac{C}{r}. \tag{2}$$

Внутри провода, где $0 \leqslant r \leqslant R$, для определения векторного потенциала и индукции можно воспользоваться полученными выше решениями, положив в уравнениях (1) и (2) $\delta = 0$:

$$A_1 = C_1 \ln r + D_1; \tag{3}$$

$$B_1 = -\frac{C_1}{r}. \tag{4}$$

Из физических соображений магнитная индукция ($B_1$) не может быть бесконечно большой на оси провода ( при $r = 0$). Это будет только в том случае, если в последних уравнениях

$$C_1 = 0. \tag{5}$$

Остальные постоянные определяются из граничных условий с учетом отсутствия преломления векторов **B**, **H** и **A** на границе (магнитные проницаемости воздуха и алюминия практически одинаковы) и в предположении равенства нулю векторного потенциала на оси провода:

при $r=0$

$$A_1 = 0, \tag{6}$$

$$B_1 \neq \infty, \tag{7}$$

при $r=R_1$

$$A_1=A, \tag{8}$$

$$B_1=B. \tag{9}$$

Из граничного условия (7) следует, как уже отмечалось в условии (5),

$$C_1 = 0.$$

Из условия (6) и уравнений (3) и (5) следует, что

$$D_1 = 0. \tag{10}$$

Из условия (9) и уравнения (5) можно получить

$$C=\frac{\mu_0 \delta R_1^2}{2}. \tag{11}$$

Из условия (8) с учетом найденных ранее постоянных

$$D=\frac{\mu_0 \delta R_1^2}{4} - \frac{\mu_0 \delta R_1^2}{2} \ln R_1. \tag{12}$$

После подстановки найденных постоянных интегрирования можно написать уравнение векторного потенциала в окончательном виде:

$$A=\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)}\left(R_1^2-r^2+2R_1^2 \ln \frac{r}{R_1}\right)=$$

$$=\frac{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 10^2}{4\pi\left(3^2-2^2\right)}\left(2^2-r^2+2 \cdot 2^2 \ln \frac{r}{2}\right)=$$

$$=2\left(4+8 \ln \frac{r}{2}-r^2\right) 10^{-8} \text{ вб/см},$$

если $[r]=$*см.*

**5-44.** Определить с помощью закона полного тока зависимость напряженности магнитного поля от расстояния до оси провода в условиях задачи 5-43.

### Решение

Согласно закону полного тока

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l}=I_r.$$

В качестве контура интегрирования удобно выбрать силовую линию, т. е. окружность, во всех точках которой напряженность одинакова по величине и направлена по касательной к окружности (угол $\alpha$ между векторами $\mathbf{H}$ и $d\mathbf{l}$ равен нулю). Длина окружности радиуса $r$ равна $2\pi r$. Поэтому

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \oint H \cos\alpha\, dl = \oint H\, dl = H \oint dl = H\, 2\pi r.$$

Внутри провода ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$) силовая линия охватывает ток

$$I_r = \frac{I}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\, \pi\left(r^2 - R_1^2\right) = I\, \frac{r - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Поэтому окончательно

$$H = \frac{I_r}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Внутри провода, где $r \leqslant R_1$, $H = 0$, так как $I_r = 0$. Снаружи провода $H_{внеш} = \frac{I}{2\pi r}$, так как $I_r = I$ при $r \geqslant R_2$.

**5-45.** Построить график изменения векторного потенциала магнитного поля коаксиального кабеля при постоянном токе 50 *а*. Медная жила имеет диаметр 4 *мм*, свинцовая оболочка, по которой возвращается ток, имеет внутренний и наружный диаметры 8 и 12 *мм* соответственно. Длина кабеля 50 *м*.

**5-46.** Принимая размеры кабеля известными из предыдущей задачи, определить его индуктивность.

*Ответ.* 0,9 *мкгн.*

**5-47.** Найти энергию магнитного поля в условиях задачи 5-42 по формуле

$$W = \int\limits_{x=b}^{x=a+b} \frac{HB}{2}\, dV.$$

*Ответ.* $W = \frac{\mu_0 a l\, I^2}{6h}$.

**5-48.** Определить энергию магнитного поля в условиях задачи 5-42 по формуле

$$W = \int\limits_{x=b}^{x=a+b} \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\delta}}{2}\, dV.$$

Решение

В качестве элемента объема здесь удобно выбрать параллелепипед высотой $h$, длиной $l$ и шириной $dx$: $dV = hl\,dx$. Учтем также, что в этой области векторный потенциал $A_2$ совпадает по направлению с вектором плотности тока $\delta_2 = \frac{I}{ah}$.

Тогда

$$W=\int\limits_{x=b}^{x=a+b}\frac{A_z\delta_z}{2}\,dV=\int\limits_{b}^{a+b}\frac{\mu_0 I}{2ah}\,[2\,(a+b)x-x^2-b^2]\,\frac{I}{2ah}\,hl\,dx=$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 l}{4a^2h}\left[(a+b)\,x^2-\frac{x^3}{3}-b^2x\right]_a^{a+b}=\frac{\mu_0 I^2 l}{2h}\left(b+\frac{a}{3}\right).$$

**5-49.** Объяснить расхождение результатов, полученных в двух предыдущих задачах. Какой физический смысл энергий, подсчитанных в задачах 5-47 и 5-48?

**5-50.** Определить энергию магнитного поля внутри провода в задаче 5-43.

*Ответ.* $W=1{,}09\cdot10^{-4}$ *дж/м.*

**5-51.** Определить внутреннюю индуктивность провода на единицу длины в условиях задачи 5-43.

*Ответ.* $0{,}218\cdot10^{-7}$ *гн/м.*

**5-52.** Проволочная рамка в виде треугольника с током $i=0{,}1$ *а* имеет $w=100$ витков и находится в воздухе в одной плоскости с длинным проводом с током $I=10$ *ка* (рис. 5-17).

Определить действующую на рамку силу, рассматривая рамку как одну жесткую систему.

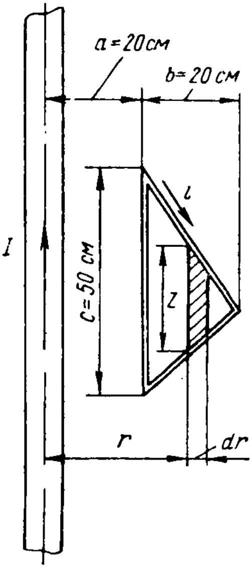



Рис. 5-17

## Решение

При определении взаимной индуктивности между рамкой и проводом можно предполагать, что ток в рамке отсутствует ($i=0$). Магнитная индукция поля тока $I$ в точке, отстоящей от оси провода на расстоянии $r$, может быть легко найдена по закону полного тока

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Магнитный поток через площадку

$$dS=z\,dr=\frac{c}{b}\,(a+b-r)\,dr$$

будет равен

$$d\Phi=B\,dS.$$

Магнитный поток, пронизывающий треугольник,

$$\Phi_{Ii} = \int\limits_{r=a}^{r=a+b} B\,dS = \int\limits_{a}^{a+b} \frac{\mu_0 cI}{2\pi br}(a+b-r)\,dr =$$

$$= \frac{\mu_0 cI}{2\pi b}\left[(a+b)\ln\frac{a+b}{a} - b\right].$$

Взаимная индуктивность рамки и провода

$$M = \frac{\Psi_{Ii}}{I} = \frac{w\Phi_{Ii}}{I} = \frac{\mu_0 wc}{2\pi}\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{4\pi 10^{-9}\cdot 100\cdot 50}{2\pi}\left[\left(1+\frac{20}{20}\right)\ln\left(1+\frac{20}{20}\right) - 1\right] = 3{,}86\cdot 10^{-6}\ \textit{гн}.$$

Энергия магнитного поля рамки и провода

$$W = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 i^2}{2} + MiI,$$

где $L_1$ и $L_2$ — индуктивности провода и рамки.

На рамку действует сила в радиальном направлении, т. е. в направлении координаты $r$. При перемещении рамки в этом направлении под действием сил магнитного поля будет изменяться расстояние $a$ и коэффициент $M$, а $L_1$ и $L_2$ не будут изменяться, так как по условию рамка жесткая и ее размеры и форма не меняются. Поэтому

$$F = \frac{\partial W}{\partial a} = iI\frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\mu_0 c\omega I}{2\pi b}\cdot\frac{i\partial}{\partial a}\left[\ln\frac{a+b}{a} - \frac{b}{a}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 c\omega iI}{2\pi b}\left[\ln\frac{a+b}{a} + (a+b)\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 c\omega iI}{2\pi b}\left(\ln\frac{a+b}{a} - \frac{b}{a}\right) =$$

$$= \frac{4\pi 10^{-9}\cdot 50\cdot 100\cdot 0{,}1\cdot 10^4}{2\pi 20}\left(\ln\frac{20+20}{20} - \frac{20}{20}\right) =$$

$$= 1{,}54\cdot 10^{-4}\ \textit{дж/см} = 0{,}0154\ \textit{н}.$$

**5-53.** Обосновать непрерывность тангенциальной составляющей векторного потенциала ($A_{1t} = A_{2t}$) на границе раздела двух сред с разными магнитными свойствами с помощью уравнения, связывающего магнитный поток с векторным потенциалом.

**5-54.** Как изменятся граничные условия в задачах 5-42 и 5-43, если проводники будут сделаны из ферромагнитного материала, например, стали?

**5-55.** Параллельно оси длинного стального цилиндра радиуса $R$ расположен проводник с током $I$ на расстоянии $D$ от оси цилиндра. Под действием этого тока цилиндр намагничивается.

Определить силу, с которой магнитное поле цилиндра действует на длине $l$ проводника с током, если магнитная (относительная) проницаемость цилиндра равна $\mu_ц$, а внешней среды — $\mu$.

### Решение

Искомое поле эквивалентно полю двух токов, лежащих в одной плоскости с током $I$ в среде с проницаемостью $\mu$. Один из них $I' = \frac{\mu_ц - \mu}{\mu_ц + \mu} I$ совпадает с осью цилиндра, второй $I'' = -I'$ проходит через инверсную точку, расположенную на расстоянии $d = \frac{R^2}{D}$ от оси цилиндра. Таким образом, проводник с током $I$ находится в магнитном поле, магнитная индукция которого

$$B = \frac{\mu\mu_0 I'}{2\pi D} - \frac{\mu\mu_0 I'}{2\pi (D - d)}.$$

Искомая сила равна $\mathbf{F} = I[\mathbf{l}\mathbf{B}]$, где направление вектора $\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока $I$.

## Тема 4

## Переменное электромагнитное поле в неподвижной среде

Переменное электромагнитное поле имеет волновой характер, обусловленный взаимодействием магнитного и электрического полей. Взаимосвязь электрического и магнитного полей наиболее отчетливо видна в уравнениях Максвелла, которые дают выражения для вихрей магнитного и электрического полей, отличные от их выражений в стационарных полях. Они учитывают электромагнитную индукцию, одним из проявлений которой явилось появление понятия токов смещения. Истоки электромагнитного поля и выражения для энергии имеют ту же структуру, что и в стационарных полях. Движение энергии электромагнитного поля, распределение потоков мощности электромагнитного поля характеризует вектор Умова — Пойнтинга.

### *Примеры и задачи*

**5-56.** В чем отличие первого уравнения Максвелла от закона полного тока для постоянного тока?

**5-57.** В чем отличие второго уравнения Максвелла от закона электромагнитной индукции?

**5-58.** Чему равно отношение тока смещения к току проводимости в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и проводимостью $\gamma$ в синусоидальном поле с частотой $f$?

5-59. Какой сдвиг фаз имеется между током проводимости и током смещения в поле, меняющемся со временем по синусоидальному закону?

5-60. Что показывают величина и направление вектора Умова — Пойнтинга?

5-61. Какой смысл имеет отрицательный знак перед выражением потока вектора Умова — Пойнтинга в теореме Умова — Пойнтинга?

5-62. По одиночному медному цилиндрическому проводнику проходит ток $I$. Разность потенциалов на концах проводника длиной $l$ равна $U$. На поверхности провода находится заряд $q$.

Определить величину и направление вектора Умова — Пойнтинга внутри и вне проводника, если сечение провода $S$, а диаметр его $d$. При определении вектора Умова — Пойнтинга вне проводника считать заряд $q$ равномерно распределенным по всей поверхности проводника.

*Ответ.* Внутри проводника вектор Умова — Пойнтинга направлен по радиусу и равен $\Pi = \frac{UIr}{2\pi l r_0^2}$, где $r$ — расстояние от оси проводника, а $r_0 = \frac{d}{2}$.

Вне проводника вектор Умова—Пойнтинга направлен параллельно оси провода и равен

$$\Pi = \frac{qI}{4\pi^2 \varepsilon_0 l R^2},$$

где $R$ — расстояние от оси провода, меняющееся в пределах от $R = r_0$ до $R = \infty$.

5-63. В условиях предыдущей задачи доказать, что поток вектора Умова — Пойнтинга через поверхность проводника равен мощности, потребляемой этим проводником, т. е.

$$P = -\int \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S} = UI.$$

5-64. Цилиндрический медный проводник длиной $l$ окружен концентрически полым проводником такой же длины.

По проводникам проходят в разных направлениях одинаковые по величине токи $I$. Радиус внутреннего провода $r_0$. Внутренний радиус цилиндрического полого проводника равен $R_1$, а внешний радиус $R_2$. Определить направление вектора Умова — Пойнтинга в точках внутри первого и второго цилиндров, между цилиндрами и вне обоих цилиндров, если напряжение в начале данной системы равно $U$.

*Ответ.* Внутри первого проводника вектор направлен внутрь этого провода; в пространстве между проводниками вектор Умова — Пойнтинга имеет осевую и радиальную составляющие и вне проводников — равен нулю.

**5-65.** В электромагнитной системе, описанной в предыдущей задаче, доказать, что поток вектора Умова — Пойнтинга через поперечное сечение кабеля равен мощности, доставляемой потребителю. Потерями в проводах пренебречь.

**5-66.** Под каким углом направлены векторы **E** и **H** в распространяющейся в пространстве плоской электромагнитной волне?

**5-67.** Три одинаковые ленты, выполненные из стали, расположены симметрично, как показано на рис. 5-18. Толщина каждой

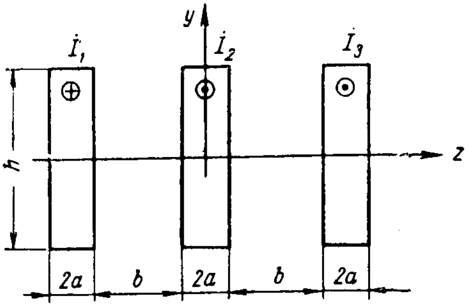



Рис. 5-18

ленты $2a = 1$ *мм*, ширина $h = 10$ *мм*. Расстояние между смежными поверхностями $b = 2$ *мм*. Относительная магнитная проницаемость ленты в слабых полях $\mu = 250$, ее удельная проводимость $\gamma = 10^5$ *сим/см*. Две правые ленты соединены параллельно и служат обратным проводом для тока левой ленты.

Требуется найти полное сопротивление передачи на 1 *м* длины при частоте $f = 5\,000$ *гц*, полагая, что волны в лентах плоские.

## Решение

Положим, что

$$\dot I_3 = k\dot I_1. \tag{1}$$

Тогда

$$\dot I_2 = (1 - k)\dot I_1, \tag{2}$$

так как по условию

$$\dot I_2 + \dot I_3 = \dot I_1.$$

Ширина лент $h$ много больше толщины $2a$ и расстояний между ними $b$. Поэтому можно считать, что напряженность магнитного поля вблизи лент одинакова. Применяя закон полного тока к замкнутым контурам, проведенным пунктиром около каждой ленты (рис. 5-19), и полагая при каждом обходе, что ток в остальных лентах отсутствует, получим

$$\dot{H}' = \frac{\dot{I}_1}{2h},$$

$$\dot{H}'' = \frac{\dot{I}_2}{2h},$$

$$\dot{H}''' = \frac{\dot{I}_3}{2h}.$$

Напряженность поля в промежутках между лентами и на наружных поверхностях крайних лент найдем по методу наложения, скла-

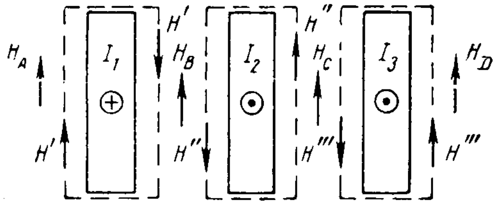



Рис. 5-19

дывая геометрически напряженности полей, связанные с током каждой ленты в отдельности:

$$\dot{H}_A = \dot{H}' - \dot{H}'' - \dot{H}''' = \frac{\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3}{2h} = 0,$$

$$\dot{H}_B = -\dot{H}' - \dot{H}'' - \dot{H}''' = \frac{-\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3}{2h} = -\frac{\dot{I}_1}{h},$$

$$\dot{H}_C = -\dot{H}' + \dot{H}'' - \dot{H}''' = \frac{-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3}{2h} = -\frac{\dot{I}_3}{h},$$

$$\dot{H}_D = -\dot{H}' + \dot{H}'' + \dot{H}''' = -\dot{H}_A = 0.$$

Перейдем теперь к расчету поля внутри лент. При рассмотрении движения плоской гармонической волны в проводнике для напряженности магнитного поля $H = H_y$ было найдено

$$\dot{H} = \dot{C}' e^{-pz} + \dot{C}'' e^{pz}.$$

Воспользовавшись этим общим выражением для плоской волны магнитного поля, определим напряженности магнитного поля во всех трех лентах. В левой ленте

$$\dot{H}_1 = \dot{C}_1' e^{-pz} + \dot{C}_1'' e^{pz}.$$

Постоянные интегрирования $\dot{C}_1'$ и $\dot{C}_1''$ находят из граничных условий (начало координат предполагается на наружной поверхности ленты):

на наружной поверхности ленты при $z = 0$

$$\dot{H}_1 = \dot{C}' + \dot{C}'' = \dot{H}_A = 0;$$

на внутренней поверхности ленты при $z=2a$

$$\dot{H}_1 = \dot{C}_1' e^{-2pa} + \dot{C}_1'' e^{2pa} = \dot{H}_B = -\frac{\dot{I}_1}{h}.$$

Из первого граничного условия следует, что

$$\dot{C}_1' = -\dot{C}_1'',$$

из второго —

$$\dot{C}_1' = -\frac{\dot{I}_1}{h}\,\frac{1}{e^{-2pa} - e^{2pa}}.$$

Таким образом,

$$\dot{H}_1 = -\frac{\dot{I}_1}{h}\,\frac{e^{-pz} - e^{pz}}{e^{-2pa} - e^{2pa}} = -\frac{\dot{I}_1}{h}\,\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

В средней ленте

$$\dot{H}_2 = \dot{C}_2' e^{-pz} + \dot{C}_2'' e^{pz}.$$

Для упрощения расчета расположим теперь начало координат в середине ленты. Тогда для определения постоянных интегрирования можно использовать следующие граничные условия:

на левой стороне ленты при $z = -a$

$$\dot{H}_2 = \dot{C}_2' e^{pa} + \dot{C}_2'' e^{-pa} = \dot{H}_B = -\frac{\dot{I}_1}{h},$$

на правой стороне при $z = a$

$$\dot{H}_2 = \dot{C}_2' e^{-pa} + \dot{C}_2'' e^{pa} = \dot{H}_C = -\frac{\dot{I}_3}{h}.$$

Последовательно складывая и вычитая последние два уравнения, получим сначала

$$\dot{C}_2' + \dot{C}_2'' = -\frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_3}{h}\cdot\frac{1}{e^{pa} + e^{-pa}} = -\frac{\dot{I}_1}{h}\cdot\frac{1+k}{e^{pa} + e^{-pa}};$$

$$\dot{C}_2' - \dot{C}_2'' = -\frac{\dot{I}_1 - \dot{I}_3}{h}\cdot\frac{1}{e^{pa} - e^{-pa}} = -\frac{\dot{I}_1}{h}\cdot\frac{1-k}{e^{pa} - e^{-pa}},$$

а затем

$$\dot{C}_2' = -\frac{1}{2}\frac{\dot{I}_1}{h}\left(\frac{1+k}{e^{pa}+e^{-pa}}+\frac{1-k}{e^{pa}-e^{-pa}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\dot{I}_1}{h}\cdot\frac{e^{pa}-ke^{-pa}}{\operatorname{sh} 2pa},$$

$$\dot{C}_2'' = -\frac{1}{2}\frac{\dot{I}_1}{h}\left(\frac{1+k}{e^{pa}+e^{-pa}}-\frac{1-k}{e^{pa}-e^{-pa}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\dot{I}_1}{h}\,\frac{e^{-pa}-ke^{pa}}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Следовательно,

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{I}_1}{h}\left[(ke^{-pa}-e^{pa})\,e^{-pz}-(ke^{pa}-e^{-pa})\,e^{pz}\right]\frac{1}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Внутри правой ленты

$$\dot{H}_3 = \dot{C}_3' e^{-pz} + \dot{C}_3'' e^{pz}.$$

Располагая в этом случае начало координат на наружной поверхности ленты, получим

при $z = -2a$

$$\dot{H}_3 = \dot{C}_3' e^{2pa} + \dot{C}_3'' e^{-2pa} = \dot{H}_C = -\frac{\dot{I}_3}{h},$$

при $z = 0$

$$\dot{H}_3 = \dot{C}_3' + \dot{C}_3'' = \dot{H}_D = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\dot{C}_3' = -\dot{C}_3''.$$

Из первого граничного условия

$$\dot{C}_3' = -\frac{\dot{I}_3}{h}\,\frac{1}{e^{2pa}-e^{-2pa}}.$$

Таким образом,

$$\dot{H}_3 = -\frac{\dot{I}_3}{h}\,\frac{e^{-pz}-e^{pz}}{e^{2pa}-e^{-2pa}} = k\frac{\dot{I}_1}{h}\cdot\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Напряженность электрического поля можно определить из первого уравнения Максвелла для проводящей среды, где токами смещения можно пренебречь $\left(\frac{\partial D}{\partial t} = 0\right)$:

$$\boldsymbol{\delta} = \gamma\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\mathbf{i}\frac{dH}{dz},$$

так как

$$H_z = H_x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Таким образом,

$$\dot{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}}{dz} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dz}(\dot{C}'e^{-pz} + \dot{C}''e^{pz}) = Z_c(\dot{C}'e^{-pz} - \dot{C}''e^{pz}),$$

где

$$Z_c = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\gamma\omega\mu\mu_0}{\gamma}}.$$

Напряженность электрического поля на внутренней поверхности левой ленты (при $z=2a$)

$$\dot{E}_{1a} = Z_c(\dot{C}_1' e^{-2pa} - \dot{C}_1'' e^{2pa}) =$$

$$= -\frac{Z_c \dot{I}_1}{h}\frac{e^{-2pa}+e^{2pa}}{e^{-2pa}-e^{2pa}} = \frac{Z_c \dot{I}_1}{h}\frac{\operatorname{ch} 2pa}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

На левой поверхности средней ленты ($z = -a$)

$$\dot{E}_{-2a} = Z_c(\dot{C}_2' e^{pa} - \dot{C}_2'' e^{-pa}) =$$

$$= \frac{Z_c}{2h}\frac{\dot{I}_1}{\operatorname{sh} 2pa}[(ke^{-pa} - e^{pa})e^{pa} + (ke^{pa} - e^{-pa})e^{-pa}] =$$

$$= \frac{Z_c \dot{I}_1}{h}\frac{k - \operatorname{ch} 2pa}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

На правой поверхности средней ленты ($z= -2a$) аналогично

$$\dot{E}_{2a} = Z_c(\dot{C}_2' e^{-pa} - \dot{C}_2'' e^{pa}) = \frac{Z_c \dot{I}_1}{h}\frac{k \operatorname{ch} 2pa - 1}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

На внутренней поверхности правой ленты ($z=-2a$)

$$\dot{E}_{-3a} = Z_c(\dot{C}_3' e^{2pa} - \dot{C}_3'' e^{-2pa}) = -k\frac{\dot{I}_1 Z_c}{h}\frac{\operatorname{ch} 2pa}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Для определения распределения токов между правой и средней лентами необходимо применить закон электромагнитной индукции к замкнутому контуру, охватывающему магнитный поток в воздушном зазоре между средней и правой лентами (шириной $b$ и длиной $l$):

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = E_{-3a}l - E_{2a}l = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 bl\frac{dH_C}{dt}.$$

В комплексной форме это выражение можно переписать следующим образом:

$$\dot{E}_{2a} - \dot{E}_{-3a} = j\omega\mu_0 b\dot{H}_C,$$

или

$$\frac{Z_c \dot{I}_1}{h}\,\frac{k\,\mathrm{ch}\,2pa-1}{\mathrm{sh}\,2pa}+\frac{Z_c\,k\dot{I}_1}{h}\,\frac{\mathrm{ch}\,2pa}{\mathrm{sh}\,2pa}=-j\omega\mu_0\,b\,\frac{k\dot{I}_1}{h}.$$

Откуда

$$k=\frac{Z_c}{2Z_c\,\mathrm{ch}\,2pa+j\omega\mu_0\,b\,\mathrm{sh}\,2pa}.$$

Активное $r$ и внутреннее реактивное $x_i$ сопротивления провода можно найти из уравнения

$$Z_i=r+jx_i=-\frac{1}{2I^2}\oint[\dot{\mathbf{E}}_{m\,\text{пов}}\,\overset{*}{\mathbf{H}}_{m\,\text{пов}}]\,d\mathbf{S}=$$

$$=-\frac{1}{I^2}\oint[\dot{\mathbf{E}}_{\text{пов}}\,\overset{*}{\mathbf{H}}_{\text{пов}}]\,d\mathbf{S}.$$

Для плоской волны векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и сохраняют одно и то же значение на боковых поверхностях ленты. Учитывая, что в условиях задачи среднее значение вектора Умова — Пойнтинга за период соответствует направлению вектора внутрь ленты, т. е. в сторону, противоположную вектору **dS**, получим

$$Z_i=\frac{1}{I^2}(\dot{E}_{\text{л}}\overset{*}{H}_{\text{л}}S_{\text{л}}-\dot{E}_{\text{п}}\overset{*}{H}_{\text{п}}S_{\text{п}}),$$

где $\dot{E}_{\text{л}}$ и $\dot{E}_{\text{п}}$ — комплексы напряженности электрического поля на левой и правой поверхностях ленты;

$\overset{*}{H}_{\text{л}}$ и $\overset{*}{H}_{\text{п}}$ — сопряженные комплексы напряженностей магнитного поля на левой и правой поверхностях ленты;

$S_{\text{л}}=S_{\text{п}}=hl$ — площади левой и правой поверхностей ленты.

Потоками мощности через верхнюю и нижнюю поверхности пренебрегаем, так как $2a\ll h$.

Внутреннее сопротивление левой ленты

$$Z_1=\frac{hl}{I_1^2}(\dot{E}_{-1a}\overset{*}{H}_A-\dot{E}_{1a}\overset{*}{H}_B)=$$

$$=\frac{hl}{I_1^2}\left[\dot{E}_{-1a}0-\dot{I}_1\frac{Z_c}{h}\,\frac{\mathrm{ch}\,2pa}{\mathrm{sh}\,2pa}\left(-\frac{\overset{*}{I}_1}{h}\right)\right]=\frac{Z_c}{h}\,\frac{\mathrm{ch}\,2pa}{\mathrm{sh}\,2pa}\,l.$$

Среднюю и правую ленты можно рассматривать как две части одного обратного провода, поскольку обе ленты соединены параллельно. Их общее сопротивление

$$Z_2=\frac{hl}{I_1^2}(\dot{E}_{-2a}\overset{*}{H}_B-\dot{E}_{3a}\overset{*}{H}_D)=$$

$$=\frac{hl}{I_1^2}\left[\dot{I}_1\frac{Z_c}{h}\,\frac{k-\mathrm{ch}\,2pa}{\mathrm{sh}\,2pa}\left(-\frac{\overset{*}{I}_1}{h}\right)-\dot{E}_{3a}\,0\right]=\frac{Z_c}{h}\,\frac{\mathrm{ch}\,2pa-k}{\mathrm{sh}\,2pa}\,l.$$

Внешнее реактивное сопротивление обусловлено магнитным потоком между левой лентой и обратным проводом, т. е. между левой и средней лентами:

$$x_e = \omega L_e = \frac{\omega \Psi_e}{I_1} = \omega \frac{BS}{I_1} = \omega \frac{\mu_0 H_B b l}{I_1} = \omega\mu_0 \frac{b}{h} l.$$

Общее комплексное сопротивление шинопровода на единицу длины

$$Z_0 = \frac{Z_1 + Z_2 + jx_e}{l} = \frac{Z_c}{h} \frac{2\,\mathrm{ch}\,2pa - k}{\mathrm{sh}\,2pa} + j\omega\mu_0 \frac{b}{h}.$$

Перейдем к числовым расчетам.

$$\omega = 2\pi f = 2\cdot 3,14\cdot 5000 = 31\,400 \text{ сек}^{-1},$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu\mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{j\pi 10^4\cdot 250\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{10^7}} = 0,994\cdot 10\, e^{-3}\, e^{j45^\circ} \text{ ом},$$

$$p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{j\pi\cdot 10^4\cdot 250\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^7} = 9,94\cdot 10^3 \text{ м}^{-1},$$

$$2pa = 2\cdot 0,5\cdot 10^{-3}\cdot 9,94\cdot 10^3 e^{j45^\circ} = 9,94\, e^{j45^\circ} = 7,04 + j7,04,$$

$$7,04^{\text{рад}} = \frac{7,04}{3,14} 180^\circ = 403^\circ,5 = 360^\circ + 43^\circ 30',$$

$$\mathrm{ch}\,2pa = \frac{e^{2pa} + e^{-2pa}}{2} = \frac{e^{7,04+j7,04} + e^{-7,04-j7,04}}{2} \simeq$$

$$\simeq 551\, e^{j43^\circ 30'} = 400 + j\,379,$$

$$\mathrm{sh}\,2pa = \frac{e^{2pa} - e^{-2pa}}{2} \simeq 400 + j\,379,$$

$$k = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,2pa + j\dfrac{\omega\mu_0 b}{Z_c}\,\mathrm{sh}\,2pa} =$$

$$= \frac{1}{551\, e^{j43^\circ 30'}\left(2 + j\dfrac{\pi\cdot 10^4\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{-3}}{0,994\cdot 10^{-3}\, e^{j45^\circ}}\right)} = 0,882\cdot 10^{-3}\, e^{-j45^\circ}.$$

Таким образом, благодаря «эффекту близости» ток в правой ленте составит примерно 0,1% от тока в средней ленте. Вследствие этого можно считать, что в правой ленте при больших частотах ток практически отсутствует ($k \cong 0$) и

$$Z_0 \simeq 2\frac{Z_c}{h} + j\omega\mu_0 \frac{b}{h} = 2\,\frac{0,944\cdot 10^{-3}\, e^{j45^\circ}}{10\cdot 10^{-3}} + j\pi\cdot 10^4\cdot 4\pi \times$$

$$\times 10^{-7}\cdot \frac{2}{10} = (0,141 + j\,0,148) \text{ ом/м}.$$

Следовательно, $r_0 = 0,141$ *ом/м*; $x_0 = 0,148$ *ом/м*.

Увеличение активного сопротивления проводников при переменном токе по сравнению с сопротивлением при постоянном токе примерно в 19 раз объясняется поверхностным эффектом и эффектом близости.

**5-68.** Две одинаковые ленты, выполненные из стали, расположены симметрично, как показано на рис. 5-20. Толщина каждой ленты $a = 1$ *мм*, ширина $h = 10$ *мм*, расстояние между смежными поверхностями $b = 2$ *мм*. Относительная магнитная проницаемость ленты в слабых полях $\mu = 250$, ее удельная проводимость $\gamma = 10^5$ *сим/см*. Токи в лентах одинаковы по величине, но противоположны по направлению.

Требуется найти активное и реактивное сопротивления передачи длиной 2 *м* при частоте 200 *гц*.

*Ответ.* $r = 0{,}0498$ *ом*, $x = 0{,}0484$ *ом*.

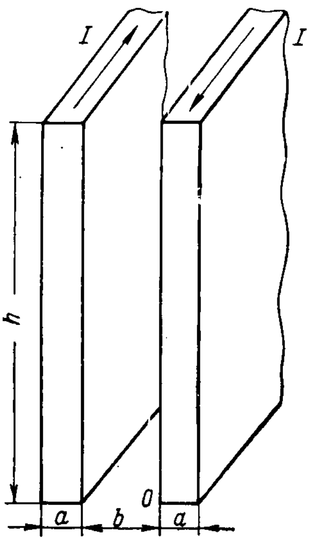



Рис. 5-20

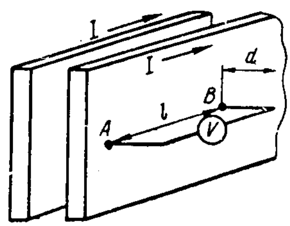



Рис. 5-21

**5-69.** Как изменится активное и внутреннее реактивное сопротивления каждой из лент в задаче 5-68, если токи в лентах станут одинаковыми и по направлению?

*Ответ.* Не изменится.

**5-70.** Определить в условиях задачи 5-69 показание вольтметра, присоединенного к точкам $A$ и $B$ правой шины (рис. 5-21). При решении: а) пренебречь током в проводах вольтметра; б) принять напряженность магнитного поля вблизи шины, равной напряженности поля на поверхности шины.

*Указание.* Согласно второму уравнению Максвелла в интегральной форме $\oint \dot{\mathbf{E}}\, \overline{d\mathbf{l}} = -j\omega\Phi$ или $\dot{E}_a l - \dot{U} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_a l d$, откуда показание вольтметра

$$U = |\dot{E}_a + j\omega\mu_0 \dot{H}_a d|\, l,$$

если $E_a$ и $H_a$ — напряженности на наружной поверхности ленты, 5-71. Пластина из ферромагнитного материала имеет относительную магнитную проницаемость в слабых полях $\mu = 300$ и удельную проводимость $\gamma = 5\cdot 10^4$ *сим/см*. Толщина пластины $2\ a = 0{,}5$ *мм*.

Требуется при внешнем поле $H_0 = 0{,}1$ *а/см* и его частоте $f = 500$ *гц*: а) построить для заданной пластины график удельной мощности потерь от вихревых токов в зависимости от расстояния до середины пластины, б) определить эффективную магнитную проницаемость.

Решение

Исходными при решении задачи могут служить уравнения, получающиеся при рассмотрении поверхностного эффекта в пластине, расположенной вдоль силовых линий переменного магнитного поля. Согласно этим уравнениям (с их выводом можно познакомиться в учебниках), среднее значение магнитной индукции

$$\dot{B}_{\text{ср}} = \mu\mu_0 \dot{H}_0 \frac{\operatorname{th} pa}{pa},$$

а напряженность электрического поля внутри пластины на расстоянии $z$ от ее середины

$$\dot{E} = -j\omega a \dot{B}_{\text{ср}} \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} pa},$$

где

$$\omega = 2\pi f = 3140\ \textit{сек}^{-1},$$

$$p^2 = (b + jb)^2 = j\omega\mu\mu_0\gamma,$$

$$b = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{3140\cdot 300\cdot 4\pi\cdot 10^{-9}\cdot 5\cdot 10^4}{2}} = 17\ \textit{см}^{-1}.$$

Эффективная проницаемость равна модулю среднего значения комплексной относительной проницаемости:

$$\mu_{\text{эфф}} = |\bar{\tilde{\mu}}| = \left|\frac{\dot{B}_{\text{ср}}}{\mu_0 \dot{H}_0}\right| = \mu\frac{|\operatorname{th} pa|}{|pa|} = \frac{\mu}{ab\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ab - \cos 2ab}{\operatorname{ch} 2ab + \cos 2ab}} =$$

$$= \frac{300}{0{,}025\cdot 17\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} 0{,}85 - \cos 0{,}85}{\operatorname{ch} 0{,}85 + \cos 0{,}85}} = 297.$$

Заменяя среднюю магнитную индукцию в уравнении для напряженности, получим

$$\dot{E} = -j\omega a \frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{sh} pa}\mu\mu_0\frac{\operatorname{th} pa}{pa} =$$

$$= -\frac{j\omega\mu\mu_0 H_0}{p}\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa} = -\frac{pH_0}{\gamma}\frac{\operatorname{sh} pz}{\operatorname{ch} pa}.$$

Удельные потери мощности по закону Ленца — Джоуля

$$p=\gamma E^2=\frac{\omega\mu\mu_0 H_0^2}{\gamma}\,\frac{\operatorname{ch}2bz-\cos 2bz}{\operatorname{ch}2ba+\cos 2ba}=$$

$$=\frac{3140\cdot 300\cdot 4\pi\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}1^2}{5\cdot 10^4}\,\frac{\operatorname{ch}34z-\cos 34z}{\operatorname{ch}0{,}85+\cos 0{,}85}=$$

$$=2{,}4\cdot 10^{-9}(\operatorname{ch}34z-\cos 34z)\ [\mathit{вт/см}^3],$$

если $[z]=$*см*. Расчет кривой мощности (рис. 5-22) сведен в табл. 5-1.

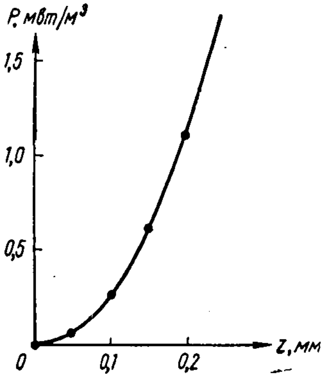



Рис. 5-22

Таблица 5-1

| $z$, *см* | $34z$ | ch $34z$ | cos $34z$ | ch $34z$— cos $34z$ | $10^9 p$, *вт* · *см*$^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,0000 | 1,000 | 0,0000 | 0,000 |
| 0,005 | 0,17 | 1,0128 | 0,9872 | 0,0256 | 0,061 |
| 0,010 | 0,34 | 1,0584 | 0,9428 | 0,1156 | 0,277 |
| 0,015 | 0,51 | 1,1329 | 0,8727 | 0,2602 | 0,625 |
| 0,020 | 0,68 | 1,2402 | 0,7776 | 0,4626 | 1,110 |
| 0,025 | 0,85 | 1,3835 | 0,6600 | 0,7235 | 1,740 |

**5-72.** В условиях предыдущей задачи найти частоту, при которой модуль среднего значения относительной магнитной проницаемости пластины становится меньше единицы.

*Ответ.* 120 *Мгц*.

**5-73.** Сдвиг фаз между синусоидально меняющимися напряженностью магнитного поля и напряженностью электрического поля на поверхности цилиндрического проводника равен 30°. Если напряженность магнитного поля на поверхности проводника равняется максимальному значению, то чему равняется напряженность электрического поля? Амплитуды напряженности магнитного и электрического полей $H_m$ и $E_m$.

*Ответ.* $E = \frac{\sqrt{3}}{2} E_m$.

**5-74.** Сдвиг фаз между плотностью тока на поверхности проводника и на оси равен 150°.

Чему равна и как будет направлена плотность тока на оси, если на поверхности плотность тока равна нулю, а амплитуда плотности тока на оси равна $\delta_{0m}$?

**5-75.** По медному цилиндрическому проводнику диаметром $d = 2a = 3$ *см* пропускается ток $I = 760$ *а* при частоте $f = 500$ *гц*. Удельное сопротивление нагретого проводника $\rho = 2{,}06 \cdot 10^{-6}$ *ом·см*.

Распределение плотности тока по сечению данного проводника задано в табл. 5-2.

Таблица 5-2

| $R$, *см* | $kR$ | $\delta_{Rm}$, *а/см*$^2$ | $\psi^0$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 28,7 | —200,46 |
| 0,229 | 1 | 29,0 | —186,24 |
| 0,457 | 2 | 35,1 | —148,18 |
| 0,686 | 3 | 50,0 | —103,94 |
| 0,914 | 4 | 98,5 | — 62,27 |
| 1,143 | 5 | 179,0 | — 22,53 |
| 1,370 | 6 | 331,0 | + 19,26 |
| 1,500 | 6,55 | 467,0 | + 41,54 |

Требуется построить кривую мгновенных значений вектора Умова — Пойнтинга в зависимости от расстояния до оси цилиндра для момента, когда плотность тока на поверхности будет составлять 45% от своего положительного максимального значения.

## Решение

Учитывая, что векторы **E** и **H** внутри провода составляют в пространстве угол 90°, мгновенные значения вектора Умова—Пойнтинга $\Pi = E_R H_R$, где $E_R = E_{Rm} \sin(\omega t + \psi)$ — мгновенное значение напряженности электрического поля на расстоянии $R$ от оси провода, $H_R = H_{Rm} \sin(\omega t + \psi_н)$ — мгновенное значение напряженности магнитного поля в той же точке, $E_{Rm}$ и $H_{Rm}$ — амплитудные значения напряженностей, а $\psi$ и $\psi_н$ — их начальные фазы.

По условию расчет производится в момент времени, определяемый из условия, что на поверхности ($kR = 6{,}55$)

$$\delta_{md} \sin(\omega t + 41{,}54°) = 0{,}45\, \delta_{md},$$

т. е.

$$\omega t = \arcsin 0{,}45 - 41{,}54° = -15{,}08°.$$

По закону Ома в дифференциальной форме комплексная амплитуда

$$\dot{E}_{Rm} = 2{,}06 \cdot 10^{-6}\ \dot{\delta}_{Rm}.$$

Таким образом, начальные фазы напряженности электрического поля будут совпадать с начальными фазами плотности тока, а их амплитуды будут отличаться только на величину удельного сопротивления.

Комплексная амплитуда напряженности магнитного поля в круглом проводе

$$H_{Rm} = \frac{I}{\sqrt{2}\pi a} \frac{J_1(\sqrt{-j}kR)}{J_1(\sqrt{-j}ka)} = 6{,}55\, b_1\, e^{-j(155°46'+\beta_1)},$$

где $b_1$ — модуль, а $\beta$ — аргумент функции Бесселя нулевого порядка.

Амплитуды и фазы напряженности магнитного поля, полученные по приведенной выше формуле и таблицам Бесселевых функций, сведены в табл. 5-3 вместе с амплитудами напряженности электрического поля.

Таблица 5-3

| $kR$ | $b_1$ | $\beta^0$ | $H_{Rm}$, *а/см* | $\psi_н^o$ | $10^5 E_{Rm}$, *в/см* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 45, | 0,00 | —200,16 | 5,70 |
| 1 | 0,5014 | 37,837 | 3,31 | —193,297 | 5,97 |
| 2 | 1,0411 | 16,732 | 6,83 | —172,192 | 7,23 |
| 3 | 1,7998 | —15,714 | 11,80 | —139,746 | 11,54 |
| 4 | 3,1729 | —57,84 | 20,70 | — 97,62 | 20,3 |
| 5 | 5,8118 | —93,85 | 38,20 | — 51,91 | 36,9 |
| 6 | 10,850 | —133,45 | 71,00 | — 22,01 | 68,2 |
| 6,55 | 15,36 | —155,46 | 101,00 | 0,00 | 96,0 |

Кривая мгновенных значений вектора Умова — Пойнтинга (рис. 5-23) построена на основе расчета по приведенным выше формулам (табл. 5-4).

Таблица 5-4

| $kR$ | $\omega t + \psi^0$ | $\sin(\omega t + \psi^0)$ | $\omega t + \psi_н^o$ | $\sin(\omega t + \psi_н)$ | $10^5 E_R$, *в/см* | $H_R$, *а/см* | $\Pi_R$, *вт/м²* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | —215,54 | +0,581 | —215,24 | +0,577 | + 3,32 | 0,000 | 0 |
| 1 | —201,32 | +0,364 | —208,38 | +0,475 | + 2,17 | +1,572 | +3,4 |
| 2 | —163,26 | —0,288 | —187,20 | +0,125 | — 2,08 | +0,855 | —1,8 |
| 3 | —119,02 | —0,874 | —154,83 | —0,425 | —10,09 | —5,01 | +50,6 |
| 4 | — 77,35 | —0,976 | —112,70 | —0,923 | —19,80 | —19,1 | +379 |
| 5 | — 37,61 | —0,610 | — 66,99 | —0,920 | —22,52 | —35,2 | +794 |
| 6 | + 4,18 | +0,073 | — 37,09 | —0,603 | + 4,98 | —42,9 | —214 |
| 6,55 | + 26,46 | +0,445 | — 15,08 | —0,260 | +42,70 | —26,3 | —1124 |

5-76. В условиях задачи 5-75 определить частоту и среднее значение вектора Умова — Пойнтинга на поверхности провода.

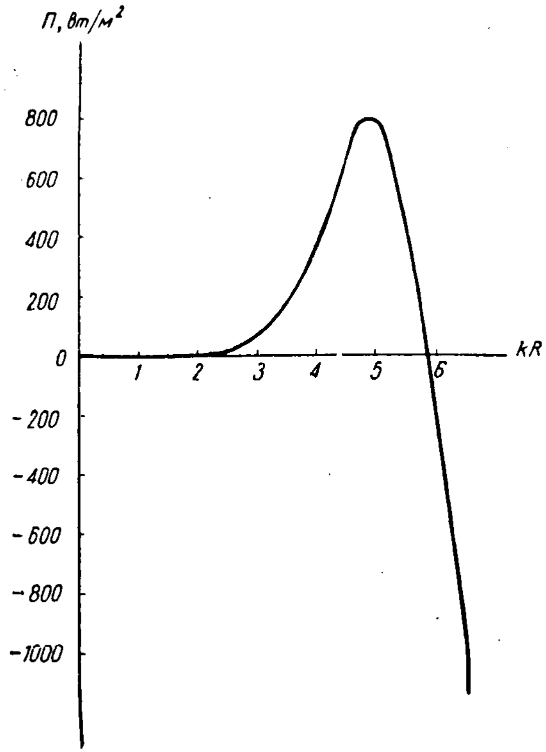



Рис. 5-23

Решение

На поверхности провода

$$E_d = E_{dm} \sin(\omega t + \psi) = 96 \cdot 10^{-5} \sin(\omega t + 41{,}54^\circ) \ \textit{в/см};$$

$$H_d = H_{dm} \sin \omega t = 101 \sin \omega t \ \textit{а/см}.$$

Так как векторы **E** и **H** для любого момента времени взаимно перпендикулярны, то мгновенное значение вектора Умова — Пойнтинга на поверхности провода

$$\varPi_d = E_d H_d = E_{dm} H_{dm} \sin(\omega t + \psi) \sin \omega t =$$

$$= \frac{E_{dm} H_{dm}}{2} [\cos \psi - \cos(2\omega t + \psi)].$$

Из полученного выражения видно, что вектор Умова — Пойнтинга меняется во времени с частотой, в два раза большей частоты тока, т. е. $f_П = 2f = 1000$ *гц*, а среднее значение вектора Умова — Пойнтинга за время, кратное периоду,

$$П_{ср} = \frac{E_{dm} H_{dm}}{2} \cos \psi = \frac{101 \cdot 96 \cdot 10^{-5}}{2} \cos 41°,54 =$$

$$= 0,0645 \ вт/см^2 = 645 \ вт/м^2.$$

**5-77.** В условиях задачи 5-75 требуется: а) построить кривую мгновенных значений вектора Умова — Пойнтинга в зависимости от расстояния до цилиндра для момента, когда плотность тока на поверхности проводника будет равна нулю; б) построить кривую изменения вектора Умова — Пойнтинга в зависимости от времени для точки на поверхности проводника за один полный период изменения тока.

**5-78.** В условиях задачи 5-75 определить активное и внутреннее реактивное сопротивления проводника для трех частот: 50, 500 и 5 000 *гц* с учетом поверхностного эффекта. Полученные по формулам с бесселевыми функциями значения для двух последних частот сравнить с результатами расчета по формулам для резкого проявления поверхностного эффекта. Активные сопротивления сравнить во всех трех случаях также с сопротивлением проводника при постоянном токе.

Решение

Сопротивление провода постоянному току на длине 1 *м*

$$r_{пост} = \frac{\rho}{\pi a^2} = \frac{2,06 \cdot 10^{-8}}{3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2})^2} = 2,91 \cdot 10^{-5} \ ом/м.$$

Активное сопротивление провода при поверхностном эффекте

$$\frac{r}{r_{пост}} = \frac{ka}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{0a} - 45° - \beta_{1a}),$$

а внутреннее реактивное —

$$\frac{x_{внутр}}{r_{пост}} = \frac{ka}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{0a} - 45° - \beta_{1a}),$$

причем $k = \sqrt{\omega \mu \mu_0 \gamma}$; $b_{0a}$ и $b_{1a}$ — модули функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядков от значения переменной $ka\sqrt{-j}$;

$\beta_{0a}$ и $\beta_{1a}$ — их аргументы.

Сопротивления провода при резком проявлении поверхностного эффекта

$$\frac{r_0}{r_{\text{пост}}} = \frac{x_{0\,\text{внутр}}}{r_{\text{пост}}} = \frac{ak}{2\sqrt{2}}.$$

Расчет сведен в табл. 5-5.

Таблица 5-5

| $f$, *гц* | *ка* | $b_{0a}$ | $b_{1a}$ | $\beta^0_{0a}$ | $\beta^0_{1a}$ | $\frac{r}{r_{\text{пост}}}$ | $\frac{x_{\text{внутр}}}{r_{\text{пост}}}$ | $\frac{r_0}{r_{\text{пост}}} = \frac{x_{0\,\text{внутр}}}{r_{\text{пост}}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 2,08 | 1,26 | 1,10 | 57,8 | —14,5 | 1,06 | 0,54 | — |
| 200 | 4,16 | 3,78 | 4,49 | 144,8 | 60,2 | 1,73 | 1,44 | 1,74 |
| 800 | 8,32 | 47,07 | 48,12 | 313,9 | 226,8 | 3,01 | 2,74 | 2,94 |

**5-79.** Плоская электромагнитная волна ($\lambda_0 = 30$ *м*) падает вертикально на поверхность моря ($\gamma = 1$ *сим/м*).

Определить скорость и длину волны в воде, а также напряженность магнитного поля $H$ на поверхности моря, если на глубине 1 *м* $E = 10^{-5} \sin \omega t$ *в/м*.

### Решение

Длина волны в воздухе $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, откуда $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^8}{30} = 10^7$ *гц*. Длина волны в морской воде

$$\lambda = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi\cdot 10^7\cdot 1\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1}} = 1 \text{ м}.$$

Коэффициент затухания в морской воде

$$b = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi\cdot 10^7\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1}{2}} = 6{,}28 \text{ неп/м}.$$

Волновое сопротивление воды

$$Z_\text{в} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\pi\cdot 10^7\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{1}} = 8{,}88 \text{ ом}.$$

В общем случае на глубине $z$

$$H = H_{m0}\, e^{-bz} \sin(\omega t - bz + \psi);$$

$$E = E_{m0}\, e^{-bz} \sin\left(\omega t - bz + \psi + \frac{\pi}{2}\right).$$

В условиях задачи $z = 1$ *м*, $bz = 2\pi = 6{,}28$, $\psi + \frac{\pi}{2} - bz = 0$, откуда $\psi - bz = -\frac{\pi}{2}$ и амплитуда напряженности электрического поля на поверхности воды (при $z=0$)

$$E_{m0} = 10^{-5} e^{bz} = 10^{-5} e^{6,28} = 5,34 \cdot 10^{3} \ в/м.$$

Амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности воды

$$H_{m0} = \frac{E_{m0}}{Z_в} = \frac{5,34 \cdot 10^{-3}}{8,88} = 0,603 \cdot 10^{-3} \ а/м.$$

Мгновенные значения напряженности магнитного поля на поверхности воды

$$H = 6,03 \cdot 10^{-4} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \ а/м.$$

**5-80.** Вертикальная антенна передатчика, работающего на частоте 10 *Мгц*, имеет высоту 1,5 *м*.

Определить мощность на выходе передатчика, сопротивление излучения и максимальное значение тока в антенне, если передатчик должен обеспечить вблизи поверхности земли на расстоянии 5 *км* действующее значение напряженности $E = 1$ *мв/м*. В этой точке следует также подсчитать величину вектора Умова — Пойнтинга. Поверхность земли в этой задаче считать плоской.

Решение

Поле антенны высотой $h = 1,5$ *м*, расположенной вертикально, на поверхности земли, эквивалентно диполю длиной $l = 2\,h = 3$ *м* находящемуся в свободном пространстве. В дальней зоне такого диполя в точке, находящейся от него на расстоянии $r = 5$ *км* на горизонтальной поверхности, проходящей через середину диполя, амплитуда напряженности электрического поля

$$E_m = \frac{\mu_0 l 2\pi f}{4\pi r} I_m,$$

откуда амплитуда тока в антенне

$$I_m = \frac{2r}{\mu_0 l f} E_m = \frac{2 \cdot 5000}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{7}} 10^{-3} \sqrt{2} = 0,374 \ а.$$

Сопротивление излучения антенны

$$R = 1580 \frac{h^2}{\lambda^2} = 1580 \frac{1,5^2}{30^2} = 3,95 \ ом,$$

так как длина волны

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{10^{7}} = 30 \ м.$$

Мощность излучения антенны

$$P = R\,\frac{I_m^2}{2} = 3{,}95\,\frac{0{,}374^2}{2} = 0{,}276\ \text{вт}.$$

Вектор Умова — Пойнтинга в заданной точке

$$\Pi = EH = \frac{E^2}{Z_{\text{в}}} = \frac{10^{-6}}{377} = 2{,}65\cdot 10^{-9}\ \text{вт/м}^2,$$

где $Z_{\text{в}}=377$ *ом* — волновое сопротивление воздуха.

5-81. Определить критическую длину волны типа $H_{01}$ в прямоугольном волноводе высотой 10 *мм* и шириной $a=23$ *мм*.

*Ответ.* $\lambda_{\text{кр}}=2a=4{,}6$ *см*.

## ЛИТЕРАТУРА


Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В. и Страхов С. В. Основы теории цепей. Госэнергоиздат. 1963.

Нетушил А. В. и Поливанов К. М. Основы электротехники. Ч. 3. Госэнергоиздат, 1956.

Ионкин П. А., Мельников Н. А., Даревский А. И., Кухаркин Е. С. Теоретические основы электротехники. Ч. I. Изд-во «Высшая школа», 1965.

Даревский А. И., Кухаркин Е. С. Теоретические основы электротехники. Ч. II. Изд-во «Высшая школа», 1965.

Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники. Госэнергоиздат, 1959.

Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники Ч. 1. Госэнергоиздат, 1962.

Атабеков Г. И., Тимофеев А. Е. и Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники. Ч. 2. Госэнергоиздат, 1962.

Купалян С. Д. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Госэнергоиздат, 1963.

Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Изд-во «Высшая школа», 1964.

Задачник по теоретическим основам электротехники. Под. ред. К. М. Поливанова. Госэнергоиздат, 1962.

Зайцев И. А. и Лурье А. Г. Задачник по теоретическим основам электротехники. Госэнергоиздат, 1961.

Ионкин П. А., Пантюшин В. С., Смирнов В. А. Сборник задач по общей электротехнике. Изд-во «Советская наука», 1955.

Богуславский М. Г. и др. Таблицы перевода единиц измерений. Стандартгиз, 1963.

Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник для инженеров и учащихся втузов. Гостехиздат, 1958.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

# *Приложение 1*

**Электрические и магнитные единицы международной системы единиц СИ ГОСТ 9867—61 и переводные коэффициенты (на которые следует умножить соответствующую величину в другой системе единиц, чтобы получить ее в единицах СИ)**

| Величина | Буквенное обозначение | Единица измерения | Сокращенные обозначения | | Переводные коэффициенты для следующих систем единиц | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | русские | латинские и греческие | СГСЭ * $СГС\varepsilon_0$ | СГС * | СГСМ * $СГС\mu_0$ |
| Электрический ток | $I$ | ампер | *а* | A | $10c^{-1}$ ** | $10c^{-1}$** | 10 |
| Электрический заряд | $q$ | кулон | *к* | C | $10c^{-1}$ | $10c^{-1}$ | 10 |
| Плотность электрического тока | $\delta$, $J$ | ампер на квадратный метр | *а/м²* | $A/m^2$ | $10^5c^{-1}$ | $10^5c^{-1}$ | $10^5$ |
| Объемная плотность электрического заряда | $\rho$ | кулон на кубический метр | *к/м³* | $C/m^3$ | $10^7c^{-1}$ | $10^7c^{-1}$ | $10^7$ |
| Поверхностная плотность электрического заряда | $\sigma$ | кулон на квадратный метр | *к/м²* | $C/m^2$ | $10^5c^{-1}$ | $10^5c^{-1}$ | $10^5$ |
| Электрическое смещение | $D$ | кулон на квадратный метр | *к/м²* | $C/m^2$ | $10^5(4\pi c)^{-1}$ | $10^5(4\pi c)^{-1}$ | $10^5(4\pi)^{-1}$ |
| Поток электрического смещения | $\Psi_D$ | кулон | *к* | C | $10(4\pi c)^{-1}$ | $10(4\pi c)^{-1}$ | $10(4\pi)^{-1}$ |
| Разность электрических потенциалов, электрическое напряжение, электродвижущая сила | $\varphi_1-\varphi_2$, $U$, $E$ | вольт | *в* | V | $10^{-8}c$ | $10^{-8}c$ | $10^{-8}$ |
| Напряженность электрического поля | $E$ | вольт на метр | *в/м* | V/m | $10^{-6}c$ | $10^{-6}c$ | $10^{-6}$ |
| Электрическая емкость | $C$ | фарада | *ф* | F | $10^9c^{-2}$ | $10^9c^{-2}$ | $10^{-9}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Абсолютная диэлектрическая проницаемость | $\varepsilon_a$ | фарада на метр | *ф/м* | F/m | $10^{11}(4\pi c^2)^{-1}$ | $10^{11}(4\pi c)^{-1}$ | $10^{11}(4\pi)^{-1}$ |
| Диэлектрическая проницаемость (относительная) | $\varepsilon$ | отвлеченная единица | — | — | 1 | 1 | 1 |
| Электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость свободного пространства) | $\varepsilon_0$ | фарада на метр | *ф/м* | F/m | $10^{11}(4\pi c^2)^{-1}$ | $10^{11}(4\pi c^2)^{-1}$ | $10^{11}(4\pi)^{-1}$ |
| Диэлектрическая восприимчивость | $\kappa_э$ | фарада на метр | *ф/м* | F/m | $10^{11}c^{-2}$ | $10^{11}c^{-2}$ | $10^{11}$ |
| Момент электрического диполя | $p_э$ | кулон-метр | *к·м* | C · m | $(10c)^{-1}$ | $(10c)^{-1}$ | $10^{-1}$ |
| Электрическое сопротивление | $r, x, z, R, X, Z$ | *ом* | *ом* | Ω | $10^{-9}c^2$ | $10^{-9}c^2$ | $10^{-9}$ |
| Удельное электрическое сопротивление | $\rho$ | ом-метр | *ом·м* | Ω · m | $10^{-11}c^2$ | $10^{-11}c^2$ | $10^{-11}$ |
| Электрическая проводимость | $g, b, y, G, B, Y$ | сименс | *сим* | S | $10^9c^{-2}$ | $10^9c^{-2}$ | $10^9$ |
| Удельная электрическая проводимость | $\sigma, \gamma$ | сименс на метр | *сим/м* | S/m | $10^{11}c^{-2}$ | $10^{11}c^{-2}$ | $10^{11}$ |
| Напряженность магнитного поля | $H$ | ампер на метр | *а/м* | A/m | $10^3(4\pi c)^{-1}$ | $10^3(4\pi)^{-1}$*** | $10^3(4\pi)^{-1}$*** |
| Магнитодвижущая сила | $F, \theta$ | ампер | *а* | A | $10(4\pi c)^{-1}$ | $10(4\pi)^{-1}$*** | $10(4\pi)^{-1}$*** |
| Магнитная индукция | $B$ | тесла | *тл* | T | $10^{-4}c$ | $10^{-4}$ *** | $10^{-4}$ *** |
| Магнитный поток | $\Phi$ | вебер | *вб* | Wb | $10^{-8}c$ | $10^{-8}$ *** | $10^{-8}$*** |
| Векторный потенциал | $A$ | вебер на метр | *вб/м* | Wb/m | $10^{-6}c$ | $10^{-6}$ | $10^{-6}$ |
| Индуктивность, взаимная индуктивность | $L, M$ | генри | *гн* | H | $10^{-9}c^2$ | $10^{-9}$ | $10^{-9}$ |
| Абсолютная магнитная проницаемость | $\mu_a$ | генри на метр | *гн/м* | H/m | $4\pi 10^{-7}c^2$ | $4\pi 10^{-7}$ | $4\pi 10^{-7}$ |

*Продолжение*

| Величина | Буквенное обозначение | Единица измерения | Сокращенные обозначения | | Переводные коэффициенты для следующих систем единиц | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | русские | латинские и греческие | СГСЭ * СГС$_{\varepsilon_0}$ | СГС * | СГСМ * СГС$_{\mu_0}$ |
| Магнитная постоянная (магнитная проницаемость свободного пространства) | $\mu_0$ | генри на метр | *гн/м* | H/m | $4\pi 10^{-7} c^2$ | $4\pi 10^{-7}$ | $4\pi 10^{-7}$ |
| Магнитная проницаемость (относительная) | $\mu$ | отвлеченная единица | — | — | 1 | 1 | 1 |
| Магнитная восприимчивость | $k_м$ | отвлеченная единица | — | — | $4\pi$ | $4\pi$ | $4\pi$ |
| Магнитный момент диполя, электрического тока | $p_м$ | ампер-квадратный метр | *а·м²* | A·m² | $10^{-3}\ c^{-1}$ | $10^{-3}$ | $10^{-3}$ |
| Намагниченность, интенсивность намагничивания | $J$, $M$ | ампер на метр | *а/м* | A/m | $10^3 c^{-1}$ | $10^3$ | $10^3$ |
| Магнитное сопротивление | $r_м$, $R_м$ | ампер на вебер | *а/вб* | A/Wb | $10^9(4\pi c^2)^{-1}$ | $10^9(4\pi)^{-1}$ | $10^9(4\pi)^{-1}$ |
| Магнитная проводимость | $g_м$, $G_м$ | вебер на ампер | *вб/а* | Wb/*a* | $4\pi 10^{-9} c^2$ | $4\pi 10^{-9}$ | $4\pi 10^{-9}$ |
| Электрическая энергия, работа | $W$ | джоуль | *дж* | J | $10^{-7}$ | $10^{-7}$ | $10^{-7}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Объемная плотность электромагнитной энергии | — | джоуль на кубический метр | *дж/м³* | J/m³ | $10^{-1}$ | $10^{-1}$ | $10^{-1}$ |
| Мощность электрической цепи: | | | | | | | |
| активная | $P$ | ватт | *вт* | W | | | |
| реактивная | $Q$, $P_q$ | вар | *вар* | var | $10^{-7}$ | $10^{-7}$ | $10^{-7}$ |
| полная | $S$, $P_s$ | вольт-ампер | *в·а* | VA | | | |
| Вектор Пойнтинга | П, S | ватт на квадратный метр | *вт/м²* | W/m² | $10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $10^{-3}$ |
| Угловая частота | $\omega$, $\Omega$ | радиан в секунду | *рад/сек* | rad/s | 1 | 1 | 1 |
| Частота электрического тока | $f$, $\nu$ | герц | *гц* | Hz | 1 | 1 | 1 |

Примечания:

* Принятые в таблице обозначения систем единиц, основанных на сантиметре, грамме и секунде:

СГСЭ — электростатическая система, в которой диэлектрическая проницаемость свободного пространства не имеет размерности и принята равной единице;

СГСМ — электромагнитная система, в которой магнитная проницаемость свободного пространства не имеет размерности и принята равной единице;

СГС — симметричная система, в которой как магнитная, так и диэлектрическая проницаемости свободного пространства безразмерны и приняты равными единице;

СГС$\varepsilon_0$ и СГС$\mu_0$ — электромагнитная и электростатическая система, в одной из которых магнитная, а в другой диэлектрическая проницаемости свободного пространства численно приняты равными единице. В отличие от систем СГСМ и СГСЭ системы СГС$\varepsilon_0$ и СГС$\mu_0$ имеют другие размерности соответствующих величин, однако переводные коэффициенты для численных значений у них совпадают.

** Скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве $c = 2{,}997925 \cdot 10^{10}$ *см/сек*.

*** В системах СГСМ и СГС установлены собственные наименования для единиц: напряженности магнитного поля (эрстед), магнитодвижущей силы (гильберт), магнитной индукции (гаусс) и магнитного потока (максвелл).

*Приложение 2*

**Приставки для образования кратных и дольных единиц (ГОСТ 7663—55)**

| Кратность и дольность | Приставки | Сокращенные обозначения | |
|---|---|---|---|
| | | русские | латинские или греческие |
| $10^{12}$ | тера | *Т* | T |
| $10^{9}$ | гига | *Г* | G |
| $10^{6}$ | мега | *М* | M |
| $10^{3}$ | кило | *к* | k |
| $10^{2}$ | гекто | *г* | h |
| 10 | дека | *да* | da |
| $10^{-1}$ | деци | *д* | d |
| $10^{-2}$ | санти | *с* | c |
| $10^{-3}$ | милли | *м* | m |
| $10^{-6}$ | микро | *мк* | μ |
| $10^{-9}$ | нано | *н* | n |
| $10^{-12}$ | пико | *п* | p |

ГОСТ 7663—55 разрешает присоединять приставки только к простым наименованиям и **не допускает** присоединять приставки к наименованиям, уже содержащим приставки (например, «килограмм») или к кратным и дольным единицам, имеющим свои наименования (микрон, тонна, ар, бар и т. д.), а также удваивать приставки (например, «микромикрофараду» следует именовать «пикофарадой»).

*Приложение 3*

**Гиперболические функции комплексного аргумента**

$$\operatorname{sh}(x+jy)=\frac{e^{x}e^{jy}-e^{-x}e^{-jy}}{2}=\operatorname{sh}x\cos y+j\operatorname{ch}x\sin y=s\,e^{j\sigma},$$

где

$$s^2=\frac{\operatorname{ch}2x-\cos 2y}{2},\quad \operatorname{tg}\sigma=\frac{\operatorname{tg}y}{\operatorname{th}x}.$$

$$\operatorname{ch}(x+jy)=\frac{e^{x}e^{jy}+e^{-x}e^{-jy}}{2}=\operatorname{ch}x\cos y+j\operatorname{sh}x\sin y=c\,e^{j\xi},$$

где

$$c^2=\frac{\operatorname{ch}2x+\cos 2y}{2},\quad \operatorname{tg}\xi=\operatorname{tg}y\operatorname{th}x.$$

$$\operatorname{th}(x+jy)=\frac{\operatorname{sh}(x+jy)}{\operatorname{ch}(x+jy)}=\frac{1}{\operatorname{cth}(x+jy)},$$

**Показательные и гиперболические функции (для аргумента от 0 до 1,60)**

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 |
| 01 | 1,0101 | 0,9900 | 0,0100 | 1,0001 | 0,0100 |
| 02 | 1,0202 | 0,9802 | 0,0200 | 1,0002 | 0,0200 |
| 03 | 1,0305 | 0,9704 | 0,0300 | 1,0005 | 0,0300 |
| 04 | 1,0408 | 0,9608 | 0,0400 | 1,0008 | 0,0400 |
| 05 | 1,0513 | 0,9512 | 0,0500 | 1,0013 | 0,0500 |
| 06 | 1,0618 | 0,9418 | 0,0600 | 1,0018 | 0,0599 |
| 07 | 1,0725 | 0,9324 | 0,0701 | 1,0025 | 0,0699 |
| 08 | 1,0833 | 0,9231 | 0,0801 | 1,0032 | 0,0798 |
| 09 | 1,0942 | 0,9139 | 0,0901 | 1,0041 | 0,0898 |
| 0,10 | 1,1052 | 0,9048 | 0,1002 | 1,0050 | 0,0997 |
| 11 | 1,1163 | 0,8958 | 0,1102 | 1,0061 | 0,1096 |
| 12 | 1,1275 | 0,8869 | 0,1203 | 1,0072 | 0,1194 |
| 13 | 1,1388 | 0,8781 | 0,1304 | 1,0085 | 0,1293 |
| 14 | 1,1503 | 0,8694 | 0,1405 | 1,0098 | 0,1391 |
| 15 | 1,1618 | 0,8607 | 0,1506 | 1,0113 | 0,1489 |
| 16 | 1,1735 | 0,8521 | 0,1607 | 1,0128 | 0,1586 |
| 17 | 1,1853 | 0,8437 | 0,1708 | 1,0145 | 0,1684 |
| 18 | 1,1972 | 0,8353 | 0,1810 | 1,0162 | 0,1781 |
| 19 | 1,2092 | 0,8270 | 0,1911 | 1,0181 | 0,1877 |
| 0,20 | 1,2214 | 0,8187 | 0,2013 | 1,0201 | 0,1974 |
| 21 | 1,2337 | 0,8106 | 0,2115 | 1,0221 | 0,2070 |
| 22 | 1,2461 | 0,8025 | 0,2218 | 1,0243 | 0,2165 |
| 23 | 1,2586 | 0,7945 | 0,2320 | 1,0266 | 0,2260 |
| 24 | 1,2712 | 0,7866 | 0,2423 | 1,0289 | 0,2355 |
| 25 | 1,2840 | 0,7788 | 0,2526 | 1,0314 | 0,2449 |
| 26 | 1,2969 | 0,7711 | 0,2629 | 1,0340 | 0,2543 |
| 27 | 1,3100 | 0,7634 | 0,2733 | 1,0367 | 0,2636 |
| 28 | 1,3231 | 0,7558 | 0,2837 | 1,0395 | 0,2729 |
| 29 | 1,3364 | 0,7483 | 0,2941 | 1,0423 | 0,2821 |
| 0,30 | 1,3499 | 0,7408 | 0,3045 | 1,0453 | 0,2913 |
| 31 | 1,3634 | 0,7334 | 0,3150 | 1,0484 | 0,3004 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 1,3771 | 0,7261 | 0,3255 | 1,0516 | 0,3095 |
| 33 | 1,3910 | 0,7189 | 0,3360 | 1,0549 | 0,3185 |
| 34 | 1,4049 | 0,7118 | 0,3466 | 1,0584 | 0,3275 |
| 35 | 1,4191 | 0,7047 | 0,3572 | 1,0619 | 0,3364 |
| 36 | 1,4333 | 0,6977 | 0,3678 | 1,0655 | 0,3452 |
| 37 | 1,4477 | 0,6907 | 0,3785 | 1,0692 | 0,3540 |
| 38 | 1,4623 | 0,6839 | 0,3892 | 1,0731 | 0,3627 |
| 39 | 1,4770 | 0,6771 | 0,4000 | 1,0770 | 0,3714 |
| 0,40 | 1,4918 | 0,6703 | 0,4108 | 1,0811 | 0,3799 |
| 41 | 1,5068 | 0,6637 | 0,4216 | 1,0852 | 0,3885 |
| 42 | 1,5220 | 0,6570 | 0,4325 | 1,0895 | 0,3969 |
| 43 | 1,5373 | 0,6505 | 0,4434 | 1,0939 | 0,4053 |
| 44 | 1,5527 | 0,6440 | 0,4543 | 1,0984 | 0,4136 |
| 45 | 1,5683 | 0,6376 | 0,4653 | 1,1030 | 0,4219 |
| 46 | 1,5841 | 0,6313 | 0,4764 | 1,1077 | 0,4301 |
| 47 | 1,6000 | 0,6250 | 0,4875 | 1,1125 | 0,4382 |
| 48 | 1,6161 | 0,6188 | 0,4986 | 1,1174 | 0,4462 |
| 49 | 1,6323 | 0,6126 | 0,5098 | 1,1225 | 0,4542 |
| 0,50 | 1,6487 | 0,6065 | 0,5211 | 1,1276 | 0,4621 |
| 51 | 1,6653 | 0,6005 | 0,5324 | 1,1329 | 0,4699 |
| 52 | 1,6820 | 0,5945 | 0,5438 | 1,1383 | 0,4777 |
| 53 | 1,6989 | 0,5886 | 0,5552 | 1,1438 | 0,4854 |
| 54 | 1,7160 | 0,5827 | 0,5666 | 1,1494 | 0,4930 |
| 55 | 1,7333 | 0,5769 | 0,5782 | 1,1551 | 0,5005 |
| 56 | 1,7507 | 0,5712 | 0,5897 | 1,1609 | 0,5080 |
| 57 | 1,7683 | 0,5655 | 0,6014 | 1,1669 | 0,5154 |
| 58 | 1,7860 | 0,5599 | 0,6131 | 1,1730 | 0,5227 |
| 59 | 1,8040 | 0,5543 | 0,6248 | 1,1792 | 0,5299 |
| 0,60 | 1,8221 | 0,5488 | 0,6367 | 1,1855 | 0,5370 |
| 61 | 1,8404 | 0,5434 | 0,6485 | 1,1919 | 0,5441 |
| 62 | 1,8589 | 0,5379 | 0,6605 | 1,1984 | 0,5511 |
| 63 | 1,8776 | 0,5326 | 0,6725 | 1,2051 | 0,5581 |
| 64 | 1,8965 | 0,5273 | 0,6846 | 1,2119 | 0,5649 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 1,9155 | 0,5220 | 0,6967 | 1,2188 | 0,5717 |
| 66 | 1,9348 | 0,5169 | 0,7090 | 1,2258 | 0,5784 |
| 67 | 1,9542 | 0,5117 | 0,7213 | 1,2330 | 0,5850 |
| 68 | 1,9739 | 0,5066 | 0,7336 | 1,2402 | 0,5915 |
| 69 | 1,9937 | 0,5016 | 0,7461 | 1,2476 | 0,5980 |
| 0,70 | 2,0138 | 0,4966 | 0,7586 | 1,2552 | 0,6044 |
| 71 | 2,0340 | 0,4916 | 0,7712 | 1,2628 | 0,6107 |
| 72 | 2,0544 | 0,4868 | 0,7838 | 1,2706 | 0,6169 |
| 73 | 2,0751 | 0,4819 | 0,7966 | 1,2785 | 0,6231 |
| 74 | 2,0959 | 0,4771 | 0,8094 | 1,2865 | 0,6291 |
| 75 | 2,1170 | 0,4724 | 0,8223 | 1,2947 | 0,6351 |
| 76 | 2,1383 | 0,4677 | 0,8353 | 1,3030 | 0,6411 |
| 77 | 2,1598 | 0,4630 | 0,8484 | 1,3114 | 0,6469 |
| 78 | 2,1815 | 0,4584 | 0,8615 | 1,3199 | 0,6527 |
| 79 | 2,2034 | 0,4538 | 0,8748 | 1,3286 | 0,6584 |
| 0,80 | 2,2255 | 0,4493 | 0,8881 | 1,3374 | 0,6640 |
| 81 | 2,2479 | 0,4449 | 0,9015 | 1,3464 | 0,6696 |
| 82 | 2,2705 | 0,4404 | 0,9150 | 1,3555 | 0,6751 |
| 83 | 2,2933 | 0,4360 | 0,9286 | 1,3647 | 0,6805 |
| 84 | 2,3164 | 0,4317 | 0,9423 | 1,3740 | 0,6858 |
| 85 | 2,3396 | 0,4274 | 0,9561 | 1,3835 | 0,6911 |
| 86 | 2,3632 | 0,4232 | 0,9700 | 1,3932 | 0,6963 |
| 87 | 2,3869 | 0,4190 | 0,9840 | 1,4029 | 0,7014 |
| 88 | 2,4109 | 0,4148 | 0,9981 | 1,4128 | 0,7064 |
| 89 | 2,4351 | 0,4107 | 1,0122 | 1,4229 | 0,7114 |
| 0,90 | 2,4596 | 0,4066 | 1,0265 | 1,4331 | 0,7163 |
| 91 | 2,4843 | 0,4025 | 1,0409 | 1,4434 | 0,7211 |
| 92 | 2,5093 | 0,3985 | 1,0554 | 1,4539 | 0,7259 |
| 93 | 2,5345 | 0,3946 | 1,0700 | 1,4645 | 0,7306 |
| 94 | 2,5600 | 0,3906 | 1,0847 | 1,4753 | 0,7352 |
| 95 | 2,5857 | 0,3867 | 1,0995 | 1,4862 | 0,7398 |
| 96 | 2,6117 | 0,3829 | 1,1144 | 1,4973 | 0,7443 |
| 97 | 2,6379 | 0,3791 | 1,1294 | 1,5085 | 0,7487 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 98 | 2,6645 | 0,3753 | 1,1446 | 1,5199 | 0,7531 |
| 99 | 2,6912 | 0,3716 | 1,1598 | 1,5314 | 0,7574 |
| 1,00 | 2,7183 | 0,3679 | 1,1752 | 1,5431 | 0,7616 |
| 01 | 2,7456 | 0,3642 | 1,1907 | 1,5549 | 0,7658 |
| 02 | 2,7732 | 0,3606 | 1,2063 | 1,5669 | 0,7699 |
| 03 | 2,8011 | 0,3570 | 1,2220 | 1,5790 | 0,7739 |
| 04 | 2,8292 | 0,3535 | 1,2379 | 1,5913 | 0,7779 |
| 05 | 2,8577 | 0,3499 | 1,2539 | 1,6038 | 0,7818 |
| 06 | 2,8864 | 0,3465 | 1,2700 | 1,6164 | 0,7857 |
| 07 | 2,9154 | 0,3430 | 1,2862 | 1,6292 | 0,7895 |
| 08 | 2,9447 | 0,3396 | 1,3025 | 1,6421 | 0,7932 |
| 09 | 2,9743 | 0,3362 | 1,3190 | 1,6552 | 0,7969 |
| 1,10 | 3,0042 | 0,3329 | 1,3356 | 1,6685 | 0,8005 |
| 11 | 3,0344 | 0,3296 | 1,3524 | 1,6820 | 0,8041 |
| 12 | 3,0649 | 0,3263 | 1,3693 | 1,6956 | 0,8076 |
| 13 | 3,0957 | 0,3230 | 1,3863 | 1,7093 | 0,8110 |
| 14 | 3,1268 | 0,3198 | 1,4035 | 1,7233 | 0,8144 |
| 15 | 3,1582 | 0,3166 | 1,4208 | 1,7374 | 0,8178 |
| 16 | 3,1899 | 0,3135 | 1,4382 | 1,7517 | 0,8210 |
| 17 | 3,2220 | 0,3104 | 1,4558 | 1,7662 | 0,8243 |
| 18 | 3,2544 | 0,3073 | 1,4735 | 1,7808 | 0,8275 |
| 19 | 3,2871 | 0,3042 | 1,4914 | 1,7957 | 0,8306 |
| 1,20 | 3,3201 | 0,3012 | 1,5095 | 1,8107 | 0,8337 |
| 21 | 3,3535 | 0,2982 | 1,5276 | 1,8258 | 0,8367 |
| 22 | 3,3872 | 0,2952 | 1,5460 | 1,8412 | 0,8397 |
| 23 | 3,4212 | 0,2923 | 1,5645 | 1,8568 | 0,8426 |
| 24 | 3,4556 | 0,2894 | 1,5831 | 1,8725 | 0,8455 |
| 25 | 3,4903 | 0,2865 | 1,6019 | 1,8884 | 0,8483 |
| 26 | 3,5254 | 0,2837 | 1,6209 | 1,9045 | 0,8511 |
| 27 | 3,5609 | 0,2808 | 1,6400 | 1,9208 | 0,8538 |
| 28 | 3,5966 | 0,2780 | 1,6593 | 1,9373 | 0,8565 |
| 29 | 3,6328 | 0,2753 | 1,6788 | 1,9540 | 0,8591 |
| 1,30 | 3,6693 | 0,2725 | 1,6984 | 1,9709 | 0,8617 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 3,7062 | 0,2698 | 1,7182 | 1,9880 | 0,8643 |
| 32 | 3,7434 | 0,2671 | 1,7381 | 2,0053 | 0,8668 |
| 33 | 3,7810 | 0,2645 | 1,7583 | 2,0228 | 0,8692 |
| 34 | 3,8190 | 0,2618 | 1,7786 | 2,0404 | 0,8717 |
| 35 | 3,8574 | 0,2592 | 1,7991 | 2,0583 | 0,8741 |
| 36 | 3,8962 | 0,2567 | 1,8198 | 2,0764 | 0,8764 |
| 37 | 3,9354 | 0,2541 | 1,8406 | 2,0947 | 0,8787 |
| 38 | 3,9749 | 0,2516 | 1,8617 | 2,1132 | 0,8810 |
| 39 | 4,0149 | 0,2491 | 1,8829 | 2,1320 | 0,8832 |
| 1,40 | 4,0552 | 0,2466 | 1,9043 | 2,1509 | 0,8854 |
| 41 | 4,0960 | 0,2441 | 1,9259 | 2,1700 | 0,8875 |
| 42 | 4,1371 | 0,2417 | 1,9477 | 2,1894 | 0,8896 |
| 43 | 4,1787 | 0,2393 | 1,9697 | 2,2090 | 0,8917 |
| 44 | 4,2207 | 0,2369 | 1,9919 | 2,2288 | 0,8937 |
| 45 | 4,2631 | 0,2346 | 2,0143 | 2,2488 | 0,8957 |
| 46 | 4,3060 | 0,2322 | 2,0369 | 2,2691 | 0,8977 |
| 47 | 4,3492 | 0,2299 | 2,0597 | 2,2896 | 0,8996 |
| 48 | 4,3929 | 0,2276 | 2,0827 | 2,3103 | 0,9015 |
| 49 | 4,4371 | 0,2254 | 2,1059 | 2,3312 | 0,9083 |
| 1,50 | 4,4817 | 0,2231 | 2,1293 | 2,3524 | 0,9051 |
| 51 | 4,5267 | 0,2209 | 2,1529 | 2,3738 | 0,9069 |
| 52 | 4,5722 | 0,2187 | 2,1768 | 2,3955 | 0,9087 |
| 53 | 4,6182 | 0,2165 | 2,2008 | 2,4174 | 0,9104 |
| 54 | 4,6646 | 0,2144 | 2,2251 | 2,4395 | 0,9121 |
| 55 | 4,7115 | 0,2122 | 2,2496 | 2,4619 | 0,9138 |
| 56 | 4,7588 | 0,2101 | 2,2743 | 2,4845 | 0,9154 |
| 57 | 4,8066 | 0,2080 | 2,2993 | 2,5073 | 0,9170 |
| 58 | 4,8550 | 0,2060 | 2,3245 | 2,5305 | 0,9186 |
| 59 | 4,9037 | 0,2039 | 2,3499 | 2,5538 | 0,9201 |
| 1,60 | 4,9530 | 0,2019 | 2,3756 | 2,5775 | 0,9217 |

**Показательные функции (для аргумента от 1,60 до 10,0)**

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,60 | 4,9530 | 0,2019 | 2,09 | 8,0849 | 0,1237 |
| 1,61 | 5,0028 | 0,1999 | 2,10 | 8,1662 | 0,1225 |
| 1,62 | 5,0531 | 0,1979 | 2,11 | 8,2482 | 0,1212 |
| 1,63 | 5,1039 | 0,1959 | 2,12 | 8,3311 | 0,1200 |
| 1,64 | 5,1552 | 0,1940 | 2,13 | 8,4149 | 0,1188 |
| 1,65 | 5,2070 | 0,1920 | 2,14 | 8,4994 | 0,1177 |
| 1,66 | 5,2593 | 0,1901 | 2,15 | 8,5849 | 0,1165 |
| 1,67 | 5,3122 | 0,1882 | 2,16 | 8,6711 | 0,1153 |
| 1,68 | 5,3656 | 0,1864 | 2,17 | 8,7583 | 0,1142 |
| 1,69 | 5,4195 | 0,1845 | 2,18 | 8,8463 | 0,1130 |
| 1,70 | 5,4739 | 0,1827 | 2,19 | 8,9352 | 0,1119 |
| 1,71 | 5,5290 | 0,1809 | 2,20 | 9,0250 | 0,1108 |
| 1,72 | 5,5845 | 0,1791 | 2,21 | 9,1157 | 0,1097 |
| 1,73 | 5,6407 | 0,1773 | 2,22 | 9,2073 | 0,1086 |
| 1,74 | 5,6973 | 0,1755 | 2,23 | 9,2999 | 0,1075 |
| 1,75 | 5,7546 | 0,1738 | 2,24 | 9,3933 | 0,1065 |
| 1,76 | 5,8124 | 0,1720 | 2,25 | 9,4877 | 0,1054 |
| 1,77 | 5,8709 | 0,1703 | 2,26 | 9,5831 | 0,1044 |
| 1,78 | 5,9299 | 0,1686 | 2,27 | 9,6794 | 0,1033 |
| 1,79 | 5,9895 | 0,1670 | 2,28 | 9,7767 | 0,1023 |
| 1,80 | 6,0496 | 0,1653 | 2,29 | 9,8749 | 0,1013 |
| 1,81 | 6,1104 | 0,1637 | 2,30 | 9,9742 | 0,10026 |
| 1,82 | 6,1719 | 0,1620 | 2,31 | 10,074 | 0,09926 |
| 1,83 | 6,2339 | 0,1604 | 2,32 | 10,176 | 0,09827 |
| 1,84 | 6,2965 | 0,1588 | 2,33 | 10,278 | 0,09730 |
| 1,85 | 6,3598 | 0,1572 | 2,34 | 10,381 | 0,09623 |
| 1,86 | 6,4237 | 0,1557 | 2,35 | 10,486 | 0,09537 |
| 1,87 | 6,4883 | 0,1541 | 2,36 | 10,591 | 0,09442 |
| 1,88 | 6,5535 | 0,1526 | 2,37 | 10,697 | 0,09348 |
| 1,89 | 6,6194 | 0,1511 | 2,38 | 10,805 | 0,09255 |
| 1,90 | 6,6859 | 0,1496 | 2,39 | 10,913 | 0,09163 |
| 1,91 | 6,7531 | 0,1481 | 2,40 | 11,023 | 0,09072 |
| 1,92 | 6,8210 | 0,1466 | 2,41 | 11,134 | 0,08982 |
| 1,93 | 6,8895 | 0,1451 | 2,42 | 11,246 | 0,08892 |
| 1,94 | 6,9588 | 0,1437 | 2,43 | 11,359 | 0,08804 |
| 1,95 | 7,0287 | 0,1423 | 2,44 | 11,473 | 0,08716 |
| 1,96 | 7,0993 | 0,1409 | 2,45 | 11,588 | 0,08629 |
| 1,97 | 7,1707 | 0,1395 | 2,46 | 11,705 | 0,08543 |
| 1,98 | 7,2427 | 0,1381 | 2,47 | 11,822 | 0,08458 |
| 1,99 | 7,3155 | 0,1367 | 2,48 | 11,941 | 0,08374 |
| 2,00 | 7,3891 | 0,1353 | 2,49 | 12,061 | 0,08291 |
| 2,01 | 7,4633 | 0,1340 | 2,50 | 12,182 | 0,08208 |
| 2,02 | 7,5383 | 0,1327 | 2,51 | 12,305 | 0,08127 |
| 2,03 | 7,6141 | 0,1313 | 2,52 | 12,429 | 0,08046 |
| 2,04 | 7,6906 | 0,1300 | 2,53 | 12,554 | 0,07966 |
| 2,05 | 7,7679 | 0,1287 | 2,54 | 12,680 | 0,07887 |
| 2,06 | 7,8460 | 0,1275 | 2,55 | 12,807 | 0,07808 |
| 2,07 | 7,9248 | 0,1262 | 2,56 | 12,936 | 0,07730 |
| 2,08 | 8,0045 | 0,1249 | 2,57 | 13,066 | 0,07654 |
| | | | 2,58 | 13,197 | 0,07577 |

*Продолжение*

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ |
|---|---|---|---|---|
| 2,59 | 13,330 | 0,07502 | 3,10 | 22,198 |
| 2,60 | 13,464 | 0,07427 | 3,11 | 22,421 |
| 2,61 | 13,599 | 0,07353 | 3,12 | 22,646 |
| 2,62 | 13,736 | 0,07280 | 3,13 | 22,874 |
| 2,63 | 13,874 | 0,07208 | 3,14 | 23,104 |
| 2,64 | 14,013 | 0,07136 | 3,15 | 23,336 |
| 2,65 | 14,154 | 0,07065 | 3,16 | 23,571 |
| 2,66 | 14,296 | 0,06995 | 3,17 | 23,807 |
| 2,67 | 14,440 | 0,06925 | 3,18 | 24,047 |
| 2,68 | 14,585 | 0,06856 | 3,19 | 24,288 |
| 2,69 | 14,732 | 0,06788 | 3,20 | 24,533 |
| 2,70 | 14,880 | 0,06721 | 3,21 | 24,779 |
| 2,71 | 15,029 | 0,06654 | 3,22 | 25,028 |
| 2,72 | 15,180 | 0,06587 | 3,23 | 25,280 |
| 2,73 | 15,333 | 0,06522 | 3,24 | 25,534 |
| 2,74 | 15,487 | 0,06457 | 3,25 | 25,790 |
| 2,75 | 15,643 | 0,06393 | 3,26 | 26,050 |
| 2,76 | 15,800 | 0,06329 | 3,27 | 26,311 |
| 2,77 | 15,959 | 0,06266 | 3,28 | 26,576 |
| 2,78 | 16,119 | 0,06204 | 3,29 | 26,843 |
| 2,79 | 16,281 | 0,06142 | 3,30 | 27,113 |
| 2,80 | 16,445 | 0,06081 | 3,31 | 27,385 |
| 2,81 | 16,610 | 0,06020 | 3,32 | 27,660 |
| 2,82 | 16,777 | 0,05961 | 3,33 | 27,938 |
| 2,83 | 16,945 | 0,05901 | 3,34 | 28,219 |
| 2,84 | 17,116 | 0,05843 | 3,35 | 28,503 |
| 2,85 | 17,288 | 0,05784 | 3,36 | 28,789 |
| 2,86 | 17,462 | 0,05727 | 3,37 | 29,079 |
| 2,87 | 17,637 | 0,05670 | 3,38 | 29,371 |
| 2,88 | 17,814 | 0,05613 | 3,39 | 29,666 |
| 2,89 | 17,993 | 0,05558 | 3,40 | 29,964 |
| 2,90 | 18,174 | 0,05502 | 3,41 | 30,265 |
| 2,91 | 18,357 | 0,05448 | 3,42 | 30,569 |
| 2,92 | 18,541 | 0,05393 | 3,43 | 30,877 |
| 2,93 | 18,728 | 0,05340 | 3,44 | 31,187 |
| 2,94 | 18,916 | 0,05287 | 3,45 | 31,500 |
| 2,95 | 19,106 | 0,05234 | 3,46 | 31,817 |
| 2,96 | 19,298 | 0,05182 | 3,47 | 32,137 |
| 2,97 | 19,492 | 0,05130 | 3,48 | 32,460 |
| 2,98 | 19,688 | 0,05079 | 3,49 | 32,786 |
| 2,99 | 19,886 | 0,05029 | 3,50 | 33,115 |
| 3,00 | 20,086 | 0,04979 | 3,51 | 33,448 |
| 3,01 | 20,287 | | 3,52 | 33,784 |
| 3,02 | 20,491 | | 3,53 | 34,124 |
| 3,03 | 20,697 | | 3,54 | 34,467 |
| 3,04 | 20,905 | | 3,55 | 34,813 |
| 3,05 | 21,115 | | 3,56 | 35,163 |
| 3,06 | 21,328 | | 3,57 | 35,517 |
| 3,07 | 21,542 | | 3,58 | 35,874 |
| 3,08 | 21,758 | | 3,59 | 36,234 |
| 3,09 | 21,977 | | 3,60 | 36,598 |

| $x$ | $e^x$ | $x$ | $e^x$ |
|---|---|---|---|
| 3,61 | 36,966 | 5,2 | 181,27 |
| 3,62 | 37,338 | 5,3 | 200,34 |
| 3,63 | 37,713 | 5,4 | 221,41 |
| 3,64 | 38,092 | 5,5 | 244,69 |
| 3,65 | 38,475 | 5,6 | 270,43 |
| 3,66 | 38,861 | 5,7 | 298,87 |
| 3,67 | 39,252 | 5,8 | 330,30 |
| 3,68 | 39,646 | 5,9 | 365,04 |
| 3,69 | 40,045 | 6,0 | 403,43 |
| 3,70 | 40,447 | 6,1 | 445,86 |
| 3,71 | 40,854 | 6,2 | 492,75 |
| 3,72 | 41,264 | 6,3 | 544,57 |
| 3,73 | 41,679 | 6,4 | 601,85 |
| 3,74 | 42,098 | 6,5 | 665,14 |
| 3,75 | 42,521 | 6,6 | 735,10 |
| 3,76 | 42,948 | 6,7 | 812,41 |
| 3,77 | 43,380 | 6,8 | 897,85 |
| 3,78 | 43,816 | 6,9 | 992,27 |
| 3,79 | 44,256 | 7,0 | 1096,6 |
| 3,80 | 44,701 | 7,1 | 1212,0 |
| 3,81 | 45,150 | 7,2 | 1339,4 |
| 3,82 | 45,604 | 7,3 | 1480,5 |
| 3,83 | 46,063 | 7,4 | 1636,0 |
| 3,84 | 46,525 | 7,5 | 1808,0 |
| 3,85 | 46,993 | 7,6 | 1998,2 |
| 3,86 | 47,463 | 7,7 | 2208,3 |
| 3,87 | 47,942 | 7,8 | 2440,6 |
| 3,88 | 48,424 | 7,9 | 2697,3 |
| 3,89 | 48,911 | 8,0 | 2981,0 |
| 3,90 | 49,402 | 8,1 | 3294,5 |
| 3,91 | 49,899 | 8,2 | 3641,0 |
| 3,92 | 50,400 | 8,3 | 4023,9 |
| 3,93 | 50,907 | 8,4 | 4447,1 |
| 3,94 | 51,419 | 8,5 | 4914,8 |
| 3,95 | 51,935 | 8,6 | 5413,7 |
| 3,96 | 52,457 | 8,7 | 6002,9 |
| 3,97 | 52,985 | 8,8 | 6634,2 |
| 3,98 | 53,517 | 8,9 | 7332,0 |
| 3,99 | 54,055 | 9,0 | 8103,1 |
| 4,0 | 54,598 | 9,1 | 8955,3 |
| 4,1 | 60,340 | 9,2 | 9897,1 |
| 4,2 | 66,686 | 9,3 | 10938 |
| 4,3 | 73,700 | 9,4 | 12088 |
| 4,4 | 81,451 | 9,5 | 13360 |
| 4,5 | 90,017 | 9,6 | 14765 |
| 4,6 | 99,484 | 9,7 | 16318 |
| 4,7 | 109,95 | 9,8 | 18034 |
| 4,8 | 121,51 | 9,9 | 19930 |
| 4,9 | 134,29 | 10,0 | 22026 |
| 5,0 | 148,41 | | |
| 5,1 | 164,02 | | |

## Некоторые соотношения из векторного анализа

### Таблица метрических коэффициентов

| Система координат | Координаты | Метрические коэффициенты | | |
|---|---|---|---|---|
| Обобщенные криволинейные . . | $u, v, w$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ |
| Прямоугольные . | $x, y, z$ | 1 | 1 | 1 |
| Цилиндрические . | $r, \alpha, z$ | 1 | $r$ | 1 |
| Сферические . . . | $R, \theta, \alpha$ | 1 | $R$ | $R\sin\theta$ |
| Эллиптического цилиндра * . . | $u, v, z$ | $c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}$ | $c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}$ | 1 |
| Эллипсоида, сжатого вдоль оси вращения * . . | $u, v, \alpha$ | $c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}$ | $c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}$ | $c \operatorname{ch} u \times \cos v$ |
| Эллипсоида, вытянутого вдоль оси вращения * . . | $u, v, \alpha$ | $c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v}$ | $c\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin v}$ | $c \operatorname{sh} u \times \sin v$ |

* $2c$ — расстояние между фокусами.

Оператор набла

$$\nabla = \mathbf{u}^0 \frac{\partial}{H_1 \partial u} + \mathbf{v}^0 \frac{\partial}{H_2 dv} + \mathbf{w}^0 \frac{\partial}{H_3 dw} .$$

Градиент скаляра $\varphi$

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \mathbf{u}^0 \frac{\partial\varphi}{H_1 \partial u} + \mathbf{v}^0 \frac{\partial\varphi}{H_2 \partial v} + \mathbf{w}^0 \frac{\partial\varphi}{H_3 \partial w} .$$

Дивергенция вектора A

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u}(H_2 H_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(H_3 H_1 A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(H_1 H_2 A_w) \right] .$$

Ротор вектора **A**

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{u}^0 & H_2 \mathbf{v}^0 & H_3 \mathbf{w}^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ H_1 A_u & H_2 A_v & H_3 A_w \end{vmatrix} .$$

Лапласиан скаляра $\varphi$

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_1 H_2}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial w}\right) \right] .$$

*Приложение 7*

**Модули и аргументы бесселевых функций нулевого и первого порядка первого рода**

$$J_0(x\sqrt{-j}) = b_0\, e^{j\beta_0} \quad \text{и} \quad J_1(x\sqrt{-j}) = b_1\, e^{j\beta_1}$$

| $x$ | $b_0$ | $\beta_0^0$ | $b_1$ | $\beta_1^0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | —45 |
| 0,1 | 1,000 | 0,15 | 0,050 | —44,93 |
| 0,2 | 1,000 | 0,57 | 0,100 | —44,71 |
| 0,3 | 1,000 | 1,28 | 0,150 | —44,35 |
| 0,4 | 1,000 | 2,28 | 0,200 | —43,85 |
| 0,5 | 1,001 | 3,62 | 0,250 | —43,21 |
| 0,6 | 1,002 | 5,15 | 0,300 | —42,42 |
| 0,7 | 1,004 | 7,00 | 0,350 | —41,49 |
| 0,8 | 1,006 | 9,15 | 0,401 | —40,36 |
| 0,9 | 1,010 | 11,55 | 0,451 | —39,21 |
| 1,0 | 1,016 | 14,22 | 0,501 | —37,84 |
| 1,1 | 1,023 | 17,17 | 0,550 | —36,34 |
| 1,2 | 1,032 | 20,33 | 0,603 | —34,71 |
| 1,3 | 1,044 | 23,75 | 0,655 | —32,93 |
| 1,4 | 1,058 | 27,37 | 0,707 | —31,01 |
| 1,5 | 1,077 | 31,18 | 0,760 | —28,95 |
| 1,6 | 1,098 | 35,17 | 0,814 | —26,77 |
| 1,7 | 1,124 | 39,30 | 0,868 | —24,45 |
| 1,8 | 1,154 | 43,55 | 0,923 | —22,00 |
| 1,9 | 1,189 | 47,88 | 0,982 | —19,43 |
| 2,0 | 1,229 | 52,28 | 1,041 | —16,73 |
| 2,1 | 1,274 | 56,75 | 1,102 | —13,92 |
| 2,2 | 1,325 | 61,23 | 1,166 | —11,00 |
| 2,3 | 1,381 | 65,72 | 1,232 | — 7,97 |
| 2,4 | 1,442 | 70,18 | 1,302 | — 4,84 |
| 2,5 | 1,511 | 74,65 | 1,374 | — 1,61 |
| 2,6 | 1,583 | 79,11 | 1,450 | 1,70 |
| 2,7 | 1,666 | 83,50 | 1,530 | 5,10 |
| 2,8 | 1,754 | 87,84 | 1,615 | 8,57 |
| 2,9 | 1,849 | 92,22 | 1,704 | 12,11 |
| 3,0 | 1,950 | 96,52 | 1,800 | 15,71 |
| 3,1 | 2,059 | 100,79 | 1,901 | 19,37 |
| 3,2 | 2,176 | 105,03 | 2,009 | 23,08 |
| 3,3 | 2,300 | 109,25 | 2,124 | 26,83 |
| 3,4 | 2,434 | 113,43 | 2,246 | 30,62 |
| 3,5 | 2,576 | 117,60 | 2,377 | 34,44 |
| 3,6 | 2,728 | 121,76 | 2,516 | 38,30 |
| 3,7 | 2,890 | 125,88 | 2,664 | 42,17 |
| 3,8 | 3,061 | 129,94 | 2,823 | 46,07 |
| 3,9 | 3,244 | 134,10 | 2,992 | 49,98 |
| 4,0 | 3,439 | 138,19 | 3,173 | 53,90 |
| 4,1 | 3,646 | 142,28 | 3,366 | 57,84 |
| 4,2 | 3,867 | 146,36 | 3,572 | 61,79 |
| 4,3 | 4,101 | 150,44 | 3,792 | 65,74 |
| 4,4 | 4,352 | 154,51 | 4,027 | 69,71 |
| 4,5 | 4,618 | 158,59 | 4,278 | 73,67 |

| $x$ | $b_0$ | $\beta_0^0$ | $b_1$ | $\beta_1^0$ |
|---|---|---|---|---|
| 4,6 | 4,901 | 162,66 | 4,546 | 77,64 |
| 4,7 | 5,201 | 166,73 | 4,832 | 81,62 |
| 4,8 | 5,524 | 170,80 | 5,139 | 85,59 |
| 4,9 | 5,870 | 174,86 | 5,462 | 89,57 |
| 5,0 | 6,231 | 178,93 | 5,812 | 93,55 |
| 5,1 | 6,620 | 183,00 | 6,179 | 97,53 |
| 5,2 | 7,034 | 187,07 | 6,574 | 101,52 |
| 5,3 | 7,475 | 191,14 | 6,996 | 105,50 |
| 5,4 | 7,946 | 195,21 | 7,446 | 109,49 |
| 5,5 | 8,447 | 199,28 | 7,925 | 113,48 |
| 5,6 | 8,982 | 203,35 | 8,437 | 117,47 |
| 5,7 | 9,552 | 207,42 | 8,983 | 121,46 |
| 5,8 | 10,16 | 211,49 | 9,566 | 125,46 |
| 5,9 | 10,81 | 215,56 | 10,19 | 129,45 |
| 6,0 | 11,50 | 219,62 | 10,85 | 133,45 |
| 6,1 | 12,24 | 223,69 | 11,56 | 137,45 |
| 6,2 | 13,03 | 227,76 | 12,31 | 141,45 |
| 6,3 | 13,86 | 231,83 | 13,12 | 145,45 |
| 6,4 | 14,76 | 235,99 | 13,98 | 149,46 |
| 6,5 | 15,72 | 239,96 | 14,90 | 153,46 |
| 6,6 | 16,74 | 244,03 | 15,88 | 157,47 |
| 6,7 | 17,82 | 248,10 | 16,92 | 161,48 |
| 6,8 | 18,99 | 252,16 | 18,04 | 165,49 |
| 6,9 | 20,22 | 256,23 | 19,23 | 169,50 |
| 7,0 | 21,55 | 260,29 | 20,50 | 173,51 |
| 7,1 | 22,96 | 264,36 | 21,86 | 177,52 |
| 7,2 | 24,46 | 268,42 | 23,31 | 181,54 |
| 7,3 | 26,07 | 272,49 | 24,86 | 185,55 |
| 7,4 | 27,79 | 276,54 | 26,51 | 189,57 |
| 7,5 | 29,62 | 280,61 | 28,27 | 193,59 |
| 7,6 | 31,58 | 284,67 | 30,16 | 197,61 |
| 7,7 | 33,67 | 288,74 | 32,17 | 201,63 |
| 7,8 | 35,90 | 292,80 | 34,32 | 205,65 |
| 7,9 | 38,28 | 296,86 | 36,61 | 209,67 |
| 8,0 | 40,82 | 300,92 | 39,07 | 213,69 |
| 8,1 | 43,53 | 304,98 | 41,69 | 217,72 |
| 8,2 | 46,43 | 309,04 | 44,49 | 221,74 |
| 8,3 | 49,52 | 313,10 | 47,48 | 225,76 |
| 8,4 | 52,83 | 317,16 | 50,67 | 229,79 |
| 8,5 | 56,36 | 321,22 | 54,08 | 233,81 |
| 8,6 | 60,13 | 325,28 | 57,72 | 237,84 |
| 8,7 | 64,16 | 329,34 | 61,61 | 241,87 |
| 8,8 | 68,46 | 333,40 | 65,78 | 245,90 |
| 8,9 | 73,05 | 337,46 | 70,22 | 249,92 |
| 9,0 | 77,96 | 341,52 | 74,97 | 253,95 |
| 9,1 | 83,20 | 345,58 | 80,05 | 257,98 |
| 9,2 | 88,80 | 349,57 | 85,47 | 262,01 |
| 9,3 | 94,78 | 353,69 | 91,26 | 266,04 |
| 9,4 | 101,13 | 357,75 | 97,45 | 270,07 |
| 9,5 | 108,00 | 361,81 | 104,06 | 274,10 |
| 9,6 | 115,29 | 365,87 | 111,13 | 278,13 |

*Продолжение*

| $x$ | $b_0$ | $\beta_0^0$ | $b_1$ | $\beta_1^0$ |
|---|---|---|---|---|
| 9,7 | 123,11 | 369,96 | 118,68 | 282,16 |
| 9,8 | 131,43 | 373,98 | 126,75 | 286,20 |
| 9,9 | 140,30 | 378,00 | 135,37 | 290,23 |
| 10,0 | 149,83 | 382,10 | 144,59 | 294,27 |

## ОГЛАВЛЕНИЕ

*Петр Афанасьевич Ионкин*
*Николай Николаевич Курдюков*
*Евгений Степанович Кухаркин*

**Типовые примеры и задачи по теоретическим основам электротехники**

Редактор *Е. П. Березина*
Техн. редактор *Т. Д. Гарина*
Корректоры *В. И. Клитеник* и *Н. В. Кулиева*

Сдано в набор 3/VIII—64 г. Подп. к печ. 26/II—65 г.
Т—02443. Формат бумаги 60×90/16. Объем 20 печ. л.,
16,32 уч.-изд. л. Индекс ОТ-119 Тираж 30 000 экз.
Цена 59 коп. Заказ 626

Сводный тематический план 1965 г. учебников для вузов и техникумов. Позиция 432

Издательство «Высшая школа»
Москва, Неглинная ул., 29/14

---

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати. Б. Переяславская ул., 46