А. Г. НИКИТЕНКО

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Электрические аппараты»

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 31.2
Н62
УДК 621.316

Рецензенты: кафедра электрических аппаратов Московского энергетического института; проф. *Ю. Б. Бородулин* (Ивановский энергетический институт)

Никитенко А. Г.

Н62 Автоматизированное проектирование электрических аппаратов: Учеб. пособие для вузов.— М.: Высш. школа, 1983.— 192 с., ил.

45 к.

В книге рассмотрены методы математического моделирования характеристик электрических аппаратов, вопросы оптимального проектирования электромагнитных механизмов и расчета магнитных полей электрических аппаратов с применением аналоговых и цифровых вычислительных машин; приведены структурные схемы моделей, рекомендации по подготовке и решению конкретных технических задач; изложены вопросы разработки алгоритмов и программ для цифровых вычислительных машин с использованием различных численных методов нелинейного программирования.

Н $\frac{2302030000-079}{001(01)-83}$ 103—83

ББК 31.264
6П2.1.082

© Издательство «Высшая школа», 1983

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рост механизации и автоматизации производственных процессов требует значительного увеличения производства средств автоматизации и повышения их качества. К числу наиболее распространенных средств автоматизации принадлежат электрические аппараты. С их помощью распределяется электроэнергия, регулируются режимы работы и производится защита электроустановок. Их широко используют для дистанционного и автоматического управления объектами.

Массовое применение электрических аппаратов, необходимость повышения их надежности и экономичности делают главной задачу совершенствования методов их расчета и проектирования. Несмотря на относительную простоту конструкций, процессы в электрических аппаратах требуют для своего описания сложного математического аппарата и громоздких вычислений. Попытки вести расчет электрических аппаратов по упрощенным формулам с помощью примитивных вычислительных средств не всегда давали удовлетворительные результаты. Применение электронных вычислительных машин (ЭВМ) позволило поднять расчеты электрических аппаратов на качественно новую ступень. Для того чтобы использовать возможности ЭВМ, необходимо совершенствование существующих и создание принципиально новых методов расчета и расчетных формул.

Настоящая книга является первой попыткой создать учебное пособие, в котором рассматриваются вопросы расчета и проектирования контактных электрических аппаратов. Книга соответствует программам курсов «Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах», «Специальный курс электрических аппаратов», а также курса «Расчет электрических аппаратов на ЭВМ», изучаемого студентами специальности «Электрические аппараты» в ряде вузов страны. Книга может быть полезной студентам, обучающимся по специальности «Автоматика и телемеханика» при изучении курса «Электромашинные и электромагнитные устройства автоматики».

Автор благодарен заслуженному деятелю науки и техники РСФСР, д-ру техн. наук, проф. *Ю. Б. Бородулину,* д-ру техн. наук, проф. *И. С. Таеву*, канд. техн. наук, доц. *В. Г. Дегтярю* и канд. техн. наук, доц. *А. Г. Годжелло* за замечания, высказанные в рецензиях и учтенные при доработке; д-ру техн. наук, проф. *Е. М. Си-*

нельникову и д-ру техн. наук, проф *Ю. А. Бахвалову* за ценные пожелания, относящиеся к содержанию книги, а также сотрудникам кафедры «Электрические аппараты и основы электротехники» Новочеркасского политехнического института, советы которых были учтены при работе над рукописью.

Все замечания и пожелания направляйте по адресу: 101430, Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Автор

ГЛАВА 1

ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

§ 1.1. Аналоговые вычислительные машины

Электронные вычислительные машины обычно классифицируют по форме представления обрабатываемой информации, под которой понимаются программа решаемой задачи, исходные данные, промежуточные и окончательные результаты. По указанному критерию делят ЭВМ на три группы: аналоговые вычислительные машины (АВМ), цифровые вычислительные машины (ЦВМ) и комбинированные аналого-цифровые вычислительные машины (АЦВМ).

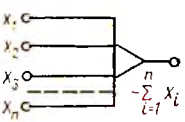
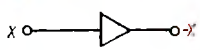
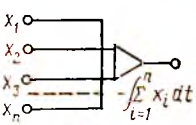
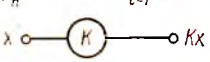
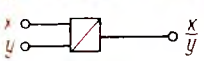
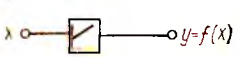
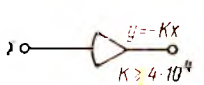
Назначение АВМ, источники погрешностей решающих элементов. АВМ используются для решения математических задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (линейными, нелинейными, с постоянными и переменными коэффициентами). Дифференциальные уравнениия этого вида — наиболее распространенное средство математического описания разнообразных неустановившихся, переходных процессов, имеющих зачастую главное значение при оценке исследуемого объекта. Поэтому АВМ получили развитие как специализированные устройства для исследования и анализа поведения объектов в указанных режимах. Аналоговые вычислительные машины можно использовать также и в тех случаях, когда математическим описанием исследуемых объектов являются другие виды уравнений (в частных производных, интегральные, алгебраические, трансцендентные и т. д.), но решение задачи при определенных допущениях может быть сведено к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

В АВМ протекают процессы иной физической природы, чем исследуемые, и математические операции производятся с электрическими величинами (напряжения постоянного тока). С помощью электронных и полупроводниковых приборов, конденсаторов, сопротивлений и некоторых других элементов создаются схемы, в которых изменения напряжений во времени описываются теми же дифференциальными уравнениями, что и изучаемое явление. Решение уравнений получается в виде зависимостей напряжений от

времени, являющихся аналогами переменных решаемой задачи. Эти зависимости выводятся на экран осциллографа или регистрируются измерительными приборами. Таким образом, уравнения, решаемые на АВМ, представляют собой математическую модель исходных (физических) процессов.

АВМ состоит из отдельных функциональных блоков; каждый блок осуществляет одну или несколько элементарных математических операций. С помощью комбинаций этих блоков составляются структурные схемы модели для реализации зависимостей

Таблица 1.1

Функция, выполняемая операционным элементом	Наименование	Обозначение
Сложение нескольких переменных	Сумматор	
Перемена знака	Инвертор	
Интегрирование одной или суммы нескольких переменных	Интегратор	
Умножение на постоянную величину	Постоянный коэффициент	
Перемножение двух переменных	Умножитель	
Деление двух переменных	Делитель	
Воспроизведение нелинейной зависимости	Нелинейный блок	
Воспроизведение функции времени	Переменный коэффициент	
Основа построения операционных элементов	Операционный усилитель постоянного тока	

между напряжениями в АВМ, соответствующих исходным уравнениям. В табл. 1.1 показаны условные обозначения функциональных блоков и выполняемые ими функции.

Основным элементом, на базе которого строится большинство функциональных блоков, является усилитель постоянного тока (УПТ). Для обеспечения заданной точности работы УПТ должен обладать высоким коэффициентом усиления (не ниже $4 \cdot 10^4$), требуемой полосой пропускания рабочих частот, допустимыми фазовыми искажениями и линейной характеристикой в широком диа-

пазоне разнополярных входных и выходных сигналов. Чтобы коэффициент усиления был высоким, УПТ выполняют многокаскадными (как правило, трехкаскадными). Стабильность работы достигается применением глубокой отрицательной обратной связи.

Для анализа рабочего режима УПТ и установления связей между его основными характеристиками рассмотрим идеализированную схему [1], приняв следующие допущения (рис. 1.1): точка q «потенциально заземлена», т. е., будучи изолированной от земли, имеет потенциал, равный нулю; ток между точками q и q' (ток утечки) равен нулю; выходное внутреннее сопротивление между зажимами 2 и 2′ равно нулю, т. е. выходное напряжение $U_{вых}$ не зависит от нагрузки, создаваемой подключаемыми цепями.

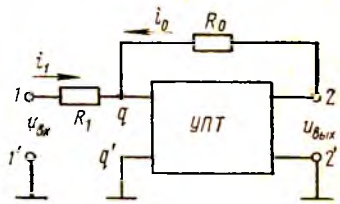


Рис. 1.1. Схема усилителя постоянного тока

Связь между входными $u_{вх}$ (зажимы 1—1′) и выходным $u_{вых}$ напряжениями и токами определяется из уравнений

$$u_q = -u_{вых}/K_у; \quad i_1 + i_0 = 0,$$

где $K_у$ — коэффициент усиления УПТ при нулевой частоте; $i_1 = (u_{вх} - u_q)/R_1$; $i_0 = (u_{вых} - u_q)/R_0$, тогда

$$u_{вых} = -\frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{u_{вх}}{1 + \frac{1}{K_у}\left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right)}. \qquad (1.1)$$

При значении $K_у$, указанном выше, $1/K_у = 0$, тогда

$$u_{вых} = -R_0\, u_{вх}/R_1 = -K_б\, u_{вх}. \qquad (1.2)$$

Здесь $K_б$ — передаточный коэффициент блока.

Из (1.2) следует, что $K_б = R_0/R_1$ зависит только от соотношения внешних параметров цепей (R_0 и R_1). Коэффициент усиления $K_у$ не входит в выражение выходного напряжения, а следовательно, его изменение, вызванное влиянием различных факторов, не отражается на значении напряжения $u_{вых}$. Процессы в схеме УПТ связаны с изменением знака выходной величины по отношению к входной. Отмеченные особенности используются при составлении структурных схем моделей для изменения передаточных коэффициентов решающих блоков, снижения погрешностей АВМ.

По точности работы АВМ уступают ЦВМ. Погрешности вычислений могут колебаться в пределах от 0,5 до 10 %. Невысокая точность работы АВМ определяется погрешностями отдельных решающих блоков, особенностями решаемой задачи, точностью математического описания, структурой схемы и др.

Основные источники погрешностей работы УПТ — дрейф выходного напряжения, конечное значение коэффициента $K_у$ и отклонения параметров операционных цепей от номинальных значений.

Дрейф выходного напряжения (дрейф нуля) заключается в появлении на выходе усилителя изменяющегося сигнала при отсутствии напряжения на входе. Это явление вызывается нестабильностью характеристик элементов усилителей и другими причинами. При этом дрейф, возникший в первом каскаде, усиливается и на выходных зажимах может достигнуть значительной величины. Напряжение дрейфа зависит от передаточного коэффициента блока:

$$u_{вых} = (1 + K_б) u_d,$$

где $u_{вых}$ — выходное напряжение, вызванное дрейфом; u_d — напряжение дрейфа.

Чтобы снизить $u_{вых}$, передаточный коэффициент ограничивают до значения $K_б \leqslant 20$. При использовании УПТ в качестве сумматора, когда суммируемые сигналы подаются на несколько входов усилителя,

$$u_{вых} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} K_{бi}\right) u_d,$$

где n — число входов решающего усилителя; $K_{бi}$ — передаточный коэффициент УПТ с одним входом.

Для интегрирующего блока при $u_d = \text{const}$

$$u_{вых} = [1 + t/(R_1 C)]\, u_d,$$

где t — время интегрирования; C — емкость в цепи обратной связи интегратора.

В большинстве типов АВМ предусматривается компенсация дрейфа путем подачи на вход постоянного напряжения. Эта операция (установка нуля) должна производиться перед каждым пуском АВМ.

Из сказанного выше видно, что при строгом подходе уравнение (1.1) переходит в (1.2) только при $K_у = \infty$. При конечном значении коэффициента усиления погрешность будет тем больше, чем меньше значение $K_у$. Погрешность, вносимая конечным значением коэффициента усиления, зависит от функционального назначения УПТ. Так, погрешность для сумматора

$$\Delta u_{вых} \leqslant u_{вых.\,макс} (1 + K_б)/K_у;$$

для интегратора

$$\Delta u_{вых} \leqslant u_{вых.\,макс} t/(2K_у R_1 C).$$

десь $u_{вых.\,макс}$ — максимальное напряжение на выходе усилителя;

$$K_б = \sum_{i=1}^{n} K_{бi}.$$

Погрешности вычислений вносятся также из-за технологических отклонений элементов (резисторов и конденсаторов), включаемых на вход и в цепь обратной связи усилителей. Ошибка в выходном напряжении, вызванная отклонениями значений сопротивлений на входе ΔR_1 и в цепи обратной связи ΔR_0, может быть определена: для сумматора

$$\Delta u_{\text{вых}} = -u_{\text{вх}} \left[\sum_{i=1}^{n} K_{\text{б}i} (\Delta R_0/R_0 - \Delta R_1/R_1) \right];$$

для интегратора с одним входом

$$\Delta u_{\text{вых}} = -u_{\text{вых}} (\Delta R_1/R_1 - \Delta C/C).$$

Здесь ΔR_0, ΔR_1, ΔC — первичные погрешности элементов R_0, R_1, C.

На точность работы оказывают влияние также погрешности потенциометров установки постоянных коэффициентов K (см. табл. 1.1). Следует иметь в виду значительное влияние нагрузки потенциометра на напряжения выхода. Для повышения точности работы модели значения коэффициентов следует устанавливать непосредственным измерением выходного напряжения на нагруженном потенциометре одним из точных методов (например, мостовым). При $u_{\text{вх}} = \text{const}$ погрешность схемы блока постоянного коэффициента

$$\Delta u_{\text{вых}} = u_{\text{вх}} K^2 \lambda_{\text{п}} (1 - K) / [1 + K\lambda_{\text{п}} (1 - K)],$$

где $\lambda_{\text{п}} = R/R_{\text{н}}$; R — полное сопротивление резистора потенциометра; $R_{\text{н}}$ — сопротивление нагрузки.

Перечисленные виды погрешностей относят к разряду статических. Кроме них УПТ имеет динамические ошибки, вызванные реактивными паразитными элементами схемы. Анализ динамических составляющих погрешности может быть выполнен на основе схемы обобщенного УПТ (рис. 1. 2), в состав которой кроме рабочих входят паразитные емкости и сопротивления. Для сумматора C_1 и C_2 — паразитные емкости резисторов R_1 и R_0, для интегратора C_1 — паразитная емкость входного резистора R_1, а R_0 — сопротивление интегрирующего конденсатора. Для дифференцирующего усилителя (образуется при включении конденсатора на входе и резистора — в цепь обратной связи) паразитными являются параметры R_1 и C_0. С изменением частоты входного сигнала реактивные паразитные элементы создают амплитудные погрешности и ошибки в виде фазового сдвига выходного напряжения по отношению к входному. Динамические свойства функциональных блоков обычно оценивают по их частотным характеристикам. Коэффициент усиления $K_{\text{у}}$ сохраняет большое значение только в ограниченном диапазоне частот. С ростом частоты коэффициент $K_{\text{у}}$ вначале медленно, а затем (за полосой пропускания) резко уменьшается. Кроме того, увеличивается фазовая погрешность. Поэтому

для точного анализа динамических погрешностей необходимо знать зависимость коэффициента $K_у$ от частоты входного сигнала.

Качественная оценка влияния паразитных связей операционных цепей на стабильность и точность работы УПТ сводится к следующему. Для сумматора наличие больших емкостей C_1 и C_q может привести к самовозбуждению на высоких частотах. Емкость C_0 оказывает стабилизирующее влияние (ее часто искусственно увеличивают для повышения устойчивости работы). В интеграторе сопротивление утечки конденсатора R_0 снижает коэффициент усиления и увеличивает погрешность работы. В особенности сильно проявляется влияние паразитных элементов в случае работы УПТ в режиме дифференцирующего звена.

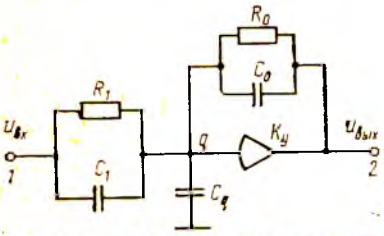


Рис. 1.2. Обобщенный усилитель постоянного тока

При $K_у \gg 1$ абсолютная ошибка в амплитуде выходного сигнала в зависимости от входного напряжения.

$$\Delta u_{вых} = \frac{R_0 C_1 \omega}{K_у + R_0^2 C_1^2 \omega^2} \sqrt{R_0^2 C_1^2 \omega^2 (K_у^2 + R_0^2 C_1^2 \omega) + K_у^2}.$$

Из этого выражения видно, что абсолютная ошибка дифференцирующего усилителя растет с повышением частоты входного сигнала, т. е. схема имеет повышенную чувствительность к высокочастотным составляющим напряжения на входе усилителя. Это существенный недостаток, ограничивающий использование дифференцирующих блоков при решении уравнений. При составлении структурных схем моделей всегда следует избегать операций дифференцирования, а если это невозможно, необходимо применять специальные блоки, в которых предусмотрены элементы сглаживания составляющих входного напряжения высокой частоты.

Нелинейные блоки, подготовка решения задачи на АВМ. Рассмотренные выше функциональные блоки (сумматор, интегратор, дифференциатор, постоянный коэффициент) называют *линейными решающими элементами.* Для построения структурных схем используется также группа нелинейных блоков (функциональных преобразователей). К ним относятся нелинейные блоки, предназначенные для воспроизведения различных нелинейных функций одного или нескольких аргументов, блоки для перемножения и деления переменных (умножители и делители).

Основа нелинейного блока — диодный элемент с набором потенциометров и резисторов. С их помощью можно регулировать напряжение отпирания диода, знак выходного напряжения и наклон токовой характеристики. Если просуммировать напряжения, снимаемые с различных диодных элементов, то можно получить на выходе блока напряжение в виде ломаной линии, участки которой могут располагаться в различных квадрантах. Это создает возможность кусочно-линейной аппроксимации нелинейных за-

висимостей. Стандартный нелинейный блок может иметь до 14 диодных элементов, что позволяет аппроксимировать кривую 14 отрезками прямых.

Кроме описанных функциональных преобразователей, предназначенных для воспроизведения различных нелинейных зависимостей, в практике моделирования находят широкое применение специальные схемы для расчета и исследования элементов, имеющих характеристики со скачкообразным изменением выходного сигнала. К таким характеристикам относятся ограничение координат по модулю, характеристики зоны нечувствительности, люфта, релейная и др. Эти характеристики объединяются в группу типовых нелинейных зависимостей, и для их воспроизведения в АВМ используются специальные диодные схемы [2].

Множительные и делительные функциональные преобразователи представляют собой комбинации линейных решающих элементов и нелинейных функциональных преобразователей. Операции умножения и деления осуществляются в результате выполнения ряда других математических операций. Переход к этим математическим операциям основывается на известных соотношениях алгебры и анализа. Например, в соответствии с соотношением

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

операция умножения заменяется алгебраическим сложением и возведением в квадрат. Деление двух переменных может быть заменено умножением делимого на величину, обратную делителю.

Для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в структурные схемы моделей вводятся блоки переменных коэффициентов (см. табл. 1.1), представляющие собой набор делителей напряжения, и шаговый искатель, приводимый в действие шаговым двигателем. Делители напряжения позволяют получить на выходе блока напряжение, изменяющееся во времени дискретно в виде ступенчатой кривой. Поэтому использование блоков переменных коэффициентов связано с дополнительными погрешностями.

Составление программы решения задачи на АВМ не требует особой математической подготовки и специальных знаний в области численного анализа, однако необходимы глубокие знания объекта расчета, его особенностей. Следует хотя бы в общих чертах иметь представление об ожидаемых результатах решения. Блочная конструкция АВМ позволяет составлять схему решения задачи многими способами. Рациональность программы состоит в ее максимальной простоте при обеспечении необходимой точности решения.

Перед непосредственным решением задачи необходимо выполнить работы, связанные с переходом от физической системы к ее математической модели на АВМ; при этом осуществляют:

анализ исходной системы уравнений и приведение ее к виду, удобному для решения на АВМ;

выбор масштабов исходных уравнений (переход от исходных уравнений к машинным), расчет коэффициентов передачи;

выбор и составление рационального варианта структурной схемы;

составление таблиц и графиков для воспроизведения нелинейных зависимостей, настройку функциональных преобразователей;

подготовку данных для контроля правильности решения;

корректировку масштабов и коэффициентов по результатам пробных решений.

Анализ задачи начинают с проверки замкнутости исходной системы уравнений: число уравнений m должно равняться числу неизвестных n. Если $m<n$, то должно быть дано n конечных соотношений, связывающих между собой неизвестные функции. Следует также убедиться, что начальные условия заданы для всех неизвестных функций. Должен быть указан (выбран) наиболее целесообразный способ аппроксимации нелинейных функций, установлен интервал решения задачи, определены выходные переменные и способ их фиксации. Предварительный анализ завершается составлением задания на программирование, которое должно содержать: систему дифференциальных уравнений; начальные условия; коэффициенты, графики и таблицы функции; интервал решения задачи; перечень выходных переменных и указание на способ их регистрации.

Рациональность структурной схемы определяется формой записи исходных уравнений. Наиболее общей формой записи и приведения уравнений к виду, удобному для решения на АВМ, является понижение порядка производной. Исходное уравнение записывается в виде, условно разрешимом относительно старшей производной. Структурная схема предусматривает последовательное понижение порядка производной d^px/dt^p путем p-кратного интегрирования. К недостаткам этого способа относится необходимость иметь большое количество входов сумматора (интегратора) для формирования производной d^px/dt^p. Известно, что при большом числе входов операционного усилителя точность его работы снижается. Поэтому если решается одно уравнение p-го порядка, то при большом p применяют преобразование исходного уравнения в систему из p уравнений первого порядка. При этом в сумматоре (или интеграторе) будут задействованы лишь по два входа, хотя количество решающих блоков возрастает.

Поскольку физические величины могут изменяться в широких пределах, а значение напряжения в АВМ из-за безопасности и удобства работы ограничено (от —100 до +100 В), то физические переменные и представляющие их переменные модели (машинные переменные) связываются масштабными коэффициентами (масштабами). Последние должны быть определены таким образом, чтобы значение любого члена машинного уравнения не превышало ±100 В. Для расчета масштабов необходимы максимальные значения основных и промежуточных переменных. Эти значения определяются по значениям физических величин на основании опыта

решения аналогичных задач, ориентировочной оценки значений переменных при анализе исходных соотношений.

Обозначим физические переменные через x_1, x_2, ..., x_n, а соответствующие им машинные переменные, выражаемые в вольтах,— через $x_{1м}$, $x_{2м}$, ..., $x_{nм}$. Связь между физическими (реальными) x и машинными $x_м$ величинами выражается через масштабы (m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}) (ед/В) следующим образом:

$$x_{1м}=x_1/m_{x_1},\ x_{2м}=x_2/m_{x_2},\ \ldots,\ x_{nм}=x_n/m_{x_n}.$$

В некоторых учебниках и монографиях принята другая связь между физическими и машинными переменными: $x_м = m_x/x$.

Так как окончательные значения выходных переменных перед решением задачи неизвестны и масштабы выбираются (или рассчитываются) по ориентировочным данным, то в процессе решения уравнений масштабы могут быть уточнены после пробного решения задачи.

При разработке структурной схемы необходимо стремиться к тому, чтобы она состояла из минимально возможного числа решающих усилителей. Чем меньше усилителей в схеме, тем меньше погрешность от дрейфа нулевого уровня. Структура схемы должна обеспечивать устойчивую работу. Следует избегать замкнутых цепей из четного числа сумматоров и применения операции дифференцирования. Необходимо следить за нагрузкой усилителей. При перегрузке усилителя нарушается его линейность, что приводит к дополнительным погрешностям решения задачи.

§ 1.2. Цифровые вычислительные машины

Принцип действия, основные узлы ЦВМ, машинные языки. Наиболее универсальные вычислительные средства — цифровые вычислительные машины. Применение ЦВМ позволило резко сократить сроки проведения расчетов, освободить от трудоемкой ручной работы большие коллективы специалистов, повысить точность вычислений, ставить и решать совершенно новые задачи по планированию и экономическому анализу народного хозяйства, диагностике в медицине, управлению промышленными предприятиями и сложнейшими объектами.

Чтобы уяснить принцип действия ЦВМ, целесообразно, как это сделано в [3], проследить за работой человека-вычислителя, рабочее место которого находится в помещении, заполненном стеллажами, разделенными на отдельные ячейки. Каждая ячейка имеет свой порядковый номер — *адрес*. Стеллажи в данном случае служат в качестве запоминающего устройства. В каждой специальной ячейке такого устройства находится конкретное предписание вычислителю — *команда*, которое закодировано в виде числа определенной разрядности, или какое-либо число, подлежащее обработке,— *операнд*. Ячейка может использоваться для помещения в нее результатов вычислений. Человеку-вычислителю предписы-

вается строго выполнять простейшие операции над исходными данными в соответствии с заданной ему программой. *Программа* представляет собой последовательность приказов — *команд*, выполнение которых реализует алгоритм решения задачи. Под *алгоритмом* понимают однозначно определенное правило действий, состоящих из формально заданных логических и арифметических операций над исходными данными, приводящее к решению задачи за конечное число шагов.

Вычислитель извлекает содержание ячейки, подлежащей обработке в первую очередь. Для каждой программы есть своя конкретная ячейка и ее содержимое является какой-либо командой, например: «Число, хранящееся в ячейке с адресом 2572, сложить с числом из ячейки с адресом 3702 и результат поместить в ячейку с адресом 2613». Команда представляется в цифровой форме и по внешнему виду ничем не отличается от операнда. Однако заранее известно, что означает та или иная группа цифр в числе—команде. То, что извлеченная из ячейки информация является командой, а не обрабатываемым числом, определяется только адресом ячейки. Расшифровав, какую операцию нужно выполнить, и выполнив ее, вычислитель заносит результат этой операции в одну из ячеек стеллажа. После выполнения первой команды вычислитель переходит к рассмотрению следующей, хранящей в ячейке памяти с адресом на единицу больше, чем адрес исходной команды. При этом вычислителю может встретиться команда о выполнении логической операции, например сравнения двух чисел, или команда условного перехода, предусматривающая переход к выполнению той или иной команды программы в зависимости от знака результата предыдущей операции. Команды условного перехода позволяют составлять разветвляющиеся программы, если заранее предусмотреть ход вычислений невозможно.

Таким образом, человек-вычислитель должен: извлечь команду из очередной ячейки памяти; расшифровать тип операции, содержащейся в этой команде; извлечь операнды из ячеек памяти, указанных в команде; выполнить предписанную операцию над этими числами; занести результаты в ячейку, предусмотренную командой; перейти к следующей ячейке для извлечения новой команды.

Из приведенного описания вычислительного процесса можно составить общую структуру ЦВМ, моделирующей действия вычислителя. В ее состав должны входить (рис. 1.3): запоминающее устройство *ЗУ* — для хранения управляющей программы, исходных, промежуточных и конечных данных; арифметическо-логическое устройство *АУ* — для выполнения арифметических и логических действий над данными; устройство управления *УУ* — для координации и синхронизации работы всех частей ЦВМ; устройства ввода *УВв* и вывода *УВыв* — для занесения исходной информации в машину и вывода из нее результатов или данных, хранящихся в запоминающем устройстве; пульт управления *ПУ* — для осуществления пуска и остановки машины, контроля за ходом вычислительного процесса и управления режимом работы машины.

Автоматизация вычислительного процесса стала реальной лишь тогда, когда появилась возможность хранить программу вычислений в самой машине [4]. Чтобы вычислительный процесс осуществлялся автоматически, ЦВМ должна расшифровывать и выполнять команды, содержащиеся в программе. Для представления чисел и команд в ЦВМ используют двоичную систему счисления, содержащую лишь две цифры: 0 и 1. Это обеспечивает простоту конструкции элементов для хранения и запоминания цифр.

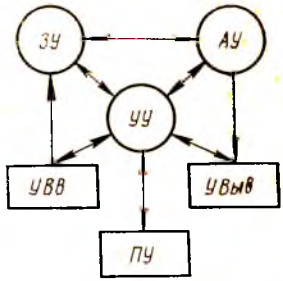


Рис. 1.3. Структура цифровой вычислительной машины

Рассмотрим подробнее особенности основных частей ЦВМ.

Запоминающее устройство (оперативное запоминающее устройство — ОЗУ). Должно оперативно принимать, хранить и при необходимости передавать информацию в другие устройства. Элементами памяти чаще всего служат ферритовые сердечники, имеющие два устойчивых состояния, одно из которых обозначают числом 0, другое — числом 1. Ферритовый сердечник может хранить одну двоичную цифру — *бит*. Восемь бит образуют единицу количества информации — *байт*. Одно число или команда представляют собой *слово*. Элементы памяти, предназначенные для хранения одного слова, называют *ячейкой*. Каждая ячейка имеет свой *адрес (номер)*. Если длина (разрядность) ячейки строго определена, то такие ОЗУ относят к устройствам с *постоянной* структурой памяти. В современных ЦВМ используются ОЗУ с *переменной* структурой памяти. Здесь длина слова может быть переменной, однако кратной длине байта (2, 4 и 8 байт).

Арифметическое устройство и устройство управления. Они образуют *процессор*. В арифметическом устройстве операнды из памяти вызываются в две ячейки, называемые *регистрами*. Результат операции получается в третьей ячейке — *сумматоре*. Для увеличения быстродействия и расширения возможностей ЦВМ процессору придаются несколько сумматоров и регистров. В устройстве управления расшифровываются команды программы и управляющие сигналы передаются в отдельные блоки машины для исполнения команд.

Устройство ввода. Предназначено для передачи в ОЗУ подготовленных данных со специальных бланков, перфокарт, перфолент.

Устройство вывода. Алфавитно-цифровые печатающие устройства (АЦПУ), ленточные и карточные перфокарты предназначены для передачи информации (результатов решения задачи) из ОЗУ на внешние носители (на бумагу или телевизионный экран) в виде алфавитно-цифрового текста, таблиц, графиков и чертежей. На перфокарты и перфоленты могут быть выведены результаты промежуточных вычислений для последующего ввода в память ЦВМ.

Периферийные (внешние) устройства ЦВМ. Устройства, предназначенные для обработки информации вне процессора. В состав внешних устройств входят устройства подготовки данных, служащие для ручного занесения исходных данных на перфокарты, перфоленты, магнитные карты и ленты.

Дисплеи и графопостроители. Служат в качестве графических устройств вывода. Выходная информация в этом случае представляется в виде текстов, графиков, чертежей, контурных рисунков. Специальные виды дисплеев (со световым пером) служат для связи оператора с ЦВМ без промежуточных носителей информации. Будучи расположенными на большом расстоянии от машины, они позволяют осуществлять как ввод, так и вывод информации. Такие устройства оперативного ввода—вывода называют *терминалами.*

Большие объемы информации хранятся в накопителях на магнитных лентах, барабанах и дисках. Емкость магнитных барабанов и дисков достигает миллионов байт.

Как было отмечено выше, работой ЦВМ при решении задачи управляет программа (последовательность команд), специально составленная для данной задачи. Каждая ЦВМ имеет свой набор команд, который может быть расшифрован и выполнен машиной; такой набор называют *машинным языком.*

Программирование на машинных языках требует больших затрат труда и времени, поэтому в настоящее время разработаны языки, называемые *алгоритмическими.* Эти языки близки к обычному математическому и в то же время достаточно формализованы для того, чтобы обеспечить решение задач на ЦВМ без участия человека. Программа, составленная на аглоритмическом языке, должна быть переведена на машинный язык. Этот процесс выполняется автоматически на ЦВМ с помощью специальных программ — *трансляторов.* Для эффективного использования ЦВМ кроме трансляторов требуются *библиотеки стандартных программ,* программы, обеспечивающие последовательное решение нескольких задач,— *режим пакетной обработки,* параллельное прохождение задач — *мультипрограммный режим* и ряд других. Все эти вспомогательные программы, образующие так называемое *математическое обеспечение* (МО) ЦВМ, поставляются заводом—изготовителем ЦВМ. Программы для решения конкретных задач данной области знаний, имеющиеся в распоряжении пользователя, составляют *специальное математическое обеспечение* (СМО). В настоящее время языки написания программ подразделяются на два класса: *машинно-ориентированные* и *проблемно-ориентированные.* Если основная цель состоит в получении оптимальной программы, т. е. в наилучшем использовании возможностей ЦВМ данного типа и сведении к минимуму машинного времени, затрачиваемого на вычислительный процесс, то используют машинно-ориентированные языки. Если же на первом плане стоит облегчение процесса составления программ и обмена алгоритмами, то предпочтение отдают проблемно-ориентированным языкам.

Один из первых проблемно-ориентированных языков — алгоритмический язык ФОРТРАН, предназначенный для описания инженерных и научных задач и расчетов. Для инженерных расчетов пригоден также универсальный язык АЛГОЛ [5]. Язык ПЛ/1 в основном используется в задачах, связанных с переработкой больших объемов исходной информации, поэтому в инженерных расчетах к нему прибегают сравнительно редко. Из машинно-ориентированных языков применяется в основном язык АССЕМБЛЕР [6]. Помимо перечисленных универсальных алгоритмических языков в технике начинают внедрять узкопроблемный язык выдачи графической информации. Он позволяет завершить автоматизацию расчета и проектирования аппаратов выдачи чертежей.

Программу, написанную на одном из алгоритмических языков, называют *исходным модулем*. Последний нельзя непосредственно использовать для расчетов на ЦВМ. Его необходимо преобразовать в абсолютный модуль, т. е. в последовательность машинных команд и данных. В ЦВМ предусмотрена стандартная технология преобразования исходного в эквивалентный абсолютный модуль. Пользователь должен иметь о ней представление, так как ему приходится давать задание машине. Каждая модель современных ЦВМ снабжена операционной системой. Под *операционной системой* понимают часть программного обеспечения, предназначенную для ввода — вывода и управления данными, распределения ресурсов ЦВМ, подготовки и отладки программ, организации непрерывной работы машины от программы к программе без вмешательства оператора.

В состав программного обеспечения ЕС ЭВМ входят дисковая операционная система (ДОС) и операционная система (ОС). Эти системы служат достижению одних и тех же целей: повышению эффективности использования аппаратных средств ЕС ЭВМ, а также производительности труда программистов и обслуживающего персонала. Каждой операционной системе соответствуют две системы программирования. *Система программирования* представляет собой совокупность средств разработки программ (языки программирования, трансляторы, библиотеки программ и обслуживающие программы), обеспечивающих автоматизацию составления и отладки программ. По входным языкам эти две системы совместимы. Хотя набор некоторых входных языковых средств программирования ДОС и ОС различен, но за счет введения определенных ограничений на входные языки можно обработать одни и те же программы обеими системами. По выходным (объектным) программам ДОС и ОС несовместимы. Это означает, что программы, подготовленные системой программирования ДОС, не могут выполняться системой ОС, и наоборот. Несовместимость объектных программ связана с различиями в составе и функциях компонентов управляющих программ ДОС и ОС. Вследствие этих различий в ДОС и ОС используются разные подпрограммы, обеспечивающие связь программ пользователя с операционной системой.

Дисковая операционная система ориентирована на малые модели ЕС ЭВМ и учитывает ограниченные возможности аппаратуры этих моделей (небольшой объем основной памяти, невысокое быстродействие процессоров, ограниченность типов внешних устройств).

В ДОС программы выполняются в двух режимах: однопрограммном и мультипрограммном. В однопрограммном режиме программе представляется вся основная память, кроме той части, которая занята управляющей программой ДОС. В мультипрограммном режиме одновременно можно выполнять до трех программ, каждой программе выделяется раздел основной памяти. Преимущества мультипрограммного режима проявляются особенно при одновременном решении задач с различными требованиями к вычислительным средствам. В этом случае наиболее эффективно используется оборудование системы.

Операционная система предоставляет пользователям большие возможности, для осуществления которых требуются мощные технические средства. Входящая в состав ОС *управляющая программа* предусматривает три режима выполнения: однопрограммный, мультипрограммный с фиксированным числом задач, мультипрограммный с переменным числом задач. Трансляторы, входящие в состав ОС, перерабатывают исходный модуль в объектный. Очень важно отметить, что форма объектного модуля не зависит от языка, на котором был написан исходный модуль.

Для получения абсолютного модуля требуется еще один этап переработки. Его выполняет *программа-редактор,* объединяющая (редактирующая) несколько самостоятельных объектных модулей (например, несколько стандартных программ библиотеки машины и использующую их программу, написанную пользователем) в единый абсолютный модуль. Изготовленный редактором абсолютный модуль помещается на диск и хранится в пассивном состоянии.

Чтобы абсолютный модуль работал как программа, его следует передать в оперативную память машины и привести в действие. Эти действия выполняет управляющая программа операционной системы, руководствуясь при этом заданием на выполнение программы. Эти задания составляются пользователем на специальном языке *управления заданиями.* Каждое задание, написанное средствами этого языка, может предписать выполнение одной программы (абсолютного модуля) или последовательности из нескольких программ. Средства языка дают возможность идентифицировать намеченные к выполнению программы, порядок их выполнения, а также указать для каждой программы, какие наборы данных надо связать с ней в качестве исходных и на каком устройстве ввода в машину он находится, на какое устройство вывести результаты расчета. Причем под исходными данными понимаются не только данные для счета по программе пользователя. В частности, программа пользователя на алгоритмическом языке является исходной для работы транслятора.

Задание операционной системе выдается с помощью *оператора*, представляющего собой определенную комбинацию знаков, отперфорированных на карте, называемой *управляющей*. Колода перфокарт, состоящая из управляющих карт, исходных программ пользователя и данных для счета по программе, образует задание, которое можно передать на вычислительный центр. Каждое задание должно начинаться с паспортной части, где указываются название программы, фамилия, имя, отчество заказчика и другие данные.

Таким образом, современная ЦВМ — это вычислительная система, состоящая из двух частей: набора технических средств и программного (математического) обеспечения. Последнее является логическим продолжением технических средств, существенно расширяющих возможности системы и облегчающих ее использование.

Подготовка ЦВМ к работе, численные методы, применяемые при решении задач. Решению задачи на ЦВМ предшествует подготовительная работа, состоящая из нескольких этапов: подготовки задачи, разработки математической модели и выбора численного метода, программирования задачи, отладки программы и вычисления.

Для правильной постановки задачи необходимы прежде всего глубокое знание исследуемого процесса или объекта, четкое представление о цели исследования и возможностях выбранной ЦВМ применительно к конкретной задаче. Изучению подлежит вопрос о существовании и единственности решения задачи. Важнейший этап при подготовке решения задачи — построение математической модели, т. е. разработка математического описания физических процессов. Именно на этом этапе принимаются допущения при выборе и составлении исходных формул и уравнений, облегчающих построение математической модели и весь ход вычислительного процесса. При этом следует иметь в виду, что хотя решаемая задача в конечном счете и представляет собой единое целое, для облегчения практического решения целесообразно разбить ее на ряд подзадач, т. е. необходимо создать математические модели отдельных частей. Такой процесс облегчит выполнение других этапов решения задачи.

На основании математической модели выбирается численный метод решения задачи с учетом специфики уравнений и формул, их структуры и сложности, характеристики самого метода, его возможностей и т. д. Ответственным является этап выбора метода при решении задач оптимизации параметров различных устройств, когда требуется определять экстремум (максимум или минимум) функций, зависящих от нескольких переменных. В этом случае, как будет показано в гл. 6, соответствие метода поставленным условиям оказывается решающим фактором, определяющим успех решения задачи.

Численные методы — приближенные. Степень приближения (достигаемая точность) может быть любой. Это, однако, не означает, что всегда следует стремиться к достижению предельной

точности при реализации численных методов. Всякое повышение точности решения на ЦВМ связано с увеличением машинного времени или необходимых ресурсов машины. Задача каждого пользователя ЦВМ — рациональное сочетание достаточной точности решения при допустимом расходовании ресурсов машин.

Несмотря на приближенность численных методов, они оказываются предпочтительными даже в том случае, когда известен точный способ решения задачи, поскольку позволяют получить необходимые результаты, не прибегая к громоздким выкладкам. Это говорит о том, что необходимо разумно сочетать возможности человека и машины. В настоящее время практически для любой математической задачи разработаны численные методы решения. Выбор метода связан, с одной стороны, с требованиями, предъявляемыми постановкой задачи (точность решения, быстрота получения результатов, стоимость подготовки и программы решения задачи), и, с другой — с требованиями, предъявляемыми ЦВМ и программой к численному методу для его реализации на машине.

Отметим численные методы, наиболее часто встречающиеся при инженерных расчетах. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x)=0$ с целью отыскания корней встречается в практике расчетов электромагнитных полей аппаратов, оптимизации их параметров и других задачах. Часто бывает необходимо отыскать действительные корни уравнений. В этом случае наиболее пригодны методы последовательных приближений (итерационные), сводящиеся к последовательному уточнению начального приближения к корню. Для повышения быстроты и точности отыскания корней очень важно правильно задать начальное значение корня x_0. Грубая оценка x_0 производится обычно графически. Строится график функции $f(x)$ и определяется точка пересечения его с осью ординат. Для алгебраических уравнений существуют оценки верхней и нижней границ значений корня. Обычно идут от верхней границы к нижней, пока $f(x)$ не изменит знак. Такой поиск должна вести программа для ЦВМ.

При определении действительных корней трансцендентных уравнений изменение аргумента обычно ограничивают главными значениями.

После того как при достаточно крупном изменении аргумента определен интервал, в котором находится корень, уточняют значение корня одним из численных методов. *Метод деления пополам отрезка, содержащего корень*, заключается в следующем. Пусть корень уравнения $f(x)=0$ принадлежит отрезку $[a, b]$, при этом $f(a)\,f(b)<0$. Отрезок $[a, b]$ делится пополам. Если $f[0{,}5(a+b)]=0$, то $x=0{,}5(a+b)$ — корень уравнения, иначе корень принадлежит той половине, на концах которой $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный участок $[a_1, b_1]$ снова делится пополам и т. д. На k-м шаге $x\in[a_k, b_k]$, т. е. приближенное значение корня $0{,}5(a_k+b_k]$ получено с погрешностью $0{,}5(b_k-a_k)$. Если эта погрешность меньше заданной, то процесс закончен, если нет — его следует продолжить.

Метод касательных (метод Ньютона) заключается в замене дуги кривой $y = f(x)$ касательной. Вначале касательная проводится в точке кривой с абсциссой x_0 до пересечения с осью ординат. Абсцисса этой точки дает первое приближение корня x_1. Затем касательная проводится в точке кривой с абсциссой x_1 и т. д. Описанный процесс выражается формулой

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

При использовании метода итерации уравнение $f(x) = 0$ заменяется равносильным $x = \varphi(x)$. Если $|\varphi'(x)| < 1$ в интервале $[a, b]$, то последовательность чисел $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ при $k = 0,1, \ldots$ стремится к корню при $k \to \infty$.

Подробнее указанные методы описаны в [7]. При выборе метода надо иметь в виду, что метод Ньютона хотя и является более быстрым, но при пологой форме решаемой функции $f(x)$ он может дать точку пересечения касательной к $f(x)$ с осью абсцисс (аргумента) вне уточненного участка, т. е. потеряется сходимость процесса. В методе итерации условием окончания процесса уточнения значения корня является то, что модуль разности между двумя последовательными уточнениями становится меньше заданной погрешности. При этом также необходимо иметь в виду, что если погрешность задать слишком малой, а шаг изменения аргумента — достаточно большим, то разность между соседними значениями корней никогда не станет меньше погрешности, а время решения становится бесконечно большим. Следовательно, процесс решения задач на ЦВМ не должен быть полностью поручен машине. Каждый результат ЦВМ должен быть критически осмыслен. Иногда для большей уверенности в результатах расчета на ЦВМ одни и те же задачи решаются последовательно различными численными методами и результаты сопоставляются.

При решении систем линейных алгебраических уравнений используются точные (Крамера и Гаусса [7]) и приближенные методы. Метод Крамера заключается в том, что неизвестные определяются по формулам

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i — определитель, полученный из определителя Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов системы; Δ — определитель матрицы коэффициентов системы уравнений; n — число уравнений и неизвестных.

Сущность метода Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных. Пусть система уравнений имеет n неизвестных и n уравнений. На первом шаге первую неизвестную x_1 выражают через остальные $n-1$ из первого уравнения. Подставляя полученное выражение во все остальные уравнения, получают систему с $n-1$ неизвестными, и $n-1$ уравнениями. Аналогично исключают x_2 и т. д. Определив в конце этого процесса x_n, можно после-

довательно вычислить x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1. При использовании ЦВМ следует отдавать предпочтение методу Гаусса, так как он более быстродействующий и требует меньшего объема оперативной памяти. Если в системе уравнений имеется много нулевых коэффициентов, то следует отдать предпочтение приближенным методам. Это приводит к сокращению времени решения на 20—30 % по сравнению с точными методами, особенно при большом числе неизвестных, так как общее число арифметических действий ЦВМ для алгоритма Гаусса пропорционально n^3, тогда как при итерационных методах — только n^2. Кроме того, итерационные методы менее чувствительны к округлениям.

Перечисленные методы решения систем линейных алгебраических уравнений легко формализуются и часто применяются, поэтому разработчики ЦВМ снабжают свои машины готовыми программами, реализующими указанные методы. Эти программы включаются в библиотеку программ машины и становятся стандартными подпрограммами. Пользователь ЦВМ, прежде чем начать составлять программу решения своей задачи, должен познакомиться со всей библиотекой программ машины.

Процесс решения системы нелинейных уравнений (алгебраических или трансцендентных) связан со значительными затруднениями, так как его полностью формализовать нелегко, необходим опыт решения и определенная математическая интуиция. Но в любом случае он проходит два этапа: отыскание области существования корней и их уточнение методом последовательных приближений.

Часто встречающаяся в инженерных расчетах процедура вычисления значения определенного интеграла сводится к определению площади, ограниченной подынтегральной кривой на участке интегрирования. Здесь предпочтение следует отдавать методу парабол, в котором подынтегральная функция аппроксимируется отрезками парабол, проведенными через три соседние точки графика функции, а приближенное значение интеграла определяется суммой площадей четырехугольников с одной криволинейной стороной. При плавных подынтегральных функциях и большой скорости вычисления интеграла (если это вычисление участвует в многократных циклах) можно воспользоваться методом прямоугольников, когда подынтегральная функция аппроксимируется ступенчатой и интеграл находится как сумма площадей прямоугольников. В библиотеках стандартных подпрограмм обычно представлено несколько методов, но их выбор требует творческого подхода. Поэтому каждый раз следует внимательно знакомиться с математической характеристикой стандартной подпрограммы, ограничениями, накладываемыми особенностью данной ЦВМ и вычислительным методом на исходные данные. Все это приводится в паспортной части программ, включенных в библиотеку.

Несмотря на то что акцент делается на максимальное использование библиотеки машины, это вовсе не означает, что нельзя использовать другие «стандартные» методы. Если пользователь

располагает текстом нужной ему программы, то он может перенести ее на машинный носитель и включить в состав библиотеки.

Математическое описание и выбранный метод вычислений позволяют построить алгоритм решения задачи, т. е. указать, как и в какой последовательности должен осуществляться вычислительный процесс. Чтобы представить себе необходимую степень детализации алгоритма решения задачи на ЦВМ, нужно иметь в виду, что она, в принципе, представляет собой арифмометр, работающий по заранее составленной программе и оперирующий только цифрами. Следовательно, математическая формулировка задачи, включающая в себя символы математического анализа (интеграла, производной, дифференциальных операторов, тригонометрических и иных функций и т. д.) должна быть преобразована в численное решение задачи. Этот этап решения не является однозначным и зависит от выбранного численного метода решения.

В алгоритме отражаются не только арифметические действия, необходимые для реализации выбранного численного метода, но и логические связи, которые налагают на исходные данные численный метод, а также логика построения всей вычислительной процедуры. Логические связи должны быть заданы в форме, воспринимаемой ЦВМ, в форме проверки тех или иных соотношений, допускающих (или не допускающих) автоматическое выполнение действий, предписываемых машине программой. В ЦВМ не делят на нуль или на разность двух близких чисел, так как возникает число, превышающее диапазоны представления их в машине. Эту ситуацию ЦВМ обнаруживает схемными средствами. Другие недопустимые ситуации должны обнаруживаться программными средствами и предусматриваться лицом, составляющим или использующим готовые программы. К таким ситуациям относятся, например, обращение к программе вычисления $\arcsin x$, если $|x| > 1$ и т. п.

При построении алгоритма вычислений следует отдавать предпочтение циклическим процессам и многократному повторению отдельных участков алгоритма. При этом уменьшается не только трудоемкость составления программ и используемого объема памяти, но и появляется возможность выделения таких участков программы в самостоятельные подпрограммы. Такие подпрограммы приводятся в общей программе один раз, а использоваться могут многократно.

С учетом приведенных соображений разрабатывается расчетная схема программы вычислений. В схеме отображаются лишь основные связи между определенными частями вычислительной схемы без детализации, необходимой для практической постановки задачи. Схема дает общее представление о связях между отдельными вычислительными операциями или их группами. При составлении схемы программу разбивают на отдельные части (блоки), выполняющие определенные функции. Вычислительные блоки осуществляют вычисления по формулам. В местах разветвления вычислительного процесса используются логические блоки. Отдельные вы-

числительные блоки обозначаются в виде прямоугольников, в которые вписываются в условном виде выполняемые операции (иногда блоки вводных данных обозначаются прямоугольниками со скошенными сторонами). Логические блоки чаще всего обозначаются в виде ромбов, от вершин которых стрелками указываются направления логических операций. Попутно с решением задачи в программе предусматривается оценка погрешностей вычислений (например, при численном нахождении интегралов оценка погрешностей позволяет автоматически выбирать шаг интегрирования).

Несмотря на достигнутые в последние годы успехи в автоматизации программирования, этот процесс требует высокой квалификации программиста. Допущенные при программировании ошибки выявляются и устраняются при отладке программы, которая заключается в следующем. Программа, нанесенная на перфокарты или перфоленты, распечатывается с помощью ЦВМ, при этом обнаруживаются и устраняются ошибки перфорирования. Ошибки, которые не удалось заметить, обнаруживаются в процессе вычислений на машине. Для этого чаще всего используется расчет контрольного варианта. Большое значение при отладке имеет интуиция пользователя и знание особенностей исследуемого процесса.

Как указывалось ранее, широко внедряемые в инженерную практику аналоговые машины обладают рядом достоинств, в особенности при расчете и исследовании различных неустановившихся явлений. Стремление совместить в одном устройстве преимущества обоих классов машин привело к созданию аналого-цифровых (гибридных) вычислительных систем (АЦВМ). Машины этого класса представляют собой единый комплекс АВМ общего назначения и универсальную ЦВМ с аналоговой и цифровой формами представления машинных переменных. Вычислительные системы этого класса позволяют, в частности, без ухудшения таких преимуществ АВМ, как быстродействие, простота программирования и наглядность результатов, значительно повысить точность получаемых результатов и расширить логические возможности машин.

§ 1.3. Области применения ЭВМ и их технические характеристики

Области применения ЭВМ. Каждый класс вычислительных машин имеет свои области применения. Так, аналоговые вычислительные машины в основном целесообразно использовать для расчета и исследования электромагнитных, тепловых и механических переходных процессов, описываемых линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями с постоянными и переменными коэффициентами. К таким процессам можно отнести динамику включения и отключения электромагнитов, явления, связанные с ударами и колебаниями в механизме аппарата (вибрации контактных систем, якорей электромагнитов и т. п.), неустановившиеся процессы режимов короткого замыкания в контактах и дугогасительных устройствах аппаратов защиты и управления, теп-

ловые процессы при кратковременных режимах работы аппаратов и другие явления, протекающие в функции времени.

Аналоговые вычислительные машины могут быть использованы также для решения систем алгебраических уравнений, определения экстремумов нелинейных функций нескольких аргументов [2], для решения некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Однако применение этого класса машин ограничено относительно невысокой точностью (по сравнению с ЦВМ), неприспособленностью большинства АВМ для проведения итерационных вычислений. Основной областью применения АВМ является поэтому моделирование, расчет и исследование неустановившихся динамических процессов в элементах электрических аппаратов. Простота программирования, наглядность решения и высокая надежность работы — важнейшие преимущества АВМ при расчете и исследовании динамики работы аппаратов.

Задачи расчета указанных процессов могут быть решены и с помощью ЦВМ. Однако необходимость интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений численными методами, аппроксимация интегралов приближенными формулами (трапеций, прямоугольников), а также представление нелинейных зависимостей в виде аналитических выражений либо введение этих зависимостей в ЦВМ в табличной форме делают применение ЦВМ в данном случае менее оправданным. При расчете и проектировании электрических аппаратов возможности ЦВМ в полной мере могут быть использованы в случаях, связанных с трудностями вычислительного характера, когда исследование конкретного вопроса ручными методами требует больших затрат времени либо вообще невозможно.

К таким вопросам относятся расчеты магнитных систем электромагнитных механизмов, тепловых и электромагнитных полей в аппаратах, дугогасительных узлов, механических усилий, возникающих в элементах аппаратов защиты при отключении аварийных токов. Большие логические возможности ЦВМ оказываются решающим фактором при проведении оптимизационных расчетов электрических аппаратов. И наконец, без использованияи ЦВМ невозможна автоматизация проектирования аппаратов, предусматривающая проведение всех этапов проектирования, начиная с разработки технического задания (ТЗ) на создание аппарата или серии аппаратов, выбора конструктивной схемы, оптимизации параметров, расчета всех рабочих режимов, изготовления рабочих чертежей и кончая изготовлением опытной партии аппаратов на станках с числовым программным управлением. В настоящее время интенсивно ведутся работы по созданию систем автоматизированного проектирования (САПР), характерная особенность которых — возможность корректировки результатов на отдельных этапах за счет связи конструктора с машиной с помощью дисплеев. Таким образом, возможности ЦВМ чрезвычайно велики и для их применения требуется разработка строгого математического описания процессов, происходящих в электрических аппаратах.

Зависимости, связывающие динамические параметры электрических аппаратов,— их основные характеристики, определяющие работоспособность, срок службы и другие технико-экономические показатели. Поэтому расчет динамических режимов работы — один из главных этапов при оценке соответствия проектируемого аппарата заданным техническим условиям. Совмещение в одном вычислительном устройстве определения параметров аппарата, являющихся исходными данными для расчета динамических процессов (магнитных проводимостей, индуктивности, потокосцепления, сопротивления и температуры нагрева элементов аппарата и т. п.), с моделированием динамических зависимостей может быть достигнуто при применении аналого-цифровых комплексов (АВК). При этом на основе строгих математических методов в цифровой части АВК для каждого момента времени определяются исходные величины, вводимые в аналоговую систему АВК для моделирования динамических характеристик. Устройство связи, обеспечивающее высокоскоростной обмен данными между цифровой и аналоговой системами АВК в процессе вычислений, позволяет учесть сложные взаимосвязи между статическими и динамическими параметрами, обусловливающими работу электрического аппарата.

Области применения ЭВМ различных классов не следует считать окончательно установившимися. По мере развития теории электрических аппаратов и совершенствования средств вычислительной техники будут возникать задачи, решение которых с помощью конкретных видов ЭВМ окажется целесообразным.

Технические характеристики ЭВМ различных классов. Промышленностью выпускаются различные типы ЭВМ, отличающиеся друг от друга техническими характеристиками. Ниже приводятся данные ЭВМ, нашедших применение в инженерной практике.

АВМ МН-7М представляет собой наиболее распространенную малую электронную модель, предназначенную для интегрирования систем обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами до шестого порядка. Для решения более сложных задач возможна параллельная работа нескольких машин.

В комплект МН-7М входят решающий блок, электронно-лучевой индикатор И-6 и блок питания ЭСВ-1. Решающий блок снабжен 16 усилителями постоянного тока (УПТ), выполняющими операции интегрирования и суммирования. Коэффициент усиления УПТ составляет около $40 \cdot 10^3$, полоса пропускания частот — 150 Гц, дрейф нуля — 5 мВ за 10 мин.

В решающий блок входят четыре диодных элемента, с помощью которых при совместном включении с УПТ можно воспроизводить типовые нелинейные зависимости. Машина имеет 24 постоянных коэффициента и четыре ячейки, в которые можно включать комбинированные нелинейные блоки. Каждый блок состоит из двух функциональных схем: одна воспроизводит нелинейную функцию, другая перемножает (делит) величины. Вместо комби-

нированного нелинейного блока в ячейку может быть включен блок, реализующий две операции перемножения (деления). Для работы одной такой ячейки требуется два усилителя.

В АВМ может осуществляться либо одноразовое решение, либо автоматическое повторение решения. Кроме того, логический блок, входящий в состав машины, в процессе решения может сравнивать две переменные и вырабатывать сигнал условного перехода либо для изменения схемы решаемой задачи, либо для фиксации решения.

Предельные погрешности при выполнении решающими блоками основных операций составляют (%): умножения — 1, деления — 7, интегрирования за 100 с с постоянной времени 1 с — 1, задания постоянных коэффициентов — 0,5. Длительность процесса интегрирования не должна превышать 200 с. Составляют схемы с помощью шнуровой коммутации на наборном поле машины.

АВМ МН-18 представляет собой машину средней мощности, выполненную на полупроводниковых элементах и предназначенную для решения задач, описываемых линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями до десятого порядка.

Машина выполняет следующие операции: 10 операций интегросуммирования с тремя входами с одновременным умножением на коэффициент на двух входах; 15 операций умножения на постоянный коэффициент; 50 операций инвертирования; 10 операций суммирования с 10 входами; 8 операций перемножения, деления или извлечения квадратного корня; воспроизведение 10 нелинейных функций одной переменной; 5 логических операций условного перехода.

Дрейф нуля усилителя составляет 2 мВ за 8 ч. Максимальное время интегрирования 1000 с. Максимальная погрешность операций суммирования и инвертирования не превышает 0,1 %, интегрирования — 0,3 % за 100 с, основных нелинейных операций — 0,5 %.

Мащина имеет гибкую систему управления, позволяющую, в частности, организовать одновременный и раздельный запуск интеграторов по группам, однократное решение задачи, решение с повторением и др. Кроме того, предусмотрены автоматическое управление от ЦВМ и возможность параллельной работы нескольких (до четырех) машин от одной ведущей.

Аналоговый вычислительный комплекс АВК-2 предназначен для моделирования динамических систем, решения обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и других задач, которые могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Комплекс выполнен на полупроводниковых УПТ и имеет разнообразный состав линейных и нелинейных операционных блоков.

Промышленностью выпускаются пять модификаций комплекса:

1) *АВК-2(1)* — для интегрирования дифференциальных уравнений до 20-го порядка со сложными нелинейными зависимостями, с постоянным и переменными коэффициентами;

2) *АВК-2(2)* — для интегрирования дифференциальных уравнений до 20-го порядка с большим количеством постоянных коэффициентов;

3) *АВК-2(3)* — для интегрирования дифференциальных уравнений до 16-го порядка с большим количеством нелинейных операций, решения задач линейного программирования, уравнений в частных производных и других задач итерационными методами;

4) *АВК-2(4)* — для интегрирования дифференциальных уравнений до 10-го порядка с большим количеством переменных коэффициентов;

5) *АВК-2(5)* — для интегрирования дифференциальных уравнений до 80-го порядка с постоянными и переменными коэффициентами, с большим количеством нелинейных операций и решения различных задач итерационными методами.

Комплекс осуществляет следующие операции: суммирование с одновременным умножением на постоянный коэффициент; интегрирование суммы; умножение на постоянный коэффициент; инвертирование; перемножение и деление двух переменных, возведение в квадрат и извлечение корня; воспроизведение нелинейных функций одной переменной; воспроизведение типовых нелинейных зависимостей, логические операции. Длительность процесса интегрирования 10 000 с. Максимальные погрешности (%): интегрирования — 0,1, инвертирования — 0,01, перемножения двух переменных и возведения в квадрат — 0,1; деления — 1,5; извлечения квадратного корня — 0,02; задания постоянного коэффициента с помощью потенциометра для автоматической установки — 0,02.

Некоторые модели АВК-2 имеют в своем составе устройство следящих систем (УСС-2), предназначенное для воспроизведения нелинейных зависимостей с большим количеством экстремумов (до 8) и переменных коэффициентов (до 8) с плавной аппроксимацией, а также для выполнения операций перемножения (до 12). УСС-2 могут быть использованы для воспроизведения нелинейных зависимостей двух переменных.

Съемные наборные поля и сменные функциональные блоки обеспечивают быстрый переход от одной задачи к другой.

Схема управления АВК-2 отличается гибкостью и позволяет производить одноразовое решение и решение с периодизацией, одновременный и раздельный запуск интеграторов по группам. Предусмотрена возможность управления комплексом от ЦВМ.

Единая система ЕС ЭВМ — наиболее распространенная универсальная ЦВМ, представляющая собой семейство программно-совместимых моделей ЭВМ и предназначенная для решения разнообразных научно-технических, экономических и информационно-логических задач.

Создание ЕС ЭВМ является результатом сотрудничества социалистических стран — членов СЭВ. В первую очередь было разработано шесть моделей машин единой серии: ЕС-1010, ЕС-1020, ЕС-1021, ЕС-1030, ЕС-1040, ЕС-1050. В настоящее время продолжается разработка модели ЕС-1080, а также повышаются техни-

ко-экономические характеристики ЕС ЭВМ на базе новейших достижений микроэлектроники и технологии.

Отличительные особенности ЕС ЭВМ: широкий диапазон производительности — от 10 000 до $1{,}5 \cdot 10^6$ операций/с; программная совместимость ЭВМ друг с другом снизу вверх (от малых моделей к большим); аппаратная совместимость благодаря наличию стандартного устройства сопряжения отдельных агрегатов (интерфейса), что позволяет составлять различные конфигурации моделей в зависимости от класса задач; единая элементная и конструктивная база, повышающая надежность и быстродействие ЭВМ.

Одной из моделей ЕС ЭВМ является *ЭВМ ЕС-1022*, обеспечивающая многопрограммную работу — до 3 (при работе с ДОС/ЕС) и до 15 (при работе с ОС/ЕС) рабочих программ одновременно. Среднее быстродействие составляет около 80 000 операций/с. Оперативная память по емкости имеет три модификации: 128, 256 и 512 кбайт. Процессор оборудован средствами защиты памяти.

Математическое обеспечение ЕС-1022 включает в себя комплекс программ технического обслуживания (ТО) и дисковую операционную систему ДОС/ЕС. При достаточном объеме (не менее 256 кбайт) оперативной памяти можно применять ОС/ЕС.

При составлении программ могут использоваться машинно-ориентированный язык АССЕМБЛЕР, проблемно-ориентированные языки: ФОРТРАН — для научно-технических задач, ПЛ/1 — для решения научно-технических и экономических задач.

Системные обслуживающие программы обеспечивают разнообразные возможности при работе с библиотеками; позволяют объединять программы, составленные на разных языках программирования, в одну программу; представляют эффективные средства отладки разработанных программ.

АЦЭМС-1 — первая серийно выпускаемая в СССР аналого-цифровая вычислительная система, предназначенная для моделирования сложных динамических процессов с повышенной точностью. В конструктивном исполнении — это совокупность отдельных секций, машин и устройств, связанных между собой линиями связи. Система содержит ЦВМ типа М-220, две АВМ типа МН-18 и набор оборудования для преобразования информации, измерения и управления работой. Для расширения возможностей системы она может быть дополнена двумя АВМ МН-18 и другими устройствами. Вычислительные машины, входящие в АЦЭМС-1, могут использоваться как в комплексе, так и самостоятельно.

Основные технические характеристики: 100 операционных усилителей; максимальное время интегрирования — 1000 с; погрешность при выполнении основных линейных операций — 0,1 %, а нелинейных — 0,3—0,5 %; 15 каналов преобразования в каждом направлении; максимальная частота обращения к преобразователям — 1 кГц; время преобразования переменных из аналоговой формы в цифровую — 20 мкс; основная погрешность преобразования — 0,1—0,05 %.

Гибридная вычислительная система ГВС-100 относится к классу машин средней мощности и предназначена для решения широкого круга инженерных задач, в том числе и моделирования сложных экономических систем в реальном масштабе времени. Система представляет собой единое целое и в то же время допускает самостоятельное использование основных составных частей, включает в себя АВМ и ЦВМ, соединенные устройствами связи и имеющие соответствующие периферийные устройства.

Математическое обеспечение ГВС-100 состоит из систем программирования и отладки и организующей системы. Система программирования предусматривает: использование языка ФОРТРАН, специализированных языков, объединенных в систему автоматизации аналогового программирования и позволяющих вводить в ЦВМ уравнения, которые должны решаться на АВМ; получение по исходным уравнениям схемы аналогового набора; определение значений масштабов и коэффициентов передач отдельных решающих элементов, начальных условий и возмущений; печатание схем набора в принятой международной символике и всех относящихся к ним данным. Предусмотрена возможность объединения в одну программу отдельных ее частей, написанных на разных языках.

Система отладки позволяет обнаруживать ошибки в программе и вносить в нее необходимые изменения и добавления. Организующая система осуществляет ввод программ и массивов информации, предназначенных для обработки; организует трансляцию программ в коды машины; совмещает решение нескольких программ и проводит согласование во времени для аналоговой и цифровой частей; обеспечивает обмен информацией между оператором и машиной. Основой цифровой части системы ГВС-100 является ЦВМ среднего быстродействия с развитой системой команд и системой прерывания, обеспечивающей оперативное управление аналоговой частью, связь с реальной аппаратурой и периферийными устройствами.

Аналоговая часть системы ГВС-100 состоит из нескольких (до семи) аналоговых блоков, подсоединенных к общему пульту управления. Блок представляет собой АВМ, предназначенную для интегрирования обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений до 20-го порядка как в режиме одноразового решения, так и с повторением решения. В блок входят 70 линейных и 26 нелинейных решающих элементов, 66 элементов логики, 100 электронно-управляемых от ЦВМ коэффициентов с ЗУ на 100 коэффициентов; система управления, контроля и измерения; сменные наборные поля; источники опорных напряжений и другие элементы.

Стойки могут работать автономно или может быть организована их параллельная работа. При этом стойка, с панели которой осуществляется управление основными операциями, является ведущей, а остальные — ведомыми. Устройство связи объединяет аналоговую и цифровую вычислительные части в единую аналого-цифровую вычислительную систему, обеспечивает высокоскорост-

ной обмен данными в процессе вычисления и передачу сигналов управления от АВМ к ЦВМ и обратно.

§ 1.4. Особенности расчета электрических аппаратов, связанные с применением вычислительных машин

Подготовка расчета электрического аппарата на ЭВМ требует решения ряда вопросов. При применении АВМ необходимо выбрать исходные уравнения и структурные схемы модели, найти масштабы переменных величин и коэффициенты схемы, способы воспроизведения нелинейных зависимостей и т. д. С помощью АВМ, как правило, проводятся поверочные расчеты аппаратов, т. е. при определении характеристик аппарата предполагаются известными его размеры, материал деталей и узлов, их конфигурация, некоторые исходные зависимости. При расчете динамических характеристик электрического аппарата заданными являются параметры статического режима устройства. Во всех случаях точность расчета на АВМ зависит от достоверности исходных данных, исходных уравнений и от погрешностей, связанных с особенностями работы АВМ. Исходные данные могут быть получены либо расчетным, либо экспериментальным путем.

Экспериментальные исходные величины и зависимости позволяют с достаточной степенью точности исследовать поведение механизма в различных условиях. Исходные зависимости, найденные расчетным путем, целесообразно использовать при проектировании и исследовании нового аппарата либо когда опытные зависимости трудно получить вследствие сложности постановки эксперимента или по другим причинам.

При расчете динамических процессов в аппаратах предпочтительнее использовать исходные уравнения в такой форме, при которой бы отсутствовала необходимость дифференцирования. Например, уравнение электрической цепи обмотки электромагнита, записанное в виде

$$u = iR + L\,di/dt,$$

можно решить двумя путями (здесь R и L — сопротивление и индуктивность обмотки).

Из приведенного уравнения

$$i = \frac{1}{R}u - \frac{L}{R}\frac{di}{dt}.$$

Умножив первый член правой части на коэффициент $1/R$, а второй — на L/R и сложив, найдем ток i. Ток i необходимо дифференцировать для получения di/dt, которая должна суммироваться с величиной u/R.

Другой путь решения указанного уравнения связан с представлением его в форме

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{L}u-\frac{R}{L}i. \qquad (1.3)$$

Здесь напряжение u, умноженное на $1/L$, складывается с током i, умноженным на R/L. Полученное значение производной di/dt интегрируется, после чего получаем ток i, который после умножения на коэффициент R/L складывается с u/L. В этом случае используется интегратор, что позволяет избежать ошибок, связанных с необходимостью дифференцирования.

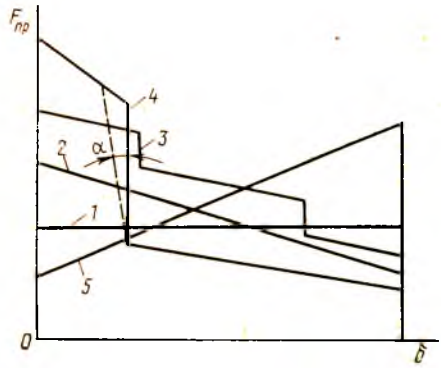


Рис. 1.4. Механические характеристики аппаратов:
1 — с постоянным усилием; *2* — пружинная; *3* — релейная; *4* — контакторная; *5* — с падающим усилием

Дрейф нуля решающего усилителя может привести к существенным ошибкам в расчете. При расчете динамики включения аппарата необходимо решать нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее процесс перемещения подвижной системы. Решение этого уравнения связано с необходимостью двойного интегрирования напряжения дрейфа, приведенного к входу первого интегратора, что может вызвать накопление значительной ошибки. В силу сказанного при подготовке к расчету для решения этого уравнения следует подбирать усилители со стабильным нулевым уровнем.

Так как процессы в электрических аппаратах часто описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, то возникает необходимость воспроизведения различных нелинейных зависимостей. Эти операции при расчете на АВМ выполняются с помощью диодных функциональных преобразователей (нелинейных блоков).

Нелинейные блоки строятся, как правило, на принципе кусочно-линейной аппроксимации нелинейной зависимости. При этом аргумент и функция разбиваются на ряд участков, в пределах каждого из которых зависимость принимается линейной. Используемые при расчете аппаратов нелинейные зависимости (кривые намагничивания ферромагнитных материалов, зависимости от рабочего зазора индуктивности, магнитной проводимости и др.) гладки, не имеют разрывов и часто имеют линейные участки. Указанные кривые целесообразно разбивать, концентрируя бо́льшую часть интервалов на нелинейных участках.

Среди нелинейных зависимостей, используемых при расчете аппаратов, важную роль играют механические характеристики (зависимости усилий, противодействующих перемещению подвиж-

ного органа, или моментов от его хода или угла поворота). Обычно указанные характеристики имеют вид ступенчатых ломаных со скачкообразно возрастающими усилиями, соответствующими замыканию и размыканию главных и блокировочных контактов.

Типичные для электрических аппаратов механические характеристики показаны на рис. 1.4. С помощью нелинейных блоков механические характеристики в том виде, как показано на рисунке, теоретически воспроизвести невозможно, так как выходное напряжение каждого из диодных элементов, являющихся основой нелинейного блока, линейно зависит от входного напряжения, а УПТ, к входу которого подключаются выходы диодных элементов, имеет конечный коэффициент усиления. Поэтому механическая характеристика может быть воспроизведена с некоторым наклоном участков (пунктир). Однако для большинства реальных механических характеристик угол наклона линии изменения противодействующего усилия к вертикали не превосходит 3—4°. Указанные выше особенности, связанные с применением АВМ, необходимо учитывать при подготовке расчета статических и динамических характеристик электрических аппаратов.

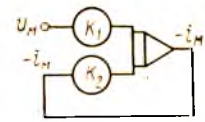


Рис. 1.5. Структурная схема модели для решения уравнения электрической цепи

Рассмотрим преобразование реального уравнения в машинный вид на примере уравнения электрической цепи с постоянными R и L [см. (1.3)]. Учитывая, что $i = i_м m_i$, $u = u_м m_u$, $t = t_м m_t$, где $i_м$, $u_м$, $t_м$ — машинные значения тока, напряжения и времени; m_i, m_u, m_t — масштабы, получаем

$$\frac{di_м m_i}{dt_м m_t} = \frac{m_u}{L} u_м - \frac{m_i R}{L} i_м.$$

Далее следует

$$\frac{di_м}{dt_м} = \frac{m_u m_t}{L m_i} u_м - \frac{m_t R}{L} i_м; \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_м = K_1 u_м - K_2 i_м,$$

где $K_1 = m_u m_t/(m_i L)$, $K_2 = m_t R/L$ — коэффициенты модели.

По машинным уравнениям составляют структурную схему модели (рис. 1.5).

Основными вопросами при подготовке решения задачи на ЦВМ являются выбор схемы, расчетных формул и метода вычислений. При применении ЦВМ к расчету конкретных типов электрических аппаратов эти вопросы будут рассмотрены. Следует отметить, что расчетные формулы и численный метод обусловливают точность получаемых результатов. Сравнение вычисленных по формулам данных с опытными показывает, что формулы, используемые при расчетах электрических аппаратов, дают расхождение с опытом,

достигающее 10—15 %. При выполнении расчетов на ЦВМ расхождение данных вычислений и опытных может иметь место вследствие ошибок округления и неполной сходимости процессов последовательных приближений. Ошибка за счет двух последних источников должна быть хотя бы на порядок ниже, чем ошибка за счет несовершенства применяемых формул, т. е. не превосходить 1 % от искомой величины. Увеличение указанной ошибки может ощутимо снизить достоверность получаемых в итоге расчета результатов. Снижение же этой ошибки потребует значительного увеличения машинного времени, необходимого для расчета. При этом стоимость расчетов, естественно, возрастает. Эффект же от такого уточнения может оказаться практически неощутимым.

Указанная допустимая ошибка вычислений является ориентировочной, ее порядок может изменяться в зависимости от особенностей решаемой задачи. Однако в любом случае повышение точности расчета имеет смысл лишь в том случае, если будет обоснована его технико-экономическая эффективность.

Для учета насыщения магнитопровода при расчете на ЦВМ в память машины вместе с другими исходными данными должна быть введена кривая намагничивания. При этом ее можно представить или в виде таблицы, или с помощью аппроксимирующих формул. Представление кривой намагничивания в виде таблицы с достаточной степенью точности требует введения в память машины большого количества чисел. Более рационально вводить кривую намагничивания в виде аппроксимирующих формул.

Наиболее удобными при расчетах на ЦВМ являются аппроксимации кривых намагничивания с помощью полиномов вида

$$H = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3 + a_4 B^4,$$

который относительно прост, удобен при интегрировании и дифференцировании, обеспечивает относительно высокую точность.

В тех случаях, когда рассматриваются обе ветви кривой намагничивания (положительная и отрицательная), значение индукции следует брать по модулю, а знак напряженности — определять в зависимости от знака соответствующего участка кривой.

При использовании указанной выше формулы для расчетов магнитных систем из обычных электротехнических сталей в широком диапазоне индукций средняя погрешность не превышает 3 %, если кривую намагничивания разбить на четыре участка: от 0 до 0,4 Тл, от 0,4 до 1,4, от 1,4 до 1,8 и свыше 1,8 Тл. При этом в большинстве случаев на первом участке напряженность можно считать равной нулю. Выбор необходимого участка кривой намагничивания машиной обеспечивается автоматически и не вызывает затруднений. Коэффициенты аппроксимации a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 могут быть определены методом наименьших квадратов.

ГЛАВА 2

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА АВМ

§ 2.1. Плавкие предохранители с закрытым патроном

Предохранители без наполнителя с разборным патроном применяют для защиты электроустановок. Конструкция предохранителя показана на рис. 2.1.

Токоограничивающий эффект достигается за счет высокого давления газов в закрытом патроне, возникающего при коротком замыкании (к. з.), и специальной формы плавкой вставки *2*. При быстром нарастании тока к. з. вставка перегорает на наиболее узком месте, так как теплоотвод от мест с наименьшим сечением к расширенным участкам и контактным зажимам не успевает выравнять температуру. В качестве материала плавкой вставки часто применяют цинк, невысокая температура плавления которого (420 °С) не допускает чрезмерного перегрева корпуса предохранителя при длительных перегрузках.

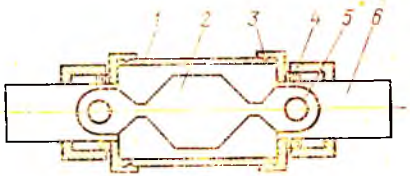


Рис. 2.1. Эскиз плавкого предохранителя с закрытым патроном:

1 — фибровый патрон; *2* — плавкая вставка; *3* — армировочная втулка; *4* — накидная гайка; *5* — контактный зажим; *6* — контактный нож

Количество теплоты, необходимой для расплавления плавкой вставки,

$$Q = Mc(\tau_{пл} - \tau_0), \qquad (2.1)$$

где M — масса плавкой вставки; c — теплоемкость цинка; $\tau_{пл}$ — температура плавления цинка; τ_0 — начальная температура.

Уравнение (2.1) составлено в предположении пренебрежения передачей теплоты путем теплопроводности, конвекции и излучения. Опыт эксплуатации предохранителей показывает, что перегорание вставки начинается тогда, когда металл вставки расплавится хотя бы на очень малой длине. Дальнейшее плавление поддерживается за счет энергии возникшей электрической дуги. Поэтому в задачу расчета входит определение тока начала плавления вставки $i_{пл}$, времени, прошедшего с начала к. з. до достижения током значения $i_{пл}$, и давления в патроне предохранителя, определяемого на основании опытных данных:

$$P = L_{к.з} i_{пл}^2/(2V),$$

где $L_{к.з}$ — индуктивность короткозамкнутой цепи; V — объем патрона.

Теплота, нагревающая вставку,

$$Q=Mc(\tau_{пл}-\tau_0)=lsγc(\tau_{пл}-\tau_0)=\frac{ρl}{s}\left[1+\frac{α_ρ(\tau_{пл}-\tau_0)}{2}\right]\int_0^{t_{пл}} i^2dt. \quad (2.2)$$

Здесь l и s — длина и сечение вставки; $γ$ — плотность цинка; $ρ$ — удельное электрическое сопротивление; $α_ρ$ — температурный коэффициент сопротивления.

Из (2.2) вытекает, что

$$\int_0^{t_{пл}} i^2dt=\frac{γc(\tau_{пл}-\tau_0)s^2}{ρ[1+0{,}5α_ρ(\tau_{пл}-\tau_0)]}.$$

Выражение, стоящее перед s^2, представляет собой постоянную, определяемую материалом вставки. Если ток выражен в амперах, время — в секундах, сечение — в квадратных метрах, то для цинка с учетом возможного разброса характеристик материала можно записать

$$\int_0^{t_{пл}} i^2dt=(12-13)\cdot 10^{15}s^2.$$

Далее принимается $\int_0^{t_{пл}} i^2dt=12{,}5\cdot 10^{15}s^2$.

Введем новую переменную величину

$$y=\int_0^t i^2dt. \quad (2.3)$$

Уравнение электрической цепи, обладающей индуктивностью $L_{к.з}$ и сопротивлением $R_{к.з}$, можно записать в виде

$$u(t)=iR_{к.з}+L_{к.з}di/dt$$

или

$$i=\int_0^t (u(t)/L_{к.з}-R_{к.з}i/L_{к.з})\,dt, \quad (2.4)$$

где $u(t)$ — напряжение источника, зависящее в общем случае от времени.

Расчет тока и времени плавления сводится к решению (2.3) и (2.4). Очевидно, что при решении (2.3) его правая часть непрерывно возрастает (с ростом тока). В тот момент, когда она станет равной $12{,}5\cdot 10^{15}s^2$, определяются значения $i_{пл}$, $t_{пл}$ и P.

Уравнения (2.3) и (2.4) в машинной форме будут иметь вид

$$y_м = K_1 \int_0^{t_м} i_м^2 dt_м; \qquad (2.5)$$

$$i_м = \int_0^{t_м} (K_2 u_м - K_3 i_м)\, dt_м, \qquad (2.6)$$

где $K_1 = m_i^2 m_t / m_y$; $K_2 = m_u m_t / (L_{к.з} m_i)$; $K_3 = R_{к.з} m_t / L_{к.з}$.

На рис. 2.2 показана схема модели, составленная по уравнениям (2.5) и (2.6). Здесь на один вход интегратора *1* подается через коэффициент K_2 величина $u_м$, на второй вход — ток $i_м$ (со знаком минус), умноженный на постоянный коэффициент K_3. На выходе интегратора в соответствии с (2.6) получается значение тока $i_м$, последний возводится в квадрат $i_м^2$ множительным блоком (умножителем) и поступает через коэффициент K_1 на вход интегратора *2*, на входе которого в соответствии с (2.5) получим $y_м$. Переменная величина $y_м$ подается на один из входов блока программного режима (БПР), предназначенного для управления моделью по заданной программе, на второй вход которого подается постоянная величина $y_{м.з} = 12{,}5 \times \times 10^{15} s^2$. В момент равенства величин $y_м$ и $y_{м.з}$ БПР останавливает модель, фиксируя ток $i_{пл.м}$ (выход интегратора *1*) и время $t_{пл.м}$ (по электронному секундомеру). Зная значение $i_{пл}$, нетрудно определить значение давления в патроне предохранителя.

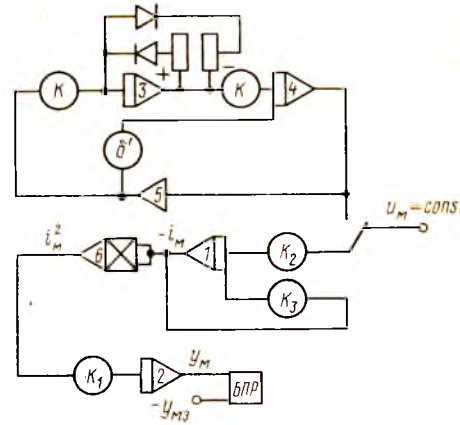


Рис. 2.2. Схема модели для расчета характеристик предохранителя

Если расчет ведется для цепи постоянного напряжения, то величина $u_м = \text{const}$ задается от источника эталонного напряжения АВМ. В случае моделирования цепи переменного тока напряжение

$$u_м = U_{тм} \sin(\omega t_м + \alpha), \qquad (2.7)$$

где $U_{тм}$ — машинное значение амплитуды напряжения; α — фаза напряжения в момент возникновения к.з., формируется с помощью генератора гармонических колебаний (ГГК — интеграторы *3*, *4* и инвертор *5*). При соответствующем подборе сопротивлений, конденсаторов и коэффициентов на выходе интегратора *4* можно получить напряжение, изменяющееся в соответствии с уравнением (2.7).

Для пояснения работы генератора функцию $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ дифференцируем дважды по времени:

$$\frac{du}{dt} = \omega U_m \cos(\omega t + \alpha); \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 U_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Если на вход интегратора *3* поступит вторая производная d^2u/dt^2, то на выходе этого интегратора должно появиться напряжение

$$-(du/dt)_м = -\omega U_{mм} \cos(\omega t_м + \alpha).$$

После интегрирования на выходе интегратора *4* получим напряжение $u_м = U_{mм} \sin(\omega t_м + \alpha)$. Это выражение после инвертирования и умножения на постоянный коэффициент ω^2 преобразуется и имеет следующий вид:

$$(d^2u/dt^2)_м = \omega^2 U_{mм} \sin(\omega t_м + \alpha).$$

Перед пуском на интеграторах *3* и *4* необходимо установить напряжения, соответствующие начальным значениям $u_м$ и $-(du/dt)_м$ в момент возникновения к. з. Значениями этих напряжений регулируются фаза α и амплитуда $U_{mм}$ при расчете предохранителей.

Описанная схема ГГК требует тщательной установки «нулей» усилителей и обеспечивает незатухающие колебания при непродолжительном процессе работы (практически в течение 10—30 с). При большей продолжительности моделирования вследствие влияния паразитных емкостей и дрейфа нулей усилителей колебания будут затухающими. Для компенсации затухания рекомендуется в схеме, приведенной на рис. 2.2, коэффициент δ' устанавливать таким, чтобы при отсутствии диодных ограничителей амплитуда выходного напряжения $U_{mм}$ медленно возрастала. Диодные ограничители с напряжением отпирания $\pm U_{mм}$ обеспечивают поддержание незатухающих колебаний с требуемой амплитудой.

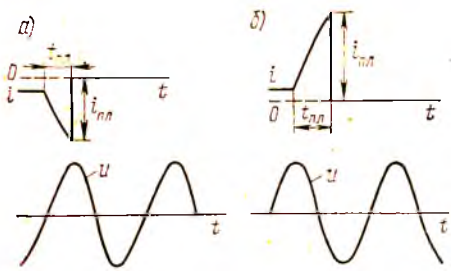


Рис. 2.3. Расчетные зависимости предохранителя:
$а$ — $\alpha = 0$; $б$ — $\alpha = \pi/2$

На рис. 2.3 показаны кривые, снятые при расчете предохранителя для двух значений угла α, из которых видно, что в обоих случаях обеспечивается токоограничивающий эффект.

Очевидно, что расчет вариантов с различными значениями $L_{к.з}$ и $R_{к.з}$ требует изменения в схеме коэффициентов K_2 и K_3. При изменении сечения вставки необходим пересчет значения $y_{м.з} = 12{,}5 \cdot 10^{15}\ s^2$. Фаза и значение напряжения, как отмечалось, изменяются начальными условиями. Так, при $\alpha = 0$ на интеграто-

ре 3 (см. рис. 2.2) необходимо установить напряжение, равное — $U_{тм}$. При $\alpha = \pi/4$ на интеграторе 3 необходимо установить напряжение

$$-\left(\frac{du}{dt}\right)_м = -U_{тм}\cos\frac{\pi}{4} = -U_{тм}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а на интеграторе 4 — напряжение

$$u_м = U_{тм}\sin\frac{\pi}{4} = U_{тм}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, изменение исходных данных сводится к простейшим операциям в схеме модели.

§ 2.2. Реле времени с электромагнитным замедлением

Одним из способов увеличения времени срабатывания и отпускания электромагнитов постоянного тока является электромагнитный способ замедления. Замедление достигается за счет уменьшения скорости нарастания или затухания магнитного потока, которое обусловлено действием короткозамкнутой обмотки (гильзы), расположенной на магнитопроводе. На рис. 2.4 показан электромагнит реле времени. На ярме 1 и на сердечнике 2 электромагнита расположены гильзы 3 из материала с высокой электропроводностью (медь, алюминий). При отключении обмотки 4 ток в ней практически мгновенно спадает до нуля (если пренебречь временем горения дуги). Изменение магнитного потока в зазоре $\delta_к$ (значение его равно толщине немагнитной прокладки 5 между полюсом сердечника 2 и якорем 7) определяется процессом затухания тока в короткозамкнутой обмотке. Ток в короткозамкнутой обмотке возникает под действием ЭДС, вызванной уменьшающимся потоком в магнитопроводе. Направление тока таково, что поток, создаваемый гильзой, препятствует изменению (уменьшению) основного потока. Время, в течение которого поток уменьшается от установившегося значения $\Phi_у$ до потока отпускания $\Phi_{отп}$, когда электромагнитная сила становится меньше усилия $F_{отп}$ отключающей пружины 6, определяет выдержку времени реле. Это время можно регулировать, изменяя либо поток $\Phi_у$, либо поток $\Phi_{отп}$. Значение установившегося потока уменьшается при увеличении толщины немагнитной прокладки между якорем и сердечником. Значение потока отпускания определяется усилием затяжки отключающей пружины 6.

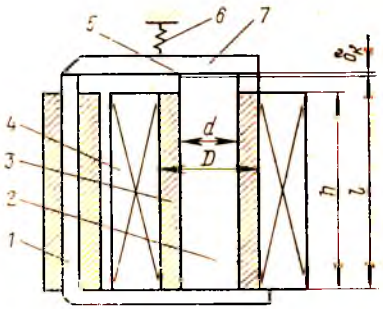


Рис. 2.4. Электромагнит реле времени

Скорость изменения потока зависит от индуктивности системы.

При замкнутом якоре индуктивность значительно больше, чем при отпущенном, поэтому замедление при отключении реле времени больше, чем при включении. Время трогания при отпускании можно получить до 10 с, тогда как время трогания при притяжении составляет доли секунды. Для обеспечения стабильности выдержки времени реле при колебаниях питающего напряжения магнитную систему выполняют насыщенной в установившемся режиме, поэтому поток нелинейно зависит от намагничивающей силы обмотки.

Процесс изменения магнитного потока при отключении обмотки электромагнита описывается уравнением

$$i_{\text{г}}R_{\text{э}} + d\psi/dt = 0, \tag{2.8}$$

где $i_{\text{г}}$ — ток в гильзе (короткозамкнутой обмотке); $R_{\text{э}}$ — эквивалентное сопротивление гильзы; ψ — полное потокосцепление гильзы.

Если $\psi = w\Phi$, где w — число витков (для гильзы $w = 1$), то уравнение (2.8) можно представить в виде

$$i_{\text{г}}R_{\text{э}} + d\Phi/dt = 0. \tag{2.9}$$

Выразив поток Φ через индукцию B и площадь сечения магнитопровода S, получаем

$$i_{\text{г}}R_{\text{э}} + S\,dB/dt = 0. \tag{2.10}$$

При резком уменьшении потока вихревые токи, возникающие в короткозамкнутой обмотке, поддерживают намагниченность системы в соответствии с условием

$$i_{\text{г}} = H_{\text{с}}l_{\text{с}} + H_{\delta}\delta_{\text{к}}, \tag{2.11}$$

где $H_{\text{с}} = f(B)$ — напряженность магнитного поля в стали магнитопровода; $l_{\text{с}}$ — средняя длина магнитопровода по стали; $H_{\delta} = B/\mu_0$ — напряженность магнитного поля в зазоре.

Уравнение (2.11) перепишем в виде

$$i_{\text{г}} = l_{\text{с}}\left[H_{\text{с}} + B\delta_{\text{к}}/(\mu_0 l_{\text{с}})\right]. \tag{2.12}$$

Подставив (2.12) в (2.10) и произведя преобразования, получим

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{R_{\text{э}}l_{\text{с}}}{S}\left(H_{\text{с}} + \frac{B\delta_{\text{к}}}{\mu_0 l_{\text{с}}}\right). \tag{2.13}$$

Эквивалентное сопротивление гильзы

$$R_{\text{э}} = 2\pi\rho \Big/ \left(h \ln \frac{D}{d}\right),$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление материала гильзы; h — высота гильзы; D, d — соответственно внешний и внутренний диаметры гильзы, равный диаметру сердечника.

С учетом выражения для $R_э$ и $S=\pi d^2/4$ уравнение (2.13) принимает вид

$$\frac{dB}{dt}=-\frac{8\pi\rho l_c}{h\pi d^2\ln\frac{D}{d}}\left(H_c+\frac{B\delta_к}{\mu_0 l_c}\right), \tag{2.14}$$

или

$$\frac{dB}{dt}=-\frac{8\pi\rho\alpha_n}{\pi d^2\varphi}\left(H_c+\frac{B\delta_к}{\mu_0 l_c}\right), \tag{2.15}$$

где $\alpha_n=l_c/h$, $\varphi=\ln\frac{D}{d}$.

Уравнение (2.15), описывающее процесс изменения индукции после отключения катушки электромагнита, справедливо при следующих допущениях: 1) магнитопровод имеет по всей длине одинаковое круговое сечение; 2) потоки выпучивания и рассеяния отсутствуют; 3) вихревые токи, возникающие в стали магнитопровода, не учитываются, так как они значительно меньше токов, индуцируемых в гильзе (короткозамкнутой обмотке).

Интегрируя (2.15) по времени, получим

$$B=-\int_0^t\frac{8\pi\rho\alpha_n}{\pi d^2\varphi}\left(H_c+\frac{B\delta_к}{\mu_0 l_c}\right)dt+B_н. \tag{2.16}$$

При ранее указанных допущениях МДС обмотки

$$Iw=B_н S\delta_к/(\mu_0 S)+H_{сн}l_c=B_н\delta_к/\mu_0+H_{сн}l_c,$$

где $H_{сн}$ — напряженность, соответствующая $B_н$.

Представим (2.16) в виде

$$B_н=Iw\mu_0/\delta_к-H_c\mu_0 l_c/\delta_к, \tag{2.17}$$

где $H_{сн}=f(B_н)$. (2.18)

Преобразуем уравнения (2.16) — (2.18) в машинную форму:

$$\left.\begin{aligned}&B_м=-\int_0^{t_м}K_1(H_{см}+K_2B_м)\,dt_м+B_{нм};\\&B_{нм}=K_3(Iw)_м-K_4H_{см};\\&H_{см}=f(B_{нм}).\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

В этих уравнениях коэффициенты

$$K_1=\frac{8\pi\rho\alpha_n m_t m_н}{\pi d^2\varphi m_B};\quad K_2=\frac{\delta_к m_B}{\mu_0 l_c m_н};\quad K_3=\frac{\mu_0 m_{Iw}}{\delta_к m_B};\quad K_4=\frac{\mu_0 l_c m_н}{\delta_к m_B},$$

где $m_н$, m_B, m_t, m_{Iw} — соответственно масштабы напряженности магнитного поля, индукции, времени и МДС.

Схема модели, соответствующая уравнениям (2.19), приведена на рис. 2.5. Учитывая второе уравнение в (2.19) и суммируя

$(Iw)_м$ и $H_{снм}$ (сумматор *4*), умноженные соответственно на K_3 и K_4, получаем начальное значение индукции $B_{нм}$, а на выходе нелинейного блока *6* — значение $H_{снм}$, которое поступает на вход сумматора *4*, замыкая его цепь. Полученное значение $B_{нм}$ устанавливается на интеграторе *1* в виде напряжения начальных условий. Выход интегратора *1* подсоединяется к входу нелинейного блока *5*, на котором воспроизводится нелинейная зависимость $H_{см}=f(B_м)$ материала магнитопровода реле. С выхода нелинейного блока *5* напряженность $H_{см}$ подается на один вход сумматора *3*, на второй вход поступает значение индукции $-B_м$, умноженное на коэффициент K_2. На выходе сумматора *3* получим величину $-(dB/dt)_м$, которая после умножения на K_1 и интегрирования (блок *1*) преобразуется в значение $B_м$ в соответствии с первым уравнением системы (2.19). Моменту отпускания якоря реле соответствует индукция отпускания

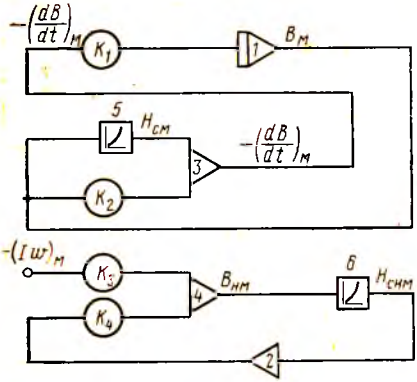


Рис. 2.5. Структурная схема модели для решения уравнений (2.19)

$$B_{отп.м}=\sqrt{2F_{отп.м}\mu_0/S},$$

где $F_{отп.м}$ — машинное значение силы отпускания реле (заданная величина).

§ 2.3. Дроссельный магнитный усилитель

Дроссельный магнитный усилитель (МУ) представляет собой замкнутый ферромагнитный сердечник с двумя обмотками, одна из которых — рабочая $w_р$, другая — управляющая $w_у$. На рабочую обмотку с последовательно включенным с ней резистором $R_н$ подается переменное напряжение, а обмотка управления подключена к источнику управляющего сигнала.

Переменное магнитное поле, создаваемое рабочей обмоткой, наводит переменную ЭДС в цепи обмотки управления, под влиянием которой в этой цепи могут возникнуть значительные токи, искажающие управляющий сигнал. Рассматривают два режима работы дроссельного МУ: режим свободного подмагничивания (при малом сопротивлении в цепи обмотки управления) и режим вынужденного подмагничивания (имеется значительное сопротивление переменному току в цепи обмотки управления, сводящее индуцируемый ток к минимуму). Для создания вынужденного режима подмагничивания обмотка управления подключается к источнику управляющего сигнала, например, через дроссель большой индуктивности. В дальнейшем речь будет идти о дроссельном

МУ, работающем в режиме вынужденного подмагничивания (рис. 2.6).

При отсутствии сигнала в обмотке управления (холостой ход МУ) и выборе переменного напряжения рабочей цепи в пределах, когда индукция в сердечнике МУ ограничивается началом колена кривой намагничивания материала сердечника, ток в рабочей цепи будет мал (ток х. х.— I_0). При подаче сигнала в обмотку управления намагниченность сердечника меняется, индуктивность рабочей обмотки падает и ток нагрузки увеличивается. Когда сердечник под влиянием тока управления окажется насыщенным, ток в нагрузке перестанет изменяться.

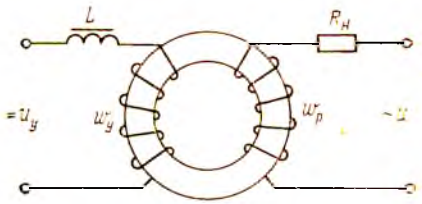


Рис. 2.6. Схема дроссельного магнитного усилителя

Процессы, происходящие в МУ в режиме вынужденного подмагничивания, могут быть описаны следующими уравнениями:

$$w_p S dB/dt + i_p(R_н + R_p) = u;\ Hl = i_p w_p + i_y w_y, \qquad (2.20)$$

где S — площадь поперечного сечения сердечника; B — индукция в сердечнике; i_p — ток рабочей обмотки; $R_н$ — сопротивление нагрузки; R_p — сопротивление рабочей обмотки; u — напряжение питания рабочей цепи; H — напряженность магнитного поля в сердечнике; l — длина (средняя) магнитной силовой линии в сердечнике; i_y — ток в обмотке управления.

В дроссельном магнитном усилителе кривая тока в рабочей обмотке имеет симметричный вид относительно оси времени только при х. х. При подмагничивании она искажается и становится несимметричной, что является одним из недостатков такого усилителя.

С целью реализации системы уравнения (2.20) на АВМ перепишем ее в таком виде:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{w_p S} u - \frac{R_p + R_н}{w_p S} i_p;\quad i_p = \frac{l}{w_p} H - \frac{w_y}{w_p} i_y. \qquad (2.21)$$

Тогда уравнения, на основании которых может быть построена структурная схема АВМ, запишутся так:

$$B_м = K_1 \int u_м dt_м - K_2 \int i_{pм} dt_м;\ i_{pм} = K_3 H_м - K_4 i_{yм}, \qquad (2.22)$$

где $K_1 = \frac{m_u m_t}{m_B w_p S}$; $K_2 = \frac{m_i m_t (R_p + R_н)}{m_B w_p S}$; $K_3 = \frac{m_н l}{m_i w_p}$; $K_4 = \frac{w_y}{w_p}$; m_u, m_i — соответственно масштабы напряжения и тока.

Схема модели, построенная на основании системы уравнений (2.22), представлена на рис. 2.7. В схеме для задания переменного напряжения используется генератор гармонических колебаний. На блоке нелинейности *3* набирается кривая намагничивания $H_м =$

$= f(B_м)$ материала сердечника. Для задания тока $i_{ум}$ используется регулируемый источник постоянного напряжения, имеющийся в АВМ. С помощью структурной схемы определяют зависимости $i_р = f(i_у)$ и находят коэффициент усиления МУ.

На первом входе интегратора *1* устанавливается значение напряжения $u_м$ (через коэффициент K_1). На второй вход интегратора поступает ток $-i_{р\,м}$, умноженный на K_2. В соответствии с первым уравнением системы (2.22) на выходе интегратора получим значение $-B_м$, а после нелинейного блока *3*, воспроизводящего зависимость $H_м = f(-B_м)$, — значение $H_м$, поступающее на вход сумматора *2*. На другой вход этого сумматора подается значение тока управления $-i_{ум}$. В соответствии со вторым уравнением (2.22) на выходе сумматора *2* получаем значение рабочего тока $-i_{р\,м}$, который подается на вход интегратора *1*, замыкая цепь.

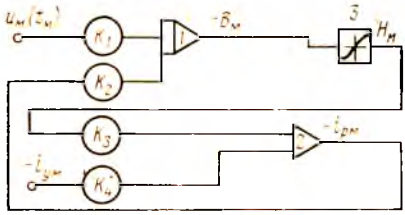


Рис. 2.7. Структурная схема модели для расчета характеристик магнитного усилителя

§ 2.4. Автоматы гашения магнитного поля

Гашением поля называется процесс сведения магнитного потока возбуждения электрических машин к величине, близкой нулю. Аппараты, выполняющие эту операцию, называются автоматами гашения поля (АГП). Необходимость гашения поля часто встречается в условиях нормальной эксплуатации. Однако этот процесс приобретает особое значение при аварийных режимах, вызванных повреждениями изоляции самой машины или на ее выводных зажимах. В таком случае гашение поля — единственный способ, который может ограничить размеры аварии, спасти обмотку и активную часть стали машины от полного выгорания. Размеры аварии определяются значением тока и продолжительностью аварийного режима: они тем меньше, чем быстрее осуществляется гашение поля. Поэтому эффективность гашения поля принято оценивать по тому времени, в течение которого ЭДС машины снижается до значения, близкого к нулю. Это время называют *продолжительностью процесса гашения поля*. Автомат гашения поля должен обеспечивать, с одной стороны, минимальное время гашения поля, с другой — напряжение на зажимах обмотки возбуждения при гашении не должно превосходить некоторой доли испытательного напряжения, определяемого коэффициентом надежности. Взаимная противоречивость этих условий привела к созданию различных способов гашения поля. В практике эксплуатации крупных электрических машин используются следующие способы гашения поля: разряд обмотки возбуждения на постоянное активное и нелинейное сопротивления, противовключение возбудителя, разряд обмотки возбуждения на дугогасительную решетку.

Рассмотрим подробнее каждый из этих способов, предполагая при этом, что происходит гашение поля синхронного генератора, работающего на холостом ходу.

Разряд обмотки возбуждения на постоянное активное сопротивление. Схема включения АГП представлена на рис. 2.8, *а*. Во время нормальной работы генератора контакты *4* разомкнуты, а разрядное сопротивление R отключено. При гашении поля сначала замыкаются контакты *4*, а потом размыкаются контакты *3*. После этого обмотка возбуждения *1* оказывается замкнутой на R и ток в ней, а следовательно, и магнитный поток возбуждения генератора затухают. Значение напряжения на обмотке возбуждения, которое по условиям прочности не должно превосходить уровня u_m, определяется выражением $I_в R \leqslant u_m$. Здесь $I_в$ — начальное значение тока в обмотке возбуждения; R — сопротивление гашения.

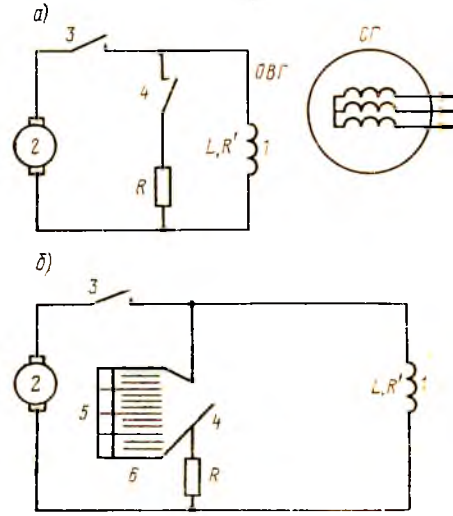


Рис. 2.8. Схема гашения поля синхронного генератора замыканием обмотки возбуждения на постоянное сопротивление (*а*) и дугогасительную решетку (*б*):
СГ — статор; *ОВГ* — обмотка возбуждения; *L*, *R'* — индуктивность и активное сопротивление обмотки возбуждения

Противовключение возбудителя. При этом способе гашения поля в цепь обмотки возбуждения не только вводится сопротивление гашения, но и изменяется полярность возбудителя. Это позволяет ускорить процесс гашения поля. Значение перенапряжения на обмотке рассчитывается по формуле

$$I_в R + K_ф u \leqslant u_m,$$

где u — номинальное значение напряжения на обмотке возбуждения; $K_ф$ — коэффициент форсировки возбудителя.

Разряд обмотки возбуждения на нелинейное (карборундовое) сопротивление. Для оптимального протекания процесса гашения поля желательно, чтобы сопротивление R не оставалось постоянным, а увеличивалось по мере спадания тока. Такими нелинейными свойствами обладают сопротивления из карборунда (вилита). Так, зависимость сопротивления гашения, выполненного из вилита, от тока может быть выражена в виде

$$R = B_к i^{(1-n)/n},$$

где $B_к$ и n — постоянные, зависящие от характеристик материала. Диапазон изменения n лежит в пределах от 3 до 5.

Разряд обмотки возбуждения на дугогасительную решетку. В автоматах, использующих этот способ, рабочие контакты *4* снабжаются энергоемкой дугогасительной решеткой (рис. 2.8, *б*). При срабатывании АГП сначала замыкаются контакты *4* и ток возбуждения начинает протекать через ветвь, в которую включено небольшое ограничивающее сопротивление *R*. Это сопротивление предохраняет возбудитель *2* от к. з. при включении контактов *4*. Затем происходит размыкание контактов *3* и *4*. Возникающая на контактах *4* дуга магнитным полем загоняется в область, занятую металлическими пластинами дугогасительной решетки *6*. Здесь дуга разбивается на ряд коротких дуг, которые горят во время всего процесса гашения поля. Так как напряжение, возникающее на короткой дуге, остается постоянным (равным 25—30 В) в широком диапазоне изменения тока в дуге, то, следовательно, неизменно и напряжение на обмотке возбуждения в течение всего процесса гашения поля. Число пластин в дугогасительной решетке выбирается таким, чтобы полное напряжение на дуге было равно u_m. При малых значениях тока в дуге возможно ее погасание, что может привести к появлению перенапряжения на обмотке в конце гашения. При большом числе пластин решетки погасание дуги в одном из промежутков ведет к погасанию всей дуги. Чтобы избежать этого, включают параллельно решетке относительно большое сопротивление *5*. При этом все сопротивление разбивается на части, каждая из которых шунтирует только одну определенную группу пластин. При такой схеме дуга в решетке гаснет не вся сразу, а по секциям, что способствует уменьшению перенапряжений.

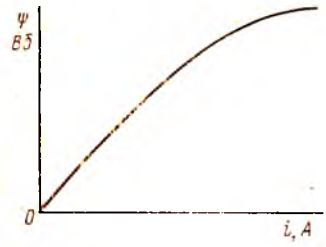


Рис. 2.9. Характеристика холостого хода генератора

В качестве объекта гашения поля служат синхронные гидро- или турбогенераторы, машины постоянного тока. Рассмотрим процесс гашения поля генератора, работающего на х. х. Предполагаем, что генератор не имеет успокоительной обмотки, т. е. на его роторе расположена лишь одна обмотка возбуждения. Максимальное перенапряжение на обмотке возбуждения не должно превышать пятикратного номинального напряжения. Кроме того, считаем, что магнитное поле машины погашено, если ток в ее обмотке возбуждения уменьшился в 50 раз.

Характеристика х. х. машины, т. е. зависимость потокосцепления обмотки возбуждения Ψ от тока в ней i, приведена на рис. 2.9. Система уравнений, описывающих гашение поля возбуждения машины, имеет вид

$$\beta u = iR' + iR + \frac{d\Psi}{dt}; \qquad (2.23)$$

$$\Psi = f(i), \qquad (2.24)$$

где R — сопротивление гашения; β — постоянный коэффициент; u, i, Ψ — напряжение, ток и потокосцепление обмотки возбуждения.

Уравнение (2.23) представляет собой обобщенное уравнение цепи обмотки возбуждения, в котором значения R и β зависят от способа гашения поля. При разряде обмотки возбуждения на постоянное активное сопротивление $\beta = 0$, $R = 5$; при противовключении возбудителя без форсировки возбуждения, но с включением активного сопротивления $\beta = -1$, $R = 4$; при гашении разрядом на карборундовое сопротивление, постоянные материалы которого равны $n = 3$, $B_к = 5$, имеем $\beta = 0$; $R = 5ui^{-2/3}$; при разряде на дугогасительную решетку АГП $\beta = -5$, $R = 0$, т. е. действие дугогасительной решетки эквивалентно введению в цепь обмотки ЭДС противоположного знака, равной падению напряжения на ней.

Значение максимального перенапряжения на обмотке возбуждения

$$u_m = iR' + d\Psi/dt. \tag{2.25}$$

Преобразуя (2.23) к виду, удобному для реализации на АВМ, и переходя к машинным переменным, получим систему уравнений относительно машинных переменных в виде

$$(d\Psi/dt)_м = K_1 u_м - K_2 i_м - K_3 i_м;\quad \Psi_м = \int_0^{t_м} K_4 (d\Psi/dt)_м dt_м + \Psi_м(0);\quad u_{mм} =$$

$$= K_5 i_м + K_6 (d\Psi/dt)_м;\quad i_м = f(\Psi)_м. \tag{2.26}$$

Здесь постоянные коэффициенты, зависящие от масштабов переменных, таковы: $K_1 = \beta m_u / m_{\frac{d\Psi}{dt}}$; $K_2 = R' m_i / m_{\frac{d\Psi}{dt}}$; $K_3 = R m_i / m_{\frac{d\Psi}{dt}}$; $K_4 = m_{\frac{d\Psi}{dt}} m_t / m_\Psi$; $K_5 = R' m_i / m_u$; $K_6 = m_{\frac{d\Psi}{dt}} / m_u$. Масштабы переменных m_u, m_i, m_Ψ, m_t следует выбирать по общему правилу. Для моделирования скорости изменения потокосцепления обмотки возбуждения необходимо задаться самостоятельным масштабным коэффициентом. Максимальное значение $d\Psi/dt$, очевидно, не будет превышать уровня, равного $\beta u - (R' + R) I_0$.

Функция $i_м = f(\Psi_м)$ представляет собой зависимость, обратную характеристике х. х. генератора, перестроенную относительно машинных переменных.

Для упрощения структурной схемы модели при исследовании процесса гашения поля разрядом на нелинейное сопротивление обозначим падение напряжения на нем через $\tilde{u}$. Учитывая, что $\tilde{u} = Ri$, а $R = 5ui^{-2/3}$, получим выражение зависимости для карборундового гасящего сопротивления:

$$\tilde{u} = 5ui^{-2/3} i = 5ui^{1/3}. \tag{2.27}$$

Таким образом, для моделирования падения напряжения на гасящем сопротивлении достаточно одного лишь нелинейного блока, воспроизводящего зависимость (2.27). При масштабировании следует принять $m_{\tilde{u}}=m_u$. Коэффициент $K_3=m_{\tilde{u}}/m_{\frac{d\Psi}{dt}}$.

Структурная схема модели для расчета процесса гашения поля показана на рис. 2.10.

Для исследования необходимо установить расчетные значения коэффициентов K_1, K_2, K_3 и подать от источника эталонного напряжения на вход сумматора *1* напряжение $u_{mм}$ соответствующего значения и знака. На выход нелинейного блока *3* включают вольтметр. Интегрирование проводят до тех пор, пока ток в обмотке не уменьшится в 50 раз по отношению к своему начальному значению. Этот интервал времени и будет искомым временем гашения поля. Работа структурной схемы модели очевидна и не требует дополнительных пояснений.

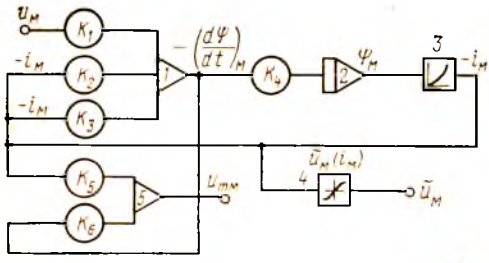


Рис. 2.10. Структурная схема модели для расчета процесса гашения поля

ГЛАВА 3

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА АВМ

§ 3.1. Магнитные цепи постоянного тока

Расчет магнитных систем электрических аппаратов может быть проведен методами, основанными на уравнениях теории цепей и электромагнитного поля. Расчет электромагнитного поля (см. гл. 8) требует выполнения большого объема вычислительной работы и проводится на ЦВМ для уточненного определения характеристик электромагнитного устройства.

Методы теории цепей используются в приближенных расчетах магнитных систем с целью определения необходимой МДС для создания в рабочем зазоре заданного значения магнитного потока (прямая задача) либо когда требуется найти значение рабочего потока при известном значении МДС обмотки (обратная задача).

Среди приближенных методов магнитных цепей наиболее универсальным является метод участков. Магнитная цепь разбива-

ется на отдельные участки, в пределах которых принимаются постоянными значения магнитного потока и индукции. Затем составляется схема замещения, процессы в которой описываются системой алгебраических уравнений. В общем случае решение задачи приходится проводить методом последовательных приближений. Для сокращения времени решения целесообразно применение ЭВМ. В силу приближенного характера метода, не обеспечивающего высокой точности, простоты подготовки, наглядности результатов и возможности их быстрого получения, успешно могут быть применены аналоговые машины.

Расчет магнитных цепей постоянного тока на АВМ рассмотрим на примере двух магнитных систем: с сосредоточенной (рис. 3.1, *а*) и распределенной МДС (рис. 3.1, *б*).

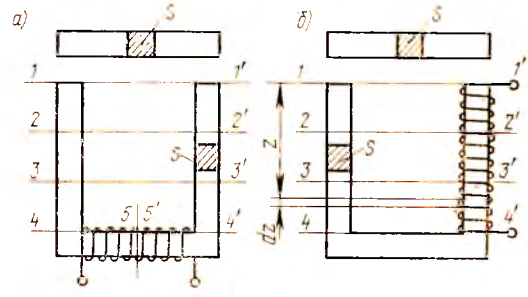


Рис. 3.1. Магнитная цепь с сосредоточенной (*а*) и распределенной (*б*) МДС

Расчет магнитной цепи с сосредоточенной МДС. Магнитная цепь разбивается на участки и составляется схема замещения. На основании уравнений, описывающих распределение магнитных потоков и потенциалов в системе, составляется схема модели. Вид схемы зависит от количества участков, на которые разбивается магнитопровод.

Для магнитной системы, разбитой на четыре участка, справедлива следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{11'}=2\Phi_\delta/G_\delta+H_я l_я;\\
&\Phi_{р1}=u_{11'}gl_{12};\ \Phi_1=\Phi_{р1}+\Phi_\delta;\\
&u_{22'}=u_{11'}+2H_{12}l_{12};\\
&\Phi_{р2}=u_{22'}gl_{23};\ \Phi_2=\Phi_{р2}+\Phi_1;\\
&u_{33}=u_{22'}+2H_{23}l_{23};\\
&\Phi_{р3}=u_{33'}gl_{34};\ \Phi_3=\Phi_{р3}+\Phi_2;\\
&u_{55'}=u_{33'}+2H_{34}l_{34}+H_{осн}l_{осн}=I\omega.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Здесь $u_{11'}$, $u_{22'}$, $u_{33'}$, $u_{55'}$ — разность магнитных потенциалов между соответствующими точками; G_δ — магнитная проводимость одного рабочего зазора; $H_я$, H_{12}, H_{23}, H_{34}, ... — напряженности поля в стали на различных участках; $l_я$, l_{12}, l_{23}, l_{34}, $l_{осн}$ — длины участков магнитопровода; $\Phi_{Р1}$, $\Phi_{Р2}$, $\Phi_{Р3}$ — потоки рассеяния участков; g — удельная проводимость рассеяния; Φ_1, Φ_2, Φ_3 — потоки в железе магнитопровода на соответствующих участках.

Преобразуем систему уравнений (3.1) в машинную форму:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{11'м}=2m_\Phi\Phi_{\delta м}/(G_\delta m_u)+m_н l_я H_{ям}/m_u=K_1\Phi_{\delta м}+K_2H_{ям};\\
&\Phi_{р1м}=m_u g l_{12}u_{11'м}=K_3u_{11'м};\ \Phi_{р1м}+\Phi_{\delta м}=\Phi_{1м};\\
&u_{22'м}=u_{11'м}+2m_н l_{12}H_{12м}/m_н=u_{11'м}+K_4H_{12м};\\
&\Phi_{р2м}=m_u g l_{23}u_{22'м}/m_\Phi=K_5u_{22'м};\ \Phi_{р2м}+\Phi_{1м}=\Phi_{2м};\\
&u_{33'м}=u_{22'м}+2m_н l_{23}H_{23м}/m_u=u_{22'м}+K_6H_{23м};\\
&\Phi_{р3м}=m_u g l_{34}u_{33'м}/m_\Phi=K_7u_{33'м};\ \Phi_{р3м}+\Phi_{2м}=\Phi_{3м};\\
&u_{55'м}=u_{33'м}+2m_н l_{34}H_{34м}/m_u+m_н l_{осн}H_{осн.\,м}/m_u=m_{Iw}(Iw)_м/m_u,
\end{aligned}\right\}\quad (3.2)$$

или

$$u_{55'м}=u_{33'м}+K_8H_{34м}+K_9H_{осн.\,м}=K_{10}(Iw)_м.$$

Здесь $K_1=2m_\Phi/(G_\delta m_u)$; $K_2=m_н l_я/m_u$; $K_3=m_u g l_{12}/m_\Phi$; $K_4=2m_н l_{12}/m_u$; $K_5=m_u g l_{23}/m_\Phi$; $K_6=2m_н l_{23}/m_u$; $K_7=m_u g l_{34}/m_\Phi$; $K_8=2m_н l_{34}/m_u$; $K_9=m_н l_{осн}/m_u$; $K_{10}=m_{Iw}/m_u$.

На основании системы уравнений (3.2) составляется структурная схема модели (рис. 3.2). Значения напряженностей магнитно-

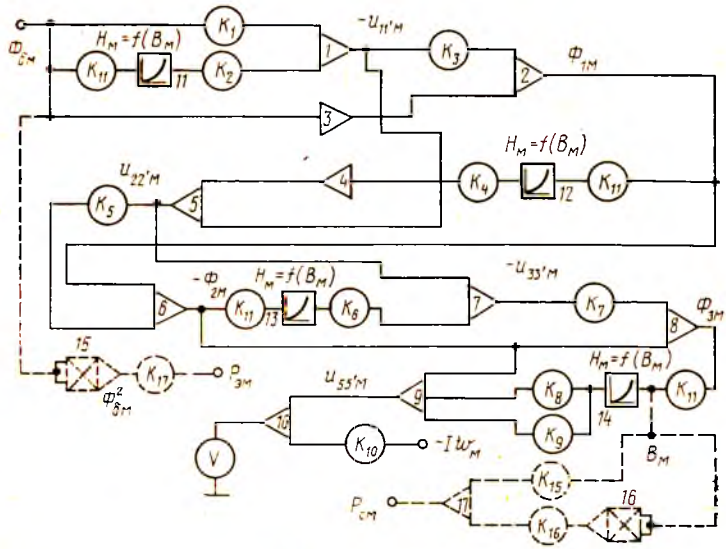


Рис. 3.2. Структурная схема модели для расчета магнитной цепи с сосредоточенной МДС

го поля $H_м$ в стали зависят от значений индукции $B_м$ и определяются по кривой намагничивания материала магнитопровода. В свою очередь, индукция $B_м$ находится по значениям магнитных потоков на соответствующих участках согласно выражению $B_м = m_\Phi\Phi_м/(Sm_B)=K_{11}\Phi_м$.

Проводимости зазоров и рассеяния определяются одним из известных способов. В схеме модели кривая намагничивания $H_м=f(B_м)$ материала магнитопровода воспроизводится с помощью нелинейных блоков, на входы которых поступает индукция $B_м$. На выходе этих блоков получается значение $H_м$.

Расчет магнитного потока в рабочем зазоре по заданным размерам, материалу магнитопровода и МДС производится следующим образом. На вход сумматора *10* подается МДС со знаком минус, т. е. $-(Iw)_м$. На вход сумматора *1* поступает значение магнитного потока, которое необходимо изменять до тех пор, пока на выходе сумматора *10* не появится нуль. В этом случае падение магнитного потенциала в зазорах и железе магнитопровода равно заданной МДС. Изменение потока сводится к повороту рукоятки регулятора источника напряжения. На выходах сумматора *2*, *4* и *8* получаем значения потоков в различных сечениях магнитопровода. Значения магнитных потенциалов можно получить на выходах сумматоров *1*, *5*, *7* и *10*. При определении МДС по заданному потоку в зазоре следует на вход сумматора *1* подать значение потока, а на выходе сумматора *10* записать значение магнитного потенциала $u_{55'м}=(Iw)_м$. Расчет при других значениях проводимости рабочих зазоров сводится к изменению в схеме постоянного коэффициента K_1. Изменение сечения магнитопровода S, длины якоря $l_я$, длин участков l_{12}, l_{23} и т. д. связано с корректировкой соответствующих постоянных коэффициентов. Изменение материала магнитопровода сводится к перебору кривой намагничивания на нелинейных блоках *11*, *12*, *13* и *14*. Таким образом, изменение исходных данных расчета сводится к простым операциям в схеме модели.

Расчет магнитной цепи с распределенной МДС. Уравнения потоков и магнитных потенциалов можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{11'}=2\Phi_\delta/G_\delta+H_я l_я;\\
&\Phi_{р1}=u_{11'}gl_{12};\quad \Phi_{р1}+\Phi_\delta=\Phi_1;\\
&u_{22'}=u_{11'}+2H_{12}l_{12}-Iwl_{12}/h;\\
&\Phi_{р2}=u_{22'}gl_{23};\quad \Phi_{р2}+\Phi_1=\Phi_2;\\
&u_{33'}=u_{22'}+2H_{23}l_{23}-Iwl_{23}/h;\\
&\Phi_{р3}=u_{33'}gl_{34};\quad \Phi_{р3}+\Phi_2=\Phi_3;\\
&u_{44'}=u_{33'}+2H_{34}l_{34}+H_{осн}l_{осн}-Iwl_{34}/h.
\end{aligned}\right\}\qquad (3.3)$$

Здесь h — высота стержня, на котором распределена обмотка.

Аналогично тому, как это было сделано при расчете системы с сосредоточенной МДС, запишем:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{11'м}=K_1\Phi_{\delta м}+K_2H_{я м};\\
&\Phi_{р1м}=K_3u_{11'м};\quad \Phi_{р1м}+\Phi_{\delta м}=\Phi_{1м};\\
&u_{22'м}=u_{11'м}+K_4H_{12м}-K_{12}(Iw)_м;\\
&\Phi_{р2м}=K_5u_{22'м};\quad \Phi_{р2м}+\Phi_{1м}=\Phi_{2м};\\
&u_{33'м}=u_{22'м}+K_6H_{23м}-K_{13}(Iw)_м;\\
&\Phi_{р3м}=K_7u_{33'м};\quad \Phi_{р3м}+\Phi_{2м}=\Phi_{3м};\\
&u_{44'м}=u_{33'м}+K_8H_{34м}+K_9H_{осн.\,м}-K_{14}(Iw)_м=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (3.4)$$

Здесь $K_{12}=m_{Iw}l_{12}/(m_u h)$; $K_{13}=m_{Iw}l_{23}/(m_u h)$; $K_{14}=m_{Iw}l_{34}/(m_u h)$.

В соответствии с приведенной системой уравнений составляется схема модели (рис. 3.3). Расчет магнитного потока в рабочих зазорах по значению МДС производится следующим образом. На входы сумматоров *3*, *8* и *11* подается напряжение, пропорциональное $(Iw)_м$. Затем, изменяя значение потока в зазоре $\Phi_{\delta м}$, на входе сумматора *1*

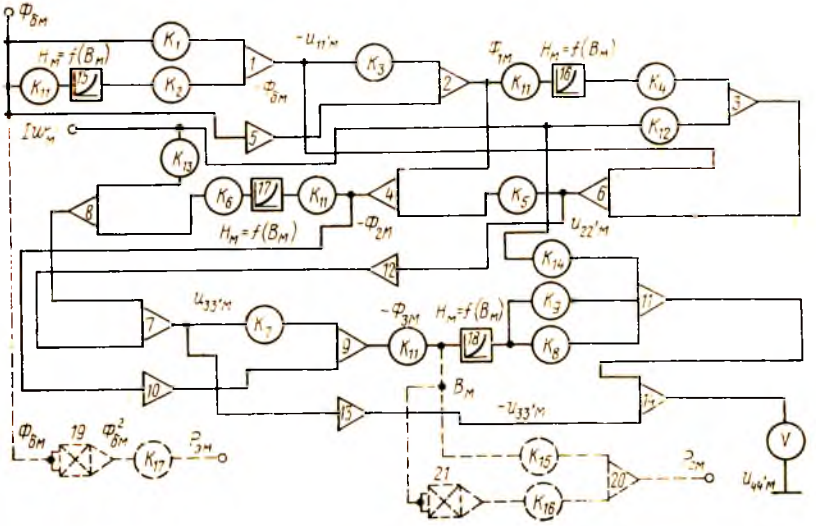


Рис. 3.3. Структурная схема модели для расчета магнитной цепи с распределенной МДС

необходимо добиться того, чтобы напряжение на выходе сумматора *14* стало равным нулю. Значение $\Phi_{\delta м}$, соответствующее этому режиму, будет искомым значением потока.

Решение задачи определения МДС по заданному значению потока в рабочих зазорах сводится к следующему. На входе сумматора *1* устанавливается напряжение, пропорциональное $\Phi_{\delta м}$. Изменением значения $(Iw)_м$ на входах сумматоров *3*, *8* и *11* (осуществляется поворотом рукоятки регулятора источника напряжения) необходимо добиться равенства нулю напряжения выхода сумматора *14*. Значение $(Iw)_м$, соответствующее этому режиму, определяет искомую величину.

Пример. Требуется рассчитать магнитную цепь П-образного электромагнита с двумя рабочими зазорами (см. рис. 3.1, *б*) со следующими данными: материал магнитопровода — сталь 10, площади сечения якоря, стержней и основания $S = 4 \cdot 10^{-4}$ м^2, высота стержней $h = 9 \cdot 10^{-2}$ м, расстояние между стержнями $b = 6 \cdot 10^{-2}$ м, рабочий воздушный зазор $\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м, МДС обмотки $Iw = 3000$ А, проводимость рабочего зазора (определена методом «вероятных путей потока») $G_\delta = 11{,}4 \cdot 10^{-8}$ г, удельная проводимость рассеяния $g = 2{,}33 \cdot 10^{-6}$ г/м. Обмотка по высоте разделена на три участка: МДС участка $Iwh/l_y = 1000$ А. Необходимо определить значение потока в рабочем зазоре Φ_δ.

Решение. Определим масштабы переменных. В первом приближении можно

записать: $I\omega \approx (2{,}4 \div 2{,}8)\,\Phi_\delta / G_\delta$, откуда $\Phi_\delta \approx I\omega G_\delta / 2{,}6 = 3000 \cdot 11{,}4 \cdot 10^{-8}/2{,}6$ Вб $= 13{,}5 \cdot 10^{-4}$ Вб, тогда *масштаб потока*

$$m_\Phi = \Phi_\delta / \Phi_{\delta м} = 13{,}15 \cdot 10^{-4}/100 \text{ Вб/В} = 13{,}15 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/В};$$

масштаб МДС

$$m_{I\omega} = m_n = I\omega/(I\omega)_м = 3000/100 \text{ А/В} = 30 \text{ А/В};$$

масштаб индукции (принимаем максимальное значение индукции в магнитопроводе В = 1,75 Тл)

$$m_B = 1{,}75/100 \text{ Тл/В} = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ Тл/В},$$

для стали 10 индукции 1,75 Тл соответствует значение напряженности поля 8000 А/м, следовательно, *масштаб напряженности* $m_н = 8000/100$ А/мВ $= 80$ А/мВ.

Рассчитаем коэффициенты модели:

$$K_1 = \frac{2 \cdot 13{,}15 \cdot 10^{-6}}{11{,}4 \cdot 10^{-8} \cdot 30} = 7{,}7; \quad K_2 = \frac{80 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{30} = 0{,}213;$$

$$K_3 = \frac{30 \cdot 2{,}33 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{13{,}15 \cdot 10^{-6}} = 0{,}154; \quad K_4 = \frac{2 \cdot 80 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{30} = 0{,}16;$$

$$K_5 = K_3; \quad K_6 = K_4; \quad K_7 = K_5 = K_3; \quad K_8 = K_6 = K_4;$$

$$K_9 = \frac{80 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{30} = 0{,}213; \quad K_{12} = K_{13} = K_{14} = \frac{30 \cdot 3}{30 \cdot 9} = 0{,}33.$$

Результаты расчета на АВМ приведены ниже:

Обозначение	$I\omega$, А	$I\omega \frac{h}{l_y}$, А	$B_в$, Тл	$B_{1в}$, Тл	$B_{2в}$, Тл	$B_{3в}$, Тл	$H_я$, А/м	$H_{1я}$, А/м	$H_{2я}$, А/м	$H_{3я}$, А/м	Φ_δ, Вб·10^4
Числовое значение	3000	1000	0,41	0,91	1,24	1,41	250	500	970	1500	1,63

Продолжение

Обозначение	$\Phi_{р1}$, Вб·10^4	Φ_1, Вб·10^4	$\Phi_{р2}$, Вб·10^4	Φ_2, Вб·10^4	$\Phi_{р3}$, Вб·10^4	Φ_3, Вб·10^4	u_{11}, А	u_{22}, А	u_{33}, А	u_{44}, А
Числовое значение . . .	2,00	3,63	1,33	4,96	0,73	5,67	2870	1900	1048	0

Метод расчета магнитных цепей, изложенный выше, имеет существенный недостаток, заключающийся в зависимости сложности структурной схемы от числа участков, на которые разбивается магнитная система. Действительно, для моделирования напряженности поля на каждом участке необходим нелинейный блок, воспроизводящий кривую намагничивания материала, и сумматор-инвертор. При росте количества решающих блоков модели возрастает погрешность вычислений.

Ниже показан метод непосредственного интегрирования уравнения магнитной цепи, свободный от указанных выше недостатков.

Согласно рис. 3.1, *б* можно записать:

$$\left.\begin{aligned} u_z &= u_\delta + 2\int_0^z H_z\,dz - \frac{Iw}{h}\int_0^z dz; \\ \Phi_z &= \Phi_\delta + \int_0^z d\Phi_{pz}; \quad d\Phi_{pz} = u_z g\,dz; \\ u_\delta &= 2\Phi_\delta / G_\delta + H_я l_я; \quad u_h = H_h l_{осн}; \\ \psi &= \frac{w}{h}\int_0^h \Phi_z\,dz; \quad B_z = \Phi_z / S. \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Здесь u_z — разность магнитных потенциалов между точками сечений стержней с координатой z; H_z — напряженность магнитного поля в стержнях; $d\Phi_{pz}$ — элементарный поток рассеяния слоя воздуха толщиной dz; G_δ — магнитная проводимость одного рабочего зазора; $H_я$, $l_я$ — напряженность поля и длина якоря; u_h — падение магнитного потенциала в основании магнитопровода; H_h, $l_{осн}$ — напряженность поля и длина основания; Ψ — полное потокосцепление обмотки; w — число витков обмотки; h — высота стержня.

Запишем (3.5) в машинной форме:

$$\left.\begin{aligned} u_{zм} &= u_{\delta м} + K_1\int_0^{z_м} H_{zм}\,dz_м - K_2\int_0^{z_м} dz_м; \\ \Phi_{zм} &= \Phi_{\delta м} + \int_0^{z_м} d\Phi_{pzм}; \quad d\Phi_{pzм} = K_3 u_{zм} dz_м; \\ u_{\delta м} &= K_4\Phi_{\delta м} + K_5 H_{я.м}; \quad u_{hм} = K_6 H_{hм}; \\ \Psi_м &= K_7\int_0^{h_м} \Phi_{zм}\,dz_м; \quad B_{zм} = K_8\Phi_{zм}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

где $K_1 = 2m_н m_z / m_u$; $K_2 = Iwm_z/h$; $K_3 = gm_ц m_z / m_\Phi$; $K_4 = 2m_\Phi/(G_\delta m_u)$; $K_5 = m_н l_я / m_u$; $K_6 = m_н l_{осн}/m_u$; $K_7 = wm_\Phi m_z/h$; $K_8 = m_\Phi/(Sm_B)$.

При решении (3.6) в качестве аналога времени, в функции которого обычно происходит интегрирование в АВМ, принимается текущее значение координаты z. Поэтому здесь необходимо выбирать

$$m_z = m_t = h/t_м,$$

где $t_м$ — желаемое время решения задачи.

Структурная схема модели, построенная по уравнениям (3.6), приведена на рис. 3.4. Здесь при решении прямой задачи, когда по заданному потоку в рабочих зазорах необходимо определить МДС обмотки, значение $\Phi_{\delta м}$ подается на вход нелинейного блока *1* через коэффициент K_8. С выхода нелинейного блока через коэффициент K_5 значение $H_{я.м}$ поступает на один из входов сумматора *2*. Значение

$\Phi_{\delta м}$ через коэффициент K_4 поступает также на другой вход сумматора. Так как в (3.5) входит значение Iw, то в первом приближении им целесообразно задаться на основании соотношения

$$Iw \approx 2{,}6\Phi_\delta / G_3 . \qquad (3.7)$$

Затем удельное значение МДС Iw/h устанавливается на вход интегратора *3*, выход которого подключен к входу сумматора *2* через коэффициент K_2. Если на очередной вход сумматора *2* подать значение $\int_0^{z_м} H_{zм}\,dz_м$, умноженное на K_1, то на выходе сумматора в соответствии с (3.6) получим напряжение $-u_{zм}$. Поскольку выход сумматора *2* через коэффициент K_3 подключен к входу интегратора *4*, то на выходе последнего получаем $\int_0^{z_м} d\Phi_{pzм}$. Складывая значение этого интеграла с потоком $\Phi_{\delta м}$, получаем величину $-\Phi_{zм}$ (сумматор *5*). Выход этого сумматора соединен через K_8 с входом нелинейного блока *6*, моделирующего зависимость $H_{zм}=f(B_{zм})$. Интегрируя значение $H_{zм}$ (блок *7*), замыкаем цепи сумматора *2*. Методика работы на модели принимается следующей. Включив модель, по истечении времени $t_м=h/m_z$ проверяют соблюдение равенства

$$u_{hм}=H_{hм}l_{осн}. \qquad (3.8)$$

Для контроля этого условия служат сумматор *8* и вольтметр. Коэффициент $K_9=m_н l_{осн}/m_u$.

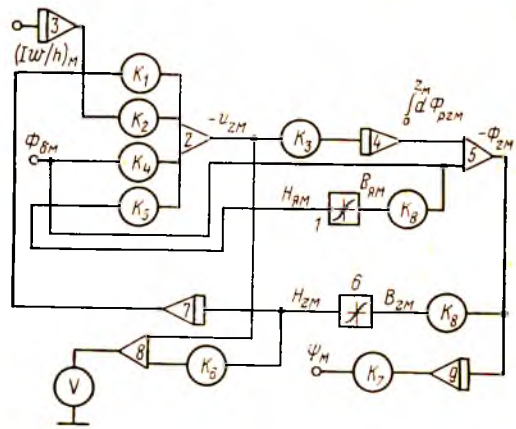


Рис. 3.4. Структурная схема модели для решения уравнений (3.6)

Нулевое показание вольтметра будет соответствовать выполнению (3.8). Поскольку значение Iw вначале было определено приближенно по (3.7), то с первой попытки условие (3.8), как правило, не выполняется. Изменяя Iw/h дискретно с достаточно малым шагом в обоих направлениях и производя интегрирование, добиваются выполнения (3.8).

При решении обратной задачи, т. е. при определении Φ_δ по заданному значению Iw, приближенное значение потока также находят по (3.7). После нескольких попыток дискретного изменения Iw можно добиться желаемого результата. Для определения потокосцепления $\Psi_м$ служат интегратор *9* и коэффициент K_7.

Достоинство рассмотренного метода — простота схемы модели, в которой требуется два блока нелинейности независимо от соотно-

шения размеров магнитопровода. К недостаткам следует отнести необходимость интегрирования уравнений магнитной цепи и связанный с этим рост погрешностей за счет дрейфа нуля усилителей, в то время как схемы моделей рис. 3.2 и 3.3 построены по алгебраическим уравнениям и необходимость интегрирования отсутствует.

§ 3.2. Магнитные цепи переменного тока

Рассмотрим метод расчета магнитной цепи на АВМ, выполненный в предположении, что ток и поток изменяются по синусоидальному закону. Исходными данными для расчета являются геометрические размеры магнитопровода и характеристики его материала, поток в рабочем зазоре и напряжение u на зажимах обмотки. Требуется определить число витков, намагничивающий I_μ и полный ток I.

Потери энергии в стали магнитопровода

$$P_c = 4K_f f S l (aB + cB^2), \tag{3.9}$$

где K_f — коэффициент формы кривой; f — частота, S, l — сечение и длина участка магнитопровода; a, c — постоянные коэффициенты.

Зная значения индукции в стали на каждом участке, можно определить суммарные потери. В уравнение следует подставлять амплитудное значение индукции участка магнитопровода.

Потери энергии в экране

$$P_э = \omega^2 \Phi_2^2 / (2R_э). \tag{3.10}$$

Здесь $\Phi_2 = \Phi_\delta / \sqrt{1 + C^2 + 2C\cos\Psi}$ — поток, проходящий через экранированную часть полюса; $C = \alpha/\cos\Psi$; $\Psi = \operatorname{arctg}(\omega G_2 / R_э)$; $\alpha = S_1/S_2$; G_2 — проводимость зазора δ_2; $R_э = \frac{\omega\mu_0 S_0}{\delta_2} \frac{4\nu}{(3\nu+2)^2} \sqrt{4 - \nu^2}$ — активное сопротивление экрана; S_1, S_2 — сечение неэкранированной и экранированной частей полюса; S_0 — сечение полюса за вычетом сечения паза под экран; δ_2 — зазор между экранированной частью полюса ярма и якорем; ν — отношение минимального усилия, действующего на якорь, к среднему усилию магнитной системы без экрана.

Кроме величин, приведенных выше, в расчете используются очевидные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &E = \omega \Phi_m w; \quad I_c = P_c / E; \quad I'_э = P_э / (\omega E); \\ &I^2 = I_\mu^2 + (I_c + I'_э)^2; \quad u^2 = E^2 + (IR)^2. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

В этих уравнениях: E — ЭДС обмотки; Φ_m — поток, сцепленный со всей обмоткой (амплитудное значение); I_c — ток потерь в стали; $I'_э$ — ток экрана, приведенный к числу витков намагничивающей обмотки; I — полный ток обмотки.

Расчет ведется в такой последовательности. Магнитопровод разбивается на участки, строится схема замещения, которая рассчиты-

вается так же, как на постоянном токе. При этом расчет ведется для амплитудных значений тока, потока, МДС и т. д. Исходными в этом случае будут уравнения (3.3) для системы с сосредоточенной и (3.4) для системы с распределенной МДС. Схемы моделей приведены на рис. 3.2 и 3.3, где пунктиром показаны элементы для определения $P_с$ и $P_э$. Значения постоянных коэффициентов схемы:

$$K_{15}=4K_f f V_с a m_B/m_р; \quad K_{16}=4K_f f V_с c m_B^2;$$

$$K_{17}=\omega^2 m_Ф^2/[2(1+C^2+2C\cos\Psi)R_э m_р],$$

где $V_с=Sl$.

Методом, изложенным выше, определяются $I_\mu w$, Φ_m, $P_с$, $P_э$, причем для системы с сосредоточенной МДС $\Phi_m=\Phi_{осн}$, для системы с распределенной МДС $\Phi_m=\Psi_m/w$, где Ψ_m — амплитудное значение полного потокосцепления обмотки.

Активное сопротивление обмотки

$$R=\rho l_{ср} w/q_{пр},$$

где ρ — удельное сопротивление провода обмотки; $l_{ср}=2(b+m)+\pi d$ — средняя длина витка (рис. 3.5); w — число витков обмотки; $q_{пр}=dhK_з/w$ — сечение провода; $K_з$ — коэффициент заполнения обмоточного окна; b, m, d и h определяются размерами электромагнита.

С учетом приведенных выражений

$$R=\rho[2(b+m)+\pi d]w^2/(dhK_з). \qquad (3.12)$$

Уравнения (3.11) и (3.12), несколько преобразовав, представим в машинной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&u_м^2=E_м^2+(IR)_м^2; \quad w_м=m_u E_м/(\omega\Phi_m m_w)=K_1 E_м;\\
&I_{\mu м}=I_\mu w m_{1/w}(1/w)_м/m_I=K_2(1/w)_м;\\
&I_{см}=P_с m_{1/u}(1/E)_м/m_I=K_3(1/E)_м;\\
&I'_{эм}=P_э m_{1/u}m_{1/w}(1/E)_м(1/w)_м/m_I=K_4(1/E)_м(1/w)_м;\\
&I_м^2=I_{\mu м}^2+(I_{см}+I'_{эм})^2;\\
&R_м=\rho[2(b+m)+\pi d]m_w^2 w_м^2/(dhK_з m_R)=K_5 w_м^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

где $K_1=m_u/(\omega\Phi_m m_w)$; $K_2=I_\mu w m_{1/w}/m_I$; $K_3=P_с m_{1/u}/m_I$; $K_4=P_э m_{1/u}m_{1/w}/m_I$; $K_5=\rho[2(b+m)+\pi d]m_w^2/(dhK_з m_R)$.

С помощью структурной схемы модели, построенной по уравнениям (3.13) (рис. 3.6), определяется число витков ЭДС, учитываются потери в стали и экране и т. д. Величины $I_\mu w$, Φ_m, $P_с$ и $P_э$, определенные ранее, вводятся в схему в виде постоянных. На один вход сумматора *1* подается напряжение $u_м^2$, на другой выход — значение $-(IR)_м^2$. На выходе сумматора *1* получаем величину $E_м^2$, которая поступает на вход нелинейного блока *2*, осуществляющего операцию извлечения квадратного корня. На выходе нелинейного блока *2* величина $E_м$ умножается на постоянный коэффициент K_1, получаем число витков $w_м$. После умножителя *3* число $w_м^2$ умножаем

на коэффициент $K_б$, имеем $R_м$, а на выходе умножителя *4* воспроизводится величина $R_м^2$.

Величина $E_м$, проходя через блок *5*, воспроизводит на выходе величину, обратную входной, т. е. $(1/E)_м$. Последняя умножается на коэффициент $K_з$, получается ток потерь в железе $I_{см}$. Величина $w_м$ поступает на вход нелинейного блока *6*. На выходе получим $(1/w)_м$, умножение которой на K_2 образует ток $I_{μм}$. Квадрат последнего складывается со значением $(I_{см}+I_{эм})^2$. Выходы квадраторов *8* и *9* подключены ко входам сумматора *10*. В результате сложения получаем $I_м^2$. Эта величина поступает на один из входов умножителя, другой вход соединен с выходом умножителя *4*. Получающееся на выходе блока *11* произведение $-(IR)_м^2$ подается на второй вход сумматора *1*, замыкая цепь.

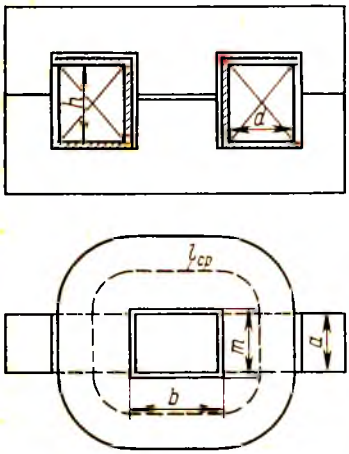


Рис. 3.5. Эскиз электромагнита переменного тока

§ 3.3. Тяговое усилие электромагнита переменного тока с экраном

В практике проектирования электромагнитов переменного тока возникает необходимость расчета экрана (короткозамкнутого витка), предназначенного для сглаживания пульсаций тягового усилия. При этом данными для определения параметров экрана являются полученные при расчете магнитной цепи электромагнита значения магнитного потока в системе, тока во втягивающей обмотке и т. д. При определении указанных величин приходится принимать ряд допущений, одно из которых — синусоидальность изменения тока в обмотке и магнитного потока. Строго говоря, изменение потока и тока по синусоиде одновременно возможно лишь при постоянном сопротивлении магнитной цепи. При наличии же магнитопровода из ферромагнитного материала такого режима принципиально быть не может и отклонения от синусоидального режима будут тем больше, чем больше насыщение магнитопровода и чем большая часть МДС обмотки приходится на магнитопровод. Однако электромагниты проектируют таким обра-

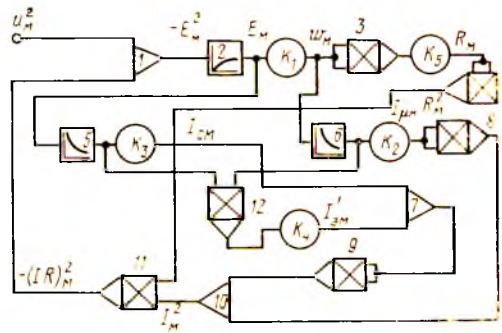


Рис. 3.6. Структурная схема модели для расчета магнитной цепи переменного тока

зом, чтобы при притянутом якоре индукция в железе не превышала значения индукции насыщения. Поэтому принимаемое допущение не должно существенно отразиться на точности результатов расчета.

При расчете параметров экрана считают синусоидальными ток экрана и потоки, пронизывающие экранированную и неэкранированную части полюса. Эти допущения являются грубыми, могущими привести к неверным результатам при расчете. Как показывает экспериментальная проверка, вследствие насыщения неэкранированной части полюса потоки и ток в экране имеют резко выраженный несинусоидальный характер (в особенности поток, проходящий через поверхность, не охваченную экраном). Следует отметить, что насыщение — фактор положительный, так как при этом уменьшаются пульсации тягового усилия. Учет влияния указанных факторов на процессы, происходящие в экране, возможен с помощью АВМ.

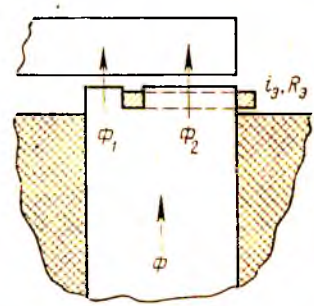


Рис. 3.7. Эскиз полюса электромагнита с экраном

На рис. 3.7 приведен эскиз полюса электромагнита с экраном, где обозначено: Φ — поток в магнитопроводе; Φ_1 — магнитный поток, проходящий через поверхность полюса, не охваченную экраном, Φ_2 — поток, проходящий через экранированную часть полюса; $i_э$ — ток в экране; $R_э$ — активное сопротивление экрана.

Система уравнений, подлежащих решению, может быть записана в виде

$$\left.\begin{gathered}\Phi=\Phi_1+\Phi_2;\ H_{c2}l_{c2}-H_1\delta_1+H_2\delta_2-H_{c1}l_{c1}=i_э;\ \Phi_2=-\int i_эR_эdt-\\ -L_Si_э;\ F_1=0{,}4\Phi_1^2\cdot10^6/S_1;\ F_2=0{,}4\Phi_2^2\cdot10^6/S_2;\ F=F_1+F_2.\end{gathered}\right\}\qquad(3.14)$$

В уравнениях, составленных для мгновенных значений величин, обозначено:

$\Phi=\Phi_m\sin\omega t$; $\Phi_m=\sqrt{2}\,u/(\sigma\omega w)$; $H_1=\Phi_1/(S_1\mu_0)=0{,}8\cdot10^6\Phi_1/S_1$ — напряженность магнитного поля в зазоре δ_1 между якорем и неэкранированной частью полюса; $H_2=\Phi_2/(S_2\mu_0)=0{,}8\cdot10^6\Phi_2/S_2$ — то же, в зазоре δ_2 между якорем и частью полюса, охваченной экраном, H_{c1}, H_{c2} — напряженность поля в стали экранированной и неэкранированной частей полюса; $l_{c1}=l_{c2}=l_п+(0{,}2\div0{,}25)\cdot10^{-3}$ м — длина стальных участков полюса соответственно неэкранированной и экранированной частей; $l_п$ — высота паза для экрана; L_S — индуктивность рассеяния экрана (принимается $L_S=\text{const}$); F_1 — усилие, действующее на неэкранированную часть полюса; F_2 — усилие, действующее на часть полюса, охваченную экраном; σ — коэффициент рассеяния;

F — суммарное усилие; S_2 — сечение полюса, охваченное экраном S_1 — сечение неэкранированной части полюса.

Запишем систему (3.14) в машинной форме:

$$\Phi_{\text{м}}=\Phi_{1\text{м}}+\Phi_{2\text{м}};\ i_{\text{эм}}=\frac{m_{\text{н}}l_{\text{с}2}}{m_i}H_{\text{с}2\text{м}}+\frac{m_{\text{н}}\delta_2}{m_i}H_{2\text{м}}-\frac{m_{\text{н}}\delta_1}{m_i}H_{1\text{м}}-\frac{m_{\text{н}}l_{\text{с}1}}{m_i}H_{\text{с}1\text{м}} \tag{3.15}$$

или

$$i_{\text{эм}}=\frac{m_{\text{н}}l_{\text{с}2}}{m_i}H_{\text{с}2\text{м}}+\frac{0{,}8m_{\Phi}\cdot 10^6\delta_2}{S_2m_i}\Phi_{2\text{м}}-\frac{0{,}8m_{\Phi}\cdot 10^6\delta_1}{S_1m_i}\Phi_{1\text{м}}-\frac{m_{\text{н}}l_{\text{с}1}}{m_i}H_{\text{с}1\text{м}}. \tag{3.16}$$

Уравнение (3.16) можно записать в виде

$$i_{\text{эм}}=K_1H_{\text{с}2\text{м}}+K_2\Phi_{2\text{м}}-K_3\Phi_{1\text{м}}-K_4H_{\text{с}1\text{м}}, \tag{3.17}$$

где $K_1=\frac{m_{\text{н}}l_{\text{с}2}}{m_i}$; $K_2=\frac{0{,}8m_{\Phi}\cdot 10^6\delta_2}{S_2m_i}$; $K_3=\frac{0{,}8m_{\Phi}\cdot 10^6\delta_1}{S_1m_i}$; $K_4=\frac{m_{\text{н}}l_{\text{с}1}}{m_i}$.

Далее,

$$\Phi_{2\text{м}}=-\frac{m_iR_{\text{э}}m_t}{m_{\Phi}}\int i_{\text{эм}}dt_{\text{м}}-\frac{L_S\,m_i}{m_{\Phi}}i_{\text{эм}},$$

или

$$\Phi_{2\text{м}}=-K_5\int i_{\text{эм}}dt_{\text{м}}-K_6i_{\text{эм}}, \tag{3.18}$$

где $K_5=m_iR_{\text{э}}m_t/m_{\Phi}$; $K_6=L_S\,m_i/m_{\Phi}$; $F_{1\text{м}}=0{,}4\cdot 10^6m_{\Phi}^2\Phi_{1\text{м}}^2/(S_1m_F)$, или

$$F_{1\text{м}}=K_7\Phi_{1\text{м}}^2, \tag{3.19}$$

где $K_7=0{,}4\cdot 10^6m_{\Phi}^2/(S_1m_F)$.

Аналогично,

$$F_{2\text{м}}=K_8\Phi_{2\text{м}}^2; \tag{3.20}$$

$$K_8=0{,}4\cdot 10^6m_{\Phi}^6/(S_2m_F);$$

$$F_{\text{м}}=F_{1\text{м}}+F_{2\text{м}}. \tag{3.21}$$

Структурная схема модели для решения уравнений (3.15)—(3.21) представлена на рис. 3.8. В схеме блок переменных коэффициентов *1*

воспроизводит зависимость $\Phi_м = \Phi_{mм} \sin(\omega t)_м$. С выхода блока *1* величина $\Phi_м$ поступает на вход сумматора *2*, на второй вход подается $-\Phi_{2м}$, так что на выходе сумматора *2* в соответствии с уравнением (3.15) получаем $-\Phi_{1м}$. Выход блока *2* подключен к входу нелинейного блока *3* через постоянный коэффициент $K_9 = 1/S_1$. Блок *3* воспроизводит нелинейную зависимость $H_{см} = f(B_{см})$. Поэтому на выходе блока *3* получим $H_{с1м}$. Эта величина умножается на постоянный коэффициент K_4 и поступает на вход сумматора *4*. На остальные входы этого сумматора с соответствующими знаками поступают поток $\Phi_{2м}$, умноженный на K_2, $\Phi_{1м}$, умноженный на K_3, и напряженность $H_{с2}$, умноженная на K_1 с выхода нелинейного блока *5*, на котором «набрана» зависимость $H_{см} = f(B_{см})$. В соответствии с (3.17) на выходе сумматора *4* имеем ток $i_{эм}$. Ток $i_{эм}$ поступает через интегратор *6* и коэффициент K_5 и через инвертор *7* и коэффициент K_6 — на вход сумматора *8*. На выходе блока *8* получается $-\Phi_{2м}$ [уравнение (3.18)]. Поток $\Phi_{2м}$ поступает на вход сумматора *2*, замыкая цепь. Величины $\Phi_{1м}$ и $\Phi_{2м}$ возводятся в квадрат умножителями *9* и *10*. После умножения потоков $\Phi^2_{1м}$ и $\Phi^2_{2м}$ на K_7 и K_8 получим усилия $F_{1м}$ и $F_{2м}$. Сумматор *11* позволяет получить суммарное усилие $F_м$.

Изменение величин δ_1, δ_2, S_1, S_2, $R_э$, L_S и т. д. сводится к изменению соответствующих постоянных коэффициентов. Изменение материала магнитопровода требует перебора зависимостей $H_{см} = f(B_{см})$ на нелинейных блоках *3* и *5*.

Ранее было принято, что магнитный поток Φ изменяется синусоидально. Однако описанная структурная схема модели позволяет рассчитывать процессы в экране при любой форме кривой потока. Для этого лишь необходимо зависимость $\Phi_м = f(t_м)$ установить на блоке переменных коэффициентов *1*.

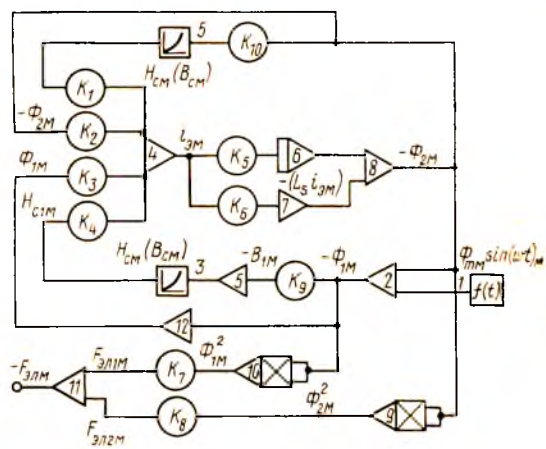


Рис. 3.8. Структурная схема модели для определения тягового усилия

В качестве примера рассмотрим процессы, происходящие в экране электромагнита (сталь Э12) переменного тока, при следующих условиях: $\Phi = 3{,}44 \cdot 10^{-4}$ Вб; $S_1 = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$ м²; $S_2 = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ м²; $l_п = 0{,}35 \cdot 10^{-2}$ м; $R_э = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ Ом; $\delta_1 = \delta_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ м.

Зависимости от времени потоков Φ_1, Φ_2, тока $i_э$ и тягового усилия F, полученные на модели, приведены на рис. 3.9. Там же показаны экспериментальные зависимости потоков Φ_1, Φ_2 от времени,

полученные при условиях, аналогичных расчетным. Опытные значения потоков определены с помощью измерительных обмоток, охватывающих сечения S_1 и S_2, и интегрирования осциллограмм ЭДС, индуцированных в измерительных обмотках.

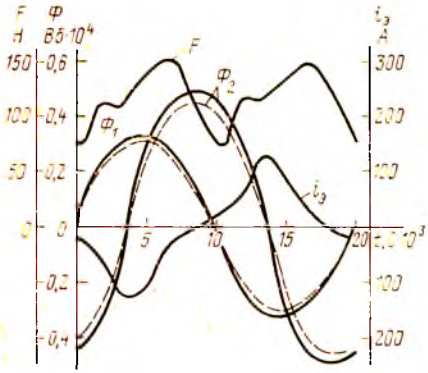


Рис. 3.9. Расчетные и опытные зависимости электромагнита с экраном:
——— расчетные; — — — опытные

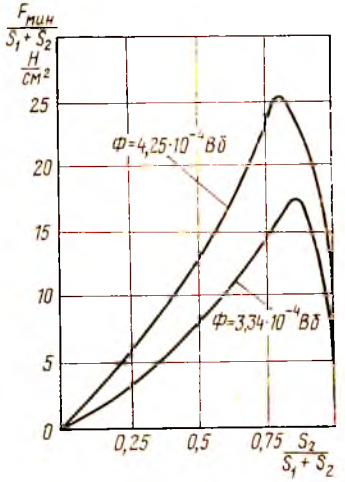


Рис. 3.10. Зависимости удельного минимального тягового усилия от соотношения площадей при $R_э$=const, $\delta_1=\delta_2$=const

На рис. 3.10 показаны зависимости удельного минимального тягового усилия $F_{мин}/(S_1+S_2)$ от соотношения площадей $S_2/(S_1+S_2)$ при $R_э$=const, $\delta_1=\delta_2$=const для различных значений потока.

ГЛАВА 4

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА АВМ

§ 4.1. Динамические характеристики электромагнитов постоянного и переменного тока

Многие современные автоматизированные электроприводы характеризуются большой частотой работы их элементов. Повышение частоты обусловлено растущими требованиями к быстродействию систем. В связи с этим аппаратам управления (электромагнитным контакторам, реле и др.) при достаточно высоком быстродействии приходится иногда совершать до 5000—7000 включений/ч. Для обеспечения достаточной надежности и долговечности от некоторых типов аппаратов требуется, чтобы они выдерживали до 30—40 млн. циклов срабатывания. Указанные аппараты имеют массовое применение. В связи с этим особое значение приобре-

тают проблемы износа элементов конструкции (контактов, магнитных систем, катушек и т. д.).

Совершенно очевидно, что правильно конструировать новые типы аппаратов нельзя без учета обстоятельств, которые влияют на износ, а также без умения производить расчет процессов, происходящих при работе аппарата. Работа частей электромагнитного аппарата связана с явлениями, протекающими при ударах, сопровождающих включение: удар контактов друг о друга, соударение якоря магнитной системы с ярмом. Деформации, вызванные ударами, приводят к износу элементов (контакты, оси и опоры, полюсы магнитопроводов) аппарата. Вопрос о построении износоустойчивых аппаратов, таким образом, связан с устранением или с всемерным ослаблением ударов.

При проектировании аппаратов об их работоспособности судят по статической тяговой характеристике приводного электромагнита. Стремятся к тому, чтобы статическая тяговая характеристика на протяжении всего хода якоря располагалась выше характеристики противодействующих усилий. Однако процесс включения аппарата определяется не статическими, а динамическими его характеристиками, выражающими характер рабочих процессов во времени. К динамическим характеристикам относят зависимости от времени тока в обмотке приводного электромагнита i, его тягового усилия $F_{эл}$, потокосцепления обмотки Ψ, перемещения подвижной системы x, ее скорости dx/dt и ускорения d^2x/dt^2.

Статическая тяговая характеристика определяется при установившемся значении тока в обмотке электромагнита. В процессе перемещения подвижной системы ток будет отличаться от установившегося значения. Вследствие этого динамическое тяговое усилие отличается от статического при одном и том же положении якоря. Поэтому создание аппаратов, обладающих высокой механической и электрической износоустойчивостью и достаточным быстродействием, непосредственно связано с исследованием динамических процессов в них. Только расчет динамики дает возможность установить рациональные соотношения параметров конструкции с точки зрения ее надежности и износоустойчивости.

В общем случае динамические процессы, протекающие при включении электрического аппарата, характеризуются системой, состоящей из следующих нелинейных дифференциальных уравнений: уравнения электрической цепи обмотки приводного электромагнита

$$u = iR + d\Psi/dt; \tag{4.1}$$

уравнения перемещения подвижной системы аппарата

$$F_{эл} = M\frac{d^2x}{dt^2} + F_{пр}(x) + F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right); \tag{4.2}$$

уравнения тягового усилия приводного электромагнита

$$F_{эл} = f(i,\ x); \tag{4.3}$$

уравнения перемещения подвижного контакта при его вибрациях

$$x_к = f(v_у,\ \varepsilon,\ c_к,\ x_{пр.к},\ M_к); \tag{4.4}$$

уравнения потокосцепления

$$\Psi = f(i,\ x). \tag{4.5}$$

Здесь M — масса подвижной системы, приведенная к якорю электромагнита; x — путь, пройденный якорем электромагнита; $F_{пр}(x)$, $F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ — усилия, противодействующие движению и зависящие соответственно от перемещения и скорости движения подвижной системы; $v_у$ — скорость подвижного контакта аппарата непосредственно перед ударом; ε — коэффициент восстановления скорости подвижного контакта; $c_к$ — жесткость контактной пружины; $x_{пр.к}$ — предварительное сжатие ее; $M_к$ — масса подвижного контакта.

Строгое аналитическое решение приведенной системы уравнений до сих пор не найдено. Различные приближенные способы ее решения трудоемки и не обеспечивают необходимой точности. Применение АВМ позволяет значительно снизить трудоемкость расчетов и повысить их точность.

Ниже рассматривается поверочный расчет динамических характеристик электромагнитных механизмов. Задачей расчета является определение тока i, потокосцепления Ψ, тягового усилия $F_{эл}$ или момента $M_{эл}$, пути подвижной системы x или ее углового перемещения φ, линейной dx/dt или угловой $d\varphi/dt$ скоростей подвижной системы и ее ускорения d^2x/dt^2 или $d^2\varphi/dt^2$, а также зависимостей от времени величин, определяющих поведение подвижного контакта при его вибрации (зазора между контактами, скорости и ускорения контакта).

Для этого необходимо иметь следующие данные: 1) тип и конструкцию аппарата; 2) материал и размеры магнитопровода электромагнита; 3) данные обмотки электромагнита; 4) значение и закон изменения во времени напряжения, питающего обмотку; 5) рабочий ход якоря электромагнита, раствор и провал контактов; 6) материал и размеры деталей аппарата, участвующих в движении при включении (подвижные контакты, контактные пружины, контактодержатели, скобы, тяги и т. п.); 7) зависимость сил (или моментов), противодействующих перемещению подвижной системы, от пути и скорости. Рассчитаем динамические характеристики электромагнита с учетом приведенных масс и характера противодействующих движению сил. Расчет процесса включения электрического аппарата, в котором электромагнит играет роль привода, будет рассмотрен дальше. Вначале решим задачу для случая, когда сопротивлением ферромагнитных участков магнитопровода по сравнению с воздушными зазорами можно пренебречь (магнитная цепь линейна). Одновременно полагаем, что активное сопротивление обмотки постоянно. Для оценки погрешности, вносимой последним допущением, предположим, что в ка-

тушке протекает ток в течение 0,1 с. При плотности тока 500 А/см² катушка из меди нагревается за это время на 0,015 °С, а из алюминия — на 0,031 °С. Соответственно при плотности тока 8000 А/см² катушки нагреваются на 3,77 и 7,80 °С. Увеличением сопротивления, вызванным такими изменениями температуры, при решении задач динамики можно пренебречь. Рост сопротивления обмотки нужно учитывать, когда важно время включения или имеет место очень большая плотность тока.

Для случая линейной магнитной цепи удобно пользоваться выражением $\Psi = Li$.

Исходными для расчета будут уравнения

$$u = iR + d(Li)/dt, \tag{4.6}$$

$$F_{эл} = 0{,}5i^2\, dL/dx \tag{4.7}$$

и уравнение (4.2).

Расчет динамических характеристик сводится к совместному решению уравнений. Кроме этих уравнений необходимо иметь зависимости $L = f(x)$ и $dL/dx = f(x)$, которые могут быть получены при расчете магнитной цепи.

Перепишем (4.6) в виде

$$d(Li) = (u - iR)\, dt.$$

С помощью масштабов приведем исходные уравнения к машинной форме:

$$d(Li) = m_{Li}\, d(Li)_м = (m_u u_м - R m_i i_м)\, m_t dt_м,$$

откуда

$$d(Li)_м = (m_u m_t u_м / m_{Li} - R m_i m_t i_м / m_{Li})\, dt_м,$$

или

$$d(Li)_м = (K_1 u_м - K_2 i_м)\, dt_м, \tag{4.8}$$

где $K_1 = m_u m_t / m_{Li}$; $K = R m_i m_t / m_{Li}$.

Уравнение (4.2) представим в виде

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_м = \frac{m_{F_{эл}} m_t^2}{M m_x} F_{эл.м} - \frac{m_{F_{пр}} m_t^2}{M m_x} F_{пр}(x)_м - \frac{m_{F_{пр}} m_t^2}{M m_x} F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right)_м,$$

или

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_м = K_4 F_{эл.м} - K_8 F_{пр}(x)_м - K_3 F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right)_м, \tag{4.9}$$

где $K_3 = m_{F_{пр}} m_t^2 / (M m_x)$; $K_4 = m_{F_{эл}} m_t^2 / (M m_x)$.

Из уравнения (4.7) $m_{F_{эл}} F_{эл.м} = 0{,}5 m_i^2 m_{dL/dx} i_м^2 (dL/dx)_м$, откуда машинное тяговое усилие

$$F_{эл.м} = i_м^2 (dL/dx)_м. \tag{4.10}$$

Поэтому $m_{F_{эл}} = 0{,}5 m_i^2 m_{dL/dx}$.

По (4.8)—(4.10) составлена схема модели, приведенная на рис. 4.1. В соответствии с уравнением (4.8) в схеме на один вход интегратора через коэффициент K_1 подадим величину $u_м$, на другой вход — значение тока со знаком минус, умноженную на коэффициент K_2. На

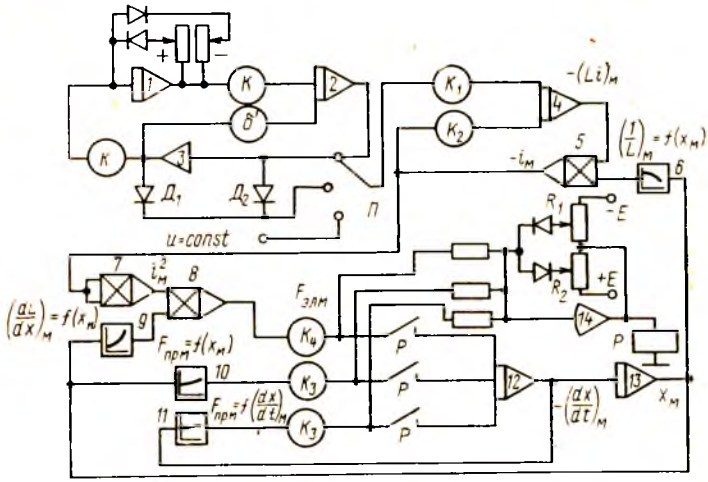


Рис. 4.1. Структурная схема модели для расчета динамических характеристик

выходе интегратора *4* получим произведение $-(Li)_м = -\Psi_м$. С помощью умножителя *5* произведение $-(Li)_м$ перемножается с $(1/L)_м$. Поэтому на выходе умножителя *5* появится значение тока $-i_м$, которое и поступает на вход интегратора.

Для получения перемещения $x_м$ на входы интегратора *12* необходимо подать через постоянные коэффициенты K_4 и K_3 величины $F_{эл.м}$, $-F_{пр}(x)_м$ и $-F_{пр}(dx/dt)_м$. На выходе этого интегратора получим значение скорости движения механической системы электромагнита. Так как выход интегратора *12* подключен к входу интегратора *13*, то на выходе последнего будем иметь значение перемещения $x_м$.

Для решения уравнения тягового усилия (4.10) ток поступает на оба входа умножителя *7*, возводящего ток в квадрат. С помощью блока *8* величина $i_м^2$ умножается на производную индуктивности по перемещению $(dL/dx)_м$. На выходе умножителя *8* будем иметь тяговое усилие $F_{эл.м}$.

Индуктивность L, а следовательно, и величина, ей обратная, т. е. $1/L$, нелинейно связаны с перемещением x. В схеме зависимость $(1/L)_м = f(x_м)$ воспроизводится с помощью нелинейного блока *6*, на вход которого поступает значение $x_м$. Нелинейно от перемещения зависит и dL/dx, вследствие чего зависимость $(dL/dx)_м = f(x_м)$ моделируется нелинейным блоком *9*, с выхода которого $(dL/dx)_м$ поступает на один из входов умножителя *8* для образования тягового усилия. Зависимость $F_{пр.м} = f(x_м)$ моделируется нелинейным блоком *10*. С выхода этого блока значение противодействующего усилия поступает на вход интегратора *12*. В схеме принята нелинейная зависи-

мость между противодействующим усилием $F_{пр}(dx/dt)$ и скоростью движения якоря электромагнита. Поэтому в схеме это усилие образуется с помощью нелинейного блока *11*. В случае линейной зависимости $F_{пр}(dx/dt)=R_F(dx/dt)$ необходимо включить вместо нелинейного блока постоянный коэффициент R_F.

Усилитель *14* и чувствительное реле *Р* в структурной схеме предназначены для сравнения тягового и противодействующих усилий. При равенстве последних реле *Р*, срабатывая, замыкает контакты и подключает часть схемы, моделирующую уравнение перемещения системы электромагнита (интеграторы *12* и *13*). Структурная схема, приведенная на рис. 4.1, универсальна и пригодна для расчета динамических характеристик электромагнитов при питании их обмоток постоянным, переменным и выпрямленным двухполупериодным напряжением.

В случае постоянного напряжения последнее необходимо подать на зажим $u=\text{const}$ (переключатель *П* ставится в нижнее положение). При питании обмотки переменным напряжением переключатель *П* ставится в верхнее положение. Тем самым схема подключается к генератору гармонических колебаний, состоящему из интеграторов *1*, *2* и инвертора *3*. При питании обмотки выпрямленным двухполупериодным напряжением переключатель *П* следует поставить в среднее положение. При этом диоды $Д_1$ и $Д_2$, включенные на выходах элементов *2* и *3*, позволяют на общем выходе получить двухполупериодное выпрямленное напряжение.

Пример. Необходимо рассчитать динамические характеристики реле переменного тока с прямоходовой подвижной системой и электромагнитом с П-образным ярмом и плоским якорем.

Исходные данные для моделирования: напряжение на зажимах обмотки реле $u=380$ В (эфф.); активное сопротивление обмотки $R=194$ Ом; масса подвижной системы $M=0{,}184$ кг; начальный рабочий зазор $\delta=0{,}6\cdot10^{-2}$ м; значения фазы напряжения в момент включения реле α равны 0 и $\pi/4$. Исходные зависимости, определенные при расчете линейной магнитной системы, и характеристика нагрузки реле (характеристика противодействующих сил) приведены ниже:

$x\cdot10^2$, м	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
L, Гн	0,569	0,617	0,693	0,833	1,130	1,950	5,200
$1/L$, Гн$^{-1}$	1,760	1,620	1,440	1,200	0,855	0,513	0,192
dL/dx, Гн$\cdot10^2$/м	0,481	0,706	1,110	2,070	4,120	16,900	161,000
$F_{пр}(x)$, Н	14	—	—	—	16,23	—	28

Примечание. В расчете принято $F_{пр}(dx/dt)=0$.

Решение. Определим масштабы переменных и рассчитаем коэффициенты модели. При определении масштаба времени ориентировочно считаем реальное время срабатывания реле 0,02 с, машинное время — 20 с. Этого времени достаточно для измерения всех величин или фиксации зависимостей на экране осциллографа. Тогда масштаб времени $m_t=0{,}001$ с. Масштаб напряжения $m_u=U_m/u_м=536/100=5{,}36$. Коэффициент генератора гармонических колебаний $K=\omega_t=314\cdot0{,}001=0{,}314$. Масштаб $m_{1/L}=1{,}76/100$ (Гн$\cdot$В)$^{-1}=0{,}0176$ (Гн$\cdot$В)$^{-1}$. Исходя из средних значений тока и индуктивности, принимаем $m_{Li}=0{,}0125$ Вб/В. Масштаб тока $m_i=m_{Li}\cdot m_{1/L}=0{,}0125\cdot0{,}0176\cdot10^2$ А/В$=0{,}021$ А/В. Далее определяем $m_{dL/dx}=161\cdot10^{-2}/100$ г/(м$\cdot$В)$=0{,}0161$ г/(м$\cdot$В); $m_{F_{эл}}=0{,}5\cdot10^4m_i^2m_{dL/dx}=0{,}5\times$

$\times 10^4 \cdot 0{,}021^2 \cdot 0{,}0161$ м/В$=0{,}0355$ Н/В; $m_x = 6 \cdot 10^{-2}/100$ м/В$=0{,}6 \cdot 10^{-4}$ м/В (множители 10^2 и 10^4 при определении масштабов тока и силы введены ввиду того, что на выходах умножителей получаются произведения входных величин, делен-

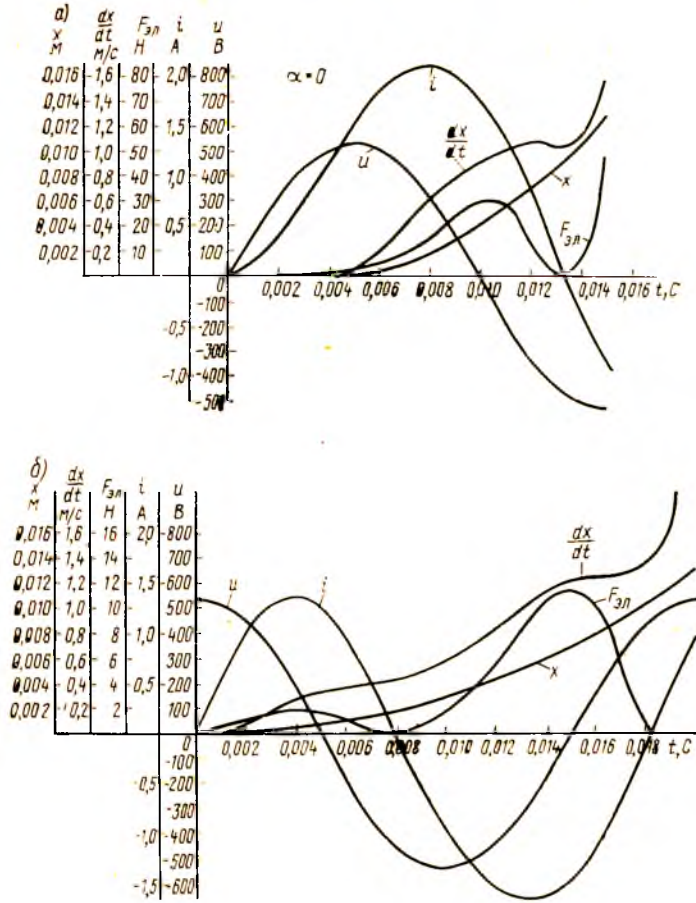


Рис. 4.2. Динамические характеристики реле

ные на 10^2). Приняв $m_{F_{эл}} = m_{F_{пр}}$, рассчитаем коэффициенты модели: $K_1 = 5{,}36 \times \times 0{,}001/0{,}0125 = 0{,}429$; $K_2 = 194 \cdot 0{,}021 \cdot 0{,}001/0{,}0125 = 0{,}326$; $K_2 = K_4 = 0{,}0355 \times \times 10^{-6}/(0{,}184 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-4}) = 0{,}32 \cdot 10^{-2}$.

Масштаб скорости $m_{dx/dt} = m_x/m_t = 0{,}001/(0{,}6 \cdot 10^{-4})$ м/(с·В)$=16{,}6$ м/(с·В). Результаты моделирования приведены в виде зависимостей на рис. 4.2, *а*, *б*.

§ 4.2. Моделирование динамики электромагнитов, включенных в искусственные схемы для изменения времени действия

В практике проектирования и эксплуатации электромагнитов постоянного тока во многих случаях бывает необходимым изменение времени включения. Для уменьшения времени срабатывания

используют схемы форсировки, применяя для этого шунтирование добавочного сопротивления емкостью, собственным контактом. Используют также схемы с двухсекционной катушкой. Замедление включения достигается шунтированием обмотки электромагнита постоянным сопротивлением, емкостью, включенной последовательно с обмоткой индуктивной катушки и т. д. Рассмотрим расчет на АВМ динамики включения электромагнитов постоянного тока в некоторых из перечисленных случаев.

Рис. 4.3. Схема шунтирования добавочного сопротивления емкостью

Шунтирование добавочного сопротивления емкостью. Схема, показанная на рис. 4.3, используется для убыстрения действия электромагнита. Она может быть применена для интенсивного увеличения тягового усилия при уменьшении габаритов электромагнита. Такая необходимость может возникнуть, например, в тяговых электромагнитах при не зависящей от перемещения якоря механической нагрузке и т. д. В первый момент после включения конденсатор C шунтирует сопротивление $R_д$ и к обмотке прикладывается повышенное напряжение. По мере заряда конденсатора напряжение на нем растет, а на зажимах обмотки — падает, достигая номинального значения после затухания переходных процессов.

Систему уравнений, описывающую процесс включения, можно записать в виде

$$u=iR+\frac{d(Li)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i_2dt;\ i_1R_д=\frac{1}{C}\int_0^t i_2dt=u_C;\ i=i_1+i_2.$$

Эта система должна быть дополнена уравнениями (4.2) и (4.7). Здесь C — емкость, шунтирующая добавочное сопротивление, u_C — напряжение на емкости, i, i_1, i_2 — соответственно токи в обмотке электромагнита, добавочном сопротивлении и емкости.

В машинной форме уравнения динамики

$$(Li)_м=\int_0^{t_м}\left(\frac{m_u m_t}{m_{Li}}u_м-\frac{Rm_i m_t}{m_{Li}}i_м-\frac{m_u m_t}{m_{Li}}u_{см}\right)dt_м,$$

или

$$(Li)_м=\int_0^{t_м}(K_1u_м-K_2i_м-K_1u_{см})\,dt_м. \qquad (4.11)$$

Аналогично,

$$i_{1м}=\frac{m_u}{m_iR_д}u_{см};\quad u_{см}=\frac{m_im_t}{Cm_u}\int_0^{t_м}i_{2м}dt_м$$

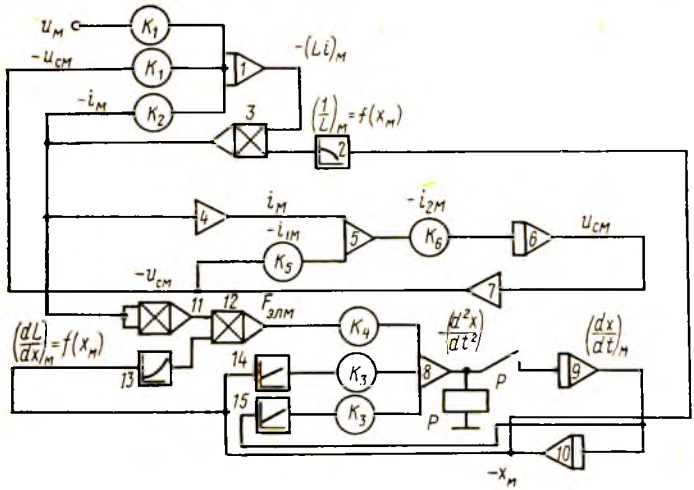


Рис. 4.4. Структурная схема модели для расчета характеристик в схеме с шунтирующей емкостью

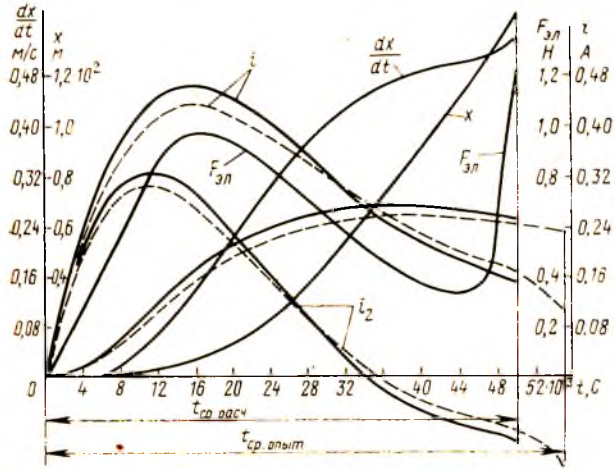


Рис. 4.5. Расчетные и опытные характеристики электромагнита, включенного по схеме с шунтирующей емкостью:

——— расчетная; — — — опытная

или

$$i_{1м}=K_5 u_{см};\ u_{см}=K_6 \int_0^{t_м} i_{2м}dt_м, \qquad (4.12)$$

где $K_5=m_u/(m_i R_д)$; $K_6=m_i m_t/(Cm_u)$.

Далее,

$$i_{1м}+i_{2м}=i_м. \qquad (4.13)$$

По приведенным уравнениям составлена структурная схема модели, показанная на рис. 4.4. Расчетные и опытные динамические характеристики электромагнита, включенного по схеме рис. 4.3, приведены на рис. 4.5.

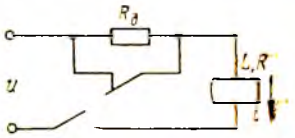


Рис. 4.6. Схема с шунтированием добавочного сопротивления размыкающим контактом

Шунтирование добавочного сопротивления размыкающим контактом. До начала движения якоря электромагнита (рис. 4.6) контакт, шунтирующий добавочное сопротивление, замкнут. В конце хода якоря контакт размыкается и сопротивление оказывается включенным последовательно с катушкой. В результате ток катушки снижается до значения, необходимого для удержания якоря в притянутом положении.

Процесс включения можно разбить на два этапа: 1) от начала включения до момента размыкания шунтирующего контакта (здесь размыкание контакта принимается мгновенным); 2) от момента размыкания контакта до момента полного притяжения якоря.

На первом этапе справедливы уравнения (4.6) и (4.7). На втором этапе уравнение электрической цепи обмотки можно представить в виде $u=iR+iR_д+d(Li)/dt$.

В машинной форме

$$(Li)_м=\int_0^{t_м}(K_1 u_м - K_2 i_м - K_2' i_м)\,dt_м, \qquad (4.14)$$

где $K_2'=R_д m_i m_t/m_{Li}$.

Для решения уравнений (4.2), (4.6), (4.7) и (4.14), описывающих динамику включения электромагнита в данной схеме, пригодна схема модели, показанная на рис. 4.1. В ней необходимо лишь добавить еще один вход к интегратору *4*, к которому через постоянный коэффициент K_2' и контакты чувствительного реле подключен выход умножителя *5*. С выхода этого умножителя на вход интегратора поступает ток $i_м$. Реле *P* настроено на напряжение срабатывания, соответствующее значению $x_м$, при котором размыкается шунтирующий контакт с вводом сопротивления $R_д$.

Электромагнит с двухсекционной втягивающей катушкой. Магнитодвижущую силу срабатывания создает включающая секция (рис. 4.7). Удерживающая секция шунтируется собственным размыкающим контактом. В конце хода якоря электромагнита контакт размыкается, подключается удерживающая секция и вместе с включающей создает

МДС удержания. Таким образом, катушка работает в форсированном режиме. Применение двухсекционной катушки позволяет уменьшить время включения и габариты электромагнита.

В процессе включения можно выделить несколько этапов: 1) от момента включения катушки до начала движения подвижной системы; 2) от начала движения до начала размыкания собственного контакта, шунтирующего удерживающую секцию; 3) от начала размыкания собственного контакта до погасания дуги и прекращения тока через контакт; 4) от момента прекращения тока в цепи собственного контакта до окончания движения подвижной системы (этому этапу соответствует последовательное включение включающей и удерживающей секций катушки).

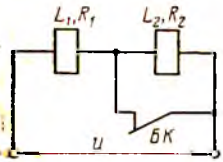


Рис. 4.7. Схема электромагнита с двухсекционной втягивающей катушкой

Дифференциальные уравнения на первом этапе имеют вид

$$u=i_1R_1+\frac{d(L_1i_1)}{dt}+\frac{d(M_Bi_2)}{dt};\quad 0=i_2R_2+\frac{d(L_2i_2)}{dt}+\frac{d(M_Bi_1)}{dt}. \quad (4.15)$$

Здесь i_1, i_2 — токи в цепи включающей и удерживающей секций; L_1, L_2, R_1, R_2 — индуктивности и сопротивления включающей и удерживающей секций; $M_B=K\sqrt{L_1L_2}$ — взаимная индуктивность; K — коэффициент магнитной связи секций. В общем случае $K=f(x)$.

На втором этапе уравнения (4.15) дополняются уравнением движения (4.2). На третьем этапе справедливы уравнения

$$u=i_1R_1+\frac{d(L_1i_1)}{dt}+\frac{d(M_Bi_2)}{dt}+u_к;\quad u_к=i_2R_2+\frac{d(L_2i_2)}{dt}+\frac{d(M_Bi_1)}{dt}, \quad (4.16)$$

где $u_к$ — напряжение на контактах, шунтирующих удерживающую секцию.

На четвертом этапе справедливо уравнение (4.2) и уравнение электрической цепи записывается в виде

$$u=i(R_1+R_2)+d(L_{экв}i)\,dt.$$

Здесь i — общий ток, протекающий в цепи последовательно соединенных секций обмотки; $L_{экв}$ — эквивалентная индуктивность. Тяговое усилие $F_{эл}$ определяется как частная производная механической работы по перемещению:

$$F_{эл}=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{i=\text{const}}.$$

В линейных системах при неизменном токе приращение магнитной энергии равно совершаемой механической работе; для нашего

случая, считая в каждый фиксированный момент времени токи постоянными, можно записать

$$F_{эл}=\frac{i_1^2}{2}\frac{\partial L_1}{\partial x}+i_1 i_2\frac{\partial M_B}{\partial x}+\frac{i_2^2}{2}\frac{\partial L_2}{\partial x}. \qquad (4.17)$$

Наиболее общими являются уравнения третьего этапа. Уравнения (4.2), (4.16) представим в следующем виде:

$$x=\frac{1}{M}\int_0^t dt\int_0^t\left[F_{эл}-F_{пр}(x)-F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]dt;$$

$$i_1=\frac{1}{M_B}\left[\int_0^t(u_к-i_2R_2)\,dt-L_2i_2\right];$$

$$i_2=\frac{1}{M_B}\left[\int_0^t(u-i_1R_1-u_к)\,dt-L_1i_1\right].$$

Приведем уравнения к машинной форме:

$$F_{эл.м}=\frac{m_i^2 m_{\partial L/\partial x}}{2m_{F_{эл}}}\,i_{1м}^2\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)_м+\frac{m_i^2 m_{\partial M_B/\partial x}}{m_{F_{эл}}}\,i_{1м}i_{2м}\left(\frac{\partial M_B}{\partial x}\right)_м+$$

$$+\frac{m_i^2 m_{\partial L/\partial x}}{2m_{F_{эл}}}\,i_{2м}^2\left(\frac{\partial L_2}{\partial x}\right)_м=K_5 i_{1м}^2\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)_м+K_6 i_{1м}i_{2м}\left(\frac{\partial M_B}{\partial x}\right)_м+$$

$$+K_5 i_{2м}^2\left(\frac{\partial L_2}{\partial x}\right)_м; \qquad (4.18)$$

$$i_{2м}=\left(\frac{1}{M_B}\right)_м\left[\int_0^{t_м}\left(\frac{m_u m_{1/M_B}m_t}{m_i}u_м-R_1 m_{1/M_B}m_t i_{1м}-\frac{m_u m_{1/M_B}m_t}{m_i}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,u_{км}\right)dt_м-m_L m_{1/M_B}L_{1м}i_{1м}\right], \qquad (4.19)$$

или

$$i_{2м}=\left(\frac{1}{M_B}\right)_м\left[\int_0^{t_м}(K_7u_м-K_8i_{1м}-K_7u_{км})\,dt_м-K_9L_{1м}i_{1м}\right];$$

$$i_{1м}=\left(\frac{1}{M_B}\right)_м\left[\int_0^{t_м}\frac{m_u m_{1/M_B}m_t}{m_i}u_{км}-R_2 m_{1/M_B}m_t i_{2м}\right]dt_м-$$

$$-m_L m_{1/M_B}L_{2м}i_{2м},$$

или

$$i_{1\text{м}}=\left(\frac{1}{M_B}\right)_{\text{м}}\left[\int_0^{t_{\text{м}}}(K_7u_{\text{км}}-K_{10}i_{2\text{м}})\,dt_{\text{м}}-K_9L_{2\text{м}}i_{2\text{м}}\right]. \qquad (4.20)$$

Аналогично,

$$x_{\text{м}}=\int_0^{t_{\text{м}}}dt_{\text{м}}\int_0^{t_{\text{м}}}\left[\frac{m_{F_{\text{эл}}}m_i^2}{Mm_x}F_{\text{эл}\text{м}}-\frac{m_{F_{\text{пр}}}m_i^2}{Mm_x}F_{\text{пр}}(x)_{\text{м}}-\right.$$

$$\left.-\frac{m_{F_{\text{пр}}}m_i^2}{Mm_x}F_{\text{пр}}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{м}}\right]dt_{\text{м}}, \qquad (4.21)$$

или

$$x_{\text{м}}=\int_0^{t_{\text{м}}}dt_{\text{м}}\int_0^{t_{\text{м}}}\left[K_4F_{\text{эл}\text{м}}-K_3F_{\text{пр}}(x_{\text{м}})-K_3F_{\text{пр}}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{м}}\right]dt_{\text{м}}.$$

В этих уравнениях

$$K_5=\frac{m_i^2m_{\partial L/\partial x}}{2m_{F_{\text{эл}}}};\quad K_6=\frac{m_i^2m_{\partial M_B/\partial x}}{m_{F_{\text{эл}}}};\quad K_7=\frac{m_um_{1/M_B}m_t}{m_i};$$

$$K_8=R_1m_{1/M_B}m_t;\quad K_9=m_Lm_{1/M_B};\quad K_{10}=R_2m_{1/M_B}m_t.$$

Схема модели, составленная по машинным уравнениям, содержит 17 нелинейных блоков и умножителей. Такое количество нелинейных блоков делает схему неустойчивой и затрудняет работу. Поэтому целесообразно принять разумные допущения, ведущие к упрощению структурной схемы модели. В выражении $M_B=K\sqrt{L_1L_2}$ примем $K=1$. Тогда запишем:

$$L_1=w_1^2G_{\text{пр}};\quad L_2=w_2^2G_{\text{пр}}. \qquad (4.22)$$

Здесь w_1 и w_2 — число витков секций; $G_{\text{пр}}$ — приведенная магнитная проводимость.

В этом случае $L_1/L_2=w_1^2/w_2^2=\text{const}$. Соотношение $L_1/L_2=\text{const}$ примем и при $K<1$. Обозначим $L_2/L_1=c_L$, тогда

$$L_2=c_LL_1;\quad M_B=K\sqrt{L_1L_2}=K\sqrt{c_LL_1^2}=KL_1\sqrt{c_L}=p_LL_1. \qquad (4.23)$$

Из уравнений (4.16), (4.17) будем иметь:

$$i_1=(1/L_1)\int_0^t(u-i_1R_1-u_{\text{к}})\,dt-p_Li_2,\quad i_2=[1/(c_LL_1)]\times$$

$$\times\int_0^t(u_{\text{к}}-i_2R_2)\,dt-p_Li_1/c_L;\quad F_{\text{эл}}=(\partial L_1/\partial x)\,(\,i_1^2/2+p_Li_1i_2+c_Li_2^2/2).$$

На основании многочисленных опытных данных можно принять, что при размыкании собственного контакта ток в его цепи изменяется по закону прямой, по прямой же восстанавливается и напряжение на контактах, т. е.

$$i_к = i_у - bt;\ u_к = at,$$

где $i_у$ — ток в цепи контакта перед размыканием; a, b — постоянные.

Уравнения динамики в машинной форме:

$$i_{1м} = (1/L_1)_м \int_0^{t_м} (K_{11}u_м - K_{12}i_{1м} - K_{11}u_{км})\,dt - K_{13}i_{2м}; \qquad (4.24)$$

$$i_{2м} = (1/L_1)_м \int_0^{t_м} (K_{14}u_{км} - K_{15}i_{2м})\,dt_м - K_{16}i_{1м}, \qquad (4.25)$$

где $K_{11} = m_u m_{1/L} m_t / m_i$; $K_{12} = R_1 m_{1/L} m_t$; $K_{13} = p_L$; $K_{14} = m_u m_{1/L} m_t / (c_L m_i)$; $K_{15} = R_2 m_{1/L} m_t / c_L$; $K_{16} = p_L / c_L$.

Аналогично,

$$F_{эл.м} = \left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)_м \left(\frac{m_{\partial L/\partial x} m_i^2}{2m_{F_{эл}}} i_{1м}^2 + \frac{m_{\partial L/\partial x} m_i^2 p_L}{m_{F_{эл}}} i_{1м} i_{2м} + \frac{c_L m_{\partial L/\partial x} m_i^2}{2m_{F_{эл}}} i_{2м}^2 \right)$$

или

$$F_{эл.м} = (\partial L_1/\partial x)_м \left[(K_{17} i_{1м} + K_{18} i_{2м}) i_{1м} + K_{19} i_{2м}^2 \right].$$

Здесь $K_{17} = \dfrac{m_{\partial L/\partial x} m_i^2}{2m_{F_{эл}}}$; $K_{18} = \dfrac{m_{\partial L/\partial x} m_i^2 p_L}{m_{F_{эл}}}$; $K_{19} = \dfrac{m_{\partial L/\partial x} m_i^2 c_L}{2m_{F_{эл}}}$.

В уравнениях (4.24) $u_{км} = 0$ на первом и втором этапах, $u_{км} = at_м$ на третьем этапе.

Структурная схема модели, построенная по уравнениям (4.2) и (4.24) — (4.25), представлена на рис. 4.8. В схеме напряжение — $u_м$ через коэффициент K_{11} поступает на вход интегратора *1*. Если на второй вход этого интегратора через коэффициент K_{12} подать ток $i_{1м}$, а на третьем этапе через K_{11} — напряжение $u_{км}$, то на выходе интегратора *1* появится величина $L_{1м}(i_{1м} + K_{13}i_{2м})$. Эта сумма поступает на вход умножителя *13*, на второй вход которого подается величина — $(1/L_1)_м$. На выходе этого умножителя получим величину $-K_{13}i_{2м} - i_{1м}$. Сумматором *2* эта величина складывается с $K_{13}i_{2м}$, так что на выходе будем иметь ток $i_{1м}$. Аналогично работает цепь, состоящая из интегратора *3* и сумматора *4*.

Величина — $(1/L_1)_м$ поступает на входы умножителей *13* и *14* с выхода линейного блока *15*, на котором набрана нелинейная зависимость — $(1/L_1)_м = f(x_м)$.

Для получения электромагнитного усилия $F_{эл.м}$ ток $i_{1м}$ с выхода сумматора *2* подается на вход сумматора *6*, на второй вход которого поступает ток $i_{2м}$ с выхода сумматора *4* через соответствующий коэффициент. Выходы сумматоров *2* и *6* подключены к входам умножителя *16*, выход последнего соединен с входом сумматора *8*. На второй вход этого сумматора подается ток $i^2_{2м}$. Поэтому на выходе сумматора *8* имеем — $[i_{1м}(K_{17}i_{1м}+K_{18}i_{2м})+K_{19}i^2_{2м}]$.

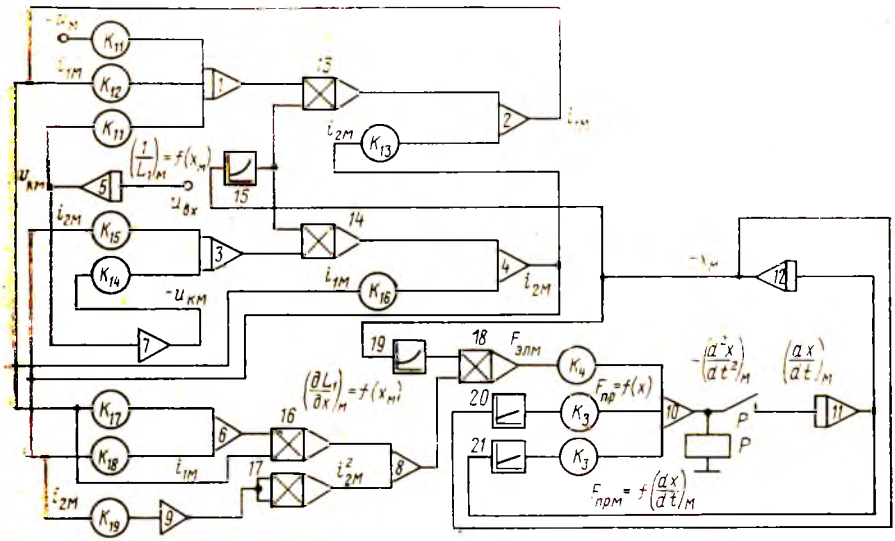


Рис. 4.8. Структурная схема модели для расчета динамики электромагнита с двухсекционной катушкой

Если теперь с помощью блока *18* умножить полученную величину на $-(\partial L_1/\partial x)_м$, то на выходе умножителя *18* получим электромагнитное усилие $F_{эл.м}$. Величина $-(\partial L_1/\partial x)_м$ поступает на вход умножителя *18* с выхода нелинейного блока *19*, воспроизводящего зависимость $-(\partial L_1/\partial x)_м = f(x_м)$.

До начала движения якоря $F_{эл.м} < F_{пр.м}$. Движение начинается при условии $F_{эл.м} = F_{пр.м}$. Реле *P* и сумматор *10* предназначены для сравнения тягового и противодействующего усилий. При равенстве последних реле срабатывает, замыкает свои контакты и подключает часть схемы, моделирующую уравнение движения. При этом на выходе интегратора *11* появится значение скорости движения $(dx/dt)_м$, на выходе интегратора *12* — перемещение — $x_м$, которое поступает на входы нелинейных блоков *15, 19, 20*.

При практическом выполнении расчета оператор должен следить за изменением $x_м$; при значении $x_м$, соответствующем моменту размыкания собственного контакта, необходимо подать напряжение $u_{к.м} = at_м$ (третий этап) на вход интегратора *5*. Напряжение на выходе интегратора $u_{вых} = K_б \int u_{вх} dt_м$ при $u_{вх} = \text{const}$; $u_{вых} = K_б u_{вх} t_м$.

Здесь $K_б$ — коэффициент передачи интегратора; $u_{вх}$ — напряжение, поданное на вход.

При $K_б=1$ величина $u_{вых}=-u_{вх}t_м$. Необходимо выбрать — $u_{вх}=a$. Тогда на выходе получим напряжение, изменяющееся по закону $u_{вых}=at_м$. Напряжение должно быть подано на вход сумматора *1* и через инвертор *1* — на вход интегратора *3*.

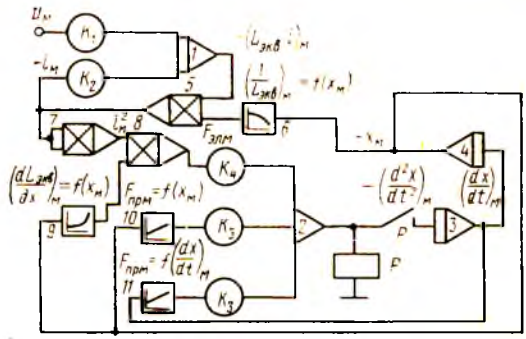


Рис. 4.9. Структурная схема модели для расчета динамики на четвертом этапе

В дальнейшем необходимо следить за изменением токов $i_{1м}$ и $i_{2м}$. Равенство последних означает момент полного размыкания собственного контакта (погасание дуги), и с этого момента должен начаться четвертый этап. Схема расчета на четвертом этапе показана на рис. 4.9. На рис. 4.10 приведены динамические характеристики электромагнита, полученные на модели. Для сравнения на том же

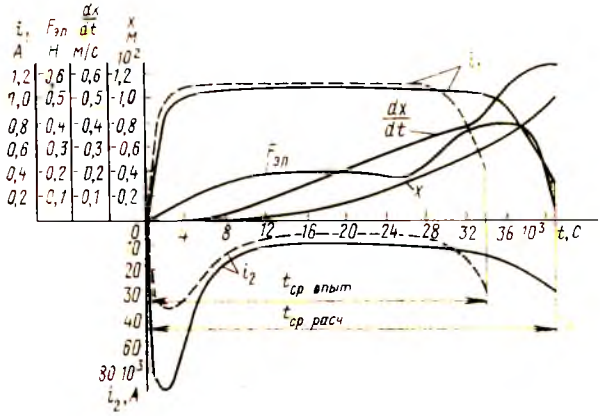


Рис. 4.10. Динамические характеристики электромагнита с двухсекционной катушкой

рисунке показаны опытные зависимости от времени токов i_1 и i_2.

Шунтирование обмотки электромагнита сопротивлением. Эта схема (рис. 4.11) используется для замедления включения. Уравнение динамики будут

$$u=iR_д+i_1R+d(Li_1)/dt;\ i_2R_ш=i_1R+d(Li_1)/dt, \qquad (4.26)$$

а также (4.2), (4.7) и уравнение $i=i_1+i_2$.

С учетом масштабов

$$\left[\frac{d(Li_1)}{dt}\right]_{\text{м}} = \frac{m_u}{m_{d(Li)/dt}} u_{\text{м}} - \frac{m_i R_{\text{д}}}{m_{d(Li)/dt}} i_{\text{м}} - \frac{m_i R}{m_{d(Li)/dt}} i_{1\text{м}},$$

или

$$\left[\frac{d(Li_1)}{dt}\right]_{\text{м}} = K_1 u_{\text{м}} - K_2 i_{\text{м}} - K_5 i_{1\text{м}}. \qquad (4.27)$$

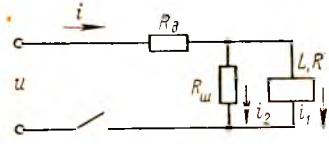


Рис. 4.11. Схема шунтирования обмотки сопротивлением

Аналогично,

$$i_{2\text{м}} = \frac{R}{R_{\text{ш}}} i_{1\text{м}} + \frac{m_{d(Li)/dt}}{m_i R_{\text{ш}}} \left[\frac{d(Li_1)}{dt}\right]_{\text{м}},$$

или

$$i_{2\text{м}} = K_6 i_{1\text{м}} + K_7 [d(Li_1)/dt]_{\text{м}}. \qquad (4.28)$$

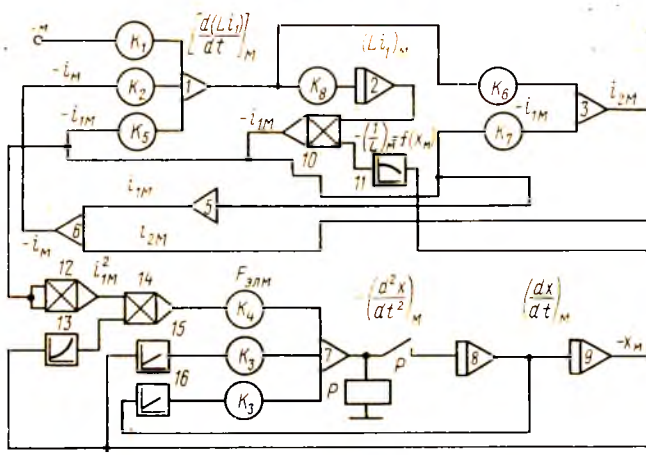


Рис. 4.12. Структурная схема модели для расчета динамики при шунтировании обмотки сопротивлением

В этих уравнениях

$$K_1 = \frac{m_u}{m_{d(Li)/dt}}; \quad K_2 = \frac{m_i R_{\text{д}}}{m_{d(Li)/dt}}; \quad K_5 = \frac{m_i R}{m_{d(Li)/dt}};$$

$$K_6 = \frac{R}{R_{\text{ш}}}; \quad K_7 = \frac{m_{d(Li)/dt}}{m_i R_{\text{ш}}}.$$

На рис. 4.12 приведена структурная схема модели для расчета динамических характеристик.

§ 4.3. Расчет процесса включения электромагнита с учетом насыщения магнитопровода

Ранее рассматривалась методика расчета динамических характеристик электромагнитов постоянного и переменного тока, имеющих ненасыщенную магнитную систему, т. е. когда индуктивность обмотки L зависит только от положения якоря электромагнита. В большинстве случаев магнитная система электромагнита в процессе включения ненасыщена на протяжении бо́льшей части хода якоря. Насыщение наступает при малых зазорах, когда индукция в железе достигает больших значений. Однако существует ряд устройств (электромагниты, работающие кратковременно или в схемах с форсировкой тока), для которых необходимо считаться с насыщением магнитопровода. В этом случае потокосцепление не может быть представлено в виде произведения статической индуктивности L и тока i, так как L является функцией двух переменных: тока i в обмотке и пути x.

С помощью АВМ, оснащенной стандартными решающими элементами, задачу расчета динамических характеристик можно решить приближенно путем кусочно-линейной аппроксимации зависимостей $\Psi = f(i)$ при фиксированных положениях якоря электромагнита. Исходными при этом будут уравнения (4.1) и (4.2). Третьим уравнением должно быть выражение для силы тяги электромагнита

$$F_{эл} = \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, di. \tag{4.29}$$

Учитывая, что ток и путь — независимые переменные, уравнение (4.1) запишем в виде

$$u = iR + \frac{\partial \Psi}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt}. \tag{4.30}$$

Для решения поставленной задачи необходимо располагать зависимостями $\Psi = f(i)_{\delta=\text{const}}$, которые могут быть получены в результате проектного или поверочного расчетов. Величина $\partial\Psi/\partial i$ — динамическая индуктивность системы, зависящая от тока и положения якоря. Если зависимости $\Psi = f(i)_{\delta=\text{const}}$ разбить на отдельные участки по току для фиксированных положений якоря и отрезки кривых заменить прямыми, то в пределах каждого участка для $\delta = \text{const}$ индуктивность будет величиной постоянной (рис. 4.13).

Обозначим $(\partial\Psi/\partial i) = L_1$, $(\partial\Psi/\partial i) = L_2$; $(\partial\Psi/\partial i) = L_3$ — в пределах первого, второго и третьего участков.

Для каждого участка легко построить кривые $\partial\Psi/\partial i = L = f(x)$, которые определяются однозначно. Эти кривые могут воспроизводиться стандартными нелинейными блоками. В зависимости от числа

участков по току, на которые разбиваются кривые $\Psi=f(i)_{\delta=\text{const}}$, необходимо то или иное число нелинейных блоков, на каждом из которых может быть выбрана зависимость $L=f(x)$, соответствующая отдельным токовым участкам. Коммутирующее устройство, состоящее из набора чувствительных полупроводниковых реле, реагируя на значение тока, может подключать тот или иной нелинейный блок. Таким образом, может быть воспроизведена зависимость $\partial\Psi/\partial i=f(i, x)$. Схема для этого случая показана на рис. 4.14.

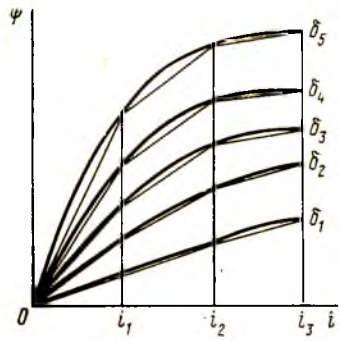


Рис. 4.13. Аппроксимация зависимостей потокосцепления обмотки от тока

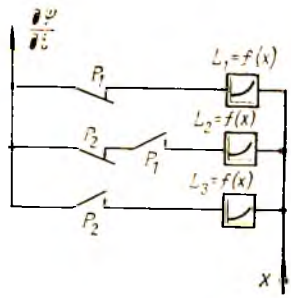


Рис. 4.14. Структурная схема модели для воспроизведения динамической индуктивности

Величина $\partial\Psi/\partial x$ характеризует влияние перемещения якоря на процессы, протекающие в цепи обмотки электромагнита. Определим значения потокосцепления для различных участков (см. рис. 4.13):

для первого участка $\Psi_1=L_1 i$;

для второго участка значение потокосцепления определяется как сумма потокосцепления в конце первого участка, т. е. $L_1 i_1$, и потокосцепления, определяемого текущим значением тока:

$$\Psi_2=L_1 i_1+L_2(i-i_1)=L_1 i_1-L_2 i_1+L_3 i;$$

для третьего участка $\Psi_3=L_1 i_1-L_2 i_1+L_2 i_2-L_3 i_2+L_3 i$.

Величины i_1, i_2, i_3 и т. д. являются постоянными, определяющими границы участков, ток i — независимая переменная, поэтому получаем:

для первого участка $\partial\Psi_1/\partial x=i(\partial L_1/\partial x)$;

для второго участка $\partial\Psi_2/\partial x=i_1(\partial L_1/\partial x)-i_1(\partial L_2/\partial x)+i(\partial L_2/\partial x)$;

для третьего участка $\partial\Psi_3/\partial x=i_1(\partial L_1/\partial x)-i_1(\partial L_2/\partial x)+i_2\times$ $\times(\partial L_2/\partial x)-i_2(\partial L_3/\partial x)+i(\partial L_3/\partial x)$.

Следовательно, имея несколько нелинейных блоков, можно воспроизвести зависимость $\partial\Psi/\partial x=f(i, x)$.

Схема для этого случая приведена на рис. 4.15. Реле P_1 и P_2 настроены на напряжения срабатывания, соответствующие граничным

токам i_1 и i_2. На входы умножителя *3* подаются ток $-i_1$ и величина $\partial L/\partial x$. На выходе этого умножителя получаем произведение $i(\partial L/\partial x)$ соответствующих участков. На первом участке реле не срабатывают, при этом через размыкающие контакты реле P_1 на вход умножителя *3* с выхода нелинейного блока *4* поступает величина $\partial L_1/\partial x$. Произведение $-\left(i\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right)$ первого участка через сумматоры *1* и *2* поступает в схему. При этом входы сумматоров *1* и *2*, за исключением одного, отключены. При токе $i=i_1$ срабатывает P_1 и на выходе сумматора *2* имеем $\partial\Psi_2/\partial x$ второго участка, т. е.

$$-\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right)=$$

$$=-i_1\frac{\partial L_1}{\partial x}+i_1\frac{\partial L_2}{\partial x}-i\frac{\partial L_2}{\partial x}.$$

При токе $i=i_2$ срабатывает реле P_2 и своими контактами переключает нелинейные блоки, благодаря чему на выходе сумматора *2* имеем величину $\partial\Psi_3/\partial x$ третьего участка.

Уравнение электрической цепи обмотки электромагнита запишем в виде

$$\frac{di}{dt}=\left(u-iR-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)\Big/\frac{\partial \Psi}{\partial i}. \qquad (4.31)$$

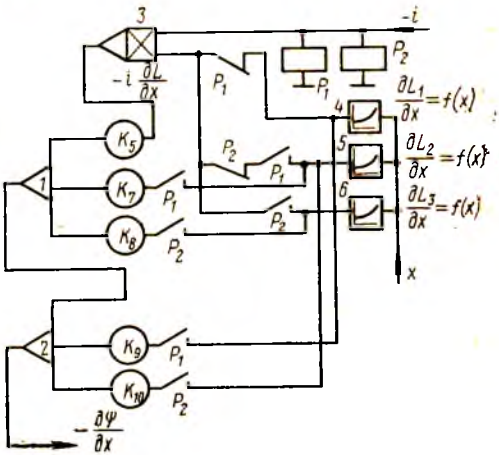


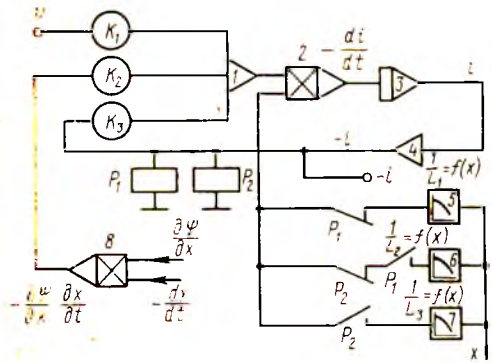
Рис 4.15. Структурная схема модели для получения производной потокосцепления по перемещению

Учитывая, что $\partial\Psi/\partial i=L$, и интегрируя выражение (4.31) по времени, получим

$$i=\int_0^t\left(u-iR-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)\frac{1}{L}\,dt.$$

На основании этого уравнения можно наметить следующую схему его решения. Подынтегральная сумма с выхода сумматора *1* (рис. 4.16), на входы которого поступают напряжения u, ток $-i$, умноженный на коэффициент K_2, и произведение $-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$, умножается на величину $1/L$, поступающую с выходов нелинейных блоков *5*, *6* и *7*. Напряжение, полученное на выходе умножителя *2*, интегрируется блоком *3*, на выходе которого имеем ток i. Последний инвертируется блоком *4* и поступает на один из входов сумматора *1*. Нелинейные

блоки 5, 6 и 7 моделируют $1/L=f(x)$ на различных участках в зависимости от текущего значения тока i. Реле P_1 и P_2 своими контактами производят соответствующие переключения.



Фис. 4.16. Структурная схема модели для воспроизведения тока обмотки

Для получения тягового усилия (4.29) приведем к виду, удобному для расчета на машине. Так как величина $\partial L/\partial x$ в пределах каждого участка не зависит от тока i, а i_1, i_2, i_3 — постоянные величины, то можно записать:

для первого участка

$$\int_0^i \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,di = \frac{i^2}{2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x};$$

для второго участка

$$\int_0^i \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,di = \int_0^{i_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\,di + \int_{i_1}^{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\,di = i\left(\frac{i}{2}\,\frac{\partial L_2}{\partial x} + i_1\frac{\partial L_1}{\partial x} - i_1\frac{\partial L_2}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x};$$

для третьего участка

$$\int_0^i \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,di = \int_0^{i_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\,di + \int_{i_1}^{i_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\,di + \int_{i_2}^{i} \frac{\partial \Psi_3}{\partial x}\,di =$$

$$= i\left(i_1\frac{\partial L_1}{\partial x} - i_1\frac{\partial L_2}{\partial x} + i_2\frac{\partial L_2}{\partial x} - i_2\frac{\partial L_3}{\partial x} + \frac{i}{2}\,\frac{\partial L_3}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{i_1^2 - i_2^2}{2}\,\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{i_2^2}{2}\,\frac{\partial L_3}{\partial x}.$$

Таким образом, выражения для тягового усилия участков можно представить в следующем виде:

$$F_{эл1} = \frac{i^2}{2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x};$$

$$F_{эл2} = i\left(i_1\frac{\partial L_1}{\partial x} - i_1\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{i}{2}\,\frac{\partial L_2}{\partial x}\right) + \frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x};$$

$$F_{эл3} = i\left(i_1\frac{\partial L_1}{\partial x} - i_1\frac{\partial L_2}{\partial x} + i_2\frac{\partial L_2}{\partial x} - i_2\frac{\partial L_3}{\partial x} + \frac{i}{2}\,\frac{\partial L_3}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{i_1^2}{2}\,\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{i_1^2 - i_2^2}{2}\,\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{i_2^2}{2}\,\frac{\partial L_3}{\partial x}.$$

В структурной схеме модели (рис. 4.17) при $i<i_1$ с выхода нелинейного блока *8* на вход умножителя *1* поступает величина $\partial L_1/\partial x$ через размыкающие контакты P_1. На другой вход этого умножителя подается ток, так что на выходе получаем произведение — $i\,(\partial L_1/\partial x)$. Это произведение уменьшается в два раза при умножении на коэффициент K_5 и поступает последовательно на входы сумматоров *3* и *4*. На выходе сумматора *5* получаем тяговое усилие первого участка $F_{эл1}$. При достижении током i значения i_1 срабатывает реле P_1, которое меняет положение своих контактов. На вход умножителя *1* подается величина $\partial L_2/\partial x$. Подключаются вторые входы сумматоров *3*, *4* и *5*. На второй вход сумматора *4* поступает величина $\partial L_2/\partial x$, умноженная на коэффициент i_1. На второй вход сумматора *5* подается также величина $\partial L_2/\partial x$, которая умножается на коэффициент $0{,}5i_1^2$. Так как на второй вход сумматора *4* поступает величина $\partial L_1/\partial x$, умноженная на коэффициент i_1, то на выходе сумматора *5* получим значение тягового усилия второго участка со знаком минус. Аналогично получается тяговое усилие третьего участка при срабатывании реле.

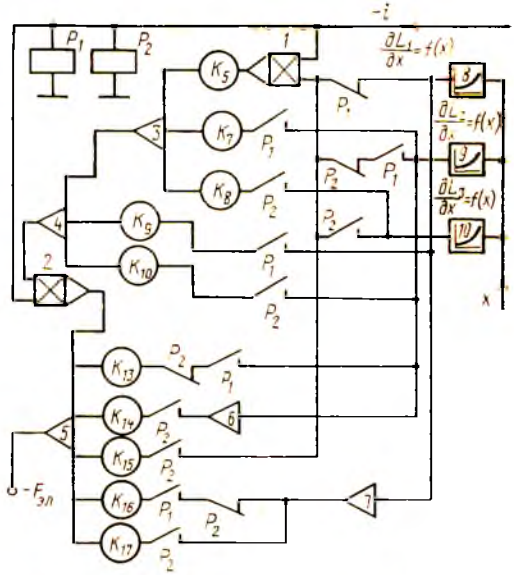


Рис. 4.17. Структурная схема модели для расчета тягового усилия

На рис. 4.18 приведена полная структурная схема для расчета динамических характеристик электромагнита, в которой схемы, решающие отдельные уравнения динамики, объединены. Рассчитаем значения масштабов и коэффициентов данной схемы. Определим масштаб величины $\partial\Psi/\partial x$. В схеме модели значения постоянных токов, соответствующих границам участков, устанавливаются в виде постоянных коэффициентов, соответственно равных $i_{1м}$, $i_{2м}$, $i_{3м}$ и т. д. Тогда масштаб $\partial\Psi/\partial x$ будет $m_{\partial\Psi/\partial x}=m_i m_{\partial L/\partial x}$. Это соотношение справедливо для любого участка в силу того, что все члены выражения для $\partial\Psi/\partial x$ на любом участке имеют одинаковую размерность.

Заменим в (4.31) реальные величины машинными:

$$\frac{di_м m_i}{dt_м m_t}=\frac{\left[u_м m_u - Ri_м m_i - (\partial\Psi/\partial x)_м\,(dx/dt)_м\, m_{\partial\Psi/\partial x} m_{dx/dt}\right] m_{1/L}}{L_м}$$

или

$$di_{\text{м}}=\left[\frac{m_u m_{1/L} m_t}{m_i}u_{\text{м}}-Rm_{1/L}m_i i_{\text{м}}-\frac{m_{\partial\Psi/\partial x}m_{dx/dt}m_{1/L}m_t}{m_i}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{\text{м}}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{м}}\right]\left(\frac{1}{L}\right)_{\text{м}}dt_{\text{м}}.$$

Учитывая, что $m_{\partial\Psi/\partial x}=m_i m_{\partial L/\partial x}$, получаем:

$$di_{\text{м}}=\left[\frac{m_u m_{1/L} m_t}{m_i}u_{\text{м}}-Rm_{1/L}m_i i_{\text{м}}-m_{\partial L/\partial x}m_{dx/dt}m_{1/L}m_t\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{\text{м}}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{м}}\right]\left(\frac{1}{L}\right)_{\text{м}}dt_{\text{м}}. \qquad (4.32)$$

Из структурной схемы (рис. 4.18) следует

$$di_{\text{м}}=\left[K_1u_{\text{м}}-K_3i_{\text{м}}-K_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{\text{м}}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\text{м}}\right]\left(\frac{1}{L}\right)_{\text{м}}dt_{\text{м}}. \qquad (4.33)$$

Сопоставляя выражения (4.32) и (4.33), находим:

$$K_1=m_u m_{1/L}m_t/m_i;\ K_2=m_{\partial L/\partial x}m_{dx/dt}m_{1/L}m_t;\ K_3=Rm_{1/L}m_t.$$

Масштаб тягового усилия

$$m_{F_{\text{эл}}}=F_{\text{эл}}/F_{\text{эл.м}}.$$

Учитывая выражение тягового усилия для третьего участка, получаем

$$F_{\text{эл3}}=m_{F_{\text{эл}}}F_{\text{эл3м}}=m_i^2 m_{\partial L/\partial x}F_{\text{эл3м}},$$

откуда $m_{F_{\text{эл}}}=m_i^2 m_{\partial L/\partial x}$.

Коэффициенты схемы: $K_4=m_{F_{\text{эл}}}m_i^2/(Mm_x)$; $K_6=m_{F_{\text{пр}}}m_i^2/(Mm_x)$; $K_7=K_9=i_{1\text{м}}$; $K_8=K_{10}=i_{2\text{м}}$; $K_{13}=K_{16}=K_{17}=i_{1\text{м}}^2/2$; $K_{14}=(i_{1\text{м}}^2-i_{2\text{м}}^2)/2$; $K_{15}=i_{2\text{м}}^2/2$.

Из (4.1) вытекает, что $d\Psi_{\text{м}}m_\Psi/dt_{\text{м}}m_t=m_u u_{\text{м}}-Rm_i i_{\text{м}}$ или $d\Psi_{\text{м}}=\left(\frac{m_u m_t}{m_\Psi}u_{\text{м}}-\frac{Rm_i m_t}{m_\Psi}i_{\text{м}}\right)dt_{\text{м}}$.

Из схемы видно, что $d\Psi_{\text{м}}=(K_{11}u_{\text{м}}-K_{12}i_{\text{м}})\,dt$, поэтому $K_{11}=m_u m_t/m_\Psi$; $K_{12}=Rm_i m_t/m_\Psi$.

Нетрудно заметить, что структурная схема модели (рис. 4.18) сложна, содержит большое число нелинейных блоков, сумматоров, контактов переключающих реле. Все это усложняет настройку схемы и снижает точность расчета. Задачу можно существенно облегчить, если использовать специальные нелинейные блоки, моделирующие функции не одного, а двух аргументов. Такими блоками оснащены некоторые отечественные АВМ, например МН-17М и др. Исходными

при этом служат уравнения (4.1) — (4.4), где конкретный вид (4.3) может быть различным. В данном случае используется энергетическая формула тягового усилия

$$F_{эл} = \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial x} di.$$

Для моделирования необходимы также зависимости $i = f(\Psi, x)$, определяемые при расчете магнитной цепи либо экспериментальным

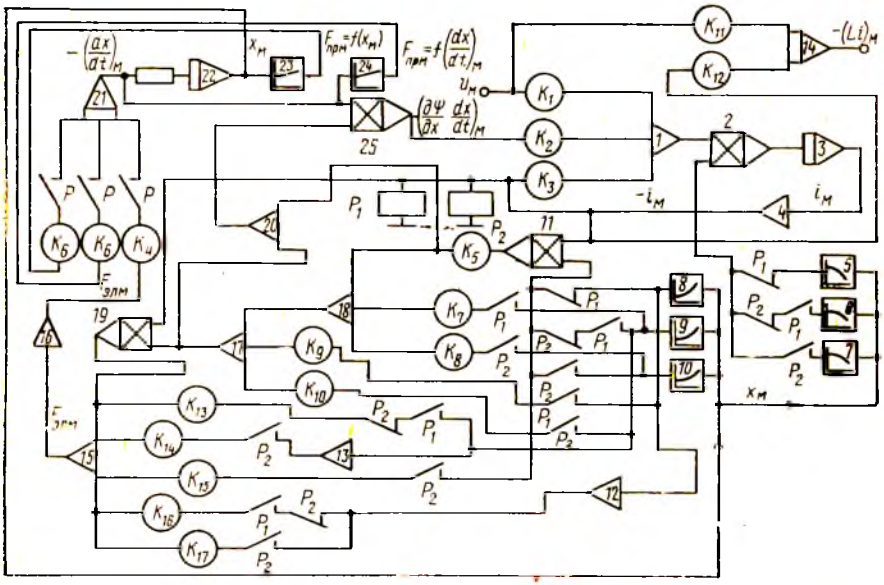


Рис. 4.18. Полная структурная схема модели для расчета динамики насыщенного электромагнита

путем (рис. 4.19, *а*). Указанные зависимости дают возможность графическим путем построить кривые $\partial\Psi/\partial x = f(i, x)$ (рис. 4.19, *б*), также найти значения тягового усилия как площадь, ограниченную осью токов и соответствующими кривыми (рис. 4.19, *в*).

Приводя (4.1) и (4.2) к машинной форме, получим:

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_м = K_1 u_м - K_2 i_м;$$

$$x_м = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} \left[K_3 F_{эл.м} - K_4 F_{пр}(X_м) - K_4 F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right)_м\right] dt_м.$$

По уравнениям строится структурная схема модели, показанная на рис. 4.20. Здесь нелинейным блоком *5* воспроизводятся зависи-

мости $i_м=f(\Psi_м, x_м)$ (см. рис. 4.19). Зависимость $F_{эл.м}=f(\Psi_м, x_м)$ моделируется блоком *6*. В остальном работа схемы аналогична работе схемы, описанной выше (см. рис. 4.1).

Значения коэффициентов: $K_1=m_u m_t/m_\Psi$; $K_2=Rm_i m_t/m_\Psi$.

§ 4.4. Учет изменения сопротивления обмотки вследствие нагрева

В большинстве случаев, как уже указывалось, в течение цикла включения электромагнита температура его обмотки изменяется не-

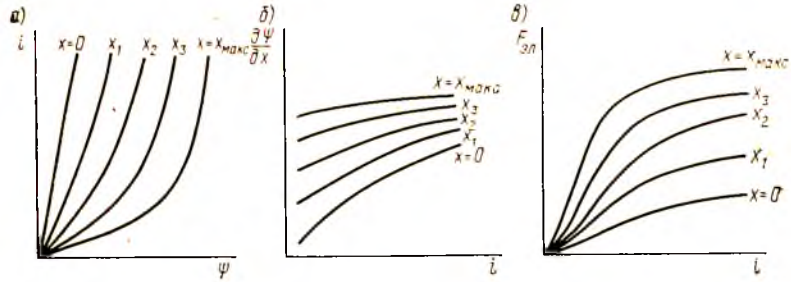


Рис. 4.19. Исходные зависимости для моделирования динамики электромагнита

значительно. Однако в некоторых случаях необходимо считаться с изменением сопротивления, вызванным изменением температуры обмотки. При этом связь между сопротивлением и температурой выражается формулой

$$R=R_0[1+\alpha_0(\tau+\Theta_{окр})],$$

где R_0 — сопротивление при 0 °С; α_0 — температурный коэффициент сопротивления; τ — превышение температуры; $\Theta_{окр}$ — температура окружающей среды.

Уравнение электрической цепи обмотки можно представить в виде

$$u=iR_0(1+\alpha_0\Theta_{окр})+iR_0\alpha_0\tau+d(Li)/dt,$$

откуда с учетом масштабов

$$(Li)_м=\int_0^{t_м}\left[\frac{m_u m_t}{m_{Li}}u_м-\frac{m_i R_0(1+\alpha_0\Theta_{окр})\,m_t}{m_{Li}}i_м-\frac{m_i R_0\alpha_0 m_\tau\, m_t}{m_{Li}}i_м\tau_м\right]dt_м,$$

или

$$(Li)_м=\int_0^{t_м}(K_1u_м-K_5i_м-K_6i_м\tau_м)\,dt_м.$$

Здесь $K_5=m_i R_0(1+\alpha_0\Theta_{окр})\,m_t/m_{Li}$; $K_6=m_i R_0\alpha_0 m_\tau\, m_t/m_{Li}$.

Расчет превышения температуры обмотки представляет собой большие трудности, заключающиеся в необходимости решения дифференциального уравнения теплового баланса, коэффициенты которого имеют сложную зависимость от температуры. Здесь ограничимся представлением обмотки в виде однородного тела. В этом случае уравнение теплового баланса будет

$$K_w i^2 \rho_\tau \frac{l}{q_{\text{пр}}} dt - K_\tau \tau S_{\text{охл}} dt = q_{\text{пр}} l \gamma c d\tau$$

или

$$\tau = \frac{1}{q_{\text{пр}}^2 \gamma} \int_0^t i^2 \frac{K_w \rho_\tau}{c} dt - \frac{S_{\text{охл}}}{q_{\text{пр}} l \gamma} \int_0^t \frac{\tau K_\tau}{c} dt. \quad (4.34)$$

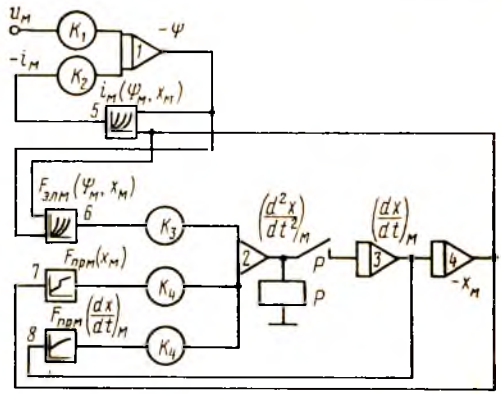


Рис. 4.20. Структурная схема модели с использованием нелинейных блоков функций двух переменных

Здесь $q_{\text{пр}}$ — сечение провода; γ — плотность провода; K_w — коэффициент, учитывающий добавочные потери за счет поверхностного эффекта; $\rho_\tau = f(\tau)$ — удельное электросопротивление провода обмотки; $c = f(\tau)$ — удельная теплоемкость; $S_{\text{охл}}$ — поверхность охлаждения обмотки; l — длина провода; $K_\tau = f(\tau)$ — коэффициент теплоотдачи; τ — превышение температуры обмотки.

Уравнение (4.34) запишем в машинной форме:

$$\tau_м = \frac{K_w m_i^2 m_{\rho/c} m_t}{q_{\text{пр}}^2 \gamma m_\tau} \int_0^{t_м} i_м^2 \left(\frac{\rho_\tau}{c}\right)_м dt_м - \frac{S_{\text{охл}} m_{K_\tau/c} m_t}{q_{\text{пр}} l \gamma} \int_0^{t_м} \tau_м \left(\frac{K_\tau}{c}\right)_м dt_м,$$

или

$$\tau_м = K_7 \int_0^{t_м} i_м^2 \left(\frac{\rho_\tau}{c}\right)_м dt_м - K_8 \int_0^{t_м} \tau_м \left(\frac{K_\tau}{c}\right)_м dt_м, \quad (4.35)$$

где $K_7 = K_w m_i^2 m_{\rho/c} m_t / (q_{\text{пр}}^2 \gamma m_\tau)$; $K_8 = S_{\text{охл}} m_{K_\tau/c} m_t / (q_{\text{пр}} l \gamma)$.

Структурная схема, составленная по уравнениям динамики для этого случая, приведена на рис. 4.21.

§ 4.5. Определение зависимости постоянной времени от перемещения якоря по заданной динамической тяговой характеристике

Проектирование электрических аппаратов связано с поиском оптимального варианта. Понятие «оптимальный» будет подробно рассмотрено при изложении вопросов применения ЦВМ для расчета

и проектирования электрических аппаратов. Если требуется спроектировать электромагнит, обладающий заданными динамическими свойствами, то, как будет показано в гл. 7, задача может быть решена в два этапа: вначале определяют зависимости от перемещения якоря индуктивности или постоянной времени обмотки,

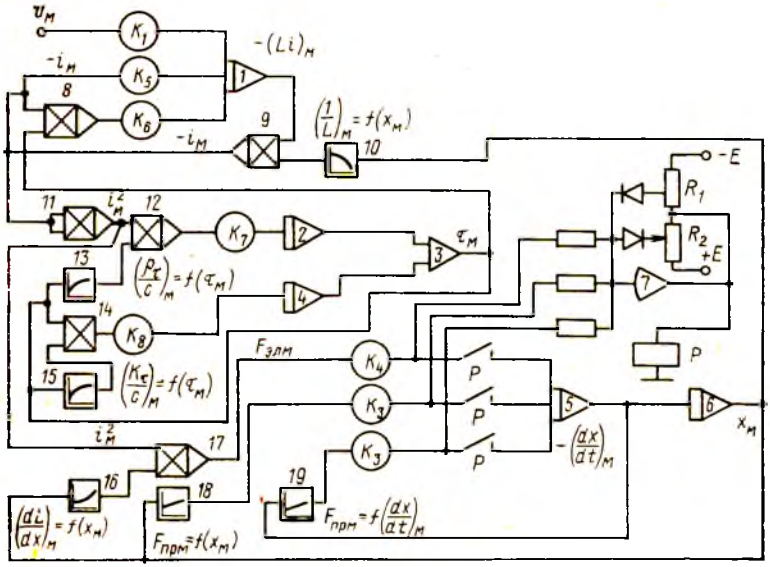


Рис. 4.21. Структурная схема модели для учета изменения сопротивления

а затем находят геометрические размеры и обмоточные данные электромагнита, у которого значения постоянной времени будут соответствовать определенным на первом этапе зависимостям.

Рассмотрим задачу первого этапа: надо по некоторым заданным динамическим характеристикам электромагнитного аппарата найти зависимость постоянной времени обмотки от перемещения якоря электромагнита (магнитным сопротивлением стали магнитопровода пренебрегаем). Методику решения указанной задачи разберем на примере электромагнита постоянного тока с внешним поворотным якорем. Уравнение электрической цепи обмотки [8]

$$u = iR + L\frac{di}{dt} + i\frac{dl}{dt}, \tag{4.36}$$

где

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{4.37}$$

Уравнение тягового момента

$$M_д = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{d\varphi}.$$

Разделив все члены уравнений (4.36) и (4.37) на сопротивление обмотки R, можно получить:

$$I_{уст}=i+T\frac{di}{dt}+i\frac{dT}{dt};\ M_д=\frac{i^2}{2}\frac{u}{I_{уст}}\frac{dT}{d\varphi}. \qquad (4.38)$$

Здесь $I_{уст}$ — установившееся значение тока обмотки; $T=L/R$ — постоянная времени обмотки; $M_д$ — динамический тяговый момент; φ — угол поворота якоря.

Пусть известны зависимости $M_д(t)$, $\varphi(t)$ и $[d\varphi/dt](t)$. К перечисленным исходным зависимостям следует добавить заданные зна-

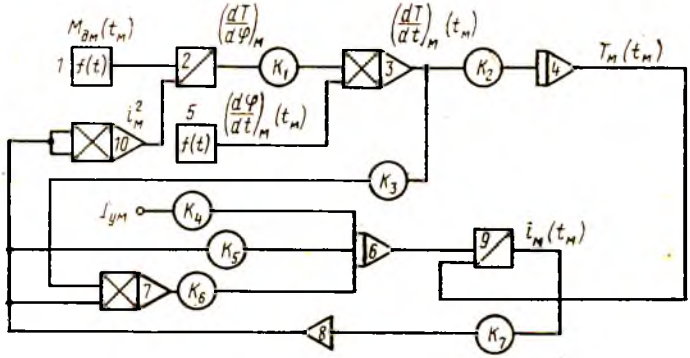


Рис. 4.22. Структурная схема модели получения зависимостей постоянной времени обмотки от перемещения якоря

чения установившегося тока $I_{уст.з}$ тока трогания $i_{тр.з}$, постоянной времени $T_{тр.з}$, соответствующей моменту трогания якоря, которые могут быть получены на основании желаемых значений мощности N, потребляемой обмоткой в стационарном режиме, времени трогания $t_{тр}$ и коэффициента запаса по току трогания $K_{зап}$, из соотношений $I_{уст.з}=N/u$; $i_{тр.з}=I_{уст.з}/K_{зап}$; $T_{тр.з}=t_{тр}/\ln(K_{зап}/K_{зап}-1)$.

Варьируя эти величины, можно получить семейство зависимостей $T=f(\varphi)$. Выбор оптимальной зависимости может производиться из стремления наиболее точно обеспечить заданные динамические характеристики и технико-экономические показатели конструкции. Однако при этом следует учитывать возможность реализации динамических зависимостей с помощью достаточно простой и технологичной конструкции электромагнита. Уравнения (4.38) представим в виде

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{2M_д I_{уст.з}}{i^2u};\ Ti=\int_0^t\left(I_{уст.з}-i-i\frac{dT}{dt}\right)dt.$$

С учетом масштабов переменных получаем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)_{\text{м}} = \frac{2m_{\text{м}} I_{\text{уст.з}} m_{\varphi}}{m_T u m_i^2} \frac{M_{\text{д.м}}}{i_{\text{м}}^2} = K_1 \frac{M_{\text{д.м}}}{i_{\text{м}}^2}; \tag{4.39}$$

$$(Ti)_{\text{м}} = \int_0^{t_{\text{м}}} \left[\frac{I_{\text{уст.з}} m_t}{m_{Ti}} - \frac{m_t m_i}{m_{Ti}} i_{\text{м}} - \frac{m_i m_T}{m_{Ti}} i_{\text{м}} \left(\frac{dT}{dt}\right)_{\text{м}} \right] dt_{\text{м}} =$$

$$= \int_0^{t_{\text{м}}} \left[A - K_2 i_{\text{м}} - K_3 i_{\text{м}} \left(\frac{dT}{dt}\right)_{\text{м}} \right] dt_{\text{м}}. \tag{4.40}$$

В структурной схеме модели (рис. 4.22) зависимости $M_{\text{д.м}} = f(t_{\text{м}})$ и $(d\varphi/dt)_{\text{м}} = f(t_{\text{м}})$ воспроизводятся блоками переменных коэффициентов *1* и *5*. Величина $(\partial T/\partial \varphi)_{\text{м}}$ образуется с помощью делителя *2*; умножитель *3* воспроизводит значения производной $(dT/dt)_{\text{м}}$. После интегрирования блоком *4* производной получаем постоянную времени $T_{\text{м}}$. В соответствии с уравнением

$$Ti = \int_0^t \left(I_{\text{уст.з}} - i - i \frac{dT}{dt} \right) dt$$

моделирование произведения $(Ti)_{\text{м}}$ осуществляется интегратором *6*, на входы которого поступают $I_{\text{уст.з.м}}$, $i_{\text{м}}$ и $\left(i \frac{dT}{dt}\right)_{\text{м}}$ с соответствующими знаками. Значения $T_{\text{тр}}$ и $i_{\text{тр}}$ в схеме устанавливаются в виде напряжений начальных условий на интеграторах *4* $(T_{\text{тр.м}})$ и *6* $(T_{\text{тр}} i_{\text{тр}})_{\text{м}}$.

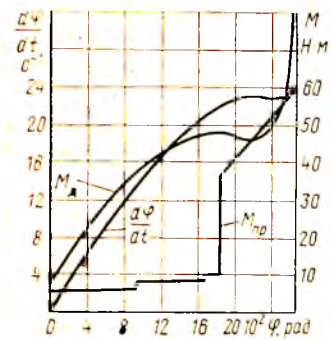


Рис. 4.23. Исходные динамические характеристики электромагнита

В качестве примера приведем результаты определения зависимостей $T = f(\varphi)$ для электромагнита с внешним поворотным якорем, исходные динамические характеристики которого приведены на рис. 4.23. Варьируем следующие величины; $N = 44$ и 88 Вт; $t_{\text{тр}} = 56{,}6 \cdot 10^{-4}$; $134 \cdot 10^{-4}$ и $214 \cdot 10^{-4}$ с; $K_{\text{зап}} = 3{,}3$; 5,0 и 10. Результаты расчета в виде графиков показаны на рис. 4.24.

Из результатов, приведенных на рис. 4.24, *а*, видно, что кривые $T = f(\varphi)$ и $\partial T/\partial \varphi = f(\varphi)$ имеют характерную форму в зависимости от $T_{\text{тр}}$ и $I_{\text{уст.з}}$. Так, три малом токе трогания в начале движения якоря наблюдается рост постоянной времени T. Затем скорость

роста величины T уменьшается, а в конце хода якоря увеличивается вновь (зависимость *2*). Производная $\partial T/\partial\varphi$ вначале резко уменьшается, достигая минимального значения при $\varphi=10^{-2}$ рад, а затем возрастает (зависимость *1*). Указанное явление не наблюдается при росте тока трогания (зависимости *1*, *2*, *3* и *4*). Аналогичный эффект получен при изменении $I_{уст.з}$ (рис. 4.24, *б*), причем спад $dT/d\varphi$ в начале хода якоря тем сильнее, чем больше $I_{уст.з}$ при постоянной величине $t_{тр}$ (зависимости *1* и *3*).

Вид зависимостей T и $\partial T/\partial\varphi$ от угла поворота якоря может быть объяснен следующим образом. При заданном законе изменения

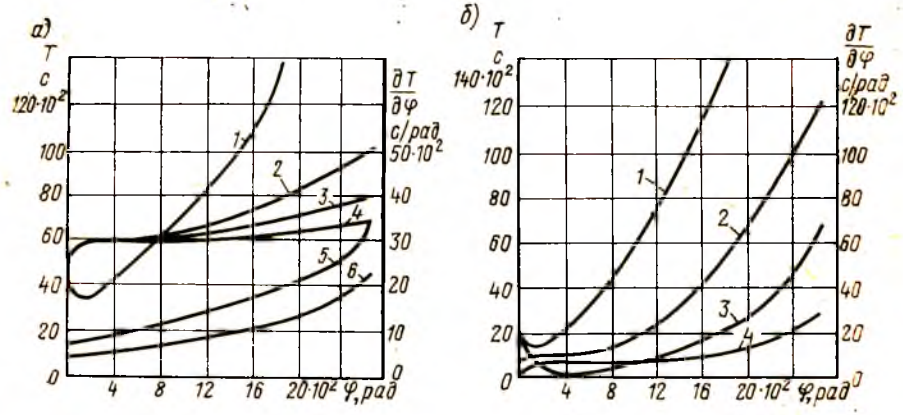


Рис. 4.24. Расчетные характеристики электромагнита:
при $N=88$ Вт (*а*): *1* — $T=f(\varphi)$ при $t_{тр}=56{,}6\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=10$; *2* — $dT/d\varphi=f(\varphi)$ при $t_{тр}=56{,}6\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=10$; *3* — $T=f(\varphi)$ при $t_{тр}=134\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=5$; *4* — $T=f(\varphi)$ при $t_{тр}=214\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=3{,}3$; *5* — $dT/d\varphi=f(\varphi)$ при $t_{тр}=134\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=5$; *6* — $dT/d\varphi=f(\varphi)$ при $t_{тр}=134\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=3{,}3$; при $N=44$ Вт (*б*): *1* — $dT/d\varphi=f(\varphi)$ при $t_{тр}=134\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=5$; *2* — $T=f(\varphi)$ при $t_{тр}=134\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=5$; *3* — $dT/d\varphi=f(\varphi)$ при $t_{тр}=56{,}6\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=10$; *4* — $T=f(\varphi)$ при $t_{тр}=56{,}6\cdot10^{-4}$ с, $k_{зап}=10$

угловой скорости и тягового динамического момента характер изменения тока определяется начальной постоянной времени и соотношением установившегося тока и тока трогания. С ростом величины $t_{тр}$ в начале хода якоря интенсивное увеличение тока при малом изменении тягового момента вызывает уменьшение величины $\partial T/\partial\varphi$. По мере замедления нарастания тока и последующего его спада при большей угловой скорости якоря величина $\partial T/\partial\varphi$ растет. Аналогичная картина наблюдается при изменении установившегося тока.

Из полученного семейства зависимостей $T=f(\varphi)$ может быть отобрана одна, реализуемая с помощью заданного типа электромагнита.

ГЛАВА 5

РАСЧЕТ ПРОЦЕССА ВКЛЮЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АППАРАТА НА АВМ

§ 5.1. Вибрации контактов электрических аппаратов

При включении электрических аппаратов (автоматических выключателей, контакторов, реле и др.) подвижные и неподвижные контакты соударяются. При этом материал контактов подвергается упругой и пластической деформации. Вследствие упругой деформации контакты размыкаются, но под действием контактной пружины замыкаются вновь. Явление отброса подвижного контакта от неподвижного после их соприкосновения называется *вибрацией контактов*. Процесс вибраций носит затухающий характер. Вибрация приводит к увеличению электрического износа контактов при включении, так как при расхождении контактов между ними возникает короткая электрическая дуга. В связи с износом контактов уменьшается конечное контактное нажатие, что приводит к увеличению их переходного сопротивления. Электрическая дуга разогревает контактные поверхности, расплавляя их в отдельных точках. Повторное соприкосновение расплавленных контактных поверхностей может привести к их свариванию. Износ контактов тем больше, чем больше амплитуда и продолжительность вибрации. Общее время вибрации составляет единицы миллисекунд. На вибрации контактов влияют масса (момент инерции) контактного узла, скорость контактов в момент соударения, материал и форма контактов.

Рассмотрим методику расчета процесса включения электромагнитного аппарата. При этом весь процесс целесообразно разделить на два этапа: первый — от момента подачи напряжения на зажимы обмотки приводного электромагнита до момента первого касания контактов, второй — от момента первого касания до полного замыкания контактами управляемой цепи (до полного окончания процесса вибраций контактов).

Чтобы рассчитать процесс включения, необходимо совместно решить уравнения, описывающие перемещение подвижной системы аппарата и его подвижного контакта. Вид уравнений, описывающих движение вибрирующего контакта, зависит от кинематической схемы аппарата и допущений, принятых при составлении уравнений. В соответствии с порядком расчета процесса включения аппарата здесь рассматривается второй этап процесса — от момента касания до практически полного окончания процесса вибраций контактов.

Задача расчета динамических процессов на втором этапе — определение величин, характеризующих процесс вибрации, полного времени вибрации контактов $t_{общ}$, времени первого отскока t_1, амплитуды первого и остальных отскоков и т. д.

Исходные данные для расчета динамических процессов на втором этапе включения аппарата: значения динамических парамет-

ров (Ψ, i, $F_{эл}$, x, dx/dt) в конце первого этапа, являющиеся начальными условиями второго этапа;

значения на втором этапе величин и зависимостей, необходимых для моделирования динамических характеристик аппарата [зависимости $L = f(x)$, $dL/dx = f(x)$, $F_{пр} = f(x)$, $F_{пр} = f(dx/dt)$ и т. д.];

характеристики материала контактной пары и контактных пружин;

размеры контактов и других деталей контактной системы;

величина предварительного сжатия контактных пружин.

При составлении дифференциальных уравнений движения вибрирующих контактов принимается ряд допущений, некоторые из них — общие для рассматриваемых аппаратов, независимо от их кинематических схем, типа и т. д. Некоторые допущения присущи конкретным типам аппаратов.

Известно, что удар двух реальных тел сопровождается изменением их формы и размеров. Физика явлений, происходящих в соударяющихся телах за время удара, изучена еще недостаточно и является предметом специальных исследований. Обычно удар считают мгновенным и упругие свойства материала оценивают коэффициентом восстановления скорости. Далее будем называть его *коэффициентом восстановления* — это отношение абсолютных величин проекций относительной скорости двух соударяющихся тел после и до удара на направление общей нормали к поверхности тел в точке соприкосновения. Оценка упругих свойств материала с помощью коэффициента восстановления является приближенной, поэтому не отражает всех закономерностей соударения реальных тел.

Для определения коэффициента восстановления обычно используется следующий простой опыт. С высоты l_1 на горизонтальную массивную плиту из испытуемого материала опускают без начальной скорости шарик из этого же материала и замечают высоту l_2, которой достигает шарик, отскочив от плиты. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то скорости падения и отскока шарика определятся так:

$$v_1 = \sqrt{2gl_1},\quad v_2 = \sqrt{2gl_2}.$$

Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = v_2/v_1 = \sqrt{l_2/l_1}.$$

Значения коэффициента восстановления, определенные вышеуказанным способом для некоторых материалов, приведены ниже:

Материал	медь	латунь	сталь	металлокерамика
ε	0,223	0,360	0,715—0,500	0,388

Следует заметить, что в общем случае коэффициент восстановления зависит не только от материала, но и от формы соударяющихся тел, скорости соударения и др. Однако эти зависимости в настоящее время еще мало изучены. Более строгим является

определение ε в условиях, аналогичных условиям работы контактов аппарата.

На процесс вибрации влияет конструкция неподвижного контакта: упругость, масса и т. д. Однако свойства конструкции неподвижного контакта трудно поддаются точному учету. Наконец, на процесс вибрации контактов оказывают влияние сила трения в контактах и сопротивление среды.

Учитывая сказанное выше, при расчете механических вибраций контактов принимаются допущения:

удар считается мгновенным;

коэффициент восстановления для данного контактного материала принимается постоянным;

крепление неподвижного контакта предполагается абсолютно жестким, а его масса — значительно превосходящей массу подвижного контакта;

сила трения в контактах и сопротивление среды не учитываются, так как предполагаются достаточно малыми.

Так как вид дифференциального уравнения, описывающего движение вибрирующего контакта, зависит от кинематической схемы аппарата, то в дальнейшем будем рассматривать две группы аппаратов: с прямоходовой кинематической схемой и с поворотной кинематической схемой.

§ 5.2. Включение аппарата с прямоходовой кинематической схемой

Согласно закону Ньютона, дифференциальное уравнение перемещения вибрирующего подвижного контакта (рис. 5.1) может быть представлено в следующем виде:

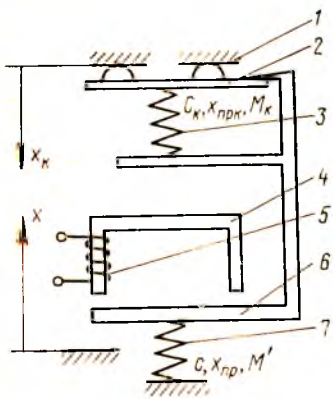


Рис. 5.1. Аппарат с прямоходовой кинематической схемой:
1 — неподвижные контакты; *2* — подвижный контакт; *3* — контактная пружина; *4* — магнитопровод; *5* — обмотка; *6* — якорь; *7* — возвратная пружина

$$M'_к \frac{d^2 x_к}{dt^2} = -c_к (x_{пр.к} + x_к + x) + M'_к g, \qquad (5.1)$$

где $c_к$, $x_{пр.к}$ — жесткость и предварительное сжатие контактной пружины; $x_к$ — расстояние между неподвижными и подвижными контактами в процессе вибрации.

Так как контактная пружина одним концом закреплена в контактодержателе, а другим упирается в подвижный контактный мост, то она при вибрациях участвует в сложном движении. В уравнении (5.1) приближенно принято

$$M'_к = M_к + 0{,}3M_{пр},$$

где $M_к$ — масса подвижного контактного моста; $M_{пр}$ — масса контактной пружины.

Уравнение перемещения подвижной системы аппарата (якоря и связанных с ним частей) на втором этапе будет иметь вид

$$M' \frac{d^2x}{dt^2} = F_{эл} - F'_{пр}(x) - F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right). \qquad (5.2)$$

Здесь M' — масса подвижной системы за вычетом массы подвижного контактного моста;

$$F'_{пр}(x) = c_в(x_{пр} + x) + M'g + c_к(x_{пр.к} + x_к + x), \qquad (5.3)$$

где $c_в$ — жесткость возвратной пружины; $x_{пр}$ — предварительное ее растяжение.

Из уравнения (5.2) с учетом (5.3) и масштабов получаем:

$$x_м = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} \left[\frac{m_{F_{эл}} m_t^2}{M' m_x} F_{эл.м} - \frac{c_в x_{пр} m_t^2}{M' m_x} - \frac{(c_в + c_к) m_t^2}{M'} x_м - \frac{g m_t^2}{m_x} - \right.$$
$$\left. - \frac{c_к x_{пр.к} m_t^2}{M' m_x} - \frac{c_к m_{\lambda_к} m_t^2}{M' m_x} x_{к.м} - \frac{m_{F_{пр}} m_t^2}{M' m_x} F_{пр}\left(\frac{dx}{dt}\right)_м \right] dt_м,$$

или

$$x_м = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} \left[K_3 F_{эл.м} - A - K_4 x_м - B - C - K_5 x_{к.м} - K_6 F_{пр} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{dx}{dt}\right)_м \right] dt_м, \qquad (5.4)$$

где $K_3 = \frac{m_{F_{эл}} m_t^2}{M' m_x}$; $A = \frac{c_в x_{пр} m_t^2}{M' m_x}$; $K_4 = \frac{(c_в + c_к) m_t^2}{M'}$; $B = \frac{g m_t^2}{m_x}$; $C = \frac{c_к x_{пр.к} m_t^2}{M' m_x}$;

$K_5 = \frac{c_к m_{\lambda_к} m_t^2}{M' m_x}$; $K_6 = \frac{m_{F_{пр}} m_t^2}{M' m_x}$.

Уравнение (5.1) запишем в следующем виде:

$$x_к = \int_0^t dt \int_0^t \left(- \frac{c_к x_{пр.к}}{M'_к} - \frac{c_к}{M'_к} x_к - \frac{c_к}{M'_к} x + g \right) dt.$$

С учетом масштабов будем иметь

$$x_{к.м} = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} \left(- \frac{c_к x_{пр.к} m_t^2}{M'_к m_{\lambda_к}} - \frac{c_к m_t^2}{M'_к} x_{к.м} - \frac{c_к m_x m_t^2}{M'_к m_{x_к}} x_м - \frac{g m_t^2}{m_{x_к}} \right) dt_м,$$

или

$$x_{к.м} = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} (-A' - K_7 x_{к.м} - K_8 x_м + B')\, dt_м, \qquad (5.5)$$

где $A' = \frac{c_к x_{пр.к} m_t^2}{M'_к m_{x_к}}$; $K_7 = \frac{c_к m_t^2}{M'_к}$; $K_8 = \frac{c_к m_x m_t^2}{M'_к m_{x_к}}$; $B' = \frac{g m_t^2}{m_{x_к}}$.

Структурная схема модели представлена на рис. 5.2. В момент удара контактов скорость подвижного моста изменяется по величине и направлению. Начальная скорость, которую получает подвижный контактный мост непосредственно после удара, $(dx_к/dt)_н = -\varepsilon (dx_к/dt)_у$,
где $(dx_к/dt)_у$ — скорость подвижного моста непосредственно перед ударом.

Последовательность расчета процесса включения аппарата может быть такой. Устанавливается напряжение на вход интегра-

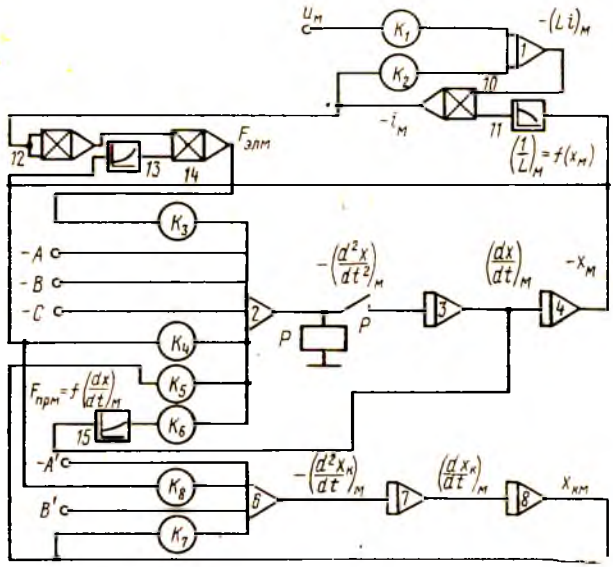


Рис. 5.2. Структурная схема для моделирования включения прямоходового аппарата

тора *1*, а также постоянные напряжения *A*, *B* и *C*, соответствующие значению противодействующих усилий на первом этапе. При этом часть схемы, моделирующая вибрации контакта, отключена. Рассчитываются величины, характеризующие первый этап. Затем модель останавливается. Устанавливаются напряжения *A′*, *B′*, а также напряжение начальных условий на интеграторе *7* $[(dx_к/dt)_н]$ и рассчитывается процесс на втором этапе. Начальными условиями на интеграторах *1*, *3* и *4* служат напряжения, соответствующие концу первого этапа и сохранившиеся на этих интеграторах после остановки модели. После первого отскока контактный мост будет перемещаться в направлении неподвижных контактов, в результате чего контакты вновь встретятся. Условием повторной встречи будет $x_{к.м} = 0$. В этот момент реле (на схеме не показано) остановит модель. Необходимы установка новых начальных условий на интеграторе *7* и расчет второго отскока и т. д.

Вследствие того что масса контактного моста значительно меньше массы якоря электромагнита и связанных с ним частей, часто влиянием вибрирующего контакта на движение якоря можно пренебречь. При этом структурная схема для расчета вибраций контактов значительно упрощается (рис. 5.3). Здесь на один вход сумматора поступает величина $x_м = f(t_м)$ с выхода блока переменных коэффициентов и решается лишь уравнение (5.5), моделирующее поведение контакта в процессе вибрации. Зависимость $x_м = f(t_м)$ на втором этапе может быть получена при моделировании динамики включения электромагнита аппарата без учета вибрации контактов (см. гл. 4).

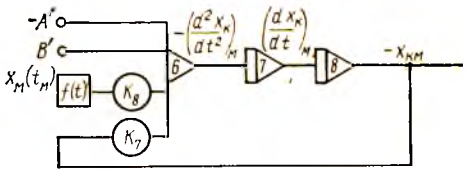


Рис. 5.3. Упрощенная структурная схема модели

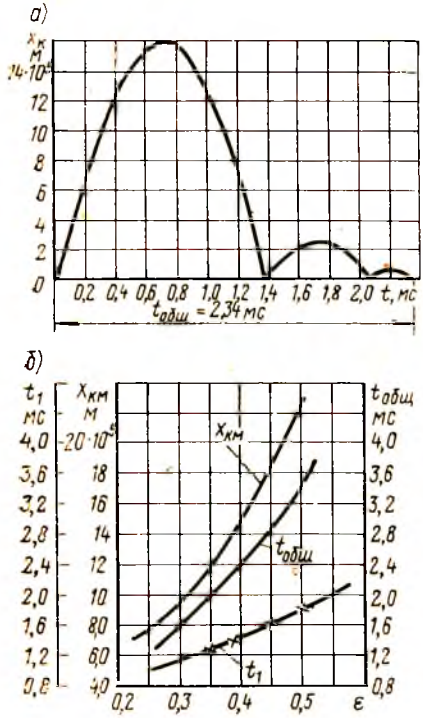


Рис. 5.4. Зависимости от времени вибрации контакта ($а$) и времени первого отскока t_1; полного времени вибрации $t_{общ}$; амплитуды первого отскока $x_{км}$ ($б$)

Пример. Рассчитаем вибрации контактного мостика при следующих исходных данных: масса $M'_к = 4{,}56 \times \times 10^{-2}$ кг, жесткость контактной пружины $c_к = 13{,}3 \cdot 10^2$ Н/м, предварительная деформация (сжатие) контактной пружины $x_{пр.к} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ м. Скорость движения якоря магнитной системы на участке пути от момента первого касания контактов до окончания процесса вибрации $(dx/dt)_у = 0{,}80$ м/с — постоянная. Материал контактов — металлокерамическая композиция; коэффициент восстановления $\varepsilon = 0{,}388$.

Решение. Расчет проводим по структурной схеме, показанной на рис. 5.3. Принимаем масштабы переменных: $m_t = 10^{-3}$ с/с, $m_x = 5 \cdot 10^{-5}$ м/В, $m_{x_к} = 10^{-3}/100$ м/В $= 10^{-5}$ м/В, $m_{dx_к/dt} = m_{x_к}/m_t = 10^{-5}/10^{-3}$ м/(с·В) $= 10^{-2}$ м/(с·В). Постоянные напряжения $A = 13{,}3 \cdot 10^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}/(4{,}56 \times \times 10^{-2} \cdot 10^{-5}) = 54$ В, $B = 9{,}81 \times \times 10^{-6}/10^{-5}$ В $= 0{,}98$ В, коэффициенты: $K_1 = 13{,}3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}/(4{,}56 \cdot 10^{-2}) = = 0{,}029$, $K_2 = 13{,}3 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}/\times \times (4{,}56 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5}) = 0{,}145$.

Определим начальную скорость контакта непосредственно после первого соударения:

$$(dx_к/dt)_{нм} = 0{,}388 \cdot 0{,}8 \times \times 10^{-3}/10^{-5}\ \text{В} = 31\ \text{В}.$$

Результаты расчета в виде зависимостей $x_к = f(t)$, а также зависимостей амплитуды и времени первого отскока и полного времени вибрации от коэффициента восстановления приведены на рис. 5.4, *а*, *б*.

§ 5.3. Включение аппарата с поворотной кинематической схемой

В настоящее время применяют электромагнитные аппараты поворотного типа с двумя кинематическими схемами контактного узла: 1) аппараты, имеющие контактную систему с несовмещенными осями вращения якоря магнитной системы и подвижного контакта (контактные системы с притиранием); 2) аппараты, у которых оси вращения якоря и подвижного контакта совмещены.

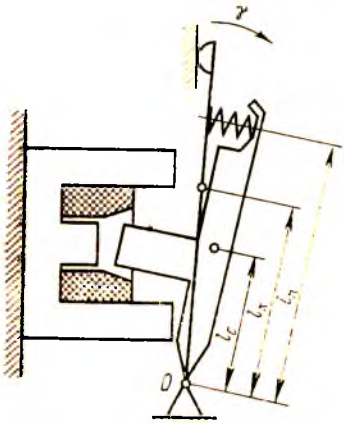


Рис. 5.5. Аппарат с поворотной кинематической схемой

Контактная система аппаратов первой группы выполняется таким образом, что подвижный контакт при замыкании перекатывается по поверхности неподвижного контакта с одновременным скольжением. Это достигается за счет различного расположения осей вращения якоря и подвижного контакта. Наличие притирания преследует две цели: во-первых, возможность самоочищения контактов (при скольжении контактных поверхностей разрушается окисная пленка), во-вторых, возможность удаления рабочих точек контактных поверхностей от точек, подверженных действию электрической дуги.

Аппараты второй группы имеют контактную систему без притирания, что достигается совмещением осей вращения якоря и контакта. Совмещают оси коленчатым исполнением вала аппарата.

На основании опыта эксплуатации установлено, что аппараты с совмещенными осями имеют меньшую вибрацию по сравнению с аппаратами, контакты которых работают с притиранием. В настоящее время применяются аппараты с обеими кинематическими схемами.

Рассмотрим расчет включения аппарата поворотного типа с совмещенными осями вращения якоря и контакта. Схема приведена на рис. 5.5. Принимая $\sin\gamma \approx \gamma$, $\sin(\varphi - \varphi_1) \approx \varphi - \varphi_1$; $\sin\varphi_{пр} \approx \varphi_{пр}$, исходные уравнения динамики запишем в таком виде:

$$M_{эл} = 0{,}5i^2 \frac{dL}{d\varphi}, \tag{5.6}$$

$$J'(d^2\varphi/dt^2) = M_{эл} - c_к[\varphi_{пр}l_п + (\varphi - \varphi_1)l_п + \gamma l_п]l_п + Ql_с \sin(\varphi_0 - \varphi) - M_{пр}(d\varphi/dt), \tag{5.7}$$

$$J_к(d^2\gamma/dt^2) = -c_к[\varphi_{пр}l_п + (\varphi - \varphi_1)l_п + \gamma l_п]l_п + Q_к l_к \sin(\gamma_0 - \gamma). \tag{5.8}$$

Здесь φ — угол поворота якоря; J' — момент инерции подвижной системы аппарата относительно оси O за вычетом момента инерции

подвижного контакта; $\varphi_{пр}$ — угол предварительного сжатия контактной пружины; φ_1 — угол поворота якоря, соответствующий первому касанию контактов; Q — вес подвижной системы аппарата без подвижного контакта; φ_0 — угол, образованный вертикалью, проходящей через ось O, и линией, соединяющей эту ось с центром тяжести подвижной системы в выключенном положении аппарата; $M_{пр}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ — момент, противодействующий движению подвижной системы и зависящий от угловой скорости; $J_к$ — момент инерции подвижного контакта относительно оси O; γ — угол поворота подвижного контакта при вибрациях; γ_0 — угол, образованный вертикалью, проходящей через ось O, и линией, соединяющей эту ось с центром тяжести подвижного контакта в положении первого касания контактов; $Q_к$ — вес узла подвижного контакта.

Запишем уравнение (5.6) в машинной форме:

$$M_{эл.м}=i_м^2\,(dL/d\varphi)_м.$$

Из (5.7) имеем:

$$\varphi_м=\int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м}\left[\frac{m_{M_{эл}}m_t^2}{J'm_\varphi}M_{эл.м}-\frac{c_к l_п^2\varphi_{пр}m_t}{J'm_\varphi}+\frac{c_к l_п^2\varphi_1 m_t^2}{J'm_\varphi}-\frac{c_к l_п^2 m_t^2}{J'}\varphi_м-\right.$$

$$-\frac{c_к l_п^2 m_t^2 m_\gamma}{J'm_\varphi}\gamma_м-\frac{Ql_c m_t^2 m_{\sin}}{J'm_\varphi}\sin(\varphi_0-\varphi)_м-$$

$$\left.-\frac{m_{M_{пр}}m_t^2}{J'm_\varphi}M_{пр}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_м\right]dt_м,\ \text{или}\ \varphi_м=\int_0^{t_м}dt_м\int_0^{t_м}\left[K_7M_{эл.м}-\right.$$

$$\left.-D+E-K_8\varphi_м-K_9\gamma_м-K_{10}\sin(\varphi_0-\varphi)_м-K_7M_{пр}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_м\right]dt_м,\quad (5.9)$$

где $m_{M_{эл}}=m_{M_{пр}}$; $K_7=m_{M_{эл}}m_t^2/(J'm_\varphi)$; $D=c_к l_п^2\varphi_{пр}m_t^2/(J'm_\varphi)$; $E=c_к l_п^2\times$ $\times\varphi_1 m_t/(J'm_\varphi)$; $K_8=c_к l_п^2 m_t^2/J'$; $K_9=c_к l_п^2 m_t^2 m_\gamma/(J'm_\varphi)$; $K_{10}=Ql_c m_t^2\times$ $\times m_{\sin}/(J'm_\varphi)$.

Из (5.8) получим: $\gamma_м=\int_0^{t_м}dt_м\int_0^{t_м}\left[-\frac{c_к l_п^2\varphi_{пр}m_t^2}{J_к m_\gamma}+\frac{c_к l_п^2\varphi_1 m_t^2}{J_к m_\gamma}-\right.$

$$\left.-\frac{c_к l_п^2 m_t^2 m_\varphi}{J_к m_\gamma}\varphi_м-\frac{c_к l_{пt}^{2p}m_t^2}{J_к}\gamma_м+\frac{Q_к l_к m_t^2 m_{\sin}}{J_к m_\gamma}\sin(\gamma_0+\gamma)_м\right]dt_м,\ \text{или}$$

$$\gamma_м=\int_0^{t_м}dt_м\int_0^{t_м}[-C'+D'-K_{11}\varphi_м-K_{12}\gamma_м+K_{13}\sin(\gamma_0+\gamma)_м]\,dt_м,\quad (5.10)$$

где $C'=c_к l_п^2 m_t^2\varphi_{пр}/(J_к m_\gamma)$; $D=c_к l_п^2\varphi_1 m_t^2/(J_к m_\gamma)$; $K_{11}=c_к l_п^2 m_t^2 m_\varphi/(J_к m_\gamma)$;

$$K_{12}=c_к l_п^2 m_t^2/J_к;\ K_{13}=Q_к l_к m_t^2 m_{\sin}/(J_к m_\gamma).$$

Структурная схема модели для расчета показана на рис. 5.6. На входе интегратора *1* устанавливается напряжение $u_м$. Получающийся на выходе умножителя *13* момент $M_{эл.м}$ подается через блок с постоянным коэффициентом K_7 на вход сумматора *5*. На другие входы этого сумматора поступают постоянные напряжения

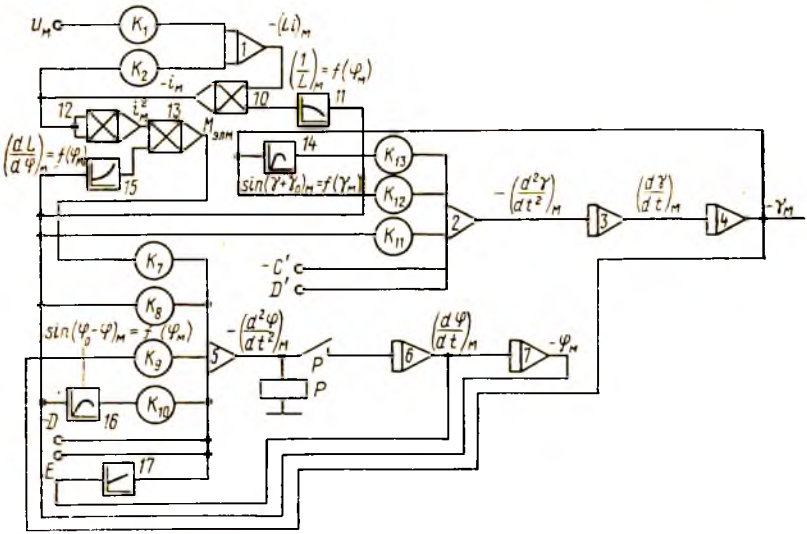


Рис. 5.6. Структурная схема модели для расчета процесса включения аппарата с поворотной подвижной системой

D и E и машинные переменные $-\varphi_м$, $-\gamma_м$, $\sin(\varphi_0-\varphi)_м$ и $M_{пр}(d\varphi/dt)_м$ через соответствующие блоки постоянных коэффициентов. Эти величины воспроизводят суммарный момент, противодействующий движению подвижной системы контактора. Согласно уравнению (5.9), на выходе интегратора *6* получим угловую скорость подвижной системы $(d\varphi/dt)_м$, а на выходе интегратора *7*, подключенного к входам нелинейных блоков *15* и *16* и сумматоров *2* и *5*, — угловое перемещение подвижной системы — $\varphi_м$. С помощью нелинейных блоков *11*, *15* и *16* воспроизводятся зависимости $(1/L)_м=f(\varphi_м)$, $(dL/d\varphi)_м=f(\varphi_м)$ и $\sin(\varphi_0-\varphi)_м=f(\varphi_м)$.

На вход сумматора *2* подаются постоянные напряжения D', $-C'$ и машинные переменные $\varphi_м$, $\gamma_м$, $\sin(\gamma_0+\gamma)_м$ через соответствующие коэффициенты. Согласно (5.10), на выходе интегратора *3* имеем угловую скорость подвижного контакта $(d\gamma/dt)_м$, а на выходе интегратора *4* — угловое перемещение контакта — $\gamma_м$, поступающее на входы сумматоров *2*, *5* и нелинейного блока *14;* с помощью последнего воспроизводится зависимость $\sin(\gamma_0+\gamma)_м=f(\gamma_м)$.

Для решения задачи на интеграторах *6* и *7* устанавливаются напряжения начальных условий, соответствующие моменту первого касания контактов. На интеграторе *3* устанавливается напряжение, соответствующее начальной скорости, которую подвижный контакт

получает при ударе. Это напряжение определяется как $(d\gamma/dt)_{\text{им}} = -(d\varphi/dt)_{\text{ум}} \varepsilon m_i/m_\gamma$.

§ 5.4. Вибрации контактов аппарата с многомассовой контактной системой

Уменьшение механических вибраций, приводящих к повышенному износу контактов, является определяющим при разработке аппаратов, предназначенных для работы с большой частотой включений. Здесь наряду с известными мерами, такими, как повышение контактных нажатий, облегчение контактной системы, рациональное согласование тяговой и механической характеристик аппарата и др., применяются системы со вспомогательными массами (гасителями вибраций).

Эскиз контактной системы (*а*) электромагнитного контактора с прямоходовой подвижной системой и его расчетная схема (*б*) показаны на рис. 5.7.

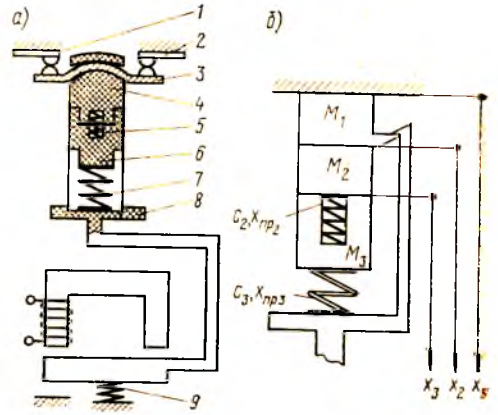


Рис. 5.7. Эскиз (*а*) и расчетная схема (*б*) многомассовой контактной системы

Контактная система состоит из неподвижных контактов *1*, *2* и контактного моста *3*, выполненного из латуни. Промежуточная масса *4* в виде пластмассовой колодки и пластмассовое опорное тело *6* соединены между собой через предварительно сжатую вспомогательную пружину *5*. Опорное тело *6* опирается на предварительно сжатую контактную пружину *7*, которая другим концом закреплена в траверсе *8*. Подвижная система удерживается в отключенном положении пружиной *9*.

После удара массы M_1, M_2 и M_3 разойдутся со скоростями, которые можно определить на основании теории соударения материальных точек. Дифференциальные уравнения, описывающие поведение масс M_1, M_2 и M_3, после удара будут иметь такой вид:

$$M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = Q_1;\ M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -c_2(x_{\text{пр}2} + x_2 - x_3) + Q_2;$$

$$M_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = -c_2(x_{\text{пр}2} + x_2 - x_3) - c_3(x_{\text{пр}3} + x_3 + x) + Q_3. \qquad (5.11)$$

Система (5.11) должна быть дополнена уравнениями (5.2) и (4.7). В уравнении (5.2)

$$F'_{\text{пр}}(x) = c_{\text{в}}(x_{\text{пр}} + x) + Q + c_3(x_{\text{пр}3} + x_3 + x) + Q_3.$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — перемещение масс M_1, M_2 и M_3 в процессе вибрации; Q_1, Q_2, Q_3, Q — веса контактного моста, промежуточного тела, опорной детали и подвижной системы аппарата; c_2, c_3, $c_в$ — жесткости вспомогательной, контактной и возвратной пружин аппарата; $x_{пр2}$, $x_{пр3}$, $x_{пр}$ — их предварительные деформации.

Запишем уравнения (5.11) в машинной форме:

$$x_{1м} = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} B\,dt_м,$$

$$x_{2м} = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} \left(-C - K_7 x_{2м} + K_8 x_{3м}\right) dt;$$

$$x_{3м} = \int_0^{t_м} dt_м \int_0^{t_м} \left(D - K_9 x_{2м} + K_{10} x_{3м} - K_{11} x_м\right) dt_м.$$

Здесь $B = Q_1 m_t^2/(M_1 m_{x_1})$; $C = \dfrac{c_2 x_{пр2} m_t^2}{M_2 m_{x_2}} - \dfrac{Q_2 m_t^2}{M_2 m_{x_2}}$; $K_7 = \dfrac{c_2 m_t^2}{M_2}$; $K_8 = \dfrac{c_3 m_t^2 m_{x_3}}{M_2 m_{x_2}}$; $D = -\dfrac{c_2 x_{пр2} m_t^2}{M_3 m_{x_3}} - \dfrac{c_3 x_{пр3} m_t^2}{M_3 m_{x_3}} + \dfrac{Q_3 m_t^2}{M_3 m_{x_3}}$; $K_9 = \dfrac{c_2 m_t^2 m_{x_2}}{M_3 m_{x_3}}$; $K_{10} = \dfrac{c_2 m_t^2}{M_3} - \dfrac{c_3 m_t^2}{M_3} = \dfrac{(c_2 - c_3)\, m_t^2}{M_3}$; $K_{11} = \dfrac{c_3 m_x m_t^2}{M_3 m_{x_3}}$.

Начальные скорости, которые получают массы M_1, M_2 и M_3 непосредственно после удара, определяют на основании следующих упрощенных представлений. До удара массы M_1, M_2 и M_3 двигаются вместе, как одно целое. Изменение скоростей при соударении оценивается коэффициентами восстановления: ε_1 — при ударе подвижного контактного моста с массой M_1 о неподвижные контакты; ε_2 — при соударении масс M_1 и M_2; ε_3 — при соударении масс M_2 и M_3. В момент соударения подвижного контакта с неподвижным вся контактная система получает начальную скорость

$$v_1 = -\varepsilon_1 v_0,$$

где $v_0 = (dx_к/dt)_у$ — скорость контактной системы непосредственно перед ударом.

Скорость v_1 следует рассматривать как переносную для масс M_1, M_2 и M_3. После этого масса M_1 действует на неподвижную по отношению к M_1 массу M_2. В результате скорость массы M_1 изменя-

ется и становится равной $v_1^{\bullet} = v_1 - (1+\varepsilon_2) M_2 v_1/(M_1+M_2)$, а M_2 получает относительную скорость $v_2^{\bullet} = (1+\varepsilon_2) M_1 v_1/(M_1+M_2)$.

Получив относительную скорость $v_2^{\bullet}$, масса M_2 соударяется с массой M_3, в результате чего массы M_2 и M_3 получат скорости: $v_2'^{\bullet} = v_2^{\bullet} - (1+\varepsilon_3) M_3 v_2^{\bullet}/(M_2+M_3)$; $v_3^{\bullet} = (1+\varepsilon_3) M_2 v_2^{\bullet}/(M_2+M_3)$.

Итак, относительные скорости масс M_1, M_2 и M_3 будут соответст-

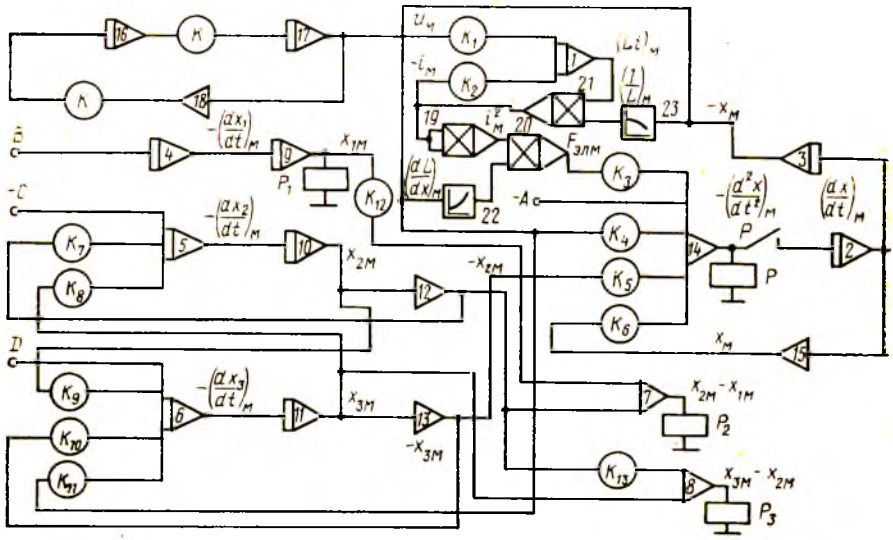


Рис. 5.8. Структурная схема для моделирования включения аппарата

венно равны $v_1^{\bullet}$, $v_2'^{\bullet}$ и $v_3^{\bullet}$, а абсолютные скорости масс определятся как $(dx_1/dt)_н = v_1^{\bullet}$; $(dx_2/dt)_н = v_1 + v_2'^{\bullet}$; $(dx_3/dt)_н = v_1 + v_3^{\bullet}$.

Такое представление о физической картине при ударе может быть обосновано тем, что, поскольку скорость распространения ударных напряжений в материалах является величиной конечной, можно предполагать, что вначале вся система получает скорость v_1, а затем начинаются последовательные соударения масс M_1 с M_2 и M_2 с M_3.

Структурная схема модели приведена на рис. 5.8. При расчете процессов на втором этапе включения необходима установка напряжений начальных условий на интеграторах *1*, *2* и *3*. При этом значения этих напряжений определяются при расчете первого этапа. Значения величин в конце первого этапа будут начальными для второго этапа. На интеграторах *4*, *5* и *6* устанавливаются напряжения, определяемые по формулам

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{нм} = \frac{v_1^{\bullet} m_t}{m_{x_1}}; \quad \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{нм} = \frac{(v_1 + v_2'^{\bullet}) m_t}{m_{x_2}}; \quad \left(\frac{dx_3}{dt}\right)_{нм} = \frac{(v_1 + v_3^{\bullet}) m_t}{m_{x_3}}.$$

После первого отскока происходит повторное соударение масс.

Условием повторного соударения массы M_1 с преградой (неподвижными контактами) является равенство $x_{1м}=0$. Условием встречи масс M_1 и M_2 будет $x_{2м}-K_{12}x_{1м}=0$.

При $x_{3м}=K_{13}x_{2м}$ повторно встречаются массы M_2 и M_3. Здесь коэффициенты $K_{12}=m_{x_1}/m_{x_2}$ и $K_{13}=m_{x_2}/m_{x_2}$ включаются для выравнивания масштабов $x_{1м}$, $x_{2м}$, $x_{3м}$. Контролируются эти условия с помощью сумматоров *7*, *8* и чувствительных реле P_1, P_2 и P_3. При выполнении любого из указанных условий реле останавливают модель и рассчитываются новые значения начальных скоростей.

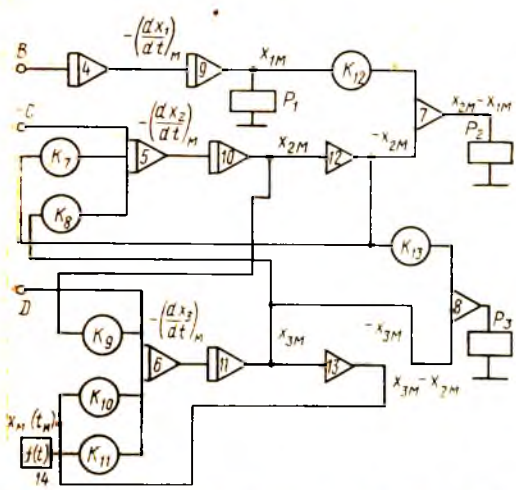


Рис. 5.9. Упрощенная структурная схема модели

Вследствие того что масса контактной системы значительно меньше массы якоря электромагнита и связанных с ним частей, во многих случаях влиянием вибрирующего контакта на движение якоря можно пренебречь. При этом структурная схема модели для расчета вибраций значительно упрощается (рис. 5.9).

ГЛАВА 6

РАСЧЕТ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ЦВМ

§ 6.1. Общие вопросы оптимального проектирования

Проектирование электрического аппарата заключается в последовательной разработке контактного, дугогасительного, механического, электромагнитного и других узлов на основе ТЗ.

При выполнении расчетных работ, являющихся важным этапом процесса проектирования, используются два вида расчета — поверочный и проектный. При поверочном расчете в качестве исходных обычно задаются конфигурации и геометрические размеры аппарата или его элементов, физические свойства материалов, некоторые электрические и магнитные величины. Задача расчета — определение рабочих характеристик аппарата (узла, конструкции). Так, например, при поверочном расчете электромагнита задаются форма магнитной системы и обмотки, их геометрические размеры,

марка стали и ее кривая намагничивания, напряжение, питающее обмотку, марка обмоточного провода и его свойства и т. д. Цель расчета заключается в определении тягового усилия электромагнита либо зависимости этого усилия от положения якоря (тяговая характеристика).

В случае проектного расчета исходными будут выходные параметры, т. е. в применении к электромагниту — значение силы (или ее зависимости от величин зазора), а определению подлежат в общем случае конфигурация, геометрические размеры и некоторые другие величины (материал магнитопровода и обмотки, число витков и т. д.), при которых заданные значения тяговой силы могут быть реализованы. При этом ставится задача оптимизации, т. е. нахождения наилучшего варианта.

Прежде всего необходимо установить, какую конструкцию аппарата следует считать оптимальной. На проектирование аппарата, например электромагнитного контактора, задаются техническими условиями (ТУ): напряжение цепи u, номинальный ток I главных контактов, число и вид контактов, режим работы, температура окружающей среды, износоустойчивость и т. д. Можно спроектировать множество аппаратов различных типов по указанным выше исходным данным с различными техническими и экономическими показателями (массой, объемом, потреблением энергии, стоимостью и др.). Очевидно, наилучшим из множества вариантов следует считать тот, который удовлетворяет поставленным ТУ и определенному критерию оптимальности (имеет минимальные либо массу, либо объем, либо стоимость и т. д.). Таким образом, под оптимальной будем понимать конструкцию, которая реализует заданные ТУ и удовлетворяет определенному критерию оптимальности.

Характеристики аппаратов связаны, как правило, нелинейными зависимостями с геометрическими размерами и другими параметрами. Поэтому расчет на оптимум требует привлечения специальных разделов вычислительной математики, например нелинейного программирования.

Возможности вычислительной техники позволяют перейти от анализа конструкции аппаратов (поверочные расчеты) к их синтезу (проектные оптимизационные расчеты), причем на основе зависимостей, характеризующих динамические режимы работы. Именно динамика аппаратов обусловливает их временные параметры, износоустойчивость и срок службы.

При постановке задачи оптимального проектирования важным является вопрос о критерии оптимальности, последний определяется постановкой практической задачи оптимизации конкретного электрического аппарата. Рассматривая вопрос оптимального проектирования в более общем виде, когда проектировщику приходится самому формулировать цель и выбирать критерий оптимальности, следует иметь в виду, что от структуры и сложности выражения критерия во многом зависят факторы, определяющие успех оптимизации,— необходимый объем памяти ЦВМ, сложность алго-

ритма и программ, сходимость решения задачи, время расчетных работ и т. д.

Учитывая многообразие требований (иногда противоречивых), предъявляемых к электрическому аппарату, к выбору критерия оптимальности возможны два подхода.

Первый подход заключается в определении главного, частного критерия в зависимости от основного назначения механизма. Другие требования могут быть сформулированы либо в виде ограничений, либо удовлетворяются по мере возможности. Такой подход к выбору критерия оптимальности позволяет обеспечить оптимизацию устройства по основному, решающему для конкретного устройства показателю.

Второй подход заключается в выборе обобщенного критерия, объединяющего ряд частных технических, экономических, эргономических, социальных и других требований. Обобщенные критерии оптимальности могут представляться в виде сумм частных показателей с соответствующими весовыми коэффициентами. Важным требованием к указанному выше критерию является соразмерность его составляющих. Отдельные части критерия должны взаимодействовать друг с другом на равных основаниях.

Обобщенные критерии, объединяющие ряд частных, могут получаться аналитическим объединением (агрегированием) последних. При этом обобщенные комплексные критерии представляют собой произведения, отношения и другие комбинации составляющих и могут быть размерными и безразмерными, учитывать статические, динамические и другие режимы работы.

Оптимизация по обобщенным критериям ухудшает некоторые частные показатели, однако при выборе критерия оптимальности возможность комплексной оценки конструкции в ряде случаев оказывается решающим фактором. Агрегированные критерии отражают взаимосвязь отдельных свойств механизма и в наибольшей степени соответствуют задаче оптимизации для равноважных требований, предъявляемых к проектируемому электрическому аппарату.

Критерии оптимальности должны выражаться через оптимизируемые параметры (геометрические размеры, технические характеристики материалов и т. д.). Ниже приводится перечень некоторых критериев, даются типы аппаратов, проектирование которых по указанным критериям целесообразно:

1. Минимум массы, минимум габаритного объема, максимум эксплуатационной надежности. По этим критериям целесообразно проектировать электромагнитные вентили, приводы электромагнитных клапанов гидро-, пневмо- и холодильных установок, электрические реле, контакторы, автоматические выключатели, предназначенные для встраивания в комплектные распределительные устройства, аппараты авиационного, судового и другого электрооборудования.

2. Минимум стоимости, минимум потребляемой мощности [аппараты управления общепромышленного назначения, имеющие

массовое применение (контакторы, реле, магнитные пускатели и др.)].

3. Максимум кинетической энергии, накопленной подвижным элементом в конце хода (электромагнитные молотки, штампы, пробивочные устройства, ударные расцепители высоковольтных выключателей, электромагниты перфорационных устройств ЦВМ, электромагнитные сваезабоечные машины).

4. Минимум времени срабатывания (быстродействующие реле и контакторы, автоматические выключатели, токовые расцепители автоматов, электромагниты перфораторов ЦВМ).

5. Максимум эксплуатационной надежности (аппаратура электрического подвижного состава, авиационные, судовые аппараты, реле и контакторы металлургических, шахтных, нефтяных, газовых установок, аппараты защиты электростанций и энергосистем).

6. Минимум постоянной времени обмотки, максимум отношения подъемного усилия к весу либо к потребляемой мощности (электромагниты систем магнитного подвеса, подъемные электромагниты).

7. Максимум силы тяги (подъемные и тормозные электромагниты, электромагнитные плиты, зажимы, магнитные столы).

8. Минимум обобщенного критерия экономичности

$$F_{кр} = \lambda_м M + \lambda_N N + \lambda_c C,$$

где M, N, C — масса, потребляемая мощность и стоимость электромагнита; $\lambda_м$, λ_N, λ_c — весовые коэффициенты (электромагниты аппаратов массового применения: реле, контакторов, пускателей, установочных автоматов и др). Весовые коэффициенты определяют долю (вес) каждой величины, входящей в выражение обобщенного критерия оптимальности (массы, мощности и стоимости), в его значении.

Как правило, минимальные значения величин, входящих в состав критерия оптимальности, не совпадают между собой. Минимизируя $F_{кр}$, находим компромиссное решение, связанное с определенным приближением массы, мощности и стоимости к своим наименьшим значениям. Степень приближения зависит от весовых коэффициентов. При одинаковых значениях этих коэффициентов не ставится никаких условий в отношении степени приближения составляющих критерия $F_{кр}$ к минимальным значениям. Определяется лишь минимум $F_{кр}$. При требовании наибольшего приближения одной из составляющих к минимуму необходимо ослабить влияние остальных, уменьшив их весовые коэффициенты. Характер компромисса определяется при постановке задачи оптимального проектирования.

9. Минимум обобщенного критерия конструктивности

$$K_{кр} = (T^*/T^*_{мин} - 1)^2 + (N^*/N^*_{мин} - 1)^2 + (M^*/M^*_{мин} - 1)^2,$$

где T, N, M — постоянная времени; мощность, потребляемая в стационарном режиме, и масса; $T_{мин}$, $N_{мин}$, $M_{мин}$ — минимальные значения T, N и M, полученные при частной оптимизации (элект-

ромагниты систем магнитного подвеса, подъемные электромагниты). Обобщенный критерий $K_{кр}$ целесообразно использовать при известных значениях минимальных величин (постоянной времени, мощности и массы), входящих в его выражение. Эти значения могут быть определены при частной минимизации, т. е. когда находится минимум одной из величин без ограничений в отношении других. Минимизируя $K_{кр}$, находим геометрические размеры электромагнита, дающие наименьшие отклонения постоянной времени, мощности и массы от их минимальных значений.

10. Максимум динамической эффективности [9]

$$DЭ = \frac{F_{пр}\delta_0}{VS_{охл}\Theta_д K_\tau t_{ср}} \frac{\int_{\delta_0}^{\delta_к} F_д d\delta}{\int_{\delta_0}^{\delta_к} F_д d\delta - \int_{\delta_0}^{\delta_к} F_{пр}(\delta)\, d\delta},$$

где $F_{пр}$ — противодействующая сила при начальном зазоре δ_0; V — объем электромагнита; $S_{охл}$, $\Theta_д$ — поверхность охлаждения и допустимая температура нагрева обмотки; K_τ — коэффициент теплоотдачи; $t_{ср}$ — время срабатывания; $F_д$ — динамическая тяговая сила; $\delta_к$ — конечное значение зазора; $F_{пр}(\delta)$ — внешняя противодействующая сила.

Электромагнитные аппараты общего применения без особых требований к быстродействию и износостойкости.

11. Минимум обобщенного критерия экономичности [10]

$$B_{кр} = \sqrt{P_{кр}C_{кр}Ц}/\sqrt{I_н I_р},$$

где $P_{кр}$ — трудоемкость аппарата, руб; $C_{кр}$ — себестоимость аппарата, руб.; $Ц$ — стоимость заготовительной массы цветных металлов, расходуемых на изготовление электроаппарата, руб.; $I_н$ — номинальный ток, А; $I_р$ — предельный отключаемый ток аппарата, А.

Электрические аппараты массового применения.

12. Максимум обобщенного критерия технического уровня [10]

$$Q_{кр} = p\sqrt{I_н I_р/(S_а S_и b)},$$

где p — вероятность безотказной работы; $S_а$ — площадь, занимаемая аппаратом; $S_и$ — площадь с учетом ионизированного пространства; b — размер аппарата в направлении, перпендикулярном монтажной панели («глубина» аппарата).

13. Максимум обобщенного критерия статической эффективности

$$E_{кр} = \delta_0 F_{эл}^2/(g_{св}MNT),$$

где $g_{св}$ — ускорение силы тяжести.

Электромагниты аппаратов массового применения для легких режимов работы.

Проектировать аппараты на максимум критерия $E_{кр}$ целесообразно, когда при заданном объеме необходимо найти геометрические

соотношения, обеспечивающие наилучшие экономические показатели (либо максимум $F_{эл}$, либо минимум M, N или T).

14. Минимум критерия согласования характеристик [11]

$$v_{кр} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{F_{эл\,i}}{F_{эл.з\,i}} - 1 \right)^2,$$

где m — число положений якоря, при котором задаются значения $F_{эл.з\,i}$ и δ_i; $F_{эл\,i}$ — расчетное значение тягового усилия при рабочем зазоре δ_i; $F_{эл.з\,i}$ — заданное значение усилия при зазоре δ_i.

Аппараты с электромагнитным приводом, имеющим заданную форму тяговой характеристики, с высокой износостойкостью, работающие с большой частотой.

Критерий $v_{кр}$ характеризует степень согласования характеристик при проектировании электромагнита на заданную тяговую характеристику. Последняя задается рядом значений тягового усилия $F_{эл.з\,i}$ при различных положениях якоря (δ_i). Минимизируя $v_{кр}$, находим размеры магнитопровода и обмотки, при которых получаются наименьшие среднеквадратичные отклонения значений усилия от заданных. Приведенный перечень не является полным, так как в зависимости от конкретных требований для отдельных типов аппаратов могут быть выбраны другие критерии оптимальности. При перечислении критериев не указываются ограничения и другие требования, которые определяются спецификой конкретных условий. При постановке задачи оптимального проектирования из ряда критериев, относящихся к группам электрических аппаратов, должен быть выбран один.

Электрические контактные аппараты управления, защиты, автоматики и связи в большинстве своем имеют электромагнитный привод. Аппараты с другими видами привода (пневматическим, гидравлическим, механическим) имеют ограниченное применение. В силу этого, рассматривая применение ЦВМ для расчета и оптимального проектирования элементов аппарата, будем иметь в виду в основном его электромагнитный привод. Кроме того, электромагниты широко используются также самостоятельно в качестве тормозных, подъемных, удерживающих устройств и устройств для системы магнитного подвеса.

В аппаратостроении применяют электромагниты различных конструктивных исполнений. Однако наиболее распространены электромагниты постоянного и переменного тока с втяжным якорем и стопом, с внешним поворотным якорем и прямоходовые системы П-образного типа с плоским и П-образным якорем. Указанные типы электромагнитов и будут рассматриваться дальше.

§ 6.2. Постановка задачи оптимального проектирования и методы оптимизации

При разработке электрических аппаратов в большинстве случаев требуется, чтобы их конструкция удовлетворяла одновремен-

но нескольким критериям оптимальности. Например, целесообразно совместить в одной конструкции минимальные значения массы, стоимости, потребляемой энергии и времени срабатывания. Однако такие требования часто являются противоречивыми. Так, для снижения времени срабатывания приходится проектировать аппарат со значительным превышением тягового усилия над противодействующим, что связано с увеличением размеров и потребления энергии. Уменьшение объема электромагнитного аппарата может быть достигнуто увеличением (до некоторого предела) индукции в стали магнитопровода. При этом потребуется увеличение МДС обмотки, приводящее к росту стоимости всего аппарата за счет увеличения расхода обмоточного привода. В силу указанных соображений при определении оптимального варианта один из критериев оптимальности следует считать определяющим, а остальные реализовать по мере возможности либо использовать их в виде уравнений ограничений.

Математическая формулировка задачи оптимального проектирования может быть представлена следующим образом. Требуется найти значения переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые минимизируют (максимизируют) критерий оптимальности (функцию цели, функцию качества)

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{6.1}$$

На переменные при этом могут быть наложены ограничения либо в виде равенств

$$q_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \; s < n, \tag{6.2}$$

либо в виде неравенств

$$P_j(X_1, X_2, \ldots, X_n) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, t, \; t < n, \tag{6.3}$$

либо тех и других вместе.

Функции f, q и P могут быть линейными и нелинейными.

В геометрической интерпретации критерий оптимальности можно рассматривать как функцию, определенную в n-мерном пространстве, образованном переменными. При этом n-мерное пространство является скалярным полем функции цели f и ограничений q и P. В рассматриваемом пространстве могут быть построены гиперповерхности уровня $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \text{const}$; $q_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \text{const}$; $P_j(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \text{const}$.

Поверхности, соответствующие ограничениям, образуют область допустимых значений переменных, внутри которой (или на ее границах) расположена экстремальная точка. Область допустимых значений переменных может быть либо односвязной, либо состоящей из отдельных изолированных областей. Функция цели может иметь не один, а несколько локальных (относительных) экстремумов. В этом случае задачу оптимизации называют многоэкстремальной, заключающейся в определении глобального (абсолютного) экстремума, т. е. наименьшего или наибольшего из

всех значений функции в области допустимых значений переменных.

Применительно к аппаратам переменные X_1, X_2, ..., X_n могут представлять собой конструктивные параметры — размеры контактного и дугогасительного узла, механизма, привода и т. п. Оптимальные значения указанных параметров обеспечивают экстремум критерию оптимальности — объему, массе, стоимости аппарата и т. п.

Особенности определения экстремума функций вида (6.1) делают задачу нахождения оптимальных параметров электромагнита сложной, и для ее решения должен привлекаться метод, приводящий к цели с наименьшими затратами вычислительных средств и рабочего времени. Из большего количества методов, используемых для решения оптимальных задач различных классов, для целей проектирования аппаратов в принципе могут быть применены методы исключения зависимых переменных, неопределенных множителей Лагранжа и нелинейного программирования. Различные методы можно сравнить, исходя из конкретного вида функций цели и ограничений, размерности задачи (количества переменных) по времени, затрачиваемому на подготовку программы для вычислительной машины, сложности программы, времени расчета варианта, требуемому объему памяти машины и т. п. С этой точки зрения опыт, накопленный различными проектными и исследовательскими организациями при проектировании аппаратов, должен сыграть важную роль в установлении наиболее экономичных методов.

Ниже показано применение некоторых из перечисленных выше методов для решения конкретных задач оптимизации аппаратов. Краткая характеристика отдельных методов приводится далее.

Исключение зависимых переменных. Предположим, имеется функция (6.1), экстремум которой необходимо определить. Переменные X_1, X_2, ..., X_n могут быть связанными между собой k уравнениями связи, с помощью которых можно исключить k переменных. При этом исключенные переменные будут выражены через оставшиеся $n-k$ неизвестных. Примем для определенности, что исключены первые k переменных. Определив частные производные функции f по независимым переменным и приравняв их нулю, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\partial f(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)/\partial X_{k+1}=0;\\ &\partial f(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)/\partial X_{k+2}=0;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\partial f(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)/\partial X_n=0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

Решением функций (6.4) можно найти значения переменных, обеспечивающих экстремум функции (6.1).

Метод неопределенных множителей Лагранжа. В случае, когда исключение зависимых переменных затруднено и на них наложены

ограничения в виде равенств (6.2), определяется экстремум функции Лагранжа

$$U_л = f + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i,$$

где λ_i — множители Лагранжа, величина которых определяется вместе с $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Приравнивание нулю частных производных по переменным дает систему уравнений

$$\frac{\partial U_л}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial X_1} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U_л}{\partial X_2} = \frac{\partial f}{\partial X_2} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial X_2} = 0; \quad \ldots;$$

$$\frac{\partial U_л}{\partial X_n} = \frac{\partial f}{\partial X_n} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial X_n} = 0. \qquad (6.5)$$

Уравнения (6.5) вместе с s уравнениями ограничений позволяют определить $n+s$ неизвестных (n — число переменных, s — число уравнений ограничений или число множителей Лагранжа), реализующих экстремум функции $U_л$, а следовательно, и функцию f.

Специальный раздел прикладной математики — математическое программирование, объединяющее линейное и нелинейное программирование. Если функция цели линейна

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n = \sum_{j=1}^{n} c_jX_j$$

и ограничения заданы в виде линейных равенств

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n = b_i$$

или неравенств

$$a_{j1}X_1 + a_{j2}X_2 + \ldots + a_{jn}X_n < b_j,$$

то определение экстремума функции цели представляет собой задачу линейного программирования. В случае нелинейных функций цели и ограничений решение задач оптимизации относится к нелинейному программированию.

Каждый из указанных выше методов обладает специфическими особенностями, обусловливающими применение методов для определенного круга задач. Исключение зависимых переменных обычно используют при относительно простых аналитических выражениях частных производных функции по переменным. Решение системы (6.4) обеспечивает при этом лишь необходимые условия экстремума. Чтобы заключить, являются ли полученные значения экстремальными, их приходится дополнительно исследовать на достаточность.

Метод неопределенных множителей Лагранжа позволяет определить условный (относительный) экстремум в случаях, когда исключение зависимых переменных вызывает затруднения. При этом функции ограничения, как и функция цели (критерий оптималь-

ности), должны быть непрерывными и иметь первую и вторую производные. Размерность системы (6.5) возрастает за счет неизвестных множителей Лагранжа по сравнению с (6.4), получаемой при исключении k неизвестных. При решении (6.5) пригодны те же приемы, что и при решении (6.4), причем здесь полученные значения переменных обеспечивают также необходимые, но недостаточные условия существования экстремума.

Как будет видно дальше, характеристики аппаратов находятся в сложной зависимости от геометрических размеров. Поэтому функции цели и функции ограничений, которые часто задаются в виде равенств и неравенств — относительно сложные нелинейные функции. Аналитические выражения производных функций цели и ограничений, необходимость определения которых возникает при поиске оптимума, делают систему уравнений трудноразрешимой, а необходимость анализа полученных решений для установления существования и характера экстремума вызывает дополнительные усложнения.

Наиболее универсальными при проектировании аппаратов являются численные методы нелинейного программирования. Ниже рассмотрены некоторые из них. При этом не ставится задача сравнения отдельных методов между собой, а излагается сущность методов, оказавшихся эффективными при решении конкретных задач оптимального проектирования электрических аппаратов.

В большинстве случаев методы нелинейного программирования — многошаговые, построенные на движении в n-мерном пространстве переменных в направлении оптимума. Из начального X_i^0 либо из промежуточного состояния X_i^k осуществляется переход в последующее состояние путем изменения каждой переменной на величину, называемую *шагом*: $X_i^{k+1}=X_i^k+\Delta X_i^k$, $i=1, 2, \ldots, n$.

При минимизации функции величина шага ΔX_i^k выбирается из условия

$$f(X_1^{k+1}, X_2^{k+1}, \ldots, X_n^{k+1})<f(X_1^k, X_2^k, \ldots, X_n^k). \qquad (6.6)$$

Поскольку движение к оптимуму происходит при дискретном изменении переменных, всегда существует вероятность пропуска оптимума, находящегося в достаточно узкой области допустимых значений переменных.

Характеристики аппаратов в сильной степени зависят от разброса размеров и других параметров элементов конструкции от номинальных значений за счет неточности изготовления (отклонение размеров и характеристик материалов), а также от изменения условий эксплуатации (отклонение питающего напряжения, изменение условий теплоотдачи, колебания температуры и сопротивления токоведущих деталей). Кроме того, полученные при оптимизационном расчете параметры часто технически не могут быть реализованы (например, диаметр провода должен быть согласован с существующим сортаментом). Иногда получен-

ные при расчете значения размеров приходится изменять из-за условий технологичности, механической прочности конструкции и т. п.

Указанные выше обстоятельства являются причиной того, что техническая реализация оптимумов, лежащих в узкой области допустимых значений параметров, не всегда возможна. Поэтому практическое значение имеют «размытые» оптимумы, т. е. такие сочетания искомых параметров, при которых малым ошибкам в выборе параметров соответствует незначительное изменение критерия оптимальности. Это обстоятельство облегчает поиск оптимального варианта и оправдывает применение дискретных методов нелинейного программирования.

Среди методов нелинейного программирования [12] в зависимости от способа определения шага ΔX_i, можно выделить методы градиентные, безградиентного поиска и случайного поиска, а также комбинированные, сочетающие в себе достоинства методов, перечисленных выше.

Для изложения существа и удобства записи методов введем векторные обозначения: $\mathbf{X}$ — n-мерный вектор, координатами которого являются переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n$; $f(\mathbf{X})$ — минимизируемая функция указанных переменных; $f'(\mathbf{X})$ — ее градиент, т. е. вектор с координатами $\partial f(\mathbf{X})/\partial X_1$, $\partial f(\mathbf{X})/\partial X_2$, ..., $\partial f(\mathbf{X})/\partial X_n$.

Сущность градиентных методов заключается в построении минимизирующей последовательности $X^0, X^1, \ldots, X^k, \ldots, X^m$ по формуле

$$\mathbf{X}^{k+1}=\mathbf{X}^k-\alpha_k f'(\mathbf{X}^k),$$

где $\mathbf{X}$ — k-е приближение; $\alpha_k>0$ — коэффициент, определяющий приращения переменных.

В этом методе при движении к минимуму делается шаг по направлению антиградиента — $f'(\mathbf{X})$, т. е. в направлении наибольшего убывания функции $f(\mathbf{X})$. Коэффициент α_k может выбираться различными способами, но обычно рассматривают два варианта. В простом градиентном методе принимается $\alpha_k=\text{const}$. Здесь при минимизации функции на каждом шаге должно выполняться условие (6.6). В противном случае α_k уменьшается (например, в два раза) до тех пор, пока выполнение (6.6) не восстановится. При методе наискорейшего спуска значение α_k определяется из условий минимума функции $f(\mathbf{X})$ по направлению — $f'(\mathbf{X})$:

$$f[\mathbf{X}^k-\alpha_k f'(\mathbf{X})]=\text{мин}\ f[\mathbf{X}^k-\alpha_k f'(\mathbf{X}^k)]=f(\alpha).$$

Одномерная минимизация функции $f(\alpha)$ может быть осуществлена методом интерполяции, заключающемся в аппроксимации $f(\alpha)$ интерполяционным многочленом. При хорошей аппроксимации можно ожидать, что в точке минимума многочлена действительная функция также близка к минимуму или, по крайней мере, значение ее в такой точке меньше предыдущих известных значений. В связи с трудностью аппроксимации функции многочленами высокого по-

рядка и определения корней полиномов высокой степени обычно ограничиваются квадратичной (реже кубической) интерполяцией.

Для построения квадратичного многочлена необходимо знать значения функции в трех последовательно расположенных точках, например α_1, α_2 и α_3. Коэффициенты интерполяционного многочлена определяются из системы уравнений

$$b_0+b_2\alpha_1+b_2\alpha_1^2=f(\alpha_1); \quad b_0+b_1\alpha_2+b_2\alpha_2^2=f(\alpha_2); \quad b_0+b_1\alpha_3+b_2\alpha_3^2=f(\alpha_3).$$

При $\alpha_1=0$ имеем $b_0=f(\alpha_1)$; $b_1\alpha_2+b_2\alpha_2^2=f(\alpha_2)-f(\alpha_1)$, откуда $b_1=\frac{[f(\alpha_3)-f(\alpha_1)]\,\alpha_2/\alpha_3-[f(\alpha_2)-f(\alpha_1)]\,\alpha_3/\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_3}$; $b_2=\frac{f(\alpha_2)-f(\alpha_1)}{\alpha_2^2}-\frac{b_1}{\alpha_2}$.

Квадратный многочлен $f(\alpha)=b_0+b_1\alpha+b_2\alpha^2$ достигает минимума в точке $\alpha_{\text{мин}}=-b_1/(2b_2)$, где его производная $\partial f(\alpha)/\partial\alpha=b_1+2b_2\alpha$ равна нулю.

Если $\alpha_1\neq 0$, будем иметь $\alpha_{\text{мин}}=\alpha_1-b_1/(2b_2)$.

Полученное таким образом значение $\alpha_{\text{мин}}$ используется в качестве следующего значения α_4. Так как минимум $f(\alpha)$ не совпадает с минимумом $f(\mathbf{X})$, то при определении следующего значения α_5 используется новая аппроксимация для точек α_2, α_3, α_4 и т. д.

Вопрос сходимости градиентных методов является важным. Скорость сходимости зависит от поведения функции $f(\mathbf{X})$ вблизи минимума. Градиентный метод сходится быстро, если вблизи минимума функция изменяется примерно одинаково по всем направлениям. Если же в окрестностях минимума $f(\mathbf{X})$ изменяется резко по одним направлениям и слабо — по другим, скорость сходимости метода мала.

Более точно позволяют найти точку минимума методы, в которых вблизи минимума функция $f(\mathbf{X})$ аппроксимируется квадратичной, а затем определяется минимум этой формы. Среди группы квадратичных методов следует указать на метод сопряженных градиентов для решения систем алгебраических уравнений. Позже метод был обобщен на случай минимизации нелинейных функций.

Известно, что для квадратичной функции цели n-переменных метод сопряженных градиентов позволяет находить экстремум за n шагов (итераций). Хотя в реальных условиях не всегда функции цели могут быть выражены в квадратичной форме, применение метода сопряженных градиентов для некоторых случаев оказывается эффективным.

В отличие от градиентных методов, где направление минимизации определяется по значению антиградиента на каждом шаге, в методе сопряженных градиентов для определения направления спуска на k-й итерации используется информация, полученная на предыдущем, $(k-1)$-м шаге. Шаги предпринимаются в сопряженных (ортогональных) направлениях (два вектора называют ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю). Для того чтобы новое направление стало сопряженным по отношению к пре-

дыдущему, необходимо соответствующим образом выбрать коэффициенты, определяющие приращения переменных. Метод сопряженных градиентов может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{X}^{k+1}=\mathbf{X}^k+\alpha_k\mathbf{S}^k;\quad \mathbf{S}^k=-f'(\mathbf{X}^k)+\beta_k\mathbf{S}^{k-1};\quad \mathbf{S}^0=-f'(\mathbf{X}^0);\quad \beta_k=f'(\mathbf{X}^k)\times$$
$$\times(f'(\mathbf{X}^k)-f'(\mathbf{X}^{k-1}))/\|f(\mathbf{X}^{k-1})\|^2.$$

Здесь $f'(\mathbf{X}^k)$, $f'(\mathbf{X}^{k-1})$ — градиенты целевой функции на k-й и $(k-1)$-й итерациях; $\|f'(\mathbf{X}^{k-1})\|$ — норма вектор-градиента, т. е. длина вектора — квадратный корень из суммы квадратов составляющих вектора по переменным.

Алгоритм минимизации целевой функции методом сопряженных градиентов строится следующим образом:

1) задаются начальные значения переменных и определяется вектор $\mathbf{X}^0$;

2) в точке $\mathbf{X}^0$ вычисляется $\mathbf{S}^0=-f'(\mathbf{X}^0)$; значение α_k находится так же, как в методе наискорейшего спуска;

3) вычисляются $f(\mathbf{X}^1)$ и $f'(\mathbf{X}^1)$;

4) направление $\mathbf{S}^1$ находится с использованием формулы для коэффициента $\beta_к$, где вместо векторов $\mathbf{X}^{k-1}$ подставляется $\mathbf{X}^0$, а вместо $\mathbf{X}^k-\mathbf{X}^1$.

Описанные выше методы позволяют вести поиск экстремума функции $f(\mathbf{X})$ при отсутствии ограничений на переменные. Ограничения учитывают несколькими способами. В случае ограничений типа равенства (6.2) укажем метод «штрафов», сущность которого состоит в замене задачи определения условного экстремума функции цели с ограничениями вида (6.2) поиском безусловного экстремума новой функции:

$$W(\mathbf{X})=f(\mathbf{X})+K_ш\sum_{i=1}^{u}[q_i(\mathbf{X})]^2.$$

Здесь $K_ш>0$ — коэффициент, значение которого следует выбирать из условия $W'(\mathbf{X})\gg f'(\mathbf{X})$, где $W'(\mathbf{X})$ — градиент функции $W(\mathbf{X})$.

Значение $K_ш$ целесообразно изменять, выбирая вначале малым, а затем увеличенным в окрестностях экстремума. Использование «штрафной» функции приводит к автоматическому исправлению ограничений при очередном шаге.

При наличии ограничений типа неравенства (6.3) также может быть использована функция «штрафа» в виде

$$W(\mathbf{X})=f(\mathbf{X})+K_ш\sum_{i=1}^{g}[P_j^*(\mathbf{X})]^2,$$

$$\text{где } P_j^*(\mathbf{X})=\begin{cases}P_j(\mathbf{X}) & \text{при } P_j(\mathbf{X})>0;\\ 0 & \text{при } P_j(\mathbf{X})\leqslant 0;\end{cases}$$

$P_j(\mathbf{X})$ — n-мерный вектор ограничений.

В некоторых случаях задачу определения оптимальных параметров электромагнита удается свести к отысканию экстремума нелинейной функции двух (или трех) переменных. Здесь эффективным оказывается применение одного из простейших методов безградиент-

ного поиска — метода сканирования. Суть метода состоит в последовательном определении критерия оптимальности (функции цели) в ряде точек, расположенных в области допустимых значений параметров. В случае двух независимых переменных X_1 и X_2 определение критерия оптимальности ведется при заданном значении одной переменной X_2 для ряда значений X_1, отстоящих друг от друга на величину шага ΔX_1 по переменной X_1. Алгоритм поиска строится таким образом, чтобы вычислительная машина отбрасывала варианты, для которых не удовлетворяются ограничения, а из тех случаев, в которых ограничения удовлетворяются, запоминала вариант, соответствующий минимуму (максимуму) критерия оптимальности. После окончания поиска лучшего варианта во всем диапазоне изменения X_1 значение переменной X_2 изменяется на величину шага ΔX_2, вновь производится оптимизация критерия оптимальности по переменной X_1 и т. д.

Достоинства описываемого метода заключаются в том, что при малых величинах шагов ΔX_1 и ΔX_2 определяется абсолютный (глобальный) экстремум функции. Независимость процедуры поиска от вида оптимизируемой функции и функций ограничений также является большим преимуществом метода сканирования. Достоинство описываемого метода — возможность установления «чувствительности» оптимизируемой функции к изменению отдельных параметров вблизи экстремума.

Применяют различные алгоритмы поиска методом сканирования (последовательный перебор узлов пространственной сетки, поиск с переменным шагом, сканирование по спирали), использование которых позволяет уменьшить объем вычислений. При поиске, например, с переменным шагом используют поэтапное уменьшение шага ΔX_i. При этом количество необходимых вычислений при поиске с переменным шагом по сравнению с перебором узлов пространственной сетки, когда исследуются все возможные сочетания переменных, уменьшается и может быть определено по формуле

$$N_2 = N_1 \left[d_q^{-r'/n} + r' (2 d_q \Delta q)^n \right],$$

где N_1 — количество вычислений при последовательном переборе узлов пространственной сетки; r' — число этапов, на которых шаг уменьшается в d_q раз; n — число переменных; Δ_q — точность определения экстремума.

Для ряда электротехнических задач эффективным оказывается применение метода рационализированного перебора [13], коренным образом отличающегося от простого перебора свойством *селективности*, под которым понимается исключение из рассмотрения вариантов, не ведущих к оптимуму. Система величин (совокупность вариантов), получаемая на определенном этапе, сравнивается с некоторыми эмпирическими (основанными на накопленном опыте проектирования и эксплуатации аналогичных конструкций) критериями и разбивается на две подсистемы — удовлетворяющую критериям А и не удовлетворяющую критериям Б. В последующем система Б исключается из рассмотрения. Свойство селективности

метода рационализированного перебора позволяет ограничить разнообразие возможных продолжений (тем самым сократить пространство поиска) и выйти на те направления, которые ведут к возможному решению задачи.

ГЛАВА 7

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 7.1. Характеристики электромагнитов, выраженные через геометрические размеры

Электромагнит с внешним поворотным якорем. Тяговое усилие электромагнита (рис. 7.1) в случае когда магнитным сопротивлением стали можно пренебречь,

$$F_{эл}=\frac{(Iw)^2}{2}\frac{dG_{пр}}{d\delta}, \tag{7.1}$$

где $G_{пр}$ — приведенная по потокосцеплению магнитная проводимость системы; δ — рабочий воздушный зазор.

Магнитодвижущая сила обмотки

$$Iw=jK_{з.окна}S_{окна}=jK_{з.окна}\,l\,(c-r_c). \tag{7.2}$$

Здесь j — плотность тока в обмотке; $K_{з.окна}$ — коэффициент заполнения обмоточного окна.

Определим мощность, потребляемую обмоткой в продолжительном режиме, полагая, что все окно занято обмоткой и $K_{з.окна}=K_з$ ($K_з$ — коэффициент заполнения обмотки):

$$N=j^2\rho_\tau K_з V_{обм}=$$
$$=j^2\rho_\tau K_з\pi\,(c^2-r_c^2)\,l.$$

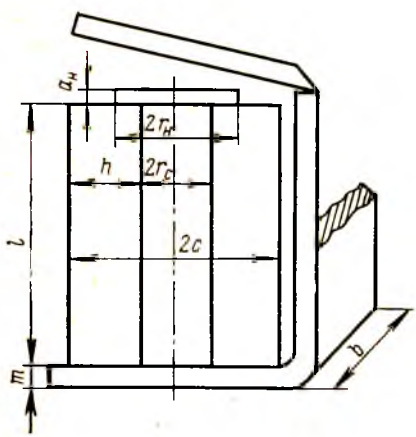


Рис. 7.1. Электромагнит с внешним поворотным якорем

Для установившегося теплового состояния по формуле Ньютона можно написать

$$N=K_\tau\tau_у S_{охл}=K_\tau\tau_у 2\pi\,(c+\beta r_c)\,l, \tag{7.3}$$

где β — коэффициент, учитывающий различие условий теплоотдачи с наружной и внутренней боковой поверхности и зависящий от конструкции обмотки (для обмотки, намотанной на каркас, $\beta=0$; для бескаркасной бандажированной катушки, установленной на стержне, $\beta=0{,}9$; для катушки, намотанной на металлическую гильзу, $\beta=1{,}7$; для катушки, намотанной непосредственно на сердечник, $\beta=2{,}4$); K_τ — коэффициент теплоотдачи с наружной боковой поверхности; $S_{охл}$ — поверхность охлаждения обмотки.

Из приведенных выражений можно определить плотность тока и МДС:

$$j=\sqrt{2K_\tau \tau_y (c+\beta r_c)/[\rho_\tau K_з (c^2-r_c^2)]}\,, \tag{7.4}$$

$$Iw=l\sqrt{2K_\tau \tau_y (c-r_c)(c+\beta r_c) K_з/[\rho_\tau (c+r_c)]}. \tag{7.5}$$

Приведенная по потокосцеплению проводимость

$$G_{пр}=G_\delta + gl/3,$$

где $g=2\pi\mu_0/\ln\left[\frac{c}{r_c}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2-1}\right]$ — удельная проводимость рассеяния.

Проводимость рабочего воздушного зазора

$$G_\delta=\mu_0\left[\frac{\pi}{\delta}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)+3r_н+0{,}9\delta+2a_н+\frac{8a_н r_н}{a_н+2\delta}\right]. \tag{7.6}$$

Пренебрегая магнитным сопротивлением стыка между ярмом и якорем, получим приведенную проводимость

$$G_{пр}=\mu_0\left[\frac{\pi}{\delta}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)+3r_н+0{,}9\delta+2a_н+\frac{8a_н r_н}{a_н+2\delta}\right]+ \\ +\frac{2\pi\mu_0 l}{3\ln\left[\frac{c}{r_c}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2-1}\right]}. \tag{7.7}$$

Учитывая (7.1) и (7.5), получаем выражение тягового усилия в функции геометрических размеров:

$$F_{эл}=\frac{K_\tau \tau_y \mu_0 l^2 (c-r_c)(c+\beta r_c) K_з}{\rho_\tau (c+r_c)}\left[0{,}9-\frac{\pi}{\delta^2}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)-\frac{16a_н r_н}{(a_н+2\delta)^2}\right]. \tag{7.8}$$

Высота полюсного наконечника $a_н$, как показывает расчет, мало влияет на проводимость и тяговое усилие. Однако при малых рабочих зазорах (в рационально спроектированных конструкциях при $\delta=1\div 2$ мм) в случае заниженного значения размера $a_н$ вследствие насыщения полюсной наконечник может ограничивать рабочий поток и увеличивать потоки рассеяния. Во избежание этого необходимо соблюдать условие

$$a_н=\frac{r_c}{2}\left[1-\left(\frac{r_c}{r_н}\right)^2\right].$$

С учетом последнего соотношения можно написать

$$F_{эл}=\frac{K_\tau \tau_y K_з \mu_0 l^2 (c-r_c)(c+\beta r_c)}{\rho_\tau (c+r_c)}\times \\ \times\left[0{,}9-\frac{\pi}{\delta^2}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)-\frac{32r_н^3(r_н^2 r_c-r_c^3)}{(r_н^2 r_c-r_c^3+4r_н^2\delta)^2}\right]. \tag{7.9}$$

Выразим в функции геометрических размеров индукцию в наиболее насыщенной части магнитопровода. Если пренебречь магнитным сопротивлением стыка в месте соединения сердечника с ярмом по сравнению с сопротивлением рабочего зазора, то наибольшая индукция будет в основании скобы магнитопровода:

$$B=\Phi_{\text{осн}}/S_{\text{осн}}=\Phi_{\text{осн}}/(mb),$$

где $\Phi_{\text{осн}}=Iw(G_\delta+gl/2)$ — магнитный поток в основании скобы.

На основании (7.5) и (7.7) будем иметь (полагая сечение скобы магнитопровода равным сечению сердечника)

$$B=\frac{I}{\pi r_c^2}\sqrt{\frac{2K_\tau\tau_y K_з(c-r_c)(c+\beta r_c)}{\rho_\tau(c+r_c)}}\times$$
$$\times\mu_0\left\{\frac{\pi}{\delta}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)+0{,}9\delta+\frac{3r_н^3+r_н^2r_c-r_c^3}{r_н^2}+\frac{8\left(r_cr_н^3-r_нr_c^3\right)}{r_cr_н^2-r_c^3+4r_н^2\delta}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi l}{\ln\left[\frac{c}{r_c}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2-1}\right]}\right\}. \qquad (7.10)$$

Постоянная времени обмотки электромагнита $T=L/R$.

Индуктивность обмотки $L=w^2G_{\text{пр}}$, или

$$L=w^2\mu_0\left\{\frac{\pi}{\delta}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)+0{,}9\delta+\frac{3r_н^3+r_cr_н^2-r_c^3}{r_н^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{8\left(r_cr_н^3-r_нr_c^3\right)}{r_cr_н^2-r_c^3+4r_н^2\delta}+\frac{2\pi l}{3\ln\left[\frac{c}{r_c}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2-1}\right]}\right\}. \qquad (7.11)$$

Сопротивление обмотки

$$R=\rho_\tau l_{\text{ср}}w/q_{\text{пр}},$$

где $q_{\text{пр}}=S_{\text{окна}}K_з/w=l(c-r_c)K_з/w$ — сечение провода; $l_{\text{ср}}=\pi(c+r_c)$ — средняя длина витка.

Учитывая последние соотношения, получаем:

$$R=\rho_\tau\pi(c+r_c)w^2/[lK_з(c-r_c)]; \qquad (7.12)$$

$$T=\frac{\mu_0K_зl(c-r_c)}{\rho_\tau\pi(c+r_c)}\left\{\frac{\pi}{\delta}\left(r_н^2+\frac{r_н^4}{4c^2}\right)+0{,}9\delta+\frac{3r_н^3+r_cr_н^2-r_c^3}{r_н^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{8\left(r_cr_н^3-r_нr_c^3\right)}{r_cr_н^2-r_c^3+4r_н^2\delta}+\frac{2\pi l}{3\ln\left[\frac{c}{r_c}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2-1}\right]}\right\}. \qquad (7.13)$$

Объем электромагнита, выраженный через геометрические размеры обмотки и магнитопровода

$$V_г = V_{обм} + V_с = \pi l (c^2 - r_с^2) + 2\pi r_с^2 (c + r_н + l) + \pi r_с (r_н^2 - r_с^2), \quad (7.14)$$

где $V_{обм}$, $V_с$ — объемы провода обмотки и стали магнитопровода.

Масса и электромагнита

$$M = M_{обм} + M_с = K_з \gamma_{пр} \pi l (c^2 - r_с^2) + \\ + 2\pi \gamma_с r_с^2 (c + r_н + l) + \pi \gamma_с (r_н^2 - r_с^2) r_с. \quad (7.15)$$

Стоимость активных материалов (обмоточного провода и стали)

$$C = M_{обм} Ц_{пр} + M_с Ц_с = Ц_{пр} K_з \gamma_{пр} \pi l (c^2 - r_с^2) + \\ + 2\pi Ц_с \gamma_с r_с^2 (c + r_н + l) + \pi Ц_с \gamma_с r_с (r_н^2 - r_с^2), \quad (7.16)$$

где $Ц_{пр}$, $Ц_с$, $\gamma_{пр}$, $\gamma_с$ — стоимость единицы массы и плотности провода и стали соответственно.

Электромагнит с втяжным якорем и стопом. Наличие внедряющегося в катушку сердечника в электромагните (рис. 7.2) делает задачу определения проводимости рабочего зазора и рассеяния сложной. Среди разработанных методов расчета проводимостей в электромагните рассматриваемого типа наиболее приемлемой для целей оптимизации является *формула Буйлова* [8]. Экспериментальная проверка показала, что эта формула правильно отражает влияние основных конструктивных параметров электромагнита на его характеристики и обеспечивает отклонение расчетного значения магнитного потока в рабочем зазоре от истинного значения, не превышающего 10 %. С учетом сказанного выше определим поток, выходящий из торца стержня, при условии, что магнитным сопротивлением стали магнитопровода можно пренебречь:

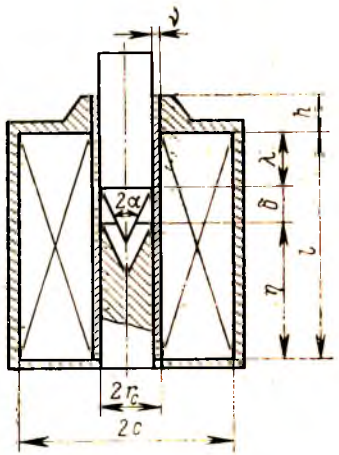


Рис. 7.2. Электромагнит с втяжным якорем и стопом

$$\Phi_\delta = I w G_\delta,$$

где

$$G_\delta = \frac{\mu_0 S_\delta}{l} \frac{\operatorname{sh} p\delta + p(\eta + \lambda \operatorname{ch} p\delta) - p\lambda^2 R_в g \operatorname{ch} p\delta / [2(1 + R_в g\lambda)]}{\operatorname{sh} p\delta + \mu_0 S_\delta p R_в \operatorname{ch} p\delta / (1 + R_в g\lambda)} \quad (7.17)$$

— приведенная по потоку проводимость электромагнита; S_δ — расчетное сечение рабочего зазора; $p = \sqrt{g/(\mu_0 S_\delta)}$ — безразмерный параметр; $R_в$ — магнитное сопротивление «воротничка».

Если в (7.17) положить $R_в=0$, то получим формулу Буйлова в виде

$$G_\delta = \frac{\mu_0 S_\delta}{l}\,\frac{\operatorname{sh} p\delta + p\,(\eta+\lambda \operatorname{ch} p\delta)}{\operatorname{sh} p\delta}. \qquad (7.18)$$

Расчетное (приведенное) сечение рабочего зазора определяется в зависимости от формы полюсов; для электромагнита с плоскими торцами сердечника и стопа $S_\delta = \pi r_c^2$:

сердечник и стоп имеют форму полного конуса $S_\delta = \pi r_c^2/\sin\alpha$;

сердечник и стоп имеют форму усеченного конуса $S_\delta = S_{\delta 1} + S_{\delta 2}$; $S_{\delta 1} = \pi\,(r_c^2 - r^2)/\sin\alpha$; $S_{\delta 2} = \pi\delta/\{\operatorname{tg}\alpha\,(1/r - 1/[r+\delta^2(1+\sin\alpha)/(r\operatorname{tg}\alpha)])\}$.

Удельная проводимость g зависит от формы корпуса электромагнита:

корпус в виде прямоугольной скобы $g = \dfrac{4\pi\mu_0}{\ln\left[c/r_c + \sqrt{(c/r_c)^2 - 1}\right]}$;

корпус и сердечник образуют коаксиальные цилиндры $g = 2\pi\mu_0/\ln(c/r_c)$.

Магнитное сопротивление «воротничка» $R_в = 1/(G_{во} + G_{вв})$.

Основная проводимость $G_{во} = 2\pi\mu_0 h/[\ln(\nu + r_c)/r_c]$.

Если $r_c \gg \nu$, то можно записать, что $G_{во} = 2\pi\mu_0 r_c h/\nu$.

Проводимость выпучивания у «воротничка» $G_{вв} = 8\mu_0 r_c \ln \times [(\nu + \delta + c - r_c)/\nu]$.

Приведенная по потокосцеплению проводимость рассматриваемого типа электромагнита

$$G_{пр} = G_\delta + \frac{g}{3l^2}(\lambda^3+\eta^3); \quad G_{пр} = \frac{\mu_0 S_\delta}{l} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} p\delta + p\,(\eta+\lambda \operatorname{ch} p\delta) - p\lambda^2 R_в g \operatorname{ch} p\delta/[2\,(1+R_в g\lambda)]}{\operatorname{sh} p\delta + \mu_0 S_\delta\, p R_в \operatorname{ch} p\delta/(1+R_в g\lambda)} + \frac{g}{3l^2}(\lambda^3+\eta^3). \qquad (7.19)$$

Тяговое усилие электромагнита определяется по *формуле Максвелла*:

$$F_{эл} = \Phi_\delta^2/(2\mu_0 S_\delta). \qquad (7.20)$$

С учетом выражения для определения МДС обмотки [см. (7.5)] тяговое усилие, выраженное в функции геометрических размеров,

$$F_{эл} = \frac{K_\tau\,\tau_y K_з\,(c - r_c)\,(c + \beta r_c)\,\mu_0 S_\delta}{\rho_\tau\,(c + r_c)} \times$$

$$\times \left\{\frac{\operatorname{sh} p\delta + p\,(\eta+\lambda \operatorname{ch} p\delta) - p\lambda^2 R_в g \operatorname{ch} p\delta/[2\,(1+R_в\lambda g)]}{\operatorname{sh} p\delta + \mu_0 S_\delta\, p R_в \operatorname{ch} p\delta/(1+R_в\lambda g)}\right\}^2. \qquad (7.21)$$

Выразим через размеры магнитопровода и обмотки индукцию в наиболее насыщенном сечении. Как показывает опыт проектирования, максимальная индукция наблюдается в сечении сердечника,

непосредственно прилегающего к «воротничку». Учитывая (7.5) и (7.17), можно написать:

$$B=\sqrt{\frac{2K_\tau\tau_y K_з}{\rho_\tau}}\sqrt{\frac{(c-r_c)(c+\beta r_c)}{c+r_c}}\times$$
$$\times\mu_0\left\{\frac{\operatorname{sh}p\delta+p(\eta+\lambda\operatorname{ch}p\delta)-p\lambda^2R_в g\operatorname{ch}p\delta/[2(1+R_в\lambda g)]}{\operatorname{sh}p\delta+\mu_0S_\delta pR_в\operatorname{ch}p\delta/(1+R_в\lambda g)}+\frac{g\lambda^2}{2\mu_0S_\delta}\right\}. \quad (7.22)$$

Индуктивность обмотки данного типа электромагнита

$$L=w^2\left\{\frac{\mu_0S_\delta}{l}\frac{\operatorname{sh}p\delta+p(\eta+\lambda\operatorname{ch}p\delta)-p\lambda^2R_в g\operatorname{ch}p\delta/[2(1+R_в\lambda g)]}{\operatorname{sh}p\delta+\mu_0S_\delta pR_в\operatorname{ch}p\delta/(1+R_в\lambda g)}+\right.$$
$$\left.+\frac{g}{3l^2}(\lambda^3+\eta^3)\right\}.$$

Постоянную времени обмотки определяем, используя (7.12) и последнее соотношение:

$$T=\frac{lK_э(c-r_c)}{\rho_\tau\pi(c+r_c)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\mu_0S_\delta}{l}\frac{\operatorname{sh}p\delta+p(\eta+\lambda\operatorname{ch}p\delta)-p\lambda^2R_в g\operatorname{ch}p\delta/[2(1+R_в\lambda g)]}{\operatorname{sh}p\delta+\mu_0S_\delta pR_в\operatorname{ch}p\delta/(1+R_в\lambda g)}+\frac{g}{3l^2}(\lambda^3+\eta^3)\right\}. \quad (7.23)$$

Принимая толщину фланцев равной $r_c/2$, а длину хвостовика якоря — r_c, выразим объем, массу и стоимость активных материалов электромагнита:

$$V_г=V_{об.м}+V_c=\pi(c^2+r_c)(\eta+\delta+\lambda+r_c); \quad (7.24)$$

$$M=M_{об.м}+M_c=K_a\gamma_{пр}\pi(c^2-r_c^2)(\eta+\delta+\lambda)+$$
$$+\gamma_c\pi r_c^2(2\eta+2\delta+2\lambda+r_c)+\gamma_c\pi c^2r_c; \quad (7.25)$$

$$C=Ц_{пр}M_{об.м}+Ц_cM_c=Ц_{пр}K_з\gamma_{пр}\pi(c^2-r_c^2)(\eta+\delta+\lambda)+$$
$$+Ц_c\gamma_c\pi r_c^2(2\eta+2\delta+2\lambda+r_c)+Ц_c\gamma_c\pi c^2r_c. \quad (7.26)$$

Электромагнит постоянного тока П-образного типа с плоским якорем. Рассматриваемая конструкция электромагнита (рис. 7.3) используется в системах магнитного подвеса, в контакторах и реле постоянного тока, в магнитных плитах и столах металлорежущих станков.

При использовании рассматриваемого типа электромагнита в качестве элемента магнитной плиты (рис. 7.4) сердечники нескольких электромагнитов устанавливаются на ферромагнитном основании. Обрабатываемая деталь закрепляется на полюсах электромагнитов. Между полюсами и деталью с целью снижения влияния остаточной намагниченности устанавливается немагнитная прокладка, толщина которой определяет рабочий зазор δ.

Для электромагнитов подвеса решающими конструктивными и экономическими показателями являются постоянная времени обмотки, определяющая качество работы системы регулирования за-

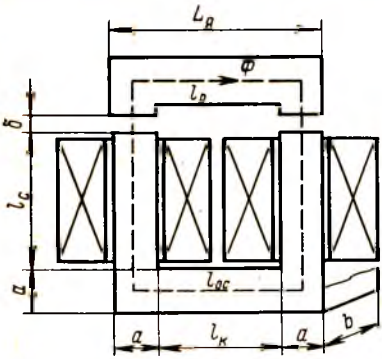


Рис. 7.3. Электромагнит П-образного типа с плоским якорем

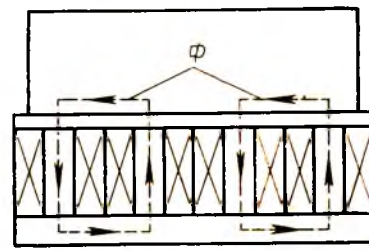


Рис. 7.4. Схема магнитного стола

зора (системы поддержания $\delta=\text{const}$), потребляемая обмоткой мощность, подъемная сила и масса электромагнита. Выразим характеристики электромагнита через его геометрические размеры в предположении, что магнитным сопротивлением ярма и якоря можно пренебречь.

Приведенная проводимость

$$G_{пр}=G_\delta/2+g(l_с-\delta)/3.$$

Сопротивление обмоток

$$R=\rho_\tau w^2(2a+2b+1{,}57l_к)/(l_с l_к K_з).$$

Магнитную проводимость G_δ одного зазора определим методом «вероятных» путей потока (рис. 7.5). Выражения для определения составляющих проводимости приведены в ряде литературных источников (см. [14]). Для нашего случая

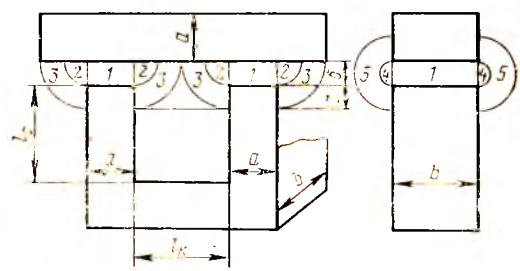


Рис. 7.5. К определению проводимости воздушного зазора

$$G_\delta=G_1+2G_2+2G_3+2G_4+2G_5+4G_6+4G_7.$$

Принимая $z=\delta$, можно написать:

$$L=w^2\mu_0\left[\frac{ab}{2\delta}+0{,}58a+0{,}95b+0{,}76\delta+\frac{l_с-\delta}{3}\left(\frac{b}{l_к}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+l_к/a}\right)\right];$$

$$T=\frac{\mu_0 K_з l_с l_к}{\rho_\tau(2a+2b+1{,}57l_к)}\times$$

$$\times\left[\frac{ab}{2\delta}+0{,}58a+0{,}95b+0{,}76\delta+\frac{l_с-\delta}{3}\left(\frac{b}{l_к}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+l_к/a}\right)\right]. \quad (7.27)$$

С учетом (7.3) получим:

$$N = K_\tau \tau_y S_{охл} = K_\tau \tau_y [l_c (4a + 4b + \pi l_к) + 2l_к (a + b) + 0{,}5\pi l_к^2), \quad (7.28)$$

или

$$N = j^2 \rho_\tau K_з V_{об.м} = j^2 \rho_\tau K_з [2l_к (a + b) + \pi l_к^2] l_c,$$

откуда

$$j = \sqrt{\frac{K_\tau \tau_y [(4a + 4b + \pi l_к) l_c + 2l_к (a + b) + 0{,}5\pi l_к^2]}{K_з \rho_\tau [2l_к (a + b) + \pi l_к^2] l_c}}.$$

По формуле (7.3), МДС обмотки

$$Iw = l_c l_к K_з \sqrt{\frac{K_\tau \tau_y [(4a + 4b + \pi l_к) l_c + 2l_к (a + b) + 0{,}5\pi l_к^2]}{K_з \rho_\tau [2l_к (a + b) + \pi l_к^2] l_c}}. \quad (7.29)$$

Беря производную $dG_{пр}/d\delta$, получаем

$$F_{эл} = \frac{K_з K_\tau \tau_y \mu_0 l_к^2 l_c [(4a + 4b + \pi l_к) l_c + 2l_к (a + b) + 0{,}5\pi l_к]}{2\rho_\tau [2l_к (a + b) + \pi l_к^2]} \times$$
$$\times [ab/2\delta^2 - 0{,}6 + b/(3l_к) + 0{,}427/(1 + l_к/a)].$$

Индукция в основании системы

$$B = Iw G_{пр}/(ab), \quad (7.30)$$

где

$$G_{пр} = \mu_0 \left[\frac{ab}{2\delta} + 0{,}58a + 0{,}95b + 0{,}76\delta + \frac{l_c - \delta}{2}\left(\frac{b}{l_к} + 0{,}52 + \frac{1{,}28}{1 + l_к/a}\right)\right] \quad (7.31)$$

— приведенная по потоку магнитная проводимость.

Подставив (7.29) и (7.31) в (7.30), имеем:

$$B = \frac{\mu_0}{ab}\left[\frac{ab}{2\delta} + 0{,}58a + 0{,}95b + 0{,}76\delta + \frac{l_c - \delta}{2}\left(\frac{b}{l_к} + 0{,}52 + \frac{1{,}28}{1 + l_к/a}\right)\right] \times$$
$$\times \sqrt{\frac{K_з K_\tau \tau_y l_к^2 l_c [(4a + 4b + \pi l_к) l_c + 2l_к (a + b) + 0{,}5\pi l_к^2]}{\rho_\tau [2l_к (a + b) + \pi l_к^2]}}. \quad (7.32)$$

Масса электромагнита

$$M = M_{обм} + M_c = \gamma_{пр} l_c l_к K_з (2a + 2b + 0{,}5\pi l_к) + \gamma_c ab (2l_c + 2a + l_к). \quad (7.33)$$

Здесь при определении M_c не учитывается масса якоря.

§ 7.2. Электромагнит с втяжным якорем и стопом

Для рассматриваемого типа электромагнита воспользуемся выражением тягового усилия (7.21), справедливым для случая, когда магнитное сопротивление стали магнитопровода мало по сравнению с сопротивлением рабочего зазора. Опыт показывает, что в большинстве практических случаев при наличии воздушного зазора

оптимальными являются ненасыщенные магнитные системы. Однако если пренебречь магнитным сопротивлением стали при использовании (7.21) для выбора оптимальных параметров, то можно получить нереальные значения индукции в элементах магнитопровода. Чтобы избежать этого, необходимо поиск параметров электромагнита вести при условии, что индукция в наиболее насыщенной части магнитопровода не превзойдет наперед заданного значения.

Для того чтобы результаты проектирования имели общий характер, выразим основные геометрические размеры электромагнита с конической формой сердечника и стопа через относительные (безразмерные) величины, приняв за базовый размер радиус сердечника:

$$c/r_c=X;\ \delta/r_c=y;\ \eta/r_c=z;\ \lambda/r_c=v;\ h/r_c=d;\ \nu/r_c=k.$$

Используя приведенные соотношения и выражения (7.21) и (7.22), тяговое усилие и индукцию в воротничке представляем в следующем виде:

$$F^*=\frac{F_{эл}\rho_\tau}{K_\tau\tau_y K_э\mu_0\delta^2}=\frac{\pi}{y^3\sin\alpha}\frac{(X+\beta)(X-1)}{(X+1)}\times$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\left(z+v\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\right)-}{\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+}\cdots\rightarrow\right.$$

$$\left.\cdots\rightarrow\frac{-\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\frac{k}{d}\frac{v^2}{\ln X}\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}}{2\left(1+\frac{k}{d}\frac{v}{\ln X}\right)}\right]^2;\qquad(7.34)$$

$$+\frac{k}{\sin\alpha}\frac{\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}}{2(d+kv/\ln X)}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}-$$

$$B^*=\frac{B}{\mu_0}\sqrt{\frac{\rho_\tau}{2K_\tau\tau_y K_э\delta}}=\frac{1}{\sqrt{y}\sin\alpha}\sqrt{\frac{(X+\beta)(X-1)}{(X+1)}}\times$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\left(z+v\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\right)-}{\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+\frac{k}{\sin\alpha}\times}\cdots\rightarrow\right.$$

$$\cdots + \frac{-\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\frac{k}{d}\frac{v^3}{\ln X}\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}}{2\left(1+\frac{k}{d}\frac{v}{\ln X}\right)} + \sin\alpha\frac{v^3}{\ln X} \times \sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\frac{\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}}{2\left(d+\frac{kv}{\ln X}\right)} \Bigg]. \quad (7.35)$$

Габаритный объем, массу, стоимость активных материалов и потребляемую мощность выразим также через относительные размеры. На основании (7.24) безразмерное значение объема можно представить в виде

$$V_r^* = \frac{V_r}{\delta^3} = \frac{\pi}{y^3}(X^2+1)(z+y+v+1) = V_r^*(X, y, z, v). \quad (7.36)$$

Массу, выраженную в безразмерной форме (для медного провода), получим, используя (7.25):

$$M^* = \frac{M}{\gamma_c\delta^3} = \frac{3{,}55}{y^3}\left[(X^2-1)(z+y+v)K_8 + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{y^3}(2z+2y+2v+1) + \frac{\pi X^2}{y^3}\right] = M^*(X, y, z, v). \quad (7.37)$$

С учетом (7.26) относительная стоимость материалов

$$C^* = \frac{C}{\gamma_c Ц_c\delta^3} = \frac{\pi}{y^3}\left[(X^2-1)(z+y+v)K_3\sigma_э + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{y^3}(2z+2y+2v+1) + \frac{\pi X^2}{y^3}\right] = C^*(X, y, z, v), \quad (7.38)$$

где $\sigma_э = \gamma_{пр}Ц_{пр}/(\gamma_c Ц_c)$ — соотношение плотностей и стоимостей единиц массы обмоточного провода и стали.

Учитывая (7.3), потребляемую мощность можно выразить в функции относительных величин следующим образом:

$$N^* = \frac{N}{K_т\tau_y\delta^2} = \frac{2\pi}{y^2}(X+\beta)(z+y+v) = N^*(X, y, z, v). \quad (7.39)$$

Если принять, что $F^* = F_3^*$ и $B^* = B_3^*$, т. е. расчет вести для заданных значений относительных величин тяговой силы и индукции в основании магнитопровода, то выражения (7.34) и (7.35) можно

использовать в качестве уравнений связи и с их помощью исключить две переменных. Введем обозначения:

$$A=\frac{\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\left(z+v\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\right)-\frac{\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\frac{k}{d}\frac{v^2}{\ln X}\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}}{2\left(1+\frac{k}{d}\frac{v^2}{\ln X}\right)}}{\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+\frac{k}{\sin\alpha}\frac{\operatorname{ch} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}}{2\left(d+\frac{kv}{\ln X}\right)}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}};$$

$$\Gamma=(X+\beta)(X-1)/(X+1)y,$$

тогда

$$F^*=\frac{\pi}{y^2\sin\alpha}\Gamma A^2;\quad B^*=\frac{\sqrt{\Gamma}}{\sin\alpha}\left(A+\sin\alpha\frac{v^2}{\ln X}\right). \tag{7.40}$$

Из (7.40) получаем

$$A=y\sqrt{\frac{F^*\sin\alpha}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}.$$

Учитывая приведенные соотношения, можно записать:

$$v=\sqrt{\frac{\ln X}{\sin\alpha}\left(\frac{B^*\sin\alpha}{\sqrt{\Gamma}}-\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}y\sqrt{\frac{F^*\sin\alpha}{\pi}}\right)}; \tag{7.41}$$

$$z=\sqrt{\frac{\ln X}{\sin\alpha}}\left\{y\sqrt{\frac{F^*\sin\alpha}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\left[\operatorname{sh} y\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{\ln X}}\frac{\operatorname{ch} y\sqrt{2\sin\alpha/\ln X}}{2(d+kv/\ln X)}\right]\right\}. \tag{7.42}$$

Расчет целесообразно вести для различных значений $F^*=F^*_з$, $B^*=B^*_з$, а также $\sin\alpha$, β, $K_з$ и $\delta_з$, определяемых назначением, условиями работы и конструкций электромагнита. С учетом изложенного выше задача определения оптимальных параметров электромагнита сводится к нахождению минимума целевых функций $V^*_г$, M^*, C^*, N^*, зависящих лишь от двух переменных: X и y. При этом другие две переменные (v и z) определяются соответственно по (7.41) и (7.42).

Для определения оптимальных значений параметров X, y, z и v можно использовать различные методы отыскания экстремумов функций $V^*_г$, M^*, C^* и N^*. Можно было бы, например, применить метод неопределенных множителей Лагранжа. Однако при этом прищ-

лось бы использовать выражения частных производных функций Лагранжа по переменным X и y, которые в данном случае получаются сложными. Учитывая небольшое количество переменных, наиболее удобным в данном случае является метод сканирования с переменным шагом. Структурная схема программы для ЦВМ «Минск-22» при минимизации габаритного объема показана на рис. 7.6. С помощью блока *1* исходные данные вводятся в ЦВМ: $X_{нач}$, $y_{нач}$, $X_{кон}$, $y_{кон}$, массив (ряд дискретных значений) индукции $B_з^*$ и др. В блоке *2* в соответствующие ячейки засылаются первые (начальные) значения индукции $B_з^*$ и параметра X. В ячейку габаритного объема $V_г^*$, засылается большое число для сравнения со значением $V_г^*$, вычисление которого осуществляется позже (блок *7*). Затем в ячейку арифметического устройства, предназначенную для операций с величинами y, засылается начальное значение этого параметра (блок *3*). В блоке *4* рассчитываются значения v и z по формулам (7.41) и (7.42).

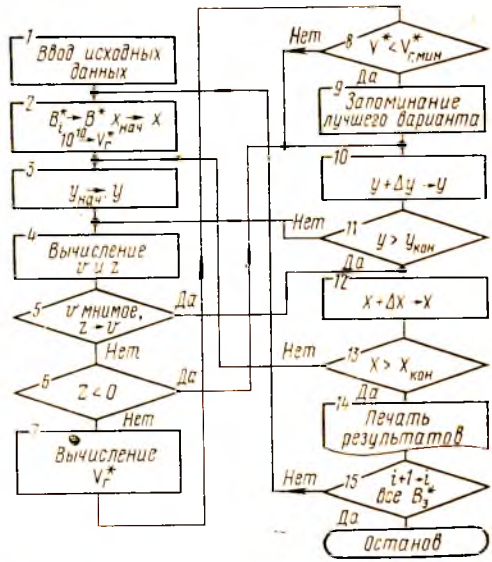


Рис. 7.6. Структурная схема программы ЦВМ для оптимизации электромагнита методом сканирования

В зависимости от условий расчета значение $z_{опт}$ может колебаться в пределах от $z_{опт}=v_{опт}$ до $z_{опт}=0$. При этом в силу дискретного характера метода сканирования могут быть случаи, когда получается $z_{опт}<0$ либо $z_{опт}>v_{опт}$, а из уравнения (7.41) можно получить мнимое значение параметра v. Эти случаи не соответствуют реальным условиям. Для анализа служат логические блоки *5* и *6*.

Если получается $z<v$ и v — действительное число, то в блоке *6* проверяется условие $z<0$, так как параметр z в реальных условиях отрицательным быть не может. При $z>0$ вычисляется значение $V_г^*$ (блок *7*), которое сравнивается с хранящимся в ячейках блока большим числом. В случае если полученное значение $V_г^*$ меньше этого числа, машина запоминает $V_г^*$ как минимальное. Здесь же (блок *9*) запоминаются оптимальные (для этого этапа) значения параметров X, y, v и z. Далее параметру дается приращение Δy (блок *10*), и если новое значение не больше конечной величины $y_{кон}$ (блок *11*), то вычисляются новые значения v и z и цикл повторяется. При этом рассчитывается функция цели $V_г^*$, которая сравнивается с объемом, определенным на более ранних шагах и т. д. После того как все воз-

можные значения параметра исследованы, дается приращение параметру X (блок *12*) и после анализа условия $X>X_{кон}$ в случае отрицательного ответа производится расчет при изменяющемся значении y. После обследования всех значений X и y результаты, соответствующие оптимальному варианту, выводятся на печать (блок *14*). Этот вариант соответствует начальному значению $B^*_{зi}$. Затем расчет повторяется при всех заданных величинах индукции (блок *15*). По окончании вычислений машина останавливается и на печать выводятся окончательные результаты.

В случае если получается $z>v$ и v — мнимое, то начиная с блока *5* дается приращение параметру X и расчет повторяется (так как предыдущее значение X не соответствует реальным условиям). При $z<0$ расчет проводится при измененной величине y.

На рис. 7.7 приведены зависимости $\ln V^*_{г.мин}=f(\ln F^*_з)$ при $B^*_з=$ $=\text{const}$ и оптимальных значениях параметров X, y, z и v (вследствие значительного диапазона изменения величин $F^*_з$ и $V^*_г$ зависимости, связывающие эти величины, построены в логарифмическом масштабе).

Приведенная выше методика дает возможность определить оптимальные параметры электромагнита, обмотка которого подключается непосредственно к сети постоянного напряжения. В практике эксплуатации часто используются электромагниты с форсированным включением (см. гл. 4). В этом случае для уменьшения времени включения обмотка присоединяется к сети через добавочное сопротивление, шунтированное размыкающим контактом. При этом на период пуска к обмотке прикладывается напряжение, в несколько раз превышающее номинальное. Оптимальное проектирование таких электромагнитов необходимо вести на основании заданных динамических зависимостей. Этот вопрос будет рассмотрен ниже. Здесь укажем на возможность упрощенного представления процесса срабатывания, не учитывающего сложных связей между параметрами электромагнита в динамике.

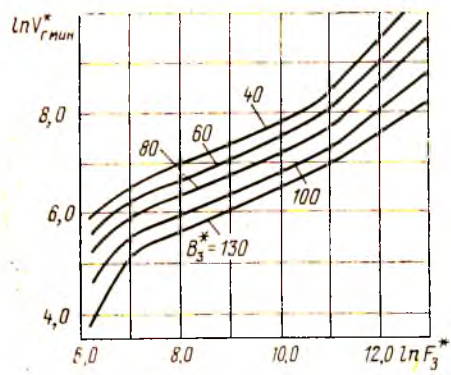


Рис. 7.7. Зависимость минимального габаритного объема от значения тягового усилия

При форсированном включении напряжение на зажимах обмотки изменяется в $K_ф$ раз — от напряжения пуска $u_п$ до напряжения удержания якоря $u_{уд}$, соответствующего разомкнутому положению контакта:

$$K_ф=u_п/u_{уд};\quad K_ф>1. \tag{7.43}$$

В $K_ф$ раз будут отличаться и МДС при пуске $(Iw)_п$ и удержании $(Iw)_{уд}$:

$$(Iw)_п = K_ф (Iw)_{уд}.$$

В установившемся режиме мощность, выделяемая в обмотке током,

$$N = u^2/R.$$

С учетом (7.43), полагая превышение температуры при включении и в установившемся режиме одинаковым, можно написать

$$N_п/N_{уд} = K_{τп} τ S_{охл}/(K_{τуд} τ S_{охл}).$$

Таким образом, условно можно считать, что при постоянной величине τ коэффициент теплоотдачи обмотки изменяется в процессе включения от $K_{τп}$ до $K_{τуд}$, т. е.

$$K_{τп} = K_ф K_{τуд}. \qquad (7.44)$$

В соответствии с этим при определении относительных значения тягового усилия и индукции в наиболее насыщенной части магнитопровода необходимо подставить коэффициент $K_{τп}$, определенный по (7.44):

$$F_з^* = \frac{F_{элз} ρ_τ}{K_{τп} τ_y K_з μ_0 δ^3}; \quad B_з^* = \frac{B_з}{μ_0} \sqrt{\frac{ρ_τ}{2K_{τп} τ_y K_з δ^3}}.$$

В остальном порядок проектирования ничем не отличается от изложенного выше.

§ 7.3. Электромагнит с внешним поворотным якорем

Тяговое усилие и индукцию в основании магнитопровода выразим в функции относительных величин:

$$c/r_c = X; \quad δ/r_c = y; \quad l/r_c = γ; \quad r_н/r_c = λ_1.$$

На основании (7.9) и (7.10) получим:

$$F^* = \frac{F_{эл} ρ_τ}{K_τ τ_y K_з μ_0 δ^3} = \frac{γ^2 (X-1)(X+β)}{y^3 (X+1)} \left[0{,}9 - \frac{π}{y^2} \left(λ_1^2 + \frac{λ_1^4}{4X^2} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{32 λ_1^3 (λ_1^2 - 1)}{(λ_1^2 - 1 + 4λ_1^2 y)^2} \right]; \qquad (7.45)$$

$$B^* = \frac{B}{μ_0} \sqrt{\frac{ρ_τ}{2K_τ τ_y K_з δ}} = \frac{γ}{π \sqrt{y}} \sqrt{\frac{(X-1)(X+β)}{X+1}} \times$$
$$\times \left\{ \left[\frac{π}{y} \left(λ_1^2 + \frac{λ_1^4}{4X^2} \right) + 0{,}9y + \frac{3λ_1^3 + λ_1^2 - 1}{λ_1^2} + \frac{8λ_1 (λ_1^2 - 1)}{λ_1^2 - 1 + 4λ_1^2 y} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{πγ}{\ln \left[X + \sqrt{X^2 - 1} \right]} \right\}. \qquad (7.46)$$

В функции относительных величин выразим также объем, массу, стоимость и мощность, потребляемую обмоткой. Используя (7.14)—(7.16), получаем:

$$V_{\text{г}}^{*}=\frac{V_{\text{г}}}{\delta^{3}}=\frac{1}{y^{3}}\left[\pi\gamma\left(X^{2}-1\right)+2\pi\left(X+\lambda_{1}+\gamma\right)+\pi\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)\right]; \quad (7.47)$$

$$M^{*}=\frac{M}{\gamma_{\text{c}}\delta^{3}}=\frac{3{,}55}{y^{3}}\left(X^{2}-1\right)\gamma K_{3}+\frac{\pi}{y^{3}}\left[2\left(X+\lambda_{1}+\gamma\right)+\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)\right]; \quad (7.48)$$

$$C^{*}=\frac{C}{\gamma_{\text{c}}Ц_{\text{c}}\delta^{3}}=\frac{\pi}{y^{3}}\left(X^{2}-1\right)\gamma K_{3}\sigma_{\text{э}}+\frac{\pi}{y^{3}}\left[2\left(X+\lambda_{1}+\gamma\right)+\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)\right]. \quad (7.49)$$

Потребляемая обмоткой мощность, выраженная в функции относительных параметров, определяется по (7.39).

Для исключения двух переменных используем выражения (7.45) и (7.46). Из (7.45) непосредственно вытекает

$$\gamma=\sqrt{\frac{F_{\text{э}}^{*}y^{3}\left(X+1\right)}{\left(X-1\right)\left(X+\beta\right)\left[0{,}9-\frac{\pi}{y^{2}}\left(\lambda_{1}^{2}+\frac{\lambda_{1}^{4}}{4X^{2}}\right)-\frac{32\lambda_{1}^{3}\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)}{\left(\lambda_{1}^{2}-1+4\lambda_{1}^{2}y\right)^{2}}\right]}}. \quad (7.50)$$

Уравнение (7.41) оказывается трудно разрешимым относительно любого из оставшихся переменных. Для решения этого уравнения относительно X с учетом условия $B^{*}=B_{\text{з}}^{*}$ можно получить:

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{F_{\text{э}}^{*}y}{0{,}9-\frac{\pi}{y^{2}}\left(\lambda_{1}^{2}+\frac{\lambda_{1}^{4}}{4X^{2}}\right)-\frac{32\lambda_{1}^{3}\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)}{\left(\lambda_{1}^{2}-1+4\lambda_{1}^{2}y\right)^{2}}}}\left\{\left[\frac{\pi}{y}\left(\lambda_{1}^{2}+\frac{\lambda_{1}^{4}}{4X^{2}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+0{,}9y+\frac{3\lambda_{1}^{3}+\lambda_{1}^{2}-1}{\lambda_{1}^{2}}+\frac{8\lambda_{1}\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)}{\left(\lambda_{1}^{2}-1+4\lambda_{1}^{2}y\right)}\right]+\frac{\pi}{\ln\left(X+\sqrt{X^{2}-1}\right)}\times$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{F_{\text{э}}^{*}y^{3}\left(X+1\right)}{\left(X-1\right)\left(X+\beta\right)\left[0{,}9-\frac{\pi}{y^{2}}\left(\lambda_{1}^{2}+\frac{\lambda_{1}^{4}}{4X^{2}}\right)-\frac{32\lambda_{1}^{3}\left(\lambda_{1}^{2}-1\right)}{\left(\lambda_{1}^{2}-1+4\lambda_{1}^{2}y\right)^{2}}\right]}}\right\}-$$

$$-B_{\text{з}}^{*}=f\left(X\right)=0. \quad (7.51)$$

Решить уравнения (7.51) можно на ЦВМ с помощью одного из приближенных методов.

В реальных конструкциях электромагнитов параметр X не может изменяться произвольно. Опыт проектирования показывает, что для разнообразных конструктивных исполнений электромагнитов можно принять $0{,}1\leqslant X\leqslant 10$.

Для определения значений γ и X используем метод перебора. Интервал изменения величины X разбиваем на достаточно малые

подынтервалы ΔX (например, $\Delta X=0{,}05$). Значения X, вычисленные по формуле $X_n=X_{n-1}+\Delta X_n$, подставляются в (7.51) до тех пор, пока не выполнится условие $f(X)\leqslant\varepsilon_X$ (ε_X — заданное число, определяющее точность вычислений). Найденное таким способом значение X подставляется в (7.50) и рассчитывается параметр γ. Необходимо при этом исследовать уравнение (7.51) во всем интервале изменения параметра для отыскания его значений, удовлетворяющих условию $f(X)\leqslant\varepsilon_X$.

С учетом (7.50) и (7.51) задачу оптимизации параметров электромагнита можно свести к определению минимума функций двух переменных: $V_\Gamma^*(y,\ \lambda_1)$ или $M^*(y,\ \lambda_1)$ и т. д., а две другие переменные (X и γ) определяются описанным выше способом. Указанная задача может быть решена методом сканирования с переменным шагом. Схема программы ЦВМ для этого случая аналогична описанной в предыдущем параграфе.

§ 7.4. Электромагнит П-образного типа с плоским якорем

При представлении характеристик электромагнита в относительной форме в качестве базового может быть принят любой размер магнитной системы. Примем в данном случае (см. рис. 7.3) за базовый размер величину рабочего зазора δ. Вводя отношения $l_c/\delta=X$; $l_к/\delta=y$; $a/\delta=v$; $b/\delta=z$ и подставляя их в (7.27)—(7.29), (7.32) и (7.33), получаем относительные значения:
постоянной времени обмотки

$$T^*=\frac{T\rho_\tau}{\mu_0 K_з\delta^2}=\frac{Xy}{2v+2z+1{,}57y}\left[\frac{zv}{2}+0{,}58v+0{,}95z+0{,}76+\right.$$
$$\left.+\frac{X-1}{3}\left(\frac{z}{y}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+y/v}\right)\right]; \qquad (7.52)$$

тягового усилия

$$F^*=\frac{2F_{эл}\rho_\tau}{K_\tau\,\tau_y\mu_0 K_з\delta^3}=$$
$$=Xy\frac{[(4v+4z+\pi y)+2y(v+z)+\pi y^2/2]\,[zv/2+z/(3y)+0{,}427/(1+y/v)-0{,}6]}{v+z+\pi y}; \qquad (7.53)$$

массы электромагнита

$$M^*=\frac{M}{\gamma_c\delta^3}=3{,}55Xy\left(2v+2z+\frac{\pi y}{2}\right)K_з+vz(2X+y+2v) \qquad (7.54)$$

($\gamma_{пр}/\gamma_c=3{,}55$ — постоянный коэффициент);

$$N^*=N/(K_\tau\,\tau_y\delta^2)=X(4v+4z+\pi y)+2y(v+z)+\pi y^2/2; \qquad (7.55)$$

индукции в основании магнитопровода

$$B^*=\frac{B}{\mu_0}\sqrt{\frac{\rho_\tau}{K_\tau\,\tau_y K_з \delta}}=\left[0{,}5+\frac{0{,}58}{z}+\frac{0{,}95}{v}+\frac{0{,}76}{vz}+\right.$$

$$\left.+\frac{X-1}{2vz}\left(\frac{z}{y}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+y/v}\right)\right]\sqrt{\frac{X^2y(4v+4z+\pi y)+2y(v+z)+\pi y^2}{2v+2z+\pi y}}. \quad (7.56)$$

Задача оптимизации формулируется в следующем виде. Найти минимум критерия оптимальности $T^*(X, y, v, z)$ либо $M^*(X, y, v, z)$; $N^*(X, y, v, z)$ при условиях

$$F^*(X, y, v, z)=F^*_з; \quad (7.57)$$

$$B^*(X, y, v, z)=B^*_з, \quad (7.58)$$

где $F^*_з$, $B^*_з$ — заданные значения тягового усилия и индукции в основании магнитопровода (относительные величины).

Определению подлежат значения X, y, v, z при условиях (7.57) и (7.58). Как и в случае электромагнитов с втяжным и внешним поворотным якорем, полагая $F^*=F^*_з$ и $B^*=B^*_з$, используем уравнения (7.57) и (7.58) как уравнения связи для исключения переменных. Выражая уравнение (7.57) как функцию X, получаем

$$X^2+\frac{y}{2}X-F^*_з(v+z+\pi y)\Big/\left(\frac{zv}{2}+\frac{z}{3y}+\frac{0{,}427}{1+y/v}-0{,}6\right)=0, \quad (7.59)$$

откуда

$$X_{1,2}=-\frac{y}{4}\pm\sqrt{\frac{y^2}{16}+F^*_з(v+z+\pi y)\Big/\left(\frac{zv}{2}+\frac{z}{3y}+\frac{0{,}427}{1+y/v}-0{,}6\right)}. \quad (7.60)$$

Принимая за значение X положительный корень (7.59), окончательно получаем

$$X=-\frac{y}{4}+\sqrt{\frac{y^2}{16}+F^*_з(v+z+\pi y)\Big/\left(\frac{zv}{2}+\frac{z}{3y}+\frac{0{,}427}{1+y/v}-0{,}6\right)}. \quad (7.61)$$

Подставив (7.61) в (7.56), после преобразований можно написать

$$\left\{0{,}5+\frac{0{,}58}{z}+\frac{0{,}95}{v}+\frac{0{,}76}{zv}+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{2vz}\sqrt{\frac{y^2}{16}+F^*_з(v+z+\pi y)\Big/\left(\frac{zv}{2}+\frac{z}{3y}+\frac{0{,}427}{1+y/v}-0{,}6\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{y-4}{4}\right]\left[\sqrt{\frac{y^2}{16}+F^*_з(v+z+\pi y)\Big/\left(\frac{zv}{2}+\frac{z}{3y}+\frac{0{,}427}{1+y/v}-0{,}6\right)}-\frac{y}{4}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\sqrt{\frac{y(4v+4z+\pi y)+2y(v+z)+\pi y^2}{2v+2z+\pi y}}\right]\right\}-B^*_з=f(v)=0. \quad (7.62)$$

Это уравнение решается относительно параметра v методом перебора.

Таким образом, задачу оптимизации удается свести к отысканию экстремума функций лишь двух переменных: $T^*(z, y)$, $M^*(z, y)$, $N^*(z, y)$ [переменные X и v при этом определяются по (7.61) и (7.62)]. Учитывая небольшое число переменных, указанную выше задачу целесообразно решать методом сканирования.

На рис. 7.8, *а*, *б* в виде линий уровня (линий постоянных значений критерия оптимальности) в координатах $y - v$ при $X = X_{опт}$ и $z = z_{опт}$ показаны зависимости T^* и M^*. Видно, что минимальные значения T^* лежат на границах области определения параметров y и v. Минимум же массы M^* расположен внутри области (рис. 7.8, *б*), ближе к начальным значениям параметров, при этом T^* достигает максимальной величины. Минимум мощности N^* во всех случаях практически совпадает с минимальным значением массы M^*.

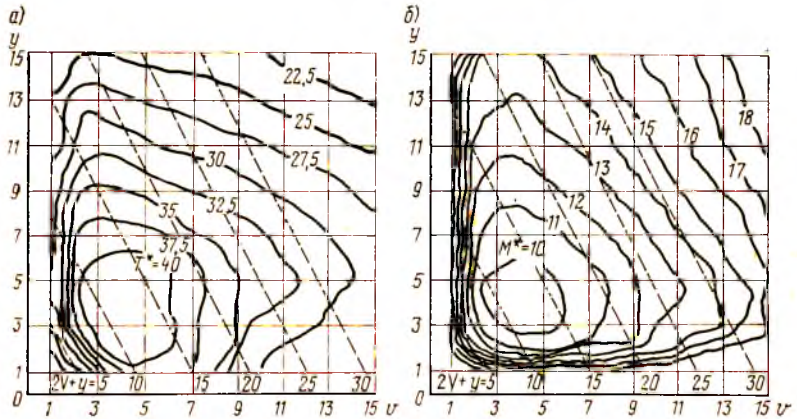


Рис. 7.8. Зависимости относительной постоянной времени обмотки (*а*) и массы электромагнита (*б*) от переменных y и v

Поскольку требования минимальных значений T^* и M^* противоречивы, то компромиссный вариант может быть достигнут при минимизации комплексного критерия ($\lambda_T = \lambda_M = 1$):

$$K(y, z) = (T^*/T^*_{мин} - 1)^2 + (M^*/M^*_{мин} - 1)^2,$$

где $T^*_{мин}$, $M^*_{мин}$ — значения T^* и M^*, полученные при раздельной минимизации этих величин.

§ 7.5. Проектирование электромагнита с насыщенным магнитопроводом

Выше рассмотрены методы оптимизации электромагнитов в предположении равенства нулю магнитного сопротивления стали $R_м$. В большинстве практических случаев основное сопротивление магнитному потоку оказывают воздушные зазоры и допущение $R_м = 0$ оправдано. Однако некоторые типы электромагнитов (например,

реле времени с электромагнитным замедлением, электромагниты с форсированным включением и т. д.) выполняются с насыщенной магнитной системой и пренебрежение магнитным сопротивлением стальных участков магнитопровода может привести к существенным ошибкам в расчете. Необходимость учета сопротивления $R_м$ возникает при определении характеристик электромагнитов подвеса в случае форсировки намагничивающего тока обмоток для компенсации внешних сил, действующих на систему подвеса.

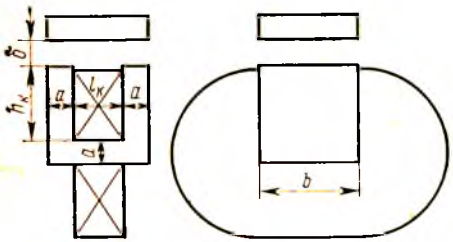


Рис. 7.9. Электромагнит с катушкой на основании магнитопровода

Приближенный способ оптимизации П-образного электромагнита с катушкой, расположенной на основании системы (рис. 7.9), показан ниже. Выберем в качестве критерия оптимальности отношение подъемной силы $F_{эл}$, развиваемой электромагнитом при зазоре δ, к весу, действующему на подвешенную к якорю часть электромагнита.

Примем следующие допущения: поле в зазоре оценивается средним значением индукции $B_δ$; выпучивание магнитного потока в зазоре учитывается введением понятия расчетного зазора, определяемого как $δ_р=μ_0S/G_δ=μ_0ab/G_δ$ ($G_δ$ — полная магнитная проводимость зазора с учетом потоков выпучивания, определяемая одним из известных способов); значение потока рассеяния между стержнями принимается не зависящим от сопротивления стали магнитопровода.

Приведем соотношения, необходимые для постановки задачи оптимизации электромагнита. Магнитодвижущая сила обмотки складывается из двух частей:

$$Iw=(Iw)_δ+(Iw)_с,$$

где $(Iw)_δ$, $(Iw)_с$ — МДС, необходимые для проведения рабочего потока через воздушный зазор и сталь магнитопровода.

Полная МДС обмотки может быть записана в виде

$$Iw=jh_кl_кK_з.$$

Здесь j — допустимая по условиям нагрева обмотки плотность тока.

Далее можно написать

$$(Iw)_δ=2B_{δр}δ_р/μ_0,$$

где $B_{δр}$ — расчетное значение индукции в зазоре.

Магнитодвижущая сила стали складывается из падений МДС в стержнях, основании и якоре:

$$(Iw)_с=\frac{2h_кB_{ст}}{μ_{ст}}+(l_к+2a)\left(\frac{B_{осн}}{μ_{осн}}+\frac{B_р}{μ_р}\right). \qquad (7.63)$$

В последнем выражении $B_{ст}=(B_{δр}+B_{осн})/2$; $B_{осн}=B_{δр}[1+gh_{кз}/(2G_δ)]$; $B_р$ — значения индукции в стержнях, основании и

якоре; $\mu_{ст}$, $\mu_{осн}$, $\mu_р$ — соответствующие значения магнитных проницаемостей; $h_{кs}=h_к-(0{,}5l_к-\delta)$ — координата поля выпучивания магнитного потока, замыкающегося со стержня на якорь.

Таким образом, магнитопровод оказывается разделенным на три участка: якорь, стержни и основание магнитной системы. С учетом приведенных выше соотношений получаем

$$jK_з h_к l_к=\frac{2\delta_р B_{\delta р}}{\mu_0}+\frac{2h_к B_{ст}}{\mu_{ст}}+(l_к+2a)\left(\frac{B_{осн}}{\mu_{осн}}+\frac{B_р}{\mu_р}\right),$$

или

$$jK_з h_к l_к=f(h_к)=\frac{2\delta_р B_{\delta р}}{\mu_0}+\frac{h_к B_{\delta р}}{\mu_{ст}}\left[2+\frac{g(h_к-0{,}5l_к+\delta)}{2G_\delta}\right]+$$
$$+(l_к+2a)\frac{B_{\delta р}}{\mu_{осн}}\left[1+\frac{g(h_к-0{,}5l_к+\delta)}{2G_\delta}\right]+(l_к+2a)\frac{B_{\delta р}}{\mu_р}. \quad (7.64)$$

Далее из *формулы Максвелла*, полагая сечение полюса и зазора равными, определяем $S_{ст}=ab=2\mu_0 F_{эл}/B_{\delta р}^2$.

Сечение меди обмотки $S_{пр}=l_к h_к K_з$; средняя длина магнитопровода (подвешенной части) $l_{ср.с}=2h_к+l_к+2a$; средняя длина витка катушки $l_{ср}=2(a+b)+\pi h_к$.

Объем активных материалов

$$V_{обм}=l_к h_к K_з[2(a+b)+\pi h_к]; \quad V_с=\frac{2\mu_0 F_{эл}}{B_{\delta р}^2}(2h_к+l_к+2a).$$

Вес части электромагнита, подвешенной к якорю,

$$Q=g_{св}(M_{пр}+M_с)=g_{св}M_\Sigma,$$

где $M_с=\gamma_с V_с$; $M_{пр}=\gamma_{пр}V_{обм}K_з$; M_Σ — массы подвешенной части магнитопровода, меди обмотки и суммарная масса соответственно; $g_{св}$ — ускорение свободного падения.

С учетом приведенных соотношений получим

$$Q=g_{св}\left[\gamma_с\frac{2\mu_0 F_{эл}}{B_{\delta р}^2}(2h_к+l_к+2a)\right]+\gamma_{пр}l_к h_к K_з[2(a+b)+\pi h_к],$$

или, учитывая, что $b=2\mu_0 F_{эл}/(aB_{\delta р}^2)$ (где $F_{эл}$ — усилие, развиваемое в одном рабочем зазоре), найдем

$$Q=g_{св}\left[\gamma_с\frac{2\mu_0 F_{эл}}{B_{\delta р}^2}(2h_к+l_к+2a)\right]+\gamma_{пр}l_к K_з h_к\left[2\left(a+\frac{2\mu_0 F_{эл}}{aB_{\delta р}^2}\right)+\pi h_к\right]. \quad (7.65)$$

Мощность, потребляемая в стационарном режиме,

$$N=j^2\rho_т l_к h_к\{2[a+2\mu_0 F_{эл}/(aB_{\delta р}^2)]+\pi h_к\}.$$

Критерий оптимальности (отношение усилия к весу подвешенной части электромагнита) выразим в следующем виде:

$$K_1 = 2F_{эл}/[g_{св}(M_c + M_{пр})],$$

или

$$K_1 = \frac{2F_{эл}}{g_{св}\left[\gamma_c \frac{2\mu_0 F_{эл}}{B_{\delta р}^2}(2h_к + l_к + 2a)\right] + \gamma_{пр} l_к h_к K_з \left[2\left(a + \frac{2\mu_0 F_{эл}}{aB_{\delta р}^2}\right) + \pi h_к\right]}. \quad (7.66)$$

Математическая формулировка задачи может быть принята следующей. Требуется найти значения геометрических размеров a, $l_к$, $h_к$ и индукции B_δ, при которых критерий оптимальности $K_1 = 2F_{эл}/[Q(a, l_к, h_к, B_\delta)]$ достигает максимума при условиях $F_{эл} = F_{эл.з}$; $\delta = \delta_з$; $j = j_з$.

1) размер полюса $b = 2\mu_0 F_{эл}/(aB_{\delta р}^2)$;
2) проводимость G_δ и g;
3) расчетный зазор $\delta_р = \mu_0 ab/G_\delta$;
4) из уравнения $f(h_к) = 2\delta_р \frac{B_{\delta р}}{\mu_0} + 2h_к \frac{B_c}{\mu_c} + (l_к + 2a)\frac{B_{осн}}{\mu_{осн}} + (l_к + 2a)\frac{B_{\delta р}}{\mu_р} - jK_з h_к l_к \leqslant \varepsilon_h$ — значение размера $h_к$;
5) массы M_c и $M_{обм}$;
6) значение критерия K_1.

На рис. 7.10, *а* показана зависимость высоты обмоточного окна

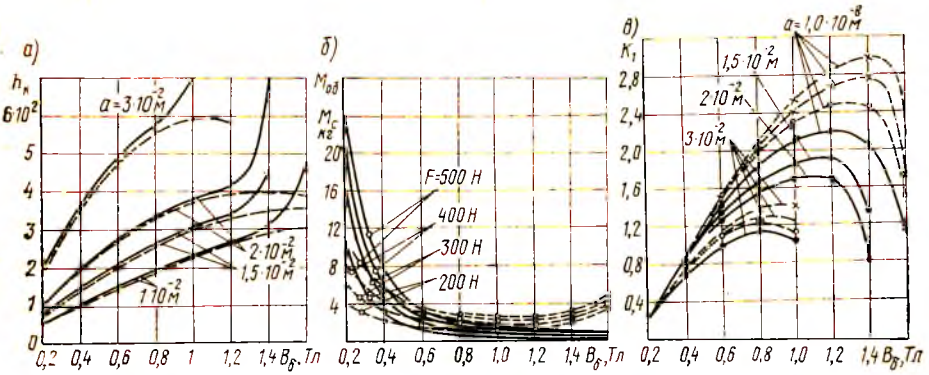


Рис. 7.10. Зависимости высоты обмоточного окна $h_к$ (*а*), масс M_c, $M_{пр}$ (*б*) и критерия K_1 (*в*) от индукции в воздушном зазоре

Величину $h_к$ определяют по уравнению (7.64), которое может быть решено методом перебора. Задача решается методом сканирования с переменным шагом. Алгоритм расчета принят следующий. Для дискретных значений B_δ, $F_{эл}$, $l_к$ и a определяются:
(высота катушки) $h_к$ от значения магнитной индукции B_δ в воздушном зазоре. Пунктиром показаны функции $h_к = f(B_\delta)$, полученные без учета падения МДС в стали. Как видно из кривых,

с увеличением B_δ растет размер $h_к$. Бо́льшим значениям индукции в воздушном зазоре соответствуют бо́льшие значения МДС катушки. При неизменной длине катушки $l_к$ рост B_δ приводит к увеличению $h_к$. При малых значениях индукции падение МДС в стали не оказывает существенного влияния на МДС обмотки. Высота катушки с учетом падения МДС в стали мало отличается от $h_к$, полученной без учета стали. С ростом индукции в воздушном зазоре происходит насыщение участков магнитопровода, что ведет к увеличению падения МДС в стали и, следовательно, к резкому увеличению $h_к$. Зависимости $h_к = f(B_\delta)$ рассчитаны для различных величин a и $l_к$, при этом ширина магнитопровода, равная $2a + l_к$, оставалась постоянной. Как видно, с увеличением a высота катушки растет, причем бо́льшим значениям a соответствуют меньшие значения индукции в воздушном зазоре, при которых наступает насыщение стали. Это объясняется существенным влиянием потоков рассеяния, увеличивающихся с ростом $h_к$ и снижением $l_к$ на поток в основании и в стержнях.

На рис. 7.10, *б* представлены зависимости масс активных материалов от индукции. Как видно из кривых, с увеличением индукции при $a = \text{const}$ и $l_к = \text{const}$ масса стали уменьшается, так как уменьшается сторона сечения полюса b. Величина b обратно пропорциональна квадрату индукции. Значение $h_к$, определяющее при прочих постоянных размерах среднюю длину стали магнитопровода, в меньшей степени зависит от B_δ. Поэтому с ростом B_δ сечение стали уменьшается быстрее, чем растет средняя длина магнитопровода, и масса стали снижается. Масса меди вначале падает, достигает минимального значения и вновь растет с увеличением B_δ. Это объясняется тем, что при малых B_δ основное влияние на массу меди оказывает средняя длина витка, зависящая главным образом от размера b. С ростом индукции начинает оказывать влияние $h_к$, т. е. масса меди больше зависит от сечения обмоточного окна.

На рис. 7.10, *в* показаны зависимости критерия K_1, характеризующего отношение электромагнитной силы к весу, от величины B_δ. Как видно из кривых, критерий K_1 имеет максимальное значение при определенном значении индукции B_δ. Наличие максимума в кривых $K_1 = f(B_\delta)$ объясняется характером зависимостей масс активных материалов, описанных выше.

§ 7.6. Оптимальное проектирование электромагнитов по заданным динамическим характеристикам

Методика проектирования электромагнита по статическим характеристикам не может обеспечить выбора оптимальной конструкции, если определяющими являются динамические режимы работы. В этом случае выбор параметров по условиям статики можно рассматривать лишь как расчет варианта первого приближения. В основу расчета из условий динамики следует положить более жесткие требования. Одним из таких требований следует

считать обеспечение заданной скорости подвижного элемента конструкции во всем диапазоне его перемещения. В качестве характеристики динамического режима целесообразно принимать именно скорость, так как она определяет время движения подвижной части и накопленную при ее перемещении кинетическую энергию, превращающуюся в энергию удара в конце хода подвижного элемента.

Характер изменения скорости определяет противо-ЭДС, возникающую в обмотке электромагнита при движении якоря. Таким образом, закон изменения скорости, с одной стороны, определяет характеристики устройства, а с другой — обратное воздействие устройства на приводящий его в действие электромагнит. Вид связи между скоростью и перемещением определяется конкретными условиями, в зависимости от которых к электромагниту могут предъявляться различные требования. При работе в сложных автоматических схемах возникает необходимость проектирования электромагнита с заданным временем движения якоря. Для быстродействующих устройств важным является получение минимального при определенных условиях времени срабатывания. В том случае, когда электромагнит используется в качестве привода в контактном аппарате, предназначенном для работы с большой частотой включений, наряду с получением заданного быстродействия главное требование — обеспечение значения скорости подвижных элементов в момент соударения контактов, не превосходящей скорости, допустимой с точки зрения износоустойчивости аппарата и его срока службы.

При проектировании электромагнита необходимо скорость dx/dt выразить в функции перемещения якоря x. Вопрос об аппроксимации зависимости перемещения x и скорости dx/dt от времени излагается во многих работах. Так, для электромагнитов с нормальным временем действия предлагается принимать $x = \Omega t^2$, для быстродействующих электромагнитов часто принимают $x = \Omega t^4$. В [15] зависимость $x = f(t)$ представляется в виде

$$x = Q_x e^{-p_x t} \sin(\omega_x t - \varphi_x) + A_x + B_x t + C_x t^2,$$

где Q_x, p_x, ω_x, φ_x, A_x, B_x, C_x — коэффициенты, зависящие от массы подвижных частей, вида характеристик нагрузки, параметров электрической и магнитной цепей электромагнита.

Если принять $x = \Omega t^4$ (Ω — постоянный коэффициент), то $dx/dt = 4\Omega t^3$ и связь между скоростью и перемещением имеет вид $dx/dt = 4\sqrt[4]{\Omega x^3}$.

Время движения якоря $t_{дв} = \sqrt[4]{x_п/\Omega}$, где $x_п$ — полное перемещение якоря.

В случаях, когда необходимо обеспечить заданное значение конечной скорости якоря $(dx/dt)_{у.з}$, можно записать:

$$\Omega = [(dx/dt)_{у.з}/4]^4 (1/x_п^3),$$

а время движения при этом $t_{дв} = 4x_п/(dx/dt)_{у.з}$.

Если необходимо обеспечить заданное значение времени движения $t_{\text{дв.з}}$, то коэффициент $\Omega = x_{\text{п}}/t^4_{\text{дв.з}}$, а скорость $(dx/dt)_{\text{у}} = 4x_{\text{п}}/t_{\text{дв.з}}$.

В том случае, когда необходимо спроектировать электромагнит, имеющий заданные значения $t_{\text{дв.з}}$ и $(dx/dt)_{\text{у.з}}$, значение коэффициента Ω определяют из условия минимума вспомогательной функции, представляющей собой сумму квадратов относительных отклонений времени и скорости движения якоря от заданных значений:

$$\Psi = \left(1 - \frac{\sqrt[4]{x_{\text{п}}}}{t_{\text{дв.з}}\sqrt[4]{\Omega}}\right)^2 + \left(1 - \frac{4\sqrt[4]{\Omega x_{\text{п}}^3}}{(dx/dt)_{\text{у.з}}}\right)^2.$$

Аналитическое определение минимума Ψ приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому целесообразно построить зависимость $\Psi = f(\Omega)$, минимальное значение которой будет соответствовать искомой величине Ω. Для электромагнитов с поворотным перемещением подвижной части задаются зависимости $\varphi = f(t)$ и $d\varphi/dt = f(t)$, где φ — угол поворота якоря.

Задавая характеристику скорости, мы тем самым задаем динамическую тяговую характеристику, которая может быть получена с помощью зависимостей $x(t)$, $\frac{dx}{dt}(t)$, $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$ с учетом известных значений масс подвижных частей устройства, в котором электромагнит играет роль привода, и уравнения динамического тягового усилия

$$F_{\text{д}} = M_{\text{я}}\frac{d^2x}{dt^2} + \xi\frac{dx}{dt} + \chi x + F_0, \qquad (7.67)$$

где $M_{\text{я}}$ — масса подвижных частей, связанных с якорем; ξ и χ — коэффициенты, определяющие противодействующие усилия, зависящие соответственно от скорости и перемещения; F_0 — не зависящее от хода якоря противодействующее усилие.

При заданном питающем напряжении и параметрах механической системы, связанной с электромагнитом, его динамические характеристики определяются зависимостью индуктивности обмотки от перемещения якоря (в случае ненасыщенной магнитной системы) и сопротивлением обмотки. В соответствии со сказанным проектирование конструкции оптимального электромагнита можно разбить на два этапа. На первом этапе заданными являются зависимости от перемещения якоря скорости движения, сил сопротивления, массы элементов, участвующих в движении. Перечисленные зависимости дают возможность построить требуемую динамическую тяговую характеристику. Задача расчета — определение закона изменения индуктивности и сопротивления обмотки, обеспечивающих получение заданной динамической характеристики.

Второй этап заключается в определении размеров магнитной системы и обмоточных данных катушки, при которых требуемый закон изменения индуктивности и сопротивления обмотки могут

быть реализованы при одновременном удовлетворении определенного критерия оптимальности. В обоих случаях предполагается не полное совпадение определяемых характеристик, а отыскиваются параметры, дающие минимальные среднеквадратичные отклонения определяемых зависимостей от заданных. Как будет показано ниже, на первом этапе неполное совпадение заданных и расчетных характеристик определяется приближенной аппроксимацией, а на втором — трудностью реализации характеристик произвольной формы с помощью заданного типа электромагнита.

Индуктивность L и сопротивление R целесообразно рассматривать не обособленно, а совместно, введя в качестве основной характеристики их отношение $T = L/R$. При этом предполагается, что сопротивление обмотки постоянно и индуктивность не зависит от тока.

В гл. 4 показано определение зависимости постоянной времени от перемещения якоря с помощью АВМ. Здесь же рассмотрим решение задачи с использованием ЦВМ. Уравнение электрической цепи обмотки запишем в виде

$$u = iR + L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt} \quad \text{или} \quad I_{\text{уст.з}} = i + T\frac{di}{dt} + i\frac{dT}{dt}.$$

Далее можно записать:

$$I_{\text{уст.з}} = i + T\frac{di}{dt} + i\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right) = i\left[1 + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)\right] + T\frac{di}{dt}.$$

Уравнение тягового усилия

$$F_{\text{д}} = \frac{i^2}{2}\frac{u}{I_{\text{уст.з}}}\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (7.68)$$

где $I_{\text{уст.з}}$ — установившийся ток обмотки, значением которого необходимо задаться и который может варьироваться.

Поскольку магнитная проводимость рабочих зазоров и путей рассеяния потока, а следовательно, индуктивность и постоянная времени обмотки зависят от положения якоря, то необходимо установить аналитическую связь между указанными величинами и перемещением якоря. Один из способов выражения этой связи — представление постоянной времени T в функции перемещения якоря x в виде степенных полиномов.

Для электромагнита постоянного тока с внешним поворотным якорем выразим постоянную времени обмотки T в функции перемещения в виде степенного полинома:

$$T = q_0 + q_1 x + q_3 x^3 + q_4 x^{17}. \qquad (7.69)$$

Число членов и степень полинома в данном случае обусловлены характерной особенностью зависимости $T = f(x)$ рассматриваемых типов электромагнитов. Эта особенность заключается в относительно медленном увеличении T в начале движения якоря.

В конце хода при малых зазорах постоянная T возрастает интенсивно, при этом аппроксимирующая функция обусловливается членом полинома (7.69) высокого порядка. Указанное положение проверено при проектировании ряда электромагнитов с внешним поворотным якорем по заданной динамической характеристике. Из уравнений (7.68) и (7.69) можно записать

$$i=\sqrt{2F_{\text{д}}I_{\text{уст.з}}/[u(q_1+3q_3x^2+17q_4x^{16})]}.$$

Подставляя значения i, T и $\partial T/\partial x$ в уравнение для $I_{\text{уст.з}}$, получаем

$$I_{\text{уст.з}}=\sqrt{\frac{2I_{\text{уст.з}}}{u}}\sqrt{\frac{F_{\text{д}}}{q_1+3q_3x^2+17q_4x^{16}}}\left[1+(q_1+3q_3x^2+\right.$$
$$\left.+17q_4x^{16})\frac{dx}{dt}\right]+\sqrt{\frac{2I_{\text{уст.з}}}{u}}(q_0+q_1x+q_3x^3+q_4x^{17})\times$$
$$\times\frac{(q_1+3q_3x^2+17q_4x^{16})\,(dF_{\partial}/dt)}{\sqrt{F_{\text{д}}(q_1+3q_3x^2+17q_4x^{16})^2}}-\frac{(6q_3x+272q_4x^{15})\,F_{\text{д}}\,(dx/dt)}{\sqrt{F_{\text{д}}(q_1+3q_3x^2+17q_4x^{16})^2}}=$$
$$=I_{\text{у}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4). \qquad (7.70)$$

В этом уравнении $F_{\text{д}}$, x, dx/dt и $dF_{\text{д}}/dt$ являются известными из данных характеристик функциями времени. Искомые величины — коэффициенты аппроксимации q_0, q_1, q_3, q_4, для определения которых составим вспомогательную функцию:

$$E(\mathbf{X})=\left[1-\frac{I_{\text{y1}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4,\ x_1)}{I_{\text{у.з}}}\right]^2+\left[1-\frac{I_{\text{y2}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4,\ x_2)}{I_{\text{у.з}}}\right]^2+$$
$$+\ \ldots\ +\left[1-\frac{I_{\text{уп}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4,\ x_n)}{I_{\text{у.з}}}\right]^2\leqslant\varepsilon_E, \qquad (7.71)$$

где $\mathbf{X}$ — вектор с координатами q_0, q_1, q_3 и q_4; $I_{\text{y1}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4,\ x_1)$; $I_{\text{y2}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4,\ x_2)$; ...; $I_{\text{уп}}(q_0,\ q_1,\ q_3,\ q_4,\ x_n)$ — значения установившегося тока, выраженные по (7.70) в функции коэффициентов аппроксимации и положения якоря; ε_E — допустимая ошибка в определении $E(\mathbf{X})$.

Выполнив условие (7.71), найдем коэффициенты аппроксимации и определим зависимость $T=f(x)$, необходимую для расчета параметров электромагнита.

Функция $E(\mathbf{X})$ нелинейна и зависит от четырех переменных. Для ее минимизации эффективным оказалось применение простого градиентного метода. Схема программы расчета указанным способом приведена на рис. 7.11. После ввода исходных данных (блок *1*) начальные значения переменных и коэффициента α_0 засылаются в соответствующие ячейки блока *2* и вычисляется значение функции $E(\mathbf{X}^0)$. Для начала отсчета итераций в ячейку K засылается

ноль (блок *3*). Затем находятся $\operatorname{grad} E(\mathbf{X})$ в точке $\mathbf{X}^K$ (блок *4*). Логический блок *5* служит для сравнения величины $g=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\partial E/\partial x_i)^2}$ с заданным числом ε_E, определяющим точность достижения минимума. Если выполняется условие $g \leqslant \varepsilon_E$, на печать выводятся результаты определения минимума функции цели $E(\mathbf{X})$. В случае $g > \varepsilon_E$ находится шаг $\Delta\mathbf{X}^K$ (блок *6*). В блоке *7* вычисляется новое значение функции цели $E(\mathbf{X}^K+\Delta\mathbf{X}^K)$. Блок *8* сравнивает это значение функции с предыдущим. Неравенство $E(\mathbf{X}^K+\Delta\mathbf{X}^K)<E(\mathbf{X}^K)$ является условием минимизации. Если оно выполняется, то в соответствующие ячейки блока *10* засылаются новые значения переменных, значение функции цели и ЦВМ рассчитывает новую итерацию (блок *11*), повторяя весь цикл начиная с блока *4*. Если условие блока *8* не выполняется, то коэффициент α уменьшается вдвое (блок *9*) и расчет ведется вновь начиная с блока *2*. Значения коэффициентов для ряда величин угла поворота якоря φ электромагнита с внешним поворотным якорем, динамические характеристики которого приведены на рис. 4.23 (см. гл.4), показаны ниже:

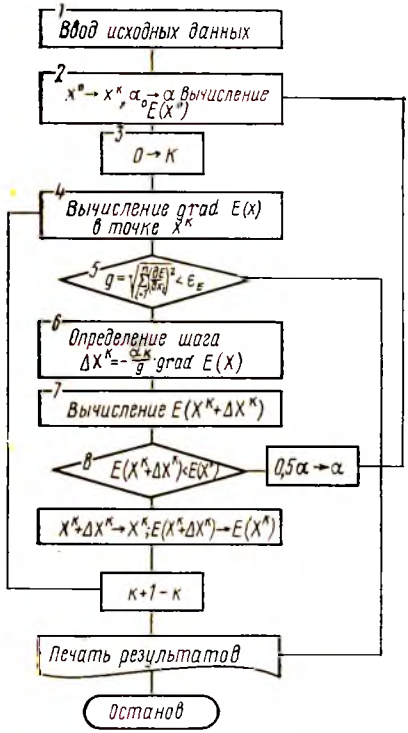


Рис. 7.11. Структурная схема программы ЦВМ для минимизации соотношения (7.71) градиентным методом

Угол поворота, рад . .	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4				
Коэффициент аппроксимации					q_0	q_1	q_3	q_4
Значения	0,0175	0,0350	0,100	0,175	0,097	1,420	10,107	$3{,}06\cdot10^{11}$

Расчет оптимальных размеров электромагнита, реализующих заданную динамическую тяговую характеристику, покажем на примере электромагнита с внешним поворотным якорем. Будем отыскивать такие значения размеров, которые обусловливают минимальное среднеквадратичное отклонение полученных характеристик от заданных. Используя соотношение (7.13), определяющее постоянную времени электромагнита, выраженную через геометрические размеры, составим функцию:

$$Z=\sum_{j=1}^{s}\left[1-\frac{T_j(r_н,\ r_c,\ l,\ c,\ \varphi_j)}{T_з(\varphi_j)}\right]^2 \leqslant \varepsilon_Z ,$$

где s — число фиксированных значений угла φ; $T_j(r_н, r_с, l, c, \varphi_j)$ — значение постоянной времени для угла поворота φ_j, определенное по (7.13); $T_э(\varphi_j)$ — значение постоянной времени при угле φ_j, определенное по зависимости $T=f(\varphi)$, полученной на первом этапе; ε_Z — допустимое среднеквадратичное отклонение.

В силу соображений, указанных выше, необходимо следить за тем, чтобы индукция в наиболее насыщенном элементе не превзошла заданного значения. Поэтому расчет вести при условии

$$B(r_н, r_с, l, c)=B_э. \tag{7.72}$$

В уравнении (7.10) обозначим:

$$\frac{\mu_0}{\pi r_с^2}\sqrt{\frac{2K_\tau \tau_у K_з (c-r_с)(c+\beta r_с)}{\rho_\tau (c+r_с)}}=D';$$

$$\frac{\pi}{\varphi}\left(\frac{r_н^2}{c}+\frac{r_н^4}{4c^3}\right)+0{,}9\varphi c+\frac{3r_н^3+r_с r_н^2-r_с^3}{r_н^2}+\frac{8\left(r_с r_н^3-r_н r_с^3\right)}{r_с r_н^2-r_с^3+4r_н^2\varphi c}=W;$$

$$\pi/\ln\left[\frac{c}{r_с}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_с}\right)^2-1}\right]=Y'.$$

Здесь при использовании уравнения (7.10) зазор δ выражен через угол поворота якоря φ и радиус c.

Тогда, используя (7.72), получим

$$l^2+\frac{W}{Y'}l-\frac{B_э}{Y'D'}=0. \tag{7.73}$$

Принимая положительный корень этого квадратного уравнения в качестве значения l для случая минимизации габаритного объема, задачу проектирования можно свести к нахождению минимума функции цели $V_г(r_н, r_с, c)$ при ограничении $Z(r_н, r_с, c)\leqslant\varepsilon_Z$.

Полагая ε_Z достаточно малым, мы определим размеры электромагнита, дающие заданное суммарное (для нескольких положений якоря) среднеквадратичное отклонение от значений, полученных с помощью цифровой или аналоговой вычислительных машин.

При решении сформулированной выше задачи на ЦВМ применяют метод сопряженного градиента с использованием функции штрафа. В качестве примера приводятся значения постоянных, входящих в (7.10) и (7.73), при проектировании электромагнита с внешним поворотным якорем, динамические характеристики которого показаны на рис. 4.23:

$$\mu_0 = 1{,}256\cdot10^{-6}\ \text{г/м};\ K_з = 0{,}5;\ K_\tau = 10\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{град)};$$

$$\tau_у = 100\ °\text{C};\ \beta = 1{,}7;\ B_з = 1{,}3\ \text{Тл};\ \varrho_\tau = 2{,}46\cdot10^{-8}\ \text{Ом}\cdot\text{м}.$$

Размеры электромагнита, реализующие зависимость, показанную на рис. 4.24, *б* (кривая *2*), приведены ниже:

Размер	$r_н$, м	$r_с$, м	c, м	l, м	$V_г$, м³	ε_Z
Значения	$2{,}27\cdot10^{-2}$	$1{,}78\cdot10^{-2}$	$4{,}98\cdot10^{-3}$	$5{,}93\cdot10^{-2}$	$499\cdot10^{-6}$	$3{,}03\cdot10^{-4}$

Рассмотренные выше методы проектирования электромагнитов по заданным динамическим характеристикам основаны на применении вычислительных машин с привлечением относительно сложных математических методов.

Ниже на примере электромагнита с внешним поворотным якорем излагается упрощенный метод определения основных размеров на основании известных величин, обычно задаваемых при статическом расчете электромагнита, и одной из динамических зависимостей. Решают задачи при этом без применения вычислительных машин.

При расчете заданными являются значения тягового усилия $F_{эл}$ и рабочего зазора δ, при котором усилие должно быть реализовано. Эти величины позволяют выбрать индукцию в рабочем зазоре, а по ее значению определить ориентировочно МДС обмотки Iw и сечение стержня S. Впоследствии значения Iw и S могут быть уточнены. Кроме того, примем, что в стационарном режиме обмотка электромагнита должна потреблять мощность $N=I_y^2R$.

Исходными будут уравнение динамики в виде

$$Iw=iw+\frac{w^2}{R}\sigma_p(t)\frac{d\Phi_\delta}{dt} \tag{7.74}$$

и уравнение

$$F_д=\frac{\varkappa_\Phi\Phi_\delta^2}{2\mu_0\{1+1{,}48[\delta_0-x(t)]/(2r_c)\}^2S}. \tag{7.75}$$

В уравнении (7.75) коэффициент формы $\varkappa_\Phi$ принят равным единице.

Коэффициент рассеяния σ_p в случае, когда магнитным сопротивлением стали магнитопровода можно пренебречь, характеризует соотношение между проводимостями рабочего зазора $G_\delta(x)$ и рассеяния G_p:

$$\sigma_p=1+G_p/G_\delta(x). \tag{7.76}$$

В реальных конструкциях электромагнитов рассматриваемого типа при притянутом якоре $\sigma_p=1{,}05\div1{,}1$, при максимальном зазоре $\sigma_p=2{,}0\div3{,}0$. С учетом сказанного на основании опыта конструирования подобных электромагнитов можно задаться зависимостью коэффициента рассеяния от перемещения якоря. Вследствие этого исходными при расчете можно считать величины Iw, S, $w^2/R=(Iw)^2/N$, зависимость $\sigma_p(x)$ и одну из динамических характеристик, которую необходимо реализовать. Пусть это будет зависимость скорости движения якоря от времени. Порядок расчета может быть принят следующим. По заданной зависимости $dx/dt=f(t)$ находим $x=f(t)$ и $d^2x/dt^2=f(t)$ аналитическим или численным методом. Затем из (7.67) и (7.75) определяем зависимости $\Phi_\delta=f(t)$ и $d\Phi_\delta/dt=f(t)$.

Зависимость магнитного потока рабочего зазора от времени находим в виде

$$\Phi_\delta(t)=\sqrt{2\mu_0}\left[1+1{,}48\,\frac{\delta_0-x(t)}{2r_c}\right]\sqrt{S\left(M_я\frac{d^2x}{dt^2}+\xi\frac{dx}{dt}+\varkappa x+F_0\right)}.$$

Используя зависимости $\sigma_р(x)$ и $x(t)$, получаем кривую $\sigma_р=f(t)$. Из выражения (7.74) определяем

$$iw=Iw-\frac{w^2}{R}\sigma_р(t)\frac{d\Phi_\delta}{dt}.$$

В уравнении (7.76) примем [15]:

$$G_\delta=\mu_0\left[\frac{S}{\delta_0-x(t)}+2{,}32r_c\right];\quad G_р=\frac{gl}{2};$$

$$g=\frac{2\pi\mu_0}{\ln\left[c/r_c+\sqrt{(c/r_c)^2-1}\right]}.$$

С учетом приведенных соотношений коэффициент рассеяния

$$\sigma_р(x)=1+\pi l/\left[\frac{S}{\delta_0-x(t)}+2{,}32r_c\right]\ln\left[\frac{c}{r_c}+\sqrt{\left(\frac{c}{r_c}\right)^2-1}\right].$$

Для определения размеров, соответствующих принятому закону изменения коэффициента рассеяния, необходимо минимизировать функцию

$$J=\sum_{i=1}^{m}\left[1-\frac{\sigma_{pi}(r_c,\ l,\ c,\ x)}{\sigma_{pзi}(x)}\right]^2, \qquad (7.77)$$

где m — количество точек на заданной кривой $x=f(t)$.

Так как сечение стержня задано, то функция J зависит только от переменных l и c. Минимум функции $J(l,\ c)$ определяется графически, поэтому строятся зависимости $J=f(l)$ для ряда значений c.

Минимизируя функцию J, мы определяем размеры l и c с наименьшим среднеквадратичным отклонением, реализующие заданный закон изменения $dx/dt=f(t)$ при принятых значениях Iw, S, N и $\sigma_р=f(x)$. Таким образом, определяются размеры электромагнита, удовлетворяющего заданным условиям.

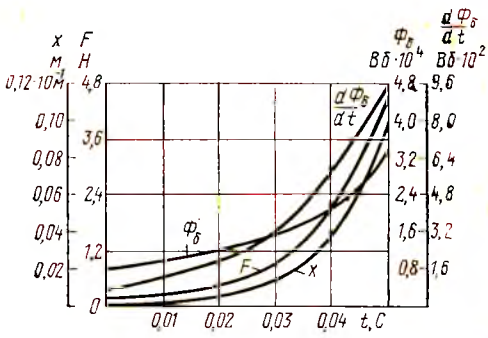


Рис. 7.12. Расчетные динамические характеристики электромагнита

Для иллюстрации метода на рис. 7.12 приведены зависимости от времени величин Φ_δ, $d\Phi_\delta/dt$ и $F_д$ электромагнита, имеющего $Iw=1{,}740$ А; $w^2/R=1{,}13\times\times10^4$ Ом$^{-1}$. Зависимости получены на основании заданного закона изменения скорости $dx/dt=4\Omega t^3$ ($\Omega=1{,}6\cdot10^5$) и зависимости $\sigma_{р.з}=f(x)$, приведенной ниже:

x, м	0	0,01	0,04	0,96	0,10
$\sigma_{р.з}(x)$	2,9	2,00	1,62	1,50	1,10

Минимизация функции J графическим способом показана на рис. 7.13. Как видно, искомыми размерами являются $l=5$, $c=8$.

§ 7.7. Выбор расчетных значений индукции при проектировании электромагнитов постоянного тока с внешним поворотным якорем

Форма тяговой характеристики, размеры магнитопровода и обмотки, а также экономические показатели электромагнита зависят в основном от выбранных значений индукции в рабочем зазоре B_δ и стали магнитопровода $B_с$. Расчетные значения B_δ чаще всего определяются в зависимости от конструктивного фактора (показателя) $П=\sqrt{F_{эл}}/\delta$. Зависимости $B_\delta=f(П)$ впервые были получены *Г. Потерсом* на основании расчета электромагнитов для определенных значений полезной работы, превышения температуры обмотки, продолжительного режима работы и, строго говоря, справедливы лишь для указанных условий [16]. Представляет интерес поэтому определение рациональных значений B_δ и $B_с$ в зависимости от режима работы, допустимого превышения температуры обмотки, значения тягового усилия $F_{эл}$ и рабочего зазора δ.

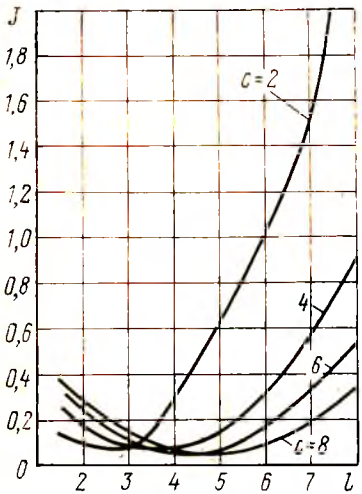


Рис. 7.13. Минимизация функции J (l, c)

Задача исследования — определение значений B_δ и $B_с$, при которых достигают минимума габаритный объем электромагнита $V(c, l, r_с)$ или стоимость активных материалов $C(c, l, r_с)$. Электромагнит при этом должен развивать заданное усилие $F_{эл}$ в рабочем зазоре.

Полагая сопротивление нерабочих зазоров малым, на основании второго закона Кирхгофа можно записать:

$$jK_з K_l h^2 = B_{\delta р}\delta_р/\mu_0' + 2\int_0^l H_z dx + H_я(h+r_с) + H_l(L+r_с), \qquad (7.78)$$

где $K_l=l/h$; $h=c-r_с$; $\delta_р=\mu_0\pi r_н^2/G_\delta$ — расчетный зазор, учитывающий неоднородность магнитного поля в воздушном зазоре; G_δ — полная магнитная проводимость рабочего зазора; H_z — напряженность поля в стали сердечника (корпуса) в сечении с координатой z (принимается, что сечения сердечника и корпуса одинаковы); $H_я$ — напряженность поля в стали якоря (предполагается одинаковой в

любой точке якоря); H_l — напряженность поля в стали основания магнитопровода, являющаяся наибольшей в системе.

Для продолжительного режима работы справедливо равенство

$$j^2\rho_\tau V_{\text{пр}}=K_\tau\tau_y S_{\text{охл}}\ (V_{\text{пр}}=V_{\text{обм}}K_\text{э}),$$

где $S_{\text{охл}}$ — боковая поверхность охлаждения обмотки.

Для повторно-кратковременного режима работы электромагнита, полагая время цикла малым по сравнению с постоянной времени нагрева обмотки, получим плотность тока

$$j_{\text{ПВ}}=pj,$$

где $p=\sqrt{100/\text{ПВ}\,\%}$ — коэффициент перегрузки по току (для продолжительного режима $p=1$); ПВ % — выражена в процентах относительная продолжительность включения.

Выразим поверхность и объем через геометрические размеры:

$$S_{\text{охл}}=2\pi\left[\frac{r_\text{с}}{h}(1+\beta)+1\right]K_l h^2; \tag{7.79}$$

$$V_{\text{пр}}=\pi(2r_\text{с}/h+1)K_l K_\text{з} h^3. \tag{7.80}$$

С учетом (7.79) и (7.80) можно написать:

$$j_{\text{пв}}=\sqrt{\frac{K_\tau\tau_y 100}{\rho_\tau K_\text{з}\text{ПВ}\%}}\sqrt{\left[\frac{r_\text{с}}{h}(1+\beta)+1\right]/(2r_\text{с}+h)}. \tag{7.81}$$

Примем изменение индукции в стали сердечника по координате z в виде

$$B_z=B_\delta[1+gz/G_\delta+gz^2/(2G_\delta l)]. \tag{7.82}$$

Проводимость рассеяния определим как $g=2\pi\mu_0 K_\text{н}/\ln\left[\left(\frac{h}{r_\text{с}}+1\right)+\right.$ $\left.+\sqrt{\left(\frac{h}{r_\text{с}}+1\right)^2-1}\right]$, где $K_\text{н}$ — коэффициент, зависящий от соотношения размеров.

Принимая ширину корпуса равной наружному диаметру обмотки, зависимость $K_\text{н}=f[(h+r_\text{с})/(2r_\text{с})]$ с ошибкой, не превышающей 2 %, можно аппроксимировать выражением $K_\text{н}=b_0+b_1\left(\frac{h+r_\text{с}}{2r_\text{с}}\right)+b_2\times$ $\times\left(\frac{h+r_\text{с}}{2r_\text{с}}\right)^2$, где $b_0=0{,}08014$; $b_1=0{,}135$; $b_2=0{,}109\cdot10^{-2}$ — коэффициенты аппроксимации.

Проводимость рабочего зазора G_δ определяется по методике, приведенной в [14]. Значения H_z, H_δ и H_l могут быть определены из кривой намагничивания материала магнитопровода, которая в данном случае аппроксимирована степенным полиномом вида

$$H_z=a_0+a_1B_z+a_2B_z^2+a_3B_z^3+a_4B_z^4. \tag{7.83}$$

Здесь a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 — коэффициенты, зависящие от числа интервалов, на которые разделена кривая намагничивания.

Подставляя (7.82) и (7.83) в (7.78) и интегрируя, после преобразований, полагая r_c известным, получаем

$$f(h)=\frac{B_\delta \delta_p}{\mu_0}-A_0K_l h^2\sqrt{\frac{r_c(1+\beta)+h}{2r_ch+h^2}}+2A_1[h(K_l+1)+$$
$$+r_c]+A_2gh[h(1{,}33K_l+1)+r_c]+A_3g^2h^2[h(1{,}07K_l+1)+r_c]+$$
$$+A_4g^3h^3[h(0{,}91K_l+1)+r_c]+A_5g^4h^4[h(0{,}81K_l+1)+r_c]=0, \quad (7.84)$$

где $A_0=\sqrt{100K_\tau\tau_y/(\rho_\tau K_з ПВ\,\%)}$; $A_1=a_0+a_1B_\delta+a_2B_\delta^2+a_3B_\delta^3+a_4B_\delta^4$;

$$A_2=(0{,}5a_1B_\delta+a_2B_\delta^2+1{,}5a_3B_\delta^3+2a_4B_\delta^4)K_l/G_\delta;\quad A_3=(0{,}25a_2B_\delta^2+$$
$$+0{,}75a_3B_\delta^3+1{,}5a_4B_\delta^4)K_l^2/G_\delta^2;\quad A_4=(0{,}125a_3B_\delta^3+0{,}5a_4B_\delta^4)K_l^3/G_\delta^3;$$
$$A_5=0{,}062a_4B_\delta^4K_l^4/G_\delta^4.$$

Решение уравнения (7.84) методом перебора относительно h при известном r_c позволяет определить значения B_c (индукция в стали основания системы), габаритный объем $V_г$ и стоимость C для дискретных величин B_δ, K_l, $F_{эл}$ и δ при постоянных значениях K_τ, τ_y, β и $K_з$. Объем $V_г$ и стоимость C выражаются в функции геометрических размеров в виде

$$V_г=\pi K_l(2r_c/h+1)h^3+2\pi[(K_l+2)h+2r_c]r_c^2; \quad (7.85)$$

$$C=\pi K_lK_з Ц_{пр}(2r_c/h+1)h^3+2\pi Ц_c[(K_l+2)h+2r_c]r_c^2. \quad (7.86)$$

В уравнении (7.86) $Ц_{пр}$ и $Ц_c$ — стоимости единиц веса обмоточного провода и стали. (В данном случае принято $Ц_{пр}=1{,}5$ руб/кг, $Ц_c=0{,}15$ руб/кг.)

При решении (7.84) величина r_c определялась на основании заданных B_δ и $F_{эл}$ из выражения

$$F_{эл}=\frac{1}{2}\left(\frac{B_\delta\delta_p}{\mu_0}\right)^2\frac{dG_\delta}{d\delta}. \quad (7.87)$$

Предварительно были рассчитаны зависимости G_δ и $dG_\delta/d\delta$ от r_c, по которым для определенных из (7.87) $dG_\delta/d\delta$ найдены $r_п$ и r_c с учетом соотношения $\lambda=r_п/r_c$. Найденные указанным способом r_c подставлялись в (7.84). Определение значений B_δ и B_c, соответствующих минимальным значениям $V_г$ и C, проведено на ЦВМ «Минск-22». При этом отыскание B_δ и B_c осуществлено методом сканирования с неизменной величиной шагов $\Delta B=0{,}1$ Тл; $\Delta K_l=1{,}0$; $\Delta\lambda=0{,}2$. Варьируемые при расчете величины изменялись в пределах: $B_\delta=0{,}1\div1{,}4$ Тл; $K_l=1\div10$; $F_{эл}=2$; 20; 50; 100 и 200 Н; $\delta=1$; 4; 7 и 10 мм; $\lambda=1\div2$. Исследованы варианты при значениях $K_з=0{,}3$; 0,5 и 0,9; $\beta=0{,}9$; 1,7 и 2,4; $\tau_y=40$,

пространства $S_{окна}$, выраженные в относительной форме, приняты в таком виде:

$$N^* = N/(K_\tau \tau_y r_c^2) = 2\pi(X+\beta)\gamma;$$

$$V^*_{пр} = V_{пр}/(K_з r_c^2) = \pi(X^2-1)\gamma;$$

$$S^*_{окна} = S_{окна}/r_c^2 = (X-1)\gamma;$$

$$Iw^* = Iw\sqrt{\rho_\tau}/\sqrt{2K_\tau \tau_y K_з r_c^3} = \gamma\sqrt{(X-1)(X+\beta)(X+1)}. \quad (7.94)$$

Исследованию подвергались электромагниты с втяжным и внешним поворотным якорем. Задача исследований заключалась в опре-

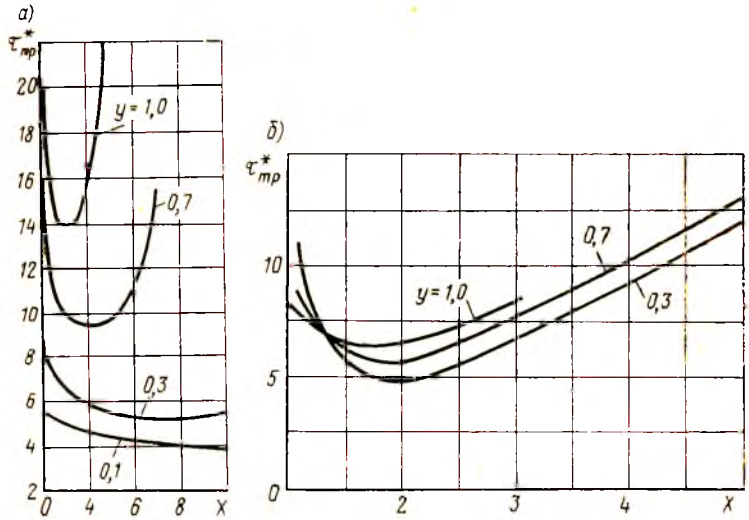


Рис. 7.16. Зависимости относительного времени трогания от параметра X электромагнита с втяжным якорем и стопом (*а*) и с внешним поворотным якорем (*б*)

делении зависимостей величины $\tau^*_{тр}$ от относительных параметров, характеризующих геометрические соотношения в электромагнитах, при заданных значениях N^*, $V^*_{пр}$, $S^*_{окна}$ и Iw^*. При этом для дискретных величин из (7.94) находились соответствующие значения параметра γ. Далее определялись зависимости $\tau^*_{тр} = f(X)$, причем для каждой были найдены оптимальные значения z и v (в электромагните с втяжным якорем и стопом) и λ_1 (в электромагните с внешним поворотным якорем), реализующие минимальное время трогания. Расчеты проведены на ЦВМ «Минск-22» методом сканирования с постоянным шагом по переменным, допустимая область изменения которых ограничивалась пределами $X = 1{,}1 \div 10{,}0$; $y = 0{,}1 \div 1{,}5$; $\lambda_1 = 1{,}0 \div 4{,}0$ при условиях $v \leqslant \gamma$ и $z \leqslant \gamma$.

Типичные зависимости, характеризующие влияние геометрических соотношений на время трогания, показаны на рис. 7.16.

Электромагнит переменного тока. Электромагниты переменного тока хотя и обладают естественной форсировкой, но в некоторых случаях их время трогания оказывается соизмеримым с временем движения подвижной части. Поэтому достижение минимального времени трогания за счет установления рациональных геометрических соотношений представляет практический интерес.

Пренебрегая потерями на вихревые токи и перемагничивание, а также влиянием насыщения и короткозамкнутых витков, будем считать магнитную систему линейной. Примем также, что напряжение источника имеет синусоидальную форму, а частота неизменна.

В период трогания связь параметров электрической цепи обмотки определяется уравнением

$$U_m \sin(\omega t + \alpha) = iR - L_{тр}(di/dt),$$

где U_m — амплитуда напряжения; ω — угловая частота сети; α — начальная фаза напряжения; i — мгновенное значение тока; $L_{тр}$ — индуктивность обмотки для начального положения якоря.

Решение дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях ($t = 0$, $i = 0$) имеет вид

$$i = I_m[\sin(\omega t + \alpha - \varphi_0) - \sin(\alpha - \varphi_0)\, e^{-t/T_{тр}}]. \qquad (7.95)$$

Здесь I_m — амплитудное значение тока; $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\omega T_{тр}/R)$ — угол сдвига между током и напряжением; $T_{тр}$ — электромагнитная постоянная времени цепи обмотки при отпущенном якоре.

Амплитудные значения тока и напряжения связаны соотношением

$$I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L_{тр})^2}.$$

Рассчитав по (7.95) зависимость $i = f(t)$ при заданных значениях I_m, α, $L_{тр}$ и R, можно по известному току трогания найти время трогания $t_{тр}$. Ток трогания определяется при этом для заданных значений начальной противодействующей механической силы $F_{тр}$ и производной индуктивности обмотки по зазору $(dL/d\delta)_{тр}$.

Из формулы $F_{тр} = \frac{i_{тр}^2}{2}\left(\frac{dL}{d\delta}\right)_{тр}$ получаем $i_{тр} = \sqrt{2F_{тр} / \left(\frac{dL}{d\delta}\right)_{тр}}$.

Величины $L_{тр}$, R и $T_{тр}$ являются при принятых выше допущениях функциями геометрических размеров магнитопровода и обмотки. Выразим указанные величины через геометрию электромагнита (рис. 7.17):

$$R = \rho_\tau l_{ср} w / q_{пр}. \qquad (7.96)$$

Здесь $q_{пр} = lhK_з/w$ — сечение провода.

Средняя длина витка обмотки определяется как $l_{ср} = 4a + \pi h$. Тогда, подставив в (7.96) значения $q_{пр}$ и $l_{ср}$, получим

$$R = \rho_\tau w^2 (4a + \pi h)/(lhK_з). \qquad (7.97)$$

Индуктивность обмотки электромагнита

$$L = w^2 G_{пр} = w^2 (G_\delta + gl/3),$$

где G_δ — приведенная по потокосцеплению проводимость магнитной системы.

Используя метод вероятных потоков [14], находим индуктивность:

$$L_{\text{тр}}=\frac{\mu_0 w^2}{2}\left[\left(\frac{a^2}{\delta}+2{,}03a+3{,}08\delta+\frac{2{,}56a}{1+\delta/a}\right)+\frac{l}{3}\left(\frac{a}{h}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+h/a}\right)\right]. \quad (7.98)$$

Постоянная времени цепи обмотки

$$T_{\text{тр}}=\frac{L_{\text{тр}}}{R}=\frac{K_3\mu_0 lh}{2\rho_\tau(4a+\pi h)}\left[\left(\frac{a^2}{\delta}+2{,}03a+3{,}08\delta+\frac{2{,}56a}{1+\delta/a}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{l}{3}\left(\frac{a}{h}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+h/a}\right)\right]. \quad (7.99)$$

Обозначим $l/a=X$, $h/a=y$. Тогда на основании (7.97) и (7.99) будем иметь:

$$R=\rho_\tau w^2(4+\pi y)/(K_3 aXy); \quad (7.100)$$

$$T_{\text{тр}}=\frac{a^2K_3\mu_0 Xy}{2\rho_\tau(4+\pi y)}\left[\left(\frac{a^2}{\delta}+2{,}03+3{,}08\frac{\delta}{a}+\frac{2{,}56}{1+\delta/a}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{X}{3}\left(\frac{1}{y}+0{,}52+\frac{1{,}28}{1+y}\right)\right]. \quad (7.101)$$

Как и ранее, следует ожидать, что геометрические соотношения, реализующие минимум времени трогания, будут зависеть от конкретных условий. Поэтому далее поиск оптимальных геометрических соотношений ведем, например, при условии постоянства габаритного объема, который через геометрические размеры можно выразить следующим образом:

$$V_{\text{об.м}}=(4\pi h+\pi h^2)\,l, \text{ или}$$
$$V_{\text{об.м}}=a^3Xy(4+\pi y); \quad (7.102)$$
$$V_{\text{с}}=2a^2l+2a^2h+4a^3, \text{ или}$$
$$V_{\text{с}}=2a^3(X+y+2).$$

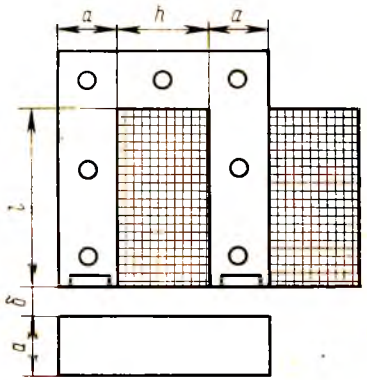


Рис. 7.17. Эскиз электромагнита переменного тока

Тогда $V_{\text{г}}=a^3[2(X+y+2)+Xy(4+\pi y)]$.

Из этого выражения

$$a=\sqrt[3]{V_{\text{г}}/[2(X+y+2)+Xy(4+\pi y)]}. \quad (7.103)$$

Подставив в уравнения для I_m и $i_{\text{тр}}$ значение $L_{\text{тр}}=RT_{\text{тр}}$, получим:

$$I_m=U_m/\left[R\sqrt{1+(\omega T_{\text{тр}})^2}\right]; \quad (7.104)$$

$$i_{\text{тр}}=\sqrt{2F_{\text{тр}}/[R(dT/d\delta)_{\text{тр}}]}. \quad (7.105)$$

Дифференцируя (7.101) по зазору, имеем

$$\left(\frac{dT}{d\delta}\right)_{\text{тр}}=\frac{K_3\mu_0 a^2Xy}{2\rho_\tau(4+\pi y)}\left[\frac{3{,}08}{a}-\frac{a^2}{\delta^2}-\frac{2{,}56}{a(1+\delta/a)^2}\right]. \quad (7.106)$$

Подставив в (7.105) значения R и $(dT/d\delta)_{тр}$ из (7.67) и (7.106) и используя выражение (7.95), получаем

$$\sqrt{\frac{4F_{тр}}{\omega^2\mu_0\left[3{,}08-\frac{a^2}{\delta^2}-\frac{2{,}56}{(1+\delta/a)^2}\right]}}=$$

$$=I_m\left[\sin(\omega t_{тр}+a+\varphi_0)-\sin(\alpha-\varphi_0)\,e^{-t_{тр}/T_{тр}}\right], \qquad (7.107)$$

где $\varphi_0=\operatorname{arctg}\omega T_{тр}$, а величина $T_{тр}$ определяется из соотношения (7.101).

Задача оптимизации параметров электромагнита сводится к определению значений X, y, реализующих минимум $t_{тр}$. Для ее реализации необходимо решение трансцендентного уравнения (7.107). Для этой цели принципиально могут быть использованы различные методы, например методы исследования функций классического анализа. Можно было бы, например, найти $t_{тр}$ из (7.95), разложив синусоидальную и степенную функции в ряд, ограничившись конечным числом членов и решая полученное выражение относительно $t_{тр}$. Однако найденное таким способом выражение для $t_{тр}$ получается очень громоздким и исследование частных производных оптимизируемой функции по переменным, необходимое при использовании методов множителей Лагранжа и классических, затруднено.

При решении задачи нахождения экстремума нелинейной функции двух переменных, заданной в неявном виде, наиболее эффективным оказывается применение метода сканирования. Задаваясь областью изменения параметров X, y, найдем их значения, реализующие экстремум $t_{тр}$. Значения $V_г$, w, δ предполагаются известными из расчета конкретных устройств. В качестве примера рассмотрим электромагнит с обмоткой на напряжение $u=380$ В, $w=4800$ витков и $\delta=1\cdot10^{-2}$ м.

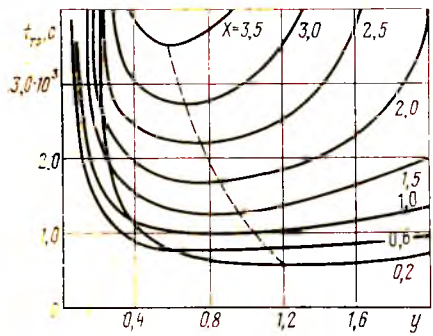


Рис. 7.18. Зависимости времени трогания от параметра J электромагнита переменного тока

Время трогания электромагнита переменного тока в значительной степени зависит от начальной фазы напряжения α, так как в соответствии с выражением (7.95) угол α определяет характер изменения тока в обмотке. Так как включение электромагнита может произойти при любом, заранее неизвестном значении начальной фазы α, то оптимальные значения параметров X и y, определенные при одной величине α, могут оказаться не оптимальными при других значениях начальной фазы. Для учета этого обстоятельства необходимо определять величины $X_{опт}$ и $y_{опт}$ для ряда заданных значений

угла α. Затем для каждой пары фиксированных величин $X_{опт}$, $y_{опт}$ из (7.107) находится время $t_{тр}$ при всех заданных значениях угла α. Для этого уравнение (7.107) записываем в виде

$$\sqrt{\frac{4F_{тр}}{\omega^2\mu_0\left[3{,}08-\frac{a^2}{\delta^2}-\frac{2{,}56}{(1+\delta/a)^2}\right]}}-$$

$$-I_m\left[\sin(\omega t+\alpha+\varphi_0)-\sin(\alpha-\varphi_0)\,e^{-t_{тр}/T_{тр}}\right]=f(t_{тр})=0$$

и решаем относительно $t_{тр}$ методом перебора (см. § 7.3).

В качестве оптимальных принимаются параметры X и y, при которых величины $t_{тр}$ для всех значений угла α оказываются наименьшими.

На рис. 7.18 представлены зависимости $t_{тр}$ от y для различных значений X, которые показывают, что изменения величины $t_{тр}$ в значительной степени определяются соотношениями геометрических размеров.

ГЛАВА 8

РАСЧЕТ НА ЦВМ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

§ 8.1. Общие вопросы расчета магнитных полей

Магнитное поле наряду с электрическим является одной из сторон единого электромагнитного поля и характеризуется величинами, определение которых и входит в задачу расчета. Теория магнитных цепей, на основе которой рассматривались электромагнитные явления в предыдущих главах, оперирует с такими параметрами цепей, как индуктивность, магнитное сопротивление, магнитная проводимость и т. п. При этом указанные параметры принимались как заданные и определялись на основе приближенной картины магнитного поля. По существу, достоверность результатов расчета электромагнитного процесса зависит от того, насколько точно определены параметры цепи. Таким образом, расчет магнитных полей необходим для уточненного определения величин, характеризующих магнитные цепи.

Указанным обстоятельством не исчерпывается необходимость расчета магнитных полей. Знание пространственного распределения физических величин, определяющих электромагнитное явление, позволяет избежать допущений, которые неизбежно принимаются в теории цепей (например, разбиение на участки, разделение магнитного потока на основные и неосновные составляющие и т. д.). И наконец, в ряде случаев не всегда могут быть использованы сами понятия цепей и для исследования процесса необходимо детальное изучение магнитного поля.

Рассчитать электромагнитное поле — значит найти в каждой точке поля значения индукций **B** и **D**, напряженностей **H** и **E**, а также некоторых интегральных величин (потокосцепление, тяговое усилие и т. д.). Любое электромагнитное поле полностью характеризуется системой уравнений в векторной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\partial\mathbf{D}/\partial t=\mathbf{j}+\varepsilon_0\varepsilon\,(\partial\mathbf{E}/\partial t); \tag{8.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t; \tag{8.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0; \tag{8.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho; \tag{8.4}$$

$$\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}; \tag{8.5}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}; \tag{8.6}$$

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}. \tag{8.7}$$

Здесь **j**, **D**, **E** — векторы плотности тока, электрической индукции и напряженности электрического поля; ρ — объемный заряд; γ — относительная электрическая проводимость среды; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Систему (8.1) — (8.7) называют *теоретической моделью электромагнитного поля* [17], в ней содержится вся необходимая информация о поле. Однако она неудобна для практического использования, так как не позволяет непосредственно получить интересующие нас величины. Поэтому путем преобразования (8.1) — (8.7) и введения новых переменных получают математическую модель поля.

Введем векторный магнитный потенциал **A** соотношением

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{B}.$$

Тогда из (8.2) можем записать

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \tag{8.8}$$

или

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t)=0. \tag{8.9}$$

Скалярный электрический потенциал $\varphi_э$ введем следующим образом:

$$\mathbf{E}+\partial\mathbf{A}/\partial t=-\operatorname{grad}\varphi_э. \tag{8.10}$$

Поскольку $\operatorname{rot}(-\operatorname{grad}\varphi_э)=0$, то уравнение (8.10) не противоречит (8.9) и, следовательно,

$$\mathrm{E}=-\partial\mathbf{A}/\partial t-\operatorname{grad}\varphi_э.$$

Далее из (8.1) и (8.6) следует:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu}\right)=j+\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t};\quad \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu}\right)=j+\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi_э\right).$$

Если μ — const, то будем иметь

$$\frac{1}{\mu_0\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=j+\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi_э\right).$$

В стационарных и квазистационарных полях при низких частотах (практически при $f<10^5$ Гц)

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi_э\right)=0.$$

Из векторного анализа известно, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A},$$

где ∇ — оператор Гамильтона («набла»).

Для того чтобы решение задачи было единственным, положим $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Следовательно, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Поэтому можно записать

$$\frac{1}{\mu_0\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla^2\mathbf{A}=\mathbf{j}.$$

На основании изложенного получаем уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала:

$$\nabla^2\mathbf{A}=\Delta\mathbf{A}=-\mu_0\mu\mathbf{j}. \tag{8.11}$$

Здесь $\Delta=\nabla^2$ — лапласиан.

Уравнение (8.11) может быть записано также в координатной форме:

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}=-\mu_0\mu\mathbf{j}, \tag{8.12}$$

где x, y, z — пространственные декартовы координаты.

Если в рассматриваемой точке поля $\mathbf{j}=0$, то получим уравнение Лапласа $\Delta\mathbf{A}=0$, или $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x}+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}=0$.

Из (8.5) можно получить

$$\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}=-\gamma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\gamma\operatorname{grad}\varphi_э. \tag{8.13}$$

С учетом (8.4) из (8.6) находим, что $\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\right.$ $\left.-\operatorname{grad}\varphi_э\right)=\rho$, или $\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E}=\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)-\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi_э)=\rho$. Так как $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, то получаем

$$\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=-\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}=0.$$

Таким образом, при $\varepsilon\neq0$ определим $\varepsilon_0\varepsilon\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi_э)=\rho$, или

$$\nabla^2\varphi_э=\Delta\varphi_э=-\rho/(\varepsilon_0\varepsilon). \tag{8.14}$$

Это уравнение Пуассона для скалярного электрического потенциала, которое может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_э}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_э}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi_э}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Если в рассматриваемой точке поля $\rho=0$, то получим уравнение Лапласа $\Delta\varphi_э=0$.

Решения уравнений Пуассона для однородной среды являются единственными и имеют такой вид:

$$\mathbf{A}(P)=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{i}(M)}{r_{PM}}\,dV_M; \tag{8.15}$$

$$\varphi_э(P)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(M)}{r_{PM}}\,dV_M, \tag{8.16}$$

где $\mathbf{A}(P)$ — значение векторного магнитного потенциала в точке поля P; V — объем, в котором рассчитывается электромагнитное поле; r_{PM} — расстояние между точками расположения источников поля (тока и заряда) и точками, в которых определяется $\mathbf{A}$ и $\varphi_э$; $\varphi_э(P)$ — значение скалярного электрического потенциала в точке поля P.

Реальные электротехнические устройства, в которых приходится рассчитывать электромагнитные поля, представляют собой комбинации деталей с самыми различными физическими свойствами (ε, γ, μ), скачкообразно изменяющимися на границах раздела сред. Например, при переходе от сердечника электромагнита к воздушному зазору имеем скачкообразное изменение магнитной проницаемости от μ до μ_0. Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, т. е. линии магнитного потока замкнуты, то напряженность поля скачком изменяется от $H_с$ до $H_б$. В силу сказанного на границах раздела сред поле должно подчиняться определенным условиям, называемым *граничными*. Граничные условия на границе раздела проводника и диэлектрика формулируются в виде

$$E_{\tau 1}=E_{\tau 2}; \quad D_{n1}=D_{n2},$$

где $E_{\tau 1}$, $E_{\tau 2}$ — тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля первой и второй сред соответственно; D_{n1}, D_{n2} — нормальные составляющие вектора электростатической индукции.

Граничные условия на границе раздела сред с различными значениями магнитной проницаемости:

$$H_{\tau 1}=H_{\tau 2}; \quad B_{n1}=B_{n2}, \text{ или } \mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2, \quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial n}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial n}, \tag{8.17}$$

где $H_{\tau 1}$, $H_{\tau 2}$ — тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля; B_{n1}, B_{n2} — нормальные составляющие вектора магнитной индукции.

Задача аналитического расчета электромагнитного поля, связанная с решением уравнений Пуассона и Лапласа, заключается в определении распределения значений $\mathbf{A}$ и $\varphi_э$ в объеме V, по которым можно находить остальные характеристики поля ($\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$). В такой формулировке задача носит название *краевой* для уравнений в частных производных. Трудности ее решения заключаются в том, что в реальных электротехнических устройствах, во-первых, неизвестно распределение j и ρ в объеме V, во-вторых, редко встречаются однородные среды. При этом приходится производить интегрирование, определяя $\mathbf{A}$ и $\varphi_э$ по объему, включающему проводники, диэлектрики и окружающее пространство, что связано с очень большой вычислительной работой. Поэтому аналитические методы расчета поля могут быть использованы лишь в некоторых простейших случаях, не имеющих общего практического значения. Необходимость повышения точности расчета современных электрических машин и аппаратов привела к необходимости использовать численные методы расчета полей с использованием вычислительных возможностей современных ЦВМ. Это потребовало разработки новых алгоритмов для расчета электрических и магнитных полей, среди которых применяют методы конечных разностей [18], вторичных источников [19], конечных элементов [20] и комбинированные методы [21]. В следующих параграфах в разном объеме рассматриваются сущность и некоторые вычислительные аспекты указанных методов.

В дальнейшем будем рассматривать расчет только магнитных полей, наиболее полно характеризующих явления в электромагнитных аппаратах. Ограничимся при этом рассмотрением частного случая — магнитного поля постоянных токов (переменное магнитное поле здесь не рассматривается).

Уравнения магнитного поля постоянных токов, как это следует из системы (8.1) — (8.7), имеют такой вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j};\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0;\ \mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}. \qquad (8.18)$$

По аналогии с (8.10), для пространства, где плотность тока $\mathbf{j}=0$, напряженность магнитного поля H может быть записана в виде

$$\mathbf{H}=-\operatorname{grad}\varphi_м, \qquad (8.19)$$

где $\varphi_м$ — скалярный магнитный потенциал.

Уравнения (8.3), (8.7), (8.18) и (8.19) будут использованы при изложении сущности и некоторых вычислительных аспектов численных методов расчета магнитных полей постоянных токов.

§ 8.2. Метод конечных разностей (метод сеток)

Особенности рассматриваемого метода покажем на примере двухмерного случая.

Пусть имеется область S, ограниченная кривой N, вдоль которой задано распределение магнитного потенциала (рис. 8.1). Нанесем на область S прямоугольную сетку и выберем на ней пять рядом лежащих точек: *0*, *1*, *2*, *3*, *4*. Расстояние между ними примем оди-

наковым и равным m. Если m мало, то можно ввести конечные разности

$$\frac{\varphi_{м1}-\varphi_{м0}}{m}-\frac{\varphi_{м0}-\varphi_{м3}}{m}\approx\left(\frac{\partial\varphi_м}{\partial x}\right)_{10}-\left(\frac{\partial\varphi_м}{\partial x}\right)_{03}\approx\left(\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial x^2}\right)_0 m.$$

$$\frac{\varphi_{м2}-\varphi_{м0}}{m}-\frac{\varphi_{м0}-\varphi_{м4}}{m}\approx\left(\frac{\partial\varphi_м}{\partial y}\right)_{20}-\left(\frac{\partial\varphi_м}{\partial y}\right)_{04}\approx\left(\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial y^2}\right)_0 m.$$

Складывая левые и правые части приведенных соотношений, получим

$$\frac{\varphi_{м1}-\varphi_{м0}-\varphi_{м0}+\varphi_{м3}+\varphi_{м2}-\varphi_{м0}-\varphi_{м0}+\varphi_{м4}}{m}\approx m\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial y^2}\right)_0\right],$$

или

$$\frac{1}{m}(\varphi_{м1}+\varphi_{м2}+\varphi_{м3}+\varphi_{м4}-4\varphi_{м0})\approx m\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial y^2}\right)_0\right].$$

Так как уравнение Лапласа для скалярного магнитного потенциала в случае двухмерного поля имеет вид $\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_м}{\partial y^2}=0$, то, подставляя вместо производных конечно-разностные отношения, находим

$$\varphi_{м0}=\frac{1}{4}(\varphi_{м1}+\varphi_{м2}+\varphi_{м3}+\varphi_{м4}).$$

Это алгебраическое уравнение позволяет определить магнитный потенциал точки через соседние. Аналогично могут быть выражены потенциалы других точек. В результате получаем систему алгебраических уравнений, размерность которой будет равна количеству узлов сетки. Решение системы дает возможность рассчитать неизвестные значения потенциала по заданным его величинам на границе. Точность расчета зависит от шага m, т. е. от числа узлов. Аналогично может быть решено уравнение Пуассона.

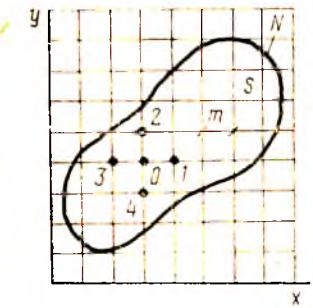


Рис. 8.1. Сетка переменных к расчету магнитного поля методом конечных разностей

На первый взгляд кажется, что принципиальных затруднений при расчете поля методом сеток нет. Однако при проектировании электромагнитных систем для достижения необходимой точности рабочие объемы рассчитываемых объектов со сложными границами, неоднородными и нелинейными средами необходимо покрывать сетками с достаточно мелким шагом и количеством узлов, достигающим 10^5. Решение системы алгебраических уравнений такой размерности затруднено даже при применении быстродействующих ЦВМ. Вторая причина, ограничивающая применение метода конечных разностей, заключается в необходимости искусственного ограничения поля, что связано с погрешностями. Дополнительные погрешности возникают при оп-

ределении напряженности магнитного поля, связанной со значением магнитного потенциала выражением (8.19). Указанные обстоятельства явились причиной ограниченного применения метода конечных разностей к расчету магнитных полей реальных электромагнитных аппаратов.

§ 8.3. Метод вторичных источников (интегральных уравнений)

Как видно из предыдущего, расчет магнитного поля в однородной среде не вызывает принципиальных затруднений. Задача осложняется в случае неоднородности среды, когда

$$\varepsilon = f(x, y, z),\ \gamma = f(x, y, z),\ \mu = f(x, y, z).$$

Одним из методов, позволяющих учесть неоднородность среды при расчете магнитного поля, является метод вторичных источников. Сущность этого метода заключается в замене реального поля в неоднородной среде эквивалентным полем в вакууме при условии введения в каждой точке поля, где среда меняется, фиктивных вторичных (по отношению к первичным источникам, возбуждающим поле) источников в виде токов намагниченности или «магнитных» зарядов. Физическими предпосылками для такой замены служит изменение характеристик магнитного поля, созданного в вакууме, если внести в него ферромагнитное тело. Ферромагнетик намагничивается и поле изменяется так, как если бы в объеме тела появились добавочные, вторичные намагничивающие токи. Результирующее поле будет создано наложением вторичного поля намагниченности ферромагнитного тела на первичное поле, созданное в вакууме токами обмоток. В задачу расчета поля в этом случае входит определение распределения вторичных источников в объеме деталей электрических аппаратов, а затем на основании полученного распределения вторичных источников и заданного распределения первичных источников (токов в намагничивающих катушках) — расчет характеристик эквивалентного поля в вакууме по точным формулам — решениям уравнений Лапласа и Пуассона.

Магнитные системы электрических аппаратов состоят из проводов с током, изоляции, магнитопроводов и т. д. Характеристики этих материалов меняются на границах раздела деталей и внутри. Поэтому источники поля локализованы в объемах этих деталей и расчет поля приходится вести в пределах этих деталей, а не во всем окружающем пространстве, как в случае использования конечно-разностного метода. Это важное преимущество рассматриваемого метода, поскольку размерность задачи здесь значительно ниже и, следовательно, требуется меньший объем памяти ЦВМ и снижается время расчета.

В зависимости от постановки задачи для учета неоднородности сред могут быть введены различные вторичные источники — фиктив-

ные токи или заряды. Если из первого уравнения (8.18) исключить вектор **H**, выразив его через вектор индукции, то получаем

$$\operatorname{rot}[\mathbf{B}/(\mu_0\mu)]=\mathbf{j},$$

или

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu}\right)=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{B}+\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu},\ \mathbf{B}\right]\right)=\mathbf{j},$$

а так как

$$\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}=\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1}{\mu}\right)\operatorname{grad}\mu=-\frac{1}{\mu^2}\operatorname{grad}\mu,$$

то

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{j}+\mu_0\left\{-\frac{1}{\mu_0}\frac{[\mathbf{B},\ \operatorname{grad}\mu]}{\mu}\right\}.$$

Сравнивая полученный результат с исходными уравнениями, приходим к выводу, что для создания поля в вакууме, эквивалентного полю в неоднородной среде, необходимо и достаточно изменить первичные источники поля j на μj и ввести вторичные источники — токи намагниченности объемной плотностью

$$\mathbf{j}_\mu=-\frac{1}{\mu_0}\frac{[\mathbf{B}(Q)\operatorname{grad}_Q\mu]}{\mu(Q)}.$$

Исключим из (8.18) вектор **B**:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=\operatorname{div}(\mu_0\mu\mathbf{H})=\mu_0\{\mu\operatorname{div}\mathbf{H}+(\mathbf{H},\ \operatorname{grad}\mu)\}$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\left\{\mu_0\frac{(\mathbf{H},\ \operatorname{grad}\mu)}{\mu}\right\}.$$

Для сохранения поля в вакууме, эквивалентного полю в неоднородной среде, необходимо и достаточно сохранить первичные источники поля **j** и ввести вторичные источники — фиктивные магнитные заряды объемной плотностью

$$\rho_м(Q)=-\mu_0(\mathbf{H}(Q),\ \operatorname{grad}_Q\mu)/\mu(Q). \qquad (8.20)$$

При введении вторичных источников следует иметь в виду, что фиктивные вторичные токи являются векторными величинами, имеющими в случае трехмерного поля три составляющие. В силу этого при решении интегральных уравнений относительно неизвестных векторных величин в три раза могут возрастать размерность задачи и время их определения. Поэтому для снижения времени счета и объема памяти ЦВМ необходимо стремиться по возможности заменять влияние границ раздела сред и их неоднородности скалярными величинами в виде объемных и поверхностных магнитных зарядов.

На границах раздела сред, как указывалось выше, характеристики μ, ε и γ изменяются скачкообразно. Значения градиентов этих величин неограниченны, а следовательно, неограниченны и объемные плотности $\mathbf{j}_м$ и $\rho_м$. Однако токи и заряды, приходящиеся на единицу площади поверхности тела, будут ограниченными. В этом случае вторичные источники приобретают смысл поверхностных токов и зарядов.

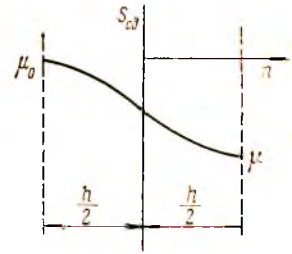


Рис. 8.2. К определению объемной и поверхностной плотностей магнитных зарядов

На месте границы $S_{сд}$ раздела двух сред имеем слой неоднородной среды толщиной h (рис. 8.2), окружающий симметрично границу изнутри и снаружи. В толщине этого слоя магнитная проницаемость изменяется по некоторому закону от μ до μ_0. Среднее значение градиента проницаемости в слое можно определить в виде

$$-\operatorname{grad}\mu\,|_{ср}=(\mu-\mu_0)\,\mathbf{n}_Q/h,$$

где $\mathbf{n}_Q$ — единичная внешняя нормаль к границе $S_{сд}$.

На самой поверхности магнитная проницаемость (среднее значение)

$$\mu\,|S_{сд}=(\mu_0+\mu)/2.$$

При $h\to 0$ среднее значение $\operatorname{grad}\mu$ будет стремиться к значению градиента на границе $S_{сд}$:

$$-\left.\frac{\operatorname{grad}_Q\mu}{\mu\,(Q)}\right|_{S_{сд}}=-\lim\frac{\mu-\mu_0}{h}\,\mathbf{n}_Q\,\frac{2}{\mu_0+\mu}=-2\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\,\mathbf{n}_Q\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.$$

Подставив полученное выражение в (8.20), получим

$$\rho_м\,(Q)=2\mu_0\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\,(\mathbf{H}\,(Q),\ \mathbf{n}_Q)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}. \qquad (8.21)$$

Таким образом, при $h\to 0$ объемная плотность заряда $\rho_м\,(Q)\to\infty$. Однако, если умножить обе части (8.21) на h и перейти к пределам при $h\to 0$, получим конечную величину

$$\sigma_м\,(Q)=\lim_{h\to 0}\rho_м\,(Q)\,h=2\mu_0\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\,(\mathbf{H}\,(Q),\ \mathbf{n}_Q), \qquad (8.22)$$

где $\sigma_м\,(Q)$ — поверхностная плотность зарядов, учитывающая влияние границы раздела сред.

Таким образом, в кусочно-неоднородной среде, где характеристики среды изменяются не только на границах раздела, но и внутри сред от точки к точке, необходимо вводить вторичные источники в виде магнитных зарядов с объемной $\rho_м$ и поверхностной $\sigma_м$ плотностями. Если среда кусочно-однородная, т. е. ее характеристики изменяются только на границах, необходимо вводить только поверхностные заряды $\sigma_м$.

Поскольку рассматривается магнитное поле в вакууме, эквивалентное полю в кусочно-неоднородной среде, то значение напряжен-

ности $\mathbf{H}(P)$ в произвольной точке P поля можно представить как результат действия всех видов источников $\mathbf{j}$, $\rho_м$ и $\sigma_м$:

$$\mathbf{H}(P)=\mathbf{H}_j(P)+\mathbf{H}_{\rho_м}(P)+\mathbf{H}_{\sigma_м}(P),$$

где $\mathbf{H}_j(P)$ — составляющая $\mathbf{H}$, созданная в точке P токами проводимости в намагничиваю их обмотках; $\mathbf{H}_{\sigma_м}(P)$, $\mathbf{H}_{\sigma_м}(P)$ — то же, созданные поверхностным и объемным зарядами плотности $\sigma_м$ и $\rho_м$ соответственно.

В соответствии с [19] можно написать

$$\mathbf{H}(P)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_k}\frac{[\mathbf{j}(N),\,\mathbf{r}_{PN}]}{r^3_{PN}}\,dV_N-\frac{1}{4\pi\mu_0}\oint\limits_S\frac{[\sigma_м(M),\,\mathbf{r}_{PM}]}{r^3_{PM}}\,dS_M-$$
$$-\frac{1}{4\pi\mu_0}\int\limits_V\frac{[\rho_м(G),\,\mathbf{r}_{PQ}]}{r^3_{PG}}\,dV_G. \qquad (8.23)$$

Подставив (8.23) в (8.20), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\rho_м(P)-\int\limits_V\rho_м(G)\frac{(\mathbf{r}_{PG},\,\mathrm{grad}_P\mu)}{4\pi\mu(P)r^3_{PG}}\,dV_G-\oint\limits_S\sigma_м(M)\frac{[\mathbf{r}_{PM},\,\mathrm{grad}_P\mu]}{4\pi\mu(P)\,r^3_{PM}}\,dS_м=$$
$$=\mu_0\int\limits_{V_k}\mathbf{j}(N)\frac{[\mathbf{r}_{PN},\,\mathrm{grad}_P\mu]}{4\pi\mu(P)\,r^3_{PN}}\,dV_N. \qquad (8.24)$$

Подставив выражение для $\mathbf{H}$ из (8.23) в (8.22), найдем

$$\sigma_м(Q)-\lambda_m(Q)\oint\limits_S\sigma_м(M)\frac{[\mathbf{r}_{QM},\,\mathbf{n}_Q]}{2\pi r^3_{QM}}\,dS_м+$$
$$+\lambda_m(Q)\int\limits_V(\rho_м(G)\frac{(\mathbf{r}_{QG},\,\mathbf{n}_Q)}{2\pi r^3_{QG}}\,dV_G=-\mu_0\lambda_m(Q)\int\limits_{V_k}\frac{(\mathbf{j}(N)[\mathbf{r}_{QN},\,\mathbf{n}_Q])}{2\pi r^3_{QN}}\,dV_N. \qquad (8.25)$$

Здесь $\mathbf{r}_{QG}$ — вектор расстояния, направленный из точки Q в точку G, принадлежащую объему магнитопровода V; $\mathbf{r}_{PQ}$ — вектор расстояния, направленный из точки P в точку G, принадлежащую объему магнитопровода V; $\lambda_m(Q)=[\mu(Q)-\mu_0]/[\mu(Q)+\mu_0]$; $\mathbf{r}_{QM}$ — вектор расстояния, направленный из точки Q в точку M, принадлежащую поверхности магнитопровода; $\mathbf{n}_Q$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности в точке Q; $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока проводимости в точке N, принадлежащей объему катушек намагничивания V_k.

Решение интегральных уравнений (8.24) и (8.25) дает возможность найти распределение $\rho_м$ в объеме магнитопровода и $\sigma_м$ по оверхностям деталей магнитной системы при известном распределении токов в катушках $\mathbf{j}(N)$.

Основными вычислительными операциями рассматриваемого метода является численное интегрирование по объемам, поверхностям и контурам (для двумерных полей). При этом объемы магнитопро

вода, поверхности стали и катушек и контуры разбиваются на большое число элементов ΔV, ΔS и Δl. В пределах каждого элемента $\sigma_м$ и $\rho_м$ принимаются неизменными, поэтому расчет характеристик поля удается свести к решению системы алгебраических уравнений относительно $\sigma_м$ и $\rho_м$.

В общем случае при расчете магнитного поля электромагнитов приходится решать нелинейную задачу. В нелинейной среде вначале неизвестны значения μ в каждой точке $G \in V$ или $M \in S$ и система уравнений решается методом блочной итерации. На первом этапе принимается $\mu = \text{const}$ во всем объеме V и при $\rho_м = 0$ решается уравнение (8.25). Интегрированием по первичным и вторичным источникам определяется напряженность поля $\mathbf{H}^{(1)}$ в точках системы. Затем по кривой намагничивания находится распределение $\mu^{(1)}[\mathbf{H}^{(1)}]$ и совместно решаются уравнения (8.24) и (8.25). Находятся $\mathbf{H}^{(2)}$ и $\mu^{(2)}[\mathbf{H}^{(2)}]$ и так до тех пор, пока не выполнится условие

$$[\mu^{(n)}(P) - \mu^{(n+1)}(P)] \leqslant \varepsilon_\mu ,$$

где n — номер итерации, ε_μ — заданное малое число.

§ 8.4. Расчет магнитного поля электромагнита с незамкнутой магнитной цепью

Электромагниты с незамкнутым магнитопроводом (рис. 8.3) применяют в качестве расцепителей высоковольтных аппаратов, датчиков магнитного поля и т. д. На стадии проектирования таких электромагнитов требуется найти зависимости потокосцепления обмотки и силы, действующей на подвижный элемент, от геометрических размеров и конструктивных параметров, а также распределение магнитной индукции в системе. Отсутствие замкнутого магнитопровода не позволяет надежно рассчитывать такие системы методами теории цепей. Применение физического моделирования весьма трудоемко, особенно при оптимизации конструкции.

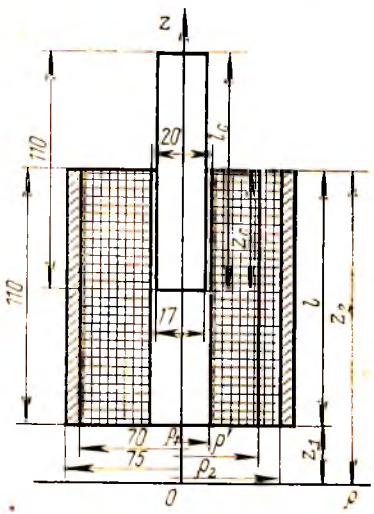


Рис. 8.3. Эскиз электромагнита с незамкнутой магнитной цепью

Магнитная система таких устройств, как правило, ненасыщена и можно считать с достаточной для инженерной практики точностью постоянной магнитную проницаемость стали магнитопровода. Вторичные источники определяются так, чтобы на поверхности магнитопровода выполнялись граничные условия

$$B_n = B_{n\,0}; \qquad (8.26)$$

$$H_\tau = H_{\tau\,0}, \qquad (8.27)$$

где индекс 0 относится к составляющим вектора индукции и напряженности магнитного поля в воздухе.

Как указывалось выше, для выполнения условий (8.26) и (8.27) достаточно ввести слой фиктивных поверхностных токов с плотностью $j_м$, которые в нашей задаче вследствие симметрии являются круговыми. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с ортами $\mathbf{l}_\rho$, $\mathbf{l}_\varphi$, $\mathbf{l}_z$ (рис. 8.4). Векторы плотности тока будут иметь одну составляющую, поэтому в данном случае нет необходимости заменять векторные величины (токи) скалярными (зарядами):

1) в обмотке намагничивания — плотность возбуждающего тока

$$j_\rho = j_z = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{l}_\varphi j_\varphi = \mathbf{l}_\varphi j(\rho, z);$$

2) на поверхности магнитопровода — плотность вторичного тока намагниченности

$$j_{м\rho} = j_{мz} = 0, \quad \mathbf{j}_м = \mathbf{l}_\varphi j_{м\varphi} = \mathbf{l}_\varphi j_м(\rho, z).$$

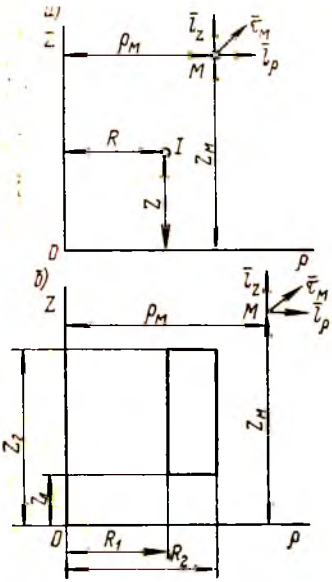


Рис. 8.4. К выводу интегрального уравнения:
а — расположение витка с током и точки наблюдения; *б* — координаты цилиндрических обмоток

Условие (8.26) удовлетворяется автоматически, а для удовлетворения (8.27) необходимо, чтобы плотность $j_м$ была пропорциональна скачку тангенциальной составляющей индукции:

$$j_м = \frac{2}{\mu_0}\frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} B_\tau, \qquad (8.28)$$

где μ_0, μ — абсолютные магнитные проницаемости соответственно воздуха и стали магнитопровода; B_τ — тангенциальная составляющая индукции, определяемая всеми токами, создающими магнитное поле.

Значения осевой и радиальной составляющих вектора магнитной индукции от кругового витка с током I найдем на основании закона *Био—Савара*. Для осевой B_z и радиальной B_ρ составляющих индукции магнитного поля в случае взаимного расположения витка и точки наблюдения M, представленного на рис. 8.4, имеем

$$B_z(\rho_м, z_м) = If(\rho_м, z_м, R, z), \quad B_\rho(\rho_м, z_м) = It(\rho_м, z_м, R, z), \qquad (8.29)$$

где

$$\left.\begin{aligned} f(\rho_м, z_м, R, z) &= \frac{\mu_0 R}{2\pi}\int_0^\pi \frac{R - \rho_м \cos\alpha}{r^3}\,d\alpha; \\ t(\rho_м, z_м, R, z) &= \frac{\mu_0 (z_м - z)}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\alpha}{r^3}\,d\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad (8.30)$$

$$r = \sqrt{(z_м - z)^2 + R^2 + \rho_м^2 - 2R\rho_м\cos\alpha}, \qquad (8.31)$$

α — текущее значение азимутального угла при интегрировании по контуру витка с током.

Тангенциальная составляющая вектора магнитной индукции

$$B_\tau(M)=B_\rho(\rho_м,\ z_м)\cos(\tau_м,\ l_\rho)+B_z(\rho_м,\ z_м)\cos(\tau_м,\ l_z)=I\,[f(\rho_м,\ r_м,\ R,\ z)\cos(\tau_м,\ l_z)+t(\rho_м,\ z_м,\ R,\ z)\cos(\tau_м,\ l_\rho)], \qquad (8.32)$$

где $\tau_м$ — единичный вектор касательной, приведенной в точке M к границе ферромагнетика.

Подставляя (8.32) в (8.28), можно получить соотношение для определения плотности $j_м$ в точке M с координатами $\rho_м$ и $z_м$, расположенной на контуре сечения магнитопровода. Тангенциальная составляющая индукции B_τ в этой точке создается всеми источниками поля (обмоткой намагничивания и вторичными токами намагниченности). При известном распределении источников тангенциальная составляющая индукции выражается в виде интеграла по площади сечения обмотки и всем контурам сечения стальных участков магнитопровода.

Учитывая сказанное для точки M, получим интегральное уравнение *Фредгольма* второго рода для определения значения поверхностной плотности вторичного тока:

$$j_м(M)-\lambda_м\oint_L j_м(N)\,[f(M,\ N)\cos(\tau_м,\ l_z)+t(M,\ N)\cos(\tau_м,\ l_\rho)]\,dL_N=$$

$$=\lambda_м\int_{S_к} j(P)\,[f(M,\ P)\cos(\tau_м,\ l_z)+t(M,\ P)\cos(\tau_м,\ l_\rho)]\,dS_P, \qquad (8.33)$$

где N, P — произвольные точки, принадлежащие соответственно контуру сечения магнитопровода L и сечению обмотки намагничивания $S_к$; L — суммарный контур сечения стальных деталей магнитопровода; $\lambda_м=\dfrac{2}{\mu_0}\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}$, если точка M находится на гладких участках контура сечения магнитопровода; $\lambda_м=\dfrac{4}{\mu_0}\dfrac{\mu-\mu_0}{3\mu-\dfrac{1}{\pi}\gamma_B(\mu-\mu_0)+\mu_0}$, если точка M является точкой изгиба контура; γ_B — угол изгиба контура.

Индукция, создаваемая обмоткой конечной толщины, может быть также представлена суммой индукций, создаваемых несколькими эквивалентными бесконечно тонкими цилиндрическими обмотками с постоянной по высоте плотностью МДС. Количество таких обмоток m_0 выбирается так, чтобы удовлетворялось условие

$$(\rho_2-\rho_1)/[m_0(\rho_2+\rho_1)]\leqslant 0{,}1,$$

где ρ_1 и ρ_2 — соответственно внутренний и внешний радиусы обмотки намагничивания.

В этом случае индукция магнитного поля, создаваемая обмоткой намагничивания,

$$B^I_\tau(M)=\sum_{\nu=1}^{m_0} j_\nu\,\alpha_\nu(M), \qquad (8.34)$$

где $j_\nu = \frac{I\omega}{m_0}(z_2 - z_1)$ — линейная плотность МДС в тонкой обмотке; $\alpha_\nu(M)$ — функция, определяемая взаиморасположением точки M и ν-й тонкой цилиндрической обмотки.

Если принять обозначение геометрических размеров, указанное на рис. 8.4, *б*, то функция

$$\alpha_\nu(M) = \Phi_B \cos(\tau_м l_z) + T_B \cos(\tau_м, l_\rho), \tag{8.35}$$

где

$$\Phi_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R_\nu - \rho_м \cos\alpha}{b_\nu} \left(\frac{z_2 - z_м}{\sqrt{(z_м - z_2)^2 + b_\nu}} + \frac{z_м - z_1}{\sqrt{(z_м - z_1)^2 + b_\nu}} \right) d\alpha; \tag{8.36}$$

$$T_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\pi R_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{(z_м - z_2)^2 + b_\nu}} - \frac{1}{\sqrt{(z_м - z_1)^2 + b_\nu}} \right) \cos\alpha d\alpha; \tag{8.37}$$

$$b_\nu = R_\nu^2 + \rho_м^2 - 2R_\nu \rho_м \cos\alpha. \tag{8.38}$$

Для определения поверхностной плотности токов намагниченности $j_м$ разобьем контуры сечений всех частей магнитопровода на n участков. Заменяя интегралы в (8.33) конечными суммами, получим систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволит найти искомые плотности. В матричной форме эта система имеет вид

$$\vec{Aj} = \vec{b}, \tag{8.39}$$

где $A \equiv [a_{ik}]$ — квадратная матрица $(n \times n)$ коэффициентов; $\vec{j}$ — n-мерный столбец искомых плотностей токов намагниченности; $\vec{b}$ — n-мерный столбец значений индукции магнитного поля, создаваемых обмоткой намагничивания.

Вычисляют элементы матрицы a_{ik} и матрицы b_i на основании следующих соображений. Полагая, что поверхностная плотность $j_м$ на участке постоянна и равна полусумме значений $j_м$ в соседних точках, получим

$$a_{ik} = \alpha_{k,k+1} + \alpha_{k,k-1} - 2\lambda_2/\lambda_м; \tag{8.40}$$

$$b_i = -2 \sum_{\nu=1}^{m_0} j_\nu \alpha_\nu(M_i), \tag{8.41}$$

где $\lambda_2 = 1$, если $i = k$, иначе $\lambda_2 = 0$.

Для замкнутого контура сечения магнитопровода, на котором расположено, например, n_1 точек, в (8.40) и (8.41) следует считать, что индекс соответствует первой точке контура, если $k+1 > n_1$, и последней точке контура, если $k-1 < 1$. Значения α_k, α_{k+1} (аналогично, α_k, α_{k-1}) для участков контура, параллельных оси z, опре-

деляются по (8.35), причем в последнем принимается $z_2=z_{k+1}$, $z_1=z_k$, $R_\nu=\rho_k$. Для участков, параллельных оси ρ, значения

$$\alpha_{k,\,k+1}=(\rho_k-\rho_{k+1})[f\cos(\tau_м,\ \mathbf{l}_z)+t\cos(\tau_м,\ \mathbf{l}_\rho)], \qquad (8.42)$$

где функции f и t определяются по выражениям (8.30). При определении f и t следует вместо R подставить $0{,}5(\rho_k+\rho_{k+1})$, а вместо z подставить z_k.

Результирующая составляющая индукции магнитного поля в произвольной точке M находится как сумма составляющих индукции, создаваемых фиктивными токами намагниченности и током обмотки:

$$B_r(M)=\sum_{k=1}^{n}\frac{j_{мk}+j_{м,k+1}}{2}\alpha_{k,\,k+1}+\sum_{\nu=1}^{m_*}j_\nu\alpha_\nu(M). \qquad (8.43)$$

В выражениях (8.35) и (8.42) следует положить $\tau_м=\mathbf{l}_z$, если $r=z$, и $\tau_м=\mathbf{l}_\rho$, если $r=\rho$.

Определив поверхностную плотность фиктивных токов намагниченности, вектор индукции магнитного поля можно вычислить интегрированием по известным источникам $j_м$ и j. Знание составляющих индукции в произвольной точке электромагнитной системы позволяет рассчитать потокосцепление и электромагнитные взаимодействия между отдельными элементами магнитной системы.

Так, потокосцепление обмотки, имеющей w витков, равномерно распределенных по сечению катушки (см. рис. 8.3), может быть вычислено по формуле

$$\psi=\frac{2\pi w}{(z_2-z_1)(\rho_2-\rho_1)}\int_{z_1}^{z_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{0}^{\rho'}B_z(\rho,\ z)\rho d\rho' dz. \qquad (8.44)$$

Для вычисления силы, действующей на сердечник электромагнита, используем *формулу Био* в виде

$$\mathbf{F}_{эл}=\int_S[\mathbf{j}_м\mathbf{B}]\,dS, \qquad (8.45)$$

где $\mathbf{B}$ — индукция, создаваемая в месте нахождения поверхностной плотности тока $j_м$ всеми источниками поля; S — поверхность сердечника.

Раскрывая векторное произведение, получим вектор плотности сил

$$\mathbf{f}=\mathbf{l}_\rho(j_м B_z)-\mathbf{l}_z(j_м,\ B_\rho),$$

так как в рассматриваемом случае $B_\varphi=0$ и $j_\rho=j_z=0$.

Вследствие симметрии существует лишь осевая составляющая электромагнитной силы

$$F_{эл\,z}=\int_S j_м B_\rho\,dS=\int_S f_z dS. \qquad (8.46)$$

Алгоритм расчета электромагнита постоянного тока можно сформулировать следующим образом:

1. Ввод исходной информации об обмотке (плотность тока, координаты слоев), о магнитопроводе (значение магнитной проницаемости, координаты точек разбиения контура, координаты точек, в которых необходим расчет магнитной индукции).

2. Расчет по (8.40) и (8.41) коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений.

3. Решение системы алгебраических уравнений (8.39).

4. Расчет составляющих индукции магнитного поля по (8.43).

5. Вычисление потокосцепления обмотки намагничивания и тя-

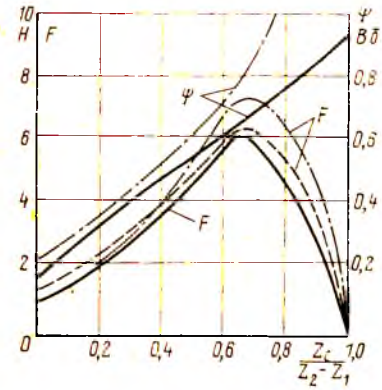


Рис. 8.5. Расчетные (———) и опытные (— — —) зависимости электромагнита, (—.—.—) расчет для электромагнита с кожухом

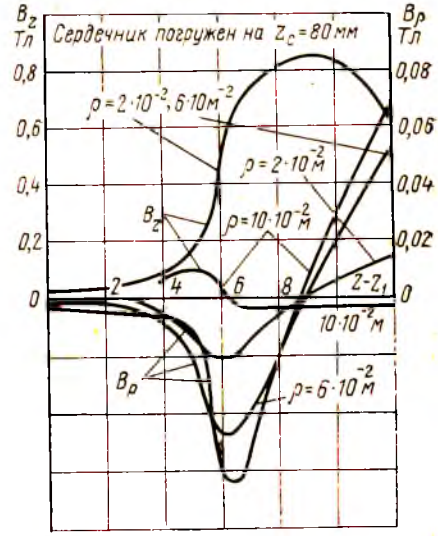


Рис. 8.6. Распределение индукции в электромагните

гового усилия. При численной реализации интегралов (8.44) и (8.46) используется формула трапеций, приводящая соответственно к выражениям

$$\Psi = \frac{w\pi\Delta z}{(z_2 - z_1)(\rho_2 - \rho_1)} \left\{ q \sum_{k=1}^{p-1} 0{,}5 (B_{z,k} + B_{z,k+1}) (\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{q-1} 0{,}5 (B_{z,p+m} + B_{z,p+m+1}) (q - m) (\rho_{p+m}^2 - \rho_{p+m+1}^2) \right\};$$

$$F_{эл} = \sum_{m=1}^{n-1} 0{,}5 (f_{z,m} + f_{z,m+1}) \Delta S,$$

где $\Delta S = \begin{cases} 2\pi\rho_m (z_{m+1} - z_m), & \text{если } \rho_m = \rho_{m+1}; \\ \pi (\rho_{m+1}^2 - \rho_m^2), & \text{если } \rho_m \neq \rho_{m+1}; \end{cases}$

Δz — шаг по координате z; p — число точек, расположенных на интервале $[0, \rho_1]$; q — число точек, расположенных на интервале $[\rho_1, \rho_2]$.

Изложенный выше алгоритм был реализован на ЦВМ «Минск-32». Время счета одного варианта, в котором контур магнитопровода разбивался на 60 участков, обмотка — на 6 слоев, составляет 15 мин.

Для исследуемой системы рассчитывались электромагнитная сила и потокосцепление обмотки при различных положениях сердечника внутри обмотки намагничивания. Геометрические размеры электромагнита указаны на рис. 8.3. На рис. 8.5 приведены зависимости электромагнитной силы, полученные расчетным путем по изложенной выше методике и снятые экспериментально. Сопоставление результатов показывает, что расчетные значения хорошо подтверждают экспериментальную зависимость.

На рис. 8.6 приведено расчетное распределение индукции в рассматриваемой системе, что интересно в тех случаях, когда электромагнитная система применяется в качестве датчика магнитного поля. Характеристики получены с помощью разработанного алгоритма. Часто для увеличения тягового усилия электромагнита при сохранении характера тяговой характеристики на обмотку намагничивания устанавливают кожух. Влияние кожуха на интегральные характеристики электромагнита может быть оценено по расчетным зависимостям.

§ 8.5. Расчет магнитного поля методом конечных элементов

В последние годы в различных областях техники распространен метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод применим для геометрически сложных областей, неоднородных и нелинейных сред.

Для выяснения существа МКЭ считаем, как и ранее, задачу стационарной, кривые намагничивания ферромагнитных материалов — однозначными, токи — равномерно распределенными по токонесущим областям. Считаем известной геометрию электромагнитной системы.

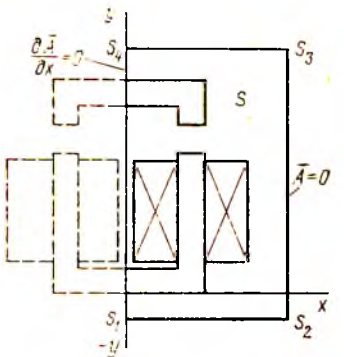


Рис. 8.7. Электромагнит с плоскопараллельным магнитным полем

Применение МКЭ для расчета магнитного поля покажем на примере электромагнита подвеса П-образного типа (рис. 8.7), соотношение геометрических размеров которого (отношение длины полюса к его ширине) позволяет считать поле плоскопараллельным и зависящим от двух пространственных координат: x и y.

С учетом сказанного магнитное поле описывается системой уравнений [см. (8.18)] $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}$; $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$; $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$. Здесь μ — абсолютная магнитная проницаемость стали; $\mu=f(\mathbf{B})$.

Введем векторный магнитный потенциал с помощью соотношений

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}=\mathbf{B},\ \operatorname{div} \mathbf{A}=0. \tag{8.47}$$

Подставив (8.47) в (8.18), получим

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right)=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}+\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right]=$$
$$=\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A})-\frac{1}{\mu}\Delta\mathbf{A}+\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right]=\mathbf{j}. \tag{8.48}$$

В декартовой системе координат, выполнив дифференциальные операции и некоторые преобразования в (8.48), можно найти следующее нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее распределение магнитного поля с учетом магнитных свойств среды:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-j_z, \tag{8.49}$$

где $A_z=A$; $j_z=j$; $\nu=1/\mu$.

В МКЭ не решается непосредственно уравнение (8.49), вместо этого на основе вариационного исчисления определяется функция A, минимизирующая некоторый функционал, составленный на основе рассмотрения энергетических соотношений магнитного поля, распределенного в области

$$F=\int_S\left(\int_0^{B_x}\nu B_x dB_x+\int_0^{B_y}\nu B_y dB_y\right)dS-\int_S AjdS. \tag{8.50}$$

Применение метода начинается с разбиения области S на конечные элементы, например треугольники, причем их число, размеры и расположение произвольны (рис. 8.8). Стороны треугольников должны совпадать с границами раздела сред с различными свойствами. Внутри каждого элемента искомая функция представляется в виде полинома невысокой степени (например, первой)

$$A=a+bx+cy. \tag{8.51}$$

Коэффициенты полиномов выражаются через значения функции в вершинах конечных элементов:

$$a=f_1(A_i,\ A_m,\ A_k);\ b=f_2(A_i,\ A_m,\ A_k);\ c=f_3(A_i,\ A_m,\ A_k),$$

где i, m, k — номера вершин треугольника.

В вершинах треугольника i, m, k определяем значения векторного магнитного потенциала:

$$A_i=a+bx_i+cy_i;\ A_m=a+bx_m+cy_m;\ A_k=a+bx_k+cy_k.$$

В результате решения приведенной системы уравнений могут быть определены коэффициенты

$$\left.\begin{aligned} a&=(a_iA_i+a_mA_m+a_kA_k)/(2S_\alpha);\\ b&=(b_iA_i+b_mA_m+b_kA_k)/(2S_\alpha);\\ c&=(c_iA_i+c_mA_m+c_kA_k)/(2S_\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (8.52)$$

В (8.52) обозначено:

$$a_i=x_my_k-x_ky_m,\ b_i=y_m-y_k,\ c_i=x_k-x_m;$$
$$a_m=x_ky_i-x_iy_k,\ b_m=y_k-y_i,\ c_m=x_i-x_k;$$
$$a_k=x_iy_m-x_my_i,\ b_k=y_i-y_m,\ c_k=x_m-x_i.$$

Площадь треугольника $S_\alpha=(x_ib_i+x_mb_m+x_kb_k)/2$.

В записанных выше соотношениях x и y с индексами обозначены координаты вершин треугольников.

С учетом выражений коэффициентов значение векторного потенциала внутри треугольника можно записать в виде

$$\mathbf{A}=[(a_i+b_ix+c_iy)\ A_i+(a_m+b_mx+c_my)\times$$
$$\times A_m+(a_k+b_kx+c_ky)\ A_k]/(2S_\alpha).$$

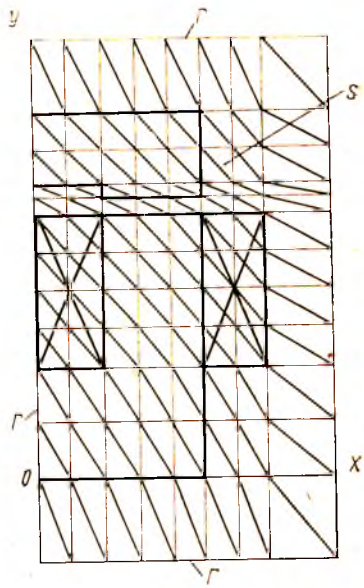


Рис. 8.8. Разбиение расчетной области на конечные элементы

Для составляющих вектора магнитной индукции по осям x и y в треугольнике α, используя (8.52) и соотношение $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, можно получить:

$$B_x=\partial\mathbf{A}/\partial y=(c_iA_i+c_mA_m+c_kA_k)/(2S_\alpha), \qquad (8.53)$$

$$B_y=-\partial\mathbf{A}/\partial y=-(b_iA_i+b_mA_m+$$
$$+b_kA_k)/(2S_\alpha). \qquad (8.54)$$

Считая электромагнит симметричным относительно оси y, разделим его на две равные части и рассчитаем магнитное поле одной из них. На границах области расчета S имеют место следующие граничные условия:

на ломаной $S_1S_2S_3S_4$ — $\mathbf{A}=0$;

на прямой S_4S_1 — $\partial\mathbf{A}/\partial x=0$.

Записав условия минимума функционала, являющегося функцией указанных значений A_i, A_m, A_k, получаем систему алгебраических уравнений для определения значений $\mathbf{A}$ в вершинах:

$$\partial F/\partial p=\partial\sum_{\alpha=1}^{n}(F^\alpha)/\partial A_p=0;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ v, \qquad (8.55)$$

где F^α — вклад треугольника α в общий функционал; n — число треугольников; v — число неизвестных (вершин треугольников).

Для каждого треугольника можно получить выражения:

$$\frac{\partial F^a}{\partial A_i}=\int\limits_{S_a}\left[\nu\left(\frac{\partial}{\partial A_i}\int\limits_0^{B_x}B_x dB_x+\frac{\partial}{\partial A_i}\int\limits_0^{B_y}B_y dB_y\right)-j\frac{\partial A}{\partial A_i}\right]dS_a=$$

$$=\int\limits_{S_a}\left\{\nu\left[\frac{\partial}{\partial B_x}\left(\int\limits_0^{B_x}B_x dB_x\right)\frac{dB_x}{\partial A_i}+\frac{\partial}{\partial B_y}\left(\int\limits_0^{B_y}B_y dB_y\right)\frac{\partial B_y}{\partial A_i}\right]-j\frac{\partial A}{\partial A_i}\right\}dS_a=$$

$$=\int\limits_{S_a}\left[\nu\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial A_i}+B_y\frac{\partial B_y}{\partial A_i}\right)-j\frac{\partial A}{\partial A_i}\right]dS_a=\int\limits_{S_a}\left\{\nu\times\right.$$

$$\times\left[\frac{c_iA_i+c_mA_m+c_kA_k}{2S_a}\left(\frac{c_i}{2S_a}\right)-\frac{b_iA_i+b_mA_m+b_kA_k}{2S_a}\left(-\frac{b_i}{2S_a}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-j\frac{a_i+b_ix+c_iy}{2S_a}\right]\right\}dS_a=\frac{\nu}{4S_a}[(c_i^2+b_i^2)A_i+(c_ic_m+b_ib_m)A_m+$$

$$+(c_ic_k+b_ib_k)A_k]-j\frac{S_a}{3}=0. \qquad (8.56)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial F^a}{\partial A_m}=\frac{\nu}{4S_a}[(c_ic_m+b_ib_m)A_i+(c_m^2+b_m^2)A_m+(c_mc_k+b_mb_k)A_k]-j\frac{S_a}{3}=0, \qquad (8.57)$$

$$\frac{\partial F^a}{\partial A_k}=\frac{\nu}{4S_a}[(c_ic_k+b_ib_k)A_i+(c_mc_k+b_mb_k)A_m+(c_k^2+b_k^2)A_k]-j\frac{S_a}{3}=0. \qquad (8.58)$$

На основе (8.56) — (8.58) образуется система нелинейных алгебраических уравнений (8.55), решение которой дает значения **A** в вершинах треугольников. Эти величины **A** минимизируют функционал (8.50) и поэтому являются решением уравнения (8.49).

Для решения системы (8.55) используется *метод Ньютона*, обеспечивающий быструю сходимость при удачном выборе начального приближения. Решение системы (8.55) вида

$$f_l(A_1, A_2, \ldots, A_v)=0,\ l=1, 2, \ldots, v,$$

заменяется последовательным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$J^i\Delta A_l^i=f_l^i(A_1, A_2, \ldots, A_v), \qquad (8.59)$$

где J^i — якобиан функций $f_1, f_2, \ldots, f_v$ по переменным $A_1, A_2, \ldots, A_v$, построенный на i-й итерации (последовательном приближении); $f_l^i(A_1, A_2, \ldots, A_v)$ — вектор невязок системы на i-м приближении; ΔA_l^i — вектор поправок, вычисляемый при решении (8.59) и позволяющий найти уточненные значения переменных $A_l^{i+1}=A_l^i+\Delta A_l^i$.

Система (8.59) на каждой итерации метода Ньютона решается методом Гаусса.

Для расчета тяговых и нагрузочных статических характеристик электромагнита, для каждого заданного значения рабочего воздушного зазора и МДС обмотки необходимо знать значение тягового усилия, определяемое по известному распределению магнитного поля в расчетной области *по формуле Максвелла*:

$$\mathbf{F}_{эл}=\frac{1}{\mu_0}\int\limits_S\int\left[(\mathbf{Bn})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}B^2\mathbf{n}\right]dS, \qquad (8.60)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей якорь электромагнита; $\mathbf{B}$ — индукция на поверхности S (со стороны внешней нормали).

Для двухмерной задачи тяговое усилие, приходящееся на единицу длины электромагнита,

$$F_{эл}=\frac{1}{\mu_0}\int\limits_l\left[(\mathbf{Bn})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}B^2\mathbf{n}\right]dl,$$

где l — кривая, ограничивающая якорь электромагнита.

Составляющие силы тяги:

$$F_{элx}=\frac{1}{\mu_0}\int\limits_l\left[(B_xn_x+B_y\tilde{n}_y)\,B_x-\frac{1}{2}B^2n_x\right]dl;$$

$$F_{элy}=\frac{1}{\mu_0}\int\limits_l\left[(B_xn_x+B_yn_y)\,B_y-\frac{1}{2}B^2n_y\right]dl.$$

Переходя к интегральной сумме, получим

$$F_{элx}=\frac{1}{\mu_0}\sum_{g=1}^{f}\left[\left(B_x^gn_x^g+B_y^gn_y^g\right)B_x^g-\frac{1}{2}B_g^2n_x^g\right]\Delta l_g; \qquad (8.61)$$

$$F_{элy}=\frac{1}{\mu_0}\sum_{g=1}^{f}\left[\left(B_x^gn_x^g+B_y^gn_y^g\right)B_y^g-\frac{1}{2}B_g^2n_y^g\right]\Delta l_g, \qquad (8.62)$$

где f — число треугольных элементов, извне примыкающих к кривой, ограничивающей якорь; B_x^g, B_y^g — составляющие вектора магнитной индукции в g-м треугольнике, определяемые по (8.53)—(8.54); $B_g=\sqrt{(B_x^g)^2+(B_y^g)^2}$ — модуль вектора магнитной индукции; Δl_g — величина g-го элемента кривой интегрирования l; n_x^g, n_y^g — составляющие единичной нормали к Δl_g.

На рис. 8.9 дана укрупненная структурная схема расчета нагрузочных и тяговых характеристик электромагнита. Исходными данными являются тип и размеры электромагнита, сечение обмоточ-

ного провода и число витков обмотки w, кривая намагничивания $B(H)$, массивы витков обмотки и величин рабочего зазора. Для каждого из заданных значений I и δ проводится расчет $F_{эл}$ и Ψ. Следует отметить, что токи чередуются в порядке возрастания, т. е. каждое следующее значение тока $I_{i+1}=I_i+\Delta I$, а величины зазоров δ_i — в порядке убывания: $\delta_{i+1}=\delta_i-\Delta\delta$, причем значения векторного магнитного потенциала **A**, полученные на предыдущем шаге (например, при I_i), являются исходными при определении $F_{эл}$ и Ψ на последующем шаге (при I_{i+1}).

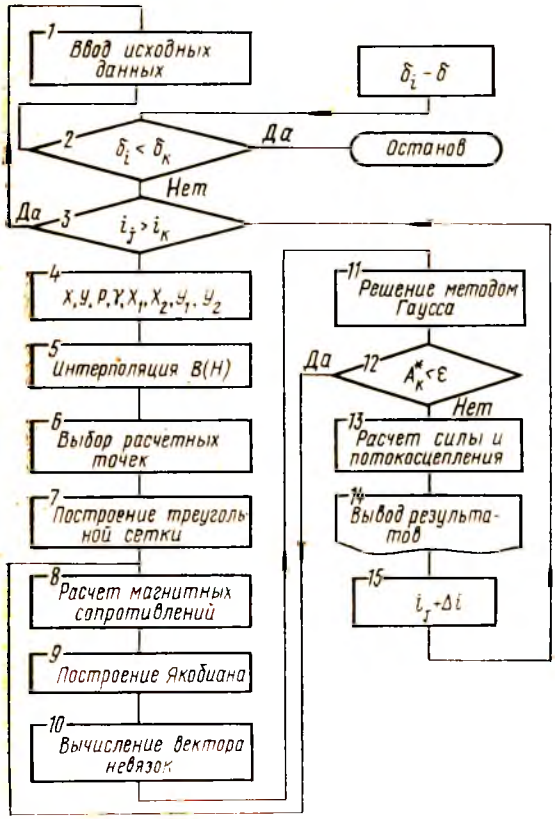


Рис. 8.9. Укрупненная структурная схема программы ЦВМ для расчета магнитного поля методом конечных элементов

В начале расчета для I_i и δ_i на основе исходных данных определяются значения плотности тока обмотки j, размеры расчетной области (x, y) и треугольных элементов (длина основания x_1, x_2 и высота y_1 y_2) и некоторые другие вспомогательные данные, необходимые для выбора расчетных точек и построения треугольной сетки (блок *4*). Блок *5* осуществляет преобразование исходной кривой $B(H)$ в кривую $\nu(B)$ и аппроксимацию последней на отдельных участках — кубическим полиномом вида

$$\nu = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3,$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 определяются на основе требования непрерывности функции $\nu(B)$, ее первой и второй производных в местах стыковки отдельных участков.

На следующем этапе (блоки *6*, *7*) расчетная область S разбивается на треугольные элементы. При этом необходимо выполнять условия: 1) сетка должна быть более густой в зоне рабочего воздушного зазора и в магнитопроводе; 2) каждый треугольный элемент должен располагаться в одной подобласти с определенными физиче-

скими свойствами (якорь, ярмо, обмотка, воздух). На следующем этапе (блок *8*) для каждого треугольного элемента определяются величины ν из аппроксимирующей зависимости $\nu(B)$. Значение индукции **B** рассчитываются по известным значениям векторного по-

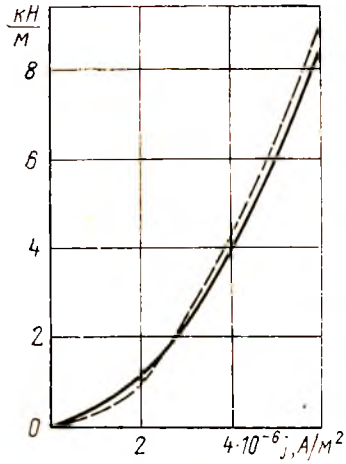


Рис. 8.10 Сравнение расчетных (———) и экспериментальных (— — —) данных

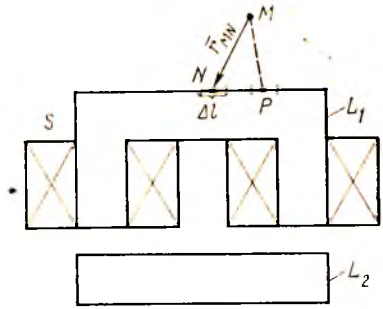


Рис. 8.11. К расчету магнитного поля комбинированным методом

тенциала **A** в каждой расчетной точке. Решение системы (8.55) осуществляют блоки *9—12* в следующем порядке:

1) определяются частные производные по A_i (модуль потенциала в расчетной точке) от функций $f_1, f_2, \ldots, f_v$ и формируется якобиан;

2) вычисляется вектор невязок $f_l^i(A_1, A_2, \ldots, A_v)$;

3) система (8.59) решается методом Гаусса, определяются вектор поправок ΔA_l^i и новое значение вектора $A_l^{i+1} = A_l^i + \Delta A_l^i$;

4) проверяется условие $(A_{l+1}^i - A_l^i)/A_l^i \leqslant \varepsilon_A$, где ε_A — заданная погрешность определения A_l. Если условие выполняется, то осуществляется переход к блоку *13*, если не выполняется, расчет повторяется начиная с блока *8*.

По формулам (8.61)—(8.62) рассчитываются составляющие тягового усилия. Сравнение результатов расчета и эксперимента показало, что рассмотренный метод вполне пригоден для расчета магнитного поля электромагнита. Относительное отклонение полученных расчетных данных от опытных не превышало 5 % (рис. 8.10).

§ 8.6. Комбинированный метод расчета электромагнитных систем

Разберем метод, заключающийся в комбинированном использовании методов теории поля и теории цепей с целью повышения точности расчета потоков в зазоре и потоков рассеяния. Здесь теорию

цепей предлагается использовать лишь для расчета средних значений индукции и магнитного потенциала стальных частей магнитопровода. Для расчета потоков, выходящих из магнитопровода (ферромагнитной его части), решается краевая задача для уравнений электромагнитного поля. Рассмотрим электромагнитную систему, геометрия которой позволяет считать магнитное поле плоскопараллельным (рис. 8.11). Для области S, окружающей ферромагнетик и обмотку, имеем уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=0;\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0;\quad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H},$$

которые введением скалярного магнитного потенциала [см. уравнение (8.19)] могут быть сведены к уравнению Лапласа $\Delta\varphi_м=0$.

Считаем, что на поверхности стальных частей магнитопровода известен потенциал $\varphi_м$. Получим внешнюю краевую задачу для уравнения Лапласа. Наиболее эффективный метод решения задачи — метод интегральных уравнений, суть которого состоит в том, что краевая задача для дифференциального уравнения сводится к интегральному уравнению по границе области решения, что позволяет существенно понизить размерность задачи, т. е. сократить число неизвестных.

Для получения интегрального уравнения в нашем случае воспользуемся аналогией магнитного и электростатического полей.

Известно, что в некоторой точке M в вакууме в случае плоскопараллельного поля электрический потенциал заряженных тел

$$\varphi_э(M)=\int_L \sigma(N)\ln\frac{K}{r_{MN}}\,dl_N, \tag{8.63}$$

где $\sigma(N)=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}E_n=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\varphi_э}{\partial n}$ — величина, пропорциональная нормальной составляющей напряженности электрического поля E_n на границе L сечения заряженного проводящего тела в некоторой точке N; $r_{MN}=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$ — расстояние между точками M и N; $K=100r_{макс}$ — некоторая произвольная постоянная; $r_{макс}$ — максимальный размер системы тел, в нашем случае максимальное расстояние между точками границы ферромагнетиков L, объединяющей границы L_1 и L_2.

Учитывая аналогию электрического и магнитного поля, получим

$$\varphi_м(M)=\int_L \sigma_м(N)\frac{K}{r_{MN}}\,dL_N, \tag{8.64}$$

где $\sigma_м(N)=B_n/(2\pi\mu_0)$.

Устремим точку M к границе N. Тогда в (8.64) получим слева известный магнитный потенциал, а справа — неизвестную величину $\sigma_м$. Уравнение (8.64) при замене M на P (где P — точка на границе L) становится интегральным уравнением нашей задачи:

$$\varphi_м(P)=\int_L \sigma_м(N)\ln\frac{K}{r_{PN}}\,dL_N. \tag{8.65}$$

Решая это уравнение, найдем $\sigma_м(N)$. Теперь значение $\varphi_м$ или **H** в любой точке M области S может быть найдено по (8.65).

Поскольку нас будут интересовать лишь потоки, выходящие из стальных частей в воздух, можно ограничиться вычислением только $\sigma_м(N)$, т. е. $B_n(N)$.

Для составления алгоритма решения задачи выберем n точек P_j ($j=1, 2, \ldots, n$) на контурах сечений магнитной системы (рис. 8.11) и аппроксимируем контуры прямолинейными отрезками Δl_j. Точки выбираем на середине элементов Δl_j. Аппроксимируем распределение поверхностей плотности зарядов на контурах функций:

$$\sigma_м'(N)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{мi}\gamma_i(N), \qquad (8.66)$$

где $\sigma_{мi}=\sigma_м(N_i)=\text{const}$, $\gamma_i(N_i)=\begin{cases}1, & \text{если } N_i\in\Delta l_i;\\ 0, & \text{если } N_i\notin\Delta l_i.\end{cases}$

Подставляя (8.66) в (8.64) и считая уравнение (8.64) верным в каждой точке N_i, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sigma_{мi}=\varphi_{мi}, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

где $a_{ij}=\int\limits_{\Delta l_j}\ln\frac{K}{r_{N_iN}}\,dl_N.$

При ненасыщенных стальных частях магнитопровода магнитный потенциал считают изменяющимся линейно по длине стержней. При учете насыщения стали магнитопровода основная трудность заключается в определении распределения магнитного потенциала вдоль магнитопровода. Поэтому при расчете характеристик электромагнита с учетом падения магнитного потенциала и стали магнитопровода задача решается поэтапным уточнением.

На первом этапе для известного значения МДС обмотки, распределенной линейно по высоте стержней электромагнита, рассчитывается поле электромагнита без учета падения магнитного потенциала в стали магнитопровода, определяются величины B и распределение магнитных потоков в системе.

На втором этапе предполагается, что распределение магнитных потоков остается неизменным, уточняется распределение магнитных потоков по поверхности магнитопровода с учетом падения магнитного напряжения в стали. Далее этот процесс повторяется. Задача решается методом участков, т. е. магнитопровод разбивается на ряд участков, в пределах которых магнитный поток постоянен. Поток с боковой поверхности магнитопровода участка сосредоточивается в одной точке последнего.

Система уравнений, описывающая распределение потоков и магнитных потенциалов, в стержнях электромагнитов имеет вид

$$\Phi_i=\Phi_{i-1}+\Phi_{pi}; \quad \varphi_{мi}=\varphi_{м.\,i-1}+\Delta l_i[H(\Phi_i/S_{ст})-f_у],$$

где Φ_i, Φ_{i-1}, Φ_{pi} — соответственно магнитный поток и поток рассеяния i, $(i-1)$-го участков; $\varphi_{мi}$, $\varphi_{м.\,i-1}$ — магнитные потенциалы уча-

стков; $S_{ст}$ — площадь сечения стержня электромагнита; $H(\Phi_i/S_{ст})$ — напряженность магнитного поля на i-м участке, определяемая по кривой намагничивания материала; f_y — удельная МДС обмотки.

Аналогичные соотношения могут быть записаны для основания и якоря электромагнита.

Условие окончания итерационного процесса — отклонение значения магнитного потенциала в двух следующих друг за другом итерациях не должно превышать заданного уровня. Практически оказывается достаточным выполнить 3—4 итерации.

По изложенному выше алгоритму была составлена программа для ЭВМ «Минск-32», по которой рассчитывался электромагнит постоянного тока, имеющий две обмотки намагничивания, установленные на стержнях. Значения электромагнитной силы на полюс при зазоре $\delta = 10^{-2}$ м и средней индукции $B_{\delta ср} = 0{,}38$ Тл составила при расчете 250,3 Н, в опыте 248 Н, при зазоре $\delta = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ и $B_{\delta ср} = 0{,}2$ Тл при расчете 33,9 Н, в опыте 32,8 Н.

Эти результаты подтверждают достаточную достоверность алгоритма. Сила (на единицу длины магнита)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_{l_я} \left[(\mathbf{Bn})\,\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{n} \right] dl_n,$$

где l — длина контура сечения якоря.

ГЛАВА 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДУГОГАСИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

Дуговые явления, возникающие при отключении цепи электрическим аппаратом,— один из главных факторов, обусловливающих стабильность характеристик, долговечность и надежность работы аппарата. Конструкция контактно-дугогасительного узла во многом определяет кинематическую схему всего приводного механизма и габаритные размеры всего устройства. В электрической дуге при ее гашении протекают сложные процессы, не поддающиеся строгому математическому описанию. Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию электрической дуги, происходящие в ней физические процессы изучены недостаточно. Все это вынуждает при проектировании и расчете использовать полуэмпирические и эмпирические соотношения, многократно проверенные в результате специальных экспериментальных исследований и эксплуатации электрических аппаратов.

Рассмотрим методику определения основных дуговых и газокинетических характеристик автоматического воздушного выключателя [22], обладающего токоограничивающим эффектом. Как известно, при отключении короткозамкнутой цепи таким аппаратом ток к. з. не успевает достичь установившегося значения. Его величина ограничивается дугогасительным устройством автомати-

ческого выключателя, которое выполняется чаще всего в виде деионной решетки. При расчете определяют ограниченный ток к. з., давление в дугогасительной камере, температуру и энергию дуги в зависимости от времени.

В качестве исходных соотношений, представляющих математическую модель электрической дуги, приняты следующие:

$$U_m \sin(\omega t+\alpha+\varphi_{к.з})=L_{к.з}\frac{di}{dt}+R_{к.з}i+u_д(t), \tag{9.1}$$

$$u_д(t)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant t_1; \\ 0 \quad \text{при} \quad t_1<t\leqslant t_2; \\ u_{д1}(t-t_2)/(t_3-t_2) \quad \text{при} \quad t_2<t\leqslant t_3; \\ \dfrac{(u_{дм}-u_{д1})(t-t_3)}{t_4-t_3}+u_{д1} \quad \text{при} \quad t_3<t\leqslant t_4; \\ u_{дм} \quad \text{при} \quad t>t_4; \end{cases} \tag{9.2}$$

$$\frac{dP}{dt}=\frac{R}{V}\left\{\frac{cN}{c_V}-AP\Psi_д\sqrt{\frac{2}{R_д T_д}}[(\varkappa+1)T-\varkappa T_{д0}]\right\}; \tag{9.3}$$

$$\frac{dT_д}{dt}=\frac{R_д T_д}{PV}\left\{\frac{cN}{c_V}-AP\Psi_д\sqrt{\frac{2}{R_д T_д}}\varkappa(T_д-T_{д0})\right\}; \tag{9.4}$$

$$\Psi_д=\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\sqrt{\left(\frac{P_0}{P}\right)^{2/\varkappa}-\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\varkappa+1/\varkappa}}; \quad \varkappa=\frac{c_p}{c_v}; \tag{9.5}$$

$$N_д(t)=u_д(t)\,i(t); \tag{9.6}$$

$$M\frac{d^2l}{dt^2}=F_{пр}+F_{эду}. \tag{9.7}$$

Здесь $L_{к.з}$, $R_{кз}$ — индуктивность и активное сопротивление короткозамкнутой цепи; $u_д(t)$ — напряжение на дуге; M — приведенная масса контакта, кг; l — расстояние между расходящимися контактами, м; $F_{пр}$ — сила пружины, действующая на контакт при размыкании, Н; $F_{эду}$ — электродинамическая сила отталкивания контактов, Н.

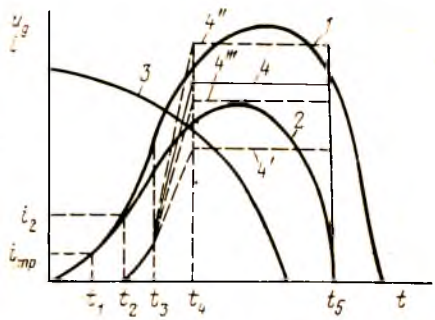


Рис. 9.1. Изменение тока дуги и напряжения на дуге во времени:

1 — неограниченный ток к. з.; *2* — ток дуги; *3* — напряжение цепи; *4—4'''* — напряжения на дуге при различных давлениях в камере автоматического выключателя

Уравнение (9.1) представляет собой дифференциальное уравнение электрической цепи с дуговым промежутком, к зажимам которой подведено синусоидальное напряжение. Уравнение (9.2) описывает изменение напряжения на дуге на различных этапах ее отключения. При отключении короткозамкнутой цепи автоматическим выключателем можно выделить следующие этапы (рис. 9.1):

) от момента возникновения к.з. ($t = 0$) до начала перемещения подвижного контакта $t = t_1$. Так как при $t < t_1$ контакты замкнуты, то на этом этапе дуга не возникает и $u_д(t) = 0$;

2) от момента трогания подвижного контакта $t = t_1$ до момента разрыва жидкометаллического мостика $t = t_2$, возникающего между контактами перед появлением дуги; на этом этапе дуга отсутствует и $u_д(t) = 0$;

3) от момента времени t_2 до момента подхода дуги к дугогасительной решетке t_3; на этом этапе дуга перемещается по расходящимся контактам, растягивается и напряжение на ней увеличивается до значения $u_{д1}$ (при $t = t_3$);

4) от момента времени t_3 до момента достижения напряжением на дуге максимального значения $u_{дм}(t_4)$ на этом этапе дуга последовательно входит в промежутки дугогасительной решетки;

5) от момента полного вхождения дуги в промежутки дугогасительной решетки (t_4) до момента перехода тока дуги через нулевое значение (t_5). В течение интервала времени $t_4 < t < t_5$ напряжение на дуге равно максимальному значению $u_{дм}$.

Напряжение дуги $u_{дм}$ в дугогасительной решетке выражается зависимостью, полученной на основе анализа литературных данных:

$$u_{дм} = (n_п + n_{рк} - 1)\, u_{оэ} + \sqrt{n_п + n_{рк} - 0{,}6}\; E'(I_{дм},\ P_м)\, \delta_{пл} \cdot 10^{-4}, \quad (9.8)$$

где $n_п$ — число пластин в дугогасительной решетке; $n_{рк}$ — число разрывных контактов ($n_{рк} = 2$); $u_{оэ}$ — приэлектродное падение напряжения, В (для больших токов можно принять $u_{оэ} \approx 20$ В); $E'(I_{дм},\ P_м)$ — зависимость градиента напряжения разделенных решеткой дуг от тока и давления; $\delta_{пл}$ — расстояние между пластинами решетки, м.

Сомножитель во втором слагаемом выражении (9.8), учитывающий число пластин, берется под корнем. Этим учитывается неравномерность распределения положения разделенных дуг в дугогасительной решетке. Зависимость $E'(I_{дм},\ P_м)$ представим в виде

$$E'(I,\ P) = E_0(I) f(P). \quad (9.9)$$

Зависимость градиента напряжения дуги в решетке от тока имеет вид

$$E_0(I) = F_I(I)\, I^{1/3}, \quad (9.10)$$

где величина I принимается равной максимальному значению тока дуги, а функция

$$F_I(I) = 1{,}185 + \frac{1}{2{,}2 + 0{,}65 \cdot 10^{-3} I}. \quad (9.11)$$

Подставляя (9.11) в (9.10), получаем

$$E_0(I) = \left(1{,}185 + \frac{1}{2{,}2 + 0{,}65 \cdot 10^{-3} I}\right) I^{1/3}, \quad (9.12)$$

где I — ток, А.

Функция $f(P)$ определяется из следующих соображений. Градиент напряжения электрической дуги

$$E_u = \rho j, \tag{9.13}$$

где

$$\rho = 1/\varkappa_1 \tag{9.14}$$

— удельное электрическое сопротивление дуги, Ом·м; j — плотность тока дуги, А/м²;

$$\varkappa_1 = \frac{4{,}74 \cdot 10^2 \lambda_0 T_д^{0{,}75}}{\sqrt{P}} e^{-5800 e u_i / T_д} \tag{9.15}$$

— удельная проводимость электрической дуги [16], (Ом·м)$^{-1}$; λ_0 — длина свободного пробега электронов; $T_д$ и P — температура, К, и давление дугового газа, Па; $e u_i$ — эффективный потенциал ионизации дугового газа.

Из этих соотношений следует функциональная зависимость

$$\rho = A_{д0} P^{0{,}5}, \tag{9.16}$$

где $A_{д0} = 1/(4{,}74 \cdot 10^2 \lambda_0 T_д^{0{,}75} e^{5800 e u_i / T_д})$.

Зависимость $j = f(P)$ может быть аппроксимирована функцией

$$j = j_0 P^{0{,}78}. \tag{9.17}$$

Подставляя (9.15) и (9.17) в (9.13) и учитывая, что $A_{д0} j_0 = E_0$, можно записать

$$E' = E_0 P^{0{,}78}. \tag{9.18}$$

С учетом (9.12) получим окончательное выражение для $E' = f(I, P)$:

$$E'(I, P) = \left(1{,}185 + \frac{1}{2{,}2 + 0{,}65 \cdot 10^{-3} I}\right) I^{1/3} P^{0{,}78}. \tag{9.19}$$

Окончательное выражение для $u_{дм} = f(I_{дм}, P_м)$ будет выглядеть так:

$$u_{дм} = 20(n_п + n_{рк} - 1) + \pm\sqrt{2(n_п + n_{рк} - 0{,}6)}\left(1{,}185 + \frac{1}{2{,}2 + 0{,}65 \cdot 10^{-3} I_{дм}}\right) I_{дм}^{1/3} P^{0{,}78} \delta_{пл} \cdot 10^{-4}. \tag{9.20}$$

Таким образом, максимальное напряжение на дуге $u_{дм}$ зависит от ряда параметров дугогасительной решетки, а также от максимальных значений ограниченного тока дуги и давления в камере. Из выражения (9.20) следует, что чем выше давление в камере, тем больше напряжение на дуге $u_{дм}$ и тем эффективнее ограничение тока к.з. На рис. 9.1 прямые *4*, *4′*, *4″* и *4‴* максимального напряжения $u_{дм}$ соответствуют давлениям $P_м < P'_м < P''_м < P'''_м$, где $P_м - P'''_м$ — максимальные значения давления в камере автомата, соответствующие промежуточным результатам итерационного процесса расчета $u_{дм}$.

Выражения (9.3)—(9.5) описывают зависимость изменения давления и температуры газов в камере автоматического выключателя во

времени. В этих уравнениях: $T_д$ — температура газов, К; V — объем камеры, м³; N — мощность электрической дуги, Вт; c — коэффициент, учитывающий долю мощности электрической дуги, расходуемую на нагрев газов в камере ($c=0{,}1$); c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, ккал/(кг·град); A — площадь выходного отверстия, м²; $\Psi_д$ — функция истечения газов (безразмерная); $T_{д0}$ — начальная температура в камере, К, ($T_{д0}=293$ К); $R_д$ — газовая постоянная, ккал/(кг·град) [для воздуха $R_д=0{,}069$ ккал/(кг·град)]; c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ккал/(кг·град).

Если пренебрегают зависимостью величин c_P, c_V, $\varkappa$ от давления, то принимают, что эти величины являются лишь функцией температуры. Зависимости c_P, $c_V=f(T_д)$ можно аппроксимировать уравнениями

$$c_P=0{,}23+0{,}45\cdot10^{-4}T_д \quad \text{при} \quad T_д<1500\ \text{К}; \tag{9.21}$$

$$c_P=0{,}3+0{,}95\cdot10^{-5}T_д \quad \text{при} \quad T_д>1500\ \text{К}; \tag{9.22}$$

$$c_V=c_P-0{,}07. \tag{9.23}$$

Уравнение (9.6) описывает выражение мощности электрической дуги. Уравнение (9.7) представляет собой процесс движения подвижного контакта.

Уравнение (9.1) решается аналитически, так как задан закон изменения напряжения на дуге (9.2). На первом и втором этапах отключения тока к.з. для $0\leqslant t\leqslant t_2$ в соответствии с (9.2) $u_д=0$, поэтому имеем

$$i(t)=I_m\left[\sin(\omega t+\varphi_{к.з})-\sin\varphi_0 e^{-t/\tau_{к.з}}\right], \tag{9.24}$$

где I_m — максимальное значение симметричного тока к.з., А;

$$\tau_{к.з}=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi_{к.з}}-1} \tag{9.25}$$

— электромагнитная постоянная цепи, с.

На третьем этапе для $t_2\leqslant t<t_3$, когда $u_д=u_{д1}(t-t_2)/(t_3-t_2)$, имеем

$$i(t)=I_m\left[\sin(\omega t+\varphi_{к.з})-\sin\varphi_{к.з}e^{-t/\tau_{к.з}}\right]-$$

$$-\frac{u_{д1}I_m}{U_m\cos\alpha\,(t_3-t_2)}\left\{(t-t_2)-\tau_{к.з}\left[1-e^{-(t-t_2)/\tau_{к.з}}\right]\right\}. \tag{9.26}$$

На четвертом этапе для $t_3<t\leqslant t_4$, когда $u_д=\frac{(u_{дм}-u_{д1})(t-t_3)}{t_4-t_3}+u_{д1}$, получаем

$$i(t)=I_m\left[\sin(\omega t+\varphi_{к.з})-\sin\varphi_{к.з}e^{-t/\tau_{к.з}}\right]-\frac{u_{д1}I_m}{U_m\cos\alpha\,(t_3-t_2)}\times$$

$$\times\left\{(t_3-t_2)-\tau_{к.з}\left[1-e^{-(t_3-t_2)/\tau_{к.з}}\right]e^{-(t-t_3)/\tau_{к.з}}\right\}-\frac{u_{д1}I_m}{U_m\cos\alpha}\times$$

$$\times\left[1-e^{-(t-t_3)/\tau_{к.з}}\right]-\frac{(u_{дм}-u_{д1})I_m}{U_m\cos\alpha\,(t_4-t_3)}\left\{(t-t_3)-\right.$$

$$\left.-\tau_{к.з}\left(1-e^{-(t-t_3)/\tau_{к.з}}\right\}\right. \tag{9.27}$$

На пятом этапе для $t>t_4$, когда $u_д=u_{дм}$, можно записать

$$i(t)=I_m\left[\sin(\omega t+\varphi_{к.з})-\sin\varphi_{к.з}\,e^{-t/\tau_{к.з}}\right]-\left\{\frac{u_{д1}I_m}{U_m\cos\alpha\,(t_3-t_2)}\times\right.$$

$$\times\left[(t_3-t_2)-\tau_{к.з}\left(1-e^{-(t_4-t_3)/\tau_{к.з}}\right)e^{-(t_4-t_3)/\tau_{к.з}}\right]-\frac{u_{д1}I_m}{U_m\cos\alpha}\times$$

$$\times\left[1-e^{-(t_4-t_3)/\tau_{к.з}}\right]-\frac{u_{дм}-u_{д1}}{U_m\cos\alpha\,(t_4-t_3)}\left[(t_4-t_3)-\right.$$

$$\left.\left.-\tau_{к.з}\left(1-e^{-(t_4-t_3)/\tau_{к.з}}\right)\right]\right\}e^{-(t-t_4)/\tau_{к.з}}-\frac{u_{дм}I_m}{U_m\cos\alpha}\times$$

$$\times\left(1-e^{-(t-t_4)/\tau_{к.з}}\right). \qquad (9.28)$$

В (9.26)—(9.28) входят временные параметры t_2, t_3, t_4 и значения напряжений на дуге $u_{д1}$ и $u_{дм}$. Момент времени $t_2=t_1+t_m$, где t_m — время существования жидкометаллического мостика, с.

Момент времени t_1 определяется из условия достижения током к.з. в цепи значения тока срабатывания автоматического выключателя [23]:

$$I_m\left[\sin(\omega t+\varphi_{к.з})-\sin\varphi_{к.з}\,e^{-t/\tau_{к.з}}\right]=\sqrt{c_1I_{ном}/K_{эду}},$$

где $I_{ном}$ — номинальный ток автоматического выключателя, А; c_1 — коэффициент, Н/А; $K_{эду}$ — электродинамический коэффициент, Н/А^2.

Значение времени t_m определяется из условия достижения контактом расстояния $l_{мин}=(2\div3)\cdot10^{-3}$ м, при котором происходит разрыв жидкометаллического мостика. Закон изменения расстояния между контактами можно определить, решив уравнение (9.7). Принимая во внимание, что действие электродинамической силы $F_{эду}$ отталкивания контактов аналогично по характеру действию силы отключающей пружины, можно принять, что суммарная сила, действующая на контакты, зависит лишь от расстояния между контактами и подчиняется зависимости

$$F=c_п(l_к-l),$$

где $c_п$ — коэффициент, Н/м; $l_к$ — расстояние между контактами в конечном разомкнутом положении, м; l — текущее расстояние между контактами, м.

Решая совместно уравнения (9.1)—(9.7), можно определить параметры дуговых и газокинетических процессов, происходящих в дугогасительной камере автоматического выключателя. При этом методом последовательных приближений находятся значения напряжения $u_{дм}$, тока $I_{дм}$, давления $P_м$ и температуры газов $T_{дм}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подгорный Э. В., Хлебников С. Д.* Моделирование и расчеты переходных режимов в цепях релейной защиты.— М.: Энергия, 1974.

2. *Анисимов Б. В., Голубкин В. Н.* Аналоговые вычислительные машины.— М.: Высшая школа, 1971.

3. *Голубинцев В. О., Купаев В. М., Синельников Е. М.* Эволюция универсальных цифровых вычислительных машин.— М.: Советское радио, 1981.

4. Инженерные расчеты на ЭВМ/*Троицкий В. А., Иванова И. М., Старостин И. А., Шелест В. Д.*— М.: Машиностроение, 1979.

5. *Светозарова Г. И., Сигитов Е. В., Козловский А. В.* Практикум по программированию на алгоритмических языках.— М.: Наука, 1980.

6. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах/Под ред. *Б. В. Анисимова.*— М.: Высшая школа, 1975.

7. *Калиткин Н. Н.* Численные методы.— М.: Наука, 1978.

8. *Никитенко А. Г.* Проектирование оптимальных электромагнитных механизмов.— М.: Энергия, 1974.

9. *Любчик М. А.* Оптимальное проектирование силовых электромагнитных механизмов.— М.: Энергия, 1974.

10. *Таев И. С.* Электрические аппараты управления.— М.: Высшая школа, 1969.

11. *Никитенко А. Г., Макагоненко Г. И., Никитенко Ю. А.* О проектировании электромагнитов на заданную тяговую характеристику.— Известия вузов. Электромеханика, 1980, № 3.

12. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.

13. *Бородулин Ю. Б., Зверев Ю. В.* Сравнение некоторых методов оптимального проектирования силовых трансформаторов.— Электротехника, 1974, № 4.

14. Основы теории электрических аппаратов/*Буль Б. К., Буткевич Г. В., Годжелло А. Г.* и др.— М.: Высшая школа, 1970.

15. *Сотсков Б. С.* Основы расчета и проектирования электромеханических элементов автоматических и телемеханических устройств.— М.: Энергия, 1965.

16. *Таев И. С.* Электрические аппараты (общая теория).— М.: Энергия, 1977.

17. *Тозони О. В.* Автоматизация электромагнитных расчетов.— Известия вузов. Электромеханика, 1972, № 12.

18. *Шимони К.* Теоретическая электротехника.— М.: Мир, 1964.

19. *Тозони О. В.* Метод вторичных источников в электротехнике.— М.: Энергия, 1975.

20. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.

21. Расчет на ЭВМ магнитных систем.— В сб.: Теория и расчеты электрических машин и аппаратов/*Бахвалов Л. А., Панюков Л. А., Никитенко А. Г.* и др.— Иваново: Изд-во Ивановского энергетического института, 1978.

22. Математическая модель для расчета на ЭВМ дуговых процессов в автоматических выключателях/*Таев И. С., Пархоменко С. В., Горшков Ю. Е., Рагулин И. А.*— Известия вузов. Электромеханика, 1980, № 3.

23. *Смага Н. Н., Кобозев А. С.* К расчету оптимальных параметров токоограничивающих элементов автоматических выключателей.— Киев.: Техника, 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава 1. Электронные вычислительные машины и их применение к расчету электрических аппаратов 5

§ 1.1. Аналоговые вычислительные машины 5
§ 1.2. Цифровые вычислительные машины 13
§ 1.3. Области применения ЭВМ и их технические характеристики 24
§ 1.4. Особенности расчета электрических аппаратов, связанные с применением вычислительных машин 31

Глава 2. Расчет элементов электрических аппаратов на АВМ 35

§ 2.1. Плавкие предохранители с закрытым патроном 35
§ 2.2. Реле времени с электромагнитным замедлением 39
§ 2.3. Дроссельный магнитный усилитель 42
§ 2.4. Автоматы гашения магнитного поля 44

Глава 3. Расчет статических характеристик электромагнитных механизмов на АВМ 48

§ 3.1. Магнитные цепи постоянного тока 48
§ 3.2. Магнитные цепи переменного тока 56
§ 3.3. Тяговое усилие электромагнита переменного тока с экраном 58

Глава 4. Расчет динамических характеристик электромагнитных механизмов на АВМ 62

§ 4.1. Динамические характеристики электромагнитов постоянного и переменного тока 62
§ 4.2. Моделирование динамики электромагнитов, включенных в искусственные схемы для изменения времени действия . . 68
§ 4.3. Расчет процесса включения электромагнита с учетом насыщения магнитопровода 79
§ 4.4. Учет изменения сопротивления обмотки вследствие нагрева 86
§ 4.5. Определение зависимости постоянной времени от перемещения якоря по заданной динамической тяговой характеристике 87

Глава 5. Расчет процесса включения электрического аппарата на АВМ 92

§ 5.1. Вибрации контактов электрических аппаратов 92
§ 5.2. Включение аппарата с прямоходовой кинематической схемой 94
§ 5.3. Включение аппарата с поворотной кинематической схемой 98
§ 5.4. Вибрации контактов аппарата с многомассовой контактной системой 101

Глава 6. Расчет и оптимальное проектирование элементов электрических аппаратов на ЦВМ 104

§ 6.1. Общие вопросы оптимального проектирования 104
§ 6.2. Постановка задачи оптимального проектирования и методы оптимизации 109

Стр.

Глава 7. Проектирование оптимальных электромагнитов постоянного тока 118

§ 7.1. Характеристики электромагнитов, выраженные через геометрические размеры 118
§ 7.2. Электромагнит с втяжным якорем и стопом 125
§ 7.3. Электромагнит с внешним поворотным якорем 131
§ 7.4. Электромагнит П-образного типа с плоским якорем . . 133
§ 7.5. Проектирование электромагнита с насыщенным магнитопроводом 135
§ 7.6. Оптимальное проектирование электромагнитов по заданным динамическим характеристикам 139
§ 7.7. Выбор расчетных значений индукции при проектировании электромагнитов постоянного тока с внешним поворотным якорем 148
§ 7.8. Исследование влияния геометрических соотношений на временные характеристики электромагнитов 152

Глава 8. Расчет на ЦВМ магнитных полей электрических аппаратов 159

§ 8.1. Общие вопросы расчета магнитных полей 159
§ 8.2. Метод конечных разностей (метод сеток) 163
§ 8.3. Метод вторичных источников (интегральных уравнений) 165
§ 8.4. Расчет магнитного поля электромагнита с незамкнутой магнитной цепью 169
§ 8.5. Расчет магнитного поля методом конечных элементов . . 175
§ 8.6. Комбинированный метод расчета электромагнитных систем 181

Глава 9. Математическая модель дугогасительного устройства . . . 184

Литература 190

Александр Григорьевич Никитенко

АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Заведующая редакцией Н. И. Хрусталева
Редактор В. И. Петухова
Художник В. З. Казакевич
Художественный редактор В. И. Мешалкин
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 4201

Изд. № Стд — 379. Сдано в набор 19.05.82. Подп. в печать 31.12.82. Т—23224. Формат 60×90 1/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 12 усл. печ. л. Усл. кр.-от. 12,38. 12,70 уч.-изд. л. Тираж 8000 экз. Зак. № 287. Цена 45 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная у., д. 29/14.

Типография изд-ва «Уральский рабочий», Свердловск, просп. Ленина, 49.