ТОМСКИЙ ИНСТИТУТ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

В. А. БОНДАРЬ, В. С. БАУШЕВ, А. В. КОБЗЕВ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Томск 1989

УДК 621.372.061

Бондарь В. А., Баушев В. С., Кобзев А. В. **Методы анализа и расчета электронных схем:** Учебное пособие. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. — 307 с. — 50 к. 1000 экз. 2403000000.

В книге рассмотрены вопросы моделирования электронных цепей и их компонентов. Приведены сведения по схемным функциям, частотным и временным характеристикам и их параметрам, чувствительности и устойчивости схем. Подробно изложены алгебраические и топологические операционные методы анализа электронных цепей (ненаправленные, смешанные и направленные графы), а также теоретико-множественные (метод структурных и обобщенных чисел). Для анализа ключевых цепей во временной области дается описание метода мгновенных значений с разрывными функциями воздействия, а также метод коммутационных функций и метод припасовывания. Изложен также метод переменных состояния для численного расчета линейных и нелинейных цепей, включающий методику непосредственного нахождения периодического решения.

Применение методов анализа и расчета электронных схем проиллюстрировано многочисленными примерами из области импульсной (аналоговой) и усилительной техники. Отдельно рассмотрены вопросы применения ЭВМ для расчета схемных параметров.

Для студентов радиоэлектронного профиля по специальности «Промышленная электроника», «Радиотехника» и т. п., а также аспирантов и инженерно-технических работников.

Рецензент—докт. техн. наук, проф. Л. М. Ананьев

Б $\frac{2403000000}{177(012)-89}$ 83—87

ВВЕДЕНИЕ

Методы анализа и расчета электронных схем постоянно развиваются и совершенствуются. Причин этому несколько. Во-первых, стремительно усложняется сам предмет анализа за счет:

— качественного перерождения элементной базы (от ламп к транзисторам, микросхемам, микропроцессорам, приборам функциональной электроники);

— возникновения новых принципов построения устройств по усилению, обработке электрических сигналов, преобразованию электрической энергии;

— расширения ассортимента приборов и схем с существенно нелинейными характеристиками (тиристоры, динисторы, однопереходные транзисторы, оптроны, лямбда-транзисторы, туннельные диоды, магнитотранзисторные элементы и пр.);

— внедрения новых дискретно-импульсных режимов работы электронных схем преобразования информации и электрической энергии.

Во-вторых, качественный скачок происходит в технических средствах анализа и расчета электронных схем (от логарифмической линейки до микрокалькуляторов, микрокомпьютеров, персональных и универсальных ЭВМ), которые могут теперь производить не только численные расчеты, но и решать сложные логические задачи.

В-третьих, повышаются требования к точности, масштабности и глубине анализа и расчета электронных схем, поскольку современная технология производства (например, микросхем) исключает их экспериментальную доводку, а требования к техническим и метрологическим параметрам электронных устройств постоянно растут.

В-четвертых, усложняется вид сигналов, воздействующих на схему за счет массового появления в их составе так называемых разрывных функций.

Цель анализа электронных схем состоит в получении наиболее полной информации об их свойствах, выявлении соотношений между входными и выходными параметрами, необходимыми для разработки алгоритмов расчета известных цепей и синтеза новых по заданным техническим требованиям.

Задача анализа электронных схем включает построение адекватной математической модели электронной схемы, определение по этой модели заданных функций и параметров, построение частотных, временных и других характеристик. На этой основе проводится исследование ограничений и предельных перспективных возможностей схемы по функциональному преобразованию входных сигналов, достижимой точности преобразования или формирования заданной формы сигнала, а также осуществляется поиск путей совершенствования схем с целью расширения их функциональных возможностей, повышения точности, стабильности, быстродействия, устойчивости и т. д.

Глубокий и тщательный анализ схем позволяет провести их четкую классификацию по структурным особенностям, определяющим общие закономерности преобразования электрических сигналов и другие свойства, сформулировать вполне определенные рекомендации по оптимальному выбору вариантов схем определенного класса по заданным техническим требованиям на проектируемое устройство. Это, как известно, является первым и поэтому очень важным этапом проектирования электронных устройств, не поддающимся пока желаемой формализации.

Исторически развитие методологии анализа и расчета электронных схем шло по двум направлениям. Во-первых, это анализ линейных моделей на базе операционного исчисления. В рамках этого направления излагаются материалы 2-й и 3-й глав. В 4-й главе — основы теории графов, имеющей весьма широкое использование в различных областях знания; затем на базе этой теории развивается методология анализа электронных схем. Методы анализа, развитые в рамках этого первого направления, не теряют своего значения и в настоящее время, обладая известным рядом достоинств.

Другое направление развития методологии связано с поисками возможностей для реализации нелинейных моделей. Вторая часть пособия содержит материал, укладывающийся в рамки этого направления. Бурное развитие второго направления вызвано прежде всего современным уровнем развития вычислительной техники и достижениями математики.

Глава 1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

1.1. Выбор математической модели электронной цепи

Проектирование электронных схем (или просто схемотехническое проектирование) сводится к решению группы задач синтеза и задач анализа. При этом под *структурным синтезом* понимают *создание* (интуитивное или формализованное) *какого-то варианта схемы,* не обязательно окончательного. В процессе проектирования синтез как задача может выполняться много раз, чередуясь с решением задач анализа. В *задачу анализа входит изучение свойств схемы по заданной в результате синтеза ее структуре, характеру входящих в нее компонентов и их параметров.* Перемежаясь друг с другом, анализ и синтез выступают в процессе проектирования в диалектическом единстве [1]. В технике схемотехнического проектирования различают внутренние, внешние и выходные схемные параметры.

Внутренние параметры W характеризуют отдельные компоненты проектируемого устройства. Их разделяют на *первичные внутренние (физико-технические) параметры,* которые отражают конструктивно-технологические и электрофизические свойства компонентов, и *вторичные внутренние (электрические) параметры,* которые характеризуют соотношения между токами и напряжениями на полюсах компонентов схемы. К первичным относятся геометрические размеры отдельных полупроводниковых областей, электрические характеристики полупроводниковых материалов и т. д. К вторичным внутренним параметрам — сопротивления резисторов, емкости конденсаторов и т. п. Связь электрических (вторичных) параметров компонентов с их физико-технологическими параметрами задается в виде аналитических выражений (уравнений), таблиц (матриц), схем замещения (микро- и макромоделей топологического типа) и др.

Внешние параметры Q характеризуют условия, в которых работает устройство (температура и влажность окружающей среды, начальное состояние устройства, параметры входного воздействия, конкретные значения времени или частоты, параметры и характер нагрузки, уровень помех, радиации и т. п.).

Выходные параметры (характеристики) F характеризуют количественные значения технико-экономических показателей и определяют функциональное назначение схемы. Выходные параметры также разделяют на *первичные и вторичные*. К первичным $X(t)$ относят токи и напряжения на полюсах компонентов схемы, узловые напряжения, контурные токи, выходные напряжения и токи ($X_{вых}(t)$). Иногда первичные выходные параметры называют фазовыми переменными.

Вторичными выходными (схемными) параметрами называют функции (*схемные функции*) относительно внутренних и первичных выходных параметров $F_i=F_i(X(t), X_{вых}(t), W)$. К схемным функциям в общем случае относят аналитические зависимости от внутренних параметров схемы и комплексной частоты, определяющие выходные сигналы схемы. Во временной области схемные параметры представляются в виде амплитудной, импульсной и переходной характеристик, а в частотной — амплитудно-частотными, фазочастотными и амплитудно-фазовыми характеристиками. К выходным параметрам схемы также относят параметры названных характеристик: длительность задержек и фронтов реакций схемы $X_{вых}(t)$ на входные воздействия $Q(t)$, входное и выходное сопротивление схемы в диапазоне частот или на фиксированной частоте; граничные частоты полосы пропускания; максимально допустимая величина помехи по входному воздействию; мощность рассеяния в элементах; амплитуда выходного сигнала $X_{вых\ max}(t)$ или его среднее значение и др.

После решения задачи структурного синтеза схемы и проведения анализа ее свойств, т. е. выходных (схемных) параметров на соответствие заданным, необходимо скорректировать внутренние параметры схемы. Это делается для того, чтобы либо максимально приблизиться к заданным значениям выходных параметров, либо в каком-то отношении некоторые из них даже значительно улучшить, либо выбрать такой вариант значений внутренних параметров, при котором наилучшим образом удовлетворяется какой-то заранее выбранный критерий качества (оптимизации) схемы (экономичность, технологичность, высокая помехоустойчивость, быстродействие, низкая стоимость и др.).

Указанная процедура коррекции внутренних параметров получила название *параметрический синтез*. Чаще всего параметрический синтез носит характер *параметрической оптимизации*, т. к. сводится к поиску именно такого варианта значений внутренних параметров схемы, который наилучшим образом удовлетворяет выбранному критерию оптимизации. Процесс параметрической оптимизации в общем осуществляется путем последовательного перебора некоторым образом выбираемых вариантов значений внутренних параметров схемы, анализа каждого из них, сравнения с предыдущими и затем выбора наилучшего. Таким образом, видим, что задача анализа схемы может решаться в процессе проектирования неоднократно. В этой связи различают *анализ одновариантный* и *анализ многовариантный*. Кроме процедуры параметрической оптимизации многовариантный анализ находит применение в процедурах решения задачи *статистического анализа* и задачи *анализа чувствительности*. Решение задачи статистического анализа показывает, с какой вероятностью будут выполняться условия работоспособности и заданные значения выходных параметров схемы, когда значения ее внутренних параметров имеют вероятностный разброс. Решение задачи анализа чувствительности определяет степень влияния изменения (нестабильности) внутренних и внешних параметров на изменения (нестабильность) выходных параметров схемы. Результаты решения этой задачи анализа затем могут быть использованы и в решении задачи параметрической оптимизации, так как дают информацию о том, какие параметры и в каком направлении надо изменять, чтобы быстрее найти оптимум.

Под *математической моделью схемы* электронной цепи мы понимаем математическое представление (система уравнений, формулы, правила или любые другие математические образы), отражающее с требуемой точностью и в соответствии с физическими законами процессы, протекающие в цепи, и позволяющее найти необходимые параметры и характеристики схемы.

Условия выбора математической модели определяются самыми различными, а порой и противоречивыми факторами. Как правило, чем сложней сам реальный объект или чем точнее и глубже требуется провести его исследование, тем сложнее в общем случае получается его математическое представление (описание). Последнее обстоятельство затрудняет, в свою очередь, работу с моделью. Разрешение этого противоречия требует известного искусства от исследователя в выборе предельно допустимого уровня абстракции путем отбрасывания всех несущественных факторов. Например, в некоторых случаях можно пренебречь сравнительно медленно или очень слабо изменяющимися переменными, их несильным взаимным влиянием, практически не определяющими конечные результаты. Особенно важен при этом согласованный с объектом и целью исследования выбор языка математического описания его модели. Именно на этом этапе должны быть обеспечены удобство восприятия и наиболее простой путь решения задачи. *Языком описания* выбранной математической модели определяется и степень ее последующего согласования с возможностями техники исследования. Так, для преимущественно качественного исследования простых схем необходим язык математического описания, наиболее тесно связанный со структурой объекта (топологией схемы), а результаты должны представляться в виде по возможности простых аналитических зависимостей или двумерных графиков и т. п. Точный и многосторонний анализ сложных объектов (схем), проводимый на ЭВМ, требует применения описания математической модели, удобного для постановки задачи анализа на ЭВМ и последующего численного ее решения с получением требуемых характеристик и параметров схемы за допустимое время счета.

Фундаментальной моделью электрических процессов в электронной цепи считают систему уравнений равновесия, составленную относительно переменных воздействия q_j и переменных реакции x_i:

$$q_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \; j = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.1}$$

При наличии в линейной схеме реактивных элементов уравнение носит дифференциальный характер, например:

$$\varphi_l \frac{d^l x}{dt^l} + \varphi_{l-1} \frac{d^{l-1} x}{dt^{l-1}} + \ldots + \varphi_1 \frac{dx}{dt} + \varphi_0 x = q(t), \tag{1.2}$$

где φ_0, φ_1, ..., φ_l и q — непрерывные однозначные функции t на интервале $0<t<\infty$, и φ_l не приближается к нулю на этом интервале. Переменная t есть действительная переменная времени. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при точно определенных границах для каждого $q(t)$ существует единственная функция $x(t)$, которая принимает данное значение в некоторый момент времени t_0 при $0\leqslant t_0\leqslant\infty$ и у которой первые $l-1$ производные непрерывные и имеют определенное значение при $t=t_0$. Такова в общих чертах основная теорема существования. Если $\varphi_i=\text{const}$, то получаем наиболее простой тип уравнения с постоянными коэффициентами.

Разрабатываемые математические модели могут оцениваться по следующим критериям: точность, экономичность и универсальность.

Классификация математических моделей электронных схем. По сложности (полноте охвата) различают модели компонентов, модели схем и модели систем, включающих несколько схем.

По характеру отображаемых свойств модели делятся на функциональные и топологические (структурные). Функциональные модели отражают процессы функционирования устройства. Чаще всего они записываются в виде системы уравнений. Топологические модели отражают только структурные особенности устройств. Они, как правило, имеют форму графов, списков векторов, матриц и отображают взаимное расположение элементов в пространстве, наличие связей между ними и т. д.

По способам получения функциональные модели делят на теоретические и формальные. Теоретические модели строят, используя физические законы (Ома, Кирхгофа). При этом система уравнений и ее коэффициенты имеют определенное физическое толкование. Формальные модели получают, рассматривая проявления свойств моделируемого устройства во внешней среде, т. е. методом «черного ящика», заимствованным в кибернетике.

По характеру зависимостей, т. е. по типу коэффициентов в уравнениях, модели делят на линейные и нелинейные.

В зависимости от мощности множества значений переменных модели различают как непрерывные и дискретные. В непрерывных моделях переменные непрерывны, поэтому множество вариантов решений имеет мощность континуума. Переменные дискретных моделей — дискретны, а множество решений счетно.

По форме связей между выходными внутренними и внешними параметрами различают модели алгоритмические (в виде систем уравнений в базисе узловых или контурных переменных) и аналитические (в виде явных зависимостей выходных параметров от внутренних и внешних).

По тому, учитывают ли модели инерционность процессов, различают модели статические (по постоянному току) и динамические (по переменному току).

1.2. Классификация электронных схем по типу уравнений, применяемых в их математических моделях

Электронная цепь в зависимости от характеристик входящих в нее компонентов может обладать самыми различными свойствами. Реальные зависимости между токами и напряжениями на ее полюсах в общем случае всегда нелинейны, достаточно сложны и носят в определенной степени статистический характер. В то же время **в зависимости от режима работы** устройства по току (напряжению) и по ряду внешних воздействий степень нелинейности характеристик входящих в нее компонентов может быть различной, а статистический характер параметров компонентов устройства в стационарных условиях его эксплуатации весьма мало выражен.

При формировании математической модели электронной цепи в зависимости от целей ее анализа и требуемой точности иногда вполне допустимо нелинейные зависимости между токами и напряжениями на полюсах ее компонентов заменить на линейные. В результате более точная и более сложная нелинейная модель заменяется менее точной, но более простой линейной моделью. Ниже дается традиционно сложившаяся классификация электронных схем с точки зрения их анализа, а именно по типу уравнений, составляющих их математические модели.

Линейные схемы. Приведенные выше линейные алгебраическое и дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами описывают схемы, в которых параметры всех компонентов можно считать постоянными. Модели таких схем в соответствии с теорией линейных дифференциальных уравнений обладают двумя очень важными с практической точки зрения свойствами. Это принцип наложения (суперпозиции) и принцип инвариантности взаимных отношений возмущения и реакции к интегрированию и дифференцированию.

Принцип наложения формулируется так: реакция линейной схемы т. е. схемы, описываемой линейной моделью, на действие суммы возмущений равна сумме реакций на действие каждого возмущения в отдельности. Пусть схема описывается соотношением $x = \varphi \cdot q$. Если на входе цепи действуют сигналы q_1 и q_2 по отдельности, то им соответствуют реакции $x_1 = \varphi q_1$ и $x_2 = \varphi q_2$. Если же на входе действует сумма этих сигналов $q = q_1 + q_2$, то реакция будет $x = \varphi (q_1 + q_2) = x_1 + x_2$.

Принцип инвариантности: в линейной системе соотношение между воздействием и реакцией остается неизменным при дифференцировании или интегрировании. Так, если q и x являются воздействием и реакцией линейной схемы, то dq/dt и dx/dt будут также возможными воздействием и реакцией для той же схемы, как и $d^n q/dt^n$ и $d^n x/dt^n$.

Практически важно запомнить, что реакции линейных схем с постоянными параметрами не содержат новых спектральных составляющих по отношению к спектрам воздействующих на схему сигналов.

К линейным схемам относят:

— электронные схемы, составленные из линейных компонент, т. е. компонент, токи и напряжения на полюсах которых всегда связаны между собой линейными зависимостями (пассивные компоненты);

— электронные схемы, включающие в свой состав так называемые квазилинейные компоненты (электронные компоненты — лампы, транзисторы, оптроны, операционные усилители и др.), т. е. компоненты, зависимости между токами и напряжениями на полюсах которых могут быть с определенной степенью допущения описаны линейными соотношениями. Такое возможно относительно указанных электронных компонент, когда они в анализируемых цепях используются в режимах так называемого малого сигнала. Причем чем меньше размах рабочих изменений токов и напряжений на полюсах электронной компоненты, тем выше точность аппроксимации его характеристик линейными функциями.

В технике линейные методы анализа находят самое широкое применение, поскольку имеется целый ряд электронных устройств, в которых все компоненты работают в линейном режиме (линейные усилители, импульсные устройства, линейные преобразователи напряжения в частоту и т. п.). Причем ряд существенно нелинейных импульсных устройств на некоторых временных интервалах работы также могут рассматриваться как линейные (квазилинейные).

Линейные параметрические схемы. Это схемы, в которых имеются компоненты с изменяющимися во времени параметрами под действием дополнительного (как правило) управляющего источника. Такие схемы описываются линейными уравнениями с переменными коэффициентами. Будучи линейными, параметрические схемы, а точнее их модели, обладают свойствами наложения и инвариантности. Однако в отличие от линейных схем с постоянными параметрами в них возникают новые спектральные составляющие при воздействии на вход схемы гармонических сигналов и при изменении ее параметров по аналогичному закону. Примерами таких схем являются схема с источником сигнала, последовательно включенным с угольным микрофоном, проводимость которого изменяется под действием звукового давления, а также различные преобразователи частоты, малошумящие параметрические усилители, магнито-транзисторные параметроны и т. п.

Нелинейные схемы. Содержат хотя бы одну компоненту, токи и напряжения на полюсах которой связаны нелинейной зависимостью. Такие цепи описываются нелинейными интегродифференциальными уравнениями, в которых отдельные коэффициенты при переменных не являются постоянными и зависят от самой переменной или ее производных. Принципиальным отличием нелинейных схем является неприменимость к ним в общем случае принципов наложения и инвариантности. Пусть реакция и воздействие связаны зависимостью $x=\psi q^2$ или $x=(\psi q)q$, где ψq — коэффициент, зависящий от q. Если на схему действует сложный сигнал $q=q_1+q_2$, то реакция $x=\psi(q_1+q_2)^2=\psi(q^2+2q_1q_2+q_2^2)$, что отличается от суммы реакций на действие каждой составляющей $x_1=\psi q_1^2$ и $x_2=\psi q_2^2$. Как видим, в нелинейных схемах трудно предсказать в общем случае результат воздействия суммы сигналов, если известны результаты воздействия каждой ее составляющей. Важным свойством нелинейных схем, на котором основаны многочисленные их применения, считается появление в реакции **новых спектральных составляющих** относительно спектрального состава воздействия.

Примерами нелинейных схем являются усилители, преобразователи, импульсные устройства в режиме так называемого большого сигнала. Чем больше размах рабочих напряжений и токов на полюсах электронной компоненты, тем больший участок характеристик электронного прибора используется в работе, а значит, тем большую нелинейность он вносит в работу устройства.

Нелинейно-параметрические схемы. К ним относят схемы, содержащие нелинейные компоненты и компоненты с переменными во времени параметрами. К подобным схемам относятся, например, устройства частотной модуляции, параметрические генераторы и др. Описываются подобные схемы нелинейными уравнениями с переменными во времени коэффициентами.

1.3. Топологические модели электронных цепей и способы их составления

Под *топологической моделью электронной цепи* понимают удобное для анализа изображение входящих в нее компонент и их взаимные соединения. Как известно, в *принципиальных схемах* электронных цепей (устройств) каждая компонента имеет свое условное изображение (рисунок, чертеж), определяемое соответствующим ГОСТом. Такое изображение удобно для функционального анализа работы цепи, например, с успехом используется для монтажа или поиска неисправностей (диагностики). Для математического анализа представление каждой компоненты цепи своим особым рисунком не имеет никакого значения, но загромождает изображение. Здесь важна лишь его функция, т. е. коэффициент связи между током и напряжением на его зажимах, а также взаимные соединения компонентов цепи (*топология*). Если обозначить все двухполюсные пассивные компоненты одинаково, например отрезками непрерывных линий, концы которых соответствуют узлам двухполюсника, то такие схемы будут отличаться в общем случае только числом элементов и способом их соединения между собой. Такое упрощенное представление анализируемой цепи совпадает с известным понятием *графа*, введенным в математику еще в XVIII веке (Эйлер, 1736 г.) и впервые использованным в теории цепей Кирхгофом в его знаменитой статье, опубликованной более сотни лет спустя (1857). Общность исходной цепи, ее принципиальной схемы и, наконец, графа этой цепи состоит в их *топологической эквивалентности*, хотя во всех других отношениях они совершенно различны. Свойства, инвариантные к непрерывным деформациям, называются топологическими (например, все гайки, шайбы и кольца независимо от материала, из которого изготовлены, размеров, веса, формы в топологическом смысле эквивалентны, т. к. имеют одну дырку).

На рис. 1.1 показаны примеры топологических моделей электрического моста: его принципиальная схема (рис. 1.1, *а*) и граф (рис. 1.1, *б*). Как видим, граф схемы моста отличается предельной простотой. В каче-

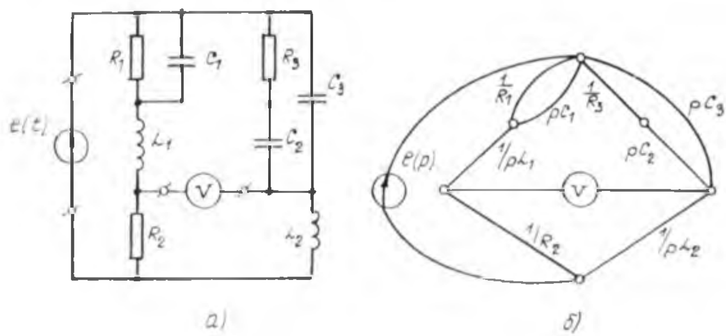


Рис. 1.1

стве весов его ветвей взяты в данном случае проводимости соответствующих ветвей схемы. В теории графов, однако, применяют свою терминологию, считая, что граф состоит из ребер (вместо ветвей) и вершин (вместо узлов в схеме). Более подробно о графах и их свойствах смотри в гл. 4. Каждой ветви (ребру) графа иногда дают (стрелочкой) направление, совпадающее с выбранным положительным направлением тока в ней. Многополюсную компоненту схемы отображают в виде полюсного графа или другими способами, рассмотренными в гл. 4.

Сложностью математической модели электронной схемы определяется трудоемкость анализа. От чего зависит сложность модели и как ее можно уменьшить? Очевидно, что сложность моделей зависит от топологии анализируемой схемы, т. е. от числа входящих в нее компонент и способа их соединения, а точнее от числа узлов и ветвей между ними. Так, если под сложностью линейной схемы понимать число уравнений в системе, описывающей ее, то можно утверждать, что сложность прямо пропорциональна числу узлов (или контуров) схемы цепи. Сложность же моделей нелинейных схем определяется, кроме того, еще и видом нелинейных зависимостей электронных и других компонент, входящих в анализируемое устройство. Для уменьшения сложности математической модели схемы естественно прибегнуть к упрощению (сокращению) топологической модели цепи. Здесь уместно заметить, что анализ цепи проводится, разумеется, не по самой цепи, а по ее топологическому представлению в виде схемы или графа. Вот здесь-то при составлении схемы или графа цепи и следует использовать все возможные резервы по их упрощению путем пренебрежения несущественными компонентами и их связями. Рассмотрим известные приемы упрощения.

Составление нескольких топологических моделей для решения задачи анализа. В этом приеме исходят из известного факта, что лучше решить две простые системы уравнений, чем одну сложную. Тогда и результаты анализа представляются более наглядно и естественно.

Топологическая модель цепи по постоянному току (статическая модель). Анализ цепи обычно разделяют на две независимые задачи: анализ цепи по постоянному току (в статике) и анализ цепи по переменному току (в динамике). Смысл такого разделения состоит в том, что наличие в цепи электронных (оптоэлектронных) компонент требует для обеспечения правильного режима работы запитать их постоянными токами или напряжениями, прикладываемыми к полюсам. В зависимости от требуемого режима работы каждой электронной компоненты (линейный, нелинейный — A, B, C, D и др.) выбирается соответствующая рабочая точка на ее выходных (входных, переходных) характеристиках. Рекомендации по выбору рабочей точки и сама процедура выбора рассматриваются в курсах, посвященных изучению конкретных классов цепей (усилители, генераторы, преобразователи и др.), поскольку являются специфичными, что затрудняет их рассмотрение с общих позиций. Задача анализа цепи по постоянному току состоит в получении математических выражений, связывающих токи или напряжения на полюсах электронных компонент с параметрами пассивных компонент и величинами источников напряжения (тока) питания. Далее по этим выражениям проводится расчет параметров пассивных компонент (резисторов), что и обеспечивает заданный режим работы каждой электронной компоненты. Топологические модели цепей по постоянному току получаются путем исключения из принципиальных схем цепей конденсаторов, закорачивания индуктивностей, если последние по своим параметрам близки к идеальным, т. е. имеют сравнительно очень большое (для конденсатора) или очень малое (для индуктивности) сопротивление постоянному току. При анализе измерительных цепей иногда приходится с целью тщательного исследования погрешностей, вносимых цепями, учитывать паразитные сопротивления реактивных компонент. В результате топологические модели цепей по постоянному току получаются довольно простыми. Математические модели таких схем представляются в виде системы алгебраических уравнений.

Топологическую модель цепи по переменному току (динамическая модель) составляют для той же электронной цепи с учетом переменных составляющих токов и напряжений. При этом ориентируются на ту область частот, в которой находится спектр входного сигнала. Процедура составления топологической модели по переменному току состоит в упрощении исходной схемы цепи путем закорачивания источников напряжения питания электронной цепи, поскольку, благодаря их большой выходной емкости, сопротивление источников переменному току предполагается очень низким. При наличии в цепи источников тока, не имеющих переменной составляющей, их также можно удалить из схемы, но путем разрыва соответетствующей цепи, так как сопротивление источника тока предполагается очень высоким. Для упрощения схемы можно также закорачивать межкаскадные развязывающие конденсаторы, конденсаторы фильтров и другие, из назначения которых известно, что их емкость должна выбираться сравнительно большой, дабы они имели относительно низкое сопротивление переменному току во всем диапазоне рабочих частот. При наличии в цепи заградительных индуктивностей (дросселей) и других, из назначения которых следует, что их индуктивность должна выбираться достаточно большой, чтобы оказывать высокое сопротивление переменному току на рабочих частотах, их следует исключить из схемы путем разрыва соответствующих соединительных цепей.

В некоторых случаях прибегают к составлению нескольких топологических моделей, соответствующих режиму работы на низких, средних и высоких частотах, что также оправдывается целью упрощения анализа.

Топологические модели для цепей импульсного действия. При анализе импульсного устройства (генератор пилообразного напряжения, мультивибратор, триггер, компаратор, инвертор и т. п.) также используют несколько топологических моделей. Каждая из таких моделей должна соответствовать определенному состоянию ключей устройства во времени, т. е. этапу (интервалу) работы устройства со всеми вытекающими отсюда упрощениями его исходной схемы. Таким образом, исходная схема устройства разбивается на ряд подсхем с постоянной структурой, соответствующей определенному состоянию всех ключевых элементов. Затем для каждой подсхемы с постоянной структурой составляется своя топологическая модель. Например, работа генератора пилообразного напряжения разделяется на три этапа: формирование прямого хода, формирование обратного хода и этап ожидания. При составлении трех топологических моделей учитываются состояние ключей, начальные условия на реактивных компонентах, режим работы по постоянному или переменному току на каждом этапе.

Пример 1.1. Составить топологические модели в виде эквивалентных схем усилителя, принципиальная электрическая схема которого показана на рис. 1.2, *а*. Эквивалентная схема по постоянному току показана на рис. 1.2, *б*, где R_i — внутреннее сопротивление источника питания. Оно включается в схему, очевидно, тогда, когда его величина сравнима с сопротивлением резисторов R_1, R_2, R_3, что встречается весьма редко. Эквивалентная схема усилителя по переменному току приведена на рис. 1.2, *в*. При ее составлении учитывалось, что сопротивление переменному току конденсаторов C_1, C_3 и C_4 в сравнении с сопротивлениями других компонент цепи достаточно мало. Так, конденсаторы C_1 и C_4 считаются здесь межкаскадными (разделительными), а C_3 — фильтрующим. Его емкость, как известно из теории усилителей, выбирается так, чтобы он полностью шунтировал резистор R_3 в диапазоне рабочих частот усилителя.

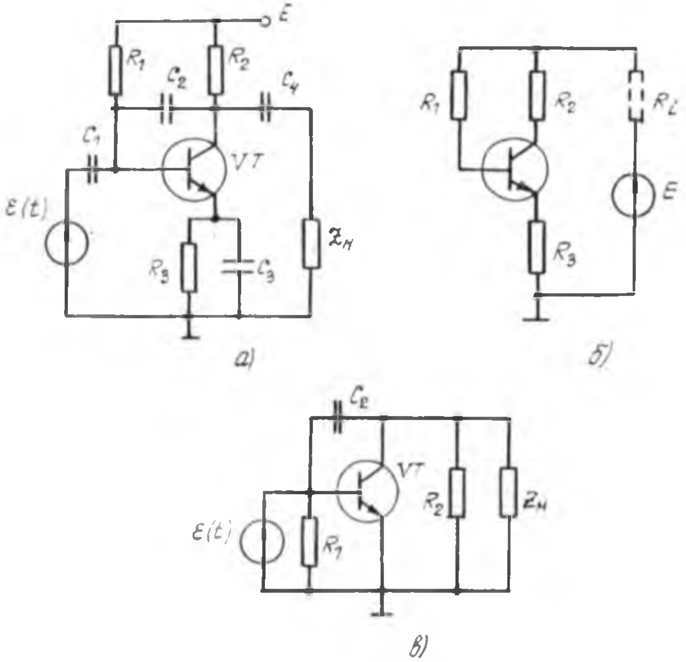


Рис. 1.2

Пример 1.2. Составить топологическую модель генератора пилообразного напряжения с последовательной положительной обратной связью, принципиальная электрическая схема которого показана на рис. 1.3, *а*. На рис. 1.3, *б* показана эквивалентная схема генератора на этапе формирования прямого хода, т. е. линейной части пилообразного напряжения. На этом этапе работы генератора ключи на транзисторе $V1$ и диодах $V2$, $V4$ заперты, поэтому из схемы исключены, источник питания E закорочен. Он в этот момент питает только эмиттерный повторитель на транзисторе $V3$. Заряд формирующего конденсатора C_1 осуществляется от напряжения, накопленного к этому моменту на конденсаторе C_2. На рис. 1.3, *в* и *г* показаны эквивалентные схемы, соответствующие этапу формирования обратного хода, который, как видим, разбивается, в свою очередь, на два периода. По схеме на рис. 1.3, *в* происходит разряд конденсатора C_1 через сопротивление $r_{кл}$ открытого транзистора $V1$. При этом транзистор $V3$ продолжает находиться в активном режиме, конденсатор C_2 по-прежнему разряжается небольшим током через резистор R_1 и т. д. По окончании разряда C_1 открывается диод $V2$, и эквивалентная схема изменяется (рис. 1.3, *г*). Теперь запира-

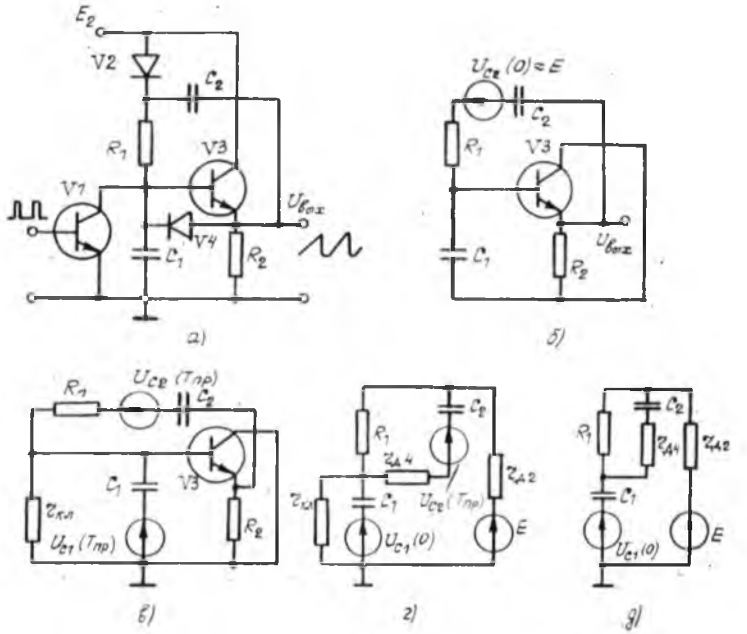


Рис. 1.3

ется транзистор эмиттерного повторителя $V3$ и начинается период восстановления заряда на конденсаторе C_2 от источника E через сопротивления открытых диодов $r_{д2}$, $r_{д4}$ и открытого транзистора $V1$—$r_{кл}$. На рис. 1.3, *д* показана эквивалентная схема, соответствующая короткому начальному периоду в формировании прямого хода. Здесь транзистор $V1$, управляемый внешним импульсным генератором, уже заперт (поэтому из схемы исключен), а отключающий диод $V2$ еще находится в проводящем состоянии, так же как и диод $V4$. В запертом состоянии остается и транзистор $V3$, поэтому положительная обратная связь, обеспечивающая высокую линейность заряда конденсатора C_1, пока не действует. Заряд конденсатора C_1 проходит через резисторы R_1 и $r_{д2}$. Как только напряжение на C_1 увеличится до напряжения отпирания транзистора $V3$, включается в работу эмиттерный повторитель и на выходе генератора появляется выходное напряжение, которое приводит к запиранию диода $V2$. С этого момента работа генератора снова происходит по эквивалентной схеме, показанной на рис. 1.3, *б*.

1.4. Схемы замещения (микро- и макромодели) компонент электронных цепей

Точность топологического представления цепи, т. е. адекватность эквивалентной схемы или графа цепи, зависит от правильного выбора схем замещения (моделей) ее компонентов. Цель настоящего раздела — рассмотреть различные по степени точности схемы замещения (модели) компонентов электронной цепи. Выбор моделей определяется требуемой точностью анализа цепи и не должен ни в коем случае делаться, как говорится, с запасом. Выше указывалось, что топологическая модель цепи должна быть минимальна с тем, чтобы не переусложнять решение задачи ее анализа.

Компонентами цепи называют готовые изделия, из которых она собирается — электровакуумные и газонаполненные приборы, транзисторы, микросхемы, резисторы, конденсаторы, трансформаторы, диоды и т. п. Классификацию компонент проводят по числу узлов (полюсов): двухполюсники, трехполюсники, N-полюсники (многополюсники). В общем случае многополюсники можно рассматривать как $N \times M$-полюсники, полюсы которых разбиты на M групп по N полюсов. Наиболее распространены $2n$-полюсники, или n-входники, и $n \times 2$-полюсники, например 2×2 полюсники, так называемые проходные четырехполюсники.

Из энергетических соображений все компоненты делят на пассивные, в которых электрическая энергия частично или полностью преобразуется в тепловую (резисторы, конденсаторы, индуктивности), и активные, преобразующие энергию источников питания в энергию переменных составляющих токов и напряжений (лампы, транзисторы, туннельные диоды, оптроны и другие электронные приборы).

По зависимости параметров компонентов от направления тока в них различают *обратимые и необратимые компоненты.* К первым относятся, например, пассивные двухполюсники и др., ко вторым — диоды, транзисторы, лампы, операционные усилители, оптроны и т. п.

Наиболее простой схемой замещения обладают резисторы (рис. 1.4, *а*). На постоянном токе действует только активное сопротивление R. На переменном токе у проволочных резисторов все компоненты схемы замещения проявляются уже при сравнительно низких

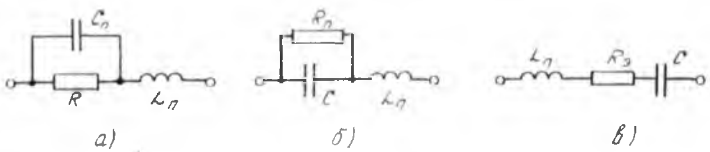


Рис. 1.4

частотах (до 1 МГц). При этом паразитная индуктивность $L_п$ образуется за счет намотки провода и индуктивности выводов, а паразитная емкость $C_п$ — за счет межвитковой емкости. У непроволочных резисторов (углеродистые, металлопленочные и т. д.) без спиральной нарезки (низкоомных) паразитная емкость может быть принята равной нулю и помимо R действует только индуктивность выводов, а у высокоомных резисторов влияние емкости заметно при высоких частотах (более 1 МГц).

Аналогичную по начертанию схему замещения имеют высокочастотные конденсаторы (рис. 1.4, *б*). Паразитное активное сопротивление $R_п$ здесь велико. Оно определяется потерями в диэлектрике, а $L_п$ — индуктивностью выводов. Несколько иную схему замещения имеют электролитические (фильтровые) конденсаторы (рис. 1.4, *в*). Здесь последовательное сопротивление $R_п$ эквивалентно потерям в электролите. Эти потери возрастают с ростом частоты, и при высоких частотах электролитические конденсаторы не применяются. Одним из важных свойств электролитических конденсаторов является изменение его емкости с изменением частоты переменной составляющей прикладываемого к ним напряжения. Эта зависимость сейчас введена в технические условия на конденсаторы и для некоторых типов конденсаторов приведена на рис. 1.5, *а*. Однако переменная составляющая напряжения на конденсаторе в подавляющем большинстве случаев несинусоидальна, и на каждой из гармоник емкость имеет свое значение. В целом же при анализе процессов конденсатор выступает как нелинейное устройство. Задача о нелинейном конденсаторе поставлена и решена авторами настоящей монографии в 1984 г. Суть ее состоит в том, что для анализа процессов в цепи с нелинейным конденсатором в мгновенных значениях необходимо знать зависимость его емкости от одной из переменных. Физически в качестве такой переменной более всего подходит скорость изменения напряжения на конденсаторе du/dt, которая оказывает влияние на поляризационные процессы в диэлектрике. В связи с этим возникает вопрос о поиске методики пересчета зависимости емкости электролитических конденсаторов от частоты в зависимость $C=C(du/dt)$. Аппроксимируем эту зависимость отрезком степенного ряда

$$\frac{C}{C_{\text{н}}}=b_0+b_1\frac{du}{dt}+b_2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\ldots+b_n\left(\frac{du}{dt}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}b_i\left(\frac{du}{dt}\right)^2. \tag{1.3}$$

Возьмем простейший RC-фильтр (может быть взята и любая другая цепь, содержащая C, но выбрана самая простая), процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$R\,\frac{d\,(Cu_{\text{вых}})}{dt}+u_{\text{вых}}-u_{\text{вх}}=0, \tag{1.4}$$

где R — активное сопротивление; $U_{\text{вх}}$, $U_{\text{вых}}$ — входное и выходное напряжение.

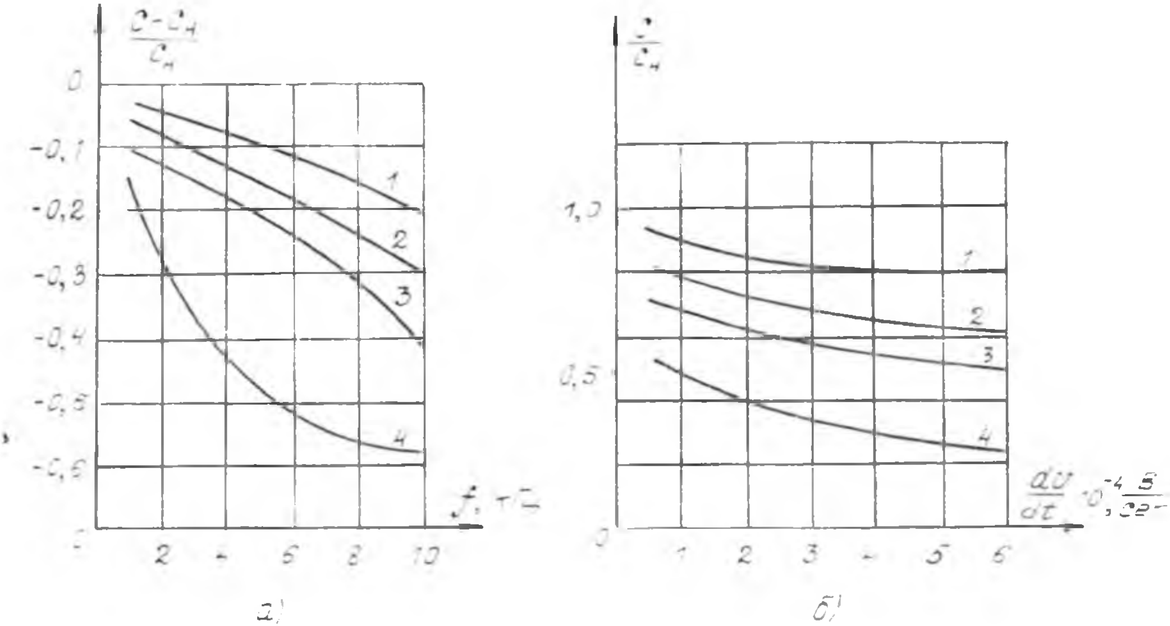
Подадим на вход синусоидальное напряжение

$$U_{\text{вх}}=U_m\sin\,\omega t. \tag{1.5}$$

Установившееся значение выходного напряжения на зажимах конденсатора будет равно

$$U_{\text{вых}}=U_m\,\cos\,\alpha\,\sin\,(\omega t-\alpha), \tag{1.6}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}.$$



1 – К53-1А; 2 – К50-3; 3 – К50-20; 4 – К52-1Б

Рис. 1.5

Обозначим

$$R\frac{d(Cu_{вых})}{dt}+u_{вых}-u_{вх}=\psi(C,\ u_{вх},\ u_{вых}). \qquad (1.7)$$

Если $C=\text{const}$, то при подстановке (1.5) и (1.6) в (1.7) получим тождество

$$\Psi(C,\ u_{вх},\ u_{вых})=0. \qquad (1.8)$$

Если же принять C по (1.3), то, очевидно, тождество не будет иметь место, а Ψ будет представлять собой некую невязку. В качестве меры отклонения Ψ от нуля выберем интеграл

$$S_1(\omega,\ R)=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\psi^2 dt.$$

Величина S_1 $(\omega,\ R)$ характеризует среднеквадратичную невязку на одном периоде напряжения $u_{вх}$ (ωt). Полная среднеквадратичная невязка по всем значениям ω и R будет равна

$$S=\int_{\omega_1}^{\omega_2}d\omega\int_{R_1}^{R_2}S_1(\omega,\ R)\,dR,$$

где ω_1, ω_2 — область частот, в которой известно значение C (ω) (рис. 1.5, *а*); R_1, R_2 — область значений R_1, на которой рассматривается фильтр.

Суммирование по R делается для того, чтобы аппроксимация (1.3) не зависела от внешнего сопротивления, т. е. от типа фильтра.

Коэффициенты b_k в (1.3) должны быть, очевидно, подобраны таким образом, чтобы невязка S имела минимальное значение. Условие минимума (экстремума) S известно:

$$\frac{\partial S}{\partial b_k}=0,\ k=1,\ 2,\ 3,\dots,\ n.$$

Это и дает необходимую систему уравнений для поиска b_k.

На рис. 1.5, *б* приведены зависимости $C=C\left(\frac{du}{dt}\right)$ для тех же типов конденсаторов, что и на рис. 1.5, *а*. При анализе цепи с нелинейным конденсатором на каждом расчетном интервале необходимо корректировать значение C по приведенным графикам.

Из электромагнитных компонент наиболее часто в электронных цепях применяются дроссели и трансформаторы. В дросселе помимо полезной индуктивности L (рис. 1.6, *а*) в схему замещения входят паразитные параметры — сопротивление обмоточных проводов $R_п$ и межвитковая емкость $C_п$. Схема замещения трансформатора в общем случае существенно более сложна. Она приведена на рис. 1.6, *б*. Центральным ее звеном (полезным элементом) является идеальный трансформатор ИТ, характеризуемый только коэффициентом трансформации $к_т = W_1/W_2$. Все остальные элементы схемы, за

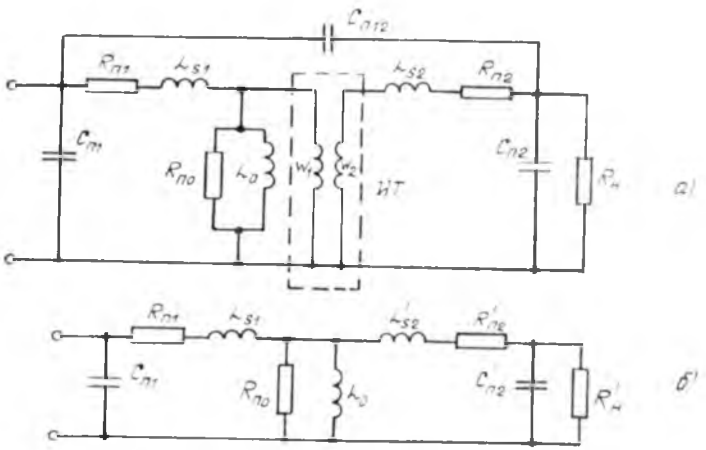


Рис. 1.6

исключением, конечно, сопротивления нагрузки $R_н$, являются паразитными. Величина индуктивности намагничивающего контура L_0 определяется свойствами применяемого магнитного материала, и чем L_0 больше, тем лучше трансформатор. В общем случае L_0 — нелинейная индуктивность. Сопротивление потерь $R_{п0}$ определяется потерями на перемагничивание магнитного материала. Сопротивления $R_{п1}$ и $R_{п2}$ — собственные активные сопротивления первичной и вторичной обмоток; L_{s1} и L_{s2} — индуктивности рассеяния этих обмоток; $C_{п1}$ и $C_{п2}$ — их межвитковые емкости, а $C_{п12}$ — проходная емкость между первичной и вторичной обмотками. Если проходная емкость мала, то схема упрощается и, кроме того, может быть осуществлено приведение параметров схемы замещения к первичной или вторичной цепи в зависимости от того, в какой цепи анализируются процессы. На рис. 1.6, *в* осуществлено приведение к первичной цепи. При этом $u_2' = u_2 \kappa_т$, $I_2' = I_2/\kappa_т$,

$$R_{п2}' = R_{п2} \cdot \kappa_т^2,\ L_{s2}' = L_{s2} \cdot \kappa_т^2,\ R_{н}' = R_{н} \cdot \kappa_т^2,\ C_{п2}' = C_{п2}/\kappa_т^2.$$

Напоминаем, что $\kappa_т = W_1/W_2$. Если осуществляется приведение ко вторичной цепи, то $u_1' = u_1/\kappa_т$, $I_1' = I_1 \kappa_т$, $R_{п1}' = R_{п1}/\kappa_т^2$, $L_{s1}' = L_{s1}/\kappa_т^2$, $C_{п1}' = C_{п1} \cdot \kappa_т^2$.

На рис. 1.7, *а* показана модель двухполюсника с N-образной вольтамперной характеристикой (туннельный диод и др.), соответствующая участку характеристики с отрицательным сопротивлением (малосигнальный режим). На рис. 1.7, *б* представлена модель приборов с S-образной характеристикой (однопереходный транзистор, лавинный транзистор и т. п.). На рис. 1.7, *в* дана универсальная нелинейная модель диода: $r_б$ — сопротивление базы диода; $r_у$ — сопротивление утечки p—n-перехода; $C_б$ — барьерная емкость; $C_д$ — диффузионная емкость.

На рис. 1.8, *а, б* показаны упрощенные линейные модели полевого транзистора, в которых не учтены большие (10^7—10^{10} Ом) сопротивления утечки между электродами. Линейная модель МДП-транзистора с подложкой приведена на рис. 1.8, *в* (средние частоты), на рис. 1.8, *г* — высокочастотная модель при объединенных истоке и подложке [3]. Здесь $g_з = \partial I_с/\partial u_з$; $g_с = \partial I_с/\partial u_с$; $g_п = \partial I_с/\partial u_п$. На рис. 1.8, *д* даны условные обозначения и распределенная модель прибора с зарядовой связью (ПЗС) во включенном состоянии.

Модели биполярного транзистора (линейные) показаны на рис. 1.9 и отличаются диапазоном частот их применимости [31]: *а* — линейная низкочастотная модель биполярного транзистора с зависимым источником напряжения; *б* — то же, с зависимым источником тока; *в* — полная высокочастотная линейная модель транзистора; *г* — упрощенная высокочастотная модель; *д* — модель в эквивалентных Y-параметрах; *е* — упрощенная модель при $Y_{12}=0$. Параметры низкочастотных моделей транзистора определяют через какую-либо систему параметров транзисторов, найденную для соответствующей схемы включения. Так, для транзистора в схеме с общей базой (ОБ)

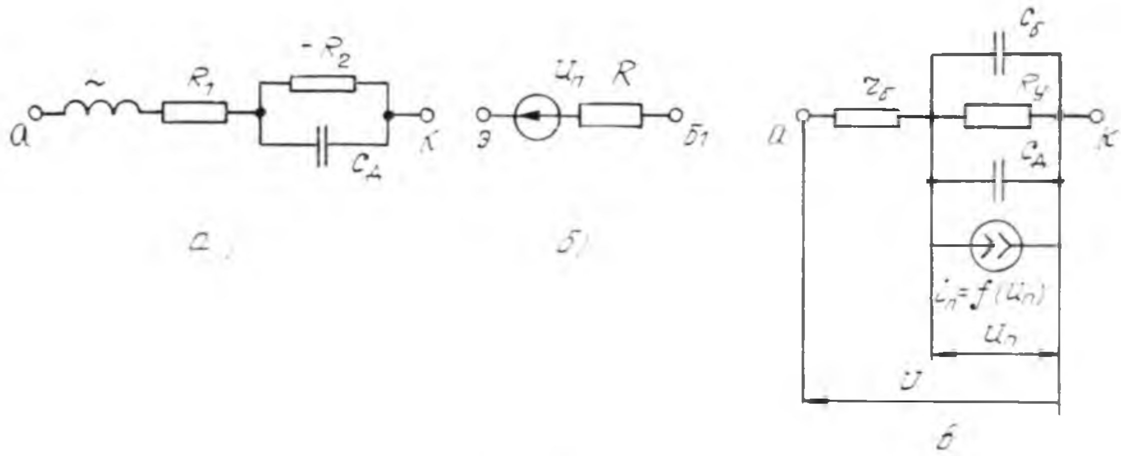


Рис. 1.7

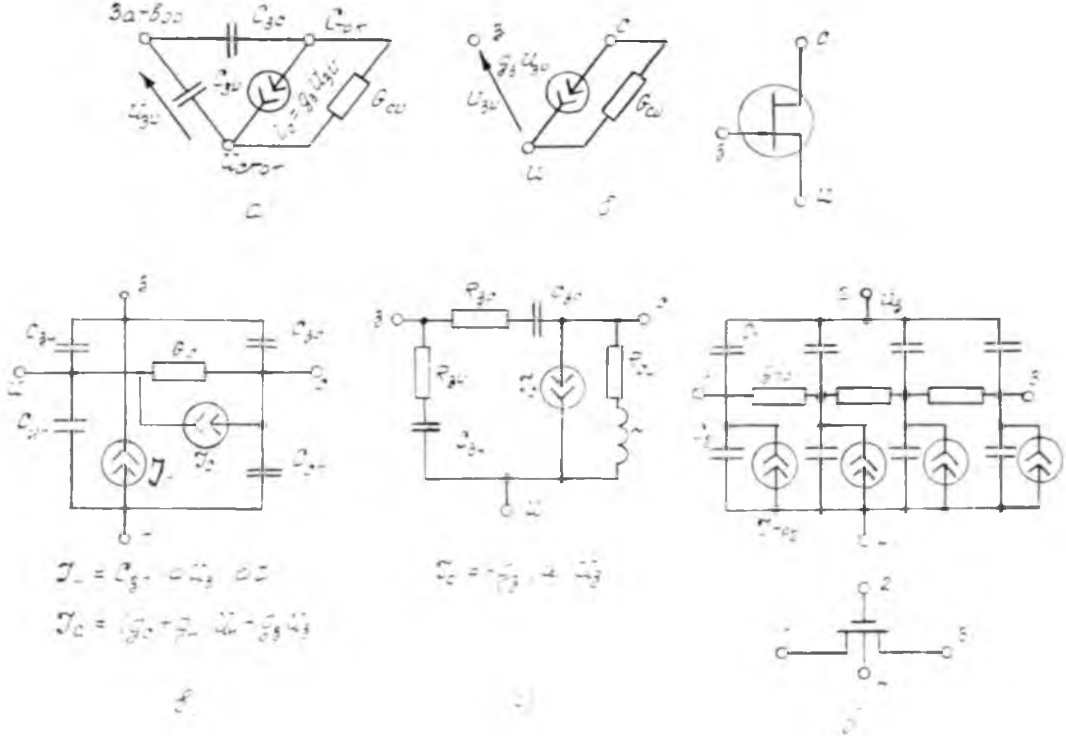


Рис. 1.8

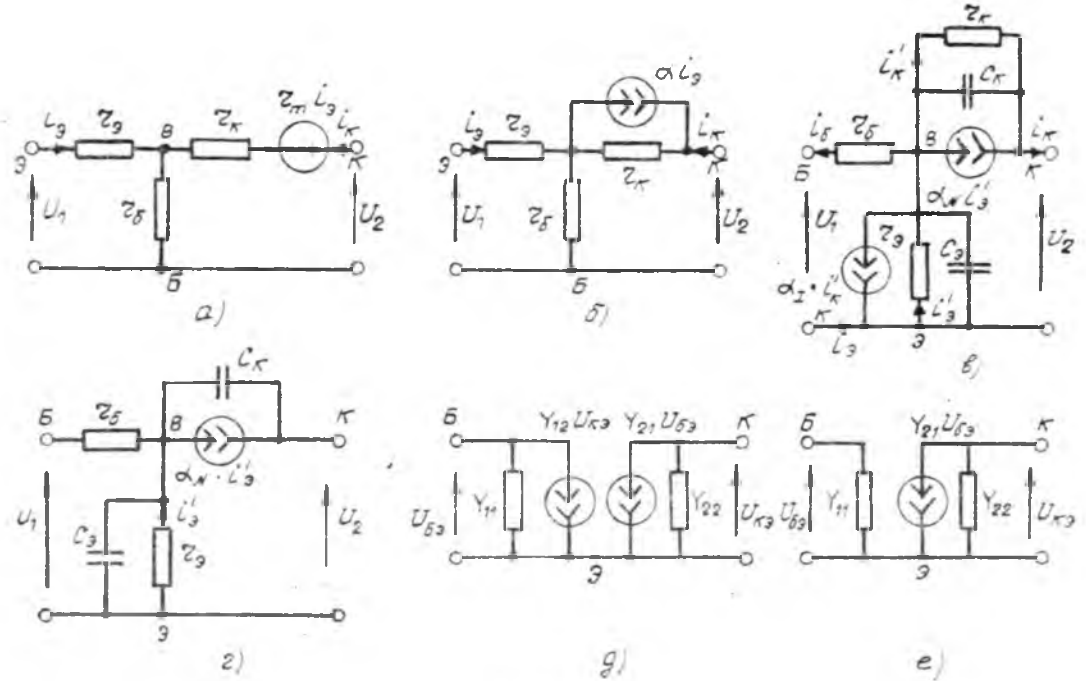


Рис. 1.9

$$r_{\text{э}} = r_{11\text{б}} - r_{12\text{б}} = \frac{g_{12\text{б}} + g_{22\text{б}}}{g_{11\text{б}}g_{22\text{б}} - g_{12\text{б}}g_{21\text{б}}} =$$

$$= h_{11\text{б}} - (1 + h_{21\text{б}}) \frac{h_{12\text{б}}}{h_{22\text{б}}},$$

$$r_{\text{б}} = r_{12\text{б}} = \frac{-g_{12\text{б}}}{g_{11\text{б}}g_{22\text{б}} - g_{12\text{б}}g_{21\text{б}}} = \frac{h_{12\text{б}}}{h_{22\text{б}}},$$

$$r_{\text{к}} = r_{22\text{б}} - r_{12\text{б}} = \frac{g_{11\text{б}} + g_{12\text{б}}}{g_{11\text{б}}g_{22\text{б}} - g_{12\text{б}}g_{21\text{б}}} = \frac{1 - h_{12\text{б}}}{h_{22\text{б}}} \approx \frac{1}{h_{22\text{б}}},$$

$$r_{\text{т}} = r_{21\text{б}} - r_{12\text{б}} = \frac{-g_{12\text{б}} - g_{21\text{б}}}{g_{11\text{б}}g_{22\text{б}} - g_{12\text{б}}g_{21\text{б}}} = -$$

$$-\frac{h_{12\text{б}} + h_{21\text{б}}}{h_{22\text{б}}} \approx -\frac{h_{21\text{б}}}{h_{22\text{б}}},$$

$$\alpha = \frac{r_{21\text{б}} - r_{12\text{б}}}{r_{22\text{б}} - r_{12\text{б}}} = \frac{-g_{12\text{б}} - g_{21\text{б}}}{g_{11\text{б}} + g_{12\text{б}}} = -\frac{h_{12\text{б}} + h_{21\text{б}}}{1 - h_{12\text{б}}} \approx -h_{21\text{б}}.$$

Подобные таблицы пересчета параметров транзисторов приведены в [4].

На рис. 1.10, *а* приведена нелинейная модель планарного транзистора, на базе которой строят линейные высокочастотные модели. На том же рис. 1.10, *б* показана тепловая модель биполярного транзистора [36], широко применяемая для анализа и расчета термостабильности электронных цепей. Изменение температуры эмиттерного перехода эквивалентно отображается источником напряжения $\Delta u_{\text{б.т}} = (E - u_{\text{э.б}})\ \Delta T/T \approx (2 \div 3)$ ΔT (мВ). Сопротивление $R_{\text{внеш}}$ учитывает полное сопротивление постоянному току внешней цепи базы $\Delta I_{\text{к}0} = (0{,}08 \div 0{,}12)\ I_{\text{к}0}^{(25^\circ\text{C})} - \Delta T$ (для кремниевых транзисторов): источник $\Delta I_{\text{кэ}} = S_0(\Delta u_{\text{б}} + r_{\text{б}}\Delta I_{\text{к}0})$, где $S_0 = h_{21}/h_{11}$, а $g = 1/h_{11}$.

Высокочастотные линейные модели транзисторов получаются из универсальных нелинейных моделей (рис. 1.10) путем замены каждого элемента его эквивалентом для малых сигналов. Например, диод между эмиттером и базой заменяют линейным сопротивлением, $C_{\text{э}} = C_{\text{эб}} + C_{\text{эд}}$, $C_{\text{к}} = C_{\text{кд}} + C_{\text{кб}}$.

У современных транзисторов прямой коэффициент передачи тока α_N находится в диапазоне $1 > \alpha_N > 0{,}9$. Обратный (инверсный) коэффициент передачи тока для

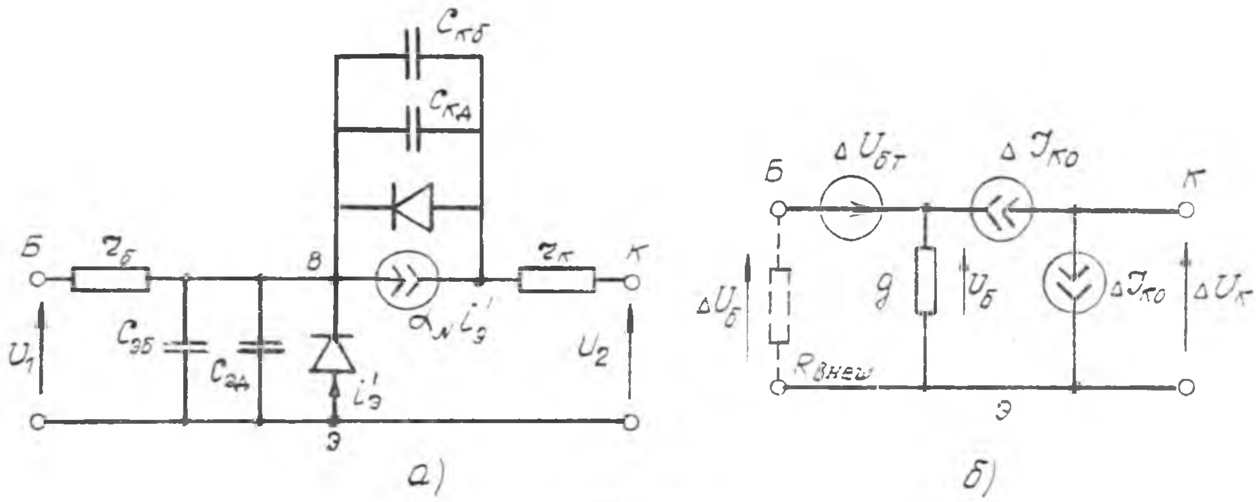


Рис 1.10

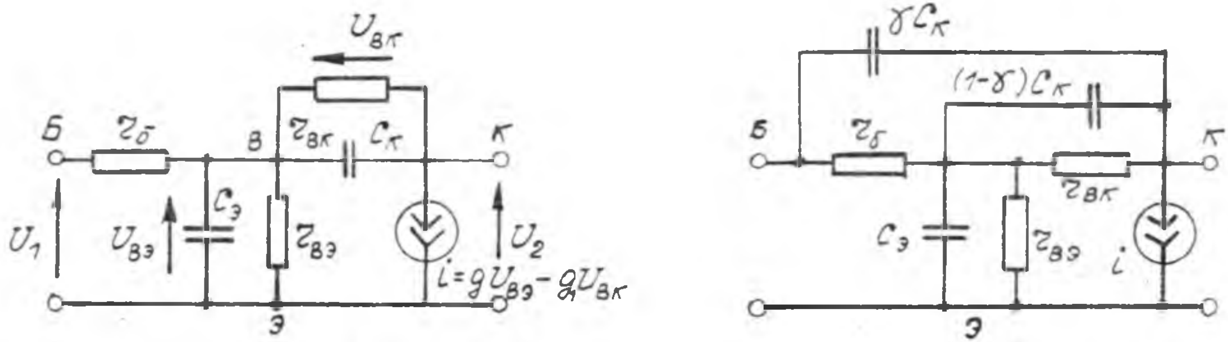

Б
К
В
Э
$r_б$
$r_{вк}$
$r_{вэ}$
$C_к$
$C_э$
$U_{вк}$
U_1
$U_{вэ}$
U_2
$i=gU_{вэ}-g_1U_{вк}$
$\gamma C_к$
$(1-\gamma)C_к$
i
а)
б)

Рис. 1.11

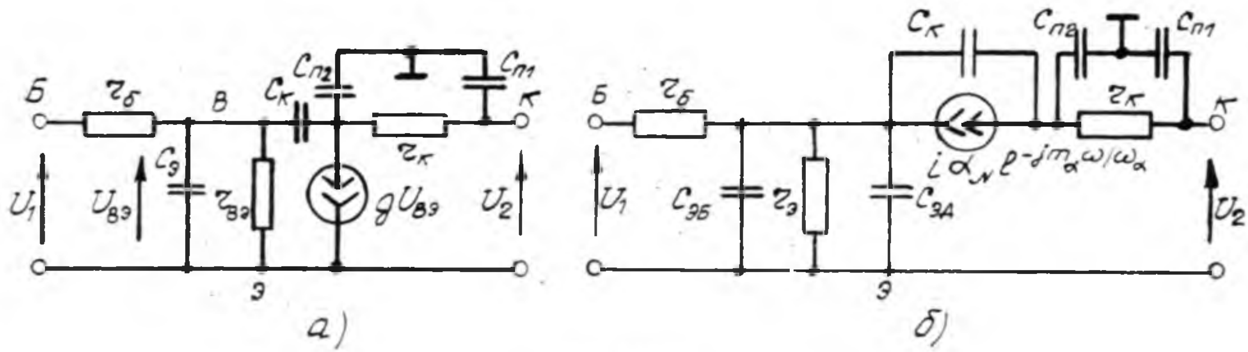


Рис. 1.12

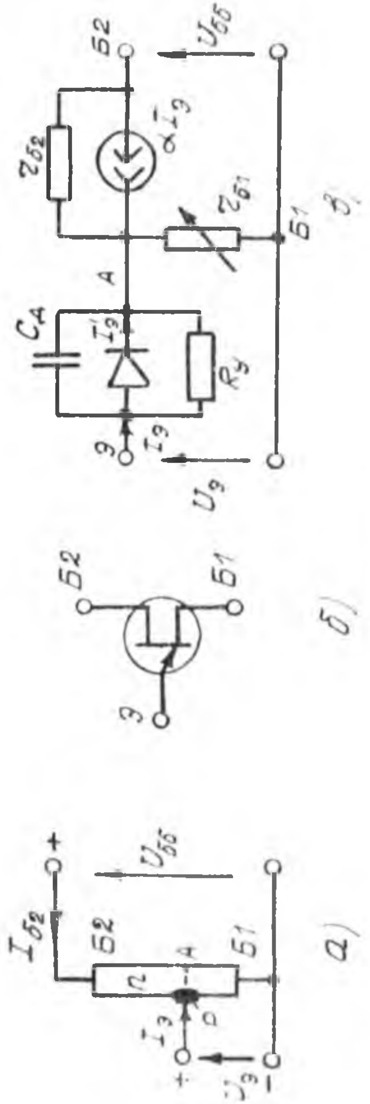


Рис. 1.13

сплавных транзисторов $0{,}75<\alpha_I<\alpha_N$, для транзисторов с диффузионной базой $0{,}4<\alpha_I<0{,}6$, для планарных и мезатранзисторов, имеющих несимметричную структуру, $\alpha_I<0{,}3$. Приведенные модели хорошо работают до частоты 10^7 Гц. Величина $r_к=10$—100 кОм, поэтому при низкоомных нагрузках им пренебрегают (рис. 1.7, *г*). Наиболее часто применяют модель на рис. 1.9, *в*.

На рис. 1.11 приведены гибридные высокочастотные модели биполярных транзисторов. Для маломощных транзисторов $r_б\approx(25—100)$ Ом,

$$r_{пэ}=\frac{r_э}{1-\alpha_N},\ r_э=\frac{кT}{qi_э}\approx\frac{25{,}8}{i_э}\ \text{Ом}$$

(при $T=300$ *K*, $i_э$ в мА), управляющая проводимость $g=\alpha_N/r_э$, $g_1=\alpha_I/r_к$, $r_{пк}=h_{12э}g_{пэ}/(1-h_{12э})\approx h_{12э}g_{пэ}=$ $=r_к/(1-\alpha_I)$, $C_к=(5—50)$ пФ и обычно приводится в справочниках. Емкость $C_э$ находится по значению граничной частоты f_2 или по максимальной частоте генерации $f_г$, на которой коэффициент усиления по мощности равен единице: $C_э\approx g_{пэ}/2\pi f_β=(1+\nu\alpha_N)/2\pi r_э f_\alpha$, где $\nu=0{,}2$ для диффузионных транзисторов и $\nu=1$ — для дрейфовых. В модели с частотной коррекцией γ определяется геометрией прибора, т. е. соотношением площадей эмиттера $S_э$ и базы $S_б$ (рис. 1.11, *б*):

$$\gamma=1-S_э/S_б.$$

Несколько отличаются модели интегральных транзисторов, например из-за наличия подложки (рис. 1.12, *а* и *б*). Здесь $C_{п1}$, $C_{п2}$ — барьерные емкости перехода коллектор—подложка.

На рис. 1.13 показан однопереходный транзистор и его полная нелинейная модель [3]. Резистор $r_{б2}$ для заданного $U_{бб}$ считается постоянным и независящим от тока $I_э$. Причем $r_{б1}+r_{б2}=r_{бб}$, а $r_{б1}/r_{бб}\neq\eta$ — внутренний коэффициент деления. Сопротивление $r_{б1}$ уменьшается по мере нарастания тока $I_э$ для всех значений $U_{бб}$:$r_{б1}=$ $=r_{б10}/(1+I_э/I_{э1})^N$, где $r_{б10}=\eta r_{бб}$. Коэффициент η уменьшается, а $r_{бб}$ увеличивается линейно с увеличением $U_{бб}$: $\eta=\eta_0-aU_{бб}$, $r_{бб}=r_{бб0}+bU_{бб}$. Параметры η_0, *a*, $r_{бб0}$ и *b* определяются экспериментально. Аппроксимирующие числа *N* и $I_{э1}$ находятся по значению $r_{б1}$, замеренному в области насыщения транзистора [3]. Источник тока $I_б=aI_э$ учитывает модуляцию проводимости базовой области током эмиттера ($a>1$). Резистор $R_у$

моделирует сопротивление утечки обратно смещенного эмиттерного перехода. Диффузионная емкость $C_д$ может быть весьма значительной из-за большого накапливаемого заряда в области $p—n$-перехода и области базы Б1-А и составляет 0,01—0,03 мкФ при токе $I_э=10$ мА. Величина же барьерной емкости значительно меньше (около 10 пФ), поэтому ее не учитывают.

Способы измерения и расчета параметров рассмотренных моделей транзисторов подробно описаны в [3] и др. На рис. 1.14 показаны эквивалентные схемы включения лавинного транзистора как нелинейного элемента [5]. Источник $M\alpha_0(I_э)I_э$ генерирует ток коллектора за счет экстракции неосновных носителей, инжектируемых эмиттером. Источник $MI_к$ генерирует тепловой ток коллектора. Коэффициент лавинного умножения M, определяющий величину источников тока, определяют из соотношения [5]: $M=I_к/(\varkappa\gamma I_э+I_{к0})$,
где $I_э$ — ток эмиттера; $\varkappa$ — коэффициент переноса; γ — эффективность эмиттера; $I_{к0}$ — обратный ток коллектора; $I_к$ — ток коллектора. Обычно $M=5—10$.

На рис. 1.15 показана полная модель диодной оптопары [6], где $R_п$ — сопротивление материала полупроводника светодиода (СД) и контактов (1–5 Ом); $R_{д СД}$ — прямое дифференциальное сопротивление СД, зависящее от величины тока; $C_{СД}$ — емкость $p—n$-перехода; $R_{св}$ и $C_{св}$ — параметры связи между СД и фотодиодом (ФД) или входом и выходом оптопары ($R_{св}=10^9—10^{12}$ Ом, $C_{св}=1–2$ пФ); $R_д$ — дифференциальное сопротивление ФД, зависящее от входного тока и напряжения смещения; $C_{ФД}$ — емкость $p—n$-перехода ФД, зависящая от напряжения смещения (2—5 пФ); $R_б$ — сопротивление материала базы и контактов ФД; K — коэффициент передачи тока (0,01—0,03); $I_Т$ — источник темнового тока (около 1 мкА); $u_{СД}\approx 1{,}5$ В.

На рис. 1.16, *а* показана линейная идеализированная макромодель операционного усилителя (ОУ) для расчета статического режима. Здесь $E_{СМ}$ — источник напряжения смещения; $E_{вых}$ — зависимый источник выходного напряжения $E_{вых}=-K(u_2-u_1)=-Ku_{вх}$, где K — коэффициент усиления без обратной связи в режиме холостого хода. В справочниках дается значение $K_н$ при номинальной нагрузке $R_н$, тогда $K=K_н(1+$ $+R_{вых}/R_н)$.

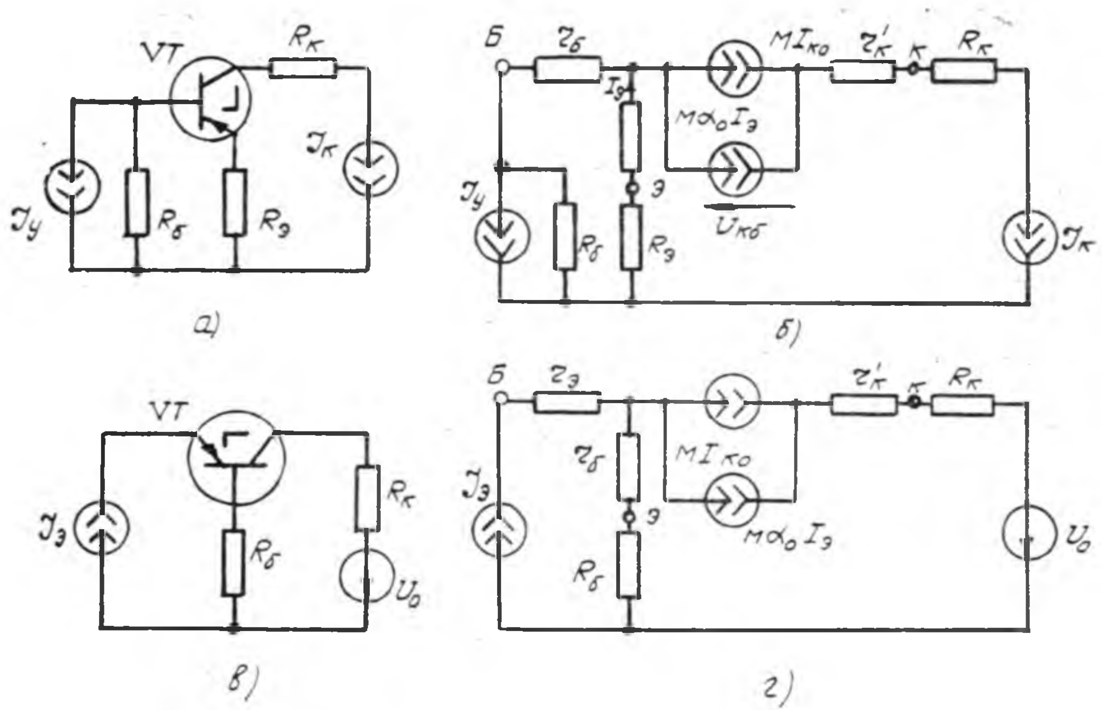


Рис. 1.14

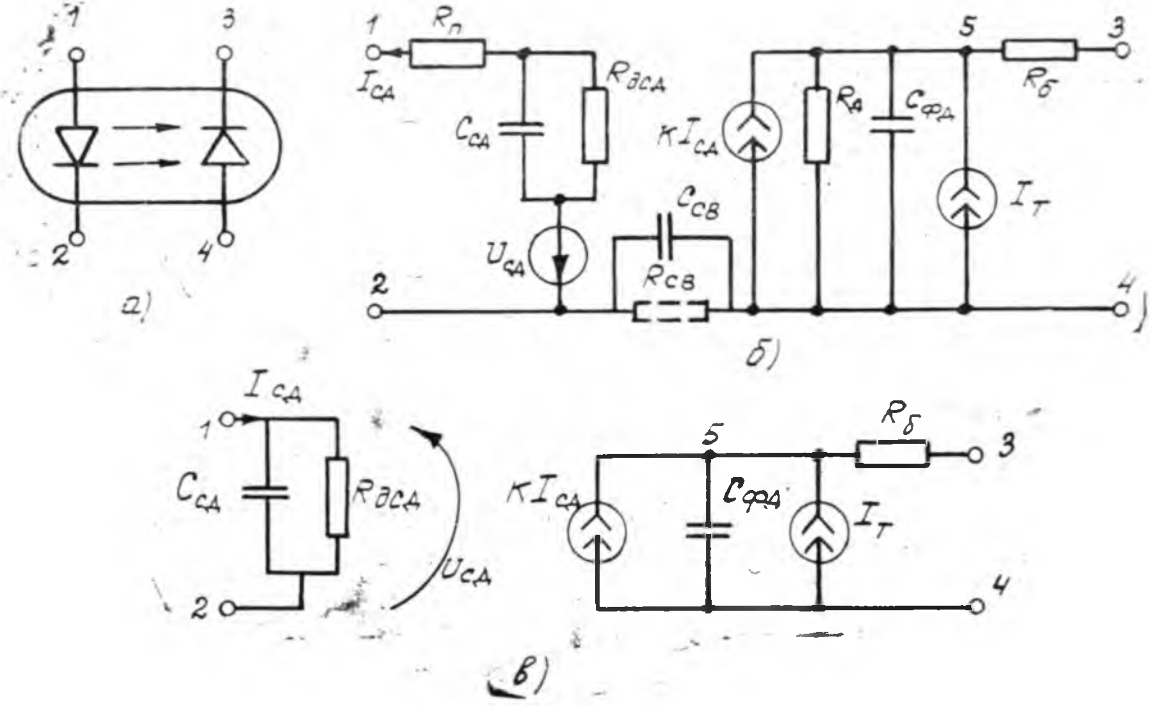

1
3
2
4
а)
1
$R_п$
$I_{сд}$
$R_{дсд}$
$C_{сд}$
$U_{сд}$
$C_{св}$
$R_{св}$
2
$кI_{сд}$
$R_д$
$C_{фд}$
5
$R_б$
3
$I_т$
4
б)
$I_{сд}$
1
$C_{сд}$
$R_{дсд}$
$U_{сд}$
2
5
$R_б$
3
$кI_{сд}$
$C_{фд}$
$I_т$
4
в)

Рис. 1.15

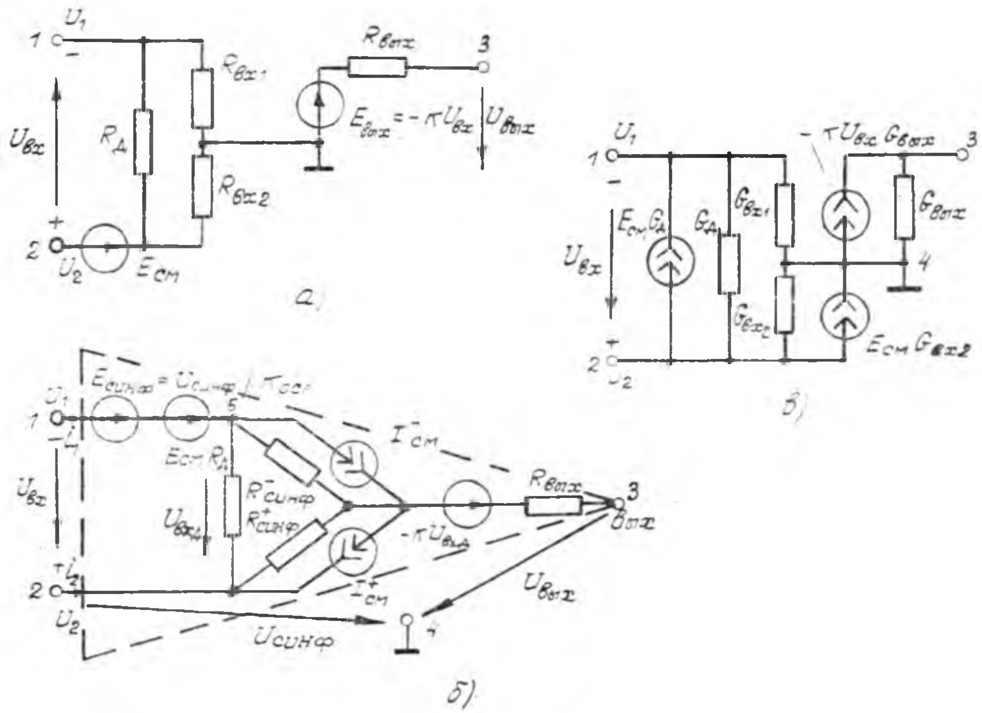


Рис. 1.16

На рис. 1.16, *б* приведена полная линейная макромодель ОУ [7]. В показанном виде она пригодна для статических расчетов (по постоянному току). Для применения ее в расчетах по переменному току (в динамике) необходимо содержание указанных символов соответственно расширить до полных (частотозависимых) сопротивлений, операторов и т. д. Здесь $E_{\text{см}}$ — это такое значение дифференциального входного напряжения (0,5—15 мВ) при $u_{\text{синф}}=0$ (неинвертирующий вход+ u_2 заземлен), которое соответствует нулевому выходному напряжению ($u_{\text{вых}}=0$) в отсутствие нагрузки (холостой ход). Другими словами, это напряжение, необходимое для компенсации несимметрии дифференциального входного каскада ОУ. Далее $I_{\text{см}}$ и $I^{+}_{\text{см}}$ (1—400 НА) — это такое значение токов инвертирующего и неинвертирующего входов, которое при $u_{\text{синф}}=0$ соответствует $u_{\text{вых}}=0$ при отсутствии нагрузки. Другими словами, $u_{\text{вых}}=0$ имеет место, когда $u_{\text{вх. д}}=E_{\text{см}}$, $i^{-}=I^{-}_{\text{см}}$, $i^{+}=I^{+}_{\text{см}}$. Выходное напряжение ОУ определяется величиной зависимого источника $E_{\text{вых}}=-Ku_{\text{вх д}}$, т. е. $u_{\text{вых}}=-(Ku_{\text{вх. д}}-R_{\text{вых}}\cdot i_{\text{вых}})$, где $K=10^3\div 100\cdot 10^6$, $R_{\text{вых}}=10—700$ Ом.

Дифференциальное входное сопротивление $R_{\text{д}}=u_{\text{вх д}}/\Delta i^{+}_{2}$ в режиме короткого замыкания или $R_{\text{д}}\approx\Delta u_1/\Delta i^{-}_{1}$ при заземленном неинвертирующем входе ($R_{\text{д}}=4$ кОм — 100 ГОм). В динамическом режиме (по переменному току) необходимо перейти от $R_{\text{д}}$ к $Z_{\text{д}}=R_{\text{д}}\,||\,1/pC_{\text{д}}$ (около 1 МОм до 100 кГц) и от $R_{\text{вых}}$ к $Z_{\text{вых}}$ (около 100 Ом до 100 Гц и 40 Ом свыше 1000 Гц) [7]. Зависимый источник $E_{\text{синф}}=u_{\text{синф}}/K_{\text{осл}}$, где $K_{\text{осл}}$ — коэффициент ослабления синфазного сигнала (КОСС), $K_{\text{осл}}=\Delta u_{\text{вх д}}/\Delta u_{\text{синф}}$ ($K_{\text{осл}}\approx K$ — от 60 до 120 об). Синфазные входные сопротивления $R^{-}_{\text{синф}}=\Delta u_{\text{синф}}/\Delta i^{-}_{1}$, $R^{+}_{\text{синф}}=\Delta u_{\text{синф}}/\Delta i^{+}_{2}$ имеют значения от 500 МОм до 200 ГОм. В динамическом режиме необходимо перейти к

$$Z^{-}_{\text{синф}}=R^{-}_{\text{синф}}\,\|\,1/PC^{-}_{\text{синф}} \text{ и } Z^{+}_{\text{синф}}=R^{+}_{\text{синф}}\,\|\,1/PC^{+}_{\text{синф}},$$

где $C_{\text{синф}}$ составляет несколько пикофарад.

На рис. 1.17 показана макромодель логической микросхемы И—НЕ [8]. Характеристики входных диодов представляются обычным образом. Задержку переключения можно выразить через постоянную времени $R_1C_1\cdot R_2$ — выходное сопротивление порядка 30 Ом. Его зависимость от режима работы представлена источником I_0, позволяющим уточнить модель. Аналогично строятся макромодели триггера, сдвигового регистра и т. п.

Современные численные методы решения систем уравнений схемы основываются на их дискретном представлении, что наталкивает на возможность формирования дискретной математической модели, минуя ее непрерывный аналог. Такие методы моделирования получили название дискретных или табличных [37]. При этом и компонентные модели также имеют дискретную (табличную) форму. В итоге математическая модель

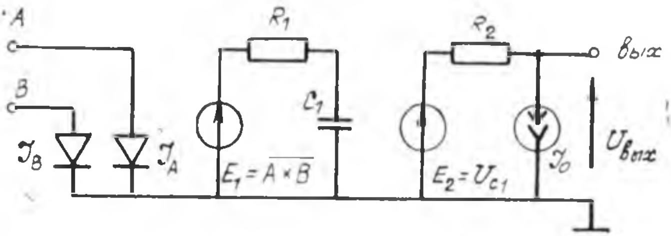


Рис. 1.17

схемы из дифференциальной превращается в алгебраическую. Достигается это использованием методов неявного интегрирования. При этом алгебраизация компонентных уравнений реактивностей схемы позволяет представить уравнения ее математической модели в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. Решение последней сводится далее к последовательности решений линеаризованной на каждом шаге алгебраической системы уравнений [37].

Пусть используется неявная формула трапеции

$$x_n = x_{n-1} + (x'_n + x'_{n-1})\, h/2),$$

где h — размер временного шага интегрирования; n — индекс временных итераций.

Для индуктивности, например, $u = L di/dt$. Поскольку

$$x'_n = \frac{2}{h}(x_n - x_{n-1}) - x'_{n-1}, \text{ тогда } u_n = \frac{2L}{h} i_n -$$

$$- \frac{2L}{h} i_{n-1} - u_{n-1}$$

или $i_n = \frac{h}{2L} u_n + \frac{h}{2L} u_{n-1} + i_{n-1}$. Значит, реактивный компонент — индуктивность моделируется линейной проводимостью $G_L = h/2L$ и включенным параллельно ей независимым источником тока $I_{n-1} = i_{n-1} + u_{n-1}h/2L$, представляющим информацию о состоянии компонента в предыдущий момент времени.

В результате такого подхода исходная непрерывная схема замещается последовательностью дискретных эквивалентных линейных резистивных схем с источниками, параметры компонентов которых изменяются на каждом шаге интегрирования.

В результате алгебраизации и линеаризации полученная резистивная эквивалентная схема состоит только из линейных сопротивлений и проводимостей, независимых источников тока и напряжения, управляемых любым током и напряжением схемы (или их комбинацией).

1.5. Построение математической модели электронной цепи по ее схеме или графу

Существует ряд способов формирования математической модели схемы в виде системы уравнений равновесия в выбранном базисе переменных (координат). Причем работы по созданию новых и модернизации известных способов моделирования продолжаются. Объясняется это в первую очередь тем, что непрерывно исследуются и совершенствуются способы решения уравнений, т. к. не существует универсального способа их решения, одинаково хорошо работающего при анализе схем с большим разбросом постоянных времени и схем с сильно разреженными уравнениями модели; простых и сложных схем; линейных и нелинейных, непрерывных и импульсных; при необходимости выдачи результатов анализа в численном и символьном (буквенном) виде и т. д. Практика выявила следующую интересную зависимость: чем меньше трудоемкость составления модели схемы, тем выше трудоемкость решения (машинным или безмашинным способом). Объясняется это так: чем проще алгоритм составления модели схемы, тем больший порядок имеет система уравнений, значительное абсолютное число ненулевых элементов (коэффициентов) в уравнениях. И наоборот, чем сложней алгоритм составления модели схемы, тем меньший порядок имеет система уравнений, меньшее число нулевых элементов и меньшую разреженность уравнений. Так, известны следующие способы формирования уравнений схемы: в полном координатном базисе (ПКБ); в однородном (ОКБ), в расширенном однородном (РОКБ), в гибридном (неоднородном) (ГКБ) и в сокращенном гибридном координатном базисе (СГКБ). Уравнения модели в полном координатном базисе (ПКБ) составляют из двух групп уравнений: уравнений компонент схемы и структурных (топологических) уравнений схемы. Первые дают полную информацию о связи управляемых и управляющих переменных отдельных компонент схемы в рассматриваемый момент времени и не накладывают никаких ограничений на характер соотношений, связывающих токи и напряжения отдельных компонент, число аргументов в каждом из них и тип управляющих ветвей. Вторые дают информацию о способе соединения компонент в схеме (т. е. о ее топологии) и составляются по законам Кирхгофа

$$\sum_{\kappa} i_{\kappa}=0,\ \sum_{i} u_{i}=0.$$

В зависимости от характера компонент, входящих в схему (граф), ее ветви можно разделить на следующие: пассивные ветви (резисторы, емкости, индуктивности); ветви полюсных графов многополюсников; ветви независимых источников (напряжения, тока); управляющие ветви (по напряжению, току) зависимых источников; ветви искомых токов и напряжений. В зависимости от вида компонентных уравнений различают y-ветви (уравнения выражают токи — $i=Yu$), z-ветви (уравнения выражают напряжения — $u=Zi$). Остальные ветви называют взаимно определенными (уравнения выражают либо токи, либо напряжения).

Компонентные уравнения пассивных ветвей в матричной форме

$$\left.\begin{aligned} & I_C = C\,(du_C\,dt) \text{ или } I_C = CPu_C, \\ & I_R = R^{-1}u_R, \\ & I_L = L^{-1}\int\limits_{i} du_l dt \text{ или } I_L = L^{-1}u_L\frac{1}{p}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1.9а)$$

В табличной форме при замене производных отношениями конечных разностей, т. е. $dX/dt=(u_n-u_{n-1})/h$:

$$\left.\begin{aligned} I_{Cn} &= C\,(u_{Cn}-u_{Cn-1})\,h,\\ I_{Ln} &= L^{-1}u_{Ln}h - I_{Ln-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.9б)$$

В обобщенной форме с учетом зависимых источников компонентные уравнения y- и z-ветвей имеют вид

$$\left.\begin{aligned} I_y &= Y_{\text{в}}U_y + NI_z + J_{\text{в}},\\ U_z &= MU_y + Z_{\text{в}}I_zE + E_{\text{в}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

При этом полагаем, что y-ветви могут быть управляющими по напряжению, а z-ветви — управляющими по току.

Компонентное и топологическое уравнения образуют модель в ПКБ размерностью $2l$:

$$\Sigma i=0, \qquad (1.11а)$$

$$\Sigma u=0, \qquad (1.11б)$$

$$I=F_y(U), \qquad (1.11в)$$

или

$$U=F_z(I), \qquad (1.11г)$$

где U и I — векторы рассчитываемых напряжений и токов ветвей; l — количество ветвей в схеме.

С учетом обобщенной формы записи уравнений ветвей схемы (1.10) модель в ПКБ в матричной форме примет вид, также соответствующий $2l$ скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= VX_1 + F,\\ \Theta X_2 &+ \Theta_1 X_1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

где $X_1=\begin{bmatrix} U_y \\ I_z \end{bmatrix}$ и $X_2=\begin{bmatrix} I_y \\ U_z \end{bmatrix}$ — векторы токов и напряжений y- и z-ветвей; $V=\begin{bmatrix} Y_{\text{в}} & N \\ M & Z_{\text{в}} \end{bmatrix}$ — компонентная матрица, в которой $Y_{\text{в}}$ и $Z_{\text{в}}$ диагональные матрицы проводимостей и сопротивлений пассивных и управляющих ветвей схемы, а M и N — матрицы управляющих параметров зависимых источников напряжения, управляемых напряжением, и зависимых источников тока, управляемых током; $F=\begin{bmatrix} I_{\text{в}} \\ E_{\text{в}} \end{bmatrix}$ — вектор задающих токов и напряжений ветвей; Θ, Θ_1 — квадратные матрицы l-го порядка с вещественными элементами, равными ± 1 или 0 (они будут рассмотрены в гл. 3).

Наряду с положительными качествами (простота формирования модели, практически полное отсутствие ограничений на характер учитываемых функциональных зависимостей, на число их аргументов и типы управляющих ветвей) ПКБ имеет существенные недостатки. Так, несмотря на сильную разреженность уравнений, абсолютное число ненулевых коэффициентов получается значительным. Огромные размеры ($2l$) системы уравнений заметно снижают скорость и точность ее реализации (расчета) и ограничивают возможности машинных программ по объему анализируемых схем.

Уменьшить число уравнений модели можно, например, путем исключения части переменных. Так, если в систему (1.11) подставить уравнения ветвей вида $U = F_z(i)$, то получим систему l-уравнений токов ветвей

$$\left.\begin{aligned} \Sigma i &= 0, \\ \Sigma F_z(i) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

Если же в систему (1.11) подставить уравнения ветвей в виде $i = F_y(u)$, то получим систему l-уравнений напряжений ветвей

$$\left.\begin{aligned} \Sigma U &= 0, \\ \Sigma F_y(U) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

Еще большего понижения порядка системы (приблизительно до $l/2$) можно достичь путем замены переменных, т. е. введения новых, узловых потенциалов (напряжений) или контурных токов. Так, замена напряжений ветвей u разностями потенциалов φ ($u_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$) обращает второй закон Кирхгофа в тождественный нуль, поскольку при обходе контура каждый из узловых потенциалов войдет в уравнение дважды, причем с противоположным знаком. В результате получаем систему уравнений в однородном координатном базисе по методу узловых потенциалов (напряжений)

$$\Sigma F_y(\varphi_i - \varphi_j) = 0 \qquad (1.15)$$

или по методу контурных токов соответственно

$$\Sigma F_z(\Sigma i_\text{к}) = 0, \qquad (1.16)$$

где $\Sigma i_\text{к} = i_\text{в}$ — ток каждой ветви, выраженный через алгебраическую сумму контурных токов $i_\text{к}$, протекающих через эти ветви.

Модели электронных схем в однородном координатном базисе (ОКБ) имеют существенно меньшую размерность, а значит, менее трудоемки в своем разрешении. Недостатком моделей в ОКБ считают необходимость при их составлении осуществлять преобразования источников к одному виду. О способах решения этой задачи см. гл. 3. Избежать указанных преобразований источников удается также и путем целенаправленного частичного расширения однородного координатного базиса до так называемых РОКБ и СГКБ (сокращенный гибридный координатный базис) [37].

В общем модель схемы, составленная по рассмотренным выше способам, представляется в виде неявной формы относительно вектора производных базисных координат

$$\Phi(dX/dt,\ X,\ t)=0, \tag{1.17}$$

где X — вектор базисных координат;

$\Phi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ — векторная функция.

Эта система уравнений строится непосредственно по схеме (графу) с возможным последующим ее преобразованием с целью уменьшения числа базисных координат, т. е. понижения порядка системы. В зависимости от выбора исходных топологических уравнений и системы базисных координат получают различные по ряду свойств математические модели. Одной из распространенных форм модели является форма Коши (нормальная форма обыкновенных дифференциальных уравнений)

$$dX/dt=F(X,\ t), \tag{1.18}$$

в которой вектор производных базисных координат явно выражен через вектор базисных координат. Уравнения в форме Коши получаются по более сложному алгоритму, чем рассмотренные, однако удобны для применения ряда численных методов решения. Математические модели (1.11) и (1.12) удобны и для решения задач анализа во временной области. Если положить $dX/dt=0$, то получим модель схемы для анализа статического состояния. Для линейных схем

$$dX/dt=WX+W'Q, \tag{1.19}$$

где W и W' — матрицы коэффициентов (постоянных или зависящих от времени); Q — вектор задающих источников схемы.

При анализе в частотной области можно от (1.19) перейти к алгебраической форме с помощью преобразования Лапласа или Фурье:

$$pX(p) = WX(p) + W'Q(p) \tag{1.20а}$$

или

$$j\omega X(j\omega) = WX(j\omega) + W'Q(j\omega). \tag{1.20б}$$

Для получения системы дифференциальных уравнений в форме Коши (1.18) разработан специальный метод, называемый методом переменных состояния, т. е. переменных, характеризующих состояние схемы в каждый момент времени (см. гл. 3, 6). В этом случае для уравнений (1.18), (1.19) X — вектор переменных состояния. Выбор его компонент $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ограничен. Он может включать только напряжения на емкостях u_C и токи в индуктивностях i_L. Алгоритм составления уравнений переменных состояния рассмотрен в гл. 5.

Глава 2. СХЕМНЫЕ ФУНКЦИИ, ЧАСТОТНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

2.1. Определение схемных функций

Формальное решение задачи анализа электронных схем сводится к получению выражений схемных функций, их вычислению и построению частотных, временных и других характеристик и различных параметров последних. По виду и значению указанных критериев проводится сравнение различных вариантов схем рассматриваемого класса, оценка их качества, свойств и перспективных возможностей в процессе дальнейшего совершенствования элементной базы или структуры схемы. Общее определение схемных функций как вторичных выходных параметров схемы дано в 1.1. Для определения конкретных видов функций рассмотрим уравнения равновесия схемы. Они составляются на основе законов Кирхгофа, опубликованных им в знаменитой статье в 1857 г. Запишем в общем виде уравнения равновесия

$$q_i = q_j\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (2.1)$$

где x_i — переменные реакции схемы на воздействие; q_i — переменные воздействия, приложенные ко входам схемы.

Как независимые переменные q_i, так и зависимые x_i являются функциями времени. Для упрощения математических моделей линейных схем их интегродифференциальные уравнения в целом ряде случаев удается перевести в алгебраические путем применения прямого преобразования Лапласа

$$q(p) = L[q(t)] = \int_0^\infty q(t)\, e^{-pt} dt,$$

где $p = \sigma + j\omega$ — комплексная переменная или (в теории цепей) комплексная частота.

Дело в том, что при нулевых начальных условиях операции дифференцирования оригинала по времени соответствует умножение его изображения на p, а операции интегрирования оригинала — деление его изображения на p. Здесь комплексная частота p может рассматриваться как некий оператор, а интегродифференциальные соотношения между временными функциями (оригиналами) заменяются, таким образом, алгебраическими операторными соотношениями между их изображениями. Большая группа методов анализа электронных и электрических цепей основана на переводе функций времени в соответствующие функции комплексной частоты, т. е. на использовании указанного преобразования Лапласа.

Для обратного перехода от изображения $q(p)$ к оригиналу $q(t)$ или от $x(p)$ к $x(t)$ применяют так называемое обратное преобразование Лапласа

$$q(t) = L^{-1}[q(p)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} q(p)\, e^{pt} dt.$$

В общем случае цепь описывается системой уравнений дифференциальных (во временной области) или алгебраических (в области комплексного переменного). Пусть система уравнений равновесия цепи составлена в алгебраической форме, тогда в самом общем виде имеем

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2}$$

или подробнее можем записать

$$q_1 = w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \ldots + w_{1n}x_n,$$
$$q_2 = w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \ldots + w_{2n}x_n,$$
$$\vdots$$
$$q_n = w_{n1}x_1 + w_{n2}x_2 + \ldots + w_{nn}x_n.$$

Здесь q_i — независимые переменные системы, например входные воздействия (сигналы) схемы, т. е. задающие токи и напряжения; x_j — зависимые (искомые) переменные (токи или напряжения) системы; w_{ij} — коэффициенты системы уравнений называются эквивалентными параметрами схемы, они выражаются через параметры компонентов схемы.

При анализе таких систем уравнений обычно используют аппарат линейной (матричной) алгебры. Последний можно рассматривать как вид стенографии, который дает возможность записывать систему линейных уравнений в очень компактной и удобной форме. При этом определенные алгебраические операции часто представляются в более наглядном виде, чем при каком-либо ином способе записи. Матричная алгебра, надо иметь в виду, не дает сокращения числовых вычислений, но является очень полезным инструментом, облегчающим аналитические преобразования.

В матричной форме система уравнений схемы, приведенная выше, запишется так:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} w_{12} \dots w_{1n} \\ w_{21} w_{22} \dots w_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ w_{n1} w_{n2} \dots w_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Сокращенно $[q]=[w][x]$ или $Q=WX$.

Здесь $[q]$, Q — вектор независимых переменных системы (задающих источников схемы); $[x]$, X — вектор искомых переменных системы (токов или напряжений схемы); $[w]$, W — квадратная матрица весовых коэффициентов системы (эквивалентных параметров схемы) или просто матрица схемы.

Решая это уравнение относительно вектора искомых переменных X, получим

$$X = W^{-1}Q,$$

где W^{-1} — обратная матрица, получаемая из известного в матричной алгебре соотношения

$$W^{-1} = [w]^{-1} = [\Delta_{ij}]^t/\Delta$$

или

$$W^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} \Delta_{21} \dots \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} \Delta_{22} \dots \Delta_{n2} \\ \vdots \\ \Delta_{1n} \Delta_{2n} \dots \Delta_{nn} \end{bmatrix},$$

где $\Delta=|w|$ — определитель матрицы W; $\Delta_{ij}=|w_{ij}|$ — алгебраическое дополнение элемента w_{ij} матрицы W; $[\Delta_{ij}]^t$ означает транспонирование матрицы $[\Delta_{ij}]$.

Схемными функциями называют отношения переменных $x_i(p)$ реакций к переменным $q_j(p)$ воздействия на одном из входов схемы:

$$F_{ij}(p) = \frac{x_i(p)}{q_j(p)} \left(= \frac{x_{i\,вых}(p)}{q_{j\,вх}(p)} \right). \qquad (2.4)$$

Схемные функции определяются только параметрами компонент схемы и способом их соединения и являются в общем случае функциями комплексного переменного.

Зная функции схемы, можно определить ее реакции на любые заданные воздействия: $x_i(p) = F_{ij}(p) \cdot qj(p)$ и, следовательно, анализировать свойства схемы как в пространстве комплексной переменной, так и во временной области, осуществляя в последнем случае обратное преобразование Лапласа: $F_{ij}(t) = L^{-1}[F_{ij}(p)]$. *Выражение схемной функции можно просто получить из матрицы схемы W по формулам Крамера,* считая ненулевым только один источник $q_j(p)$:

$$F_{ij} = \frac{x_i(p)}{q_j(p)} = \frac{\Delta_{ji}(p)}{\Delta(p)}, \qquad (2.5а)$$

где $\Delta_{ji}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента матрицы схемы (эквивалентного параметра w_{ij}).

Схемная функция называется входной (выходной), если $j=i$, т. е. воздействие и реакция определяются на одном и том же входе (выходе) j или i:

$$F_{jj} = \frac{x_j(p)}{q_j(p)} = \frac{\Delta_{jj}(p)}{\Delta(p)}, \quad F_{ii} = \frac{x_i(p)}{q_i(p)} = \frac{\Delta_{ii}(p)}{\Delta(p)}. \qquad (2.5б)$$

Схемная функция называется передаточной, если $j \neq i$. Для переменных реакции

$$F_{ij} = \frac{x_i(p)}{x_j(p)} = \frac{\Delta_{ji}(p)}{\Delta_{jj}(p)}. \qquad (2.5в)$$

Для обратной схемы $F_{ij} = F_{ji}$, т. к. элементы матрицы W, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу: $w_{ij} = w_{ji}$. Нарушение указанной симметрии свидетельствует о том, что схема является необратимой, т. е. содержит необратимые (невзаимные) компоненты.

Итак, связь между токами и напряжениями многополюсной цепи описывается набором передаточных и входных (выходных) функций.

Согласно принципу наложения в линейных цепях можно отдельно рассматривать связь между воздействием на j-м входе и реакцией на это воздействие на i-м выходе. Это значит, что любую сколько угодно сложную многополюсную цепь можно представлять по отношению к рассматриваемой паре вход-выход в виде эквивалентного 2×2-полюсника (т. е. проходного четырехполюсника). На рис. 2.1 показана схема эквивалентного 2×2-полюсника, ко входу которого присоединен

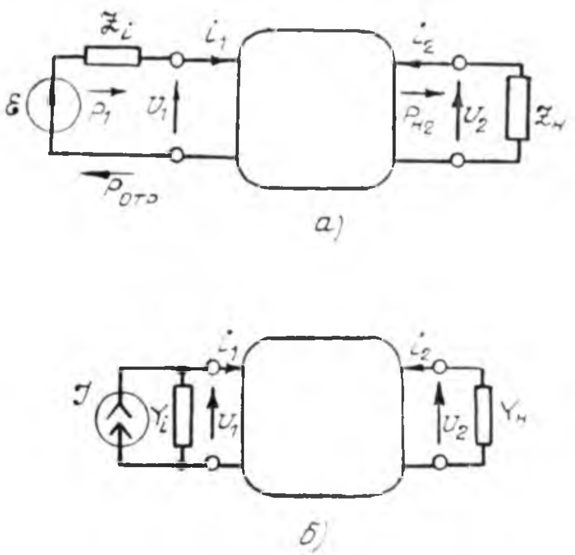


Рис. 2.1

источник сигнала, а к выходу — нагрузка. Таким образом моделируется передача электрического сигнала через выделенную пару вход—выход в исследуемой многополюсной цепи.

Подставляя вместо $x_i(p)$ и $q_j(p)$ токи и напряжения на входе и выходе схемы (рис. 2.1), получим определения всех широко известных схемных функций.

Входные функции: входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(p)=u_1(p)/i_1(p)$$

или

$$Z_{\text{вх}}(p)=u_{\text{вх}}(p)/i_{\text{вх}}(p);$$

входная проводимость $Y_{\text{вх}}(p)=i_1(p)/u_1(p)$

или $$Y_{вх}(p)=i_{вх}(p)/u_{вх}(p);$$

выходное сопротивление $Z_{вых}(p) = u_2(p)/i_2(p)$

$$Z_{вых}(p) = u_{вых}(p)/i_{вых}(p);$$

выходная проводимость $Y_{вых}(p)=i_2(p)/u_2(p)$

или $$Y_{вых}(p)=i_{вых}(p)/u_{вых}(p).$$

Входной иммитанс (сопротивление $Z_{вх}(p)$ или проводимость $Y_{вх}(p)$) зависит от параметров 2x2-полюсника и, в общем случае, от иммитанса нагрузки $Z_н=1/Y_н$.

Выходной иммитанс ($Z_{вых}(p)$ или $Y_{вых}(p)$) определяется как входной со стороны нагрузки при замене обратимого двухполюсника нагрузки идеальным источником тока i_2 или напряжения u_2 и зависит как от параметров самого 2×2-полюсника, так и от иммитанса эквивалентного источника сигнала на входе. При этом полагают $e=0$ и $J=0$, т. е. источник напряжения сигнала, поскольку он в схеме представлен идеальным, закорачивают, а источник тока сигнала — разрывают.

Передаточные функции:

коэффициент передачи напряжения

$$K_U(p)=K_{21U}=u_2(p)/u_1(p) \quad \text{или}$$

$$K_U(p)=u_{вых}(p)/u_{вх}(p);$$

коэффициент передачи тока

$$K_I(p) = K_{21I}=i_2(p)/i_1(p) \quad \text{или}$$

$$K_I(p) = i_{вых}(p)/i_{вх}(p);$$

сопротивление передачи (передаточное сопротивление)

$$Z_{пер}(p)=Z_{21}=u_2(p)/i_1(p) \quad \text{или} \quad Z_{пер}(p)=u_{вых}(p)/i_{вх}(p);$$

проводимость передачи (передаточная проводимость)

$$Y_{пер}(p)=Y_{21}=i_2(p)/u_1(p) \quad \text{или} \quad Y_{пер}(p)=i_{вых}(p)/u_{вх}(p).$$

Соотношения между функциями представлены табл. 2.1.

Перечисленные функции характеризуют собственно четырехполюсник. Однако можно ввести функции с учетом параметров источников сигналов. Такие функции называют *передаточными функциями цепи передачи* или *полными схемными функциями:*

$Z_{2i}(p) = u_2(p)/J(p)$; $Y_{2i}(p) = i_2(p)/\varepsilon(p)$, $K_{2iu}(p) = u_2(p)/\varepsilon(p)$, $K_{2ii}(p) = i_2(p)/J(p)$,

Таблица 2.1

Соотношения между схемными функциями
$Z_{пер} Y_{пер} = K_I K_U$
$Z_{вх} = \dfrac{Z_{пер}}{K_U} = \dfrac{K_I}{Y_{пер}} = \dfrac{K_I}{Y_н K_U} = Z_н \dfrac{K_I}{K_U}$
$Y_{вх} = \dfrac{K_U}{Z_{пер}} = \dfrac{Y_{пер}}{K_I} = Y_н \dfrac{K_U}{K_I} = \dfrac{K_U}{Z_н K_I}$
$Z_{пер} = Z_н K_I = \dfrac{K_I}{Y_н}$
$Y_{пер} = Y_н K_U = \dfrac{K_U}{Z_н}$

и **передаточными функциями входной цепи:**

$Z_{1i}(p) = U_1(p)/J(p)$, $Y_{1i}(p) = i_1(p)/\varepsilon(p)$, $K_{1iu}(p) = u_1(p)/\varepsilon(p)$, $K_{1ii}(p) = i_1(p)/J(p)$.

Коэффициент передачи мощности определяет эффективность передачи энергии через многополюсную цепь и является мерой скорости изменения или рассеяния энергии. Мощность, поступающая в 2×2-полюсник, в данный момент времени равна произведению входных тока и напряжения и направлена внутрь, как показано на рис. 2.1, *а*. При изменении направления тока или напряжения изменяется и направление мощности. При гармоническом изменении токов и напряжений различают *комплексную* ui, *полную* $u\hat{i}$ (здесь $\hat{i}$ и $\hat{u}$ — комплексно сопряженные величины), *полезную* $\mathrm{Re}\,u\hat{i}$ и *реактивную* $\mathrm{Im}\,u\hat{i}$ мощности. Отсюда и коэффициенты передачи мощности имеют различный смысл [9].

Коэффициент передачи комплексной мощности от входа 2×2-полюсника к его нагрузке

$$K_{\text{МК}} = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{Y_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} Z_{21}^2 = \frac{Z_{\text{н}}}{Y_{\text{вх}}} Y_{21}^2 = \frac{Y_{\text{н}}}{Y_{\text{вх}}} K_{21U}^2 = \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} K_{21I}^2;$$

коэффициент передачи полной мощности

$$K_{\text{МП}} = \frac{Y_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} |Z_{21}|^2 = \frac{Z_{\text{н}}}{Y_{\text{вх}}} |Y_{21}|^2 = \frac{Y_{\text{н}}}{Y_{\text{вх}}} |K_{21U}|^2 = \frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}} |K_{21I}|^2;$$

коэффициент передачи полезной (активной) мощности

$$K_{\text{МА}} = \frac{\operatorname{Re} Y_{\text{н}}}{\operatorname{Re} Z_{\text{вх}}} |Z_{21}|^2.$$

Располагаемый (достижимый) коэффициент передачи комплексной мощности определяет отношение комплексной мощности, поступающей в нагрузку 2×2-полюсника, к номинальной (падающей) комплексной мощности P_N источника:

$$K_{\text{РК}} = 4\frac{P_{\text{н}}}{P_N} = 4\frac{Y_{\text{н}}}{Z_i} Z_{21}^2 = 4\frac{Z_{\text{н}}}{Y_i} Y_{21}^2 = 4\frac{Y_{\text{н}}}{Y_i} K_{21U}^2 = 4\frac{Z_{\text{н}}}{Z_i} K_{21I}^2,$$

где $P_N = \varepsilon^2/4Z_i = J^2/4Y_i$ — комплексная мощность источника, прикладываемая ко входу цепи при выполнении условия согласования $Z_{\text{вх}} = Z_i$ или $Y_{\text{вх}} = Y_i$.

Располагаемый (достижимый) коэффициент передачи полезной (активной) мощности

$$K_{\text{РА}} = 4\frac{P_{\text{н}}}{P_{NR}} = 4\frac{\operatorname{Re} Y_{\text{н}}}{\operatorname{Re} Z_i} |Z_{21}|^2 = 4\frac{\operatorname{Re} Z_{\text{н}}}{\operatorname{Re} Y_i} |Y_{21}|^2 =$$
$$= 4\frac{\operatorname{Re} Y_{\text{н}}}{\operatorname{Re} Y_i} |K_{21U}|^2 = 4\frac{\operatorname{Re} Z_{\text{н}}}{\operatorname{Re} Z_i} |K_{21I}|^2,$$

где $P_{NR} = \varepsilon^2/4\operatorname{Re} Z_i = J^2/4\operatorname{Re} Y_i$ — номинальная полезная (активная) мощность источника при условии сопряженного согласования $\hat{Z}_{\text{вх}} = Z_i$ или $\hat{Y}_{\text{вх}} = Y_i$, когда мнимая часть суммарного иммитанса $\hat{Z}_{\text{вх}} + Z_i$ или $\hat{Y}_{\text{вх}} + Y_i$ равна нулю (емкостные составляющие не компенсируются индуктивными).

Если условия согласования выполняются одновременно на входе и выходе 2×2-полюсника, то указанные коэффициенты достигают предельно достижимых максимальных значений для данного 2×2-полюсника.

Процесс нахождения схемных функций сводится, как видно из (2.5), к раскрытию определителей и алгебраических дополнений матрицы W коэффициентов системы уравнений, составляющих математическую модель схемы.

Известные методы построения схемных функций целесообразно различать по следующим основным классификационным признакам [31]:

1) система координат, в которой отображается топологическая модель цепи (система контуров, сечений и т. п.);
2) способ раскрытия определителя матрицы схемы;
3) язык описания алгоритма;
4) форма получаемой схемной функции.

Выбор системы координат в принципе произволен, однако рациональность выбора определяется исходной топологической моделью и стремлением к простоте (уменьшению числа переменных и т. п.).

В основе различных алгоритмов раскрытия определителей лежат теоремы линейной алгебры.

В настоящее время достаточно хорошо развиты три языка для описания алгоритмов построения аналитических выражений схемных функций: алгебраический, топологический и теоретико-множественный.

Алгебраический язык основан на табличном представлении информации, т. е. в виде матриц коэффициентов систем уравнений, соответствующих исходной топологической модели.

Топологический язык основан на представлении топологической модели цепи или соответствующей ей системы уравнений в виде графа, что затем позволяет графически отобразить процедуры определения схемных функций.

Теоретико-множественное представление информации в схеме тесно связано с ее топологическим образом и считается наиболее компактным, а значит, содержащим минимальный объем операций при построении выражений схемных функций. Оно является наиболее удобным для постановки на ЭВМ.

2.2. Формы представления схемных функций

Для проведения анализа электронных схем необходимо использовать наиболее удобные формы представления схемных функций. Рассмотрим их. В общем случае каждая схемная функция является функцией комплексной переменной $p=\sigma\pm j\omega$, поскольку, согласно формуле Крамера (2.5), она выражается через алгебраическое дополнение Δ_{ij} и определитель Δ матрицы эквивалентных параметров схемы. Последние составляются, в свою очередь, из параметров компонентов схемы, в том числе реактивных (конденсаторов, имеющих сопротивление $Z_C=1/pC$, индуктивностей $Z_L=pL$) и иммитансных (зависимых от p в более сложном виде. Например, для транзистора входная проводимость $g_{11}=[r_к(1+\beta)+r_э+pr_эr_к(C_к+C_э)]/[r_эr_б+$ $+r_к[r_э+r_б/(1+\beta)]+pr_эr_кr_б(C_к+C_э)]$.

В результате

$$F_{ij}=\frac{\Delta_{ji}(p)}{\Delta(p)}$$

или в общем случае

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0}{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0}. \tag{2.6}$$

Здесь все коэффициенты a_i и b_i вещественны и определяются только параметрами компонентов эквивалентной схемы цепи. Выражение (2.6) можно записать в ином виде в соответствии с основной теоремой алгебры:

$$F(p)=H\frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)}, \tag{2.7}$$

где $H=a_n/b_m$ — постоянный множитель (масштабный коэффициент). Его часто опускают, предварительно пронормеровав функцию; z_i — корни числителя. Когда текущее значение p принимает значение $p=z_i$, функция $F(p)=0$, поэтому корни числителя z_i называют *нулями* (zero) *функции*; p_i — корни знаменателя. Когда $p=p_i$, функция стремится к бесконечности, поэтому p_i называют *полюсами* (pole) *функции*.

Если имеется несколько одинаковых корней числителя или знаменателя, то их называют *кратными нулями* или *кратными полюсами* соответственно, а *их чис-*

лом определяют порядок кратности нуля или *полюса*. При отсутствии кратных нулей или полюсов их называют *различными* или *простыми*.

Поскольку коэффициенты функции $F(p)$ могут быть только действительными, она обладает свойством *сопряженной симметрии*. Это означает, что ее нули и полюсы на плоскости комплексной переменной могут располагаться либо на действительной оси, либо симметрично относительно ее, т. е. могут быть либо действительными, либо мнимыми или комплексными, но только попарно сопряженными.

Для упрощения аналитического вида дробно-рациональную функцию (2.6) обычно представляют в виде *суммы простых дробей* или *цепной дроби*. Для получения цепной (лестничной или непрерывной) дроби вида

$$F(p) = F_1 + \cfrac{1}{F_2 + \cfrac{1}{F_3 + \cfrac{1}{F_4 + \dots}}} \tag{2.8}$$

необходимо делить числитель функции на ее знаменатель (или наоборот) с последующим делением знаменателя остатка от предыдущего деления на его числитель и записывать частные от каждого деления в приведенную выше формулу. Представление схемной функции в виде цепной дроби используется в задаче синтеза лестничных цепей.

Общий вид разложения дробно-рациональной функции $F(p)$ *на сумму простых (частных) дробей*, имеющую l простых и r кратных полюсов k-й кратности, приводится к следующему:

$$F(p) = \sum_{q=0}^{n-m} K_q p^q + \sum_{i=1}^{l} \frac{K_i}{p - p_i} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{k} \frac{K_{is}}{(p-p_i)^s}\,. \tag{2.9}$$

Первую сумму получают путем деления полинома числителя на полином знаменателя $F(p)$. Обычно (для реальных цепей) она содержит не более двух членов типа $K_0 + K_{01}p$, поскольку $n \leq m - 1$. Для получения остальных сумм простых дробей необходимо найти все полюсы p_i, затем вычислить коэффициенты K_i и K_{is} по известным формулам из теории вычетов

$$K_{i1} = [(p - p_i)^k F(p)]\,|\, p = p_i, \tag{2.10}$$

$$K_{lk} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[(p-p_l)^k F(p) \right]_{p=p_l}. \qquad (2.11)$$

Для простых полюсов коэффициенты разложения K_l вычисляют по первой из этих формул.

От аналитических форм представления схемных функций в виде дробно-рациональных функций комплексного переменного (2.6) и (2.7) можно перейти к более наглядным графическим. Самой простой формой графического представления является так называемое *полюсно-нулевое*. Карта нулей и полюсов функции строится на плоскости комплексной частоты (p-плоскости) путем нанесения координат всех ее нулей в виде кружочков и всех полюсов в виде крестиков (рис. 2.2).

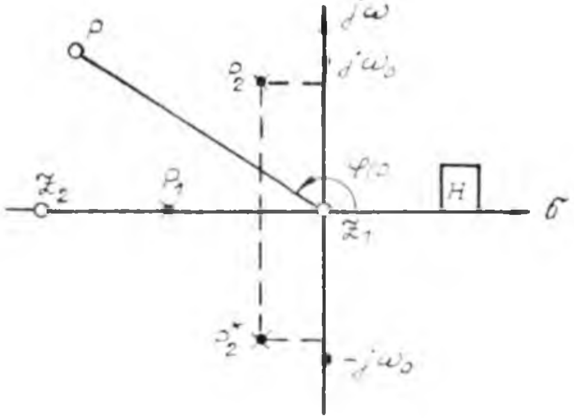


Рис. 2.2

Порядок кратности обозначают цифрами, постоянный (масштабный) множитель H иногда указывают справа у действительной оси в квадратике.

Текущее значение переменной p на комплексной плоскости представляется в виде вектора $p = (\sqrt{\sigma^2 + \omega^2})\, e^{j\varphi}$, направленного из начала координат в данную точку плоскости. Нули и полюсы функции также могут изображаться векторами $p_i = (\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2})\, e^{j\varphi_i}$. Соответственно можно отобразить векторами и множители типа $(p - Z_i)$, $(p - p_i)$ в выражении схемной функции (2.7). Тогда оно может быть записано в виде

$$F(p) = |F(p)|\, e^{j\varphi(p)}. \qquad (2.12)$$

где модуль функции в точке p

$$|F(p)| = H\frac{\prod_{i=1}^{n}|p - z_i|}{\prod_{i=1}^{m}|p - p_i|}; \qquad (2.12а)$$

фазовый угол функции в точке p

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{z_i} - \sum_{i=1}^{m}\varphi_{p_i}; \qquad (2.12б)$$

расстояние от точки p до i-го нуля (нулевое расстояние) или полюса (полюсное расстояние)

$$|p - z_i| = \sqrt{(\sigma - \sigma_i)^2 + (\omega - \omega_i)^2}; \qquad (2.12в)$$

φ_{z_i}, φ_{p_i} — углы между направлением векторов $p - z_i$, $p - p_i$ и положительной действительной полуосью, отсчитываемые против хода часовой стрелки.

Пусть $F(p)$ не имеет нулей и полюсов в начале координат p-плоскости, тогда формула (2.12) примет вид

$$F(p) = |F(0)|\,e^{j\varphi(0)}\frac{\prod_{i=1}^{n}(p/z_i - 1)}{\prod_{i=1}^{m}(p/p_i - 1)}, \qquad (2.13)$$

где модуль функции в начале координат

$$|F(0)| = H\frac{\prod_{i=1}^{n}|z_i|}{\prod_{i=1}^{m}|p_i|}; \qquad (2.13а)$$

фазовый угол функции в начале координат

$$\varphi(0) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{z_i} - \sum_{i=1}^{m}\varphi_{p_i}; \qquad (2.13б)$$

φ_{z_i}, φ_{p_i} — угол между положительным направлением действительной полуоси и направлением к нулю или полюсу из начала координат, отсчитываемый против хода часовой стрелки.

На основании формул (2.12) и (2.13) определяют графически значение функции $F(p)$ в любой точке p-плоскости с учетом полюсно-нулевого ее изображения.

Подставляя в (2.12) $p=\sigma+j\omega$, получим следующие формы записи схемной функции:

$$F(p)=F(\sigma+j\ \ )=F_R(\sigma,\ \omega)+jF_I(\sigma,\ \omega) \tag{2.14}$$

или $F(p)=F(\sigma+j\omega)=F(\sigma,\ \omega)e^{j\varphi(\sigma,\ \omega)}$, (2.14а)

где модуль функции $F(p)$:

$$F(\sigma,\ \omega)=\sqrt{F_R^2(\sigma,\ \omega)+F_I^2(\sigma,\ \omega)}, \tag{2.14б}$$

$$\varphi(\sigma,\ \omega)=\operatorname{arctg}\frac{F_I(\sigma,\ \omega)}{F_R(\sigma,\ \omega)}\ . \tag{2.14в}$$

Функции $F_R(\sigma,\ \omega)$, $F_I(\sigma,\ \omega)$, $F(\sigma,\ \omega)$ и $\varphi(\sigma,\ \omega)$, как видим, являются функциями двух переменных σ и ω, а значит, графически представляются в виде поверхностей, расстояния (высоты) которых от координатной плоскости с осями σ и $j\omega$ определяются значениями этих функций. Из примеров, приведенных в [4], видно, что полюсы, например функции $F(\sigma,\ \omega)$, являются горными пиками, а нули впадинами как бы некоей горной местности. Линии фаз представляются здесь траекториями, по которым скатывался бы с возвышенностей безынерционный шарик. Конечно, работать с таким графическим изображением схемных функций затруднительно. Несколько более простым может быть задание функции двух переменных в виде семейства линий равного значения (изолиний) подобно геодезическим картам. В этом случае функция схемы представляется графически на комплексной плоскости семействами изолиний функций $F_R(\sigma,\ \omega)$, $F_I(\sigma,\ \omega)$, $F(\sigma,\ \omega)$ и $\varphi(\sigma,\ \omega)$.

Изображение схемных функций семейством изолиний совпадает также и с картиной электростатического поля разноименных точечных зарядов, расположенных в нулях и полюсах. Причем силовые линии поля совпадают с линиями равных фаз схемной функции, а эквипотенциальные линии — с линиями равных модулей [9].

2.3. Частотные характеристики

В практике анализа и расчета электронных цепей непосредственное применение графических изображений схемных функций затруднительно, поскольку они содержат в себе слишком большой объем информации, спрессованной в ограниченном координатном пространстве. Схемная функция отображает свойства цепи независимо от вида входных сигналов, в то время как реальные цепи и устройства работают, как правило, с вполне определенным видом входных сигналов, ограниченных, например, некоторым диапазоном частот или максимальной и минимальной скоростью изменения во времени, диапазоном изменения амплитуд и т. п. Если учесть подобные ограничения, то можно, очевидно, упростить изображение схемной функции. Практика анализа схем показала, что, исходя из особенностей работы электронных цепей, а также с целью упрощения анализа их схем необходимо в большинстве случаев отдельно рассматривать процесс в момент подключения ко входу схемы входного сигнала, т. е. *переходный процесс*, а затем *установившийся (стационарный) процесс*, который устанавливается в цепи по окончании переходного процесса.

С указанных позиций оказалось целесообразным ввести в практику рассмотрение реакции цепи на простейшие формы сигналов. Среди таковых в первую очередь привлекли внимание гармонические функции с единичной амплитудой. Дело в том, что, как известно, любые сложные формы сигналов, воздействующие на цепь в некотором интервале времени Δt и удовлетворяющие условиям Дирихле, можно представить в виде суммы простейших гармонических сигналов, т. е. разложением в сходящийся тригонометрический ряд Фурье

$$f(t) = \sum_n a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t,$$

где a_n, b_n — коэффициенты гармоник; $n\omega t = n\pi/\Delta t$ — частоты гармоник. Чем более функция входного сигнала $f(t)$ приближается к гармонической, тем меньшее число членов ряда Фурье требуется для ее описания (аппроксимации) с заданной точностью. С другой стороны, в соответствии с принципом суперпозиции, приложимым к линейным цепям, реакция цепи на воздействие сложной формы может быть определена как сумма реакций на простейшие составляющие этого воздействия, т. е. как сумма реакций на каждую его гармоническую составляющую.

На p-плоскости гармоническая функция с частотой, допустим ω_0, отображается очень просто — двумя симметрично расположенными (попарно сопряженными) точками на мнимой оси. Обычно рассматривают только положительную мнимую полуось, на которой круговые частоты ω положительны, что имеет простую физическую интерпретацию. Для получения реакции цепи на гармоническое воздействие достаточно перейти от $F(p)$ к $F(j\omega)$, т. е. считать, что p принимает значение $p=j\omega$. Тогда $F(p)|_{p=j\omega}=F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$,

где $|F(j\omega)| = F(\omega) = \sqrt{F(j\omega)F(-j\omega)}$ — модуль;

(2.15)

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2j}\ln\frac{F(j\omega)}{F(-j\omega)} \quad \text{фазовый угол.} \tag{2.16}$$

Поскольку сложная функция воздействия представляется, как правило, суммой большого числа гармонических составляющих, практически оказалось целесообразным рассматривать зависимость реакции цепи от частоты. Для этого были введены так называемые частотные характеристики схемной функции $F(p)$, или просто схемы.

Частотной характеристикой схемы называют совокупность значений функции $F(j\omega)$ на отрезке положительной полуоси $j\omega$, соответствующем некоторому заданному диапазону изменения частот $\omega—\Delta\omega$.

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) схемы называют соответствующую совокупность значений модулей $F(\omega)$ в заданном диапазоне изменения частот $\Delta\omega$.

Фазово-частотной, или фазовой, характеристикой (ФЧХ) схемы называют соответствующую совокупность значений фазовых углов $\varphi(\omega)$ в заданном диапазоне частот $\Delta\omega$.

Амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ), или частотным годографом, называют частотную характеристику $F(j\omega)$, построенную в полярных координатах $\mathrm{Re}\,F(j\omega)$ и $\mathrm{Im}\,F(j\omega)$:

$$F(j\omega)=\mathrm{Re}\,F(j\omega)+j\mathrm{Im}F(j\omega), \tag{2.17}$$

где $\mathrm{Re}F(j\omega)=[F(j\omega)+F(-j\omega)]/2=|F(j\omega)|\cos\varphi(\omega)$;

(2.18)

$$j\mathrm{Im}F(j\omega) = [F(j\omega)-F(-j\omega)]/2 = j|F(j\omega)|\sin\varphi(\omega).$$

(2.19)

Частотный годограф (АФХ) на комплексной плоскости значений $F(j\omega)$ представляет собой кривую, являющуюся геометрическим местом точек конца вектора $F(j\omega)$ для всех значений ω, как правило, в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ (рис. 2.3, *а*). АФХ объединяет амплитудно- и фазово-частотные характеристики в одну кривую (рис. 2.3, *а*). АЧХ определяется длиной вектора,

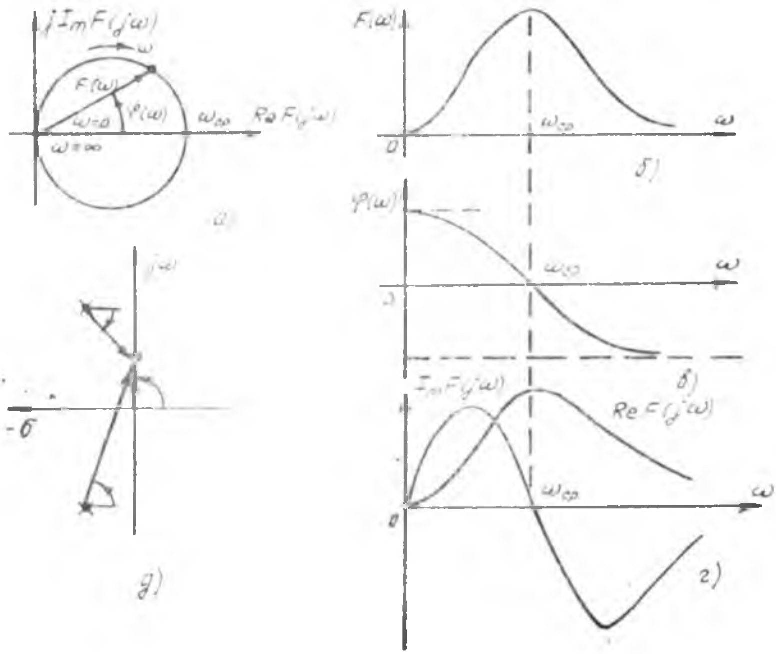


Рис. 2.3

проведенного из начала координат, а ФЧХ — углом этого вектора с горизонтальной осью комплексной плоскости (рис. 2.3, *а*).

Вещественная амплитудно-частотная характеристика определяется как вещественная часть функции $F(j\omega)$: $F_R(\omega) = \mathrm{Re}\, F(j\omega)$.

По известным АЧХ $F(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ вещественную АЧХ можно определить так:

$$F_R(\omega) = F(\omega) \cos\varphi(\omega). \qquad (2.20)$$

При малых значениях φ вещественная АЧХ мало отличается от АЧХ $F(\omega)$ (рис. 2.3, *г*).

Мнимая амплитудно-частотная характеристика определяется как мнимая часть функции $F(j\omega)$:

$$F_I(\omega) = \mathrm{Im}\, F(j\omega)$$

или

$$F_I(\omega) - F(\omega)\sin\varphi(\omega). \qquad (2.21)$$

Широкое применение в практике описания радиоэлектронных устройств (усилители, активные фильтры, преобразователи) находят из числа перечисленных в основном АЧХ и ФЧХ. Последние легко снимаются экспериментально при исследовании, аттестации и поверке радиоэлектронных устройств. При этом на вход линейного устройства подают от генератора гармонический сигнал $u_{вх}(t) = U_{вх}\sin\omega t$. По окончании переходного процесса реакция цепи будет также гармонической функцией той же частоты, но может отличаться от входного сигнала амплитудой и фазой колебаний, т. е.

$$u_{вых}(t) = U_{вых}\sin(\omega t + \varphi).$$

Снимая зависимости $\frac{U_{вых}}{U_{вх}}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при постоянном $U_{вх}$, находят искомые частотные характеристики АЧХ и ФЧХ.

Широко распространено в практике построение АЧХ и ФЧХ в *логарифмическом масштабе по оси частот,* чем достигается компактность их изображения в более широком диапазоне частот. Для упрощения пользования частотными характеристиками, кроме того, логарифмируют модель $F(\omega)$, что позволяет избежать многообразия в масштабах и размерностях. Отсчет $F(\omega)$ производится в этом случае в децибеллах (дБ) или неперях (неп):

$$F_{дБ}(\omega) = 20\,\log_{10}F(\omega) \qquad (2.22)$$

или

$$F_{неп}(\omega) = \ln F(\omega). \qquad (2.23)$$

При этом полезно знать соотношение

$$1_{дБ} = \frac{20}{\ln 10} = 8{,}686\ \text{неп}. \qquad (2.24)$$

Удобство перевода АЧХ в ЛАЧХ состоит, кроме того, и в том, что при этом можно свести операции умножения и деления к операциям сложения и вычитания характеристик. Так, для многокаскадной схемы суммарные АЧХ и ФЧХ находятся из соотношений

$$F = F_1 F_2 \ldots F_n,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

Переходим к ЛЧХ, тогда

$$F_{дб} = F_{1дб} + F_{2дб} + \ldots + F_{nдб}.$$

Получение аналитических выражений рассмотренных частотных характеристик осуществляется достаточно просто путем замены в выражении соответствующей схемной функции комплексной переменной p на мнимую ее часть $j\omega$. При полюсно-нулевом задании схемной функции $F(p)$ зависимости АЧХ, ФЧХ и АФХ легко строить с помощью формул (2.12) или (2.13), определяя графически значение модуля и фазы для точек, лежащих на заданном отрезке положительной полуоси $j\omega$. Последний способ построения применяют для качественной или приближенной оценки хода кривых частотных характеристик. Аналитические выражения используют, естественно, в численных способах получения частотных характеристик, в том числе и с применением ЭВМ.

При большом требуемом числе расчетных точек алгоритмы вычисления АЧХ состоят в переходе к таким формам $F(p)$, которые исключают операции над комплексными числами. Так, например, от $F(p)$ в форме (2.6) переходят к $F^2(\omega) = [F(p)F(-p)]_{p=j\omega}$.
Пусть имеем

$$F(p) = \frac{p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0}{\omega^{2n} + d_{n-1}\omega^{2n-2} + \ldots + d_1\omega^2 + d_0},$$

тогда

$$F^2(\omega) = \frac{\omega^{2n-2} + c_{n-2}\omega^{2n-4} + \ldots + c_1\omega^2 c + c_0}{\omega^{2n} + d_{n-1}\omega^{2n-2} + \ldots + d_1\omega^2 + d_0}. \qquad (2.25)$$

Коэффициенты a_i и b_i связаны с c_i и d_i формулами [31]

$$\left.\begin{aligned} d_{n-k} &= 2\left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-k} b_{n-(2k-j)} b_{n-j}\right] + b_{n-k}^2, \\ c_{n-k} &= 2\left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-k} a_{n-(2k-j)} a_{n-j}\right] + a_{n-k}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

Например, для разных значений k

$$d_{n-1} = b_{n-1}^2 - 2b_{n-2}b_n,$$

$$d_{n-2} = b_{n-2}^2 - 2b_{n-3}b_{n-1} + 2b_{n-4}b_n,$$
$$\vdots$$
$$d_2 = b_2^2 - 2b_3b_1 + 2b_4b_0,$$
$$d_1 = b_1^2 - 2b_2b_0,$$
$$d_0 = b_0^2.$$

Пример: $F(p) = (2p+10)/(p^2+5p+5)$. Для нее $F^2(\omega) =$

$$= \frac{c_1\omega^2 + c_0}{\omega^4 + d_1\omega^2 + d_0} = \frac{2^2\omega^2 + 10^2}{\omega^4 + (5^2 - 2\cdot 1\cdot 5)\,\omega^2 + 5^2} = \frac{4\omega^2 + 100}{\omega^4 + 15\omega^2 + 25}.$$

Другой алгоритм основан на представлении $F(j\omega)$ в форме (2.14)

$$F(j\omega) = \frac{A_R(\omega) + jA_I(\omega)}{B_R(\omega) + jB_I(\omega)} = F_R(\omega) + jF_I(\omega),$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_R(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots, \quad A_I(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots; \\ B_R(\omega) &= b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots, \quad B_I(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} F_R(\omega) &= \frac{A_R(\omega)\,B_R(\omega) + A_I(\omega)\,B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)}, \\ F_I(\omega) &= \frac{A_I(\omega)\,B_R(\omega) - A_R(\omega)\,B_I(\omega)}{B_R^2(\omega) + B_I^2(\omega)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

Отсюда АЧХ

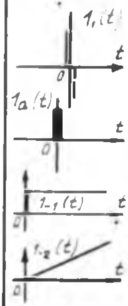
$$F(\omega) = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)}.$$

2.4. Временные характеристики

Работа радиоэлектронных устройств в импульсном режиме (генераторы и усилители импульсных сигналов, импульсные преобразователи и т. п.) удобнее всего описывается реакциями на простейшие скачкообразные сигналы. Эти сигналы моделируют простейшие импульсные воздействия. В теории электронных схем известно целое семейство так называемых единичных функций [10]. Они приведены в табл. 2.2. Каждая единичная функция в табл. 2.2 связана с соседней нижней через операцию дифференцирования, а с соседней верхней через ин-

Таблица 2.2

Семейство единичных функций

Операция перехода	Обозначение	Изображение $L[1-i(t)]$	Название единичной функции	Условное графическое изображение
Направление дифференцирования ↑ Направление интегрирования ↓	$1_n(t)$	p^n	. . . .	. . . . .
	⋮	⋮		⋮
	$1_2(t)$	p^2	единичный тройной импульс	
	$1_1(t)$	p	единичный двойной импульс	
	$1_0(t)$ ($\delta(t)$)	1	единичный импульс (дельта-функция)	
	$1_{-1}(t)$	$1/p$	единичная ступень	
	$1_{-2}(t)$	$1/p^2$	единичный наклон	
	⋮	⋮	⋮	⋮
	$1_{-n}(t)$	$1/p^n$	. . . .	. . . . .

тегрирование, т. е. $\frac{d}{dt}1_{-1}(t)=1_0(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}1_1(t)dt$. Точное определение этих функций зависит от принятого определения импульсной функции $1_0(t)$.

Единичная импульсная функция (единичный импульс), или **функция Дирака** (δ-функция) $1_1(t)$, определяется так:

$$\left.\begin{aligned} &1_0(t)=\delta(t)=0 \text{ при } t\neq 0\\ &\int\limits_{-\infty}^{+\infty}1_0(t)\,dt=1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Физически единичный импульс представляется бесконечно большой амплитуды (теоретически) и бесконечно малой длительности ($t_n=0$) с площадью, равной единице.

Единичная ступенчатая функция (единичная ступень) $1_{-1}(t)$ была использована Хевисайдом для исследования переходных процессов в электрических цепях

$$
\begin{aligned}
&1_{-1}(t)=0 && \text{при } t<0,\\
&1_{-1}(t)=1/2 && \text{при } t=0,\\
&1_{-1}(t)=1 && \text{при } t>0.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Физически единичная ступень представляет собой резкий скачок напряжения или тока, достигающий единичного значения за $t=0$, поэтому определение значения $1/2$ при $t=0$ имеет лишь теоретическое значение.

Рассмотренные определения единичных функций математически являются не вполне строгими. Именно поэтому Хевисайд был подвергнут значительной критике математиками своего времени. Однако в течение 40-х годов нашего столетия французский математик Лоран Шварц разработал так называемую теорию распределений, которая широко использует единичные функции. Его теория ставит операционное исчисление Хевисайда на строгую математическую основу. Единичная ступень аппроксимируется следующей предельной функцией:

$$1_{-1}(t)=\lim_{\lambda\to\infty} 1(t,\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\left(1/2+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda t\right). \tag{2.31}$$

График этой функции для разных значений λ и $|\operatorname{arctg}\lambda t|<\pi/2$ показан на рис. 2.4, *а*. Соответственно получается и предельный переход к единичному импульсу:

$$\frac{d}{dt}1(t,\lambda)=1'(t,\lambda)=\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2t^2+1)},$$

$$1_0(t)=\lim_{\substack{t\to 0\\ \lambda=\infty}}\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2t^2+1)}, \tag{2.32}$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty}1'(t,\lambda)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2t^2+1)}\,dt=1.$$

Существуют и другие семейства непрерывных функций, которые в пределе приближаются к единичному импульсу.

Необходимо подчеркнуть, что функция Дирака не является функцией в обычном смысле. Она проявляет

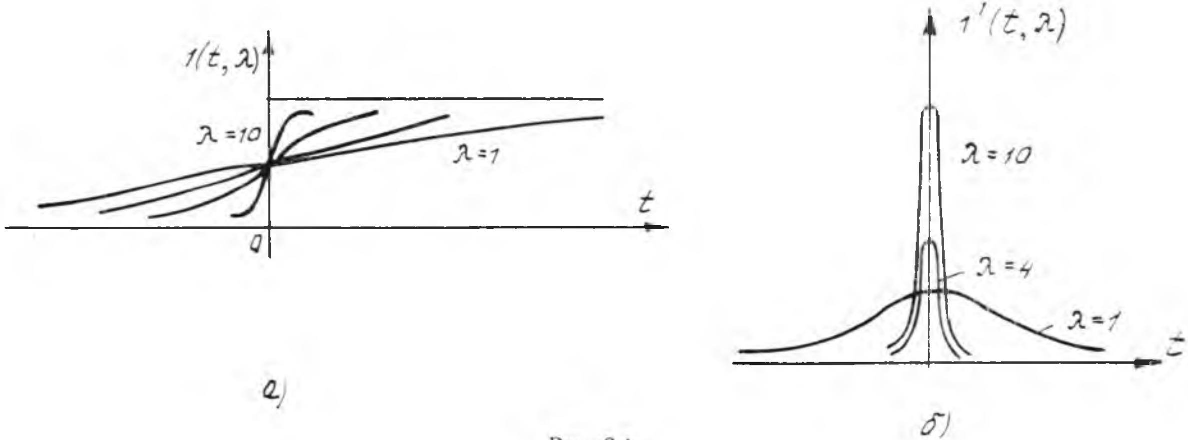


Рис. 2.4

себя **только** на пространстве других функций. Поэтому из всех свойств δ-функции для нас важнейшим является ее фильтрующее свойство, заданное соотношениями:

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0),$$

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

при условии, что $f(t)$ непрерывна в моменты $t=0$ и $t=t_0$. При помощи этого свойства δ-функция «высвечивает» значение функции $f(t)$ в момент своего действия.

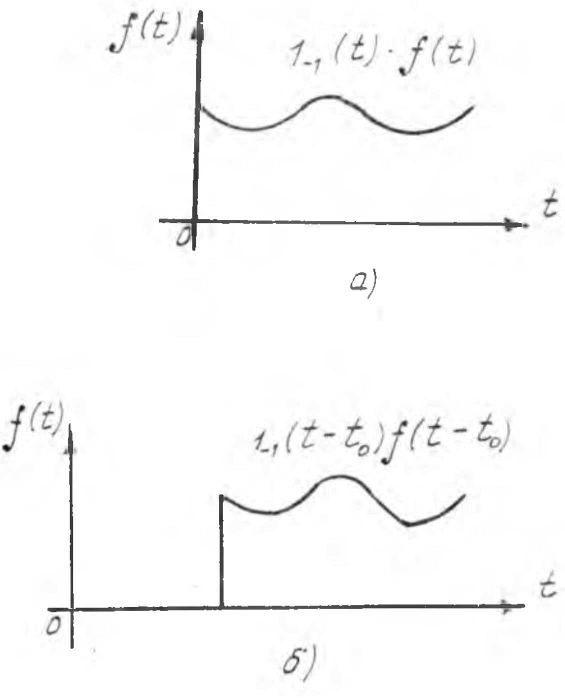


Рис. 2.5

Запомним некоторые формальные соотношения, используемые на практике:

$$1_0(t)=1_0(-t),$$

$$1_0(at)=\frac{1}{a}\,1_0(t),$$

$$f(t)\,1_0(t-a)=f(a)\,1_0(t-a).$$

Подключение ко входу цепи в момент $t=0$ некоторого непрерывного воздействия $f(t)$ следует при анализе переходного процесса записывать так: $1_{-1}(t)f(t)$ (рис. 2.5, *а*). Если та же функция воздействия подключается в другой момент времени, как показано на рис. 2.5, *б*, то скачок должен соответствовать временной функции с задержкой $t=t_0$. Запись такого воздействия следующая: $1_{-1}(t-t_0)\ f(t-t_0)$. Здесь запись $1_{-1}(t-t_0)$ означает, что величина функции равна нулю до момента, когда t станет равным t_0, после которого ее величина становится равной единице.

Пример. Описать форму пилообразного импульса, приведенного на рис. 2.6, *а*. Приведенный импульс можно составить из трех единичных функций, как показано на рис. 2.6, *б*. Таковыми являются:

$$f_1(t)=A1_{-2}(t-t_0),$$

$$f_2(t)=-A(t_1-t_0)1_{-1}(t-t_1),$$

$$f_3(t)=-A1_{-2}(t-t_1).$$

Описание импульса через единичные функции

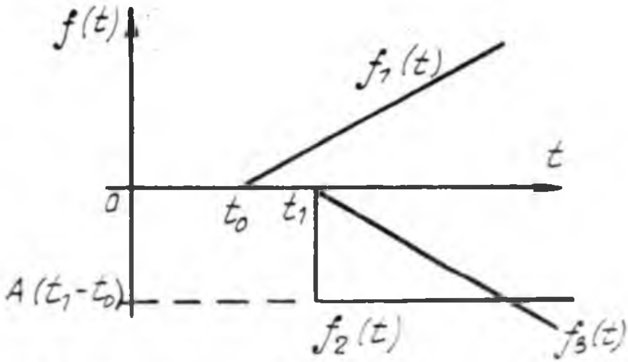
$$f(t)=A[1_{-2}(t-t_0)-(t_1-t_0)1_{-1}(t-t_1)-1_{-2}(t-t_1)].$$

Импульсной характеристикой (функцией) схемы называют реакцию схемы на единичный импульс и находят как обратное преобразование Лапласа от выражения схемной функции

$$g(t)=L^{-1}[1\cdot F(p)]. \tag{2.33}$$

Переходной характеристикой (функцией) схемы называют реакцию схемы на единичную ступень и находят путем обратного преобразования Лапласа также от произведения изображения единичной ступени на изображение схемной функции

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{p}F(p)\right]. \tag{2.34}$$



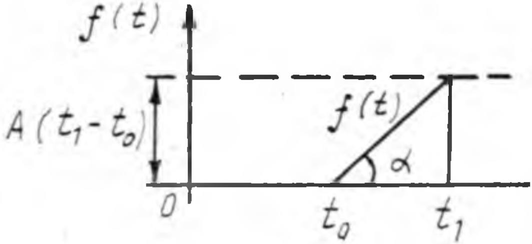
$f(t)=0$ при $t \leq t_0$

$f(t)=At$ при $t_0 \leq t \leq t_1$

$f(t)=0$ $\quad t \geq t_1$

б)

Рис. 2.6



$A = tg\,\alpha$

a)

Из определений временных характеристик следует, что для линейных схем их изображения связаны между собой соотношениями: $g(p)=ph(p)$ или $h(p)=g(p)/p$, а их оригиналы — $gt=\partial h(t)/\partial t$ или $h(t)=\int\limits_0^t g(t)dt$.

С учетом разложения (2.9) $F(p)$ на простые дроби и формулы (2.10) для расчета коэффициентов разложения при простых полюсах можно записать реакцию схемы на единичную ступень $E1_{-1}(t)$ в более развернутом виде

$$h(t)=\sum_{i=1}^{l}\left\{\left[(p-p_i)F(p)\frac{E}{p}\right]_{p=p_i}e^{p_it}\right\}\times$$
$$\times 1_{-1}(t)+F(0)E1_{-1}(t). \qquad (2.35)$$

Слагаемое $F(0)E=K_0E$ является реакцией схемы в установившемся режиме ($p=0$), соответствующей постоянному входному воздействию E. Присутствие множителя $I_{-1}(t)$ в обоих слагаемых реакции определяет начало отсчета времени (в данном случае начало отсчета $t=0$). В более общем случае, когда имеется простой полюс в бесконечности,

$$h(t)=\left(\sum_{i=1}^{l}K_ie^{p_it}\right)1_{-1}(t)+K_01_{-1}(t)+K_{01}1_0(t). \qquad (2.36)$$

Реакция на единичный импульс ищется путем дифференцирования $h(t)$:

$$g(t)=h'(t)=\left\{\sum_{i=1}^{l}[(p-p_i)F(p)|_{p=p_i}e^{p_it}\right\}1_{-1}(t)+$$
$$+\left\{\sum_{i=1}^{l}\left[(p-p_i)F(p)\frac{1}{p}\right]_{p=p_i}\right\}1_0(t)+K_{01}1_1(t) \qquad (2.37)$$

или

$$g(t)=\left(\sum_{i=1}^{l}K_ie^{p_it}\right)1_{-1}(t)+\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{K_i}{p_i}+K_0\right)1_0(t)+K_{01}1_1(t),$$

где $\left(\sum_{i=1}^{l}K_ie^{p_it}\right)1_{-1}(t)$—экспоненциальные составляющие реакции;

$$\left(\sum_{i=1}^{l} \frac{K_i}{p_i} + K_0\right) 1_0(t)$$ — единичный импульс реакции;

$K_{01}\ 1_1(t)$ двойной импульс реакции.

Аналогично находят реакции на единичный наклон и любую комбинацию известных единичных функций.

Связь между частотными и временными характеристиками для одной схемной функции определяется прямым и обратным преобразованием Фурье [4]. Так,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \tag{2.38}$$

а

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{2.39}$$

или

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_R(\omega) \cos \omega t d\omega \tag{2.40}$$

и

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_I(\omega) \sin \omega t d\omega. \tag{2.41}$$

Путем интегрирования импульсной характеристики найдем переходную

$$h(t) = \int_{0}^{t} g(\tau)\, d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{0} \frac{F_R(\omega)}{\omega} \sin \omega t\, d\omega. \tag{2.42}$$

Существует ряд методов упрощенного (приближенного) решения этих уравнений [4].

Для численных расчетов временных характеристик часто используют ЭВМ. При этом возникает необходимость табулировать значения отдельных составляющих оригинала схемной функции (2.36) и затем суммировать их в выбранные моменты времени. С увеличением порядка схемной функции указанная процедура заметно усложняется. В этой связи разработан ряд алгоритмов, реализующих специальные численные методы определения временных характеристик, удобных для постановки на ЭВМ. Некоторые из них будут рассмотрены в последующих главах.

2.5. Параметры частотных и временных характеристик

С целью упрощения процедуры анализа и расчета схем иногда достаточно ограничиться вычислением отдельных параметров частотных или временных характеристик, упуская трудоемкие операции по полному расчету и построению этих характеристик.

Выражение передаточной функции *неискажающей (идеальной) схемы* имеет вид при $p=j\omega$: $F(j\omega)=$ $=K_0e^{-j\tau\omega}$, откуда выразим АЧХ $K(\omega)=|F(j\omega)|=K_0$ и ФЧХ $\varphi(\omega)=\arg F(j\omega)=-\tau\omega$.
Таким образом, видно, что АЧХ для неискажающей (идеальной) функции передачи схемы не зависит от частоты, а ФЧХ пропорциональна частоте сигналов воздействия (рис. 2.7).

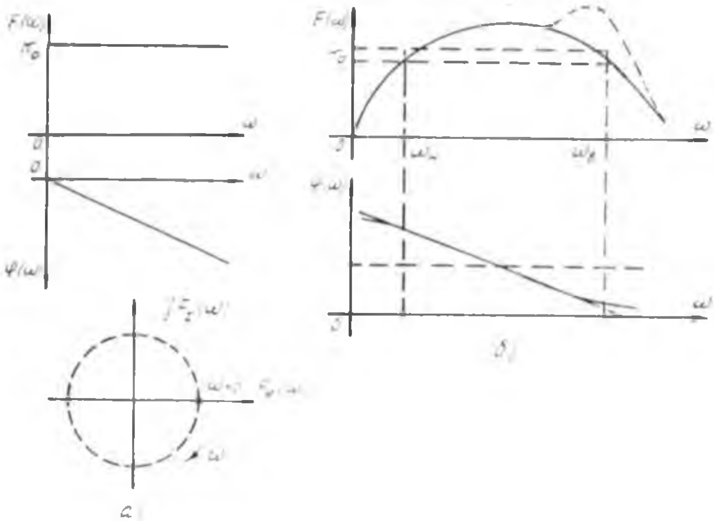


Рис. 2.7

Мерой отличия частотных характеристик реальных цепей от идеальных (неискажающих) являются следующие параметры: *коэффициент неравномерности амплитудно-частотной характеристики М,* определяемый отношением $F(\omega)/K_0 = M \leqslant 1$ *(допустимое значение коэффициента неравномерности* $M_{доп}$ выбирается из разных соображений); *полоса пропускания схемы* определяется диапазоном частот $\Delta\omega = \omega_в - \omega_н$, внутри которого $M \geqslant M_{доп}$; частоты $\omega_в$ и $\omega_н$, ограничивающие полосу пропускания, называются *верхней* и *нижней граничной частотой полосы пропускания.*

Обычно выбирают $M_{доп} = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$. Полоса пропускания, внутри которой $M \geqslant M_{доп} = 0{,}707$, называется *условной.* Здесь исходят из того, что мощность, отдаваемая в нагрузку сигналом на граничных частотах условной полосы, в два раза меньше мощности, отдаваемой сигналом той же величины на средней частоте этой полосы.

В случае резонансных выбросов (рис. 2.7, *б*) на АЧХ вводят коэффициент $M_{рез} = K_{рез}/K_0 > 1$. Для описания избирательных схем, имеющих форму АЧХ и ФЧХ, показанную на рис. 2.8, вводят дополнительные параметры. При этом

$$F(p) = \frac{K_0 p}{p^2 + 2\xi\omega_{рез} p + \omega_{рез}^2},$$

т. е. имеются нуль в начале координат и комплексно-сопряженные полюсы.

Резонансная частота $\omega_{рез}$ — это частота, на которой АЧХ достигает максимума $F(\omega_{рез}) = K_{рез}$. Для избирательных характеристик $F\omega_{рез} = \sqrt{\omega_н\omega_в}$ (рис. 2.8). Полоса пропускания $\Delta\omega$ определяется удвоенным расстоянием комплексно-сопряженных полюсов до мнимой оси $\Delta\omega = 2\xi\omega_{рез}$.

Добротность Q избирательных схем характеризует крутизну спада АЧХ

$$Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}, \qquad (2.43)$$

т. е. чем выше добротность, тем уже полоса пропускания схемы. Добротность определяют обратно пропорционально расстоянию комплексно-сопряженных полюсов до мнимой оси ($\xi\omega_{рез}$), т. е.

$$Q = \omega_{рез}\left(\frac{1}{2\xi\omega_{рез}}\right) = 1/2\xi.$$

Коэффициент широкополосности схемы определяется площадью под кривой АЧХ, которая для данной схемы остается величиной постоянной:

$$K_ш = K_{рез}\Delta\omega = \frac{K_0}{2\xi\omega_{рез}} \cdot \frac{\omega_{рез}}{Q} = K_0. \quad (2.44)$$

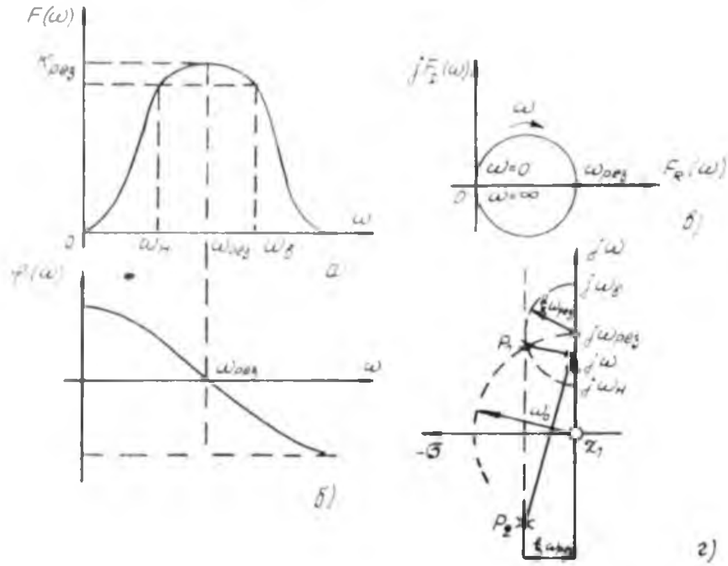


Рис. 2.8

При сужении полосы пропускания $\Delta\omega$ увеличивается соответственно коэффициент передачи на резонансной частоте, и наоборот. Типичная форма переходной характеристики показана на рис. 2.9.

Время нарастания ($t_н$) или *длительность фронта* ($t_ф$) принято определять как меру времени, требуемого для нарастания характеристики $h(t)$ от 0,1 до 0,9 своего конечного (среднего, установившегося) значения.

Для упрощения определения времени нарастания иногда пользуются соотношением, не требующим полного расчета и построения переходной характеристики:

$$t_н = 1 \Bigg/ \left[\left| \frac{dh_н(t)}{dt} \right|_{max} \right]. \quad (2.45)$$

где $\left|\frac{dh_н(t)}{dt}\right|_{max}$ — максимальная крутизна нормированной переходной характеристики. При этом исходят из того, что $t_н$ — это время, за которое реакция схемы достигла бы установившегося значения, если бы скорость ее роста была постоянной согласно выражению (2.45).

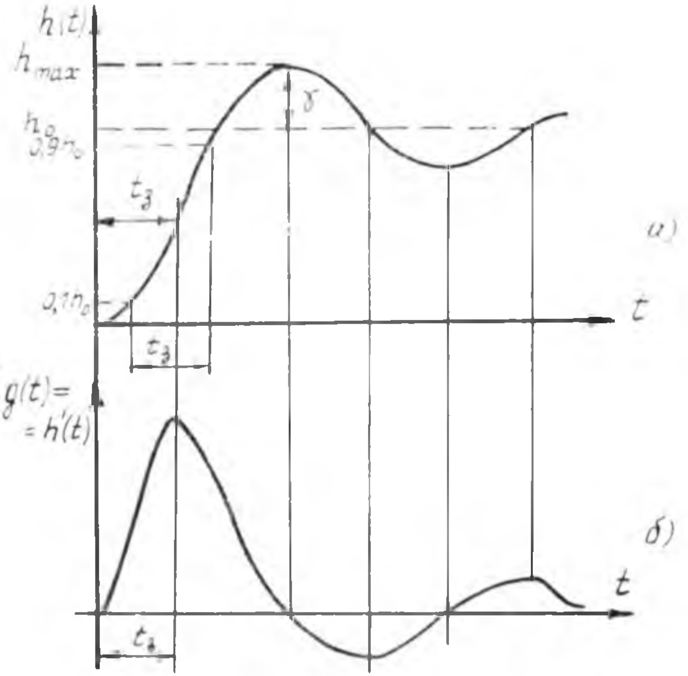


Рис. 2.9

Время задержки $t_з$ — это среднее значение времени в процессе установления, обычно определяется на уровне 0,5 от установившегося значения.

Выброс определяется относительным превышением мгновенного максимального значения реакции схемы над установившимся значением:

$$\gamma = \left(\frac{h_{max}}{h_0} - 1\right) 100\,\%. \quad (2.16)$$

Коэффициент нелинейности переходной характеристики является мерой отклонения скорости изменения реакции от начального или среднего значения:

$$K_{\text{нпх}} = \frac{dh(0)/dt - dh(t)/dt}{dh(0)/dt} \tag{2.47}$$

или

$$K_{\text{нпх}} = \left(\left| \frac{dh}{dt} \right|_{\max} - \left| \frac{dh}{dt} \right|_{\min} \right) \Big/ \left| \frac{dh}{dt} \right|_{\text{ср}}. \tag{2.47а}$$

Значением коэффициента нелинейности $K_{\text{н}}$ оценивается качество импульсных устройств (генераторов импульсов пилообразной формы, интеграторов и др.), в основе формирования сигналов на выходе которых лежит непосредственное использование переходной характеристики (реакции или функции).

Аналогично выражениям (2.47) оценивают нелинейность так называемой амплитудной характеристики усилителей, а также преобразователей типа аналог-цифра, цифра-аналог, аналог-частота и т. п. Так, для снятия характеристики усилителя или усилительного тракта $u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$ в качестве воздействия используют единичный наклон $1_{-2}(t)$: $u_{\text{вх}} = E1_{-2}(t)$. Величиной E определяется динамический диапазон линейного усиления, внутри которого коэффициент нелинейности $K_{\text{н}} < K_{\text{н доп}}$. При этом

$$K_{\text{н}} = \left(\left| \frac{du_{\text{вых}}}{du_{\text{вх}}} \right|_{\max} - \left| \frac{du_{\text{вых}}}{du_{\text{вх}}} \right|_{\max} \right) \Big/ \left| \frac{du_{\text{вых}}}{du_{\text{вх}}} \right|_{\max}$$

или

$$K_{\text{н}} = \left(\left| \frac{du_{\text{вых}}}{du_{\text{вх}}} \right|_{\max} - \left| \frac{du_{\text{вых}}}{du_{\text{вх}}} \right|_{\min} \right) \Big/ \left| \frac{du_{\text{вых}}}{du_{\text{вх}}} \right|_{\text{ср}}. \tag{2.47б}$$

2.6. Обратная связь и чувствительность

Кроме рассмотренных ранее электрических воздействий в реальных условиях эксплуатации на электронную цепь оказывают нежелательное влияние внешние факторы различной природы: время, определяющее старение (необратимое изменение параметров) компонентов цепи, климатические, механические, химические и другие воздействия, определяющие обратимые вариации параметров компонентов цепи. Таким образом, видим, что реальная цепь является нестационарной. Уход параметров компонентов цепи под влиянием внешних факторов вызывает нестабильность ее схемных функций, т. е. приводит к вариации параметров частотных и временных характеристик, положения нулей и полюсов. Одним из универсальных средств борьбы с нестабильностью параметров компонентов, а следовательно и схемных функций, является введение в схемы обратных связей. Ею охватывается нестабильный компонент схемы.

Обратная связь имеет место при наличии цепи передачи части выходного сигнала схемы на ее вход. В результате в схеме образуется замкнутая цепь (кольцо), в состав которой входит та самая нестабильная компонента, влияние которой на величину схемной функции должно быть снижено.

Пусть величина прямой передачи (от входа схемы к ее выходу) есть $F_{\text{пр}}$, а обратная передача (от выхода ко входу) — $F_{\text{обр}}$, тогда передача всей рассматриваемой замкнутой цепи равна $L_{\text{к}}=F_{\text{пр}}\cdot F_{\text{обр}}$ и называется *петлевой (контурной) передачей*, или *возвратным отношением*. Исключим из схемы источник сигнала, разорвем цепь обратной связи (элемент g) и приложим единичный импульс к одному из концов разрыва так, чтобы сигнал распространялся в направлении от входа к выходу схемы. Очевидно, сигнал, возвращающийся к другому концу разрыва цепи, будет иметь величину $1\cdot F_{\text{пр}}\cdot F_{\text{обр}}$. Тогда разность между приложенным и вернувшимся сигналами

$$F_g=1-F_{\text{пр}}\cdot F_{\text{обр}}. \qquad (2.48)$$

Полученная таким образом величина F_g получила название *обратной (возвратной) разности* или просто *обратной связи для параметра* g.

На основании изложенного в схеме с обратной связью входной сигнал $x_{\text{вх}}$ можно рассматривать как разность составляющей $x_{\text{вх.п}}$, не зависящей от передачи сигнала по цепи обратной связи, и составляющей $x_{\text{вх.о}}$, поступающей с выхода на вход по цепи обратной связи. Тогда $x_{\text{вх.о}}=x_{\text{вых}}\cdot F_{\text{обр}}=x_{\text{вх.п}}F_{\text{пр}}\cdot F_{\text{обр}}$ и выражение для функции передачи при некоторых допущениях от входа схемы к ее выходу с учетом выделенной нами обратной связи примет широко известный в теории усилителей вид

$$F=\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}}=\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх.п}}-x_{\text{вх.о}}}=\frac{F_{\text{пр}}}{1-F_{\text{пр}}F_{\text{обр}}}.$$

Если сигнал, возвращающийся ко входу по цепи обратной связи, меняет свой знак, то такую обратную связь называют *отрицательной* (ООС), в другом случае она называется *положительной* (ПОС).

Обратная связь широко используется в технике и в природе, а поэтому ее теория имеет универсальное значение. Введение в схему обратных связей существенно влияет на ее свойства. С помощью обратных связей (отрицательных) повышают стабильность электронных устройств, увеличивают помехоустойчивость, снижают нелинейность передаточных функций (характеристик) схемы, повышают устойчивость. Исследование свойств схем с обратными связями удобнее всего вести методом сигнального графа (см. гл. 4). Нестабильность схемных параметров (схемных функций, параметров частотных и временных характеристик, отдельных токов и напряжений и т. д.) оценивается их чувствительностью к вариациям значений параметров компонентов схемы.

Чувствительность (относительная) определяется как отношение относительного изменения $\Delta K/K$ схемного параметра (схемной функции и др.) к относительному изменению $\Delta g_i/g_i$ одного из параметров компоненты схемы:

$$S_{g_i}^{K_j} = \frac{\Delta K_j/K_j}{\Delta g_i/g_i} = \frac{\Delta K_j}{\Delta g_i}\frac{g_i}{K_j}. \qquad (2.49)$$

При малых изменениях g_i, когда можно считать, что $\Delta g_i \to 0$ и значит $\Delta g_i = dg_i$, можно перейти к *дифференциальной*, или *логарифмической, форме* записи *чувствительности*

$$S_{g_i}^{K_j} = \frac{dK_j/K_j}{d_i g/g_i} = \frac{d(\ln k_j)}{d(\ln d_i)} = \frac{g_i}{K_j}\cdot\frac{dK_j}{dg_i} = \frac{g_i}{K_j}\cdot\frac{\partial K_j}{\partial g_i}. \qquad (2.50)$$

Из последнего выражения ясен способ вычисления чувствительности по известному выражению для $K_j = K_j(g_i)$. Он основан на вычислении частных производных от схемных параметров (схемных функций и др.).

Для нулевого схемного параметра (например, для выходного напряжения уравновешенного моста) необходимо перейти к определению так называемой *полуотносительной чувствительности*

$$S_{g_i}^{u_j} = g_i\frac{\Delta u_i}{\Delta g_i} \approx g_i\frac{\partial u_j}{\partial g_i}. \qquad (2.51)$$

На основе (2.51) можно определить *нулевую* или *полюсную чувствительности*

$$S_{g_i}^{z_j} = g_i \frac{\partial z_j}{\partial g_i}, \quad S_{g_i}^{p_j} = g_i \frac{\partial p_j}{\partial g_i}, \tag{2.52}$$

характеризующие изменение полюсно-нулевого изображения схемной функции при вариации параметров компонентов схемы.

Чувствительность к изменению обратной величины $r_i = 1/g_i$ параметра компоненты определяется так:

$$S_{r_i}^{K_j} = \frac{r_i}{K_j} \frac{\partial K_j}{\partial r_i} = \frac{1}{g_i K_j} \frac{\partial K_j}{(-\partial g_i / g_i^2)} = -\frac{g_i}{K_j} \times$$

$$\times \frac{\partial K_j}{\partial g_i} = -S_{g_i}^{K_j}.$$

Вычисление относительной чувствительности через полиномы схемной функции и обратную связь

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{\Delta(p)} = \frac{A_0(p) + g_i A_1(p)}{\Delta_0(p) + g_i \Delta_1(p)},$$

$$S_{g_i}^{F(p)} = \frac{g_i}{A/\Delta} \frac{\partial \left(\frac{A}{\Delta} \right)}{\partial g_i} = \frac{g_i \Delta}{A} \frac{A'\Delta - A\Delta'}{\Delta^2} =$$

$$= \frac{(A - A_0)\Delta - A(\Delta - \Delta_0)}{A\Delta} = \frac{A\Delta_0 - A_0\Delta}{A\Delta} = \frac{\Delta_0}{\Delta} -$$

$$\frac{A_0}{A} \text{ (формула Линча)} \tag{2.53}$$

$$\text{и } S_{g_i}^{F(p)} = \frac{A\Delta_0 - A_0\Delta}{A\Delta} = \frac{1 - A_0\Delta / A\Delta_0}{A\Delta / A\Delta_0} =$$

$$= \frac{1 - F_0(p)/F(p)}{\Delta/\Delta_0} = \frac{1 - F_0(p)/F(p)}{F_{g_i}} \text{ (формула Боде),} \tag{2.54}$$

где $g_i A' = A - A_0$; $g_i \Delta' = \Delta - \Delta_0$; $\Delta/\Delta_0 = F g_i = 1 - F_{\text{пр}} F_{\text{обр}} = 1 - L_k$.

Вычисление полуотносительной чувствительности можно проводить по формуле, полученной аналогично:

$$S_{g_i}^{u_j} = -\frac{A_0}{\Delta} = -\frac{A_0\Delta_0}{\Delta_0\Delta} = -\frac{F_0(p)}{\Delta/\Delta_0} = -\frac{F_0(p)}{F_{g_i}}. \tag{2.55}$$

Вычисление относительной нестабильности схемных параметров (схемных функций) по известным значениям чувствительности можно осуществить в соответстви с определением (2.49), из которого

$$\delta K_j = \frac{\Delta K_j}{K_j} = S_{g_i}^{K_j}\frac{\Delta g_i}{g_i} = S_{g_i}^{K_j}\delta_{g_i}.$$

Для чувствительностей схемных параметров характерны некоторые *соотношения инвариантности,* которые имеют важное практическое значение [31]. Так:

1. Сумма чувствительностей некоторого схемного параметра к вариациям параметров всех компонентов пассивной схемы является величиной постоянной во всем диапазоне частот и остается инвариантной при любых эквивалентных преобразованиях схемы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{K_j}(\omega) = \text{const}.$$

В [31] показано, что для схемных функций K_U и K_I

$$\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{K_U} = \sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{K_I} = 0,$$

а

$$\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{Y_{\text{пер}}} = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{Z_{\text{пер}}} = -1$$

для G, L^{-1}, C и g (управляющий параметр зависимого источника тока, управляемого напряжением),

$$\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{Y_{\text{пер}}} = -1 \text{ и } \sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{Z_{\text{пер}}} = 1 \text{ для } R,\ L,\ C^{-1} \text{ и } r$$

(управляющий параметр зависимого источника напряжения, управляемого током).

Указанное свойство инвариантности остается справедливым и для активных схем с зависимыми источниками тока, управляемыми напряжением, или зависимыми источниками напряжения, управляемыми током.

Тогда их управляющие параметры имеют размерность проводимости или сопротивления.

2. Сумма нулевой (полюсной) чувствительности к вариации параметров всех компонентов схемы является величиной постоянной, равной нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{z_j} = \sum_{i=1}^{N} S_{g_i}^{p_j} = 0.$$

3. Сумма чувствительностей схемной функции к вариациям параметров всех реактивных компонентов (L, C) инвариантна для всех схем, описываемых такой же схемной функцией, и равна чувствительности той же схемной функции к вариациям комплексной переменной (комплексной частоты) p:

$$\sum_{i=1}^{l} S_{L_i}^{K_j} + \sum_{i=1}^{d} S_{C_i}^{K_j} = S_p^{K_j},$$

где l и d — число индуктивных и емкостных компонентов в схеме; $S_p^{K_j} = \frac{p}{K_j} \frac{\partial K_j}{\partial p}$.

4. $\sum_{i=1}^{l} S_{L_i}^{K_j} + \sum_{i=1}^{d} S_{C_i}^{K_j} = l + d.$

5. $\sum_{i=1}^{l+d} S_{g_i}^{z_i} = -z_i, \quad \sum_{i=1}^{l+d} S_{g_i}^{p_j} = -p_j.$

2.7. Устойчивость

Реакция неавтономной физической системы в общем случае содержит *вынужденные составляющие*, определяемые внешним воздействием (сигналом цепи), и *свободные составляющие*, определяемые только свойствами собственно системы (т. е. топологией и параметрами цепи).

Устойчивыми (асимптотически) называются системы (цепи), в которых свободные составляющие реакции (токи и напряжения) после снятия внешнего воздействия с течением времени уменьшаются до нуля (затухают).

Неустойчивыми называют системы (цепи), в которых свободные составляющие реакции по окончании действия внешнего возмущения продолжают возрастать. В реальных цепях неустойчивость вызывает самовозбуждение, т. е. генерацию нежелательных колебаний.

Анализ и расчет схем на устойчивость занимают в теории и практике применения электронных цепей очень важное место. Одна из глобальных целей расчета схем — обеспечить устойчивую работу соответствующих цепей в реальных условиях эксплуатации. Невыполнение указанной цели характеризует некачественность проведенных расчетов.

Из приведенных ранее определений временных характеристик схемы следует, что импульсная характеристика, являющаяся реакцией схемы на единичный импульс воздействия, представляет собой свободную составляющую реакции схемы в чистом виде. По виду импульсной характеристики, следовательно, можно согласно определению устойчивости судить о качестве анализируемой схемы. Так, затухающий характер импульсной характеристики свидетельствует об устойчивости процессов в схеме, незатухающий говорит о неустойчивости схемы. В свою очередь, вид импульсной характеристики схемы определяется согласно (2.33) обратным преобразованием Лапласа от соответствующей (передаточной) схемной функции $F(p)$. Более конкретно можно сказать, что вид импульсной характеристики $g(t)$ определяется полюсами функции $F(p)$, точнее положением этих полюсов на комплексной плоскости. Из формул для обратного преобразования (2.35)—(2.37) следует, что если полюсы (корни знаменателя $F(p)$) находятся в левой полуплоскости на карте нулей и полюсов функции, т. е. $\sigma<0$, то с течением времени импульсная характеристика $g(t)$ стремится к нулю. В другом случае, когда полюсы расположены в правой полуплоскости ($\sigma>0$), экспоненциальные составляющие в выражении $g(t)$ имеют положительную степень и импульсная характеристика с течением времени неограниченно возрастает. Отсюда вытекает широко известное **правило:** *схемы, описываемые функциями с полюсами в правой полуплоскости, являются неустойчивыми.* Характер неустойчивого процесса (форма импульсной характеристики) определяется расположением правых полюсов относительно действительной оси. При комплексно-сопряженном правом полюсе $p_п=\sigma_п\pm j\omega_п$ соответствующая свободная составляющая реакции является периодической функцией с частотой $\omega_п$ и амплитудой, экспоненциально возрастающей со скоростью $\sigma_п$ до ограничения ее нелинейностью вольтамперных характеристик компонент схемы, когда соответствующий полюс в силу изменившихся параметров компонентов схемы сдвинется в левую полуплоскость. При вещественном правом полюсе свободная составляющая реакции монотонно (по экспоненте) возрастает до аналогичного ограничения нелинейностью компонент схемы.

Пассивные схемы всегда устойчивы, свободные составляющие их реакции затухают вследствие ничем не компенсируемых тепловых потерь. Анализ схемы на устойчивость проводят различными способами, основанными на анализе корней знаменателя схемной функции и отличающимися характером критерия, по которому судят о наличии полюсов функции в правой полуплоскости. Среди них *алгебраический критерий устойчивости Рауса—Гурвица*, позволяющий определять знаки действительной части полюсов, без вычисления самих корней, *частотные критерии устойчивости Найквиста, Михайлова* и др., позволяющие судить об устойчивости по виду или отдельным признакам частотного годографа.

При расчете схем важно определить параметры ее компонентов таким образом, чтобы их небольшие допустимые вариации, неизбежные в условиях эксплуатации электронной цепи, не выводили ее из устойчивого состояния. Таким образом приходят к понятию *запаса устойчивости схемы*, который определяется минимальным расстоянием полюсов до мнимой оси, допустимым при заданной их нестабильности, определяемой, в свою очередь, допустимой нестабильностью параметров компонентов схемы. Оценку нестабильности полюсов осуществляют с помощью *корневых годографов*, представляющих собой траектории движения корней (полюсов) при вариации параметров. Корневые годографы строятся для знаменателя схемной функции $\Lambda(p)$:

$$\Lambda(p)=\Lambda_0(p)+g_i\Lambda_1(p)=0.$$

Глава 3. Методы анализа, основанные на алгебраических моделях электронных схем

3.1. Метод эквивалентных схем в матричной форме

Суть метода состоит в том, что исследуемая электронная цепь представляется эквивалентной схемой, в которой электронные компоненты заменены их микро- и макромоделями (см. гл. 1). В результате такой замены получаем схему, состоящую только из двухполюсных компонентов, от которой легко перейти к другой топологической модели цепи — к ее графу.

В ТОЭ такие схемы (графы) исследуются *методом узловых напряжений*, когда в качестве переменных выбираются узловые напряжения (потенциалы), или *методом контурных токов*, когда переменными являются контурные токи (контурный базис переменных).

В соответствии с (2.3) матричное уравнение схемы (графа) в контурном базисе имеет вид

$$E = Z \cdot I, \tag{3.1}$$

где вектор $E = Q$ — *вектор независимых (задающих) источников напряжения*, действующих на входах схемы; вектор $I = X$ — *вектор контурных токов схемы*, представляющих собой независимую совокупность искомых переменных; матрица $Z = W$ — *квадратная матрица сопротивления схемы*, или просто *матрица схемы (графа)*, имеющая порядок $\sigma \times \sigma$, определяемый, как и у всех предыдущих векторов, числом контуров σ.

Для разрешения матричного уравнения (3.1) схемы (графа) относительно искомого вектора I необходимо его переписать в виде

$$I = Z_{-1} E \tag{3.2}$$

или

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_\sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11}\Delta_{21}\cdots\Delta_{\sigma 1} \\ \Delta_{12}\Delta_{22}\cdots\Delta_{\sigma 2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \Delta_{1\sigma}\Delta_{2\sigma}\cdots\Delta_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_\sigma \end{bmatrix}.$$

В узловом базисе матричное уравнение схемы имеет дуальный вид

$$J = Y\,U, \tag{3.3}$$

где вектор $J=Q$ есть *вектор независимых (задающих) источников тока*, действующих на входах схемы; вектор $U=X$ есть *вектор узловых напряжений схемы*, представляющих собой независимую совокупность искомых переменных; матрица $Y=W$ есть *квадратная матрица проводимости схемы*, имеющая порядок $\nu\times\nu$, определяемый числом узлов v, $\nu=v-1$, т. е. на единицу меньше числа узлов, так как один узел считается базисным (опорным или нулевым), от которого отсчитываются напряжения всех остальных ν узлов схемы.

Уравнение (3.3) также разрешается относительно вектора искомых переменных

$$U = Y^{-1}J. \tag{3.4}$$

Полное разрешение уравнений (3.2) и (3.4) приводит к определению контурных токов i_1, i_2, ..., i_σ и узловых напряжений u_1, u_2, ..., u_ν соответственно. Для определения всех остальных токов $i_{\text{в}}$ ветвей схемы (графа) или их напряжений $u_{\text{в}}$ можно составить следующие матричные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} U_{\text{в}} &= \Pi_t U, \\ I_{\text{в}} &= \Gamma_t I, \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

где Γ_t — транспонированная *матрица контуров (совпадений или инциденций)*, введенная Кирхгофом. Строки Γ-матрицы соответствуют σ-контурам схемы (графа), столбцы — l-ветвям. Элемент матрицы Γ $\gamma_{ks}=+1$, если k-й контур проходит через s-ю ветвь и их направления совпадают; $\gamma_{ks}=-1$, если их направления не совпадают и, наконец, $\gamma_{ks}=0$, если k-й контур не проходит через s-ю ветвь; Π_t — аналогичная транспонированная *матрица узлов (сечений)*. При этом строки Π-матрицы соответствуют ν-узлам схемы (графа), а столбцы — l-ветвям. Элемент матрицы Π $\pi_{ks}=+1$, если k-му узлу инцидентна s-я ветвь, имеющая направление к k-му узлу, $\pi_{ks}=-1$, если s-я ветвь направлена от узла k, и $\pi_{ks}=0$, если s-я ветвь не инцидентна узлу k.

Матрицы Γ и Π содержат в себе полную информацию о структуре схемы (графа), поэтому их называют *структурными* и широко используют ввиду простоты их представления для ввода информации о структуре схемы в ЭВМ. Так, если составить и ввести в ЭВМ еще одну дополнительную диагональную матрицу $Z_{\text{в}}$, называемую *матрицей сопротивления ветвей схемы* (графа), или $Y_{\text{в}}$ — *матрицу проводимостей ветвей,* то возможно организовать машинное составление пассивных матриц Z и E или соответственно Y и J по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} Z&=\Gamma Z_{\text{в}}\Gamma_t,\\ E&=-\Gamma E_{\text{в}}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

или

$$\left.\begin{aligned} Y&=\Pi Y_{\text{в}}\Pi_t,\\ J&=-\Pi J_{\text{в}}.\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

где $Z_{\text{в}}$ и $Y_{\text{в}}$ — диагональные квадратные матрицы (для схемы без взаимных индуктивностей) l-го порядка, элементами которых являются сопротивления (проводимости) ветвей схемы ($Z_{\text{в}}=Y_{\text{в}}^{-1}$); $E_{\text{в}}$ и $J_{\text{в}}$ — векторы l-го порядка задающих напряжений и задающих токов ветвей. Наибольший интерес, однако, при анализе электронных схем по переменному току представляет задача определения выражений схемных функций, чувствительности и т. п.

Согласно формулам Крамера (2.5) выражение для схемных функций можно получить непосредственно из матрицы схемы (графа) Z или Y, не прибегая к полному решению матричных уравнений схем (3.2), (3.4), (3.5). На рис. 3.1 показана обобщенная схема с одной парой входных и одной парой выходных зажимов (по типу 2×2-полюсника, приведенного ранее на рис. 2.1), через которые проходит по одному контуру. При этом условии из уравнения (3.2) можно найти выражение токов $i_{\text{вх}}=i_a$ и $i_{\text{вых}}=i_b$, считая задающими источниками напряжения, приложенные к выделенным зажимам, т. е. $u_{\text{вх}}$ и $u_{\text{вых}}$:

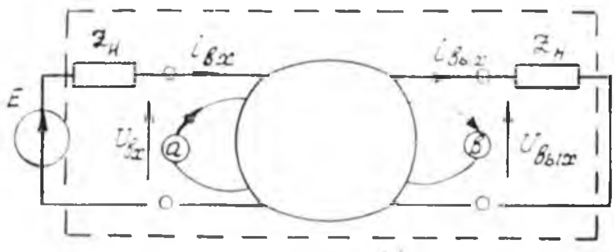
$$\left.\begin{aligned} i_{\text{вх}}&=\frac{1}{\Delta^*}(\dot{\Delta}_{aa}u_{\text{вх}}-\dot{\Delta}_{ba}u_{\text{вых}}),\\ i_{\text{вых}}&=\frac{1}{\Delta^*}(\dot{\Delta}_{ab}u_{\text{вх}}-\dot{\Delta}_{bb}u_{\text{вых}},\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

где Δ^*_{aa}, Δ^*_{ab}, Δ^*_{ba}, Δ^*_{bb} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы Z^*, составленной без учета $z_н$ и $z_н$, поскольку задающими приняты $u_{вх}$ и $u_{вых}$. Такая неполная матрица Z^* называется укороченной.

Подставив в (3.8) $i_{вых}=u_{вых}/z_н$, найдем выражение для

$$K_V = \frac{z_н \Delta^*_{ab}}{\Delta^* + z_н \Delta^*_{bb}} [4] \qquad (3.9)$$

при $z_н = 0$, $K_V^K = 0$, при $z_н = \infty$, $K_V^x = \frac{\Delta^*_{ab}}{\Delta^*_{bb}}$.



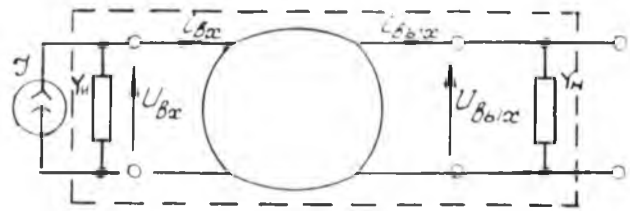


Рис. 3.1

Аналогично найдем все остальные схемные функции [4]

$$K_I = \frac{\Delta^*_{ab}}{\Delta^*_{aa} + z_н \Delta^*_{aa,ab}}, \qquad (3.10)$$

где $\Delta^*_{aa,bb}$ — *двойное алгебраическое дополнение*, для вычисления которого из матрицы Z^* одновременно вычеркиваются две строки a и b и два столбца a и b,

$$K_I^{\kappa} = \frac{\overset{\bullet}{\Delta}_{ab}}{\overset{\bullet}{\Delta}_{aa}}, \quad K_I^{0} = 0,$$

$$Z_{\text{пер}} = z_{\text{н}} K_I = \frac{z_{\text{н}} \overset{\bullet}{\Delta}_{ab}}{\overset{\bullet}{\Delta}_{aa} + z_{\text{н}} \overset{\bullet}{\Delta}_{aa,bb}}, \tag{3.11}$$

$$Y_{\text{пер}} = \frac{K_{\text{п}}}{z_{\text{н}}} = \frac{\overset{\bullet}{\Delta}_{ab}}{\Delta^* + z_{\text{н}} \overset{*}{\Delta}_{bb}}, \tag{3.12}$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{z_{\text{пер}}}{K_V} = \frac{\Delta^* + z_{\text{н}} \overset{\bullet}{\Delta}_{bb}}{\overset{*}{\Delta}_{aa} + z_{\text{н}} \overset{\bullet}{\Delta}_{aa,bb}}, \tag{3.13}$$

$$Z_{\text{вх}}^{\kappa} = \frac{\Delta^*}{\overset{\bullet}{\Delta}_{aa}}, \quad Z_{\text{вх}}^{0} = \frac{\overset{\bullet}{\Delta}_{bb}}{\overset{*}{\Delta}_{aa,bb}},$$

$$Z_{\text{вых}} = \frac{\Delta^* + z_{\text{н}} \overset{*}{\Delta}_{aa}}{\overset{*}{\Delta}_{bb} + z_{\text{н}} \overset{*}{\Delta}_{aa,bb}}. \tag{3.14}$$

Для нахождения так называемых полных схемных функций (функций цепи передачи, а не только 2×2-полюсника) необходимо рассмотреть схему, обведенную на рис. 3.1 пунктиром. Тогда задающим будет источник сигнала E, сопротивление источника $z_{\text{и}}$ и нагрузки $z_{\text{н}}$ включаются в матрицу Z в обычном порядке и

$$K_{Vt} = z_{\text{н}} \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}, \tag{3.15}$$

$$Y_{\text{пер}.t} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}, \tag{3.16}$$

$$K_{II} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}, \tag{3.17}$$

$$Z_{\text{пер}} = \frac{z_{\text{н}} \Delta_{ab}}{\Delta_{aa}} \text{ и т. д.} \tag{3.18}$$

Выражения для схемных функций в узловом базисе находятся аналогичным образом и дуальны предыдущим (см. рис. 3.1, a) [4]:

$$K_V = \frac{\overset{*}{\Delta}_{ab}}{\overset{\bullet}{\Delta}_{aa} + Y_{\text{н}} \overset{*}{\Delta}_{aa,bb}}, \tag{3.19}$$

$$K_V^{\text{н}} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{ab}}{\overset{*}{\Delta}_{aa}}, \quad K_V^{\text{к}} = 0,$$

$$K_I = \frac{Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{ab}}{\Delta^* + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{bb}}, \tag{3.20}$$

$$K_I^{\text{к}} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{ab}}{\overset{*}{\Delta}_{bb}},$$

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\Delta^* + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{bb}}{\overset{*}{\Delta}_{aa} + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{aa,bb}}, \tag{3.21}$$

$$Y_{\text{вх}}^{\text{н}} = \frac{\Delta^*}{\overset{*}{\Delta}_{aa}},$$

$$Y_{\text{пер}} = \frac{Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{ab}}{\overset{*}{\Delta}_{aa} + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{aa\,bb}}, \tag{3.22}$$

$$Z_{\text{пер}} = \frac{\overset{*}{\Delta}_{ab}}{\Delta^* + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{bb}}, \tag{3.23}$$

$$Y_{\text{вых}} = \frac{\Delta^* + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{aa}}{\overset{*}{\Delta}_{bb} + Y_{\text{н}}\overset{*}{\Delta}_{aa,bb}}. \tag{3.24}$$

Для полных схемных функций передачи цепи (см. схему на рис. 3.1, *б*, обведенную штриховой линией) проводимости источника и нагрузки включаются в матрицу Y схемы и тогда

$$K_{Vt} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}, \tag{3.25}$$

$$K_{It} = \frac{Y_{\text{н}}\Delta_{ab}}{\Delta} \text{ и т. д.,} \tag{3.26}$$

где $a = i$ — узел источника сигнала.

Выражения для схемных функций усложняются, когда нельзя, просто нерационально выбирать контуры или узлы (сечения) так, чтобы вход и выход были связаны только с одним из них. На рис. 3.2 показаны варианты выбора базисных узлов. В результате показано [4], что при этом обычные алгебраические дополнения заменяются *суммарными алгебраическими дополнениями*. Формулы для схемных функций по укороченным матрицам Y* для схемы на рис. 3.1, *a* (общий случай) приведены ниже:

$$K_V = \frac{\Delta^*_{(a+c)(b+d)}}{\Delta^*_{(a+c)(a+c)} + Y_н \Delta^*_{(a+c)(a+c),(b+d)(b+d)}}, \quad (3.27)$$

$$K_I = \frac{Y_н \Delta^*_{(a+c)(b+d)}}{\Delta^* + Y_н \Delta^*_{(b+d)(b+d)}}, \quad (3.28)$$

$$Y_{вх} = \frac{\Delta^* + Y_н \Delta^*_{(b+d)(b+d)}}{\Delta^*_{(a+c(a+c)} + Y_н \Delta^*_{(a+c)(a+c),(b+d)(b+d)}}, \quad (3.29)$$

$$Z_{пер} = \frac{\Delta^*_{(a+c)(b+d)}}{\Delta^* + Y_н \Delta^*_{(b+d)(b+d)}}, \quad (3.30)$$

$$Y_{пер} = \frac{Y_н \Delta^*_{(a+c)(b+d)}}{\Delta^*_{(a+c)(a+c)} + Y_н \Delta^*_{(a+c)(a+c),(b+d)(b+d)}}, \quad (3.31)$$

$$Y_{вых} = \frac{\Delta^* + Y_н \Delta^*_{(a+c)(a+c)}}{\Delta^*_{(b+d)(b+d)} + Y_н \Delta_{(a+c)(a+c),(b+d)(b+d)}}. \quad (3.32)$$

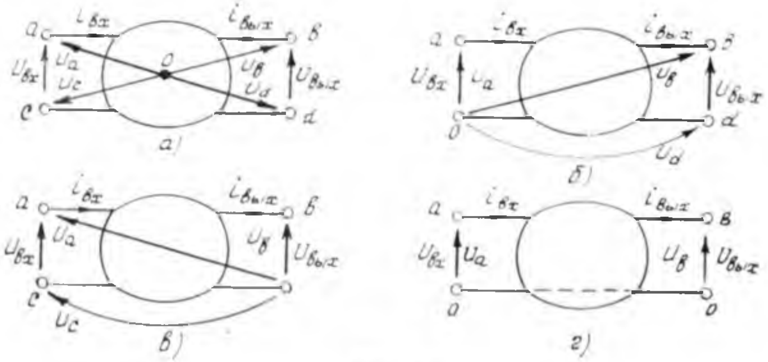


Рис. 3.2

Вычисление суммарного дополнения, например $\Delta_{(a+c)(b+d)}$, сводится к вычислению определителя подматрицы, образованной из исходной матрицы путем удаления *a*-й строки и добавления ее элементов со следующим за *a*-м индексом знаком к соответствующим элементам *c*-й строки, а затем удаления *b*-го столбца и добавления его элементов со следующим за *b*-м индексом знаком (указанным во второй скобке) к соответствующим элементам *d*-го столбца.

Формулы для схемных функций через параметры матрицы Z дуальны записанным выше. Для их получения достаточно в формулах (3.27)—(3.32) заменить $Y_{\text{н}}$ на $z_{\text{н}}$, K_V на K_I, $Y_{\text{вх}}$ на $Z_{\text{вх}}$, $Y_{\text{пер}}$ на $Z_{\text{пер}}$, $Z_{\text{пер}}$ на $Y_{\text{пер}}$, $Y_{\text{вых}}$ на $Z_{\text{вых}}$ и т. д.

В алгебраических методах анализа схем определители матриц сопротивления, проводимости или гибридных коэффициентов уравнений схемы вычисляются широко известным из матричной алгебры *прямым способом разложения*

$$\Delta = \det W = \sum_{q=1}^{s} (-1)^{\delta_q} \prod_{r=1}^{n} (w_{ij})_q^r, \qquad (3.33)$$

где n — порядок матрицы W; s — число ненулевых членов определителя; q — номер члена определителя, образованного произведением n элементов матрицы w_{ij} с различными индексами i и различными индексами j, т. е. взятыми из разных строк и разных столбцов; δ_q — декремент подстановки, образованный индексами ij элементов q-го члена определителя; $(w_{ij})_q^r$ — вес (сопротивление, проводимость и т. д.) r-го элемента q-го члена определителя.

Часто применяют способ *разложения определителя по строкам* или *столбцам*, основанный на теореме Лапласа.

Поскольку схемная функция в общем виде представляется отношением двух полиномов комплексной переменной p (2.6), то ее определение сводится либо к получению численных значений полиномиальных коэффициентов, либо представлению их явными алгебраическими функциями от параметров компонентов схемы. Символьная (буквенная) форма представления схемных функций позволяет проводить анализ влияния каждой компоненты схемы и значительно снизить погрешность последующих вычислений. Однако для сложных схем наглядность аналитической символьной формы представления схемных функций теряется из-за громоздкости выражений. Иногда это препятствие обходят, прибегая к комбинированному способу представления, когда выделяют в символах лишь часть параметров, а остальные представляют в численном виде.

Порядок анализа методом эквивалентных схем

1. Постановка задачи анализа. Включает название и функциональную характеристику анализируемой схемы, принцип действия, особенности, перечень характе-

ристик и их параметров, требующих исследования, условия исследования указанных характеристик (какие параметры каких компонентов схемы и в каком диапазоне изменяются, внешние условия, диапазон частот, временные ограничения и т. п.). Например: исследовать по переменному току схему трехкаскадного усилителя с общей обратной связью по напряжению на устойчивость в заданном диапазоне частот; исследовать форму выходного напряжения во время прямого хода генератора линейно изменяющегося напряжения с компенсирующей э. д. с. емкостного типа, исследовать влияние на коэффициент нелинейности выходного напряжения емкости конденсатора обратной связи и т. п.

2. Выявление типов схемных функций, их характеристик и параметров, требуемых для анализа заданной схемы, исходя из поставленной задачи. Например, для усилителя в предыдущем пункте надо найти $K_1(p)$, затем в зависимости от выбранного критерия устойчивости построить соответствующие частотные характеристики и т. п.

3. Составление топологической модели (эквивалентной схемы или ее графа) для анализа по постоянному или переменному току и т. п., при этом параллельные и последовательные ветви преобразуются в одну.

4. Замена многополюсников (электронных приборов) их линейными схемами замещения, состоящими из двухполюсных компонентов и соответствующими заданному частотному диапазону работы схемы и требуемой точности анализа. При возможности производится дополнительное упрощение схемы, затем переход к графу топологической модели метода.

5. Выбор базиса переменных с учетом определенных рекомендаций. Наиболее универсальным правилом считается выбор такого базиса, при котором число координат (переменных), т. е. контуров или узлов, наименьшее. В последнее время предпочтение отдают узловому базису. Это объясняется тем, что на средних и высоких частотах число узлов в схемах замещения электронных приборов меньше, чем число контуров из-за наличия междуэлектродных емкостей. Входное сопротивление электронных ламп, полевых и МОП-транзисторов имеет очень большую величину, и для их описания проще использовать узловой базис. В практике также чаще прибегают к измерениям именно напряжения, что не тре-

бует разрыва цепи, как в случае измерения тока. Измерение напряжений, как и в узловом базисе, ведут по отношению к одной точке, например к корпусу приборов и устройств.

6. Задание координат, т. е. выбор системы контуров или узлов. Задание узловых координат начинается с произвольного выбора опорного (базисного) узла, которому присваивается нулевой номер. Целесообразно в качестве опорного выбирать узел, общий для входной и выходной пар зажимов. Остальные узлы графа нумеруются в произвольном порядке от 1 до ν. Такое задание координат соответствует так называемой *канонической системе сечений*, т. е. системе, в которой ни одна ветвь графа не пересекается более чем двумя сечениями. При

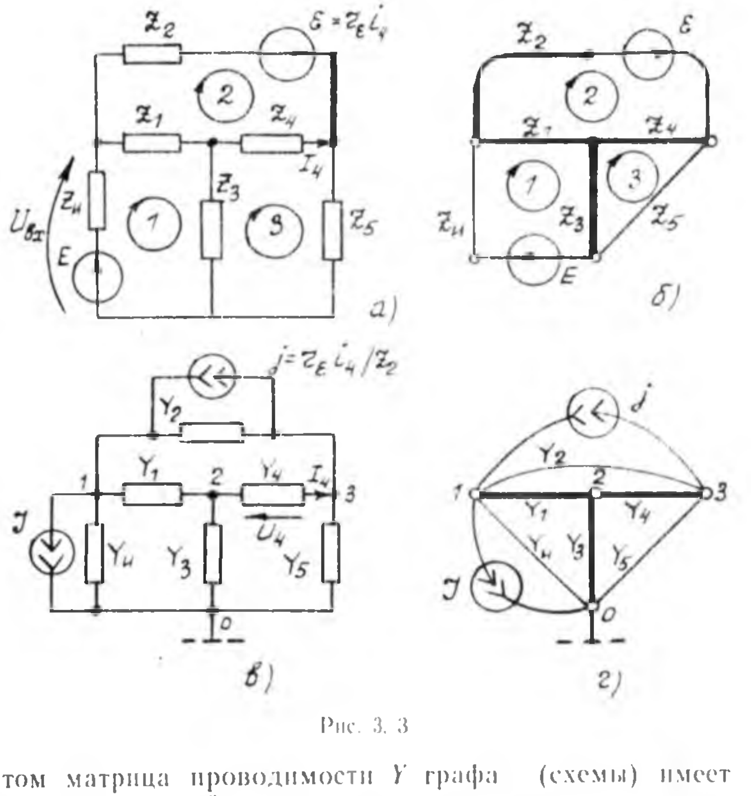


Рис. 3. 3

этом матрица проводимости Y графа (схемы) имеет наиболее простой вид, т. е. максимальную *разреженность*.

Под опорным (базисным, нулевым) контуром графа всегда понимают контур, окаймляющий схему извне. Остальные контуры выбираются так, чтобы они отличались хотя бы одной ветвью друг от друга. Для более четкого выбора контуров необходимо сначала выбрать на графе *дерево*, т. е. такую совокупность ветвей графа, которая не образует ни одного контура и связана со всеми узлами исходного графа (схемы). На рис. 3.3, *а*, *б* выбранное дерево выделено жирными линиями. Ветви, не вошедшие в дерево, называют *главными ветвями графа (схемы)*. Токи, протекающие в главных ветвях, могут быть выбраны в качестве контурных токов, т. к. составляют независимую совокупность переменных, т. е. ни один из них не может быть выражен через другие. Основываясь на этом, контуры схемы выбирают так, чтобы каждый из них включал одну главную ветвь, а остальные — ветви дерева. В результате изложенный

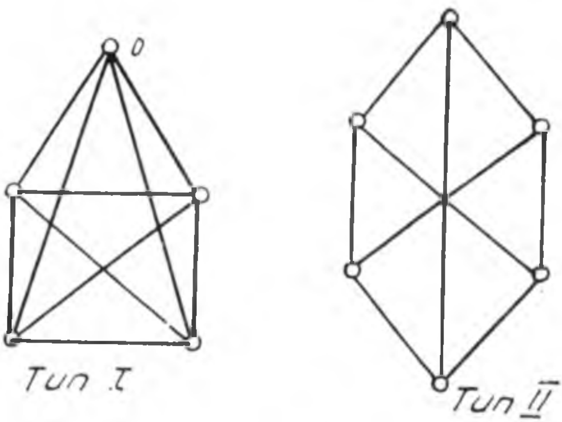


Рис. 3.4

способ позволяет сразу оценить число независимых контуров, т. к. оно равно числу главных ветвей схемы. При выборе различных деревьев можно построить различные системы контуров.

Целесообразно выбирать *каноническую систему контуров*, в которой нет ветвей, входящих более чем в два контура (при этом матрица Z оказывается максимально разреженной). Каноническая система контуров соответствует ячейкам схемы (графа), нарисованной без пересечения ветвей. Если нарисовать таким образом схему или ее граф не удается, значит она является *неплоской (непланарной)*. Последнее легко установить, если в графе схемы удается обнаружить один из двух типичных неплоских *графов Куратовского*, показанных на рис. 3.4. В отличие от узлового базиса в контурном каноническую систему координат не всегда можно выбрать, т. к. она существует только для плоских графов.

Указанный способ используется при машинном формировании координат. Нетрудно догадаться, что напряжения ветвей дерева, в свою очередь, образуют независимую совокупность узловых напряжений (сечений).

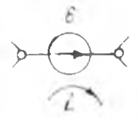
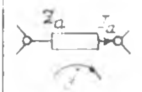
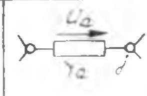
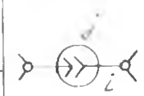
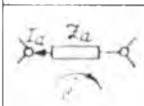
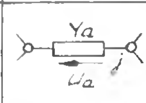
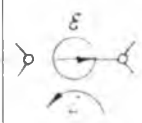
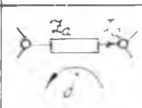
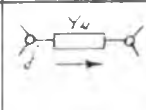
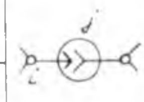
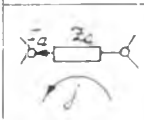
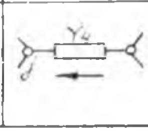
7. Составление математической модели, т. е. матриц Z или Y. Предварительно необходимо в соответствии с выбранной системой координат преобразовать все задающие (независимые) и зависимые источники. При выборе контурного базиса все источники должны быть *источниками напряжения*, а *зависимые*, кроме того, *управляться только током*. В узловом базисе все источники приводятся к *источникам тока*, а *зависимые*, кроме того, *должны управляться только напряжением*.

Диагональные элементы матрицы Z заполняются так называемыми *собственными сопротивлениями контуров* (сумма сопротивлений ветвей, входящих в контур), матрицы Y — *собственными проводимостями узлов* (сумма проводимостей ветвей, сходящихся к узлу). Недиагональные элементы матрицы Z заполняются так называемыми *взаимными сопротивлениями контуров* (сумма сопротивлений ветвей, одновременно входящих в два контура), матрицы Y *взаимными проводимостями узлов* (сумма проводимостей ветвей, включенных между двумя узлами). При различных направлениях контурных токов через взаимное сопротивление оно суммируется со знаком минус, взаимные проводимости всегда суммируются со знаком минус [4]. Зависимые источники отображают свойство необратимости электронных приборов (транзисторов, ламп и т. п.). Они характеризуются *произведением управляющего параметра* (константы, определяемой типом прибора) на *управляющую величину* (ток или напряжение некоторой ветви схемы, называемой также управляющей). Управляющий параметр может быть безразмерным или иметь размерность сопротивления, проводимости.

Управляющие параметры зависимых источников вносятся в матрицы Z или Y по определенному правилу с учетом положения в схеме (графе) самого источника и его управляющей ветви относительно выбранных координат (контуров или узлов) [4].

Правило: управляющий параметр (сопротивление) добавляется к элементам матрицы Z, лежащим на пересечении строк с номерами тех контуров, в которые входит сам зависимый источник (ε на рис. 3.3, *а, б*), и столбцов с номерами тех контуров, в которые входит управляющая ветвь (z_1 на рис. 3.3, *а, б*). Знак управляющего параметра при добавлении его к элементу матрицы z_{ij} берется положительным, если направление зависимого источника относительно i-го контура и направление управляющей величины (тока) относительно j-го контура характеризуются различно (табл. 3.1). В противном случае управляющий параметр добавляется с минусом.

Таблица 3.1

Варианты	Взаимные направления зависимого источника и упр. тока относительно контуров схемы		Знак упр. параметра в клетке ij	Взаимные направления зависимого источника и упр. напряжения относительно узлов схемы	
1			−		
2			+		
3			−		
4			+		

Управляющий параметр (проводимость) добавляется к элементам матрицы Y, лежащим на пересечении строк с номерами тех узлов, между которыми включен в схеме зависимый источник (j на рис. 3.3, *в, г*), и столбцов с номерами тех узлов, между которыми включена управляющая ветвь (Y_4 на рис. 3.3, *в, г*). Знак управляющего параметра при добавлении его к элементу матрицы Y_{ij} берется положительным, если направление зависимого источника относительно i-го узла и направление управляющей величины (напряжения) относительно j-го узла характеризуются различно (см. табл. 3.1). В противном случае управляющий параметр добавляется со знаком минус.

Если зависимый источник и его управляющая ветвь не входят в нулевой (базисный) контур или не связаны с нулевым (базисным) узлом схемы, то управляющий параметр (в канонических системах координат) добавляется к четырем расположенным симметрично элементам матрицы Z или Y. При этом достаточно определить знак управляющего параметра один раз при добавлении к одному из четырех элементов матрицы (например, к диагональному Z_{ii} или Y_{ii}, для которого достаточно сравнить направление источника и управляющей величины относительно друг друга). Знаки при добавлении к остальным элементам матрицы расставляются по правилу симметрии.

Пример 3.1. Составим матрицу Z по графу на рис. 3.3, *б*. Выбранная система контуров здесь каноническая, т. к. ни одна ветвь графа не входит более чем в два контура. Составляем сначала матрицу пассивных элементов графа:

$$Z_{\text{пасс}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_{п} + z_1 + z_3 & -z_1 & -z_3 \\ -z_1 & z_1 + z_2 + z_4 & -z_4 \\ -z_3 & -z_4 & z_3 + z_4 + z_5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Здесь зависимый источник $\varepsilon = r_\varepsilon i_4$, где r_ε — управляющий параметр; i_4 — управляющая величина, а z_4 — его управляющая ветвь. Анализируя положение в схеме источника ε и его управляющей ветви, определяем положение управляющего параметра r_ε в матрице. Его необходимо добавить к элементам 22 со знаком плюс (вариант 2 в табл. 3.1) и к элементам 23 со знаком минус (вариант 1 в табл. 3.1):

$$Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_{п} + z_1 + z_3 & -z_1 & -z_3 \\ -z_1 & z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon & -z_4 - r_\varepsilon \\ -z_3 & -z_4 & z_3 + z_4 + z_5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Надо обратить внимание на то, что если матрица пассивной части графа (схемы) симметрична относительно главной диагонали, то матрица графа с зависимым источником такой симметрией уже не обладает. Таким образом, сказывается включение в схему необратимых компонентов, т. е. электронных приборов. Матрица проводимости по графу на рис. 3.3, *г* выглядит так:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\
Y = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{bmatrix}
Y_н + Y_1 + Y_2 & -Y_1 + S & -Y_2 - S \\
-Y_1 & Y_1 + Y_3 + Y_4 & -Y_4 \\
-Y_2 & -Y_4 - S & Y_2 + Y_4 + Y_5 + S
\end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Источники на схеме рис. 3.3, *б* получены путем преобразования схемы на рис. 3.3, *а*. Зависимый источник получился при этом управляемый током i_4. Необходимо ток i_4 выразить через напряжение u_4: $i_4 = y_4 u_4$. Тогда источник $j = \dfrac{r_г}{z_2} Y_4 u_4 = S u_4$, где $S = y_4 r_г / z_2$ — управляющий параметр (проводимость) зависимого источника, которую затем мы и внесли в матрицу Y.

8. Построение выражений для требуемых по п. 2 схемных функций. Здесь используются нужные формулы из (3.9)—(3.22).

Пример. Для схемы на рис. 3.3, *а* найдем выражение коэффициента передачи по напряжению, считая выходным напряжение на ветви z_5. Тогда по формуле (3.15) для полной схемной функции

$$K_{U} = z_5 \frac{\Delta_{13}}{\Delta} = \frac{u_5}{E}.$$

Из матрицы Z определяем $\Delta_{13} = \Delta_{ab}$, вычеркивая строку 1 и столбец 3:

$$\Delta_{13} = z_1 z_4 + z_3 (z_1 + z_2 + z_4 + r_г).$$

Находим $\Delta = (z_н + z_1 + z_3)(z_1 + z_2 + z_4 + r_г)(z_3 + z_4 + z_5) - z_3 z_4 (z_1 + z_2 + z_4 + r_г) - z_1 z_3 (z_1 + r_г) - z_1 z_3 z_4 - z_1^2 (z_3 + z_4 + z_5) - (z_н + z_1 + z_3) z_4 (z_4 + r_г) = z_н [(z_3 + z_5)(z_1 + z_2 + z_4 + r_г) + z_4 (z_1 + z_2)] (z_1 z_5 - z_3 z_4)(z_4 + r_г) - z_1 z_3 z_4 + z_3 (z_3 + z_5) \times (z_1 + z_2 + z_4 + r_г) + z_1 z_2 (z_3 + z_4 + z_5)$.

Тогда

$$K_{U} = z_5 \frac{z_1 z_4 + z_3 (z_1 + z_2 + z_4 + r_г)}{z_н [(z_3 + z_5)(z_1 + z_2 + z_4 + r_г) + z_4 (z_1 + z_2)] +}$$

$$
\frac{z_1z_4 + z_3(z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon)}{+ (z_1z_5 - z_3z_4)(z_4 + r_\varepsilon) - z_1z_3z_4 + z_3(z_3 + z_5)(z_1 + z_2 +}
$$

$$
\frac{z_1z_4 + z_3(z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon)}{+ z_4 + r_\varepsilon) + z_1z_2(z_3 + z_4 + z_5)}.
$$

Без учета параметров входной цепи и нагрузки по формуле (3.9)

$$
K_U = \frac{u_5}{u_{\text{вх}}} = \frac{z_5\dot{\Delta}_{13}}{\Delta^* + z_5\dot{\Delta}_{33}}.
$$

Исключаем из матрицы Z: $z_{\text{н}}$ и z_5, переходя к укороченной матрице Z^*, тогда

$$
\dot{\Delta}_{13} = \Delta_{13} = z_1z_4 + z_3(z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon),
$$

$$
\dot{\Delta}_{33} = (z_1 + z_3)(z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon) - z_1^2,
$$

$$
\Delta^* = z_1z_2(z_3 + z_4) + z_2z_3z_4
$$

и

$$
K_U = \frac{z_5[z_1z_4 + z_3(z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon)]}{z_1z_2(z_3 + z_4) + z_2z_3z_4 + z_5[(z_1 + z_3)(z_1 + z_2 + z_4 + r_\varepsilon) - z_1^2]}.
$$

Как видно, выражение для K_U по укороченной матрице получается значительно проще. Это подтверждает целесообразность введения и использования формул для схемных функций изолированной от внешних цепей схемы (по укороченным матрицам Z^* и Y^*).

9. Построение частотных или временных характеристик. Вычисление их параметров в соответствии с поставленной задачей анализа.

10. Вычисление чувствительностей и их анализ в соответствии с поставленной задачей.

11. Анализ схемы на устойчивость в соответствии с поставленной задачей и т. д.

Безмашинная (ручная) реализация метода практически применима для схем, содержащих не более трех—четырех узлов (контуров). Для более сложных схем анализ необходимо проводить с применением ЭВМ.

Пример 3.1. Составить матрицу проводимости Y схемы, приведенной на рис. 1.3, *б* (эквивалентная схема генератора пилообразного напряжения на время формирования линейной части импульса — прямой ход). Поскольку топологическая модель составлена, начинаем с замещения транзистора его линейной низкочастотной моделью (рис. 1.7, *б*). В результате получаем схему (рис. 3.5, *а*), затем граф (рис. 3.5, *б*), в котором $y_1=pC_1$, $y_2=1/R_1$, $y_3=1/r_б$, $y_4=pC_2$, $y_5=1/r_э$, $y_6=1/R_2$, $y_7=1/r_к$.

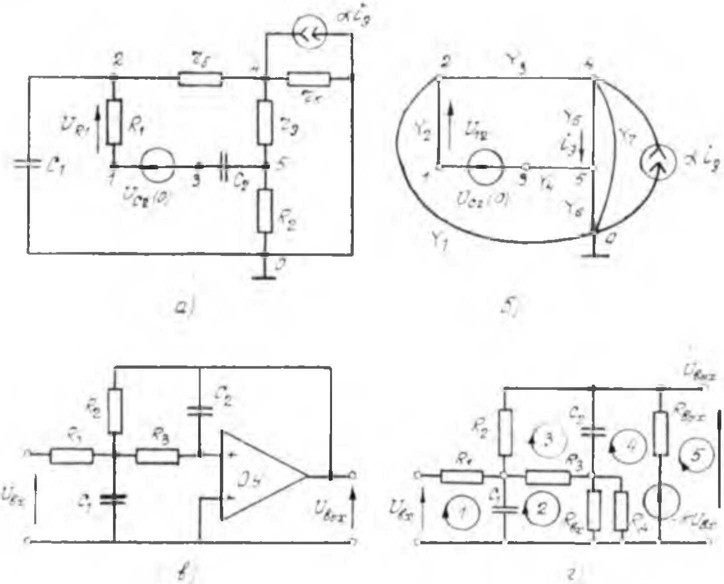


Рис. 3.5

Выбираем узловые координаты, как показано на рис. 3.5, и переходим к составлению математической модели — матрицы Y. Поскольку зависимый источник управляется током $i_э$, необходимо выразить его через напряжение $i_э=u_{45}/y_5=u_{45}y_5$. Тогда величина зависимого источника $\alpha i_э=u_{45}\alpha y_5$, т. е. управляющий параметр имеет вид $\alpha y_5=\alpha/r_э$. Составляем матрицу Y:

$$
Y=\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & Y_1 & -Y_2 & 0 & 0 \\
2 & -Y_2 & Y_1+Y_2+Y_3 & 0 & -Y_3 \\
3 & 0 & 0 & Y_4 & 0 \\
4 & 0 & -Y_3 & 0 & Y_3+Y_5+Y_7+\alpha Y_5 \\
5 & 0 & 0 & -Y_4 & -Y_5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
5 \\
\left.\begin{matrix}
0 \\
0 \\
-Y_4 \\
-Y_5-\alpha Y_5 \\
Y_4+Y_5+Y_6
\end{matrix}\right|
\end{array}.
$$

Выражение для K_{UI} по формуле (3.25) при $a=3$, $b=2$, $c=d=1$ примет вид с учетом замены алгебраических дополнений суммарными

$$
K_{UI}=\frac{u_{12}}{u_{C_2(0)}}=\frac{\Delta(3+1)(2+1)}{\Delta(3+1)(3+1)}.
$$

Пример 3.2. Составить матрицу сопротивления схемы, приведенной на рис. 3.5, *в*. На рис. 3.5, *г* показана топологическая модель, в которой использована идеализированная схема замещения операционного усилителя с $E_{\text{СМ}}=0$ (рис. 1.14, *а*). Выбираем контуры и заменяем управляющее напряжение $u_{\text{вх}}$ зависимого источника на ток $u_{\text{вх}}=i_{\text{вх}}R'_{\text{д}}$, тогда $-Ku_{\text{вх}}=-KR'_{\text{д}}i_{\text{вх}}$, где $R'_{\text{д}}=R_{\text{д}}\,||\,R_{\text{вх1}}$. Составляем укороченную матрицу Z^*:

$$
Z^*=
\begin{array}{c}
\\
1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \qquad 1 \qquad & \qquad 2 \qquad & \qquad 3 \qquad \end{matrix} \\
\left|\begin{matrix}
R_1+1/pC_1 & -1/pC_1 & 0 \\
-1/pC_1 & 1/pC_1+R_3+R'_{\text{д}} & -R_3 \\
0 & -R_3 & R_2+R_3+1/pC_2 \\
0 & -R'_{\text{д}}+KR'_{\text{д}} & -1/pC_2 \\
0 & -KR'_{\text{д}} & 0
\end{matrix}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \qquad 4 \qquad & \qquad 5 \qquad \end{matrix} \\
\left.\begin{matrix}
0 & 0 \\
-R'_{\text{д}} & 0 \\
-1/pC_2 & 0 \\
R'_{\text{д}}+1/pC_2+R_{\text{вых}}-KR'_{\text{д}} & -R_{\text{вых}} \\
-R_{\text{вых}}+KR'_{\text{д}} & R_{\text{вых}}
\end{matrix}\right|
\end{array}.
$$

3.2. Обобщенный матричный метод

Суть метода состоит в том, что электронная цепь может быть представлена ее принципиальной электрической схемой, в которой электронные компоненты изображаются обычным для принципиальных схем образом, а в качестве линейных или нелинейных моделей используются *неопределенные (особенные) матрицы сопротивления или проводимости электронных компонент.* Последние составляются по известным моделям электронных компонентов, представленных в виде системы уравнений равновесия переменных (токов и напряжений) на полюсах компоненты, либо в виде схемы замещения, составленной из двухполюсных компонент. В качестве топологической модели цепи может быть использован также и граф, в котором многополюсники представляются в виде полюсного графа (см. рис. 1.1, *в*). Общая матрица сопротивления или проводимости всей схемы составляется по довольно простым правилам сложения неопределенных матриц электронных компонентов с матрицей пассивной части схемы.

Составление матриц многополюсников (электронных компонентов). Матрицы многополюсников являются такими же адекватными моделями электронных компонентов, какими являются рассмотренные ранее их эквивалентные схемы. Они также разделяются в зависимости от частотного диапазона работы электронного прибора, по точности и режиму работы по постоянному току. Известны две методики построения матриц многополюсников: 1) по их эквивалентным схемам (замещения) по рассмотренному выше алгоритму (методу эквивалентных схем) и 2) по уравнениям для токов и напряжений на полюсах многополюсника. В последнем случае для построения матрицы Y необходимо составить уравнения многополюсника в узловом базисе, определив токи и напряжения в его полюсах так, как показано на рис. 3.6, *а:*

$$\left.\begin{aligned} J_1&=y_{11}u_1+y_{12}u_2+y_{13}u_3,\\ J_2&=y_{21}u_1+y_{22}u_2+y_{23}u_3,\\ J_3&=y_{31}u_1+y_{32}u_2+y_{33}u_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.34а)$$

Выписываем коэффициенты из системы уравнений (3.34), к которой необходимо привести уравнения трехполюсника, записанные в любом другом виде, и получаем матрицу проводимости трехполюсника

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}. \qquad (3.34б)$$

Особенностью задания координат на рис. 3.6 является выбор базисной координаты вне многополюсника. В этом случае совокупность переменных в системе урав-

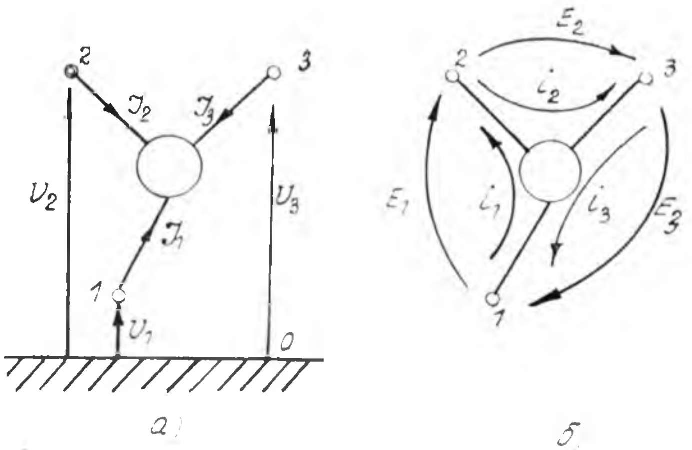


Рис. 3.6

нений является зависимой. В результате сумма коэффициентов (элементов) в каждой строке и каждом столбце матрицы (3.34б) равна нулю, *определитель* $\Delta=0$, *поэтому матрицу и называют неопределенной или особенной.* Для трехполюсника на рис. 3.6, *б* аналогично (пара полюсов многополюсника называется его стороной)

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix}.$$

Примеры. 1) матрица Y двухполюсной обратимой компоненты (резистор и др.)

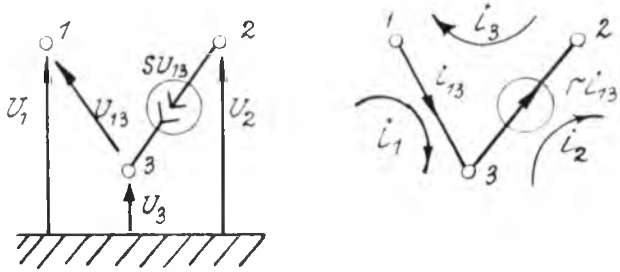
$$Y = \begin{bmatrix} y & -y \\ -y & y \end{bmatrix}.$$

2) матрица Y двухполюсной необратимой компоненты (зависимого источника тока на рис. 3.7, *а*)

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & S & 0 & -S \\
3 & -S & 0 & S
\end{array}
\qquad Y = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & -S \\ -S & 0 & S \end{array}\right] \tag{3.35}
$$

и ее матрица Z (рис. 3.7, *б*)

$$
Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & r \\ r & 0 & -r \end{array}\right] \end{array}.
$$



а) *б)*

Рис. 3.7

3) матрица Y полевого транзистора по эквивалентной НЧ-модели (рис. 1.8, *б*)

$$
Y = \begin{array}{c} \\ з \\ с \\ и \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} з & с & и \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -g_з & G_{си} & g_з - G_{си} \\ g_з & -G_{си} & -g_з + G_{си} \end{array}\right] \end{array}. \tag{3.36}
$$

4) матрица Z биполярного транзистора по НЧ-модели на рис. 1.9, *а*

$$
Z = \begin{array}{c} \\ б-э \\ э-к \\ б-к \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} б-э & э-к & б-к \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} r_э + r_б & -r_э & -r_б \\ r_m - r_э & r_э + r_к - r_m & -r_к \\ -(r_m + r_б) & r_m - r_к & r_б + r_к \end{array}\right] \end{array}.
$$

по другим моделям отдельные матрицы можно найти в [4] или построить самому.

5) матрица Y диодной оптопары по модели на рис. 1.15, *в*

$$Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_{\text{сд}} & -G_{\text{сд}} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{\text{сд}} & G_{\text{сд}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\text{б}} & 0 & -G_{\text{б}} \\ \kappa G_{\text{сд}} & -\kappa G_{\text{сд}} & 0 & G_{\text{фд}} & -G_{\text{фд}} \\ -\kappa G_{\text{сд}} & \kappa G_{\text{сд}} & -G_{\text{б}} & -G_{\text{фд}} & G_{\text{фд}} + G_{\text{б}} \end{bmatrix} \end{array}, \tag{3.37}$$

где $G_{\text{сд}} = pC_{\text{сд}} + 1/R_{\text{эсд}}$; $G_{\text{б}} = 1/R_{\text{б}}$; $G_{\text{фд}} = pC_{\text{фд}}$, а $I_{\text{сд}} = G_{\text{сд}}u_{\text{сд}}$ и $\kappa I_{\text{сд}} = \kappa G_{\text{сд}}u_{\text{сд}}$.

6) матрица Y для операционного усилителя по идеализированной модели на рис. 1.16, *в*

$$Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_{\text{вх1}} + G_{\text{д}} & -G_{\text{д}} & 0 & -G_{\text{вх1}} \\ -G_{\text{д}} & G_{\text{вх2}} + G_{\text{д}} & 0 & -G_{\text{вх2}} \\ -\kappa G_{\text{вых}} & \kappa G_{\text{вых}} & G_{\text{вых}} & -G_{\text{вых}} \\ -(G_{\text{вх1}} - \kappa G_{\text{вых}}) & -G_{\text{вх2}} - \kappa G_{\text{вых}} & -G_{\text{вых}} & G_{\text{вх1}} + G_{\text{вх2}} + G_{\text{вых}} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.38}$$

7) матрица Y биполярного транзистора в g-параметрах

$$Y = \begin{array}{c} \\ \text{б} \\ \text{к} \\ \text{э} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{б} & \text{к} & \text{э} \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_{11\text{э}} & g_{12\text{э}} & -g_{11\text{э}} - g_{12\text{э}} \\ g_{21\text{э}} & g_{22\text{э}} & -g_{21\text{э}} - g_{22\text{э}} \\ -g_{11\text{э}} - g_{21\text{э}} & -g_{12\text{э}} - g_{22\text{э}} & g_{11\text{э}} + g_{12\text{э}} + g_{21\text{э}} + g_{22\text{э}} \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.39}$$

и т. п. (см.: [4]).

Порядок анализа электронных схем обобщенным матричным методом по многим операциям совпадает с описанным выше. Детально будем останавливаться только на отличительных особенностях обобщенного метода.

1. Постановка задачи анализа.

2 Выявление требуемых типов схемных функций, их характеристик и параметров.

3. Составление топологической модели (эквивалентной схемы) для анализа по постоянному или переменному току.

4. Выбор базиса переменных.

5. Подбор наиболее подходящих по режиму работы и задаче анализа матриц электронных компонентов схемы. Если таковых нет, подбираются подходящие схемы замещения и по ним составляются матрицы Z или Y.

6. Задание координат в соответствии с выбранным базисом переменных.

7. Составление математической модели, т. е. матриц Z или Y схемы начинают с присвоения строкам и столбцам матриц электронных компонентов номеров тех координат, с которыми в схеме совпадают их полюсы или стороны. Составляют матрицу пассивной части схемы. Затем в нее последовательно добавляют элементы матриц электронных компонентов в соответствии с их новой индексацией.

Пример. Для схемы на рис. 3.8 (эквивалентная схема по переменному току усилителя на составном транзисторе) находим матрицы Z (неопределенные) для транзисторов VT1 и VT2:

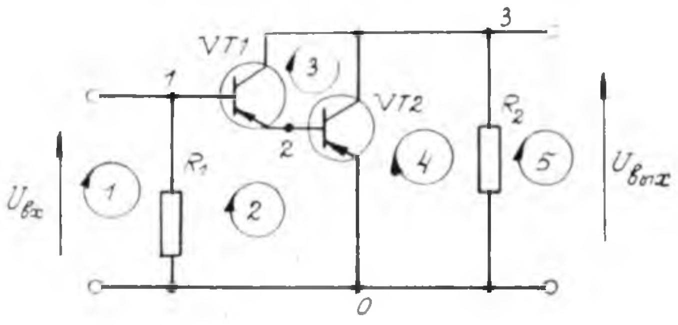


Рис. 3.8

$$
Z_{VT1} = \begin{array}{ll} & \\ 2 & б\text{-}э \\ 3 & э\text{-}к \\ 0 & б\text{-}к \\ & \end{array}
\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \\ z_{э1} + z_{б1} & -z_{э1} & -z_{б1} \\ z_{m1} - z_{э1} & z_{э1} + z_{к1} - z_{m1} & -z_{к1} \\ -z_{m1} - z_{б1} & z_{m1} - z_{к1} & z_{б1} + z_{к1} \\ б\text{-}э & э\text{-}к & б\text{-}к \end{array}
$$

$$
Z_{VT2} = \begin{array}{ll} & \\ 2 & б - э \\ 4 & э - к \\ 3 & б - к \\ & \end{array}
\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \\ r_{э2} + r_{б1} & -r_{э2} & -r_{б2} \\ r_{m2} - r_{э2} & r_{э2} + r_{к2} - r_{m2} & -r_{к2} \\ -r_{m2} - r_{б2} & r_{m2} - r_{к2} & r_{б2} + r_{к2} \\ б - э & 3 - к & б - к \end{array},
$$

Присваиваем строкам и столбцам этих матриц номера контуров, в которые входят соответствующие стороны транзисторов. Если сторона многополюсника не входит ни в один из контуров схемы, считают, что она попадает в базисный (нулевой) контур и соответствующие ей строка и столбец из матрицы многополюсника вычеркиваются.

Составляем матрицу пассивной части схемы

$$
Z_{пасс} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & -R_2 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

Суммируем все матрицы Z_{VT1}, Z_{VT2} и $Z_{пасс}$ и получаем полную матрицу Z схемы

$$
Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + r_{э1} + r_{б1} + r_{э2} + r_{б2} \\ 0 & r_{m1} - r_{э1} - r_{m2} - r_{б2} \\ 0 & r_{m2} - r_{э2} \\ 0 & 0 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
3 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 \\
-r_{э1}-r_{б2} & -r_{э2} & 0 \\
r_{э1}+r_{к1}+r_{m1}+r_{б2}+r_{к2} & r_{m2}-r_{к2} & 0 \\
-r_{к2} & r_{э2}+r_{к2}+r_{m2}+R_2 & -R_2 \\
0 & -R_2 & R_2
\end{array}
\Bigg] .
$$

Повторим пример на составление матрицы Y схемы (индекс «э» для простоты упускаем)

$$
Y_{VT1э}=
\begin{array}{cc}
 & \\
1 & б \\
2 & к \\
3 & э \\
 &
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
g'_{11} & g'_{12} & -g'_{11}-g'_{12} \\
g'_{21} & g'_{22} & -g'_{21}-g'_{22} \\
-g'_{11}-g'_{21} & -g'_{12}-g'_{22} & g'_{11}+g'_{12}+g'_{21}+g'_{22}
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc} б & к & э \end{array}
\end{array} ,
$$

$$
Y_{VT2э}=
\begin{array}{cc}
 & \\
2 & б \\
3 & к \\
0 & э \\
 &
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
g''_{11} & g''_{12} & -g''_{11}-g''_{12} \\
g''_{21} & g''_{22} & -g''_{21}-g''_{22} \\
-g''_{11}-g''_{21} & -g''_{12}-g''_{22} & g''_{11}+g''_{12}+g''_{21}+g''_{22}
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc} б & к & э \end{array}
\end{array}
$$

Если при присвоении строкам и столбцам матриц многополюсников номеров узлов схемы, с которыми соответствующие полюсы соединены, один из них получат нулевой номер, они вычеркиваются:

$$
Y_{пасс}=
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
G_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & G_2
\end{bmatrix}
\end{array} ,
$$

где $G_1=1/R_1$; $G_2=1/R_2$;

$$
Y=
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
\Bigg[
\begin{array}{cc}
g'_{11}+G_1 & -g'_{11}-g'_{12} \\
-g'_{11}-g'_{21} & g'_{11}+g'_{12}+g'_{21}+g'_{22}+g''_{11} \\
g'_{21} & -g'_{21}-g'_{22}+g''_{21}
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} 3 \\ \end{array}
\left.\begin{matrix} g'_{12} \\ -g'_{12}-g'_{22}+g''_{12} \\ g'_{22}+g''_{22} \end{matrix}\right] .
$$

8. Построение выражений для требуемых схемных функций.

9. Построение частотных или временных характеристик.

10. Вычисление чувствительностей.

11. Анализ схемы на устойчивость и т. д.

Рассмотренные здесь матричные методы достаточно просты как в построении матричной модели цепи, так и в ее разрешении с целью нахождения аналитического выражения схемной функции $F(p)$ как в символьном, так и в численном виде. Они являются как бы центральным аппаратом исследования электрических и электронных схем, которым обосновываются все другие методы анализа.

К недостаткам матричных методов относят их низкую наглядность, поскольку табличный образ схемы (матрицы Z или Y) не поддается отождествлению ни со схематическим изображением электронной цепи, ни тем более с физическими процессами, протекающими в ней.

Алгебраические методы раскрытия определителя матрицы Z или Y также страдают рядом существенных недостатков. Анализ показывает, что матрицы Z и Y весьма избыточны, что порождает при раскрытии определителя необходимость вычислять лишние и затем сокращающиеся члены. Это, в свою очередь, порождает значительную погрешность при оперировании с разностями близких чисел. Как правило, матрицы Z и Y для реальных электронных схем оказываются сильно разреженными, т. е. полупустыми, а это приводит, особенно в машинной реализации, к непроизводительным операциям с нулевыми числами определителя, нерациональному использованию памяти машины.

Пример. Для $n \times n$ матрицы Y без нулевых элементов число членов определителя $n!$, а число всех вычисляемых членов (до сокращения) n^n+n^2+n-1, т. е. для $n=4$ $n!=24$, $n^n+n^2+n-1=83$, для $n=10$ $n!=3628800$, а $n^n+n^2+n-1 \approx 10^{10}$. Таким образом, число лишних членов с ростом числа узлов (контуров) схемы очень быстро возрастает. Объясняется это тем, что матричная математическая модель схемы или графа обладает известной избыточностью. Приглядитесь к любой матрице Z или Y!. Все ее элементы вне главной диагонали, во-первых, располагаются симметрично (т. е. повторяются дважды) и, во-вторых, включаются еще и в соответствующие элементы главной диагонали в виде собственных сопротивлений контуров или проводимостей узлов. Таким образом, сопротивление (проводимость) незаземленной ветви включается в матрицу схемы четыре раза.

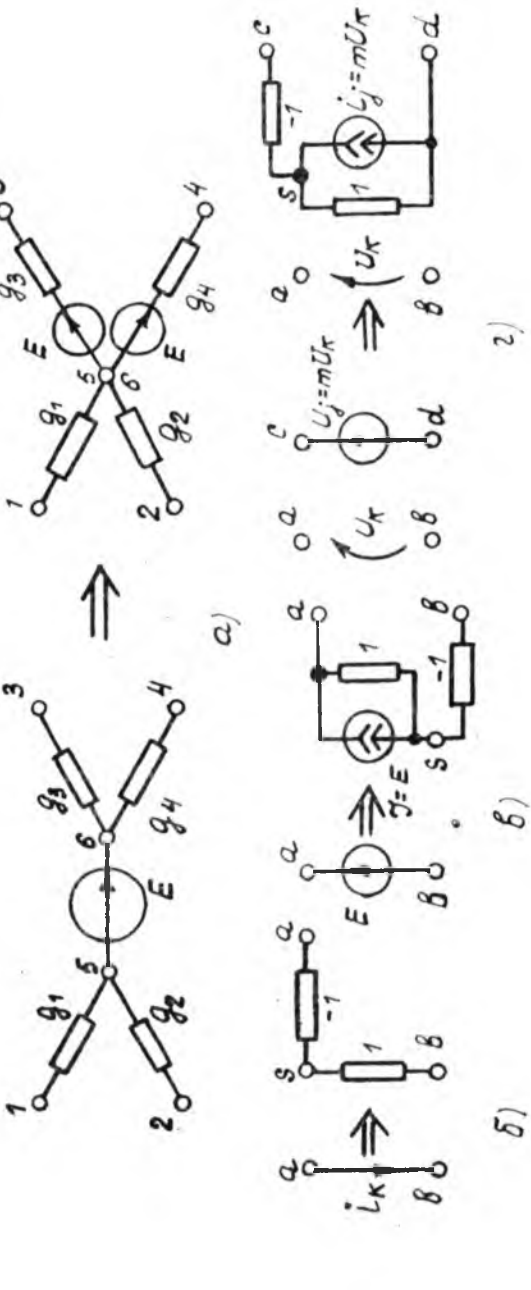
Формирование уравнений схемы в однородном координатном базисе (ОКБ) (3.6) или (3.7) является все же самым широко распространенным подходом в моделировании электронных схем. Это объясняется малым объемом памяти, необходимым для хранения информации о схеме, а также хорошей численной обусловленностью системы, т. к. диагональные элементы матрицы W имеют наибольшие значения. Однако наличие в схеме зависимых источников напряжения или тока, управляемых током, независимых источников напряжения, нулевых сопротивлений и индуктивностей (в численных методах решения) требует проведения предварительного преобразования в схеме (см. рис. 3.9 [37] и др.).

Избежать необходимости преобразования схемы можно применением полного координатного базиса (ПКБ) (см. гл. 1) или так называемого расширенного однородного координатного базиса (РОКБ), при котором учет неудобных для ОКБ компонентов осуществляется путем введения в вектор неизвестных системы дополнительных переменных. В результате получим уравнение, например в узловом базисе:

$$\begin{bmatrix} Y & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_T \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ b \end{bmatrix},$$

где I_0 — вектор дополнительно введенных токов; A_{12} — матрица инциденций выбранной системы сечений тех ветвей схемы, токи которых вошли в вектор I_0; A_{21}, A_{22} — матрицы коэффициентов и вектор правых частей компонентных уравнений выделенных ветвей схемы.

Для построения системы уравнений во временной области (базисе) разделим ветви схемы на группы емкостных, резистивных, индуктивных ветвей и ветвей



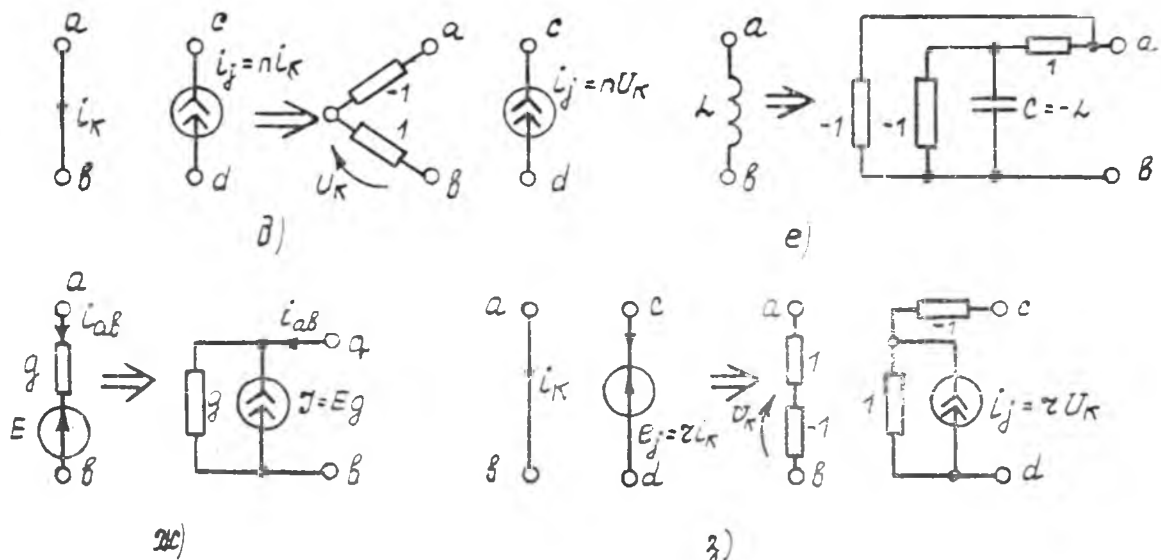


Рис. 3.9

источников тока. Тогда уравнение первого закона Кирхгофа в матричной форме примет вид $\Pi I_{\text{В}}=0$

или $\Pi_C I_C+\Pi_R I_R+\Pi_L I_L+\Pi_J J_{\text{В}}=0$,

где $I_{\text{В}}$ $(I_{\text{В}_1}, I_{\text{В}_2}, \ldots, I_{\text{В}_l})$ — вектор токов ветвей схемы; I_C, I_R, I_L — векторы токов емкостных, резистивных и индуктивных ветвей схемы; $J_{\text{В}}$ — вектор задающих источников тока ветвей.

Подставим в полученное выражение компонентные уравнения (1.3, *а*):

$$\Pi_C C\,(dU_C/dt)+\Pi_R R^{-1}U_R+\Pi_L L^{-1}\int U_L dt+\Pi_J J_{\text{В}}=0.$$

Учитывая (3.5), построим математическую модель схемы в виде системы интегродифференциальных уравнений

$$\Pi_C C\Pi_{Ct}\,(dU/dt)+\Pi_R R^{-1}\Pi_{Rt}U+\Pi_L L^{-1}\Pi_{Lt}\int U dt+\Pi_J J_{\text{В}}=0,$$

где $J_{\text{В}}$ в общем случае является функцией U, dU/dt, t, т. е. $J_{\text{В}}$ $(U, dU/dt, t)$.

В случае линейных схем полученное уравнение с помощью преобразований Фурье или Лапласа сводится к алгебраической линейной форме (3.3). В общем случае оно решается численными методами, для чего преобразуется в систему алгебраических и трансцендентных уравнений путем замены производных отношениями конечных разностей $dU/dt=(U_n-V_{n-1})/h$, где $h=\Delta t$ — шаг временной дискретизации (шаг интегрирования); n — индекс временных итераций. Подставим компонентные уравнения в табличной форме (1.3, б)

$$\left(\frac{1}{h}\Pi_C C\Pi_{Ct}+\Pi_R R^{-1}\Pi_{Rt}+h\Pi_L L^{-1}\Pi_{Lt}\right)U_n=$$

$$=-\Pi_J J_{\text{В}}(U_n,\ t)+\frac{1}{h}\Pi_C C U_{Cn-1}-\Pi_L I_{Ln-1}.$$

Отметим, что $U_{C\,n-1}$ и $I_{L\,n-1}$ к началу n-го шага уже вычислены. Решение на n-м шаге дает значение U_n и затем по компонентным уравнениям вычисляется I_n. При $n=1$ значения U_C и I_L находятся из начальных условий. Другие формулы аппроксимации компонентных уравнений, выбор шага и прочие вопросы организации численного решения рассмотрены в гл. 7.

Глава 4. МЕТОДЫ АНАЛИЗА, ОСНОВАННЫЕ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ МОДЕЛЯХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

4.1. Метод ненаправленных графов

Критический анализ возможностей алгебраических (матричных) методов анализа электронных схем вскрывает ряд присущих им существенных недостатков: 1) низкие вычислительные возможности из-за нерациональности алгоритмов вычисления определителей, неоправданно увеличивающих объем вычислительных операций и снижающих их точность; 2) низкая наглядность математической модели схемы, затрудняющая установление связи между топологическими образами электронной схемы и математическими соотношениями их модели. В то же время возможность установления такой связи, просто поддающейся осмыслению, является основой поиска новых схемотехнических решений, изобретательства и рационализации.

Поиск новых математических моделей, в той или иной степени ослабляющих указанные недостатки алгебраических моделей, продолжается и по сей день. Наибольший успех достигнут в построении моделей схем на базе топологического и теоретико-множественного математических аппаратов.

Так, теория графов, являющаяся одним из основных разделов топологии, дает наиболее наглядный образ математической модели электронной схемы. Теория графов описывает причинно-следственные связи между объектами любой природы. В этой связи графы широко применяются для моделирования процессов в экономике, в теории конечных автоматов, нейробионике, автоматике, социологии, в описании сетей связи, переключательных цепей, нервных сетей, в двоичном исчислении, в комбинаторном анализе и других областях знаний.

В основе теории графов лежит всего-навсего одна аксиома, поэтому теория обладает высокой степенью общности, что подтверждается перечнем ее применений.

Первая работа по теории графов, как считают, была написана в 1736 году Эйлером по поводу знаменитой задачи о Кенигсбергских мостах. С тех пор теория и ее приложения бурно развиваются.

Понятие и определение теории графов. *Граф* (X, Γ) задан, если даны: 1) непустое множество X и 2) отображение Γ множества X в X (т. е. если задана, другими словами, связь между элементами множества X).

Элементы множества X принято называть *вершинами* графа, их изображают точками (кружочками) на плоскости. Пару элементов x_i и x_j, связанных заданным отображением Γ, называют *ребром* (в ненаправленном) или *дугой* (в направленном графе). Их изображают непрерывной линией, соединяющей вершины x_i и x_j. Если отображением Γ предусмотрена не взаимная связь (отношение) между элементами множества X, то *пару вершин x_i и x_j соединяют дугой со стрелкой, направленной от x_i к x_j, когда отображением Γ элементу x_i ставится в соответствие элемент x_j.*

Форма задания отображения Γ может быть самой различной: табличной, в виде аналитических зависимостей, графической и др.

Пример 4.1. Дано множество $X\{a, b, c, d\}$ и отображение Γ в виде

a отображается на b с силой K_1,

c на a с силой K_2,

b на c с силой K_3,

c на b с силой K_4,

b на b с силой K_5.

Составим граф, разместив на плоскости вершины (кружочки) и соединив их линиями со стрелками, как показано на рис. 4.1. Каждой дуге (ребру) ставится в соответствие коэффициент, заданный отображением Γ. Его называют *весом* дуги, или *коэффициентом передачи,* а чаще просто *передачей дуги (ребра).*

Таким образом граф, с которым нам придется работать, представляется в виде рисунка, состоящего из некоторой совокупности вершин и дуг (ребер), соединяющих их определенным образом. При этом вершины обозначаются символами элементов исходного множества, а дугам (ребрам) ставятся в соответствие символы их передач.

Граф называют *направленным (ориентированным), если все его ребра (дуги) направленны (ориентированы).*

Граф называют *ненаправленным (неориентированным), если каждое его ребро не ориентировано.*

Граф назовем *смешанным, если в нем имеются и направленные, и ненаправленные ребра.*

Частичным графом называют *граф, содержащий все вершины исходного, но только часть его ребер.*

Подграфом называют *граф, содержащий часть вершин исходного и все ребра, их соединяющие.*

Инцидентной вершине x называют дугу (ребро), для которой она является началом или концом.

Другие определения:

Контур (цикл) — замкнутая совокупность дуг (ребер) в графе.

Связной граф — это граф, в котором любые две вершины соединяются путем, составленным из ребер графа. Другими словами, он представлен целым, неразделъным. На рис. 4.1, кстати, приведен пример несвязного графа, состоящего из двух раздельных частей: вершины *d* и подграфа с вершинами *a, b, c*.

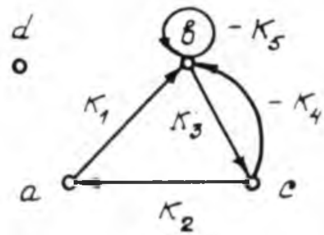


Рис. 4.1

Дерево графа — частичный граф без замкнутых образований, т. е. без контуров (циклов).

В 1.3 уже рассматривался способ построения графа непосредственно по исходной схеме электронной цепи. Остается только добавить, что в качестве исходного множества X здесь выбираются узлы схемы, а в качестве отображения Γ — сама схема соединения этих узлов. Пассивным цепям соответствуют ненаправленные графы, т. к. все ветви схемы обладают свойством обратимости. Иногда такие графы называют двунаправленными [38].

Поскольку схема в последней нашей интерпретации может рассматриваться с позиций теории графов, то естественно было бы использовать аппарат теории графов и ее достижения для расчета схемных функций, т. е.

для анализа схемы. Такая возможность открывается благодаря выводу из теории графов так называемых топологических формул. По ним определяются и вычисляются любые схемные функции непосредственно из рассмотрения топологии графа. Топологические формулы позволяют быстрее вычислять определители и алгебраические дополнения.

В методе ненаправленных графов топологическая и математическая модели схемы совпадают, а это означает, что последняя не имеет какой-либо избыточности, она, как говорят, минимальна.

Согласно выражению (2.5) определение схемной функции сводится к вычислению определителя и его дополнений, поэтому прежде всего необходимо связать топологию графа с процедурой вычисления определителя. Применительно к пассивным схемам Максвелл еще в конце прошлого века показал, что *определитель схемы (матрицы Y) равен сумме величин всех деревьев ее графа*

$$\Delta = \sum_i di, \tag{4.1}$$

где d_i — величина i-го дерева графа, определяемая произведением проводимостей его ребер (ветвей схемы): $d_i = y_a y_b \dots y_v$.

Определитель, как известно, не зависит от источников, действующих в схеме, поэтому формула (4.1) применяется к графу, в котором *все ветви с источниками напряжения (идеальными) закорочены*, а *ветви с источниками тока (идеальными) разомкнуты*. В графе с числом узлов v число ребер, входящих в каждое дерево, равно $\nu = v - 1$. Доказательство формулы для определителя (4.1) основано на анализе выражения для матрицы Y (3.7):

$$Y = \Pi Y_B \Pi_t = [\Pi Y_B]\Pi_t = Y_\Pi \Pi_t.$$

Здесь $Y_\Pi = \Pi Y_B$ отличается от матрицы узлов Π только тем, что каждый ее i-й столбец умножен на соответствующую i-ю проводимость диагональной матрицы Y_B. Структурно Y_Π и Π совпадают. *В соответствии с теоремой Бине—Коши об определителе произведения матриц определитель* $\det Y = \det(Y_\Pi \Pi_t)$ *равен сумме произведений соответствующих миноров.* Если размер матриц Y_Π и Π_t соответственно $\nu \times l$ и $l \times \nu$, то берутся всевозможные произведения миноров ν-го порядка, образованных из v столбцов матрицы $Y_{\text{П}}$ и v строк матрицы П_t с одними и теми же номерами. Еще Кирхгоф показал, что ненулевые миноры матрицы П соответствуют деревьям графа и равны ± 1. Действительно, замкнутый контур имеет равное число вершин и ребер. Его подматрица, образующая минор в матрице П, является квадратной, каждый столбец которой содержит одну $+1$ и одну -1, поскольку ветвь входит в контур целиком. Другие столбцы П не входят в квадратную подматрицу, поэтому сумма в каждой ее строке равна нулю. Всякая матрица (подматрица), обладающая таким свойством, называется особенной и имеет нулевой определитель. Следовательно, ненулевые миноры матрицы $Y_{\text{П}} = \text{П} Y_B$ также соответствуют деревьям, но образуют уже величины деревьев $\pm d_i = y_a y_b y_c \ldots y_v$. Так как соответствующий минор матрицы П_t является транспонированным минором матрицы П, то он имеет тот же знак ± 1. При перемножении этих миноров минус исчезает и получаем формулу (4.1), в которой нет сокращающихся членов. Таким образом, *формула Максвелла минимальна:*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{s} \prod_{r=1}^{v-1} y_i^r = \sum_{i}^{s} d_i, \qquad (4.2а)$$

где s — число деревьев d_i графа схемы; v — число вершин графа; y_i^r вес r-го ребра i-го дерева; $d_i = \prod_{r=1}^{v-1} Y_i^r$ — величина i-го дерева графа.

Если вместо проводимостей принять в качестве передач ребер графа сопротивления ветвей схемы, то получим *формулу Кирхгофа,* которая появилась почти на 40 лет раньше:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{s} \prod_{r=1}^{n} z_i^r, \qquad (4.2б)$$

где s — *число дополнений деревьев,* которыми называют совокупность ребер, не входящих в дерево; z_i^r — вес r-го ребра i-го дополнения дерева.

В настоящее время наибольшее распространение в теории схем получила топологическая формула Максвелла. Симметричные алгебраические дополнения Δ_{aa}, как известно, вычисляются по матрице проводимости (сопротивления) схемы путем вычеркивания a-й строки и a-го столбца. На графе это соответствует закорачиванию a-й вершины с общей (нулевой). Для полученного после такого небольшого преобразования «закороченного» графа вычисляют определитель по формуле Максвелла или Кирхгофа (4.2). Его значение и даст нам искомое алгебраическое дополнение, т. е.

$$\Delta_{aa} = \Delta',$$

где Δ' — определитель графа с закороченными вершинами a и 0.

Деревья преобразованного таким образом графа, входящие в выражение Δ', содержат $v-2$ элемента, т. к. закороченный граф имеет уже $v-1$ вершину. Если рассмотреть эти новые $v-2$-деревья, перенеся их в исходный граф, то обнаружим, что по отношению к нему они представляются в виде несвязного графа, состоящего из двух отдельных частей, не включающих в себя ни одного контура. Такая топологическая конфигурация получила название *двойного дерева*.

Двойное дерево введено Персивалем (1953 г.). Таким образом, для получения Δ_{aa} по исходному графу достаточно, не производя в нем никаких преобразований, просто найти все его 2-деревья, которые содержали бы общую (базисную) вершину 0 и вершину a в отдельных своих частях, что соответствует разрыву всех путей между вершинами 0 и a. Тогда

$$\Delta_{aa} = \sum_{i=1}^{m} \prod_{r=1}^{v-2} y_i^r = \sum_{i=1}^{m} d_{(a,0)i}, \tag{4.3а}$$

где $d_{(a,\,0)i}$ — обозначение величины i-го 2-дерева, содержащего вершины a и 0 в своих отдельных частях.

Построить 2-деревья для Δ_{aa} можно из основных деревьев графа посредством удаления одного ребра так, чтобы прервать путь между a-й и 0-й (базисной) вершинами. На рис. 4.2, *а* и *б* показан граф и его 2-деревья $d_{1,\,0}$ для определения Δ_{11}.

Для получения асимметричных алгебраических дополнений Δ_{ab} необходимо выбирать такие 2-деревья $d_{ab,\,0}$, в которых базисная вершина 0 находилась бы в одной части, а вершины a и b — в другой, изолированной от первой части графа, т. е.

$$d_{ab,\,0} = d_{a,\,0} \cap d_{b,\,0}.$$

На рис. 4.2, *в* показаны 2-деревья $d_{13,0}$ для Δ_{13}. В этом случае

$$\Delta_{ab}=\sum_{i=1}^{m} d_{(ab,0)\,i}. \qquad (4.3б)$$

С учетом формул (4.2) и (4.3) можно записать *общие топологические формулы передачи графа*, т. е. формулы для любой схемной функции [12]:

$$F'_{ab}=\frac{x_b}{J_a}=\frac{\Delta_{ab}}{\Delta}=\sum_{i=1}^{m} d_{(ab,0)\,i}\Big/\sum_{i=1}^{n} d_i \qquad (4.3в)$$

и

$$F''_{ab}=\frac{x_b}{E_a}=\frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}=\sum_{i=1}^{m} d_{(ab,0)\,i}\Big/\sum_{i=1}^{n} d_{(a,0)\,i}. \qquad (4.3г)$$

Найдем для графа, приведенного на рис. 4.2, *а*, схемную функцию передачи $K_{31}=u_3/u_1$ и функцию входного сопротивления $Z_{вх}=u_1/i_1$. Из формул (2.5) $Z_{вх}=\Delta_{11}/\Delta$, $K_{31}=\Delta_{13}/\Delta_{11}$. Находим все деревья графа и записываем по формуле (4.1) определитель:

$$\Delta=\sum_i d_i=y_ay_by_c+y_ey_dy_c+y_ay_cy_e+y_ay_by_e+y_ay_dy_e+$$
$$+y_dy_by_c+y_ay_by_d+y_by_cy_d,$$

$$\Delta_{11}=\sum d_{1,0}=y_ay_d+y_ay_e+y_ay_c+y_dy_b+y_dy_c+y_by_e+$$
$$+y_by_c+y_ey_c,$$

$$\Delta_{13}=\sum_i d_{13,0}=y_ay_d+y_ay_c+y_by_d+y_dy_c.$$

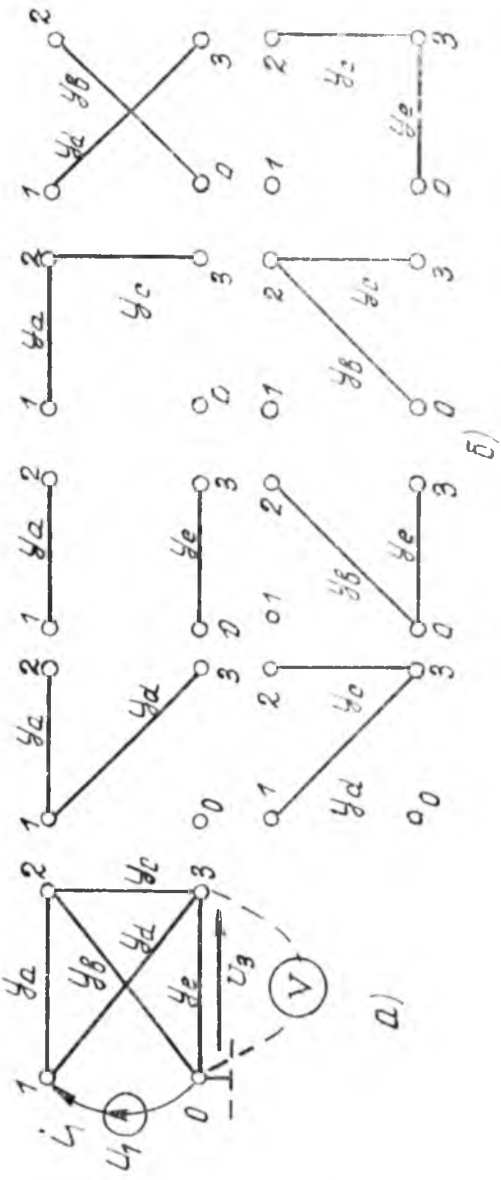
Вес изолированной вершины берется равным единице. В результате

$$K_{31}=\frac{y_a(y_d+y_c)+y_d(y_b+y_c)}{y_a(y_d+y_e+y_c)+y_b(y_d+y_e+y_c)+y_c(y_d+y_e)}$$

и

$$Z_{вх}=\frac{y_a(y_d+y_e+y_c)+y_b(y_d+y_e+y_c)+y_c(y_d+y_e)}{y_a(y_by_c+y_cy_e+y_by_e+y_dy_e+y_by_d)+}$$
$$\frac{y_a(y_d+y_e+y_c)+y_b(y_d+y_e+y_c)+y_c(y_d+y_e)}{+y_d(y_ey_c+y_by_c)+y_ey_dy_b}.$$

В общем случае, когда входные и выходные вершины графа схемы (мостовые цепи) не имеют общей вер-



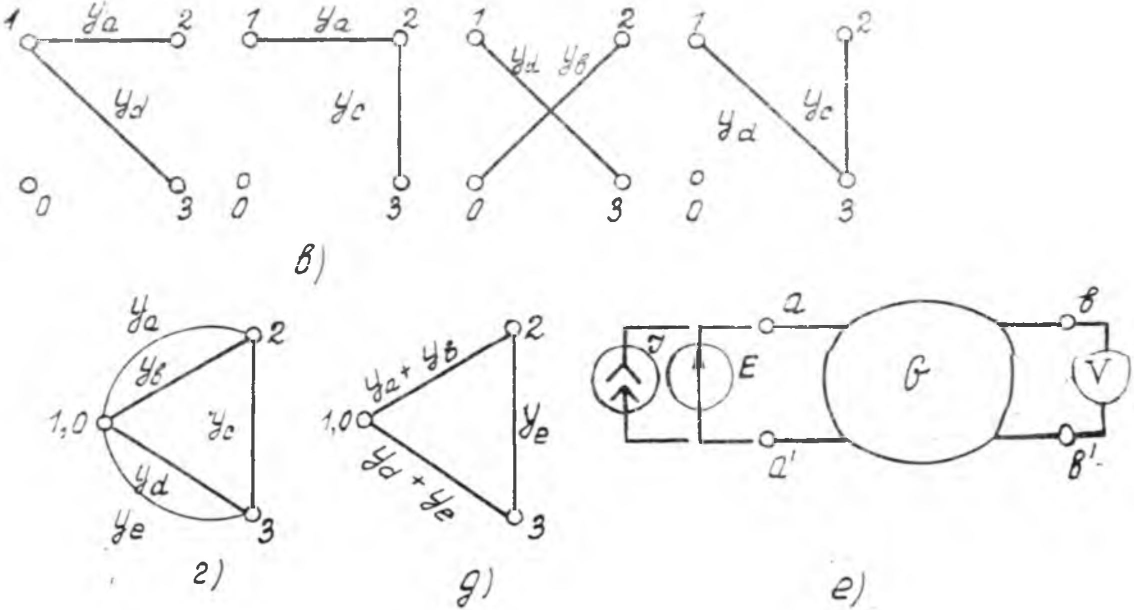


Рис. 4.2

шины (см. рис. 4.3 *а*), поиск 2-деревьев $d_{ab,a'b'}$ усложняется. Кроме того требуется определять знак величины каждого 2-дерева. Двойное дерево типа $d_{ab,a'b'}$ должно удовлетворить условию отсутствия путей между вершинами a и a', b и b'. Другими словами, вершины a и a' должны находиться в различных изолированных частях графа, так же как и вершины b и b'. Для графа, приведенного на рис. 4.3, *б*, имеем два 2-дерева типа $d_{ab,a'b'}$ (рис. 4.3, *в*): $d_{(ab,a'b')1} = y_1 y_2$ и $d_{(ab,a'b')2} = -y_3 y_4$. Причем величина 2-дерева берется со знаком плюс, если a и b находятся в одной части дерева, и со знаком минус в противном случае. Тогда и формула для определения асимметричного суммарного дополнения соответственно усложняется [12]:

$$\Delta_{(a+a')(b+b')} = \sum_{i=1}^{m-\nu} d_{(ab,a'b')i} - \sum_{i=1}^{\nu} d_{(ab',a'b)}. \tag{4.3д}$$

Из приведенных примеров видны достоинства и недостатки топологических формул Кирхгофа, Максвелла и Персиваля. Их главные достоинства состоят в непосредственной связи формул для определения схемных функций с топологическими фрагментами (деревьями или контурами) графа схемы в отсутствии избыточности модели и минимальности топологических формул. Видимым недостатком процедуры составления топологических формул является известная трудность поиска всех деревьев графа, а затем формирования из них 2-деревьев. Ради отмеченных достоинств метода упорно делаются попытки найти способы ослабления указанных его недостатков. И вот спустя ровно 90 лет после рождения метода появилась в 1953 году практически очень удобная модернизация топологического расчета — *формула Мэзона* (см. рис. 4.3, *а*) [13]:

$$F_{ab} = \frac{x_b}{x_a} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{q} P_\kappa \Delta_\kappa}{\Delta}, \tag{4.4}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} d_i$ — определитель, вычисляемый по правилу Максвелла (4.2) после замыкания источников напряжения E и удаления источника тока J и всех измерительных приборов; P_κ — величина κ-го прямого пути графа

5. Заказ 6690

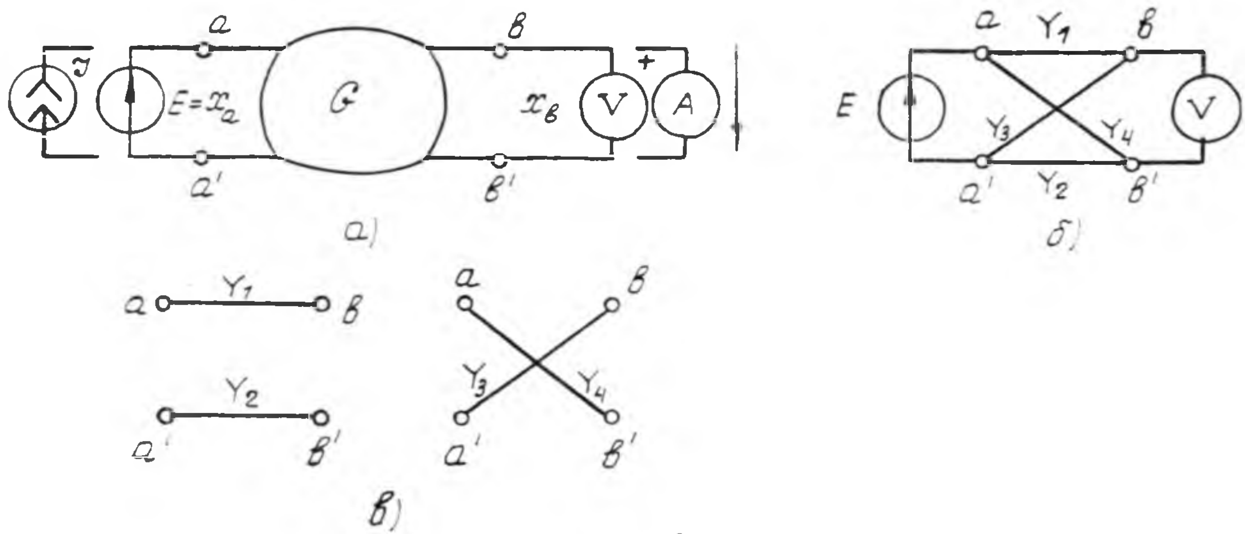


Рис. 4.3

от одного a-го зажима (вершины) задающего источника (E или J) к другому его a'-му зажиму (вершине), проходящего через измерительный прибор с зажимами (вершинами) $b—b'$ (V — вольтметр или A—амперметр). При этом *прямым путем* называют последовательность ребер графа, в которой все вершины и ветви различны. *Величина пути* $P_к$ определяется произведением передач (проводимостей или сопротивлений) ребер пути. *Знак величины пути* $P_к$ определяется по направлению пути (обычно выбирают по направлению источника) относительно выбранного направления искомой величины x_b. Если указанные направления совпадают, величина пути $P_к$ положительна, в противном случае — отрицательна. *Проводимость измерительных приборов считается равной единице* — $y_V = y_A = 1$; $\Delta_к$ — *алгебраическое дополнение пути* $P_к$. Вычисляется как определитель подграфа, получаемого из исходного графа после закорачивания пути $P_к$ (когда передачи ребер — проводимости ветвей схемы); q — число всех возможных прямых путей между указанными вершинами.

Таким образом, удалось обойти необходимость поиска 2-деревьев за счет использования топологических преобразований графа. С целью упрощения процедуры поиска деревьев графа предложен ряд способов разложения определителя непосредственно по графу: 1) *разложение по двум вершинам;* 2) *разложение по одной вершине;* 3) *разложение по ребру.* Алгоритмы названных разложений рассмотрим несколько позже.

Пример 4.2. Найдем по графу на рис. 4.2, a K_{31} — с помощью формулы Мэзона

$$K_{31} = u_3/u_1 = \sum_{i=1}^{q} P_к\Delta_к/\Delta.$$

Определяем величины прямых путей (рис. 4.2, a) из одной вершины *1* источника к другой его вершине 0, проходящих непременно через измерительный прибор (в данном случае вольтметр V):

$$P_1 = y_a y_c, \quad P_2 = y_d.$$

Закорачиваем поочередно эти пути и определяем их дополнения: $\Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = y_a + y_b + y_c$. В первом случае граф превратился в одну вершину, во втором — в параллельное соединение трех ребер y_a, y_b, y_c. Как и в обычной электрической схеме, параллельное соединение

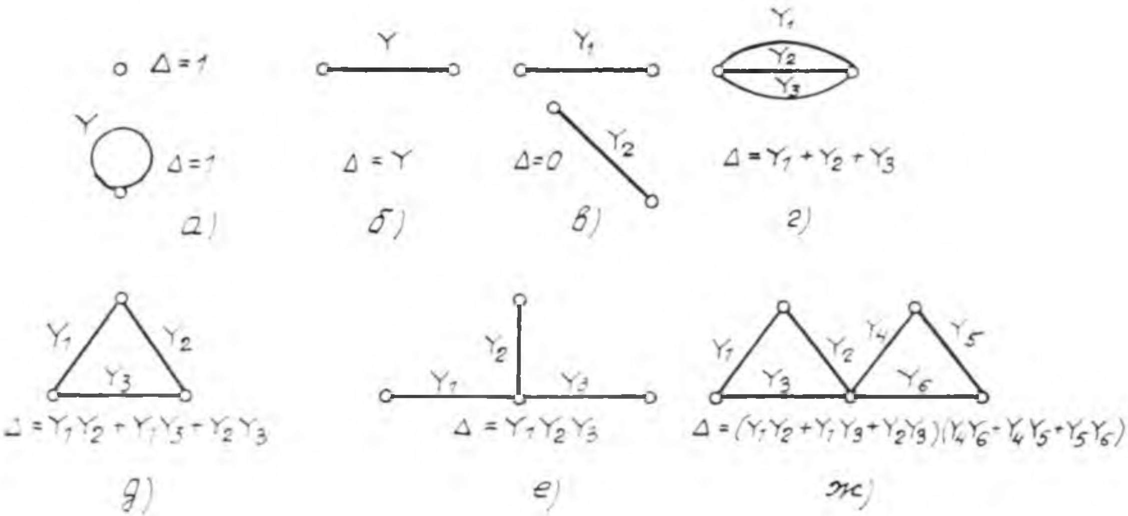

Δ = 1
Y
Δ = 1
а)
Y
Δ = Y
б)
Y₁
Y₂
Δ=0
в)
Y₁
Y₂
Y₃
Δ = Y₁ + Y₂ + Y₃
г)
Y₁
Y₂
Y₃
Δ = Y₁Y₂ + Y₁Y₃ + Y₂Y₃
д)
Y₁
Y₂
Y₃
Δ = Y₁Y₂Y₃
е)
Y₁
Y₂
Y₃
Y₄
Y₅
Y₆
Δ = (Y₁Y₂ + Y₁Y₃ + Y₂Y₃)(Y₄Y₆ + Y₄Y₅ + Y₅Y₆)
ж)

Рис. 4.4

ветвей можно заменить одним ребром с проводимостью, равной сумме проводимостей этих ветвей. Для вычисления определителя закорачиваем входной источник напряжения u_1, исключаем вольтметр. Граф преобразуется, как показано на рис. 4.2, *г*. Затем объединяем параллельные ребра и получаем граф, показанный на рис. 4.2, *д*. В нем три дерева: $\Delta=(y_a+y_b)y_c+(y_a+y_b)(y_d+y_e)+y_c(y_d+y_e)$.
И окончательно получим

$$K_{31}=\frac{u_3}{u_1}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=$$

$$=\frac{y_a\cdot y_c\cdot 1+y_d(y_a+y_b+y_c)}{(y_a+y_b)(y_c+y_d+y_e)+y_c(y_d+y_e)}.$$

А теперь рассмотрим определители элементарных графов на рис. 4.4. Определитель графа, состоящего из одной вершины (рис. 4.4, *а*), равен единице. Определитель несвязного графа, состоящего из двух и более изолированных частей (рис. 4.4, *в*), равен нулю. Определитель графа, состоящего из частей, объединенных в одной вершине (рис. 4.4, *ж*), равен произведению определителей этих частей.

4.2. Метод унисторных (смешанных) графов

Ненаправленный граф, как уже отмечалось, является топологической и одновременно математической моделью пассивной схемы, т. е. схемы, состоящей из двухполюсных обратимых компонентов. Наличие в реальных электронных цепях электронных приборов, т. е. многополюсников с необратимыми свойствами, требует введения в граф направленных элементов, имеющих различные передачи в противоположных направлениях. Граф схемы, в котором пассивные (обратимые) двухполюсники отображаются ненаправленными ребрами, а необратимые двухполюсники — направленными, можно назвать смешанным графом. В практике анализа электронных схем широкое применение получил направленный элемент — *унистор* как разновидность зависимого источника тока.

Унистор — трехузловой элемент графа, обладающий односторонней проводимостью. Его изображение показано на рис. 4.5, *а*. Унистор обладает следующими свойствами:

1) ток через унистор протекает в направлении стрелки, т. е. от его начальной вершины *1* к конечной *2* (рис. 4.5, *а*);

2) его передача (проводимость) в прямом направлении равна y, в обратном — нулю;

3) величина тока через унистор определяется произведением его проводимости на напряжение его начальной вершины, отсчитанное от третьей базисной условно заземленной вершины: $I = yu_1$;

4) в зависимости от знака проводимости величина тока через унистор может быть как положительной, так и отрицательной.

Преобразования унисторных графов, вытекающие из его свойств, приведены на рис. 4.5. Главное из них, на которое следует обратить внимание, состоит в исключении унистора, когда его начальная вершина совпадает с базисной (рис. 4.5, *в*), т. к. $u_1 = 0$ и $I = y \cdot 0 = 0$. Остальные преобразования очевидны. Из определения унистора вытекает, что он по своим свойствам тождествен зависимому (управляемому напряжением в начальной вершине) источнику тока. Легко составить его матрицу проводимости (рис. 4.5, *а*) по правилам метода эквивалентных схем (§ 3.1):

$$Y_{\text{ун}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y & 0 \\ -Y & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{4.5}$$

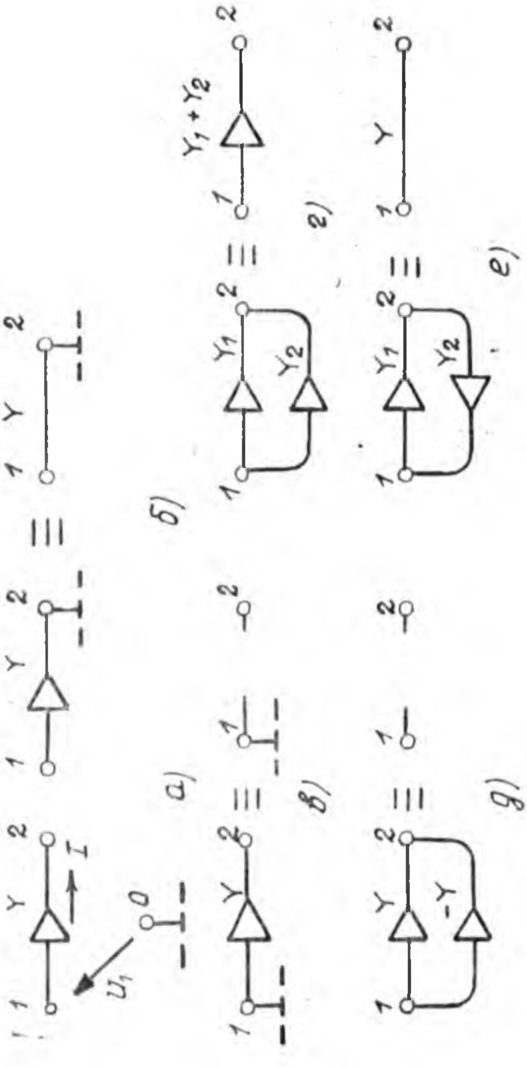
Перейдем для общности включения к особенной матрице

$$Y_{\text{ун}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y & 0 & -Y \\ -Y & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

которая аналогична матрице зависимого источника (3.35). Устанавливая соответствие между изображением унистора (рис. 4.5, *а*) и его матрицей, можно установить правило построения унисторного графа по матрице проводимости многополюсника.

Правило: проводимость y_{ij} унистора, направленного от вершины i к вершине j, определяется недиагональным элементом матрицы:

$$y_{ij} = -w_{ji}. \tag{4.6}$$



а)
б)
в)
г)
д)
е)

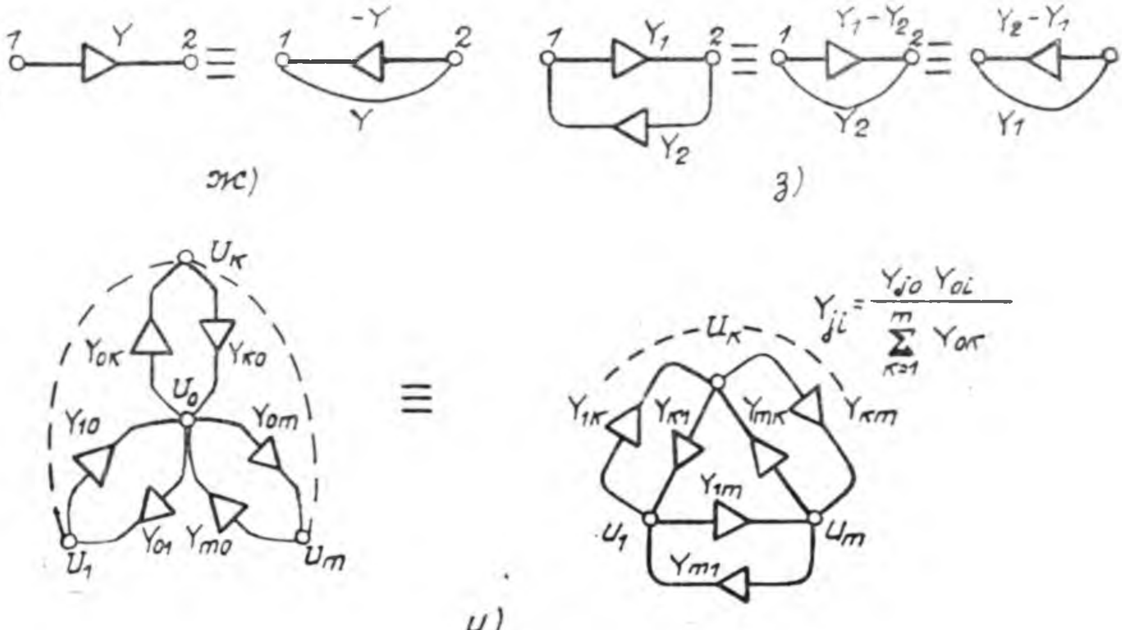

1
Y
2
1
-Y
2
Y
ж)
1
Y_1
2
Y_2
1
Y_1-Y_2
2
Y_2
Y_2-Y_1
Y_1
з)
$U_к$
$Y_{0к}$
$Y_{к0}$
U_0
Y_{10}
Y_{0m}
Y_{01}
Y_{m0}
U_1
U_m
$U_к$
$Y_{ji}=\frac{Y_{j0}Y_{0i}}{\sum_{к=1}^{m}Y_{0к}}$
$Y_{1к}$
$Y_{к1}$
$Y_{mк}$
$Y_{кm}$
Y_{1m}
U_1
U_m
Y_{m1}
и)

Рис. 4.5

Применяя это правило, построим унисторный граф по матрице (4.6): $y_{12}=-w_{21}=y$, $y_{21}=-w_{12}=0$, $y_{13}=-w_{31}=0$, $y_{31}=-w_{13}=y$, $y_{23}=-w_{32}=0$, $y_{32}=-w_{23}=-y$.

На рис. 4.6, *а* показан унисторный граф зависимого источника тока, ни одна вершина которого не совпадает с базисной. Стоит нам заземлить вершину *3* на рис. 4.6, *а*, как граф превратится в исходный (рис. 4.5, *а*), совпадающий с обычным зависимым источником тока, управляемым напряжением (рис. 4.6, *б*), поскольку унисторы y и $-y$, направленные от заземленной вершины,

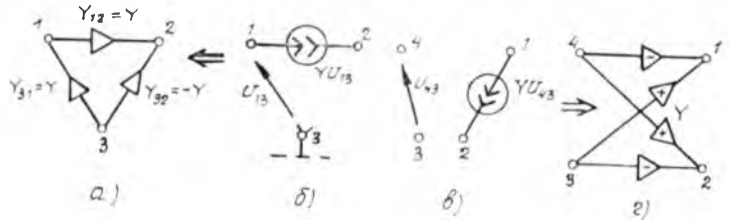


Рис. 4.6

эквивалентны разрыву. Обратить полезно внимание на то, что унисторы исходят от вершины *3* отсчета управляющего напряжения и сходятся к вершине *2*, в которую направлен сам источник тока. На рис. 4.6, *в* и *г* показан унисторный граф зависимого источника тока, не имеющего общей вершины с управляющей ветвью.

Воспользуемся полученным правилом для построения унисторного графа электровакуумного триода (показан на рис. 4.7, *а*). Для этого необходимо вспомнить

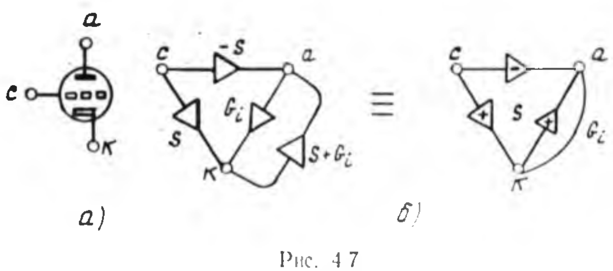


Рис. 4.7

его особенную матрицу проводимости (линейный режим работы без сеточных токов)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{с} & \text{а} & \text{к} \end{array} \\
Y_{\text{эт}} = \begin{array}{c} \text{с} \\ \text{а} \\ \text{к} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & G_i & -S-G_i \\ -S & -G_i & S+G_i \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Выпишем из нее значения проводимостей унисторов: $y_{\text{са}}$, $y_{\text{ас}}$, $y_{\text{ск}}$, $y_{\text{кс}}$, $y_{\text{ак}}$, $y_{\text{ка}}$. $y_{\text{са}} = -w_{\text{ас}} = -S$, $Y_{\text{ас}} = -w_{\text{са}} = 0$. $Y_{\text{ск}} = -w_{\text{кс}} = S$, $Y_{\text{кс}} = -w_{\text{ск}} = 0$, $Y_{\text{ак}} = -w_{\text{ка}} = G_i$, $Y_{\text{ка}} = -w_{\text{ак}} = S + G_i$.

Унисторный граф триода приведен на рис. 4.7, *б* с последующим эквивалентным упрощением изображения, в котором по сути выделена пассивная ветвь G_i.

Для полевого транзистора по его матрице (3.36):

$$y_{\text{зс}} = _{\text{дз}}, Y_{\text{зи}} = -g_{\text{з}}, \; Y_{\text{си}} = G_{\text{си}}, \; Y_{\text{ис}} = -g_{\text{з}} + G_{\text{си}}.$$

Унисторный граф показан на рис. 4.8 с последующим упрощением.

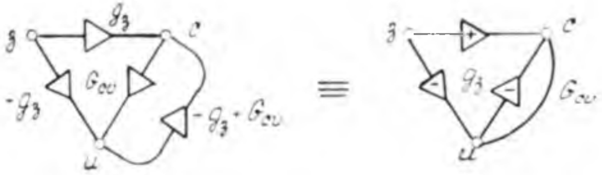


Рис. 4.8

Для биполярного транзистора по его матрице (3.39) составим унисторный граф. Он показан на рис. 4.9.

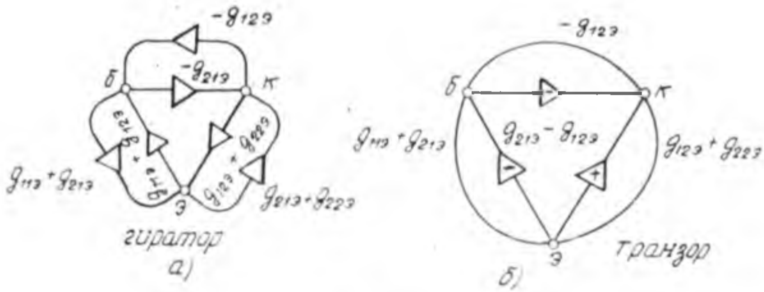


Рис. 4.9

На рис. 4.10, *а* приведен унисторный граф диодной оптопары, составленный по матрице (3.37), а на рис. 4.10, *б* — граф операционного усилителя по матрице (3.38).

Для построения смешанного (унисторного) графа схемы необходимо его пассивные компоненты изобразить в виде ненаправленных ребер, электронные компоненты представить в виде унисторного графа замещения (унисторной модели) и включить в граф аналогично тому, как они включены в исходной схеме. Тогда топологическая модель схемы будет в то же время и ее математической (графовой) моделью. Для сравнения обратимся к топологической модели схемы, которую рассматривали в методе эквивалентных схем (§ 3.1). Она также использует зависимые

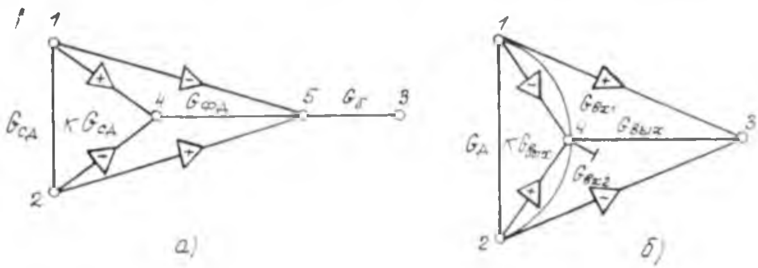


Рис. 4. 10

источники в схемах замещения электронных компонентов. Однако подмечаем, что унисторный граф замещения и эквивалентная схема замещения совпадают только тогда, когда в схеме заземляется один из узлов электронной компоненты (управляющий электрод). В этом случае и в матрице Y схемы управляющий параметр (проводимость унистора) добавляется только к одному или двум элементам согласно правилу включения управляющего параметра. Если ни один из узлов электронной компоненты не совпадает с базисным узлом схемы, то согласно правилу управляющий параметр добавляется уже к четырем элементам матрицы, что соответствует унисторному графу компоненты, содержащему три унистора. Таким образом, убеждаемся, что усложнение унисторной топологической модели по сравнению с эквивалентной схемой происходит в результате неизбежной платы за новое ее качество, т. е. за слияние ее с математической моделью. Для получения выражений схемных функций составлять матрицу проводимости уже не надо. Здесь используются топологические формулы Максвелла или Мэзона, которые мы рассматривали в применении к ненаправленным графам.

Применение топологических формул в смешанном графе (с унисторами) требует учета направленности и других свойств унисторов. На примере формулы Мэзона обозначим *особенности ее применения в графе с унисторами.*

1. Перед вычислением числителя N топологической формулы $\left(N=\sum_{\kappa=1}^{q} P_\kappa \Delta_\kappa\right)$ необходимо *условно заземлить одну из вершин измерительного прибора.*

2. *Величина пути или дерева считается равной нулю, если в их составе имеется унистор, направленный в сторону от условно заземленной вершины.*

3. При вычислении определителя графа Δ (знаменатель топологической формулы) условно заземлять можно любую вершину. С целью упрощения графа рациональней заземлять вершину, которой инцидентно наибольшее число исходящих унисторов.

Рассмотрим способы разложения определителя графа.

Разложение по двум вершинам

1. Выбирают на графе (напомним, в графе закорочены все источники напряжения и разомкнуты источники тока) две любые вершины, одна из которых должна быть условно заземленной. Рационально выбирать наиболее удаленные друг от друга вершины.

2. Определитель ищется посредством рассмотрения прямых путей между выбранными вершинами по формуле

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^{q'} P'_\kappa \Delta'_\kappa, \tag{4.7}$$

где P'_κ — величина κ-го прямого пути между выбранными вершинами; Δ'_κ — определитель подграфа, полученного из исходного после закорачивания κ-го пути; q' — число всех возможных прямых путей между выбранными вершинами.

Пример 4.3. Найдем определитель для унисторного графа операционного усилителя (рис. 4.10, *б*):

1) выбираем вершину *2* на рис. 4.10, *б* для условного заземления;

2) упрощаем граф путем удаления унисторов $кG_{вых\ 24}$ и $кG_{вых\ 23}$ (рис. 4.11, *а*);

3) выбираем вершины разложения *2* и *3* как наиболее удаленные друг от друга;

4) перебираем все прямые пути между вершинами *2* и *3*:

$$P_1' = G_{вых}G_{вх2},\quad P_2' = G_д G_{вх1} G_{вых}$$

(пути через унисторы равны нулю, т. к. унисторы в них направлены в сторону от условной заземленной вершины);

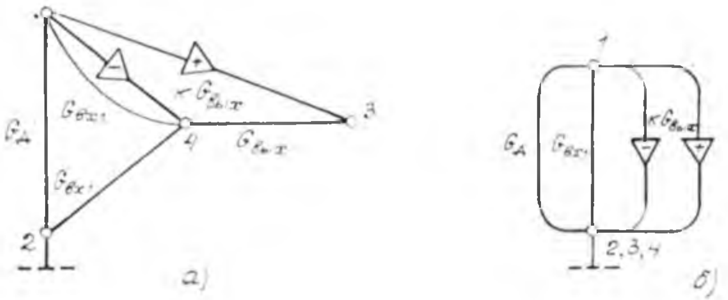


Рис. 4.11

5) закорачиваем путь P_1' и получаем подграф, показанный на рис. 4.4, *б*; для него $\Delta_1' = G_д + G_{вх1}$; при закорачивании второго пути граф превращается в одну вершину $\Delta_2' = 1$;

6) в результате получаем $\Delta = P_1'\Delta_1' + P_2'\Delta_2' = G_{вх2}G_{вых}(G_д + G_{вх1}) + G_д G_{вх1} G_{вых}\cdot 1$.

Разложение по вершине

1. Выбирают в графе вершину *p*. В ненаправленном графе любую, в графе с унисторами разложение ведется по условно заземленной вершине. В первом случае рационально выбирать вершину, которой инцидентно наибольшее число ребер. Во втором случае это еще и такая, от которой направлено наибольшее число унисторов.

2. Определитель ищется путем закорачивания одних и одновременно разрыва других ребер, инцидентных выбранной вершине *p*, по формуле

$$\Delta = \sum_{i} y_i \Delta_i + \sum_{i \neq j} y_i y_j \Delta_{ij} + \sum_{\substack{i \neq j \\ j \neq k}} y_i y_j y_k \Delta_{ijk} + \ldots, \tag{4.8}$$

где y_i, y_j, y_k — проводимости ребер (унисторов), инцидентных выбранной вершине p и соответственно вершинам i, j, k, ...; Δ_i — определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребра y_i и удаления всех остальных ребер, инцидентных вершине p; Δ_{ij} — определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребер y_i, y_j и удаления всех остальных ребер, инцидентных вершине p; Δ_{ijk} — определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребер y_i, y_j и y_k и удаления всех остальных ребер, инцидентных вершине p, и т. д.

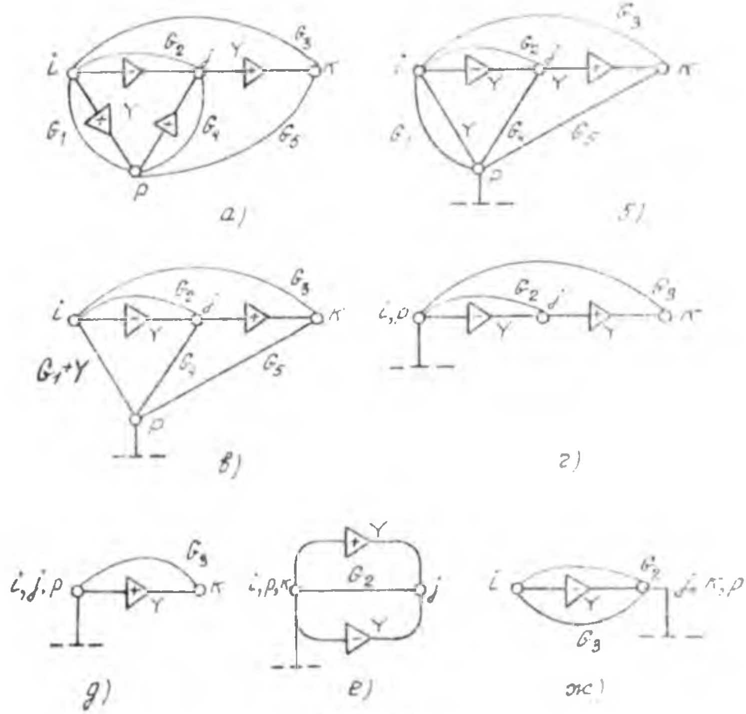


Рис. 4.12

Пример 4.4. Найдем определитель графа, приведенного на рис. 4.12, *а*:

1) выбираем вершину разложения p и условно заземляем ее (рис. 4.12, *б*);

2) упрощаем граф (рис. 4.12, *б, в*);

3) закорачиваем по одному ребру G_1+y, удаляем одновременно ребра G_4 и G_5 (рис. 4.12, *г*) и находим определитель полученного подграфа $\Lambda_i=G_2G_3+G_3y$ ($G_2y=0$, т. к. унистор y в этом дереве направлен в сторону от условно заземленной вершины p, i); при закорачивании G_4 и затем G_5 подграф получается того же вида (рис. 4.12, *г*), однако $\Lambda_j=G_3(G_2-Y)$ и $\Lambda_k=Y(G_2+G_3-Y)+G_2G_3$;

4) закорачиваем по два ребра: $y+G_1$ и G_4, а G_5 удаляем, получаем подграф на рис. 4.12, *д*, его определитель $\Lambda_{ij}=G_3$; закорачиваем $y+G_1$ и G_5, удаляем G_4, находим $\Lambda_{ik}=y+G_2$ (рис. 4.12, *е*); закорачиваем G_4 и G_5, удаляем $y+G_1$, находим $\Lambda_{jk}=G_2+G_3-y$;

5) закорачиваем по три ребра: $y+G_1$, G_4 и G_5, граф превращается в вершину, его определитель $\Lambda_{ijk}=1$;

6) поскольку вершине p инцидентны три ребра, переходим к записи определителя по формуле (4.8):

$$\Delta=[G_4G_3(G_2-Y)+G_5((G_2+G_3-Y)Y+G_2G_3)+$$
$$+(Y_1+G_3)(G_2G_3+G_3Y)]+[(Y+G_1)G_4G_3+$$
$$+(Y+G_1)G_5(Y+G_2)+G_4G_5(G_2+G_3-Y)]+$$
$$+[(Y+G_1)G_4G_5\cdot 1].$$

Разложение определителя по ребру

1. Выбирается в графе ребро, одна из вершин которого является условно заземленной.

2) Путем закорачивания и удаления этого ребра находят определитель по формуле

$$\Lambda=\Lambda_0+y_\kappa\Lambda_\kappa, \qquad (4.9)$$

где y_κ — проводимость выбранного ребра разложения; Λ_κ — определитель подграфа, получаемого из исходного после закорачивания ребра y_κ; Λ_0 — определитель подграфа, получаемого после удаления ребра y_κ.

Настоящее разложение очень простое, но, как правило, его приходится применять к графу неоднократно (методом вложения).

Пример 4.5. Для графа, приведенного на рис. 4.12, *а*, найдем определитель разложением по ребру:

1) выбираем ребро разложения G_4, исходя из того, чтобы при его удалении граф максимально упрощался (условно заземленный узел оставим тот же);

2) закорачиваем ребро G_4, полученный подграф показан на рис. 4.13, *а*, найдем для него определитель $\Delta_{G4} = (G_1+y-y+G_2)G_5+(G_1+y-y+G_2)G_3+G_3G_5$;

3) для поиска Δ_0 удаляем ребро G_4, получаем подграф, показанный на рис. 4.13, *б*, но он не является элементарным, поэтому к нему применяем разложение по другому ребру, например G_1+y, тогда $\Delta_0=\Delta_0'+$ $+(G_1+y)\Delta_{G1+y}$;

4) закорачиваем ребро G_1+y, получаем подграф, показанный на рис. 4.13. *в*, и находим $\Delta_{G1+y}=G_2(G_3+$ $+G_5)+(G_3+G_5)y$;

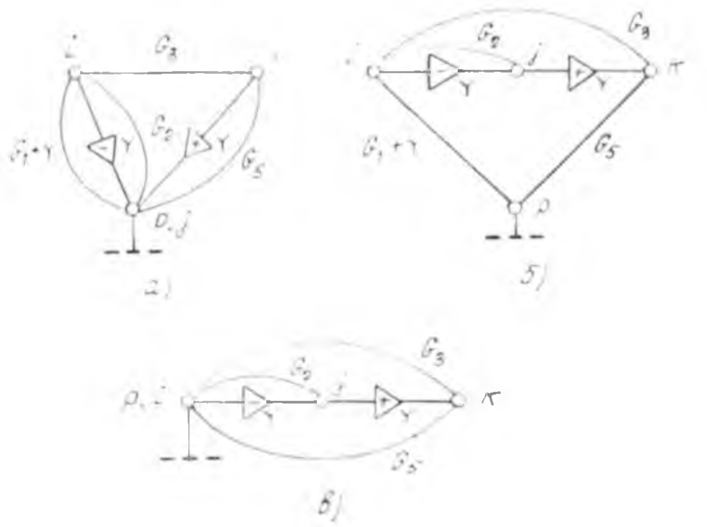


Рис. 4. 13

5) удаляем ребро G_1+y и находим $\Delta_0'=G_5[G_3y+$ $+y(G_2-y)+G_2G_3]$;

6) записываем $\Delta_0=G_5[G_3y+y(G_2-y)+G_2G_3]+(G_1+$ $+y)[G_2\times(G_3+G_5)+y(G_3+G_5)]$;

7) записываем искомый определитель исходного графа

$\Delta=(\Delta_0'+(G_1+y)\Delta_{G1+y})+G_4\Delta_{G4}=G_5[G_3y+y(G_2-y)+$

$$+ G_2G_3] + (G_1 + y)[G_2(G_3 + G_5) + y(G_3G_5)] + G_4[(G_1 + G_2)(G_5 + G_3) + G_3G_5].$$

Порядок анализа электронных схем методом унисторных (смешанных) графов

1. Постановка задачи анализа.

2 Выявление требуемых для анализа типов схемных функций, их характеристик и параметров.

3. Составление топологической модели для анализа схемы по постоянному или переменному току, а также с учетом импульсного режима работы устройства.

4. Подбор наиболее подходящих по режиму работы и задачам анализа матриц проводимости или схем замещения электронных компонентов схемы. Составление по выбранным моделям унисторных графов электронных компонентов (или выбор из числа известных унисторных моделей).

5. Составление графа схемы с учетом унисторных моделей электронных компонентов.

6. Подключение к графу с учетом вида искомой схемной функции измерительного прибора и условное заземление одного из его зажимов (вершин).

7 Построение выражений для требуемых схемных функций по формуле Мэзона. Начинают с выбора направления тока в выходном ребре, поиска всех прямых путей от одной вершины источника сигнала к другой его вершине через измерительный прибор, затем вычисляются их дополнения. Последним этапом является вычисление (запись) определителя графа.

8. Построение частотных или временных характеристик.

9. Вычисление чувствительностей.

10. Анализ схемы на устойчивость и т. д.

Пример 4.6. Найти схемные функции $K_U = u_{вых}/e(p)$, $Y_{пер} = i_{вых}/e(p)$, $Y_{вх} = i_{вх}/e(p)$, $Z_{вых} = u_{вых}/J_{вых}$ для схемы инвертирующего усилителя на операционном усилителе (ОУ), представленной на рис. 4.14, *а*.

1) Составляем граф схемы, включая в него унисторную модель операционного усилителя из рис. 4.10, *б*. На рис. 4.14, *б* показан получившийся при этом граф. Поскольку в схеме используется инвертирующее, а не дифференциальное включение ОУ, необходимо вершины 0—*2′* и *4′* на рис. 4.14, *б* объединить. В результате полу-

чаем граф, показанный на рис. 4.14, *в*. Упрощаем его, объединяя параллельные ребра (рис. 4.14, *г*).

2) Включаем измерительные приборы V и A в соответствии с видом искомых схемных функций и условно заземляем сначала одну из вершин (0) вольтметра V. Упрощаем граф путем удаления унистора $-\kappa G_{\text{вых}\,03}$, направленного от заземленной вершины, и объединения унистора $-\kappa G_{\text{вых}\,20}$ с параллельным ему ребром.

3) По полученному в результате этих действий графу (рис. 4.14, *д*) начинаем построение схемной функции K_U:

$$K_U = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{q} P_\kappa \Delta_\kappa}{\Delta} = \frac{u_{\text{вых}}}{e(p)} .$$

Путь начинается в вершине *1* и заканчивается в вершине 0:

$$P_1 = G_1 (G_2 + \kappa G_{\text{вых}}),\ q = 1.$$

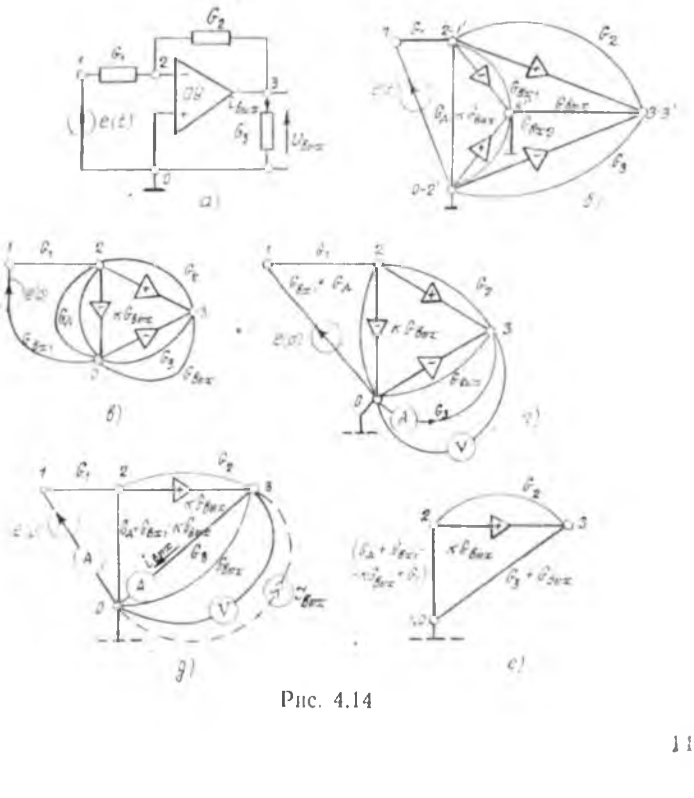


Рис. 4.14

После закорачивания P_1 граф стягивается в одну вершину 0:

$$\Delta_1 = 1.$$

4) Вычисляем определитель после закорачивания источника $e(p)$ и удаления измерительных приборов (рис. 4.14, *е*; вершину условного заземления оставляем прежней):

$$\Delta = (G_д + G_{вх1} + G_1 - \kappa G_{вых})(G_3 + G_{вых}) + (G_д + G_{вх1} + G_1 - \kappa G_{вых}) G_2 + (G_3 + G_{вых})(G_2 + \kappa G_{вых}).$$

Тогда

$$K_U = \frac{G_1 (G_2 + \kappa G_{вых})}{(G_д + G_{вх1} + G_1 - \kappa G_{вых})(G_3 + G_{вых} + G_2) + (G_3 + G_{вых}) \times (G_2 + \kappa G_{вых})}.$$

Найдем $Y_{пер}$: $P_1 = G_1 (G_2 + \kappa G_{вых}) G_3$, $q = 1$, $\Delta_1 = 1$. Определитель тот же, тогда

$$Y_{пер} = \frac{G_1 G_3 (G_2 + \kappa G_{вых})}{(G_д + G_{вх1} + G_1 - \kappa G_{вых})(G_3 + G_{вых} + G_2) + (G_3 + G_{вых})(G_2 + \kappa G_{вых})}.$$

Для определения входной проводимости $Y_{вх}$ включаем амперметр последовательно с источником $e(p)$ (показан на рис. 4.14, *д*). Вершину условного заземления оставляем прежней. Тогда

$$P_1 = G_1 (G_д + G_{вх1} - \kappa G_{вых}), \; P_2 = G_1 (G_2 + \kappa G_{вых}) \; (G_3 + G_{вых}).$$

Закорачиваем P_1, находим $\Delta_1 = G_2 + G_3 + G_{вых}$, закорачиваем P_2, находим $\Delta_2 = 1$. В результате (определитель тот же)

$$Y_{вх} = \frac{G_1 (G_д + G_{вх1} - \kappa G_{вых})(G_2 + G_3 + G_{вых}) + G_1 (G_2 + \kappa G_{вых})(G_3 + G_{вых})}{(G_д + G_{вх1} + G_1 - \kappa G_{вых})(G_3 + G_{вых} + G_2) + (G_3 + G_{вых})(G_2 + \kappa G_{вых})}.$$

Для определения выходного сопротивления схемы подключаем к выходному ребру дополнительный источник тока (показан штрихом), а источник напряжения на входе закорачиваем. Тогда $P_1 = 1$, т. к. он проходит только через вольтметр, $\Delta_1 = G_1 + G_д + G_{вх1} - \kappa G_{вых} + \kappa G_{вых} + G_2$. Определитель тот же, поскольку источник тока I при этом удаляем. В результате получим

$$Z_{вых} = \frac{1\cdot(G_1 + G_2 + G_д + G_{вх1})}{(G_д + G_{вх1} + G_1 - \kappa G_{вых})(G_3 + G_{вых} + G_2) +}$$

$$\frac{1\cdot G_1 + G_2 + G_д + G_{вх1})}{+ (G_3 + G_{вых})(G_2 + \kappa G_{вых})}.$$

Пример 4.7. Для схемы усилителя, представленной на рис. 4.15, *а* (эквивалентная схема по переменному току), найти передачу по напряжению $K_V = u_{вых}/e(p)$.

1) Составляем граф схемы, включая в него унисторную модель транзистора (рис. 4.9, *б*).

2) Заземляем вершину 0 как один из зажимов вольтметра V. Удаляем унисторы, исходящие из нулевой вершины, объединяем параллельные ребра и получаем граф (рис. 4.15, *в*), готовый для проведения анализа

3) Приступаем к построению схемной функции, начиная с определения прямых путей на рис. 4.15, *б* из вершины *1* в вершину 0 через вольтметр V:

$$P_1 = G_1(-g_{21} + g_{12} - g_{21})(-g_{21} + g_{12} - g_{12}) =$$

$$+ G_1 g_{21} g_{21} — \text{вершины } 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 0;$$

$$P_2 = G_1(-g'_{21})(g'_{12} + g'_{22})G_0 — 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 0;$$

$$P_3 = G_1(g_{11} + g_{21})(g_{21} - g_{12} + g_{12} + g_{22})(-g_{21} + g_{12} -$$

$$- g_{12}) = -g_1(g_{11} + g_{21})(g_{21} + g_{22})g_{21} — 1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 0;$$

$$P_4 = G_1(g_{11} + g'_{21})G_0 — 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 0.$$

Унисторы, направленные в сторону от условно заземленной вершины, не включаем в пути P_2 (унистор между вершинами *4* и *3*), P_3, P_4 (унистор *4* и *2*). Закорачивая пути, определяем их дополнения:

$\Delta_1 = G_2 + g'_{11} + g'_{12} + g'_{21} + g'_{22}$ (подграф на рис. 4,15, *г*),

$\Delta_2 = 1,$

$\Delta_3 = 1,$

$$\Delta_4 = g'_{22} + g'_{12} - g'_{12} + \dot g_{11} + \dot g_{21} + G_3 - \dot g_{12} - \dot g_{21} + \dot g_{12} =$$

$$= \dot g_{22} + \dot g_{11} + G_3.$$

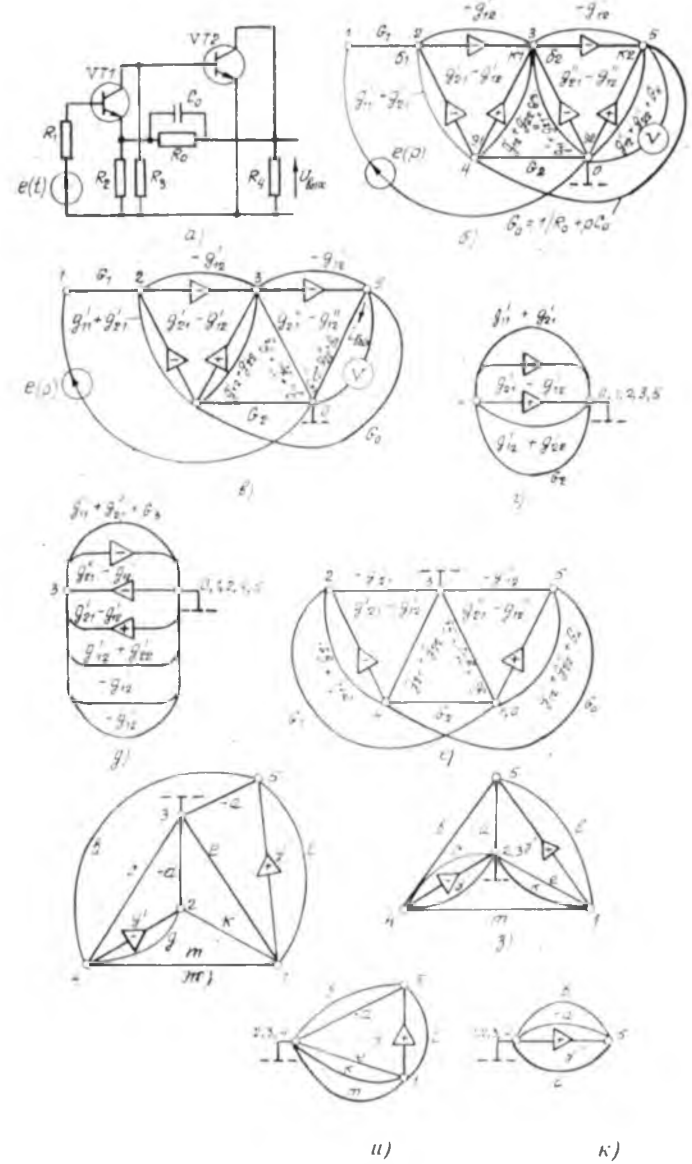


Рис. 4.15

4) Приступаем к вычислению определителя Δ. Закорачиваем источник напряжения $e(p)$. Выбираем в качестве условно заземленной другую вершину *3*, т. к. граф при этом заметней упрощается (остается только два унистора — рис. 4.15, *е*). Ради сокращения последующих записей введем однобуквенные обозначения проводимостей ребер графа и изобразим его без пересечения ребер, как показано на рис 4.15, *ж*. Начнем, поскольку граф довольно сложный, с разложения по двум вершинам $\Delta = \sum\limits_{1}^{q'} P'_{\kappa}\Delta'_{\kappa}$. Выбираем на рис. 4.15, *ж* вершины: *3* (условно заземленная) и *2*. Запишем величины всех прямых путей между ними P'_{κ}:

$$P'_{\kappa} P'_1 = -d,\ P'_2 = cg,\ P'_3 = cm\kappa,$$

$$P'_4 = cb(l + y'')\kappa,\ P'_5 = e\kappa,\ P'_6 = emg,$$

$$P'_7 = elbg,\ P'_8 = -a(y'' + l)\kappa,\ P'_9 = -a(y'' + l)mg,$$

$$P'_{10} = -abg,\ P'_{11} = -abm\kappa.$$

Переходим к записи дополнений этих путей Δ'_{κ}. После закорачивания пути P'_1 получаем подграф, показанный на рис. 4.15, *з*. Он также не является элементарным, поэтому применим разложенье по одной условно заземленной вершине *3* и *2*:

$$\Delta'_1 = [-a\Delta_a + (c + g - y')\Delta_{cgy'} + (\kappa + e)\Delta_{\kappa e}] +$$

$$+ [-a(c + g - y')\Delta_{a(cgy')} - a(\kappa + e)\Delta_{a(\kappa e)} +$$

$$+ (c + g - y')(\kappa + e)\Delta_{(cgy')(\kappa e)}] + [-a(c + g - y') \times$$

$$\times (\kappa + e)\Delta_{a(cgy')(\kappa e)}] = -a[b(l + y'') + bm + m(y'' + l)] +$$

$$+ (c + g - y')[(b + l)m + b(y'' + l)] + (\kappa + e)[b(m +$$

$$+ l) + ml] - a(c + g - y'')(m + y'' + l) - a(\kappa + e)(b +$$

$$+ m) + (c + g - y')(\kappa + e)(b + l - a).$$

Далее находим Δ'_2, закорачивая соответственно путь P'_2 (подграф показан на рис. 4.15, *и*):

$$\Delta'_2 = (b - a)(m + \kappa + e) + (b - a)(y'' + l) + (m + \kappa + e)l.$$

После закорачивания пути P'_3 получаем подграф, показанный на рис. 4.15, *к*:

$$\Delta'_3 = b - a + l$$

и далее закорачиваем путь P'_4, граф преобразуется в одну вершину

$$\Delta'_4 = 1.$$

Закорачиваем путь P'_5, граф преобразуется в трехвершинный аналогично рис. 4.15, *и*: $\Delta'_5=b(c+g-y'+m)+b(l-a)+(c+g-y'+m)(l-a)$, $\Delta'_6=b-a+l$, $\Delta'_7=1$, $\Delta'_8=b+c+g-y'+m$, $\Delta_9=1$, $\Delta_{10}=m+\kappa+e+y''+l$, $\Delta'_{11}=1$.

В результате $\Delta=\sum\limits_1^{11} P'_\kappa \Delta'_\kappa=-d\{-a[b(l+y''+m)+$
$+m(y''+l)]+(l+g-y')[b(m+y''+l)+ml]+(\kappa+e)$
$[b(m+l)+ml]-a(c+g-y')(m+y''+l)-a(\kappa+e)(b+$
$+m)+(c+g-y')(\kappa+e)(b+l)-a(c+g-y')(\kappa+e)\}+$
$+cg[(b-a)(m+\kappa+e+y''+l)+l(m+\kappa+e)]+cm\kappa(b-$
$-a+l)+cb(l+y'')\kappa\cdot 1+e\kappa[(c+g-y'+m)(b+l-a)+$
$+b(l-a)]+emg(b-a+l)+elbg\cdot 1-a(y''+l)\kappa\times(b+$
$+c+g-y'+m)-a(y''+l)mg\cdot 1-abg(m+\kappa+e+y''+$
$+l)-abm\kappa\cdot 1.$

Запишем окончательное выражение для K_U, делая обратную подстановку и преобразовывая полученные ранее выражения для числителя и знаменателя схемной функции:

$$K_U=\sum_1^4 P\kappa\Delta\kappa/\Delta=G_1\frac{g'_{21}g''_{21}(G_2+g'_{11}+g'_{12}+g'_{21}+g'_{22})-}{-g'_{21}\{-g''_{12}[(g''_{22}+g''_{21}+G_4+}$$

$$\frac{-G_0g'_{21}(g'_{12}+g'_{22})-(g'_{11}+g'_{21})(g'_{21}+g'_{22})g''_{21}+}{+G_2)(G_0+g'_{21}+g'_{22}+g'_{11}+g'_{12})+G_2\;g''_{22}+g''_{21}+}$$

$$\frac{+G_0(g'_{11}+g'_{21})(g'_{22}+g'_{11}+G_3}{+G_4)+(G_1+g''_{11}+g''_{12}+G_3)(G_0+G_2+g'_{21}+G_3)(G_0+}$$

$$\frac{+G_2+g'_{21}+g'_{22}+g'_{11}+g'_{12})]+(g'_{21}+g'_{22}+g'_{11}+}{+g'_{12})[G_0(G_2+g''_{22}+g''_{21}+G_4)+G_2(g''_{12}+g''_{22}+G_4)+}$$

$$\frac{+(G_1+g''_{12}+g''_{12}+G_3)(G_0+g''_{12}+g''_{22}+G_4)]+}{+(G_1+g''_{11}+g''_{12}+G_3)[G_0(G_2+g''_{12}+g''_{22}+G_4)+}$$

$$\frac{+G_2(g''_{11}+g''_{22}+G_4)]\}+(g'_{21}+g'_{22})\{(g'_{11}+g'_{21})\times}{\times[(G_0-g''_{12})(G_2+G_1+g''_{11}+g''_{12}+G_3+g''_{22}+}$$

$$+ g''_{21} + G_4) + (g''_{12} + g''_{22} + G_4)(G_2 + G_1 + g''_{11} + g''_{12} +$$

$$+ G_3)] + G_1[G_2(G_0 - g''_{12} + g''_{12} + g''_{22} + G_4) + G_0(g''_{22} +$$

$$+ g''_{21} + G_4)]\} + (g''_{11} + g''_{12} + G_3)\{[(g'_{21} + g'_{22} + g'_{11} + g'_{12} +$$

$$+ G_2)(G_0 + g''_{22} + G_4) + G_0(g''_{22} + G_4)] + G_2(g'_{11} +$$

$$+ g'_{21})(G_0 + g''_{22} + G_4) + G_0(g'_{11} + g'_{21})(g'_{12} + g''_{22} + G_4)\} -$$

$$- g''_{12}\{(g''_{22} + G_4 + g''_{21})[G_1(G_0 + g'_{21} + g'_{22} + g'_{11} +$$

$$+ g'_{12} + G_2) + G_2(g'_{11} + g'_{21})] + G_0[(g'_{11} + g'_{21})(G_2 + G_1 +$$

$$+ g''_{11} + g''_{12} + G_3 + g''_{22} + g''_{21} + G_4) + G_2G_1]\}.$$

Получившееся выражение, как видим, довольно сложное. Оно с трудом поддается анализу и годится только для численных расчетов (построения частотных и временных характеристик и т. д.). Необходимо проявить выдержку, известную изобретательность и хорошее понимание задачи анализа, чтобы правильно упростить получившееся выражение для K_U. Например, во многих задачах анализа и расчета вполне допустимо пренебречь обратной связью в самих транзисторах (эффект Эрли), т. е. считать $g_{12}=0$, в некоторых случаях пренебрегают входным сопротивлением транзистора. Так, при подстановке в полученное выражение для K_U $g'_{12}=g''_{12}=0$ оно заметно сокращается. Однако рациональнее подобные упрощающие допущения делать вначале при составлении топологическо-математической модели схемы. Тогда граф упрощается и легче осуществлять перебор всех путей и деревьев.

Из приведенных примеров видно, что с усложнением схем довольно быстро выражения схемных функций, а следовательно временных и частотных характеристик, становятся недоступными для аналитического обозрения. Найти приемлемые их упрощения становится проблематичным и не всегда возможным за ограниченное время. В этой связи в последнее время одним из мощных средств решения задач анализа и расчета считается применение ЭВМ. Поскольку метод унисторных смешанных графов является принципиально минимальным, его и следует положить в основу машинного анализа (расчета) линейных (квазилинейных) электронных схем. При этом будет достигаться экономия машинного времени, являющегося одним из основных критериев оптимальности программного обеспечения анализа и расчета сложных электронных схем. В то же время топологическая модель схемы и топологические методы ее анализа не отвечают другому столь же важному критерию оптимальности, а именно языковой совместимости математической модели с ЭВМ. В этой связи на базе рассмотренных графов разработаны методы, основанные на теоретико-множественных моделях схем.

4.3. Метод структурных чисел

Приспособить топологические формулы передачи для эффективной их машинной обработки в символьном виде — значит применить кодирование элементов схемы или ее графа (топологической модели) числами.

С. Беллерт (польский ученый) в 1963 году предложил кодировать ребра графа или ветви схемы порядковыми номерами или номерами его вершин (узлов). Позднее Я. К. Трохименко пошел дальше, предложив в код ветви (ребра, унистора) включать также числа, характеризующие не только их векторные свойства (т. е. положение ветви (ребра) в схеме (графе) — ее адрес), но и их скалярные (весовые) свойства. Например, запись $Y(ijna)=2165$ означает: i — номер 2 вершины исхода ветви или ребра, j — номер 1 вершины захода ветви (ребра), n — порядковый номер 6 ветви схемы (ребра), a — проводимость 5 ребра (нормированное значение).

В основе метода лежит математический аппарат *теории множеств*. При этом схема или ее граф представляются совокупностью неупорядоченных или частично упорядоченных множеств. В качестве последних принимают так называемые *базисные подграфы* $\beta_б(w_i)$, образованные матрицами Y, Z, а также *звездными* или *контурными таблицами графа*. Элементами множества Ω базисного подграфа являются коды ребер, входящих в него:

$$\beta_{зв}(\alpha) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_{lk} & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn-1} \end{bmatrix}.$$

Например, для графа на рис. 4.2, *а* множества ребер подграфов звезд при выборе общей вершины «О» составляются произвольным перечислением кодов ребер, инцидентных *i*-й вершине, и записываются в виде таблицы базисных звезд (частично упорядоченное множество) или в виде однострочных звездных сомножителей (для ввода в ЭВМ):

$$\beta_{зв}(y) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{vmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23 \\ 30 & 31 & 32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{a1} & y_a & y_d \\ y_b & y_a & y_c \\ y_e & y_d & y_e \end{vmatrix}$$

или $\beta_{зв}(y)=[\Omega_1][\Omega_2][\Omega_3]=[10, 12, 13], [20, 21, 23], [30, 31, 32]$. Таковы исходные математические модели схемы (графа) в теоретико-множественном представлении.

Определения, терминология, символика теории множеств. Множество объектов любой природы математически представляется *перечислением* (в скобках) буквенных или цифровых символов (элементов множества), каждый из которых изоморфен (т. е. взаимно однозначно соответствует) одному из объектов множества $E=\{e\}=\{a, b, c\}$ или $E=[a, b, c]$, или $E=(a, b, c)$. Элемент e является элементом множества E:

$$e \in E \text{ не является: } e \in E.$$

Множества E_1 и E_2 *считаются равными* $E_1=E_2$, если образованы одинаковыми элементами независимо от порядка их перечисления:

$$E=[a, b, c]=[b, a, c]=[c, a, b] \text{ и т. д.}$$

Если E_1 является подмножеством множества E, то это записывается так: $E_1 \subseteq E$ или $E_1 \subset E$, если E_1 образовано частью элементов E, например:

$$[a, b] \subset E, \ [b] \subset E \text{ и т. д.}$$

Дополнение E_2 подмножества E_1 образуется элементами множества E, не вошедшими в E_1:

$$E_2=\overline{E}_1=E-E_1.$$

Например: $E=[12, 13, 14, 10]$, $E=[10, 12]$, тогда $E_2= =\overline{E}_1=\overline{[10, 12]}=[10, 12, 13, 14]-[10, 12]=[13, 14]$.

Очевидно, что $\overline{E}_2=\overline{\overline{E}}_1=E_1$.

Суммой множеств E_1 и E_2 называют множество $E=E_1+$

$+E_2$, образованное всеми элементами обоих множеств, включая и одинаковые, например:

$$[a, b, c]+[a, d]=[a, b, c, a, d].$$

Объединением (конъюнкцией) множеств E_1 и E_2 называют множество $E=E_1 \bigcup E_2$, образованное всеми элементами обоих множеств (одинаковые элементы заменяются одним элементом), например:

$$[a, b, c] \bigcup [a, d]=[a, b, c, d].$$

Пересечением, или совпадением (дизъюнкцией) множеств E_1 и E_2 называют множество $E=E_1 \bigcap E_2$, образованное одинаковыми элементами этих множеств, например:

$$[a, b, c] \bigcap [a, d] = [a].$$

Декартовым произведением множеств E_1 и E_2 называют множество $E=E_1 \times E_2$, являющееся совокупностью множеств (e_1, e_2), образованных всевозможными сочетаниями элементов, взятых по одному от каждого из перемножаемых множеств, например:

$$[a, b, c] \times [a, d]=[(a_1, a)(a, d), (b, a), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d)].$$

Векторной суммой множеств называют множество, образованное всеми элементами суммируемых множеств, за исключением одинаковых:

$$E=E_1 \oplus E_2=E_1 \bigcup E_2-E_1 \bigcap E_2=E_1 \bigcap \overline{E}_2, \text{ т. е.}$$

векторное сложение совпадает с операцией получения дополнения пересечения множеств $[a, b, c] \oplus [a, d] = [b, c, d]$.

Декартовым векторным произведением множеств называют множество $E=E_1 \otimes E_2$, в котором вычеркнуты все члены с одинаковыми элементами, например:

$$[a, b, c] \otimes [c, d]=[(a, d), (b, a), (b, d), (c, a), (c, d)].$$

Последние векторные операции основаны на операциях над полем модуля 2, которые отличаются от обычных алгебраических операций тем, что результат действия над двумя одинаковыми (совпадающими) объектами всегда равен нулю, т. е. $(a, a)=0$ или $1+1=0$, $5+5=0$, $d+d=0$ и т. п.

Разработанная С. Беллертом и Г. Возницки *алгебра структурных чисел* основана на введенном ими понятии *структурного числа*. Возьмем неупорядоченную систему множеств $A=[a_1, a_2, ..., a_n]$, в которой $a_i \neq a_j$,

$$(i \neq j), \tag{4.10а}$$

причем, в свою очередь, a_k представляет собой неупорядоченное множество элементов a_{ik}:

$$a_k=[a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk}],\ a_{ik} \neq a_{jk},\ (i \neq j). \tag{4.10б}$$

Удобно изобразить структурное число A в виде таблицы, состоящей из столбцов a_k [14]:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4.10в}$$

Столбцы считаются равными, если они содержат одинаковые элементы одного множества. *Структурным числом называется система элементов a_{ik} вида (4.10в) с учетом (4.10а), (4.10б), удовлетворяющая следующим определениям:*

— структурное число не содержит одинаковых столбцов (множеств a_k);

— два структурных числа равны, если содержат только одинаковые столбцы, независимо от порядков элементов в столбцах и порядка расположения самих столбцов;

— суммой структурных чисел является структурное число, содержащее все столбцы суммируемых чисел кроме одинаковых:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

— произведением структурных чисел A и B является структурное число C, столбцы которого представляют собой все возможные комбинации столбцов A и B, за исключением наибольшего четного числа одинаковых столбцов и столбцов с повторяющимися элементами

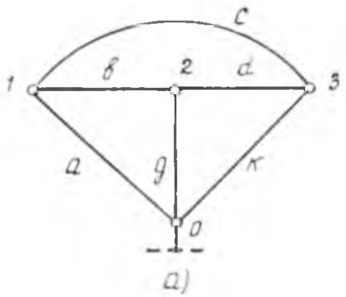
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве элементов множества каждого столбца a_k принять веса ребер соответетвующего дерева графа G, тогда топологическим изображением структурного числа будет граф G.

Структурное число Λ с одинаковым $v-1$ числом элементов в столбцах получается из графа G с вершинами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ путем перемножения по mod 2 $n-1$ простых однострочных сомножителей (вершинных множеств или звезд графа) $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega n_{-1}$:

$$A[\Omega_1 \; \Omega_2 \; \ldots \; \Omega n_{-1}]_{\mathrm{mod} 2}, \tag{4.11}$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$ составляются из значений весов ребер, инцидентных вершинам $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ (одна из вершин выбирается в качестве базисной). Так, для



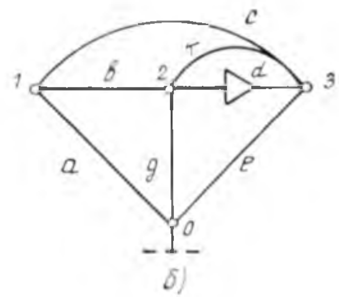


Рис. 4.16

ненаправленного графа на рис. 4.16, a $\Omega_1 = [a, b, c] = [10, 12, 13]$, $\Omega_2 = [g, b, d] = [20, 21, 23]$, $\Omega_3 = [e, c, d] = [30, 31, 32]$,

$$A_{v-1} = [\Omega_1][\Omega_2][\Omega_3]_{\mathrm{mod} 2} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}_{\mathrm{mod} 2} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23 \\ 30 & 31 & 32 \end{bmatrix}_{\mathrm{mod} 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 23 & 23 & 20 & 20 & 20 & 23 & 23 & 20 & 20 & 21 & 21 & 23 \\ 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 30 & 32 & 30 & 32 & 30 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a & a & a & b & b & b & b & c & c & c & c \\ g & g & g & b & b & b & d & d & g & g & g & d & g & g & b & d \\ e & c & d & e & c & d & e & c & e & c & d & e & e & d & e & e \end{bmatrix}$$

где $[\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3] = \beta_{\text{зв}}$ — звездная матрица графа.

Операция перемножения по mod 2 в данном случае соответствует составлению столбцов из элементов, взятых по одному из каждого однострочного сомножителя

Ω_i. При этом согласно операции над полем mod 2 исключаются столбцы, содержащие одинаковые элементы ($a_{i\kappa}$ и $a_{\kappa i}$), а также столбцы-дубликации (повторяющиеся четное число раз) с одинаковым набором элементов независимо от порядка их расположения в столбце.

Топологическое представление структурного числа неоднозначно, что позволяет в задачах синтеза организовать поиск оптимальной топологии схемы. В то же время для заданного графа G существует только одно его структурное число A_G.

Поскольку относительно топологии графа структурное $v-1$ число представляется, по существу, списком его деревьев, то нетрудно перейти от A_G к определителю Δ_G графа G —

$$\Delta_G = \det A_G(y) = \sum_{\kappa=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} Y_{i\kappa}, \tag{4.12}$$

где $\det A_G(y)$ называют *детерминантом структурного числа* A.

Согласно (4.12) для вычисления определителя Δ графа по его структурному $v-1$ числу необходимо перейти к детерминанту $\det A(y)$, который вычисляется путем перемножения проводимостей ребер, входящих в каждый столбец, с последующим суммированием всех полученных произведений.

Для получения структурного числа $\bar{A}_{v-1}$ по графу электронной схемы с унисторами необходимо составить однострочные сомножетели $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$ по типу так называемых звезд исхода. В каждую такую звезду Ω_i включаются проводимости ребер и унисторов, только исходящих из вершины ω_i. Так, для графа на рис. 4.16, *б* $\Omega_1 = [a, \, e, \, c] = [10, \, 12, \, 13]$, $\Omega_2 = [g, \, b, \, \kappa + \vec{d}] = [20, \, 21, \, 23 + \vec{23}]$, $\Omega_3 = [e, \, c, \, \kappa] = [30, \, 31, \, 32]$, символом $\vec{23}$ обозначен унистор d. Построим структурное число для этого графа по его звездной матрице исхода:

$$\bar{A}_{v-1} = [\Omega_1][\Omega_2][\Omega_3]_{mod 2} = [\beta_{ij}]_{mod 2} = \begin{vmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 23+\vec{23} \\ 30 & 31 & 32 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 23+\vec{23} & 23+\vec{23} & 20 & 20 & 20 & 23+\vec{23} & 23+\vec{23} & 20 & 20 & 21 & 21 & 23+\vec{23} \\ 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 30 & 31 & 32 & 30 & 31 & 30 & 32 & 30 & 32 & 30 \end{bmatrix}$$

Определим по формуле (4.12) определитель графа

$$\Delta = age + agc + ag\kappa + abe + abc + ab\kappa + a(\kappa + d)e + a(\kappa + d)c + bge + bgc + bg\kappa + b(\kappa + d)e + cge + cg\kappa + cbe + c(\kappa + d)e.$$

При анализе достаточно сложных схем поиск дубликаций (одинаковых столбцов, соответствующих не деревьям, а контурам) становится практически очень невыгодной процедурой, т. к. для этого требуется провести $n!$ попарных сравнений столбцов для структурного числа n-го порядка. В этой связи предложен ряд способов получения структурного числа без дубликаций. Наиболее простой из них заключается в проверке каждого столбца на соответствие дереву. Для этого достаточно по индексам его элементов убедиться в наличии путей из корня дерева (нулевой вершины) во все остальные. При кодировании ребер желательно первым брать i-й индекс, соответствующий номеру звезды Ω_i, и т. д.

Процедура поиска путей из корня. Среди вторых j-х индексов элементов столбца ищутся сначала нулевые. Если их нет — это не дерево, и столбец из структурного числа исключается [18]. При обнаружении элементов с нулевым индексом j необходимо запомнить их первые (i-е) индексы, а сами элементы исключить из рассмотрения. Затем запомненные индексы исключенных элементов сравниваются со вторыми (j-ми) индексами оставшихся элементов столбца. Если найдутся элементы с искомыми индексами, то теперь их первые (i-е) индексы запоминаются (а сами элементы исключаются) и сравниваются со вторыми (j-ми) индексами оставшихся элементов. Процедура поиска путей продолжается до тех пор, пока все элементы столбца не будут исключены из рассмотрения. Тогда этот столбец соответствует дереву, т. к. имеются пути из корня во все вершины. Если число оставшихся элементов отлично от нуля, то данный столбец не соответствует дереву и его исключают из структурного числа. Два оставшихся элемента образуют дубликацию типа ij и ji (12 и 21), три и более соответствуют ребрам, образующим цикл (контур). Например, для столбца [10, 23, 31, 43] порядок исключения таков: $10 \to 31 \to 23 \to 43$, $n_{ост} = 0$; для столбца [13, 20, 34, 41] $n_{ост} = 3$.

Алгебраические дополнения $\Delta_{ab,a'b'}$, Δ_{ab}, Δ_{aa} и др. можно получить, как и раньше, через сумму соответствующих 2-деревьев (формулы 4.3). Поскольку 2-дерево содержит $v-2$ элемента, необходимо построить структурное $v-2$ число — A_{v-2} и определять алгебраические дополнения через детерминанты соответствующих структурных чисел

$$\Delta_{aa} = \det A_{v-2,\,a,\,0}, \tag{4.12}$$

$$\Delta_{ab} = \det A_{v-2;\,ab,\,0},$$

$$\Delta_{(a+a')(b+b')} = \det A_{v-2;\,ab,\,a'b'}, \quad \text{и т. д.}$$

Для получения A_{v-2} необходимо отобрать такие столбцы из A_{v-1}, исключение из которых одного элемента достаточно, чтобы разорвать пути из a в a' или из b в b'.

По Мэзону операция нахождения суммы 2-деревьев, определяющей алгебраическое дополнение, сводится к нахождению путей от вершин источника к вершинам измерительного прибора согласно правилу разложения определителя графа на пути $\Delta = \sum_{\kappa=1}^{m} P_\kappa \Delta_\kappa = \det A_{v-1}$ независимо от выбранной пары вершин, между которыми ищутся пути P_κ. Это означает, что каждый столбец в A_{v-1} содержит путь между любыми интересующими нас вершинами. Задача, таким образом, состоит в выборе нужных путей — столбцов. Пусть источник включен между вершинами a и a', а измерительный прибор — между вершинами b и b'. Для вычисления $\Delta_{(a+a')(b+b')} = \sum_{i=1}^{m} d_{(ab,a'b')i}$ необходимо выделить в структурном числе A_{v-1} столбцы, содержащие пути из вершины a в a' и проходящие через вершины b и b'. Можно для этой цели предложить несколько алгоритмов.

Алгоритм 1. Выделим в A_{v-1} столбцы, содержащие пути между вершинами источника a и a'. При этом исключаем из рассмотрения столбцы, содержащие элементы $a_{aa'}$ (путь через ребро aa' нас не интересует, т. к. заведомо не включает ребро bb'), и столбцы, не содержащие элемента $a_{bb'}$. Тогда оставшиеся $v-2$ столбцы будут содержать либо искомые пути, либо пути, не проходящие через вершины b и b' (при этом элемент $a_{bb'}$ входит в дополнение пути). Для отбора нужных столбцов необходимо провести анализ индексов элементов на наличие пути из a в b (или b') и из a' в b' (или b). Если в столбце путь обнаружен из a в b и из a' в b', то этот столбец образует положительный член детерминанты A_{v-2}, если путь проходит из a в b' и из a' в b, то столбец образует отрицательный член детерминанты A_{v-2}.

Пример 4.8. Составим выражение для суммарного алгебраического дополнения $\Lambda_{(a+a')(b+b')}$ по графу, приведенному на рис. 4.17, *а*. Согласно правилу Мэзона

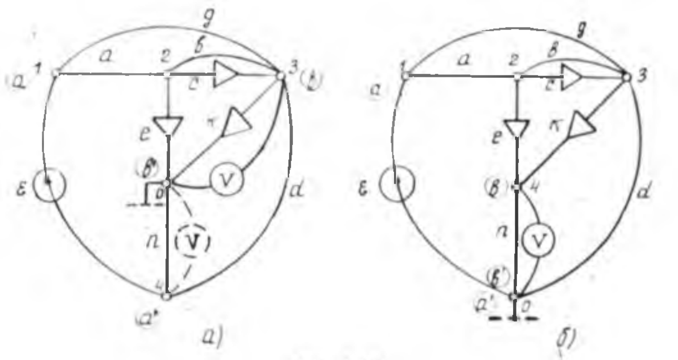


Рис. 4.17

для графа с унисторами условно заземлим одну из вершин измерительного прибора V. В нашем примере $a=1$, $a'=4$, $b=3$, $b'=0$. Значит, по формулам (4.12) $\Lambda_{(a+a')(b+b')}=\Lambda_{(1+4)(3+0)}=\Lambda_{(1+4)3}=\det A_{v-2;\ 13,\ 40}$.

Составим звездную матрицу исхода графа

$$\overline{\beta}_{\text{зв}\,v-1}=\begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 & \\ 20 & 21 & \overline{23} & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 41 & 43 & \end{bmatrix},$$

где $\overline{23}=23+\overrightarrow{23}$.

Для сокращения записи и экономии использования объема памяти ЭВМ обычно стараются описанные выше манипуляции со столбцами структурного $v-1$ числа перенести на звездную матрицу $\beta_{\text{зв}\,v-1}$, тогда не нужно хранить в памяти все столбцы A_{v-1}. Чтобы не было столбцов, содержащих $a_{aa'}$, т. е. код 14, вычеркиваем его из матрицы. Чтобы не было столбцов, не содержащих $a_{bb'}$, т. е. код 30, вычеркиваем все элементы в третьей строке. В результате переходим к укороченной звездной матрице $\beta_{\text{mc}-2}$:

$$\beta_{16v-2;\,14,30} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & \cancel{14} & \\ 20 & 21 & \overline{23} & \\ \cancel{30} & \cancel{31} & \cancel{32} & \cancel{34} \\ 40 & \cancel{41} & 43 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \\ & & \end{bmatrix},$$

$$A_{v-2} = \begin{vmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \end{vmatrix}_{\text{mod}\,2} = \begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & \overline{23} & \overline{23} & 20 & 20 & 21 & 21 & \overline{23} & \overline{23} \\ 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 \end{vmatrix}.$$

Анализируем первый столбец: 12→20, 40 (нет пути из 4 в 3); второй столбец: 12→20, 4→3 (есть путь из 1 в 0 и из 4 в 3, знак отрицательный); третий столбец: 12→23 4→0 (искомые пути также есть, знак положительный) и т. д. В результате получаем всего пять столбцов, содержащих искомые пути из 1 в 4 через вершины 3 и 0, включающие унисторы, направленные в сторону условно заземленной (нулевой) вершины:

$$\bar{A}_{v-2,\,13,10} = \begin{vmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 10 & \overline{23} & 20 & 21 & \overline{23} \\ 43 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{vmatrix}$$

и окончательно $\Delta_{(1)(3)} = \det \bar{A}_{v-2,\,13,10} = -y_{12}y_{20}y_{43} +$
$+ y_{12}y_{23} - y_{40} + y_{13}y_{20}y_{10} + y_{13}y_{21}y_{10} + y_{13}y_{23} - y_{40} = a(-cd +$
$$+ (b+c)n) + gn(e+a+b+c).$$

Можно отбор столбцов вести, используя свойства 2-деревьев, запрещающие пути между вершинами, указанными в искомом алгебраическом дополнении (в индексах 2-дерева). Для нашего примера не должно быть в столбцах — претендентах пути из вершины 1 в вершину 4.

В ручных методах эта задача решается достаточно просто путем последовательного сравнения индексов ij элементов столбца, в результате чего выясняется, имеется ли запрещенный путь между вершинами a и a'.

Рассмотрим машинный алгоритм поиска запретного пути из вершины *1* в вершину *4*. Выделим первый столбец из A_{v-2}, полученный в нашем примере: 12, 20, 40. Обращаясь к коду первого элемента 12, выделяем его второй индекс 2 и ищем его среди индексов кодов других элементов столбца. Во втором элементе 20 выделяем его второй индекс 0 и ищем его среди индексов кодов остальных элементов — 40. Если вычеркнуть все повторяющиеся индексы, то останутся индексы начала и конца пути. В данном примере это 1 и 4: $12 \to 20 \to 40 = 14$; для второго столбца: $12 \to 20$, $43 = 10$, 43, как видно, здесь уже нет пути из 1 в 4; для восьмого столбца: $13 \to 21$, 43, 21, 14 и т. д. Необходимым, но недостаточным признаком прохождения путей через измерительный прибор в анализируемых столбцах структурного $v-2$ числа является наличие хотя бы двух элементов, соответствующих кодам ребер, инцидентных вершинам b и b', к которым прибор подключен. В столбце, соответствующем 2-дереву $d_{13,\ 40}$, должен быть хотя бы один из элементов с индексом 3 : 13, $23 + \overrightarrow{23}$, 43 и хотя бы один из элементов с индексом 0 : 20, 40. В этом легко убедиться, анализируя столбцы $\overline{A}_{v-2}$, $\overline{A}_{v-2,\ 13,\ 40}$ рассмотренного примера. Использование указанного признака существенно сокращает число столбцов, проверяемых на наличие заданных путей.

По виду структурного числа $\overline{A}_{v-2,\ 13,\ 40}$ легко сформулировать простое правило определения знака произведения элементов каждого столбца по очередности расположения в них элементов с индексами b и b' (3 и 0) при условии, что $a < b$, a' и $b' = 0$. Если первым сверху встречается элемент с индексом 3, а затем с индексом 0, то это означает, что путь $P_к$ проходит через измерительный прибор в направлении от вершины b к b' (от 3 к 0) и произведение элементов этого столбца следует брать со знаком плюс. Если первым сверху встречается элемент с индексом $b'(0)$, а затем с индексом $b(3)$, то это означает, что путь проходит в обратном направлении от вершины b' к b (от 0 к 3) и произведение элементов этого столбца берется со знаком минус. Для того же графа на рис. 4.17, *а* найдем Δ_{ab} относительно ребра *н* (вольтметр V_1 показан штрихом). У входного и выходного ребер здесь уже имеется общая вершина. Перерисуем граф (рис. 4.17, *б*), сменив условно заземленную вершину, тогда $\Delta_{ab}=\Delta_{14}=\sum\limits_{i=1}^{m} d(_{14,0})_i$ и знак у всех 2-деревьев положителен. В качестве исходной модели графа берем также звездную матрицу исхода $\beta_{зв\, v-2;\,1}$, вычеркивая из нее элемент кода ребра источника 10 и строку 4, соответствующую незаземленной вершине измерительного прибора:

$$\beta_{зв\, v-2;\,14,0}=\begin{vmatrix} \cancel{10} & 12 & 13 & \\ 21 & \overline{23} & 24 & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ \cancel{40} & & & \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 13 & & \\ 21 & \overline{23} & 24 & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{v-2}=\begin{vmatrix} 12 & 13 & & \\ 21 & \overline{23} & 24 & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \end{vmatrix}_{mod2}=\begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ \overline{23} & \overline{23} & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 21 & 21 & 21 & 23 & \overline{23} & 24 & 24 & 24 \\ 30 & 31 & 34 & 30 & 31 & 32 & 34 & 30 & 32 & 34 & 30 & 34 & 30 & 32 & 34 \end{bmatrix}$$

Из столбцов полученного структурного $v-2$ числа удаляем дубликации, не являющиеся деревьями (2-й и 9-й столбцы), а также столбцы, в которых нет элементов 24 и 34, т. е. нет пути через ребра, инцидентные 4-й вершине вольтметра V. Из оставшихся столбцов удаляем те, в которых обнаружено наличие запрещенного пути из вершины 1 в 0 (восьмой столбец) и оставляем те, в которых есть путь из вершины 1 в 4:

$$\bar{A}_{v-2;\,11,0}=\begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ \overline{23} & 24 & 24 & 24 & 24 & 21 & \overline{23} & 24 & 24 \\ 34 & 30 & 31 & 32 & 34 & 34 & 34 & 32 & 34 \end{vmatrix}.$$

Все столбцы $\overline{A}_{v-2;\,14,\,0}$, таким образом, являются 2-деревьями $d_{14,\,0}$, они содержат в себе путь из вершины 1 в 4. В результате $\Delta_{14}=\sum\limits_{i=1}^{m}\overline{d}_{(14,\,0)i}=\det\overline{A}_{v-2;\,14,\,0}=y_{12}y_{23}-$

$$-y_{34}+y_{12}y_{24}y_{30}+y_{12}y_{24}y_{31}+y_{12}y_{24}y_{32}+y_{12}y_{24}y_{34}+y_{13}y_{21}y_{34}+$$
$$+y_{13}y_{23}y_{34}+y_{13}y_{24}y_{32}+y_{13}y_{24}y_{31}=a[(b+c)\kappa+e(d+g+$$
$$+\kappa+b)]+g[a\kappa+(b+c)\kappa+eb+e\kappa].$$

Найдем для того же примера симметричное дополнение $\Delta_{aa}=\Delta_{11}$. По формуле (4.3 a)

$$\Delta_{aa}=\sum_{i=1}^{m}\overline{d}_{(a,0)i}=\det\overline{A}_{v-2;\,a,0}.$$

Структурное $v-2$ число также получаем из звездной матрицы исхода, в которой вычеркнута строка a (строка с элементом $a0$ (10)):

$$\overline{\beta}_{3\text{в}\,v-2}=\begin{bmatrix} 40 & 12 & 13 & \\ 21 & \overline{23} & 24 & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 & \overline{23} & 24 & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & & & \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_{v-2}=\left|\begin{matrix} 21 & \overline{23} & 24 & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & & & \end{matrix}\right|_{\bmod 2}=\left|\begin{matrix} 21 & 21 & 21 & 21 & \overline{23} & \overline{23} & \overline{23} \\ 30 & 31 & 32 & 34 & 30 & 31 & 34 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 40 & 40 & 40 \end{matrix}\right|.$$

При вычислении симметричных дополнений типа Δ_{aa}, Δ_{bb} не используется процедура дополнительного анализа столбцов структурного $v-2$ числа, т. е. $\overline{A}_{v-2;\,1,\,0}=$ $=\overline{A}_{v-2}$, т. к. здесь берутся все деревья, не содержащие путь из вершины 1 в 0. В результате получаем $\Delta_{11}=$

$$=\det\overline{A}_{v-2;\,1,\,0}=n[a(d+g+b+n)+(b+c)(d+g+\kappa)+$$
$$+e(g+b+d+\kappa)].$$

Алгоритм 2. Отличается отсутствием процедуры поиска заданных путей в каждом столбце.

С топологических позиций алгоритм сводится к нахождению множества всех прямых путей из a в a', включающих ребро bb', затем множества всех обратных путей, т. е. из b в b', включающих ребро aa', считая $b'=0$, т. е. условно заземленной вершиной. С помощью операции пересечения множеств выделяется множество общих путей, т. е. из a в a' и проходящих через вершины b и b'. Тогда

$$\det \bar{A}_{v-2,\, ab,\, a'b'} = \det[\bar{A}_{v-2}(\beta_{aa',\, bb'}) \cap \bar{A}_{v-2}(\bar{\beta}_{bb',\, aa'})], \quad (4.13)$$

где $\bar{A}_{v-2}(\bar{\beta}_{aa',\, bb'})$ — структурное число, получаемое по звездной матрице исхода графа, из которой вычеркнут элемент $\alpha_{aa'}$, соответетствующий источнику, и строка с элементом $\alpha_{bb'}$, соответетствующая вершинам измерительного прибора; $\bar{A}_{v-2}(\bar{\beta}_{bb',\, aa'})$ — структурное число, содержащее только столбцы с элементом $\alpha_{aa'}$, который затем удаляется, оно получается по звездной матрице исхода графа, из которой вычеркнут элемент $\alpha_{bb'}$, и поочередно строки, содержащие элемент $\alpha_{aa'}$.

Наличие унисторов в графе может, однако, привести к случаю, когда путь из a в a' через b и b' есть и включает унистор $\vec{ij}$, а пути из b в b' через a и a', включающего этот же унистор, нет, т. к. он направлен от условно заземленной вершины b (или b'). В этом случае операция пересечения не выделит такой реально существующий направленный путь. Чтобы эту трудность обойти, необходимо при составлении звездной матрицы исхода включить в нее условный элемент с нулевой проводимостью $\alpha_{ij}=0$, соответетствующий ребру, включенному параллельно унистору $\vec{ij}$, если между этими вершинами нет в исходном графе ненаправленного ребра. При выделении из двух структурных чисел по формуле (4.13) общих столбцов с элементом $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$ оставляется столбец, принадлежащий структурному числу источника $\bar{A}_{v-2,\, aa',\, bb'}$ (с унистором $\alpha_{ij} \neq y_{ij}$). Процедура построения структурных $v-2$ чисел по звездным матрицам состоит в вычеркивании соответетствующих элементов и строк. Из $\bar{\beta}_{v-1}$ для получения $\bar{\beta}_{v-2,\, aa',\, bb'}$ вычеркивают элемент $\alpha_{aa'}$ и строку b. Для получения $\bar{\beta}_{v-2,\, aa',\, bb'}$ из β_{v-1} вычеркивают элемент $\alpha_{bb'}(\alpha_{b0})$, затем формируют две звездные матрицы путем вычеркивания сначала строки a, затем строки a'.

В результате (рис. 4.17, a) получим

$$\overline{A}_{v-2,13,40} = \overline{A}_{v-2,11,30} \cap (\overline{A}'_{v-2,30,11} + \overline{A}_{v-2,30,11})$$

или

$$\overline{A}_{v-2,13,40} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 & \\ 20 & 21 & \overline{23} & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 44 & 43 & \end{bmatrix}_{\mathrm{mod}\,2} \cap \left(\begin{bmatrix} 14 & 12 & 13 & \\ 20 & 21 & \overline{23} & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 41 & 43 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 & \\ 20 & 21 & \overline{23} & \\ 30 & 31 & 32 & 34 \\ 40 & 41 & 43 & \end{bmatrix} \right)$$

Согласно формуле (4.13)

$$\Delta_{13,40} = \det \overline{A}_{v-2,13,40} = \det \times$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \end{bmatrix}_{\mathrm{mod}\,2} \cap \left(\begin{bmatrix} 20 & 21 & \overline{23} \\ 31 & 32 & 34 \\ 40 & 43 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 31 & 32 & 34 \end{bmatrix} \right)_{\mathrm{mod}\,2} \right\}.$$

И далее

$$\overline{A}_{v-2,14,30} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & 20 & \overline{23} & \overline{23} & 20 & 20 & 21 & 21 & \overline{23} & \overline{23} \\ 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 & 40 & 43 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_{v-2,30,11} = \begin{bmatrix} 20 & 21 & 20 & 20 & \text{[illegible]} & 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 23 & \overline{23} & 23 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 31 & 31 & 32 & 32 & 34 & 31 & \text{[illegible]} & & & & & & & 20 & 20 & 20 & \overline{23} & 23 & 20 & 20 & 21 & 23 & 21 \\ \text{[illegible]} & & & & & & & & & & & & & 31 & 32 & \text{[illegible]} & & & 32 & 34 & & 34 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_{v-2,13,40} = \overline{A}_{v-2,11,30} \cap \overline{A}_{v-2,30,11} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 20 & \overline{23} & 20 & 21 & \overline{23} \\ 43 & 40 & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}.$$

Действиями над звездными матрицами можно сократить число сравниваемых столбцов в операции пересечения

$$\bar{A}_{\ldots} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & 23 \\ 40 & 43 & \end{bmatrix}_{mod\,2} \cap \left(\begin{bmatrix} 31 & 32 & 34 \\ 20 & 21 & 23 \\ 40 & 43 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & 23 \\ 34 & & \end{bmatrix} \right)_{mod\,2} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 12 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \end{bmatrix} \right)_{mod\,2} \cap$$

$$\cap \left(\begin{bmatrix} 31 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 43 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 31 & & \\ 20 & 21 & 23 \\ 40 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 32 & 34 & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 12 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 34 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 34 & & \end{bmatrix} \right)_{mod\,2} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 13 & & \\ 20 & \overline{21} & 23 \\ 40 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 43 & & \end{bmatrix} \right)_{mod\,2} + \left(\begin{bmatrix} 12 & \\ 20 & \overline{23} \\ 40 & \end{bmatrix}_{mod\,2} \cap \right.$$

$$\left. \cap \begin{bmatrix} 32 & 34 & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & 43 & \end{bmatrix}_{mod\,2} \right) = \begin{bmatrix} 13 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & & \end{bmatrix}_{mod\,2} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 12 & \\ 20 & \overline{23} \\ 43 & \end{bmatrix}_{mod\,2} + \begin{bmatrix} 12 & \\ 20 & \overline{23} \\ 40 & \end{bmatrix}_{mod\,2} \cap \begin{bmatrix} 21 & 20 & \overline{23} \\ 32 & 34 & \\ 40 & 43 & \end{bmatrix}_{mod\,2} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 13 & & \\ 20 & 21 & \overline{23} \\ 40 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & \\ 20 & \overline{23} \\ 43 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ \overline{23} \\ 40 \end{bmatrix} \right)_{mod\,2}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 & \cancel{12} & 13 & 13 & 13 \\ 20 & \overline{23} & \cancel{\overline{23}} & 20 & 21 & \overline{23} \\ 43 & 40 & \cancel{43} & 40 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

В приведенном примере использовались операции, адекватные сложению структурных чисел и их разложению на составляющие. Получаемые общие составляющие в виде звездных матриц (чисел) выносятся за знак пересечения множеств. Получившиеся одинаковые звездные матрицы дадут дубликации после операций над полем mod 2, поэтому их сразу можно сократить. Третий получившийся столбец не содержит элемента с индексом 0, поэтому он должен быть вычеркнут. В столбцах 12, $\overline{23}$, 40 и 21, 32, 40 элемент с унистором берется из $\bar{A}_{v-2,\,14,\,30}$. Значит, из этих столбцов надо оставить первый.

Допустим для примера, что унистор включен между вершинами 1 и 3 так, что $\overset{\rightarrow}{a_{13}}=g$, тогда $a_{31}=0$, включаем в $\beta_{30,14}$. Столбцы $\overrightarrow{13}$, 20, 40; $\overrightarrow{13}$, 21, 40 и $\overrightarrow{13}$, $\overline{23}$, 40, принадлежащие структурному числу входного источника $A_{v-2;14,30}$, как видим, содержат унистор $\overrightarrow{13}$, а столбцы 13, 20, 40, 13, 21, 40 и 13, 23, 40 содержат нулевой элемент $a_{31}=0$. Выделенные операцией пересечения столбцы оставляем, поскольку они соответствуют путям из вершины 1 в 4 через вольтметр 30 с унисторами $\dot{a}_{13}=g$, $\dot{a}_{23}=c$, направленными к условно заземленному узлу $b'=0$.

Основываясь на рассмотренных способах вычисления определителя графа и его алгебраических дополнений, составим теоретико-множественную формулу определения схемной функции

$$F=\frac{\det A_{v-2}}{\det A_{v-1}} \tag{4.14}$$

для передаточных функций

$$F_{ab,0}=\frac{x_b}{x_a}=\frac{\det A_{v-2;ab,0}}{\det A_{v-1;a,0}} \tag{4.15а}$$

или

$$F_{ab,a'b'}=\frac{x_{bb'}}{x_{aa'}}=\frac{\det A_{v-2;ab,a'b'}}{\det A_{v-1;aa'}} \tag{4.15б}$$

и для входных (выходных) функций

$$F_{aa}=\frac{x_a}{\xi_a}=\frac{\det A_{v-2,a,0}}{\det A_{v-1}}, \tag{4.16а}$$

$$F_{bb}=\frac{x_b}{\xi_b}=\frac{\det A_{v-2,b,0}}{\det A_{v-1}}. \tag{4.16б}$$

Если измеряется (на выходе) ток $x_b=i_b$, т. е. последовательно с ребром bb' включается амперметр, функция $F_{ab,0}$ ($F_{ab,a'b'}$) умножается на проводимость выходного ребра $y_{bb'}$, например:

$$Y_{\text{пер}}=\frac{i_{bb'}}{\varepsilon_{aa'}}=y_{bb}F_{ab,a'b'}=y_{bb}\frac{\det A_{v-2,ab,a'b'}}{\det A_{v-1,aa'}}.$$

При вычислении определителя графа необходимо, как утверждалось ранее, закоротить источники напряжения и удалить (разомкнуть) источники тока. В методе структурных чисел нежелательно осуществлять топологические операции, потому что это требует обращения снова к графу. Можно заметить, что закорачивание источника соответствует вычеркиванию соответствующего элемента и строки в звездной матрице. При этом Δ становится равным $\Delta_{aa}=\sum_{i=1}^{m} d_{(a,\,0)i}$. Удаление ребра источника соответствует вычеркиванию из звездной матрицы соответствующего элемента.

В этой связи формулы для определения схемных функций в отличие от формулы Мэзона получаются несколько различными в зависимости от вида источника и рода выходной величины. Так,

$$Z_{вх} = \frac{u_a}{J_a} = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta}; \quad Y_{вх} = \frac{i_a}{E_a} = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}, \tag{4.17}$$

$$Z_{вых} = \frac{u_b}{J_b} = \frac{\Delta_{bb}}{\Delta}, \quad Y_{вых} = \frac{i_b}{E_b} = \frac{\Delta}{\Delta_{bb}}, \tag{4.18}$$

$$K_U = \frac{u_b}{E_a} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}, \quad K_I = \frac{i_b}{J_a} = \frac{y_н \Delta_{ab}}{\Delta}, \qquad (4{,}19а), \ (4.19б)$$

$$Z_{пер} = \frac{u_b}{J_a} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta}, \quad Y_{пер} = \frac{i_b}{E_a} - \frac{y_н \Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}, \qquad (4.20а), \ (4.20б)$$

Формулы очень просты, легко синтезируются по номерам вершин, к которым приложены токи и напряжения, входящие в искомую схемную функцию. Если задающим является ток J_a, в знаменателе формулы помещается определитель Δ, если задающим является напряжение E_a, в знаменателе формулы — дополнение Δ_{aa} [9].

Порядок анализа электронных схем методом структурных чисел.

1. Постановка задачи анализа.

2. Выявление требуемых для анализа типов схемных функций, их характеристик и параметров.

3. Составление топологической модели для анализа по постоянному или переменному току, а также с учетом импульсного режима работы устройства.

4. Подбор для электронных компонентов наиболее подходящих по режиму работы и задачам анализа унисторных графов или матриц проводимости, или схем

замещения с зависимыми источниками тока, управляемыми напряжением. Построение по последним моделям унисторных графов.

5. Составление графа схемы с учетом унисторных моделей электронных компонентов.

6. Задание координат. Присвоение вершинам графа порядковых номеров. Выделение нулевой — условно заземленной вершины, связанной с измерительным прибором, место включения которого определяется видом искомой схемной функции.

7. Составление звездной матрицы исхода графа — $\overline{\beta}_{v-1}$.

8. Построение структурного $v-1$ числа, вычисление определителя $\Delta = \det A_{v-1}$.

9. Построение структурного $v-2$ числа, вычисление требуемых алгебраических дополнений как суммы величин соответствующих двойных деревьев или через детерминанту структурного $v-2$-числа.

10. Запись выражений для искомых схемных функций.

11. Построение частотных или временных характеристик.

12. Вычисление чувствительностей.

13. Анализ схемы на устойчивость.

Пример 4.9. Получить выражение коэффициента передачи напряжения K_U в области средних и высших частот для усилителя, схема которого приведена на рис. 4.18, *а*.

В рассматриваемой области частот анализируемый усилитель с туннельным диодом заменяем эквивалентной схемой, показанной на рис. 4.18, *б*. После упрощения получаем схему, показанную на рис. 4.18, *в*, где

$$R_1 = R_д \| R_1,\ C_1 = C_д + C_{др},\ R_3 = 1/g_б,$$

$$C_2 = C_{вэ},\ r_4 = 1/g_{вэ},\ r_5 = r_{вк},\ C_3 = C_{вк},\ r_6 = 1/g_{кэ}.$$

Переходим к другой топологической модели — графу (рис. 4.18, *г*), где

$$g_1 = 1/R_1 = 1/R_д + 1/R_1,\ g_L = 1/pL_{др},$$

$$g_2 = 1/R_2 = 1/R_{др},$$

$$g_3 = 1/R_3 = g_б,\ g_4 = pC_{вэ} + g_{вэ},\ g_5 = pC_{вк} + g_{вк},\ g_6 = g_{кэ}.$$

Осуществим задание координат, пронумеровав вершины графа и выбрав нулевую — условно заземленную (см. рис. 4.18, *г*). Упростим граф, исключая унистор g_0, направленный от условно заземленной вершины, и объединяя унистор, направленный к условно заземленной вершине с ребром g_4 (см. рис. 4.18, *д*).

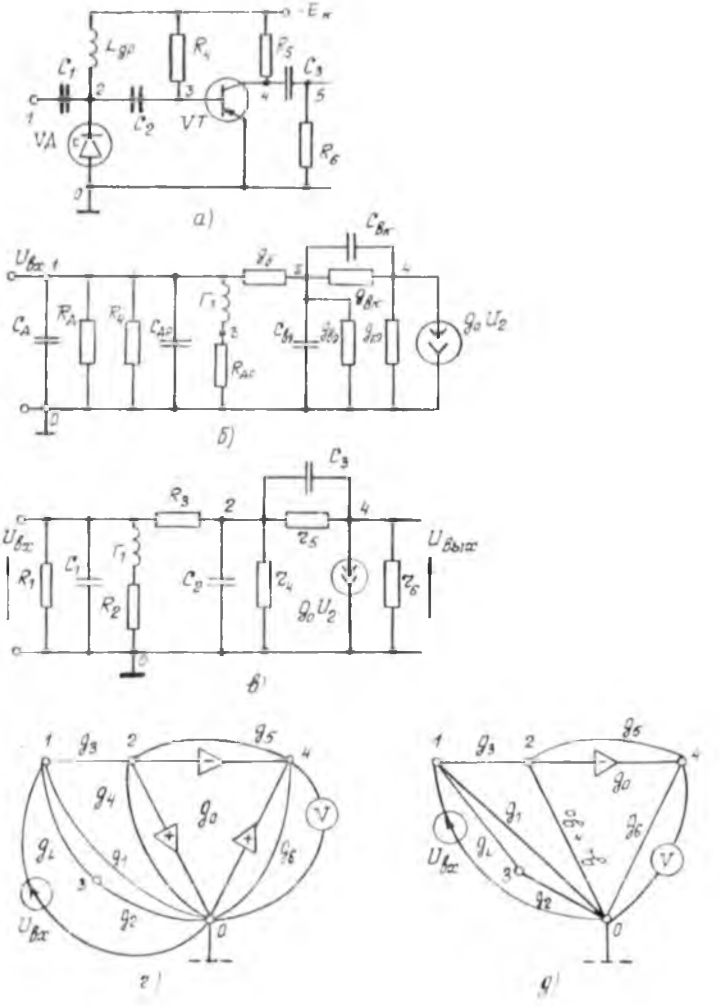


Рис. 4.18

Составим звездную матрицу исхода графа

$$\bar{\beta}_{v-1} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & \overline{24} \\ 30 & 31 & \\ 40 & 42 & \end{bmatrix},$$

где $10 \equiv g_1$; $12 \equiv g_3$; $13 \equiv g_L$; $20 = g_0 + g_4$; $\overline{24} = g_0 + g_5$;

$$30 \equiv g_2;\ 40 \equiv g_6;\ 42 \equiv g_5.$$

Искомая функция

$$K_U = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} = \frac{u_4}{u_1} = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}}.$$

Найдем дополнение Δ_{14}. Поскольку на графе условно заземленный узел является общим для источника и вольтметра,

$$\Delta_{14} = \sum_{i=1}^{m} d_{(14,0)\,i} = \det \bar{A}_{v-2;14,0},\ \Delta_{11} = \det \bar{A}_{v-2;1,0},$$

$$\det \bar{A}_{v-2;14,0} = \det \left[\bar{A}_{v-2}(\beta_{10,40}) \cap \bar{A}_{v-2}(\beta_{40,10})\right],$$

$$\bar{A}_{v-2;10,40} = \begin{bmatrix} \cancel{10} & 12 & 13 \\ 20 & 21 & \overline{24} \\ 30 & 31 & \\ 40 & 42 & \end{bmatrix}_{\bmod 2}$$

$$\bar{A}_{v-2;40,10} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & \overline{24} \\ 30 & 31 & \\ \cancel{40} & 42 & \end{bmatrix}_{\bmod 2}$$

$$\bar{A}_{v-2;14,0} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & \\ 20 & 21 & \overline{24} \\ 30 & 31 & \end{bmatrix}_{\bmod 2} \cap \begin{bmatrix} 20 & 21 & \overline{24} \\ 30 & 31 & \\ 42 & & \end{bmatrix}_{\bmod 2} = \left(\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ \overline{24} & \\ 30 & 31 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \right)_{\bmod 2} \cap \left(\begin{bmatrix} 21 & \\ 30 & 31 \\ 42 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & 20 \\ 30 & 31 \\ & 42 \end{bmatrix} \right)_{\bmod 2} =$$

$$
= \begin{bmatrix} 12 & \\ \overline{24} & \\ 30 & 31 \end{bmatrix}_{\mathrm{mod}\,2} \bigcap \begin{bmatrix} 21 & \\ 30 & 31 \\ 42 & \end{bmatrix}_{\mathrm{mod}\,2} = \begin{bmatrix} 12 & \\ \overline{24} & \\ 30 & 31 \end{bmatrix}_{\mathrm{mod}\,2} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ \overline{24} & \overline{24} \\ 30 & 31 \end{bmatrix},
$$

$$
\Delta_{14} = \det A_{\vartheta-2;14,0} = y_{12}y_{24}(y_{30}+y_{31}) = g_3(g_5-g_0)(g_2+g_L).
$$

Найдем симметричное дополнение Δ_{11} по структурному числу $\bar{A}_{\vartheta-2;1,0}(\beta_{10,10})$:

$$
\bar{A}_{\vartheta-2;1,0} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & \overline{24} \\ 30 & 31 & \\ 40 & 42 & \end{bmatrix}_{\mathrm{mod}\,2} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 21 & 21 & 21 & 21 & \overline{24} & \overline{24} \\ 30 & 30 & 31 & 31 & 30 & 30 & 31 & 31 & 30 & 31 \\ 40 & 42 & 40 & 42 & 40 & 42 & 40 & 42 & 40 & 40 \end{bmatrix}
$$

$$
\Delta_{11} = (g_2+g_L)[(g_1+g_0)(g_6+g_5)+g_3(g_6+g_5)] + (g_2+g_L)(g_5-g_0)g_6 = (g_2+g_L)[(g_6+g_5)(g_3+g_1+g_0)+(g_5-g_0)g_6].
$$

И окончательно получаем

$$
K_\vartheta = \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}} = \frac{\det \bar{A}_{\vartheta-2;14,0}}{\det \bar{A}_{\vartheta-2;1,0}} = \frac{\det[\bar{A}_{\vartheta-2}(\beta_{10,40}) \cap \bar{A}_{\vartheta-2}(\beta_{40,40})]}{\det \bar{A}_{\vartheta-2}(\beta_{10,10})} =
$$

$$
= \frac{g_3(g_5-g_0)(g_2+g_L)}{(g_2+g_L)[(g_5+g_6)(g_0+g_3+g_4)+g_6(g_5-g_0)]}
$$

После подстановки выражение для K_U примет следующий вид:

$$
K_U = g_0 \frac{pC_{\text{бк}} + g_{\text{бк}} - g_0}{p^2C_{\text{бк}}C_{\text{бэ}} + p[C_{\text{бк}}(g_0+g_б+g_{\text{бэ}}) + C_{\text{бэ}}(g_{\text{бк}}+g_{\text{кэ}}) +}
$$

$$
\frac{pC_{\text{бк}} + g_{\text{бк}} - g_0}{+ C_{\text{бк}}g_{\text{кэ}}] + g_{\text{кэ}}(g_{\text{бк}} - g_0) + (g_{\text{бк}} + g_{\text{кэ}})(g_0 + g_б + g_{\text{бэ}})}.
$$

4.4. Метод сигнальных (направленных) графов

Построение сигнальных графов электронных схем. Направленные графы обычно строят по системе линейных уравнений. При этом в качестве элементов множества X выбирают множество переменных исходной системы уравнений $x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, а в качестве отображения Γ — одну из форм записи уравнений, приписывая дугам графа передачи, равные соответствующим коэффициентам при переменных в уравнениях. В зависимости от выбранной формы записи уравнений строят так называемые графы С. Мэзона, К. Коутса, В. Н. Анисимова, А. Г. Останенко и др.

Граф Мэзона (наиболее распространен). Для его построения необходимо составить систему уравнений схемы в причинно-следственной форме, где каждая зависимая переменная в одном уравнении явно выражена через другие переменные [13].

Правило построения графа Мэзона: в качестве множества берется множество всех переменных в уравнениях и считается, что x_i отображается на x_j, если в выражении x_j входит x_i с отличным от нуля коэффициентом $\pm K_{ij}$. В графе соответствующие вершины x_i и x_j соединяются дугой, направленной от x_i к x_j с передачей, равной $\pm K_{ij}$ (независимо от знака последнего). Пусть, например, имеется система уравнений, записанная в явной форме:

$$x_1 = ax_2 - bx_3,$$

$$x_2 = cx_1 - dx_2 + ex_3,$$

$$x_4 = x_2.$$

В заданной системе имеем четыре переменные x_1, x_2, x_3, x_4, значит в графе будет четыре вершины и шесть дуг по числу коэффициентов: a, $-b$, c, $-d$, e, 1 (рис. 4.19, *а*). Из графа видно, что переменные x_1, x_2, x_4 являются зависимыми, а x_3 — независимой переменной — источником графа.

Направленный граф, составленный по системе уравнений для электронной схемы, называют сигнальным, поскольку в этом случае переменные (токи и напряжения) в уравнениях представляют собой сигналы схемы в различных ее узлах, контурах или ветвях. Уравнения, составленные для схем в узловом базисе (т. е. по методу узловых напряжений) или в контурном базисе, имеют в обобщенной форме следующий вид:

$$a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = F_1,$$

$$-a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - a_{23}x_3 = F_2,$$

$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = F_3.$$

Для построения графа Мэзона необходимо перейти от неявной формы записи к явной, т. е. *причинно-следст-*

венной форме. Для этого можно разделить каждое уравнение системы на коэффициенты типа a_{ii}, тогда получим

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} F_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} F_2 + \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} F_3 + \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2.$$

Граф показан на рис. 4.19, *б*. Такой граф иногда называют *нормализованным*, т. к. в нем отсутствуют петли.

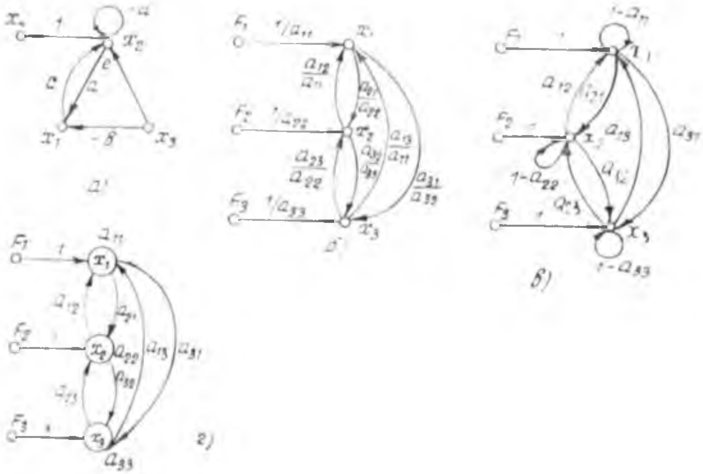


Рис. 4.19

Другой прием перехода к явной (причинно-следственной) форме записи уравнений состоит в добавлении к левой и правой его частям одной из переменных

$$x_1 + a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 = F_1 + x_1,$$

тогда $\quad x_1 = F_1 + (1 - a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

(или $\quad x_1 = -F_1 + (1 + a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$).

Аналогично $\quad x_2 = F_2 + a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 + a_{23}x_3,$

$$x_3 = F_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (1 - a_{33})x_3.$$

Граф для полученной явной формы показан на рис. 4.19, *в*. Этот граф называют *ненормализованным*. В нем есть петли в каждой зависимой вершине, но в отличие от нормализованного передачи дуг не являются относительными (дробными) величинами. Они совпадают с взаимными проводимостями узлов или взаимными сопротивлениями контуров схемы, а передачи петель соответствуют собственным проводимостям (сопротивлениям) узлов (контуров) схемы.

Более тесную связь со структурой схемы имеет *граф Коутса — Анисимова*, для построения которого необходимо исходную систему уравнения представить в виде

$$a_{11}x_1 = F_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$a_{22}x_2 = F_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3,$$
$$a_{33}x_3 = F_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2.$$

В левой части уравнений, по существу, сосредоточены петли. Коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33} можно считать также весами вершин x_1, x_2, x_3. Тогда граф представляется в виде совокупности взвешенных вершин (вместо петель в них) и дуг, их соединяющих. На рис. 4.19, *г* показан граф Коутса—Анисимова с принятым обозначением зависимых вершин в виде увеличенных кружочков.

Ранее отмечалось, что уравнения, составленные в однородном (узловом или контурном) базисе, имеют значительную избыточность. Как в разрешении их матричными методами, так и в сигнальных графах это приводит к неоправданным усложнениям в расчетах. С целью упрощения графа схемы используют возможность составления уравнений схемы причинно-следственным способом в неоднородном базисе. Этот способ приемлем для небольших схем, широко используется для описания систем автоматики, а также функциональных схем больших электронных устройств.

Порядок составления уравнений схемы по причинно-следственному принципу:

1. Составляется эквивалентная схема по переменному току — топологическая модель устройства.

2. Выбираются направления токов и напряжений на всех элементах схемы, вводятся их обозначения.

3. Выбирается какая-то переменная, как правило, выходной ток или напряжение ($x_{вых}$).

4. Выходная переменная $x_{вых}$ как следствие выражается применением законов Ома или Кирхгофа через другие переменные — причины: x_1, x_2 и т. д.

5. Получившиеся на предыдущем этапе промежуточные переменные x_1, x_2, ... последовательно выражаются уже как следствия через другие причины: x_i, x_{i+1}, ... Затем это повторяется для образующихся новых промежуточных переменных и т. д.

6. Заканчивается процесс составления уравнений, когда при выражении очередной промежуточной переменной не образовалось ни одной новой промежуточной переменной, кроме задающих переменных, а все ранее полученные уже выражены.

Правила составления причинно-следственных зависимостей:

1. Любую переменную можно выражать только один раз.

2. Любое конкретное соотношение (закон Ома или Кирхгофа для рассматриваемого участка схемы) может быть использовано только один раз.

3. Чтобы получить граф, соответствующий данной схеме, задающие переменные (источники сигналов схемы) должны быть источниками графа. В противном случае правильный граф можно получить только при условии, что число источников графа равно числу источников схемы (затем обычно используют правило инверсии (обращения) графа).

Пример 4.10. Составить сигнальный граф для схемы, приведенной на рис. 4.20, *а*.

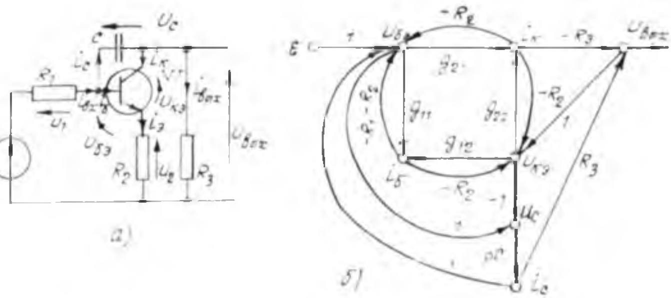


Рис 4 20

Начинаем составлять уравнения с переменной $U_{\text{вых}}$, записывая в скобках получающиеся промежуточные переменные:

по з-ну Ома $U_{\text{вых}} = i_{\text{вых}} R_3 - (i_{\text{вых}})$,

по з-ну Кирхгофа I $i_{\text{вых}} = i_C - i_{\text{к}} - (i_C,\ i_{\text{к}})$,

из ур-ний транзистора $\begin{cases} i_{\text{к}} = g_{21э} u_{\text{бэ}} + g_{22э} u_{\text{кэ}} - (u_{\text{бэ}},\ u_{\text{кэ}}), \\ i_{\text{б}} = g_{11э} u_{\text{бэ}} + g_{12э} u_{\text{кэ}} - (u_{\text{бэ}},\ u_{\text{кэ}}), \end{cases}$

по з-ну Кирхгофа II $u_{\text{кэ}} = U_{\text{вых}} - u_2 - (u_2)$,

по з-ну Ома $u_2 = i_{\text{э}} R_2 = (i_{\text{б}} + i_{\text{к}}) R_2$,

по з-ну Кирхгофа II $u_{\text{бэ}} = \varepsilon - u_1 - u_2 - (u_1)$,

по з-ну Ома $u_1 = i_{\text{вх}} R_1 - (i_{\text{вх}})$,

по з-ну Кирхгофа I $i_{\text{вх}} = i_C + i_{\text{б}} - (i_C)$,

по з-ну Ома $i_C = u_C \cdot pC - (u_C)$,

по з-ну Кирхгофа II $u_C = u_{\text{бэ}} - u_{\text{кэ}}$.

Из практических соображений целесообразно с целью упрощения графа сократить число полученных уравнений, используя простейшие подстановки. В результате получим

$$U_{\text{вых}} = (i_C - i_{\text{к}}) R_3,$$
$$i_{\text{к}} = g_{21э} u_{\text{бэ}} + g_{22э} u_{\text{кэ}},$$
$$i_{\text{б}} = g_{11э} u_{\text{бэ}} + g_{12э} u_{\text{кэ}},$$
$$u_{\text{кэ}} = U_{\text{вых}} - (i_{\text{б}} + i_{\text{к}}) R_2,$$
$$u_{\text{бэ}} = \varepsilon - (i_C + i_{\text{б}}) R_1 - (i_{\text{б}} + i_{\text{к}}) R_2,$$
$$i_C = u_C pC,$$
$$u_C = u_{\text{бэ}} - u_{\text{кэ}}.$$

Граф, построенный по последней системе уравнений, показан на рис. 4.20, *б*.

Пример 4.11. Составить сигнальный граф для схемы интегрирующего усилителя, показанной на рис. 4.21, *а*:

$$U_{\text{вых}} = i_{\text{н}} R_{\text{н}} - (i_{\text{н}}),$$
$$i_{\text{н}} = i_C + i_{\text{вых}} - (i_C,\ i_{\text{вых}}),$$
$$i_C = u_C pC - (u_C),$$
$$u_C = u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}} - (u_{\text{вх}}),$$
$$i_{\text{вых}} = -(K_A u_{\text{вх}} + u_{\text{вых}}) G_{\text{вых}A},$$

$$u_{вх}=i_{вх}R_{вх.А}-(i_{вх}),$$
$$i_{вх}=i_R-i_C-(i_R),$$
$$i_R=u_R/R-(u_R),$$
$$u_R=\varepsilon-u_{вх}-\quad-$$

Сократим полученную систему уравнений, сделав простейшие подстановки:

$$U_{вых}=(i_C+i_{вых})R_н,$$
$$i_C=u_CpC,$$
$$u_C=i_{вх}R_{вх.А}-U_{вых},$$
$$i_{вых}=-(K_Ai_{вх}R_{вх.А}G_{вых.А}-U_{вых}G_{вых.А}),$$
$$i_{вх}=u_R/R-i_C,$$
$$u_R=\varepsilon-i_{вх}R_{вх.А}.$$

Граф, составленный по последней системе уравнений, показан на рис. 4.21, *б*. Для контроля правильности построения графа необходимо убедиться, что число и вид его источников точно соответствуют исходной схеме. Поскольку подавляющее число схем не имеет положительных обратных связей, можно ориентироваться только на *отрицательные передачи всех контуров* в графе. Выявление контуров с положительной передачей в этом случае свидетельствует о допущенной ошибке в выборе направления тока (напряжения) в схеме или в определении знака при составлении причинно-следственных зависимостей.

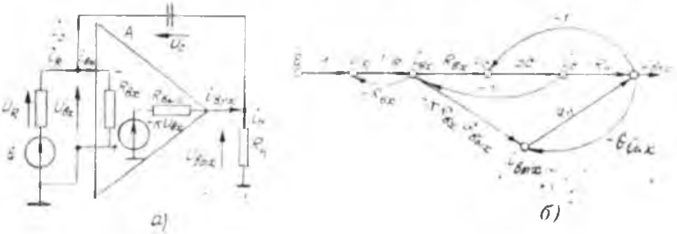


Рис. 4. 21

Рассмотренный причинно-следственный способ составления системы уравнений схемы очень удобен для анализа небольших схем (1—2 электронных компонента). Он позволяет построить граф, наиболее удачно, с точки зрения исследователя, сочетающий движение сигналов с математическим их описанием. Эта возможность способствует довольно быстрому и более глубокому пониманию особенностей работы исследуемой схемы. Однако более сложные схемы требуют иного подхода. Особенности их работы в целом обычно анализируют по функциональным схемам, что, по сути дела, соответствует их разбиению на небольшие, как правило, типовые узлы. Для расчета больших схем, т. е. для получения аналитических выражений их схемных параметров, применяют *способы построения сигнального графа непосредственно по схеме*, исключая этап составления уравнения. Этот способ основан на установлении прямой связи между структурой графа и системой уравнений схемы в узловом базисе. В этом случае вершины графа соответствуют задающим источникам и узловым напряжениям схемы (рис. 4.19, *в*, *г*), т. е. узлам исходной схемы. Базисный (нулевой) узел в графе отсутствует. Между вершинами графа в соответствии с исходной схемой размещаются по две противоположно направленные дуги с передачами, соответствующими проводимости пассивной ветви, включенной в схеме между соответствующими узлами. Кроме того, в каждую вершину вводится петля (см. рис. 4.19, *в*) с передачей, равной сумме проводимостей ветвей, сходящихся к соответствующему узлу в схеме, или используются взвешенные вершины (рис. 4.19, *г*). В [39] рассмотрен способ составления графа без петель — ориентированный беспетлевой граф (ОБГ).

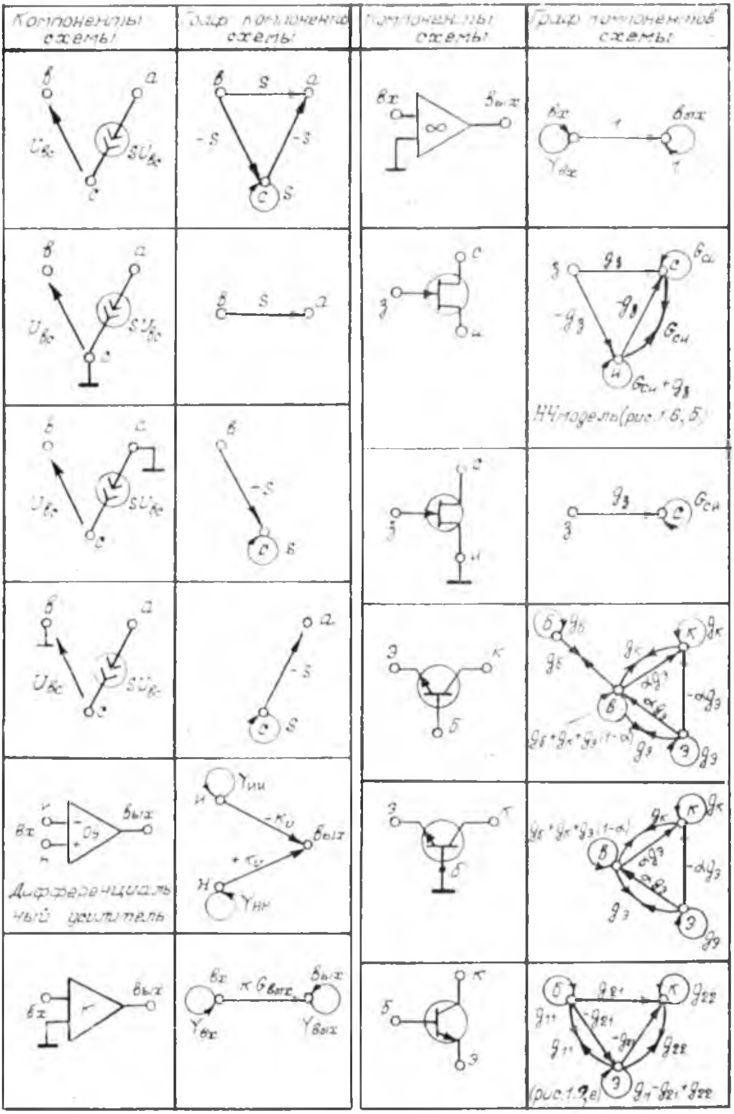
Порядок составления сигнального графа непосредственно по схеме.

1. Составляются графы по матрицам проводимостей электронных компонентов заданной схемы (или берутся из соответствующих справочных таблиц, например табл. 4.1 [15]). Пассивным ветвям схемы соответствуют две противоположно направленные дуги с одинаковыми положительными передачами, соответствующими проводимости ветви. Вершинам приписывается вес (чтобы не рисовать петли), равный собственным проводимостям узлов схемы.

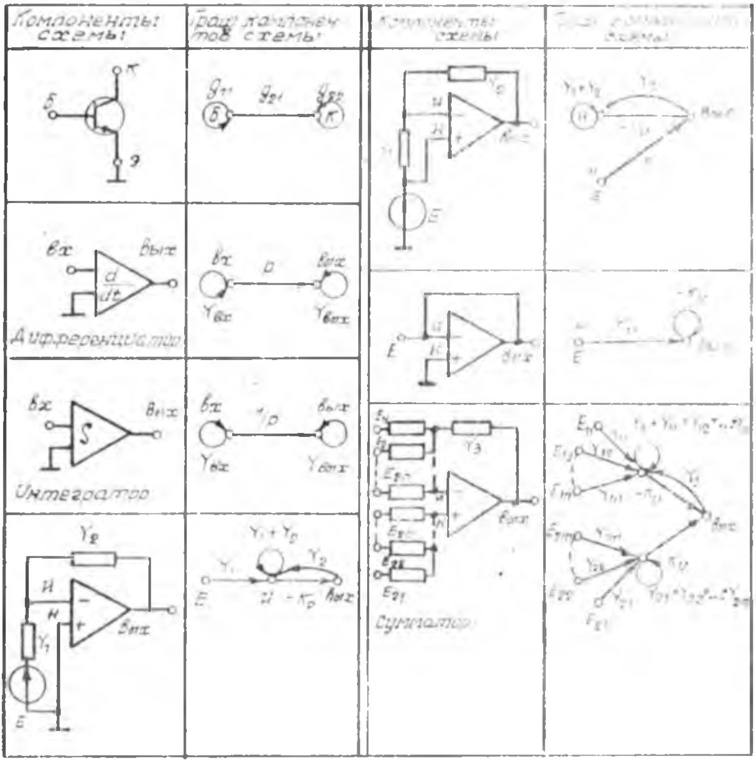
2. Полученные графы компонентов схемы соединяются между собой согласно заданной схеме. При этом суммируются параллельные дуги.

Таблица 4.1

Графы компонентов электронных схем



Продолжение табл. 4.1



3. Выбирается базисный узел схемы (базисная вершина графа) и удаляются из исходного графа все инцидентные ей дуги.

Выбирая базисный узел схемы заранее, можно при определенном навыке упростить построение графа, не вычерчивая дуги графов компонентов схемы, инцидентные базисному узлу схемы.

4. *Задающие источники тока* подсоединяются к соответствующей вершине согласно исходной схеме направленной дугой с единичной передачей. *Задающие или зависимые источники напряжения* с конечным значением внутреннего сопротивления (проводимости y_0) или с последовательно соединенной проводимостью y_0 подсоединяются к соответствующей вершине одной дугой с передачей, равной y_0. Если источник напряжения

идеальный ($y_0=\infty$), соединительная дуга имеет также единичную передачу. Таким образом, **если к узлу схемы подсоединен источник напряжения (зависимый или независимый), то в соответствующую вершину графа из других вершин дуги уже не заходят, за исключением дуги с весом зависимого источника** [15].

5. Зависимые источники отображаются дугами, которые выходят из вершин, соответствующих управляющей переменной, и направляются к вершинам, соответствующим узлам подключения источника. Вес этих дуг равен коэффициенту передачи источника. Если в схеме зависимый источник направлен от заземленного (общего) узла, то знак коэффициентов передачи меняется на противоположный.

6. Если считать весом вершины передачу ее петли, то такой граф называют обобщенным сигнальным гра-

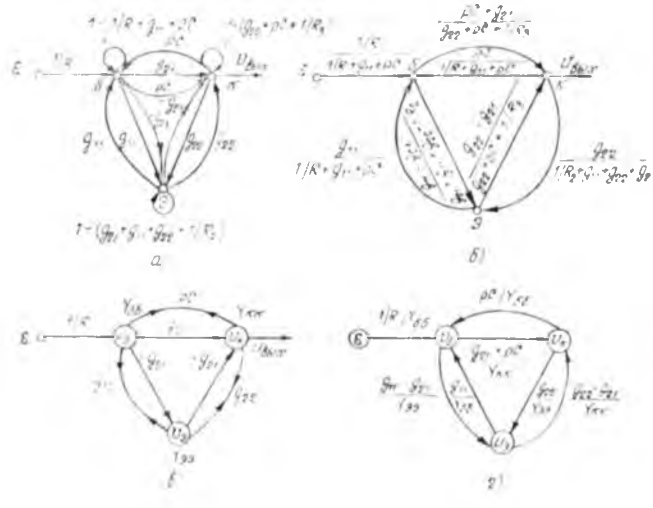


Рис. 4.22

фом (ОСГ) [11]. При этом петли можно не показывать (рис. 4.22, *в*). Вершинам без петель присваивается единичный вес.

Пример. Для схемы, приведенной на рис. 4.20, *а*, построить граф непосредственным методом. На рис. 4.22, *а* построен граф с петлями в каждой вершине (кроме вершины источника ε). На том же рис. 4.22, *б* показан граф без петель. Здесь передачи дуг усложнились за счет их деления на величину собственной проводимости узла (вершины), к которой она направлена. На следующих рис. 4.22, *в* и *г* показаны возможные способы упрощенного изображения этого же графа. Причем граф на рис. 4.22, *в* соответствует обобщенному сигнальному графу (ОСГ), введенному В. П. Анисимовым [11]. На рис. 4.23 показаны графы, построенные по схеме усилителя на ОУ, приведенной на рис. 4.21, *а*.

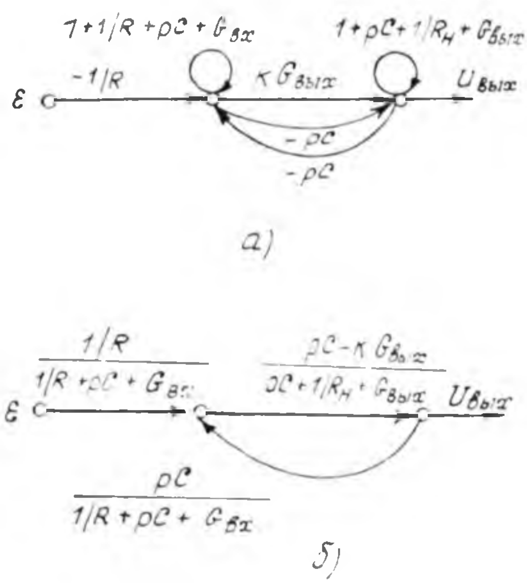


Рис. 4.23

Эквивалентные преобразования сигнального графа. Одним из возможных способов нахождения выражения схемной функции по сигнальному графу является его свертка до одной дуги, соединяющей вершину источника с выходной вершиной — стоком графа. Передача такой дуги и будет искомой схемной функцией. Процедура свертки графа состоит из последовательного исключения всех зависимых (промежуточных) вершин по определенным правилам — эквивалентным преобразованиям сигнального графа. Рассмотрение их и вывод производятся методом преобразования соответствующих графу уравнений.

1. *Параллельное соединение одинаково направленных дуг* эквивалентно одной дуге с передачей, равной сумме передач исходных дуг (рис. 4.24).

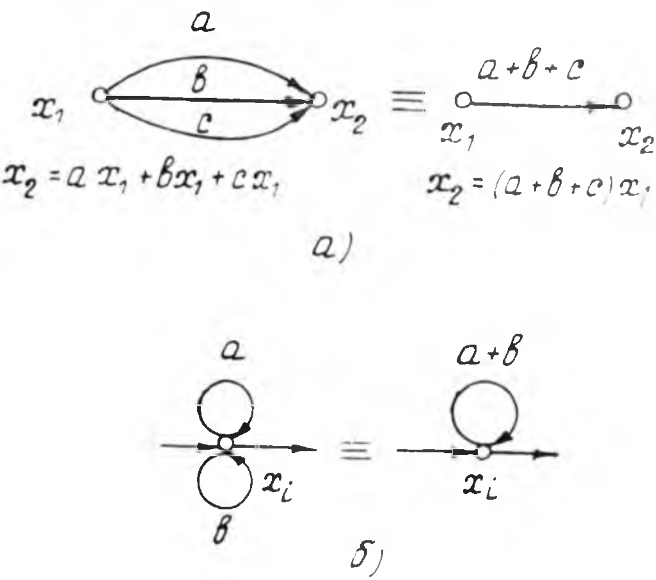


Рис. 4.24

2. *Последовательное соединение одинаково направленных дуг* эквивалентно одной дуге с передачей, равной произведению передач исходных дуг (рис. 4.25).

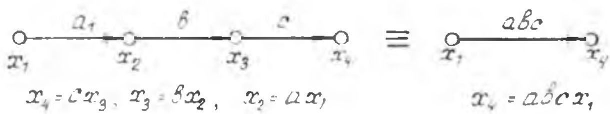


Рис. 4.25

3. *Исключение вершины* (зависимой) приводит к следующим изменениям в графе: все заходящие в исключаемую вершину дуги направляются по направлению

каждой из выходящих, а их передачи перемножаются (рис. 4.26).

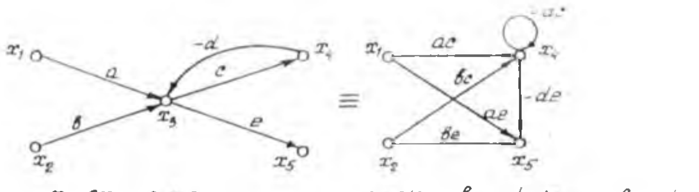


Рис. 4.26

4. *Исключение петли* приводит к изменению передач всех входящих в данную вершину дуг путем деления их на единицу минус передача исключаемой петли (рис. 4.27).

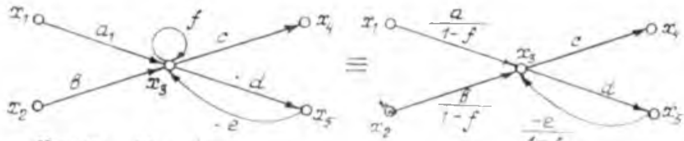


Рис. 4.27

5. *Инверсия дуги, пути или контура* возможна в случае, когда они начинаются в источнике графа. При этом начальная вершина инверсируемой дуги становится конечной (стрелка изменяет направление) и в нее переносятся концы всех не принадлежащих инверсируемому пути дуг, которые были направлены к конечной вершине инверсируемой дуги до инверсии. Передачи инверсируемых дуг заменяются на обратные величины, а передача переносимой дуги делится на передачу соответствующей ей инверсируемой дуги с обратным знаком (рис. 4.28).

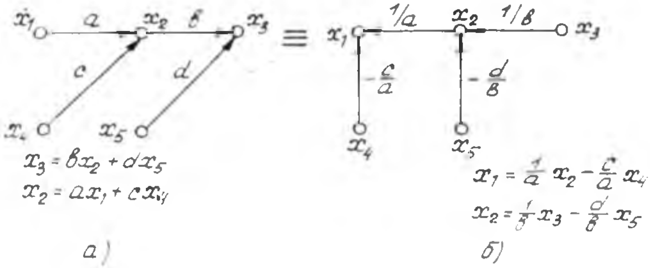


Рис. 4.28

Пример решения сигнального графа методом свертки (эквивалентных преобразований) показан на рис. 4.29, где за исходный выбран граф схемы, приведенный на рис. 4.21.

На рис. 4.29, *а* приведен исходный граф. На рис. 4.29, *б* — граф после исключения из исходного вершин u_R и $i_{вых}$. На рис. 4.29, *в* — граф после исключения из предыдущего петель и вершины u_C. На рис. 4.29, *г* — граф после исключения из предыдущего вершины i_C. На рис. 4.29, *д* — граф после преобразования в предыдущем параллельных дуг и исключения петель. На рис. 4.29, *е* — граф после исключения из предыдущего вершины $i_{вх}$. Исключая теперь последнюю петлю, получаем граф (рис. 4.29, *ж*) в виде одной дуги, стягивающей вершины источника e и стока $U_{вых}$ графа, передача которой есть искомое K_V для исходной схемы.

Рассмотренный пример показывает, что решение методом свертки достаточно громоздко, требует предельного внимания и, как показывают исследования, с трудом поддается постановке на ЭВМ.

Формула общей передачи сигнального графа. Основным способом нахождения выражения схемной функции любого типа по сигнальному графу схемы являются *формулы общей передачи графа*. Для графов, построенных по причинно-следственному принципу, наиболее удобной считается *формула Мэзона* для сигнального графа (1953 г.)

$$F_{ab} = \frac{x_b}{x_a} = \frac{x_{вых}}{x_{вх}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k D_k^{М}}{D^{М}}, \ [13], \qquad (4.21)$$

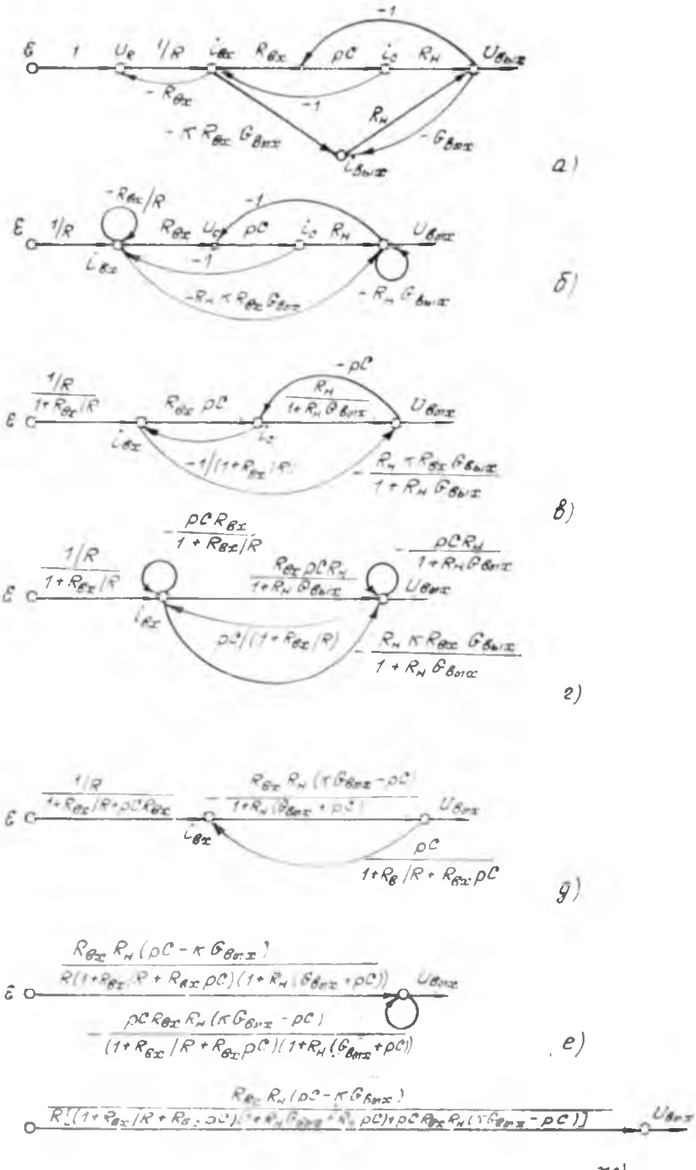


Рис. 4.29

где $Д_М$ — *определитель сигнального графа Мэзона*. Он вычисляется по формуле

$$D^М = 1 - \sum_1 L_к + \sum_2 L_к - \sum_3 L_к + \ldots + (-1)^m \sum_m L_к, \quad (4.22)$$

в которой $\sum_1 L_к$ — сумма передач всех контуров графа; $\sum_2 L_к$ — сумма всех возможных сочетаний попарных произведений передач контуров, не касающихся друг друга; $\sum_3 L_к$ — сумма всех возможных сочетаний по три не касающихся друг друга контура; $\sum_m L_m$ — сумма произведений передач максимального числа m контуров, не касающихся друг друга;

$P_к$ — передача $к$-го прямого пути из вершины $x_a(x_{вх})$ источника в вершину $x_b(x_{вых})$ стока графа;

n — число всех возможных прямых путей из x_a в x_b;

$Д_к^М$ — *дополнение к-го пути*, ищется для части графа, не касающейся этого пути, по формуле (4.22), в которую должны включаться только контуры, не касающиеся $к$-го пути, т. е.

$$D_к^М = 1 - \sum_1 L_i + \sum_2 L_i - \sum_3 L_i + \ldots + (-1)^m \sum_m L_i. \quad (4.23)$$

(Здесь все L^i не касаются $к$-го пути).

Для *определения передачи между внутренними вершинами графа i и j* (не являющимися источниками графа) необходимо найти сигналы в этих вершинах от источника графа, а затем взять их отношения. В результате получим формулу

$$F_{ij} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{\sum\limits_1^n P_i D_j^М}{\sum\limits_1^m P_i D_i^М}, \quad (4.24)$$

где P_i и P_j — передачи путей из вершины источника графа в вершины x_i и x_j соответственно; D_i^M и D_j^M — алгебраические дополнения этих путей.
По формуле (4.24) можно определять входные и выходные функции и т. п.

Обратные связи и чувствительность. Петлевая (контурная) передача $L_к$ по графу определяется через дугу g как

$$L_к = g\frac{B}{D_{g=0}}\ .$$

где $Д_{g=0}$, т. е. часть определителя, не зависящая от параметра, выделенной нами дуги g;

gB — часть определителя Д, зависящая от g. Она вычисляется по формулам общей передачи графа, когда

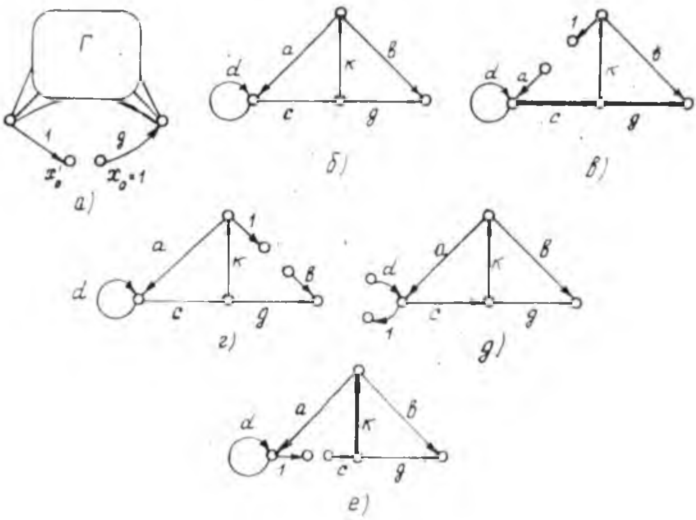


Рис. 4. 30

дуга g разрывается, как показано на рис. 4.30, *а*. Обратная связь для параметра g согласно (2.48)

$$F_g = 1 - L_к = 1 - g\frac{B}{D_{g=0}}\ . \tag{4.25}$$

Пример. Для графа, приведенного на рис. 4.30, *б*, найти обратную связь F_a, F_b, F_d и F_c:

$$F_a = 1 - \frac{ack}{1-d}, \; F_b = 1 - 0 = 1, \; F_d = 1 - \frac{d}{1-ack},$$

$$F_c = 1 - \frac{cka}{1-\alpha}.$$

Формула (4.25) может быть заменена более общей формулой

$$F_g = \frac{D}{D_{g=0}}, \tag{4.26}$$

Ее легко проверить на предыдущем примере. Чувствительности определяются по формулам (2.53), (2.54), (2.55), для которых F_{gi} можно вычислять по (4.25) или (4.26).

Пример 4.12. Найдем передачу графа, приведенного на рис. 4.29, *а*: $K_V = U_{вых}/\varepsilon$ по формуле Мэзона. Передача первого прямого пути из вершины ε в вершину $U_{вых}$:

$P_1 = \frac{1}{R} R_{вх} pC R_н$; второго пути: $P_2 = \frac{1}{R}(-KR_{вх}G_{вых}) R_н$.

Алгебраические дополнения этих путей $D_1^М = D_2^М = 1$, т. к. на графе нет контуров, не касающихся этих путей. Отметим, что на графе пять контуров: $L_1 = -R_{вх}/R$, $L_2 = -R_{вх}pC$, $L_3 = -pCR_н$, $L_4 = -R_нG_{вых}$, $L_5 = -KR_{вх}G_{вых}R_н pC$. Выделим не касающиеся пары: $L_1L_3 = R_{вх}R_н pC/R$, $L_1L_4 = R_{вх}R_нG_{вых}/R$, $L_2L_4 = R_{вх}R_нG_{вых}pC$. Теперь запишем выражение для определителя по формуле (4.22)

$$Д^М = 1 + R_{вх}/R + R_{вх}pC + pCR_н + R_нG_{вых} +$$
$$+ KR_{вх}G_{вых}R_н pC + R_{вх}R_н pC/R + R_{вх}R_нG_{вых}/R +$$
$$+ R_{вх}R_нG_{вых}pC.$$

По формуле (4.21) запишем выражение для K_U:

$$K_U = \frac{\frac{1}{2} R_{вх}R_н(pC - KG_{вых})}{(1 + R_{вх} + R_{вх}pC)(1 + R_нG_{вых}) + R_н pC(1 + R_{вх}/R + KR_{вх}G_{вых})}.$$

Можно показать, что оно тождественно выражению, полученному в примере на рис. 4.29, *ж*.

Пример 4.13. Для графа, приведенного на рис. 4.20, *б*, найдем передачу по напряжению $K_U = U_{\text{вых}}/\varepsilon$ по формуле Мэзона:

$P_1 = -g_{21}R_3$, $Д_1 = 1 - g_{12}R_2$, $R_4 = g_{11}R_2pCR_3$, $Д_4 = 1$,

$P_2 = g_{21}R_2pCR_3$, $Д_2 = 1$, $P_5 = pCR_3$, $Д_5 = 1 + R_2g_{22} + $
$+ g_{12}R_2$,

$P_3 = g_{11}R_2g_{22}R_3$, $Д_3 = 1$,

$L_1 = -g_{21}R_2$, $L_2 = g_{21}R_2g_{12}(R_1 + R_2)$, $L_3 = g_{21}g_{12}R_3(R_1 + R_2)$,

$L_4 = -g_{21}R_2R_1pC$, $L_5 = -g_{21}R_1R_3pC$, $L_6 = R_2g_{11}R_2g_{22}$,

$L_7 = -R_2pCR_3g_{22}$, $L_8 = -g_{11}(R_1 + R_2)$, $L_9 = -R_2g_{22}$,

$L_{10} = -g_{12}R_2$, $L_{11} = -pCR_1$, $L_{12} = -R_3pC$,

$L_{13} = -g_{22}R_3$, $L_{14} = -pCR_3g_{12}(R_1 + R_2)$, $L_5 = -pCR_1g_{11}R_2$,

не касающиеся пары контуров: L_1L_{10}, L_1L_{12}, L_8L_9, L_8L_{12}, L_8L_{13}, L_9L_{11}, $L_{10}L_{11}$, $L_{11}L_{13}$;

$$K_U = \frac{P_1D_1 + P_2D_2 + P_3D_3 + P_4D_4 + P_5D_5}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 +}$$

$$\frac{P_1D_1 + P_2D_2 + P_3D_3 + P_4D_4 + P_5D_5}{+ L_{10} + L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14} + L_{15} + (L_1L_{10} + L_1L_{12} +}$$

$$\frac{P_1D_1 + P_2D_2 + P_3D_3 + P_4D_4 + P_5D_5}{+ L_8L_9 + L_8L_{12} + L_8L_{13} + L_9L_{11} + L_{10}L_{11} + L_{11}L_{13}}.$$

Для графов, построенных непосредственно по схеме цепи, применение формулы Мэзона (4.21) приводит к неоправданно большому числу взаимно сокращающихся членов из-за присутствия в каждой вершине петель. Поэтому от них надо сразу же избавляться, как показано на рис. 4.22, *б*, *г*, 4.23, *б*, т. е. по известному правилу исключения петли.

Следует заметить, что с точки зрения анализа электрических процессов, протекающих в цепи, построение сигнального графа непосредственно по схеме не дает преимуществ относительно ненаправленного графа, который, как известно, также строится непосредственно по схеме цепи. Однако возникают лишь дополнительные элементы в обозначении, необходимость исключения петель, дробные передачи дуг и другие сложности.

Несколько более рационален в этом отношении способ решения по так называемому обобщенному сигнальному графу (ОСГ), основанный на другой формуле расчета определителя графа — *формуле К. Коутса* (C. Coates) [16]. Для ОСГ используется несколько измененный ее вариант [15, 17], который мы здесь и рассмотрим:

$$F_{ab} = \frac{x_b}{x_a} = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n} P_\kappa D_\kappa^C}{D^C}, \qquad (4.27а)$$

$$D_i^C = \sum_i \delta_i, \qquad (4.27б)$$

где σ_i — *определитель элементарного графа (фактора графа)*, получаемый как произведение передач, входящих в него некасающихся контуров (взятых с обратным знаком) и петель (взвешенных вершин). При этом петли (вершины) должны иметь передачи, равные собственным проводимостям соответствующих узлов схемы: Y_{ii}.

Суммирование осуществляется по всем элементарным σ_i графам — факторам. Веса вершин, связанных с источником, т. е. не имеющих петель, считаются равными единице.

Алгебраическое дополнение D_κ^C пути P_κ из источника x_a в сток x_b определяется как определитель $Д^C$ для части графа, не касающейся пути P_κ.

Пример 4.14. Найдем передачу графа, приведенного на рис. 4.22, *в*: $K_U = \frac{U_\kappa}{\varepsilon} = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n} P_\kappa D_\kappa^C}{D^C}$. При вычислении определителя вершины источника можно удалить из графа.

Определители элементарных σ_i графов (факторов):

$\delta_1 = Y_{бб} Y_{кк} Y_{эк}$, $\sigma_2 = Y_{бб}(-1) g_{22}(g_{22} - g_{21})$, $\delta_3 =$
$= Y_{кк}(-1) g_{11}(g_{11} - g_{21})$, $\delta_4 = Y_{кэ}(-1) pC(pC + g_{21})$,
$\delta_5 = (-1)(pC + g_{21}) g_{22} g_{11}$. $\delta_6 = (-1) pC(g_{11} - g_{21}) \times$
$\times (-g_{21} + g_{22})$.

Определитель графа:

$Д^C = Y_{бб} Y_{кк} Y_{кэ} - Y_{бб}(g_{22} - g_{21}) g_{22} - Y_{кк} g_{11}(g_{11} - g_{21}) -$
$- Y_{кэ} pC(pC + g_{21}) - g_{11} g_{22}(pC + g_{21}) - pC(g_{11} -$
$- g_{21})(-g_{21} + g_{22})$.

Передачи путей:

$$P_1 = \frac{1}{R}(pC + g_{21}),$$

$$P_2 = \frac{1}{R}(g_{21} - g_{11})(g_{21} - g_{22}).$$

Дополнения путей:

$$D_1^C = Y_{ээ},\ D_2^C = 1.$$

В результате

$$K_U = \frac{\frac{1}{R}[(pC + g_{21})Y_{ээ} + (g_{21} - g_{11})(g_{21} - g_{22})]}{Y_{бб}Y_{кк}Y_{ээ} - Y_{бб}g_{22}(g_{22} + g_{21}) - Y_{кк}g_{11}(g_{11} + g_{21}) - Y_{ээ}pC(pC - g_{21}) - g_{11}g_{22}(pC - g_{21}) - pC(g_{11} + g_{21})(g_{21} + g_{22})}.$$

Для графа Мэзона применение формулы Коутса не приводит ни к каким выгодам, выражения для определителей полностью совпадают. В этом можно убедиться, записав определитель $Д^C$ для графа, показанного на рис. 4.29, *а*, и сравнив его с $Д^M$, полученным в предыдущем примере 4.12. При этом надо полагать вес всех вершин равным 1, т. к. в них нет петель.

Пример 4.15. Для сравнения найдем определитель $Д^M$ для графа на рис. 4.22, *а* по формуле Мэзона (в предыдущем примере 4.14 для этого графа уже найден определитель $Д^C$ по формуле Коутса). Передачи петель считаем равными $1-Y_{бб}$, $1-Y_{кк}$ и $1-Y_{ээ}$. Тогда

$$Д^M = 1 - [(1-Y_{бб}) + (1-Y_{кк}) + (1-Y_{ээ}) + (g_{21}+pC)pC + (g_{11}-g_{21})g_{11} + (g_{22}-g_{21})g_{22} + (g_{11}-g_{21})(g_{22}-g_{21})pC + (g_{21}+pC)g_{22}g_{11}] + [(1-Y_{бб})(1-Y_{кк}) + (1-Y_{бб})(1-Y_{ээ}) + (1-Y_{бб})(g_{22}-g_{21})g_{22} + (1-Y_{кк})(1-Y_{ээ}) + (1-Y_{кк})g_{11}(g_{11}-g_{21}) + (1-Y_{ээ})(g_{21}+pC)\times pC] - (1-Y_{бб})(1-Y_{кк})(1-Y_{ээ}).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных чле-

пов получаем $Д^{М}=1-1-Y_{бб}-1-Y_{кк}-1-Y_{ээ}+1-Y_{бб}-$
$-Y_{кк}+Y_{бб}Y_{кк}+1-Y_{бб}-Y_{ээ}+Y_{бб}Y_{ээ}+1-Y_{кк}-Y_{ээ}+$
$+Y_{кк}Y_{ээ}-1+Y_{бб}+Y_{кк}-Y_{бб}Y_{кк}+Y_{ээ}-Y_{бб}Y_{ээ}-Y_{кк}Y_{ээ}+$
$+Y_{бб}Y_{кк}Y_{ээ}-(g_{21}+pC)pC-g_{11}(g_{11}-g_{21})-(g_{22}-g_{21})g_{22}-$
$(g_{11}-g_{21})(g_{22}-g_{21})pC-g_{22}g_{11}(pC+g_{21})+(g_{22}-g_{21})g_{22}-$
$-Y_{бб}(g_{22}-g_{21})g_{22}+g_{11}(g_{11}-g_{21})-Y_{кк}g_{11}(g_{11}-g_{21})+$
$+pC(g_{21}+pC)-Y_{ээ}pC(g_{21}+pC)=Y_{бб}Y_{кк}Y_{ээ}-$
$-Y_{бб}g_{22}(g_{22}-g_{21})-Y_{кк}g_{11}(g_{11}-g_{21})-Y_{ээ}pC(pC+g_{21})-$
$-g_{11}g_{22}(pC+g_{21})-pC(g_{11}-g_{21})(g_{22}-g_{21})$.

Таким образом, из 38 слагаемых в выражении для определителя по формуле Мэзона после приведения подобных членов и сокращения в окончательном результате остается только 6 слагаемых. В предыдущем примере 4.14 при решении этой задачи по формуле Коутса тот же результат получен без приведения подобных членов и их сокращения. Это говорит о рациональности применения формулы Коутса в графах с петлями (взвешенными вершинами), построенных непосредственно по схеме электронной цепи.

Порядок анализа электронных схем методом сигнальных графов.

1. Постановка задачи анализа.

2. Выявление требуемых для анализа типов схемных функций, их характеристик и параметров.

3. Составление топологической модели для анализа схемы по постоянному или переменному току, а также с учетом импульсного режима работы устройства.

4. Подбор для электронных компонентов наиболее подходящих по режиму их работы и задачам анализа математических (уравнения) или топологических (эквивалентные схемы, сигнальные графы) моделей.

5. Составление сигнального графа схемы (по Мэзону или Коутсу) по принципу причина — следствие или непосредственным способом.

6. Упрощение сигнального графа до вида, определяемого возможностью не очень сложного применения формул общей передачи графа.

7. Выбор формулы общей передачи; для записи выражения схемных функций — если в графе много петель, рекомендуется применение формулы Коутса.

8. На графе ищутся и записываются передачи всех контуров, затем составляются комбинации из некасающихся контуров.

9. Определяются пути между вершинами, определяемыми искомой схемной функцией.

10. Записываются выражения схемных функций по выбранной формуле общей передачи графа.

11. Построение частотных или временных характеристик.

12. Вычисление чувствительностей.

13. Анализ схемы на устойчивость.

Глава 5. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

5.1. Определение метода переменных состояния

Метод переменных состояния представляет собой определенную совокупность приемов построения и реализации математических моделей электрических и электронных цепей. В качестве переменных состояния следует выбирать токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, но не во всех индуктивностях и не на всех емкостях, а только для независимых, определяющих общий порядок системы дифференциальных уравнений [26, 40].

Рассмотрим схему замещения цепи, состоящей из резистивных, индуктивных и емкостных элементов с постоянными индуктивностями и емкостями. Математическая модель такой цепи формируется в виде системы

$$L\frac{di_L}{dt} = U_L,$$

$$C\frac{dU_C}{dt} = i_C,$$

$$R \cdot i_R = U_R,$$

$$F(i_L, U_C, U_L, i_C, i_R, U_R, t) = 0. \qquad (5.1)$$

Здесь i_L, i_R, i_C — векторы, компонентами которых являются соответственно токи в индуктивностях, в резисторах и через емкости; U_L, U_R, U_C — векторы с компонентами напряжений на индуктивных, резистивных и емкостных элементах; L, C, R — диагональные матрицы, элементами которых являются значения индуктивностей, емкостей и сопротивлений; F — вектор, компоненты которого являются функциями указанных переменных. Зависимость F от времени t определяется внешним воздействием на цепь, то есть наличием задающих источников тока и напряжения в цепи и их изменением во времени.

Первые три уравнения (5.1) представляют собой компонентные соотношения на элементах цепи; последнее уравнение — следствие законов Кирхгофа. С другой стороны, первые два уравнения (5.1) представляют систему дифференциальных уравнений относительно переменных состояния, а два последних — систему алгебраических уравнений, связывающих переменные состояния с остальными переменными.

Возникает естественное желание преобразовать математическую модель так, чтобы получилась система только дифференциальных уравнений. Для этого надо выразить из системы алгебраических уравнений переменные U_L, i_C через переменные состояния i_L, U_C и подставить их в правые части дифференциальных уравнений из (5.1). Однако при этом могут возникнуть осложнения, вызванные неполнотой системы алгебраических уравнений. Если система алгебраических уравнений в (5.1) полная, то есть количество переменных U_L, i_C, U_R, i_R соответствует числу уравнений и система разрешима относительно указанных переменных, то преобразование модели к системе только дифференциальных уравнений возможно. При этом порядок системы дифференциальных уравнений будет равен числу реактивных элементов. Если же система алгебраических уравнений неполная (то есть не выполнены указанные выше условия полноты), то преобразование к системе только дифференциальных уравнений возможно, но при этом их число будет меньше числа реактивных элементов цепи.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих высказанные выше положения.

Пример 1. Математическая модель схемы, представленной на рис. 5.1, *а*, формируется в виде системы

$$L\frac{di_L}{dt} = U_L,\ C\frac{dU_C}{dt} = i_C,$$

$$Ri_R = U_R,\ U_R + U_C = U_{\text{вх}},$$

$$U_L = U_C,\ i_R = i_C + i_L.$$

Система алгебраических уравнений здесь полная и позволяет выразить переменные U_L, i_C через переменные состояния

$$U_L = U_C,\ i_C = -i_L + \frac{U_{вх} - U_C}{R}.$$

Математическая модель приводится к виду

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} U_C,\ \frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} U_C + \frac{U_{вх}}{RC}.$$

Число дифференциальных уравнений здесь совпадает с числом реактивных элементов.

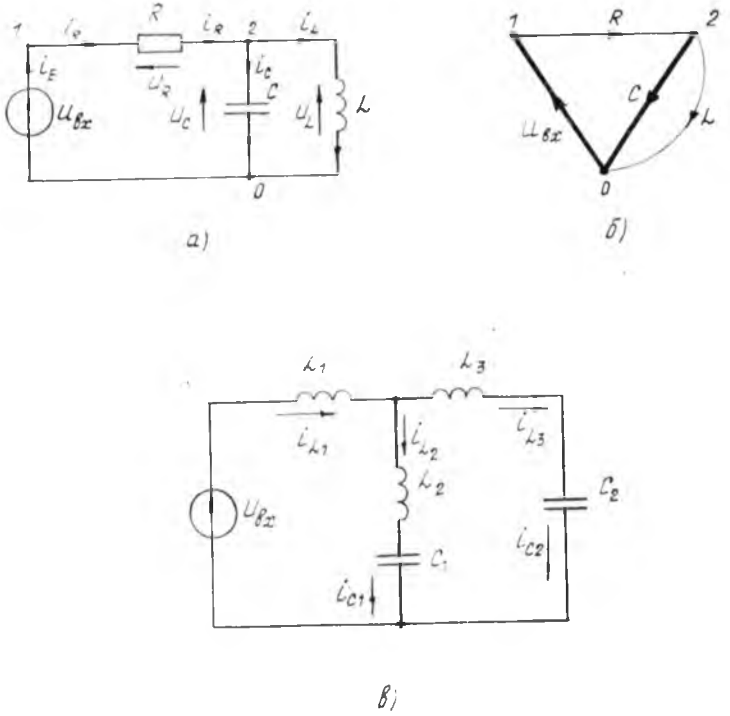


Рис. 5.1

Пример 2. Математическая модель схемы, изображенной на рис. 5.1, *в*, формируется в виде уравнений

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = U_{L1},\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = U_{L2},\ L_3 \frac{di_{L3}}{dt} = U_{L3},$$

$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = i_{C1},\ C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = i_{C2},$$

$$U_{L1} + U_{L2} = -U_{C1} + U_{вх},$$
$$U_{L2} - U_{L3} = U_{C1} - U_{C2},$$
$$i_{C2} = i_{L1} - i_{L2},$$
$$i_{L1} - i_{L2} - i_{L3} = 0.$$

Система алгебраических уравнений здесь неполная, так как число уравнений относительно трех переменных U_{L1}, U_{L2}, U_{L3} равно двум. С целью получения недостающего уравнения на основании первых трех компонентных уравнений получим

$$\frac{d}{dt}(i_{L1} - i_{L2} - i_{L3}) = \frac{U_{L1}}{L_1} - \frac{U_{L2}}{L_2} - \frac{U_{L3}}{L_3}.$$

На основании последнего алгебраического уравнения следует

$$\frac{U_{L1}}{L_1} - \frac{U_{L2}}{L_2} - \frac{U_{L3}}{L_3} = 0.$$

Вместе с первыми двумя алгебраическими уравнениями это уравнение позволяет найти U_{L_1}, U_{L_2}, U_{L_3}:

$$U_{L1} = \frac{1}{\Delta}\left[-\frac{1}{L_2}U_{C1} - \frac{1}{L_3}U_{C2} + \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)U_{вх}\right],$$
$$U_{L2} = -\frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3}\right)U_{C1} - \frac{1}{L_3}U_{C2} - \frac{1}{L_1}U_{вх}\right],$$
$$U_{L3} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{L_2}U_{C1} - \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)U_{C2} + \frac{1}{L_1}U_{вх}\right],$$
$$\Delta = 1/L_1 + 1/L_2 + 1/L_3.$$

В то же время выполнение последнего недостающего алгебраического уравнения означает, что первые три компонентных уравнения линейно зависимы. Следовательно, одно из них, например третье, можно отбросить. Окончательно математическая модель примет вид

$$L_1\frac{di_{L1}}{dt} = -\frac{1}{\Delta}\frac{1}{L_2}U_{C1} - \frac{1}{\Delta}\frac{1}{L_3}U_{C2} + \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)U_{вх},$$
$$L_2\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3}\right)U_{C1} + \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{L_3}U_{C2} + \frac{1}{L_1}\cdot\frac{1}{\Delta}U_{вх},$$
$$C_1\frac{dU_{C1}}{dt} = i_{L1}, \quad C_2\frac{dU_{C2}}{dt} = i_{L1} - i_{L2}.$$

Если в исходной математической модели цепи, полученной на основе ее схемы замещения, система алгебраических уравнений неполная, то такая схема называется *топологически вырожденной*. Топологически вырожденные схемы получаются в том случае, когда схема содержит либо чисто емкостные контуры, либо чисто индуктивные звезды. Именно последний случай имел место во втором примере.

В связи с разработкой и созданием систем автоматизированного проектирования (САПР) электронных схем возникает проблема автоматизации процесса формирования математической модели. Такая автоматизация возможна на основе теории графов, элементы которой излагаются в предыдущей главе.

Методика составления уравнений переменных состояния с использованием теории графов в общем случае состоит из двух этапов. На первом этапе составляется граф схемы; каждой ветви графа приписывается произвольное направление; строится так называемое *нормальное дерево графа;* составляется топологическая система уравнений по первому и второму законам Кирхгофа для выбранного дерева графа; из полученной системы уравнений выделяется подсистема

$$i_C = F_C(i, U),$$
$$U_L = F_L(i, U),$$

где i_C, U_L — те же самые векторы, что и в (5.1);
i, U — векторы остальных переменных.

В результате токи емкостей i_C и напряжения U_L на индуктивностях схемы выражаются через токи и напряжения остальных ветвей схемы. При этом используются контурные уравнения, образованные индуктивными главными ветвями (хордами графа), и уравнения сечений (узловых потенциалов), образованные емкостными ветвями дерева (ребрами графа). Объясняется это способом нормального дерева, в состав которого необходимо последовательно включать: все независимые источники напряжения E, затем емкостные ветви C, u-элементы и, если необходимо, в последнюю очередь, индуктивные ветви L. Если при этом в схеме обнаружатся контуры, состоящие только из u-элементов, или звезды, состоящие только из i-элементов, то необходимо преобразовать один из u-элементов в i-й элемент и исключить его из состава дерева или соответственно преобразовать один из i-элементов в u-элемент и включить затем его в состав дерева.

На втором этапе, используя оставшиеся топологические уравнения для токов емкостей и напряжений на индуктивностях и компонентные уравнения, окончательно формируют уравнения переменных состояния.

Пример 3. Составим уравнения переменных состояния для рассмотренной уже схемы, приведенной на рис. 5.1, *а*. Первый этап: составляем граф схемы и выбираем направление его ветвей (рис. 5.1, *б*). Выбираем нормальное дерево, включая в его состав ветвь с источником E и емкостную ветвь (показаны на рис. 5.1, *б* жирными линиями). Составляем по выбранному дереву топологическую систему уравнений

1) $i_E - i_R = 0$, 3) $-E + U_R + U_C = 0$,

2) $i_C + i_L - i_R = 0$, 4) $U_L - U_C = 0$.

Выделяем подсистему из 2 и 4 уравнений

$$i_C = i_R - i_L,$$
$$U_L = U_C.$$

Второй этап: используем компонентные уравнения

$$U_R = i_R R,\ i_C = C\frac{dU_C}{dt},\ U_L = L\frac{di_L}{dt}.$$

Подставляя их в выделенную подсистему, формируем так называемую *нормальную* форму обыкновенных дифференциальных уравнений схемы

$$C\frac{dU_C}{dt} = \frac{U_R}{R} - i_L,$$

$$L\frac{di_L}{dt} = U_C.$$

Исключим U_R, используя третье топологическое уравнение схемы

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C}\left(\frac{U_{\text{вх}} - U_C}{R} - i_L\right),$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}U_C.$$

Для больших электронных схем процедура составления уравнений переменных состояния может усложниться, если в схеме есть контуры из емкостей или звезды из индуктивностей, как, например, на рис. 5.1, *в*. Наиболее простой выход состоит во включении в емкостный контур небольшого сопротивления R_* или параллельно одной из индуктивностей звезды малой проводимости G_*. Погрешность расчета при малых R_* и G_* невелика.

В общем случае математическая модель в методе переменных состояния получается в виде системы дифференциальных и алгебраических уравнений

$$\frac{dX}{dt} = F_1(X,\ X_1,\ t),$$

$$F_2(X,\ X_1,\ t) = 0,$$

где X — вектор переменных состояния; X_1 — вектор остальных переменных схемы (токов и напряжений). Разрешая систему алгебраических уравнений относительно компонент вектора X_1 (либо вручную, либо с помощью специальной процедуры на ЭВМ), можно математическую модель представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = G(t,\ X). \tag{5.2}$$

Представление модели в виде (5.2) позволяет подходить к анализу ее с использованием результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории нелинейных колебаний.

Компоненты векторов X и G имеют вид

$$X = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)^{\mathrm{T}}, \quad G = (g_1,\ g_2,\ ...,\ g_n)^{\mathrm{T}}.$$

Причем каждая из компонент вектора G является функцией компонент вектора X и времени t.

5.2. Принципы реализации математической модели

В самом общем виде исследование какого-либо реального объекта, явления или системы с помощью математического моделирования предполагает формирование математической модели и ее реализацию. Принципы, лежащие в основе формирования математической модели применительно к электронным цепям, рассмотрены в первой главе. Их суть представлена схемой рис. 5.2, *а*. Переход от реального объекта к математической модели требует предварительной схематизации реального объекта. Математическая модель представляет собой в определенной степени аналог реального объекта. Поскольку реальная действительность бесконечно глубока и содержательна, в принципе невозможно построить точный аналог реального объекта. Но в этом и нет необходимости. Можно построить аналог достаточно близкий или, как еще говорят, достаточно адекватный реальному объекту. Степень адекватности будет существенным образом определяться выбором схемы замещения реального объекта. При переходе от реального объекта к схеме замещения используются элементы абстракции, то есть выделение

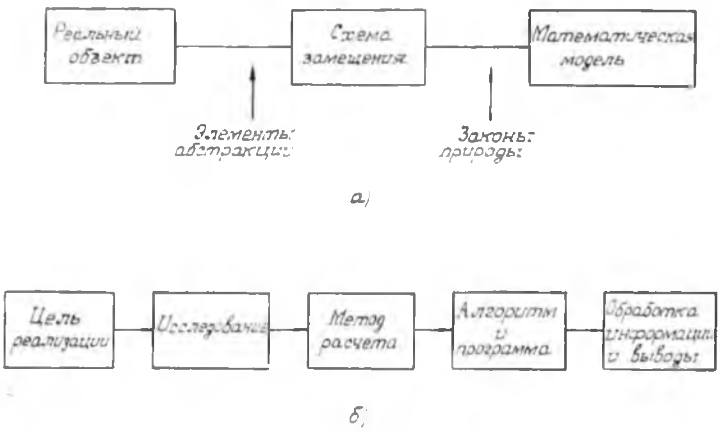


Рис. 5.2

существенных черт рассматриваемого явления. Это обстоятельство отражено на рис. 5.2, *а*. Математическая модель получается на основе схемы замещения с использованием законов природы. В электронике к таким законам относят законы Кирхгофа, закон Ома и компонентные соотношения на реактивных элементах. Математическая модель вида (5.2) относится к разряду так называемых эволюционных моделей [41], поскольку решения уравнений (5.2) отражают эволюцию анализируемой системы во времени.

Указанные принципы формирования математических моделей и сами эволюционные модели весьма характерны для самых различных областей познания. Например, формирование математической модели эволюции температуры в некотором материальном объекте приводит к уравнениям теплопроводности [27]; при этом используются закон Фурье о направленности тепловых процессов и закон сохранения энергии. Вывод уравнений гидродинамики основан на законах сохранения массы, импульса, энергии [42]. Динамика популяций в биологии [43] изучается на моделях вида (5.2), в основе формирования которых лежит эмпирический закон зависимости скорости изменения популяции от ее численности. Приведенные примеры, число которых можно во много раз увеличить, наводят на мысль о важности знакомства с развитием методологии познания в различных сферах человеческой деятельности.

После того как математическая модель сформирована и получены уравнения (5.2), естественно, встает вопрос о ее реализации. Под *реализацией модели* понимается совокупность действий, направленных на получение определенной информации относительно каких-либо сторон, свойств изучаемого объекта. Основные этапы реализации представлены на рис. 5.2, *б*. Прежде всего необходимо выбрать *цель реализации* (или несколько целей). Затем проводится исследование модели с точки зрения достижения выбранной цели. Полученная на основе предварительного исследования априорная информация о свойствах модели используется затем на дальнейших этапах реализации модели: выборе метода расчета и численной схемы, построения алгоритма и программы на ЭВМ. Причем в процессе отладки программы возможно неоднократное возвращение к предыдущим этапам реализации модели. Этапы исследования и выбора метода расчета являются, пожалуй, самыми сложными в системе реализации модели.

Анализ представляет собой многократную реализацию модели для получения исчерпывающей информации относительно рассматриваемого объекта.

Множество целей реализации можно разделить на подмножества по признаку состояния объекта или системы. Далее будут рассматриваться только те объекты, для которых характерны два состояния — установившееся и переходное. Под *установившимся* понимается такое состояние объекта, когда все величины, характеризующие его состояние, либо перестают меняться во времени, либо меняются периодически. Предполагается, что эволюция системы во времени из некоторого начального состояния приводит ее в установившееся состояние.

Следует отметить, что в настоящее время известны так называемые *стохастические динамические системы*, то есть такие, когда характеризующие ее величины меняются во времени случайным образом.

К целям реализации, связанным с установившимся состоянием, следует прежде всего отнести само установившееся состояние, которое, в принципе, может быть и не единственным. Зная установившееся решение, соответствующее установившемуся состоянию, можно получить все его характеристики.

Необходимым условием реализации установившегося решения является его устойчивость по отношению к возмущениям. При рассмотрении нелинейных систем (5.2) обычно исследуют устойчивость по отношению к малым возмущениям (локальную устойчивость). Проблема устойчивости представляет упрощенный вариант более сложной задачи нахождения границ областей притяжения установившихся решений в фазовом пространстве (пространстве компонент вектора X).

К целям реализации, связанным с переходным состоянием, можно отнести, например, время переходного процесса или время установления, максимальные напряжения на элементах цепи, максимальные токи в контурах и т. д. Некоторые характеристики переходного процесса можно получить при исследовании устойчивости.

В этой главе, в системе реализации математической модели основное внимание уделяется этапу исследования и выбора метода расчета с позиций реализации важнейших целей — *установившегося решения и его устойчивости*.

Развитие математического моделирования электронных устройств естественным образом привело к идее создания автоматизированных систем формирования и реализации математических моделей. С развитием вычислительной техники этот процесс идет весьма интенсивно (см., например, [1, 2, 28, 30, 31]).

В самом общем виде подобные системы представляют собой управляющую программу, выполненную в режиме диалога с ЭВМ, либо без такового. Управляющая программа функционально связана с двумя основными блоками системы — блоком *формирования математических моделей* и блоком их *реализации.* Входные данные содержат информацию о структуре устройства (совокупности определенным образом связанных между собой элементов) и параметрах элементов. Автоматизации формирования математических моделей предшествовала работа по формированию схем замещения различных элементов и созданию их библиотек.

На основе сформированной модели можно проводить анализ, то есть извлечение всей необходимой информации об устройстве с фиксированным набором параметров. Если же ставится задача подобрать параметры с целью удовлетворения некоторым требованиям, которые вытекают из технического задания, то, во-первых, необходимо эти требования формализовать в виде целевых функций и, во-вторых, задать область, в которой меняются параметры.

Задачу подбора параметров, доставляющих оптимальные значения целевым функциям, называют параметрическим синтезом.

Решение задач анализа и параметрического синтеза осуществляется с помощью блока реализации математических моделей. Последний представляет собой пакет подпрограмм, осуществляющих реализации различных целей.

В настоящее время создано уже большое количество систем (программ) автоматизированного анализа и параметрического синтеза. Ценность этих систем определяется прежде всего возможностями блока реализации математических моделей. Эти возможности связаны как с количеством подпрограмм реализации различных целей, так и с их универсализмом. По-видимому развитие этих систем будет идти по пути поиска универсальных методов и алгоритмов реализации математических моделей.

Системы автоматизированного анализа и параметрического синтеза представляют определенный этап на пути создания систем автоматизированного проектирования (САПР), принципы построения которых рассмотрены в [1]. Создание эффективных САПР, осуществляющих структурно-параметрический синтез устройства по данным технического задания, является длительным и трудным процессом. И успех здесь будет зависеть от многих составляющих, в том числе и от развития методов реализации математических моделей.

Рассмотрим теперь простой пример математической модели, позволяющий продемонстрировать основные этапы реализации. Для схемы RC-фильтра (рис. 5.3) математическая модель формируется в виде

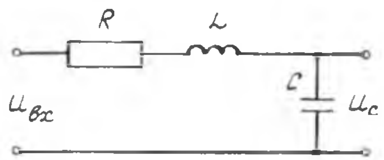


Рис. 5.3

$$RC\frac{dU}{dt} + U = U_{вх}. \qquad (5.3)$$

В качестве входного сигнала выберем синусоидальное напряжение

$$U_{вх} = U_m \sin\omega t, \quad \omega = 2\pi/T,$$

U_m — амплитудное значение входного напряжения;
T — период входного сигнала.

Предположим, что ставится задача нахождения установившегося стационарного решения и исследование его устойчивости. Общее решение (5.3) легко находится:

$$U = U_п + A\exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \qquad (5.4)$$

$$U_п = U_m \cos\varphi \sin(\omega t - \varphi), \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}},$$

A — произвольная постоянная.
Очевидно, что

$$\lim_{t\to\infty} U = U_п(t),$$

то есть $U_п(t)$ является установившимся периодическим решением уравнения (5.3). Здесь удалось легко найти установившееся решение, поскольку найдено общее аналитическое решение (5.4). В общем случае желательно иметь метод нахождения установившегося решения, имея в виду, что аналитическое решение найти невозможно. Из самого вида решения (5.4) ясно, что существуют две возможности получения $U_п(t)$.

1. Если решать задачу Коши для уравнения (5.3) с произвольными начальными условиями, то по истечении определенного времени второе слагаемое в (5.4) станет намного меньше первого и можно считать, что

предельное значение $U_{\text{п}}(t)$ найдено. Можно сделать оценку времени установления. Предположим, что за начальные условия для решения задачи Коши выбрано $U(0)=0$. В этом случае постоянная интегрирования $A=-U_{\text{п}}(0)$. За время установления можно, например, принять момент времени, когда амплитудное значение второго слагаемого в (5.4) составит менее одного процента от амплитудного значения $U_{\text{п}}(t)$,

то есть

$$\frac{|A|}{|U_{\text{п}}(0)|}e^{-\frac{t}{RC}}=e^{-\frac{t}{RC}}\leqslant 0{,}01.$$

Отсюда находим оценку для времени установления

$$t_{\text{уст}}\geqslant\frac{2RC}{0{,}434}.$$

Величину RC называют постоянной времени схемы. Ясно, что сходимость задачи Коши к установившемуся решению определяется величиной RC. Сходимость будет тем быстрее, чем меньше постоянная времени. В случае большой постоянной времени время установления $t_{\text{уст}}$ может стать неприемлемо большим с точки зрения затрат времени счета на ЭВМ.

2. Другой путь нахождения $U_{\text{п}}(t)$ заключается в поиске метода определения $U_{\text{п}}(0)$. Если $U_{\text{п}}(0)$ будет известно, то периодическое решение может быть найдено интегрированием исходного уравнения (5.3) на одном периоде. В случае линейного уравнения можно указать простой метод нахождения $U_{\text{п}}(0)$, основанный на возможности явно выписать решение

$$U_{\text{п}}(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\left\{U_{\text{п}}(0)+\frac{U_m}{RC}\int_0^t e^{\frac{t}{RC}}\sin\omega t\,dt\right\}.$$

Это решение можно еще представить в виде

$$U_{\text{п}}(t)=U_{\text{п}}(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}+U_0(t),$$

где

$$U_0(t)=\frac{U_m}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\int_0^t e^{\frac{t}{RC}}\sin\omega t\,dt.$$

Иными словами, $U_0(t)$ представляет собой решение задачи Коши для исходного уравнения с условием $U_0(0)=0$. Из условия периодичности

$$U_п(0)=U_п(T)$$

и вида решения находим

$$U_п(0) = U_п(0)\, e^{-\frac{T}{RC}} + U_0(T).$$

Отсюда

$$U_п(0) = \frac{U_0(T)}{1-\exp(-T/RC)}.$$

Для того чтобы определить $U_п(t)$, надо два раза на одном периоде решить задачу Коши — один раз с условием $U(0)=0$ и второй раз с условием $U(0)=U_п(0)$.

Указанный прием нахождения $U_п(t)$ носит название метода непосредственного нахождения периодического решения. Совершенно очевидно, что этот прием имеет преимущество по сравнению с методом установления. В дальнейшем он будет распространен на линейные системы общего вида. Что касается устойчивости $U_п(t)$, то она следует из вида решения (5.4): любое возмущение установившегося решения конкретизирует постоянную A и при $t\to\infty$ всегда возмущенное решение стремится к $U_п(t)$.

5.3. Выбор базовых величин и переход к безразмерным переменным

Прежде чем приступить к реализации математической модели, иногда с полученными уравнениями проделывают предварительные преобразования, связанные с переходом к нормированным (безразмерным) переменным. Переход к таким переменным мы рассмотрим на примере линейной системы с постоянной матрицей. Итак, пусть уравнения (5.2) имеют вид

$$\frac{dU}{dt} = DU + \Gamma(t), \tag{5.5}$$

$$U = (U_1,\ U_2, \ldots,\ U_n)^{т},\ \Gamma(t) = (\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots,\ \gamma_n)^{т},$$

$$D = \| d_{ij} \|,\ i,\ j=\overline{1,\ n}.$$

Элементы вектора U являются токами либо напряжениями; вектор $\Gamma(t)$ характеризует внешнее воздействие; n — порядок системы; d_{ij} — элементы матрицы D.

Все величины в системе (5.5) размерны. Введем нормированные переменные

$$y_i = u_i / u_{i*}, \ \bar{t} = t / t_*, \ i = \overline{1, n}.$$

Здесь U_{i*}, t_* — некоторые размерные величины, которые называют базовыми; y_i — нормированные (безразмерные) величины, $\bar{t}$ — безразмерное время. Компактно зависимость между нормированными и размерными величинами можно представить в виде

$$U = U_* Y,$$

где U_* — диагональная матрица с элементами u_{i*}; Y — вектор с компонентами y_i. Подставляя выражение U в исходную систему и опуская знак черты над $\bar{t}$, получим систему, где все переменные и параметры безразмерны:

$$\frac{dY}{dt} = \bar{A} Y + \bar{B}(t),$$

причем

$$\bar{A} = t_* U_*^{-1} D U_*, \ \bar{B}(t) = t_* U_*^{-1} \Gamma(t_* t).$$

Выбирая из каких-либо соображений конкретные значения базовых величин и подставляя их в выражения для $\bar{A}$ и $\bar{B}$, получим вполне определенные значения $\bar{A}$, $\bar{B}$, и, таким образом, система примет вид

$$\frac{dY}{dt} = AY + B(t).$$

Базовые величины можно выбирать из различных соображений.

1. Элементы матрицы D могут иметь большой разброс по порядку величин. Как показывает практика вычислений, чем больше разброс в порядках величин, тем более чувствительны численные методы решения к ошибкам округления. Поэтому естественно потребовать, чтобы элементы матрицы были близки к единице. Для этого надо решить систему

$$|\bar{a}_{ij}(U_{*1}, U_{*2}, \ldots, U_{*n}, t_*)| = 1 \ (i, j = \overline{1, n}).$$

Нетрудно показать, что число неизвестных здесь равно n, а число уравнений, в общем случае, n^2. Поэтому естественно искать приближенное решение этой системы по методу наименьших квадратов. Для этого составляется выражение

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} \{|\bar{a}_{i,j}| - 1\}^2$$

и отыскивается минимум этого выражения в пространстве переменных $u_{1*}, u_{2*}, \ldots, u_{n*}, t_*$. При больших n эту задачу можно решить только с помощью ЭВМ.

2. Можно задать базовые величины, руководствуясь не соображениями оптимальности, а соображениями удобства. Например, в качестве базового напряжения на конденсаторе можно выбрать номинальное напряжение. Соответствующая безразмерная функция будет отражать отклонение напряжения на конденсаторе от номинального значения.

3. Можно часть характерных величин задать, руководствуясь соображениями удобства, а часть находить из условий оптимальности.

Пример 4. На рис. 5.4 показана схема RLC-фильтра. Для напряжения на конденсаторе U_c и тока на индуктивности i_L получаем уравнения

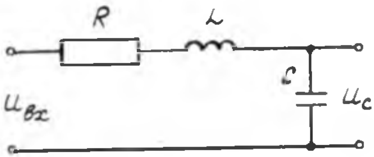


Рис. 5.4

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} U_C - \frac{U_{вх}}{L},$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L.$$

После введения нормированных переменных

$$y_1 = i_L / i_*, \quad y_2 = U_C / U_*, \quad \bar{t} = t / t_*.$$

Элементы матрицы $\bar{A}$ примут вид

$$\bar{a}_{11} = -\frac{R}{L} t_*, \quad \bar{a}_{12} = \frac{U_* t_*}{L i_*}, \quad \bar{a}_{21} = \frac{i_* t_*}{C U_*}.$$

Обозначим $U_* / i_* = x$, $t_* = y$ и составим сумму

$$S = \left(\frac{R}{L} y - 1\right)^2 + \left(\frac{xy}{L} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{Cx} - 1\right)^2.$$

Для нахождения x, y имеем систему

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{R}{L}\left(\frac{R}{L}y-1\right)+\frac{x}{L}\left(\frac{xy}{L}-1\right)+\frac{1}{Cx}\left(\frac{y}{Cx}-1\right)=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{y}{L}\left(\frac{xy}{L}-1\right)-\frac{y}{Cx^2}\left(\frac{y}{Cx}-1\right)=0.$$

Из первого уравнения находим

$$y=\frac{\dfrac{1}{Cx}+\dfrac{R}{L}+\dfrac{x}{L}}{\dfrac{R^2}{L^2}+\dfrac{x^2}{L^2}+\dfrac{1}{C^2x^2}}.$$

Подставляя это значение y во второе уравнение и преобразовывая его, находим

$$x^4-\frac{1}{RC}(CR^2-2L)x^3+\frac{L}{RC^2}(CR^2-2L)x-\frac{L}{C^2}=0.$$

Это уравнение имеет корни

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{L}{C}},\quad x_{3,4}=\frac{1}{2RC}\{CR^2-2L\pm$$
$$\pm\sqrt{(CR^2-2L)^2-4R^2C}\}.$$

Нас интересуют только вещественные положительные корни

1) $R^2<(4+2\sqrt{3})\dfrac{L}{C},\ x_1=\sqrt{\dfrac{L}{C}},$

2) $R^2=(4+2\sqrt{3})\dfrac{L}{C},\ x_1=\sqrt{\dfrac{L}{C}},\ x_2=$

$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

3) $R^2>(4+2\sqrt{3})\dfrac{L}{C},\ x_1=\sqrt{\dfrac{L}{C}},\ x_{2,3}=\dfrac{1}{2RC}\times$

$$\times\{CR^2-2L\pm\sqrt{(CR^2-2L)^2-4R^2CL}\}.$$

Во втором случае корни близки, так что он аналогичен в определенном смысле первому случаю. В третьем случае надо выбирать тот из корней, который доставляет минимум S. Следует заметить, что в выборе одной из величин i_* или U_* имеется произвол.

Предположим теперь, что t_* задано. Один элемент матрицы тем самым определен. Естественно два других выбрать из условий

$$\frac{1}{L} x t_* = \frac{R}{L} t_*, \quad \frac{1}{Cx} t_* = \frac{R}{L} t_*$$

или

$$\frac{1}{L}(x - R) = 0, \quad \frac{1}{Cx} - \frac{R}{L} = 0.$$

Составляем выражение для S:

$$S = \frac{1}{L^2}(x - R)^2 + \left(\frac{1}{Cx} - \frac{R}{L}\right)^2.$$

Приравнивая нулю производную, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{x - R}{L} - \frac{1}{Cx^2}\left(\frac{1}{Cx} - \frac{R}{L}\right) = 0.$$

Корни этого уравнения

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad x_{3,4} = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}.$$

В случае $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ имеется лишь один положительный корень

$$x_1 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Если же $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, имеются три корня:

$$x_1 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad x_{2,3} = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}},$$

из которых выбирается доставляющий минимум S.

5.4. Линейные системы с постоянной матрицей

Рассмотрение методов реализации математических моделей мы начнем с наиболее простого случая линейных систем с постоянной матрицей

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t). \tag{5.6}$$

На практике линейные системы встречаются редко в силу нелинейности характеристик элементов и может сложиться впечатление, что подробное рассмотрение линейных систем надумано. Но это далеко не так. Иногда имеет смысл рассматривать линейные модели в качестве первого приближения к реальному объекту. Кроме того, линейные системы являются удобным объектом для выяснения тонкостей реализации модели, введения и углубления понятий, широко используемых при математическом моделировании.

Относительно системы (5.6) сделаем некоторые предположения и введем некоторые понятия.

1. Определитель матрицы A отличен от нуля, т. е.

$$\det \| A \| \neq 0.$$

Если бы это условие не выполнялось, порядок исходной системы можно было бы понизить.

2. Элементы вектора $B(t)$ являются кусочно-непрерывными ограниченными функциями с периодом T, то есть

$$B\ (t+T) = B(T).$$

Известно [32], что если выполнено условие периодичности $B(t)$, то исходная система (5.6) обладает периодическим решением с тем же периодом, что и $B(t)$.

3. В качестве нормы вектора будет выбираться одна из норм [34]

$$\| X \|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |,$$

$$\| X \|_2 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |,$$

$$\| X \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2}, \tag{5.7}$$

а согласованные с ними нормы матрицы

$$\| A \|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right),$$

$$\| A \|_2 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right),$$

$$\| A \|_3 = \sqrt{\max_i \lambda^i_{A^* A}}. \tag{5.8}$$

Здесь A^* — матрица, сопряженная с A, λ_{A^*A} — собственное значение матрицы, равной произведению A^*A. Собственные значения матрицы A есть корни характеристического уравнения $\det||A-\lambda E|=0$. Заметим, что для симметрических и, в частности, для диагональных матриц

$$\| A \|_3 = \max_i | \lambda_A^i |.$$

Единичную матрицу в дальнейшем будем обозначать символом E. Если собственные значения матрицы A различны, то известно представление

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

где S — невырожденная матрица, столбцы которой представляют собственные векторы; Λ — диагональная матрица, элементы которой есть собственные числа матрицы A. Под матричной экспонентой $\exp(A)$ понимается степенной ряд из матриц A:

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots = E + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa!}A^\kappa.$$

Исходя из определения матричной экспоненты, можно доказать, что в случае различных собственных значений матрицы A имеет место равенство

$$e^A = e^{S\Lambda S^{-1}} = Se^\Lambda S^{-1}.$$

где e^Λ — диагональная матрица, элементы которой есть экспоненты от собственных чисел матрицы A.

5.4.1. Анализ устойчивости

Пусть $X_п(t)$ — установившееся периодическое решение системы (5.6). В дальнейшем мы его будем называть просто периодическим, или стационарным. Прежде чем переходить к анализу методов поиска $X_п$, удобно сначала рассмотреть вопросы устойчивости этого периодического решения. Предположим, что в некоторый момент времени $t=t_0$ находящаяся в стационарном состоянии система получает некоторое возмущение. Если в результате дальнейшей эволюции система будет стремиться вновь занять это стационарное состояние, то говорят, что имеет место устойчивость этого состояния. Для исследования устойчивости представим возмущенное решение в виде

$$X = X_n(t) + \varepsilon(t), \tag{5.9}$$

где $\varepsilon(t)$ — величина возмущения.
Полагая $t_0=0$ и подставляя (5.9) в (5.6), получим уравнение относительно $\varepsilon(t)$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A\varepsilon, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0,$$

ε_0 — вектор начального возмущения.
Таким образом, вектор возмущения удовлетворяет однородному уравнению. Решение однородного уравнения с постоянной матрицей известно:

$$\varepsilon = e^{At}\varepsilon_0.$$

То, что это решение для ε удовлетворяет уравнению для возмущений, можно проверить непосредственной подстановкой, используя определение матричной экспоненты.

Предположим сначала, что собственные числа λ_i матрицы различны. На основании известного представления матрицы A через диагональную матрицу из собственных элементов и свойств матричной экспоненты следует

$$\varepsilon = Se^{\Lambda t}S^{-1}\varepsilon_0.$$

Для того чтобы оценить поведение ε при $t\to\infty$, надо сделать оценку норм

$$\|\varepsilon\| = \|Se^{\Lambda t}S^{-1}\varepsilon_0\| \leqslant \|S\|\,\|S^{-1}\varepsilon_0\|\,\|e^{\Lambda t}\|.$$

В общем случае собственные числа, являющиеся корнями алгебраического уравнения, будут комплексными, т. е.

$$\lambda_\kappa = \lambda_{r\kappa} + j\lambda_{i\kappa}, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

$j = \sqrt{-1}$, $\lambda_{r\kappa}$, $\lambda_{i\kappa}$ — вещественная и мнимая части собственных чисел.
Для оценки нормы диагональной матрицы $e^{\Lambda t}$ используем третью норму из (5.8).

$$\|\varepsilon\| \leqslant \|S\|\cdot\|S^{-1}\varepsilon_0\|\cdot\max_\kappa|e^{\lambda_\kappa t}| = C(\max_\kappa e^{\lambda_{r\kappa} t}),$$

$$C - \|S\|\cdot\|S^{-1}\varepsilon_0\|.$$

Таким образом, поведение возмущения определяется расположением собственных чисел в комплексной плоскости. При этом могут представиться три возможности.

1. Все корни расположены в левой полуплоскости, как изображено на рис. 5.5. Поскольку комплексные корни симметричны относительно вещественной оси, здесь обозначены только корни с положительной мнимой частью, т. е. в верхней полуплоскости. В этом случае

$$\lim_{t\to\infty} \| \varepsilon(t) \| = 0.$$

Рис. 5.5

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = X_{п}(t)$$

и имеет место устойчивость.

2. Хотя бы одно из собственных чисел расположено в правой полуплоскости. В этом случае $\|\varepsilon(t)\|$ неограниченно возрастает с увеличением времени и стационарное решение $X_{п}(t)$ неустойчиво.

3. Корни расположены либо в левой полуплоскости, либо на мнимой оси. Это означает, что система обладает, кроме вынужденных колебаний, обусловленных внешним воздействием, собственными колебаниями с частотами, равными тем $\lambda_i/2\pi$, которые лежат на мнимой оси.

Таким образом доказано

Предложение 5.1. Для устойчивости стационарного решения $X_{п}(t)$ достаточно, чтобы все собственные числа матрицы A были расположены в левой части от мнимой оси комплексной плоскости или вещественные части корней должны быть отрицательны. Для устойчивых периодических решений вводятся такие понятия, как запас устойчивости и коэффициент жесткости.

Определение 1. Расстояние от ближайшего к мнимой оси собственного числа матрицы A называют запасом устойчивости

$$\beta = \min_{k} |\lambda_{rk}|.$$

Величина запаса устойчивости характеризует скорость сходимости возмущенного решения к $X_{п}(t)$.

Определение 2. Величину

$$K_1 = \frac{\max\limits_{k} |\lambda_k|}{\min\limits_{k} |\lambda_k|}$$

называют коэффициентом жесткости системы (5.6). Коэффициент жесткости характеризует разброс собственных чисел. Иногда коэффициент жесткости определяют иначе:

$$\kappa_2 = \frac{\max\limits_{\kappa} |\lambda_{r\kappa}|}{\min\limits_{\kappa} |\lambda_{r\kappa}|} .$$

Величины $|\lambda_{r\kappa}|$ называют еще постоянными времени анализируемой схемы. Коэффициент жесткости κ_2 характеризует разброс постоянных времени. Большой разброс постоянных времени свидетельствует о наличии в схеме быстро и медленно протекающих процессов. Численная реализация математических моделей для подобных схем вызывает большие трудности.

Замечание 1. В теории дифференциальных уравнений под устойчивыми понимаются такие стационарные решения, когда степень отклонения $\varepsilon(t)$ возмущенного решения от стационарного определяется величиной начального возмущения ε_0 и может быть сколь угодно мала при сколь угодно малых начальных возмущениях, хотя сходимости к стационарному решению может и не быть. В этом случае говорят об устойчивости по Ляпунову. Если же $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то имеет место асимптотическая устойчивость.

Замечание 2. Вывод об устойчивости в зависимости от расположения в комплексной плоскости собственных чисел не изменится, если некоторые из них или даже все будут кратны. Усложняется только доказательство [33].

Замечание 3. Представляет интерес выяснение физической сущности явления неустойчивости. В случае, если хотя бы одно собственное число будет расположено в правой полуплоскости, решение задачи Коши для системы (5.6) будет неограниченно нарастать при $t \to \infty$. Это значит, что в анализируемой схеме будут неограниченно нарастать контурные токи и напряжения на элементах, даже если не учитывать входного воздействия. Ясно, что такое возможно, если схема обладает возможностью неограниченной генерации энергии. Поскольку такая возможность исключена, явление неустойчивости следует каким-то образом объяснить. Чтобы разрешить это противоречие, естественно предположить, что все линейные модели, адекватным образом отражающие реальную схему, будут обладать и свойством устойчивости. Неустойчивость линейной модели является свидетельством невозможности построения адекватной модели в рамках линейной теории для анализируемой схемы.

Пример 5. Матрица A уравнений, составленных по схеме замещения RLC-фильтра, изображенного на рис. 5.4, имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления собственных чисел составляем уравнение

$$\det \| A - \lambda E \| = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Разрешая это уравнение, находим

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от знака подкоренного выражения оба корня либо вещественны, либо комплексны и расположены в левой полуплоскости. Следовательно, имеет место устойчивость. В случае вещественных корней запас устойчивости

$$\beta = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Для комплексных корней

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

В случае $R=0$ система обладает незатухающими собственными колебаниями с частотой

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Если $R \neq 0$ и корни комплексны, система также обладает собственными затухающими колебаниями с частотой

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

5.4.2. Метод непосредственного нахождения периодического решения

Этот метод уже применялся при нахождении периодического решения на примере RC-фильтра, когда математическая модель была сформирована в виде одного дифференциального уравнения первого порядка. Здесь аналогичный подход будет применен при анализе систем.

Суть метода заключается в поиске начальных условий $X_п(0)$ для периодического решения.

Решение это можно выписать в явном виде

$$X_п(t) = e^{At}\left\{X_п(0) + \int_0^t e^{-At}B(t)\,dt\right\}$$

или

$$X_п(t) = e^{At}X_п(0) + X_0(t), \qquad (5.10)$$

где

$$X_0(t) = e^{At}\int_0^t e^{-At}B(t)\,dt.$$

Используем условие периодичности:

$$X_п(T) = X_п(0).$$

Из (5.10) находим

$$X_п(0) = e^{AT}X_п(0) + X_0(T),$$

отсюда

$$(E - e^{AT})\,X_п(0) = X_0(T). \qquad (5.11)$$

Относительно компонент вектора получена линейная система алгебраических уравнений. Для того чтобы эта система была разрешима, необходимо отличие от нуля определителя системы. Ограничимся рассмотрением случая отличия собственных чисел матрицы A. Матрицу системы можно преобразовать

$$E - e^{AT} = E - Se^{\Lambda T}S^{-1} = S(E - e^{\Lambda t})S^{-1}.$$

Определитель системы примет вид

$$\Delta = \det\|E - e^{AT}\| = \det\|S(E - e^{\Lambda t})S^{-1}\| =$$
$$= \det\|S\|\det\|S^{-1}\|\det\|E - e^{\Lambda t}\|.$$

Матрица S невырождена, следовательно, обращение или необращение в нуль Δ будет определяться выражением

$$\det \| E - e^{\Lambda t} \| = (1 - e^{\lambda_1 t})(1 - e^{\lambda_2 t}) \ldots (1 - e^{\lambda_n t}) = \prod_{\kappa=1}^{n} (1 - e^{\lambda_\kappa t}).$$

Для устойчивых периодических решений $|e^{\lambda_\kappa t}| < 1$, следовательно, последнее выражение не обращается в нуль и $\Delta \neq 0$.

Таким образом, система уравнений относительно компонент вектора $X_п(0)$ разрешима. Для нахождения периодического решения, таким образом, необходимо реализовать следующие этапы:

1) решить на одном периоде задачу Коши с нулевыми начальными данными для системы (5.6); тем самым определяется вектор $X_0(T)$;

2) вычислить матричную экспоненту $e^{\Lambda T}$, тем самым определить матрицу системы (5.11);

3) разрешить систему (5.11) относительно компонент вектора $X_п(0)$;

4) решить систему (5.6) на величине одного периода с условием $X(0) = X_п(0)$ и тем самым найти периодическое решение.

Существуют и другие методы нахождения периодических решений, часть из которых будет рассмотрена при анализе нелинейных моделей.

5.5. Линейные системы с переменной матрицей

В этом параграфе рассмотрены математические модели, которые приводят к уравнениям вида

$$\frac{dX}{dt} = A(t) X + B(t). \qquad (5.12)$$

Относительно системы сделаем следующие предположения:

1) $\det \| A(t) \| \neq 0$;

2) предполагается, что элементы $A(t)$, $B(t)$ есть кусочно непрерывные периодические ограниченные функции, так что

$A(t + T_A) = A(t)$, $B(t + T_B) = B(t)$.

В дальнейшем будет предполагаться, что

$$T_1 = T_0 = T.$$

Более общий случай, когда отношение периодов является рациональным числом, то есть когда

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{p}{q},$$

p, q — целые числа, можно свести к предыдущему, если положить

$$T = qT_A = pT_B.$$

5.5.1. Анализ устойчивости

Пусть $X_0(t)$ — периодическое решение системы (5.12). Возмущенное решение представим в виде

$$X = X_0(t) + \varepsilon(t).$$

Относительно $\varepsilon(t)$ получаем однородное уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A(t)\,\varepsilon, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \tag{5.13}$$

ε_0 — вектор начального возмущения. Решение этого уравнения известно [33]:

$$\varepsilon = F(t)\cdot\varepsilon_0,$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица решений, получающаяся решением матричного уравнения

$$\frac{dF}{dt} = A(t)\,F, \quad F(0) = E. \tag{5.14}$$

Для того чтобы судить о наличии устойчивости или неустойчивости, надо исследовать свойства фундаментальной матрицы.

Обозначим

$$F(t+T) = \Phi(t).$$

Очевидно, $F(t+T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dF(t+T)}{dt} = A(t+T)\,F(t+T).$$

Учитывая периодичность матрицы $A(t)$, имеем

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\,\Phi, \quad \Phi(0) = F(T).$$

Решение этого уравнения

$$\Phi(t) = F(t)\cdot\Phi(0).$$

Отсюда получаем

$$F(t+T) = F(t)\cdot F(T).$$

Из этой зависимости последовательно находим

$$F(t+2T) = F((t+T)+T) = F(t+T)\cdot F(T) = F(t)[F(T)]^2,$$
$$F(t+mT) = F(t)[F(T)]^m.$$

Переменную t в области $0 \leqslant t \leqslant 1$ обозначим τ.
На основании полученного имеем

$$F(t) = F(\tau)[F(T)]^m,\ mT < t < (m+1)T,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Возвращаясь к решению относительно ε, находим

$$\varepsilon(t) = F(\tau)[F(T)]^m\varepsilon_0,\ mT < t < (m+1)T.$$

Матрицу $F(T)$ называют основной матрицей. Определитель фундаментальной матрицы отличен от нуля, поэтому матрица $F(T)$ невырождена. Обозначим ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n ее собственные числа. Предполагается, что они все различны. Собственные числа основной матрицы называют характеристическими числами системы (5.13) или (5.14). Поскольку среди собственных чисел основной матрицы нет кратных, возможно представление

$$F(T) = SRS^{-1},$$

где S — невырожденная матрица, а R — диагональная матрица, элементами которой являются характеристические числа. Используя представление основной матрицы, имеем

$$\varepsilon(t) = F(\tau)SR^mS^{-1}\varepsilon_0,\ mT < t < (m+1)T.$$

Выбирая в качестве норм третью норму из (5.7), (5.8), оценим норму возмущения

$$\|\varepsilon(t)\| = \|F(\tau)SR^mS^{-1}\varepsilon_0\| \leqslant \|F(\tau)\|\,\|S\|\,\|S^{-1}\|\,\|\varepsilon_0\|\,\|R^m\|,$$

где $\quad \|R^m\| = \{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\rho_i|\}^m.$

Нормы матрицы $F(\tau)$ ограничены, поэтому поведение $\varepsilon(t)$ при $t\to\infty$ будет определяться расположением характеристических чисел. Для того чтобы

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0,$$

достаточно выполнения условия

$$\max\|\rho_i\| < 1.$$

Тем самым доказано.

Предложение 5.2. Для того чтобы периодическое решение $Y_п(t)$ системы (5.12) было устойчиво, достаточно, чтобы все характеристические числа в комплексной плоскости были расположены внутри единичного круга, то есть

$$|\rho_к| < 1, \quad к = \overline{1, n}.$$

В комплексной ρ-плоскости достаточно изобразить характеристические числа лишь в верхней полуплоскости, поскольку имеет место симметрия относительно вещественной оси (рис. 5.6).

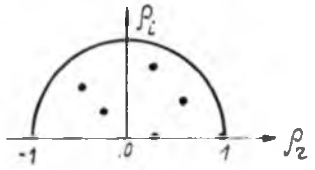


Рис. 5.6

Запас устойчивости определяется расстоянием от максимального по модулю характеристического числа до окружности единичного радиуса.

Замечание 1. В случае, когда $A(t) = A = \text{const}$, между собственными числами матрицы A и характеристическими числами системы

$$\frac{dz}{dt} = Az$$

имеет место зависимость. В самом деле, здесь

$$F(t) = e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}, \; F(T) = Se^{\Lambda T}S^{-1}$$

и

$$\rho_к = e^{\lambda_к T}, \; к = \overline{1, n}.$$

Если все $\lambda_к$ лежат в левой полуплоскости, то и все $\rho_к$ лежат внутри единичного круга.

Замечание 2. Доказана асимптотическая устойчивость.

Замечание 3. Имеет место то же замечание 3, что и в п. 5.4.1 о том, что неустойчивость линейной модели — показатель ее неадекватности.

Замечание 4. Асимптотическая устойчивость будет иметь место при $|\rho_к| < 1$, даже если среди $\rho_к$ будут кратные корни.

5.5.2. Метод нахождения периодического решения

Как и в случае систем с постоянной матрицей, непосредственное нахождение периодического решения основано на возможности явно выписать решение системы (5.12)

$$X_{\text{п}}(t)=F(t)\left\{X_{\text{п}}(0)+\int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau\right\}=$$

$$=F(t)X_{\text{п}}(0)+X_0(t).$$

Из условия периодичности

$$X_{\text{п}}(T)=X_{\text{п}}(0)$$

следует $X_{\text{п}}(0)=F(T)X_{\text{п}}(0)+X_0(T)$.
Относительно компонент вектора $X_{\text{п}}(0)$ получается система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$(E-F(T))X_{\text{п}}(0)=X_0(T).$$

Исследуем определитель этой системы

$$E-F(T)=S(E-R)\cdot S^{-1},$$

$$\det\|E-F(T)\|=\det\|S\|\cdot\det\|E-R\|\det\|S^{-1}\|=$$

$$=\det\|S\|\det\|S^{-1}\|\cdot\prod_{\kappa=1}^{n}(1-\rho_\kappa).$$

Для устойчивых периодических решений $1-\rho_\kappa\neq 0$, поэтому определитель системы отличен от нуля и система разрешима относительно $X_{\text{п}}(0)$. Точно так же, как и в случае систем с постоянной матрицей, можно выделить этапы определения периодического решения.

1. На одном периоде решается задача Коши с нулевыми начальными данными. Тем самым определяется $X_0(T)$.

2. Решая матричное уравнение (5.14), находим $F(T)$. Если $T/T_A=q$, то уравнение (5.14) решается на периоде T_A, при этом

$$F(T)=F(qT_A)=[F(T_A)]^q.$$

3. Решить систему относительно $X_{\text{п}}(0)$.

4. Решить задачу Коши на одном периоде с условием $X(0)=X_{\text{п}}(0)$ и тем самым определить периодическое решение $X_{\text{п}}(t)$.

Замечание. Если периоды T_A, T_B не совпадали, мы предполагали, что их отношение будет рациональным числом. Если отношение T_A/T_B будет иррациональным числом либо $p\gg 1$, $q\gg 1$, то необходимо вводить понятие почти-периода и почти-периодических решений.

5.6. Нелинейные системы

В этом параграфе будут рассмотрены вопросы реализации математических моделей вида

$$\frac{dX}{dt}=G(t,\ X). \qquad (5.15)$$

Относительно вектора $G(t,\ X)$ делаются самые общие предположения, обеспечивающие локальную разрешимость системы (5.15) и продолжаемость решения на всю область $0<t<\infty$. Компоненты вектора $G(t,\ X)$ являются нелинейными функциями относительно компонент вектора X.

5.6.1. Нелинейные системы с внешним периодическим воздействием

Системы такого вида явным образом зависят от времени в правой части (5.15) и, кроме того, выполнено условие периодичности

$$G(t+T,\ X)=G(t,\ X).$$

Период установившегося решения $X_{\text{п}}(t)$ может быть либо равен T, либо кратен T. Как обычно, предположим, что $X_{\text{п}}(t)$ известно, и исследуем его устойчивость.
Для этого возмущенное решение

$$X=X_{\text{п}}(t)+\varepsilon(t),\ \varepsilon(0)=\varepsilon_0$$

подставим в систему (5.15)

$$\frac{dX_{\text{п}}}{dt}+\frac{d\varepsilon}{dt}=G(t,\ X_{\text{п}}+\varepsilon),$$

которое можно представить и в таком виде:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=G(t,\ X_{\text{п}}+\varepsilon)-G(t,\ X_{\text{п}}). \qquad (5.16)$$

Относительно ε получено уравнение, по своей сложности не уступающее исходному. С целью упростить это уравнение обычно делают предположение о малости ε. Это позволяет сделать разложение в ряд Тейлора в окрестности периодического решения

$$G(t,\ X_{\text{п}}+\varepsilon)=G(t,\ X_{\text{п}})+\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{\text{п}}\varepsilon+\left(\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}\right)_{\text{п}}\varepsilon^2+\ldots$$

Слагаемые, начиная с третьего, в этом разложении обозначают $0(\varepsilon^2)$, то есть

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}\right)_{н} \varepsilon^2 + \ldots = 0(\varepsilon^2),$$

и называют малыми второго порядка или малыми более высокого порядка, чем первый. Нижний индекс «Н» означает, что выражение рассматривается при $X = X_{н}$. Подставляя полученное разложение в систему (5.16), получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{н} \varepsilon + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}\right)_{н} \varepsilon^2 + \ldots$$

Отбрасывая малые слагаемые, начиная со второго порядка, относительно ε получим линейное уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{н} \varepsilon. \tag{5.17}$$

Сам процесс перехода от системы (5.15) к системе (5.17) называют линеаризацией. В случае наличия устойчивости (или неустойчивости) на основании анализа уравнения (5.17) говорят, что имеет место устойчивость (или неустойчивость) по отношению к малым возмущениям. Иногда говорят, что имеет место локальная устойчивость (или неустойчивость). Сам метод исследования устойчивости с помощью системы (5.17) называют методом малых возмущений. Заметим, что $(\partial G/\partial X)_{н}$ является матрицей вида

$$\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{н} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{X = X_{н}}.$$

Если $X_{н}$ известно, то эту матрицу можно найти. Исследование устойчивости сводится к анализу характеристических чисел системы (5.17), точно так же, как это было в случае линейных систем с переменной матрицей.

Если имеет место локальная устойчивость, то это означает, что $X_{н}(t)$ имеет такую окрестность, что решение задачи (5.15) с любыми начальными данными из этой окрестности сходится к $X_п(t)$. Если же имеет место неустойчивость, из этого можно сделать вывод о наличии других установившихся решений. Для нелинейных систем такой вариант вполне возможен.

Следует подчеркнуть, что проблемы нахождения периодических решений и исследование их устойчивости для линейных и нелинейных систем имеют существенное различие. В случае линейных систем устойчивость периодического решения можно исследовать без знания самого периодического решения. Для нелинейных систем, чтобы исследовать локальную устойчивость, надо знать матрицу системы (5.15), а для ее вычисления надо знать $X_п(t)$. Таким образом, проблема поиска $X_п(t)$ и исследование устойчивости в случае нелинейных систем неразделимы.

5.6.2. Автономные системы

Очень важным классом нелинейных моделей являются так называемые автономные системы

$$\frac{dX}{dt} = G(X), \tag{5.18}$$

когда время явным образом не входит в правую часть системы (5.15).

Для анализа автономных систем вводят в рассмотрение фазовое пространство. Это пространство переменных x_1, x_2, ..., x_n. Мгновенное состояние системы определяется точкой в фазовом пространстве. Решению системы во временном интервале соответетствует траектория в фазовом пространстве. Периодическому решению системы (5.18) соответетствует замкнутая кривая в фазовом пространстве.

Фазовое пространство можно вводить не только при рассмотрении автономных систем. Например, рассмотрим RLC-фильтр, изображенный на рис. 5.4, когда $U_{вх}=E_m\cos\omega t$. Периодическое решение системы, описывающей состояние фильтра, имеет вид

$$i = \frac{E_m}{L}\frac{\omega}{\sqrt{\Delta}}\sin(\omega t+\gamma_1),\ U_C = -\frac{E_m}{LC}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\cos(\omega t+\gamma_1),$$

где

$$\Delta = \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + \omega^2\frac{R^2}{L^2},\ \sin\gamma_1 = \frac{\omega R/L}{\sqrt{\Delta}}.$$

л и обозначим

$$i_m = \frac{E_m}{L}\frac{\omega}{\sqrt{\Delta}}, \quad U_m = \frac{E_m}{LC}\frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$

то получим

$$\left(\frac{i}{i_m}\right)^2 + \left(\frac{U_C}{U_m}\right)^2 = 1.$$

В фазовой плоскости переменных $(i,\ U_C)$ эта кривая представляет собой эллипс с полуосями i_m, U_m (рис. 5.7).

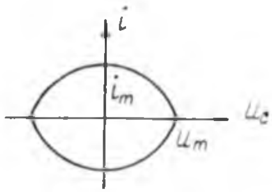


Рис. 5.7

Ранее было доказано, что это периодическое решение устойчиво. Таким образом, какие бы начальные данные мы ни взяли (какую бы ни выбрали точку в фазовом пространстве), решение задачи Коши будет сходиться к этому периодическому решению. В фазовом пространстве решению задачи Коши будет соответствовать траектория, начинающаяся в выбранной точке и приближающаяся к указанному на рис. 5.7 эллипсу при $t\to\infty$.

Наилучшим образом наглядность проявляется, когда фазовое пространство есть плоскость, т. е. когда порядок n системы (5.18) равен 2. В случае $n=3$ наблюдать траектории в фазовом пространстве значительно труднее. При $n\geqslant 4$, естественно, наглядность теряется.

Для автономных систем (5.18) характерными являются два типа установившихся решений.

1. Установившиеся решения типа неподвижной точки в фазовом пространстве. Поиск этих решений осуществляется решением системы

$$G(X)=0. \qquad (5.19)$$

Уравнения (5.19) представляют систему нелинейных алгебраических уравнений и могут иметь неединственное решение.

Физически каждому решению системы (5.19) отвечает такое состояние анализируемой системы, когда токи в контурах и напряжения на элементах не меняются во времени. Каждое решение системы (5.19) будем обозначать $X_{\text{нт}}$. Поскольку система (5.18) нелинейна, можно исследовать лишь локальную устойчивость решений $X_{\text{нт}}$, которые еще называют точками покоя.

Для исследования локальной устойчивости точек покоя получают систему линеаризованных уравнений относительно малых возмущений

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\left(\frac{dG}{dx}\right)_{\text{нт}}\cdot\varepsilon,\quad \varepsilon(0)=\varepsilon_0.$$

Матрица этой системы постоянна, поэтому локальная устойчивость определяется собственными числами этой матрицы, как это было при рассмотрении линейных систем с постоянной матрицей.

Таким образом, при анализе установившихся решений типа неподвижной точки проблемы нахождения установившихся решений и проблемы исследования их локальной устойчивости можно рассматривать раздельно.

2. Второй тип установившихся решений автономных систем — это замкнутые траектории в фазовом пространстве. Эти решения называют предельными циклами. Каждому предельному циклу в фазовом пространстве соответствует периодическое решение системы (5.18). Решения этого типа будем обозначать как обычно $X_{\text{п}}$. Поскольку колебания системы, соответствующие каждому $X_{\text{п}}(t)$, вызваны не внешним периодическим воздействием, а являются свойствами самой системы, подобные решения называют автоколебательными, а саму систему, обладающую этим свойством, — автоколебательной системой.

Пусть T — период установившегося решения $X_{\text{п}}(t)$. Для исследования локальной устойчивости используется система уравнений относительно возмущений

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\left(\frac{dG}{dX}\right)_{\text{п}}\varepsilon,\quad \varepsilon(0)=\varepsilon_0. \tag{5.20}$$

Характеристические числа этой системы определяются из алгебраического уравнения

$$\det\|F(T)-\rho E\|=0, \tag{5.21}$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица системы (5.20), причем $F(0)=E$.

Мы сейчас покажем, что одно из характеристических чисел ρ_k, $k=1, 2, \ldots, n$ всегда равно единице. С этой целью продифференцируем один раз по времени систему (5.18).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}\right)=\left(\frac{dG}{dX}\right)\frac{dX}{dt}$$

или

$$\frac{d}{dt}(G(X))=\left(\frac{dG}{dX}\right)G(X).$$

Решение этого уравнения известно:

$$G(X)=F(t)\,G(X(0)).$$

На периодических решениях эта зависимость тоже имеет место:

$$G(X_п(t))=F(t)\,G(X_п(0)).$$

При $t=T$ с учетом условия периодичности

$$G(X_п(T))=G(X_п(0))$$

получим

$$(F(T)-E)\,G(X_п(0))=0.$$

Поскольку $X_п(0)$ не является неподвижной точкой, то $G(X_п(0))\neq 0$, следовательно

$$\det\|F(T)-E\|=0.$$

Сравнивая это равенство с уравнением (5.21), можно сделать вывод о том, что $\rho=1$ есть один из корней этого уравнения. В [33] доказана теорема о том, что если все остальные характеристические числа лежат внутри единичного круга (рис. 5.8), решение $X_п(t)$ будет локально устойчиво по Ляпунову.

Так же, как и в случае нелинейных систем с внешним периодическим воздействием, исследование локальной устойчивости здесь неразрывно связано с проблемой поиска периодических решений.

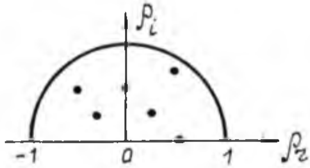


Рис. 5.8

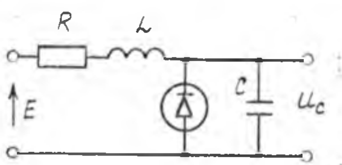


Рис. 5.9

Пример 6. В качестве примера автоколебательной системы рассмотрим математическую модель, получаемую на основе схемы замещения генератора на туннельном диоде. Для схемы замещения генератора на туннельном диоде (рис. 5.9) имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di_L}{dt} + Ri_L + U_C &= E, \\ C\frac{dU_C}{dt} &= i_L - i(U_C). \end{aligned}\right|$$

Здесь $i(U_C)$ — вольтамперная характеристика диода, изображенная сплошной кривой на рис. 5.10. Точки покоя системы находятся из уравнений

$$Ri_L + U_C = E,\ i_L = i(U_C).$$

Первое из этих уравнений есть уравнение прямой в фазовом пространстве (i_L, U_C) (пунктир на рис. 5.10). Пересечение этой прямой с кривой $i_L = i(U_C)$ и есть точки покоя рассматриваемой системы. Ясно, что наличие точек покоя и их количество определяются величинами E, R. Обозначим точки покоя (i_κ, U_κ), $\kappa = 1, 2, 3$. Возмущенные решения имеют вид

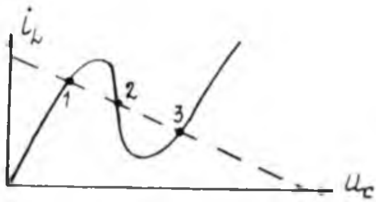


Рис. 5. 10

$$i_L = i_\kappa + \varepsilon_1,$$
$$U_C = U_\kappa + \varepsilon_2.$$

Относительно возмущений получаем линеаризованную систему

$$\left|\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= -\frac{R}{L}\varepsilon_1 - \frac{1}{L}\varepsilon_2, \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{1}{C}\varepsilon_1 - \alpha_\kappa\varepsilon_2, \quad \alpha_\kappa = \frac{di(U_\kappa)}{dU_C}\cdot\frac{1}{C}. \end{aligned}\right.$$

Для исследования устойчивости составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\frac{R}{L} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\alpha_\kappa - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\lambda^2 + \left(\frac{R}{L} + \alpha_\kappa\right)\lambda + \frac{1}{LC} + \alpha_\kappa\frac{R}{L} = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \alpha_{\kappa}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \alpha_{\kappa}\right)^2 - \frac{1}{LC} - \alpha_{\kappa}\frac{R}{L}}.$$

Для первой и третьей точек покоя

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_3 > 0.$$

Оба корня характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, поэтому имеет место локальная устойчивость.

Вторая точка покоя может быть локально неустойчива. В частности, неустойчивость будет иметь место, если

$$\frac{R}{L} + \alpha_{\kappa} < 0.$$

Известно, что при определенных условиях система будет иметь одно установившееся решение в виде предельного цикла.

5.6.3. Методы поиска периодических решений

Для нелинейных систем нахождение методов поиска периодических решений затруднено отсутствием априорной информации относительно периода установившегося решения $X_{п}(t)$. Для систем с внешним воздействием период $X_{п}(t)$ будет либо равен периоду внешнего воздействия, либо кратен ему. Здесь, во всяком случае, есть на что опереться при исследовании системы с целью выяснения периодичности $X_{п}(t)$. Гораздо сложнее обстоит дело с автономными системами. Получение априорной информации относительно периода $X_{п}(t)$ представляет иногда нелегкую задачу. Мы в дальнейшем будем предполагать, что период $X_{п}(t)$ нам известен.

Известно, что общее решение системы дифференциальных уравнений (5.2) будет n-параметрическим семейством кривых. Обычно общее решение записывают в виде

$$X(t) = X(t,\ C), \qquad (5.22)$$

где C — вектор, n компонент которого являются произвольными постоянными. Задание компонент вектора C конкретизирует решение.

Поскольку нас интересуют периодические решения, то есть решения, удовлетворяющие условию:

$$X(0) = X(T) = Q,$$

то из общего вида решения (5.22) и условия периодичности имеем

$$Q = X(T,\ Q). \qquad (5.23)$$

По существу, относительно компонент вектора Q получена система, в общем случае, нелинейных алгебраических уравнений. Методы поиска периодических решений так или иначе связаны с методами решения системы уравнений (5.23) относительно компонент вектора Q.

Мы рассмотрим некоторые из этих методов.

1. Метод непосредственного поиска периодических решений для линейных систем. Этот метод рассмотрен нами ранее при анализе линейных систем. Его идея основана на возможности явно выписать решение системы дифференциальных уравнений

$$X(t,\ Q) = F(t)\left\{Q + \int_0^t F^{-1}(t)\, B(t)\, dt\right\}.$$

Относительно компонент вектора Q получается линейная система алгебраических уравнений

$$Q = F(T)\left\{Q + \int_0^T F^{-1}(t)\, B(t)\, dt\right\},$$

разрешимость которой была исследована ранее.

2. Метод установления. Этот метод является самым простым и естественным. Его идея заключается в построении простой итерации для решения системы (5.23)

$$Q^{(S+1)} = X(T,\ Q^{(S)}),\ S = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Вектор $Q^{(0)}$ задается произвольным образом. Практически этот метод реализуется последовательным интегрированием на временных интервалах, величина которых равна T.

Достоинства этого метода заключаются в его простоте, универсальности, возможности одновременно с поиском периодического решения получать и переходный режим. Но этот метод обладает и крупным недостатком, делающим его зачастую практически непригодным. Это легко показать на примере линейных систем. Простая итерация здесь запишется в виде

$$Q^{(S+1)} = F(T)\, Q^{(S)} + X_0(T).$$

Во-первых, условием сходимости этого итерационного процесса является требование нахождения собственных чисел основной матрицы внутри единичного круга в комплексной плоскости [34]. Для устойчивых периодических решений это требование выполнено. Скорость сходимости итерационного процесса определяется запасом устойчивости. В случае малого запаса устойчивости затраты времени на ЭВМ могут стать неприемлемо большими. Подобные системы в [28] называют слабодемпфированными.

3. С целью ускорения сходимости итерационного процесса вместо простой итерации можно использовать более быстро сходящийся итерационный процесс. В частности, более быстрой сходимостью обладает м е т о д Н ь ю т о н а. Эту идею реализовали авторы [35]. Итерационный процесс при этом строится по формуле

$$Q^{(S+1)} = Q^{(S)} - \left\{E - \frac{dX(T,\ Q^{(S)})}{dQ}\right\}^{-1} \{Q^{(S)} - X(T,\ Q^{(S)})\}.$$

Переходный процесс, естественно, при этом уже не получается. Известны общие недостатки метода Ньютона. Это, во-первых, его быстрая сходимость при условии, если начальное приближение достаточно близко расположено к искомому решению, и, во-вторых, в сложности вычисления на каждом шаге матрицы

$$\left\{E - \frac{dX(T,\ Q^{(S)})}{dQ}\right\}^{-1}.$$

Эти недостатки часто перекрывают достоинства метода Ньютона, в том числе при использовании его для нахождения вектора Q.

4. Поиск вектора начальных условий можно свести к минимизации функции

$$W = |Q - X\ (T,\ Q)|$$

в пространстве размерности n (по числу компонент вектора Q). Если система (5.23) имеет решение, то в точке глобального минимума W обращается в нуль.

Метод минимизации W привлекает универсальностью подхода. Но при его практическом использовании необходимо преодолеть ряд трудностей. Во-первых, вычисление W в каждой точке n-мерного пространства требует решения на одном периоде системы (5.15). Поэтому с целью сокращения машинного времени следует искать оптимальный алгоритм счета этой системы на величине одного периода. Во-вторых, не исключено наличие локальных минимумов W. Поэтому возникает проблема выбора начальной точки для итерационного алгоритма минимизации W. Идею поиска периодического решения через минимизацию W можно перенести на случай автономных систем. Минимум W при этом ищется в пространстве размерности $n+1$ (n компонент вектора Q и период T).

В заключение отметим, что поиск универсальных алгоритмов установившихся и, в частности, периодических решений представляет центральную проблему в системе реализации математических моделей.

5.7. Линейные системы с δ-образными особенностями

В этом параграфе рассмотрены особенности, возникающие при математическом моделировании преобразовательных устройств с ключевыми элементами [23]. Характерной особенностью математических моделей подобных устройств является наличие в системах дифференциальных уравнений δ-особенностей. Представленная на рис. 5.11 схема замещения преобразователя

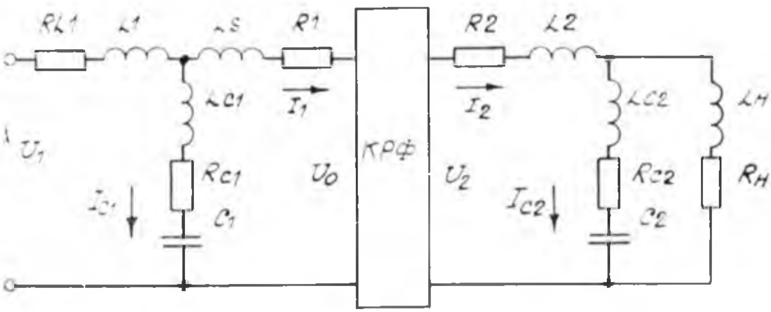


Рис. 5.11

отличается от рассмотренной в [23] тем, что во входном и выходном фильтрах выбрана усложненная модель конденсатора, учитывающая не только его емкостные свойства (C_1, C_2), но сопротивления (R_{C_1}, R_{C_2}), и индуктивности (L_{C_1}, L_{C_2}). Ключевая схема КРФ здесь представлена коммутационной функцией $\kappa(t)$, которая определяется алгоритмом работы преобразователя. В математическом смысле $\kappa(t)$ является кусочно-постоянной периодической с разрывами первого рода функцией. Можно ее представить, как показано в следующей главе, совокупностью периодических разрывных компонент типа «прямоугольный синус». Возможно и представление через функции Хевисайда

$$\kappa(t) = \kappa_0 + \sum_{p=1}^{m} (\kappa_p - \kappa_{p-1})\,\eta(t - t_p). \tag{5.24}$$

Здесь m — количество точек разрыва на одном периоде; κ_p — постоянные; t_p — координаты точек разрыва, которые соответствуют моментам коммутации ключей в блоке КРФ.

Уравнения состояния входного фильтра имеют вид

$$\begin{gathered}
L_1 \frac{d}{dt}(i_1 + i_{C1}) + L_{C1}\frac{di_{C1}}{dt} = u_1 - R_{L1}(i_1 + i_{C1}) - R_{C1} i_{C1} - u_{C1}, \\
L_s \frac{di_{C1}}{dt} - L_{C1}\frac{di_{C1}}{dt} = -u_0 - R_1 i_1 + u_{C1} + R_{C1} i_{C1}, \\
C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i_{C1},
\end{gathered} \tag{5.25}$$

а для выходного фильтра

$$\begin{gathered}
L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{C2}\frac{di_{C2}}{dt} = -R_2 i_2 - R_{C2} i_{C2} - u_{C2} + u_2, \\
L_H \frac{d}{dt}(i_2 - i_{C2}) - L_{C2}\frac{di_{C2}}{dt} = R_H(i_2 - i_{C2}) + R_{C2} i_{C2} + u_{C2}, \\
C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_{C2}.
\end{gathered} \tag{5.26}$$

Между токами и напряжениями входного и выходного фильтров имеет место связь

$$\begin{gathered}
i_1 = \kappa(t) \cdot i_2, \\
u_2 = \kappa(t) \cdot u_1.
\end{gathered} \tag{5.27}$$

В интервалах непрерывности $\kappa(t)$ систему из шести дифференциальных уравнений (5.25), (5.26) с учетом (5.27) можно привести к системе пяти уравнений относительно i_2, i_{C1}, i_{C2}, u_{C1}, u_{C2}.

Очевидно, токи и напряжения в этих интервалах будут непрерывны (предполагается, что u_1 — непрерывная функция). Однако в момент коммутации ключей токи, в силу первой зависимости (5.27), должны терпеть разрыв первого рода, а u_0 — разрыв в виде δ-функции. К последнему заключению можно прийти, например, из рассмотрения второго уравнения (5.25), содержащего и u_0, и производные от разрывных токов. Таким образом, возникает проблема сшивки решений в момент коммутации ключей. Обозначим

$$I(t) = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_{C_1} \\ i_{C_2} \end{bmatrix}, \quad I_+ = \lim_{t \to t_p + 0} I, \quad I_- = \lim_{t \to t_p - 0} I,$$

где t_p — любая из точек разрыва.

Проблему сшивки можно сформулировать как задачу нахождения матрицы пересчета W, связывающую токи на разрывах:

$$I_+ = WI_- .$$

Существуют различные подходы для определения матрицы W. В частности, один из них заключается в более детальном рассмотрении структуры ключевого блока КРФ. Мы здесь используем формальный подход, который отличается сравнительной простотой.

Предположим, что функция $\kappa(t)$ непрерывна слева. Это означает, что функции Хевисайда (в 5.24) определены следующим образом:

$$\eta(t - t_p) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_p, \\ 1, & t < t_p. \end{cases}$$

Ясно, что и токи в точках разрыва будут непрерывны слева. В этом случае δ-функция, определяемая как

$$\delta(t - t_p) = \frac{d\eta(t - t_p)}{dt},$$

обладает свойствами:

$$\int\limits_{t<t_p}^{t_p-0} \delta(t - t_p)\, dt = 0, \quad \int\limits_{t<t_p}^{t_p+0} \delta(t - t_p)\, dt = 1, \tag{5.28}$$

$$\int\limits_{t<t_p}^{t_p-0} \eta(t - t_p)\, \delta(t - t_p)\, dt = 0, \quad \int\limits_{t<t_p}^{t_p+0} (t - t_p)\, \delta(t - t_p)\, dt = 1.$$

Представим теперь первые два уравнения (5.25) и (5.26) в виде.

$$\frac{d}{dt}[L_1 i_1 + (L_1 + L_{C1}) i_{C1}] = u_1 - R_{L1}(i_1 + i_{C1}) - R_{C1} i_{C1} - u_{C1},$$

$$\frac{d}{dt}\left[L_s i_1 - L_{C_1} i_{C_1} + \int^t u_0 dt\right] = -R_1 i_1 + u_{C_1} + R_{C_1} i_{C_1},$$

$$\frac{d}{dt}\left[L_2 i_2 + L_{C_2} i_{C_2} - \int^t \kappa u_0 dt\right] = -R_2 i_2 - R_{C_2} i_{C_2} - u_{C_2},$$

$$\frac{d}{dt}[L_H i_2 - (L_H + L_{C_2}) i_{C_2}] = -R_H(i_2 - i_{C_2}) + R_{C_2} i_{C_2} + u_{C_2}.$$

Поскольку правые части этих равенств являются кусочно-непрерывными с разрывами I рода функциями, то выражения, входящие под знак производной, есть непрерывные функции. Если δ — образная часть u_0 представлена в виде

$$u_0 = \alpha\delta(t - t_p),$$

то на основании (5.28) имеем

$$L_1 i_{1+} L_{1+} + (L_1 + L_{C_1}) i_{C1+} = L_1 i_{1-} + (L_1 + L_{C_1}) i_{C1-},$$

$$L_s i_{1+} - L_{C1} i_{C_1+} + \alpha = L_s i_{1-} - L_{C1} i_{C1-},$$

$$L_2 i_{2+} + L_{C_2} i_{C2+} - \kappa_+ \alpha = L_2 i_{2-} + L_{C_2} i_{C2-},$$

$$L_H i_{2+} - (L_H + L_{C_2}) i_{C2+} = L_H i_{2-} - (L_H + L_{C_2}) i_{C2-}.$$

Исключая из этих равенств α и используя зависимость

$$i_{1+} = \kappa_+ i_{2+}, \quad i_{1-} = \kappa_- i_{2-},$$

находим

$$A_1 I_+ = A_2 I_-,$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} L_1\kappa_+ & L_1 + L_{C_1} & 0 \\ L_2 + \kappa_+^2 L_s & -\kappa_+ L_{C_1} & L_{C_2} \\ L_H & 0 & -(L_H + L_{C_2}) \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} L_1\kappa_- & L_1 + L_{C_1} & 0 \\ L_2 - \kappa_-\kappa_+ L_s & -\kappa_+ L_{C_1} & L_{C_1} \\ L_H & 0 & -(L_H + L_{C_1}) \end{vmatrix},$$

отсюда находим

$$I_+ = A_1^{-1} A_2 I_-.$$

Таким образом, матрица пересчета найдена:

$$W = A_1^{-1} A_2.$$

В общем виде математическую модель, сформированную выше, можно представить в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t) \tag{5.29}$$

с кусочно-непрерывными матрицей A и вектором B. В точках разрыва имеет место связь

$$X_{p+} = W_p X_{p-}, \quad p = \overline{1, m}. \tag{5.30}$$

Рассмотрим метод непосредственного нахождения установившегося решения для задачи (5.29), (5.30).

В каждом из интервалов непрерывности решения системы (5.29) имеют вид

$$X_p(t) = F_p(t)C_p + \overline{X}_p(t), \quad t_p < t < t_{p+1}, \quad p = \overline{0, m},$$
$$t_0 = 0, \quad t_{m+1} = T. \tag{5.31}$$

Здесь $F_p(t)$ — фундаментальная матрица; $\overline{X}_p(t)$ — решения задачи Коши в каждом из интервалов непрерывности для системы (5.29) с начальными условиями

$$F_p(t_p) = E, \quad \overline{X}_p(t_p) = 0.$$

Постоянные вектора C_p следует определить из условий (5.30) и условия периодичности.

Для построения алгоритма непосредственного нахождения установившегося периодического решения по аналогии с тем, как это делалось в случае линейных систем без особенностей, надо найти вектор начальных условий Q:

$$X_0(0) = X_m(T) = Q.$$

Для $p=0$ из (5.31) находим

$$X_0(t) = F_0(t)Q + \overline{X}_0(t). \tag{5.32}$$

Для остальных p, используя (5.30), находим

$$X_p(t) = F_p(t)W_p X_{p-1}(t_p) + \overline{X}_p(t), \quad p = \overline{1, m}, \tag{5.33}$$

где обозначено

$$X_{p-1}(t_p) = X_{p-}.$$

Для сокращения записи, когда удобно, будем использовать обозначения:

$$X_j(t_p) = X_{jp},\ \overline{X}_j(t_p) = \overline{X}_{jp},\ Z_p = F_p(t_{p+1}) W_p.$$

С учетом этих обозначений из (5.33) последовательно находим

$$X_{12} = Z_1 X_{01} + \overline{X}_{12}, \tag{5.34}$$

$$X_{23} = Z_2 X_{12} + \overline{X}_{23} = Z_2 Z_1 X_{01} + Z_2 \overline{X}_{12} + \overline{X}_{23},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_m(t_{m+1}) = Z_m Z_{m-1} \ldots Z_1 X_{01} + Z_m Z_{m-1} \ldots Z_2 \overline{X}_{12} + $$
$$+ \ldots + Z_m \overline{X}_{m-1}(t_m) + \overline{X}_m(t_{m+1}).$$

Учитывая, что $X_m(t_{m+1}) = Q$, а из (5.32)

$$X_{01} = F_{01} Q + \overline{X}_{01},\ F_{01} = F_0(t_1),$$

последнее соотношение из (5.34) преобразуем в

$$Q = Z_m Z_{m-1} \ldots Z_1 F_{01} Q + Z_m Z_{m-1} \ldots Z_1 \overline{X}_{01} +$$
$$+ \ldots + Z_m \overline{X}_{m-1}(t_m) + \overline{X}_m(t_{m+1}).$$

Компактно это равенство можно представить в виде

$$(E - \Phi) Q = \Psi, \tag{5.35}$$

где

$$\Phi = (\Pi_{i=0}^{m-1} Z_{m-i}) F_{01},$$

$$\Psi = \Sigma_{j=1}^{m-1} (\Pi_{i=0}^{m-j} Z_{m-j}) \overline{X}_{j-1}(t_j) + \overline{X}_m(t_{m+1}).$$

Разрешимость системы (5.35) относительно компонент вектора Q связана с устойчивостью периодического решения. Для исследования устойчивости сначала, как обычно, находится уравнение для возмущений

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A(t)\,\varepsilon,\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0.$$

Причем на разрывах используется та же самая матрица пересчета, что и в (5.30). Решение этой системы отыскивается точно так же, как и решение системы (5.29) с условием (5.30).

Нетрудно показать, что

$$\varepsilon(T) = \Phi \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon(2T) = \Phi \varepsilon(T) = \Phi^2 \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon(nT) = \Phi^n \varepsilon_0.$$

Достаточным условием устойчивости является условие нахождения собственных чисел (которые предполагаются различными) матрицы Φ внутри единичного круга с центром в начале координат. Если имеет место устойчивость, матрица системы (5.35) будет иметь отличный от нуля определитель и, следовательно, вектор Q может быть найден.

Последовательность действий при нахождении периодического решения следующая.

1. На каждом из интервалов непрерывности, начиная с первого, находим решения матричного уравнения относительно $F_p(t)$ и задачи Коши для $X_p(t)$ с тем, чтобы сформировать матрицу Φ и вектор Ψ.
2. Из системы (5.35) находим вектор Q.
3. С помощью известного вектора Q решаем задачу Коши для каждого из интервалов непрерывности, используя зависимости (5.30).

Глава 6. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИМПУЛЬСНЫХ (КЛЮЧЕВЫХ) СХЕМ

6.1. Общие положения

Метод переменных состояния является наиболее общим и с успехом может быть применен для исследования импульсных и нелинейных систем. Применение метода предполагает выработку определенной системы анализа, заключающейся в том, что на первом этапе производится расчет кривых мгновенных значений токов и напряжений в функции времени во всех цепях электронной схемы в переходном и установившемся режимах. Эти кривые рассчитываются путем решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих процессы в схеме в соответствии с принятой математической моделью. Мгновенные значения могут быть найдены в аналитическом виде для систем дифференциальных уравнений невысокого порядка (не выше второго, третьего) либо численно в виде мгновенных отсчетов в заданные последовательно друг за другом моменты времени. На втором этапе все остальные характеристики схемы находятся путем соответствующей обработки мгновенных значений переменных. Так, например, их средние и действующие значения находятся путем аналитического или численного интегрирования полученных кривых на заданном промежутке времени, амплитуды — путем выбора экстремальных значений переменных, гармонический состав — путем разложения в ряд Фурье, схемные функции, т. е. коэффициенты передачи по току или напряжению, — после расчета этих переменных в указанной последовательности и т. д. Эту систему анализа в литературе называют иногда методом мгновенных значений, желая подчеркнуть последовательность действий — от мгновенных значений к характеристикам и выводам.

Задача анализа ключевых схем методом переменных состояния существенно усложняется, так как срабатывание ключей меняет структуру системы. Каждая из структур описывается своей системой уравнений (дифференциальных, алгебраических), а весь процесс на интервале наблюдения, например на периоде, разбивается на участки постоянства структуры и описывается совокупностью систем уравнений. Главная трудность при анализе состоит в стыковке решений этих систем между собой и особенно велика эта трудность в динамических режимах. Здесь необходимо заметить, что, поскольку структура в ключевых схемах непрерывно изменяется, то переходные процессы никогда не затухают и понятие режима — динамический (переходный), статический (установившийся) — становится условным. Если в алгоритме замыкания и размыкания ключей можно выделить период T, то говорят о квазистатическом (как бы статическом, похожем на статический) режиме, подразумевая при этом, что мгновенные значения переменных точно повторяются в моменты времени, отличающиеся на период. В переходных режимах такого повторения нет, однако в ряде случаев удается подметить закономерность изменения мгновенных отсчетов через промежуток времени, равный T, и описать ее при помощи разностных уравнений (см. пример в § 6.4).

Ключевые схемы могут быть линейными и нелинейными. Для того чтобы ключевая схема была линейной, необходимо, чтобы все ее пассивные компоненты (индуктивности, емкости, сопротивления) были постоянными, не зависящими от токов и напряжений, а состояние ключевых элементов зависело только от времени. Как правило, к этому сводятся задачи, у которых моменты замыкания и размыкания ключевых элементов заранее заданы или могут быть определены до начала расчета процессов. При этом важно следить, чтобы не вступали в действие ограничения, которые могут импульсную схему из разряда линейных перевести в разряд нелинейных. Так, например, если в процессе работы схемы изменяется длительность замыкания ключевого элемента, то вполне естественным ограничением является невозможность обеспечения длительности замыкания, большей периода работы ключа. Если это ограничение вступает в силу, то нарушается пропорциональная зависимость длительности замыкания ключа и величины сигнала управления, а в целом импульсная система становится нелинейной. Подобного рода ограничения действуют практически всегда, кроме идеализированных систем с амплитудно-импульсной модуляцией, в том числе и в импульсных системах с обратной связью (замкнутых импульсных системах). Этот класс систем в данной книге не рассматривается, а интересующихся мы отсылаем к трудам по теории импульсных систем, в частности: Я. З. Цыпкин, Ю. С. Попков. Теория нелинейных импульсных систем.— М.: Наука, 1973.— 416 с.

В другом варианте импульсная схема становится нелинейной, если моменты замыкания или размыкания ключей не могут быть заранее определены и зависят от переменной процесса, например от протекающего по ключу тока (схемы с диодами, тиристорами). Расчет этих моментов, установление их связи с параметрами схемы являются одной из важных задач анализа систем такого класса (см. § 6.4).

Приведенные здесь рассуждения ориентированы на то, чтобы уберечь читателей от широко распространенной ошибки, когда нелинейность импульсной системе приписывают из-за нелинейности вольтамперной характеристики (ВАХ) ключевого элемента, которая для идеального ключа приведена на рис. 6.1. Еще раз подчеркиваем, что не вид ВАХ, а закономерность перехода рабочей точки с участка на участок определяют свойства системы.

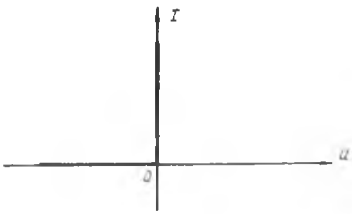


Рис. 6.1

6.2. Определение разрывных функций и их свойства

При выборе метода анализа ключевых схем естественным выглядит желание использовать математический аппарат разрывных функций [21, 22, 23], так как они наилучшим образом соответствуют характеру процессов, протекающих в этих схемах. Априорно (и это подтвердилось при разработке авторами этой книги метода коммутационных разрывных функций — КРФ, изложенного в § 6.3) можно ожидать, что такое соответствие позволит упростить описание и анализ электронных цепей этого класса. Однако применение разрывных функций на всех этапах анализа, вплоть до получения конечного результата, наталкивается на определенные трудности, прежде всего психологического плана, так как требуется некоторая перестройка мышления при осмысливании результатов в образах разрывных функций. Поэтому изложению существа метода КРФ мы предваряем изучение свойств разрывных функций.

Под *разрывными* понимают функции, для которых в *определенных точках* x_0 *пределы справа и слева не равны друг другу*, т. е. имеют в виду функции с разрывами первого рода. Наиболее распространенными среди них являются [21]:

1) модуль-функция (рис. 6.2, *а*)

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x > 0, \\ -x \text{ при } x < 0; \end{cases}$$

2) функция «антье» (entier) — функция, равная для всех вещественных x наибольшему целому числу, не превосходящему X (рис. 6.2, *б*): $y = E_1(x)$.

Такая функция изменяется на единицу при соответствующем изменении x. Различают также и другие варианты функции «антье»:

$y = E_1\left(\dfrac{x}{a}\right)$ — функция „антье“, изменяющаяся на единицу при изменении x на величину a (рис. 6.2, *в*);

$y = E_a(x)$ — функция «антье», изменяющаяся на a при изменении x на a (рис. 6.2, *г*).

Существует соотношение

$$y = E\alpha(x) = aE_1\left(\frac{x}{a}\right);$$

3) «дробная» функция $y = \Theta_1(x) = x - E_1(x)$ — функция, равная x везде, кроме $x = n$, где $n = 1, 2, 3...$ — целое число (рис. 6.2, *д*). Такая «дробная» функция характеризуется единичным периодом.

Можно также рассматривать и «дробную» функцию $\Theta_a(x)$, период которой равен a (рис. 6.2, *е*): $y - \Theta_a(x) - = x - E_a(x)$.

Указанные функции могут быть смещены относительно нуля на величину x_0 (рис. 6.2, *ж*, *з*, *и*). В этом случае речь идет о смещенных разрывных функциях:

$$y = |x - x_0|,$$

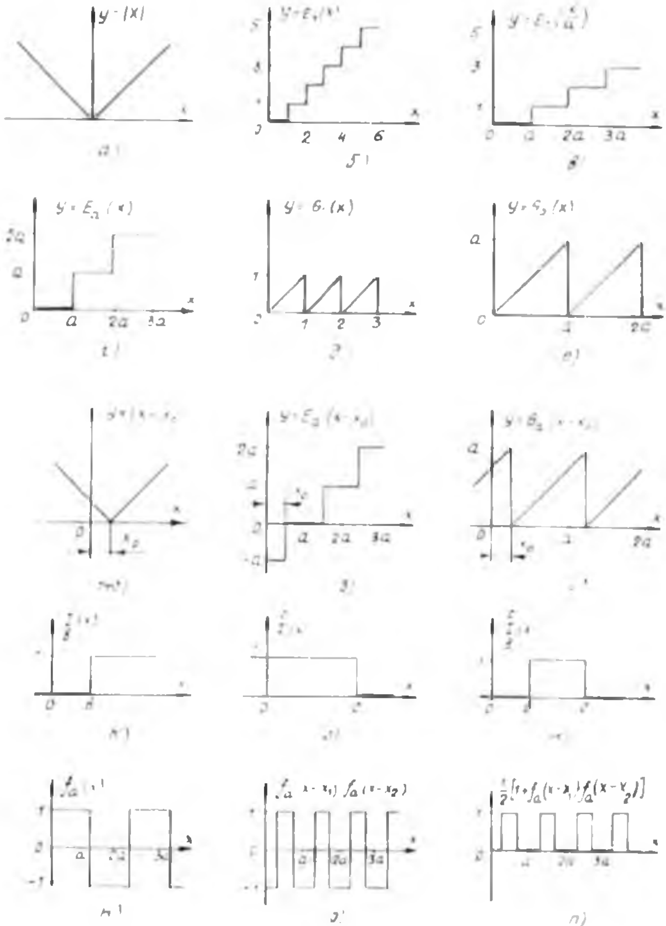


Рис. 6.2

$$y = E_a(x - x_0),$$

$$y = \Theta_a(x - x_0) = (x - x_0) - E_a(x - x_0).$$

Модуль-функция и функция «антье» позволяют аналитически записать функции-прерыватели:

$\underset{b}{I}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x - b|}{x - b}\right)$ — левый односторонний прерыватель (рис. 6.2, *к*); $\overset{c}{I}(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x - c|}{x - c}\right)$ — правый односторонний прерыватель (рис. 6.2 *л*); $\overset{c}{\underset{b}{I}}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x - b|}{x - b} - \frac{|x - c|}{x - c}\right)$ — двусторонний прерыватель (рис. 6.2, *м* и прямоугольный «синус» с периодом $2a$ (рис. 6.2, *н*):

$$f_a(x) = (-1)^{E_1\left(\frac{x}{a}\right)} = \overset{x}{\underset{0}{I}}(x) + 2\overset{x}{\underset{2a}{I}}(x) - \ldots \qquad (6.1)$$

Указанные функции могут аппроксимировать дискретное изменение сопротивления ветви с ключом либо представлять коэффициент передачи ветви по току или напряжению. Во всех случаях достаточно, чтобы в аналитическом описании было обеспечено дискретное изменение значения описывающей функции по заданному закону между нулем и единицей. В дальнейшем нас интересуют периодические функции, в связи с чем для их аналитического описания выбран прямоугольный синус. Если состояние ключа меняется через полпериода и изменяется фаза его работы x_0, то такая функция может быть определена выражением

$$\text{КРФ} = \frac{1}{2}[1 + f_a(x - x_0)]. \qquad (6.2)$$

Если изменяется также взаимная длительность «нуля» и «единицы», то выражение для КРФ будет иметь вид

$$\text{КРФ} = \frac{1}{2}[1 + f_a(x - x_1) \cdot f_a(x - x_2)], \qquad (6.3)$$

где x_1 и x_2 — абсолютное значение аргумента сдвига прямоугольных синусов.

В справедливости (6.3) легко убедиться непосредственно по рис. 6.2, о и п. На рис. 6.2, о представлено произведение $\vec{f}_a(x-x_1)\times\vec{f}_a(x-x_2)$, а на рис. 6.2, п уже сформирована КРФ соответствующим смещением и масштабированием $\left(\text{умножением на } \frac{1}{2}\right)$ этого произведения.

Значения разрывной функции слева и справа от точки разрыва не равны между собой, поэтому для их нахождения необходимо условиться, в каком месте относительно точки разрыва определяется величина функции. Предлагается всегда находить значение функции в точке разрыва при подходе к нему справа. Это условие обычно помечается стрелкой над функцией, показывающей направление подхода к точке разрыва, например: $\vec{E}_1(x)$; $\vec{f}_a(x)$ и т. д. В дальнейшем эти стрелки опускаются, однако всегда необходимо помнить о принятом условии. Поскольку при использовании КРФ мы имеем дело только с функциями времени, произвольный аргумент x заменен на t. С разрывными функциями можно производить все действия, как и с обычными функциями, т. е. сложение, вычитание, умножение, деление и т. д., а также операции дифференцирования и интегрирования. Однако при этом разрывной характер функции должен быть учтен, поскольку он вносит некоторые особенности в выполнение операций математического анализа.

Производные от простейших разрывных функций выражаются через δ-функцию. Так, например, производная от функции «антье» может быть определена по выражению

$$\frac{dE_1(t)}{dt}=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-n). \tag{6.4}$$

По (6.4) можно записать и производную для дробной функции с периодом, равным единице:

$$\frac{d\vartheta_1(t)}{dt}=1-\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-n). \tag{6.5}$$

На основе (6.4) и (6.5) могут быть записаны производные и для функций с периодом a и $2a$ (для прямоугольного «синуса»):

$$\frac{dE_a(t)}{dt} = a\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-na), \qquad (6.6)$$

$$\frac{d\vartheta_a(t)}{dt} = 1 - a\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-na), \qquad (6.7)$$

$$\frac{df_a(t)}{dt} = 2f_a(t)\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-na). \qquad (6.8)$$

Формулы (6.4)—(6.8) действуют на неограниченном интервале $(-\infty \div +\infty)$. В случае же ограниченного интервала, например $a \div t$, они не верны, так как существует несколько значений дифференциала, который должен пониматься в обобщенном смысле. Выбор конкретного значения необходимо строго согласовывать с операцией интегрирования. Рассмотрим вопрос нахождения первообразных по отношению к подынтегральным функциям, разрывной характер которых обусловлен вхождением в выражения для них элементарных разрывных функций. Предполагается выполнение условия интегрируемости в смысле Римана, а именно, ограниченность на ограниченном замкнутом интервале и непрерывность почти всюду (последнее требует, чтобы количество разрывов было конечным или счетным на заданном интервале).

Пусть $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция на интервале [а, б]. Тогда говорят, что функция $\varphi(t)$ имеет в интервале [а, б] неопределенный интеграл $\int\varphi(t)dt$, если существует такая функция $F(t)$, что $F'(t)=\varphi(t)$ на [а, б]. $F(t)$ определена на [а, б] с точностью до произвольной аддитивной постоянной и любая такая функция $F(t)$ называется первообразной функции $\varphi(t)$ на интервале [а, б]. Определение первообразной приведено, чтобы подчеркнуть необходимое присутствие в формулировке величины интервала интегрирования [а, б], что играет важную роль при непосредственном нахождении первообразных кусочно-непрерывных функций (тогда как для непрерывных функций интервал явно не присутствует). Для кусочно-непрерывной функции первообразная имеет вид

$$F(t) = \int_a^t \varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (6.9)$$

т. е. для определения $F(t)$ необходимо взять интеграл с переменным верхним пределом.

Существуют различные приемы нахождения первообразной для кусочно-непрерывных функций: использование периодичности интервалов непрерывности, разложение подынтегральной функции в ряд и т. д., но эффективностью выделяется способ интегрирования по частям. Однако для разрывных функций этот метод имеет ряд особенностей, игнорирование которых приводит к ошибочным результатам. Рассмотрим, к примеру, формулу интегрирования по частям для интеграла

$$F(t) = \int_a^t \varphi(\tau)\,d\tau = \tau\varphi(\tau)\Big|_a^t - \int_a^t \tau\,d\varphi(\tau) \qquad (6.10)$$

Важно отметить, что интеграл в правой части

$$\int_a^t \tau\,d\varphi(\tau) \qquad (6.11)$$

нужно рассматривать в смысле Стилтьеса, но для непрерывной функции $\varphi(\tau)$ после нахождения дифференциала

$$d\varphi(\tau) = \varphi'(\tau)\,d\tau$$

интеграл переходит в обычный интеграл (в смысле Римана). Иная картина для разрывных функций под знаком дифференциала, ибо здесь производной в классическом смысле в точках разрыва не существует (только односторонние), и производная понимается в обобщенном смысле.

В случае, когда $\varphi(\tau)d\tau$ представляется в виде $U(\tau)dV(\tau)$ и функции $U(\tau)$ и $V(\tau)$ разрывны в одних и тех же точках, интеграл в правой части выражения

$$\int_a^t U(\tau)\,dV(\tau) = U(\tau)\,V(\tau)\Big|_a^t + \int_a^t V(\tau)\,dU(\tau) \qquad (6.12)$$

в смысле Стилтьеса не существует ввиду неоднозначности значений составляющих интегральной суммы в окрестностях точек разрыва. Однако если вспомнить оговоренное выше условие относительно точек разрыва, а $dU(\tau)$ понимать в обобщенном смысле, то интеграл в правой части (6.12) может быть вычислен с учетом свойств δ-функции, описанных ранее (см. гл. 2, а также [19]).

Одним из самых важных моментов при использовании формулы интегрирования по частям является этап нахождения обобщенного дифференциала. Здесь еще раз необходимо напомнить требование задания однозначности кусочно-непрерывной функции в точках разрыва. Если интеграл в смысле Римана существует, то конкретное задание значений функции (а также введение конечного числа дополнительных ограниченных разрывов) несущественно в конечном итоге для первообразной, но играет основную роль в составлении обобщенного дифференциала. Необходимое условие здесь — согласование вида функции и ее дифференциала на интервале интегрирования, чтобы формула (6.12) была корректна. Так, произвольно изменив значение исходной функции, допустим, в нижнем пределе, мы должны этот факт отразить как в первом слагаемом правой части формулы (6.12), так и в дифференциале под знаком интеграла. Основные ошибки при нахождении первообразной в результате нарушения этого требования как раз и связаны с неправильным нахождением обобщенного дифференциала. При этом надо иметь в виду, что правила классического анализа нахождения дифференциалов (особенно для сложных функций) неверны для кусочно-непрерывных функций. Так, если

$$\varphi(t) = e^{\Theta_a(t)},$$

где $\Theta_a(t)$ — дробная функция,
то, согласно правилу для непрерывных функций, получим

$$d\varphi(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{\theta_a(t)}\right]dt = \frac{d}{d\theta_a(t)}\left[e^{\theta_a(t)}\right]d\theta_a(t) = e^{\theta_a(t)}d\theta_a(t),$$

что неверно в силу нарушения непрерывности $\theta_a(t)$ в сомножителе $\dfrac{d\left[e^{\theta_a(t)}\right]}{d\theta_a(t)}$.

Главная неприятность в нахождении дифференциалов — это конструктивность, когда к сложной функции приходится относиться как к единому объекту. Дифференциал формируется, как правило, из нескольких слагаемых. Первое слагаемое определяется обычным дифференциалом на интервале непрерывности с учетом возможной периодичности функции. Точки разрыва определяют второе слагаемое, которое содержит δ-функцию с коэффициентом, несущим информацию о величине скачка сложной функции как единого объекта в точках разрыва. Необходимо иметь в виду, что при последующем интегрировании этот скачок должен «погасить» разрывность интеграла от первого слагаемого. К этим слагаемым добавляются члены, отражающие поведение подынтегральной функции в граничных точках интервала интегрирования. Отсюда вытекает, что и проверка условия

$$F'(t)=\varphi(t), \tag{6.13}$$

где $F'(t)$ — первообразная, в обычном смысле не выполнима, т. е. дает, как правило, неверный результат, и производная тоже должна находиться конструктивным путем.

Рассмотрим интеграл

$$F(t)=\int\limits_0^t f_a(\tau)\,d\tau, \tag{6.14}$$

где $f_a(\tau)$ — функция прямоугольного синуса с полупериодом. На интервале $[0;\ t]$ определим вид функции $f_a(\tau)$ так, чтобы на интервале $[-\infty;\ a]$ она равнялась 1, а в точках разрыва, как ранее принято, $f_a(na)=$ $=f_a(na+0)$, т. е. значению функции при подходе к точке разрыва справа. В точке $t=0$ разрыва нет и $f_a(0)=$ $=1$. Тогда

$$df_a(\tau)=2f_a(\tau)\,\delta(\tau-na)-2\delta(\tau)$$

или

$$df_a(\tau)=2f_a(\tau)\,\delta(\tau-na)-2f_a(\tau)\,\delta(\tau), \tag{6.15}$$

где второе слагаемое в (5.15) компенсирует лишний скачок в точке $\tau=0$, задаваемый первым слагаемым. Тогда

$$\int\limits_0^t f_a(\tau)\,d\tau=\tau f_a(\tau)\Big|_0^t-\int\limits_0^t \tau\cdot 2f_a(\tau)\,[\delta(\tau-na)-\delta(\tau)]\,d\tau=$$

$$=tf_a(t)-\int\limits_0^t 2\tau f_a(\tau)\,\delta(\tau-na)\,d\tau+\int\limits_0^t 2\tau f_a(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau=$$

$$=tf_a(t)-\sum_{n=0}^{E_a\left(\frac{t}{a}\right)} 2naf(na)+0=f_a(t)\,[t-E_{2a}(t+a)]=$$

$$= f_a(t)\,[\theta_{2a}(t+a) - a]. \qquad (6.16)$$

Если принять, что $f_a(\tau) = \dot{f}_a(\tau)$, то легко убедиться, что результат интегрирования будет тот же.

Пусть $f_a(\tau)$ задана так, что на интервале $[-\infty, 0]$ она всюду равна нулю. Тогда на интервале $[0; t]$ обобщенный дифференциал выглядит следующим образом (отсутствует коэффициент 2 у второго компенсирующего слагаемого):

$$df_a(\tau) = 2f_a(\tau)\,\delta(\tau - na) - f_a(\tau)\,\delta(\tau). \qquad (6.17)$$

Все остальное аналогично вышепоказанному.

Можно убедиться, что, разбив интервал $[0; t]$ на два — $[0; c]$ и $[c, t]$, приняв на первом $f_a(\tau) = \dot{f}_a(\tau)$, а на другом $f_a(\tau) = \dot{f}_a(\tau)$ и правильно составив соответствующий дифференциал, мы придем к тому же результату.

Этот же интеграл можно вычислить, используя периодичность функции $f_a(\tau)$, а именно:

$$\int\limits_0^t f_a(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{E_{2a}(t)} f_a(\tau)\,d\tau + \int\limits_{E_{2a}(t)}^{E_a(t)} f_a(\tau)\,d\tau + \int\limits_{E_a(t)}^{t} f_a(\tau)\,d\tau =$$

$$= 0 + \int\limits_{E_{2a}(t)}^{E_a(t)} d\tau + f_a(t)\int\limits_{E_a(t)}^{t} d\tau = E_a(t) - E_{2a}(t) + f_a(t)\,t -$$

$$- f_a(t)\,E_a(t) = f_a(t)\left[\theta_a(t) - \frac{a}{2}\right] + \frac{a}{2}. \qquad (6.18)$$

Здесь использовано равенство

$$E_a(t) - E_{2a}(t) = \frac{a}{2}\,[1 - f_a(t)]. \qquad (6.19)$$

Легко убедиться в идентичности (6.16) и (6.18) путем вычисления интегралов в любой точке (при любом t). Например, пусть $t = 8{,}1a$. Тогда в (6.16) $f_a(8{,}1a) = +1$, $\Theta_{2a}(8{,}1a + a) = 1{,}1a$ и весь интеграл

$$\int\limits_0^{8,1a} f_a(\tau)\,d\tau = 1\,[1{,}1 - a] = 0{,}1a.$$

По (6.18) $f_a(8{,}1a) = +1$, $\theta(8{,}1a) = 0{,}1a$, а интеграл

$$\int\limits_0^{8,1a} f_a(\tau)\,d\tau = 1\left[0,1a - \frac{a}{2}\right] + \frac{a}{2} = 0,1a - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 0,1a.$$

На рис. 6.3 для наглядности приведены диаграммы изменения составляющих интеграла и самого интеграла по формуле (6.18) во времени. Аналогичные диаграммы рекомендуем для усвоения построить по формуле (6.16).

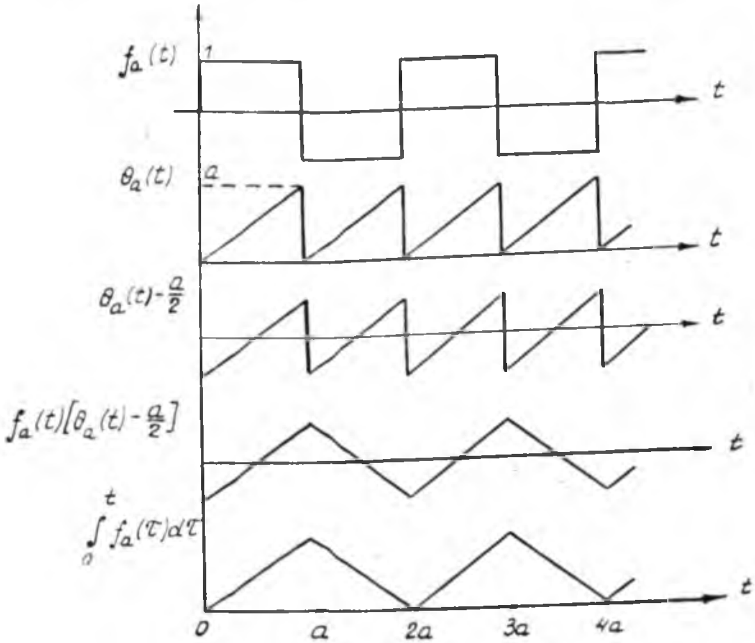


Рис. 6.3

Рассмотрим еще один характерный и часто встречающийся на практике пример, когда подынтегральная функция включает в себя разрывную и тригонометрическую функции:

$$\int\limits_0^t \sin\omega t\, f_a(t-\tau)\,dt = -\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f_a(t-\tau)\,d(\cos\omega t) =$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left\{f_a(t-\tau)\cos\omega t\,\Big|_0^t - \int_0^t \cos\omega t\, d f_a(t-\tau)\right. . \qquad (6.20)$$

С учетом вышесказанного получим

$$\int_0^t \sin\omega t\, f_a(t-\tau)\,dt = -\frac{1}{\omega}\left[f_a(t-\tau)\cos\omega t + 1 -\right.$$

$$\left. -2\sum_{n=0}^{E_1\left(\frac{t-\tau}{a}\right)} f_a(na-\tau)\cos\omega(na+\tau)\right] = -$$

$$-\frac{1}{\omega}\left[f_a(t-\tau)\cos\omega t + 1 + 2\cos\omega\tau -\right.$$

$$\left. -2\sum_{n=1}^{E_1\left(\frac{t-\tau}{a}\right)} f_a(na-\tau)\cos\omega(na+\tau)\right. . \qquad (6.21)$$

Сумма в (6.21) может быть преобразована по методу гармонического синтеза в соответствии с [25]

$$S(na) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\cos\omega(na+\tau),$$

где

$$N = E_1\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \text{ и } (-1)^n = (-1)^{E_1\left(\frac{t-\tau}{a}\right)} = f_a(t-\tau);$$

$S(na)$ можно представить в виде двух сумм

$$S(na) = \cos\omega\tau\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\cos\omega na -$$

$$-\sin\omega\tau\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\sin\omega na.$$

Каждая из них может быть представлена в замкнутом виде

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\cos\omega na=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^N\cos\omega a\,\frac{2N+1}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}}-1\right],$$

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\sin\omega na=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^N\sin\omega a\cdot\frac{2N+1}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}}-\operatorname{tg}\frac{\omega a}{2}\right].$$

Тогда

$$S(na)=\frac{1}{2}\left\{\cos\omega\tau\left[\frac{(-1)^N\cos\omega a\,\frac{2N+1}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}}-1\right]-\right.$$

$$\left.-\sin\omega\tau\left[\frac{(-1)^N\sin\omega a\cdot\frac{2N+1}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}}-\operatorname{tg}\frac{\omega a}{2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\omega\tau\cos\omega a\,\frac{2N+1}{2}-\sin\omega\tau\sin\omega a\,\frac{2N+1}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}}(-1)^N-\right.$$

$$\left.-\cos\omega t+\frac{\sin\frac{\omega a}{2}\sin\omega\tau}{\cos\frac{\omega a}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\omega\left(a\,\frac{2N+1}{2}+\tau\right)(-1)^N-\cos\omega\left(\frac{a}{2}+\tau\right)}{\cos\frac{\omega a}{2}}\right].$$

Подставив вместо N функцию $E_1\left(\frac{t}{a}\right)$ из (6.21), окончательно получим

$$\int_0^t f_a(t-\tau)\sin\omega t dt = \frac{1}{\omega}\left\{-2\cos\omega\tau - 1 - f_a(t-\tau)\cos\omega\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{f_a(t-\tau)\cos\omega\left[\frac{2E_a(t-\tau)+a}{2}+\tau\right] - \cos\omega\left(\frac{a}{2}+\tau\right)}{\cos\frac{\omega a}{2}}\right\}. \quad (6.22)$$

В табл. 6.1 приведены интегралы от наиболее часто встречающихся разрывных функций и их комбинаций с непрерывными функциями. По мере необходимости, диктуемой практическими задачами, могут быть получены и другие интегралы. Изложенная выше методика позволит избежать ошибок.

Приведем пример вычисления значения интеграла по формулам табл. 6.1. Пусть необходимо вычислить значение интеграла

$$S(t) = \int_0^t \sin\omega t f_a(t)\,dt$$

при $t = \frac{T}{2}$, где T — период синусоидального напряжения. Напомним, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Зададим отношение $\frac{T}{a} = q$, где a — полупериод прямоугольного синуса. Тогда $\omega = \frac{2\pi}{qa}$, $t = \frac{T}{2} = \frac{q}{2}a$. Подставив все это в формулу из табл. 6.1, получим

$$S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{qa}{2\pi} f_a\left(\frac{T}{2}\right)\left|\frac{\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{a[2E_1(q/2)+1]}{2}}{\cos\frac{2\pi a}{2T}} - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right| = \frac{qa}{2\pi}(-1)^{E_1\left(\frac{q}{2}\right)} \times$$

Таблица 6.1

Интегрируемая функция $\varphi(t)$	Вид интеграла $\int_0^t \varphi(t)\,dt$
$f_a(t)$	$f_a(t)\left[\theta_a(t) - \frac{a}{2}\right] + \frac{a}{2}$
$f_a(t-\tau)$	$f_a(t-\tau)\left[\theta_a(t-\tau) - \frac{a}{2}\right] + \frac{a}{2}$
$\sin\omega t \cdot f_a(t)$	$\frac{1}{\omega} f_a(t)\left[\frac{\cos\omega\frac{2E_a(t)+a}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}} - \cos\omega t\right]$
$\cos\omega t \; f_a(t)$	$\frac{1}{\omega}\left\{f_a(t)\left[\sin\omega t - \frac{\sin\omega\frac{2E_a(t)+a}{2}}{\cos\frac{\omega a}{2}}\right] + tg\frac{\omega a}{2}\right\}$
$\sin\omega t \cdot f_a(t-\tau)$	$\frac{1}{\omega}\left\{-2\cos\omega\tau - 1 + \frac{f_a(t-\tau)\cos\omega\left[\frac{2E_a(t-\tau)+a}{2}+\tau\right] - \cos\omega\left[\frac{a}{2}+\tau\right]}{\cos\frac{\omega a}{2}} - f_a(t-\tau)\cos\omega t\right\}$
$\cos\omega t \cdot f_a(t-\tau)$	$\frac{1}{\omega}\left\{2\sin\omega\tau + f_a(t-\tau)\sin\omega t + tg\frac{\omega a}{2} - \frac{f_a(t-\tau)\sin\omega\left[\frac{2E_a(t-\tau)+a}{2}+\tau\right]}{\cos\frac{\omega a}{2}}\right\}$
$\sin\omega t\, f_a(t)\cdot f_a(t-\tau)$	$\frac{1}{\omega}\left\{2\cos\omega\tau - 1 - f_a(t)f_a(t-\tau)\cos\omega t - 2\,\frac{\sin\omega\frac{E_a(t)}{2}\cos\omega\left[\frac{E_a(t)+a}{2}\right] - \sin\omega\frac{E_a(t-\tau)}{2}\cos\omega\left[\frac{E_a(t-\tau)+a}{2}+\tau\right]}{\cos\frac{\omega a}{2}}\right\}$

Интегрируемая функция $\varphi(t)$	Вид интеграла $\int_0^t \varphi(t)\,dt$
$\cos\omega t \cdot f_a(t) \times f_a(t-\tau)$	$\frac{1}{\omega}\Big\{\sin\omega t \cdot f_a(t) \cdot f_a(t-\tau) - 2\sin\omega\tau + 2\,\frac{\sin\omega\frac{E_a(t)}{2}\sin\omega\frac{E_a(t)+a}{2} - \sin\omega\frac{E_a(t-\tau)}{2}\sin\omega\left[\frac{E_a(t-\tau)+a}{2}+\tau\right]}{\sin\frac{\omega a}{2}}\Big\}$
$\sin\omega t \cdot f_a(t-\tau_1) \times f_a(t-\tau_2)$	$\frac{1}{\omega}\Big\{1 - 2\cos\omega\tau_1 + 2\cos\omega\tau_2 - f_a(t-\tau_1) f_a(t-\tau_2)\cos\omega t + 2\,\frac{\sin\omega\frac{E_a(t-\tau_1)}{2}\cos\omega\left[\frac{E_a(t-\tau_1)+a}{2}+\tau_1\right] - \sin\omega\frac{E_a(t-\tau_2)}{2}\cos\omega\left[\frac{E_a(t-\tau_2)+a}{2}+\tau_2\right]}{\sin\frac{\omega a}{2}}\Big\}$
$\cos\omega t \cdot f_a(t-\tau_1) \times f_a(t-\tau_2)$	$\frac{1}{\omega}\Big\{2\sin\omega\tau_1 - 2\sin\omega\tau_2 + f_a(t-\tau_1) \cdot f_a(t-\tau_2)\sin\omega t + 2\,\frac{\sin\omega\frac{E_a(t-\tau_1)}{2}\sin\omega\left[\frac{E_a(t-\tau_1)+a}{2}+\tau_1\right] - \sin\omega\frac{E_a(t-\tau_2)}{2}\sin\omega\left[\frac{E_a(t-\tau_2)+a}{2}+\tau_2\right]}{\sin\frac{\omega a}{2}}$
$\theta_a(t)$	$\frac{t^2}{2} + E_a(t)\left[\frac{E_a(t)+1}{2} - t\right]$
$e^{\kappa\theta_a(t)}$	$\frac{1}{\kappa}\Big\{\left[e^{\kappa\theta_a(t)} - 1\right] + E_1\left(\frac{t}{a}\right)\left[e^{\kappa a} - 1\right]\Big\}$
$e^{\kappa\theta_a(t-\tau)}$	$\frac{1}{\kappa}\Big\{\left[e^{\kappa\theta_a(t-\tau)} - e^{\kappa(a-\tau)}\right] + E_1\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\left(e^{\kappa a} - 1\right)\Big\}$
$f_a(t-\tau_1) \cdot f_a(t-\tau_2)$	$t f_a(t-\tau_1) f_a(t-\tau_2) + 2\tau_1\left[E_1\frac{(t-\tau_1)}{a} + 1\right] - 2\tau_2\left[E_1\left(\frac{t-\tau_2}{a}\right) + 1\right] + E_a(t-\tau_1)\left[1 + E_a(t-\tau_1)\right] - E_a(t-\tau_2)\left[1 + E_a(t-\tau_2)\right]$

$$\times \left\{ \frac{\cos\frac{\pi}{q}\left[2E_1\left(\frac{q}{2}\right)+1\right]}{\cos\frac{\pi}{q}} + 1 \right\}.$$

Здесь учтено, что $E_a\left(\frac{T}{2}\right) = aE_1\left(\frac{T}{2a}\right) = aE_1\left(\frac{q}{2}\right)$.

Пусть $q = 6$. Тогда

$$S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{3a}{\pi}(-1)^3 \left\{ \frac{\cos\frac{\pi}{6}[6+1]}{\cos\frac{\pi}{6}} + 1 \right\} = -$$

$$-\frac{3a}{\pi}\left\{ \frac{-\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} + 1 \right\} = 0.$$

Пусть $q = 7$. Тогда

$$S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{7a}{2\pi}(-1)E_1(3{,}5)\left\{ \frac{\cos\frac{\pi}{7}[2E_1(3{,}5)+1]}{\cos\frac{\pi}{7}} + 1 \right\} =$$

$$= \frac{7a}{2\pi}(-1)^3 \left\{ \frac{\cos\frac{\pi}{7}\cdot 7}{\cos\frac{\pi}{7}} + 1 \right\} = -\frac{7a}{2\pi}\left\{\frac{-1}{0{,}9} + 1\right\} = 0{,}122a.$$

6.3. Метод коммутационных разрывных функций (КРФ)

Опираясь на свойства разрывных функций, авторы разработали метод КРФ, отличительная особенность которого состоит в том, что он, являясь одной из модификаций метода мгновенных значений, на всех этапах анализа, начиная с описания ключевых схем и вплоть до получения результата, охраняет разрывный характер коэффициентов и переменных. Такой подход позволяет для систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого, второго порядков, получить решения в компактном виде и табулировать решения для наиболее распространенных сочетаний непрерывных и разрывных функций, а в случае применения ЭВМ и численных методов расчета процессов обеспечивает наилучшее соответствие составленных уравнений и алгоритмов реализации.

Для описания ключевых схем может быть использовано три модификации метода КРФ: 1) ветвь с ключом заменяется активным сопротивлением, зависящим от времени; 2) ветвь с ключом представляется коэффициентом передачи по потенциалу; 3) ветвь с ключом представляется коэффициентом передачи по току.

Следует отметить, что в случае сложных разветвленных структур для их преобразования и упрощения в первом случае могут быть использованы ненаправленные графы, а во втором и третьем — сигнальные графы. Здесь же мы проиллюстрируем методику описания схем на простейших примерах.

На рис. 6.4, *а* представлена двухключевая схема регулирования тока в активно-индуктивной нагрузке.

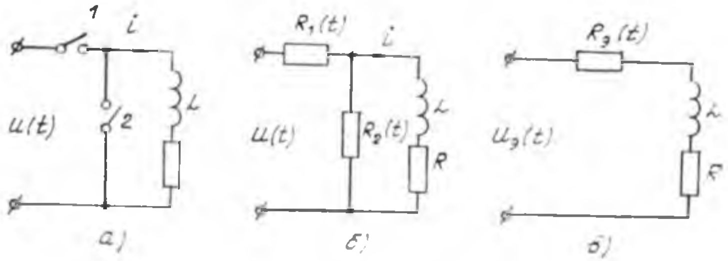


Рис. 6.4

Эта схема в своем роде классическая и при подключении к сети постоянного напряжения рассмотрена многими исследователями. Установившиеся режимы здесь анализируются методом припасовывания, а переходные — с привлечением разностных уравнений. При подключении к сети переменного напряжения электромагнитные процессы в схеме, несмотря на ее предельную простоту, не рассмотрены, что определяется возникшими трудностями припасовывания и составления разностных уравнений. В рассматриваемом методе КРФ эти трудности устранены.

Рис. 6.4, *б*, *в* показывают последовательность преобразования ключевой схемы рис. 6.4, *а*. С учетом противотактной работы ключей *1* и *2* можем записать

$$R_1(t) = R\cdot {}^1\!/_2\,[1 + f_a(t)\cdot f_a(t-\tau)], \qquad (6.23)$$

$$R_2(t) = R\cdot {}^1\!/_2\,[1 - f_a(t)\cdot f_a(t-\tau)], \qquad (6.24)$$

где R — сопротивление разомкнутого ключа, которое может приниматься произвольно большим (5, 10, 100 кОм и т. д.);

τ — длительность замкнутого состояния ключа *1* (фазовый сдвиг ключа *2*). Тогда эквивалентное значение сопротивления $R_э(t)$ найдем из условия параллельного соединения $R_1(t)$ и $R_2(t)$:

$$R_э(t) = \frac{R_1(t)\cdot R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)} = \frac{R^2\dfrac{1}{4}\,[1 - f_a(t)f_a(t-\tau) + f_a(t)\cdot f_a(t-\tau) - f_a^2(t)\cdot f_a^2(t-\tau)]}{R\cdot\dfrac{1}{2}\,[1 - f_a(t)\cdot f_a(t-\tau) + 1 - f_a(t)\cdot f_a(t-\tau)]}.$$

После приведения подобных членов с учетом того, что $f_a^2(t) = 1$, $f_a^2(t-\tau) = 1$, получим, что числитель дроби тождественно (при любых значениях входящих туда переменных) равен нулю, а знаменатель равен R и, следовательно,

$$R_э(t) = 0.$$

Аналогично найдем эквивалентное значение напряжения

$$U_э(t) = \frac{U(t)\,R_1(t)\,R_2(t)}{[R_1(t) + R_2(t)]\,R_1(t)} = U(t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\,[1 - f_a(t)\cdot f_a(t-\tau)].$$

Для схемы рис. 6.4, *в* дифференциальное уравнение составляется по обычным правилам с применением первого закона Кирхгофа

$$\frac{1}{2}\,U(t)\,[1 - f_a(t)\,f_a(t-\tau)] = L_н\frac{di}{dt} + R_н i. \qquad (6.25)$$

В случае $U(t) = U_0$ получим

$$\frac{di}{dt} + K_1 i = K_2\,[1 - f_a(t)\,f_a(t-\tau)]. \qquad (6.26)$$

При подключении к сети переменного напряжения удобно представить $U(t)$ в виде мнимой части комплексной функции $e^{j\Omega t}$

$$U(t) = U_m \sin\Omega t = \mathrm{Im}\, U_m e^{j\Omega t}, \tag{6.27}$$

а для нахождения решения первоначально решить дифференциальное уравнение

$$\frac{di}{dt} + K_1 i = K_2 e^{j\Omega t}\,[1 - f_a(t)\, f_a(t - \tau)]. \tag{6.28}$$

Этот подход далее подробно иллюстрирован в приводимом ниже примере.

На рис. 6.5 изображен ключевой преобразователь напряжений со звеном повышенной частоты, в котором

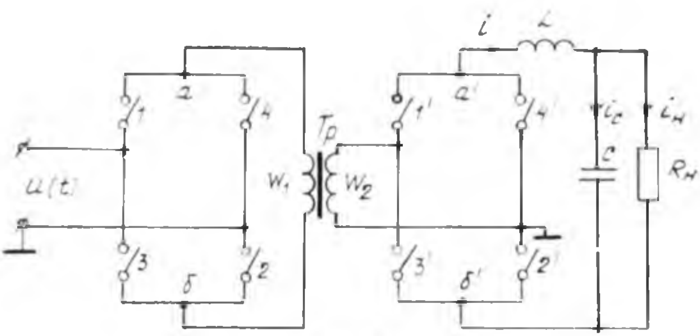


Рис. 6.5

ключи *1*, *2*, *3*, *4* замыкаются попарно в противотакте и осуществляют промежуточное повышение частоты, а ключи *1'*, *2'*, *3'*, *4'* — демодуляцию и регулирование выходного напряжения. Для этого фазы замыкания пар ключей *1'*, *4'* и *2'*, *3'* изменяются встречно и синхронно.

В вариантах с заданным входным напряжением удобно использовать КРФ, устанавливающие связь потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} \text{КРФ}_1 &= \frac{1}{2}[1 + f_a(t)], & \text{КРФ}_2 &= \frac{1}{2}[1 + f_a(t)],\\ \text{КРФ}_3 &= \frac{1}{2}[1 - f_a(t)], & \text{КРФ}_4 &= \frac{1}{2}[1 - f_a(t)], \end{aligned}\right| \tag{6.29}$$

$$\text{КРФ}_1' = \frac{1}{2}\,[1 + f_a(t - \tau_1)],$$

$$\text{КРФ}_3' = \frac{1}{2}\,[1 - f_a(t - \tau_2)],$$

$$\left.\begin{aligned} \text{КРФ}_2' &= \frac{1}{2}\,[1 + f_a(t - \tau_2)], \\ \text{КРФ}_4' &= \frac{1}{2}\,[1 - f_a(t - \tau_1)]. \end{aligned}\right| \qquad (6.30)$$

Тогда потенциалы и напряжения, соответствующие рис. 6.5, будут связаны выражениями

$$\varphi_a = U(t)\,\text{КРФ}_1 + 0\cdot\text{КРФ}_4 = U(t)\,\text{КРФ}_1,$$

$$\varphi_b = U(t)\,\text{КРФ}_3,$$

$$U_{\text{Тр}1} = \varphi_a - \varphi_b = U(t)\cdot\frac{1}{2}\,[1 + f_a(t)] - U(t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\,[1 - f_a(t)] = \frac{1}{2}\,U(t) + \frac{1}{2}\,U(t)\cdot f_a(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\,U(t)\cdot f_a(t) = U(t)\cdot f_a(t). \qquad (6.31)$$

С учетом того, что коэффициент трансформации трансформатора Тр равен $K_T = \frac{W_1}{W_2}$, получим

$$U_{\text{Тр}2} = U_{\text{Тр}1}\cdot\frac{1}{K_\text{Т}} = \frac{1}{K_\text{Т}}\,U(t)\cdot f_a(t),$$

$$\varphi_a' = \frac{1}{K_\text{Т}}\,U(t)\,f_a(t)\,\text{КРФ}_1',$$

$$\varphi_b' = \frac{1}{K_\text{Т}}\,U(t)\,f_a(t)\,\text{КРФ}_3',$$

$$U = \varphi_a' - \varphi_b' = \frac{1}{2K_\text{Т}}\,U(t)\,f_a(t)\,[f_a(t - \tau_1) + f_a(t - \tau_2)].$$

$$(6.32)$$

При известном U дифференциальное уравнение будет представлено в виде

$$\frac{d^2U_c}{dt^2} + K_1\frac{dU_c}{dt} + K_2U_c = K_3\,U(t)\,f_a(t)\,[f_a(t-\tau_1) + $$
$$+ f_a(t-\tau_2)]. \qquad (6.33)$$

Видно, что структура уравнения (6.33) аналогична (6.26), (6.28).

Для анализа цепей с предвключенными реактивными элементами (рис. 6.6) удобно использовать искусственный прием замены реальной нагрузки генератором тока с варьируемыми параметрами

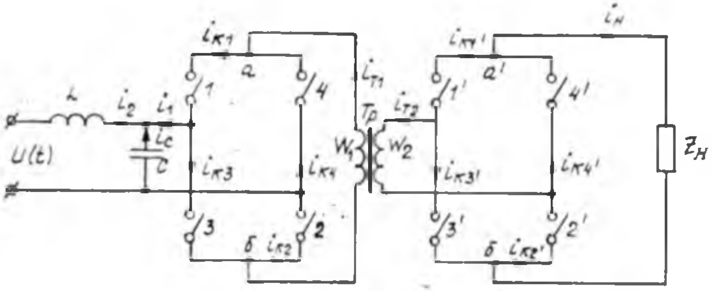


Рис. 6.6

ми $I_г(t)$, который включается на место $Z_н$. Здесь удобнее всего использовать КРФ, устанавливающие передачи ветвей по току. Для первичной цепи можно записать

$$i_{к1} = i_{T1}\cdot\frac{1}{2}[1 + f_a(t)], \qquad (6.34)$$

$$i_{к3} = i_{T1}\cdot\frac{1}{2}[1 - f_a(t)], \qquad (6.35)$$

$$i_1 = i_{к1} - i_{к3} - i_{T1}f_a(t). \qquad (6.36)$$

Во вторичной цепи

$$i_{T1} = \frac{1}{K_T}\,i_{T2}, \qquad (6.37)$$

$$i_{T2} = i'_{к1} - i'_{к3}, \qquad (6.38)$$

$$i'_{к1} = i_н\cdot\frac{1}{2}[1 + f_a(t-\tau_1)], \qquad (6.39)$$

$$i'_{к3} = i_н\cdot\frac{1}{2}[1 + f_a(t-\tau_1)]. \qquad (6.40)$$

Последовательно подставляя (6.37) ÷ (6.40) и (6.36), получим

$$i_1 = \frac{1}{K_{\text{т}}} I_{\text{г}}(t) \cdot \frac{1}{2} [f_a(t-\tau_1) - f_a(t-\tau_2)] \cdot f_a(t). \qquad (6.41)$$

Далее дифференциальное уравнение составляется обычным образом. Процедура взятия производной от выражений типа (6.41) описана в предыдущем параграфе.

Анализ полученных уравнений показывает, что они имеют похожие структуры и содержат члены в виде комбинаций непрерывных функций с прямоугольными синусами в правой части, а также сингулярные (содержащие δ-функции) члены. От выбора структуры решения зависит трудоемкость получения результата и его обозримость, возможности анализа и «унификации» решения. Нами опробованы многие модификации и сделан вывод о том, что наиболее компактный вид решение имеет, если его принужденная составляющая построена по правилу: «выбирается решение, «похожее» на правую часть, и к нему добавляются слагаемые, «похожие» на свободную составляющую, по одному члену на интервал непрерывности».

Проиллюстрируем действие правила на примере уравнения (6.26). Его решение включает три составляющие:

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) + i_a(t) + i_{\text{б}}(t), \qquad (6.42)$$

где $i_{\text{св}}(t)$ — свободная составляющая решения; $i_a(t)$ — частное решение уравнения с правой частью K_2; $i_{\text{б}}(t)$ — частное решение уравнения с правой частью $-K_2 f_a(t) f_a(t-\tau)$.

$$i_{\text{св}}(t) = Ce^{-K_1 t}, \qquad (6.43)$$

$i_a(t)$ ищем в виде $i_a(t) = C_a$. Тогда $\frac{dC_a}{dt} = 0$ и $K_1 C_a = K_2$, откуда $C_a = \frac{K_2}{K_1}$ и, следовательно,

$$i_a(t) = \frac{K_2}{K_1}. \qquad (6.44)$$

$i_{\text{б}}(t)$ ищется по правилу, сформулированному выше. В соответствии с этим

$$i_б(t) = -\frac{K_2}{K_1}\{f_a(t) f_a(t-\tau) + 2Be^{-K_1 Q_a(t)} -$$
$$-2De^{-K_1 Q_a(t-\tau)}\}, \qquad (6.45)$$

где $Q_a(t)$ — «дробная» функция. B и $Д$ находятся при подстановке в (6.45) моментов времени $t=na\pm 0$ и $t=na+\tau\pm 0$. При этом учитывается, что в рассматриваемой на рис. 6.4, *в* цепи ток непрерывен. Тогда при $t=na-0$

$$f_a(t) = +1,\ f_a(t-\tau) = +1,\ \theta_a(t) = a,$$
$$\theta_a(t-\tau) = a-\tau,$$
$$i_б(na-0) = -\frac{K_2}{K_1}[1+2Be^{-K_1 a} - 2De^{-K_1(a-\tau)}];$$

при $t = na+0$

$$f_a(t) = -1, f_a(t-\tau) = +1,\ \theta_a(t) = 0,$$
$$\theta_a(t-\tau) = a-\tau,$$
$$i_б(na+0) = -\frac{K_2}{K_1}[-1+2B^0 - 2De^{-K_1(a-\tau)}].$$

Учитывая, что $i_б(na-0) = i_б(na+0)$ и сократив коэффициент $K_2 K_1$, получим

$$1+2Be^{-K_1 a} - 2De^{-K_1(a-\tau)} = -1+2B-2De^{-K_1(a-\tau)},$$
$$2 = 2B(1-e^{-K_1 a}),$$
$$B = \frac{1}{1-e^{-K_1 a}}.$$

Проделав аналогичные операции для $t = na+\tau+0$, получим

$$D = B = \frac{1}{1-e^{-K_1 a}}.$$

При подстановке (6.43) — (6.45) в (6.42), получим

$$i(t) = Ce^{-K_1 t} + \frac{K_2}{K_1}\Big\{1 - f_a(t) f_a(t-\tau) -$$
$$-\frac{2}{1-e^{-K_1 a}}[e^{-K_1\theta_a(t)} - e^{-K_1\theta_a(t-\tau)}]\Big\}.$$

(6.46)

При нулевых начальных условиях

$$C = -\frac{K_2}{K_1}\left\{2 - \frac{2}{1 - e^{-K_1 a}}\left[1 - e^{-K_1(a-\tau)}\right]\right\}. \qquad (6.47)$$

Таким образом, уравнение (6.46) описывает поведение тока во всех режимах и позволяет подсчитать его мгновенные значения в любой момент времени. Основываясь на выработанном правиле построения решений, составлена табл. 6.2. В ней приведены частные решения уравнений второго порядка с наиболее часто встречающимися комбинациями непрерывных и разрывных функций в правой части. Таблица удобна тем, что при $\omega = 0$ она дает решение уравнений для цепей постоянного тока, а также пригодна для уравнений первого порядка. В этом случае под знаком Σ в графе $y(t)$ будет одно слагаемое. Наличие сингулярных членов (членов с δ-функциями) в правой части не влияет на вид решения, однако указывает, что первая производная имеет конечный разрыв. Коэффициент при сингулярном члене при $t = na$ и определяет величину скачка.

Пример: рассчитать кривые мгновенных значений тока и напряжения в схеме рис. 6.4 при подключении ее к сети переменного тока частотой $f = 50$ Гц. Период квантования $a = 0{,}0025$ с. Относительная длительность замкнутого состояния ключа l

$$\gamma = \frac{t_{\text{замкн}}}{a} = 0{,}2,\ U(t) = U_m \sin\omega t,\ \omega = 2\pi f,\ U_m = 310\ \text{В}.$$

В соответствии с выработанным подходом запишем дифференциальное уравнение анализируемой цепи

$$\frac{di_{\text{н}}(t)}{dt} + K_1 i_{\text{н}}(t) = K_2\left[1 + f_a(t) f_a(t-\tau)\right]\sin\omega t,$$

$$\text{где } K_1 = \frac{R_{\text{н}}}{L_{\text{н}}};\ K_2 = \frac{U_m}{2L_{\text{н}}}.$$

Первую составляющую частного решения с правой частью $K_2 \sin\omega t$ ищем в виде $i_{\text{н}}(t) = \operatorname{Im}(C_1 e^{j\omega t})$, где знак Im означает выделение мнимой части

$$C_1 = \frac{K_2}{j\omega + K_1}.$$

Таблица 6.2

Частные решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k_1\frac{dy}{dt} + k_2 y = \varphi(t)$$

$\varphi(t)$	$y(t)$
1. $k_3 e^{j\omega t}\cdot f_a(t)$	$c e^{j\omega n a}\left[e^{j\omega\theta_a(t)} - 2\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{B_k e^{\alpha_k\theta_a(t)}}{1+e^{(\alpha_k - j\omega)a}}\right]\cdot f_a(t)$
2. $k_3 e^{j\omega t}\cdot f_a(t-\tau_1)\times$ $\times f_a(t-\tau_2)$	$c e^{j\omega t} f_a(t-\tau_1)\cdot f_a(t-\tau_2) + 2e^{j\omega p_1}\sum\limits_{k=1}^{2} B_k e^{\alpha_k\theta_a(t-\tau_1)} -$ $-2e^{j\omega p_2 a}\sum\limits_{k=1}^{2} D_k e^{\alpha_k\theta_a(t-\tau_2)}$
3. $k_3 e^{j\omega t}\cdot f_a(t)\times$ $\times f_A(t)$ $A > a$	$c\cdot\left\{e^{j\omega n a}\left[e^{j\omega\theta_a(t)} - 2\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{B_k e^{\alpha_k\theta_a(t)}}{1+e^{(\alpha_k - j\omega)a}}\right]f_a(t) -\right.$ $\left.-2e^{j\omega m A}\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{D_k e^{\alpha_k\theta_A(t)}}{1+e^{(\alpha_k - j\omega)A}}\right\} f_A(t)$
4. $k_3 e^{j\omega t}\times$ $\times\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t-na)$	$k_3 e^{j\omega n a}\cdot\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{B_k e^{\alpha_k\theta_a(t)}}{1-e^{(\alpha_k - j\omega)a}}$

Для нахождения второй составляющей частного решения воспользуемся второй формулой табл. 6.2 при $k=1$ и $\tau_1=0$, взяв от приведенного выражения мнимую часть, т. е.

$$i_{н2}(t) = \operatorname{Im}\{Ce^{j\omega t} f_a(t) f_a(t-\tau) + 2e^{j\omega E_a(t)} \cdot Be^{-K_1 \theta_a(t)} -$$

$$- 2e^{j\omega[E_a(t-\tau)+\tau]} \cdot De^{-K_1 \theta_a(t-\tau)}.$$

Проведя стыковку в точках $t = na \pm 0$ и $t = na + \tau \pm 0$, получим

$$B = D = \frac{1}{1 - e^{-(j\omega + K_1)a}}.$$

Свободная составляющая здесь обычна:

$$i_{нсв}(t) = Ce^{-K_1 t}.$$

Окончательно выражение для тока нагрузки после суммирования всех составляющих и выделения мнимой части имеет вид

$$i_н(t) = \frac{K_2}{K_1^2 + \omega^2}(K_1 \sin \omega t - \omega \cos \omega t)[1 + f_a(t) \times$$

$$\times f_a(t-\tau)] + \frac{2}{1 + (e^{-K_1 a} - 2\cos \omega a)e^{-K_1 a}} \times$$

$$\times [F_1(t)e^{-K_1 \theta_a(t)} - F_2(t)e^{-K_1 \theta_a(t-\tau)}] + Ce^{-K_1 t},$$

где $F_i(t) = K_1\{\sin \omega [E_a(t-\tau_i) + \tau_i] - e^{-K_1 a} \sin \omega [E_a(t-$

$$- \tau_i) + a + \tau_i]\} - \omega\{\cos \omega [E_a(t-\tau_i) + \tau_i] -$$

$$- e^{-K_1 a} \cos \omega [E_a(t-\tau_i) + \tau_i + a]\},\ i = (1,2),$$

с учетом, что $\tau_1 = 0$; $\tau_2 = \tau$.

При нулевых начальных условиях постоянная интегрирования C найдется из выражения

$$C = \frac{2K_2}{K_1^2 + \omega^2}\left\{\omega - \frac{1}{1 + (e^{-K_1 a} - 2\cos \omega a)e^{-K_1 a}} \times \right.$$

$$\left. \times [F_1(0)e^{-K_1 a} - F_2(0)e^{-K_1(a-\tau)}]\right\}.$$

На рис. 6.7 приведены диаграммы изменения напряжения и тока в схеме, рассчитанные по приведенным выражениям.

Данные примеры показывают, что одним из важных преимуществ метода КРФ является полная примени-

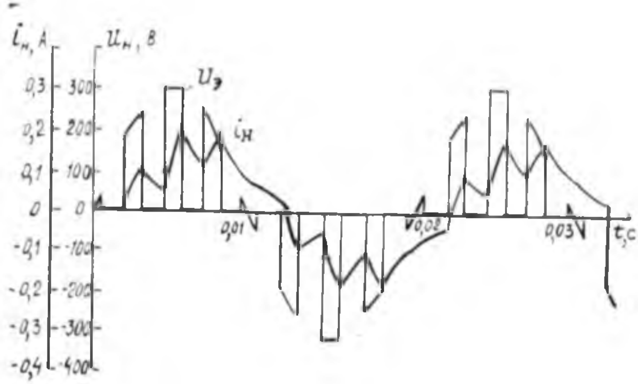


Рис. 6.7

мость знаний по теоретическим основам электротехники и теории дифференциальных уравнений с учетом свойств разрывных функций.

6.4. Метод припасовывания

Метод припасовывания [20] разработан и применяется для исследования нелинейных цепей и цепей с переменными во времени параметрами. В первом случае метод характеризуется следующими двумя признаками:

1) применением кусочно-линейной аппроксимации для представления исходных нелинейных зависимостей;

2) решением исходной системы линейных дифференциальных уравнений путем их интегрирования для отдельных участков нелинейной характеристики и согласования полученных решений в моменты перехода изображающей точки с одного участка характеристики на другой.

Во втором случае этих признаков также два:

1) разбиение всего процесса на временные интервалы с постоянной структурой;

2) решение исходной системы линейных дифференциальных уравнений путем их интегрирования на участках постоянства структуры и согласование полученных решений в моменты изменения структуры.

Метод припасовывания родился в связи с запросами электротехники и радиотехники на ранней стадии их развития, и его появление было в первую очередь обусловлено специфическими свойствами вольт-амперной характеристики нелинейного элемента — вентиля (диода), входившего в изучаемые нелинейные цепи. Первой работой в этом направлении была статья Н. Д. Папалекси «О процессах в цепи переменного тока, содержащей электрический вентиль», опубликованная в 1912 году. Для исследования линейных цепей с переменными во времени параметрами метод припасовывания впервые был применен Мейснером в 1918 году в связи с решением уравнения Хилла:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)\,y = 0,$$

где $F(t)$ — скачкообразно изменяющаяся функция времени.

Для указанного класса задач метод припасовывания наилучшим образом отражает их физическую сущность, дает точное решение, а во многих случаях является единственно возможным. В то же время метод не свободен от недостатков, которые надо учитывать на стадии исследования:

1) резко возрастает сложность расчета при повышении порядка дифференциальных уравнений, описывающих схему на линейных участках;

2) резко возрастает сложность расчета при увеличении количества линейных участков, аппроксимирующих нелинейную зависимость;

3) необходимо заранее определить характер протекания процессов в схеме и знать закономерность перехода изображающей точки с участка на участок. Другими словами, требуется до начала теоретического анализа самым тщательным образом изучить качественную картину процессов в схеме, так как ошибка в качественном анализе повлечет за собой ошибку в анализе теоретическом.

Рассмотрим существо метода припасовывания на нескольких примерах.

Пример 1. Провести анализ процессов в схеме с нелинейной индуктивностью и активным сопротивлением при подключении ее к переменному синусоидальному напряжению $Ut = Um \sin \omega t$. Схема изображена на рис. 6.8, а вебер-амперная характеристика нелинейного дросселя — на рис. 6.9.

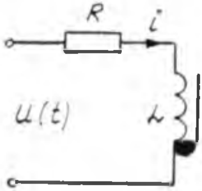


Рис. 6.8

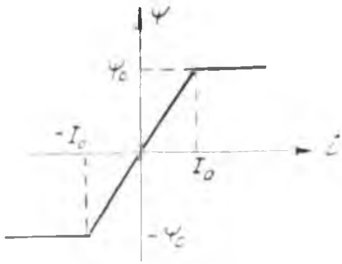


Рис. 6.9

Вначале проведем качественный анализ процессов, которые разбиты на четыре участка, помеченные римскими цифрами (I—IV) на рис. 6.10. На первом участке

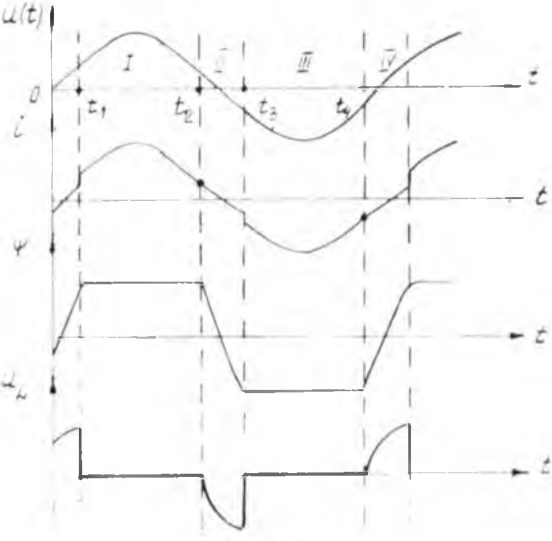


Рис. 6.10

изображающая точка находится на горизонтальном участке зависимости $\Psi(i)$ в первом квадрате. Индуктивность L при этом равна нулю. Ток повторяет напряжение. На втором интервале изображающая точка переходит на наклонный участок зависимости $\Psi(i)$. При этом в цепь вводится индуктивность L, появляется напряжение U_L, изменение тока происходит по более сложному закону. На границе интервалов I и II ток непрерывен, так как после появления в цепи индуктивности скачок тока означал бы появление бесконечно большого напряжения, что в этой цепи невозможно. При достижении изображающей точкой координат $-I_0$, $-\Psi_0$ изменение потокосцепления прекращается, индуктивность становится равной нулю, напряжение U_L скачком становится равным нулю, а это приводит к скачку тока i на границе интервалов II, III, так как в противном случае не будет выполняться закон Кирхгофа в исследуемой цепи. При выходе изображающей точки на горизонтальный участок процессы далее протекают аналогично вышеописанному (на участке III аналогично I, на участке IV аналогично II). Дифференциальное уравнение, описывающее процессы в исследуемой цепи, составленное при обходе контура по второму закону Кирхгофа, имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i = U_m \sin \omega t, \tag{6.48}$$

где индуктивность $L = \dfrac{\Delta \Psi}{\Delta i}$. На горизонтальных участках зависимости $\Psi(i)$ имеем $\Delta\Psi = 0$ и $L = 0$, а на наклонном $L = \text{const}$. Таким образом, на участках II и IV действует уравнение (6.48), а на участках I и III оно упрощается и имеет вид

$$R \cdot i = U_m \sin \omega t. \tag{6.49}$$

Тогда на участке I изменение тока описывается выражением

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t. \tag{6.50}$$

Вычислить значение t_1 мы пока не можем, зато можем определить граничное (между участками I и II) значение тока (оно равно I_0 из рис. 6.9) и вычислить из (6.50) t_2. Действительно,

$$I_0 = \frac{U_m}{R} \sin \omega t_2,$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{I_0 R}{U_m}. \tag{6.51}$$

В результате, определив $i = I_0$, $t = t_2$, мы осуществили припасовывание участков I и II и задали начальные условия для участка II. На этом участке действует уравнение (6.48). Его решение состоит из принужденной и свободной составляющей с началом переходного процесса в момент $t = t_2$, т. е.

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}},$$

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \tag{6.52}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$, а

$$i_{\text{св}} = A e^{-\frac{R}{L}(t - t_2)}.$$

Тогда

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}(t - t_2)}. \tag{6.53}$$

Для определения постоянной A используем, что при $t = t_2$ $i = I_0$. Тогда из (6.53)

$$I_0 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t_2 - \varphi) + A,$$

$$A = I_0 - \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t_2 - \varphi).$$

Окончательно для участка II будем иметь

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) + \left[I_0 - \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \sin(\omega t_2 - \varphi) \right] e^{-\frac{R}{L}(t - t_2)}. \tag{6.54}$$

Чтобы выполнить припасовывание участков II и III, необходимо вспомнить, что на III участке процессы описываются выражением (6.50). Однако для того, чтобы вычислить начальное значение тока на III участке и определить величину скачка тока, необходимо знать t_3. Для этого воспользуемся (6.54), учтя, что конечное значение тока на II участке при

$t = t_3$ $i = -I_0$. Тогда

$$-I_0=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t_3-\varphi)+\left[I_0-\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\omega t_2-\varphi)\right]e^{-\frac{R}{L}(t_3-t_2)}. \qquad (6.55)$$

Вычислить значение t_3 из трансцендентного выражения (6.55) не представляется возможным. Здесь можно рекомендовать метод постепенных приближений, лучше с использованием ЭВМ, либо графический метод, при котором строится кривая, описываемая правой частью (6.55) при изменении t_3, и затем в момент равенства этой правой части I_0 фиксируется искомое значение t_3. При известном t_3 определим начальное значение тока на *III* участке

$$I_{н3}=\frac{U}{R}\sin\omega t_3$$

и вычислим величину скачка тока ΔI:

$$\Delta I=I_{н3}-(-I_0)=I_{н3}+I_0.$$

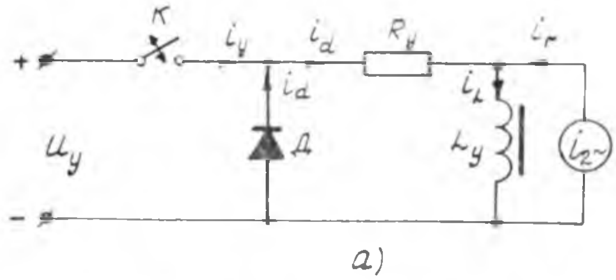
Поскольку $I_{н3}<0$, то и скачок имеет отрицательный знак. Далее процессы повторяются.

Пример 2. Рассчитать переходные и установившиеся процессы в цепи импульсного подмагничивания дроссельного магнитного усилителя.

Схема замещения цепи подмагничивания представлена на рис. 6.11, *а, б*. Здесь в исходной схеме рис. 6.11, *а* $U_у$ — источник подмагничивания; К — ключ; Д — диод; $R_у$ — активное сопротивление цепи подмагничивания; $L_у$ — эквивалентная индуктивность цепи управления магнитного усилителя; $i_г=i_{2N}$ — генератор тока четных гармоник. Эта схема преобразована в 6.11,*б* путем замены ключа К и диода Д коммутатором $К_1$. При замыкании $К_1$ в положение *1* ток i_d протекает через цепь источника подмагничивания $U_у$, а в положение *2* — через цепь диода. Поскольку цепь подмагничивания работает в режиме непрерывного тока, то во втором положении коммутатора диод всегда открыт, в связи с чем он и заменен перемычкой.

По схеме рис. 6.11, *б* в *n*-й период повторения импульсов могут быть записаны исходные дифференциальные уравнения:

а) для интервала импульса $nT\leq t\leq nT+\gamma T$, когда $К_1$ замкнут в первое положение (рис. 6.12):



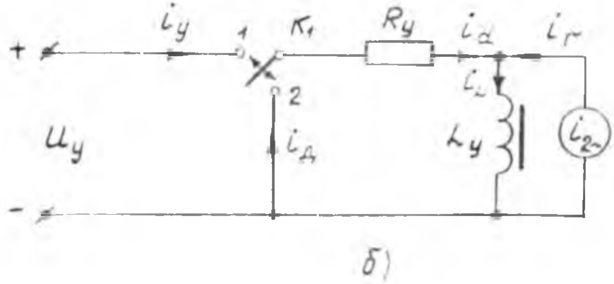


Рис. 6.11

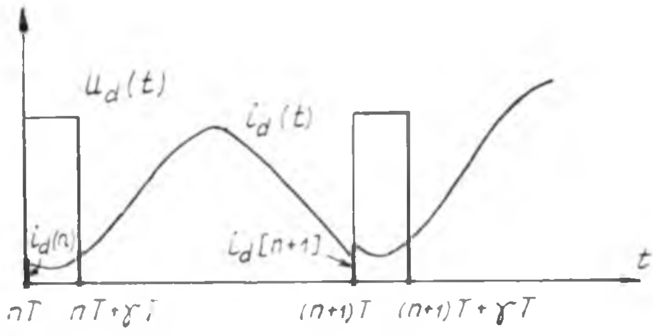


Рис. 6.12

$$U_у = R_у i_d + L_у \frac{di_d}{dt} + L_у \frac{di_г}{dt}. \tag{6.56}$$

Здесь n — номер периода;

T — период повторения импульсов;

$\gamma = \frac{t_и}{T}$ — относительная продолжительность импульсов;

б) для интервала паузы $nT + \gamma T \leqslant t \leqslant (n+1)T$, когда $К_1$ замкнут в положение 2:

$$0 = R_у i_d + L_у \frac{di_d}{dt} + L_у \frac{di_г}{dt}. \tag{6.57}$$

Поделив (6.56) и (6.57) на $R_у$ и вводя обозначения

$$\frac{U_у}{R_у} = I, \; \frac{L_у}{R_у} = T_у, \; \frac{T}{T_у} = \beta, \; \bar{t} = \frac{t}{T},$$

а также учитывая, что

$$i_г = I_m \sin(\omega t + \psi), \text{ а } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

можно получить $n \leqslant \bar{t} \leqslant n + \gamma$,

$$\beta \cdot I = \frac{di_d}{d\bar{t}} + \beta i_d + \frac{d\,[I_m(\bar{t}) \sin(2\pi\bar{t} + \psi)]}{d\bar{t}};$$

$$n + \gamma \leqslant \bar{t} \leqslant n + 1, \tag{6.58}$$

$$0 = \frac{di_d}{d\bar{t}} + \beta i_d + \frac{d\,[I_m(\bar{t}) \sin(2\pi\bar{t} + \psi)]}{d\bar{t}}. \tag{6.59}$$

Дальнейшее преобразование уравнений (6.58), (6.59) зависит от вида функции $I_m(\bar{t})$, представляющей собой амплитуду тока $i_г(\bar{t})$. В переходных режимах $I_m(\bar{t})$ непрерывно изменяется, но вследствие большой длительности переходных процессов в реальных усилителях (20 и более периодов) без особой ошибки можно принять, что внутри каждого периода $I_m(\bar{t})$ остается постоянной и является функцией только номера периода, то есть

$$I_m(\bar{t}) = I_m(n).$$

С учетом этого уравнения (6.58), (6.59) преобразуются в

$$\frac{di_d}{d\bar{t}} + \beta i_d = I \cdot \beta - I_m(n)\, 2\pi \cos(2\pi\bar{t} + \psi), \tag{6.60}$$

$$\frac{di_d}{d\bar{t}} + \beta i_d = -I_m(n) \cdot 2\pi \cos(2\pi\bar{t} + \psi). \tag{6.61}$$

Поскольку $I_m(n)$ изменяется скачкообразно, то на границах периодов функция i_d разрывна и ни начало, ни конец периода не могут быть включены в область ее задания. Последняя должна быть установлена:

для уравнения (6.60) $n + \delta < \bar{t} \leqslant n + \gamma$,

$$\delta \to 0;$$

для уравнения (6.61) $n + \gamma \leqslant \bar{t} < n + 1 - \delta$,

$$\delta \to 0.$$

Внутри указанных интервалов $i_d(\bar{t})$ непрерывна (см. рис. 6.12) и решение уравнений (6.60) и (6.61) могут быть найдены по известному выражению

$$i_d(\bar{t}) = \left[\int Q(\bar{t})\, e^{\int P(\bar{t})d\bar{t}} d\bar{t} + \Lambda\right] e^{-\int P(\bar{t})d\bar{t}},$$

где $Q(\bar{t})$ — правая часть уравнений (6.60), (6.61); $P(\bar{t}) = \beta$.

Тогда получим $n + \delta < \bar{t} \leqslant n + \gamma$:

при $\delta \to 0$

$$i_{d1}(\bar{t}) = \Lambda e^{-\beta\bar{t}} + I - \frac{I_m(n)\, 2\pi}{\beta^2 + 4\pi^2} [2\pi \sin(2\pi\bar{t} + \psi) + $$
$$+ \beta \cos(2\pi\bar{t} + \psi)] \tag{6.62}$$

и при

$$n + \gamma \leqslant \bar{t} \leqslant n + 1 - \delta, \quad \delta \to 0,$$

$$i_{d2}(\bar{t}) = \Lambda_1 e^{-\beta\bar{t}} - \frac{I_m(n) \cdot 2\pi}{\beta^2 + 4\pi^2} [2\pi \sin(2\pi\bar{t} + \psi) + $$
$$+ \beta \cos(2\pi\bar{t} + \psi)]. \tag{6.63}$$

Заменим переменную $\bar{t}$ на $\bar{t} - n$, тогда

$$i_{d1}(\bar{t}) = \Lambda e^{-\beta(\bar{t}-n)} - I_m(n) \cdot K [2\pi \sin(2\pi\bar{t} + \psi) + $$
$$+ \beta \cos(2\pi\bar{t} + \psi)] + I, \tag{6.64}$$

$$i_{d2}(\bar{t}) = \Lambda_1 e^{-\beta(\bar{t}-n)} - I_m(n) \cdot K [2\pi \sin(2\pi\bar{t} + \psi) +$$

$$+\beta\cos(2\pi\bar{t}+\psi)], \tag{6.65}$$

где

$$K=\frac{2\pi}{\beta^2+4\pi^2}.$$

Если $\bar{t}=n+0$ (справа от точки разрыва), то

$$i_{d1}(n+0)=\Lambda+I-I_m(n)\cdot K[2\pi\sin\psi+\beta\cos\psi],$$

откуда $\qquad \Lambda=i_{d1}(n)-I+K_1I_m(n),$

где $\qquad K_1=K[2\pi\sin\varphi+\beta\cos\psi].$

Найденное значение подставим в (6.64):

$$i_{d1}(\bar{t})=[i_d(n)-I+K_1I_m(n)]e^{-\beta(\bar{t}-n)}+I-KI_m(n)\times$$

$$\times[2\pi\sin(2\pi\bar{t}+\psi)+\beta\cos(2\pi(\bar{t})+\psi)]. \tag{6.66}$$

Постоянная Λ_1 для (6.65) найдется припасовыванием решений (6.64) и (6.65) при $t=n+\gamma$:

$$A_1=i_d(n)-I+K_1I_m(n)+Ie^{\beta\gamma}. \tag{6.67}$$

Подставляя A_1 из (6.67) в (6.65), получим

$$i_{d2}(\bar{t})=[i_d(n)-I+K_1I_m(n)+Ie^{\beta\gamma}]e^{-\beta(\bar{t}-n)}-$$

$$-KI_m(n)[2\pi\sin(2\pi\bar{t}+\psi)+\beta\cos(2\pi\bar{t}+\psi)]. \tag{6.68}$$

Выражения (6.66) и (6.68) определяют закон изменения тока i_d в любой момент времени, но для этого нужно определить неизвестные функции $i_d(n)$ и $I_m(n)$. Амплитуда генератора тока $I_m(n)$ в реальных усилителях зависит от ряда факторов, например от среднего значения тока подмагничивания, от величины и характера нагрузки. Эти связи здесь не устанавливаются. Здесь пока используется то важное обстоятельство, что $I_m(n)$ не может стать больше среднего значения тока $I_{dср}$ и связь $I_m(n)$ с $I_{dср}(n)$ в n-й период устанавливается выражением

$$I_{m\cdot n}=K_{Mi}\cdot I_{dсрn}. \tag{6.69}$$

Здесь K_{Mi} — коэффициент модуляции тока подмагничивания. $I_{dср}$ за n-й период найдется как интеграл от функции $i_d(\bar{t})$, то есть

$$I_{dсрn}=\int\limits_{n+0}^{n+1-0}i_d(\bar{t})\,d\bar{t}=\int\limits_{n+0}^{n+\gamma}id_1(\bar{t})\,d\bar{t}+\int\limits_{n+\gamma}^{n+1-0}id_2(\bar{t})\,d\bar{t}.$$

Подставляя сюда (6.66) и (6.69), можно получить

$$I_{dcpn} = \frac{1}{\beta} i_d(n)(1 - e^{-\beta}) + \frac{1}{\beta} K_1 I_m(n)(1 - e^{-\beta}) +$$

$$+ I\gamma + \frac{1}{\beta} I e^{-\beta}(1 - e^{\beta\gamma}). \qquad (6.70)$$

Выражение (6.69) с учетом (6.70) получит вид

$$I_m(n) = \frac{1}{K_3\beta} i_d(n)(1 - e^{-\beta}) + \frac{1}{K_3} I\gamma + \frac{1}{K_3\beta} I e^{-\beta}(1 - e^{\beta\gamma}), \qquad (6.71)$$

где

$$K_3 = \left[\frac{1}{K_{Mi}} - \frac{K_1}{\beta}(1 - e^{-\beta})\right].$$

Таким образом, осталась одна неизвестная функция $i_d(n)$, для нахождения которой необходимо составить и решить разностное уравнение, устанавливающее связь между дискретами тока в моменты времени $\bar{t} = n + 1 + 0$ (справа от точки разрыва), соответствующие началу каждого импульса. Разностное уравнение может быть составлено на том основании, что ток в индуктивности L_y не имеет разрывов. Тогда из исходных выражений

$$i_L = i_d + i_r, \quad i_r = I_m \sin(2\pi\bar{t} + \Psi)$$

можно записать

$$\bar{t} = n + 1 - 0,$$

$$i_d(n+1-0) = i_L(n+1-0) - i_r(n+1-0),\ i_r(n+1-0) =$$

$$= I_m(n)\sin\Psi.$$

При $\bar{t} = n + 1 + 0$,

$$i_d(n + 1 + 0) = i_L(n + 1 + 0) - i_r(n + 1 + 0),$$

$$i_r(n + 1 + 0) = I_m(n + 1)\sin\psi$$

$I_m(n + 1)$ найдется по (6.71), если n заменить на $n + 1 + 0$:

$$I_{m(n+1)} = \frac{1}{K_3\beta} i_d(n + 1 + 0)(1 - e^{-\beta}) + \frac{1}{K_3} I\gamma +$$

$$+ \frac{1}{K_3\beta} I e^{-\beta}(1 - e^{-\beta\gamma}). \qquad (6.72)$$

Поскольку ток в индуктивности не имеет разрывов, можно записать

$$i_L(n+1-0) = i_L(n+1+0)$$

и найти $i_L(n+1-0) = i_d(n+1-0) + i_г(n+1-0)$, а затем и $i_d(n+1+0) = i_d(n+1-0) + i_г(n+1-0) - i_г(n+1+0)$. С учетом значения тока $i_г$ получим

$$i_d(n+1+0) = i_d(n+1-0) + I_m(n)\sin\psi - I_m(n+1)\sin\psi. \qquad (6.73)$$

Величина $i_d(n+1-0)$ найдется по (6.68) при $\bar{t} = n+1-0$ и $I_m(n)$ по (6.71):

$$i_d(n+1-0) = [i_d(n+0) - I + Ie^{\beta\gamma}]e^{-\beta} - \left[\frac{K_1}{K_з\beta} i_d(n+0)\times(1-e^{-\beta}) + \frac{K_1}{K_з} I\gamma + \frac{K_1}{K_з\beta} Ie^{-\beta}(1-e^{\beta\gamma})\right][1-e^{-\beta}]. \qquad (6.74)$$

Тогда

$$i_d(n+1+0) = [i_d(n+0) - I + Ie^{\beta\gamma}]e^{-\beta} - [Аi_d(n+0) + БI\gamma + ВI](1-e^{-\beta}) + Гi_d(n+0) - Гi_d(n+1+0), \qquad (6.75)$$

где

$$А = \frac{K_1}{K_з\beta}(1-e^{-\beta});\ Б = \frac{K_1}{K_з};\ В = \frac{K_1}{K_з\beta}e^{-\beta}(1-e^{\beta\gamma});$$

$$Г = \frac{\sin\psi}{K_з\beta}(1-e^{-\beta}).$$

Введя обозначения решетчатой функции, характеризуемой дискретными значениями тока:

$$i_d(n+1+0) = i_d[n+1],\ i_d(n+0) = i_d[n],$$

и приведя подобные члены в (6.75), можно получить разностное уравнение, устанавливающее связь дискретных значений тока:

$$i_d[n+1] - Di_d[n] = Q, \qquad (6.76)$$

где $D = \dfrac{e^{-\beta} - А(1-e^{-\beta}) + Г}{1+Г}$,

$$Q = \frac{I\,[\text{Б}\gamma\,(e^{-\beta} - 1) + \text{В}\,(e^{-\beta} - 1) - e^{-\beta} + e^{\beta(\gamma-1)}}{1 + \Gamma}.$$

Таким образом, получено неоднородное линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, которое может быть решено, например, классическим методом:

$$i_d\,[n] = i_{d\,уст}\,[n] + i_{d\,своб}\,[n]. \tag{6.77}$$

Здесь $i_{d\,уст}\,[n] = C$, причем в установившемся режиме

$$i_d\,[n + 1] = i_d\,[n].$$

Тогда $C - D\cdot C = Q$ и $C = \dfrac{Q}{1 - D}$,

$$i_{d\,уст}\,[n] = \frac{Q}{1 - D}.$$

$i_{d\,своб}\,[n]$ найдется из однородного уравнения

$$i_d\,[n + 1] - D i_d\,[n] = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$i_{d\,св}\,[n] = C_1 \lambda^n,$$

где λ — корень характеристического уравнения.

Тогда $\lambda - D = 0$, $\lambda = D$ и $i_{d\,св}[n] = C_1 D^n$.
Значение C_1 найдется из начальных условий, определение которых здесь имеет свою специфику, связанную со скачкообразным изменением $I_m(n)$.

При $n = 0_{+0}$ имеем $i_d\,(0_{+0}) = i_L\,(0_{+0}) - i_r\,(0_{+0})$, $i_L\,(0_{+0}) = 0$, тогда

$$i_d\,(0_{+0}) = -\,i_r\,(0_{+0}) = -\,I_m\,(0)\sin\psi, \tag{6.78}$$

$$I_m\,(0) = \frac{1}{K_з\beta}\,(1 - e^{-\beta})\,i_d\,(0_{+0}) + \frac{1}{K_з}\,I\cdot\gamma + \frac{1}{K_з\beta}\,I e^{-\beta} \times$$
$$\times\,(1 - e^{\beta\gamma}). \tag{6.79}$$

Подставляя $I_m(0)$ из (6.79) в (6.78) и учитывая обозначение решетчатой функции, можно получить

$$i_d\,[0] = -\,\frac{I \sin\psi\,[\beta\gamma + e^{-\beta}\,(1 - e^{-\beta\gamma})]}{K_з\beta\,(1 + \Gamma)}. \tag{6.80}$$

Учитывая, что

$$i_d\,[0] = i_{d\,уст}\,[0] + i_{d\,своб}\,[0],\ \text{а}\ i_{d\,уст}\,[0] = \frac{Q}{1 - D},$$

получим $i_{d\text{своб}}[0] = C_1$,

$$-\frac{I\sin\psi[\beta\gamma + e^{-\beta}(1-e^{\beta\gamma})]}{K_3\beta(1+\Gamma)} = \frac{Q}{1-D} + C_1,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{I\sin\psi[\beta\gamma + e^{-\beta}(1-e^{\beta\gamma})]}{K_3\beta(1+\Gamma)} - \frac{Q}{1-D}.$$

Тогда

$$i_d(n) = i_{d\text{уст}}[n] + i_{d\text{своб}}[n] = \frac{Q}{1-D} + C_1 D^n =$$

$$= \frac{Q}{1-D} - \left(C_1' + \frac{Q}{1-D}\right) D^n = \frac{Q}{1-D}(1-D^n) - C_1' D^n.$$

Для большей наглядности можно записать

$$D^n = e^{\ln D\cdot n} = e^{-\beta_э n}, \text{ где } \beta_э = \ln\left(\frac{1}{D}\right),$$

и после всех подстановок $i_d[n] = \dfrac{I[K_{Mi}K_1\gamma(e^{-\beta}+1)+}{} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{+e^{-\beta}(e^{\beta\gamma}-1)]}{1-e^{-\beta}}(1-e^{-\beta_э n}) - \frac{K_{Mi}\cdot I\sin\psi[\beta\gamma -}{\beta - K_1' K_{Mi}(1-e^{-\beta}) +}$$

$$\frac{-e^{-\beta}(1-e^{\beta\gamma})]}{+K_{Mi}\sin\psi(1-e^{-\beta})} \times e^{-\beta_э n}. \qquad (6.81)$$

Выражение (6.81) является более общим по отношению к известным при регулировании тока в активно-индуктивной нагрузке. Так, при $K_{Mi} = 0$, $D = e^{-\beta}$ $C_1' = 0$

$$\text{и } i_d[n] = \frac{Ie^{-\beta}(e^{\beta\gamma}-1)}{1-e^{-\beta}}(1-e^{-\beta n}).$$

При подстановке (6.81) в (6.71) находится $I_m(n)$:

$$I_m(n) = \frac{K_{Mi}(1-e^{-\beta})}{\beta K_{Mi}K_1(1-e^{-\beta})}[C(1-e^{-\beta_э n}) - C_1' e^{-\beta_э n}] +$$

$$+ \frac{K_{Mi}I\gamma\beta}{\beta - K_{Mi}\cdot K_1(1-e^{-\beta})} + \frac{K_{Mi}Ie^{-\beta}(1-e^{-\beta\gamma})}{\beta - K_{Mi}K_1(1-e^{-\beta})}.$$

$$(6.82)$$

Необходимо (6.81) и (6.82) подставить в (6.66) и (6.68), чтобы найти закон изменения тока в любой момент времени.

При этом обычно полагают $t = n + \varepsilon$, тогда

$$i_{d1}(n;\ \varepsilon) = [i_d[n] - I + K_1 I_m[n]]\, e^{-\beta\varepsilon} + I -$$
$$- K I_m[n]\,[2\pi \sin(2\pi\varepsilon + \psi) + \beta\cos(2\pi\varepsilon + \psi)],\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma; \quad (6.83)$$

$$i_{d2}(n;\ \varepsilon) = [i_d[n] - I + K_1 I_m[n] + I e^{\beta\gamma}]\, e^{-\beta\varepsilon} -$$
$$- K I_m[n]\cdot[2\pi \sin(2\pi\varepsilon + \psi) + \beta\cos(2\pi\varepsilon + \psi)], \quad (6.84)$$
$$\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1.$$

Задавая последовательные значения $n = 0, 1, 2\ldots$ и меняя ε в установленных пределах, можно рассчитать кривую изменения мгновенных значений тока i_d в переходном режиме. Можно задать любое требуемое n (например, $n = 10$) и рассчитать кривую изменения тока только на $n+1$-м (11-м) периоде. При подстановке в (6.83), (6.84) $i_{d\,уст}[n]$, $I_{m\,уст}[n]$ получим кривую изменения тока в установившемся режиме.

Глава 7. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПОДГОТОВКИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ЭВМ

Как указывалось в пятой главе, реализация математической модели начинается с выбора цели ее, определяющей направленность дальнейших действий. Результаты исследования модели позволяют конкретизировать дальнейшие действия по пути ее реализации. Однако до получения конкретных результатов с помощью ЭВМ еще очень далеко. Трудность заключается в том, что именно на этом этапе надо достаточно хорошо представить изучаемый объект с позиций конкретной науки, то есть представлять физику изучаемых процессов, затем изучаемый объект надо видеть с позиций математики. Наконец, нужно умение владеть методами вычислительной математики, знать особенности используемой вычислительной техники и уметь составлять и отлаживать программы для ЭВМ.

Полный анализ электронной схемы требует использования широкого набора методов вычислений. Так, необходимость использования дискретно заданных функций, например вольт-амперных характеристик диодов, требует знания теории приближений и теории интерполяции; исследование спектрального состава выходного сигнала требует знания методов численного интегрирования; нахождение установившихся решений, являющихся точками покоя нелинейной автономной системы, требует знания методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений и так далее.

Можно, конечно, использовать стандартные процедуры, имеющиеся в системе математического обеспечения ЭВМ, не вникая в суть используемых в этих процедурах методов. Такой подход был бы оправдан, если бы используемые в стандартных процедурах алгоритмы обладали свойством универсальности. Но это далеко не так. Поэтому, как показывает практика, если стандартная процедура не срабатывает или выдает неверный результат, то причина этого может быть в том, что в алгоритме не учтена специфика решаемой задачи. И для того чтобы метод «заработал», необходимо провести коррекцию информации, поступающей на вход процедуры. Такая коррекция не будет успешной без знания методов вычислений.

В данной главе кратко рассматриваются лишь те методы, которые связаны с реализацией основных целей анализа — исследования устойчивости, нахождения установившихся и переходных решений. Проектирование электронных устройств самым непосредственным образом связано с методами оптимизации, которые здесь не рассматриваются, но представление о которых можно получить из литературных источников [34].

7.1. О численных методах исследования устойчивости установившихся решений

В предыдущих главах было показано, что устойчивость установившихся решений определяется расположением в комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$D(\lambda)=\det|A-\lambda E|=0. \qquad (7.1)$$

Существует полная и частичная проблема собственных значений [34]. В первом случае необходимо получение всех собственных чисел матрицы A. Во втором — достаточно получить лишь некоторую информацию относительно собственных чисел матрицы A.

Например, проблема исследования устойчивости установившегося решения в случае линейных систем с постоянной матрицей является частичной проблемой собственных значений, поскольку требуется узнать лишь расположение собственных чисел относительно мнимой оси. Для анализа электронных схем желательно решение полной проблемы собственных значений, так как собственные числа могут дать много полезной информации относительно изучаемого объекта (разброс постоянных времени, запас устойчивости, наличие колебательных процессов и их частоты и т. д.).

Раскрывая определитель в (7.1), можно показать, что

$$D(\lambda)=d_0+d_1\lambda+\ldots+d_{n-1}\lambda^{N-1}+d_n\lambda^N. \qquad (7.2)$$

Существуют два подхода к решению полной проблемы собственных значений. Рассмотрим сначала первый из них, основанный на получении многочлена (7.2) и нахождении его корней.

Непосредственное раскрытие определителя с целью приведения к виду (7.2) требует порядка $N!\,N$ арифметических операций. Как показано в [34], уже при $N=30$ такое количество операций недоступно современным ЭВМ. Поэтому для определения характеристического многочлена используют другие методы. Одним из наиболее эффективных является метод приведения матрицы A к подобной ей матрице P почти треугольного вида

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2N} \\ \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} \dots a_{NN} \end{bmatrix} \rightarrow P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \dots p_{N-1} & p_N \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы A и P связаны соотношением

$$P=S^{-1}A\cdot S,$$

где S — неособенная матрица, которая получается рядом последовательных элементарных преобразований. Элементарные преобразования матрицы заключаются либо в перестановке двух строк или столбцов, либо в умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) на одно и то же отличное от нуля число, либо в преобразовании элементов какой-либо строки (столбца) путем прибавления к ее элементам соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число. Любое элементарное преобразование матрицы равносильно ее умножению на некоторую неособенную матрицу. Например, перестановка первой и последней строк матрицы A эквивалентна умножению ее слева на матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которая получается из единичной путем переставления ее первой и последней строки. Последовательность элементарных преобразований, приводящих к матрице P, можно изобразить в виде рекуррентного соотношения

$$P_к = S_к^{-1} P_{к-1} S_к, \tag{7.3}$$
$$к = 1,\ N-1,$$
$$P_0 = A,\ P_{N-1} = P.$$

Суть первого преобразования матрицы A или нахождение матрицы P_1 заключается в том, что последняя строка матрицы $AS_1 = P_0 S_1$ принимает вид последней строки матрицы P. Умножение матрицы $P_0 S$ на S^{-1} слева не меняет вида последней строки, то есть

$$P_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N-1}^{(1)} & a_{1N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N-11}^{(1)} & a_{N-12}^{(1)} & \cdots & a_{N-1N-1}^{(1)} & a_{N-1N}^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом строятся последующие преобразования, пока не будет сформирована матрица P. Поскольку матрицы A, P подобны, они имеют одно и то же характеристическое уравнение, причем для матрицы P это характеристическое уравнение легко получить

$$D(\lambda) = \det|P - \lambda E| = \begin{bmatrix} P_1 - \lambda & P_2 & P_3 & \cdots & P_N \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

разлагая определитель по элементам первой строки:

$$D(\lambda) = (p_1 - \lambda)(-\lambda)^N - p_2(-\lambda)^{N-2} + p_3(-\lambda)^{N-3} - \\ - \ldots + (-1)^{N-1} p_N$$

или

$$D(\lambda) = (-1)^N [\lambda^N - p_1\lambda^{N-1} - p_2\lambda^{N-2} - p_3\lambda^{N-3} - \\ - \ldots - p_N].$$

Матрицу Р называют *матрицей Фробениуса*, а метод получения *методом Данилевского*. Дальнейшие действия для получения собственных чисел связаны с нахождением корней многочлена $D(\lambda)$. В системе математического обеспечения ЕС ЭВМ имеется стандартная процедура EVCPD на языке ФОРТРАН, которая формирует характеристический многочлен по методу Данилевского и, если это требуется, с помощью другой стандартной процедуры определяет собственные числа.

Суть методов, не требующих раскрытия определителя в (7.1), покажем на примере положительно определенной симметрической матрицы A, то есть когда имеет место равенство элементов, симметричных относительно главной диагонали, и определители главных миноров положительны. В этом случае, как показано в [34], можно построить сходящийся итерационный процесс по схеме, аналогичной (7.3):

$$P_K = SP_{K-1}S_K, \quad K=1, 2, \ldots, \quad P_0 = A.$$

Матрица S_K каждого из преобразований строится таким образом, чтобы сумма квадратов недиагональных элементов матриц P_K с ростом K стремилась к нулю. Итерационный процесс прекращается, пока все недиагональные элементы не станут достаточно малыми. При этом диагональные элементы становятся близки к собственным числам. В случае произвольной матрицы A также можно построить итерационный процесс, но это делается несколько сложнее. В ЕС ЭВМ проблема собственных чисел для произвольных матриц итерационным путем решается процедурой EVVGM, также написанной на ФОРТРАНе.

7.2. Некоторые схемы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений

Поиск установившегося и переходного процесса требует нахождения решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X)$$

в определенном временном интервале.

Для того чтобы использовать в расчетах ЭВМ, надо перейти от непрерывной (или континуальной) записи модели к записи дискретной. С целью реализации этой идеи разобьем всю область интегрирования на отрезки равной длины

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots < t_M = T.$$

Тем самым непрерывной области изменения аргумента t поставлена в соответствие дискретная область изменения этого аргумента

$$(0 \leqslant t \leqslant T) \sim (t_0, t_1, \ldots, t_M).$$

Величину $h=t_{\kappa+1}-t_\kappa$, $\kappa=\overline{0, M}$ называют шагом дискретизации, или шагом интегрирования. Дискретную область изменения аргумента назовем сеточной областью, моменты времени t_κ — узлами сеточной области, M — номер последнего узла сеточной области. Если узлы сеточной области распределены неравномерно, то шаг дискретизации зависит от номера узла. В этом случае говорят, что задана неравномерная сетка. Значения искомых функций в узлах сеточной области будем обозначать

$$X(t_\kappa)=X_\kappa.$$

В κ-м узле сеточной области на основании исходного уравнения имеем

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_\kappa = G_\kappa,\ G_\kappa = G(t_\kappa,\ X_\kappa). \tag{7.4}$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$X_{\kappa+1} = X(t_\kappa+h) = X_\kappa + h\left(\frac{dX}{dt}\right)_\kappa + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)_\kappa + \ldots,$$

можно записать

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_\kappa = \frac{X_{\kappa+1}-X_\kappa}{h} - \frac{h}{2}\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)_\kappa - \ldots$$

Подставляя это значение производной в (7.4), будем иметь

$$\frac{X_{\kappa+1}-X_\kappa}{h} = G_\kappa + 0(h), \tag{7.5}$$

где

$$0(h) = \frac{h}{2!}\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)_\kappa + \ldots$$

Отбрасывая в (7.5) слагаемые порядка $0(h)$, получим

$$\frac{X_{\kappa+1}-X_\kappa}{h} = G_\kappa. \tag{7.6}$$

Сразу следует отметить, что X_κ в (7.5) и (7.6) различны: в (7.5) — это решение системы дифференциальных уравнений в κ-м узле, а в (7.6) — решение системы алгебраических уравнений, или, как обычно говорят, системы разностных уравнений. Поскольку системы (7.5), (7.6) отличаются на слагаемое порядка $0(h)$, то говорят, что система разностных уравнений апроксимирует исходную систему дифференциальных с порядком $0(h)$ или с первым порядком.

В случае $h \to 0$ система (7.5) стремится принять вид (7.6). Естественно предположить, что при этом решения дифференциальных и разностных уравнений сближаются. И если h будет мало, то и решения этих уравнений будут мало различаться. Как показано в [46], для линейных систем это действительно имеет место, если кроме аппроксимации будет иметь место и устойчивость разностных уравнений, то есть нечувствительность к ошибкам округления. Практика вычислений показывает, что и в случае нелинейных систем выполнение условий аппроксимации и устойчивости влечет за собой сходимость решений разностных к решениям дифференциальных уравнений.

Разрешая уравнения (7.6) относительно $X_{к+1}$, получим

$$X_{к+1} = X_к + hG_к.$$

Эта рекуррентная зависимость позволяет считать $X_{к+1}$ по известному $X_к$. Система разностных уравнений (7.6) носит название *явной схемы Эйлера*. Явная схема Эйлера получена с помощью аппроксимации производной разностью вперед, то есть приращение функции в $к$-м узле получалось с использованием ее значения в последующем узле $к+1$. Если аппроксимировать производную разностью назад, получим *неявную схему Эйлера*

$$\frac{X_к - X_{к-1}}{h} = G(t, X_к),$$

или

$$\frac{X_{к+1} - X_к}{h} = G(t_{к+1}, X_{к+1}), \qquad (7.7)$$

которая тоже имеет порядок аппроксимации $0(h)$. Здесь уже для нахождения $X_{к+1}$ по известному $X_к$ надо в каждом узле решать, вообще говоря, нелинейную систему (7.7) относительно компонент вектора $X_{к+1}$.

Схемы Эйлера являются простейшими из всех схем численного интегрирования. Из-за небольшой точности их практическая ценность невелика. Однако имеет смысл использовать их в отладочных расчетах, когда прежде всего важно выяснить качественную сторону модели. Кроме того, эти схемы удобны для иллюстрации явления неустойчивости численных расчетов.

Можно построить численные схемы, имеющие более высокий порядок аппроксимации. В качестве источника получения таких схем используем, с учетом (7.4), приведенное ранее разложение в ряд Тейлора

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + hG_\kappa + \frac{h^2}{2!}\,\frac{dG_\kappa}{dt} + 0\,(h^3).$$

Использование двух членов этого разложения позволило получить явную схему Эйлера. Использование третьего члена позволит получить схему с порядком $0(h^2)$, но для этого надо получить аппроксимацию производной dG_κ/dt с порядком $0(h)$. При этом возникают разные варианты.

1. Представим производную в виде

$$\frac{dG}{dt} = \frac{G_{\kappa+1} - G_\kappa}{h} + 0\,(h).$$

Подставляя эту производную в разложение в ряд Тейлора, отбрасывая слагаемые $0(h^2)$ и преобразуя, находим

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \frac{h}{2}\,(G_\kappa + G_{\kappa+1}). \tag{7.8}$$

Эта схема носит название *схемы трапеций*. Такое название объясняется следующими причинами. Если от исходной системы дифференциальных уравнений перейти к эквивалентной записи

$$X\,(t) = x_\kappa + \int\limits_{t_\kappa}^{t} G\,(X,\ t)\,dt,$$

то на основании этой записи

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \int\limits_{t_\kappa}^{t_{\kappa+1}} G\,(X,\ t)\,dt.$$

Используя здесь для вычисления интеграла формулу трапеций, получим схему (7.8). Схема (7.8) неявная. Ее можно модифицировать с целью получения явных зависимостей. Для этого надо найти аппроксимацию $X_{\kappa+1}$ с порядком $0(h^2)$ и подставить в правую часть (7.8). При этом порядок аппроксимации схемы (7.8) останется $0(h^2)$. Такому условию соответствует пара формул

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + hG_\kappa;$$

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \frac{h}{2}\,[G_\kappa + G(t_{\kappa+1},\ \overline{X}_{\kappa+1})],$$

где для аппроксимации $\overline{X}_{\kappa+1}$ используется схема Эйлера (первая формула). Полученную схему можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &Z_1 = hG_\kappa,\\ &Z_2 = hG(t_\kappa + h,\ X_\kappa + Z_1),\\ &X_{\kappa+1} = X_\kappa + \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2. \end{aligned}\right| \qquad (7.9)$$

Схему (7.9) называют модифицированной схемой трапеций.

2. Представим теперь производную в виде

$$\frac{dG_\kappa}{dt} = \frac{G_{\kappa+1/2} - G_\kappa}{h/2} + 0(h),$$

где

$$G_{\kappa+1/2} = G\,(t_{\kappa+1/2},\ X_{\kappa+1/2}),$$

$$t_{\kappa+1/2} = t_\kappa + \frac{h}{2},\ X_{\kappa+1/2} = X\,(t_{\kappa+1/2}).$$

Для аппроксимации $X_{\kappa+1/2}$ с порядком $0(h^2)$ снова выберем схему Эйлера. Действуя аналогично предыдущему, находим

$$X_{\kappa+1/2} = X_\kappa + \frac{h}{2}G_\kappa,$$

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \frac{h}{2}G\,(t_{\kappa+1/2},\ X_{\kappa+1/2})$$

или

$$\left.\begin{aligned} &Z_1 = hG_\kappa,\ Z_2 = hG\left(t_\kappa + \frac{h}{2},\ X_\kappa + \frac{Z_1}{2}\right),\\ &X_{\kappa+1} = X_\kappa + \frac{1}{2}Z_2. \end{aligned}\right| \qquad (7.10)$$

Схемы (7.9), (7.10) относятся к семейству *методов Рунге—Кутта*. Общий вид этих схем наводит на мысль обобщить процедуру поиска более высоких аппроксимаций. Для этого схему Рунге—Кутта представляют в обобщенном виде

$$Z_1 = hG_\kappa,$$

$$Z_2 = hG(t_\kappa + \alpha_2 h,\ X_\kappa + \beta_{21} Z_1),$$

. . . .

$$Z_q = hG(t_\kappa + \alpha_q h,\ X_\kappa + \beta_{q,1} Z_1 + \cdots + \beta_{q,q-1} Z_{q-1}),$$

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \sum_{i=1}^{q} P_i Z_i.$$

Здесь q — порядок аппроксимации, а параметры

$$\alpha_2, \ldots, \alpha_q,\ \beta_{ij},\ P_1, \ldots, P_q,\ 0 < j < i \leqslant q$$

подбираются таким образом, чтобы

$$\sum_{i=1}^{q} P_i Z_i = hG_\kappa + \frac{h^2}{2!} \frac{dG_\kappa}{dt} + \cdots + \frac{h^q d^q G_\kappa}{q! dt^q} + 0(h^{q+1}).$$

Процедура получения указанных параметров для различных q изложена в [34]. Схемы (7.9), (7.10) соответствуют случаю $q=2$. Неединственность вариантов схем имеет место и при $q>2$. Одна из наиболее употребительных схем Рунге—Кутта с порядком аппроксимации $0(h^4)$ имеет вид

$$Z_1 = hG_\kappa,$$

$$Z_2 = hG\left(t_\kappa + \frac{h}{2},\ X_\kappa + \frac{Z_1}{2}\right),$$

$$Z_3 = hG\left(t_\kappa + \frac{h}{2},\ X_\kappa + \frac{Z_2}{2}\right),$$

$$Z_4 = hG(t_{\kappa+1},\ X_\kappa + Z_3),$$

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa + \frac{1}{6}[Z_1 + 2(Z_2 + Z_3) + Z_4].$$

В системе математического обеспечения ЕС ЭВМ на языке ФОРТРАН есть стандартные процедуры *RK*1, *RK*2, *RKGS*, в которых используется эта схема.

Недостаток методов Рунге—Кутта заключается в том, что правую часть системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = G(X,\ t)$$

приходится несколько раз считать на каждом шаге интегрирования. От этого недостатка свободны так называемые конечно-разностные методы. Один из подходов конструирования разностных схем заключается в построении аппроксимации

$$\frac{dX_k}{dt} \approx \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{q} a_{-i} X_{k-i},$$

$$G_k \approx \sum_{i=0}^{q} b_{-i} G_{k-i},$$

которым соответствует разностная схема

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{q} a_{-i} X_{k-i} = \sum_{i=0}^{q} b_{-i} G_{k-i}.$$

Порядок аппроксимации здесь определяется величиной q и постоянными a_{-i}, b_{-i}. Примером простейших разностных схем являются рассмотренные ранее схемы Эйлера и схема трапеций.

Выбор той или иной схемы численного интегрирования определяется не только из соображений точности (порядок аппроксимации), удобства и экономичности (явные схемы), но и из соображений ее устойчивости. Рассмотрим анализ устойчивости на примере схем Эйлера. В случае линейных систем с постоянной матрицей явная схема Эйлера (7.6) примет вид

$$X_{k+1} = X_k + hAX_k + hB_k. \tag{7.11}$$

Пусть на некотором шаге в процессе вычисления допущена ошибка. Возможность таких ошибок всегда имеется при использовании ЭВМ хотя бы уже потому, что машина оперирует числами с конечным числом знаков. Возмущенное решение разностного уравнения представим в виде

$$\tilde{X}_k = X_k + \varepsilon_k.$$

Подставляя это решение в (7.11), относительно возмущений получим

$$\varepsilon_{k+1} = (E + hA)\,\varepsilon_k,$$

общее решение этого разностного уравнения имеет вид

$$\varepsilon_k = (E + hA)^k\,\varepsilon_0,$$

где ε_0 — начальное возмущение.

Поиск установившихся решений и исследование переходных процессов предполагает интегрирование неходной системы в неограниченной области временной переменной. При этом шаг интегрирования h фиксирован, а $t \to \infty$, $M \to \infty$.

Ясно, что поведение ε_k при $k \to \infty$ будет определяться свойствами матрицы $E+hA$. Предполагая, что собственные числа матрицы A различны, будем иметь

$$(E+hA)^k = S(E+h\Lambda)^k S^{-1}.$$

Достаточным условием устойчивости будет неравенство

$$|1+h\lambda_p| < 1, \ p=\overline{1, n},$$

или

$$\left|\frac{1}{h}+\lambda_p\right| < \frac{1}{h}. \tag{7.12}$$

Это неравенство означает, что условием устойчивости явной схемы Эйлера является такой выбор h, чтобы все собственные числа матрицы A находились внутри круга с центром в точке $\lambda = -\frac{1}{h}$ и радиусом $1/h$. В случае устойчивых периодических решений всегда можно подобрать h, чтобы выполнялось условие (7.12). Однако может оказаться, что h будет очень мало. Это имеет место, когда собственные числа матрицы A

$$\lambda = \lambda_r + j\lambda_i$$

имеют большие $|\lambda_r|$ или большие $|\lambda_i|$ относительно периода и частоты внешних воздействий, т. е. когда в электронной схеме имеют место быстрые или сильноосциллирующие движения.

Нетрудно показать, что условие устойчивости в случае неявной схемы Эйлера имеет вид

$$\left|\frac{1}{h}-\lambda_p\right| > \frac{1}{h}.$$

Для устойчивых периодических решений это условие всегда выполнено, т. е. неявная схема Эйлера абсолютно устойчива.

Анализ устойчивости явной и неявной схем Эйлера в общем отражает типичную ситуацию, имеющую место при численной реализации систем дифференциальных уравнений: неявные схемы, как правило, устойчивы, в то время как явные условно устойчивы, то есть требуют ограничения на шаг интегрирования.

7.3. Подготовка математической модели к численной реализации

Процесс подготовки математической модели к численной реализации заключается в выборе метода расчета и построении структуры алгоритма в виде блок-схемы (см. рис. 5.2, *б*) и определяется выбором цели реализации.

Рассмотрим, для примера, подготовку к численной реализации математической модели вида

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\,X + B(t). \tag{7.13}$$

Цель реализации заключается в получении характеристических чисел системы и нахождении установившегося периодического решения, период которого T известен.

В 5.5.2 рассмотрен метод поиска периодического решения для систем вида (7.13). Вектор начальных условий для периодического решения $X_{r}(0) = Q$ находится из выражения

$$Q = [E - F(T)]^{-1} X_0(T),$$

где $X_0(t)$ — решение задачи Коши для системы (7.13) с условием $X_0(0) = 0$; $F(t)$ — решение матричного уравнения

$$\frac{dF}{dt} = A(t)\,F,\ F(0) = E. \tag{7.14}$$

В качестве схемы расчета системы (7.13) и матричного уравнения (7.14) выберем схему трапеций

$$\frac{X_{\kappa+1} - X_\kappa}{h} = \frac{1}{2}\,[A_\kappa X_\kappa + A_{\kappa+1} X_{\kappa+1} + B_\kappa + B_{\kappa+1}];$$

$$\frac{F_{\kappa+1} - F_\kappa}{h} = \frac{1}{2}\,(A_{\kappa+1} F_{\kappa+1} + A_\kappa F_\kappa).$$

Разрешая относительно $X_{\kappa+1}$, $F_{\kappa+1}$, получим

$$X_{\kappa+1} = (E - h/2\,A_{\kappa+1})^{-1}\Big[(E + h/2\,A_\kappa)\,X_\kappa + \frac{h}{2}\,(B_\kappa + B_{\kappa+1})\Big],$$

$$F_{\kappa+1} = (E - h/2\,A_{\kappa+1})^{-1}(E + h/2\,A_\kappa)\,F_\kappa.$$

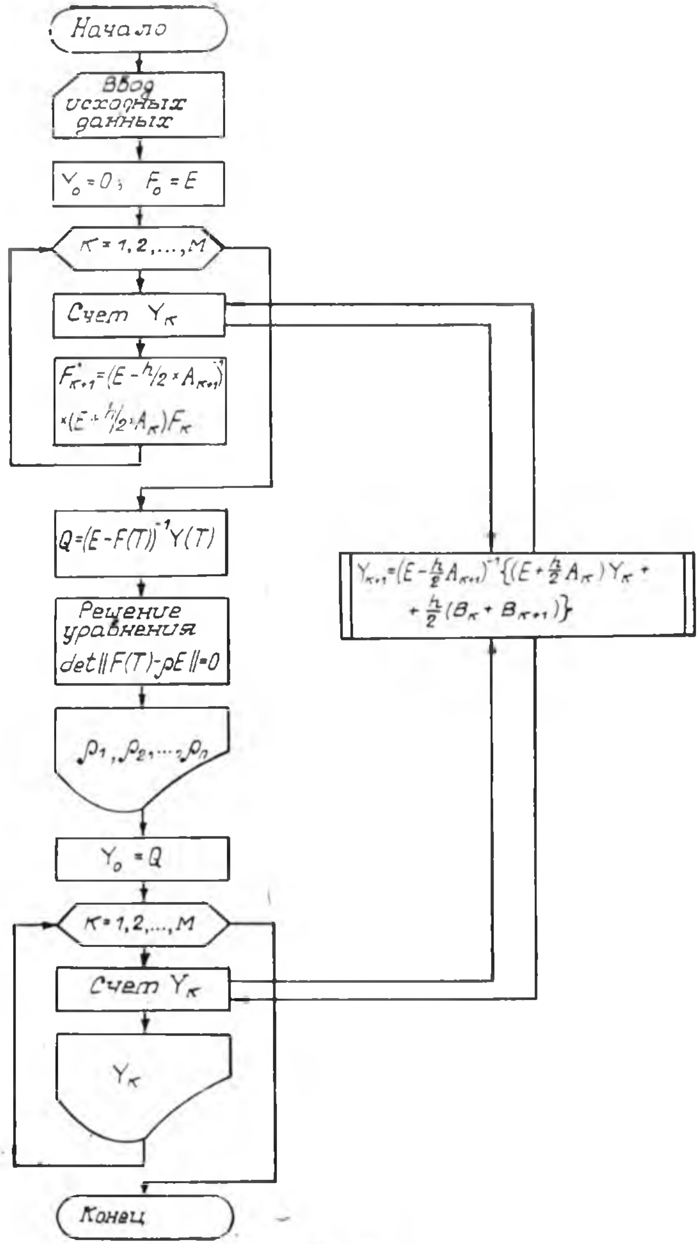

Начало
Ввод исходных данных
$Y_0=0; \quad F_0=E$
$\kappa=1,2,\dots,M$
Счет Y_κ
$F_{\kappa+1}=(E-h/2\times A_{\kappa+1})^{-1}\times(E+h/2\times A_\kappa)F_\kappa$
$Y_{\kappa+1}=(E-\frac{h}{2}A_{\kappa+1})^{-1}\{(E+\frac{h}{2}A_\kappa)Y_\kappa+\frac{h}{2}(B_\kappa+B_{\kappa+1})\}$
$Q=(E-F(T))^{-1}Y(T)$
Решение уравнения $\det\|F(T)-\rho E\|=0$
$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$
$Y_0=Q$
$\kappa=1,2,\dots,M$
Счет Y_κ
Y_κ
Конец

Рис. 7.1

Блок-схема алгоритма реализации указанных целей изображена на рис. 7.1. При этом использованы стандартные символы, установленные ГОСТ 19003—80 [47]. Матрица $F(T)$ используется для нахождения вектора Q и характеристических чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Пошаговое интегрирование системы (7.13) выделено в отдельную подпрограмму, т. к. используется в двух местах основной программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. М.: Высш. школа, 1980.— 311 с.

2. Ильин В. Н. Основы автоматизации схемотехнического проектирования.— М.: Энергия, 1979.— 392 с.

3. Носов Ю. Р., Петросянц К. О., Шилин В. А. Математические модели элементов интегральной электроники.— М.: Сов. радио, 1976.— 304 с.

4. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем.— М.: Высш. школа, 1971.— 568 с.

5. Дьяконов В. П. Лавинные транзисторы и их применение в импульсных устройствах.— М.: Сов. радио, 1973.— 208 с.

6. Чурбанов А. В. Импульсные устройства с диодными оптронами.— М.: Энергия, 1980.— 144 с.

7. Достал И. Операционные усилители: Пер. с англ.— М.: Мир, 1982.— 512 с.

8. Гринбаум Д. Р. Модели цифровых ИС для машинного проектирования.— Электроника, 1973, т. 46, № 25, 26, с. 46—59, 63—69.

9. Трохименко Я. К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей.— М.: Сов. радио, 1972.— 212 с.

10. Реза Ф., Сили С. Современный анализ электрических цепей: Пер. с англ./Под ред. Г. В. Микуцкого.— М.—Л.: Энергия, 1964.— 480 с.

11. Анисимов В. И. Топологический расчет электронных схем.— Л.: Энергия, 1977.— 240 с.

12. Сешу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи: Пер. с англ./Под ред. П. А. Ионкина.— М.: Высш. школа, 1971.— 448 с.

13. Мэзон С., Циммерман Ю. Электронные цепи, сигналы и системы: Пер. с англ./Под ред. А. А. Соколова.— М.: ИЛ, 1963.— 619 с.

14. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел: Пер. с польск./Под ред. П. А. Ионкина.— М.: Мир, 1972.— 332 с.

15. Захаров В. К., Лыпарь Ю. И. Электронные устройства автоматики и телемеханики.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984.— 432 с.

16. Coates C. L. General topological formulas for linear networks.— IRE Trans. on Circuit Theory, 1958, v. CT-4, June, p. 42—59.

17. Coates C. L. Flow-graph solution of linear algebraic equations. — IRE Trans. on Circuit Theory, 1959, v. CT-6, June, p. 170—187.

18. Бондарь В. А., Ваганов В. С. Алгоритм формирования структурного (обобщенного) числа по графу схемы с унисторами.— Изв. вузов СССР, Радиоэлектроника, 1982, № 6, с. 78—81.

19. Кеч В., Теодареску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике.— М.: Мир, 1978. — 518 с.

20. Лисицкая И. Н., Синицкий Л. А., Шумков Ю. М. Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами.— Киев: Наукова думка, 1969.— 440 с.

21. Иванов Л. Л. Начала аналитической теории разрывных функций и расчет нелинейных электрических цепей.— Электричество, 1960, № 9, с. 24—29.

22. Беркович Е. И. Анализ электромагнитных процессов в инверторных схемах с помощью разрывных функций.— ЭП. Преобразовательная техника, 1979, вып. 7, с. 6—10.

23. Кобзев А. В. Многозонная импульсная модуляция. — Новосибирск: Наука, 1979. — 304 с.

24. Такеути Т. Теория и применение вентильных цепей для регулирования двигателей.— Л.: Энергия, 1973.— 249 с.

25. Заездный А. Т. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи.— Л.: Энергия, 1972.— 528 с.

26. Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей.— М.: Радио и связь, 1982.— 280 с.

27. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции.— М.: Наука, 1974.— 432 с.

28. Волков И. В., Шлапак В. А. Машинные методы расчета систем стабилизированного тока.— Киев: Наукова думка, 1978.— 150 с.

29. Филиппов А. В. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука, 1985.— 224 с.

30. Моделирование и оптимизация на ЭВМ радиоэлектронных устройств/Под ред. З. М. Бененсона.— М.: Радио и связь, 1981.— 272 с.

31. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем.— М.: Сов. радио, 1976.— 608 с.

32. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости.— М.: Наука, 1971.— 130 с.

33. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1965.— 167 с.

34. Бахвалов Н. С. Численные методы, I.— М.: Наука, 1975.— 621 с.

35. Эйприлл Г., Трик Т. Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами.//Автоматизация в проектировании. М., 1972, с. 148—155.

36. Мигулин И. Н., Чаповский М. З. Усилительные устройства на транзисторах.— Киев: Техника, 1978.— 232 с.

37. Петренко А. И., Власов А. И., Тимченко А. П. Табличные методы моделирования электронных схем на ЭЦВМ.— Киев: Вища школа, 1977.— 192 с.

38. Тимкин Ю. В. Анализ электронных схем методом двунаправленных графов.— М.: Энергоатомиздат, 1985.— 256 с.

39. Остапенко А. Г. Анализ и синтез линейных радиоэлектронных цепей с помощью графов. Аналоговые и цифровые фильтры.— М.: Радио и связь, 1985.— 280 с.
40. Зевеке Г. В. и др. Основы теории цепей.— Госэнергоиздат, 1963.— 752 с.
41. Рихтмейер Р. Принципы современной математической физики.— М.: Мир, 1982.— 488 с.
42. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1973.— 848 с.
43. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике.— М.: Мир, 1985.— 254 с.
44. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. I.— М., 1962.— 464 с.
45. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин.— М.: ИЛ, 1962.— 208 с.
46. Рихтмейер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 420 с.
47. Петров А. В. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах.— М.: Высшая школа, 1984.— 320 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
Глава 1. **Общие вопросы моделирования электронных цепей** 6
1.1. Выбор математической модели электронной цепи . 6
1.2. Классификация электронных схем по типу уравнений, применяемых в их математических моделях . . 11
1.3. Топологические модели электронных цепей и способы их составления 14
1.4. Схемы замещения (микро- и макромодели) компонент электронных цепей 21
1.5. Построение математической модели электронной цепи по ее схеме или графу 43
Глава 2. **Схемные функции, частотные и временные характеристики и их параметры** 49
2.1. Определение схемных функций 49
2.2. Формы представления схемных функций 58
2.3. Частотные характеристики 62
2.4. Временные характеристики 68
2.5. Параметры частотных и временных характеристик . 77
2.6. Обратная связь и чувствительность 81
2.7. Устойчивость 86
Глава 3. **Методы анализа, основанные на алгебраических моделях электронных схем** 89
3.1. Метод эквивалентных схем в матричной форме . 89
3.2. Обобщенный матричный метод 107
Глава 4. **Методы анализа, основанные на топологических и теоретико-множественных моделях электронных схем** . . 119
4.1. Метод ненаправленных графов 119
4.2. Метод унисторных (смешанных) графов . . . 132
4.3. Метод структурных чисел 152
4.4. Метод сигнальных (направленных) графов . . . 173
Глава 5. **Анализ электронных схем методом переменных состояния** 197
5.1. Определение метода переменных состояния . . 197
5.2. Принципы реализации математической модели . . 203
5.3. Выбор базовых величин и переход к безразмерным переменным 210
5.4. Линейные системы с постоянной матрицей . . . 214
5.4.1. Анализ устойчивости 216

5.4.2. Метод непосредственного нахождения периодического решения 221
5.5. Линейные системы с переменной матрицей . . 222
5.5.1. Анализ устойчивости 223
5.5.2. Метод нахождения периодического решения . 225
5.6. Нелинейные системы 227
5.6.1. Нелинейные системы с внешним периодическим воздействием 227
5.6.2. Автономные системы 229
5.6.3. Методы поиска периодических решений . . 234
5.7. Линейные системы с δ-образными особенностями . 237
Глава 6. **Методы анализа импульсных (ключевых) схем** . 244
6.1. Общие положения 244
6.2. Определение разрывных функций и их свойства . 246
6.3. Метод коммутационных разрывных функций (КРФ) 262
6.4. Метод припасовывания 273
Глава 7. **Основные этапы подготовки численной реализации математической модели на ЭВМ** 288
7.1. О численных методах исследования устойчивости установившихся решений 289
7.2. Некоторые схемы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений 292
7.3. Подготовка математической модели к численной реализации 300
Литература 303

Владимир Антонович БОНДАРЬ
Валерий Семенович БАУШЕВ
Анатолий Васильевич КОБЗЕВ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

Редактор **Н. С. Поддубная**
Художественный редактор **Р. М. Вазиев**
Технический редактор **Р. А. Прошенкина**
Корректор **Г. Г. Иванова**

ИБ 1825

Сдано в набор 30.10.87 г. Подписано в печать 23.10.89 г. К307189 Формат 84×108[1]/32. Бумага типографская № 3. Гарнитура Литературная. Печать высокая Печ. л. 9,65. Усл. печ. л. 16,21. Уч-изд. л. 15,86. Тираж 1000 экз. Заказ 6690. Цена 50 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4
Типография изд-ва «Красное знамя», 634050, ГСП, пр. Фрунзе, 103.

ОПЕЧАТКИ,

замеченные в книге В.А.Бондаря, В.С.Баушева, А.В.Кобзева
"Методы анализа и расчета электронных схем"

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
23	ф-ла I.3	$\ldots = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\frac{dU}{dt}\right)^2$	$\ldots = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\frac{dU}{dt}\right)^i$
3I	I2 снизу (ф-ла)	$- \Delta T$	$\times \Delta T$
44	2 сверху	...число нулевых...	...число ненулевых...
45	ф-ла I.I0 (2 строка)	$\ldots + Z_8 I_2 E + \ldots$	$\ldots + Z_8 I_2 + \ldots$
52	ф-ла 2.5б	$F_{ij} = \ldots$	$F_{jj} = \ldots,$
59	ф-ла 2.I0	$K_{i1} = [(p-p_i)' F(p)] p = p_i$	$K_i = [(p-p_i) F(p)]_{p=p_i}$
67	ф-ла 2.25	$\ldots = \frac{p^{n-1} a_{n-2} p^{n-2} \ldots + a_1 p + a_0}{\omega^{2n} + d_{n-1}\omega^{2n-2} + \ldots + d_1\omega^2 + d_0}$	$= \frac{p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} \ldots + a_1 p + a_0}{p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}$
	ф-ла 2.26 (I строка)	$[d_{n-k} = 2 \sum_{i=1}^{k-1} \ldots$	$d_{n-k} = 2 [\sum_{i=0}^{k-1} \ldots$
75	4 сверху	$gt = \ldots$	$g(t) = \ldots$
87	8 сверху	пелей...	пепей...
89	ф-ла 3.2	$I = Z_{-1} E$	$I = Z^{-1} E$
93	I0 снизу	...сопротивление источника Z_H ...	...сопротивление источника Z_H ...
96	I8 сверху	$(w_{ij})_q^r$	$(w_{ij})_q^r$
I03	3-4-5 снизу	$+Z_8) + Z_4(Z_1+Z_2)](Z_1 Z_5 - Z_3 Z_4) \cdot$ $\cdot (Z_4 + Z_6) - Z_1 Z_3 Z_4 + Z_3 (Z_7 + Z_5) \times$ $\times (Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6) + Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5)$	$+Z_8) + Z_4(Z_1+Z_2)] + Z_5(Z_1+Z_3) \cdot$ $\cdot (Z_4 + Z_6) + Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4 + Z_5) +$ $Z_2 Z_3 Z_4 + Z_3 Z_5 (Z_1 + Z_2)$
I03	I снизу	$K_{Ui} = Z_5 \frac{Z_1 Z_4 - Z_3 (Z_1 + \ldots}{Z_H [(Z_3 + \ldots}$	$K_{Ui} = Z_5 \frac{Z_1 Z_4 + Z_3 (Z_1 + \ldots}{Z_H [(Z_3 + \ldots}$

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
I05	8 снизу (ф-ла)	$i_9 = U_{45} / y_5 = \ldots$	$i_9 = U_{45} y_5 = \ldots$
I06	I0 сверху (ф-ла)	$= \frac{\Delta(3+1)(2+1)}{\Delta(3+1)(3+1)}$	$= \frac{\Delta_{(3+1)(2+1)}}{\Delta_{(3+1)(3+1)}}$
II8	I3 снизу (ф-ла)	$dU/dt = (U_n - V_{n-1})/h$	$dU/dt = (U_n - U_{n-1})/h$
I37	I3 сверху (ф-ла)	$y_{3c} = {}_{\Delta 3}$,	$y_{3c} = g_3$,
I42	I8 снизу (ф-ла)	$+(Y_1 + G_3)(G_2 G_3 + \ldots$	$(Y + G_1)(G_2 G_3 + \ldots$
I44	I сверху (ф-ла)	$\ldots + y(G_3 G_5)] + \ldots$	$\ldots + y(G_3 + G_5)] + \ldots$
I47	I5-I4 снизу (ф-ла)	$P_1 = G_1(-g'_{21} + g'_{12} - g'_{21}) \times$ $\times(-g''_{21} + g''_{12} - g''_{12})$ $+ G_1 g'_{21} g'_{21} \ldots$	$P_1 = G_1(-g'_{21} + g'_{12} - g'_{12}) \times$ $\times(-g''_{21} + g''_{12} - g''_{12}) =$ $= G_1 g'_{21} g'_{21} \ldots$
	II снизу (ф-ла)	$-g''_{12}) = -g_1(g'_{11} + \ldots$	$-g''_{12}) = -G_1(g'_{11} + \ldots$
	5 снизу (ф-ла)	$\ldots + g'_{22}$	$\ldots + g'_{22} + G_0$
I48	рис.4.I5,г (снизу)	G_2	$G_2 + G_0$
I49	I3 сверху	$P'_\kappa P'_1 =$	$P'_1 = \ldots$
I50	2 снизу (ф-ла)	$+ G_2(g''_{11} + \ldots$	$+ G_2(g''_{12} + \ldots$
	4 снизу (ф-ла)	$+(G_1 + g''_{12} + \ldots$	$+(G_1 + g''_{11} + \ldots$
	9 снизу (ф-ла)	$\ldots + G_2 g_{22} + g''_{21} +$	$\ldots + G_2(g''_{22} + g''_{21} + \ldots$
	I2 снизу (ф-ла)	$\ldots + g'_{22})-$	$\ldots g_{22} + G_0)-$

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
153	16 снизу (ф-ла)	$e \in E$ не является: $e \in E$	$e \in E$, не является $e \notin E$
	3 снизу (ф-ла)	$= E_1 = \dots$	$= \bar{E}_1 = \dots$
161	8 снизу (ф-ла)	$+y_{12}y_{23} - y_{40} + \dots$	$+y_{12}y_{\overline{23}}y_{40} + \dots$
164	3-4 сверху (ф-ла)	$\dots = y_{12}y_{23} - y_{34} + \dots$	$\dots y_{12}y_{\overline{23}} \times y_{34} + \dots$
	4 снизу (ф-ла)	$= n[a(d+g+b+n)+\dots$	$= n(a(d+g+b+k)+\dots$
172	6 сверху (ф-ла)	$; 20 = g_0 + g_4; \overline{24} = g_0 + g_5$	$; 20 = -g_0 + g_4; \overline{24} = -g_0 + g_5$
172	7 сверху (ф-ла)	$42 = g_5$	$42 = g_5; 31 = g_L$
173	4 сверху (ф-ла)	$\dots - g_0)(g_2 - g_L)$	$\dots - g_0)(g_2 + g_L)$
191	6 снизу (ф-ла)	$\frac{1}{2}R_{вх}R_{н}(\rho C - \kappa G_{вых})$	$\frac{1}{R}R_{вх}R_{н}(\rho C - \kappa G_{вых})$
193	8 сверху	где σ_i - ...	где δ_i - ...
	8,9 снизу	... σ_i графов... $\sigma_2 = \dots$	... δ_i графов.... $\delta_2 = \dots$
215	2,3 снизу (ф-лы)	$\lVert A\rVert_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert a_{ij}\rvert\right)$ $\lVert A\rVert_2 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert a_{ij}\rvert\right)$	$\lVert A_1\rVert = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij}\rvert\right)$ $\lVert A_2\rVert = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert a_{ij}\rvert\right)$
217	5 снизу (ф-ла)	$c - \lVert S\rVert \cdot \lVert S^{-1}\varepsilon_0\rVert$	$c = \lVert S\rVert \cdot \lVert S^{-1}\varepsilon_0\rVert$
225	3 сверху	$Y_n(t)$	$X_n(t)$
255	ф-ла 6.18 (10 строка)	$= 0 + \int_{E_{2a}(t)}^{E_d(t)} d\tau + \dots$	$= 0 + \int_{E_{2a}(t)}^{E_a(t)} f_a(t)\,d\tau + \dots$

4

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
264	I4 сверху (ф-ла)	$R\cdot\frac{1}{2}[1-f_a(t)f_a(t-\tau)+\ldots$	$R\cdot\frac{1}{2}[1+f_a(t)f_a(t-\tau)+\ldots$
268	5 снизу (ф-ла)	$\frac{uC_a}{dt}=0$	$\frac{dC_a}{dt}=0$
274	I снизу (ф-ла)	$Ut=U_m\sin\omega t$	$U(t)=U_m\sin\omega t$
277	5 сверху	...к свободной...	...и свободной...