

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ABU RAYHAN BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI**

**Elektrodinamika va elektrotexnikaning ba'zi bir
matematik masalalari**

**Oliy texnika o'quv yurtlarining bakalavriat ta'lim yo'nalishi
talabalari uchun uslubiy ko'rsatmalar**

Toshkent – 2009

Elektrodinamika va elektrotexnikaning ba'zi bir matematik masalalari.
Oliy texnika o'quv yurtlari talabalari uchun uslubiy ko'rsatmalar./
Abzalimov R.R., Xolmuhamedov A.S. - Toshkent, ToshDTU, 2009.

Uslubiy ko'rsatmada elektrodinamika va elektrotexnikaning aniq integrallar va differensial tenglamalar yordamida yechiladigan 30 ga yaqin masalasi keltirilgan. Ba'zi namunaviy masalalar yechib ko'rsatilgan. Elektrodinamika va elektrotexnikaga oid zarur ma'lumotlar va formulalar berilgan.

Uslubiy ko'rsatma, birinchi navbatda, EA va Energetika va boshqa fakultetlarning birinchi bosqichida ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan. Undan, shuningdek, matematika o'qituvchilari amaliy mashg'ulotlarda matematika usullarini namoyish etishda, talabalarining o'quv - tadqiqot ishlarida hamda ilmiy to'garaklarda foydalanishlari mumkin.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy – uslubiy kengashining qaroriga muvofiq chop etildi.

Taqrizchilar:

I. Iskanadjiev
(Tosh.D.T.U.)

K. Kurganov
(Uz. M.U.)

B. Abdullaev
(Tosh.D.T.U.)

Elektrodinamika va elektrotexnika masalalarida matematik usullar va ularni yechish

1.1 Elektrodinamika va elektrotexnika masalalarida aniq integral.

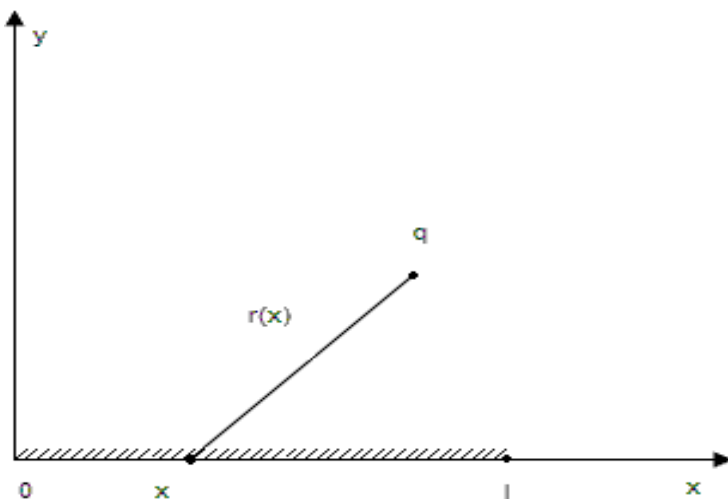
1 Zaryadlangan kesma va nuqtaviy zaryad orasidagi o'zaro ta'sir kuchini hisoblash

Uzunligi ℓ ga teng kesmada chiziqli zichligi σ ga teng bo'lgan zaryad taqsimlangan kesma tashqarisidagi nuqtaviy zaryadga kesma tomonidan ta'sir etadigan kuchni hisoblash talab etiladi.

Ikki nuqtaviy zaryad orasidagi o'zaro ta'sir kuchi Kulon qonuniga ko'ra

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}$$

ga teng, bunda q_1, q_2 – zaryadlarning kulondagi kattaliklari, r – zaryadlar orasidagi masofa (metrda), $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F/m$ ($4\pi\epsilon_0 = 1,11 \cdot 10^{-10}$) – elektr doimiysi, ϵ – muhitning vakuumga nisbatan dielektrik singdiruvchanligi (havo uchun $\epsilon \approx 1$). XOY koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, bunda OX o'qi ℓ kesma bo'ylab yo'nalsin (1- shakl). $\sigma(x)$ zaryad zichligini $[0, \ell]$ da aniqlangan uzluksiz funksiya deb faraz qilamiz. $[0, \ell]$ kesmani ixtiyoriy tarzda uzunliklari $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ga teng bo'lgan n ta bo'lakka bo'lamiz va har bir $[x_{i-1}, x_i]$ xususiy kesmadan ixtiyoriy tarzda bittadan ξ_i nuqta olamiz. U holda $[x_{i-1}, x_i]$ xususiy kesmaning zaryadi taqriban $\sigma(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ ga teng bo'ladi, chunki, biz bu yerda har bir xususiy kesmada zaryadning zichligi $\sigma(\xi_i)$, $i = 1, \dots, n$ ga teng o'zgarmas miqdor deb hisobladik,



1-shakl

q nuqtaviy zaryad va $[x_{i-1}, x_i]$ kesma orasidagi o'zaro ta'sir kuchi, Kulon qonuniga ko'ra, taqriban

$$\Delta F_i = \frac{q\sigma(\xi_i) \cdot \Delta x_i}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2(\xi_i)}$$

ga teng bo'ladi, bu yerda $r(\xi_i)$ – nuqtaviy zaryad va ξ_i nuqta orasidagi masofa

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum_{i=1}^n \frac{q\sigma(\xi_i) \cdot \Delta x_i}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2(\xi_i)}$$

yig'indi esa $[0, l]$ kesma bilan q nuqtaviy zaryad orasidagi o'zaro ta'sir kuchiga taqriban teng bo'ladi. Ravshanki, F_n – integral yig'indidir. Bu yig'indining $\max_i (\Delta x_i) = 0$ dagi limiti mavjud va u izlanayotgan F kuchga teng:

$$F = \int_0^l \frac{q\sigma(x)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2(x)} dx \quad (1)$$

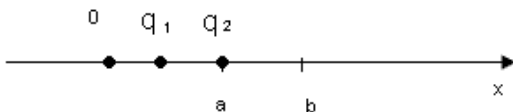
2. Zaryadlarning itarishish (tortishish) kuchlari bajargan ishni hisoblash.

F itarish kuchi ta'sirida q_2 zaryad q_1 zaryaddan ma'lum masofaga uzoqlashadi. Shu kuch bajargan ishni hisoblash talab etiladi.

$F(x)$ kuchning q_2 zaryad $x=a$ nuqtadan $x=b$ nuqtaga siljiganda bajarganishi (2 - shakl)

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (2)$$

ga teng, bunda $F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2(x)} \quad (\epsilon = 1)$



2 – shakl

3) Agar o'tkazgichdan $i(t)$ o'zgaruvchan tok o'tayotgan bo'lsa, o'tkazgichning ko'ndalang kesishidan t vaqt birligida oqib o'tgan elektr miqdori

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt. \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

4) Agar elektr zanjiridagi kuchlanish $E(t)$ ga teng bo'lsa, vaqtning $[t_1, t_2]$ oralig'ida elektr toki bajargan ish

$$A = \int_{t_1}^{t_2} E(t) \cdot i(t) dt \quad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

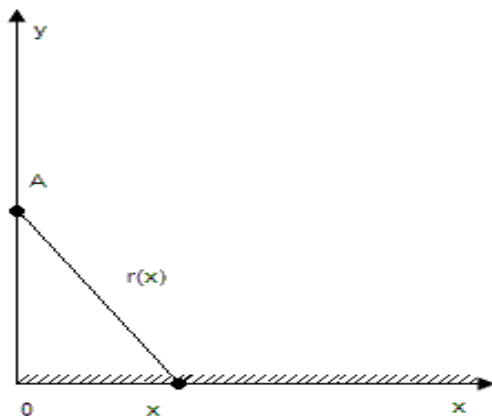
5) Vaqtning $[t_1, t_2]$ oralig'ida R qarshilikli elektr zanjiridagi o'zgaruvchan elektr toki ajratgan issiqlik miqdori Joule-Lenz qonuniga ko'ra

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) \cdot R dt \text{ J.} = \left(\int_{t_1}^{t_2} i^2 R dt \right) 0,24 \text{ kal.} \quad (5)$$

formula bilan hisoblanadi.

Misollar.

1-misol. Cheksiz to'g'ri chiziq musbat zaryadga ega (zaryadning chiziqli zichligi ($\sigma = \text{const}$)). Bu to'g'ri chiziq o'zidan a birlik uzoqlikda joylashgan A nuqtadagi birlik zaryadga qanday kuch bilan ta'sir qiladi? (Muhitning dielektrik singdiruvchanligi 1 ga teng).



3 – shakl

Yechish. Koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, OX o'qi zaryadlangan to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushsin, OY o'qi esa A nuqta orqali o'tsin (3 – shakl).

Zaryadlangan to'g'ri chiziq cheksiz bo'lgani uchun

$\varepsilon = 1$, $q = 1K$, $\sigma = \text{const}$ shartdan, (1) formula

$$F = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r^2(x)}$$

ko'rinishni oladi. Masala shartiga ko'ra $OA = a$, bundan,

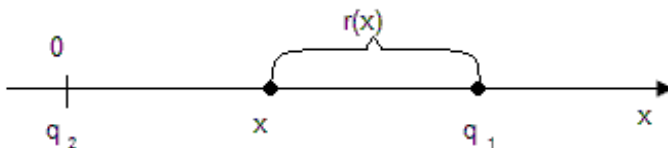
$$r(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Demak

$$F = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$$

2-misol Kattaliklari $q_1 = 33,3 \cdot 10^{-9}$ va $q_2 = 40 \cdot 10^{-9}$ k bo'lgan ikkita elektr zaryadlari bir – biridan 0,2m uzoqlikda joylashgan. Agar ikkinchi zaryad $18 \cdot 10^{-5}$ m ish bajarib, birinchisiga yaqinlashsa, bu zaryadlar orasidagi masofa qancha bo'ladi? (Bu zaryadlarni ajratib turuvchi muhit-havodan iborat).

Yechimi: X o'qi yo'nalishini q_2 zaryadning q_1 zaryadga tomon yo'nalishi bilan ustma – ust tushadigan qilib olib, koordinatalar boshi sifatida esa q_2 zaryadning boshlang'ich vaziyatini olib, koordinatalar sistemasini kiritamiz. (4 – shakl)



4 – shakl

U holda zaryadlar orasidagi masofa

$$r(x) = 0,2 - x$$

ga teng bo'ladi. (2) formulaga asoslanib,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^x F(x) dx = \int_0^x \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (0,2 - x)^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{0,2 - x} \Big|_0^x = \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{0,2 - x} - 5 \right) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Masala shartiga ko'ra $A = 18 \cdot 10^{-5}$ j bo'lgani uchun

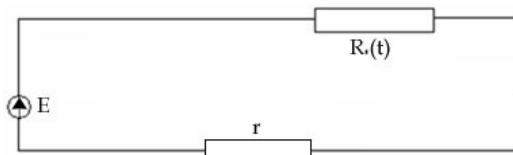
$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{0,2 - x} - 5 \right) = 18 \cdot 10^{-5}$$

bunda $q_1 = 33,3 \cdot 10^{-9}$ k, $q_2 = 40 \cdot 10^{-9}$ k, $4\pi\epsilon_0 = 1,11 \cdot 10^{-10}$,

Bulardan, $0,2 - x = \frac{1}{20}$ Demak, zaryadlar orasidagi oxirgi masofa

$$r = 0,2 - x = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ sm}.$$

3-misol Elektr zanjiri klemmlaridagi kuchlanish $E = 120 \text{ V}$. Zanjirning qarshiligi har sekundda $0,1$ omga bir tekis oshib boradi. Bundan tashqari zanjirga $r=10 \text{ Om}$ o'zgarmas qarshilik ulangan. Elektr zanjiridan ikki minut davomida elektr zaryadining kulonlardagi qancha miqdori oqib o'tadi?



5-shakl

Yechimi: Om qonuniga ko'ra $i(t) = \frac{E}{R(t)}$, bunda

$$R(t) = R_1(t) + r$$

Elektr zanjiridagi qarshilik $0,1 \frac{\text{Om}}{\text{s}}$ tezlik bilan oshib borgani uchun

$$R_1(t) = 0,1t.$$

Demak

$$i(t) = \frac{E}{0,1 \cdot t + r};$$

Masala shartiga ko'ra $t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$, ekanini hisobga olib, (3) formula asosida

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{120} i(t) dt = \int_0^{120} \frac{E}{0,1 \cdot t + r} dt = 10E \ln(t + 10r) \Big|_0^{120} = \\ &= 10E \ln \frac{120 + 10r}{10r} = 10E \ln \frac{12 + r}{r}; \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $E=120V$, $r=10sm$. Shuning uchun

$$q = 1200 \cdot \ln 2,2 \approx 946$$

4-misol Elektr zanjiridagi kuchlanish har minutda 1,5 V.dan kamayib boradi. Zanjirning dastlabki kuchlanishi $E=120V$. Qarshiligi $R=60$ Om. Zanjirda 5 min. davomida bajarilgan ish hisoblansin (bunda, induktivlik va sig'im hisobga olinmaydi.)

Yechimi: Zanjirdagi kuchlanish $E(t) = 120 - \frac{1,5}{60}t = 120 - \frac{1}{40}t$
(t =sekundlarda).

Om qonuniga ko'ra $i(t) = \frac{E(t)}{R} = \frac{120 - \frac{1}{40}t}{60} = 2 - \frac{1}{2400}t$,

$t = 5 \text{ min} = 300s$ ekanini hisobga olib, (4) formula asosida

$$A = \int_0^{300} \left(120 - \frac{1}{40}t \right) \left(2 - \frac{1}{2400}t \right) dt = \int_0^{300} \left(240 - 0,1t + \frac{1}{96000}t^2 \right) dt = 67600J$$

ga ega bo'lamiz.

Qarshilik elektr zanjiridan o'zgaruvchan tok o'tayotganda, t_1 va t_2 vaqt oralig'ida ajralib chiqqan issiqlik miqdori Joul-Lens qonuniga ko'ra

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) R dt \quad J = \left(\int_{t_1}^{t_2} i^2(t) R dt \right) 0,24 \quad \text{kal.}$$

formula bilan hisoblanadi.

5-misol O'tkazgichdan 130V. kuchlanish ta'sirida elektr toki o'tmoqda. O'tkazgichning dastlabki qarshiligi 40 Om bo'lib, har sekundsda 0,2 omdan bir tekis ortib boradi. O'tkazgichdan bir minut davomida elektr toki o'tganda ajraladigan issiqlik miqdori topilsin.

Yechimi: O'tkazgichning qarshiligi $R(t) = 40 + 0,2t$.

Om qonuniga ko'ra

$$i(t) = \frac{E}{R};$$

$t_1=0$, $t_2=1 \text{ min}=60 \text{ s}$. ekanini hisobga olib, (5) formula asosida

$$Q = \int_0^{60} i^2 R dt = \int_0^{60} \frac{E^2}{R} dt = \int_0^{60} \frac{120^2}{40 + 0,2t} dt = 5 \cdot 120^2 \ln(40 + 0,2t) \Big|_0^{60} = 4534 \text{ kal.}$$

1.2 Elektrotexnika masalalarida differensial tenglamalar

Masalalarni yechish jarayonida elektr zanjirlari nazariyasining quyidagi qonunlaridan foydalaniladi:

1) Kirxgofning birinchi qonuni.

Har bir tugunda kirayotgan toklar yig'indisi chiqayotgan toklar yig'indisiga teng.

2) Kirxgofning ikkinchi qonuni.

Zanjirning har qanday yopiq konturidagi tokning kuchlanishlari manbaalarining algebraik yig'indisi shu konturning boshqa hamma qismlaridagi kuchlanishlarning tushishlari algebraik yig'indisiga teng.

3) R qarshilikli kuchlanishning tushishi

$$E_R = R \cdot i \quad (6)$$

ga teng.

4) L o'z induktsiyali kuchlanishning tushishi

$$E_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \quad (7)$$

5) C sig'imli kondensatorda kuchlanishning tushishi

$$E_c = \frac{q}{C}; \quad (8)$$

bu yerda $q=q(t)$ kondensatorning t momentdagi zaryadi. Bunda

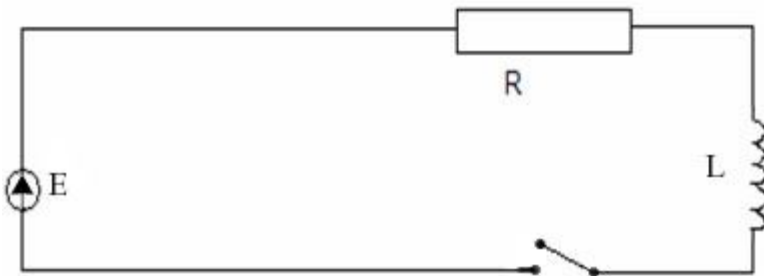
$$\frac{dq}{dt} = i(t). \quad (9)$$

($i(t)$ – vaqtning t – momentida zanjirning qaralayotgan qismidan o'tayotgan tok kuchi).

(6) – (9) formulalarda $i(t)$ - amperlarda, R – omalarda, L – genrilarda, q – kulonlarda, C – faradlarda, t – sekundlarda, kuchlanish voltlarda ifodalanadi.

Misollar

1-misol Elektr zanjiri ketma – ket ulangan – V_0 kuchlanishli o'zgarmas tok manbaidan, R qarshilikdan, L induktivlikdan va $t=0$ da ulanadigan ulagichdan iborat (6 – shakl).



6 – shakl

Tok kuchining vaqtga bog'lanishi topilsin .

Yechimi : Bunday ulanishda $i(t)$ tok kuchi zanjirning barcha qismida bir xil bo'ladi. Kuchlanishning tushishi qarshilikda $R \cdot i$ ga, induktivlikda

$$L \cdot \frac{di}{dt}$$

ga teng.

Kirxgofning ikkinchi qonuniga ko'ra

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \quad (10)$$

$t=0$ da zanjirda elektr toki bo'lmagani uchun

$$i(0)=0. \quad (11)$$

Shunday qilib, qaralayotgan masala – (10) differensial tenglamaning (11) boshlang'ich sharti qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga keltiriladi. Tenglamaning o'zgaruvchilarini ajratib, integrallab (12) umumiy yechimini topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{V_0 - R \cdot i(t)} &= \frac{1}{L} dt; \\ \frac{1}{R} \ln|V_0 - R \cdot i(t)| &= \frac{1}{L} t - \ln c \\ \ln|V_0 - R \cdot i(t)| &= -\frac{R}{L} t + \ln c \\ R \cdot i(t) - V_0 &= C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}; \\ i(t) &= C \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{V_0}{R} \end{aligned} \quad (12)$$

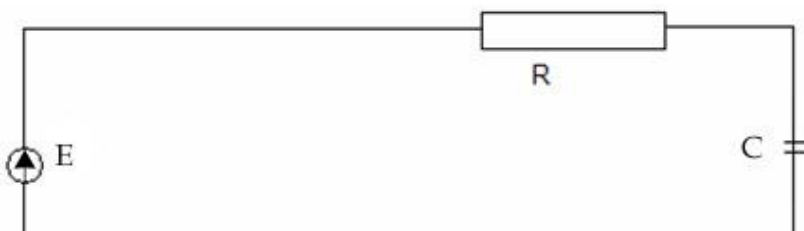
(12) dan (11) shart asosida C o'zgarmasni topamiz;

$$C + \frac{V_0}{R} = 0 \text{ yoki } C = -\frac{V_0}{R} \quad (13)$$

(12) ga C ning (13) dagi ifodasini qo'yib, masalaning izlayotgan yechimini hosil qilamiz:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

2-misol Elektr zanjiri – kuchlanishi $E = E_0 \sin \omega t$ qonun bilan o'zgaradigan tok manbaining, R qarshilikning, C kondensatorning ketma – ket ulanishdan hosil bo'lgan (7 – shakl). Zanjir turg'un rejimga o'tganda undagi tok kuchi topilsin. (Turg'un rejim deb, zanjirning shunday holatiga aytiladiki, bunda tok kuchi yo o'zgarmas bo'ladi yoki davriy ravishda o'zgaradi.),



7 – shakl

Yechimi: Kuchlanishning qarshilik tufayli tushishi $R \cdot i$ ga, sig'im tufayli tushishi esa $\frac{q}{C}$ ga teng bo'lgani uchun Kirxgofning ikkinchi qonuniga ko'ra

$$Ri + \frac{q}{C} = E_0 \sin \omega t \quad (14)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (14) ni differensiallab, (9) yordamida o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglamani hosil qilamiz;

$$R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i = E_0 \omega \cdot \cos \omega t \quad (15)$$

Uning $R \cdot r + \frac{1}{C} = 0$ xarakteristik tenglamasidan $r = -\frac{1}{RC}$ ildizga ega bo'lamiz. Shuning uchun bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimi

$$i_0(t) = C \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (16)$$

(16) dan ko'rinadiki, $t \rightarrow \infty$ da $i_0(t) \rightarrow 0$, demak zanjirdagi turg'un rejimni faqat (15) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning

$$i(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (17)$$

$$i'(t) = A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (18)$$

ko'rinishda izlanadigan xususiy yechimi aniqlab beradi. (17) va (18) ni (15) ga qo'yib

$$R(A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) + \frac{1}{C}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = E_0 \omega \cos \omega t$$

ayniyatni hosil qilamiz. $\sin \omega t$ va $\cos \omega t$ oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} R\omega A + \frac{1}{C}B = 0 \\ \frac{1}{C}A + R\omega B = E_0 \omega \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan ,

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{E_0}{C\omega} \frac{1}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \\ B = E_0 \frac{R}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \end{array} \right\} \quad (19)$$

(19) ni (17) ga qo'yib (15) tenglamaning yechimini hosil qilamiz;

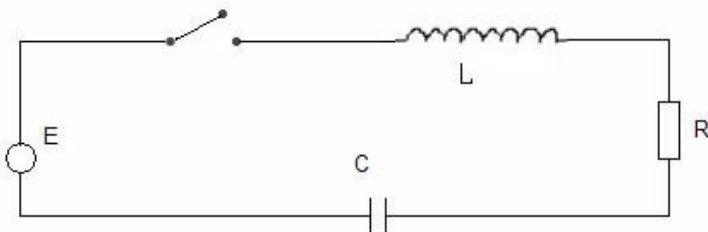
$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \cos \omega t + \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \sin \omega t \right)$$

$$A = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{RC\omega}$$

deb olib, (20) dan qidirilayotgan davriy yechimni topamiz;

$$i(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

3-misol Elektr yurituvchi kuchi E_0 ga teng bo'lgan tok manbaiga L induktivlikka ega bo'lgan g'altak, omlardagi miqdori R bo'lgan qarshilik, sig'imi C bo'lgan kondensator ketma – ket ulangan (8–shakl). Boshlang'ich momentda konturdagi tok va kondensatordagi zaryad 0 ga teng deb hisoblab, zanjirdagi tebranishni toping.



8 – shakl

Yechimi: Zanjirdagi elektr tebranishini $i(t)$ funksiya xarakterlaydi.

Kuchlanishning induktivlik tufayli tushishi $L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, qarshilik tufayli

$R \cdot i(t)$ kondensatordagi tushishi $\frac{q}{C}$ bo'lgani uchun, Kirxgofning ikkinchi qonuniga ko'ra

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = E_0 \quad (21)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikni differensiallab, (9) ni e'tiborga olib,

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (22)$$

tenglikni hosil qilamiz.

$i(0) = 0$ va $q(0) = 0$ bo'lgani uchun (21) dan

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{E_0}{L}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib masala (22) tenglamaning

$$i(0) = 0, \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{E_0}{L}; \quad (23)$$

boshlang'ich shartlar ostidagi yechimini topish masalasiga keltirildi. (22) tenglik ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamadir. Uning

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0 \quad (24)$$

xarakteristik tenglamasi

$$r_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}};$$

ildizlarga ega. Agar $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ bo'lsa, ildizlar har xil haqiqiy va

(22) tenglamaning $i(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ yechimi zanjirdagi elektr

tebranishini aniqlamaydi. Agar $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$ bo'lsa, umumiy

yechim $i(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{R}{2L} t}$

ko'rinishda bo'ladi va bu holda ham zanjirda tebranish bo'lmaydi.

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$$

bo'lganda,

$$i(t) = e^{\frac{R}{2L} t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t);$$

bunda,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

umumiy yechim zanjirdagi elektr tebranishini aniqlaydi.

(23) boshlang'ich shartdan $i(0) = C_1 = 0$, bundan

$$i(t) = C_2 e^{-\frac{R}{2L} t} \sin \omega t.$$

Oxirgi tenglikdan

$$\frac{di(t)}{dt} = C_2 e^{-\frac{R}{2L} t} \left(\frac{R}{2L} \sin \omega t + \omega \cos \omega t \right)$$

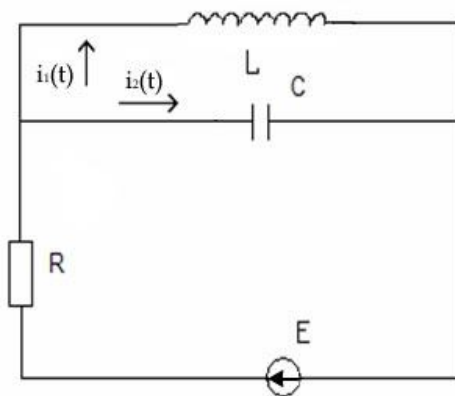
$$\frac{di(0)}{dt} = C_2 \omega = \frac{E_0}{L}, \text{ bo'lgani uchun } C_2 = \frac{E_0}{L\omega} \text{ va demak,}$$

zanjirdagi elektr tebranishi

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L} t} \sin \omega t.$$

funksiya yordamida aniqlanadi.

4-misol $E = E_0 \sin \omega t$ kuchlanishga ega bo'lgan tok manbaiga R qarshilik ketma – ket ulangan. Zanjir ikki tarmoqqa ajralib, ulardan biriga L induktivlik, ikkinchisiga C sig'im ulangan (9 – shakl). R qarshilikli konturdagi (turg'un rejimdagi) tok kuchi topilsin.



9 – shakl

Yechimi: R qarshilikli konturdagi tokni $i(t)$ orqali, induktivli konturdagi toklarni esa $i_1(t)$ va $i_2(t)$ orqali belgilaymiz. Kirxgof qonuniga asoslanib, differensial tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$Ri = \frac{1}{C} \int_0^t (i - i_1) dt = E_0 \sin \omega t, \quad (25)$$

$$L \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t (i - i_1) dt = 0 \quad (26)$$

Bunda, $i - i_1 = i_2$ (25) va (26) ni qo'shib,

$$i \frac{di}{dt} + R i = E_0 \sin \omega t,$$

ni hosil qilamiz, bundan,

$$\frac{di}{dt} = \frac{E_0}{i} \cdot \sin \omega t \cdot \frac{R}{L} \cdot i. \quad (27)$$

(25) tenglamaning ikkala tomonini differensiallab,

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i - \frac{1}{C} i_1 = E_0 \omega \cos \omega t$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini differensiallab,

hamda $\frac{di}{dt}$ ning o'rniga uning (27) ifodasini qo'yib o'zgaras

koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \sin \omega t \quad (28)$$

Uning $r^2 + \frac{1}{RC} r + \frac{1}{LC} = 0$ xarakteristik tenglamasi

$$r_{1,2} = \frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} - \frac{1}{LC}}$$

ildizlarga ega bo'ladi.

$\frac{1}{4(RC)^2} - \frac{1}{LC} \geq 0$ bo'lganda zanjirda elektr tebranishi bo'lmaydi

(3 - masalaga qarang!), demak,

$$\frac{1}{4(RC)^2} - \frac{1}{LC} < 0,$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2RC} \pm \omega_1 j \left(\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} - \frac{1}{LC}}, j = \sqrt{-1} \right)$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$i_0(t) = e^{-\frac{t}{2RC}} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

$t \rightarrow +\infty$ da nolga intiladi. Shuning uchun konturdagi turg'un rejimni faqatgina (28) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning

$$\bar{i}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (29)$$

$$\bar{i}'(t) = A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (30)$$

$$\bar{i}''(t) = A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \quad (31)$$

ko'rinishda izlanadigan xususiy yechim aniqlaydi. (29) ni $\frac{1}{LC}$ ga,

(30) ni $\frac{1}{RC}$ ga, (31) ni 1 ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shib

$$\begin{aligned} & \left(A\omega^2 + B\frac{\omega}{RC} + A\frac{1}{LC} \right) \cos \omega t + \left(B\omega^2 + A\frac{\omega}{RC} + B\frac{1}{LC} \right) \sin \omega t = \\ & = \frac{E_0}{L} \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. $\cos \omega t$ va $\sin \omega t$ larning koeffitsientlarini tenglab, A va B noma'lumlarni topish uchun tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$A\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + B\frac{\omega}{RC} = 0 - A\frac{\omega}{RC} + B\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = \frac{E_0}{L}\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)$$

Bu sistemani yechib

$$A = \frac{E_0}{R} \cdot \frac{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)\frac{\omega}{RC}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2} \quad B = \frac{E_0}{R} \cdot \frac{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}$$

yechimlarni hosil qilamiz:

A va B ning topilgan qiymatlarini (29) ga qo'yib, izlayotgan yechimni

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \cdot \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}} \cdot \left[\frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}} \sin \omega t \right] \quad (32)$$

ko'rinishda yozamiz.

(32) yechimning amplituda va fazasi

$$A = \frac{E_0}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2}, \quad \varphi = -\arctg \frac{(1 - \omega^2 LC)R}{L\omega}.$$

ko'rinishda yoziladigan

$$i(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

garmonika shaklida tasvirlaymiz.

Mustaqil yechish uchun masalalar

2.1 Elektrodinamika va elektrotehnika masalalarida aniq integral

1) Uzunligi ℓ bo'lgan ingichka sterjen musbat zaryad bilan zaryadlangan (zaryadlanishning chiziqli zichligi σ). Bu sterjen asosi shu sterjendan iborat bo'lgan teng tomonli uchburchakning uchidagi birlik zaryadga qanday kuch bilan ta'sir qiladi? (Sterjenning dielektrik singdiruvchanligi birga teng).

2) Ikki $q_1 = 6,67 \cdot 10^{-9}$ K va $q_1 = 10 \cdot 10^{-9}$ K. elektr zaryadlari bir-biridan 10 sm masofada joylashgan. Ularni ajratib turuvchi muhit-havodan iborat. Dastlab ikkala zaryad mahkamlangan bo'lib, keyinchalik q_2 bo'shatib yuboriladi. Shundan so'ng q_2 zaryad itarish kuchi ta'sirida q_1 zaryaddan uzoqlashadi. Zaryad 40 sm ga siljiganda itarish kuchi qanday ish bajaradi?

3) Elektr zanjirining klemmlaridagi kuchlanish $V=120$ V. Zanjirga $r=12$ Om o'zgarmas qarshilik va dastlab bir tekis 30 Om bo'lgan, so'ngra har sekunda 0,1 Omga kamayib boradigan qarshilik ketma-ket ulangan. Zanjirdan to'rt minutda qancha (kulonlardagi) elektr miqdori o'tadi?

4) Ikki $q_1=37 \cdot 10^{-9}$ K va $q_2=45 \cdot 10^{-9}$ K. elektr zaryadlari bir-birlaridan 30 om masofada joylashgan. Agar ulardan biri $25 \cdot 10^{-5}$ J ish bajarib, ikkinchisiga yaqinlashsa, ular orasidagi masofa qancha bo'ladi? (Ajratuvchi muhit-havodan iborat).

5) Zanjirdagi kuchlanish bir tekis ortib boradi. Tajriba boshlanishida kuchlanish nolga teng bo'lgan. Bir minut o'tgandan so'ng kuchlanish 120V ga yetdi. Zanjirning qarshiligi 100 Om. Tok kuchining bir minut davomida bajargan ishini hisoblang.

6) $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$ sinusoidal tokning kuchlanishi

$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ formula bilan berilgan, bu yerda T —davr, φ_0 —fazolar orasidagi farq. $t_1=0$ va $t_2=T$ oraliqda tok kuchi bajargan ishni hisoblang. Qanday shartda ish eng katta bo'ladi?

7) $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi\right)$ sinusoidal tok ta'sirida R qarshilikli

o'tkazgichdan T vaqt mobaynida ajralgan issiqlik miqdorini toping.

8) Elektr zanjirining klemmlaridagi kuchlanish 120V. Zanjirga $R_1=15$ Ohmga teng bo'lib, so'ngra har sekunda 0,2 Ohmdan bir tekis ortib boradigan R qarshilik parallel ulangan. Ikki minut davomida zanjirdan kulonlarda hisoblanadigan qancha elektr miqdori o'tadi?

9) Uzunligi 2ℓ ga teng bo'lgan va tekis zaryadlangan sterjen hosil qilgan elektr maydonining potensialini toping. (Zaryadning chiziqli zichligi σ ga teng).

10) Elektr zanjiri akkumulyator batareyalaridan quvvat oladi. 10 minut davomida klemmlardagi kuchlanish $E=60V$ dan $E=40V$ gacha bir tekisda kamaydi. Zanjirdan shu 10 minut davomida o'tgan elektr miqdorini toping. (Bunda induktivlik va sig'imni hisobga olmang).

Javoblar

1) $F = \frac{\sigma}{l\sqrt{3}\pi\epsilon_0} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}};$

2) $A = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ DJ}$

3) $q \approx 1017 \text{ K};$

4) $A = 2880 \text{ DJ};$

5) $d = 5 \text{ sm};$

6) $A = \frac{E_0 I_0}{2} T \cos \varphi_0;$

$$7) \quad Q \approx 0,12RT I_0^2 \text{ kal};$$

$$8) \quad q \approx 1033 \text{ k};$$

$$9) \quad u(x, y, z) = \sigma \cdot \ln \left| \frac{z + l + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + l)^2}}{z - l + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - l)^2}} \right|.$$

Ko'rsatma: $0 \leq x \leq l$ kesma hosil qilgan maydonning $M(x, y, z)$ nuqtadagi potentsiali

$$u(M) = \int_a^b \frac{\sigma \cdot d\xi}{r_M}$$

formula bilan hisoblanadi, bunda r_M – kuzatilayotgan $M(x, y, z)$ nuqtadan kesmaning o'zgaruvchi P nuqtasigacha bo'lgan masofa:
10) 1500k;

2.2 Elektrotexnika masalalarida differensial tenglamalar

1) 10 s. mobaynida g'altak chulg'amlarida potentsiallar ayirmasi $E_0=2V$ dan $E=1V$ ga bir tekisda kamaydi. Agar tajriba boshida tok kuchi 15 amper bo'lgan bo'lsa, u o'ninchi sekundning oxirida qancha bo'ladi? G'altakning qarshiligi 0,1 Om, induktivligi 0,1 genri.

2) Zanjirdagi kuchlanish va qarshilik bir minut davomida mos ravishda 0 dan 120 V. gacha va 0 dan 120 Om. gacha bir tekisda ortib boradi. Zanjirdagi induktivlik o'zgarmas va 1 genriga teng. Boshlang'ich tok – I_0 . Birinchi minutdagi tok va vaqt orasidagi bog'lanishni toping.

3) E.YU.K.i $E_0 \sin \omega t$ bo'lgan manbaaga induktivligi L ga teng bo'lgan g'altak va sig'imi C ga teng bo'lgan kondensator ketma-ket ulanib kontur hosil qilingan. Boshlang'ich momentda zanjirdagi tok va kondensatordagi zaryad nolga teng deb faraz qilib, zanjirdagi tokni vaqtning funksiyasi sifatida ifodalang.

4) Elektr zanjiriga L o'zinduksiya, R qarshilik va $t=0$ dagi zaryadi q bo'lgan C sig'imli kondensator ketma-ket ulangan. $t=0$ da zanjir yopiladi. Razryad tebranma xarakterga ega bo'lganda zanjirdagi tok kuchini va tebranish chastotasini toping.

- 5) Zanjir kuchlanishi $E=E_0\sin\omega t$ qonun bilan o'zgaradigan tok manbai, R qarshilik va L induktivlikning ketma–ket ulanishidan hosil bo'lgan. Turg'un rejimda zanjirdagi tok kuchini toping.
- 6) Qarshiligi $R=3,2$ Om bo'lgan elektr zanjiriga ikki minut davomida bir tekisda 0 dan 120 V. gacha bo'lgan kuchlanish kiritildi. Zanjirning induktivligi o'zgarmas va 1,6 genriga teng. Tokning dastlabki ikki minut davomida vaqtga bog'lanishini toping. Tok birinchi minutning oxirida qanday bo'ladi?
- 7) Elektr zanjiri kuchlanishi ikki minut davomida 0 dan 120 V. gacha bir tekisda o'zgaradigan tok manbaini, L induktivlikni va parallel holda birlashtirilgan R_1 va R_2 qarshiliklarni ketma–ket ulashdan hosil bo'lgan. Tokning vaqtga bog'lanishini toping.
- 8) Elektr zanjiri R qarshilikni va zaryadi $t=0$ da q ga teng bo'lgan C sig'imli kondensatorni ketma–ket ulashdan hosil bo'lgan. $t=0$ da zanjir yopiladi. $t > 0$ da tok kuchini toping.
- 9) Elektr zanjiri V doimiy kuchlanishli manbani, R qarshilikni, C sig'imli kondensatorni va $t=0$ da ulanadigan ulagich ketma–ket ulashdan hosil bo'lgan. $t > 0$ da tokning vaqtga bog'lanishini toping.
- 10) O'zgarmas E kuchlanishli manbaga L induktivlik, R_1 va R_2 qarshilik, $t=0$ da ulanadigan ulagich ketma–ket ulangan. Tok kuchini vaqtga bog'lanishini toping.

Javoblar

1) $i = I \sin \omega t$;

2) $i(t) = I + (I_0 - I)e^{-t/\tau}$;

3) $i(t) = \frac{E_0 \omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)} (\cos \omega_0 \cdot t - \cos \omega \cdot t)$;

4) $i(t) = \frac{q}{\omega CL} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$;

5) $i(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$, $A = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 - (\omega L)^2}}$, $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$;

$$6) \quad i(t) = 18,6a;$$

$$7) \quad i(t) = \frac{t}{R} + \frac{L}{R^2} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - L \right), \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$8) \quad i(t) = \frac{q}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t};$$

$$9) \quad i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$10) \quad i(t) = \frac{V}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t} \right).$$

Adabiyotlar

1. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.
Математические модели электродинамики. М. Высшая школа, 1991.

Mundarija

Elektrodinamika va elektrotexnika masalalarida matematik usullar va ularni yechish.....	3
1.1 Aniq integral elektrodinamika va elektrotexnika masalalarida.....	3
1 Zaryadlangan kesma va nuqtaviy zaryad orasidagi o'zaro ta'sir kuchini hisoblash.....	3
2. Zaryadlarning itarishish (tortishish) kuchlari bajargan ishni hisoblash.....	5
1.2 Differensial tenglamalar elektrotexnika masalalarida.....	10
Mustaqil yechish uchun masalalar.....	21
2.1 Elektrodinamika va elektrotehnika masalalarida aniq integral.....	21
2.2 Elektrotehnika masalalarida differensial tenglamalar.....	23

Muharrir M.M. Botirbekova