

An abstract graphic on a dark blue background. A central vertical helix, composed of a series of overlapping circles, runs from the top to the bottom of the frame. From this central axis, several thin, curved lines extend outwards, resembling magnetic field lines or streamlines, creating a sense of depth and movement.

Г. АЛЬВЕН
К.-Г. ФЕЛЬТХАММАР

КОСМИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

H. ALFVÉN, C.-G. FÄLTHAMMAR
The Royal Institute of Technology
Stockholm

COSMICAL ELECTRODYNAMICS
Fundamental Principles

SECOND EDITION

OXFORD
AT THE CLARENDON PRESS
1963

Г. Альвен, К.-Г. Фельтхаммар

КОСМИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Основные принципы

2-е ИЗДАНИЕ

Перевод с английского
Ю. К. ЗЕМЦОВА и И. Г. ПЕРСИАНЦЕВА

Под редакцией
акад. Л. А. АРЦИМОВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1967

Вышедшая в 1952 г. книга Г. Альвена «Космическая электродинамика» завоевала широкую известность как классическое изложение основ магнитогидродинамики. В 1963 г. в Англии вышло 2-е переработанное и дополненное издание книги, а в 1965 г. — третье издание. Книга включает вывод основных уравнений, метод ведущего центра для расчета движения заряда в магнитном поле, а также теорию магнитогидродинамических волн. Новое издание дополнено изложением вопросов генерации магнитного поля, а также теорией плазмы в магнитном поле с приложением к проблемам геофизики и управляемых термоядерных реакций.

Книга написана четким, ясным языком, главное внимание уделено основным физическим принципам. Это делает книгу доступной широкому кругу читателей: физикам, геофизикам, астрономам, механикам, инженерам-физикам — как теоретикам, так и экспериментаторам, студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

Редакция космических исследований, астрономии и геофизики

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

«Космическая электродинамика» Альвена принадлежит к числу таких монографий, которые с достаточным правом можно назвать классическими. Она была впервые издана в 1950 г. (и вскоре переведена на русский язык), когда значение электромагнитных явлений в астрофизике еще только начинало осознаваться и когда стали обрисовываться контуры нового раздела физики, получившего название магнитной гидродинамики. Известному шведскому физiku и астрофизiku Альвену принадлежит главная заслуга в разработке этой новой физической дисциплины и первое место среди тех, кому она обязана своим возникновением.

За пятнадцать лет, прошедших с момента написания первого издания, значение проблем, которым была посвящена книга, неизмеримо выросло и вышло далеко за рамки тех сравнительно узких приложений к физике Солнца, которые вначале казались наиболее важными. Во-первых, в результате быстрого развития радиоастрономии выяснилось, что электромагнитные явления играют гораздо более существенную роль в эволюции космических объектов, чем можно было предполагать ранее. Во-вторых, запуск спутников и космических кораблей создал новые средства исследования межпланетного пространства, и это сразу же привело к обнаружению целого комплекса электродинамических явлений, связанных с процессами, происходящими в солнечной плазме и околоземном пространстве. В-третьих, интерес к магнитной гидродинамике и электродинамике плазменных процессов чрезвычайно возрос после возникновения таких проблем, как управляемый термоядерный синтез и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую.

Поэтому появление 2-го издания монографии Альвена (на этот раз написанной в соавторстве с Фельтхаммаром) представ-

ляется совершенно естественным. Книга теперь состоит из пяти глав: гл. 1 — «Общий обзор»; гл. 2 — «Движение заряженных частиц в магнитных полях»; гл. 3 — «Магнитная гидродинамика»; гл. 4 — «Плазма»; гл. 5 — «Плазма в магнитном поле». По сравнению с 1-м изданием она подверглась кардинальной переработке с целью прежде всего расширения круга анализируемых физических проблем, для того чтобы охватить явления и процессы, имеющие особое значение в новых областях применения, упомянутых выше.

Перевод на русский язык осуществлен с издания 1963 г. В 1965 г. вышло в свет 3-е исправленное издание. Когда русское издание было уже в корректуре, авторы любезно прислали исправления и изменения, внесенные в 3-е издание книги. Таким образом, настоящее издание соответствует 3-му зарубежному изданию 1965 г.

Читатель без сомнения с интересом встретит новое издание книги. Ее должен иметь у себя каждый, кто работает в области физики плазмы, магнитной гидродинамики или астрофизики.

Академик Л. А. Арцимович

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание «Космической электродинамики» преследовало цель привлечь внимание к этой области исследования на ранней стадии ее развития. Первые четыре главы книги были посвящены основным принципам физики плазмы и магнитной гидродинамики, в последних трех главах рассматривались их приложения к тому, что теперь называется магнитосферой, а также к межпланетному пространству, физике Солнца и космическому излучению. (Впоследствии в отдельной книге было рассмотрено приложение к космогонической проблеме.)

За пятнадцать лет, прошедших с момента выхода первого издания, этот раздел физики был развит усилиями двух важнейших направлений в науке нашего времени: термоядерных исследований, увеличивших наши знания в области магнитной гидродинамики и физики плазмы, и космических исследований, большая часть которых была посвящена изучению магнитогидродинамических условий в околоземном пространстве.

Все это поставило авторов в трудное положение при подготовке второго издания. Поэтому, чтобы не увеличивать чрезмерно объем книги, мы ограничились основными принципами, составляющими предмет первых четырех глав первого издания. Что касается приложений, то мы надеемся рассмотреть их в последующих книгах.

Одной из наиболее важных и в то же время наиболее трудных задач как термоядерных исследований, так и исследований магнитогидродинамики космического пространства является установление тесного контакта между теорией, с одной стороны, и экспериментом или наблюдениями, с другой. Поэтому физической сущности явлений уделено больше внимания, нежели их выражению с помощью математических формул. Авторы сочли

возможным пожертвовать строгостью вывода формул в тех случаях, когда это могло облегчить чтение ученым, занимающимся экспериментом и наблюдениями.

Появлению этой книги, также как и первого ее издания, во многом способствовали многочисленные дискуссии с профессором Н. Херлофсоном. Авторы благодарят за советы и критику ряд сотрудников Технологического института, а также доктора Чанга (Ризо, Дания) и др.

Г. А.
К.-Г. Ф.

Стокгольм
Королевский технологический
институт
1962 г.

Общий обзор

1.1. Введение

В последнее время в космической физике наблюдался быстро возрастающий интерес к электромагнитным процессам, и теперь общепризнано, что они имеют фундаментальное значение для целого ряда явлений. Например, в недрах Земли происходят электромагнитные процессы, которые создают общее магнитное поле нашей планеты. Магнитное поле претерпевает изменения под влиянием ионосферных электрических токов. Эти изменения особенно заметны во время так называемых *магнитных бурь*. Токи ионосферы являются причиной *полярных сияний* — явлений, которые наблюдаются в определенных областях, прилегающих к геомагнитным полюсам. Все эти явления связаны с другими электромагнитными процессами, происходящими на еще больших высотах. Магнитное поле Земли действует в пределах области размерами около десяти земных радиусов. Как показали измерения, проведенные при космических исследованиях, в этой области, называемой иногда *магнитосферой*, существует сложная и быстро меняющаяся система токов. Кроме того, в определенных зонах магнитосферы (радиационных поясах) имеется поток заряженных частиц высокой энергии, захваченных магнитным полем.

Условия в ионосфере и магнитосфере Земли зависят от электромагнитного состояния *межпланетного пространства*, которое в свою очередь подвержено влиянию Солнца. На Солнце наблюдается ряд электромагнитных явлений, совокупность которых называется *солнечной активностью* (солнечные пятна, протуберанцы, солнечные факелы и т. д.). Существование общего магнитного поля Солнца указывает, что электромагнитные процессы, протекающие в *недрах Солнца*, играют важную роль. Большое значение имеют также электромагнитные процессы, происходящие в звездах, и в первую очередь в *магнитопеременных звездах*, где наблюдались поля до 30 кГс. Электромагнитные явления могут также играть решающую роль в *межзвездном* и *межгалактическом пространствах*, которые, однако, еще мало изучены.

Чтобы осмыслить все эти явления и построить физические теории, объясняющие их, необходимо прежде всего помнить, что наши современные знания в области физики базируются главным образом на опыте, приобретенном в лабораториях. Когда мы пытаемся применить к космическим явлениям теорию, в которой сконцентрирован этот опыт, мы допускаем чрезмерную экстраполяцию, законность которой можно проверить только сравнением теоретических результатов с наблюдениями. В свое время весьма успешной оказалась экстраполяция классической механики в область астрономии, и только наиболее тонкие наблюдения последних десятилетий обнаружили явления, для которых она переставала быть справедливой. Столь же успешным оказалось применение к космическим исследованиям атомной теории, в частности спектроскопии. Классическая механика и спектроскопия явились неоценимым орудием исследования окружающей нас вселенной.

Классическая электродинамика, развитая на протяжении XIX столетия, была применима непосредственно только к некоторым частным проблемам космической физики. Более общие приложения стали возможны только после того, как классическая электродинамика была объединена с *гидродинамикой*, в результате чего появилась *магнитная гидродинамика*, которая впоследствии в совокупности с *физикой плазмы* способствовала более глубокому пониманию электромагнитных явлений в космической физике.

На ранней стадии изучения электромагнетизма в космической физике внимание исследователей привлекали некоторые явления, такие, как постоянное магнитное поле Земли и образование космических лучей, казавшиеся настолько таинственными, что для их объяснения некоторые авторы считали необходимым привлечь новые законы природы. Дальнейшие исследования не подтвердили эту точку зрения, и сейчас мы имеем, по крайней мере, качественно правдоподобные теории этих явлений. В настоящее время практически нет оснований сомневаться в том, что все общие физические законы справедливы на расстояниях порядка «радиуса вселенной» и в интервале времени порядка «возраста вселенной», т. е. в пределах, установленных общей теорией относительности.

Электромагнитные явления в космической физике играют столь важную роль главным образом потому, что в космическом пространстве существуют магнитные поля, которые влияют на движение заряженных частиц. При определенных условиях электромагнитные силы значительно превосходят гравитационные. Для иллюстрации этого факта предположим, что в некоторой точке $R_{\oplus}$ земной орбиты (вектор положения $R_{\oplus}$) нахо-

дится частица, движущаяся с орбитальной скоростью Земли v . Если эта частица — нейтральный атом водорода, то на нее действует только притяжение Солнца (влиянием магнитного поля на возможный магнитный момент атома мы пренебрегаем). Пусть M — масса Солнца, m — масса атома, а γ — гравитационная постоянная; тогда эта сила равна

$$f = - \frac{\gamma M m R_{\odot}}{R^3_{\odot}}.$$

Если атом однократно ионизовать, то на ион, так же как и на электрон (заряд $e = +4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. CGSE), будет действовать сила

$$f_m = e \left(\frac{v}{c} \right) \times B,$$

вызванная межпланетным магнитным полем, которое вблизи земной орбиты равно B . Имея в виду, что напряженность межпланетного магнитного поля составляет величину порядка 10^{-4} эс, получаем

$$\frac{f_m}{f} \approx 10^7.$$

Таким образом, для ионизованного вещества межпланетные и межзвездные магнитные поля гораздо более существенны, чем гравитационные.

Поскольку магнитные силы f_m , действующие на электроны и ионы, направлены в противоположные стороны, то во многих случаях они могут компенсировать друг друга. Если рассмотреть, например, ионизованное облако, содержащее одинаковое число электронов и ионов, то результирующая магнитная сила, действующая на облако, в первом приближении обращается в нуль. (Эффекты второго порядка, вызванные, например, неоднородностью магнитного поля, тем не менее могут быть значительны.) Движение ионизованного облака в магнитном поле приводит к разделению ионов и электронов, но возникающая вследствие этого поляризация создает электрическое поле, которое препятствует разделению зарядов. При определенных условиях электрическое поле может создавать токи в окружающей проводящей среде, что приводит к весьма сложным явлениям.

Приведенные примеры показывают, с одной стороны, важность электромагнитных сил в космической физике, а с другой — сложность электромагнитных явлений. Следующие разделы этой главы посвящаются рассмотрению магнитных и электрических полей в космической физике. В гл. 2 мы рассмотрим движение отдельной заряженной частицы в таких полях. Обычно

в космических условиях электромагнитные поля и движение заряженных частиц оказываются взаимосвязанными [1]. Эта связь приводит к сложным магнитогидродинамическим явлениям, которые мы рассмотрим в гл. 3. Если электрически проводящая среда представляет собой ионизованный газ (плазму), то тепловое движение отдельных частиц приводит к ряду важных явлений (диамагнетизм, амбиполярная диффузия и т. д.). Подобные явления выходят за рамки магнитной гидродинамики и обсуждаются в главах, посвященных физике плазмы (гл. 4 и 5).

Электромагнитные явления, вероятно, играли решающую роль в процессе формирования солнечной системы. Эта проблема рассмотрена в отдельной монографии Альвена [2], а также в статьях [3, 4].

1.2. Магнитные поля в космической физике

Поскольку геомагнитное поле подобно полю магнитного диполя, мы сформулируем в данном разделе некоторые свойства *поля диполя*, которые нам понадобятся в дальнейшем. Выберем

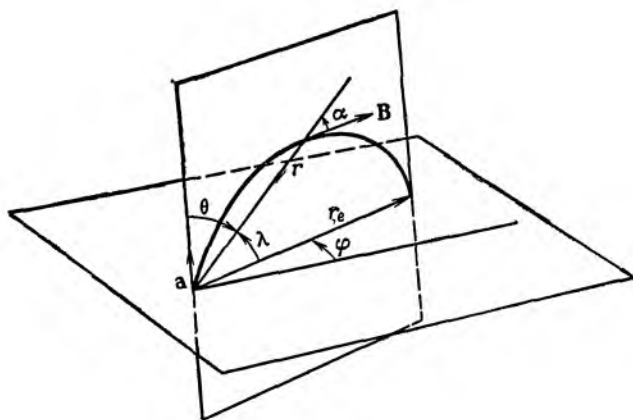


Рис. 1.1. Магнитная силовая линия диполя $\mathbf{a}$.

сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в диполе и с осью, параллельной магнитному моменту $\mathbf{a}$ (рис. 1.1). Введем также широту $\lambda = (\pi/2) - \theta$. Магнитное поле в таком случае дается следующим выражением:

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \psi, \quad (1)$$

где

$$\psi = \frac{ar}{r^3} = \frac{a \sin \lambda}{r^2}. \quad (2)$$

Составляющие поля запишутся в виде

$$B_r = B_p \sin \lambda, \quad (3)$$

$$B_\lambda = -\frac{1}{2} B_p \cos \lambda, \quad (4)$$

$$B_\varphi = 0,$$

а полная напряженность поля

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\lambda^2 + B_\varphi^2} = \frac{1}{2} B_p \phi = \frac{a\phi}{r^3}, \quad (5)$$

где

$$B_p = \frac{2a}{r^3}, \quad (6)$$

а

$$\phi = \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}. \quad (7)$$

B_r и B_λ представляют собой соответственно «вертикальную» и «горизонтальную» составляющие поля*. Магнитная силовая линия дается уравнением

$$r = r_e \cos^2 \lambda, \quad (8)$$

$$\varphi = \text{const},$$

где r_e — расстояние от начала координат до точки пересечения силовой линии с экваториальной плоскостью ($\lambda = 0$).

Угол α между силовой линией и радиусом-вектором определяется из соотношений

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{ctg } \lambda, \quad (9)$$

или

$$\sin \alpha = \frac{\cos \lambda}{\phi}, \quad (10)$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \sin \lambda}{\phi}. \quad (11)$$

«Наклонение» поля равно $(\pi/2) - \alpha$.

Полную напряженность поля вдоль данной силовой линии можно записать также в виде

$$B = \frac{a}{r^3} \phi = \frac{a}{r_e^3} (\cos \lambda)^{-6} \phi = \frac{a}{r_e^3} \eta, \quad (12)$$

где

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}}{\cos^6 \lambda}. \quad (13)$$

* «Вертикальная» составляющая геомагнитного поля считается положительной, если она направлена вниз.

В декартовой системе координат (x, y, z) мы имеем

$$B_x = 3xz \frac{a}{r^5}, \quad (14)$$

$$B_y = 3yz \frac{a}{r^5}, \quad (15)$$

$$B_z = (3z^2 - r^2) \frac{a}{r^5}, \quad (16)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Геомагнитное поле в первом приближении — это поле диполя. Такой диполь, расположенный в центре Земли и приведенный в соответствие с геомагнитными данными, должен иметь дипольный момент с $a = 8,1 \cdot 10^{25} \text{ гс} \cdot \text{см}^3$. В этом случае напряженность у полюса составляет 0,62 гс. Ось такого «центрированного» диполя пересекает поверхность Земли в двух взаимно противоположных точках с координатами $78,3^\circ$ с. ш., $69,0^\circ$ з. д. и $78,3^\circ$ ю. ш., $111,0^\circ$ в. д. [5, стр. 645 и 648].

Наилучшее приближение дает *эксцентрический диполь*, смещенный на 342 км от центра Земли по направлению к точке с координатами $6,5^\circ$ с. ш., $161,8^\circ$ в. д. Его ось пересекает поверхность Земли в точках $76,3^\circ$ ю. ш., $121,2^\circ$ в. д. и $80,1^\circ$ с. ш., $82,7^\circ$ з. д. [5, стр. 651, 652]. Согласно последним расчетным данным, эксцентрический диполь удаляется от центра Земли [6, стр. 239].

Более строгую аппроксимацию геомагнитного поля можно получить, используя разложение по сферическим гармоникам [5, стр. 639 и далее]. Впервые этот метод применил Гаусс [7]. Анализ, выполненный Гауссом, показал, что с точностью до «возмущений», величина которых на поверхности редко превышает 1%, основное поле Земли обусловлено источниками, находящимися внутри нее.

Если пренебречь внешними источниками, то поле можно записать в виде

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \psi, \quad (17)$$

где

$$\psi = R_e \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{R_e}{r} \right)^{n+1} T_n, \quad (18)$$

а

$$T_n = \sum_{m=0}^{m=n} (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\theta). \quad (19)$$

В этих выражениях r , θ и φ определяются в соответствии с рис. 1.1, R_e — средний радиус Земли, $P_n^m(\theta)$ — присоединенные

функции Лежандра [5, стр. 609], g_n^m и h_n^m — коэффициенты, определяющие силу и ориентацию мультиполей. Поскольку основное магнитное поле Земли подвержено медленным (вековым) вариациям, эти коэффициенты несколько меняются со временем. Соответствующий анализ был выполнен для поля эпохи 1945 г. [8—10] и поля эпохи 1955 г. [11]. В настоящее время карты геомагнитного поля составляются при помощи магнитометров, установленных на искусственных спутниках.

Магнитное поле меняется под влиянием токов ионосферы и околоземного пространства, которые вызывают как быстрые изменения («магнитные бури»), так и медленные непрерывные изменения. Вариации поля на поверхности Земли, обусловленные этими токами, редко превышают 1%, но во внешних частях магнитосферы относительные изменения могут быть значительно больше.

Другие планеты также, по-видимому, обладают магнитными полями. Радиоизлучение Юпитера [12] указывает на то, что эта планета имеет магнитное поле. Последние космические исследования Венеры, позволившие провести измерения на расстояниях вплоть до 41 000 км от ее центра, не обнаружили магнитного поля [13].

В соответствии с результатами, полученными при помощи космического корабля «Луна-2», магнитное поле Луны не превышает 10^{-3} гс.

Магнитные поля на Солнце впервые были обнаружены в 1908 г. в солнечных пятнах [14]. Десять лет спустя наблюдалось общее магнитное поле [15]. Впоследствии более совершенная методика наблюдений позволила провести обширные измерения эффекта Зеемана в фотосфере (см. обзор [16]). Было обнаружено три типа полей: 1) общее поле, которое наблюдается в высоких гелиографических широтах; 2) биполярные магнитные области, которые, если напряженность поля велика, связаны с солнечными пятнами, факелами, корональными лучами и т. п.; 3) униполярные магнитные области в низких широтах. Биполярные поля могут быть очень сильными (до 4000 гс). Обработка результатов измерений показала, что общее поле и поля униполярных областей имеют напряженность порядка 1 гс, и общее поле, которое до 1957 г. было антипараллельно геомагнитному, изменило свою полярность, так что с 1958 г. оба поля стали параллельны друг другу [17]. Однако интерпретация измерений слабых магнитных полей по эффекту Зеемана в фотосфере с сильной магнитной турбулентностью представляется сомнительной [18]. Возможно также, что основная часть потока, проходящая через поверхность Солнца, сконцентрирована в волокнах, которые настолько тонки, что их невозможно наблюдать

при современном уровне техники, и наблюдения в основном относятся к среде, заполняющей пространство между ними (см. разд. 5.5.3). По-видимому, можно констатировать, что наши знания об общем магнитном поле Солнца в настоящее время еще недостаточно надежны.

Прямые наблюдения магнитного поля в недрах Солнца невозможны. Перемещение зоны солнечных пятен, если его интерпретировать в соответствии с магнитогидродинамической теорией солнечных пятен [19], указывает на существование в области между фотосферой и центром общего магнитного поля с магнитным моментом $a = 2,1 \cdot 10^{33} \text{ гс} \cdot \text{см}^3$. Весьма желательна независимая проверка этого результата.

Лучевую структуру короны обычно интерпретируют как проявление магнитного поля Солнца. Она простирается далеко за пределы Солнца, но на больших расстояниях, по-видимому, не аппроксимируется полем диполя, поскольку токи в межпланетном пространстве нельзя считать пренебрежимо малыми. Эти токи создают *межпланетное магнитное поле*. Благодаря движению среды это магнитное поле в свою очередь создает *межпланетное электрическое поле*. Электромагнитные поля межпланетного пространства влияют на процессы, происходящие вблизи Земли, и ответственны за возникновение магнитных бурь и полярных сияний. Они вызывают также вариации интенсивности космического излучения и, возможно, играют определенную роль в образовании космических лучей.

Магнитное поле звезд впервые наблюдал Г. У. Бэбкок в 1947 г. (звезда 78 Девы) [20]. С тех пор проведены многочисленные наблюдения, и сейчас ясно, что магнитные поля — общее свойство звезд определенной категории, а именно быстро вращающихся звезд класса А с конвективным ядром [21, 22]. Магнитные поля звезд в большинстве случаев переменны и в некоторых случаях очень сильны. Так, например, напряженность поля звезды HD 215 441 достигает примерно 34 000 гс [23]. Открытие магнитопеременных звезд положило начало новой области астрофизики. Построение теории этого явления находится еще на ранней стадии.

Идея о *магнитном поле Галактики* впервые была привлечена для объяснения изотропии космического излучения [24, 25] и впоследствии была использована в теории ускорения космических лучей [26] (см. разд. 2.7) и в теории спиральных ветвей галактик [27, 28]. Открытие поляризации света удаленных звезд [29, 30] явилось доказательством того, что напряженность межзвездных полей невелика. Поляризация может быть вызвана ориентацией межзвездной пыли в магнитном поле. Впрочем, возможны и другие механизмы этого явления [31—34]. Косми-

ческие шумы, регистрируемые радиотелескопами, возможно, частично представляют собой синхротронное излучение релятивистских электронов, движущихся в крупномасштабных магнитных полях [35—38] (см. разд. 2.8). Наблюдаемая таким образом корона радиоизлучения, окружающая Галактику, указывает на существование протяженных слабых магнитных полей не только в плоскости Галактики, но и на больших расстояниях от нее [39, 40]. Возможны и другие механизмы радиоизлучения межзвездной плазмы (см., например, монографию Шкловского [38]).

В настоящее время нет надежных оценок напряженности галактических полей. В качестве возможного по порядку величины значения часто приводят 10^{-6} — 10^{-5} эс. Одним из обоснований этой величины служит то, что она дает плотность магнитной энергии $B^2/8\pi = 4 \cdot 10^{-14}$ — $4 \cdot 10^{-12}$ эрг/см³, которая совпадает по порядку величины с плотностью кинетической энергии межзвездной среды $\rho v^2/2$, полученной в предположении, что $\rho \approx 10^{-24}$ г/см³ и $v = 3 \cdot 10^5$ — $3 \cdot 10^6$ см/сек [27, 41]. Результаты непосредственных наблюдений не подтверждают этих оценок и в то же время не противоречат им [42].

1.3. Индуцированные электрические поля

В присутствии магнитного поля электрическое поле можно определить только по отношению к какой-либо системе координат. Если в «покоящейся» системе электрическое и магнитное поля равны $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, то соответствующие поля $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ в системе, которая движется по отношению к первой со скоростью $\mathbf{v}$, можно найти при помощи релятивистских формул преобразования. Компоненты, параллельные $\mathbf{v}$, остаются неизменными, а компоненты, перпендикулярные $\mathbf{v}$, преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$; в вакууме $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$).

Скорости, с которыми имеют дело в астрономии, значительно меньше скорости света c . Электростатические поля, за исключением специальных случаев, не играют существенной роли (см. разд. 4.2.3 и 5.1.3). Таким образом, электрические поля

являются вторичными по отношению к магнитным полям. В соответствии с формулой (1) это означает, что они гораздо слабее магнитных. Следовательно, для космических объектов мы можем, как правило, с хорошим приближением написать

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (4)$$

(где векторы содержат также компоненты, параллельные $\mathbf{v}$).

Таким образом, магнитные поля не зависят от выбора системы координат; нет разницы между магнитным полем в движущейся и магнитным полем в «покоящейся» системах координат. Электрические поля зависят от системы координат, в которой они измеряются. Бессмысленно говорить об электрическом поле, не определив точно систему координат, к которой оно относится.

1.3.1. Индуцированное электрическое поле в равномерно движущейся среде

Поскольку космические облака ионизованного газа (плазма, см. гл. 4 и 5) обычно намагничены, их движение в соответствии с формулой (3) создает электрические поля. Эти индуцированные электрические поля имеют большое значение для многих астрофизических проблем. Например, движение намагниченной межпланетной плазмы создает электрические поля, которые играют важную роль в образовании полярных сияний и магнитных бурь (см. разд. 2.6), определенным образом влияют на вариации космических лучей и т. д. В этом разделе мы проиллюстрируем основные свойства электрических полей, связанных с таким движением, на простом примере, а именно на примере плоского твердого слоя с бесконечной проводимостью, который пронизан магнитным полем и движется параллельно самому себе.

Пусть x, y, z (см. рис. 1.2) — оси неподвижной декартовой системы координат S (с единичными векторами $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$), в которой рассматриваемый слой занимает объем

$$|x| < a$$

и движется со скоростью

$$\mathbf{v} = v_0 \hat{y}, \quad (5)$$

причем $v_0 \ll c$.

Пусть другая система координат S' движется вместе со слоем и имеет координаты x', y', z' и единичные векторы $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$,

параллельные единичным векторам системы S . Величины, измеренные в системе S , будем обозначать $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и т. д., а соответствующие величины, измеренные в системе S' , обозначим $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ и т. д. Пусть задано магнитное поле

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_0 \hat{z} & (|x| < a), \\ 0 & (|x| > a). \end{cases} \quad (6)$$

Такое поле связано с поверхностными токами

$$\mathbf{i}_s = \begin{cases} -\frac{cB_0}{4\pi} \hat{y} & (x = -a), \\ \frac{cB_0}{4\pi} \hat{y} & (x = a). \end{cases} \quad (7)$$

Предположим, что проводимость слоя бесконечно велика, тогда электрическое поле $\mathbf{E}'$ в системе координат S' , движущейся вместе со слоем, должно быть равно нулю:

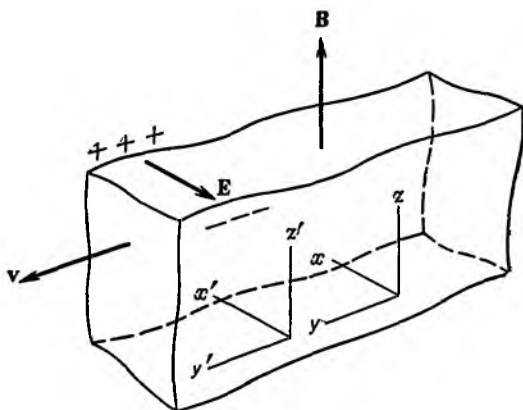


Рис. 1.2. Электромагнитная индукция в слое электрически проводящего вещества, движущегося в магнитном поле.

Рис. 1.2. Электромагнитная индукция в слое электрически проводящего вещества, движущегося в магнитном поле.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B} = -\frac{v_0 B_0}{c} \hat{x} \quad (|x| < a). \quad (9)$$

Электрические силовые линии оканчиваются на поверхностных зарядах, плотность которых

$$q_s = \begin{cases} -\frac{v_0 B_0}{4\pi c} & (x = -a), \\ \frac{v_0 B_0}{4\pi c} & (x = a), \end{cases} \quad (10)$$

а вне слоя электрическое поле отсутствует:

$$\mathbf{E} = 0, \quad (|x| > a). \quad (11)$$

В движущейся системе S' и в системе S магнитные поля равны, тогда как формулы (8), (3) и (11) дают для электрического поля в системе S'

$$\mathbf{E}' = 0 \quad (-\infty < x < \infty). \quad (12)$$

Поскольку магнитные поля одинаковы в обеих системах, плотности токов i' и i также должны быть равны. Но $\mathbf{E}'$ отличается от $\mathbf{E}$ и из формулы (12) следует, что в системе S' плотность электрических зарядов тождественно обращается в нуль. Различие плотности зарядов в двух рассматриваемых координатных системах является релятивистским эффектом. Из формул релятивистского преобразования непосредственно следует

$$i'_s = \frac{i_s - v q_s}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (13)$$

$$q'_s = \frac{q_s - \frac{v i}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (14)$$

(см., например, [43, стр. 264]), что в нашем случае ($v \ll c$, $E \ll B$) приводит к выражениям

$$i'_s = i_s, \quad (15)$$

$$q'_s = q_s - \frac{v i}{c^2}. \quad (16)$$

Физическое объяснение различия результирующей плотности зарядов состоит в том, что электрическое поле приводит к относительному движению положительных и отрицательных частиц. Вследствие релятивистского сокращения плотность положительных частиц зависит от системы координат, в которой она рассматривается; это справедливо и для отрицательных частиц. В нашем случае плотности равны, если мы рассматриваем их в системе $x'y'z'$, но они будут различны в системе xuz , и это различие достаточно для того, чтобы создать значительный поверхностный заряд (см. разд. 5.8.1).

Необходимо отметить, что магнитные поля почти одинаковы в движущейся и покоящейся системах. Это означает, что совершенно неважно, как локализованы источники магнитного поля. Мы можем говорить о «вмороженном» магнитном поле, которое «увлекается» плазмой, но такое поле невозможно отличить от поля, создаваемого источниками в неподвижной системе. (В нестационарных случаях эти источники должны быть, разумеется, переменными во времени.)

1.3.2. Индуцированные электрические поля во вращающихся телах

Из формул (3) и (4) следует, что вращение проводника в магнитном поле создает электрическое поле в покоящейся системе координат. Это явление хорошо известно из лабораторных экспериментов и обычно называется «гомополярной» или «униполярной» индукцией. Впервые оно было изучено Фарадеем и в течение прошлого столетия вызывало большой интерес, поскольку предполагалось, что его исследование позволит ответить на вопрос, вращаются ли силовые линии вместе с вращающимся магнитом. В результате выяснилось, что не имеет смысла говорить о «движении» магнитного поля. Не имеет значения, движутся источники, создающие магнитное поле, или нет.

Простейшим примером униполярного индуктора служит цилиндрический магнитный стержень NS , вращающийся вокруг своей оси AA' (см. рис. 1.3, a). Неподвижный провод $AGDC$ соединяет ось со скользящим контактом C , расположенным посередине стержня. Если ключ D замкнут и если магнит вращается, то гальванометр G регистрирует ток. Но совершенно не обязательно, чтобы вращающееся тело было постоянным магнитом. Любой вращающийся проводник даст тот же эффект, если только создано каким-либо образом магнитное поле (как, например, в устройстве, изображенном на рис. 1.3, b).

В космических объектах магнитное поле обычно генерируется токами, текущими в самом объекте. Рассмотрим кратко электрические поля, индуцированные вращением таких объектов. Пусть электрически проводящая сфера (радиуса R) помещена в вакуум и вращается как твердое тело. Ограничим рассмотрение случаем, когда линейная скорость вращения $v = \omega r$ значительно меньше скорости света, так что величиной v^2/c^2 можно пренебречь по сравнению с единицей. Общий вид уравнений электромагнитного поля во вращающейся системе координат можно найти в работе [44, стр. 302].

Пусть S — неподвижная система координат, начало которой совпадает с центром сферы, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной

точки. Если сфера приводится во вращение с угловой частотой ω , то электрон, расположенный в точке $\mathbf{r}$, движется со скоростью

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (17)$$

и испытывает действие силы Лоренца

$$\mathbf{F} = -e \frac{\omega \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B}.$$

Эта сила будет смещать электроны в проводнике до тех пор, пока возникшее разделение зарядов не создаст уравновешиваю-

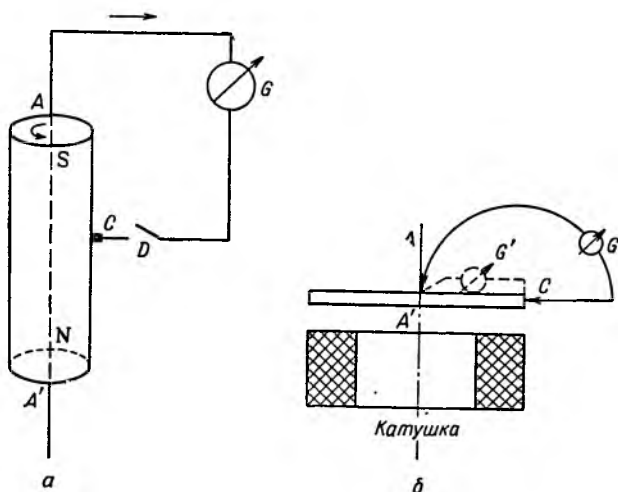


Рис. 1.3. Униполярные индукторы.

a — если магнитный стержень NS вращается вокруг своей оси AA' в неподвижном контуре, соединяющем ось со скользящим контактом C , то возникает ток. b — униполярный индуктор, состоящий из вращающегося медного диска, помещенного в магнитное поле катушки.

щее электрическое поле, так что результирующая сила, действующая на любой электрон, станет равной нулю. Уравновешивающее электрическое поле внутри сферы будет

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B} \quad (r < R). \quad (18)$$

В системе координат S' , вращающейся вместе со сферой, электрическое поле отсутствует:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + \frac{\omega \times \mathbf{r}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \quad (r < R).$$

Поскольку в этой системе электроны покоятся, то магнитные силы тоже исчезают, и результирующая сила, как и следовало ожидать, будет равна нулю.

Переходя к покоящейся системе S , мы можем, используя равенство (18), вычислить результирующую плотность зарядов q на сфере. Она равна

$$q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{2\pi c} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{B}) + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{4\pi c} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Используя уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}$$

(и полагая $\mathbf{H} = \mathbf{B}$), получим

$$q = -\frac{1}{2\pi c} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{B}) + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{c^2} \mathbf{i} \quad (r < R). \quad (19)$$

(Кроме объемного заряда плотности q внутри сферы на ее поверхности может существовать поверхностный заряд плотности q_s . Суммарный заряд остается равным нулю, поскольку, предположив, что сфера находится в вакууме, мы тем самым исключаем возможность утечки зарядов.) В вакууме заряды отсутствуют:

$$q = 0 \quad (r > R), \quad (20)$$

и электрическое поле определяется распределением зарядов внутри сферы (и на ее поверхности). Поскольку поле создается только зарядами (а не переменными магнитными полями), то оно повсюду будет безвихревым.

Если к двум точкам сферы, имеющим разные потенциалы в покоящейся системе S , присоединить при помощи скользящих контактов покоящуюся внешнюю цепь, то такое устройство будет действовать как униполярный генератор, подобный изображенному на рис. 1.3. В замкнутом контуре, состоящем из внешней неподвижной цепи, где $\mathbf{E} \neq 0$, и движущейся сферы, где $\mathbf{E}' = 0$, возникает результирующая э. д. с., равная (в системе S) разности потенциалов между скользящими контактами. Применим приведенное выше рассмотрение к частному случаю, когда внешнее магнитное поле представляет собой поле диполя

$$\begin{aligned} B_r &= B_0 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \sin \lambda, \\ B_\lambda &= -\frac{1}{2} B_0 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \cos \lambda, \end{aligned} \quad (21)$$

где B_0 — напряженность поля у полюса (на расстоянии R). Разность потенциалов между широтой λ и экватором равна

$$V = \int_0^\lambda (-E_\lambda) R d\lambda = \frac{\omega R^2 B_0}{2} (\cos^2 \lambda - 1) \text{ ед. CGSE.} \quad (22)$$

Для Земли $R = 0,64 \cdot 10^9 \text{ см}$, $\omega R = 0,5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$, а $B_0 = -0,6 \text{ гс}$. Полная разность потенциалов между полюсом ($\lambda = \pi/2$) и экватором ($\lambda = 0$) равна 10^5 в , а горизонтальная составляющая электрического поля на широте 45° имеет величину 150 мкв/см .

Если окружающее пространство представляет собой вакуум, то внешний электрический потенциал можно определить, решая уравнение Лапласа $\Delta V = 0$ с граничными условиями (22). Решение уравнения дает поле квадрупольа [45]. Однако присутствие даже незначительного количества заряженных частиц может существенно изменить характер поля (см. гл. 5).

1.4. Приближенное равенство положительного и отрицательного пространственных зарядов

Рассмотрим сферу радиуса R , содержащую в единице объема N_1 положительных зарядов e и N_2 отрицательных зарядов $-e$. Электростатический потенциал на поверхности сферы равен

$$V = \frac{4\pi}{3} (N_1 - N_2) e R^2.$$

Если рассматриваемая сфера находится, например, в солнечной короне, то мы можем быть уверены в том, что на ее поверхности невозможен потенциал, скажем, больше $3 \cdot 10^{10} \text{ в}$ (10^8 ед. CGSE). (Сфера радиуса $R = 10^9 \text{ см}$ — лишь малая часть короны.)

Подставляя это значение R и $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. CGSE}$, из условия $V < 10^8 \text{ ед. CGSE}$ получим

$$N_1 - N_2 < 0,05 \text{ см}^{-3}.$$

Поскольку $N_2 \approx 10^8 \text{ см}^{-3}$, то

$$\frac{N_1 - N_2}{N_2} < 0,5 \cdot 10^{-9}.$$

Отсюда следует, что даже если на 10^9 протонов приходится $10^9 + 1$ электронов, то создаются невероятно высокие напряжения. Это свойственно почти всем космическим объектам.

Из исследования электрических разрядов в газах известно также, что в случае высокой плотности заряженных частиц количество положительных и отрицательных частиц должно быть

примерно одинаковым. Как мы увидим в гл. 4 (разд. 4.2.3), количественным критерием приближенного равенства плотности положительных и отрицательных зарядов является малость дебаевского радиуса. Это условие — одна из основных характеристик плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dungey J. W., *Cosmic Electrodynamics*, Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1958. (Русский перевод: Данжи Дж., Космическая электродинамика, Госатомиздат, М., 1961.)
2. Alfvén H., *On the Origin of the Solar System*, Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. Alfvén H., *On the Mass Distribution in the Solar System*, *Astrophys. J.*, **136**, 1005 (1962).
4. Alfvén H., Wilcox J., *On the Origin of the Satellites and the Planets*, *Astrophys. J.*, **136**, 1016 (1962).
5. Chapman S., Bartels J., *Geomagnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1940.
6. Singer S. F., *The Primary Cosmic Radiation and its Time Variations*, *Progress in Elementary Particle and Cosmic Ray Physics*, vol. 4, North-Holland Publ. Co., 1958, p. 205—335.
7. Gauss C. F., *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*, Resultate magn. Verein., 1838.
8. Vestine E. H., Lange I., Laporte L., Scott W. E., *The Geomagnetic Field, its Description and Analysis*, Carn. Inst. Wash. Publ., 580 (1947).
9. Hultqvist B., *The Spherical Harmonic Development of the Geomagnetic Field, Epoch 1949, transformed into Rectangular Geomagnetic Coordinate Systems*, *Ark. Geophys.*, **3**, 53 (1958).
10. Hultqvist B., *The Geomagnetic Field Lines in Higher Approximation*, *Ark. Geophys.*, **3**, 63 (1958).
11. Finch H. F., Leaton B. R., *The Earth's Main Magnetic Field*, Epoch 1955, *Mon. Not. Roy Astron. Soc., Suppl.*, **7**, 314 (1957).
12. Radhakrishnan V., Roberts J. A., *Polarization and Angular Extent of the 960-Mc/s Radiation from Jupiter*, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 493 (1960).
13. Smith J., Davis L., Coleman P. J., Sonett P., *Mariner II. Preliminary Reports on Measurements of Venus, Magnetic Field*, *Science*, **139**, 909 (1963).
14. Hale G. E., *On the Probable Existence of the Magnetic Field in Sunspots*, *Mt. Wilson Contr. № 30*, *Astrophys. J.*, **28**, 315 (1908).
15. Hale G. E., Seares F. H., von Maanen A., Ellerman F., *The General Magnetic Field of the Sun*, *Mt. Wilson Contr. № 148*, *Astrophys. J.*, **47**, 206 (1918).
16. Babcock H. W., Babcock H. D., *The Sun's Magnetic Field*, *Astrophys. J.*, **121**, 349 (1955).
17. Babcock H. D., *The Sun's Polar Magnetic Field*, *Astrophys. J.*, **130**, 364 (1959).
18. Alfvén H., Lehnert B., *The Sun's General Magnetic Field*, *Nature*, **178**, 1339 (1956).
19. Alfvén H., *On Sunspots and the Solar Cycle*, *Ark. f. mat., astr. o. fys.*, **29A**, № 12 (1943).
20. Babcock H. W., *Remarks on Stellar Magnetism*, *Publ. Astr. Soc. Pacific*, **59**, № 348, 112 (1947); *The Reversing Magnetic Field of BD — 18° 3789*, там же № 350, 260 (1947). (Русский перевод в сб.: «Астрофизический

- сборник», ИЛ, М., 1949, Бэбкок Х., Замечания о звездном магнетизме, стр. 185. Переменное магнитное поле звезд BD — 18° 3789, стр. 220.)
21. Babcock H. W., A Catalog of Magnetic Stars, *Astrophys. J., Suppl.*, № 30 (1958).
 22. Babcock H. W., Magnetic Fields of the A-type Stars, *Astrophys. J.*, 128, 508 (1958).
 23. Babcock H. W. The 34-Kilogauss Magnetic Field of HD 215441, *Astrophys. J.*, 132, 521 (1960).
 24. Alfvén H., Cosmic Radiation as an Inter galactic Phenomenon, *Ark. f. mat., astr. o. fys.*, 25B, № 29 (1937).
 25. Пикельнер С. Б., Кинематические свойства межзвездного газа в связи с изотропией космических лучей, Докл. АН СССР, 88, № 2, 229 (1953).
 26. Fermi F., Galactic Magnetic Fields and the Origin of Cosmic Radiation, *Astrophys. J.*, 119, 1 (1954).
 27. Chandrasekhar S., Fermi E., Magnetic Fields in Spiral Arms, *Astrophys. J.*, 118, 113 (1953).
 28. Elvius A., Herlofson N., On the Dynamics of Galaxies with Large-scale Magnetic Fields, *Astrophys. J.*, 131, 304 (1960).
 29. Hiltner W. A., On the Presence of Polarization in the Continuous Radiation of Stars. II, *Astrophys. J.*, 109, 471 (1949).
 30. Hall J. S., Observations of the Polarized Light from Stars, *Science*, 109, 166 (1949).
 31. Spitzer L., Tukey J. W., A Theory of Interstellar Polarization, *Astrophys. J.*, 114, 187 (1951).
 32. Davis L., Greenstein J. L., The Polarization of Starlight by Aligned Dust Grains, *Astrophys. J.*, 114, 206 (1951).
 33. Gold T., The Alignment of Galactic Dust, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 112, 215 (1952).
 34. Henry J., Polarization of Starlight by Ferro-magnetic Particles, *Astrophys. J.*, 128, 497 (1958).
 35. Alfvén H., Herlofson N., Cosmic Radiation and Radio Stars, *Phys. Rev.*, 78, 616 (1950).
 36. Шкловский И. С., О природе радиоизлучения Галактики, *Астрон. ж.*, 29, вып. 4, 418 (1952).
 37. Шкловский И. С., Проблема космического радиоизлучения, *Астрон. ж.*, 30, вып. 1, 15 (1953); Проблема происхождения космических лучей и радиоастрономия, там же, 30, вып. 6, 577 (1953).
 38. Шкловский И. С., Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, М., 1956.
 39. Baldwin J. E., The Distribution of the Galactic Radio Emission, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 115, 690 (1955).
 40. Burbidge G. R., The Halo Distribution of Radio Emission and Extended Magnetic Fields in our Galaxy and M 31, *Astrophys. J.*, 123, 491 (1956).
 41. Spitzer L., Behaviour of Matter in Space, *Astrophys. J.*, 120, 1 (1954).
 42. Davis R. D., Slater C. H., Shuter L. H., Wild P. A. T., A New Limit to the Galactic Magnetic Field set by Measurement of the Zeeman Splitting of the Hydrogen Line, *Nature*, 187, 1088 (1960).
 43. Becker R., Sauter F., *Theorie der Elektrizität*, Bd. I, Teubner, Stuttgart, 1957, S. 264.
 44. Möller C., *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1952.
 45. Davis L., Stellar Electromagnetic Fields, *Phys. Rev.*, 72, 632 (1947).

Движение заряженных частиц в магнитных полях

2.1. Введение

Первыми, кто в полной мере оценил исключительную важность проблем движения заряженных частиц в магнитных полях для космической физики, были Биркеланд и Штёрмер. Под влиянием экспериментов Биркеланда с «терреллой»*, поставленных в 1890 г., Штёрмер на протяжении первой половины двадцатого столетия опубликовал ряд теоретических статей, посвященных движению в поле магнитного диполя (обзор работ Биркеланда и Штёрмера см. в [1, 2]). Тем самым были заложены основы для дальнейших исследований в данной области. Однако даже при использовании современных электронно-вычислительных машин численные расчеты весьма сложны в том случае, когда частица описывает очень большое число петель в магнитном поле. В геомагнитном поле это имеет место для всех частиц с импульсами меньшими, чем у космических лучей. Такие частицы в геомагнитном поле совершают тысячи и миллионы оборотов, и численное интегрирование становится практически невозможным.

Если траектория состоит из множества петель, то, как правило, размеры петель малы по сравнению с размерами магнитного поля. Следовательно, за время одного оборота частица движется практически в однородном поле. Чтобы рассчитать ее движение, целесообразно начать с рассмотрения движения в однородном поле, а затем ввести неоднородность как возмущение. Этот метод — *метод возмущений*, — который рассматривается в разд. 2.2 и 2.3, особенно пригоден для частиц малой энергии. В геомагнитном поле он применим практически ко всем задачам, в которых рассматриваются частицы с импульсами меньше, чем у космических лучей. Из последних работ, посвященных этому методу, можно указать, например, [3—5].

В последующих параграфах движение в поле диполя рассматривается как методом Штёрмера (разд. 2.4), так и методом возмущений (разд. 2.5) и проводится сравнение полученных результатов.

* Электромагнитная модель Земли. — Прим. перев.

Траектории космических лучей можно также найти посредством прямых экспериментов, в которых создаются очень тонкие электронные пучки и изучаются их траектории в поле диполя, создаваемом намагниченной сферой (разд. 2.4.1). Таким образом, имеются три метода — численное интегрирование, эксперименты с моделью Земли и метод возмущений, — которые взаимно дополняют друг друга.

На частицы низкой энергии в геомагнитном поле сильно влияют электрические поля, даже довольно слабые. Предположим, что электрон с энергией 1 кэВ в отсутствие электрического поля дрейфует по круговой орбите, лежащей в экваториальной плоскости на расстоянии, равном трем радиусам Земли. Если приложить слабое электрическое поле напряженностью 1 мкВ/см , то орбита частицы изменится так резко, что она покинет магнитное поле Земли (см. разд. 2.6.3). Таким образом, при изучении поведения частиц низкой энергии в магнитном поле Земли учет электрических полей часто оказывается весьма существенным (разд. 2.6).

Во флуктуирующих магнитных полях заряженные частицы при определенных условиях могут ускоряться. Такое ускорение играет важную роль в образовании космического излучения, радиационных поясов и т. д. Основы этих явлений изложены в разд. 2.7.

Двигаясь в магнитных полях, заряженная частица излучает. Краткому описанию характеристик этого излучения посвящен заключительный разд. 2.8.

2.2. Движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле

2.2.1. Невозмущенное движение

Рассмотрим частицу с массой покоя m и зарядом e в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Скорость частицы $\mathbf{v}$ имеет составляющую $v_{\parallel}$, параллельную магнитному полю, и составляющую $v_{\perp}$, перпендикулярную полю. Импульс частицы равен

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (1)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}, \quad (2)$$

а $v = |\mathbf{v}| = (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)^{1/2}$. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

Поскольку сила, стоящая в правой части уравнения (3), перпендикулярна $\mathbf{v}$, абсолютное значение импульса, а следовательно, и скорости остается постоянным. В таком случае уравнение (3) легко решается, и мы находим, что движение представляет собой суперпозицию перемещения с постоянной скоростью параллельно магнитному полю ($v_{\parallel} = \text{const}$) и кругового движения в плоскости, перпендикулярной полю. Мгновенный центр кругового движения назовем *центром вращения*. Радиус кривизны ρ (вектор, направленный от точки в которой находится частица, к центру вращения) проекции траектории на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{B}$, определяется из соотношения

$$\gamma m \omega^2 \rho = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

где ω — угловая частота кругового движения. Поскольку

$$v_{\perp} = \omega \rho, \quad (5)$$

то из формул (1) и (4) следует

$$\omega = \frac{|e| B}{\gamma m c}, \quad (6)$$

$$\rho = \frac{c \gamma m}{e B^2} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{c}{e B^2} \mathbf{p} \times \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$\rho = \frac{\gamma m v_{\perp} c}{|e| B} = \frac{p_{\perp} c}{|e| B}. \quad (8)$$

(Отметим, что e включает в себя и знак заряда.) Радиус ρ обычно называется *ларморовским радиусом*, а произведение $B\rho = c \gamma m_{\perp} / |e|$ — *магнитной жесткостью*. (В том случае, когда $v_{\parallel} \neq 0$ и, следовательно, траектория представляет винтовую линию, ларморовский радиус не совпадает с радиусом кривизны траектории.)

Вращательное движение заряженной частицы создает магнитное поле. Среднее по времени этого поля равно полю кругового тока



Рис. 2.1. В магнитном поле $\mathbf{B}$, создаваемом током I , отрицательно заряженные частицы вращаются в направлении тока I , положительно заряженные — в противоположном направлении.

$$I = \frac{|e|}{T_g}, \quad (9)$$

где T_g — период вращения:

$$T_g = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\gamma mc}{|e|B}. \quad (10)$$

Таким образом, рассматриваемая частица эквивалентна магниту с моментом

$$\mu = \frac{\pi r^2 I}{c} = \frac{p_{\perp}^2}{2\gamma m B}, \quad (11)$$

направленным антипараллельно полю $\mathbf{B}$ (рис. 2.1). Магнитный поток через круговую траекторию равен

$$\phi = \pi r^2 B = \frac{\pi c^2}{e^2} \frac{p_{\perp}^2}{B} = \frac{2\pi\gamma mc^2}{e^2} \mu. \quad (12)$$

В нерелятивистском случае ($v \ll c$) $\gamma = 1$, и выражение (11) принимает вид

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B}, \quad (13)$$

где $W_{\perp}$ — кинетическая энергия, связанная с движением перпендикулярно силовым линиям.

2.2.2. Движение, возмущенное действием немагнитных сил или отдельной неоднородностью магнитного поля. Ведущий центр

Если движение частицы претерпевает возмущение, вызванное действием немагнитных сил, или если магнитное поле содержит неоднородности, часто бывает удобно использовать понятие *ведущего центра*. Определим ведущий центр как точку, заданную уравнением

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{c^2}{eB^2} \mathbf{p} \times \mathbf{B}, \quad (14)$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — радиус-вектор и импульс частицы, а $\mathbf{B}$ — магнитное поле. Из уравнения (7) следует, что, если сила, обусловленная однородным магнитным полем, является единственной силой, действующей на частицу, ведущий центр $\mathbf{r}_c$ совпадает с центром вращения. Это означает, что *если ненадолго устранить возмущающую силу, то в течение этого времени частица будет двигаться по окружности вокруг ведущего центра*.

Как мы увидим в дальнейшем, движение ведущего центра под действием возмущающей силы часто легко рассчитать. Если частица проходит расстояние, которое велико по сравнению с ρ , то во многих случаях нет необходимости знать в деталях ее траекторию. Поскольку винтовую линию частица описывает

вокруг ведущего центра, достаточно уметь рассчитать движение самого ведущего центра.

Соударение. Предположим, что заряженная частица, движущаяся в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$, подвергается соударению. Это означает, что в течение небольшого интервала времени $\Delta t \ll T_g$ на нее действует значительная сила $\mathbf{f}$. Пусть $\mathbf{f}_{\parallel}$ и $\mathbf{f}_{\perp}$ — компоненты этой силы, параллельная и перпендикулярная магнитному полю соответственно. Если

$$\mathbf{f}_{\perp} \gg \left| \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right|, \quad (15)$$

то импульс частицы принимает значение

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}, \quad (16)$$

где

$$\Delta \mathbf{p} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{f} dt. \quad (17)$$

До соударения и после него ведущий центр покоится (или равномерно движется параллельно силовым линиям). В течение кратковременного соударения радиус-вектор $\mathbf{r}$ частицы не меняется сколь-либо заметным образом, а вектор импульса $\mathbf{p}$ меняется, вследствие чего положение ведущего центра изменяется на величину

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_c &= \frac{c}{eB^2} \Delta \mathbf{p} \times \mathbf{B} = \\ &= -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{f} dt \end{aligned} \quad (18)$$

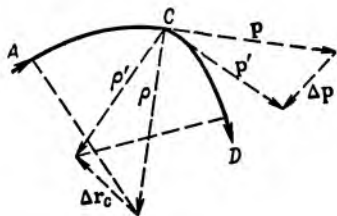


Рис. 2.2. Изменение импульса $\mathbf{p}$ приводит к смещению ведущего центра $\Delta \mathbf{r}_c$.

(рис. 2.2). Этот результат справедлив и для центра вращения (см. разд. 2.2.3).

Постоянно действующая сила немагнитного происхождения. Если $\mathbf{f}$ — постоянно действующая сила, то ведущий центр непрерывно смещается, т. е. дрейфует с некоторой определенной скоростью, которую мы обозначим $\mathbf{U}$. Дифференцирование уравнения (14) дает

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v} + \frac{c}{eB^2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (19)$$

(при условии, что магнитное поле однородно и постоянно во времени). Если в выражение (19) подставить уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{e\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (20)$$

и воспользоваться векторным тождеством

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{v}\mathbf{B}) - \mathbf{v}B^2 = \mathbf{v}_{\parallel}B^2 - \mathbf{v}B^2 = -\mathbf{v}_{\perp}B^2,$$

то получим

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_{\parallel} = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times \mathbf{f}. \quad (21)$$

Движение ведущего центра можно представить как совокупность смещений, обусловленных непрерывной последовательностью кратковременных столкновений, каждое из которых приводит к приращению Δr_c в соответствии с формулой (18). В таком случае скорость, перпендикулярная магнитному полю, равна $\Delta r_c / \Delta t$, что снова приводит к уравнению (21).

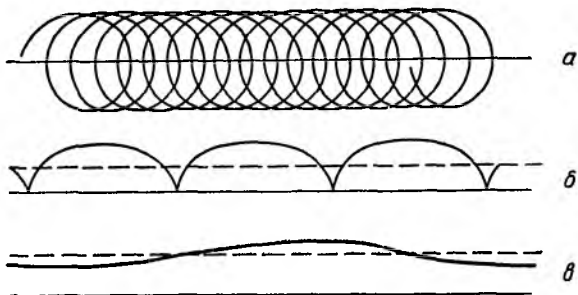


Рис. 2.3. Траектории частицы (жирная линия), ведущего центра (тонкая линия) и центра вращения (пунктирная линия) при условии, что сила $\mathbf{f}$ постоянна. Случаи a , b и v соответствуют различным отношениям скорости дрейфа $u_{\perp} = cf/eB$ к скорости вращения $v'_{\perp}$:

$$a - u_{\perp}/v'_{\perp} < 1; \quad b - u_{\perp}/v'_{\perp} = 1; \quad v - u_{\perp}/v'_{\perp} > 1.$$

Если мы разложим вектор $\mathbf{U}$ на перпендикулярную и параллельную полю $\mathbf{B}$ составляющие, то получим

$$\mathbf{U}_{\perp} = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times \mathbf{f}, \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{U}_{\parallel}) = f_{\parallel}. \quad (23)$$

На рис. 2.3 показаны типичные случаи движения частицы и ее ведущего центра.

Неоднородности магнитного поля. Предположим, что заряженная частица движется в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0$, ко-

торое однородно во всем пространстве, за исключением некоторой области. В этой сингулярной области (рис. 2.4) магнитное поле параллельно $\mathbf{B}_0$, но имеет напряженность $\mathbf{B}_1$. Когда частица входит в эту область в точке A , ларморовский радиус изменяется от ρ_0 до ρ_1 , так что ведущий центр перескакивает из точки A' в точку P . Когда частица выходит из поля $\mathbf{B}_1$ в точке C , ведущий центр перескакивает в точку C' . Таким образом, в результате прохождения частицей неоднородности ее ведущий центр смещается на величину $\Delta \mathbf{r}_c$ из точки A' в точку C' . Как следует из рис. 2.4,

$$\Delta \mathbf{r}_c = -\mathbf{l} \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} = -\mathbf{l} B_1 \left(\frac{1}{B_0} - \frac{1}{B_1} \right),$$

или

$$\Delta \mathbf{r}_c = -\mathbf{l} \frac{\Delta B}{B_0}, \quad (24)$$

где $\Delta B = B_1 - B_0$, а $\mathbf{l}$ — расстояние между точкой A , в которой частица входит в поле $\mathbf{B}_1$, и точкой C , в которой частица возвращается в поле $\mathbf{B}_0$.

В более общем случае, когда B меняется в области неоднородности, эту область можно разбить на отдельные участки, настолько малые, что в пределах каждого из них поле будет приблизительно постоянным, а $\mathbf{l}$ приблизительно равно элементу пути Δs . Тогда $\Delta s / \Delta t$ приблизительно равно $v_{\perp}$, и из уравнения (24)

$$\mathbf{U}_{\perp} = -\mathbf{v}_{\perp} \frac{\Delta B}{B_0}. \quad (25)$$

2.2.3. Движение центра вращения. Сила инерции

В случае постоянно действующей силы усредненное движение можно получить, используя иной подход, состоящий в отыскании такой движущейся системы координат, относительно которой траектория частицы представляет собой окружность.

Пусть сила $\mathbf{f}$ немагнитного происхождения, действующая на частицу, складывается из воздействия электрического поля $\mathbf{E}$ и сил иного происхождения, которые мы обозначим $\mathbf{f}^0$, так что в «покоящейся» системе координат

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + e\mathbf{E}. \quad (26)$$

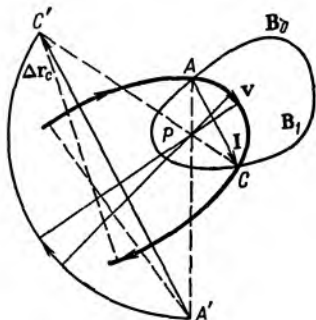


Рис. 2.4. Движение ведущего центра при прохождении частицей области более сильного магнитного поля. (Силовые линии представляют собой прямые и направлены перпендикулярно плоскости чертежа.)

По формулам разд. 1.3 перейдем к системе координат S' , движущейся с некоторой скоростью, которую мы представим в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel$. Ограничимся нерелятивистским случаем

$$v \ll c, \quad (27)$$

$$u \ll c. \quad (28)$$

Тогда квадратный корень в формулах (1) и (2) разд. 1.3, который представляет собой релятивистскую поправку, можно положить равным единице. По аналогии с формулами (3) и (4) разд. 1.3 получим

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) \times \mathbf{B}, \quad (29)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) \times \mathbf{E} \approx \mathbf{B}. \quad (30)$$

Если система координат движется с ускорением, то следует ввести силу инерции

$$\mathbf{f}^i = -m \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (31)$$

Обычно эта сила мала и часто ею можно пренебречь. В движущейся системе координат на частицу действуют магнитное поле

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B}$$

и сила немагнитного происхождения

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^i + e\mathbf{E}',$$

которую, учитывая соотношения (26) и (29), можно записать в виде

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} + e \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) \times \mathbf{B} + \mathbf{f}^i. \quad (32)$$

В движущейся системе координат S' частица будет двигаться по окружности при условии, что немагнитная сила равна нулю. Полагая в уравнении (32)

$$\mathbf{f}' = 0, \quad (33)$$

находим

$$e \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) \times \mathbf{B} = -(\mathbf{f} + \mathbf{f}^i). \quad (34)$$

Если это уравнение умножить векторно на $\mathbf{B}$, то получим

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^i) \quad (35)$$

[здесь мы воспользовались тождеством $\mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{u}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \equiv B^2 \mathbf{u}_\perp$]. Если же уравнение (34) умножить скалярно на $\mathbf{B}$, то получим

$$\mathbf{B}(\dot{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^i) = 0. \quad (36)$$

В системе координат S' действует только одна сила — сила, связанная с магнитным полем, и поэтому частица движется по окружности. Центр этой окружности называется *центром вращения*. Таким образом, скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel$, с которой движется система координат S' , представляет собой *скорость центра вращения* относительно фиксированной системы координат S . Скорость $\mathbf{u}$ определяется дифференциальными уравнениями (35) и (36), в которых

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_0 + e\mathbf{E} \quad (37)$$

и

$$\dot{\mathbf{f}}^i = -m \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (38)$$

Во многих интересных случаях сила инерции мала, и членом $\dot{\mathbf{f}}^i$ в уравнении (35) можно пренебречь.

Рассмотрим прежде всего случай, когда инерционным членом можно пренебречь. Тогда скорость центра вращения $\mathbf{u}_\perp$, определяемая уравнением (35), равна скорости ведущего центра $\mathbf{U}_\perp$ [см. уравнение (22)]. В системе координат S' частица движется по окружности, а ее скорость $\mathbf{v}'_\perp$ имеет постоянный модуль $v'_\perp$. Соответствующая кинетическая энергия равна $W'_\perp$. В неподвижной системе координат скорость, перпендикулярная $\mathbf{B}$, дается выражением

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}'_\perp, \quad (39)$$

а соответствующая кинетическая энергия равна

$$W_\perp = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_\perp^2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}'_\perp)^2 = W'_\perp + \frac{1}{2} m u_\perp^2 + m (\mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{v}'_\perp). \quad (40)$$

Если выражение (40) усреднить по периоду вращения, то скалярное произведение обратится в нуль, и мы получим среднее значение $W_\perp$:

$$W_\perp = W'_\perp + \frac{1}{2} m u_\perp^2. \quad (41)$$

Если $\mathbf{f}$ — консервативная сила, дрейф в направлении, перпендикулярном $\mathbf{f}$, происходит вдоль *эквипотенциальной линии*.

На рис. 2.3 показаны типичные траектории заряженной частицы, дрейфующей перпендикулярно полю $\mathbf{B}$ под действием постоянной силы. На рис. 2.3 показаны соответствующие траек-

тории ведущего центра и центра вращения. Из рисунка видно, что если скорость дрейфа сравнима со скоростью вращения, то положения обоих центров (но не их скорости) различны. Если же скорость дрейфа мала по сравнению со скоростью вращения, то ведущий центр и центр вращения почти совпадают, так что нет необходимости проводить различие между ними.

Если принять во внимание инерционный член, скорость центра вращения $\mathbf{u}$ (но не скорость ведущего центра $\mathbf{U}$) будет иметь также составляющую в направлении $d\mathbf{f}/dt$. Таким образом, в неподвижной системе координат средняя энергия меняется со скоростью

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = (\mathbf{f}\mathbf{u}_{\perp}) = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{f} \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^i) \}. \quad (42)$$

Используя векторное тождество

$$\mathbf{A}_1 \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \} = -\mathbf{A}_2 \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \},$$

из формул (35) и (38) находим

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{c}{eB^2} \mathbf{f}^i \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^i) \} = m\mathbf{u}_{\perp} \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}_{\perp}^2}{2} \right). \quad (43)$$

Следовательно, изменение силы $\mathbf{f}$ может привести к перемещению центра вращения с одной эквипотенциальной линии на другую. Разность энергии между двумя эквипотенциальными линиями равна изменению кинетической энергии вследствие изменения скорости дрейфа. Скорость вращения, т. е. скорость в движущейся системе координат, остается постоянной. Этот результат справедлив только для однородного постоянного магнитного поля. Если напряженность магнитного поля меняется в пространстве или во времени, скорость вращения не обязательно должна оставаться постоянной (см. разд. 2.7).

2.3. Медленно меняющееся магнитное поле

Если магнитное поле претерпевает медленное изменение в пространственных координатах и во времени, движение заряженной частицы удобно рассматривать методом возмущений. Условие применимости этого метода состоит в том, чтобы изменение магнитного поля за одно обращение было мало. Следовательно, мы будем предполагать, что

$$\frac{T_g}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \ll 1, \quad (1)$$

$$\frac{\rho |(\text{grad } B)_{\perp}|}{B} \ll 1 \quad (2)$$

и

$$\frac{T_g v_{\parallel} |(\text{grad } B)_{\parallel}|}{B} \ll 1, \quad (3)$$

где T_g — период вращения, определяемый формулой (10) разд. 2.2.1.

Рассмотрим отдельно различные виды возмущений, которые могут представлять интерес. За исключением простых примеров, обсуждаемых в разд. 2.3.1 и 2.3.2, ограничим наше рассмотрение нерелятивистским случаем $v \ll c$.

2.3.1. Переменное магнитное поле

В соответствии с уравнением Максвелла в этом случае индуцируется электрическое поле $\mathbf{E}$:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Электрическое поле, структура которого зависит от граничных условий, действует двояким образом. С одной стороны, оно изменяет энергию частицы. Этот вопрос рассмотрен в данном разделе. С другой стороны, оно приводит к дрейфу, рассмотрение которого проводится методом, развитым в разд. 2.2.

Обращаясь к общему случаю, когда частица может иметь релятивистскую скорость, запишем изменение энергии за один оборот в следующем виде:

$$\Delta W = \Delta(\gamma mc^2) = -e \oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{\pi \rho^2 |e|}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (4)$$

поскольку

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int \int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5)$$

где

$$\phi = \pi \rho^2 B \quad (6)$$

— поток через поверхность, ограниченную круговой орбитой частицы. [Знак минус в формуле (4) означает, что положительная частица вращается в направлении, противоположном направлению обхода контура при интегрировании.] Поскольку число оборотов в секунду равно $1/T_g$, среднее значение производной энергии по времени

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \frac{\Delta(\gamma mc^2)}{T_g}. \quad (7)$$

Используя выражения (4), (8) и (10) разд. 2.2.1, получаем из (7)

$$\frac{d(\gamma m)}{dt} = \frac{p_{\perp}^2}{2\gamma mc^2 B} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (8)$$

Дифференцирование выражения (2) разд. 2.2.1 дает

$$\frac{d(\gamma m)}{dt} = \frac{1}{2\gamma mc^2} \frac{dp^2}{dt} = \frac{1}{2\gamma mc^2} \frac{dp_{\perp}^2}{dt}, \quad (9)$$

поскольку «бетатронное ускорение» (7) влияет только на перпендикулярную составляющую импульса $p_{\perp}$. Если справедливо равенство $\partial B/\partial t = dB/dt$ (поле меняется только во времени), формулы (8) и (9) дают

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = C. \quad (10)$$

Сравнение с формулой (12) разд. 2.2.1 показывает, что постоянная интегрирования C пропорциональна магнитному потоку Φ через плоскость орбиты. В нерелятивистском пределе выражение (10) можно записать в виде

$$\frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{C}{2m} = \text{const}, \quad (11)$$

где $W_{\perp}$ — кинетическая энергия, обусловленная движением перпендикулярно силовым линиям. В этом случае магнитный момент μ [см. формулу (11) разд. 2.2.1], а также поток постоянны.

Постоянная величина $p_{\perp}^2/B$ является одним из трех «адиабатических инвариантов» движения заряженной частицы. Эти инварианты будут рассмотрены ниже (разд. 2.3.7).

2.3.2. Градиент магнитного поля имеет составляющую в направлении поля

Введем декартову систему координат так, чтобы в начале координат ось z была направлена параллельно магнитному полю. Тогда $\partial B/\partial z \neq 0$. Рассмотрим небольшую область размерами порядка ρ в окрестности начала координат и перейдем к цилиндрической системе координат (R, φ, z) , сохранив направление оси z . Уравнение

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (12)$$

(при условии $\partial B_{\varphi}/\partial \varphi = 0$) дает

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_R) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

где B_R , B_z и B_{φ} — составляющие напряженности поля $\mathbf{B}$. Можно считать, что

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial z} = \text{const}$$

внутри круга радиуса $R=\rho$. Предположив, что $\partial B_R/\partial\varphi=0$, мы тем самым по существу пренебрегаем градиентом в направлении, перпендикулярном полю (этот вопрос рассматривается в разд. 2.3.3), и уравнение (13) можно проинтегрировать

$$B_R = -\frac{1}{2} R \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (14)$$

Если частица движется со скоростью $v_\perp$ в плоскости R, φ на расстоянии $R=\rho$ от оси z , то на нее действует средняя сила

$$f_z^m = \frac{|e|\hbar}{c} v_\perp B_R = -\frac{|e|\hbar v_\perp \rho}{2c} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (15)$$

в направлении оси z . При помощи формул (1) и (8) разд. 2.2.1 уравнение (15) можно преобразовать следующим образом:

$$f_z^m = -\frac{p_\perp^2}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (16)$$

В процессе движения частицы вдоль оси z составляющая ее импульса $p_\parallel$ меняется со скоростью

$$\frac{dp_\parallel}{dt} = f_z^m. \quad (17)$$

Если действуют только магнитные силы, то энергия, равная

$$\{m^2 c^4 + (p_\parallel^2 + p_\perp^2) c^2\}^{1/2},$$

остается постоянной, и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} p_\parallel^2 = -\frac{d}{dt} p_\perp^2. \quad (18)$$

Уравнение (17) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{p_\parallel^2}{2} = p_\parallel f_z^m = \gamma m \frac{dz}{dt} f_z^m. \quad (19)$$

Подставляя в уравнение (19) выражения (16) и (18), получим

$$\frac{1}{p_\perp^2} \frac{dp_\perp^2}{dt} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt}, \quad (20)$$

где производная d/dt означает скорость изменения вследствие движения центра вращения вдоль магнитных силовых линий. Из уравнения (20) следует

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_\perp^2}{B} \right) = 0. \quad (21)$$

Следовательно, при движении центра вращения частицы вдоль силовых линий $p_{\perp}$ и B меняются таким образом, что величина

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = C \quad (22)$$

остаётся постоянной.

Переходя к нерелятивистскому случаю, можно записать уравнение движения центра вращения параллельно полю $\mathbf{B}$ так:

$$\left(m \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{\parallel} = f_z^m,$$

что эквивалентно соотношению

$$(f^m + f^i) \mathbf{B} = 0, \quad (23)$$

где

$$f^m = -\mu \operatorname{grad} B, \quad (24)$$

а

$$f^i = -m \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (25)$$

2.3.3. Градиент магнитного поля имеет составляющую, перпендикулярную полю

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось z совпадала с направлением поля $\mathbf{B}$, а ось y — с вектором $\operatorname{grad} B$. Тогда $\partial B / \partial x = 0$. Положим

$$\frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{l_c}. \quad (26)$$

Индекс 0 указывает, что соответствующее значение относится к началу отсчета. Условие (2) теперь означает

$$\frac{\rho}{l_c} \ll 1. \quad (27)$$

В этом разделе мы будем считать, что $\partial \mathbf{B} / \partial z = 0$, т. е. силовые линии представляют собой прямые. (Отметим, что в таком случае неравенство нулю производной $\partial B / \partial y$ требует, чтобы $\operatorname{rot} \mathbf{B} \neq 0$.) В случае $v_{\parallel} \neq 0$ важную роль играет кривизна силовых линий, поскольку она приводит к появлению центробежной силы. Этот вопрос рассматривается в разд. 2.3.5.

В первом приближении частица вращается по окружности вокруг начала координат, так что координаты положительно заряженной частицы есть

$$x = \rho \cos \omega t, \quad y = -\rho \sin \omega t, \quad (28)$$

а компоненты скорости

$$v_x = -\omega\rho \sin \omega t, \quad v_y = -\omega\rho \cos \omega t. \quad (29)$$

Следовательно, магнитное поле, в котором она движется, периодически меняется, так что в момент времени t напряженность поля равна

$$B = B_0 + \Delta B = B_0 + \frac{\partial B}{\partial y} y = B_0 \left(1 - \frac{\rho}{l_c} \sin \omega t \right),$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta B}{B_0} = -\frac{\rho}{l_c} \sin \omega t. \quad (30)$$

Если частица движется по траектории, близкой к окружности со скоростью $\mathbf{v}_\perp$, то ее ведущий центр перемещается со скоростью, определяемой формулой (25) разд. 2.2.2, а именно:

$$\mathbf{U}_\perp = -\mathbf{v}_\perp \frac{\Delta B}{B_0}. \quad (31)$$

Согласно формуле (30), мы можем представить это выражение в виде

$$\mathbf{U}_\perp = \mathbf{v}_\perp \frac{\rho}{l_c} \sin \omega t \quad (32)$$

или, расписывая его по компонентам,

$$U_x = -\omega\rho \frac{\rho}{l_c} \sin^2 \omega t, \quad (33)$$

$$U_y = \omega\rho \frac{\rho}{l_c} \sin \omega t \cos \omega t. \quad (34)$$

Усредняя полученные выражения по периоду вращения, находим

$$\bar{U}_x = -\frac{\omega\rho^2}{2l_c} = -\frac{v_\perp \rho}{2l_c} = -\frac{v_\perp \rho}{2B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)_0, \quad (35)$$

$$\bar{U}_y = 0. \quad (36)$$

Если скорость дрейфа значительно меньше скорости вращения, траектория представляет собой почти окружность (см. рис. 2.3, а) и нет необходимости проводить различие между ведущим центром и центром вращения. В дальнейшем мы будем пользоваться символом $\mathbf{u}$ для обозначения скоростей обоих центров.

При помощи формулы (27) и уравнений (1), (8) и (11) разд. 2.2.1 можно выразить соотношения (35) и (36) через μ и B . В таком случае получаем

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times \mathbf{f}^m, \quad (37)$$

где

$$\mathbf{f}^m = -\mu \text{grad } B. \quad (38)$$

2.3.4. Результирующая средняя скорость

Результирующую скорость, определяемую влиянием как магнитного возмущения (см. разд. 2.3.1—2.3.3), так и немагнитных сил (разд. 2.2), можно найти путем сложения векторов. Для дрейфа перпендикулярно полю мы получаем

$$\mathbf{u}_{\perp} = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^m + \mathbf{f}^i), \quad (39)$$

где немагнитная сила

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + e\mathbf{E} \quad (40)$$

частично обусловлена электрическим полем $\mathbf{E}$, а частично — силами иной природы $\mathbf{f}^0$ и где

$$\mathbf{f}^m = -\mu \operatorname{grad} B, \quad (41)$$

$$\mathbf{f}^i = -m \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (42)$$

Для движения вдоль силовых линий имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{f} + \mathbf{f}^m + \mathbf{f}^i) = 0. \quad (43)$$

На рис. 2.5 схематически показаны различные типы дрейфа.

Инерционный член во многих случаях пренебрежимо мал. Однако в плазме (см. гл. 4 и 5) он может играть весьма важную роль, даже несмотря на относительно малую величину, поскольку стремится вызвать разделение положительных и отрицательных зарядов. Разделение зарядов приводит к возникновению электрического поля, которое в свою очередь может существенным образом повлиять на дрейф.

Сила $\mathbf{f}$ может быть связана с электрическим или гравитационным полем. Она может быть также обусловлена последовательностью столкновений (см. разд. 2.2.2). Если, например, частица входит в состав газа, в котором имеется градиент давления, то можно написать

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{n} \operatorname{grad} p, \quad (44)$$

где n — число частиц в единице объема, а p — давление.

2.3.5. Движение вдоль искривленных силовых линий

В разд. 2.3.3 предполагалось, что силовые линии являются прямыми. Поэтому дрейф перпендикулярно магнитному полю оказался независимым от одновременного движения вдоль

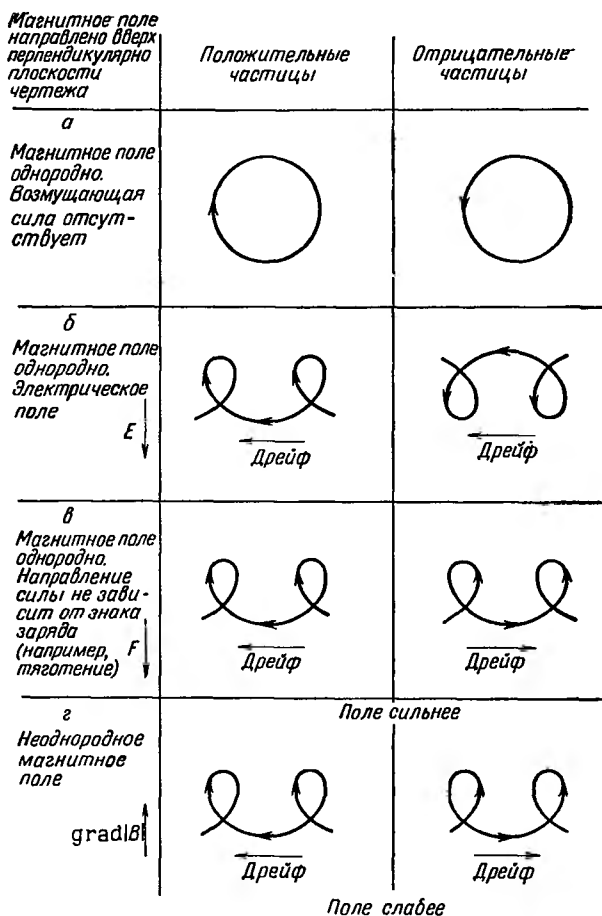


Рис. 2.5. Дрейф заряженных частиц в магнитном поле. Если магнитное поле неоднородно, радиус кривизны меньше в области более сильного поля. Поэтому круговая орбита, по которой частица двигалась бы в однородном поле, превращается в кривую, показанную на рис. 2.5, г. Если градиент поля мал, частица движется по окружности, которая перемещается (дрейфует) в направлении, перпендикулярном градиенту. Электрическое поле E (или любая другая сила F) также вызывает изменение кривизны траектории, как это показано на рис. 2.5, б и в.

силовых линий. Если это ограничение отсутствует, ведущий центр в общем случае движется по криволинейной траектории, и вследствие этого возникают центробежные силы. Центробежная сила влияет на дрейф перпендикулярно магнитному полю, поскольку она входит в член $\mathbf{f}^i$ общего уравнения дрейфа (39). В том случае, если скорость $v_{\parallel} (=u_{\parallel})$, направленная вдоль силовых линий, значительно больше скорости дрейфа $\mathbf{u}_{\perp}$, наиболее существенный вклад в инерционный член уравнения (39) дает центробежная сила, связанная со скоростью $v_{\parallel}$. Рассмотрим этот важный случай более детально и выведем явное выражение для инерционного члена.

Выберем движущуюся локальную декартову систему координат (единичные векторы $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$), которая перемещается вместе с ведущим центром и ориентирована таким образом, что оси z и y параллельны соответственно касательной и главной нормали силовой линии магнитного поля, проходящей через начало координат. В таком случае в начале координат $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

Центробежная сила, обусловленная скоростью $\mathbf{v}_{\parallel}$, в этой системе координат равна

$$\mathbf{f}^c = -\frac{mv_{\parallel}^2}{R}\hat{\mathbf{y}}, \quad (45)$$

где R — радиус кривизны силовой линии

$$R = \frac{B}{|\partial B_y / \partial z|}. \quad (46)$$

В таком случае центробежная сила

$$\mathbf{f}^c = -\frac{mv_{\parallel}^2}{B} \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}}. \quad (47)$$

Обусловленный ею вклад в скорость дрейфа в соответствии с формулой (39) направлен вдоль оси x и имеет величину

$$u_x^c = -\frac{c}{eB} \frac{mv_{\parallel}^2}{B} \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{c}{eB} \frac{mv_{\parallel}^2}{B} (\text{rot } \mathbf{B} - \text{grad } B \times \hat{\mathbf{z}})_x. \quad (48)$$

Предполагая, что токи пренебрежимо малы ($\text{rot } \mathbf{B} = 0$), из формул (39) разд. 2.3.4 и (48) мы получим полную скорость дрейфа перпендикулярно магнитному полю

$$\mathbf{u}_{\perp} = -\frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}_1^m), \quad (49)$$

$$\mathbf{f}_1^m = -\frac{m}{B} \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right) \text{grad } B \quad (50)$$

(см. [6]).

2.3.6. Магнитное зеркало

Продольное движение ведущего центра во многом подобно движению частицы в потенциальном поле. Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся в *постоянном* магнитном поле $\mathbf{B}$ в присутствии электрического поля с потенциалом V . Если, как обычно, ввести обозначения $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$ для составляющих импульса, параллельной и перпендикулярной магнитному полю $\mathbf{B}$, то закон сохранения энергии (в нерелятивистском случае) принимает вид

$$\frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{2m} + eV = \text{const} = \frac{p_{\parallel 0}^2 + p_{\perp 0}^2}{2m} + eV_0, \quad (51)$$

где индекс 0 относится к заданному начальному положению частицы. В условиях применимости метода возмущений имеем

$$\mu = \frac{p_{\perp}^2}{2mB} = \frac{p_{\perp 0}^2}{2mB_0} = \text{const}. \quad (52)$$

Из формул (51) и (52) получаем

$$\frac{p_{\parallel}^2 - p_{\parallel 0}^2}{2m} = -\mu(B - B_0) - e(V - V_0). \quad (53)$$

Дифференцирование выражения (53) вдоль магнитной силовой линии дает

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} - e \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (54)$$

Уравнения (53) и (54) совершенно аналогичны уравнению движения частицы в потенциальном поле вида

$$\phi = \mu B + eV. \quad (55)$$

(Эквивалентный потенциал ϕ , так же как и μ , различен для различных частиц.)

Во время движения кинетическая энергия частицы может изменяться. Как показывает уравнение (51), это возможно тогда и только тогда, когда ведущий центр переходит с одной эквипотенциальной поверхности электрического поля на другую. Иными словами, кинетическая энергия является функцией только пространственных координат.

Рассмотрим конфигурацию магнитного поля, изображенную на рис. 2.6. Пусть заряженная частица находится в точке, соответствующей минимальной напряженности магнитного поля

B_0 , а компоненты ее скорости

$$v_{\perp 0} = v_0 \sin \alpha, \quad (56)$$

$$v_{\parallel 0} = v_0 \cos \alpha. \quad (57)$$

Тогда в соответствии с формулами (52), (53), (56) и (57), а также в силу соотношения

$$p = mv$$

продольная скорость $v_{\parallel}$ будет определяться следующим образом:

$$v_{\parallel} = v_0 \sqrt{1 - \frac{B}{B_0} \sin^2 \alpha - \frac{2e(V - V_0)}{mv_0^2}}. \quad (58)$$

В отсутствие электрического поля формулы упрощаются:

$$v_{\parallel} = v_0 \sqrt{1 - \frac{B}{B_1}}, \quad (59)$$

где

$$B_1 = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha}. \quad (60)$$

Когда ведущий центр достигает точки, в которой $B = B_1$, скорость $v_{\parallel}$ обращается в нуль, а это означает, что частица возвращается в область более слабого поля — отражается. Поэтому область сходящихся магнитных силовых линий часто называют *магнитным зеркалом*. В пространстве между двумя такими зеркалами (см. рис. 2.6) частица, для которой угол α между вектором скорости и направлением поля превышает определенное критическое значение, будет отражаться от обеих границ и, таким образом, окажется захваченной магнитным полем. Если же вектор скорости составляет достаточно малый угол с направлением поля, частица уходит сквозь зеркало. Тем самым в пространстве скоростей определяется *конус ухода*, или «конус потерь».

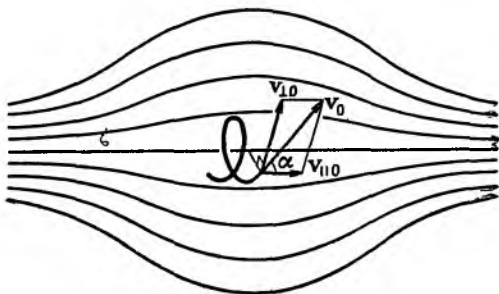
Магнитное удержание рассматриваемого типа имеет место в магнитном поле Земли, подобном полю диполя. Этот вопрос обсуждается в разд. 2.5. Благодаря удержанию заряженных частиц в геомагнитном поле существуют радиационные пояса Земли.

Если *магнитное поле меняется во времени*, $\text{rot } \mathbf{E}$ не равен нулю, и оно не может иметь потенциала. Поэтому приведенные выше результаты перестают быть справедливыми. Однако средняя магнитная сила, действующая вдоль поля, и в этом случае определяется выражением $-\mu \partial B / \partial s$ [см. (16) и (17) разд. 2.3.2],

и вместо формулы (54) имеем

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} + eE_{\parallel}. \quad (61)$$

Действие магнитного зеркала остается прежним, однако теперь заряженная частица может ускоряться вихревыми электрическими полями (бетатронное ускорение), а потому кинетическая энергия частицы не связана простым соотношением с ее положением в пространстве.



Р и с. 2.6. Частица, движущаяся между магнитными зеркалами.

Если частица испытывает многократные отражения от сближающихся магнитных зеркал, ее энергия увеличивается. Этот процесс, который будет обсуждаться в разд. 2.3.7 и 2.7.1, положен в основу теории происхождения космических лучей, разработанной Ферми (разд. 2.7.1).

2.3.7. Адиабатические инварианты

I. Орбитальный поток (и магнитный момент). В разд. 2.3.1 и 2.3.2 для двух частных случаев показано, что при медленном изменении магнитного поля [см. формулы (1)—(3) разд. 2.3] величина $C = p_{\perp}^2 / B$ с точностью до членов первого порядка постоянна. Эта величина пропорциональна «орбитальному магнитному потоку» ϕ , который заряженная частица охватывает за один оборот [см. формулу (12) разд. 2.2.1]

$$\phi = \frac{\pi c^2}{e^2} \frac{p_{\perp}^2}{B}.$$

Магнитный момент, связанный с круговым движением частицы, равен [см. (11) разд. 2.2.1].

$$\mu = \frac{1}{2\gamma m} \frac{p_{\perp}^2}{B}.$$

Поскольку для релятивистской частицы множитель γ зависит от импульса, магнитный момент инвариантен только в нерелятивистском пределе $v \ll c$, и мы можем также записать

$$\mu = \frac{W'_{\perp}}{B}, \quad (62)$$

где $W'_{\perp}$ — кинетическая энергия, соответствующая вращательной скорости $v'_{\perp}$ (т. е. скорости, измеренной в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа).

В разд. 2.3.4. приведена общая нерелятивистская формула (39) для дрейфа поперек силовых линий. Иллюстрируя ее приложения, покажем, что магнитный момент остается постоянным, если величина B в точке нахождения частицы меняется вследствие такого дрейфа.

Поскольку частица дрейфует поперек силовых линий, напряженность поля в точке мгновенного положения центра вращения меняется со скоростью

$$\frac{dB}{dt} = \mathbf{u}_{\perp} \text{grad } B = -\frac{c}{eB^2} \{\mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^m + \mathbf{f}^t)\} \text{grad } B. \quad (63)$$

Здесь $\mathbf{f}^m = -\mu \text{grad } B$. Для произвольного вектора $\mathbf{A}$ справедливо соотношение

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{c}{eB^2} \{\mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^t)\} \text{grad } B. \quad (64)$$

В то же время средняя энергия меняется. Поскольку сила со стороны магнитного поля действует перпендикулярно скорости $\mathbf{v}$, она не приводит к изменению энергии. Таким образом, средняя скорость изменения энергии в неподвижной системе равна

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \mathbf{u}_{\perp} \cdot \mathbf{f}. \quad (65)$$

Средняя энергия в движущейся системе в соответствии с формулой (41) разд. 2.2.3 записывается в виде

$$W'_{\perp} = W_{\perp} - \frac{1}{2} m u_{\perp}^2.$$

Дифференцируя это выражение и используя соотношения (38) разд. 2.2.3 и (65), находим

$$\frac{dW'_{\perp}}{dt} = -\mathbf{u}_{\perp} \mathbf{f} - m\mathbf{u}_{\perp} \frac{d\mathbf{u}_{\perp}}{dt} = \mathbf{u}_{\perp} (\mathbf{f} + \mathbf{f}').$$

Если теперь подставить выражение для $\mathbf{u}_{\perp}$ из формулы (39) разд. 2.3.4, то получим

$$\frac{dW'_{\perp}}{dt} = -\frac{c}{eB^2} \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^m + \mathbf{f}') \} (\mathbf{f} + \mathbf{f}') \quad (66)$$

или, поскольку $\{ \mathbf{B} \times (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \} \mathbf{A}_1 = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_2$,

$$\frac{dW'_{\perp}}{dt} = \frac{c}{eB^2} \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}') \} \mathbf{f}^m. \quad (67)$$

Принимая во внимание соотношение $\mathbf{f}^m = -\mu \text{grad } B = -(W'_{\perp}/B) \text{grad } B$, из формул (64) и (67) получаем

$$\frac{dW'_{\perp}}{dB} = \frac{W'_{\perp}}{B}. \quad (68)$$

Выражение (68) показывает, что отношение $W'_{\perp}/B$ остается постоянным.

Величина $W'_{\perp}/B$ (в релятивистском случае $p_{\perp}^2/B$) является *адиабатическим инвариантом* (см., например, [7]). Это означает, что ее изменения, связанные с заданными изменениями поля B , могут быть сделаны *сколь угодно* малыми, если поле B изменять *достаточно медленно* в пространстве и во времени. Критерий медленного изменения можно установить, выбрав соответствующий параметр (обозначим его δ), который в случае магнитного момента по существу представляет максимальное относительное изменение поля B за один период вращения.

Анализ возмущений высших порядков показал, что существует более общий инвариант (сводящийся в первом порядке к инварианту μ), который адиабатичен по отношению ко всем порядкам δ . Этот результат относится к асимптотическому разложению и не означает, что магнитный момент точно постоянен. Он означает только, что отклонение от инвариантности очень быстро стремится к нулю, если стремится к нулю параметр δ . Обзор теории инвариантности высоких порядков можно найти, например, в работе Крускала [8].

II. Продольный инвариант. Механизм Ферми. Теперь рассмотрим чисто механическую задачу. Предположим, что частица движется со скоростью $v_{\parallel}$ (импульс $p_{\parallel} = mv_{\parallel}$) вдоль оси z некоторой системы координат, а в точках $z = \pm \frac{1}{2}D$ имеются две

идеально отражающие плоскости, перпендикулярные оси z и движущиеся со скоростями $\mp U (\ll v_{\parallel})$. Когда частица сталкивается с плоскостью, происходит упругое соударение. При каждом соударении импульс частицы меняется на величину

$$\Delta p_{\parallel} = 2mU. \quad (69)$$

Этот результат справедлив и для релятивистского случая, если под m мы будем подразумевать релятивистскую массу частицы $\gamma m = W/c^2 = \{m^2 + (p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2) c^{-2}\}^{1/2}$.

Поскольку соударения происходят через интервал времени $\Delta t = D/v_{\parallel}$, средняя скорость изменения импульса частицы равна

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{\Delta p_{\parallel}}{\Delta t} = \frac{2mUv_{\parallel}}{D}. \quad (70)$$

Но $2U = -dD/dt$ и $mv_{\parallel} = p_{\parallel}$, и мы получаем

$$\frac{dp_{\parallel}}{p_{\parallel}} + \frac{dD}{D} = 0,$$

откуда следует, что

$$p_{\parallel} D = \text{const}. \quad (71)$$

Это означает, что, если отражающие плоскости сближаются и, следовательно, расстояние D уменьшается, скорость частицы возрастает.

Движение частицы между медленно сближающимися плоскостями является простейшим частным случаем движения в медленно меняющейся потенциальной яме. Из классической механики хорошо известно, что при таком движении величина

$$J = \oint p_{\parallel} ds = \oint mv_{\parallel} ds \quad (72)$$

является адиабатическим инвариантом (см. [7, 10]). Соотношение (71) представляет собой частный случай выражения (72).

Перейдем теперь к рассмотрению заряженных частиц в магнитных полях. Если заряженная частица удерживается между двумя магнитными зеркалами, движение ее ведущего центра вдоль силовых линий аналогично движению частицы в потенциальной яме (это было показано в разд. 2.3.6), и существует инвариант, соответствующий выражению (72), а именно:

$$J = \oint mu_{\parallel} ds, \quad (73)$$

где скорость $u_{\parallel}$ и элемент пути ds теперь относятся к продольному движению ведущего центра. Величина, определяемая фор-

мулой (73), называется *продольным инвариантом* (см., например, [11]). Если справедливо выражение (58), то (73) можно записать в виде

$$J = p_0 \oint \left[1 - \frac{B}{B_0} \sin^2 \alpha - \frac{2me(V - V_0)}{p_0^2} \right]^{1/2} ds, \quad (74)$$

а если действуют только магнитные силы, при помощи формул (59) и (60) получаем

$$J = p_0 \oint \left(1 - \frac{B}{B_1} \right)^{1/2} ds. \quad (75)$$

Продольная инвариантность требует медленного изменения магнитного поля. Это означает, что поле не должно изменяться значительно в течение одного периода продольных колебаний T_L , т. е.

$$\frac{T_L}{B} \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \ll 1. \quad (76)$$

Поскольку $T_L \gg T_g$, это условие медленного изменения поля намного более жесткое, нежели условия (1)–(3) разд. 2.3.

Применим продольный инвариант к следующему простому случаю. Пусть магнитное поле однородно ($B = B_0$) в пределах от $-z_0$ до $+z_0$. При $z > +z_0$ поле на оси симметрии равно

$$B = B_0 + b(z - z_0).$$

При $z < -z_0$ поле симметрично. Предположим, что

$$bz_0 \gg B_0. \quad (77)$$

Частица вращается по винтовой линии вокруг оси симметрии и отражается от двух зеркал, которые в силу (77) расположены в непосредственной близости от точек $+z_0$ и $-z_0$. Пренебрегая небольшим вкладом в интеграл (75), который дают области $z > z_0$ и $z < -z_0$, находим

$$J = p_0 \left(1 - \frac{B_0}{B_1} \right)^{1/2} 2z_0 = 2z_0 p_{\parallel}, \quad (78)$$

где

$$p_{\parallel} = p_0 \cos \alpha = p_0 (1 - \sin^2 \alpha)^{1/2} = p_0 \left(1 - \frac{B_0}{B_1} \right)^{1/2}.$$

Предположим теперь, что зеркала очень медленно приближаются друг к другу, так что через некоторое время они занимают положение $\pm z'_0$. Поскольку J является инвариантом, то

$$p'_{\parallel} = p_{\parallel} \frac{z_0}{z'_0}. \quad (79)$$

Инвариант $p_{\perp}^2/B$ тоже остается постоянным; таким образом,

$$p'_{\perp} = p_{\perp}, \quad (80)$$

а это означает, что траектория частицы всегда охватывает один и тот же магнитный поток. Угол между траекторией и осью z меняется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{p'_{\perp}}{p'_{\parallel}} = \frac{z'_0}{z_0} \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{z'_0}{z_0} \operatorname{tg} \alpha. \quad (81)$$

Если расстояние между зеркалами уменьшается от $2z_0$ до $2z'_0$, энергия частицы возрастает от

$$W = \frac{1}{2m} (p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2) \quad (82)$$

до

$$W' = \frac{1}{2m} (p_{\perp}'^2 + p_{\parallel}'^2) = \frac{1}{2m} \left\{ p_{\perp}^2 + \left(\frac{z_0}{z'_0} \right)^2 p_{\parallel}^2 \right\}. \quad (83)$$

При помощи продольного инварианта мы получили результат (83), не вникая в механизм ускорения. Если же мы детально рассмотрим процесс ускорения, то обнаружим, что одно «соударение» с магнитным зеркалом, движущимся со скоростью U , точно так же как и в случае идеально отражающих плоскостей, приводит к изменению энергии

$$\Delta W = 2Up_{\parallel}. \quad (84)$$

В данном случае скорость зеркала U определяется как скорость локальной движущейся системы координат, в которой $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. (Это определение имеет смысл, если «структура» зеркала не подвергается существенным изменениям. Рассмотренный пример представляет собой тот случай, когда понятие «скорости магнитного поля» весьма полезно.)

Ускорение частицы, сталкивающейся с движущимся магнитным зеркалом, тесно связано с бетатронным ускорением. Выведем выражение (84) таким способом, который выявит эту связь.

С точки зрения электрического и магнитного полей, измеренных в покоящейся системе координат, «движущееся зеркало» представляет собой область, в которой магнитное поле имеет радиальную составляющую B_R и составляющую B_z , а электрическое поле имеет азимутальную составляющую E_{φ} , связанную с временными изменениями B_z и равную по величине

$$E_{\varphi} = \frac{U}{c} B_R. \quad (85)$$

На заряженную частицу с импульсом $p_{\parallel}$, входящую в область магнитного зеркала, действует сила

$$f_z = -\frac{ev_{\Phi}}{c} B_R, \quad (86)$$

которая замедляет аксиальное движение частицы. К моменту времени t , определяемому из условия

$$-2p_{\parallel} = \int_0^t f_z dt = -\frac{e}{c} \int_0^t v_{\Phi} B_R dt, \quad (87)$$

импульс принимает значение $-p_{\parallel}$, а сама частица выходит из зеркала. Находясь внутри зеркала, частица испытывает действие электрической силы eE_{Φ} , которая в отличие от магнитных сил изменяет ее энергию (бетатронное ускорение). Энергия изменяется на величину

$$\Delta W = \int_0^t eE_{\Phi} v_{\Phi} dt = \frac{eU}{c} \int_0^t v_{\Phi} B_R dt = 2Up_{\parallel}. \quad (88)$$

Хотя первоначально эта энергия сообщается составляющей импульса $p_{\perp}$, в конце концов она передается параллельной составляющей $p_{\parallel}$, причем передача энергии осуществляется магнитными силами, которые не изменяют величины $p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2$. Таким образом, когда частица выходит из зеркала, мы имеем

$$2Up_{\parallel} = \frac{\Delta p_{\parallel}^2}{2m} = \frac{p_{\parallel} \Delta p_{\parallel}}{m}, \quad (89)$$

так что, как и раньше, $\Delta p_{\parallel} = 2mU$.

Процесс, посредством которого частица наращивает свою энергию при отражении от движущегося зеркала, составляет основу механизма Ферми ускорения заряженных частиц (см. разд. 2.7.1).

Продольный инвариант можно использовать для определения системы координат при картографировании распределения частиц, захваченных магнитным полем Земли [12].

III. Инвариантность потока. Если ведущий центр не лежит на оси поля зеркала, обладающего вращательной симметрией, то радиальный градиент магнитного поля вызывает дрейф вокруг этой оси, который накладывается на колебательное движение вдоль силовых линий. (Сравните с рассмотрением движения

частицы в дипольном поле Земли — разд. 2.5.2.) В отсутствие электрических полей и прочих возмущений ведущий центр описывает поверхность вращения — *поверхность продольного инварианта*. Магнитный поток, проходящий через эту поверхность, также является адиабатическим инвариантом [11].

Условие медленного изменения поля в этом случае записывается в виде, аналогичном формуле (76); только вместо периода T_L стоит еще большая величина T_S — время, за которое ведущий центр совершает один оборот вследствие дрейфа по поверхности продольного инварианта. Для электрона с энергией 10^5 эв, осциллирующего вдоль силовых линий геомагнитного поля между северной и южной зонами полярных сияний (широта $\sim 68^\circ$), из уравнений (8) разд. 1.2 и (15) разд. 2.5.2, а также из рис. 2.8 и 2.9 находим, что T_S приблизительно в 4000 раз больше периода T_L , который составляет несколько секунд [величина T_L зависит от угла α , см. формулу (57) разд. 2.3.6]. По сравнению с T_L период вращения (менее 1 мсек) — величина весьма малая.

2.3.8. Эксперименты и наблюдения

Экспериментальное изучение описанного выше дрейфа отдельной частицы требует достаточно малых плотностей частиц, для того чтобы исключить влияние столкновений. Удержание заряженных частиц ловушкой с магнитными зеркалами исследовалось экспериментально. Исключительно большое время удержания наблюдали Гибсон, Иордан и Лауэр [13]. Они обнаружили, что позитроны (образующиеся при радиоактивном распаде) удерживаются в ловушке более 10 сек. Это означает, что частицы совершали более 10^{10} оборотов вокруг силовых линий и порядка 10^8 продольных колебаний, прежде чем покинуть ловушку вследствие накапливающегося рассеяния на малые углы, обусловленного присутствием молекул остаточного газа. Аналогичные эксперименты были проделаны Родионовым [14].

Геомагнитное поле весьма эффективно захватывает заряженные частицы. Электроны с энергией по крайней мере несколько кэв и ионы с энергией порядка 100 Мэв в течение недель и месяцев удерживаются в радиационных поясах Земли. Эксперименты с инжекцией заряженных частиц, образовавшихся в результате взрыва атомной бомбы над атмосферой (проект «Аргус»), показали, что вследствие неоднородности поля диполя заряженные частицы, полученные при взрыве, дрейфуют вокруг Земли и образуют оболочку [15]. Удержание заряженных частиц в геомагнитном поле обсуждается в разд. 2.6.3.

2.4. Движение в поле магнитного диполя. Метод Штёрмера

Общий случай движения заряженной частицы в поле диполя был рассмотрен Штёрмером. Здесь мы кратко рассмотрим его метод. Подробно метод изложен в монографии Штёрмера [2].

Если напряженность магнитного поля, создаваемого дипольным моментом $\mathbf{a}$, равна $\mathbf{B}$, а e , m и $\mathbf{v}$ соответственно заряд, масса и скорость частицы, то уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Введем цилиндрическую систему координат (R, φ, z) так, чтобы ось z была параллельна диполю. В этой системе координат уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{e}{mc} B_z R \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{e}{mc} B_R R \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{eR}{mc} \left(B_R \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dR}{dt} \right). \quad (4)$$

Положим $ds = v dt$ и введем штёрмеровскую длину

$$c_{St} = \left(\frac{|e| a}{mc v} \right)^{1/2} = \left(\frac{|e| a}{c p} \right)^{1/2} = \left(\frac{a}{B \rho} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где $p = mv$ — импульс. Рассмотрим положительно заряженную частицу. Траектории отрицательно заряженных частиц являются зеркальным отражением траекторий положительно заряженных частиц относительно плоскости, проходящей через ось z .

При чисто математическом рассмотрении удобно выразить все длины в единицах c_{St} , однако для физических приложений желательно, чтобы эта величина входила в формулы.

Если действуют только магнитные силы, следующие соотношения остаются справедливыми и для релятивистских частиц, если под m подразумевать релятивистскую массу.

Уравнение (4) после подстановки формул (14) — (16) разд. 1.2 в случае положительного заряда принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(R^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) &= c_{St}^2 \left(\frac{3R^2 z}{r^5} \frac{dz}{ds} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} R \frac{dR}{ds} \right) = \\ &= -c_{St}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R^2}{r^3} \right) \frac{dz}{ds} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R^2}{r^3} \right) \frac{dR}{ds} \right\}, \end{aligned}$$

где $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$. После интегрирования получаем

$$\frac{R^2}{c_{St}} \frac{d\varphi}{ds} = -c_{St} \frac{R^2}{r^3} - 2\gamma, \quad (6)$$

где 2γ — постоянная интегрирования, пропорциональная угловому моменту на бесконечности. Замечая, что

$$R^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1,$$

из (2), (3) и (6) получаем

$$\frac{1}{c_{St}^4} \frac{d^2 R}{ds^2} = \left(\frac{2\gamma}{c_{St} R} + \frac{R}{r^3} \right) \left(\frac{2\gamma}{c_{St} R^2} + \frac{3R^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \quad (7)$$

$$\frac{1}{c_{St}^4} \frac{d^2 z}{ds^2} = \left(\frac{2\gamma}{c_{St} R} + \frac{R}{r^3} \right) \frac{3Rz}{r^5}, \quad (8)$$

$$\left(\frac{dR}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 - \left(\frac{2\gamma}{c_{St} R} + \frac{R}{r^3} \right)^2 c_{St}^4. \quad (9)$$

Полагая составляющую скорости $R d\varphi/dt (= Rv d\varphi/ds)$ равной $v \sin \vartheta$, находим

$$\sin \vartheta = R \frac{d\varphi}{ds} - \left(\frac{c_{St}^2 R}{r^3} + \frac{2\gamma c_{St}}{R} \right). \quad (10)$$

А поскольку $|\sin \vartheta| \leq 1$, то

$$\left| 2\gamma \frac{c_{St}}{R} + \frac{R}{r} \frac{c_{St}^2}{r^2} \right| \leq 1. \quad (11)$$

Штёрмер показал, что значение γ определяет характер орбиты. Если $\gamma > 0$, частица никогда не достигает диполя. При $-1 \leq \gamma \leq 0$ частица может, двигаясь из бесконечности, подойти к диполю. Одна из орбит при $\gamma = -1$ — окружность радиуса $r = c_{St}$, лежащая в экваториальной плоскости. Если $\gamma < -1$, существуют две «разрешенные» области движения: внешняя ($r > c_{St}$), удаленная от диполя, и внутренняя ($r < c_{St}$) вблизи него. В последнюю группу входят такие периодические (или квазипериодические) орбиты, которые можно рассматривать методом возмущений.

Рассмотрим простой случай — экваториальную плоскость ($r = R$). Частицы достигают экватора под углом ϑ , определяемым условием (10)

$$\sin \vartheta = - \frac{c_{St}}{R} \left(2\gamma + \frac{c_{St}}{R} \right). \quad (12)$$

Если задан импульс частицы; то тем самым определена величина c_{St} . Для $c_{St} > R$ при заданном значении ϑ и $\gamma > -1$ орбита начинается в бесконечности, а при $\gamma < -1$ частица движется по периодической орбите (и никогда не покинет окрестностей Земли).

Граница между орбитами, начинающимися на бесконечности, и периодическими орбитами определяется условием $\gamma = -1$. Для

$$\sin \vartheta = 1$$

$$R = c_{st}. \quad (13)$$

Согласно формуле (5), импульс в таком случае равен

$$p_2 = \frac{ea}{cR^2} = 6 \cdot 10^{10} \left(\frac{R_e}{R} \right)^2 \frac{eV}{c}, \quad (14)$$

где R_e — радиус Земли. Частицы, имеющие больший импульс, могут приходить к экватору из любого направления. Для $\sin \vartheta = -1$ получаем

$$R(1 + \sqrt{2}) = c_{st}.$$

Соответствующий импульс равен

$$p_1 = \frac{ea}{cR^2} (3 - 2\sqrt{2}) = 1,0 \cdot 10^{10} \left(\frac{R_e}{R} \right)^2 \frac{eV}{c}. \quad (15)$$

Частицы с меньшим импульсом вообще не могут достичь экватора. Если величина импульса p заключена в интервале $p_1 < p < p_2$, частицы подходят к экватору в пределах конуса с углом раствора ϑ , определяемым формулой (12).

В разд. 2.5 будет показано, что задачу о движении заряженных частиц в космических магнитных полях часто можно в значительной мере упростить, если использовать метод возмущений.

Исключение составляют проблемы, связанные с *космическими лучами*, поскольку при высоких энергиях, характерных для космических лучей (10^9 — 10^{18} эв), радиус кривизны нельзя считать малым по сравнению с радиусом Земли. В таком случае для расчета орбит следует пользоваться методом Штёрмера и в общем случае приходится прибегать к численному интегрированию. Труды Штёрмера, положившие начало данному направлению, подытожены в его книге [2]. Численные расчеты были сделаны Леметром, Валларта [16, 17] и другими [18—22]. Данному вопросу посвящены также опубликованные в последнее время обзоры [23, 24].

Знание траекторий космических лучей важно в нескольких отношениях. При изучении широтного эффекта, который позволяет определить спектр импульсов космических лучей, существенными являются расчеты той наименьшей энергии, при которой частица может достичь наблюдателя на определенной широте. Для интерпретации телескопических измерений космических лучей необходимо знать отклонение траекторий частиц в геомагнитном поле. Если телескоп, находящийся на некоторой широте, направлен в определенную точку неба, то возникает проблема расчета первоначального направления частиц, регистрируемых телескопом [25].

Хотя во многих случаях геомагнитное поле можно аппроксимировать полем диполя, часто становится заметным влияние квадруполья и членов более высокой мультипольности (разд. 1.2). Вследствие этого интенсивность космического излучения не является функцией широты в строгом смысле, а зависит также в определенной степени от долготы.

2.4.1. Эксперименты с «терреллой»

Траектории космических лучей в поле диполя можно также определить экспериментальным путем в опытах по масштабному моделированию. В таких опытах измеряют траекторию узкого пучка электронов, движущегося в магнитном поле «терреллы» [26—29]. Этот метод в настоящее время развит настолько, что позволяет производить измерения с высокой степенью точности [25, 30—32] и получить полное представление о траектории космических лучей в поле диполя.

Недавно были поставлены эксперименты с «терреллой», в которых моделировались отклонения геомагнитного поля от дипольного [32].

2.5. Движение в поле магнитного диполя. Метод возмущений

2.5.1. О применимости метода возмущений

Условия применимости метода возмущений определяются соотношениями (1)—(3) разд. 2.3. Для постоянного во времени поля диполя эти условия, по существу, эквивалентны требованию, чтобы ларморовский радиус ρ был мал по сравнению с расстоянием до диполя r . Допустим, что

$$\frac{\rho}{r} < 10^{-2}, \quad (1)$$

и посмотрим, в какой мере это допущение ограничивает применимость метода возмущений в космической физике.

Если магнитное поле создается диполем, находящимся на расстоянии r , то $B \geq ar^{-3}$. Далее, в соответствии с формулой (8) разд. 2.2.1

$$\rho = \frac{cp_{\perp}}{|e|B} \leq \frac{cr^3 p}{|e|a}.$$

Следовательно, критерий (1) выполняется, если

$$r < 0,1 \left(\frac{|e|a}{cp} \right)^{1/2} = 0,1 c_{SI}. \quad (2)$$

На рис. 2.7 представлен график зависимости c_{st} от энергии протонов и электронов в геомагнитном поле. График показывает, что для электронов с энергией порядка 10^5 эв (это, по-видимому, верхний предел энергии частиц, вызывающих полярные сияния) штёрмеровская длина составляет более 10^{11} см. Отсюда метод возмущений применим вплоть до расстояний 10^{10} см от диполя. Однако геомагнитное поле имеет сходство с полем диполя только до расстояния $(0,5—0,8) \cdot 10^{10}$ см. Электроны в радиационных

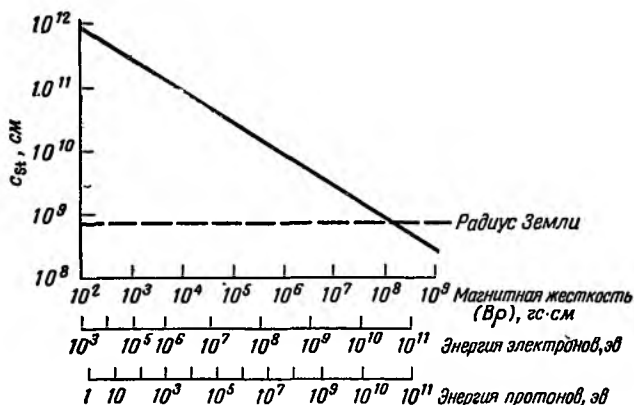


Рис. 2.7. Штёрмеровская длина c_{st} для электронов и протонов в геомагнитном поле диполя.

поясах Земли находятся на расстоянии нескольких земных радиусов и имеют энергии, достигающие величин порядка 1 Мэв. Протоны во внутреннем радиационном поясе находятся на расстоянии порядка полутора земных радиусов от центра Земли. Условие (2) может нарушаться для протонов очень высоких энергий, но количество таких протонов очень мало. Для частиц меньших энергий, которые преобладают, это условие достаточно хорошо выполняется.

Кроме энергичных частиц, в магнитное поле Земли попадают также частицы низкой энергии. Эти частицы образуют плазменный фон гораздо более высокой плотности, чем плотность частиц космического излучения. Плазма приходит на Землю от Солнца в виде замагниченных пучков (см. разд. 2.6.3 и 5.8) и, встречая на своем пути геомагнитное поле, создает токи, которые вызывают магнитные бури. Для низкоэнергичных частиц метод возмущений всегда справедлив и весьма удобен для анализа явлений магнитных бурь и полярных сияний,

Таким образом, почти во всех задачах космической физики, за исключением космических лучей, движение заряженных частиц можно рассматривать методом возмущений.

2.5.2. Дрейф в поле диполя

Вычислим сначала для поля диполя по формулам (5), (7), (10) и (11) разд. 1.2 компоненты $\text{grad } B$, параллельную и перпендикулярную силовым линиям (см. рис. 1.1):

$$(\text{grad } B)_{\parallel} = \frac{\partial B}{\partial r} \cos \alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \sin \alpha = - \frac{3B \sin \lambda (3 + 5 \sin^2 \lambda)}{r (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{3/2}}, \quad (3)$$

$$(\text{grad } B)_{\perp} = \frac{\partial B}{\partial r} \sin \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \cos \alpha = - \frac{3B \cos \lambda (1 + \sin^2 \lambda)}{r (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{3/2}}. \quad (4)$$

Затем введем локальную декартову систему координат с осью z , параллельной B , и осью y , параллельной $(\text{grad } B)_{\perp}$. Воспользовавшись соотношениями (49) и (50) разд. 2.3.5, получим полный дрейф перпендикулярно полю (с учетом центробежной силы):

$$r \cos \lambda \frac{d\varphi}{dt} = -u_x = \frac{c}{eB} \frac{m}{B} \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} + v_{\parallel}^2 \right) \frac{\partial B}{\partial y}, \quad (5)$$

$$u_y = 0. \quad (6)$$

Для движения вдоль силовых линий из формул (41)–(43) разд. 2.3.4 получим

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{du_{\parallel}}{dt} = - \frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (7)$$

Интегрирование выражения (7) приводит к формуле (59) разд. 2.3.6, которую мы запишем в несколько иной форме:

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\mu (B_1 - B)}{m}}, \quad (8)$$

где B_1 — напряженность магнитного поля в точке отражения. При помощи формул (12) и (13) разд. 1.2 находим

$$B = \frac{1}{\mu} \frac{m v_{\perp}^2}{2} = \frac{a\eta}{r_e^3}, \quad (9)$$

$$B_1 = \frac{1}{\mu} \frac{m (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2} = \frac{a\eta_0}{r_e^3}. \quad (10)$$

Из соотношений (8) разд. 1.2 получаем

$$v_{\parallel} = \frac{ds}{dt} = \frac{(dr^2 + r^2 d\lambda^2)^{1/2}}{dt} = r_e \cos \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (11)$$

Формулы (8) — (11) приводят к выражению

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left[\frac{2\mu a}{mr_e^5} \frac{\eta_0 - \eta}{\cos^2 \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Учитывая соотношения (4), (9), (10) и формулы (8) и (12) разд. 1.2, преобразуем (5) следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3c\mu}{er_e^2} \frac{1 + \sin^2 \lambda}{\cos^4 \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{3/2}} \frac{2\eta_0 - \eta}{\eta}. \quad (13)$$

Теперь можно рассчитать траекторию центра вращения, или «эквивалентного магнита» (см. стр. 232). Подставляя штёрмеровскую единицу длины

$$c_{St} = \left(\frac{a |e|}{cmv} \right)^{1/2} = \left(\frac{ae^2 r_e^3}{2c^2 m \mu \eta_0} \right)^{1/4} \quad (14)$$

и (13) разд. 1.2, находим

$$\varphi - \varphi_0 = \left(\frac{r_e}{c_{St}} \right)^2 I_1, \quad (15)$$

где

$$I_1 = 3 \int_0^\lambda \frac{\cos^3 \lambda (1 + \sin^2 \lambda)}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{3/2}} \frac{1 - \frac{1}{2} \eta(\lambda)/\eta_0}{\{1 - \eta(\lambda)/\eta_0\}^{1/2}} d\lambda; \quad (15')$$

r_e — расстояние от диполя до точек, в которых частица (точнее, «эквивалентный магнит») пересекает экваториальную плоскость ($\lambda=0$); $\eta(\lambda)$ определяется из соотношения (13) разд. 1.2, а η_0 — постоянная [см. (10)].

Параметр r_e связан с константой Штёрмера γ . Для экваториальной плоскости условие (11) разд. 2.4 можно записать в виде

$$-1 \leq \frac{c_{St}}{R} (2\gamma + \frac{c_{St}}{R}) \leq +1. \quad (16)$$

Поскольку величина R изменяется в пределах от $r_e + \rho$ до $r_e - \rho$, мы имеем ($r_e \ll c_{St}$)

$$\frac{r_e}{c_{St}} = -\frac{1}{2} \gamma^{-1} \quad (17)$$

и

$$\frac{\rho}{r_e} = \left(\frac{r_e}{c_{St}} \right)^2 = \frac{1}{4} \gamma^{-2}. \quad (17')$$

Интеграл I_1 графически изображен на рис. 2.8.

Уравнение (15) дает траекторию «эквивалентного магнита». Траектория частицы представляет винтовую линию, навивающуюся

щуюся на кривую, определяемую уравнением (15). Винтовая линия имеет радиус, определяемый (8) разд. 2.2.1. В большинстве случаев, к которым применим наш метод возмущений, уравнение (15) дает всю необходимую информацию о движении частицы.

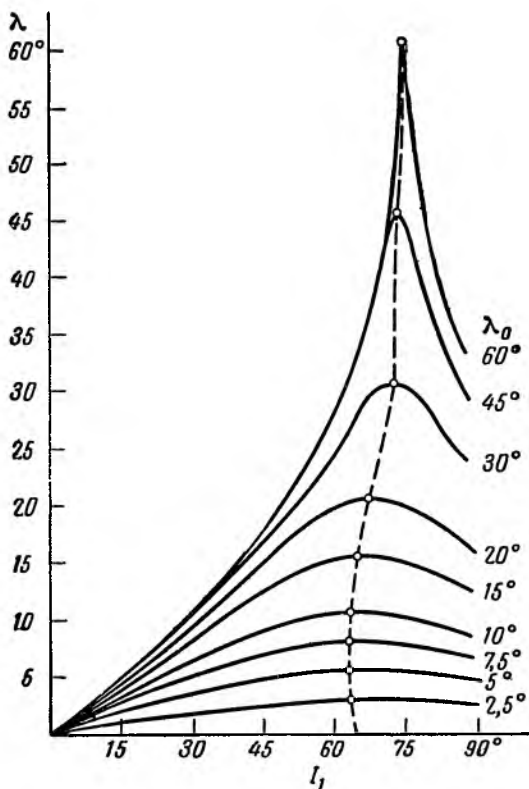


Рис. 2.8. Связь между смещением по долготе (пропорциональным I_1) и смещением по широте λ для частицы, совершающей колебания амплитуды λ_0 относительно экваториальной плоскости.

Движение, описываемое уравнениями (12), (13) и (15), происходит вдоль траекторий, лежащих на поверхности, определяемой формулой (8) разд. 1.2. Оно представляет собой колебания относительно экваториальной плоскости $\lambda=0$, на которые накладывается вращение вокруг оси диполя. Амплитуда колебаний определяется условием $\eta_0 - \eta \geq 0$. Значение λ в точке

поворота дается формулой

$$\eta_0 = \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda_0)^{1/2}}{\cos^6 \lambda_0}. \quad (18)$$

На рис. 2.9 для сравнения показаны одна из траекторий, полученных Штёрмером [34] путем интегрирования, и соответствующая кривая, рассчитанная по методу возмущений [35].

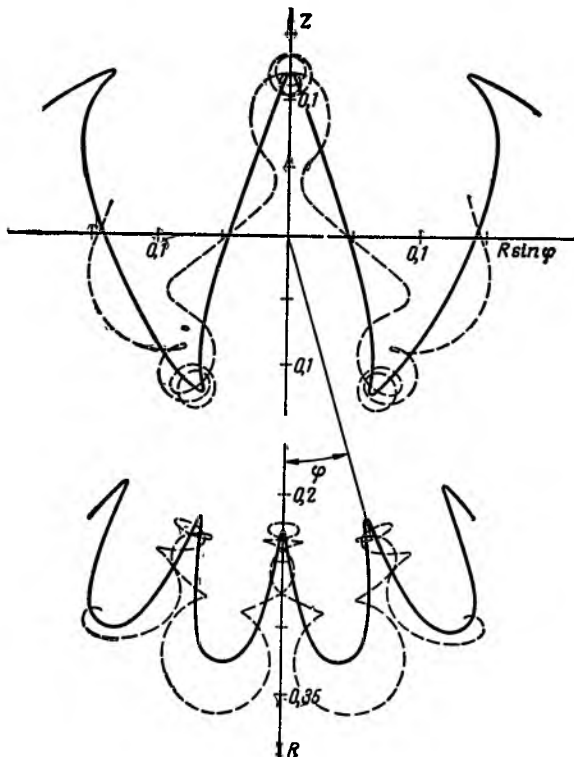


Рис. 2.9. Движение в поле диполя, рассчитанное методом Штёрмера и по методу возмущений. Вверху — проекция на плоскость, проходящую через ось диполя. Внизу — проекция на экваториальную плоскость. Сплошная линия — траектория эквивалентного магнита; пунктирная линия — траектория частицы по Штёрмеру.

2.5.3. Движение вблизи экваториальной плоскости поля диполя

Особый интерес представляет частный случай, когда амплитуда колебаний мала ($\lambda_0 \ll 1$). Тогда мы имеем приближенно

$$\eta = \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} = 1 + 4,5 \lambda^2, \quad (19)$$

и аналогично $\eta_0 = 1 + 4,5\lambda_0^2$. Подставляя эти величины в (12) и выполняя интегрирование, получим гармоническое колебание

$$\lambda = \lambda_0 \sin \left(2\pi \frac{t - t_0}{T} \right), \quad (20)$$

где

$$T = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{mr_e^5}{\mu a} \right)^{1/2} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{2} \frac{r_e}{v}. \quad (21)$$

В том же самом приближении φ увеличивается с постоянной скоростью

$$\varphi = \frac{3c\mu}{er_e^2} (t - t_1) = \frac{3}{2} \frac{r_e}{c_{st}^2} v (t - t_1). \quad (22)$$

За период T угол φ возрастает на величину

$$\Phi = \frac{\pi \sqrt{2} r_e^2}{c_{st}^2}, \quad (23)$$

где c_{st} определяется формулой (5) разд. 2.4. Для малых амплитуд $\Phi (c_{st}/r_e)^2$ составляет $\pi \sqrt{2} = 4,44$, что соответствует углу 225° . Пунктирная линия на рис. 2.8 дает разность долгот точки поворота и точки пересечения орбиты с экваториальной плоскостью. Для $\lambda \rightarrow 0$ эти величины равны $\frac{1}{4} \pi \sqrt{2} = 1,11$, что соответствует $63,6^\circ$.

2.5.4.

Теперь мы вычислим параметры η_0 , r_e и s_{st} . Предположим, что частица массы m выходит из точки (r', λ', φ') со скоростью $(v'_r, v'_\lambda, v'_\varphi)$. В таком случае имеем

$$\phi' = (1 + 3 \sin^2 \lambda')^{1/2}, \quad (24)$$

$$v'_\parallel = \frac{2v'_r \sin \lambda' - v'_\lambda \cos \lambda'}{\phi'}, \quad (25)$$

$$v'_\perp = \left[\frac{(v'_r \cos \lambda' + 2v'_\lambda \sin \lambda')^2}{2a\phi'^3} + v'^2_\varphi \right]^{1/2}. \quad (26)$$

$$B' = \frac{a}{r'^3} \phi', \quad \eta' = (\cos \lambda')^{-6} \phi', \quad (27)$$

$$\mu = \frac{mr'^3 (v'_r \cos \lambda' + 2v'_\lambda \sin \lambda')^2 + \phi'^2 v'^2_\varphi}{2a\phi'}, \quad (28)$$

$$r_e = r' (\cos \lambda')^{-2}, \quad (29)$$

$$\eta_0 = \eta' \left\{ 1 + \left(\frac{v'_{\parallel}}{v'_{\perp}} \right)^2 \right\}, \quad (30)$$

$$c_{st} = \left(\frac{ae}{mc} \frac{1}{v'} \right)^{1/2}. \quad (31)$$

Частица совершает винтообразное движение по окружности радиуса ρ , движение которой было рассмотрено выше. Радиус ρ равен

$$\rho = \frac{r_e^3}{c_{st}^2 V \eta_0} \frac{1}{V \eta'}. \quad (32)$$

2.5.5

Чтобы показать связь между уравнениями Штёрмера и методом возмущений, выведем уравнение (22) методом последовательных приближений, который применим, если $\gamma \ll -1$. Положим

$$R_0 = \frac{r_e}{c_{st}} = -\frac{1}{2} \gamma^{-1}. \quad (33)$$

Следовательно, $R_0 \ll 1$.

Поскольку в экваториальной плоскости $z=0$, из уравнения (9) разд. 2.4 получаем

$$\left(\frac{dR}{ds} \right)^2 = 1 - c_{st}^4 \frac{1}{R^4} \left(1 - \frac{R}{r_e} \right)^2. \quad (34)$$

Разложим R в ряд и отбросим члены высокого порядка малости

$$R = R_0 c_{st} \{ 1 + R_0^2 F(s) + R_0^4 G(s) \}. \quad (35)$$

Тогда имеем

$$\frac{dR}{ds} = R_0^3 c_{st} (F' + R_0^2 G') \quad (36)$$

(где штрихи обозначают производную d/ds) и

$$1 - \frac{R}{R_0 c_{st}} = -R_0^2 (F + R_0^2 G). \quad (37)$$

Решение уравнения (34) в первом приближении можно получить из уравнения

$$R_0^6 c_{st}^2 (F')^2 = 1 - F^2, \quad (38)$$

которое дает

$$F = \sin S, \quad (39)$$

где

$$S = \frac{s}{R_0^3 c_{St}}. \quad (40)$$

Чтобы найти второе приближение, подставим решение (39) в соотношения (35)–(37). Из уравнения (34) находим

$$R_0^6 c_{St}^2 (F'^2 + 2R_0^2 F'G') = 1 - (F^2 + 2R_0^2 FG)(1 - 4R_0^2 F). \quad (41)$$

Учитывая (39), получим

$$G = 4 - 2 \sin^2 S. \quad (42)$$

Таким образом, (35) принимает вид

$$R = R_0 c_{St} \{1 + R_0^2 \sin S + R_0^4 (4 - 2 \sin^2 S)\}, \quad (43)$$

где членами порядка R_0^6 в выражении, стоящем в скобках, мы пренебрегли.

Если использовать формулу (33), то из уравнения (6) разд. 2.4 получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= -\frac{c_{St}^2}{r^3} \left(1 - \frac{r}{R_0 c_{St}}\right) = \frac{1}{R_0 c_{St}} \frac{F + R_0^2 G}{(1 + R_0^2 F + R_0^4 G)^3} = \\ &= \frac{1}{R_0 c_{St}} (F + R_0^2 G)(1 - 3R_0^2 F) = \frac{1}{R_0 c_{St}} \{\sin S + R_0^2 (4 - 5 \sin^2 S)\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь мы пренебрегаем членами порядка R_0^4 . Окончательно получаем

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R_0 c_{St}} \{\sin S + R_0^2 (4 - 5 \sin^2 S)\}. \quad (45)$$

Это уравнение определяет движение частицы. Среднее от производной $d\varphi/ds$ дает движение эквивалентного диполя. Поскольку среднее значение $\sin S$ равно нулю, а среднее значение $\sin^2 S = 1/2$, мы получаем с точностью до величин порядка R_0^3

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{c_{St}} R_0 \left(4 - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} R_0 \frac{1}{c_{St}}. \quad (46)$$

Полученное выражение идентично уравнению (22):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3c\mu}{er_e^2}, \quad (47)$$

так как

$$\frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds}, \quad (48)$$

$$c_{St} = \left(\frac{ae}{cmv} \right)^{1/2}, \quad (49)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv^2 r_e^2}{a}, \quad (50)$$

$$R_0 = \frac{r_e}{c_{St}}. \quad (51)$$

Аналогичным способом можно вывести выражение для периода.

2.6. Влияние электрического поля на движение заряженных частиц в магнитном поле

Даже очень слабое электрическое поле радикальным образом изменяет движение частиц низких энергий в геомагнитном поле. Из уравнения (39) разд. 2.3.4, непосредственно следует, что влиянием электрического поля можно пренебречь только при условии $\dot{f} \ll \dot{f}^m$, т. е.

$$|eE| \ll |\mu \text{grad } B| = \frac{|e|V|\text{grad } B|}{B}, \quad (1)$$

где $|e|V$ — энергия частицы, связанная с движением перпендикулярно полю **B**.

Введем величину

$$l_c = \frac{B}{\text{grad } B} \quad (2)$$

— характерное расстояние пространственного изменения поля. Тогда неравенство

$$E \ll \frac{V}{l_c} \quad (3)$$

определяет условие, при котором влиянием электрического поля можно пренебречь.

В экваториальной плоскости диполя l_c равно $R/3$, где R — расстояние от диполя. Для геомагнитного поля находим

$$E \ll V \frac{3}{R}, \quad (4)$$

или

$$E \ll 5 \cdot 10^{-9} V \frac{R_e}{R} \text{ в/см}, \quad (4a)$$

где R_e — радиус Земли. Это означает, например, что все частицы с энергией ниже 2000 эв сильно подвержены влиянию электрического поля, если только оно не слабее 10 мкв/см.

Хотя в настоящее время не имеется прямых измерений, которые указали бы на существование электрических полей вокруг Земли, весьма вероятно, что такие поля возникают, особенно в связи с магнитными бурями.

Следует заметить, что адиабатический дрейф заряженных частиц из межпланетного пространства в геомагнитное поле возможен только в том случае, если существует межпланетное магнитное поле. Это следует из инвариантности величины $C = p_{\perp}^2/B$ (которая для частиц низких энергий пропорциональна μ). Если частица проникает в поле диполя, где $B \neq 0$, то она должна иметь конечное значение C и, следовательно, не может приходиться из области, где $B = 0$. Величина C определяет глубину проникновения частицы (см. разд. 2.6.1.).

Раньше считалось, что межпланетного магнитного поля не существует, и это предположение было положено в основу теории магнитных бурь, развитой Чепменом и Ферраро. Однако данные космических исследований, которыми мы сейчас располагаем, показали, что существует межпланетное магнитное поле, напряженность которого обычно порядка 10^{-4} гс ($= 10 \gamma$).

2.6.1. Движение в экваториальной плоскости

Рассмотрим упрощенную модель дрейфа заряженных частиц в поле магнитного диполя. Мы ограничимся анализом движения в экваториальной плоскости и предположим, что существует однородное межпланетное магнитное поле B_0 , направление которого совпадает с направлением диполя (ось z), так что

$$B = B_0 + \frac{a}{R^3}, \quad (5)$$

где

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (6)$$

(Основные результаты этого анализа справедливы и в том случае, когда межпланетное поле непараллельно полю диполя, так как поле B_0 играет существенную роль главным образом потому, что оно определяет инвариантность величины C или μ .)

Исследуем движение частицы, которая на бесконечности имеет импульс $p = mv_{\perp 0}$, так что магнитный момент, являющийся инвариантом, равен

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_0}. \quad (7)$$

Предположим, что составляющая v , параллельная магнитному полю B , равна нулю, а электрическое поле E однородно и направлено вдоль оси x . Тогда при $y = +\infty$ частица дрейфует со скоростью

$$u_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{cE}{B_0}. \quad (8)$$

Если в точке $y = +\infty$ и $x = x_0$ энергия частицы равнялась $|e|V_0 = mv_{\perp 0}^2/2$, то в точке (x, y) ее энергия составит

$$|e|V = |e|V_0 + eE(x - x_0). \quad (9)$$

В нерелятивистском случае имеем

$$\frac{|e|V_0}{B_0} = \mu = \frac{|e|V_0 + eE(x - x_0)}{B_0 + aR^{-3}},$$

откуда получаем

$$x_0 - x = L^4 R^{-3}, \quad (10)$$

где

$$L = \left(\frac{\mu a}{|e|E} \right)^{1/4}. \quad (11)$$

Кривые, соответствующие различным значениям x_0 , показаны на рис. 2.10. Из рисунка видно, что электроны, движущиеся от Солнца, приходят на утреннюю сторону, если x_0 больше некоторого критического значения x_D , и на вечернюю сторону, если $x_0 < x_D$. Таким образом, в определенной точке x_d поток электронов разделяется на две части. Утренняя ветвь проходит на весьма большом расстоянии от Земли, а вечерняя огибает ее и проходит на минимальном расстоянии x_m от диполя. Простые вычисления по формуле (10) дают

$$x_D = 4\sqrt[4]{3} \frac{L}{3} = 1,76L, \quad (12)$$

$$x_d = \sqrt[4]{3} L = 1,32L, \quad (13)$$

$$x_m = -0,74L. \quad (14)$$

Между этими двумя ветвями существует «запрещенная» область. Размеры этой области определяются величиной L — единицей длины, которая связана с μ , E и a в соответствии с формулой (11). Пунктирная линия на рис. 2.10 показывает границу запрещенной области. Ее уравнение имеет вид

$$\sqrt[4]{3} L - x = L^4 R^{-3}. \quad (15)$$

Внутри запрещенной области частицы движутся по замкнутым орбитам, которые вблизи начала координат приближаются к

круговым. Частицы, движущиеся по этим орбитам, захвачены полем и не могут уйти на бесконечность. К этой категории принадлежат частицы, составляющие радиационные пояса.

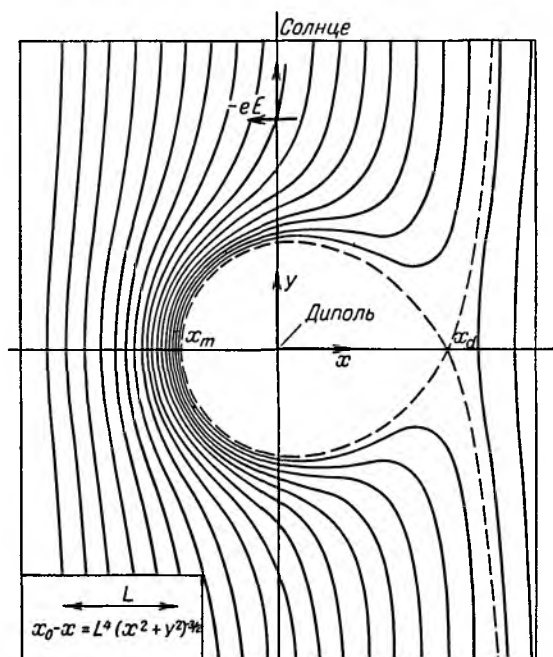


Рис. 2.10. Дрейф электронов в экваториальной плоскости поля магнитного диполя, на которое накладывается однородное магнитное поле, в присутствии однородного электрического поля, параллельного экваториальной плоскости. Сплошными линиями показаны типичные траектории центра вращения.

Положительно заряженные частицы движутся по подобным орбитам, которые являются зеркальным отражением орбит, изображенных на рис. 2.10, относительно плоскости yz .

2.6.2. Колебания вдоль силовых линий

Если частицы совершают колебательные движения вдоль силовых линий, амплитуда колебаний определяется продольным инвариантом

$$J = m \int v_{\parallel} ds. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда электрическое поле, параллельное $\mathbf{B}$, равно нулю: $E_{\parallel} = 0$.

При помощи (11), (12) разд. 2.5.2 и соотношения

$$ds = r_e d\lambda \cos \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}$$

находим

$$\begin{aligned} J &= m \int v_{\parallel}^2 dt = m r_e^2 \int \cos^2 \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda) \frac{d\lambda}{dt} d\lambda = \\ &= \left(\frac{2m\mu a}{r_e} \right)^{1/2} \int_0^{\lambda_0} (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} \cos \lambda \sqrt{\eta_0 - \eta} d\lambda, \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$J = \left(\frac{2m\mu a}{r_e^3} \right)^{1/2} \int_0^{s_0} \sqrt{\eta_0 - \eta} ds, \quad (18)$$

где

$$\eta = (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} \cos^{-6} \lambda. \quad (19)$$

Для малых амплитуд ($\lambda_0 \ll \pi/2$) интеграл в формуле (18) пропорционален λ_0^2 , так что величина $\lambda_0^2 r_e^{-1/2}$ должна быть инвариантной. Следовательно, если в дрейфовом движении частицы под влиянием электрического поля приближаются к диполю, амплитуда их колебаний $s_0 = r_e \lambda_0$ меняется таким образом, что

$$s_0 = \text{const } r_e^{5/4}, \quad (20)$$

$$\lambda_0 = \text{const } r_e^{1/4}. \quad (21)$$

Это означает, что максимальное значение $v_{\parallel}$

$$v_{\parallel}^{\max} \sim r_e^{-5/4}. \quad (22)$$

Максимальное значение соответствующей энергии

$$W_{\parallel}^{\max} \sim r_e^{-5/2}, \quad (23)$$

В то же время $W_{\perp}$ пропорционально полю B и, следовательно,

$$W_{\perp} \sim r_e^{-3}. \quad (24)$$

Ранее мы установили, что величина $v_{\perp}$ в поле диполя определяется значением магнитного момента в межпланетном поле B_0 , который частица имеет, прежде чем она достигнет поля диполя. В отличие от $v_{\perp}$ значение $v_{\parallel}$ в поле диполя не определяется условиями в межпланетном пространстве, поскольку продольные колебания возможны только тогда, когда частица входит в область магнитного зеркала вблизи Земли. Величина продольного инварианта устанавливается в процессе перехода частицы

из межпланетного поля в поле диполя и определяется тем значением $v_{||}$, которое частица имеет в начальный момент своего первого колебания в поле диполя.

2.6.3. Разрешенные и запрещенные области движения заряженных частиц в поле магнитного диполя

В настоящее время наука не располагает данными непосредственных измерений электрических полей в магнитосфере, однако можно ожидать, что по крайней мере, если возникают возмущения, появляются электрические поля. Если это имеет место, то заряженные частицы могут переходить из межпланетного пространства в магнитосферу двумя различными путями:

1) по *штёрмеровским орбитам*, если энергия частицы *выше* некоторого определенного значения,

2) по *дрейфовым орбитам*, если энергия частицы *ниже* некоторого определенного значения.

Поясним это на примере движения в экваториальной плоскости поля, рассмотренного в разд. 2.6.1:

$$B = B_0 + \frac{a}{R^3},$$

$$E = E_x = \text{const.}$$

Рассмотрим: А) проникновение частиц, движущихся из бесконечности; Б) захват частиц вблизи диполя.

А. *Какова глубина проникновения межпланетных частиц (рис. 2.11)?*

1. *Частицы высоких энергий* (штёрмеровские орбиты). Если пренебречь величиной B_0 , то идущая из бесконечности частица с энергией $|e|V_0$ и импульсом, превышающим предельное значение [см. (15) разд. 2.4]

$$p_1 = 1,0 \cdot 10^{10} \left(\frac{R_e}{R} \right)^2 \frac{eV}{c} \quad (25)$$

(где R_e — радиус Земли), может приблизиться к диполю a на расстояние R . (Если $B_0 \neq 0$, разрешенные орбиты не могут уходить в бесконечность.)

2. *Дрейфовые орбиты*. Частицы малой энергии eV_0 , идущие из бесконечности, приближаются к диполю на расстояние, равное [см. формулы (11) и (14) разд. 2.6]

$$R \approx L = \left(\frac{a\mu}{|e|E} \right)^{1/4}, \quad (25a)$$

где магнитный момент $\mu = |e|V_0/B_0$ является инвариантом. Подставляя радиус Земли $R_e = 6,4 \cdot 10^8$ см и дипольный момент $a =$

$= 8,1 \cdot 10^{25} \text{ гс} \cdot \text{см}^3$, получим

$$\frac{R}{R_e} = 4,7 \cdot 10^{-3} \left(\frac{V_0}{EB_0} \right)^{1/4}, \quad (26)$$

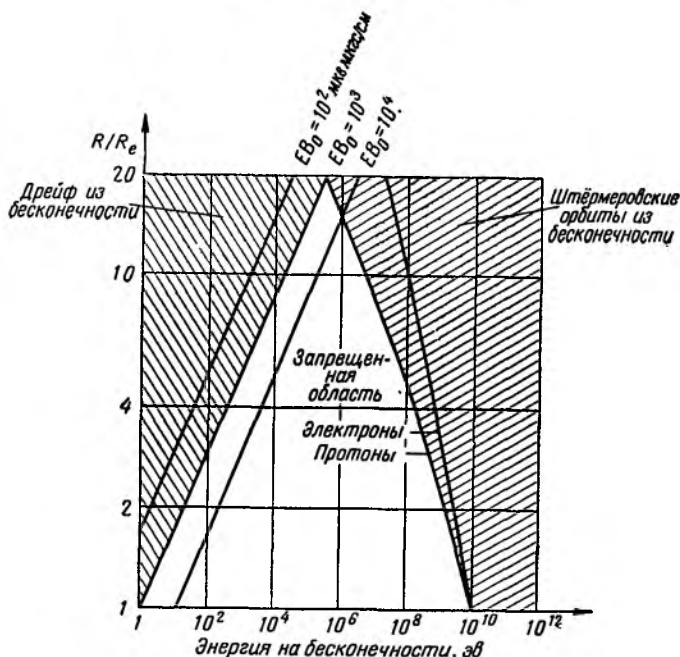


Рис. 2.11. Запрещенные области для заряженных частиц, движущихся в экваториальной плоскости геомагнитного дипольного поля, на которое накладывается однородное межпланетное магнитное поле (напряженности B_0) в присутствии электрического поля E , параллельного экваториальной плоскости. По оси ординат отложен радиус запрещенной области как функция энергии частицы. Для частиц малой энергии, которые приближаются к диполю по дрейфовым орбитам, радиус зависит также от произведения EB_0 . Приведены графики для трех значений этого параметра.

где V_0 — энергия на бесконечности в эв, E — электрическое поле в в/см и B_0 — магнитное поле в гс.

Пример. Предположим, что межпланетное магнитное поле равно $5\gamma = 50 \text{ мкгс}$, а электрическое поле — 10 мкв/см . Если частица имеет энергию 500 эв , то мы находим, что в межпланетном пространстве $V_0/EB_0 = 10^{12}$, так что частица проникает на расстояние, равное $4,7$ земного радиуса от центра Земли.

Б. Где захватываются частицы (рис. 2.12)?

Поскольку величина $\mu = |e|V/B$ является инвариантом, энергия частицы, дрейфующей в поле диполя, возрастает. Не следует смешивать энергию на бесконечности $|e|V_0$ и мгновенное значение энергии $|e|V$ частицы, движущейся в поле B , поскольку электрическое поле во время дрейфа совершает работу. Из

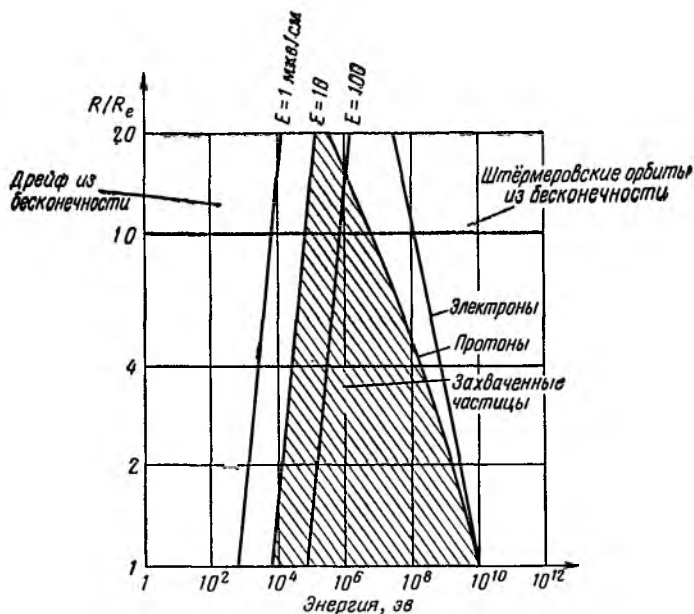


Рис. 2.12. Области периодических орбит в экваториальной плоскости (см. подпись к рис. 2.11).

формулы (25а), подставляя V вместо V_0 , находим

$$R = \left(\frac{a|e|V}{|e|EB} \right)^{1/4} = \left(\frac{R^3 V}{E} \right)^{1/4}, \quad (27)$$

или

$$\frac{R}{R_e} = \frac{V}{R_e E} = 1,6 \cdot 10^{-9} \frac{V}{E}. \quad (28)$$

R — максимальное расстояние, на котором может быть захвачена частица с энергией V (выраженной в эв), если электрическое поле равно E в в/см.

Пример. Частица с энергией 10⁴ эв, захваченная на расстоянии, равном 16 R_e , в процессе дрейфа уходит на бесконечность, если электрическое поле превышает величину 1 мкв/см.

2.7. Ускорение заряженных частиц в изменяющихся магнитных полях

В полярных сияниях наблюдаются частицы, обладающие энергией 10^4 — 10^5 эв. Частицы с такой же энергией и даже с энергией на несколько порядков выше обнаружены в радиационных поясах Земли. Энергия частиц космического излучения достигает 10^{18} эв. Все это наводит на мысль, что в космическом пространстве должны существовать механизмы ускорения. Можно предполагать, что такие механизмы действуют в магнитосфере Земли, межпланетном, межзвездном и, возможно, межгалактическом пространствах. Вопрос о локализации этих механизмов, а также отдельные стороны самого явления по-разному трактуются различными авторами. Однако все они сходятся на том, что в основе ускорительных процессов лежит взаимодействие заряженных частиц с изменяющимися магнитными полями. Эту мысль впервые высказал в 1933 г. Сванн [36]. Обсуждение вопросов происхождения космических лучей, а также других видов корпускулярного излучения выходит за рамки данной книги. Читатели, интересующиеся этими проблемами, могут обратиться к недавно опубликованным обзорам Гинзбурга и Сыроватского [37] и Моррисона [38].

2.7.1. Об адиабатическом изменении импульсов

Заряженные частицы, движущиеся в магнитных полях, которые изменяются во времени или пространстве, при определенных условиях могут ускоряться. Рассмотрим медленно меняющиеся магнитные поля, к которым применимы результаты, полученные в разд. 2.3.

Изменение составляющей импульса $p_{\perp}$ простым образом связано с изменением напряженности магнитного поля, в котором находится частица. Эта связь вытекает из инвариантности величины

$$C = \frac{p_{\perp}^2}{B}. \quad (1)$$

В общем случае поле B меняется как в пространстве, так и во времени. Однако следует отметить, что ускорение частиц может иметь место даже в том случае, если магнитное поле постоянно во времени, при условии, что оно меняется в пространстве. Изменение поля B происходит вследствие того, что частица в процессе дрейфа проходит области с различной напряженностью поля. Такой дрейф, как было показано в разд. 2.6.1, может быть вызван электрическим полем. Поскольку дрейфующая

частица проходит области с различной напряженностью магнитного поля, ее ведущий центр переходит с одной эквипотенциальной поверхности электрического поля на другую, а это приводит к изменению энергии.

Что касается *составляющей импульса* $p_{\parallel}$, то здесь ситуация несколько сложнее. Будем различать два случая.

А. Частицы, *не захваченные* магнитной ловушкой, могут рано или поздно встретить на своем пути движущееся магнитное зеркало. Если частица, имеющая импульс $p_{\parallel}$, параллельный полю В, сталкивается с таким зеркалом, ее энергия, как показано в разд. 2.3.7, изменяется на величину

$$\Delta W = 2Up_{\parallel}. \quad (2)$$

Эта величина положительна или отрицательна, в зависимости от знака U . Если U — скорость намагниченного облака, с которым связано магнитное зеркало, то она всегда значительно меньше скорости света. Энергия ультрарелятивистских частиц равна

$$W \approx c(p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)^{1/2}, \quad (3)$$

откуда следует, что относительное изменение энергии $\Delta W/W$ очень мало:

$$\left| \frac{\Delta W}{W} \right| = 2Up_{\parallel}c^{-1}(p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)^{-1/2} < \frac{2U}{c}. \quad (4)$$

Процесс, посредством которого частица наращивает свою энергию при отражении от движущегося магнитного зеркала, лежит в основе механизма ускорения заряженных частиц, предложенного Ферми [39—41]. Считают, что это наиболее важный механизм ускорения космических лучей и других частиц высоких энергий. Однако этот механизм слишком специфичен, поскольку он предполагает, что активную роль играет только один специальный тип электрического поля [см. формулу (85) разд. 2.3.7]. В действительности заряженная частица может отбирать энергию от электрических полей самой разнообразной структуры, которые неизбежно создаются различными типами движений и волн (включая ударные волны), возникающих в межпланетной и межзвездной плазме.

Б. Пусть частицы захвачены в ловушку и испытывают многократные отражения от магнитных зеркал. В таком случае окончательный эффект можно определить при помощи продольного инварианта (см. разд. 2.3.7)

$$J = \oint p_{\parallel} ds. \quad (5)$$

Из соотношения (5) непосредственно следует, что, если зеркала движутся навстречу друг другу, импульс $p_{\parallel}$ возрастает, и наоборот. Если частица удерживается между двумя сближающимися зеркалами, то увеличение $p_{\parallel}$ приводит к уменьшению угла α между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{B}$ (см. рис. 2.6), и если угол α становится достаточно малым, частица уходит из ловушки (см. разд. 2.3.6). Изменение расстояния между зеркалами может происходить в магнитном поле, меняющемся во времени, где зеркала сближаются или расходятся, а также в постоянных, но неоднородных полях, если дрейфующая частица попадает в магнитные ловушки с различными расстояниями между зеркалами. Пример последнего случая — дрейф в магнитосфере — был уже рассмотрен нами количественно в разд. 2.6.2.

Отметим, что для частиц, движущихся в постоянном магнитном поле, справедливо выражение (53) разд. 2.3.6, так что

$$p_{\parallel}^2 = -p_{\perp}^2 - 2meV + \text{const.} \quad (6)$$

Эта формула показывает, что увеличение $p_{\parallel}^2$ приводит к уменьшению $p_{\perp}^2$ на ту же самую величину, если только частица не переходит с одной эквипотенциальной поверхности электрического поля V на другую. Полный импульс меняется только в том случае, если имеет место такой переход.

2.7.2. Однократное ускорение

Важным примером однократного ускорения является проникновение межпланетной плазмы в магнитосферу Земли (см. разд. 2.6). В таком случае происходит магнитное сжатие плазмы.

Если частица приходит из межпланетного поля напряженностью 10^{-4} гс в область магнитосферы, где напряженность поля равна, скажем, 10^{-2} гс, то, как следует из инвариантности магнитного момента $p_{\perp}^2/B$, величина $p_{\perp}^2$ возрастает в 100 раз. В соответствии с изложенным в разд. 2.6.2 одновременно возрастает величина составляющей $p_{\parallel}$. Таким образом, если характерная энергия частиц в межпланетной плазме составляет несколько сот эв (что соответствует температуре несколько миллионов градусов), то эти частицы легко ускоряются в магнитосфере до энергий, превышающих 10^4 эв. В связи с этим следует заметить, что как в магнитосфере, так и в межпланетном пространстве могут существовать электрические поля, параллельные $\mathbf{B}$ (см. разд. 5.1.3). Ускорение частиц в таких полях также может играть важную роль.

Ускорение, обусловленное этими механизмами, имеет место не только в магнитосфере, но и в межпланетном и межзвездном

пространствах, где частицы могут попадать в область более сильного магнитного поля либо вследствие дрейфа, либо в результате временных вариаций самого поля B . Однако происходят и обратные процессы, которые приводят к уменьшению энергии.

2.7.3. Процессы многократного ускорения

Однократное сжатие, сопровождающееся сохранением адиабатических инвариантов, не может привести к увеличению импульса более чем на несколько порядков величины, поскольку инвариантность магнитного момента $p_{\perp}^2/B$ потребовала бы огромных, практически нереальных изменений поля B . Таким образом, процессы, в которых частицы ускоряются до энергий космических лучей, не могут быть адиабатическими. Маловероятно также, чтобы такие колоссальные энергии достигались в процессе однократного неадиабатического ускорения. Скорее всего подобное ускорение является следствием комбинированного действия адиабатических процессов и процессов рассеяния, которые приводят к изменению адиабатических инвариантов. В качестве типичного примера процессов подобного рода мы рассмотрим так называемую *магнитную накачку*. Этот процесс состоит в бетатронном ускорении и одновременном неадиабатическом рассеянии на мелкомасштабных неоднородностях магнитного поля и представляет собой весьма общий механизм ускорения заряженных частиц [42—47]. Этот механизм привлек к себе особое внимание в связи с проблемой нагрева плазмы в лабораторных условиях [48].

2.7.4. Магнитная накачка

Рассмотрим частицу с импульсом $\mathbf{p}$, который имеет составляющие $p_{\perp}$ и $p_{\parallel}$, перпендикулярную и параллельную однородному магнитному полю соответственно. Если напряженность поля меняется медленно, то, как показано в разд. 2.3, компоненты импульса подчиняются соотношениям

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const}, \quad (7)$$

$$p_{\parallel} = \text{const}. \quad (8)$$

Составляющая $p_{\parallel}$ является инвариантом, а полный импульс p в любой момент времени t зависит только от его значения в некоторый предыдущий момент времени t_0 и от напряженно-

сти поля B в моменты времени t_0 и t (но не от тех значений, которые поле B принимает в интервале времени $t_0 — t$). Таким образом, при возрастании магнитного поля составляющая импульса, перпендикулярная полю (а следовательно, и полный момент), увеличивается. Однако если изменение магнитного поля носит характер флуктуаций, то в силу соотношений (7) и (8) среднее значение энергии остается неизменным.

Рассеяние на неоднородностях. Если же магнитное поле содержит локальные неоднородности, характеризующиеся значительным изменением поля на расстояниях, меньших ларморовского радиуса, поведение частицы резко меняется. При прохождении частицей такой неоднородности условия (7) и (8) нарушаются. Составляющие импульса меняются беспорядочно, и вследствие изменений $p_{\perp}$ ведущий центр переходит на другую силовую линию. Движение вдоль силовых линий приводит к тому, что частица не может многократно проходить через одну и ту же неоднородность и встречает на своем пути все новые и новые неоднородности. Таким образом, столкновения частиц с неоднородностями приводят к некоррелированным изменениям вектора количества движения отдельно взятой частицы. При этом распределение импульсов по направлениям для некоторой группы частиц становится хаотическим. Смещения ведущего центра тоже некоррелированы, и ведущий центр каждой частицы совершает своего рода двумерное «броуновское движение» поперек силовых линий. Таким образом, для некоторой группы частиц присутствие мелкомасштабных неоднородностей в магнитном поле приводит к следующему.

1. Появляется тенденция к равномерному распределению импульсов между тремя степенями свободы. Это означает, что в среднем

$$p_{\perp}^2 = 2p_{\parallel}^2. \quad (9)$$

2. Происходит пространственная диффузия ведущих центров поперек силовых линий (каждый ведущий центр совершает «броуновское движение»).

Систематическое увеличение импульса. Если происходит перераспределение импульса между различными компонентами, при определенных условиях полный импульс p может систематически увеличиваться, даже если флуктуирующее магнитное поле не нарастает. Это явление называется магнитной накачкой. Перераспределение импульсов, как было показано выше, осуществляется за счет столкновений частиц с мелкомасштабными неоднородностями магнитного поля. Чтобы получить представ-

ление об основных чертах механизма магнитной накачки, рассмотрим сначала особый случай изменения магнитного поля.

Пусть магнитное поле меняется, как показано на рис. 2.13, и предположим, что изотропное распределение по импульсам устанавливается со скоростью, характеризуемой временем релаксации τ_2 , которое удовлетворяет условию

$$T_g \ll \tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_0, \quad (10)$$

где T_g — период вращения, а τ_1 и τ_0 определяются из рис. 2.13.

Рассмотрим ансамбль частиц, квадрат импульса p_0^2 которого в некоторый момент времени равномерно распределен между

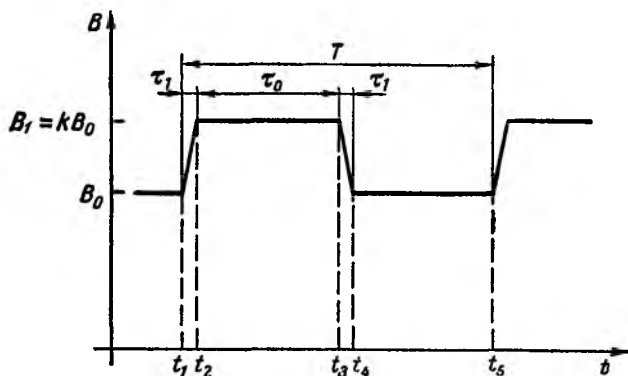


Рис. 2.13. Изменение магнитного поля во времени в простейшей модели магнитной накачки.

тремя степенями свободы. На рис. 2.13 указаны пять моментов времени в течение цикла изменения магнитного поля. Рассмотрим процессы, происходящие в соответствующие интервалы времени.

В течение короткого интервала времени (t_1, t_2) перпендикулярная составляющая импульса возрастает с коэффициентом пропорциональности $k^{1/2}$; перераспределения импульсов не происходит. В точке t_2 распределение по импульсам анизотропно; полная энергия больше, чем первоначальная. В следующий интервал времени (t_2, t_3) изотропия восстанавливается. Это означает, что некоторая доля энергии, приобретенной в процессе бетатронного ускорения, передается параллельной составляющей импульса, причем при последующем спадании поля эта энергия остается неизменной. Спадание поля в интервале (t_3, t_4) приводит к уменьшению перпендикулярного импульса с коэффициентом пропорциональности $k^{-1/2}$. Но, поскольку перпенди-

кулярная составляющая импульса меньше, чем до перераспределения, потери энергии за время спада напряженности поля меньше, чем прирост энергии за время его нарастания. В течение интервала времени (t_4, t_5) распределение снова становится изотропным, а энергия не изменяется. Следовательно, к моменту времени t_5 , т. е. по окончании полного цикла изменения поля, полный импульс (p_1) больше, чем первоначальный (p_0) . Соответствующее количественное рассмотрение не представляет особого труда и его результаты представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Среднее значение полного импульса и его составляющих в различные моменты цикла флуктуаций магнитного поля, показанные на рис. 2.13

t	$p_{\parallel}^2$	$p_{\perp}^2$	p^2
t_1	$\frac{1}{3} p_0^2$	$\frac{2}{3} p_0^2$	p_0^2
t_2	$\frac{1}{3} p_0^2$	$\frac{2k}{3} p_0^2$	$\left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right) p_0^2$
t_3	$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right) p_0^2$	$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right) p_0^2$	$\left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right) p_0^2$
t_4	$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right) p_0^2$	$\frac{2}{3k} \left(\frac{1}{3} + \frac{2k}{3}\right) p_0^2$	$\left(\frac{5}{9} + \frac{2k}{9} + \frac{2}{9k}\right) p_0^2$
t_5	$\frac{1}{3} \left(\frac{5}{9} + \frac{2k}{9} + \frac{2}{9k}\right) p_0^2$	$\frac{2}{3} \left(\frac{5}{9} + \frac{2k}{9} + \frac{2}{9k}\right) p_0^2$	$\left(\frac{5}{9} + \frac{2k}{9} + \frac{2}{9k}\right) p_0^2$

Из табл. 2.1 находим, что результирующий импульс в конце одного цикла равен (в среднем)

$$p_1 = \frac{1}{3} \left(5 + 2k + \frac{2}{k}\right)^{1/2} p_0 = \beta p_0. \quad (11)$$

$\beta=1$, если $k=1$; во всех других случаях $\beta>1$. (Совершенно не существенно $k>1$ или $k<1$, т. е. начинается ли цикл с нарастания или с убывания поля.)

К моменту времени t , большому по сравнению с периодом T , цикл повторится приблизительно t/T раз, а импульс возрастает до величины

$$p(t) = p_0 \beta^{t/T} = p_0 e^{t/\tau}, \quad (12)$$

где

$$\tau = \frac{T}{\ln \beta}. \quad (13)$$

Таким образом, изменение импульса частицы носит характер колебаний, однако в среднем его величина возрастает со скоростью, определяемой выражением

$$\frac{dp}{p} = \frac{dt}{\tau}. \quad (14)$$

Компоненты импульса, приведенные в табл. 2.1, представляют собой лишь средние значения. Для отдельных частиц ускорение может быть меньше или больше получаемого из выражения (5). Поэтому магнитная накачка приводит к разбросу в распределении по импульсам, и не для всех частиц достигаются предельно большие значения импульса.

Характер изменения поля не имеет принципиального значения. Были изучены различные типы флуктуаций поля, в частности гармонические. (В работе [46] данный вопрос исследуется с точки зрения применения магнитной накачки к лабораторной плазме, в которой перераспределение импульсов обусловлено столкновениями частиц; см. также [49].) Как показал Шлютер, в том случае, когда распределение не слишком отличается от изотропного, справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \frac{W_{\perp}^2 W_{\parallel}}{B^2} = \frac{\nu}{3} \frac{W_{\perp} (2W_{\parallel} - W_{\perp})^2}{B^2}, \quad (15)$$

где $W_{\perp} = p_{\perp}^2/2m$, $W_{\parallel} = p_{\parallel}^2/2m$, а ν — частота столкновений. Правая часть равенства (15) всегда положительна, за исключением случая $W_{\perp} = 2W_{\parallel}$ (который соответствует равновесному состоянию). Таким образом, если система находится в состоянии равновесия, а затем магнитное поле меняется произвольным образом, но в конце концов принимает свое первоначальное значение, то равновесие, установившееся по окончании данного процесса, всегда соответствует более высоким энергиям частиц, чем в исходном состоянии.

Показано, что в частном случае гармонического изменения поля средняя величина импульса возрастает, так же как в разобранном выше примере, по экспоненциальному закону, так что

$$\frac{dp}{p} = \frac{dt}{\tau}. \quad (16)$$

Для случая колебаний малой амплитуды с угловой частотой ω Шлютер дает приближенное соотношение [46]

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{9} \left(\frac{\Delta B}{B} \right)^2 \frac{\nu}{1 + \nu^2/\omega^2}, \quad (17)$$

где ν — частота столкновений. Выражение (17) показывает, что максимальное относительное изменение импульса за один

период колебаний наблюдается при

$$\nu = \omega. \quad (18)$$

Если частота столкновений слишком мала или слишком велика по сравнению с частотой изменения поля, эффективность ускорения падает. Вследствие этого возникает своеобразный эффект, заключающийся в том, что ускоряются преимущественно частицы, имеющие соответствующую частоту столкновений. Изменения магнитных полей космического пространства, разумеется, не принадлежат ни к гармоническому типу, ни к типу, представленному на рис. 2.13, но тем не менее можно ожидать, что среднее значение импульса частиц систематически возрастает по закону, определяемому общим соотношением (16).

Интересно отметить, что механизм ускорения, рассмотренный в данном параграфе, позволяет получить энергетический спектр того же характера, что и спектр космического излучения [45].

2.8. Радиационные потери энергии заряженными частицами, движущимися в магнитных полях

Поскольку заряженная частица движется в магнитном поле с ускорением $\partial \mathbf{v} / \partial t$, она излучает электромагнитные волны и, следовательно, теряет энергию со скоростью

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(d\mathbf{v}/dt)^2 - (\mathbf{v} \times d\mathbf{v}/dt)^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3} \quad (1)$$

(см., например, [50]).

В частном случае движения по кругу имеем

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(d\mathbf{v}/dt)^2}{(1 - v^2/c^2)^2}. \quad (2)$$

Подставляя в эту формулу выражения (1) — (3) разд. 2.2.1, получаем мощность *синхротронного излучения* частицы, движущейся перпендикулярно магнитному полю:

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2}{m^2 c^3} \left(\frac{W^2}{W_0^2} - 1 \right). \quad (3)$$

Здесь W — релятивистская энергия $\gamma mc^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} mc^2$, а W_0 — энергия покоя mc^2 . Характерное *время убывания* кинетической энергии $W - W_0$ равно

$$T = \frac{W - W_0}{-dW/dt} = \frac{3c^5}{2e} \left(\frac{m}{e} \right)^3 \frac{1}{1 + W/W_0} \frac{1}{B^2}. \quad (4)$$

Подставляя численные значения величин для электрона, получаем

$$T = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^8}{B^2} \frac{1}{1 + W/W_0} \text{ сек}, \quad (5)$$

где $W_0 = 0,511 \text{ Мэв}$, а поле B измеряется в гауссах. Во многих случаях это время настолько велико, что радиационные потери отдельной частицы можно считать пренебрежимо малыми.

Синхротронное излучение. Имеется существенное различие между излучением медленных (нерелятивистских) ($W \ll W_0$) и быстрых (релятивистских) ($W \gg W_0$) частиц.

Прежде всего отметим различие *углового распределения* излучения. В случае $W \ll W_0$ ($v \ll c$) интенсивность излучения в направлении, составляющем угол θ с мгновенным положением вектора ускорения, пропорциональна $\sin^2 \theta$. В случае $W \gg W_0$ ($v \approx c$) излучение испускается преимущественно в направлении движения в узкий конус с углом раствора, по порядку величины равным отношению W_0/W . Таким образом, излучение практически ограничено плоскостью орбиты частицы и наблюдатель воспринимает последовательные импульсы.

Спектральная плотность излучения также весьма отличается в нерелятивистском случае малых энергий $W \ll W_0$ (циклотронное излучение) и в случае больших энергий $W \gg W_0$ (синхротронное излучение). В нерелятивистском случае излучение имеет частоту

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|e| B}{2\pi mc},$$

которая соответствует круговой частоте. В случае высоких энергий спектр непрерывный и при $W \gg W_0$ имеет максимум на частоте

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi} \frac{|e| B}{mc} \left(\frac{W}{W_0} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{|e| B}{\gamma mc} \left(\frac{W}{W_0} \right)^3. \quad (6)$$

Таким образом, ультрарелятивистские частицы излучают преимущественно на частотах, превышающих ларморовскую частоту медленных частиц в $(W/W_0)^2$ раз и их собственную частоту вращения в $(W/W_0)^3$ раз. Следовательно, электроны, движущиеся в слабых космических магнитных полях, могут излучать в оптическом или радиодиапазоне. Например, электрон с энергией $3 \cdot 10^9 \text{ эв}$, движущийся в магнитном поле напряженностью $3 \cdot 10^{-6} \text{ гс}$, имеет частоту вращения всего лишь около $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ гц}$, а излучает преимущественно на частоте около 300 Мгц . В 1950 г. была предложена гипотеза [51, 52] о том, что

нетепловые шумы (в диапазоне 100 МГц), регистрируемые радиотелескопами, вызваны синхротронным излучением релятивистских электронов; в настоящее время эта теория получила всеобщее признание. Мы не будем рассматривать проблему космических шумов, отослав интересующегося читателя к монографии Шкловского [53].

В плазме заряженные частицы могут излучать также вследствие коллективного движения частиц (плазменные колебания).

ЛИТЕРАТУРА

1. Birkeland K., The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902—1903, Aschenhoug & Co., Christiania, 1908.
2. Störmer C., The polar Aurora, Clarendon Press, Oxford, 1955.
3. Allis W. P., Motions of Ions and Elektrons, Handbuch der Physik, Bd. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1956, S. 383.
4. Northrop T. G., The Guiding Centre Approximation to Charged Particle Motion, Ann. Phys., **15**, 79 (1961).
5. Lehnert B., Dynamics of Charged Particles, North-Holland Publ. Co., 1963.
6. Cowling T. G., On Alfvén's Theory of Magnetic Storms and of the Aurora, Terr. Magn. Atmos. Elect., **47**, 209 (1942).
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
8. Kruskal M., Asymptotic Theory of Hamiltonian and Other Systems with all Solutions Nearly Periodic, Nuclear Fusion, Suppl., part 2, 775 (1962).
9. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Механика, Физматгиз, М., 1958.
10. Vandervoort P. O., The Nonconstancy of the Adiabatic Invariants, Ann. Phys., **12**, 436 (1961).
11. Northrop T. G., Teller E., Stability of the Adiabatic Motion of Charged Particles in the Earth's Field, Phys. Rev., **117**, 215 (1960).
12. McIlwan C. E., Coordinates for Mapping the Distribution of Magnetically Trapped Particles, J. Geophys. Res., **66**, 3681 (1961).
13. Gibson G., Jordan W. C., Lauer E. J., Containment of Positrons in a Mirrow Machine, Phys. Rev. Letters, **5**, 141 (1960).
14. Родионов С. Н., Экспериментальная проверка поведения заряженных частиц в адиабатической ловушке, Атомная энергия, **6**, 623 (1959).
15. Christofilos N. C., The Argus Experiments, J. Geophys. Res., **64**, 869 (1959); см. также Symposium on the Scientific Effects of Artificially Introduced Radiations at High Altitudes, Ed. Porter R. W., J. Geophys. Res., **64**, 865 (1959).
16. Lemaître G., Vallarta M. S., On the Geomagnetic Analysis of Cosmic Radiation, Phys. Rev., **49**, 719 (1936).
17. Lemaître G., Vallarta M. S., On the Allowed Cone of Cosmic Radiation, Phys. Rev., **50**, 493 (1936).
18. Firor J., Cosmic radiation Intensity-time Variations and their Origin, IV Increases associated with Solar Flares, Phys. Rev., **94**, 1017 (1954).
19. Jory F. S., Selected Cosmic-ray Orbits in the Earth's Magnetic Field, Phys. Rev., **103**, 1068 (1955).
20. Lüst R., Schlüter A., Katterbach K., The Paths of Cosmic Radiation Particles in the Earth's Magnetic Field, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. Kl., **11a**, 128 (1955); Die Bahnen von Teilchen der kosmischen

- Strahlung im Erdmagnetfeld, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math-Phys.-Chem. Abteilung, 11a, № 8 (1956).
21. Lüst R., Impact Zones for Solar Cosmic Ray Particles, Phys. Rev., 105, 1827 (1957).
 22. McCracken K. G., Rao U. R., Shea M. A., The Trajectories of Cosmic Rays in a High Degree Simulation of the Geomagnetic Field, M. I. T. Technical Report 77, 1962.
 23. Singer F., The Primary Cosmic Radiation and its Time Variation, Progress in Elementary Particle and Cosmic Ray Physics, vol. 4, North-Holland Publ. Co., 1958.
 24. Vallarta M. S., Theory of the Geomagnetic Effects of Cosmic Radiation, Handbuch der Physik, Bd. 46/1, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
 25. Brunberg E.-A., The Optics Cosmic-ray Telescopes, Arc. f. fys., 14, 195 (1958).
 26. Brüche E., Some New Theoretical and Experimental Results on the Aurora Polaris, Terr. Magn. Atmos. elect., 36, 41 (1931).
 27. Bennett W. H., Hulburt E. O., Magnetic Self-focusing of Auroral Protons, Phys. Rev., 91, 1562 (1953).
 28. Bennett W. H., Hulburt E. O., Theory of Aurora based on Magnetic Self-focusing of Solar Ion Streams, Phys. Rev., 95, 315 (1954).
 29. Bennett W. H., Hulburt E. O., Magnetic Self-focusing Solar Ion Streams as the Cause of Aurorae, J. Atmos. Terrest. Phys., 5, 211 (1954).
 30. Malmfors K. G., Determination of Orbits in the Field of a Magnetic Dipole with Applications to the Theory of the Diurnal Variation of Cosmic Radiation, Ark. f. mat. astr. o. fys., 32A, № 8 (1945).
 31. Brunberg E.-A., Dattner A., Experimental Determination of Electron Orbits in the Field of Magnetic Dipole, Tellus, 5, 135 (1953).
 32. Brunberg E.-A., Cosmic Rays in Terrestrial Magnetic Dipole Field, Tellus, 8, 215 (1956).
 33. Quenby J. J., Wenk G. J., Bland C. J., Cosmic Ray Threshold Rigidities, H. J. Phys. Soc. Japan, 17, Suppl. A — 2, 449 (1962).
 34. Störmer C., Sur un problème relatif aux mouvements des corpuscules électriques dans le space cosmique, Videnskapsselskabets Skr. Mat.-nat. Kl., № 14, Kristiania, Oslo, 1913.
 35. Alfvén H., On the Electric Field Theory of Magnetic Storms and Aurorae, Tellus, 7, 50 (1955); On the Theory of Magnetic Storms and Aurorae, Tellus, 10, 104 (1958).
 36. Swann W. F. G., A Mechanism of Acquisition of Cosmic Ray Energies by Electros, Phys. Rev., 43, 217 (1933).
 37. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И., Современное состояние вопроса о происхождении космических лучей, Успехи физ. наук, 71, вып. 3, 411 (1960).
 38. Morrison P., The Origin of Cosmic Rays, Handbuch der Physik, Bd. 46/1; Springer-Verlag, Berlin, 1961, S. 1.
 39. Fermi E., On the Origin of Cosmic Radiation, Phys. Rev., 75, 1169 (1949).
 40. Fermi E., Galactic Magnetic Fields and the Origin of Cosmic Radiation, Astrophys. J., 119, 1 (1954).
 41. Davis L., Modified Fermi Mechanism for the Acceleration of Cosmic Rays, Phys. Rev., 101, 351 (1956).
 42. Alfvén H., On the Solar Origin of Cosmic Radiation, Phys. Rev., 75, 1732 (1949).
 43. Alfvén H., On the Solar Origin of Cosmic Radiation. II, Phys. Rev., 77, 375 (1950).
 44. Alfvén H., On the Origin of Cosmic Radiation, Tellus, 6, 232 (1954).

45. Alfén H., Momentum Spectrum of Cosmic Radiation, *Tellus*, **11**, 106 (1959).
46. Schlüter A., Der Gyro-Relaxations-Effekt, *Z. Naturforsch.*, **12a**, 822 (1957).
47. Alfvén H., Aström E., Energy Spectrum of Cosmic Radiation, *Nature*, **181**, 330 (1958).
48. Berger J. M., Newcomb W. A., Dawson J. M., Frieman E. A., Kulsrud R. M., Lenard A., Heating of a Confined Plasma by Oscillating Electromagnetic Fields, *Phys. Fluids*, **1**, 301 (1958). (Русский перевод: Бергер, Ньюкомб, Даусон, Фримен, Кулсруд и Ленард, Нагревание изолированной плазмы осциллирующими электромагнитными полями, статья в сборнике «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции», Избр. докл. ин. ученых, Госатомиздат, М., 1959.)
49. Murty G. S., Varma R. K., Acceleration of Cosmic Radiation, *Phys. Rev.*, **112**, 1789 (1958).
50. Panofsky W. K. H., Phillips M., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1956.
51. Alfvén H., Herlofson N., Cosmic Radiation and Radio Stars, *Phys. Rev.*, **78**, 616 (1950).
52. Kiepenheuer K. O., Cosmic Rays as the Source of General Galactic Radio Emission, *Phys. Rev.*, **79**, 738 (1950).
53. Шкловский И. С., Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, М., 1956.

Магнитная гидродинамика

3.1. Введение

Движение намагниченной среды создает электрическое поле. Если при этом среда является электрически проводящей и различные части ее движутся с разными скоростями, то электрическое поле создаст токи (в том случае, если движение не удовлетворяет некоторым специальным условиям). Эти токи взаимодействуют с магнитным полем и вызывают силы, которые при определенных условиях, рассматриваемых далее, достаточны для того, чтобы заметно изменить характер движения среды. Таким образом, гидродинамическое движение и электромагнитные явления взаимосвязаны, и теперь мы не можем пользоваться обычной гидродинамикой или обычной электродинамической теорией, а должны прибегнуть к их комбинации, которая получила название магнитной гидродинамики.

При прочих равных условиях связь между электромагнитными и гидродинамическими явлениями возрастает с увеличением линейного масштаба явления (см. разд. 3.9). Следовательно, для крупномасштабных явлений эта связь может быть сильной, тогда как для мелкомасштабных явлений она незначительна. Например, в ионосфере радиоволны с длиной волны, скажем в 1 м, не создают гидродинамического движения; аналогично ударная волна, образованная обычным метеором, не носит гидромагнитного характера. В то же время колебания протяженной зоны F-слоя с периодами порядка секунд или более следует рассматривать при помощи магнитной, а не обычной гидродинамики. Все явления, происходящие на Солнце, которые достаточно велики, чтобы их можно было визуально наблюдать с Земли, являются гидромагнитными; это утверждение справедливо и для межзвездных облаков. Рассматриваемая связь достаточно сильна также в недрах звезд и в жидком ядре Земли. Во всей вселенной единственным примером газообразной среды, для которой справедлива без всяких ограничений обычная гидродинамика, являются нижние слои атмосфер планет (ниже ионосферы), имеющие очень малую электропроводность. К этой же категории можно было бы отнести океаны, озера и т. д., для которых справедлива обычная гидродинамика, не усложненная электромагнитными явлениями.

ГИДРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

3.2. Качественное рассмотрение

3.2.1. Случай несжимаемой жидкости

Рассмотрим несжимаемую электрически проводящую жидкость в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Введем правую прямоугольную систему координат с осью z , направленной параллельно силовым линиям. Предположим, что в некоторый момент

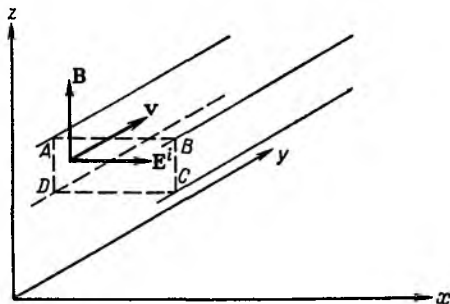


Рис. 3.1. Если столб $ABCD$ движется в направлении y , магнитное поле $\mathbf{B}$ создает электрическое поле $\mathbf{E}^i$.

времени вся жидкость покоится, за исключением некоторого выделенного объема, имеющего в плоскости xz сечение $ABCD$ и неограниченные размеры по оси y (рис. 3.1). Пусть этот объем движется вдоль оси y со скоростью $\mathbf{v}$.

Движение поперек магнитного поля индуцирует электрическое поле

$$\mathbf{E}^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B},$$

направленное вдоль оси x . Поскольку среда является электрически проводящей, возникает система токов. Точная структура ее зависит от геометрических факторов, которые определяют индуктивность и омическое сопротивление. Рис. 3.2 иллюстрирует возникающую систему токов.

В присутствии магнитного поля $\mathbf{B}$ ток плотности $\mathbf{i}$ создает объемную силу

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \right) \times \mathbf{B}.$$

Как видно на рис. 3.1 и 3.2, эта сила приложена к рассматриваемому объему в направлении, противоположном $\mathbf{v}$, т. е. стре-

мится затормозить движение. На покоящуюся жидкость вблизи выделенного объема $ABCD$ эта сила действует в направлении y . Таким образом, слой жидкости, который двигался, тормозится, а слои, лежащие выше и ниже, ускоряются. Итак, система индуцированных токов стремится передать начальное движение соседним слоям жидкости. Предполагая проводимость бесконечной, получим, что через некоторое время объем $ABCD$ остановится, тогда как $EFBA$ и $DCGH$ на рис. 3.3 будут двигаться

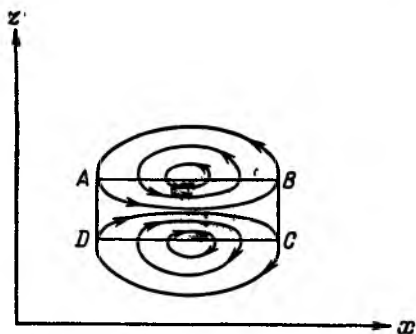


Рис. 3.2. Схема системы токов.

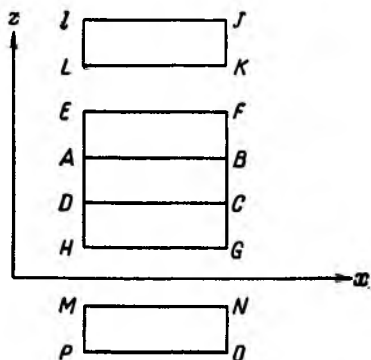


Рис. 3.3. Гидромагнитные волны переносят движение из области $ABCD$ в области $EFBA$ и $DCGH$, а затем — в области $LKJI$ и $MNOP$.

в направлении оси y . Еще через некоторое время придут в движение участки $IJKL$ и $MNOP$, тогда как остальная жидкость будет покоиться. Математический анализ, приведенный ниже (см. разд. 3.4), показывает, что движение распространяется именно таким образом (параллельно силовым линиям и без искажения объема).

3.2.2. Случай сжимаемой жидкости

Рассмотрим теперь сжимаемую электрически проводящую среду, помещенную в однородное магнитное поле, параллельное оси z прямоугольной системы координат. Предположим, что некоторая геометрически однородная область, вытянутая в направлении оси z , каким-либо образом сжимается перпендикулярно B . Если проводимость велика, то из закона сохранения потока (см. разд. 3.9) следует, что напряженность магнитного поля в сжатой области возрастает. Тот факт, что магнитное поле

меняется в пространстве, означает, что существует ток, плотность которого дается уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i},$$

где

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu},$$

а μ — магнитная проницаемость жидкости. Ток создает объемную силу, которая равна

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\right) \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B}.$$

Поскольку $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ имеют только компоненты вдоль оси z , выражение для $\mathbf{F}$ можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \frac{B^2}{8\pi\mu}.$$

Это означает, что при наличии поперечного сжатия магнитное поле создает восстанавливающую силу, эквивалентную силе, возникающей при некотором распределении давления, численно равного $B^2/8\pi\mu$ — так называемое *магнитное давление*. Благодаря этому возможно существование волн сжатия — *магнито-звуковых* или *магнитоакустических волн*, которые могут распространяться поперек магнитного поля в результате комбинированного действия гидростатического и магнитного давлений. Такие волны впервые были исследованы в работах [1—3]. Они будут рассмотрены в разд. 3.8.

3.3 Основные уравнения

Чтобы сформулировать задачу математически, необходимо начать с уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(4\pi \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

и

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B} \right\}, \quad (5)$$

где σ — электрическая проводимость. К этим уравнениям нужно добавить гидродинамическое уравнение движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{G} + \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \right) \times \mathbf{B} - \text{grad } p \quad (6)$$

и уравнение непрерывности

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div}(\rho \mathbf{v}). \quad (7)$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, а $\mathbf{G}$ — силы неэлектромагнитного происхождения, действующие на единицу массы жидкости. В уравнении (6) мы опустили члены, связанные с силами вязкости (см. разд. 3.9). Для анализа поведения сжимаемой жидкости нам необходимо также соотношение между изменением давления и соответствующим изменением плотности. Для изотропной плазмы, в которой происходит *обратимый адиабатический* процесс, мы имеем

$$p = \text{const } \rho^\gamma, \quad (8)$$

где

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (9)$$

— отношение удельных теплоемкостей. Приведенные соотношения доказываются в руководствах по термодинамике (см., например, [4]). В плазме, находящейся в магнитном поле и характеризующейся малой частотой столкновений, распределение скоростей может быть анизотропным, так что простое соотношение (8) оказывается неприменимым (см. [5]). Мы ограничимся рассмотрением только тех случаев, для которых справедливо уравнение (8).

3.3.1. Член, содержащий магнитную силу

Член уравнения (6), содержащий магнитную силу, можно переписать при помощи известного векторного тождества

$$\text{grad}(\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \text{ grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a}.$$

Используя также соотношение (1) и предполагая, что μ постоянно, а производная $\partial \mathbf{D} / \partial t$ пренебрежимо мала, получим для *объемной* магнитной силы выражение

$$\mathbf{F}_m = \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \right) \times \mathbf{B} = -\text{grad} \left(\frac{B^2}{8\pi\mu} \right) + \frac{1}{4\pi\mu} (\mathbf{B} \text{ grad}) \mathbf{B}. \quad (10)$$

Интерпретируем эту силу иначе. Если мы рассмотрим произвольный объем V , то результирующая сила получается интегри-

рованием по этому объему. Объемный интеграл можно затем преобразовать в интеграл по поверхности. Таким образом, результирующую силу можно представить как совокупность *эквивалентных поверхностных сил*. (Это возможно потому, что магнитная сила имеет природу дивергенции тензора, см., например, [6].) Для преобразования нам необходимы векторные тождества

$$\int_V \text{grad } \varphi dV = \int_S \varphi d\mathbf{S} \quad (11)$$

и

$$\int_V (\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{b} dV = \int_S \mathbf{b} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) - \int_V \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a} dV, \quad (12)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V , $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности, φ — произвольная скалярная функция, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ —

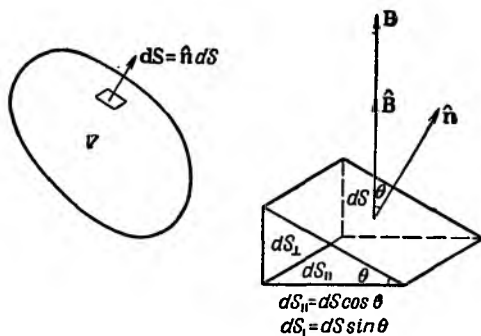


Рис. 3.4. К интерпретации эквивалентных поверхностных сил.

произвольные векторные поля. Применение этих тождеств к выражению (10) дает

$$\int_V \mathbf{F}_m dV = \int_S \left(-\frac{B^2}{8\pi\mu} \right) d\mathbf{S} + \int_S \frac{\mathbf{B} (\mathbf{B} d\mathbf{S})}{4\pi\mu}. \quad (13)$$

Введем единичные векторы: $\hat{\mathbf{n}}$, перпендикулярный к поверхности (и направленный наружу от объема V), и $\hat{\mathbf{B}}$, параллельный магнитному полю (рис. 3.4); получим $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} B$ и

$$\mathbf{B} d\mathbf{S} = B dS (\hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{n}}) = B dS \cos \theta,$$

где θ — угол между магнитными силовыми линиями и нормалью к элементу поверхности. Тогда уравнение (13) можно

записать в виде

$$\int_V \mathbf{F}_m dV = \int_S \frac{B^2}{8\pi\mu} (-\hat{\mathbf{n}} dS) + \int_S \frac{B^2}{4\pi\mu} \hat{\mathbf{B}} (\cos \theta dS). \quad (14)$$

Первый член в правой части равенства — магнитное давление, равное $B^2/8\pi\mu$, а второй член — магнитное натяжение, равное по величине $B^2/4\pi\mu$ и направленное вдоль силовых линий (см. рис. 3.4).

3.4. Плоские волны в несжимаемой жидкости.

Однородное магнитное поле

Чтобы продемонстрировать основные свойства гидромагнитных волн, рассмотрим простой случай плоских волн в несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ . Тогда имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Предположим далее, что начальное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ однородно и параллельно оси z прямоугольной системы координат и что сила $\rho \mathbf{G}$ отсутствует. Допустим, что током смещения $(\partial \mathbf{D} / \partial t) / 4\pi$ можно пренебречь по сравнению с током проводимости $\mathbf{i}$.

Магнитное поле представим в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad (2)$$

где $\mathbf{b}$ — поле, созданное током $\mathbf{i}$. Чтобы исследовать плоскую волну, распространяющуюся в направлении $\mathbf{B}_0$, предположим, что все векторы зависят только от координаты z и времени t и не зависят от x и y .

В силу соотношений (1) и (3) разд. 3.3 отсюда следует, что $i_z = 0$, а $B_z = \text{const} = B_0$. Далее, согласно условию (1), мы можем положить $v_z = 0$.

Если систему координат повернуть так, чтобы $i_y = 0$, то из формулы (1) и (4) разд. 3.3 получим

$$i_x = -\frac{c}{4\pi\mu} \frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad (3)$$

$$i_y = i_z = 0, \quad (4)$$

$$b_x = \text{const} = 0,$$

$$B_z = B_0.$$

Подставим эти значения в уравнение (6) разд. 3.3. Поскольку в соответствии с нашими предположениями $\operatorname{grad} p$ не может

иметь составляющих, перпендикулярных оси z , мы получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad v_x = \text{const} = 0,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\mu} \frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad (5)$$

и далее

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial(b_y^2)}{\partial z}. \quad (6)$$

Уравнение (5) разд. 3.3 дает

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{i}}{\sigma} - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B},$$

или, с использованием (4) и (5),

$$E_x = \frac{i_x}{\sigma} - \frac{v_y B_0}{c}, \quad (7)$$

$$E_y = E_z = 0.$$

Уравнение (2) разд. 3.3 дает

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = -c \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) получаем

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = B_0 \frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial z} - \frac{c}{\sigma} \frac{\partial^2 i_x}{\partial t \partial z}.$$

Подставляя сюда выражения (3) и (5), получаем

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial^3 b_y}{\partial z^2 \partial t}. \quad (9)$$

Если отказаться от требования, чтобы все векторы были независимы от x , то можно показать, что уравнение (9) принимает несколько более общий вид

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} \right). \quad (9a)$$

3.4.1. Бесконечная проводимость

В случае $\sigma = \infty$ мы получаем простое уравнение

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2}, \quad (9б)$$

даже если b_y произвольным образом зависит от x . Выражение (9б) представляет собой волновое уравнение, которое описывает волны, распространяющиеся со скоростью

$$V = \pm \frac{B_0}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}. \quad (10)$$

Гидромагнитная (альвеновская) скорость не зависит ни от частоты, ни от амплитуды. Ее значения для некоторых представляющих интерес объектов приведены в табл. 3.2.

Решение волнового уравнения (9б) имеет вид

$$b_y = A \sin\left(t - \frac{z}{V}\right) \omega, \quad (11)$$

где амплитуда A может быть произвольной функцией x , а ω — угловая частота. Тогда из уравнений (5), (3), (8) и (6) следует

$$v_y = -(4\pi\mu\rho)^{-1/2} A \sin \omega\left(t - \frac{z}{V}\right), \quad (12)$$

$$i_x = \frac{c\omega}{B_0} \left(\frac{\rho}{4\pi\mu}\right)^{1/2} A \cos \omega\left(t - \frac{z}{V}\right), \quad (13)$$

$$E_x = \frac{B_0}{c} (4\pi\mu\rho)^{-1/2} A \sin \omega\left(t - \frac{z}{V}\right), \quad (14)$$

$$p = p_0 - \frac{1}{8\pi\mu} A^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{z}{V}\right) \quad (15)$$

(рис. 3.5 и 3.6). Поскольку плотность магнитной энергии волн составляет $b_y^2/8\pi\mu$, а плотность кинетической энергии $\rho v_y^2/2$, то из выражений (11) и (12) видно, что имеет место равнораспределение между кинетической и магнитной энергиями.

В результате наложения поля $\mathbf{b}$ на $\mathbf{B}_0$ магнитные силовые линии, которые в отсутствие гидромагнитных волн представляли собой прямые

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad (16)$$

искривляются. Поскольку тангенс угла для силовых линий в произвольной точке определяется выражением

$$\frac{dy}{dz} = \frac{b_y}{B_z} = \frac{b_y}{B_0}, \quad (17)$$

то, подставляя (11) в формулу (17) и производя интегрирование, находим, что силовые линии представляют собой синусоидальные кривые, описываемые уравнениями

$$x = x_0, \quad (18)$$

$$y = y_0 + \frac{A}{\omega (4\pi\mu\rho)^{1/2}} \cos \omega\left(t - \frac{z}{V}\right). \quad (19)$$

Продифференцировав y по времени, находим, что производная равна скорости среды (12). Этот факт означает, что в определенном смысле магнитные силовые линии движутся с той же скоростью, что и жидкость. Поэтому часто говорят, что силовые линии «вморожены» в жидкость. Однако это всего лишь образное сравнение и этим термином следует пользоваться с осторожностью.

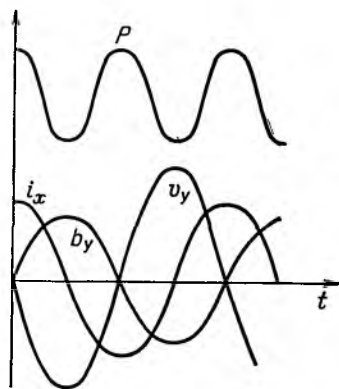


Рис. 3.5. Индуцированное магнитное поле b_y , скорость v_y , ток i_x и давление p синусоидальной волны как функция времени.

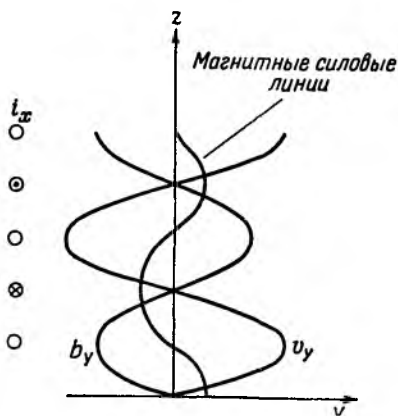


Рис. 3.6. Индуцированное магнитное поле b_y , скорость v_y , ток i_x как функции координаты z в определенный момент времени. Показана также силовая линия результирующего магнитного поля $B_0 + b$.

Следует заметить, что волновому уравнению (9б) удовлетворяют решения типа

$$b_y = f\left(t - \frac{z}{V}\right)g(x), \quad (19a)$$

где f и g — произвольные функции. Уравнение (19a) показывает, что возмущение произвольной формы распространяется параллельно вектору $\mathbf{B}$ со скоростью V , даваемой выражением (10). Этого следовало ожидать, поскольку все элементарные волны типа (11) распространяются с одной и той же скоростью, а волна произвольной формы может быть получена путем их сложения. Однако в сжимаемых средах существуют гидромагнитные волны других типов, которые могут переносить возмущения поперек магнитного поля (см. разд. 3.8).

3.4.2. Конечная проводимость

Предположим, что проводимость σ имеет конечную величину, а векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{v}$, как и прежде, параллельны оси y . Предположим далее, что b и v являются функциями только z и t . Запишем их в комплексном виде

$$b = b_0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad (20)$$

$$v = v_0 e^{j(\omega t - kz)}, \quad (21)$$

где $j = \sqrt{-1}$, а ω , k , b_0 и v_0 — постоянные, причем все, за исключением ω , могут быть комплексными числами.

Поскольку $\partial^2/\partial t^2 = -\omega^2$, $\partial^2/\partial z^2 = -k^2$, $\partial^3/\partial z^2 \partial t = -j\omega k^2$, то из уравнений (9) и (10) получаем

$$\omega^2 - \left(V^2 + j \frac{c^2 \omega}{4\pi\mu\sigma} \right) k^2 = 0, \quad (22)$$

или

$$k = \pm \frac{\omega}{V} \left(1 + \frac{j\omega c^2}{4\pi\mu\sigma V^2} \right)^{-1/2}, \quad (23)$$

или в случае слабого затухания приближенно

$$k = \pm \left(\frac{\omega}{V} - \frac{j\omega^2 c^2}{8\pi\mu\sigma V^3} \right). \quad (24)$$

Расстояние z_0 , на котором амплитуда волны уменьшается в $1/e$ раз, равно обратной величине мнимой части k . Таким образом, имеем

$$z_0 = \frac{8\pi\mu\sigma V}{\omega^2 c^2} = \frac{2\mu\sigma V}{\pi c^2} \lambda^2 = \frac{\mu^{1/2} \sigma B_0}{\pi^{3/2} \rho^{1/2} c^2} \lambda^2 = \frac{\sigma B_0^3}{\pi^{1/2} c^2 \rho^{3/2} \mu^{1/2} \omega^2}, \quad (25)$$

где $\lambda = 2\pi V/\omega$ — длина волны. Выражение (25) приближенно выполняется при $\lambda \ll z_0$.

Итак, мы можем написать

$$b = b_0 e^{-z/z_0} e^{j\omega(t-z/V)} \quad (26)$$

и

$$v = v_0 e^{-z/z_0} e^{j\omega(t-z/V)}, \quad (27)$$

причем

$$v_0 = -\frac{V b_0}{B_0} \left(1 - j \frac{\omega c^2}{8\pi\mu\sigma V^2} \right). \quad (28)$$

Последнее выражение получается при помощи формул (5), (20) и (21).

Мнимая часть дает фазовый сдвиг скорости v по отношению к возмущению магнитного поля b . Мы можем также написать

$$v = v'_0 e^{-z/z_0} e^{j\omega(t-z/V) - j\varphi}, \quad (29)$$

где при малых λ/z_0

$$v'_0 = -\frac{Vb_0}{B_0}, \quad (30)$$

$$\varphi = \frac{\omega c^2}{8\pi\mu\sigma V^2} = \frac{\omega c^2\rho}{2\sigma B_0^2}. \quad (31)$$

Заметим, что в предельном случае низкой проводимости уравнение (22) переходит в дисперсионное соотношение, характеризующее скин-эффект в твердотельных проводниках

$$k = \left(-\frac{j4\pi\mu\omega\sigma}{c^2} \right)^{1/2} = \pm \frac{1-j}{\delta},$$

где

$$\delta = \left(\frac{2\pi\mu\omega\sigma}{c^2} \right)^{-1/2}$$

— глубина обычного скин-слоя.

3.4.3. Гидромагнитные волны как колебания силовых линий

Простую картину движения гидромагнитных волн можно получить, сравнивая магнитные силовые линии с упругими струнами. Поскольку в определенном смысле силовые линии движутся вместе со средой, их можно рассматривать как струны, имеющие массу, равную массе жидкости, приходящейся на одну силовую линию. Согласно разд. 3.3.1, действующими силами являются изотропное давление $B^2/8\pi\mu$, которое не оказывает влияния на поперечные колебания несжимаемой среды, и натяжение $B^2/4\pi\mu$, направленное вдоль силовых линий. Для обычной струны поперечные колебания в направлении оси y описываются уравнением

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}, \quad (32)$$

где S играет роль натяжения струны, а m — масса на единицу длины (см., например, [7]). Тогда скорость волны

$$V = \left(\frac{S}{m} \right)^{1/2}. \quad (33)$$

Если мы хотим использовать эти результаты для рассмотрения колебаний магнитных силовых линий, то S нужно заменить натяжением на единицу площади, которое, согласно формуле (14) разд. 3.3, равно

$$S = \frac{B^2}{4\pi\mu}, \quad (34)$$

а m — массой жидкости в единице объема, т. е.

$$m = \rho, \quad (35)$$

и тогда, согласно уравнению (10), скорость равна

$$V = \frac{B}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}. \quad (36)$$

Таким образом, гидромагнитные волны в проводящей жидкости можно рассматривать как колебания магнитных силовых линий, представляющих собой своего рода «материализованные» струны, к которым «приклеена» проводящая жидкость. Во многих случаях такая интерпретация весьма полезна при рассмотрении различных явлений. Однако использовать ее при изучении плазмы следует с большой осторожностью, поскольку она может привести к ошибочным выводам (см. разд. 5.4).

3.4.4. Гидромагнитные волны как частный случай электромагнитных волн

Весьма любопытно, что гидромагнитные волны можно рассматривать как предельный случай электромагнитных волн, несмотря на то что их скорость (см. табл. 3.2) часто на много порядков меньше скорости света.

Рассмотрим однородное магнитное поле и электромагнитную волну, которая распространяется в направлении поля. Скорость волны v определяется выражением

$$v = c(\epsilon\mu)^{-1/2}, \quad (37)$$

где c — скорость света, ϵ — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, которую будем считать равной единице. Электрическое поле волны E вызывает ток смещения

$$i = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{dE}{dt}. \quad (38)$$

В вакууме $\epsilon=1$. При наличии вещества к этому току добавляется ток, текущий в веществе. Обратимся к результатам, которые будут получены в разд. 5.3. Рассмотрим *плазму* и ограничимся простым случаем, к которому можно применить эквивалентную цепь, изображенную на рис. 5.6, б. Значения параметров схемы определяются выражениями (22) — (24) разд. 5.3.2. Для частот, значительно меньших, циклотронной индуктивностью L можно пренебречь. Предположим также, что проводимость очень высока. Тогда сопротивлением R можно пренебречь и остается рассмотреть только два конденсатора $C_0=1/4\pi$ и $C=\rho c^2/B^2$. В электрическом поле E через первый конденсатор

течет ток смещения $i_1 = C_0 dE/dt$, а через второй — ток проводимости $i_c = C dE/dt$. Тогда результирующий ток

$$i = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{4\pi\sigma c^2}{B^2} \right) \frac{dE}{dt}. \quad (39)$$

Сравнивая это выражение с формулой (38), находим, что истинный ток соответствует эквивалентной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{\text{экв}} = 1 + \frac{4\pi\sigma c^2}{B^2}. \quad (40)$$

Подставляя это значение ϵ в выражение (37) и учитывая, что $\mu = 1$, получим

$$v = (V^{-2} + c^{-2})^{-1/2}, \quad (41)$$

где

$$V = \frac{B}{(4\pi\sigma)^{1/2}}. \quad (42)$$

Нетрудно заметить, что полученное выражение дает гидромагнитную скорость, с которой мы встречались раньше. Из формулы (41) непосредственно следует, что в случае

$$V \ll c \quad (43)$$

скорость распространения электромагнитной волны (37) переходит в гидромагнитную скорость V .

Связь между магнитогидродинамическими и электромагнитными волнами рассмотрена в работах [8, 9]. Из последних работ следует отметить обзоры [10, 11].

Эквивалентную диэлектрическую постоянную плазму можно вывести другим способом (см., например, [11]). Вопрос о применимости эквивалентной диэлектрической постоянной рассмотрел недавно Ленерт (см. разд. 5.3.2).

3.4.5. Гидромагнитная волна на границе двух сред

Если магнитогидродинамическая волна встречает границу раздела двух жидкостей, которые характеризуются различными значениями магнитогидродинамической скорости [(10) разд. 3.4.1], то волна частично проходит, а частично отражается. Это явление изучалось в работах [12—17].

Здесь мы ограничимся рассмотрением простых, свободных от диссипации волн ($\sigma = \infty$), изученных в разд. 3.4.1, и случае, когда граница между жидкостями перпендикулярна невозмущенному магнитному полю B_0 . Пусть $z=0$ — граница раздела двух жидкостей; магнитогидродинамические скорости равны V_1 в области $z < 0$ и V_2 в области $z > 0$, а магнитное поле падающей

волны дается соотношением (11) разд. 3.4.1

$$b_y = A \sin \omega \left(t - \frac{z}{V_1} \right) \quad (z < 0). \quad (44)$$

Тогда магнитное поле прошедшей волны можно записать в виде

$$b'_y = A' \sin \omega \left(t - \frac{z}{V_2} \right) \quad (z > 0), \quad (45)$$

а магнитное поле отраженной волны — в виде

$$b''_y = A'' \sin \omega \left(t + \frac{z}{V_1} \right) \quad (z < 0). \quad (46)$$

Согласно выражению (8) разд. 3.4, соответствующие электрические поля будут

$$E_x = A \frac{V_1}{c} \sin \omega \left(t - \frac{z}{V_1} \right) \quad (z < 0), \quad (47)$$

$$E'_x = A' \frac{V_2}{c} \sin \omega \left(t - \frac{z}{V_2} \right) \quad (z > 0), \quad (48)$$

$$E''_x = -A'' \frac{V_1}{c} \sin \omega \left(t + \frac{z}{V_1} \right) \quad (z < 0). \quad (49)$$

Если $\mu = 1$, то граничные условия будут:

$$b_y + b''_y = b'_y \quad (50)$$

и

$$E_x + E''_x = E'_x. \quad (51)$$

Как показывает соотношение (7) разд. 3.4, из непрерывности E_x в случае $\sigma = \infty$ следует также непрерывность скорости v_y . Уравнения (50) и (51) приводят к соотношениям

$$A + A'' = A' \quad (52)$$

и

$$AV_1 - A''V_1 = A'V_2. \quad (53)$$

Следовательно,

$$A' = \frac{2V_1}{V_1 + V_2} A, \quad (54)$$

$$A'' = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} A. \quad (55)$$

Поскольку скорости V_1 и V_2 составляют

$$V_1 = \frac{B_0}{(4\pi\rho_1)^{1/2}} \quad (56)$$

и

$$V_2 = \frac{B_0}{(4\pi\rho_2)^{1/2}}, \quad (57)$$

то выражения для амплитуд (54) и (55) принимают вид

$$A' = \frac{2\rho_2^{1/2}}{\rho_2^{1/2} + \rho_1^{1/2}} A, \quad (58)$$

$$A'' = \frac{\rho_2^{1/2} - \rho_1^{1/2}}{\rho_2^{1/2} + \rho_1^{1/2}} A. \quad (59)$$

При отражении от твердой проводящей границы скорость приобретает фазовый сдвиг 180° (относительно падающей волны), а индуцированное магнитное поле сдвига фазы не имеет. [В этом можно убедиться, если в выражении (59) положить $\rho_2 = \infty$ и воспользоваться формулами (44), (46) и уравнением (5) разд. 3.4 [15].] При отражении от свободной поверхности, наоборот, сдвиг фазы на 180° наблюдается у магнитного поля, а у скорости сдвига фазы нет.

Рассмотрим теперь случай, когда ρ , а следовательно, и V изменяются непрерывно вдоль магнитной силовой линии. Если это изменение достаточно медленное (т. е. $|\text{grad } \rho|/\rho \ll 1/\lambda$, где λ — длина волны), то отражение незначительно. (Аналогичный результат получается в теории световых или звуковых волн.)

В этом случае изменение b_y и v_y можно найти следующим простым путем. Проведем достаточно большое количество параллельных плоскостей, отстоящих друг от друга на малом расстоянии Δz , и заменим непрерывное распределение плотности таким, при котором она меняется скачком на величину $\Delta\rho = (d\rho/dz)\Delta z$ на каждой плоскости. На каждой такой плоскости амплитуда прошедшей волны изменяется на величину ΔA . Из формулы (58) находим, что

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2(\rho + \Delta\rho)^{1/2}}{(\rho + \Delta\rho)^{1/2} + \rho^{1/2}} - 1 = \frac{\Delta\rho}{4\rho}.$$

Следовательно,

$$A = \text{const } \rho^{1/4}. \quad (60)$$

Поскольку A представляет собой амплитуду b_y , а v_y пропорциональна $b_y/\rho^{1/2}$ [см. формулу (12) разд. 3.4.1], то мы имеем

$$b_y = \text{const } \rho^{1/4}, \quad (61)$$

$$v_y = \text{const } \rho^{-1/4}. \quad (62)$$

Этот результат можно также получить из условия сохранения энергии, поскольку в том случае, когда выполняется условие $|\text{grad } \rho|/\rho \ll 1/\lambda$, существенной потери энергии при отражении не происходит.

3.5. Волны произвольной формы в несжимаемой жидкости

До сих пор мы рассматривали только некоторые частные случаи с тем, чтобы составить представление о волновом движении. Теперь мы перейдем к более общему рассмотрению, которое впервые провел Вален [12, 13].

Как и прежде, пренебрежем током смещения. Предположим также, что магнитная проницаемость μ постоянна. Из уравнений (2) и (5) разд. 3.3 исключим $\mathbf{E}$ и подставим полученное выражение в (1) разд. 3.3. Принимая во внимание, что вследствие соотношения (3) разд. 3.3 тождество

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B})$$

сводится к выражению $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B}$, получаем

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Подставляя уравнение (1) разд. 3.3 в (6) разд. 3.3, находим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (2)$$

Магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (3)$$

слагается из начального поля $\mathbf{B}_0$, которое задано и создается внешними токами, так что

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = 0, \quad (4)$$

и индуцированного поля $\mathbf{b}$, которое создается токами, вызванными возмущением. Наша задача состоит в том, чтобы из выражений (1) и (2) найти скорость $\mathbf{v}$ и поле $\mathbf{b}$.

Общее решение связано с большими математическими трудностями. Вален получил решение для случая несжимаемой жидкости плотности ρ , находящейся в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ [12, 13]. В этом случае имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{grad} B_0 = 0. \quad (6)$$

Тогда тождества

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B},$$

$$(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v},$$

$$\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 - (\mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{B}$$

можно записать в виде

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = [(\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \operatorname{grad}] \mathbf{v} - (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \operatorname{grad} \frac{1}{2} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} = \\ &= \operatorname{grad} (\mathbf{B}_0 \mathbf{b}) - (\mathbf{B}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая

$$\mathbf{G} = -\operatorname{grad} U, \quad (10)$$

получаем из уравнения (1)

$$(\mathbf{B}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta \mathbf{b} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{b} - \mathbf{b} (\operatorname{grad}) \mathbf{v}, \quad (11)$$

а из уравнения (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \\ + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \operatorname{grad} \left(U + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\mu\rho} (\mathbf{B}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\mu\rho} \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \\ + \operatorname{grad} \left[U + \frac{1}{\rho} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi\mu\rho} (\mathbf{B}_0 \mathbf{b}) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

3.5.1. Бесконечная проводимость

Если $\sigma = \infty$, то можно найти точное решение уравнений (11) и (13). Пусть

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}. \quad (14)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{4\pi\mu} (\mathbf{B}_0 \mathbf{b}) = \frac{1}{8\pi\mu} [(\mathbf{B}_0 + \mathbf{b})^2 - B_0^2], \quad (15)$$

член в правой части уравнения (13), представляющий собой градиент, равен нулю, если

$$p + \rho U + \frac{1}{8\pi\mu} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b})^2 = \text{const}, \quad (16)$$

а это означает, что сумма гидростатического и магнитостатического давлений $p + B^2/8\pi\mu = -\rho U$.

Тогда уравнения (11) и (13) сводятся к

$$(\mathbf{B}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{b} = (4\pi\mu\rho)^{1/2} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \quad (17)$$

Это уравнение показывает, что *волна распространяется со скоростью*

$$V = - \frac{B_0}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}. \quad (18)$$

Уравнениям (11) и (13) удовлетворяет также решение

$$v = - \frac{b}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}, \quad (19)$$

тогда скорость распространения будет

$$V = \frac{B_0}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}. \quad (20)$$

Следовательно, если скорость v направлена противоположно возмущению магнитного поля b , то волновая скорость V параллельна заданному магнитному полю B_0 .

В проведенных расчетах мы нигде не пренебрегали членами второго порядка малости. Следовательно, полученный результат справедлив даже в том случае, если $b > B_0$. Однако если встречаются волны конечной амплитуды с противоположно направленными скоростями распространения, то возникают сложные нелинейные эффекты.

3.5.2. Замечания о действии силы Кориолиса

Интересно отметить, что во вращающейся среде магнитогидродинамические волны испытывают действие кориолисовой силы. Приведенное выше рассмотрение во избежание слишком больших осложнений было ограничено случаем невращающейся среды. И сейчас мы сделаем лишь несколько замечаний о действии силы Кориолиса.

Как обнаружил Ленерт [18, 19], гидромагнитные волны под действием силы Кориолиса характерным образом видоизменяются. Плоскополяризованная волна расщепляется на две компоненты, поляризованные по кругу и распространяющиеся с разными фазовыми скоростями. Групповая скорость уже не строго параллельна и антипараллельна магнитному полю, и возмущение в процессе своего движения испытывает искажение. Фазовые скорости поляризованных по кругу компонент волны даются выражением

$$V_\phi = V [(1 + \kappa^2)^{1/2} \pm \kappa] \cos \phi, \quad (21)$$

где

$$V = \frac{B}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}, \quad (22)$$

$$\kappa = \frac{\omega\lambda}{2V} \frac{\cos \psi}{\cos \phi}. \quad (23)$$

Здесь ϕ — угол между нормалью к фронту волны и магнитным полем, ψ — угол между нормалью и осью вращения, λ — длина волны, ω — угловая скорость.

Распространение возмущения с малой амплитудой определяется групповой скоростью (см. разд. 3.8.1). Расчет, проведенный Ленертом [19], показал, что возмущение распространяется не строго параллельно силовым линиям. Максимальное отклонение направления распространения определяется параметром κ .

Оценки параметра κ [см. уравнение (23)] показывают, что влияние силы Кориолиса может оказаться весьма существенным даже для такой медленно вращающейся звезды, как Солнце.

Если амплитуда магнитогидродинамической волны велика, то начинают играть роль нелинейные члены, которые приводят к связи между различными парциальными волнами, составляющими возмущение. Это означает, что простые результаты, полученные в разд. 3.5.1, которые справедливы для произвольных амплитуд в случае невращающейся жидкости, становятся непригодными для больших амплитуд вследствие нелинейных эффектов, обусловленных силой Кориолиса.

3.6. Гидромагнитные вихревые кольца в несжимаемой жидкости

Если кольцо в проводящей магнитной жидкости привести в движение со скоростью $2v$, то возникнут магнитогидродинамические волны. Как показал Вален [12—14], оно расщепляется на два одинаковых кольца, каждое из которых имеет гидродинамическую скорость v (рис. 3.7, а). Одно из них перемещается со скоростью $+V$ (параллельно данному магнитному полю B_0), а другое со скоростью $-V$ (антипараллельно B_0).

Согласно формуле (14) разд. 3.5.1, имеем

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{b^2}{8\pi\mu}, \quad (1)$$

а это означает, что кинетическая энергия кольца равна его магнитостатической энергии. Вследствие этого центробежная сила, связанная с кривизной кольца, всегда компенсирована магнитостатическим натяжением силовых линий [см. (14) разд. 3.3.1].

Другое следствие состоит в том, что гидродинамическое уменьшение давления, равное $\frac{1}{2}\rho v^2$, всегда компенсируется магнитостатическим давлением $b^2/8\pi\mu$.

Если проводимость бесконечна, форма колец остается неизменной в процессе их перемещения. Если же проводимость конечна, но настолько велика, что затухание незначительно, то

приведенное выше рассмотрение является приближенным. Основной эффект в случае конечной проводимости состоит в увеличении поперечного сечения колец, которое подчиняется тому же закону, что и проникновение магнитного поля внутрь проводника (скин-эффект). Вещество кольца диффундирует в

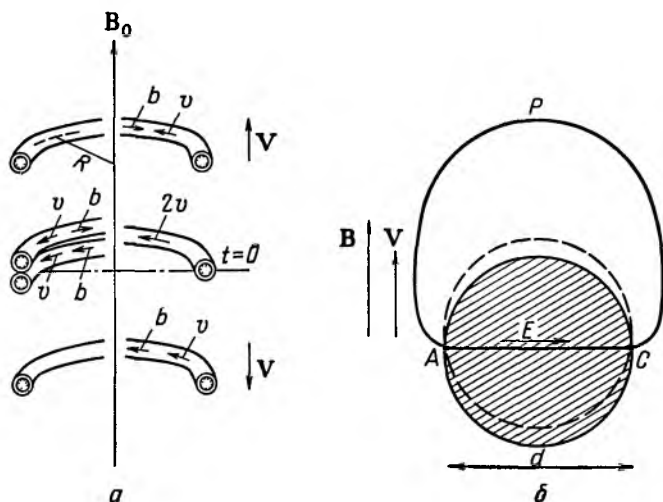


Рис. 3.7. *a* — исходное гидромагнитное кольцо расщепляется на два кольца, одно из которых движется в направлении $+B_0$, а другое — в направлении $-B_0$ (по Валу). *б* — сечение гидромагнитного кольца. Гидродинамический поток, перпендикулярный плоскости чертежа, индуцирует э. д. с. между точками *A* и *C*. В идеальном случае она точно компенсируется изменением потока через неподвижный контур *APC*.

окружающую среду и его границы становятся все более и более размытыми. Приближенной мерой диффузии можно считать скорость увеличения сечения гидромагнитного кольца

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c^2}{2\pi\sigma\mu} \quad (2)$$

[см. (7) и (8) разд. 3.9].

3.7. Гидромагнитные колебания жидких тел

В ограниченном объеме магнитной проводящей жидкости могут возникнуть колебания, которые можно рассматривать как стоячие магнитогидродинамические волны, имеющие длину волны, сравнимую с линейными размерами тела. Частота таких

колебаний зависит от структуры тела, а для данной структуры существует набор частот, соответствующих различным модам колебаний. Приравняв длину волны $\lambda = 2\pi V/\omega$ линейным размерам тела l_c , можно оценить порядок величины частоты самой длинноволновой моды. Получим

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{V}{l_c} = \frac{B_c}{l_c (4\pi\mu\rho_c)^{1/2}}, \quad (1)$$

где B_c и ρ_c — характерные значения напряженности магнитного поля и массовой плотности.

Основную частоту можно также оценить из энергетических соображений. Рассмотрим шар, заполненный жидкостью с бесконечной проводимостью, находящийся в однородном магнитном поле B_0 .

Предположим [15], что шар слегка деформируют (рис. 3.8) так, что он принимает форму удлинненного сфероида с полуосями

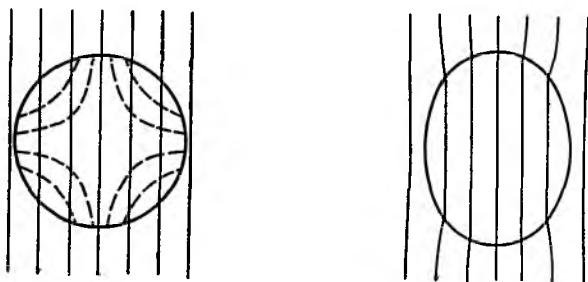


Рис. 3.8. Гидромагнитные колебания сферы. Слева — силовые линии первоначального поля и линии тока (пунктирные кривые), справа — деформированное состояние (по Лундквисту [15]).

$R(1+\alpha)$ и $R(1-\frac{1}{2}\alpha)$, а затем предоставляют возможность свободно колебаться. Избыточная магнитная энергия, соответствующая максимальной деформации, равна

$$W_{\text{магн}} = \frac{\alpha^2 B_0^2 R^3}{4\mu}. \quad (2)$$

Если предположить, что колебания являются гармоническими и характеризуются угловой частотой ω , то к моменту времени, когда тело снова принимает форму шара и, следовательно, избыточная магнитная энергия обращается в нуль, кинетическая энергия равна

$$W_k = \frac{1}{5} \rho \alpha^2 R^5 \omega^2. \quad (3)$$

Приравнявая $W_{\text{магн}}$ и $W_{\text{к}}$, получим

$$\omega = \frac{\sqrt{5}}{R} \frac{B_0}{(4\pi\mu\rho)^{1/2}}, \quad (4)$$

что согласуется с нашими предварительными оценками по порядку величины [см. формулу (1)].

Впервые анализ гидромагнитных колебаний шара провел Шварцшильд [20], чтобы объяснить поведение магнитопеременных звезд. Однако в этом случае необходимо учитывать гравитационную восстанавливающую силу [21, 22]. Для несжимаемого шара, обладающего собственным гравитационным полем, получен результат [23]

$$\omega^2 = \frac{32}{9} \pi \gamma \rho + \frac{5}{3} \frac{B^2}{\pi \mu \rho R^2},$$

где γ — гравитационная постоянная. Как указал Каулинг [22], гравитационная восстанавливающая сила настолько велика, что те весьма низкие частоты, которые были получены из наблюдения магнитных звезд, можно объяснить только существованием специальных мод, характеризующихся почти горизонтальным движением.

Наблюдаемые изменения магнитных звезд часто очень неправильны и связаны с изменением полярности. Вряд ли их можно объяснить гидромагнитными колебаниями. Другое возможное объяснение — теория «наклонного ротатора» — также сталкивается с определенными трудностями. Рассматриваемому вопросу посвящены работы [24—26].

3.8. Гидромагнитные волны в сжимаемой среде.

Магнитозвуковые волны

Мы ограничимся рассмотрением *плоских гармонических волн малой амплитуды* и проанализируем детально случай *бесконечной проводимости*.

Предположение о малости амплитуды позволяет отбросить малые члены в основных уравнениях разд. 3.3, и уравнения станут линейными. Эти уравнения упростятся еще больше в случае плоских волн. Соответствующие выкладки приводятся в разд. 3.8.1. В разд. 3.8.2 выводятся дисперсионные соотношения, при помощи которых можно описать распространение волн.

3.8.1. Линеаризация и упрощение основных уравнений

Полное магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (1)$$

представляет собой суперпозицию невозмущенного поля $\mathbf{B}_0$ и индуцированного поля $\mathbf{b}$, которое обусловлено волновым движением. Соответствующая плотность равна

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad (2)$$

а давление

$$p = p_0 + \tilde{p}, \quad (3)$$

где ρ_0 и p_0 — постоянные. Из предположения о малости амплитуды следует, что $b \ll B_0$, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ и $\tilde{p} \ll p_0$. Величины $\mathbf{E}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{i}$ для невозмущенного состояния равны нулю. Пренебрегая, как и раньше, током смещения, из основных уравнений разд. 3.3 получим

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{i}, \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{i}}{\sigma}, \quad (7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\right) \times \mathbf{B}_0 - \text{grad } \tilde{p}, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \rho_0 \text{div } \mathbf{v}, \quad (9)$$

$$\frac{\tilde{p}}{p_0} = \frac{\gamma \tilde{\rho}}{\rho_0}. \quad (10)$$

Заметим, что в формуле (8) член $\rho \mathbf{G}$ отсутствует, поскольку в невозмущенном состоянии $\rho_0 \mathbf{G} - \text{grad } p_0 = 0$.

В случае плоских гармонических волн любую изменяющуюся величину можно представить в виде

$$f = f_0 \exp \{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\}, \quad (11)$$

где x , y и z — декартовы координаты, $j = \sqrt{-1}$; или

$$f = f_0 \exp \{j(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})\}, \quad (12)$$

где k_x , k_y , k_z — постоянные. Легко убедиться в том, что операции дифференцирования можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{grad} &= -j\mathbf{k}, \\ \text{div} &= -j\mathbf{k} \cdot, \\ \text{rot} &= -j\mathbf{k} \times. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставляя решение для плоской волны в линеаризованные основные уравнения, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$-jk \times \mathbf{b} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{i}, \quad (15)$$

$$-jk \times \mathbf{E} = -\frac{j\omega \mathbf{b}}{c}, \quad (16)$$

$$\mathbf{k}\mathbf{b} = 0, \quad (17)$$

$$\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{i}}{\sigma}, \quad (18)$$

$$j\omega\rho_0\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\right) \times \mathbf{B}_0 + j\mathbf{k}\tilde{\mathbf{p}}, \quad (19)$$

$$-j\omega\tilde{\mathbf{p}} = \rho_0(-j\mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (20)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\rho_0} = \frac{\gamma\tilde{\rho}}{\rho_0}. \quad (21)$$

Выражения (11) и (12) соответствуют плоской волне с волновым числом k . Волновой вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен поверхностям постоянной фазы.

Поверхности постоянной фазы перемещаются с *фазовой скоростью*

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}}, \quad (22)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{V}_\phi = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}. \quad (22a)$$

Волну произвольной формы можно получить путем суперпозиции элементарных плоских волн вида (12). Различные парциальные волны, из которых состоит «волновой пакет», могут двигаться с различными фазовыми скоростями, а сам волновой пакет движется с *групповой скоростью*, которая определяется соотношением

$$\mathbf{V}_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (23)$$

где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы в направлениях осей x , y и z (см. [27]). Групповая скорость определяет скорость распространения данного возмущения.

Для вычисления $\mathbf{V}_\phi$ и $\mathbf{V}_{\text{гр}}$ необходимо знать связь между частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Эта связь определяется *дисперсионным соотношением*, которое мы получим из системы уравнений (15) — (21).

3.8.2. Дисперсионное соотношение и моды распространения

Чтобы вывести дисперсионное соотношение, исключим из уравнений (15)–(21) все переменные, кроме $\mathbf{v}$. Прежде всего исключим $\mathbf{i}$ и ρ из уравнения (19) при помощи соотношений (15), (20) и (21):

$$j\omega\rho_0\mathbf{v} = -\frac{j}{4\pi\mu}(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 + \frac{j\rho_0\gamma}{\omega}(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{k}. \quad (24)$$

Затем для $\mathbf{b}$ получаем выражение

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma j\omega}\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{b}), \quad (25)$$

которое следует из формул (15), (16) и (18). Поскольку

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) = \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{b}) - k^2\mathbf{b}$$

и в соответствии с (17) $\mathbf{k}\mathbf{b} = 0$, соотношение (25) приводится к виду

$$\mathbf{b}\left(1 - \frac{jc^2k^2}{4\pi\mu\sigma\omega}\right) = -\frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0). \quad (26)$$

Наконец, комбинируя (24) и (26), получим довольно громоздкое выражение:

$$\begin{aligned} j\omega\rho_0\mathbf{v} + \frac{\gamma\rho_0}{j\omega}(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{k} &= \\ &= \frac{1}{4\pi\mu j\omega}\left(1 - j\frac{c^2k^2}{4\pi\mu\sigma\omega}\right)^{-1}\mathbf{B}_0 \times [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)]]. \end{aligned}$$

Дважды используя векторное тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}),$$

мы можем переписать его в виде [28]

$$\begin{aligned} \left\{\frac{(\mathbf{B}_0\mathbf{k})^2}{4\pi\mu} - F\omega^2\rho_0\right\}\mathbf{v} + \left\{\left(\frac{\mathbf{B}_0^2}{4\pi\mu} + \gamma\rho_0F\right)\mathbf{k} - \frac{(\mathbf{B}_0\mathbf{k})}{4\pi\mu}\mathbf{B}_0\right\}(\mathbf{k}\mathbf{v}) - \\ - \frac{(\mathbf{B}_0\mathbf{k})}{4\pi\mu}(\mathbf{B}_0\mathbf{v})\mathbf{k} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где множитель

$$F = 1 - j\frac{c^2k^2}{4\pi\mu\sigma\omega} \quad (28)$$

стремится к 1, если $\sigma = \infty$. Далее мы ограничимся случаем *бесконечной проводимости*, так что в выражении (27) $F = 1$.

Для различных мод колебаний из уравнения (27) мы получим различные дисперсионные соотношения. Удобно рассмотреть отдельно колебательную моду, соответствующую случаю,

когда скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна векторам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ (рис. 3.9), и случаи, когда $\mathbf{v}$ компланарна с векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ (рис. 3.10).

Случай 1. $\mathbf{v}$ перпендикулярна $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ (рис. 3.9). (Поперечные волны с движением среды перпендикулярно $\mathbf{B}_0$.)

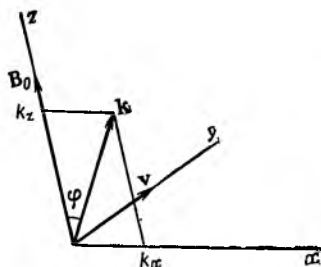


Рис. 3.9. Направления векторов $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ в случае поперечной волны.

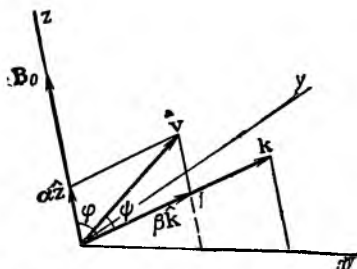


Рис. 3.10. Направления векторов $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ и углы φ и ψ , когда скорость компланарна с векторами $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$.

Поскольку в этом случае $(\mathbf{k}\mathbf{v})=0$ и $\mathbf{B}_0\mathbf{v}=0$, то дисперсионное соотношение (27) при условии $F=1$ принимает простой вид

$$\omega = \frac{B_0 k}{(4\pi\mu\rho_0)^{1/2}}. \quad (29)$$

Поскольку $(\mathbf{B}_0\mathbf{k}) = B_0 k \cos \varphi$ (см. рис. 3.9), фазовая скорость в соответствии с формулой (22) равна

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = V \cos \varphi, \quad (30)$$

где

$$V = \frac{B_0}{(4\pi\mu\rho_0)^{1/2}} \quad (31)$$

— гидромагнитная скорость.

Вычисляя групповую скорость по формуле (23), получим соотношение

$$\mathbf{V}_{\text{гр}} = V \hat{\mathbf{z}}, \quad (32)$$

которое означает, что возмущение распространяется параллельно магнитному полю $\mathbf{B}_0$ со скоростью, равной обычной гидромагнитной скорости. Таким образом, мы получили обычную гидромагнитную волну типа, рассмотренного в разд. 3.4.1. Подобного результата следовало ожидать, потому что скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна $\mathbf{k}$, так что в соответствии с формулой (20) флуктуация плотности обращается в нуль (в линейном приближении),

и сжимаемость жидкости не играет теперь никакой роли. (Отметим, что изменение давления, полученное в разд. 3.4.1, является величиной второго порядка малости по отношению к амплитуде A .)

Случай 2. $\mathbf{v}$ компланарна $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$ (рис. 3.10).

В этом случае волна обычно не является ни чисто продольной, ни чисто поперечной. Разложим вектор скорости на компоненты, параллельные $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{k}$ [28]:

$$\mathbf{v} = \alpha \hat{\mathbf{z}} + \beta \hat{\mathbf{k}}, \quad (33)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в положительном направлении оси z , а $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор, параллельный вектору $\mathbf{k}$. Поскольку

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{k} = B_0 k \cos \varphi, \quad (34)$$

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{v} = \alpha B_0 + \beta B_0 \cos \varphi, \quad (35)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{v} = \alpha k \cos \varphi + \beta k, \quad (36)$$

уравнение (27) при $F=1$ принимает вид

$$\left(\frac{B_0^2}{4\pi\mu} k^2 \cos^2 \varphi - \omega^2 \rho_0 \right) (\alpha \hat{\mathbf{z}} + \beta \hat{\mathbf{k}}) + \left\{ \left(\frac{B_0^2}{4\pi\mu} + \gamma p_0 \right) k^2 \hat{\mathbf{k}} - \right. \\ \left. - \frac{B_0^2}{4\pi\mu} k^2 \cos \varphi \hat{\mathbf{z}} \right\} (\alpha \cos \varphi + \beta) - \frac{B_0^2}{4\pi\mu} k^2 \cos \varphi (\alpha + \beta \cos \varphi) \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (37)$$

Вводя скорость звука

$$c_s = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (38)$$

(см., например, [29]) и магнитогидродинамическую скорость

$$V = \frac{B_0}{(4\pi\mu\rho_0)^{1/2}}, \quad (39)$$

после деления на ρ_0 мы можем переписать уравнение (37) в виде

$$\alpha \omega^2 + \beta V^2 k^2 \cos \varphi = 0, \quad (40)$$

$$\alpha c_s^2 k^2 \cos \varphi + \beta \{ (V^2 + c_s^2) k^2 - \omega^2 \} = 0. \quad (41)$$

Эта система уравнений определяет коэффициенты α и β и, следовательно, угол φ между скоростью движения вещества и волновым вектором. Поскольку система уравнений является линейной и однородной, то она имеет ненулевое решение, если ее

детерминант равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & V^2 k^2 \cos \varphi \\ c_s^2 k^2 \cos \varphi (V^2 + c_s^2) k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (42)$$

так что

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (V^2 + c_s^2) + c_s^2 V^2 k^4 \cos^2 \varphi = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) и есть искомое дисперсионное соотношение.

Вводя фазовую скорость (22), дисперсионное соотношение можно переписать в виде

$$V_\phi^4 - (V^2 + c_s^2) V_\phi^2 + c_s^2 V^2 \cos^2 \varphi = 0. \quad (44)$$

Поскольку дискриминант этого уравнения равен

$$D = (V^2 + c_s^2)^2 - 4c_s^2 V^2 \cos^2 \varphi = (V^2 - c_s^2)^2 + 4c_s^2 V^2 \sin^2 \varphi,$$

то всегда имеется два действительных и неотрицательных корня для V_ϕ^2 , соответствующих двум различным модам распространения волн.

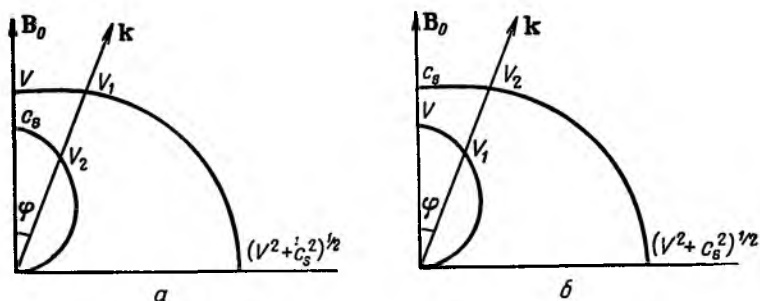


Рис. 3.11. Полярные диаграммы фазовых скоростей модифицированной гидромагнитной (V_1) и модифицированной звуковой (V_2) волн.

$a - V > c_s$; $b - V < c_s$.

Обозначим фазовые скорости, соответствующие этим двум модам, $V_1 = V_1(\varphi)$ и $V_2 = V_2(\varphi)$. На рис. 3.11 они представлены как функции φ в полярных координатах. Как показывают диаграммы, одна из мод характеризуется тем, что ее фазовая скорость равна гидромагнитной скорости V при $\varphi = 0$. Мы можем назвать этот тип колебаний *модифицированной гидромагнитной волной* и обозначим ее фазовую скорость $V_1 = V_1(\varphi)$. Другую моду, фазовая скорость которой равна скорости звука c_s , когда $\varphi = 0$, можно назвать *модифицированной звуковой волной*. Ее фазовую скорость обозначим $V_2 = V_2(\varphi)$.

Рассчитаем угол ψ между вектором скорости $\mathbf{v}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$. При заданном φ величина ψ определяется отношением α/β (см. рис. 3.10).

Из уравнения (40) следует, что

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{V^2}{V_\Phi^2} \cos \varphi, \quad (45)$$

и непосредственное геометрическое рассмотрение дает

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - V_\Phi^2/V^2}, \quad (46)$$

где V_Φ в свою очередь определяется из формулы (44).

Поскольку значение ψ отлично от 0 и $\pi/2$ (за исключением случая, когда φ также равно 0 или $\pi/2$), модифицированные звуковые волны и модифицированные гидродинамические волны в общем случае не являются ни чисто продольными ($\psi=0$), ни чисто поперечными ($\psi=\pi/2$).

Таблица 3.1

Фазовая скорость и угол ψ для частных случаев $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$ (см. рис. 3.10)

		$c_s < V$		$V < c_s$	
		$\varphi=0$	$\varphi=\pi/2$	$\varphi=0$	$\varphi=\pi/2$
Модифицированная звуковая волна	Фазовая скорость	c_s	0	c_s	$(V^2 + c_s^2)^{1/2}$
	Угол ψ	0	$\pi/2$	0	0
Модифицированная гидромагнитная волна	Фазовая скорость	V	$(V^2 + c_s^2)^{1/2}$	V	0
	Угол ψ	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$

В табл. 3.1 представлены значения, которые принимают фазовая скорость и угол ψ в частных случаях $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$.

Из табл. 3.1 находим, что когда $\varphi=0$, модифицированная гидромагнитная волна является поперечной ($\psi=\pi/2$) и распространяется параллельно вектору $\mathbf{B}$ со скоростью, равной V . Иными словами, она вырождается в обычную гидромагнитную волну. Аналогично при $\varphi=0$ модифицированная звуковая волна является продольной ($\psi=0$) и распространяется параллельно $\mathbf{B}$

со скоростью звука; это обычная звуковая волна. Табл. 3.1 показывает также, что существуют продольные волны ($\psi=0$), распространяющиеся со скоростью $(V^2 + c_s^2)^{1/2}$ перпендикулярно магнитному полю. Это *магнитозвуковые волны* (в узком смысле слова). При помощи формул (23) и (43) нетрудно показать, что не только фазовая, но и групповая скорость этих волн направлена перпендикулярно вектору $\mathbf{B}$ [и равна $(V^2 + c_s^2)^{1/2}$], так что эти волны способны переносить возмущение поперек магнитного поля.

3.9. Критерии применимости магнитной гидродинамики

Уравнение (25) разд. 3.4 определяет расстояние z_0 , которое проходит слабо затухающая гидромагнитная волна, прежде чем ее амплитуда уменьшится в e раз. Это расстояние значительно больше длины волны, если

$$\frac{z_0}{\lambda} = \frac{\mu^{1/2} \sigma B_0 \lambda}{\pi^{3/2} \rho^{1/2} c^2} \gg 1. \quad (1)$$

Поскольку для существования четко выраженных гидромагнитных волн требуется, чтобы затухание было мало, неравенство (1) является критерием применимости магнитной гидродинамики к волновому движению.

Критерий (1) справедлив также для волн в сжимаемой среде. Это видно из соотношений (27) и (28) разд. 3.8.2, если положить $k = 2\pi/\lambda$, $\omega/k = B_0 / \sqrt{4\pi\mu\sigma}$ и иметь в виду, что затухание слабее или сильнее в зависимости от величины мнимой части множителя F .

Таким образом, отбрасывая несущественные численные множители, мы можем записать критерий существования ясно выраженных гидромагнитных волн в виде неравенства

$$\frac{\mu^{1/2} \sigma B_0 \lambda}{\rho^{1/2} c^2} \gg 1. \quad (2)$$

Безразмерный параметр

$$L = \frac{\mu^{1/2} \sigma B_0 \lambda}{\rho^{1/2} c^2} \quad (3)$$

впервые был введен Лундквистом [15].

Перейдем теперь от рассмотрения частного случая волнового движения к общему случаю:

При помощи уравнения (1) разд. 3.5

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

которое получено путем исключения электрического поля из основных уравнений (1), (2), (5) разд. 3.3, можно выявить один важный аспект взаимосвязи между магнитным полем и движением вещества. Чтобы определить относительный вклад различных членов этого уравнения, используем оценки

$$|\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = \frac{v_c B_c}{l_c} \quad (5a)$$

и

$$|\Delta \mathbf{B}| = \frac{B_c}{l_c^2}, \quad (5б)$$

где v_c , B_c и l_c — характерные величины скорости, магнитного поля и линейных размеров изучаемого явления. Подобный метод оценки членов дифференциальных уравнений заменой дифференцирования по координатам умножением на величины, обратные характерным длинам, оказывается весьма полезным и часто используется на практике. Но это, очевидно, очень грубый метод, и в отдельных случаях им следует пользоваться с большой осторожностью.

Из уравнений (4), (5a) и (5б) следует, что при малых значениях *магнитного числа Рейнольдса*

$$R_m = \frac{4\pi\sigma l_c v_c}{c^2} \quad (6)$$

первый член уравнения (4) пренебрежимо мал по сравнению со вторым [46]. В таком случае формула (4) приводится к уравнению диффузии

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{D} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7)$$

где коэффициент диффузии дается выражением

$$D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \quad (8)$$

Это означает, что движение вещества не оказывает существенного влияния на магнитное поле.

Если R_m велико по сравнению с единицей, то можно пренебречь вторым членом и получим уравнение

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

из которого следует, что магнитный поток через любой контур, связанный с движущимся веществом, остается постоянным. В этом можно легко убедиться, если записать скорость изменения потока через движущийся контур (рис. 3.12) в следующем

виде:

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} = \iint \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, условие

$$R_m = \frac{4\pi\mu\sigma l_c v_c}{c^2} \gg 1 \quad (11)$$

соответствует случаю, когда магнитные силовые линии переносятся движущейся жидкостью и могут рассматриваться как «вмороженные». Однако его нельзя считать критерием применимости магнитной гидродинамики. Например, это условие может выполняться для жидкости, обладающей высокой проводимостью, но магнитное поле в которой настолько слабо, что оно не влияет на движение. Такая жидкость ведет себя в соответствии с законами обычной гидродинамики. Магнитная гидродинамика применима в том случае, когда в жидкости присутствует достаточно сильное магнитное поле. Обозначим его через $\mathbf{B}_0$;

B_c — характерное значение его напряженности. В среде, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, индуцируется магнитное поле $\mathbf{b}$; таким образом, полное поле будет $\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$. Условие малости второго члена в уравнении (4) записывается тогда в виде

$$\frac{v_c B_c}{l_c} \gg \frac{c^2 b_c}{4\pi\mu\sigma l_c^2}. \quad (12a)$$

Тогда первый и последний члены равны; это означает, что

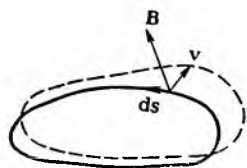
$$\frac{B_c v_c}{l_c} = \frac{b_c}{t_c}. \quad (12б)$$

Для гидромагнитных явлений в уравнении движения (6) разд. 3.3 существенную роль играет член, содержащий магнитное поле. Это означает, что он сравним с инерционным членом. Таким образом (принимая во внимание, что ток $\mathbf{i}$ связан с наведенным полем $\mathbf{b}$), получаем

$$\frac{\rho v_c}{t_c} = \frac{b_c B_c}{4\pi\mu l_c}. \quad (12в)$$

Из уравнений (12б) и (12в) следует, что

$$b_c = v_c \sqrt{4\pi\mu\rho}. \quad (12г)$$



Р и с. 3.12. Изменения магнитного потока через движущийся контур.

Комбинируя уравнения (12а) и (12г), мы снова приходим к критерию Лундквиста

$$L = \frac{\mu^{1/2} \sigma B_c l_c}{\rho^{1/2} c^2} \gg 1, \quad (13)$$

который теперь вместо λ содержит l_c .

В табл. 3.2, составленной Ленертом [30], представлены типичные значения L , характерные для лабораторных экспериментов и плазмы космического пространства. Условие (13) обычно очень хорошо выполняется для космической плазмы (см. [31]).

Вязкое затухание. Поскольку все результаты этой главы получены без учета вязкости жидкости, мы установим критерий, указывающий, в каких случаях вязкостью можно пренебречь. Для вязкой несжимаемой жидкости уравнение движения 3.3(6) имеет вид

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \mathbf{G} + \left(\frac{i}{c} \right) \times \mathbf{B} - \text{grad } p + \rho \nu \text{div grad } \mathbf{v}, \quad (14)$$

где $\rho \nu$ — динамическая вязкость.

Как и прежде, дифференцирование по пространственным координатам мы заменим умножением на $1/l_c$, а дифференцирование по времени — умножением на v_c/l_c , где v_c и l_c — характерные скорость и длина. В таком случае оказывается, что порядок величины отношения инерционного и вязкого членов уравнения (14) определяется *числом Рейнольдса*

$$R = \frac{v_c l_c}{\nu}. \quad (15)$$

Вязким затуханием можно пренебречь, если

$$R = \frac{v_c l_c}{\nu} \gg 1. \quad (16)$$

Это условие полностью аналогично критерию (11), и его можно рассматривать как условие «вмороженности» трубки силовых линий. Рассуждения, подобные использованным при выводе условия (13), приводят к неравенству [30]

$$L_1 = \frac{B_c l_c}{\nu \mu^{1/2} \rho^{1/2}} \gg 1, \quad (17)$$

которое аналогично критерию Лундквиста.

Как показывает табл. 3.2, для космической плазмы условие (17) в большинстве случаев хорошо выполняется.

Теплопроводность. Напомним, что условие, при котором изотермические поверхности перемещаются вместе с жидкостью

Таблица 3.2

Характерные величины для магнитогидродинамических экспериментов и космической плазмы [30]

	$l_c,$ см	$B_c,$ гс	$\rho_c,$ г/см ³	$\sigma_c,$ CGSE	$V,$ см/сек	L	L_1
Лабораторные эксперименты:							
Ртуть	10	10^4	13,50	$9,20 \cdot 10^{15}$	$7,66 \cdot 10^2$	1	$6,8 \cdot 10^6$
Натрий	10	10^4	0,93	$9,37 \cdot 10^{16}$	$2,92 \cdot 10^3$	38	$4,6 \cdot 10^6$
Ионизованный газ (водород)	10	10^3	10^{-10}	$4,8 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$
Космическая плазма:							
Недра Земли	$2 \cdot 10^8$	10 (?)	10	$7 \cdot 10^{15}$	1 (?)	$2 \cdot 10^4$ (?)	$2 \cdot 10^{10}$ (?)
Солнечные пятна	10^9	$2 \cdot 10^3$	10^{-4}	$4 \cdot 10^{14}$	$6 \cdot 10^4$	10^9	$2 \cdot 10^{11}$
Солнечная грануляция	10^8	10^2	10^{-7}	$7 \cdot 10^{13}$	$9 \cdot 10^4$	10^7	10^8
Магнитопеременные звезды	10^{12}	10^4	1 (?)	$7 \cdot 10^{15}$	$3 \cdot 10^3$ (?)	$3 \cdot 10^{11}$ (?)	10^{18} (?)
Межзвездное пространство (обла- сти повышенной конденсации)	10^{22}	10^{-5} (?)	10^{-24} (?)	$7 \cdot 10^{12}$ (?)	$3 \cdot 10^6$ (?)	$3 \cdot 10^{21}$ (?)	$3 \cdot 10^7$ (?)
Межпланетное пространство	10^{13}	10^{-4}	10^{-23}	$7 \cdot 10^{14}$ (?)	$9 \cdot 10^6$	10^{15}	1
Солнечная корона	10^{11}	1 (?)	10^{-18} (?)	$7 \cdot 10^{15}$ (?)	$3 \cdot 10^8$ (?)	$3 \cdot 10^{15}$ (?)	$3 \cdot 10^2$ (?)

 l_c — линейные размеры, B_c — напряженность магнитного поля, ρ_c — плотность, σ_c — проводимость, V — магнитогидродинамическая скорость, $L = B_c l_c (\sigma_c)^{1/2} \mu^{-1/2} \rho^{-1/2},$ $L_1 = B_c l_c \nu^{-1} \mu^{-1/2} \rho^{-1/2}.$

(в том случае, когда работа сжатия пренебрежимо мала), имеет вид

$$\frac{v_c I_c}{\kappa} \gg 1. \quad (18)$$

Здесь κ — температуропроводность (которая связана с теплопроводностью k соотношением $\kappa = k/\rho c_v$, где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме). Для гидромагнитных явлений это условие означает [30, 32]

$$L_2 = \frac{B_c I_c}{\kappa \mu^{1/2} \rho_c^{1/2}} \gg 1. \quad (19)$$

Явления в плазме. Следует отметить, что основные уравнения магнитной гидродинамики (разд. 3.3) выведены в предполо-

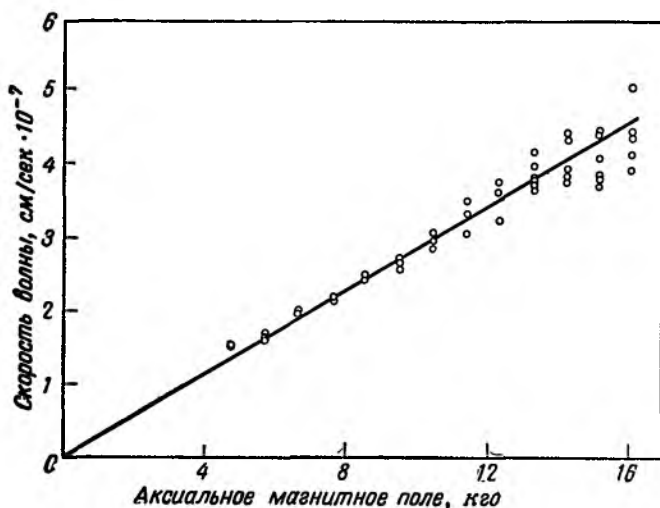


Рис. 3.13. Скорость гидромагнитной волны V как функция напряженности магнитного поля B_0 . Кружочки соответствуют экспериментальным измерениям; прямая линия свидетельствует о пропорциональной зависимости V от B_0 [41].

жении, что проводящую среду можно рассматривать как жидкость. Это важное ограничение, поскольку, если среда представляет собой плазму, иногда необходимо использовать микроскопическое описание, в котором учитывается движение частиц, входящих в состав плазмы. К таким явлениям в плазме, как амбиполярная диффузия, убегающие электроны, микроволны, гидромагнитное описание неприменимо. Весьма интересен тот факт, что для плазмы достаточно низкой плотности картина

«вмороженных» силовых линий не всегда отражает действительность (см. разд. 5.4).

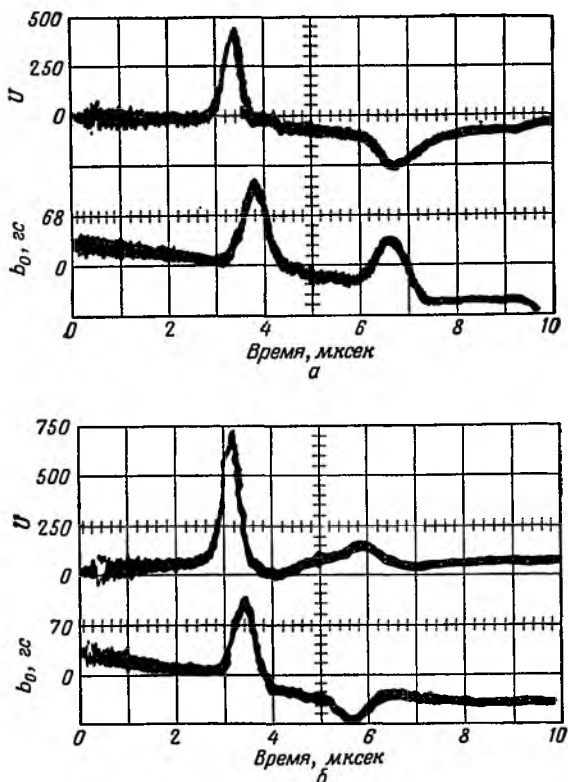


Рис. 3.14. Осциллограммы, иллюстрирующие отражение гидромагнитных волн.

Верхний луч показывает индуцированное электрическое напряжение волны U (в вольтах), нижний — индуцированное (азимутальное) магнитное поле b_0 . Первый импульс соответствует падающей волне, второй — отраженной. Задержка между импульсами равна времени прохождения волной расстояния до конца трубы и обратно. a — отражение от твердой проводящей поверхности; b — отражение от поверхности раздела между плазмой и нейтральным газом [41].

3.10. Экспериментальные наблюдения гидромагнитных волн

В лабораторных экспериментах с электрически проводящими жидкостями трудно добиться выполнения условия (13) разд. 3.9 (см. табл. 3.2). Тем не менее были предприняты попытки полу-

чить гидромагнитные волны в ртути [33, 34] и жидком натрии [35].

В плазме можно получить большое значение числа Лундквиста $L = B_c l_c (\sigma/c^2) \mu^{1/2} \rho^{-1/2}$, поскольку плотность ρ мала. Гидромагнитные волны в плазме изучались целым рядом авторов [36—42]. Некоторые результаты, полученные в лаборатории Беркли, представлены на рис. 3.13 и 3.14. Эти результаты относятся к волне крутильного типа в водородной плазме при температуре $10\,000^\circ\text{K}$ с плотностью ионов $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. На рис. 3.13 измеренная скорость волны показана как функция напряженности постоянного аксиального магнитного поля. Рис. 3.14 иллюстрирует отражение гидромагнитного импульса от проводящей пластины (а) и от границы раздела плазма — нейтральный газ (б). В первом случае фаза электрического поля волны меняется на 180° , а фаза магнитного поля остается неизменной; во втором случае, наоборот, фаза магнитного поля меняется на 180° , а фаза электрического поля не меняется, что находится в согласии с теорией (см. разд. 3.4.5).

ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

3.11. Установившееся движение проводящих жидкостей в магнитном поле

Движение проводящей жидкости в магнитном поле изучалось Ампером, который проводил опыты со ртутью. Однако гидромагнитные эффекты вследствие низкой проводимости были малы. Поэтому магнитная гидродинамика, которая, возможно, была бы открыта как следствие этих экспериментов, оставалась неизученной еще в течение столетия.

Установившееся течение ртути в трубках поперек магнитного поля было исследовано как теоретически, так и экспериментально Гартманном и Лазарусом [43]. Дальнейшие исследования аналогичных проблем проводились Шерклифом [44] и Мургатройдом [45].

Теоретические и экспериментальные исследования поведения проводящих жидкостей в магнитных полях были выполнены Ленертом [30, 46, 48]. В одном из его экспериментов убедительно показано, что присутствие магнитного поля вносит анизотропию в проводящую жидкость (см. разд. 3.11.1).

Присутствие магнитного поля оказывает сильное влияние на возникновение турбулентности и тепловой конвекции. Хотя некоторые из аспектов этих явлений оказываются важными для космической физики, они выходят за рамки настоящей монографии,

и читатели, интересующиеся этими вопросами, могут обратиться к книге Чандрасекара [49].

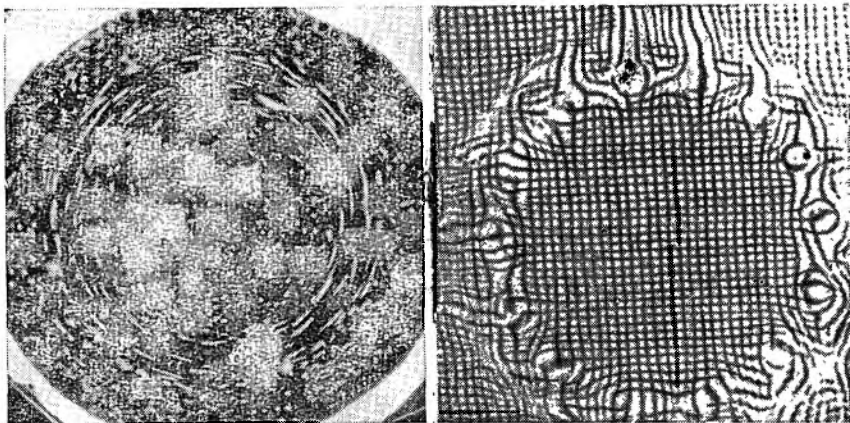
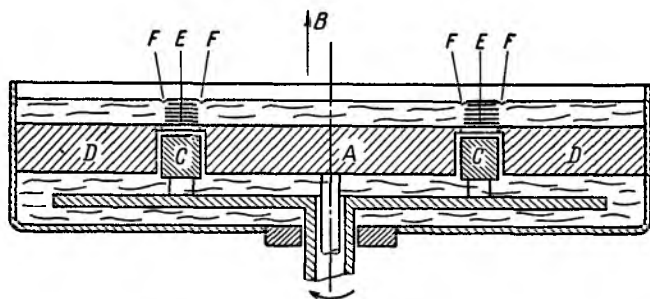


Рис. 3.15. Вверху — сосуд с вращающимся медным диском для изучения движения ртути в присутствии внешнего магнитного поля. Внизу слева — поверхность ртути при напряженности поля $B = 4300$ гс (вид сверху). Видны следы песчинок, обнаруживающие движение ртути. Справа — фотография проволоочной сетки, показывающая деформацию поверхности ртути. Видны стационарные вихри, образующиеся по обе стороны от кольца движущейся ртути [50].

Огромный интерес для астрофизики представляет задача об установившемся вращении массы проводящей жидкости в магнитных полях. В разд. 3.11.2 мы выведем теорему изоротации, которую обычно называют по имени ученого, открывшего ее, теоремой Ферраро.

3.11.1. Анизотропия, вносимая магнитным полем. Эксперименты

Поведение проводящей жидкости сильно изменится, если ее поместить в магнитное поле. Это легко продемонстрировать экспериментально [46]. Например, ртуть в отсутствие магнитных полей по консистенции напоминает воду, в том смысле, что ее встряхивание приводит к мелкомасштабному беспорядочному движению и появлению на поверхности мелкой подвижной ряби. В сильном магнитном поле ртуть подобна сиропу. Теперь встряхивание вызывает только большие вихри, причем оси таких вихрей параллельны магнитному полю, а поверхность стремится остаться гладкой. Тенденция вихрей выстраиваться параллельно магнитному полю является проявлением анизотропии, создаваемой полем. Любое движение стремится стать однородным вдоль магнитного поля, или, иными словами, стать двумерным. Это хорошо иллюстрируется другим экспериментом, поставленным Ленертом [50]. Схема его прибора приведена на рис. 3.15, а. На дне плоского медного сосуда, наполненного ртутью и помещенного в вертикальное магнитное поле, вращается медный диск. Было обнаружено, что при включении сильного магнитного поля ртуть увлекается диском (см. рис. 3.15, б и 3.15, в). Это явление совершенно аналогично одному из явлений обычной гидродинамики. В соответствии с теорией Тейлора — Праудмана, движение во вращающейся жидкости стремится стать однородным вдоль линий, параллельных оси вращения (см., например, [49]). Это одна из нескольких аналогий между магнитным полем и полем вихревого движения. (Вращение твердого тела соответствует однородному полю вихревого движения.)

3.11.2. Закон изоротации Ферраро

В описанных опытах проводимость была весьма низкой. В астрофизических явлениях проводимость часто можно считать бесконечной. В таком случае тенденцию движения к постоянству вдоль силовой линии можно выразить точно в виде некоторой общей теоремы.

В соответствии с общими уравнениями разд. 3.3 имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{i}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{i}}{\sigma} = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Поскольку в стационарном случае $\partial/\partial t \equiv 0$, то из уравнений (1) — (4) следует

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{c^2}{4\pi\mu} \text{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{B}\right). \quad (5)$$

Если проводимость бесконечна или, точнее, если

$$\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} l_c v_c \gg 1, \quad (6)$$

где l_c и v_c — характерные длина и скорость (см. разд. 3.9), то правая часть уравнения (5) обращается в нуль, так что

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (7)$$

Выберем цилиндрическую систему координат (координаты r, φ, z и единичные векторы $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\mathbf{z}}$; рис. 3.16) так, чтобы ось совпадала с осью вращения жидкости. Тот факт, что движение является чисто вращательным — но не обязательно вращением твердого тела, — можно выразить соотношением

$$\mathbf{v} = \omega r \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (8)$$

где ω — функция координат r и z . (Независимость ω от φ является следствием условия стационарности.) Магнитное поле $\mathbf{B}$ может иметь компоненты по всем трем координатам

$$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + B_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (9)$$

Рис. 3.16. Система координат, используемая при доказательстве теоремы Ферраро.

однако мы потребуем вращательной симметрии, что означает

$$\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = 0. \quad (10)$$

Из рис. 3.16 следует, что

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r (B_z \hat{\mathbf{r}} - B_r \hat{\mathbf{z}}). \quad (11)$$

Применяя операцию rot к уравнению (11) и используя условие (10), получим

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\omega r B_z) + \frac{\partial}{\partial r} (\omega r B_r) \right\}.$$

Поскольку $\partial\omega/\partial\varphi=0$, можно переписать это соотношение в виде

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \hat{\varphi} \left\{ r\omega \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] + \right. \\ \left. + r \left(B_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + B_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + B_z \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right\},$$

или в более компактной форме

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \hat{\varphi} \{ r\omega \operatorname{div} \mathbf{B} + r(\mathbf{B} \operatorname{grad}) \omega \}. \quad (12)$$

Тогда из уравнений (3) и (7) следует

$$(\mathbf{B} \operatorname{grad}) \omega = 0. \quad (13)$$

Это означает, что производная ω в направлении магнитного поля равна нулю. Иными словами, *в случае установившегося движения угловая скорость постоянна вдоль силовых линий магнитного поля.*

Закон, выражаемый формулой (13), называется *законом изоротации*, или *теоремой Ферраро*.

Известно, что обширный класс звезд имеет сильные магнитные поля; более слабые магнитные поля существуют у нашего Солнца (а возможно, также у большинства остальных звезд). Таким образом, важность доказанной теоремы для физики звезд является очевидной. Теорема имеет также большое значение при изучении движений межзвездной среды, находящейся в магнитном поле звезд. Поскольку предположение о высокой проводимости является весьма существенным, теорема непосредственно применима только в том случае, если плотность настолько велика, что имеет смысл говорить о проводимости (плазма «средней» и «высокой» плотности, см. разд. 5.1). Ее можно применять также и к плазме «низкой» плотности, однако в подобных случаях ее справедливость следует тщательно проверять. Возможно, что Солнце при своем вращении увлекает определенную внутреннюю область межпланетного пространства [51]. Это может заметным образом влиять на вариации интенсивности космического излучения (см., например, [52, 53]). Эффект увлечения плазмы вращением Солнца мог сыграть решающую роль в процессе формирования нашей планетной системы [54—56].

Установление изоротации между магнитной звездой и окружающей ее плазмой требует передачи углового момента центральным телом плазме. Передача углового момента может осуществляться посредством магнитного поля, и таким образом вращающаяся звезда может потерять значительную часть своего углового момента. Это обстоятельство, возможно, объясняет

медленное вращение некоторых звезд, в том числе и нашего Солнца. Согласно Тер Хаару [57], достаточное торможение способны создать только электромагнитные процессы. Люст и Шлютер [51] проанализировали перенос углового момента магнитными полями. По их оценкам, для почти полного торможения вращения звезды потребуется несколько миллионов лет.

Эксперименты по масштабному моделированию совместного вращения очень трудны, поскольку линейные размеры и проводимость, достижимые в лабораторных условиях, малы. Но несмотря на то, что точное моделирование космической плазмы невозможно (см. разд. 4.2.2.), в лабораторных условиях можно поставить качественные эксперименты по наблюдению явления совместного вращения в проводящей жидкости [58].

3.12. Магнитная гидростатика

В условиях установившегося равновесия бесконечно проводящей среды $\mathbf{v} \equiv 0$, $\partial/\partial t = 0$, $1/\sigma = 0$, и поэтому основные уравнения разд. 3.3 принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{i}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \mathbf{G} - \operatorname{grad} p + \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \right) \times \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

где $\rho \mathbf{G}$ — силы немагнитного происхождения.

Исключая $\mathbf{i}$ из уравнений (1) и (3), мы получаем *магнито-гидростатическое уравнение*

$$\rho \mathbf{G} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Если мы распишем член, соответствующий магнитным силам, так же, как в разд. 3.3.1, то получим

$$\rho \mathbf{G} - \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} \frac{B^2}{8\pi\mu} + \frac{(\mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{B}}{4\pi\mu} = 0. \quad (5)$$

Следует различать два типа магнито-гидростатического равновесия:

1) Магнитные силы уравновешены силами немагнитного происхождения (тяготение, газокINETическое давление и т. д.).

2) Магнитная сила и результирующая немагнитных сил равны нулю. В этом случае магнитное поле является «бессильным» [59, 60].

Первый случай может иметь место в некоторых космических объектах. В книге Каулинга «Магнитная гидродинамика» [61]

рассматриваются проблемы равновесия в солнечных пятнах, протуберанцах и спиральных ветвях галактик.

Второй тип равновесия также играет важную роль в космической физике. Бессилловое равновесие может возникнуть в том случае, когда сила тяготения и газокINETическое давление соответствуют плотностям энергии, значительно меньшим, чем плотность энергии магнитного поля. Кроме того, в достаточно разреженной плазме, где частота столкновений значительно меньше ларморовской частоты, электрический ток стремится течь параллельно магнитному полю, так что магнитные силы исчезают (см. разд. 5.5.3).

Мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями, касающимися второго случая — бессилловых магнитных полей. Такие поля рассматриваются в разд. 5.5.3. Читателям, интересующимся другими типами магнитогидростатического равновесия, следует обратиться к обзорам Каулинга [61] и Данжи [62].

3.12.1. Бессилловые магнитные поля

Равенство нулю магнитной силы означает, что

$$(\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0. \quad (6)$$

(Всюду предполагается, что $\mu = \text{const.}$)

Условие (6) выполняется, если

$$\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}, \quad (7)$$

где α — произвольная скалярная функция, которая должна удовлетворять единственному условию

$$(\text{grad } \alpha) \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

Это условие получается, если применить к уравнению (7) операцию div и принять во внимание, что $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

В качестве примера можно рассмотреть случай цилиндрической симметрии при условии $\alpha = \text{const.}$, который был проанализирован Лундквистом [59]. Компоненты уравнения (7) имеют вид

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \alpha B_\varphi, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = \alpha B_z. \quad (10)$$

Исключая B_φ , получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \alpha^2 B_z = 0, \quad (11)$$

решением которого является функция Бесселя нулевого порядка

$$B_z = AJ_0(ar), \quad (12)$$

где A — произвольная постоянная. Теперь из уравнения (9) можно найти

$$B_\varphi = AJ_1(ar). \quad (13)$$

Структура магнитного поля показана на рис. 3.17.

Впоследствии в разд. 5.5.3 в связи с приложениями к космической плазме мы рассмотрим частный случай бессилового поля, которое не соответствует $\alpha = \text{const}$, но тем не менее имеет определенное сходство с полем, представленным уравнениями (12) и (13).

Общее вращательно-симметричное решение уравнения (7) с постоянной α было получено Люстом и Шлютером [60]. Как показал Чандрасекар [63, 64], его можно выразить при помощи функций Генгенбауэра. Показано также, что для любого данного тороидального магнитного поля можно найти такое полоидальное поле*, что их суперпозиция будет бессильной; и наоборот, если дано полоидальное поле, то всегда найдется тороидальное поле, которое приведет к бессильной суперпозиции. Общее решение без ограничений постоянной α было получено Шлютером [65] для случая цилиндрической симметрии (при условии $\partial/\partial z \equiv 0$).

Может возникнуть вопрос, остается ли магнитное поле бессильным, если его напряженность уменьшается вследствие конечной электрической проводимости. Этот вопрос был рассмотрен Лундквистом [59], который показал, что магнитное поле остается бессильным при обязательном условии, что α [определяемая уравнением (7)] является постоянной.

Спадание магнитогидростатического поля подчиняется уравнению диффузии

$$\text{rot rot } \mathbf{B} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (14)$$

* В цилиндрической системе координат магнитное поле, которое всюду перпендикулярно плоскостям, проходящим через ось (меридиональным плоскостям), называется тороидальным, а магнитное поле, силовые линии которого лежат всюду в меридиональных плоскостях, называется полоидальным.

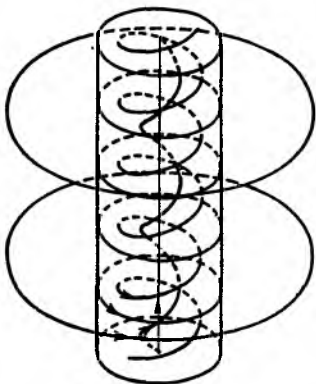


Рис. 3.17. Бессильное магнитное поле бесконечного цилиндра (по Лундквисту [59]).

которое вытекает из формул (1), (2) и (5) разд. 3.3 при условии $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$. Используя условие (7) и векторное тождество $\text{rot}(\alpha \mathbf{B}) = \alpha \text{rot} \mathbf{B} + (\text{grad} \alpha) \times \mathbf{B}$, находим для бессилового поля

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \{ \alpha^2 \mathbf{B} + (\text{grad} \alpha) \times \mathbf{B} \}. \quad (15)$$

Из уравнения (15) непосредственно следует, что для того чтобы магнитное поле спадало без искажения картины силовых линий, α должно быть постоянно. Действительно, условие отсутствия искажений означает, что производная $\partial \mathbf{B} / \partial t$ не должна иметь составляющей, перпендикулярной $\mathbf{B}$. Тогда из уравнения (15) следует, что векторное произведение $(\text{grad} \alpha) \times \mathbf{B}$, которое перпендикулярно $\mathbf{B}$, должно равняться нулю. Это возможно только, если $\text{grad} \alpha$ не имеет составляющей, перпендикулярной $\mathbf{B}$. А поскольку вследствие условия (8) $\text{grad} \alpha$ не может иметь составляющей, параллельной $\mathbf{B}$, то это означает, что

$$\alpha = \text{const}. \quad (16)$$

Теперь уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \frac{c^2 \alpha^2}{4\pi\sigma} \mathbf{B},$$

т. е. спадание магнитного поля подчиняется экспоненциальному закону с константой времени, пропорциональной σ / α^2 .

Согласно Чандрасекару и Вольтье [66], бессиловые поля с постоянной α принадлежат к числу конфигураций поля с минимальными омическими потерями при заданной магнитной энергии. Для замкнутых магнитожидкостных систем с бесконечной проводимостью (магнитный поток сохраняется) Вольтье [67, 68] установил, что бессиловые поля с постоянной α являются конфигурациями с минимальной магнитной энергией.

3.13. Гидромагнитная устойчивость

Магнитогидростатическое равновесие называется устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, как система реагирует на малое возмущение. Если любое малое возмущение вызывает восстанавливающие силы, которые возвращают систему в состояние равновесия, система является устойчивой. Если же существует *хотя бы одно* такое возмущение, что под действием вызванных им сил система, предоставленная самой себе, все более и более отклоняется от равновесной конфигурации, то эта система неустойчива.

Простейший пример неустойчивой конфигурации — система, состоящая из двух жидкостей различной плотности, причем

плотная жидкость налита поверх жидкости с меньшей плотностью. Граница раздела жидкостей горизонтальна, сила тяжести (или поле инерционных сил) направлена вниз. В данной системе возникает возмущение с нарастающей амплитудой в виде ряби. Неустойчивость подобного типа называется *неустойчивостью Тейлора*. Ее физический смысл состоит в том, что перемещение тяжелой жидкости вниз приводит к выделению большего количества энергии (за счет потенциальной энергии), нежели необходимо для перемещения соответствующего количества легкой жидкости вверх. Если на границе раздела действуют силы поверхностного натяжения, то они вызывают стабилизирующий эффект, особенно для мелкой ряби, поскольку развивающаяся неустойчивость увеличивает поверхностную энергию. Вследствие этого наблюдается стабилизация ряби, имеющей длину волны, меньшую определенного критического значения λ_c .

Посмотрим теперь, как влияет на развитие неустойчивости однородное магнитное поле $\mathbf{B}$. Если поле параллельно границе раздела, то оно не оказывает никакого эффекта на однородную рябь, вытянутую вдоль поля $\mathbf{B}$, поскольку в таком случае магнитное поле не претерпевает возмущения (мы предполагаем, что жидкости несжимаемы). Однако однородная рябь, перпендикулярная магнитному полю, изгибает силовые линии, и, если жидкость электрически проводящая, натяжение вдоль магнитных силовых линий (см. разд. 3.3.1) препятствует деформации. Анализ показывает, что на деформации этого типа магнитное поле оказывает стабилизирующее действие, эквивалентное эффекту поверхностного натяжения:

$$T = \frac{\lambda}{\pi} \frac{B^2}{4\pi\mu}$$

(см., например, [49]), где λ — длина волны ряби. (Отметим, что магнитное поле, перпендикулярное границе раздела, оказывает стабилизирующее действие лишь на скорость нарастания коротковолновых возмущений.)

Магнитное поле может удерживать проводящую жидкость в поле тяготения. В этом случае удерживающая сила обусловлена токами на границе раздела, взаимодействующими с магнитным полем. Граница раздела является неустойчивой [69]. Такая неустойчивость обычно называется *неустойчивостью Крускала — Шварцшильда* и аналогична неустойчивости Тейлора.

Другим простым примером является конфигурация типа «пинч», т. е. плазменный шнур с аксиальным током и азимутальным магнитным полем, обусловленным этим током. Магнитная сила, которая направлена по радиусу внутрь, уравновешивается градиентом давления. Для простоты предположим, что

жидкость несжимаема и обладает бесконечной проводимостью. В этом случае если произойдет локальное сжатие, то плотность тока и азимутальное магнитное поле в месте сжатия возрастут. Следовательно, возрастет и сжимающая магнитная сила $(i/c) \times B$. Таким образом, образовавшаяся «перетяжка» будет развиваться дальше (а плазма будет выталкиваться по оси и образует расширения сверху и снизу перетяжки). Последовательность таких локальных сжатий деформирует шнур, и он имеет вид ряда утолщений, разделенных перетяжками, отсюда название — «сосисочная» неустойчивость (в русской литературе — неустойчивость типа «перетяжек». — *Перев*). Изгибание шнура приводит к увеличению магнитной силы с внутренней стороны изгиба, и деформация нарастает. Это неустойчивость типа изгиба.

При математическом анализе устойчивости обычно применяется метод нормальных мод с разложением произвольной деформации в спектр нормальных колебаний.

Например, в случае цилиндрической геометрии при анализе деформаций полагают, что возмущения первого порядка всех величин подчиняется закону

$$f(r) \exp \{j\omega t\} \exp \{j(kz + m\varphi)\}. \quad (1)$$

Затем из линейаризованных гидромагнитных уравнений и соответствующих граничных условий выводят дисперсионное соотношение, которое связывает каждую пару индексов k и m с определенным значением ω . Дисперсионное соотношение содержит необходимую информацию о свойствах устойчивости данной системы: величины k и m , для которых ω имеет отрицательную мнимую часть, соответствуют возмущениям, по отношению к которым система неустойчива.

Часто используют классификацию различных типов неустойчивости цилиндрического шнура в соответствии со значениями m , которым они соответствуют в представлении нормальных мод. Согласно формуле (1), в любой данный момент времени форма возмущенной граничной поверхности определяется действительной частью выражения

$$R = R_0 + \text{const} \exp \{j(kz + m\varphi)\}. \quad (2)$$

Таким образом, для мод, соответствующих $m=0$, это поверхность вращения с радиусом, меняющимся в зависимости от z . Неустойчивости типа «перетяжки» соответствует мода $m=0$. В случае $m=1$ возмущенная поверхность закручивается по винтовой линии (но сечение остается круговым). Это справедливо и для $m=-1$, только теперь поверхность закручивается в противоположном направлении. Шаг винта равен $2\pi/k$. Суперпозиция

возмущений $m=1$ и $m=-1$ дает периодическую деформацию изгиба. При более высоких значениях m наблюдаются деформации сечения шнура.

Теория гидромагнитной устойчивости имеет важное приложение к космической физике. Не менее важную роль приобретает она в связи с проблемами магнитного удержания плазмы и потому в последнее время быстро развивается в термоядерных исследованиях. Всестороннее рассмотрение вопросов теории устойчивости можно найти в работах Чандрасекара [49], отдельные проблемы устойчивости применительно к звездам рассмотрены Леду [70]. Мы рассмотрим лишь некоторые результаты теории, относящиеся к устойчивости винтовых магнитных полей (разд. 3.13.1). Эти результаты нам понадобятся в разд. 3.14.

Большие возможности изучения гидромагнитной устойчивости иногда предоставляют эксперименты с моделями. Этому вопросу посвящен разд. 3.13.2, в котором кратко рассматриваются подобные эксперименты.

3.13.1. Устойчивость винтовых магнитных полей

Однородное магнитное поле в проводящей жидкости может закручиваться при движении жидкости. Существующая аналогия между магнитными силовыми линиями и упругими струнами

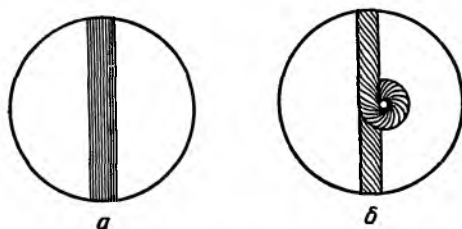


Рис. 3.18. Образование петель в винтовом магнитном поле.

a — силовая трубка до скручивания; b — силовая трубка после образования петли.

позволяет качественно предсказать, что при достаточном скручивании конфигурация станет неустойчивой, причем неустойчивость приведет к образованию петель. Неустойчивость подобных винтовых полей представляет определенный интерес, поскольку такие петли могут играть важную роль в поддержании космических магнитных полей (разд. 3.14.3).

Следующие простые рассуждения [71] позволяют оценить по порядку величин условия, при которых возникает неустойчи-

вость, способствующая петлеобразованию. Рассмотрим цилиндрическую силовую трубку (рис. 3.18, а) длины l и радиуса $R \ll l$. Если на одном конце она закручивается на угол φ , то создается азимутальное магнитное поле напряженностью

$$B_{\varphi} = \frac{r\varphi}{l} B_z, \quad (3)$$

где B_z — аксиальная составляющая напряженности. В таком случае магнитная энергия силовой трубки возрастает и равна

$$W_M = \frac{l}{8\pi\mu} \int_0^R (B_{\varphi}^2 + B_z^2) 2\pi r dr = \frac{B_z^2 R^2}{8\mu} \left(l + \frac{R^2 \varphi^2}{2l} \right). \quad (4)$$

Если силовая трубка деформируется, как показано на рис. 3.18, б, то вследствие образования петли ее длина возрастает по крайней мере на величину $\Delta l = 2\pi R$. В то же время закручивание изменяется на величину $\Delta\varphi = -2\pi$. Мы рассматриваем случай несжимаемой жидкости, а потому объем $\pi R^2 l$ остается неизменным, а радиус меняется на величину $\Delta R = -R \Delta l / 2l = -\pi R^2 / l$. Поскольку поток $\pi R^2 B_z$ сохраняется, изменение магнитного поля $\Delta B_z = 2\pi B_z R / l$. Если теперь найденные приращения l , R и B_z подставить в уравнение (4), то получим, что образование петли приводит к уменьшению магнитной энергии при условии

$$\varphi > (\sqrt{5} - 1) \frac{l}{R}. \quad (5)$$

Это условие является приближенным критерием неустойчивости.

Количественный анализ данной проблемы был проведен Лундквистом [72] и Данжи и Лоухедом [73]. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) (единичные векторы $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{z}$) винтовое магнитное поле можно записать

$$\mathbf{B} = B_{\varphi}(r) \hat{\varphi} + B_z(r) \hat{z}. \quad (6)$$

Силовые линии лежат на цилиндрических поверхностях и образуют с осью угол

$$\psi = \arctg \left(\frac{B_{\varphi}}{B_z} \right), \quad (7)$$

а шаг винтовой линии равен

$$p = \frac{2\pi r B_z}{B_{\varphi}}. \quad (8)$$

Магнитная сила направлена по радиусу и в состоянии равновесия компенсируется радиальной составляющей градиента давления.

Возмущение, связанное с деформацией, в декартовой системе координат имеет вид

$$\xi = A \cos bx \sin az \hat{x} + C \sin bx \cos az \hat{z}, \quad (9)$$

причем $C/A = -b/a$ (условие несжимаемости). Лундквист вычислил для такого возмущения полное изменение магнитной энергии и показал, что уменьшение энергии (а следовательно, неустойчивость) имеет место при условии

$$\int_0^R B_{\varphi}^2 r dr > 2 \int_0^R B_z^2 r dr. \quad (10)$$

(Более строгое и изящное обоснование энергетический метод получил в последующих работах [74, 75].)

Поскольку мы рассматривали частный случай возмущения (9), условие неустойчивости (10) является *достаточным*, но не должно быть *необходимым*.

Из уравнения (10) следует, что в том случае, когда присутствуют как аксиальное, так и азимутальное поле, конфигурация становится неустойчивой, если средняя плотность энергии азимутального поля вдвое превышает среднюю плотность энергии аксиального поля. Как указывалось выше, только азимутальное поле имеет пинч и потому является неустойчивым.

Данжи и Лоухед [73], используя метод нормальных мод, установили, что цилиндр радиуса R с равномерно закрученным магнитным полем (постоянный шаг винта p) неустойчив, если выполняется неравенство

$$p < \frac{1}{2} R. \quad (11)$$

3.13.2. Модельные эксперименты по изучению неустойчивостей

Неустойчивости различных типов проявляются в горячей плазме, однако в этих условиях, как правило, трудно наблюдать в деталях развитие неустойчивостей. Иногда эти наблюдения легче проводить в опытах с проводящими жидкостями.

В работах [76, 77] описаны эксперименты по изучению неустойчивостей в струе ртути, через которую пропускается ток. В этих опытах струя ртути вытекала вертикально из кругового отверстия в металлическом сосуде в другой проводящий сосуд, образуя таким образом шнур практически цилиндрической формы. Через шнур пропусклся электрический ток, величину которого можно было регулировать до 400 а. Эксперименты проводились как в отсутствии поля, так и при наложении внешнего аксиального магнитного поля.

На рис. 3.19 представлены две типичные фотографии, полученные в этих опытах. Поскольку ртуть свободно падает, вертикальная ось фотоснимка представляет собой шкалу времени в неравномерном масштабе.

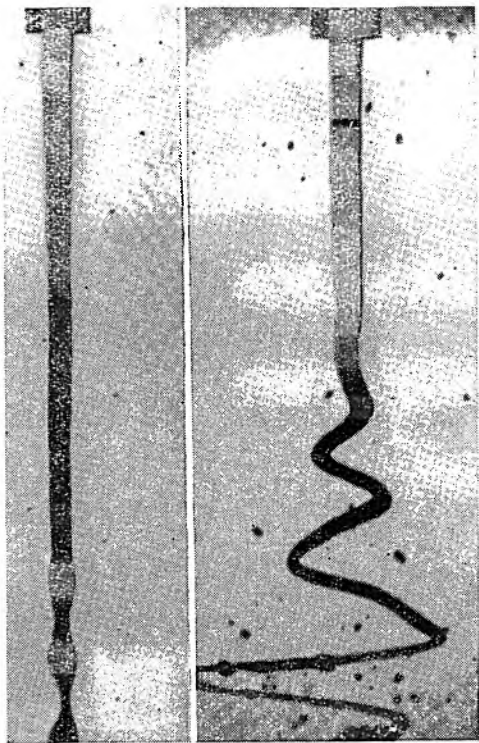


Рис. 3.19. Фотографии падающей токонесящей струи ртути. *Справа* — в отсутствие аксиального магнитного поля развивается неустойчивость типа «перетяжки». *Слева* — при наложении аксиального магнитного поля (300 гс) струя закручивается по винтовой линии [76].

Если магнитное поле отсутствует (рис. 3.19, а), то деформация симметрична относительно оси и характеризуется периодическими сжатиями и расширениями нарастающей амплитуды. Это неустойчивость типа «перетяжек».

При наложении аксиального магнитного поля шнур, как правило, закручивается по спирали (рис. 3.19, б). Механизм этого

явления заключается в следующем. Любая незначительная деформация изгиба нарастает под действием магнитных сил возмущения. Ток, текущий вдоль деформированного шнура, имеет радиальную составляющую на начальном и конечном участках изгиба. Эти радиальные составляющие взаимодействуют с аксиальным магнитным полем. Возникающая сила $(i/c) \times B$ имеет положительное азимутальное направление на одном конце изгиба и отрицательное — на другом. Вследствие этого первоначальная деформация раскручивается по спирали, как это можно видеть на фотографии. Знак кручения таков, что аксиальное поле деформированного токового канала имеет составляющую, параллельную внешнему аксиальному магнитному полю.

Разница между струей и шнуром горячей плазмы состоит в величине проводимости. Поэтому при наложении внешнего магнитного поля их поведение различно, поскольку в случае плазмы силовые линии могут быть «вморожены». Если же аксиальное магнитное поле отсутствует, свойства устойчивости струи ртути и бесконечно проводящего плазменного шнура весьма схожи. Даже скорости нарастания неустойчивости совпадают с точностью до множителя, равного двум [78, 79]. В присутствии магнитного поля проводимость играет решающую роль.

Колгейт, Ферт и Холидей [80] поставили эксперимент для изучения неустойчивости плазмы, в котором использовался натрий. Кусочки металлического натрия вводились в магнитную ловушку и подвергались воздействию сильного импульса магнитного поля. Магнитные силы были настолько велики, что натрий подвергался характерным деформациям, формы которых соответствовали теоретически предсказанным модам неустойчивостей.

3.14. Механизмы генерации космических магнитных полей

Одна из важнейших проблем, которую должна разрешить магнитная гидродинамика, — это проблема образования космических магнитных полей. Как указывалось в гл. 1, магнитные поля — весьма общее свойство широкого класса космических объектов (недра Земли, Солнце, магнитные звезды, межпланетное пространство и межзвездная среда). Хотя только Солнце и так называемые «магнитные» звезды имеют достаточно сильные поля, доступные наблюдениям с Земли при помощи современных приборов и методов, по-видимому, большинство звезд обладает магнитными полями.

Возможно, что механизмы генерации полей различных космических объектов отличаются друг от друга. Однако факт су-

существования магнитных полей в широком спектре самых разнообразных условий наводит на мысль о том, что должен существовать некий единый, весьма общий и фундаментальный процесс, ответственный за их генерацию.

Хотя впервые этот вопрос был рассмотрен в работах Лармора, однако наиболее четко основная проблема была сформулирована в теореме Каулинга (см. разд. 3.14.1). Согласно Каулингу, магнитное поле не может быть генерировано симметричным установившимся процессом. В соответствии с этим одним из подходов к решению проблемы явилось рассмотрение несимметричных установившихся процессов (*самовозбуждающееся динамо*). Этот вопрос будет кратко рассмотрен в разд. 3.14.2 (см. также [61, 81—84]). Другому подходу, основанному на неустойчивых процессах (*модель неустойчивости типа «изгиба»*), посвящены разд. 3.14.3—3.14.5.

3.14.1. Теорема Каулинга

Теория динамо сама по себе является очень сложной задачей. Законченная теория должна включать в себя решение полной системы гидромагнитных уравнений, учитывающей как магнитные эффекты движущегося вещества, так и воздействия магнитных сил на это движение. Уравнения не должны быть линеаризованы, так как сам процесс по своему характеру существенно нелинеен. Геометрическая конфигурация динамо не может быть очень простой, поскольку теорема Каулинга утверждает [85], что *стационарное и аксиально симметричное динамо невозможно*. Приведем доказательство теоремы в общих чертах: В любом аксиально симметричном магнитном поле, представляющем физический интерес, существует одна или более круговая «нейтральная линия», в каждой точке которой напряженность поля равна нулю. В стационарном состоянии электростатическое поле вдоль такой линии отсутствует (поскольку существование электростатического поля означало бы, что $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$, и, таким образом, магнитное поле менялось бы со временем). На нейтральной линии индуцированное электрическое поле $(\mathbf{v}/c) \times \mathbf{B}$ тоже равно нулю, поскольку $\mathbf{B} = 0$. Таким образом, на нейтральной линии не может возникнуть э. д. с., и, следовательно, плотность тока в стационарном состоянии обращается в нуль (при условии, что проводимость конечна). $\text{rot } \mathbf{B}$ на нейтральной линии не равен нулю при условии, что в разложении магнитного поля он представляет собой член первого порядка малости. (Вблизи нейтральной линии магнитные силовые линии образуют петли вокруг нее.) Но, согласно уравнениям Максвелла, нулевая плотность тока несовместима

с условием $\text{rot } \mathbf{B} \neq 0$, что и доказывает невозможность существования вращательно-симметричного динамо в установившемся режиме. (Этот результат справедлив также и для случая неравенства нулю на нейтральной линии членов разложения $\mathbf{B}$ более высокого порядка.)

3.14.2. Самовозбуждающееся динамо

В связи с большими трудностями, присущими задаче о динамо, большинство выполненных к настоящему времени исследований базировалось на кинематическом подходе. Этот подход сводится к нахождению соответствующего распределения скоростей, которое приводит к поддержанию магнитного поля за счет механизма динамо. Метод не дает одновременного количественного анализа процессов возникновения движения вещества и влияния на него магнитного поля, однако принципиальную возможность движения с динамической точки зрения можно проверить количественным путем.

Математические методы, предложенные Эльзассером [86], позволяют сформулировать проблему нахождения распределений скоростей, приводящих к генерации магнитных полей, в форме задачи на отыскание собственных значений. В этом случае появление соответствующих полей скоростей определяется действительными собственными значениями бесконечной системы уравнений (см., например, [61]). В работах [87, 88] путем численного анализа показана возможность существования магнито-гидродинамического динамо и найдены действительные собственные значения для частного случая поля скоростей сферы проводящей жидкости. Найденное поле скоростей является суперпозицией неравномерного вращения сферы и одновременной конвекции. С динамической точки зрения подобный вид движения может иметь место в недрах Земли. Если ядро Земли достаточно нагрето вследствие радиоактивного распада, то может происходить тепловая конвекция, а сохранение углового момента восходящего вещества может привести к неравномерному вращению. Герценберг [89] показал, что две вращающиеся жидкие сферы, погруженные в проводящую жидкость, могут действовать как динамо. Хотя и трудно представить себе, как может реализоваться подобная конфигурация в космических условиях, анализ Герценберга имеет то преимущество, что он лишен трудностей, связанных с расходимостью. А это немало важно, когда речь идет о проблеме существования магнито-гидродинамического динамо [90].

Мы не будем останавливаться на математических вопросах теории динамо, а обсудим некоторые ее аспекты с физической

точки зрения. Рассмотрим космическое тело сферической формы. Можно выделить две фазы генерации магнитного поля в таком теле. Первая фаза — генерация тороидального потока суще-

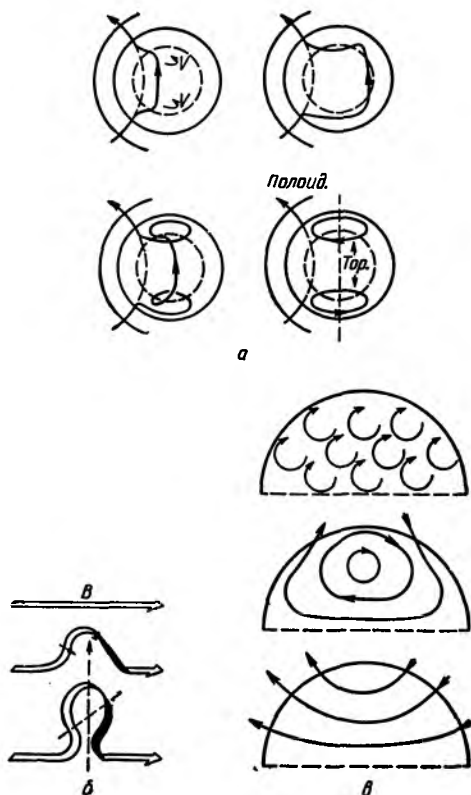


Рис. 3.20. *а* — в полоидальном магнитном поле неоднородное вращение создает тороидальную составляющую поля.
б — меридианальные петли, создаваемые локальным подъемом и последующим скручиванием.
в — слияние петель, приводящее к образованию общего полоидального поля (по Эльзассеру [83]).

ствующим полоидальным магнитным полем, и вторая — обратная связь, приводящая к поддержанию полоидального поля за счет тороидального.

Тороидальный поток в принципе создать весьма просто. Как показал еще Лармор, его можно получить вследствие неоднородного вращения, которое вытягивает полоидальное поле так,

что создаются тороидальные компоненты (рис. 3.20, а). Наиболее важным моментом является обратная связь тороидального поля с полоидальным. Возможно, эта связь осуществляется в процессе локального всплывания силовых трубок и их последующего закручивания под действием силы Кориолиса. Таким образом возникают меридиональные петли, которые затем «срастаются» и образуют полоидальное поле [91] (см. рис. 3.20, б и в; рис. 3.20 взят из обзора Эльзассера [83]).

Следует отметить, что тороидальные поля, предсказываемые теорией динамо, могут существовать в ядре Земли, но не должны наблюдаться на ее поверхности, поскольку через изолирующую земную кору может проходить только полоидальное магнитное поле. (Тороидальные поля на поверхности должны вызывать токи, пронизывающие поверхность.) Эльзассер [84] высказал гипотезу о том, что солнечные пятна являются вихрями, связанными с общим магнитным полем Солнца, причем биполярные пятна обязаны своим происхождением тороидальным трубкам, которые всплывают из-под поверхности. Подобная конвекция составляет также часть картины солнечного магнитного поля и его циклических вариаций, предложенной Бэбкоком [92]. Согласно Бэбкоку, сильные магнитные поля, о существовании которых свидетельствуют солнечные пятна, представляют собой лишь поверхностное явление. Однако, по-видимому, было бы трудно объяснить весьма закономерные особенности цикла солнечных пятен, не прибегая к предположению о существовании сильного полоидального поля Солнца [12—14, 93, 94].

Взаимодействие *турбулентного* движения и неправильных («турбулентных») магнитных полей также рассматривалось как одна из возможных причин усиления уже существующих магнитных полей. Такие поля, разумеется, не являются стационарными, но могут иметь некоторые стационарные средние характеристики. Имеются указания на то, что в магнитогидродинамической турбулентности должна наблюдаться тенденция к равномерному распределению, по крайней мере в некотором диапазоне частот. Затронутые теоретические проблемы весьма сложны, а их решение далеко от завершения. Обсуждение этих проблем можно найти в обзоре Каулинга [81], посвященном теориям динамо.

3.14.3. Модель неустойчивости типа изгиба

Схемы движения, предложенные в теории устойчивого самовозбуждающегося динамо, довольно сложны и трудно представить себе, каким образом они могут быть осуществлены. И если такой механизм применим к недрам Земли, то кажется неве-

роятным, что он может генерировать магнитные поля звезд и межзвездной среды.

Поэтому желательно исследовать также *нестационарные* процессы. Этому вопросу посвящены работы [71—73, 82, 95], в которых обсуждается возможность усиления магнитного поля за счет *неустойчивости типа изгиба*.

Основная идея состоит в том, что движение проводящей жидкости изменяет некоторое первоначальное магнитное поле таким образом, что оно становится неустойчивым; затем оно скачком возвращается к исходной конфигурации, но напряженность его возрастает. Это может случиться, если, например, в исходном полоидальном поле произойдет скручивание магнитных силовых линий, вследствие чего возрастает полная магнитная энергия. Если закручивание превысит определенный предел, который был установлен Лундквистом и Данжи и Лоухедом (см. разд. 3.13.1), то разовьется неустойчивость и образуется «изгиб» с замкнутым магнитным потоком, направление которого таково, что первоначальный полоидальный поток усилится.

Со времени написания первых статей по магнитному усилению наши знания о гидромагнитной неустойчивости существенно возросли благодаря термоядерным исследованиям. Однако теоретическое изучение гидромагнитных неустойчивостей обычно ограничивается начальной линейной фазой процесса нарастания неустойчивости. А поскольку усиление потока определяется явлениями, которые имеют место на последних стадиях развития неустойчивости, количественная теория вопроса еще не создана. Однако ныне доступные технические средства позволяют подойти к изучению этой проблемы с экспериментальной точки зрения. Так, в опытах по изучению плазменных колец в магнитном поле Линдберг [96, 97] обнаружил механизм усиления потока, который явился новым важным элементом в развитии наших представлений о происхождении космических магнитных полей.

3.14.4. *Опыты с плазменными кольцами*

В экспериментах Линдберга и его сотрудников плазменные кольца создавались коаксиальной плазменной пушкой, на выходе которой плазменное кольцо встречает радиальное магнитное поле (рис. 3.21). Таким образом, вылетающее из пушки плазменное кольцо захватывает как тороидальное поле, обусловленное токами в пушке на первоначальном этапе, так и полоидальное поле, которое кольцо увлекает за собой при прохождении через радиальное поле на выходе пушки. Затем плазменное кольцо продолжает двигаться вдоль оси большой дрейфовой

трубы, диаметр которой значительно больше диаметра пушки. Основные черты конфигурации магнитного поля схематически представлены на рис. 3.21.

Сначала предполагалось, что в любой момент времени поток полоидального поля будет в лучшем случае равен первоначальному потоку. Однако было обнаружено, что при определенных условиях измеренный полоидальный поток превосходит начальный поток иногда в 5 раз и даже более. Поскольку в данном эксперименте тороидальное магнитное поле гораздо сильнее

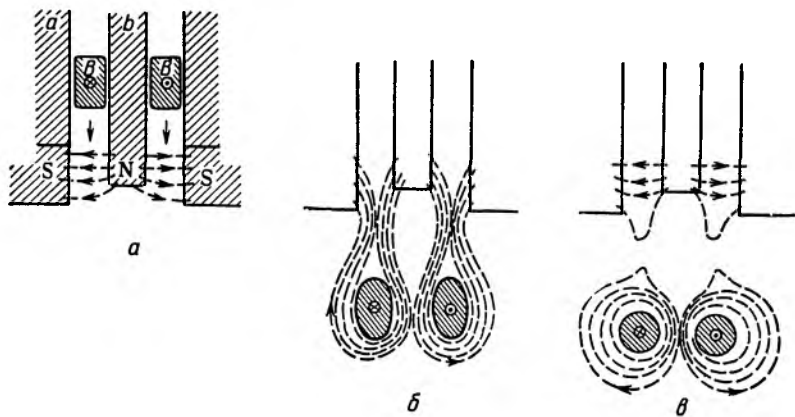


Рис. 3.21. Схема эксперимента с плазменными кольцами.

a — плазменное кольцо в пушке.

б — плазменное кольцо, вытягивающее силовые линии постоянного магнитного поля.

в — плазменное кольцо с захваченным полоидальным полем.

полоидального, это явление можно объяснить эффектом «выравнивания» полей, состоящем в том, что часть энергии тороидального поля переходит в энергию полоидального.

На рис. 3.22 представлены фотографии плазмы, полученные при помощи ячейки Керра в различные моменты времени после инициирования разряда. На фотографиях отчетливо видна развивающаяся деформация центрального столба. Одновременное фотографирование из различных точек показало, что деформация имеет винтообразную форму. Во всех случаях направление кручения винтовой линии таково, что разрядный ток, протекающий по винтовой линии, создает полоидальное поле, усиливающее первоначальное полоидальное поле.

Винтовая деформация центрального столба возникает при определенных условиях, и именно при этих условиях происходит

усиление потока. Типичные осциллограммы полоидального магнитного потока, измеренного на двух различных расстояниях от

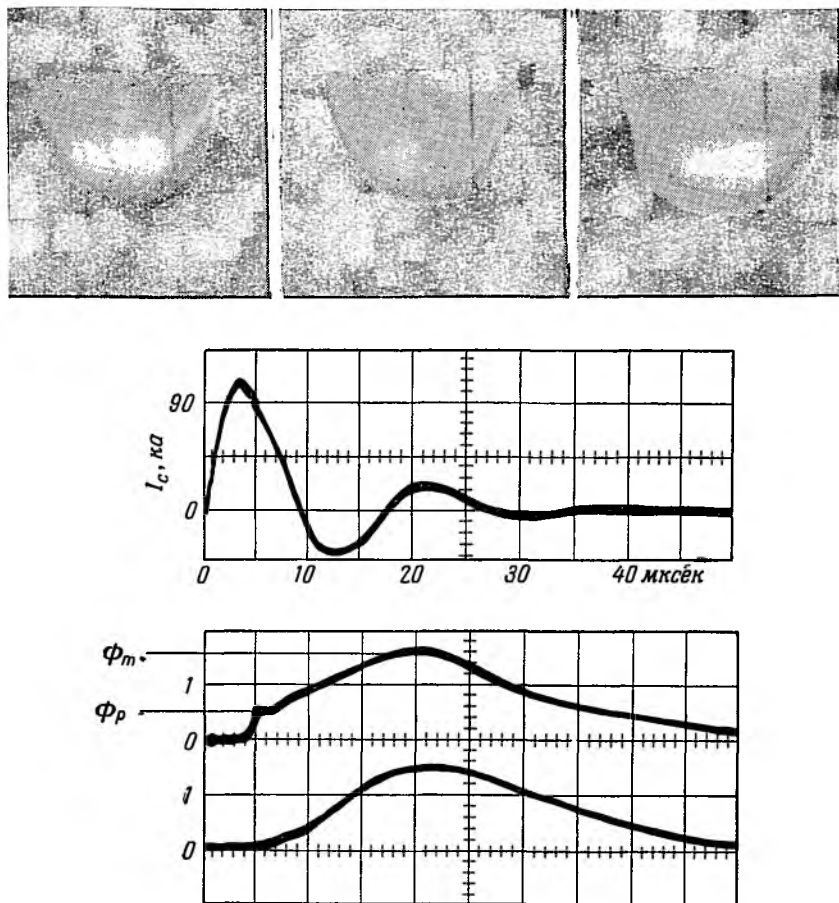


Рис. 3.22. Плазменный столб, изгибающийся по винтовой линии (фотографии сделаны в интервале от 4,0 и до 4,6 мксек после инициирования разряда) и осциллограммы тока разряда и магнитного потока, измеренного двумя петлями, расположенными на расстояниях 15 и 30 см от пушки. Поток постоянного поля $\phi_s = 5,5 \times 10^4$ Гс · см². Цена деления по оси ординат 10^5 Гс · см² [97].

пушки, показаны на рис. 3.22. На меньшем расстоянии от пушки поток сначала увеличивается до величины ϕ_p (небольшое плато), которая приблизительно равна величине статического

потока, а затем медленно возрастает до максимума ϕ_m , который достигается после того, как кривая первичного тока проходит через нуль. На приведенном рисунке отношение ϕ_m/ϕ_p равно приблизительно четырем; но наблюдаются и большие значения. На большом расстоянии от пушки плато сглаживается, и поток монотонно стремится к своему максимальному значению. В последующие моменты времени плазма при расширении достигает стеклянных стен трубы, где она охлаждается, и поток рассеивается. Еще один механизм усиления потока был открыт Бикертоном [98]. Возможно, он имеет определенную связь с механизмом Линдберга.

3.14.5. Усиление поля за счет неустойчивости

Теперь мы можем описать механизм, посредством которого приведенные процессы дают вклад в образование общих магнитных полей небесных тел.

Рассмотрим вращающуюся жидкую сферу, которая может представлять собой недра Земли, Солнце, межзвездное облако и, возможно, Галактику. Предположим, что первоначально она содержала полоидальное магнитное поле. Тогда первым этапом процесса будет образование тороидального поля. Как указывалось выше, это легко осуществляется благодаря неоднородному вращению. Рис. 3.20, *а* может служить иллюстрацией этого этапа. Заметим только, что закручивание, вызванное неоднородным вращением, распространяется вдоль магнитных силовых линий с магнитогидродинамической скоростью $V = B/(4\pi\mu)^{1/2}$, так что, если неоднородность вращения слишком мала, силовые линии успеют выпрямиться. Чтобы создать значительное тороидальное поле, относительная скорость вращения различных частей сферы должна быть по крайней мере сравнимой с V .

Затем возникает обратная связь тороидального поля с полоидальным. Прежде чем она установится, ток принимает конфигурацию, которая схематически изображена на рис. 3.23, *а*. Первоначальное полоидальное магнитное поле соответствует тороидальной системе токов I , а тороидальное магнитное поле — полоидальной системе токов i . Системы токов i и I точно соответствуют системам токов в опытах Линдберга. Следовательно, можно ожидать, что при определенных условиях аксиальные токовые шнуры системы i будут неустойчивы, начнут деформироваться и закручиваться по винтовой линии и, так же как это наблюдалось в экспериментах, создадут полоидальный поток. Рис. 3.23, *б* и *в* иллюстрирует описанную картину. Рис. 3.23, *в* показывает заключительную стадию процесса, когда винтовые петли превращаются в тороидальные токовые кольца. Их на-

правление таково, что первоначальный кольцевой ток возрастает.

Что касается условий возникновения неустойчивости, то, как показали в своих работах Лундквист [72] и Данжи и Лоухед [73],

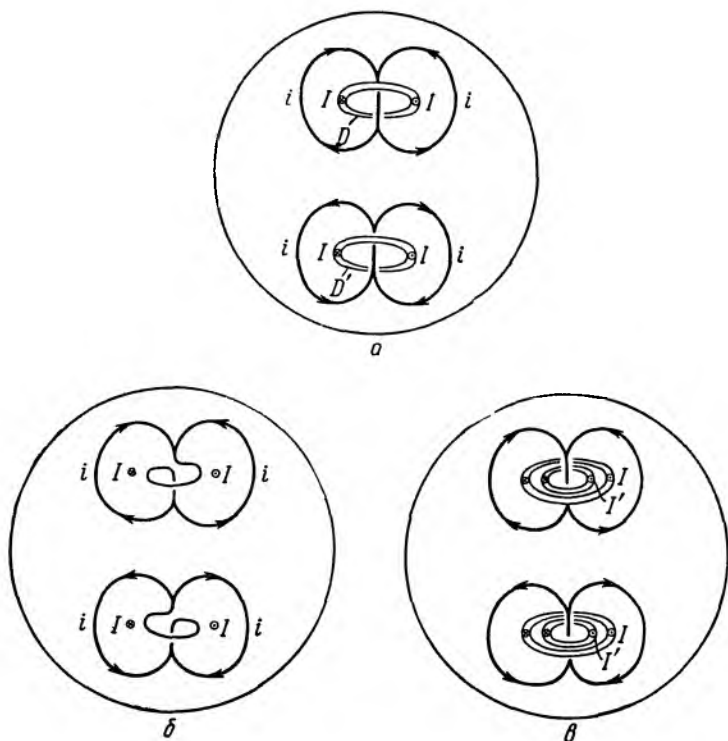


Рис. 3.23. Усиление поля за счет неустойчивости типа изгиба. *a* — система токов. Кольцевые токи *I* создают полоидальное поле. Тороидальное поле в кольцах *D* и *D'* связано с меридианальными токами *i*.

б — на оси токи *i* становятся неустойчивыми по отношению к изгибу и образуют спиральные петли, направление тока в которых таково, что полоидальное поле нарастает.

в — спиральные токи превращаются в аксиальный ток и в кольцевой ток *I'*, который усиливает начальный ток *I*. Теперь конфигурация подобна *a*, но полоидальное поле усилено.

она может развиваться в том случае, если средние значения напряженностей тороидального и полоидального магнитных полей удовлетворяют условию

$$B_{\text{тор}} > \alpha B_{\text{пол}},$$

где α — множитель порядка единицы, или

$$v > \alpha V,$$

где v — относительная скорость движения различных частей жидкости, а V — по-прежнему магнитогидродинамическая скорость.

Проанализированная нами картина движения очень проста, но ее следует рассматривать лишь как частный случай движения, имеющего гораздо более общий характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Herlofson N., Magneto-hydrodynamic Waves in a Compressible Fluid Conductor, *Nature*, **165**, 1020 (1950).
2. De Hoffman F., Teller E., Magneto-hydrodynamic Shocks, *Phys. Rev.*, **80**, 692 (1950).
3. Van de Hulst H. C., Problems of Cosmical Aerodynamics, Proc. Symposium on Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions, Central Air Documents Office, Dayton, Ohio, 1951.
4. Zemansky M. W., Heat and Thermodynamics, McGraw-Hill, New York, 1957.
5. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., The Boltzmann Equation and the One-fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions, *Proc. Roy. Soc.*, **A236**, 112 (1959). (См. перевод в сб.: «Проблемы современной физики», Магнитная гидродинамика, ИЛ, вып. 7, 1957.) Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф., Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений.
6. Stratton J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941.
7. Joos G., Lehrbuch der theoretischen Physik, 10th Ausgabe, Leipzig, 1959. (Русский перевод: Иос Г., Курс теоретической физики, Учпедгиз, М., 1963.)
8. Rydbeck O., On the Propagation of Waves in Inhomogeneous Media, Trans. Chalmers' University of Technology (Gothenburg, Sweden), **74** (1948).
9. Åström E., On Waves in an Ionized Gas, *Ark. f. fys.*, **2**, 443 (1951).
10. Åström E., On the Electromagnetic Behaviour of a Plasma, *Ark. f. fys.*, **19**, 163 (1961).
11. Fünfer E., Lehner G., Plasmaphysik, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1962, S. 1.
12. Walén C., On the Theory of Sunspots, *Ark. f. mat. astr. o. fys.*, **30A**, № 15 (1944).
13. Walén C., On the Theory of Sunspots, *Ark. f. mat. astr. o. fys.*, **31B**, № 3 (1944).
14. Wallén C. On the Distribution of the Solar General Magnetic Field, *Ark. f. mat. astr. o. fys.*, **33A**, № 18 (1946).
15. Lundquist S., Studies in Magneto-hydrodynamics, *Ark. f. fys.*, **5**, 297 (1952).
16. Ferraro V. C. A., On the Reflection and Refraction of Alfvén Waves, *Astrophys. J.*, **119**, 293 (1954).
17. Ferraro V. C. A., Plumpton C., Magneto-fluid Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1961.
18. Lehnert B., Magneto-hydrodynamic Waves under the Action of the Coriolis Force, *Astrophys. J.*, **119**, 647 (1954).

19. Lehnert B., Magneto-hydrodynamic Waves under the Action of the Coriolis Force. II, *Astrophys. J.*, **121**, 481 (1955).
20. Schwarzschild M., Magnetic Oscillations of a Highly Ionized Star, *Ann. d'Astrophys.*, **12**, 148 (1949).
21. Ferraro V. C. A., Memory D. J., Oscillations of a Star in its Own Magnetic Field, An Illustrative Problem, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **112**, 361, (1952).
22. Cowling T. G., The Oscillation Theory of Magnetic Variable Stars, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **112**, 527 (1952).
23. Dricot G., Ledoux P., Remarque sur la théorie des oscillations d'une masse fluide incompressible en présence d'un champ magnétique, *Bull. Soc. Roy. Sci. (Liège)*, **28**, 115 (1959).
24. Cowling T. G., Theoretical Problems of Stellar Magnetism, *Electrical Phenomena in Cosmical Physics*, International Astronomical Union Symposium № 6, Stockholm, ed. B. Lehnert, Cambridge Univ. Press, 1958, p. 169.
25. Babcock H. W., Magnetic Fields of the A-type Stars, *Astrophys. J.*, **128**, 228 (1958).
26. Deutsch A. J., Magnetic Fields of Stars, *Handbuch der Physik Bd. 51*, Springer-Verlag, Berlin, 1958, S. 689.
27. Madelung E., *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, 4th Ausgabe, Springer-Verlag, Berlin, 1950, S. 189. (Русский перевод: Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, М., 1960.)
28. Lüst R., Über die Ausbreitung von Wellen in einem Plasma, *Fortschritte der Physik*, **7**, 503 (1959).
29. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, М., 1954.
30. Lehnert B., Magneto-hydrodynamic Experiments, *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, International Astronomical Union, Symposium № 6, ed. Lehnert B., Cambridge Univ. Press., 1958, p. 50.
31. Lehnert B., Plasma Physics on Cosmical and Laboratory Scale, *Nuovo Cimento (X)*, Suppl., **13**, 1 (1959).
32. Baños A., Magneto-hydrodynamic Waves in Compressible Fluids with Finite Viscosity and Heat Conductivity, *Electrical Phenomena in Cosmical Physics*, International Astronomical Union Symposium № 6, Stockholm, ed. Lehnert B., Cambridge Univ. Press, 1958, p. 15.
33. Lundquist S., Experimental Demonstration of Magneto-hydrodynamic Waves, *Nature*, **164**, 145 (1949).
34. Lundquist S., Experimental Investigation of Magneto-hydrodynamic Waves, *Phys. Rev.*, **76**, 1805 (1949).
35. Lehnert B., Magneto-hydrodynamic Waves in Liquid Sodium, *Phys. Rev.*, **94**, 815 (1954). (См. перевод в сб. «Проблемы современной физики», Магнитная гидродинамика, Ленерт Б., Магнитогидродинамические волны в жидком натрии, ИЛ., вып. 7, 1957.)
36. Allen T. K., Baker W. R., Pyle R. V., Wilcox J. M., Experimental Generation of Plasma Alfvén Waves, *Phys. Rev. Letters*, **2**, 383 (1959).
37. Jephcott D. F., Alfvén Wave in a Gas Discharge, *Nature*, **183**, 1652 (1959).
38. Wilcox J. M., Baker W. R., Boley F. J., Cooper W. S., De Silva A. W., Spillman G. R., Devices for generating Highly-ionized Hydrogen Plasma, *J. Nuclear Energy, Part C, Plasma Physics*, **4**, 307 (1962).
39. Wilcox J. M., Boley F. I., De Silva A. W., Experimental Study of Alfvén Wave Propagation, *Phys. Fluids*, **3**, 15 (1960).
40. Wilcox J. M., De Silva A. W., Cooper W. S., Experiments on Alfvén-wave Propagation, *Phys. Fluids*, **4**, 1506 (1961).

41. Wilcox J. M., De Silva A. W., Cooper W. S., Boley F. I., Experiments on Alfvén-wave Propagation, Radiation and Waves in Plasmas, ed. M. Mitchner, Stanford Univ. Press, 1961, p. 138. (См. перевод в сб. «Излучение и волны в плазме», Госатомиздат, М., 1963, Вилкоккс Дж., де Сильва А. В., Купер В., Боули Ф. И., Эксперименты по распространению волн Альфвена.)
42. Nagao S., Sato T., Some Experiments on Plasma Alfvén Waves, J. Phys. Soc. Japan, 15, 735 (1960).
43. Hartmann J., Lazarus F., Hg-Dynamics, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 15, № 6—7 (1937).
44. Shercliff J. A., Steady Motion of Conducting Fluids in Pipes under Transverse Magnetic Fields, Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 136 (1953).
45. Murgatroyd W., Experiments on Magneto-hydrodynamic Channel Flow, Phil. Mag., 44, 1348 (1955).
46. Lehnert B., On the Behavior of a Electrically Conductive Liquid in a Magnetic Field, Ark. f. fys., 5, 69 (1952).
47. Lehnert B., Experiments on Non-laminar Flow of Mercury in Presence of a Magnetic Field, Tellus, 4, 63, (1952).
48. Lehnert B., An Experiment on Axisymmetric Flow of Liquid Sodium in a Magnetic Field, Ark. f. fys., 13, 109 (1957).
49. Chandrasekhar S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon Press, Oxford, 1961.
50. Lehnert B., An Stability of Laminar Flow of Mercury caused by an External Magnetic Field, Proc. Roy. Soc., A233, 299 (1955). (См. перевод в сб. «Проблемы современной физики», Магнитная гидродинамика, Лехнерт Б., Неустойчивость ламинарного течения ртути, вызванная внешним магнитным полем, ИЛ, вып. 7, 1957.)
51. Lüst R., Schlüter A., Drehimpulstransport durch Magnetfelder und die Abbremsung schnell rotierender Sterne, Z. Astrophys., 38, 190 (1955).
52. Dattner A., Venkatesan D., Anisotropies in Cosmic Radiation, Tellus, 11, 239 (1959).
53. Sandström A. E., Experimental Evidence of the Directional Components of Cosmic Rays, Tellus, 8, 18 (1956).
54. Alfvén H., On the Origin of the Solar System, Clarendon Press, Oxford, 1954.
55. Alfvén H., On the Mass Distribution in the Solar System, Astrophys. J., 136, 1005 (1962).
56. Alfvén H., Wilcox J., On the Origin of the Satellites and the Planets, Astrophys. J., 136, 1016 (1962).
57. ter Haar D., Stellar Rotation and Age, Astrophys. J., 110, 321 (1949).
58. Fälthammar C.-G., Experiments on Magneto-hydrodynamic Co-rotation in Mercury, Ark. f. fys., 19, 109 (1961).
59. Lundquist S., Magneto-hydrostatic Fields, Ark. f. fys., 2, 361 (1950).
60. Lüst R., Schlüter A., Kraftfreie Magnetfelder, Z. Astrophys., 34, 263 (1954).
61. Cowling T. G., Magneto-hydrodynamics, Interscience, New York, 1957. (Русский перевод: Каулинг Т., Магнитная гидродинамика, ИЛ, М., 1959.)
62. Dungey J. W., Cosmic Electrodynamics, Cambridge, Univ. Press, 1958. (Русский перевод: Данжи Дж., Космическая электродинамика, Госатомиздат, М., 1961.)
63. Chandrasekhar S., Proc. Nat. Acad. Sci. (Washington), 42, 1 (1956).
64. Chandrasekhar S., Kendall P. G., On Force-free Magnetic Fields, Astrophys. J., 126, 457 (1957).
65. Schlüter A., Kraftfreie Magnetfelder II, Z. Naturforsch., 12a, 855 (1957).

66. Chandrasekhar S., Woltjer L., On Force-free Magnetic Fields, Proc. Nat. Acad. Sci. (Washington), **44**, 285 (1958).
67. Woltjer L., A Theorem on Force-free Magnetic Fields, Proc. Nat. Acad. Sci. (Washington), **44**, 489 (1958).
68. Woltjer L., The Stability of Force-free Magnetic Fields, Astrophys. J., **128**, 384 (1958).
69. Kruskal M. D., Schwarzschild M., Some Instabilities of a Completely Ionized Plasma, Proc. Roy. Soc., **A223**, 348 (1954).
70. Ledoux P., Stellar Stability, Handbuch der Physik, Bd. 51, Springer-Verlag, Berlin, 1958, S. 605.
71. Alfvén H., Discussion of the Origin of the Terrestrial and Solar Magnetic Fields, Tellus, **2**, 74 (1950).
72. Lundquist S., On the Stability of Magneto-hydrostatic Fields, Phys. Rev., **83**, 307 (1951).
73. Dungey J. W., Loughhead R. E., Twisted Magnetic Fields in Conducting Fluids, Austral. J. Phys., **7**, 5 (1958).
74. Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M., An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems, Proc. Roy. Soc., **A244**, 17 (1958).
- 75*. Кадомцев Б. Б., Гидромагнитная устойчивость плазмы, статья в сб. «Вопросы теории плазмы», т. II, Госатомиздат, М., 1963.
76. Dattner A., Lehnert B., Lundquist S., Liquid Conductor Model of Instabilities in a Pinched Discharge, Proc. 2nd UN Int. Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, vol. 31, Pergamon Press, 1958, p. 325. (См. перевод в сб.: «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции», Избранные доклады иностранных ученых, Госатомиздат, М., 1959, Даттнер, Ленерт, Лундквист, Модель из жидкого проводника для изучения неустойчивостей самосжатого разряда.)
77. Dattner A., Current-induced Instabilities of a Mercury Jet, Ark. f. fys., **21**, 71 (1962).
78. Murty G. S., Instability of a Conducting Fluid Cylinder due to Axial Current, Ark. f. fys., **78**, 241 (1960).
79. Murty G. S., Instability of a Conducting Fluid Cylinder in the Presence of an Axial Current, a Longitudinal Magnetic Field and a Coaxial Conducting Cylinder, Ark. f. fys., **19**, 483 (1961).
80. Colgate S. A., Furth H. P., Halliday F. O., Hydromagnetic Equilibrium Experiments with Liquid and Solid Sodium, Rev. Mod. Phys., **32**, 744 (1960).
81. Cowling T. G., Dynamo Theories of Cosmic Magnetic Fields, Vistas in Astronomy, **1**, 313 (1955).
82. Inglis D. R., Theories of the Earth's Magnetism, Rev. Mod. Phys., **27**, 212 (1955).
83. Elsasser W. M., Hydromagnetism, I. A. Review, Amer. J. Phys., **23**, 590 (1955).
84. Elsasser W. M., Hydromagnetic Dynamo Theory, Rev. Mod. Phys., **28**, 135 (1956).
85. Cowling T. G., The Magnetic Field of Sunspots, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Phys. Rev., **69**, 106 (1946).
86. Elsasser W. M., Induction Effects in Terrestrial Magnetism, Phys. Rev., **69**, 106 (1946).
87. Bullard E. C., The Magnetic Field within the Earth, Proc. Roy. Soc., **A197**, 433 (1949).
88. Bullard E. C., Gellman H., Homogeneous Dynamos and Terrestrial Magnetism, Phil. Trans. Roy. Soc., **247**, 213 (1954).

89. Herzenberg A., Geomagnetic Dynamos, *Phis. Trans., A* 250, 543 (1958); *Ann. Geophys.*, 14, 522 (1958).
90. Cowling T. G., Magnetic Field of the Earth, *Nature*, 183, 937 (1959).
91. Parker E. N., Hydromagnetic Dynamo Models, *Astrophys. J.*, 122, 293 (1955).
92. Babcock H. W., Topology of the Sun's Magnetic Field and the 22-year Cycle, *Astrophys. J.*, 133, 572 (1961).
93. Alfvén H., On Sunspots and the Solar Cycle, *Ark. f. mat. astr. o. fys.*, 29A, № 12, (1943).
94. Walén C., On the Vibratory Rotation of the Sun, *Henrik Lindstahls Bokhandel, Stockholm*, 1948.
95. Alfvén H., On the Origin of Cosmic Magnetic Fields, *Astrophys. J.*, 133, 1049 (1961).
96. Lindberg L., Witalis E., Jacobsen C., Experiments with Plasma Rings, *Nature*, 185, 452 (1960).
97. Lindberg L., Jacobsen C., On the Amplification of the Poloidal Magnetic Flux in a Plasma, *Astrophys. J.*, 133, 1043 (1961).
98. Bickerton R. J., The Amplification of a Magnetic Field by a High Current Discharge, *Proc. Phys. Soc.*, 72, 618 (1958).
99. Elsasser W. M., The Hydromagnetic Equations, *Phys. Rev.*, 79, 183 (1950).
100. Ferraro V. C. A., Non-uniform Rotation of the Sun and its Magnetic Field, *Mon. Nat. Roy. Astron. Soc.*, 97, 458 (1937).

Плазма

4.1. Введение

Термин «плазма» был введен Ленгмюром для обозначения состояния положительного столба электрических разрядов в газах. В настоящее время он используется как синоним понятия «ионизованный газ»*. Свойства плазмы представляют чрезвычайный интерес для космической физики, поскольку большая часть вещества во вселенной находится в состоянии плазмы. В недрах звезд газ почти полностью ионизован. В фотосфере Солнца (и других звезд) степень ионизации не очень высока; выше фотосферы, в хромосфере и короне, она снова достигает больших значений (почти 100%). Сильно ионизованы обширные области межзвездного пространства вокруг звезд, особенно вокруг горячих звезд ранних спектральных классов (области III), в то время как на больших расстояниях от звезд степень ионизации мала (области II). На Солнце и в межпланетном пространстве, а также, возможно, в межзвездном и межгалактическом пространствах плазма пронизана магнитными полями. Вероятно, это имеет место во всех звездах, во всяком случае, это справедливо для «магнитных» звезд. Поэтому понятно, что в физике плазмы астрофизиков в основном интересует поведение *плазмы в магнитном поле*.

Рассмотрение магнитной плазмы мы отложим до гл. 5, а настоящую главу посвятим изучению общих свойств плазмы. В обеих главах особое внимание мы уделим существенному различию между плазмой и идеализированной «жидкостью», которая была рассмотрена в гл. 3.

Большая часть наших знаний о плазме была получена в результате продолжавшегося целое столетие изучения электрических разрядов в газах и интенсивного десятилетнего натиска в области «термоядерных исследований».

Объектом исследования *электрических разрядов в газах* (см., например, [1—3]) была плазма с малой степенью ионизации (обычно гораздо меньше 1%). В экспериментах такая плазма часто создается электрическими токами порядка 1а или менее, но во многих работах использовались токи порядка килоампер.

* Электронный газ в твердом теле также часто называют плазмой.

Исследование спектров излучения электрических разрядов в газах имело огромное значение для выяснения структуры атома. Хотя большинство спектроскопистов рассматривали разряд только как источник света, немало работ было посвящено свойствам самой плазмы. Если плазма создается электрическим током, то нагревание и ионизация производятся электрическим полем. Поэтому, когда Ленгмюр ввел термин «плазма», присутствие электрического поля неотъемлемой частью входило в это определение.

Очень важный вклад в теорию ионизованных газов внесли Чепмен и Каулинг [4], которые вывели из кинетической теории некоторые фундаментальные свойства ионизованных газов. Однако многие результаты Чепмена и Каулинга еще не были проверены на эксперименте. Кроме того, эксперименты обнаружили множество таких «плазменных» явлений, которые не следуют из их теории.

В принципе можно предсказать все свойства электрического разряда, вычислив движение и взаимодействие частиц и квантов излучения. Однако на практике приходится вводить ряд упрощающих предположений, поскольку непосредственный анализ связан с большими трудностями математического характера. В экспериментах неоднократно обнаруживались неожиданные с точки зрения теории явления в газовых разрядах. Следовательно, теорию электрического разряда можно построить только в тесном контакте с экспериментом, и это сотрудничество теории и эксперимента особенно существенно для дальнейшего прогресса физики плазмы.

Термоядерные исследования (см., например, [5, 6]) начали развиваться в нескольких странах в условиях строгой секретности. Целью этих исследований было создание термоядерных реакторов, в которых поддерживалась бы температура порядка 10^8 °K в дейтериевой и тритиевой плазме. Для этого необходимо, чтобы плазма создавалась в «магнитных бутылках», т. е. чтобы магнитное поле удерживало плазму от соприкосновения со стенками сосуда, в котором она заключена. Поэтому основное внимание было сосредоточено на свойствах *плазмы в магнитном поле*. И несмотря на то, что большинство предпринятых к настоящему времени попыток осуществления термоядерных устройств сталкивалось с неожиданностями в поведении плазмы, термоядерные исследования вызвали бурное развитие как теоретических, так и экспериментальных основ физики плазмы в магнитном поле.

Опыт термоядерных исследований лишний раз показал необходимость тесного контакта между теорией и экспериментом. Поэтому было бы желательным получить экспериментальные

данные о поведении космической плазмы. Возможность прямых модельных экспериментов, в которых сохраняются все основные характеристики плазмы, часто исключается по причинам, которые мы рассмотрим в разд. 4.2.2. Однако несмотря на это ограничение, эксперименты в ряде случаев могут дать ценную информацию об отдельных свойствах космической плазмы. В связи с этим приобретают особую важность поразительные успехи в технике эксперимента, достигнутые в термоядерных исследованиях.

Благодаря развитию *космических исследований* искусственные спутники и космические зонды в последнее время стали мощным средством изучения космической плазмы. С их помощью стало возможно наблюдать непосредственно межпланетную плазму и плазму экзосферы и даже ставить эксперименты в масштабах нашей планеты («Проект Аргус» [7, 8]). Теоретические исследования, основанные на измерениях при помощи космических зондов, несомненно, явятся одним из наиболее эффективных методов развития космической электродинамики.

4.2. Общее рассмотрение

4.2.1. Электрические разряды

Электрические разряды, осуществляемые в лаборатории, обычно делят на две группы: *несамостоятельный разряд*, который зависит от «внешнего ионизатора», создающего значительную часть ионов и электронов, переносящих ток, и *самостоятельный разряд*, в котором ионизация производится самим разрядом. При прочих равных условиях вторая группа характеризуется более высокими плотностями тока, чем первая. Это связано с тем, что в лаборатории в нашем распоряжении имеются весьма слабые ионизаторы. В космических условиях, где «внешним ионизатором» может быть высокая температура, при которой происходит почти полная ионизация вещества, в самостоятельных разрядах возможны очень большие токи.

Круг явлений, которые можно причислить к классу самостоятельных разрядов, очень широк. Сюда входят таунсендовские разряды, тлеющие разряды, дуги. Кроме того, имеются некоторые особые виды разрядов, такие, как искровой, который по существу представляют собой кратковременную дугу. В большинстве разрядов, происходящих между электродами, можно различить три области:

1. Прикатодная область, в которой электроны, являющиеся основными носителями тока, создаются эмиссией с катода и в результате ионизации газа.

2. Анодная область (не имеющая, впрочем, большого значения), связанная с прохождением тока между разрядом и анодом.

3. Плазма, которая находится между прикатодной и анодной областями. Свойства плазмы можно рассматривать как нечто характерное для газового проводника в отсутствие возмущений, вносимых электродами.

В катодном механизме заложены важные отличительные признаки разрядов различных типов. В *таунсендовском* и *тлеющем разрядах* происходит эмиссия с холодного катода; при *дуговом разряде* температура катода достаточно велика, чтобы возникла термоионная эмиссия (либо достаточно хорошая эмиссия другого происхождения).

Для космической физики механизм холодной эмиссии не представляет особого интереса. В данном случае электродами являются слои ионизованного газа, имеющие более высокую плотность, чем разрядное пространство. Такие слои могут испускать значительное количество электронов, так что в космических условиях катодный механизм во многом напоминает механизм дугового разряда.

Свойства плазмы не связаны непосредственно с катодным механизмом, так что плазма может иметь одинаковые свойства для различных типов самостоятельных и даже несамостоятельных разрядов. Характеристики плазмы определяются плотностью тока. Плотность тока возрастает при переходе от несамостоятельного разряда к таунсендовскому и далее к тлеющему и дуговому разрядам. Хотя в перечисленных выше разрядах происходят в принципе одни и те же процессы, свойства плазмы дуги из-за высокой плотности тока отличаются от свойств тлеющего разряда и тем более от свойств несамостоятельного разряда.

В разрядной трубке плазма может заполнять почти весь объем, за исключением тонкого слоя вблизи стенок. Обычно это имеет место, если давление и разрядный ток малы. Однако при высоком давлении (например, при атмосферном) плазма, как правило, сжимается в тонкий шнур, диаметр которого определяется самим разрядом. Сжатие плазмы происходит также при очень больших токах под влиянием электромагнитных сил (пинч-эффект), см. разд. 5.5.2.

4.2.2. Преобразования подобия

В теории газовых разрядов оказались весьма полезными так называемые законы подобия [1, 9].

Если линейные размеры изменяются в γ раз, то общий характер явления останется неизменным, если одновременно изменить другие величины в соответствии с табл. 4.1.

Таблица 4.1

Преобразования подобия для газовых разрядов

Линейные размеры, время, индуктивность, емкость	Меняются в γ^{+1} раз
Энергия частицы, скорость, потенциал, ток, омическое сопротивление	Меняются в γ^0 раз
Электрическое и магнитное поля, проводимость, плотность газа	Меняются в γ^{-1} раз
Плотность тока, плотность заряда	Меняются в γ^{-2} раз

Уравнения Максвелла требуют пропорциональности между длиной и временем. Наиболее характерные свойства разряда зависят от взаимодействий между атомами, электронами и квантами. Поскольку эти взаимодействия весьма сложным образом зависят от соответствующих энергий, то мы потребуем, чтобы все энергии, а следовательно, и электростатический потенциал (который определяет кинетическую энергию заряженных частиц) оставались неизменными.

Если линейные размеры l меняются в γ раз, то электрическое поле E должно измениться в γ^{-1} раз, чтобы потенциал $V \sim El$ остался неизменным. Из уравнений Максвелла следует, что величины D , H и B меняются так же, как и E . Плотность тока i , которая эквивалентна току смещения $\partial D/\partial t$, должна измениться в γ^{-2} раз; это означает, что полный ток $I = il^2$ остается неизменным. Проводимость $\sigma (=i/E)$ изменится в γ^{-1} раз, индуктивность L , равная $V(dI/dt)$, и емкость $C (\sim l)$ в γ раз. Средняя длина свободного пробега, которая является одной из основных характеристик газового разряда, должна изменяться так же, как линейные размеры, так что энергия, приобретаемая на расстоянии свободного пробега, остается неизменной. Следовательно, плотность газа ρ , обратно пропорциональная длине свободного пробега, должна изменяться в γ^{-1} раз.

Законы подобия оказались весьма полезными при общих рассуждениях, однако ими следует пользоваться с осторожностью, поскольку они касаются только некоторых фундаментальных явлений, и многие второстепенные явления, в отдельных случаях играющие важную роль, не подчиняются этим законам. Например, число заряженных частиц в единице объема пропорционально i и, следовательно, меняется в γ^{-2} раз, тогда как число молекул пропорционально ρ и, следовательно, меняется

в γ^{-1} раз. Таким образом, степень ионизации не является инвариантом, как нам хотелось бы, а изменяется в γ^{-1} раз. Далее, так как сила $f(=iB/c)$, действующая на единицу объема, через который течет ток i , в присутствии магнитного поля B пропорциональна γ^{-3} , а плотность пропорциональна γ^{-1} , ускорение оказывается пропорциональным γ^{-2} , а не γ^{-1} , как это должно быть, исходя из его размерности lt^{-2} . Отсюда следует, что гидромагнитные волны (гл. 3) не подчиняются преобразованиям подобия.

Необходимо заметить, что преобразования подобия не влияют на атомные величины. Например, размеры атомов, длина волны излучаемого света и время жизни метастабильных состояний сохраняются.

Чтобы применить результаты, полученные в лаборатории с приборами, характерные линейные размеры которых порядка 10 см, к космическим явлениям, следует увеличить масштаб в 10^8 — 10^9 раз для перехода к условиям околоземного пространства, в 10^7 — 10^{10} раз для Солнца, в 10^{12} для межпланетного пространства и в 10^{21} — 10^{22} для Галактики. Вероятно, больший интерес представляет иной подход, а именно приведение космических явлений к лабораторным масштабам. В таком случае мы можем получить определенную информацию, касающуюся явлений более общего характера. Такой подход позволяет установить, какие величины являются наиболее важными, и помогает составить представление о возможности экспериментов по масштабному моделированию, которые иллюстрировали бы космические явления.

Табл. 4.2 показывает, каким образом можно применять преобразования подобия к некоторым важным объектам космической физики.

Укажем некоторые интересные особенности преобразования подобия, представленного в таблице. Прежде всего отметим, что в большинстве случаев приведенные плотности очень велики. Явления, наблюдаемые в высоком вакууме, могут служить аналогией только тех процессов, которые происходят в области околоземного пространства, непосредственно примыкающей к Земле. Лабораторной аналогией космического пространства является не вакуум, а высоко ионизованный газ очень большой плотности.

Еще более удивительно существование в космосе очень сильных магнитных полей. Они настолько сильны, что в настоящее время невозможно в лабораторных условиях создать поля, напряженность которых достаточна для модельных экспериментов.

Существование мощных магнитных полей приводит к двум серьезным последствиям. Во-первых, движение заряженных частиц в космосе по своему характеру обычно отличается от на-

Таблица 4.2

Объект	Характерные размеры, см			Плотность, частицы/см ³		Напряженность магнитного поля, гс		Характерное время	
	истинные	приведенные	масштабный множитель γ	истинная	приведенная	истинная	приведенная	истинное	приведенное
Ионосфера (слой F_1)	$10^6—10^7$	10	$10^{-5}—10^{-6}$	10^{10}	$10^{15}—10^{16}$	0,5	$5 \cdot 10^4—5 \cdot 10^5$	Период гигантских пульсаций 100 сек 0,1—1 мсек Одни сутки 10 ⁵ сек 1 мсек Один оборот Солнца 2 · 10 ⁶ сек 2 мсек	
Экзосфера	10^9	10	10^{-8}	$10^5—10$	$10^{13}—10^9$	$0,5—5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^7—5 \cdot 10^4$		
Межпланетное пространство	10^{13}	10	10^{-12}	1—10	$10^{12}—10^{13}$	10^{-4}	10^8		
Межзвездное пространство	$3 \cdot 10^{22}$	10	$3 \cdot 10^{-22}$	1	$3 \cdot 10^{21}$	$10^{-6}—10^{-5}$	$3 \cdot 10^{15}—3 \cdot 10^{16}$	Период галактического вращения 3 · 10 ⁸ лет 3 мсек Возраст вселенной 10 ¹⁰ лет 10 ⁻³ мсек	
Межгалактическое пространство	$>3 \cdot 10^{27}$	10	$<3 \cdot 10^{-27}$	10^{-4} (?)	$>3 \cdot 10^{22}$	10^{-7} (?)	$>3 \cdot 10^{19}$		
Солнечная хромосфера	10^8	10	10^{-7}	$10^{11}—10^{14}$	$10^{18}—10^{21}$	$10^3—1$	$10^{10}—10^7$	Время жизни солнечного факела 10 ³ сек 100 мсек Время жизни протуберанца 10 ⁵ сек 10 мсек Время жизни корональной дуги 10 ³ сек 10 ⁻¹ —1 мсек Солнечный цикл 22 года 70—700 мсек	
Солнечная корона	$10^{10}—10^{11}$	10	$10^{-9}—10^{-10}$	$10^8—10^6$	$10^{17}—10^{16}$	$10^2—10^{-1}$	$10^{11}—10^9$		

Плотность межпланетного пространства существенно меняется во времени. Верхний предел плотности межпланетного пространства относится к моменту корпускулярной эмиссии Солнца.

Сведения о плотности и напряженности магнитного поля межгалактического пространства предположительны.

Максимальная напряженность магнитного поля хромосферы и короны относится к областям, расположенным над пятнами.

блюдаемого в лабораторных условиях. В космических условиях радиус кривизны траектории очень мал, и частицы движутся в направлении магнитного поля или дрейфуют перпендикулярно полю. Движение подобного типа рассмотрено в гл. 2.

Во-вторых, любое движение поперек магнитного поля легко создает сильные электрические поля (см. разд. 1.3). Например, если напряженность приведенного магнитного поля составляет 10^6 гс, а скорость равна $3 \cdot 10^5$ см/сек, то возникает электрическое поле $E=10$ ед. CGSE $=3000$ в/см, а при напряженности 10^{10} гс и той же скорости возникает поле напряженности $30 \cdot 10^6$ в/см. Таким образом, электрические поля космического пространства, приведенные к лабораторным масштабам, очень велики.

Наконец, представляют интерес временные масштабы преобразования, представленного в табл. 4.2. Факелы, корональные дуги, а также начальную стадию магнитных бурь следует рассматривать как очень короткоживущие процессы. Их эквивалентная длительность по порядку величины равна времени зажигания электрического разряда. Это означает, что в космической физике важную роль играют переходные процессы.

4.2.3. Общие свойства плазмы

Лабораторная плазма состоит из нейтральных молекул (одноатомных или многоатомных), электронов, положительных (а во многих случаях и отрицательных) ионов, а также из квантов, излучаемых возбужденными атомами. В лабораторных разрядах степень ионизации обычно мала, однако в некоторых установках, используемых для термоядерных исследований, степень ионизации достигает очень высоких значений. В космической физике ионизация может быть более или менее полной. Исключение составляют атмосферы планет и межзвездные области HI.

Электроны, ионы и молекулы многократно сталкиваются друг с другом. В обычной плазме лишь очень небольшая доля электронов обладает скоростями, достаточными для ионизации или возбуждения молекул. Следовательно, большинство столкновений между электронами и молекулами носит упругий характер. Поскольку масса электрона сильно отличается от масс других частиц, изменение энергии при таких столкновениях невелико. При соударении с тяжелой частицей электрон передает часть своей кинетической энергии порядка m_e/M , где m_e — масса электрона, а M — масса тяжелой частицы (см., например, [10]). Таким образом, если средняя энергия электронов отличается от энергии молекул, то для выравнивания этих энергий потребуется

несколько тысяч соударений ($m_e/M \leq 1/1840$). Ионы и молекулы имеют массы одного порядка, так что при соударениях энергия изменяется на величину порядка полной кинетической энергии. Поэтому различие в средних энергиях таких частиц быстро сглаживается (см. разд. 4.3.2).

В типичной плазме распределение скоростей молекул, как и в обычном газе, является, по крайней мере в первом приближении, максвелловским. Такое распределение характеризуется температурой T_m . На ионы и электроны действует электрическое поле, и частицы приобретают скорость, направленную параллельно или антипараллельно полю. Эта скорость часто оказывается малой по сравнению со скоростью хаотического движения. В случае сильного электрического поля распределение скоростей хаотического движения отличается от максвелловского, особенно для сильно ионизованной плазмы. Однако во многих случаях даже ионы и электроны имеют распределение, близкое к максвелловскому. Поэтому часто говорят об электронном газе, имеющем некоторую «электронную температуру» T_e , определяемую из условия, что $\frac{3}{2} kT_e$ (k — постоянная Больц-

мана) равно средней энергии хаотического движения электронов. Аналогично можно определить и «ионную температуру».

Направленное движение в электрическом поле вызывает нагрев как электронного, так и ионного газов. В связи с тем, что обмен энергией между электронами и другими компонентами плазмы происходит медленно, электронный газ может достигать температур, на один-два (и даже три) порядка превышающих температуру молекулярного газа. Теплообмен между ионным и молекулярным газами происходит достаточно быстро, для того чтобы разница между ионной и молекулярной температурами не достигала больших значений.

Средняя энергия электронов обычно значительно меньше энергии ионизации или возбуждения молекул. Однако, согласно максвелловскому распределению, небольшая часть электронов имеет энергию, в несколько раз превышающую среднюю. Такие электроны способны ионизовать или возбуждать атомы и молекулы.

Поведение плазмы крайне усложняется разнообразными взаимодействиями между электронами, в большей или меньшей степени возбужденными или ионизованными атомами или молекулами и квантами. В принципе эти явления можно рассматривать при помощи точных статистических методов. Однако на практике вследствие сложности указанных явлений большинство таких теорий могут быть лишь приближенными. Но в некоторых случаях можно добиться достаточной степени точности,

не прибегая к самым совершенным методам статистической механики.

Дебаевский радиус. Средние плотности положительных и отрицательных зарядов в плазме почти в точности равны друг другу. Как показано в разд. 1.4, локальное значение отношения этих плотностей не может заметно отличаться от единицы в большом объеме, поскольку в таком случае возникают огромные электрические потенциалы. Заметное различие между плотностями положительных и отрицательных зарядов возможно только внутри достаточно малых областей, таких, например, как слой, отделяющий плазму от окружающих стенок. Размеры такой области можно оценить следующим образом [11]. Потенциальная энергия, приходящаяся на одну частицу в электрическом поле, созданном нескомпенсированным пространственным зарядом, не может превышать тепловую энергию этой частицы. Потенциал поля V удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi(e_i n_i + e_e n_e), \quad (1)$$

где e_e , e_i и n_e , n_i — заряды и концентрации электронов и положительных ионов соответственно. Представим себе для простоты плоский слой толщиной d , из которого удалены все положительные частицы. Тогда возникает разность потенциалов, равная

$$V = -4\pi n_e e_e \frac{d^2}{2} \quad (2)$$

(при условии, что напряженность электрического поля равна нулю на одной из поверхностей слоя). Разность потенциальных энергий электрона на границах слоя равна $4\pi n_e e_e^2 (d^2/2)$. Средняя кинетическая энергия (теплого движения), определяемая компонентой скорости, перпендикулярной слою, равна $\frac{1}{2} kT_e$. Потенциальная и кинетическая энергии равны, если

$$4\pi n_e e_e^2 \frac{d^2}{2} = \frac{1}{2} kT_e, \quad (3)$$

и тогда толщина слоя равна

$$d = \left(\frac{kT_e}{4\pi n_e e_e^2} \right)^{1/2} = \lambda_D. \quad (4)$$

Величина λ_D , определяемая выражением (4), называется *дебаевским радиусом* (радиус экранирования). Это понятие впервые ввел Дебай, который установил, что потенциал точечного заряда

в электролите имеет вид

$$V = \text{const} \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}. \quad (5)$$

Экспоненциальный множитель характеризует электростатическое экранирование поля точечного заряда, обусловленное переориентацией окружающих заряженных частиц. В результате этого экранирования поле (5) точечного заряда по существу ограничено сферой радиуса λ_D — «дебаевской сферой». Аналогичное рассмотрение справедливо для плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, и приводит к подобным результатам,

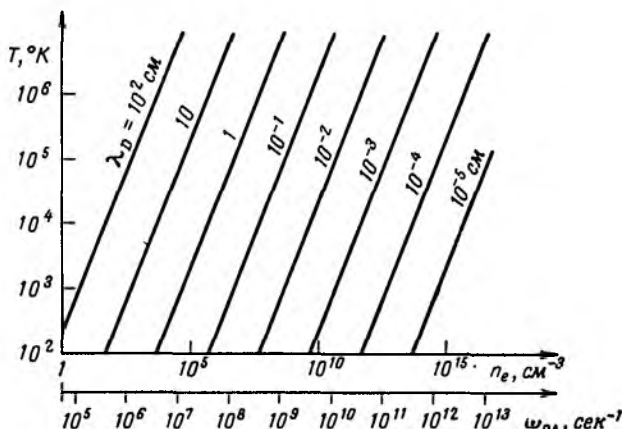


Рис. 4.1. Номограмма для определения дебаевского радиуса λ_D и плазменной частоты $\omega_{пл}$.

в том числе к уравнению (5). Таким образом, в равновесной плазме эффективная глубина проникновения электростатического поля имеет порядок λ_D .

В плазме, далекой от состояния теплового равновесия (как это часто бывает в случае плазмы низкой плотности, см. разд. 5.1), понятие дебаевского радиуса становится несколько неопределенным.

Величина дебаевского радиуса для различных значений электронной плотности n_e и электронной температуры T_e приведена на рис. 4.1.

Плазменная частота. Другой величиной, характеризующей плазму, является *плазменная частота*, которая тесно связана с дебаевским радиусом. Рассмотрим бесконечный слой плазмы толщиной d (рис. 4.2, а) и предположим, что электроны

смещены на небольшое расстояние $\xi \ll d$ относительно ионов. На каждой поверхности слоя создается поверхностная плотность зарядов $\pm n_e e \xi$. Это приводит к возникновению в слое электрического поля напряженностью $4\pi n_e e \xi$, которое стремится вернуть электроны в положение равновесия. Уравнение движения имеет вид

$$m_e n_e d \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - e_e n_e d \cdot 4\pi n_e e \xi \quad (6)$$

и описывает колебания с угловой частотой

$$\omega_{\text{пл}} = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Очевидно, что этот простой случай соответствует только одному из многих возможных видов колебаний. На рис. 4.2, б по-

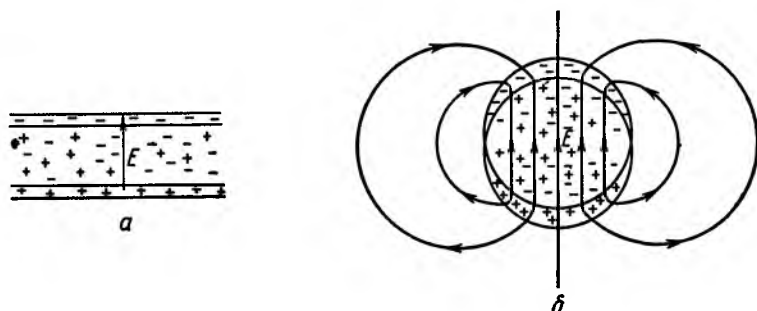


Рис. 4.2. Примеры коллективных колебаний электронов в плазме [12].
а — колеблющийся слой; б — колеблющийся цилиндр.

казан один из видов колебаний цилиндрического столба. В этом случае угловая частота равна $\omega_{\text{пл}}/\sqrt{2}$ [12].

Плазменная частота характеризует скорость, с которой электростатические силы в плазме ликвидируют флуктуацию зарядовой плотности и являются одним из фундаментальных понятий в теории плазменных колебаний.

Что касается соотношения между плазменной частотой и дебаевским радиусом, то сравнение формул (4) и (7) показывает, что величина $1/\omega_{\text{пл}}$ — это время, за которое частица, движущаяся со скоростью $(kT_e/m_e)^{1/2}$, проходит расстояние, равное λ_D .

Численные значения $\omega_{\text{пл}}$ для различных n_e можно найти на рис. 4.1.

4.3. Столкновительные процессы в плазме

Если ионизованный газ находится в электрическом поле, то все заряженные частицы движутся с ускорением, причем положительные и отрицательные частицы движутся в противоположных направлениях. В результате столкновений как между заряженными частицами и нейтральным газом, так и между заряженными частицами противоположных знаков средние скорости достигают постоянных значений (см. разд. 4.3.4).

Взаимодействие заряженной частицы с нейтральной существенно отличается от взаимодействия двух заряженных частиц. В первом случае силы короткодействующие и поэтому значительны лишь тогда, когда частицы находятся на расстоянии, сравнимом с их размерами. Это расстояние во всех случаях, за исключением недр звезд, гораздо меньше среднего расстояния между частицами. Следовательно, любая данная частица взаимодействует с другими при соударении только в течение короткого интервала времени, а большую часть времени находится в свободном движении. Это соображение лежит в основе «метода длины свободного пробега», который очень удобен для приближенного анализа поведения газов. Если силы короткодействующие, то можно ограничиться приближением парных столкновений, поскольку мала вероятность того, что в момент соударения двух частиц третья частица окажется достаточно близко, чтобы повлиять на столкновение.

Сила взаимодействия двух заряженных частиц уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Среднее число частиц, находящихся внутри сферы радиуса r , пропорционально r^3 . С увеличением радиуса r число частиц внутри сферы возрастает быстрее, чем уменьшаются силы взаимодействия между ними. Вследствие этого на любую выделенную частицу большее влияние оказывает непрерывное взаимодействие со многими удаленными частицами, чем сравнительно редкие взаимодействия с частицами, которые оказываются вблизи нее.

Поскольку анализ дальних взаимодействий требует несколько иного подхода, целесообразно отдельно рассмотреть свойства *слабо ионизованных газов*, в которых наиболее важную роль играют соударения заряженных частиц с нейтральными молекулами газа, и свойства *сильно ионизованных газов*, в которых преобладают соударения между заряженными частицами. Следует отметить, что столкновения между заряженными частицами характеризуются большими значениями эффективных поперечных сечений, поэтому такие столкновения могут преобладать даже при относительно низкой степени ионизации. Таким

образом, плазму со степенью ионизации больше 1% с точки зрения столкновительных процессов следует считать высокоионизованной.

В случае слабоионизованной плазмы (см. разд. 4.3.1) мы будем пользоваться методом длины свободного пробега, с помощью которого вычислим подвижность заряженных частиц, а затем проводимость.

В разд. 4.3.2 рассматривается динамика кулоновских взаимодействий и вычислено трение, обусловленное такими взаимодействиями. Полученные результаты используются затем в разд. 4.3.3 для расчета проводимости в высокоионизованной плазме и в разд. 4.3.4 для рассмотрения «убегающих электронов».

Если мы имеем дело с токами, независимыми от времени в немагнитной плазме, вектор плотности тока $\mathbf{i}$ направлен так же, как и связанный с ним вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. В магнитной плазме ситуация часто оказывается значительно более сложной (см. разд. 5.1—5.3).

Экспериментальных измерений проводимости плазмы очень мало. Прежде всего подобные измерения связаны с большими трудностями; кроме того, само понятие «проводимость» нередко лишено четкого физического смысла.

4.3.1. Электрический ток в слабоионизованной плазме

Предположим, что плотность заряженных частиц одного сорта с зарядом e_k и массой m_k равна n_k . Электрическое поле сообщает этим частицам некоторую среднюю скорость дрейфа

$$\mathbf{u}_k = b_k \mathbf{E}. \quad (1)$$

Для слабых полей b_k является константой, которая называется *подвижностью*. Если известны подвижности всех компонент газа, то легко вычислить его *проводимость*. Действительно, плотность тока $\mathbf{i}$, создаваемого полем, дается формулой

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k e_k \mathbf{u}_k = \mathbf{E} \sum_k n_k e_k b_k, \quad (2)$$

где суммирование производится по всем сортам заряженных частиц. Поскольку проводимость σ определяется как

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3)$$

то получаем

$$\sigma = \sum_k n_k e_k b_k. \quad (4)$$

Для отрицательных частиц величины e_k и b_k отрицательны.

Проводимость ионизованных газов рассчитывается при помощи точных статистических методов, развитых Чепменом и Каулингом (см. [4]). Их расчеты с математической точки зрения сложны, поэтому для общего рассмотрения целесообразнее пользоваться более простым «методом длины свободного пробега», тем более, что он более наглядно демонстрирует физическую сторону явлений. Как показали Чепмен и Каулинг, этот метод, вообще говоря, дает достаточно точные формулы, особенно если иметь в виду то обстоятельство, что в любом случае конечные результаты зависят от некоторых неопределенных параметров, например таких, как сечения атомных столкновений.

В методе длины свободного пробега предполагается, что молекулы газа (в том числе ионы и электроны) претерпевают мгновенные соударения друг с другом, а между соударениями движутся свободно. При строгом рассмотрении этот метод принимает во внимание статистическое распределение скоростей молекул, длин свободных пробегов и т. д.; для менее точных расчетов используются только средние значения величин. При этом результаты точного и приближенного расчетов отличаются менее чем в два раза; такая точность вполне достаточна для многих приложений.

Пусть v_k — средняя тепловая скорость, λ_k — средняя длина свободного пробега и τ_k — среднее время между двумя соударениями частиц сорта k :

$$\tau_k = \frac{\lambda_k}{v_k}. \quad (5)$$

За время τ_k частица в электрическом поле проходит без столкновений расстояние

$$D_k = \frac{e_k E}{2m_k} \tau_k^2. \quad (6)$$

Следовательно, ее средняя скорость в направлении электрического поля равна

$$u_k = \frac{D_k}{\tau_k} = \frac{e_k E}{2m_k} \tau_k = \frac{e_k \lambda_k}{2m_k v_k} E. \quad (7)$$

Отсюда получим подвижность

$$b_k = \frac{u_k}{E} = \frac{\gamma e_k \lambda_k}{m_k v_k}, \quad (8)$$

где $\gamma = 1/2$. Более строгий расчет, принимающий во внимание статистическое распределение скоростей и длины свободных пробегов, дает ту же самую формулу, но с $\gamma = 1$. Различные авторы приводят для γ значения, лежащие в указанных пределах (см. [9]). Для электронов можно положить $\gamma = 0,85$.

При малых значениях $E v_k$, а следовательно, и b_k не зависят от напряженности электрического поля, но если E становится больше некоторого определенного значения, то, как мы сейчас увидим, они становятся зависимыми от E .

Если частица движется в электрическом поле, ее кинетическая энергия W_k , равная

$$W_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2, \quad (9)$$

увеличивается со скоростью

$$\frac{dW_k}{dt} = e_k E u_k. \quad (10)$$

Пусть κ_k — часть ее кинетической энергии, которая теряется в среднем при столкновении с молекулой. Стационарное состояние достигается в том случае, когда увеличение энергии вследствие дрейфа в электрическом поле становится равным потерям энергии при $1/\tau_k$ столкновениях в секунду:

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{\kappa_k W_k}{\tau_k}. \quad (11)$$

При помощи формул (5), (8) — (11) получаем

$$\frac{1}{2} \gamma e_k^2 \lambda_k^2 E^2 = \kappa_k W_k^2 \quad (12)$$

или

$$W_k = \left(\frac{\gamma}{2\kappa_k} \right)^{1/2} e_k \lambda_k E. \quad (13)$$

Величина относительных потерь при соударениях κ_k зависит от характера соударений. При неупругом соударении κ_k может достигать значения, равного единице, причем вся кинетическая энергия налетающей частицы переходит в энергию возбуждения или ионизации.

Обычно большинство соударений носит упругий характер, и в этом случае κ_k можно вычислить по формуле, полученной Краватом [13]:

$$\kappa_k = \gamma_1 \frac{m_k}{M} \left(1 - \frac{W_M}{W_k} \right), \quad (14)$$

где M — масса молекулы, W_M — средняя кинетическая энергия молекулы, а γ_1 — постоянная порядка единицы

$$\gamma_1 = \frac{8}{3} \left(\frac{M}{m_k + M} \right)^2. \quad (15)$$

Подставляя (14) в формулу (12), находим

$$W_k = \frac{1}{2} W_M + \left[\frac{1}{4} W_M^2 + \frac{\gamma_2 M (e_k \lambda_k E)^2}{m_k} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

где

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\gamma_1}. \quad (17)$$

γ_2 — численная константа. Если заряженными частицами являются ионы ($k \rightarrow i$), так что $M/m_i \approx 1$, то их средняя энергия W_i приблизительно равна средней энергии молекул W_M , если только E не очень велико. Если же заряженными частицами являются электроны ($k \rightarrow e$), то $M/m_e \gg 1840$, поэтому даже относительно слабые поля приводят к тому, что W_e становится значительно больше W_M . Это согласуется с изложенным в разд. 4.2: ионная температура T_i обычно приблизительно равна температуре газа, тогда как электронная температура T_e быстро становится значительно больше T_i . В силу соотношения

$$W_M = \frac{3}{2} k T_M, \quad (18)$$

и если заряженные частицы — электроны, т. е.

$$W_e = \frac{3}{2} k T_e, \quad (19)$$

то из (16) получаем

$$T_e = \frac{1}{2} T_M + \left[\frac{1}{4} T_M^2 + \frac{\gamma_2 M (\epsilon \lambda_e E)^2}{m_e} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

где ϵ — переводной коэффициент, связывающий электронвольты и температуру:

$$\epsilon = \frac{2 |e_e|}{3k} = 2,32 \cdot 10^6 \text{ ед. CGSE} = 7700 \text{ град/эв}. \quad (21)$$

Электронная температура заметно отличается от температуры газа, когда $\lambda_e E$ превышает величину

$$\lambda_e E = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/2} T_M. \quad (22)$$

При $M = 2000 m_e$ произведение средней длины свободного пробега на величину напряженности электрического поля $\lambda_e E$ равно 0,001 в, если $T_M = 300^\circ$, и $\lambda_e E = 0,02$ в, если $T_M = 6000^\circ$. В лабораторных разрядах электронная температура обычно составляет 20 000—50 000°.

Если $T_e \approx T_M$, скорость дрейфа пропорциональна электрическому полю E . Согласно формуле (8),

$$u_e = \gamma \frac{e_e}{m_e} \frac{\lambda_e}{v_e} E, \quad (23)$$

где $\gamma \approx 1$ и m_e — масса электрона; скорость v_e определяется соотношением

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{3}{2} k T_e \approx \frac{3}{2} k T_M. \quad (24)$$

Если же $T_e \gg T_M$, то по формуле (20) приближенно получаем

$$T_e = \varepsilon \left(\frac{\gamma_2 M}{m_e} \right)^{1/2} \lambda_e E. \quad (25)$$

Тепловую скорость определим из выражений (9), (19) и (21)

$$v_e = \left(\frac{|e_e|}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{4\gamma_2 M}{m_e} \right)^{1/4} (\lambda_e E)^{1/2}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в формулу (8), найдем скорость дрейфа

$$u_e = \left(\frac{|e_e|}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \gamma^3 \gamma_1 \right)^{1/4} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/4} (\lambda_e E)^{1/2} \approx \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/2} v_e. \quad (27)$$

Таким образом, $u_e \sim \sqrt{E}$.

Если известны скорости дрейфа всех заряженных частиц, то из соотношения (2) можно определить плотность тока i .

Как мы видели раньше, для малых величин напряженности электрического поля E , при которых температура заряженных частиц приблизительно равна температуре газа, скорости u_i и u_e пропорциональны E . В этом случае проводимость равна

$$\sigma = \gamma \left(\frac{e_i^2 n_i \lambda_i}{m_i v_i} + \frac{e_e^2 n_e \lambda_e}{m_e v_e} \right). \quad (28)$$

Поскольку $\lambda_e > \lambda_i$, $m_e v_e \ll m_i v_i$ и обычно $n_i \approx n_e$ (см. разд. 1.4 и 4.2.3), то электронная проводимость обычно значительно больше ионной и первым членом можно пренебречь:

$$\sigma = \gamma \frac{e_e^2}{m_e} \frac{n_e \lambda_e}{v_e} = \gamma \frac{e_e^2}{m_e} n_e \tau_e \quad (29)$$

($\tau_e = \lambda_e / v_e$ — время между двумя соударениями). Если электронная температура выше температуры газа, то, согласно формуле (27), i пропорционально $E^{1/2}$. Если мы все же хотим пользоваться формулой (3), то необходимо принять, что σ пропорциональна $E^{-1/2}$. Таким образом, проводимость не зависит от напряженности E для малых значений E , но как только напряженность превысит значение, определяемое выражением (22), проводимость начинает уменьшаться.

4.3.2. Кулоновские столкновения в плазме

Попарные соударения между частицами, обусловленные силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними, рассматриваются в учебниках (см., например, [10]). Для двух частиц с зарядами e_1 и e_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга, сила электростатического взаимодействия равна

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad (30)$$

В системе центра масс каждая из сталкивающихся частиц изменяет направление своего движения на угол χ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{e_1 e_2}{m v^2 l}, \quad (31)$$

где m — приведенная масса:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (32)$$

v — относительная скорость на бесконечности и l — параметр соударения (наименьшее расстояние, на которое частицы сблизились бы, если бы они не взаимодействовали). В случае малых углов отклонения формулу (31) можно переписать в виде

$$\chi = \left(\frac{e_1 e_2}{l}\right) / \left(\frac{m v^2}{2}\right). \quad (33)$$

Обратная пропорциональность квадрату расстояния характерна как для кулоновского взаимодействия, так и для гравитационного притяжения. Поэтому в физике плазмы и в звездной динамике возникают аналогичные задачи на рассеяние, и некоторые результаты для одного вида поля можно использовать в задачах на рассеяние в другом поле. Например, работы Чандрасекара [14—16] о временах релаксации звездных систем очень важны для физики плазмы.

Для анализа соударений в плазме удобно рассмотреть поведение некоторой выделенной *пробной частицы*, движущейся в среде *полевых частиц* [14—16]. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда полевые частицы имеют большую массу ($m_2 \gg m_1 \approx m$) и неподвижны. (Подобное рассмотрение применимо для электрона, движущегося среди ионов.)

Чтобы отклониться на угол 90° и более, пробная частица должна приблизиться к полевой частице настолько близко, чтобы выполнялось соотношение

$$l \leq l_c = \frac{e_1 e_2}{m_1 v_1^2}. \quad (34)$$

Назовем эти соударения *близкими*. За одну секунду происходит $n_2 v_1 \pi l_c^2$ таких соударений.

Другими словами, средняя частота близких столкновений равна

$$\nu_{\text{близ}} = \frac{1}{\tau_{\text{близ}}} = n_2 v_1 \pi l_c^2 = \frac{\pi n_2 e_1^2 e_2^2}{m_1^2 v_1^3}, \quad (35)$$

где индекс 1 относится к пробной частице, а индекс 2 — к полевым частицам.

Так как угол отклонения медленно уменьшается с увеличением прицельного расстояния, то взаимодействие пробной частицы с удаленными полевыми частицами становится очень важным. Хотя каждое из этих *дальних соударений* не вызывает заметного отклонения, число их настолько велико, что их суммарное действие на пробную частицу оказывается даже большим, чем действие относительно редких близких столкновений. (Соответствующие явления в звездной динамике рассмотрены Джинсом [17].)

Оценить влияние дальних соударений можно из следующего простого рассмотрения. (Более детальное рассмотрение см. в [11].) Каждое дальнее соударение вызывает небольшое угловое отклонение, определяемое формулой (33), которое приводит к соответствующему изменению вектора количества движения пробной частицы. Составляющая количества движения $p_{\perp}$, нормальная к первоначальному направлению, изменяется на величину

$$\delta p_{\perp} = \chi p = \chi m v_1 = \frac{2e_1 e_2}{v_1 l}, \quad (36)$$

где для простоты предположим, что $m_2 \gg m_1 \approx m$, $v_2 \ll v_1$.

Если дальние соударения происходят хаотически, то средняя скорость изменения величины $p_{\perp}^2$ равна

$$\frac{d}{dt} p_{\perp}^2 = \int \left(\frac{2e_1 e_2}{v_1 l} \right)^2 v_1 n 2\pi l \, dl. \quad (37)$$

Нижний предел интегрирования примем равным l_c [см. формулу (34)], а верхний — λ_D [см. формулу (4) разд. 4.2.3] и тогда получим

$$\frac{d}{dt} p_{\perp}^2 = \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{v_1} \cdot 8\pi \ln \Lambda, \quad (38)$$

где

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{\lambda_D}{l_c} \right) \quad (39)$$

и

$$\lambda_D = \left(\frac{kT_e}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Дебаевский радиус выбирается в качестве верхнего предела интегрирования потому, что пробная частица электрически экранирована от полевых частиц, находящихся на расстояниях, превышающих λ_D . Глубокий анализ показал, что подобный выбор параметра обрезания, как правило, дает хорошее приближение [18—24].

Множитель $\ln \Lambda$ называется *кулоновским логарифмом*. Его значения для водородной плазмы при различных плотностях и температурах приведены на рис. 4.3.

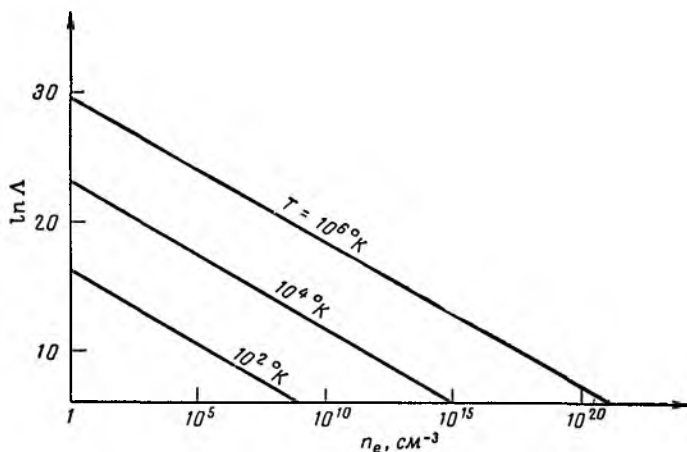


Рис. 4.3. Диаграмма для определения кулоновского логарифма (по Спитцеру [11]).

К моменту времени τ перпендикулярная составляющая количества движения приобретает значение, равное первоначальному импульсу $m_1 v_1$. К этому моменту времени, который определяется выражением

$$\tau = \frac{(m_1 v_1)^2}{dp_{\perp}^2/dt} = \frac{m_1^2 v_1^3}{e_1^2 e_2^2 n_2 8\pi \ln \Lambda}, \quad (41)$$

результатирующее отклонение в среднем становится сравнимым с величиной $\pi/2$; это означает, что отклонение на большой угол является результатом многих дальних соударений. Соответствующая эквивалентная частота дальних соударений $1/\tau$

отличается от частоты близких соударений [см. формулу (35)] множителем $8 \ln \Lambda$, который обычно много больше единицы (его типичное значение ~ 100 ; см. рис. 4.3). Таким образом, влияние близких соударений пренебрежимо мало по сравнению с действием дальних соударений.

Время отклонения τ для электронов, сталкивающихся с протонами, является одним из *релаксационных времен*, характеризующих изменение распределения скоростей в плазме. Для точного расчета времен релаксации необходимо учитывать движение полевых частиц. Эти вычисления громоздки, и мы приведем лишь их конечные результаты, полученные Чандрасекаром [14—16] и Спитцером [11, 25].

Рассмотрим электронный газ, имеющий плотность n_e и температуру T_e и предположим, что пробные частицы обладают средней тепловой скоростью, а именно $(3kT_e/m_e)^{1/2}$. Для таких пробных частиц время отклонения в ранее упомянутом смысле, но с учетом движения полевых частиц равно

$$\tau_{ee} = \frac{m_e^2 (3kT_e/m_e)^{3/2}}{e_e^4 n_e \cdot 0,714 \cdot 8\pi \ln \Lambda}. \quad (42)$$

Назовем его *временем взаимных столкновений электронов*. Оно характеризует скорость восстановления изотропии в распределении электронов по скоростям в результате взаимодействия между самими электронами. Иными словами, оно характеризует скорость термализации энергии электронов.

Аналогично *время взаимных столкновений ионов*, имеющих массу m_i , заряд e_i , температуру T_i и плотность n_i , равно

$$\tau_{ii} = \frac{m_i^2 (3kT_i/m_i)^{3/2}}{e_i^4 n_i \cdot 0,714 \cdot 8\pi \ln \Lambda}. \quad (43)$$

Время взаимных столкновений ионов с молекулярным весом A и зарядом $e_i = -Ze_e$ отличается от τ_{ee} электронов (при той же температуре и плотности) на множитель

$$\frac{\tau_{ii}}{\tau_{ee}} \approx 43 A^{1/2} Z^{-3}. \quad (44)$$

Здесь мы учли, что $e_i n_i = -e_e n_e$.

При взаимодействии электронного и ионного газов с разными температурами тепловая энергия переходит от более горячего газа к более холодному. Если и электроны, и ионы имеют приблизительно максвелловские распределения по скоростям с температурами T_e и T_i , то выравнивание температур опреде-

ляется уравнением

$$-\frac{dT_e}{dt} = \frac{T_e - T_i}{\tau_{\text{равн}}}, \quad (45)$$

где $\tau_{\text{равн}}$ — время установления равнораспределения между электронной и ионной компонентами

$$\tau_{\text{равн}} = \frac{m_e m_i [3kT_e/m_e + 3kT_i/m_i]^{3/2}}{e_e^2 e_i^2 n_i (6\pi)^{1/2} 8 \ln \Lambda} \quad (46)$$

(см. [11, 25]). Если $T_e = T_i$, то сравнение с формулой (43) дает

$$\tau_{\text{равн}} = 0,517 \frac{e_i^2}{e_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \tau_{ii}, \quad (47)$$

так что $\tau_{\text{равн}}$ гораздо больше времени взаимных соударений ионов. Например, в плазме, состоящей из электронов и протонов с равными температурами, имеем

$$\tau_{\text{равн}} \approx 22\tau_{ii} \approx 950\tau_{ee}. \quad (48)$$

Следовательно, выравнивание энергий электронной и ионной компонент происходит настолько медленно, что каждой из них можно приписать распределение, близкое к максвелловскому.

Наконец, определим время релаксации, характеризующее замедление заряженной частицы (имеющей массу m_1 , заряд e_1 , скорость v) в результате соударений с полевыми частицами (имеющими массу m_2 , заряд e_2 , температуру T_2 и плотность n_2), т. е. время замедления τ_s .

Поскольку среднее замедление равно v/τ_s , то эффективная замедляющая сила, действующая на пробную частицу, равна

$$F = -\frac{m_1 v}{\tau_s}. \quad (49)$$

Величина v/τ_s вычислена Чандрасекаром [14—16], который назвал ее коэффициентом динамического трения. Согласно Чандрасекару,

$$F = -\frac{4\pi e_1^2 e_2^2 (1 + m_1/m_2) n_2 \ln \Lambda}{m_1 v_T^2} f\left(\frac{v}{v_T}\right), \quad (50)$$

где

$$v_T = \left(\frac{2kT_2}{m_2} \right)^{1/2} \quad (51)$$

и

$$f\left(\frac{v}{v_T}\right) = 2\pi^{-1/2} \left(\frac{v}{v_T}\right)^{-2} \left[\int_0^{v/v_T} e^{-x^2} dx - \left(\frac{v}{v_T}\right) e^{-v^2/v_T^2} \right]. \quad (52)$$

Функция $f(v/v_T)$ представлена графически на рис. 4.4. В предельных случаях $v/v_T \ll 1$ и $v/v_T \gg 1$ выражение (52) принимает вид

$$f\left(\frac{v}{v_T}\right) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{v}{v_T} \quad \left(\frac{v}{v_T} \ll 1\right) \quad (53)$$

и

$$f\left(\frac{v}{v_T}\right) = \left(\frac{v}{v_T}\right)^{-2} \quad \left(\frac{v}{v_T} \gg 1\right). \quad (54)$$

4.3.3. Ток в сильноионизованной плазме в присутствии слабого электрического поля

В электрическом поле положительные ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях. Если электрическое поле достаточно слабо, то относительная скорость дрейфа значительно меньше тепловой скорости электронов. Величина скорости дрейфа определяется из условия, что в состоянии равновесия сила трения между электронами и ионами в точности компенсируется ускоряющей силой электрического поля.

Для оценки скорости дрейфа v предположим, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям в системе координат, связанной с дрейфовым движением («смещенное максвелловское распределение»). В этой системе ионы движутся в неподвижном электронном газе с температурой T_e . В этом случае на каждый ион действует сила трения F , определяемая формулой (50) разд. 4.3.2, если ионы рассматриваются как пробные, а электроны — как полевые частицы. Сила трения, действующая на ионы, содержащиеся в единице объема, равна $F_i = n_i F$.

На единицу объема электронного газа действует равная по величине, но противоположно направленная сила.

Пренебрегая m_e по сравнению с m_i , из соотношений (50) и (53) получим

$$F_e = -F_i = \frac{16\sqrt{\pi}}{3} \frac{e_e^2 e_i^2 n_i n_e \ln \Lambda}{m_e v_T^2} \frac{v}{v_T}. \quad (55)$$

Ускоряющая сила, создаваемая электрическим полем, равна

$$F'_e = e_e n_e E = -e_i n_i E. \quad (56)$$

Условие

$$F_e + F'_e = 0 \quad (57)$$

определяет равновесное значение v , а следовательно, и плотность тока

$$i = -e_e n_e v = \frac{3}{4\sqrt{2\pi} \ln \Lambda} \frac{(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2} |e_e| e_i} E. \quad (58)$$

Разделив это выражение на E , получим формулу для проводимости σ . Однако полученное таким образом значение проводимости является приближенным в связи с упрощающим предположением относительно распределения по скоростям.

Для точного определения значения проводимости σ необходим более глубокий анализ распределения электронов по скоростям. Соответствующие расчеты были выполнены Чепменом [26], Каулингом [27] и др. (см. [4]). С учетом электрон-электронных столкновений Спитцер и Хэrm [28] получили

$$\sigma = \gamma \frac{2^{5/2}}{\pi^{3/2}} \frac{(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2} |e_i| e_i \ln \Lambda}, \quad (59)$$

где $0,5 < \gamma < 1$. Значение γ зависит от заряда иона [11].

Для однократно заряженных ионов ($e_i = -e_e = |e|$)

$$\gamma = 0,582, \quad (60)$$

а при увеличении e_i γ стремится к 1.

Численные значения проводимости приводятся в разд. 5.2.3.3 (стр. 204—206). Значения средней длины свободного пробега электронов даны в разд. 5.1.4 (стр. 193).

4.3.4. Высокоионизованная плазма в сильном электрическом поле. Убегающие электроны

В предыдущем разделе была вычислена сила трения, которая действует на электроны, дрейфующие относительно холодных ионов (см. формулу (55) разд. 4.3.3).

В предельном случае слабого поля, когда $v \ll v_T$, было получено выражение для проводимости. Откажемся теперь от ограничения $v \ll v_T$. Для ионов с единичным зарядом $e_i = -e_e = |e|$ сила, действующая на единицу объема, равна

$$F_e = n_e |e| E_c f\left(\frac{v}{v_T}\right), \quad (61)$$

где

$$v_T = \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{1/2} \quad (62)$$

и

$$E_c = \frac{4\pi |e|^3 n_i \ln \Lambda}{m_e v_T^2}. \quad (63)$$

Функция f определяется формулой (52) разд. 4.3.2 и графически представлена на рис. 4.4. Как видно из графика, функция имеет максимум $f_{\max} = 0,427$. Это означает, что при

$$E > E_{cf_{\max}} \quad (64)$$

сила сопротивления всегда меньше силы электрического ускорения, и стационарное состояние невозможно. Поскольку электрическое поле вызывает омический нагрев, электронная температура увеличивается, так что E_c уменьшается. Таким образом, условие (64) рано или поздно окажется выполненным, даже если в момент наложения электрического поля оно не выполнялось.

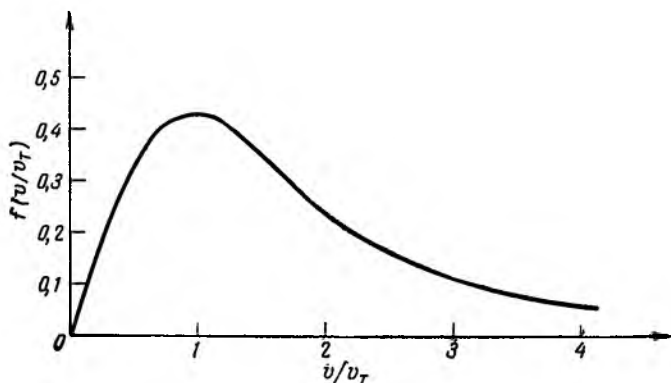


Рис. 4.4. График функции $f(v/v_T)$, входящей в выражение (50) разд. 4.3.2 для силы трения.

Отсутствие равновесия в высокоионизованной плазме, помещенной в сильное электрическое поле, было предсказано Джованелли [29] и детально изучено Дрейсером [30, 31], который получил формулы (61)—(64) и (66)—(69), используя уравнения Фоккера — Планка.

В сильном электрическом поле распределение электронов по скоростям может заметно отличаться от максвелловского. Это относится и к слабо, и к сильно ионизованной плазме. Поэтому уравнения (61)—(64), которые основаны на предположении о смещенном максвелловском распределении, являются лишь приближенными.

Даже в том случае, когда $E \ll E_{c \max}$, имеется некоторое количество очень быстрых электронов (соответствующие «хвосту» распределения), для которых ускорение в электрическом поле преобладает над торможением, обусловленным ионами. Поскольку, кроме того, эти электроны редко сталкиваются с остальными электронами, они отрываются от основной массы электронного газа и, таким образом, могут ускоряться независимо (убегающие электроны в слабом поле). На такую частицу действует сила трения $F_{\text{полн}}$ со стороны других электронов и ионов,

которые предполагаем однократно заряженными. При помощи формул (50) и (54) разд. 4.3.2 получаем

$$F_{\text{полн}} = 3|e|E_c \left(\frac{v}{v_T} \right)^{-2} \quad (65)$$

в предположении, что ионы неподвижны и основная часть электронов имеет максвелловское распределение. Тогда уравнение движения быстрого электрона имеет вид

$$m_e \frac{dv}{dt} = -|e|E - 3|e|E_c \left(\frac{v_T}{v} \right)^2 \frac{v}{v}. \quad (66)$$

Запишем уравнение (66) в системе координат с осью z , антипараллельной электрическому полю:

$$\frac{1}{v_x} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{v_y} \frac{dv_y}{dt} = - \frac{3|e|E_c}{m_e} \frac{v_T^2}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{3/2}}. \quad (67)$$

Умножая уравнение (66) на v , получим

$$\frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{2|e|E}{m_e} \left[v_z - \frac{3v_T^2 E_c / E}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}} \right]. \quad (68)$$

Согласно уравнению (67), компоненты v_x и v_y могут только уменьшаться. Поэтому если в какой-либо момент времени правая часть выражения (68) положительна, то при увеличении v_z сумма $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и правая часть выражения (68) возрастают, что приводит к непрерывному ускорению. Поэтому область пространства скорости, в которой происходит ускорение электронов, определяется неравенством

$$v_z (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} > 3v_T^2 \frac{E_c}{E}. \quad (69)$$

Эффект убегания электронов был экспериментально обнаружен в некоторых термоядерных устройствах по рентгеновскому излучению, которое возникало при соударении таких электронов со стенкой камеры (см., например, [32]).

4.4. Амбиполярная диффузия

Если плотность частиц некоторого сорта n_k меняется в пространстве, возникает диффузия. Поток частиц определяется выражением $-D_k \text{grad } n_k$ (см., например, [9]). Коэффициент диффузии D_k в приближенной теории равен

$$D_k \approx \frac{kT_k \tau_k}{m_k} \approx \frac{kT_k}{n_k e_k^2} \sigma_k, \quad (1)$$

где T_k , τ_k и σ_k — температура, время соударения и проводимость (см. формулы (4), (8) и (28) разд. 4.3.1). Диффузия заряженных частиц соответствует электрическому току

$$i_{kD} = e_k (-D_k \text{grad } n_k), \quad (2)$$

который складывается с током $\sigma_k E$, создаваемым электрическим полем E . Таким образом, полный ток, переносимый электронами, равен

$$i_e = \sigma_e E - e_e D_e \text{grad } n_e, \quad (3)$$

а ток, обусловленный ионами, равен

$$i_i = \sigma_i E - e_i D_i \text{grad } n_i. \quad (4)$$

Предположим, что в отсутствие электрического поля газ ионизован в некоторой области, при этом плотности электронов и ионов равны n_e и n_i . В начальный момент $e_e n_e + e_i n_i = 0$. На границе области ионизации происходит диффузия электронов и ионов. Вследствие большей подвижности электроны диффундируют быстрее, так что через некоторое время за пределами области создается избыток электронов, тогда как внутри образуется избыток ионов. Следовательно, возникнет электрическое поле, препятствующее движению электронов наружу и ускоряющее ионы. Поскольку в случаях, представляющих интерес для космической физики, относительная разность плотностей положительных и отрицательных пространственных зарядов никогда не может быть большой (см. разд. 1.4 и 4.2.3), напряженность электрического поля вскоре достигает такого значения, что диффузия электронов и ионов будет происходить с одинаковой скоростью. Такая диффузия называется амбиполярной. Это явление играет очень важную роль в обычных газовых разрядах (см. [1, 9, 33]).

Для количественного анализа амбиполярной диффузии рассмотрим уравнения (3) и (4). Предположим, что ионы однократно заряжены, т. е. $e_i = -e_e = |e|$, $n = n_e = n_i$ и $i_i + i_e = 0$. Тогда электрическое поле E , создаваемое амбиполярной диффузией электронов и ионов равно

$$E = - \frac{|e| (D_e - D_i)}{\sigma_e + \sigma_i} \text{grad } n. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в формулы (3) и (4), получим

$$i_i = -i_e = - \frac{\sigma_e D_i + \sigma_i D_e}{\sigma_e + \sigma_i} |e| \text{grad } n. \quad (6)$$

Согласно соотношению (1), мы можем переписать уравнение (6) в виде

$$i_i = -i_e = -\frac{T_e + T_i}{T_i/D_i + T_e/D_e} |e| \text{grad } n. \quad (7)$$

Обычно $\sigma_i \ll \sigma_e$ (см. разд. 4.3.1). В таком случае в соответствии с формулой (1) $D_i/T_i \ll D_e/T_e$, и выражение (7) принимает вид

$$i_i = -i_e = -\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) D_i |e| \text{grad } n. \quad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Engel A., Steenbeck M., Elektrische Gasentladungen, 1, Springer-Verlag, Berlin, 1934; 2, Springer-Verlag, Berlin, 1934. (Русский перевод: Энгель А., Штеенбек М., Физика и техника электрических разрядов в газах, т. I, М., 1935; т. II, М., 1936.)
2. Von Engel A., Ionized Gases, Clarendon Press, Oxford, 1955. (Русский перевод: Энгель А., Ионизованные газы, Физматгиз, М., 1959.)
3. Loeb L. B., Basic Processes of Gaseous Electronics, University of California Press, 1955. (Русский перевод: Леб Л., Основные процессы электрических разрядов в газах, Гостехиздат, М. — Л., 1950.)
4. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge University Press, 2nd ed., 1958. (Русский перевод: Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960.)
- 5*. Арцимович Л. А., Управляемые термоядерные реакции, 2-е изд., Физматгиз, М., 1963.
6. Rose D. J., Clark M., Plasma and Controlled Fusion. M. I. T. Press, 1961. (Русский перевод: Роуз Д., Кларк М., Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции, Госатомиздат, М., 1963.)
7. Christofilos N. C., The Argus Experiment, J. Geophys. Res., **64**, 869 (1959).
8. Porter R. W. (ed), Symposium on the Scientific Effects of Artificially Introduced Radiations at High Altitude, J. Geophys. Res., **64**, 865 (1959).
9. Cobine J. D., Gaseous Conductors, McGraw-Hill, New York, 1941.
10. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Механика, Физматгиз, М., 1958.
11. Spitzer L., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New-York, 2nd edition, 1962. (Русский перевод: Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа, «Мир», М., 1965.)
12. Herlofson N., Plasma Resonance in Ionospheric Irregularities, Ark. f. fys., **3**, 247 (1951).
13. Cravath A. M., The Rate at which Ions lose Energy in Elastic Collisions, Phys. Rev., **36**, 248 (1930).
14. Chandrasekhar S., Principles of Stellar Dynamics, University of Chicago Press, 1942.
15. Chandrasekhar S., Dynamical Friction, Astrophys. J., **97**, 225 (1943).
16. Chandrasekhar S., Stochastic Problems in Physics and Astronomy, Rev. Mod. Phys., **15**, 1, (1943).
17. Jeans J., Astronomy and Cosmogony, Cambridge University Press, 1929.

18. Pines D., Bohm D., A Collective Description of Electron Interactions, II. Collective vs. Individual Particle Aspects of the Interactions, *Phys. Rev.*, **85**, 338 (1952).
19. Henon M., Un calcul amélioré des perturbations des vitesses stellaires, *Ann. d'Astrophys.*, **21**, 186 (1956).
20. Von Ecker G., Voslamber D., Zum Cut-off Parameters der Impulsstreuoeffizienten von Systemen langreichweitiger Wechselwirkung, *Z. Naturforsch.*, **15a**, 1107 (1960).
21. Thompson W. B., Hubbard J., Long-range Forces and the Diffusion Coefficients of a Plasma, *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 714 (1960).
22. Hubbard J., The Friction and Diffusion Coefficients in Fokker — Planck Equation for Plasmas, Parts I and II, *Proc. Roy. Soc., A*, **260**, 114 (1961); **A**, **261**, 371 (1961).
23. Aono O., Fluctuations in a Plasma, I. Ion-electron Temperature Relaxation, *J. Phys. Soc. Japan*, **16**, 2264 (1961).
24. Aono O., Fluctuations in a Plasma, II, The Numerical Factor in the Coulomb Logarithm, *J. Phys. Soc. Japan*, **17**, 853 (1962).
25. Spitzer L., The Stability of Isolated Clusters, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **100**, 396 (1940).
26. Chapman S., The Electrical Conductivity of Stellar Matter, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **89**, 54 (1928).
27. Cowling T. G., Electrical Conductivity of an Ionized Gas in a Magnetic Field, with Applications to the Solar Atmosphere and the Ionosphere, *Proc. Roy. Soc., A*, **183**, 453 (1945).
28. Spitzer L., Härm R., Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas, *Phys. Rev.*, **89**, 977 (1953).
29. Giovanelli R. G., Electron Energies in Highly Ionized Gases, *Phil. Mag.*, **40**, 206 (1949).
30. Dreicer H., Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas, I, *Phys. Rev.*, **115**, 238 (1959).
31. Dreicer H., Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas, II, *Phys. Rev.*, **117**, 329 (1960).
32. Bernstein W., Chen F. F., Heald M. A., Kranz A. Z., «Runaway» Electrons and Cooperative Phenomena in B — 1 Stellarator Discharges, *Phys. Fluids*, **1**, 430 (1958).
33. Allis W. P., Motion of Ions and Electrons, *Encyclopedia of Physics*, **21**, Springer-Verlag, Berlin, 1956.

Плазма в магнитном поле

5.1. Введение

Если плазма находится в магнитном поле, то возникает целый ряд интересных явлений. Свойства магнитной плазмы зависят от многих параметров, таких, как плотность, температура, степень ионизации и химический состав, а также от напряженности и степени однородности магнитного поля. Будем различать три случая: плазма «высокой плотности», плазма «средней плотности» и плазма «низкой плотности». Грубо говоря, плазма *высокой плотности* достаточно хорошо подчиняется законам, которые были выведены в гл. 3 для жидкостей и сжимаемых сред. В плазме *средней плотности* магнитное поле создает резко выраженную анизотропию, и в некоторых отношениях плазма существенно отличается от замагниченной жидкости. Наконец, плазма *низкой плотности* («бесстолкновительная») представляет собой своего рода переход к случаю движения одиночной частицы в высоком вакууме (см. гл. 2), хотя все еще выполняется условие квазинейтральности. Для космической физики важны все три случая.

При такой классификации плазмы удобно рассматривать три параметра: 1) *средняя длина свободного пробега* электронов λ ; 2) *ларморовский радиус* электронов ρ и 3) *характерная длина* рассматриваемой области l_c . В качестве параметра l_c можно выбрать, например, шкалу высот в атмосфере или то расстояние, которое может пройти электрон, прежде чем он отразится от магнитного зеркала.

Опишем теперь типичные свойства плазмы этих трех видов. Разумеется, введенная классификация чисто условна, и в действительности мы можем столкнуться с множеством промежуточных случаев.

5.1.1. Плазма высокой плотности, $\lambda \ll \rho$

Пусть v — скорость заряженной частицы, $v_{\perp}$ — компонента скорости, перпендикулярная магнитному полю $\mathbf{B}$; тогда угловая частота вращения равна $\omega = v_{\perp} / \rho$, а время соударения $\tau = \lambda / v$. Если $v_{\perp}$ имеет тот же порядок величины, что и v , то условие $\lambda \ll \rho$ означает, что $\omega \tau \ll 1$.

Между двумя последовательными соударениями электрон движется почти прямолинейно, и магнитное поле не оказывает на него сильного воздействия. Вследствие этого плазма является изотропной, если не учитывать, что магнитное поле всегда вносит в проводящую среду анизотропию, связанную с макроскопической силой $(\mathbf{i}/c) \times \mathbf{B}$, что приводит к анизотропному распространению гидромагнитных волн (см. разд. 3.1—3.10). Однако диффузия и электропроводность остаются изотропными.

В гл. 4 мы рассмотрели ряд типичных явлений в плазме (например, амбиполярную диффузию). Разумеется, эти явления существенны также и в магнитной плазме. Таким образом, даже плазма высокой плотности во многих отношениях отличается от идеальной жидкости, рассмотренной в гл. 3.

5.1.2. Плазма средней плотности, $\rho \ll \lambda \ll l_c$

Движение в направлении поля $\mathbf{B}$ подчиняется тем же законам, что и в плазме высокой плотности. Движение параллельно $\mathbf{B}$ при высоких и средних плотностях является хаотическим. Если приложено электрическое поле $E_{\parallel}$, параллельное $\mathbf{B}$, то на хаотическое движение накладывается систематический дрейф. В связи с этим возникает ток i , который при условиях, разобранных в разд. 4.3, пропорционален $E_{\parallel}$:

$$i_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel}, \quad (1)$$

где $\sigma_{\parallel}$ — проводимость в направлении, параллельном полю, которая для сильно ионизованной плазмы определяется формулой (59) разд. 4.3.3 и является константой.

В плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$, электрон движется по окружности. Между соударениями в направлении, параллельном $\mathbf{B}$, электрон может проходить расстояние свободного пробега λ , но в направлении, перпендикулярном $\mathbf{B}$, он может удаляться от ведущего центра только на расстояние ρ . Сделав определенное число оборотов, электрон сталкивается, и его ведущий центр смещается на расстояние, по порядку величины обычно равное ρ . Кроме того, электрон может дрейфовать, например, под действием электрического поля, перпендикулярного $\mathbf{B}$. Вследствие этого, например, диффузия и электропроводность становятся сильно анизотропными.

5.1.3. Плазма низкой плотности, $l_c \ll \lambda$

Если мы рассматриваем области, размеры которых значительно больше ρ (как это обычно бывает в космической физике), из условия $\lambda \gg l_c$ следует условие $\lambda \gg \rho$. Следовательно, в

плоскости, перпендикулярной $\mathbf{B}$, частицы в плазме низкой плотности ведут себя по существу так же, как и в плазме средней плотности.

Различие между плазмой средней плотности и разреженной плазмой связано с движением параллельно $\mathbf{B}$. В случае низкой плотности длина свободного пробега λ сильно превышает линейные размеры рассматриваемой области l_c . Предположим, что параллельно $\mathbf{B}$ действует только электрическая сила. Тогда уравнение движения для отдельного электрона имеет вид

$$m_e \frac{dv_{\parallel}}{dt} = e_e E_{\parallel}, \quad (2)$$

а соответствующая плотность тока $i_{\parallel}$ определяется выражением

$$\frac{di_{\parallel}}{dt} = \frac{n_e e_e^2 E_{\parallel}}{m_e}, \quad (3)$$

т. е. в случае низкой плотности величины $i_{\parallel}$ и $E_{\parallel}$ нельзя связать соотношением типа (1), а проводимость $\sigma_{\parallel}$, определяемая формулой (1), не имеет смысла. Даже при $E_{\parallel} = 0$ может оказаться, что $i_{\parallel} \neq 0$, а при $E_{\parallel} \neq 0$ ток в некоторый момент времени может быть равен нулю или даже направлен противоположно $E_{\parallel}$.

Интересно рассмотреть случай, когда неоднородность магнитного поля носит такой характер, что ведущие центры частиц осциллируют вдоль силовых линий между двумя зеркальными точками, находящимися на расстоянии l_c . Предположим, что плазма состоит из электронов и положительных ионов одного сорта и что их магнитные моменты равны μ_e и μ_i . В присутствии электрического поля $E_{\parallel}$, параллельного $\mathbf{B}$, на них действуют средние силы [см. (61) разд. 2.3.6]

$$f_{e\parallel} = -\mu_e \frac{dB}{ds} + e_e E_{\parallel} \quad (4)$$

и

$$f_{i\parallel} = -\mu_i \frac{dB}{ds} + e_i E_{\parallel} \quad (5)$$

параллельно магнитному полю.

Если под действием этой силы частица колеблется с переменной скоростью $v_{k\parallel}$ между точками s_1 и s_2 , то для прохождения элемента длины ds ей необходимо время

$$dt = \frac{ds}{v_{k\parallel}} \quad (6)$$

и ее полупериод равен

$$\tau_k = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v_{k\parallel}}. \quad (7)$$

На отрезке ds возникает средний пространственный заряд

$$dq_k = \frac{e_k ds}{\tau_k v_{k\parallel}}. \quad (8)$$

(Индекс k соответствует различным сортам частиц.) Пусть N_i положительных ионов и N_e электронов одновременно колеблются между одними и теми же зеркальными точками. Пространственный заряд на каждом отрезке равен $N_i dq_i + N_e dq_e$, и если N_e настолько велико, что мы имеем дело с плазмой (которая должна быть квазинейтральной), то будут выполняться соотношения $N_i dq_i + N_e dq_e = 0$, а также $N_i e_i + N_e e_e = 0$. Согласно формуле (8); это означает, что $\tau_i v_{i\parallel} = \tau_e v_{e\parallel}$, или, если ввести обозначение $\alpha = \tau_i / \tau_e$,

$$v_{e\parallel} = \alpha v_{i\parallel}. \quad (9)$$

Здесь α — постоянная, которая может иметь любое значение (поскольку энергии электронов и ионов не обязательно одинаковы).

Уравнение (9) и уравнения движения

$$m_e \frac{dv_{e\parallel}}{dt} = f_{e\parallel}, \quad m_i \frac{dv_{i\parallel}}{dt} = f_{i\parallel}$$

дают

$$f_{e\parallel} = m_e v_{e\parallel} \frac{dv_{e\parallel}}{ds} = \frac{\alpha^2 m_e}{m_i} m_i v_{i\parallel} \frac{dv_{i\parallel}}{ds} = \frac{\alpha^2 m_e}{m_i} f_{i\parallel}. \quad (10)$$

Полагая $e_i = -e_e = |e|$ и подставляя (4) и (5) в уравнение (10), получаем

$$-|e|E_{\parallel} - \mu_e \frac{dB}{ds} = \frac{\alpha^2 m_e}{m_i} \left(|e|E_{\parallel} - \mu_i \frac{dB}{ds} \right), \quad (11)$$

или

$$E_{\parallel} = -K \frac{dB}{ds}, \quad (12)$$

где

$$K = \frac{1}{|e|} \frac{\mu_e/m_e - \alpha^2 \mu_i/m_i}{1/m_e + \alpha^2/m_i}. \quad (13)$$

Принимая во внимание (9) и подставляя момент $\mu = W_{\perp}/B$, находим следующее выражение для инварианта:

$$K = \frac{W_{i\parallel} W_{e\perp} - W_{e\parallel} W_{i\perp}}{|e| B (W_{i\parallel} + W_{e\parallel})}. \quad (14)$$

Мы использовали обозначения $W_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2$ и $W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$; индексы e и i относятся к электронам и положительным ионам.

Уравнение (12) показывает, что в разреженной плазме *электрическое поле, параллельное магнитному полю*, равно нулю только в том случае, если магнитное поле однородно ($dB/ds=0$) или если выполняется соотношение

$$\frac{W_{i\parallel}}{W_{e\parallel}} = \frac{W_{i\perp}}{W_{e\perp}}. \quad (15)$$

Это соотношение означает, что винтовые линии ионов и электронов имеют одинаковыйpitch-угол. Если выполняется условие (15), так что $K=0$, то оба сорта частиц колеблются с одинаковой амплитудой в отсутствие электрического поля. Однако если $K \neq 0$, так что $W_{i\parallel}/W_{i\perp} \neq W_{e\parallel}/W_{e\perp}$, электроны и ионы в отсутствие электрического поля колебались бы с различными амплитудами. Поскольку квазинейтральность плазмы требует, чтобы всюду выполнялось соотношение $N_i dq_i + N_e dq_e = 0$, то частицы обоих сортов должны колебаться с одинаковыми амплитудами. Это может наблюдаться только в электрическом поле.

Проинтегрируем выражение (12) между двумя точками A и C , в которых напряженности магнитного поля равны B_A и B_C . Разность потенциалов между точками C и A равна

$$V = V_C - V_A = K(B_C - B_A). \quad (16)$$

Введем величину

$$\gamma = \frac{B_C}{B_A}. \quad (17)$$

Тогда формула (16) принимает вид

$$|e|V = (\gamma - 1) \left(\frac{W_{i\parallel} W_{e\perp} - W_{e\parallel} W_{i\perp}}{W_{i\parallel} + W_{e\parallel}} \right)_A, \quad (18)$$

где выражение в скобках относится к точке A . Результирующее напряжение зависит от способа инжекции частиц, так как это влияет на $W_{i\parallel}$ и т. д. в (18). Рассмотрим следующую простую модель. (Истинный механизм инжекции в магнитосфере еще не известен.) Силовая линия геомагнитного дипольного поля пересекает ионосферу в точке C (рис. 5.1). Вне ионосферы имеется разреженная плазма, которая создается за счет инжекции горячей плазмы в экваториальную плоскость (в точке A на рис. 5.1) и испарения частиц низкой энергии из ионосферы. Для простоты предположим, что в экваториальную плоскость инжектируются частицы только одного знака, скажем, электроны. В точке C , где напряженность поля равна B_C ($B_C > B_A$), имеется источник, эмиттирующий ионы очень низкой энергии. Эмиссия происхо-

дит, если только имеется разность потенциалов между плазмой в точке C и источником. Таким образом, потенциал плазмы в точке C определяется потенциалом источника. Инжекция электронов в точке A понижает потенциал в этой точке, и вследствие этого положительные частицы будут эмиттироваться источником в точке C до тех пор, пока не будет удовлетворено выражение (18). Тогда из (18) можно вычислить разность потенциалов.

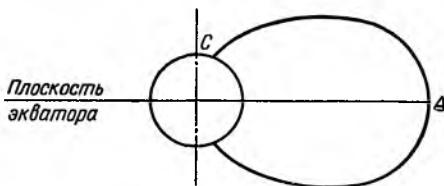


Рис. 5.1. Силовая линия геомагнитного поля в магнитосфере.

Поскольку положительные ионы, прежде чем они достигнут точки A , ускоряются разностью потенциалов V , мы имеем $W_{i\parallel} = |e|V$ и $W_{i\perp} = 0$. Следовательно, из уравнения (18) получаем

$$|e|V = (\gamma - 1) \frac{|e|VW_{e\perp}}{|e|V + W_{e\parallel}}, \quad (19)$$

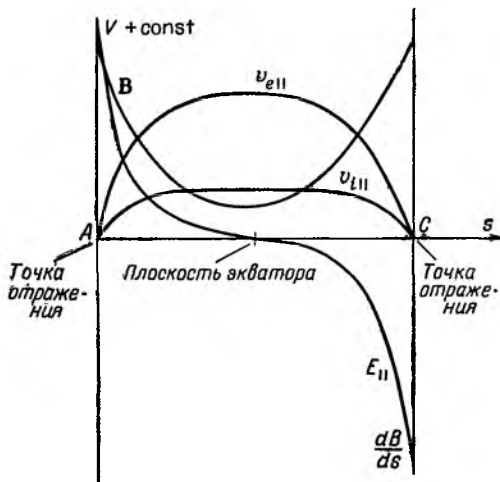
которое, кроме решения $V = 0$, дает также

$$|e|V = (\gamma - 1) W_{e\perp} - W_{e\parallel}. \quad (20)$$

Если в плазме средней плотности имеется два подобных источника на одной и той же силовой линии, то возникает ток проводимости, переносящий электроны из источника A в точку C и ионы — из точки C в точку A . Этот ток стремится уничтожить разность потенциалов между A и C . Поскольку в космической физике проводимость обычно велика, этот ток будет препятствовать возникновению большой разности потенциалов между точками A и C . В разреженной плазме, напротив, разность потенциалов V , определяемая выражением (20), создается прежде, чем может возникнуть какой-либо заметный ток. Если мы инжектируем электроны в точке A , они не смогут достичь точки C до тех пор, пока их энергия не будет увеличена разностью потенциалов V до такой величины, чтобы точка отражения переместилась в точку C . Только в том случае, если разность потенциалов превысит значение, определяемое формулой (20), электроны достигают точку C и, следовательно, возникает ток. Далее, поскольку ионы, эмиттируемые из точки C , совершают колебания вдоль силовой линии без столкновений, то они не

смогут переносить средний ток, когда будет достигнуто стационарное состояние.

В нашей модели магнитная силовая линия, которая пересекает экваториальную плоскость (напряженность поля B_A) на расстоянии 5 или 10 радиусов Земли, достигает ионосферу в точке, где напряженность поля B_C значительно больше, так что γ равно 100 или 1000. Это означает, что при наших упрощающих



Р и с. 5.2. Простейшая модель разреженной плазмы, удерживаемой между магнитными зеркалами (s — длина вдоль силовой линии магнитного поля).

Все частицы отражаются в точках A и C . Электрическое поле $E_{||}$, параллельное B , изображено в таком масштабе, чтобы по величине оно совпадало с производной dB/ds [см. (12) разд. 5.1]. Электрический потенциал V и напряженность магнитного поля B изображены одной кривой ($V + \text{const}$).

предположениях может возникнуть такая разность потенциалов между экваториальной плоскостью и ионосферой, что она окажется во много раз больше выраженной в вольтах энергии частицы, инжектируемой из точки A .

Если частота соударений в плазме конечна, то колеблющиеся частицы, эмиттированные из точки C , будут терять свою энергию и накапливаться в точке A , тогда как частицы, эмиттируемые из точки A , имеют определенную вероятность рассеяния в «конус потерь», так что они будут двигаться вдоль силовых линий к точке C . Таким образом, возникает ток, и напряжение V , определяемое формулой (20), исчезает. При конечных частотах соударений напряжение V велико только при условии, что

«время жизни» плазмы меньше времени соударений. Под «временем жизни» мы подразумеваем время, необходимое для того, чтобы уходящая из рассматриваемой области плазма полностью сменилась вновь инжектируемой.

5.1.4. Магнитная плазма в космической физике

Граница между плазмой высокой и средней плотности определяется условием

$$\omega\tau = 1.$$

Поскольку $\omega = |e|B/(m_e c)$, эта граница зависит от магнитного поля. В табл. 5.1 приведена критическая частота столкновений $1/\tau = \omega$ для различных напряженностей магнитного поля.

Таблица 5.1

Напряженность магнитного поля B , гс	0,4	40	4000
Критическая частота столкновений, сек ⁻¹	$0,7 \cdot 10^7$	$0,7 \cdot 10^9$	$0,7 \cdot 10^{11}$

На поверхности Солнца в пятнах наблюдались магнитные поля напряженностью до 4000 гс, но имеются области, где напряженность поля составляет ~ 1 гс. Частоты соударений, приведенные в таблице, являются характерными для верхней фотосферы. Таким образом, внутренние области Солнца (а возможно, и звезд), включая большую часть фотосферы, следует рассматривать как магнитную плазму большой плотности, тогда как хромосфере и короне соответствует плазма средней плотности. В ионосфере ($B \approx 0,4$ гс) критическая частота соударений на высоте около 70 км равна $0,7 \cdot 10^7$ сек⁻¹. На больших высотах ионосфера представляет собой плазму средней плотности с сильной анизотропией.

Граница между плазмой средней и низкой плотности определяется средней длиной свободного пробега λ . Длину свободного пробега электрона в полностью ионизованной плазме можно представить в виде $\lambda = v_e \tau$, где τ — время отклонения, определяемое формулой (41) разд. 4.3.2.

Взяв в качестве v_e значение средней тепловой скорости, $(3kT_e/m_e)^{1/2}$ для плазмы, состоящей из протонов и электронов, находим

$$\lambda_e = \frac{1,3 \cdot 10^5}{\ln \Lambda} \frac{T_e^2}{n_e}. \quad (21)$$

Кулоновский логарифм $\ln \Lambda$ очень медленно меняется с температурой и плотностью (см. рис. 4.3). Для оценок по порядку величины можно считать

$$\lambda \approx \frac{10^4 T_e^2}{n_e}.$$

Табл. 5.2 дает порядок величины λ для различных значений плотности n и температуры T .

Таблица 5.2

**Средняя длина свободного пробега электронов
в полностью ионизованной водородной плазме**

Плотность n , см^{-3}	Температура T , °K				
	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
1	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16} см
10^2	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}
10^4	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}
10^6	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
10^8	1	10^2	10^4	10^6	10^8

Плотность короны на расстоянии от Солнца $R=5R_\odot=3,5 \cdot 10^{11}$ см приблизительно равна $n=10^4$ см $^{-3}$, а температура $3 \cdot 10^5$ °K. Отсюда $\lambda=10^{11}$; таким образом, если характерную длину l_c положить равной расстоянию от Солнца, то получим $l_c \approx 3,5 \lambda$.

В межпланетном пространстве вблизи орбиты Земли (на расстоянии $1,5 \cdot 10^{13}$ см от Солнца) плотность по порядку величины равна $n=1$ см $^{-3}$. Температура межпланетного пространства не известна, но, по-видимому, она порядка 10^5 °K или более. В таком случае $\lambda > 10^{14}$, так что $\lambda \gg l_c$.

Средняя плотность межзвездного пространства по оценкам равна $n \approx 1$ см $^{-3}$, а температура настолько низка, что, согласно табл. 5.2, имеем $\lambda \ll l_c$ (если $l_c \sim 10^{18} - 10^{20}$ см). Это справедливо для межзвездных газовых облаков, а также для межгалактического пространства.

Рассмотрим магнитосферу Земли, в частности магнитную силовую линию, которая пересекает экваториальную плоскость на расстоянии, скажем, равном пяти радиусам Земли, т. е. $3 \cdot 10^9$ см. Плотность в экваториальной плоскости, вероятно, порядка 10^2 см $^{-3}$ или менее. Принимая $l_c = 3 \cdot 10^9$, получим, что $\lambda \approx l_c$ при температуре около 10^4 °K. При более низких температурах магнитосферу можно считать областью со средней

плотностью плазмы; при более высоких температурах — областью низкой плотности. Надежных измерений температуры, по-видимому, не имеется, и не исключено, что в невозмущенных условиях температура может быть низкой. Однако во время магнитных бурь в магнитосферу может проникнуть горячая плазма (возможно, $T=10^6$ °K), испускаемая Солнцем, которая еще более нагревается при проникновении в магнитосферу в результате магнитного сжатия. Поэтому по крайней мере во время магнитных бурь магнитосфера, возможно, имеет высокую температуру и, следовательно, представляет собой область низкой плотности.

5.1.5. Обзор свойств магнитной плазмы

Обзор свойств плазмы при различных плотностях приводится в табл. 5.3. Для сравнения в таблицу включен случай движения единичного заряда в идеальном вакууме.

Недра звезд — это плазма высокой плотности. Солнечная хромосфера и корона, межзвездное и межгалактическое пространство, а также газовые туманности представляют собой плазму средней плотности. Сюда же относится слой ионосферы выше 70 км.

Магнитосфера Земли, по крайней мере в условиях возмущения магнитного поля, является, по-видимому, областью с низкой плотностью. Межпланетное пространство можно считать областью с низкой плотностью плазмы или классифицировать как промежуточный случай. Низкая плотность приводит, по-видимому, к существованию значительных электрических полей, параллельных магнитным силовым линиям, в тех областях магнитосферы и межпланетного пространства, где магнитное поле неоднородно.

Между плазмой средней и низкой плотностей существует важное различие. В космической физике плазма средней плотности часто обладает настолько высокой проводимостью, что можно считать $\sigma = \infty$. В плазме низкой плотности, напротив, более разумно положить $\sigma = 0$ или оставить проводимость неопределенной.

Имеется целый ряд работ, основанных на предположении, что в плазме низкой плотности $\sigma = \infty$ и $E_{\parallel} = 0$. Некоторые из выводов, основанных на этом предположении, вероятно, ошибочны, и их следует пересмотреть.

Различие между вакуумом и плазмой низкой плотности состоит в том, что для вакуума выполнение условия квазинейтральности $e_i n_i + e_e n_e \approx 0$ не обязательно. Если характерная длина l_c меньше дебаевского радиуса, то мы имеем дело с явлениями в высоком вакууме.

Таблица 5.3

**Характерные свойства плазмы различной плотности
и единичных зарядов в высоком вакууме**

	Плазма высокой плотности	Плазма средней плотности	Плазма низкой плотности	Единичные заряды в высоком вакууме
Критерий Диффузия	$\lambda \ll \rho$ Изотропна	$\rho \ll \lambda \ll l_c$ Анизотропна	$l_c \ll \lambda$ Анизотропна и мала	$l_c \ll \lambda_D$ Отсутствует
Проводимость	Изотропна	Анизотропна	Не определена	Не определена
Электрическое поле, параллельное магнитному, в полностью ионизованном газе	Мало	Мало	Произвольно	Произвольно
Движение частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю B	Между столкновениями почти прямолinéйные траектории	Между столкновениями круговые траектории	Круговые траектории	Круговые траектории
Траектория ведущего центра в направлении, параллельном B	Между столкновениями прямолinéйные траектории	Между столкновениями прямолinéйные траектории	Колебания (например, между магнитными зеркалами)	Колебания (например, между магнитными зеркалами)
Дебаевский радиус λ_D	$\lambda_D \ll l_c$	$\lambda_D \ll l_c$	$\lambda_D \ll l_c$	$\lambda_D \gg l_c$

5.2. Теория магнитной плазмы

5.2.1. Микроскопическое и макроскопическое описания плазмы

Поведение плазмы можно анализировать как с микроскопической, так и с макроскопической точек зрения (см., например, [1]).

При *микроскопическом* рассмотрении отправным пунктом является движение отдельной частицы. Однако детальное описание движения заряженной частицы в магнитном поле оказывается сложным. Поэтому удобнее исследовать движение центра вращения. Скорость центра вращения определяется соотношениями (39) — (43) разд. 2.3.4, в которых сила f должна

включать в себя эквивалентную силу, учитывающую эффекты столкновений между частицами.

При *макроскопическом* подходе рассматривают среднюю скорость v всех частиц (каждого сорта), находящихся в элементе объема, большом по сравнению с ларморовским радиусом и средним расстоянием между частицами, но еще достаточно малом, чтобы его можно было рассматривать как почти однородную область. Если линейные размеры рассматриваемого элемента объема значительно больше средней длины свободного пробега λ , то частицы, содержащиеся в элементе объема в некоторый данный момент времени, остаются в нем при движении объема со скоростью v . В этом случае каждую компоненту плазмы можно рассматривать как жидкость (электронная жидкость, ионные жидкости и жидкости, состоящие из нейтральных молекул), движение которой описывается макроскопической скоростью.

Если средняя длина свободного пробега больше линейных размеров любого интересующего нас элемента объема, то такое приближение становится непригодным. Средняя скорость частиц, находящихся в данном элементе объема в данный момент времени, все еще является вполне определенной величиной, но использование ее для описания плазмы теряет смысл.

В плазме высокой и средней плотности выполняется условие $\lambda \ll l_c$, и для ее описания можно пользоваться жидкостными моделями. Но такие модели не пригодны для плазмы низкой плотности, поскольку в этом случае $\lambda \gg l_c$.

5.2.2. Соотношение между скоростью дрейфа и макроскопической скоростью

Макроскопическая скорость v определяется как средняя скорость *частиц*, находящихся в данном элементе объема. Скорость $u_{вр}$ — средняя скорость *центров вращения*, находящихся в том же элементе объема, может существенно отличаться от скорости v . Это связано с тем, что центры вращения некоторых частиц данного элемента объема находятся вне этого объема, и наоборот. Для иллюстрации выведем формулу, связывающую скорости v и $u_{вр}$, предположив, что магнитные силовые линии представляют собой прямые.

Ограничимся случаем, когда такие величины, как напряженность магнитного поля, плотность, давление и т. д., меняются медленно, так что

$$\rho \ll l_c, \quad (1)$$

где ρ — ларморовский радиус, а l_c — характерная длина изменения этих величин. Из нашего предположения непосредственно

следует, что плотности частиц и центров вращения приблизительно равны

$$n \approx n_{вр}. \quad (2)$$

Как мы увидим в дальнейшем, несмотря на условие (1), скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}_{вр}$ могут существенно различаться [2].

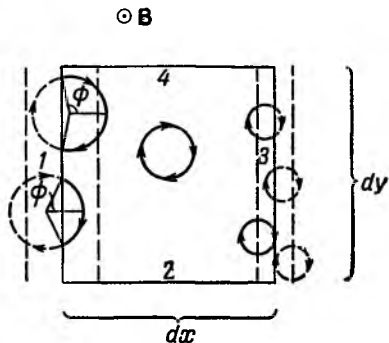
Для вычисления разности $\mathbf{v} - \mathbf{u}_{вр}$ воспользуемся системой координат с осью z , параллельной полю $\mathbf{B}$. Пусть $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ — элемент объема, линейные размеры которого значительно больше ларморовского радиуса ρ . Рассмотрим усредненный по времени полный импульс частиц, находящихся в данном объеме. Его составляющая, перпендикулярная полю $\mathbf{B}$, с точностью до малых членов равна $m(n dx dy dz) \mathbf{u}_{вр \perp}$. Теперь вычислим импульс частиц, пересекающих границу Γ (рис. 5.3). Мгновенную скорость отдельной частицы обозначим $\mathbf{w}_{\perp}$. Согласно определению макроскопической скорости, «граничная частица» вносит вклад в макроскопическую скорость элемента объема только на том участке ларморовской окружности, который лежит внутри объема.

Поэтому ее эффективная скорость определяется формулой

$$\begin{aligned} \overline{w}_{\perp} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} w_{\perp} \cos \phi d\phi = \\ &= \frac{\sin \phi}{\pi} w_{\perp}. \end{aligned} \quad (3)$$

(Поскольку вращение не является полным, эффективная скорость $\overline{w}_{\perp}$ имеет тот же порядок величины, что и $w_{\perp}$, и таким

образом, $\overline{w}_{\perp}$ может быть значительно больше, чем скорость дрейфа. Именно в силу этого обстоятельства граничные частицы, число которых мало, вообще играют роль.) Число частиц, соответствующих углу ϕ в интервале от ϕ до $\phi + d\phi$, равно $n dy dz \rho \sin \phi d\phi$. Согласно формуле (3), каждая из них вносит в импульс вклад $(mw_{\perp}/\pi) \sin \phi$. Проинтегрировав по ϕ , находим



Р и с. 5.3. Различие между макроскопической скоростью и средней скоростью центров вращения.

$$\int_0^{\pi} \frac{mw_{\perp} \sin \phi}{\pi} n dy dz \rho \sin \phi d\phi = \frac{w_{\perp}}{2} mn \rho dy dz. \quad (4)$$

Аналогичные результаты можно получить для частиц, находящихся на границах 2, 3 и 4. Таким образом, полный импульс $nm\mathbf{v}_\perp dx dy dz$, перпендикулярный $\mathbf{B}$, определяется выражением

$$\begin{aligned} \pm nm\mathbf{v}_\perp dx dy dz = & \pm mn\mathbf{u}_{\text{вр}\perp} dx dy dz - \left(\frac{1}{2} w_\perp mn\rho dy dz\right)_x \hat{\mathbf{y}} + \\ & + \left(\frac{1}{2} w_\perp mn\rho dy dz\right)_{(x+dx)} \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{1}{2} w_\perp mn\rho dx dz\right)_y \hat{\mathbf{x}} - \\ & - \left(\frac{1}{2} w_\perp mn\rho dx dz\right)_{(y+dy)} \hat{\mathbf{x}} = dx dy dz \times \\ & \times \left\{ \pm mn\mathbf{u}_{\text{вр}\perp} + \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial x} (n\rho w_\perp) \hat{\mathbf{y}} - \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial y} (n\rho w_\perp) \hat{\mathbf{x}} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные векторы в направлении x и y , а верхний знак соответствует положительным частицам. Поскольку согласно формуле (8) разд. 2.2.1,

$$\rho = \frac{m w_\perp c}{|e| B}, \quad (6)$$

выражение (5) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{u}_{\text{вр}\perp} + \frac{c}{enB} \mathbf{B} \times \text{grad} \left(\frac{nmw_\perp^2}{2B} \right). \quad (7)$$

Если мы введем давление, перпендикулярное силовым линиям (см. разд. 5.9.3),

$$p_\perp = \frac{nmw_\perp^2}{2}, \quad (8)$$

то получим

$$\mathbf{v}_\perp - \mathbf{u}_{\text{вр}\perp} = \frac{c}{enB} \mathbf{B} \times \text{grad} \left(\frac{p_\perp}{B} \right). \quad (9)$$

Если скорость $w_\perp$ различна для различных частиц, как это бывает в плазме, ее квадрат $w_\perp^2$ следует заменить в формулах (7) и (8) средним значением, полученным из распределения скоростей, а выражение (9) останется неизменным.

Для движения вдоль силовых линий справедлива формула

$$\frac{dv_\parallel}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_{\text{вр}\parallel}}{dt} = - \frac{\mathbf{B}}{nm} \text{grad} \left(\frac{p_\parallel}{B} \right). \quad (10)$$

В общем случае можно показать (см., например, [2, 3]), что

$$\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\text{вр}} = - \frac{c}{en} \text{rot} \left(\frac{nmw_\perp^2 B^2}{2B} \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = \frac{c}{en} \text{rot} \left[n\mu \left(- \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \right], \quad (10a)$$

где μ — орбитальный магнитный момент, определяемый формулой (13) разд. 2.2.1. Заметим, что величина $\mathbf{M} = n\mu(-\mathbf{B}/B)$, которая входит в выражение (10а), представляет собой объемную плотность магнитного момента, обусловленного круговым движением заряженных частиц.

5.2.3. Макроскопические уравнения

5.2.3.1. Модель трех жидкостей

В этом разделе мы выведем общие уравнения, связывающие плотность тока и скорость с электрическим и магнитным полями для трехкомпонентной плазмы, состоящей из электронов, одного сорта ионов и одного сорта нейтральных молекул. Наш анализ будет основан на макроскопических уравнениях движения для каждого сорта частиц. Эти уравнения (см. формулы (21) — (23) разд. 5.2.3.1) можно строго вывести из уравнения Больцмана (см. разд. 5.9), но сейчас мы получим их из уравнений дрейфа (см. разд. 2.3.4), учитывая эффекты, обусловленные вращением частиц [см. формулы (9) и (10) разд. 5.2.2] и соударениями.

Предположим, что распределение по скорости почти изотропно. Данное предположение ограничивает область применимости наших результатов. Они непригодны, например, для случая низких плотностей, когда распределение по скоростям часто бывает анизотропным.

Будем исходить из уравнений (39) — (43) разд. 2.3 для дрейфа отдельной частицы, имеющей массу m_k и заряд e_k :

$$\mathbf{u}_{\text{вп}k} = -\frac{c}{e_k B^2} \mathbf{B} \times \left\{ e_k \mathbf{E} + \mathbf{f}_k - \mu_k \text{grad } B - m_k \frac{d\mathbf{u}_{\text{вп}k}}{dt} \right\}, \quad (11)$$

$$0 = \left(e_k \mathbf{E} + \mathbf{f}_k - \mu_k \text{grad } B - m_k \frac{d\mathbf{u}_{\text{вп}k}}{dt} \right)_{\parallel}, \quad (12)$$

где

$$\mu_k = \frac{m_k \omega_{k\perp}^2}{2B}, \quad (13)$$

а $\mathbf{f}_k$ — полная механическая сила, действующая на частицу, которая включает, например, гравитационную силу. Индексы $\perp$ и $\parallel$ относятся к компонентам векторов, перпендикулярным и параллельным полю $\mathbf{B}$. Магнитные моменты μ_k отдельных частиц различны, но в предположении изотропии распределения по скоростям мы можем найти их средние значения

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{\langle m_i \omega_{i\perp}^2 \rangle}{2B} = -\frac{kT_i}{B} = \frac{p_i}{n_i B} \quad (14a)$$

для ионов и

$$\langle u_e \rangle = \frac{\langle m_e w_{e\perp}^2 \rangle}{2B} = \frac{kT_e}{B} = \frac{p_e}{n_e B} \quad (146)$$

для электронов. T_i и T_e — ионная и электронная температуры, а p_i и p_e — соответствующие давления. (Из предположения об изотропии следует, что тензор давления сводится к скалярному давлению, см. разд. 5.9.)

Таким образом, средняя скорость центров вращения, перпендикулярная полю $\mathbf{B}$, для электронов равна

$$\mathbf{u}_{vre} = -\frac{c}{e_e B^2} \mathbf{B} \times \left\{ e_e \mathbf{E} + \mathbf{f}_e - \frac{p_e}{n_e B} \text{grad } B - m_e \frac{d\mathbf{u}_{vre}}{dt} \right\}, \quad (15)$$

а для ионов

$$\mathbf{u}_{vri} = -\frac{c}{e_i B^2} \mathbf{B} \times \left\{ e_i \mathbf{E} + \mathbf{f}_i - \frac{p_i}{n_i B} \text{grad } B - m_i \frac{d\mathbf{u}_{vri}}{dt} \right\}. \quad (16)$$

Члены $\mathbf{f}_e$ и $\mathbf{f}_i$ соответствуют средним значениям механических сил. В дальнейшем будем предполагать, что ионы имеют единичный заряд, так что $e_i = -e_e = |e|$, и используем условие квазинейтральности

$$n_i e_i + n_e e_e = 0, \quad (17)$$

откуда получаем

$$n_i = n_e = n \quad (17a)$$

(см. разд. 1.4 и 4.2.3).

Из формул (9) и (10) разд. 5.2.2, принимая во внимание равенство

$$\text{grad} \left(\frac{p}{B} \right) = \frac{1}{B} \text{grad } p - \frac{p}{B^2} \text{grad } B,$$

можно вычислить макроскопическую скорость электронного газа. Пренебрегая малыми членами, получим

$$\mathbf{v}_{e\perp} = \frac{c}{|e| B^2} \mathbf{B} \times \left\{ -m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} - |e| \mathbf{E} + \mathbf{f}_e - \frac{1}{n} \text{grad } p_e \right\}, \quad (18a)$$

$$0 = \left(-m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} - |e| \mathbf{E} + \mathbf{f}_e - \frac{1}{n} \text{grad } p_e \right)_{\parallel}. \quad (18b)$$

Аналогично для ионного газа

$$\mathbf{v}_{i\perp} = \frac{c}{|e| B^2} \mathbf{B} \times \left\{ m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - |e| \mathbf{E} - \mathbf{f}_i + \frac{1}{n} \text{grad } p_i \right\}, \quad (19a)$$

$$0 = \left(m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - |e| \mathbf{E} - \mathbf{f}_i + \frac{1}{n} \text{grad } p_i \right)_{\parallel}. \quad (19b)$$

Интересно отметить, что член, содержащий $\text{grad } B$, отсутствует. Таким образом, градиент магнитного поля не может

непосредственно вызвать макроскопическое движение, а следовательно, и ток, а также силу $\mathbf{i} \times \mathbf{B}$. Однако этот результат получен в предположении об изотропии распределения по скоростям. Следовательно, он не справедлив для пограничных слоев, где распределение по скоростям анизотропно. (Этим объясняется возможность удержания плазмы в магнитном поле, например в ловушке с магнитными зеркалами.)

При столкновении с нейтральной молекулой электрон в среднем теряет импульс, равный $m_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n)$. Если такие столкновения происходят с частотой $1/\tau_{en}$, то средняя сила, действующая на один электрон, в результате соударений равна $-m_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n)/\tau_{en}$. Аналогичное рассмотрение можно провести для электрон-ионных столкновений. В таком случае «эффективное» время столкновений τ_{ei} определяется дальними соударениями (см. разд. 4.3.2). Таким образом, если мы учтем еще гравитацию, то для механических сил, действующих на электроны и ионы, получим

$$\mathbf{f}_e = -\frac{m_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n)}{\tau_{en}} - \frac{m_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)}{\tau_{ei}} + m_e \mathbf{g} \quad (20a)$$

и

$$\mathbf{f}_i = -\frac{m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n)}{\tau_{in}} + \frac{m_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)}{\tau_{ei}} + m_i \mathbf{g}, \quad (20б)$$

где τ_{en} и τ_{in} — время столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами. Отметим, что τ_{in} — «эффективное» время столкновений ионов с нейтральными частицами (с учетом того факта, что при каждом реальном соударении теряется не весь импульс).

Помножим уравнения (18a) и (19a) векторно на $n|e|\mathbf{B}/c$ и после небольших преобразований из уравнений (18) и (19) получим

$$nm_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -n|e|\left\{\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}_e}{c}\right) \times \mathbf{B}\right\} - \text{grad } p_e + n\mathbf{f}_e, \quad (21)$$

$$nm_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = n|e|\left\{\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}_i}{c}\right) \times \mathbf{B}\right\} - \text{grad } p_i + n\mathbf{f}_i, \quad (22)$$

где $\mathbf{f}_e$ и $\mathbf{f}_i$ определяются формулами (20a) и (20б). Если нейтральные молекулы имеют массу m_n и плотность n_n , то имеем

$$n_n m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = n_n m_n \mathbf{g} - \text{grad } p_n + \frac{nm_e}{\tau_{en}}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n) + \frac{nm_i}{\tau_{in}}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n), \quad (23)$$

где p_n — давление нейтрального газа.

Уравнения (21) — (23) представляют собой *уравнения движения трехжидкостной модели* для случая однократно заряженных ионов (см., например, [4]).

5.2.3.2. Уравнения движения и обобщенный закон Ома

Если скорости электронов и ионов приблизительно равны, удобно преобразовать уравнения (21) и (22), введя в них *плотность тока* $\mathbf{i}$ и скорость $\mathbf{v}_c$ *заряженной компоненты плазмы*.

Введем следующие обозначения, относящиеся к заряженной компоненте плазмы:

массовую плотность

$$\rho_c = n(m_i + m_e), \quad (24)$$

импульс единицы объема

$$\rho_c \mathbf{v}_c = n(m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e) \quad (25)$$

и плотность тока

$$\mathbf{i} = |e| n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (26)$$

Скорости $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_e$ можно выразить через $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{i}$ следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \frac{m_e}{|e| n (m_i + m_e)} \mathbf{i} \approx \mathbf{v}_c + \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{i}}{|e| n}, \quad (27)$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_c - \frac{m_i}{|e| n (m_i + m_e)} \mathbf{i} \approx \mathbf{v}_c - \frac{\mathbf{i}}{|e| n}. \quad (28)$$

Уравнения движения. Согласно формулам (20а) и (20б), суммарная механическая сила, действующая на единицу объема заряженной компоненты плазмы, равна

$$n(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_e) = n \mathbf{v}_n \left(\frac{m_e}{\tau_{en}} + \frac{m_i}{\tau_{in}} \right) - \frac{n m_e \mathbf{v}_e}{\tau_{en}} - \frac{n m_i \mathbf{v}_i}{\tau_{in}} + \rho_c \mathbf{g}. \quad (29)$$

Используя формулы (27) и (28), мы можем переписать это выражение в виде

$$n(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_e) = n \left(\frac{m_e}{\tau_{en}} + \frac{m_i}{\tau_{in}} \right) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_c) + \frac{m_e}{|e|} \left(\frac{1}{\tau_{en}} - \frac{1}{\tau_{in}} \right) \mathbf{i} + \rho_c \mathbf{g}. \quad (30)$$

Поскольку $m_e \ll m_i$, то с достаточной степенью приближения можно написать

$$\rho_c = n m_i \quad (31)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} n(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_e) = & - \frac{\rho_c}{\tau_{in}} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\tau_{in}}{\tau_{en}} \right) (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_n) + \\ & + \frac{\rho_c}{\tau_{in}} \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\tau_{in}}{\tau_{en}} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}}{|e| n} + \rho_c \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (32)$$

Складывая выражения (21) и (22) и используя формулы (31) и (32), получим

$$\rho_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\right) \times \mathbf{B} - \text{grad}(p_e + p_i) + \rho_e \mathbf{g} - \\ - \frac{\rho_e}{\tau_{in}} \left[\left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\tau_{in}}{\tau_{en}}\right) (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n) - \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{\tau_{in}}{\tau_{en}} - 1\right) \frac{\mathbf{i}}{|e|n} \right]. \quad (33)$$

Мы получили *уравнение движения заряженной компоненты плазмы*.

Скорость нейтрального газа $\mathbf{v}_n$, которая входит в уравнение (33), определяется из уравнения (23).

Если $\mathbf{v}_n$ также приблизительно равна $\mathbf{v}_e$, то из уравнений (23) и (33) мы получим *уравнение движения для газа как целого*

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\right) \times \mathbf{B} \text{ grad } p + \rho \mathbf{g}, \quad (34)$$

где

$$\rho = \rho_e + \rho_i + \rho_n, \quad (35)$$

$$\rho \mathbf{v} = \rho_e \mathbf{v}_e + \rho_i \mathbf{v}_i + \rho_n \mathbf{v}_n, \quad (36)$$

$$p = p_e + p_i + p_n. \quad (37)$$

Обобщенный закон Ома. Чтобы вычислить плотность тока, вычтем уравнение (21) из (22), предварительно умножив первое на $1/(n|e|)$, а второе — на $m_e/(m_i n|e|)$. Воспользуемся формулами (27) и (28) и учтем, что отношением m_e/m_i можно пренебречь по сравнению с единицей. Линеаризуем уравнения, отбросив члены второго порядка малости, и после преобразования получим

$$\frac{\mathbf{i}}{|e|nc} \times \mathbf{B} + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}_e}{c}\right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{|e|n} \left(\text{grad } p_e - \right. \\ \left. - \frac{m_e}{m_i} \text{grad } p_i \right) - \mathbf{P}, \quad (38)$$

где величина $\mathbf{P}$, которая соответствует трению между различными жидкостями, определяется выражением

$$\mathbf{P} = \frac{1}{|e|} \left(\mathbf{f}_e - \frac{m_e}{m_i} \mathbf{f}_i \right) = \frac{m_e}{|e|} \left[(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{\mathbf{v}_i}{\tau_{in}} - \frac{\mathbf{v}_e}{\tau_{en}} - \mathbf{v}_n \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{\tau_{in}} - \frac{1}{\tau_{en}} \right) \right] = \frac{m_e}{|e|} \left[(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}} \right) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n) \left(\frac{1}{\tau_{in}} - \frac{1}{\tau_{en}} \right) \right] = \\ = \eta \mathbf{i} - \beta (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n). \quad (39)$$

Здесь мы ввели обозначения [4]

$$\beta = \frac{m_e}{|e|} \left(\frac{1}{\tau_{en}} - \frac{1}{\tau_{in}} \right), \quad (40)$$

$$\eta = \frac{m_e}{e^2 n} \left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}} + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\tau_{in}} \right). \quad (41)$$

Положив

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}} + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\tau_{in}}, \quad (42)$$

получим

$$\eta = \frac{m_e}{e^2 n} \frac{1}{\tau_e}, \quad (43)$$

где $1/\tau_e$, определяемая выражением (42), — эффективная частота столкновений для электронов.

Теперь можно записать уравнение (38) в виде

$$\eta \dot{\mathbf{i}} + \frac{1}{|e|n} \left(\frac{\mathbf{i}}{c} \right) \times \mathbf{B} + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = \mathbf{E}_{эфф}, \quad (44)$$

или

$$\eta \left(\dot{\mathbf{i}} + \omega_e \tau_e \mathbf{i} \times \frac{\mathbf{B}}{B} + \tau_e \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} \right) = \mathbf{E}_{эфф}, \quad (45)$$

где

$$\mathbf{E}_{эфф} = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{|e|n} \left(\text{grad } p_e - \frac{m_e}{m_i} \text{grad } p_i \right) + \beta (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n) \quad (46)$$

и

$$\omega_e = \frac{|e|B}{m_e c}. \quad (47)$$

Уравнение (44) представляет собой одну из форм записи *обобщенного закона Ома*.

5.2.3.3. Численные значения проводимости

Выражение для проводимости σ и сопротивления η

$$\sigma = \frac{1}{\eta} = \frac{e^2 n \tau_e}{m_e}, \quad (48)$$

помимо атомных констант, содержит только две переменные: плотность электронов n и время столкновений электронов τ_e . Физический смысл первой из них достаточно ясен, а по поводу второй τ_e сделаем несколько замечаний.

Рассмотрим сначала *слабоионизованную плазму*, для которой существенны только столкновения с молекулами. Если n_n — плотность нейтральных молекул, а S_n — эффективное се-

чение столкновений молекулы с электроном, то средняя длина свободного пробега электрона равна

$$\lambda_e = \frac{1}{n_n S_n}. \quad (49)$$

Если электрон движется со скоростью v_e , то время соударения равно

$$\tau_e = \frac{\lambda_e}{v_e}. \quad (50)$$

Подставляя формулы (49) и (50) в (48), находим

$$\sigma = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{S_n} \frac{1}{v_e} \frac{n_e}{n_n}. \quad (51)$$

Средняя тепловая скорость электронов равна

$$v_e = \left(\frac{3kT_e}{m_e} \right)^{1/2}, \quad (52)$$

но многие электроны движутся быстрее или медленнее. Поскольку S_n , а следовательно, и λ_e зависят от v_e , то τ_e различно для разных электронов. Поэтому распределение электронов по скоростям v_e , а следовательно, и распределение времен столкновений оказываются существенными для точных расчетов.

Величина S_n зависит от скорости налетающего электрона и во многих случаях является сложной функцией скорости. Диаграммы и таблицы, содержащие экспериментальные данные измерений сечений, можно найти в соответствующих руководствах (см., например, [5—9]). Обычно приводят значение $3,6 \cdot 10^{16} S_n$, равное сумме эффективных сечений всех молекул, содержащихся в одном кубическом сантиметре газа при давлении 1 мм рт. ст. и температуре 0° С. Обратная величина дает среднюю длину свободного пробега при указанном давлении и температуре. Для электронов с энергией ниже нескольких сот электронвольт эффективное сечение S_n большинства газов по порядку величины составляет 10^{-16} см^2 .

В полностью ионизованной плазме радиус действия сил велик и движущаяся частица взаимодействует одновременно со многими частицами (см. разд. 4.3.2). Формула (48) остается справедливой, если вместо τ_e подставить «эффективное время соударения», вычисленное с учетом дальних столкновений. Эта величина представляет собой время торможения, определяемое формулой (41) разд. 4.3.2. Полученные таким образом результаты являются приближенными в том смысле, что в наших расчетах мы не учитываем должным образом истинного распределения по скоростям и влияния электрон-электронных столкновений. Однако и в этом случае получается результат,

отличающийся от более точного

$$\sigma = \gamma \frac{2^{5/2}}{\pi^{3/2}} \frac{(kT_e)^{3/2}}{m_e^{1/2} Z e^2 \ln \Lambda} = \frac{\gamma \cdot 2,37 \cdot 10^8}{Z \ln \Lambda} T_e^{3/2} \text{ ед. CGSE} \quad (53)$$

[см. формулу (59) разд. 4.3.3; $e_i = -Ze_e = Z|e|$ менее чем в 2 раза. Множитель γ слабо зависит от заряда ионов e_i и имеет значения между 0,582 (для $Z=1$) и единицы (для $Z=\infty$). Кулоновский логарифм $\ln \Lambda$ (см. рис. 4.3) очень медленно меняется в зависимости от температуры и плотности. На рис. 5.4 представлена зависимость проводимости водородной плазмы от

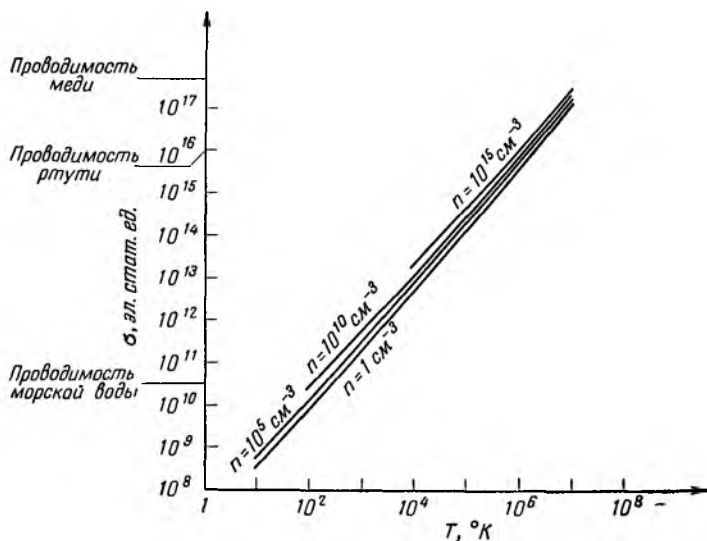


Рис. 5.4. Проводимость полностью ионизованной водородной плазмы.

температуры (и плотности). Интересно сравнить эффективные сечения ионов и молекул. Проводимость можно представить в виде

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_{e, \text{эфф}}}{m_e} = \frac{e^2}{m_e v_e} \frac{1}{S_{\text{эфф}}},$$

где v_e — средняя тепловая скорость $v_e = (3kT_e/m_e)^{1/2}$. Тогда для протонов получаем

$$S_{\text{эфф}} = 0,3 \ln \Lambda 10^{-5} T_e^{-2}, \quad (54)$$

а эффективное сечение для нейтральных молекул порядка 10^{-15} см^2 . Например, при $T_e = 5000^\circ \text{ К}$ эффективное поперечное

сечение для ионов приблизительно в 1000 раз больше, чем для нейтральных молекул. Это означает, что электрон-ионные столкновения становятся более существенными, чем столкновения электронов с молекулами уже при степенях ионизации порядка 10^{-3} . Таким образом, при не слишком высокой электронной температуре плазму со степенью ионизации более 1% можно считать полностью ионизованной с точки зрения столкновительных процессов.

5.3. Поперечная и холловская проводимости

Из уравнения (45) разд. 5.2.3.2 следует, что, за исключением случая, когда $\omega_e \tau_e \ll 1$, электрическое поле $\mathbf{E}$ и создаваемый им ток $\mathbf{i}$, вообще говоря, не параллельны друг другу. Итак, в то время как плазма *высокой плотности* обладает изотропной электропроводностью, плазма *средней плотности* в этом отношении сильно анизотропна.

Если $\omega_i \tau_i \gg 1$, то ионы могут внести заметный вклад в ток. Рассмотрим тонкий слой слабоионизованной плазмы ($\tau_{ei} \gg \tau_{en}$ и $p_e \approx p_i \approx 0$). Из формул (33) и (44) разд. 5.2 следует, что электрическое поле с компонентами $\mathbf{E}_{\parallel}$ и $\mathbf{E}_{\perp}$, параллельной и перпендикулярной $\mathbf{B}$, создает ток, плотность которого

$$\mathbf{i}_{\parallel} = (\sigma_{\parallel}^e + \sigma_{\parallel}^i) \mathbf{E}_{\parallel}, \quad (1)$$

$$\mathbf{i}_{\perp} = (\sigma_{\perp}^e + \sigma_{\perp}^i) \mathbf{E}_{\perp}, \quad (2)$$

$$\mathbf{i}_H = (\sigma_H^e - \sigma_H^i) \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right) \times \mathbf{E}_{\perp}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{\parallel}^e = \frac{e^2 n \tau_{en}}{m_e}, \quad (4a)$$

$$\sigma_{\parallel}^i = \frac{e^2 n \tau_{in}}{m_i}, \quad (4b)$$

$$\sigma_{\perp}^e = \frac{\sigma_{\parallel}^e}{1 + \omega_e^2 \tau_{en}^2}, \quad (5a)$$

$$\sigma_{\perp}^i = \frac{\sigma_{\parallel}^i}{1 + \omega_i^2 \tau_{in}^2}, \quad (5b)$$

$$\sigma_H^e = \frac{\sigma_{\parallel}^e \omega_e \tau_e}{1 + \omega_e^2 \tau_{en}^2}, \quad (6a)$$

$$\sigma_H^i = \frac{\sigma_{\parallel}^i \omega_i \tau_i}{1 + \omega_i^2 \tau_{in}^2}, \quad (6b)$$

(см. [10—13]). «Ток Холла» i_H , определяемый формулой (3), возникает в результате дрейфа электронов и ионов перпендикулярно полю $\mathbf{B}$ (рис. 5.5).

Величина $\sigma_{\perp} = \sigma_{\perp}^e + \sigma_{\perp}^i$ называется *поперечной проводимостью*, или *проводимостью Педерсена*, а $\sigma_H = \sigma_H^e - \sigma_H^i$ называется *проводимостью Холла*.

Для вывода формул (1) — (6) или соответствующих более общих выражений можно, исходя из выражений (21) — (23) разд. 5.2.3.1, вычислить отдельно электронный ток $i_e = -n|e|v_e$ и ионный ток $i_i = n|e|v_i$, затем их сложить $i = i_e + i_i$. Эти выкладки здесь не приводятся, но для последующих приложений мы выпишем соотношения

$$i_{eH} = \omega_e \tau_e \left(\frac{B}{B} \right) \times i_{e\perp}, \quad (7)$$

$$i_{iH} = -\omega_i \tau_i \left(\frac{B}{B} \right) \times i_{i\perp}, \quad (8)$$

которые следуют непосредственно из (21) и (22) разд. 5.2.3.1.

В плазме *высокой плотности* $\omega_e \tau_e \ll 1$ и проводимость *изотропна*. В частности, если плазма полностью ионизована, то в выражении (46) разд. 5.2.3 член, описывающий трение $\beta(v_e - v_n)$, равен нулю, и если, кроме того, давления p_e и p_i пренебрежимо малы, то обобщенный закон Ома принимает вид

$$i = \sigma \left\{ E + \left(\frac{v}{c} \right) \times B \right\}. \quad (9)$$

Это простое уравнение справедливо для идеальных магнитных жидкостей (см. разд. 3.3). Однако даже для плазмы *высокой плотности* в целом ряде случаев обобщенный за-

кон Ома нельзя привести к простому виду (9). Например, иногда может играть роль член, соответствующий трению $-\beta(v_e - v_n)$ [см. уравнение (46) разд. 5.2.3], который описывает дополнительный механизм потерь, действующий с обычным омическим нагревом. (О взаимодействии заряженных частиц плазмы с нейтральным газом см., например, [4, 14].)

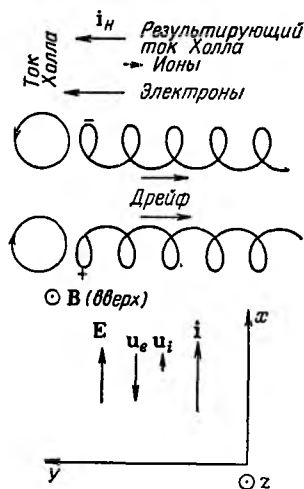


Рис. 5.5. В электрическом поле E положительные ионы дрейфуют со скоростью u_i , а электроны — со скоростью u_e , создавая ток i . В присутствии магнитного поля B (направленного перпендикулярно плоскости чертежа вверх) частицы дрейфуют в направлении, перпендикулярном E и B , и таким образом создают ток Холла i_H .

Приведем другой простой характерный случай, который будет подробно рассмотрен в разд. 5.3.3. Рассмотрим трехкомпонентную плазму, состоящую из электронов, однократно заряженных ионов и нейтральных молекул. В обобщенном законе Ома мы пренебрежем членом $\partial i / \partial t$, поскольку мы рассматриваем равновесное (или квазиравновесное) состояние, а также членами $\text{grad } p_e$ и $\text{grad } p_i$ (что оправдано, например, в случае холодной плазмы). Предположим теперь, что нейтральный газ покоится и что трение между ионами и нейтральным газом достаточно велико, чтобы удерживать ионы в состоянии покоя. Это может иметь место при условии

$$\omega_i \tau_i \ll 1 \quad (10)$$

(даже если в то же самое время $\omega_e \tau_e \gg 1$). Если условие (10) выполняется и если τ_i определяется главным образом столкновениями между ионами и молекулами, то из формулы (7) разд. 4.3.1 находим, что скорость ионов по порядку величины равна

$$v_i \approx \frac{|e| \tau_{in}}{2m_i} E. \quad (11)$$

Поскольку $v_c \approx v_i$, то член, соответствующий трению, в уравнении (46) разд. 5.2.3 по порядку величины равен

$$|\beta(v_c - v_n)| \approx \frac{m_e}{|e|} \left| \frac{1}{\tau_{en}} - \frac{1}{\tau_{in}} \right| \frac{|e| \tau_{in}}{2m_i} E \approx \frac{m_e}{m_i} E \ll E. \quad (12)$$

Член $(v_c/c) \times \mathbf{B}$ в уравнении (46) разд. 5.2.3 можно оценить следующим образом:

$$\left| \left(\frac{v_c}{c} \right) \times \mathbf{B} \right| \approx \frac{|e| \tau_{in} E B}{2m_i c} = \frac{1}{2} \omega_i \tau_i E \ll E. \quad (13)$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях трение между ионами и нейтральным газом достаточно велико для того, чтобы обеспечить малость члена $(v_c/c) \times \mathbf{B}$ и в то же время член, соответствующий трению $\beta(v_c - v_n)$, может оставаться несущественным в обобщенном законе Ома, который теперь приводится к виду

$$\mathbf{i} - \omega_e \tau_e \mathbf{i} \times \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{\mathbf{E}}{\eta} = \sigma \mathbf{E}. \quad (14)$$

5.3.1. Эффект запираания тока Холла

Рассмотрим, что произойдет, если воспрепятствовать протеканию тока Холла. Это можно сделать путем введения изолирующих плоскостей, параллельных $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Тогда возникнет электрическое поле $\mathbf{E}_1$, перпендикулярное этим плоскостям. Полагая

ток, перпендикулярный плоскостям, равным нулю, непосредственно получаем из формулы (14)

$$\mathbf{i} + 0 = \sigma \mathbf{E}, \quad (15)$$

так что плотность тока равна

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\eta} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (16)$$

как и в отсутствии магнитного поля. Таким образом, *при за-
пирании тока Холла вместо поперечной проводимости появляется
обычная проводимость*. В то же время возникает электриче-
ское поле поляризации. Согласно
формуле 5.2.3.2 (45), его напря-
женность равна

$$\mathbf{E}_1 = \eta \omega_e \tau_e \mathbf{i} \times \frac{\mathbf{B}}{B} = \omega_e \tau_e \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (17)$$

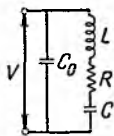
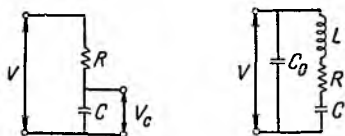


Рис. 5.6. Эквивалентные цепи проводников в магнитном поле. *Слева* — проводящая жидкость; R соответствует удельному сопротивлению; энергия конденсатора C соответствует кинетической энергии. *Справа* — газ заряженных частиц; L соответствует инерции заряженных частиц; C_0 — емкости в вакууме.

Формула (16) является приближенной, поскольку мы принимаем не достаточно точное распределение по скоростям. Согласно Спитцеру [2], более точный результат

$$\mathbf{i} = \left(\frac{0,56}{\eta} \right) \mathbf{E} = 0,56 \sigma \mathbf{E}. \quad (18)$$

5.3.2. Эквивалентный контур

Иногда при рассмотрении токов в плазме удобно ввести эквивалентный контур. В общем случае эквивалентные контуры оказываются сложными (см., например, [15]), но иногда эквивалентная цепь может иметь простую структуру. Рассмотрим кратко один такой случай.

Рассмотрим сначала электрически проводящую жидкость с плотностью ρ и проводимостью σ , находящуюся в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Электрическое поле $\mathbf{E}$, приложенное перпендикулярно $\mathbf{B}$, создает ток $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$. Сила $(\mathbf{i}/c) \times \mathbf{B}$ создает ускорение в направлении, перпендикулярном $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В системе координат, движущейся с плазмой, электрическое поле равно

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B}. \quad (19)$$

Ускорение среды продолжается до тех пор, пока

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (20)$$

так что

$$\mathbf{E}' = 0, \quad (21)$$

и плотности тока становится равной нулю. На рис. 5.6 (слева) представлен эквивалентный контур единичного объема жидкости. Произведем следующую замену:

$$\begin{aligned} I &\rightarrow i, \\ V &\rightarrow E, \\ V_c &\rightarrow \frac{vB}{c}, \\ R &\rightarrow \frac{1}{\sigma}, \\ C &\rightarrow \frac{\rho c^2}{B^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

Зарядка конденсатора соответствует ускорению жидкости током плотности i . Величина емкости выбрана таким образом, чтобы электростатическая энергия конденсатора $CV_c^2/2$ равнялась кинетической энергии жидкости $\rho v^2/2$.

Если среда представляет собой газ, состоящий из заряженных частиц, то инерция частиц (масса иона m , концентрация n) учитывается последовательно включенной индуктивностью

$$L \rightarrow \frac{m}{ne^2}. \quad (23)$$

Резонансная частота контура, соответствующего данной индуктивности и емкости

$$C \rightarrow \frac{\rho c^2}{B^2} = \frac{nmc^2}{B^2}, \quad (24)$$

равняется циклотронной частоте $\omega = (LC)^{-1/2} = eB/mc$. Чтобы учесть ток смещения $i = (1/4\pi)dE/dt$, необходимо ввести емкость $C_0 = 1/4\pi$. Соответствующий контур представлен на рис. 5.6 (справа).

5.3.3. Токи в неоднородной плазме, перпендикулярные магнитному полю

Уравнение (5а) показывает, что в случае $\omega_e \tau_e \gg 1$ проводимость, перпендикулярная магнитному полю, существенно уменьшается. Однако этот результат является следствием идеализированного предположения об однородности плазмы. В неоднородной плазме (с которой мы обычно имеем дело в космической физике) ситуация может быть существенно иной, что мы продемонстрируем на следующем простом примере.

Рассмотрим плазму, для которой выполняется условие (14) (разд. 5.3). Пусть геометрическая конфигурация ее будет

такой, как показано на рис. 5.7, а. В узком слое А, параллельном оси x декартовой системы координат и имеющем ширину $\beta\Delta y$, проводимость равна σ_0 . Проводимость соседнего слоя В шириной Δy имеет меньшую величину σ_0/α (например, вследствие более низкой степени ионизации). В направлении y возникает

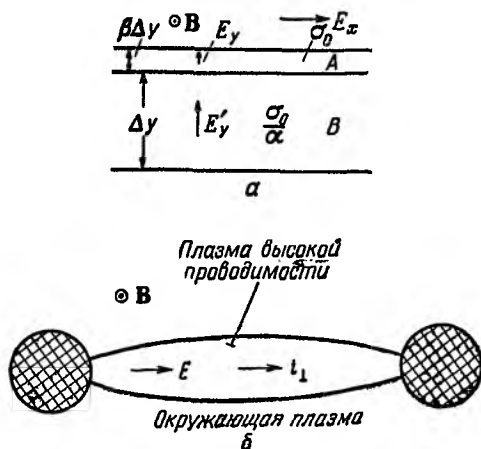


Рис. 5.7. а — геометрическая конфигурация простейшей модели неоднородной плазмы; б — схема конфигурации, к которой можно применить результаты рассмотрения простейшей модели.

электрическое поле, связанное с током Холла. Обозначим напряженность электрического поля в первом слое E_y , а во втором E'_y . Предположим, что

$$\beta \Delta y E_y + \Delta y E'_y = 0. \quad (25)$$

Условие (25) позволяет сделать некоторые заключения на основании нашей простой модели в тех случаях, когда при более сложной геометрии ток Холла замыкается на конечном отрезке, как, например, на рис. 5.7, б.

Условия непрерывности требуют, чтобы E_x и i_y имели одинаковые значения в обеих областях; таким образом, мы имеем

$$i_{xA} + \gamma i_y = \sigma_0 E_x, \quad (26)$$

$$i_y - \gamma i_{xA} = \sigma_0 E_y, \quad (27)$$

$$i_{xB} + \gamma i_y = \frac{\sigma_0 E_x}{\alpha}, \quad (28)$$

$$i_y - \gamma i_{xB} = \frac{\sigma_0 E'_y}{\alpha} = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sigma_0 E_y, \quad (29)$$

где i_{xA} и i_{xB} — плотности тока в первом и во втором слое, а $\gamma = \omega_e \tau_e$.

Если положить

$$i_{xA} = \sigma_A E_x, \quad (30)$$

$$i_{xB} = \sigma_B E_x, \quad (31)$$

$$i_y = \sigma_C E_x, \quad (32)$$

то из формул (26) — (29) находим

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_0} = 1 - \frac{1 + \beta}{\alpha + \beta} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad (33)$$

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_0} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1 + \beta}{\alpha + \beta} \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}, \quad (34)$$

$$\frac{\sigma_C}{\sigma_0} = \frac{1 + \beta}{\alpha + \beta} \frac{\gamma}{1 + \gamma^2}. \quad (35)$$

Если плазма однородна ($\alpha = 1$), то в соответствии с формулами (5а) и (6а) разд. 5.3 получаем

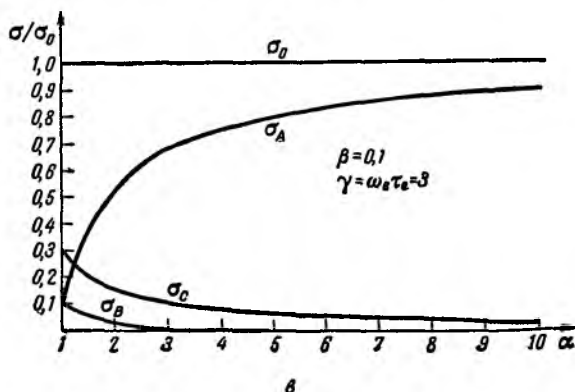
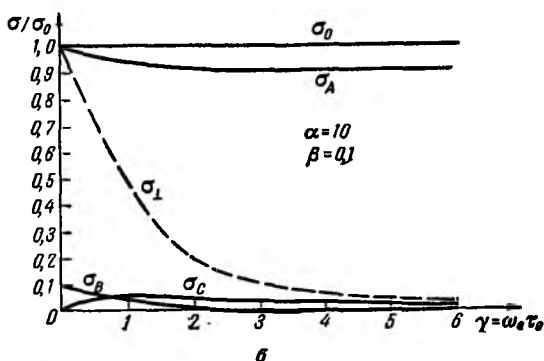
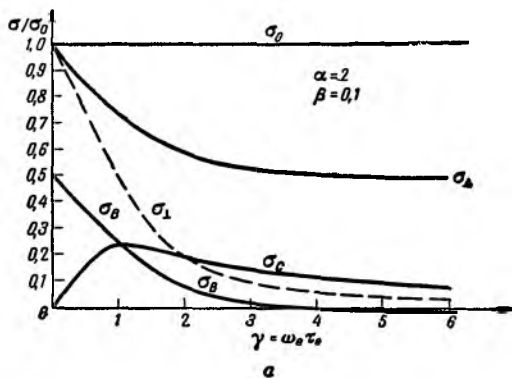
$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{\sigma_0}{1 + \gamma^2},$$

$$\sigma_C = \sigma_0 \frac{\gamma}{1 + \gamma^2}.$$

Если $\alpha = \infty$, ток Холла прекращается, так как область B становится изолятором. В этом случае, как и следовало ожидать, $\sigma_A = \sigma_0$.

Из формул (33) — (35) можно оценить, насколько поперечная проводимость чувствительна к малым неоднородностям. Предположим, что при $\gamma = \omega_e \tau_e = 10$ и $\beta = 0,1$ проводимость меняется на 20%, так что $\alpha = 1,2$. Тогда из формулы (33) получаем $\sigma_A/\sigma_0 = 0,16$, в то время как при $\alpha = 1$ $\sigma_A/\sigma_0 = 0,01$. Таким образом, в этом случае изменение проводимости всего лишь на 20% приводит к изменению эффективной поперечной проводимости в слое A более чем на порядок величины.

Рис. 5.8, а и б показывают зависимость σ_A , σ_B и σ_C от γ при $\alpha = 2$ и $\alpha = 10$. На рис. 5.8, в σ_A , σ_B и σ_C представлены как функции относительной проводимости α для $\gamma = 3$. Во всех трех случаях $\beta = 0,1$. Графики соответствуют тому случаю, когда проводимость возрастает в узком слое. Как следует из графиков, магнитное поле не вызывает сильного уменьшения плотности тока в слое с более высокой проводимостью. Для $\alpha = 2$ проводимость никогда не уменьшается более чем на 50%, а для $\alpha = 10$ уменьшение составляет только 10%. В слое с меньшей проводимостью при увеличении γ ток спадает очень быстро [он даже изменяет



Р и с. 5.8. Эффективные проводимости σ_A , σ_B , σ_C — как функции γ при $\alpha=2$ и $\beta=0,1$; б — как функции γ при $\alpha=10$ и $\beta=0,1$; в — как функции α при $\beta=0,1$ и $\gamma=3$.

направление, и при больших γ проводимость σ_B стремится к асимптотическому значению $-(\beta/\alpha)\sigma_A$. Плотность тока Холла уменьшается в α раз, и в приведенных случаях она всегда значительно меньше плотности тока проводимости i_{xA} .

Если теперь слой с большей проводимостью *параллелен оси y* , то $i_{xA}=i_{xB}$, $E_{yA}=E_{yB}=0$; откуда следует, что $i_{yA}=i_{yB}$, $E_{yA}=E_{xB}/\alpha$. Таким образом, единственным следствием неоднородности оказывается уменьшение электрического поля в α раз.

Образование электрической струи. Полученные результаты показывают, что обычная теория плазменных токов, перпендикулярных магнитному полю, совершенно неприменима к неоднородной плазме. В рассмотренных выше случаях основное действие магнитного поля сводилось к *концентрации тока в области высокой проводимости*. Внутри такой области магнитное поле не вызывает существенного уменьшения проводимости, тогда как снаружи ток мал. См. также разд. 5.5.1.

5.4. Вмороженные силовые линии

5.4.1. Макроскопическая модель

Магнитной силовой линией называется линия, которая в каждой точке совпадает с направлением магнитного поля.

Если намагнитить твердое тело с бесконечной электропроводностью, то магнитный поток через такое тело будет постоянным, поскольку из закона Ома ($E=i/\sigma$) следует, что $E\equiv 0$ и, таким образом, $\partial \mathbf{B}/\partial t \equiv 0$.

Мы можем распространить эту картину на случай жидкости с бесконечной проводимостью, если жидкость будем рассматривать состоящей из огромного числа очень маленьких ячеек. Магнитное поле вморожено в каждую ячейку, и когда жидкость движется, магнитные силовые линии движутся вместе с ней, как будто силовые линии вморожены в каждый элемент массы. (Этот вопрос уже рассматривался в разд. 3.9.) Можно сказать, что силовые линии «материализованы» жидкостью, которая «приклеена» к ним. (Как мы видели в разд. 3.4 и 3.9, эта картина оправдана при изучении гидромагнитных волн.)

В качестве иллюстрации рассмотрим несколько простых примеров.

1. Предположим, что в некоторый момент времени $t=0$ бесконечно проводящая жидкость помещена в однородное магнитное поле. Введем декартову систему координат с осью z , параллельной $\mathbf{B}$, и предположим, что столб жидкости движется в направлении оси x . Предположим, для простоты, что скорость

задана следующим образом:

$$v = \begin{cases} v_0 & (|z| < a, |y| < d), \\ \frac{b-|z|}{b-a} v_0 & (a < |z| < b, |y| < d), \\ 0 & (|z| > b, |y| < d) \end{cases}$$

(рис. 5.9). Если некоторая силовая линия $ABCDEF$ представляет собой прямую линию в момент времени $t=0$, то в более поздний момент времени Δt она деформируется и принимает форму ABC_1D_1EF . Деформация силовых линий вызвана дополнительным магнитным полем $\mathbf{b}$, которое создается индуцированными поверхностными токами $\mathbf{i}$ (см. рис. 5.9). Силовая линия принимает форму упругой нити, движущейся вместе с жидкостью [16].

2. Предположим теперь, что при той же самой геометрической конфигурации две области $a < |z| < b$ являются изолирующими слоями, тогда как во всем остальном пространстве мы имеем бесконечно проводящую невязкую жидкость, движущуюся со скоростью

$$v = \begin{cases} v_0 & (|z| < a, |y| < d), \\ 0 & (|z| > b, |y| < d) \end{cases}$$

(рис. 5.10). В этом случае изолирующие слои препятствуют возникновению системы токов, подобной той, которая показана на рис. 5.9. (Это справедливо, если вместо слоев мы возьмем изолирующие плоскости.) Поэтому дополнительное магнитное поле не возникает. Магнитное поле остается однородным, а магнитные силовые линии прямыми. Такую ситуацию можно описать двумя способами. С одной стороны, можно сказать, что среда в столбе движется поперек силовых линий под действием электрического поля $\mathbf{E}$. С другой стороны, можно сказать, что силовые линии движутся вместе со столбом, но при этом следует добавить, что изолирующие слои «обрезают» силовые линии, иными словами, силовые линии, входящие в изолирующую область (или проходящие через изолирующую плоскость), «забывают о своем происхождении».

В покоящейся системе координат существует некоторая разность потенциалов между точками G и J , а точки H и K находятся под одним потенциалом. Поэтому разность потенциалов V_{GH} должна отличаться от V_{JK} , и, таким образом, в изоляторе существует электрическое поле с отличной от нуля составляющей, параллельной $\mathbf{B}$,

3. Если проводимость всюду конечна и изотропна, то мы имеем промежуточный случай между 1 и 2. Магнитные силовые

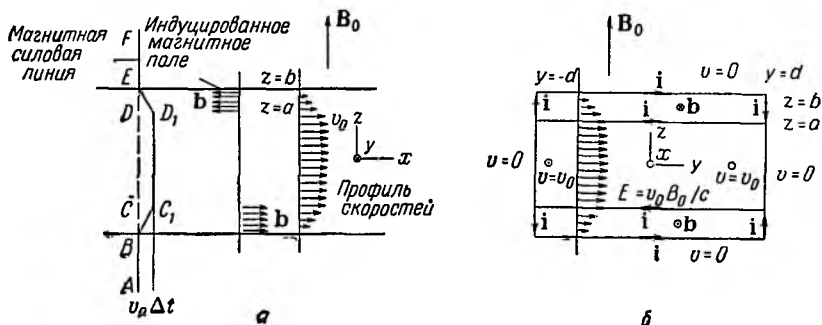


Рис. 5.9. Если столб бесконечно проводящей жидкости начинает двигаться в направлении, перпендикулярном $\mathbf{B}$, то в результате наложения магнитного поля $\mathbf{b}$, создаваемого индуцированными электрическими токами, происходит деформация силовых линий магнитного поля.

a — проекция на плоскость xz ; $б$ — проекция на плоскость yz .

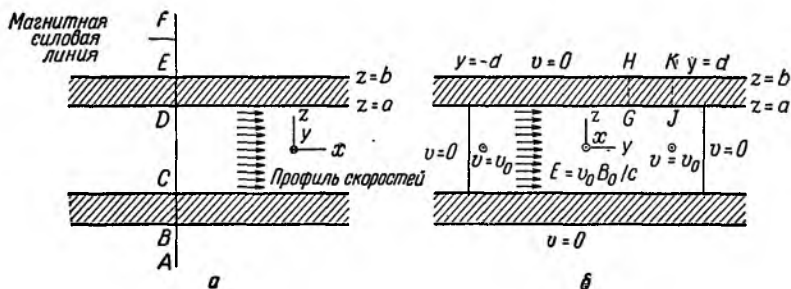


Рис. 5.10. Если движущийся столб отделен с обеих сторон от жидкости изолирующими слоями (или плоскостями), индуцированные токи не возникают и магнитные силовые линии остаются прямыми.

линии увлекаются движущейся жидкостью, но с меньшей скоростью. Они «скользят» в среде (см. разд. 3.9).

4. Если проводимость всюду равна нулю, то нет никакой связи между движением среды и магнитным полем. Силовые линии остаются невозмущенными при любом движении среды.

5.4.2. Микроскопическая модель. Плазма низкой плотности

Рассмотрим плазму с микроскопической точки зрения. Каждая частица, как было показано в гл. 2, совершает дрейф. Если дрейф вызван градиентом магнитного поля или силами неэлектрического происхождения, то положительные и отрицательные частицы дрейфуют в противоположных направлениях. При таких условиях представление о движущихся силовых линиях теряет смысл. Ограничимся поэтому случаем, когда силы неэлектрического происхождения отсутствуют. При наличии электрического поля $\mathbf{E}$ как положительные, так и отрицательные частицы дрейфуют перпендикулярно $\mathbf{B}$ со скоростью $\mathbf{u}_\perp = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$.

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{E}_\perp + \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) \times \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Если

$$\mathbf{E}_\parallel \equiv 0, \quad (2)$$

то из формулы (1) следует

$$\mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right) \times \mathbf{B} = 0. \quad (3)$$

Теперь мы можем повторить рассуждения, приведенные в разд. 3.9, и получим, что магнитный поток, проходящий через контур, движущийся со скоростью $\mathbf{u}_\perp$, сохраняется.

Если имеются электрические поля, параллельные $\mathbf{B}$, то условия (1) и (3) несовместимы, рассуждения, проведенные в разд. 3.9, неправомерны и магнитные силовые линии необязательно должны быть вмороженными.

Как показано в разд. 5.1.3, в плазме с низкой проводимостью возможно существование $\mathbf{E}_\parallel$, не равного нулю. Если $\mathbf{E}_\parallel$ различно вдоль разных силовых линий, то возникает ситуация, аналогичная показанной на рис. 5.10. Следовательно, в плазме с низкой плотностью понятие вмороженных силовых линий представляется сомнительным.

Понятие вмороженных силовых линий может быть полезно в физике Солнца, где мы имеем дело с плазмой высокой и средней плотности (см. разд. 5.1.4), но может оказаться ошибочным в приложении к магнитосфере Земли. В применении к плазме межпланетного пространства этим понятием следует пользоваться с осторожностью.

5.5. Образование плазменных неоднородностей

Большинство теоретических исследований космической плазмы было посвящено изучению однородной плазмы. Однако наблюдения показывают, что в большинстве случаев космическая плазма сильно неоднородна. В ионосфере часто наблюдается мелкомасштабная структура, наиболее четко выраженная во время полярных сияний. Лучи полярного сияния часто очень тонки, и степень ионизации, а следовательно, и проводимость могут меняться на два или три порядка в пределах нескольких километров и менее. Как показало изучение распространения свистящих атмосфериков, магнитосфера, по-видимому, также имеет волокнистую структуру. Солнечная атмосфера также имеет лучистое строение. Лучистая структура короны часто бывает очень хорошо видна на фотографиях, полученных во время затмений, а радионаблюдения показывают, что лучи простираются по крайней мере на расстояния в 10—20 солнечных радиусов («сверхкорона»). Ближе к поверхности Солнца наблюдаются протуберанцы, которые обычно имеют волокнистую структуру. Хромосферу иногда представляют в виде нитевидного сплетения небольших протуберанцев. Волокнистая структура часто бывает заметна в газовых туманностях. Итак, плазма средней плотности (а возможно, также и плазма низкой плотности), по-видимому, нередко сильно неоднородна и проявляет волокнистую структуру, элементы которой параллельны магнитному полю. Таким образом, представляется важным рассмотреть механизмы, которые могут создавать подобную структуру. Этому вопросу посвящен разд. 5.5.1.

5.5.1. Сжимающийся разряд

Разряд может заполнять все пространство между электродами или может быть ограничен узким каналом. К первому случаю относится тлеющий разряд низкого давления. Примерами второго случая могут служить дуги, искры, вспышка молний и «самосжатые разряды», изучаемые в термоядерных исследованиях.

В лабораторных разрядах, особенно при низкой степени ионизации, сжатие часто связано с «падающей характеристикой». Это означает, что электрическое поле, необходимое для поддержания разряда, является убывающей функцией плотности тока. Если задан полный ток разряда, то напряженность электрического поля уменьшается, когда ток концентрируется в узком канале по сравнению с напряженностью поля разряда, заполняющего все пространство. Нередко разряд развивается таким

образом, что напряженность электрического поля принимает минимальное значение.

На сжатие разряда оказывают влияние несколько различных факторов [6, 17].

Механизм теплового сжатия в дугах. Плазма дуги не подчиняется законам подобия, изложенным в разд. 4.2.2. Поведение дуги описывается довольно сложными законами, сущность которых состоит в том, что нагрев, обусловленный электрическим током, компенсирует тепловые потери, связанные главным образом с конвекцией и теплопроводностью, переносящими тепло к холодным периферийным областям [6]. Если применить к разряду преобразование подобия разд. 4.2.2, то при меньших давлениях (а следовательно, при больших линейных размерах) условия для теплового сжатия становятся менее благоприятными. Это связано главным образом с тем, что мощность Ei , выделяемая на единицу объема, изменяется как γ^{-3} и, следовательно, уменьшается при переходе к большим размерам или меньшим давлениям. Общеизвестно, что при атмосферном давлении разряды обычно сжимаются, тогда как при более низком давлении, скажем 1 мм рт. ст., сжатие разряда представляет собой довольно редкое явление. (Следует отметить, что даже при низком давлении может происходить сжатие; если присутствуют определенные газы, например CO_2 . Однако это явление не имеет никакого отношения к механизму теплового сжатия.)

Рассматриваемые механизмы действуют независимо от наличия магнитного поля. Однако *магнитные эффекты* сами по себе могут привести к сжатию различных типов.

Сжиматься могут токи, *перпендикулярные полю В*. Примерами таких явлений в ионосфере являются *экваториальные электрические струи и электрические струи в полярных сияниях*. Согласно Зингеру и др., экваториальные электроструи возникают в результате комбинированного воздействия магнитных и гравитационных сил. Как показано в разд. 5.3.3, в неоднородной плазме магнитное поле может вызвать сжатие тока перпендикулярного полю, в результате чего образуется струя тока. Этим эффектом можно объяснить электроструи в полярных сияниях.

Наиболее важным механизмом сжатия является *электромагнитное притяжение* параллельных токов. Одним из проявлений этого механизма служит *пинч-эффект*, который впервые был изучен Беннеттом [18] в 1934 г. и который позднее привлек внимание в связи с термоядерными исследованиями. Как мы увидим, явления этого общего типа должны осуществляться и в космических масштабах, где они приводят к формированию нитевидной структуры токов и магнитных полей. Этот эффект должен сопровождаться аналогичным перераспределением веще-

ства и, таким образом, можно объяснить то богатое разнообразие волокнистых структур, которое, согласно наблюдениям, представляет вещество в космическом пространстве.

5.5.2. Пинч-эффект. Соотношение Беннетта

Рассмотрим цилиндрический столб полностью ионизованной плазмы в аксиальном электрическом поле E , которое создает аксиальный ток (рис. 5.11). Аксиальный ток создает азимутальное магнитное поле. Собственное магнитное поле действует на него с силой $(i/c) \times B$, которая направлена по радиусу к центру и приводит к сжатию плазмы к оси (пинч-эффект). Если сжимающая электромагнитная сила уравновешена давлением плазмы, то

$$-\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr}(p_e + p_i) = \frac{iB}{c}. \quad (1)$$

Аксиальное электрическое поле перпендикулярно азимутальному магнитному полю, создаваемому аксиальным током (см. рис. 5.11). Тем не менее в состоянии равновесия плотность тока определяется выражением

$$i = \frac{E}{\eta} = \sigma E \quad (2)$$

[с точностью до поправки (18) разд. 5.3.1]. Это связано с тем, что в плазме, находящейся в стационарном состоянии, не может протекать радиальный ток Холла (см. разд. 5.3.1).

Из формулы (1) при помощи уравнения Максвелла

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB) = \frac{4\pi}{c} i \quad (3)$$

находим

$$\int r^2 \frac{dp}{dr} dr = - \int \frac{rB}{4\pi} d(rB). \quad (4)$$

Интегрируя, по частям, получаем

$$\int_0^R r^2 \frac{dp}{dr} dr = [r^2 p]_{r=R} - [r^2 p]_{r=0} - \int_0^R 2pr dr. \quad (5)$$

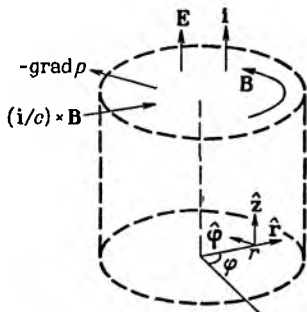


Рис. 5.11. В стационарном самосжатом разряде электромагнитная сила $(i/c) \times B$ (сила притяжения между параллельными токами) компенсируется градиентом давления плазмы.

где R — радиус разряда. Вне разряда давление равно нулю; таким образом, в формуле (5) остается только последний член. Если температуры T_e и T_i постоянны, мы можем записать его в виде

$$\begin{aligned} - \int 2pr \, dr &= - \frac{1}{\pi} \int nk(T_e + T_i) 2\pi r \, dr = \\ &= - \frac{k(T_e + T_i)}{\pi} \int n 2\pi r \, dr = - \frac{Nk(T_e + T_i)}{\pi}, \end{aligned} \quad (6)$$

где N — число электронов на единицу длины столба.

Из формул (4) — (6) получаем

$$2Nk(T_e + T_i) = \frac{(RB)^2}{4}. \quad (7)$$

Согласно уравнению (3), полный ток равен

$$I = \int_0^R i 2\pi r \, dr = \frac{1}{2} c (RB); \quad (8)$$

таким образом, формула (7) принимает вид

$$2Nk(T_e + T_i) = \left(\frac{I}{c}\right)^2. \quad (9)$$

Уравнение (9) было получено Беннеттом.

Если температура приблизительно постоянна, то проводимость и плотность тока тоже постоянны. В таком случае B пропорционально r , и из условия (1) следует, что распределение плотности подчиняется параболическому закону

$$n = n_0 - \text{const} \cdot r^2. \quad (10)$$

5.5.3. Нитевидные токи в бессиловых магнитных полях

В обычном пинче электрический ток может течь перпендикулярно собственному магнитному полю, поскольку электромагнитные силы уравновешены давлением плазмы и радиальное движение отсутствует. В *космической плазме* давление часто пренебрежимо мало, и, следовательно, магнитное поле является бессиловым [19].

Рассмотрим плазму средней плотности, имеющую конфигурацию, представленную на рис. 5.12. Электрическое поле однородно и направлено вдоль оси z , а магнитное поле, которое может вызываться токами, текущими в плазме, и за счет внешних источников, имеет φ - и z -компоненты.

Под действием электрического и магнитного полей как электроны, так и ионы дрейфуют со скоростью

$$\mathbf{v} = \frac{c}{B^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (11)$$

таким образом, вся плазма движется по радиусу к оси. Электрическое поле в системе координат, движущейся вместе с плазмой, равно

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{B}. \quad (12)$$

Согласно обобщенному закону Ома, «эффективное» электрическое поле частично обусловлено электронным давлением (а если плазма неполностью ионизована, также и трением о нейтральный газ), однако в данном рассмотрении мы предполагаем, что вклад этих факторов пренебрежимо мал. Из уравнений (11) и (12) следует

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{B}}{B} (\mathbf{E}\mathbf{B}) - \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad (13)$$

(см. рис. 5.12). Это означает, что движущаяся плазма «чувствует» только электрическое поле, параллельное $\mathbf{B}$, и, следовательно, ток течет только вдоль магнитного поля. Поскольку магнитная сила на единицу объема равна $(\mathbf{i}/c) \times \mathbf{B}$, то в данном случае она равна нулю. Магнитное поле оказывается бессильным (см. разд. 3.12.1). Этот результат является следствием предположения о малости давления [19].

Дрейф приводит к накоплению вещества вблизи оси. Если бы процесс накопления мог продолжаться в течение достаточно длительного времени, то давлением уже нельзя было бы пренебречь и в конце концов мы пришли бы к уже рассмотренному обычному пинч-эффекту. Здесь же нас будет интересовать бессильное состояние, столь важное для космических приложений. Поскольку векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{B}$ параллельны, то

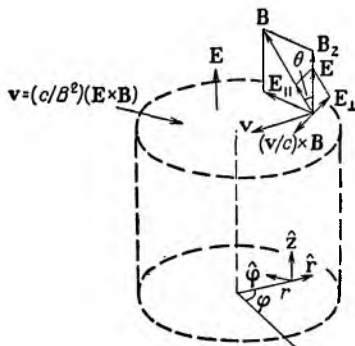


Рис. 5.12. Если давление пренебрежимо мало, плазма приобретает такую скорость дрейфа $\mathbf{v}$, что электрическое поле движущейся плазмы становится параллельным $\mathbf{B}$. Поэтому токи текут только вдоль силовых линий магнитного поля.

$$\frac{i_{\varphi}}{i_z} = \frac{B_{\varphi}}{B_z} = \operatorname{tg} \theta = K, \quad (14)$$

где θ — угол между магнитным полем и осью z . K и θ являются функциями радиуса r . Выражая плотность тока через электрическое поле и проводимость, которые мы предполагаем постоянными, получим

$$i = (i_\varphi^2 + i_z^2)^{1/2} = \sigma E \cos \theta = i_0 \cos \theta, \quad (15)$$

$$i_z = i_0 \cos^2 \theta, \quad (16)$$

$$i_\varphi = i_0 \cos \theta \sin \theta. \quad (17)$$

Компоненты уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \quad (18)$$

можно проинтегрировать по r , тогда получим

$$B_\varphi = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{r} \int_0^r i_z r dr \quad (19)$$

и

$$B_z = B_0 - \frac{4\pi}{c} \int_0^r i_\varphi dr, \quad (20)$$

где B_0 — напряженность поля на оси.

Уравнения (14), (16) и (17), а также (19) и (20) приводят к результату

$$\frac{4\pi i_0}{Kr} \int_0^r \frac{r dr}{1+K^2} + 4\pi i_0 \int_0^r \frac{K dr}{1+K^2} = B_0 c. \quad (21)$$

Удобно ввести единицу длины

$$b = \frac{B_0 c}{4\pi i_0} \quad (22)$$

и безразмерную переменную

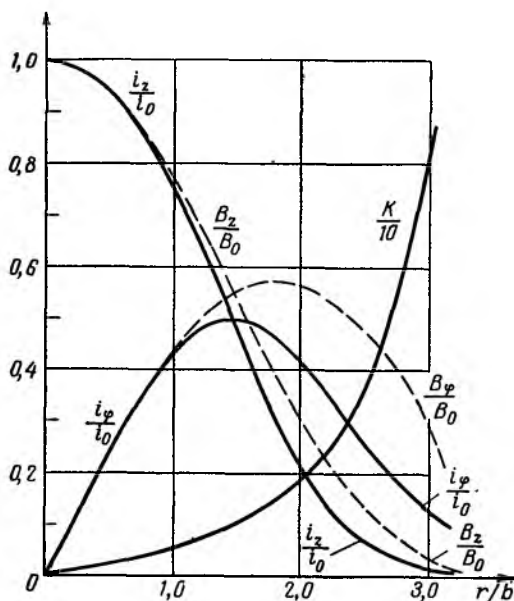
$$x = \frac{r}{b}. \quad (23)$$

Тогда уравнение (21) преобразуется к виду

$$\frac{1}{Kx} \int_0^x \frac{x dx}{1+K^2} + \int_0^x \frac{K dx}{1+K^2} = 1. \quad (24)$$

Численное решение этого уравнения было получено в работе [20]. На рис. 5.13 представлены K , i_φ , i_z , B_φ и B_z как функции r/b .

Как показывает рисунок, аксиальное магнитное поле сосредоточено в основном внутри цилиндра радиусом b . Ток «ограничен» этим же цилиндром и образует «линейный ток». На расстоянии, заметно превышающем b , поле B_z стремится к нулю быстрее, чем B_φ , и, таким образом, магнитное поле на большом



Р и с. 5.13. Компоненты плотности тока i_φ и i_z , напряженности магнитного поля B_φ и B_z и величина $K = \lg \theta$ как функция отношения r/b .

расстоянии имеет практически только φ -компоненту. (Магнитное поле с конечной z -компонентой на бесконечности не совместимо с конечным значением B_z на оси.) На рис. 5.14 качественно показана общая конфигурация магнитных силовых линий, для которой напрашивается название «магнитный канат».

Полный магнитный поток в направлении z равен

$$\phi = \int_0^\infty B_z 2\pi r dr = \gamma \pi b^2 B_0. \quad (25)$$

Константа γ получается в результате численного расчета и равна приблизительно 3,1.

Уравнения (22) и (25) позволяют выразить B_0 и b через полный поток ϕ и максимальную плотность тока i_0 :

$$B_0 = \left(\frac{16\pi}{\gamma c^2} i_0^2 \phi \right)^{1/3} \quad (26)$$

и

$$b = \left(\frac{\phi c}{4\pi^2 \gamma i_0} \right)^{1/3}. \quad (27)$$

Полный ток равен

$$I = \int_0^\infty i_z 2\pi r dr = \kappa b^2 i_0, \quad (28)$$

где $\kappa \approx 2,6$. Его можно также переписать в виде

$$I = \frac{\kappa}{\pi^{1/3}} \left(\frac{c\phi}{4\gamma} \right)^{2/3} (\sigma E)^{1/3}; \quad (29)$$

это довольно необычное соотношение между напряженностью электрического поля и током.

Здесь мы предполагали, что проводимость постоянна. В работе [20] показано, что аналогичные результаты получаются для бессильных полей при значительно более общих условиях.

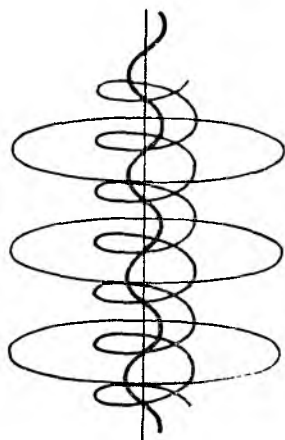


Рис. 5.14. Общая картина силовых линий в «магнитном канате».

Как было упомянуто выше, электрическое и магнитное поля вызывают дрейф по направлению к оси, в результате которого происходит накопление вещества. Таким образом, должна наблюдаться тенденция слияния «магнитных канатов» с «волокнами» вещества, имеющими более высокую плотность, чем окружающая среда. Космические «магнитные канаты» сами по себе не наблюдаемы, но связанные с ними волокна конденсированного вещества можно наблюдать по излучению, которое они испускают и поглощают. Таким образом, рассмотренный механизм сжатия объясняет волокнистую структуру, которая является весьма распространенным явлением в кос-

мической плазме (волокнистые межзвездные облака, корональные волокна, протуберанцы и т. д.). Особый интерес представляет приложение рассмотренного механизма к физике Солнца [21—23].

5.6. Диффузия в магнитной плазме

Чтобы более наглядно показать сущность диффузии, снова воспользуемся *методом длины свободного пробега*. Для полностью ионизованной плазмы, в которой взаимодействие между частицами определяется дальнедействующими силами, использование данного метода не является корректным, тем не менее он дает довольно точный результат, если воспользоваться эффективным временем соударений, учитывающим эффекты дальних столкновений (см. разд. 4.3.2).

В интервале между соударениями движение заряженных частиц представляет собой суперпозицию быстрого вращения и медленного дрейфа поперек магнитного поля. Если температура некоторого сорта частиц равна T_k , то отдельная частица имеет среднюю скорость вращения

$$w_{k\perp} = \left(\frac{2kT_k}{m_k} \right)^{1/2} \quad (1)$$

и среднюю скорость параллельно силовым линиям

$$w_{k\parallel} = \left(\frac{kT_k}{m_k} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

5.6.1. Диффузия параллельно магнитному полю

Пусть магнитное поле направлено вдоль оси z декартовой системы координат. Наличие магнитного поля существенно не меняет время столкновений τ_k . Среднее смещение между двумя столкновениями в направлении z равно

$$\lambda_{k\parallel} = w_{k\parallel} \tau_k \quad (3)$$

или, согласно формуле (2),

$$\lambda_{k\parallel} = \tau_k \left(\frac{kT_k}{m_k} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Величина $\lambda_{k\parallel}$ совпадает со средним смещением в направлении z в отсутствие магнитного поля. Таким образом, если мы обозначим через $D_{\parallel k}$ коэффициент диффузии параллельно полю $\mathbf{B}$, а через D_k коэффициент диффузии в отсутствие магнитного поля, то получим

$$D_{\parallel k} \approx D_k. \quad (5)$$

5.6.2. Диффузия поперек магнитного поля

Диффузия, перпендикулярная силовым линиям магнитного поля, различна в плазме высокой, средней и низкой плотности.

За время между столкновениями частица поворачивается в среднем на угол $\omega_k \tau_k$ рад. В плазме *высокой плотности*

$\omega_k \tau_k$ очень мало, и траектория между столкновениями почти прямолинейна. В этом случае магнитное поле почти не влияет на диффузию, так что

$$D_{\perp k} \approx D_{\parallel k} \approx D_k, \quad \omega_k \tau_k \ll 1, \quad (6)$$

где $D_{\perp k}$ — коэффициент диффузии перпендикулярно полю $\mathbf{B}$, а D_k — коэффициент диффузии в отсутствие магнитного поля.

В плазме средней и низкой плотности $\omega_k \tau_k$ велико. Частица совершает много оборотов, прежде чем она испытает столкновение, и (если не считать возможного дрейфа) центр вращения в промежутке между столкновениями остается «привязанным» к силовой линии. Когда происходит столкновение, центр вращения смещается с одной силовой линии на другую. Это смещение определяется выражением (18) разд. 2.2.2.

Важно отметить, что столкновения между частицами одного и того же сорта не вносят вклада в диффузию поперек магнитного поля. Это объясняется тем, что полный импульс $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ при столкновении сохраняется. Поэтому изменения импульсов $\Delta \mathbf{p}_1$ и $\Delta \mathbf{p}_2$ равны по величине, но противоположны по направлению. Если частицы имеют одинаковые массы и заряды, то, как следует из формулы (18) разд. 2.2.2, центры вращений также смещаются на одинаковую величину в противоположных направлениях. В результате столкновения одинаковых частиц не оказывают никакого влияния на поперечную диффузию*.

Поскольку среднее изменение импульса при столкновении имеет тот же порядок величины, что и первоначальный импульс, то смещение по порядку величины равно ларморовскому радиусу

$$\rho_k = \frac{m_k w_{k\perp} c}{|e_k| B} = w_{k\perp} \omega_k^{-1}. \quad (7)$$

Таким образом, теперь мы имеем двумерное хаотическое движение с характерной длиной ρ_k , соответствующей временному интервалу τ_k . В отсутствие магнитного поля диффузия перпендикулярно z представляет собой хаотическое движение, характеризуемое длиной $w_{k\perp} \tau_k$ за интервал времени τ_k . Так как коэффициент диффузии пропорционален квадрату длины шага (см., например, [27]), то имеем

$$D_{\perp k} \approx D_k \left(\frac{\omega_{k\perp} \omega_k^{-1}}{\omega_{k\perp} \tau_k} \right)^2 = \frac{D_k}{\omega_k^2 \tau_k^2}, \quad (8)$$

где $\omega_k \tau_k \gg 1$.

* Если учесть эффекты более высоких порядков, то обнаруживается небольшой вклад от соударений одинаковых частиц [24—26].

Формулы (6) и (8) являются предельными случаями более общего выражения

$$D_{\perp k} = \frac{D_k}{1 + \omega_k^2 \tau_k^2} \quad (9)$$

(см., например, [10, 28]).

Поскольку $\omega_e \tau_e \gg \omega_i \tau_i$, магнитное поле уменьшает коэффициент поперечной диффузии для электронов сильнее, чем для ионов, так что в сильном магнитном поле

$$D_{\perp e} \ll D_{\perp i}, \quad (10)$$

хотя в то же время

$$D_{\parallel e} \gg D_{\parallel i}. \quad (11)$$

5.6.3. Амбиполярная диффузия

Как было показано в разд. 4.4, различие в скоростях диффузии положительных и отрицательных частиц в плазме приводит к разделению зарядов и возникновению электрического поля, которое замедляет быстро диффундирующие частицы и ускоряет медленно диффундирующие до тех пор, пока оба сорта частиц не приобретут одинаковую скорость диффузии. Были приведены формулы для электрических полей и токов, возникающих в результате амбиполярной диффузии. Аналогичное явление наблюдается в замагниченной плазме, однако в этом случае приходится отдельно рассматривать диффузию в различных направлениях. Формулы разд. 4.4 непосредственно применимы для диффузии вдоль магнитного поля. Они пригодны также для поперечной диффузии, если для коэффициентов диффузии и проводимости использовать значения $D_{\perp k}$, даваемые формулой (9), и $\sigma_{\perp k}$, даваемые формулой (5) разд. 5.3.

5.6.4. Диффузия в плазме средней и низкой плотности, обусловленная неоднородностями магнитного поля

Столкновения заряженных частиц с неоднородностями магнитного поля во многом аналогичны соударениям частиц друг с другом. Когда частица проходит через мелкомасштабную неоднородность магнитного поля, ее ведущий центр смещается. Этот вопрос был рассмотрен в разд. 2.2.2, где приведена соответствующая формула для смещения. В разд. 2.2.2 мы рассматривали неоднородности, вытянутые вдоль поля. Практически размеры неоднородности вдоль силовых линий всегда ограничены. Поэтому движение частицы параллельно полю препятствует повторным столкновениям с одной и той же неоднород-

ностью. Если неоднородности распределены в магнитном поле беспорядочно, то в процессе своего движения вдоль силовых линий частица хаотически сталкивается со все новыми неоднородностями. Таким образом, отдельные центры вращения совершают своего рода хаотическое движение перпендикулярно магнитному полю, а для группы заряженных частиц это означает диффузию поперек магнитного поля. Если магнитные поля имеют очень сложную конфигурацию, то можно ожидать, что движение центров вращения будет иметь характер трехмерной диффузии.

Диффузия, возникающая в результате взаимодействия с неоднородностями магнитного поля, представляет особый интерес для космической физики, где во многих случаях столкновения между частицами происходят слишком редко, чтобы могла возникнуть диффузия. Например, межпланетное пространство пронизано магнитными полями, которые должны содержать неоднородности, линейные размеры которых малы по сравнению с ларморовскими радиусами заряженных частиц высокой энергии. Поэтому движение таких частиц будет носить характер диффузии. (В этом случае мы пренебрегаем обычными столкновениями.) Такая диффузия в совокупности с механизмами ускорения, рассмотренными в разд. 2.7, позволяет объяснить наблюдаемый спектр импульсов космического излучения.

5.6.5. Аномальная диффузия

Согласно классической теории, коэффициент поперечной диффузии [см, уравнение (9)] быстро уменьшается с увеличением ωt , если $\omega t \gg 1$. Это означает, что плазма, помещенная в магнитное поле, медленнее уходит из занимаемого ею объема в связи с уменьшением диффузии поперек силовых линий. Однако обычная диффузия не является единственным механизмом утечки плазмы. Если вследствие разделения зарядов в плазме возникают электрические поля, то как положительные, так и отрицательные частицы приобретают скорость дрейфа $(c/B^2) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ и при определенных условиях могут уйти поперек магнитного поля.

Бом [29] предположил, что в плазме должна происходить диффузия, обусловленная хаотическим дрейфом частиц, связанным с флуктуирующими электрическими полями. Предложенный Бомом коэффициент диффузии меняется обратно пропорционально напряженности магнитного поля $\mathbf{B}$. Спитцер [30] и Тэйлор [31] указали, что подобного рода механизмы должны проявляться в нетепловой плазме.

Многочисленные эксперименты показали, что при определенных условиях наблюдается еще один тип аномально высокой диффузии [28, 32, 33]. Когда возникает такая диффузия, плазма

принимает форму спирали. Согласно теории Кадомцева и Недоспасова [34] и Ленерта и Хоха [35], аномальная диффузия связана с разделением ионной и электронной спиралей. Это приводит к возникновению азимутального электрического поля и радиального дрейфа $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, вызывающего массовый уход частиц. Экспериментальная сторона вопроса почти не имеет отношения к космической физике, но механизм неустойчивости, привлеченный для объяснения явлений, представляет большой интерес. «Винтовая неустойчивость» и связанная с ней «желобковая неустойчивость» [3, 36—38] являются примерами механизмов, посредством которых тонкая плазма может свободно уходить поперек магнитного поля, не вызывая его деформации. Подобные явления могут существенно влиять на поведение плазмы в космических магнитных полях.

5.7. Магнитные свойства плазмы

5.7.1. Термодинамически равновесная плазма

Согласно формуле (11) разд. 2.2, заряженная частица, движущаяся в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ и имеющая компоненту скорости, перпендикулярную полю $w_{\perp}$, обладает магнитным моментом

$$\mu = \frac{mw_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B} \quad (1)$$

и направленным противоположно $\mathbf{B}$. Такой же момент имеет каждая отдельная частица в замагниченной плазме при условии, что средняя длина свободного пробега λ значительно больше ларморовского радиуса ρ .

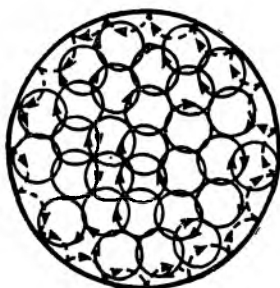
Из того факта, что заряженные частицы в плазме обладают собственными магнитными моментами, направленными против магнитного поля, в общем случае нельзя сделать заключения о том, что плазма в целом диамагнитна. Например, из классической теории магнитных свойств металлов хорошо известно, что электроны проводимости в металле не создают результирующего диамагнетизма. Бор [39] объяснил этот факт, приняв во внимание влияние границ металла, которые он рассматривал как идеально отражающие стенки (рис. 5.15).

Аналогично *полностью ионизованная плазма, ограниченная идеально отражающими стенками*, вообще не проявляет никаких магнитных свойств. Согласно Бору, движение электронов, отражающихся от стенок, создает ток, магнитный момент которого в точности компенсирует магнитные моменты электронов,

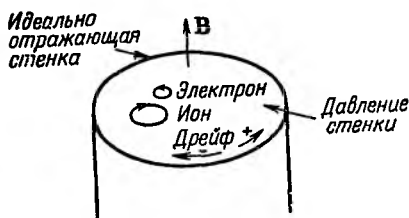
вращающихся внутри плазмы (рис. 5.16). К этому заключению легко прийти путем микроскопического рассмотрения плазмы, если считать, что центр вращения частицы представляет собой *эквивалентный магнит*, несущий как электрический заряд, так и магнитный момент. Если поперечное сечение цилиндра равно S , то магнитный момент, отнесенный к единице длины, для внутренних электронов и ионов равен

$$M = - \frac{S n_e m_e \omega_e^2}{2B} - \frac{S n_i m_i \omega_i^2}{2B} = - \frac{S n k (T_e + T_i)}{B}. \quad (2)$$

Пусть с боковой поверхностью цилиндра единичной длины в единицу времени сталкиваются N_e электронов (см. рис. 5.16).



Р и с. 5.15. Электронный газ в сосуде с идеально отражающими стенками.



Р и с. 5.16. Полностью ионизованная плазма в сосуде с идеально отражающими стенками. Магнитный момент частиц, вращающихся внутри жидкости, компенсируется магнитным моментом, связанным с дрейфом частиц, ударяющихся о стенку.

Поскольку они действуют на стенку с силой p_e , на каждый электрон действует сила, равная p_e/N_e ; это вызывает дрейф центров вращения, средняя скорость которого, согласно формуле (39) разд. 2.3.4, равна

$$u_{e\perp} = - \frac{c p_e}{|e| N_e B}$$

(здесь $-|e|$ — заряд эквивалентного магнита). Такой дрейф эквивалентен пристеночному току

$$I_{ew} = -|e| N_e u_{e\perp} = \frac{c p_e}{B} = \frac{c n k T_e}{B},$$

которому соответствует магнитный момент

$$M_{ew} = \frac{S}{c} I_{ew} = \frac{S n k T_e}{B}. \quad (3)$$

Совершенно аналогичное рассмотрение справедливо для ионов. Таким образом, полный магнитный момент тока, текущего вдоль стенки, с учетом как электронов, так и ионов равен

$$M_w = \frac{Snk(T_e + T_i)}{B}. \quad (4)$$

Он в точности компенсирует магнитный момент частиц внутри объема.

С *макроскопической* точки зрения в рассматриваемом случае вообще не должно быть никаких магнитных эффектов, поскольку макроскопическая плотность тока везде равна нулю. Электроны и ионы внутри объема распределены однородно. Результирующая плотность тока в каждой точке равна нулю, поскольку распределение по скоростям для каждого сорта частиц изотропно. Изотропия, и, следовательно, отсутствие токов, имеет место даже вблизи стенки, поскольку она идеально отражает (ср. рис. 5.15). Изотропия является неперменным свойством систем, находящихся в термодинамическом равновесии. Поэтому термодинамически равновесная плазма в самом общем случае не дает результирующего магнитного эффекта. На это обстоятельство указал Каулинг [40] в связи с дискуссией о радиальных границах магнитного поля Солнца.

Поскольку отдельная частица создает магнитный момент, то плазма, состоящая из множества таких частиц, должна быть также диамагнитна. Это имеет место, если плазма удерживается не материальными стенками, а магнитным полем. В таком случае отсутствуют токи вдоль стенок, которые могли бы компенсировать магнитный момент, создаваемый частицами, вращающимися внутри объема. С *макроскопической* точки зрения это означает, что давление плазмы уравновешено током на границе.

5.7.2. Диффузия в слабоионизованной плазме

Рассмотрим цилиндрический столб плазмы, помещенный в магнитное поле, параллельное оси цилиндра. Пусть область, занятая ионами и электронами, ограничена некоторым определенным радиусом, а концентрация заряженных частиц значительно меньше концентрации нейтральных молекул (низкая степень ионизации). Пусть нейтральные молекулы находятся как внутри, так и вне плазмы.

В отличие от случая полностью ионизованной плазмы, ограниченной идеально отражающей стенкой, теперь давление ионов и электронов уравновешивается магнитным полем и

столкновениями с нейтральным газом. Как и раньше возможны два подхода:

1. *Микроскопический*, при котором ведущие центры рассматриваются как электрически заряженные эквивалентные магниты и учитываются как их собственные магнитные моменты, так и магнитный момент электрических токов, обусловленных их движением.

2. *Макроскопический*, состоящий в рассмотрении макроскопического тока, который, как мы увидим позднее, можно интерпретировать как диффузионный ток Холла. Существование диффузионного тока Холла является указанием на отсутствие термодинамического равновесия.

В этом разделе мы проведем только макроскопический анализ и воспользуемся формулами, выведенными в разд. 5.2 и 5.3.

Градиенты плотности ионов и электронов вызывают радиальную диффузию. Предположим, что диффузия амбиполярная и что ионы однократно заряжены, так что $e_i = -e_e = |e|$ и $n_i = n_e = n$. В таком случае, согласно разд. 5.6.3, плотности радиальных токов ионов и электронов определяются формулой (7) разд. 4.4, в которую нужно подставить коэффициенты диффузии из формулы (9) разд. 5.6.2. Считая положительным направление от центра к периферии, для плотностей радиальных токов получим

$$i_i = -i_e = -\frac{(T_e + T_i) D_{e\perp} D_{i\perp}}{T_i D_{e\perp} + T_e D_{i\perp}} |e| \frac{dn}{dr}. \quad (5)$$

Как было показано в разд. 5.2 и 5.3, радиальные токи электронов и ионов (5) связаны с токами Холла в азимутальном направлении. Согласно формулам (7) и (8) разд. 5.3, силы этих токов равны $-\omega_e \tau_e i_e$ и $\omega_i \tau_i i_i$. Тогда, считая положительным направление против часовой стрелки (рис. 5.17), получаем полный ток Холла

$$i_H = -\omega_i \tau_i i_i + \omega_e \tau_e i_e = (\omega_i \tau_i + \omega_e \tau_e) \frac{(T_e + T_i) D_{e\perp} D_{i\perp}}{T_i D_{e\perp} + T_e D_{i\perp}} |e| \frac{dn}{dr}, \quad (6)$$

где

$$D_{e\perp} = \frac{k T_e \tau_e}{m_e} \frac{1}{1 + \omega_e^2 \tau_e^2}, \quad (7)$$

$$D_{i\perp} = \frac{k T_i \tau_i}{m_i} \frac{1}{1 + \omega_i^2 \tau_i^2}, \quad (8)$$

$$\omega_e = \frac{|e| B}{m_e c}, \quad (9)$$

$$\omega_i = \frac{|e| B}{m_i c}, \quad (10)$$

так что

$$i_H = \frac{ck(T_e + T_i)}{B} f(\omega_e \tau_e, \omega_i \tau_i) \frac{dn}{dr}, \quad (11)$$

где

$$f(\omega_e \tau_e, \omega_i \tau_i) = \frac{\omega_e \tau_e \omega_i \tau_i}{1 + \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i}. \quad (12)$$

Несмотря на то что плотность заряженных частиц n зависит от радиуса, времена столкновений τ_e и τ_i остаются постоянными, поскольку в слабоионизованной плазме они определяются столкновениями с нейтральным газом, плотность которого приблизительно постоянна. В дальнейшем мы будем предполагать, что температуры T_e и T_i постоянны и что давление заряженных частиц $p_e + p_i$ мало по сравнению с магнитным давлением $B^2/8\pi$. Последнее условие означает, что относительные изменения B настолько малы, что ω_e и ω_i можно считать приблизительно постоянными. В таком случае выражение (11) можно проинтегрировать по радиусу, и мы получаем полный ток Холла

$$I_H = - \frac{cnk(T_e + T_i)}{B} f(\omega_e \tau_e, \omega_i \tau_i). \quad (13)$$

Из уравнения Максвелла

$$\frac{\partial B}{\partial r} = - \frac{4\pi}{c} i \quad (14)$$

находим, что магнитное поле внутри плазмы $B_{\text{внутр}}$ слабее, чем снаруж, а их разность равна

$$B_{\text{внеш}} - B_{\text{внутр}} = - \frac{4\pi}{c} I_H = \frac{4\pi}{B} nk(T_e + T_i) f(\omega_e \tau_e, \omega_i \tau_i). \quad (15)$$

Если частота столкновений высока: $\omega\tau \ll 1$, эта разность мала

$$B_{\text{внеш}} - B_{\text{внутр}} = \frac{4\pi}{B} nk(T_e + T_i) \omega_e \tau_e \omega_i \tau_i, \quad (16)$$

а в случае редких столкновений $\omega\tau \gg 1$ максимальна:

$$B_{\text{внеш}} - B_{\text{внутр}} = \frac{4\pi}{B} nk(T_e + T_i). \quad (17)$$

Формула (17) становится очевидной, если принять во внимание, что в случае редких столкновений полное давление плазмы

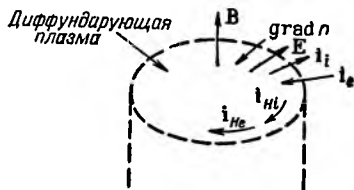


Рис. 5.17. Во время амбиполярной диффузии плазмы течет диффузионный ток Холла, который создает магнитный эффект.

$nk(T_e + T_i)$ должно уравниваться разностью магнитных давлений

$$nk(T_e + T_i) = \frac{B_{\text{внеш}}^2}{8\pi} - \frac{B_{\text{внутр}}^2}{8\pi} \approx \frac{B_{\text{внеш}}(B_{\text{внеш}} - B_{\text{внутр}})}{4\pi}. \quad (18)$$

Заметим, что при макроскопическом описании мы рассматриваем плазму как совокупность частиц в вакууме, а не как диамагнитную среду. Поэтому $B = H$.

Экспериментальные данные о магнитных свойствах слабоионизованной плазмы немногочисленны, хотя диамагнитные свойства пламени были открыты еще во времена Фарадея и привлекали к себе внимание исследователей в прошлом столетии [41]. Сравнительно недавно для изучения плазмы, находящейся в магнитном поле, была использована спин-резонансная методика [42]. Были получены результаты, которые с точностью до 10% согласуются с формулой (15), а также с более ранними измерениями [43].

5.7.3. Полностью ионизованная плазма, удерживаемая магнитным полем

Рассмотрим, наконец, полностью ионизованную плазму, удерживаемую магнитным полем. Такая плазма не находится в термодинамическом равновесии, и столкновения между частицами приводят к увеличению ее первоначального объема. Однако если температура велика, то столкновения (кулоновского типа) становятся настолько редкими, что плазма удерживается магнитным полем в течение длительного времени. Ограничение времени удержания часто связано не со столкновениями, а с неустойчивостями.

Для простоты предположим, что столкновения вообще отсутствуют, но не будем накладывать никаких ограничений на величину давления плазмы по сравнению с магнитным давлением. Тогда уравнение (33) разд. 5.2.3 принимает вид

$$0 = -\text{grad}(p_e + p_i) + \left(\frac{\mathbf{i}}{c}\right) \times \mathbf{B}, \quad (19)$$

и, принимая во внимание уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (20)$$

получаем уравнение *магнитостатического* равновесия (см. разд. 3.12)

$$\text{grad}(p_e + p_i) = \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (21)$$

Как и в случае слабо ионизованной плазмы, рассмотрим простую цилиндрически симметричную конфигурацию с магнитным полем, всюду параллельным оси. Тогда уравнение (21) принимает простой вид

$$\frac{d}{dr} \left(p_e + p_i + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) означает, что обобщенное давление $p_e + p_i + B^2/8\pi$ постоянно. Напряженность магнитного поля $B_{\text{внутр}}$ в плазме, где давление равно $p_e + p_i$, или $nk(T_e + T_i)$, связана с напряженностью внешнего поля $B_{\text{внеш}}$ уравнением

$$\frac{B_{\text{внутр}}^2}{8\pi} = \frac{B_{\text{внеш}}^2}{8\pi} - (p_e + p_i) = \frac{B_{\text{внеш}}^2}{8\pi} - nk(T_e + T_i). \quad (23)$$

Таким образом, и в этом случае магнитное поле внутри плазмы слабее, чем снаружи.

5.8. Расширяющийся поток магнитной плазмы

В гл. 2 было показано, что при наличии электрического поля заряженные частицы малой энергии могут двигаться поперек магнитного поля, а также проникать глубоко внутрь геомагнитного поля диполя (см. рис. 2.11).

Если имеется множество частиц, образующих плазму, то электрическое поле может возникнуть в результате поляризации плазмы при незначительном разделении положительных и отрицательных частиц. Движение плазмы в магнитных полях имеет фундаментальное значение для теории магнитных бурь и полярных сияний, поскольку эти явления вызываются потоками магнитной плазмы, которые выбрасываются Солнцем, пересекают межпланетное пространство и достигают геомагнитного поля.

В настоящем разделе мы подробно рассмотрим некоторые свойства потоков магнитной плазмы. Чтобы избежать ненужных усложнений, проведем рассмотрение на примере очень простой модели (разд. 5.8.1), которая не претендует на моделирование геометрической структуры истинных солнечных потоков, но вполне достаточна для обсуждения некоторых фундаментальных явлений. Сделаем небольшое замечание, касающееся формул преобразования электрического и магнитного полей и их источников. Несмотря на то, что поток движется со скоростью, значительно меньшей скорости света, необходимо учитывать релятивистские эффекты, чтобы согласовать плотности зарядов в неподвижной системе координат и в системе координат, движущейся вместе с потоком (разд. 5.8.1).

В неподвижной системе координат в потоке плазмы существует электрическое поле, которое ускоряет или замедляет заряженные частицы высокой энергии (космические лучи), пересекающие поток. Иногда возникает вопрос: а нет ли здесь противоречия, поскольку в движущейся системе координат, где электрическое поле отсутствует, никакого ускорения не должно происходить? В действительности это всего лишь кажущееся противоречие, и оно легко устраняется в рамках теории относительности, как это показано в разд. 5.8.2.

В разд. 5.8.3 кратко рассмотрен дрейф, обусловленный градиентом магнитного поля и силами инерции, его роль в процессах образования электрического поля и выброса потока. Однако количественный анализ этих явлений, также как и рассмотрение крупномасштабной динамики потока, выходит за рамки настоящей монографии.

5.8.1. Электрические и магнитные поля

Чтобы определить форму модели плазменного потока в неподвижной системе координат, введем сферические координаты: радиус r , азимут φ , широту λ (рис. 5.18). Соответствующие единичные векторы будут: $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\lambda}$.

Пусть границы потока определяются условиями

$$\lambda = \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (1)$$

$$\varphi = \pm \frac{\varphi_0}{2}, \quad (2)$$

а скорость равна *

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v(r) \hat{r} \quad \left(|\varphi| < \frac{\varphi_0}{2}, \quad |\lambda| < \frac{\lambda_0}{2} \right), \\ \mathbf{v} &= 0 \quad \left(|\varphi| > \frac{\varphi_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Магнитные и электрические поля в неподвижной системе координат. Предположим, что магнитное поле имеет структуру

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B(r) \hat{\lambda} \quad \left(|\varphi| < \frac{\varphi_0}{2}, \quad |\lambda| < \frac{\lambda_0}{2} \right), \\ \mathbf{B} &= 0 \quad \left(|\varphi| > \frac{\varphi_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

* Соответствующее обобщение на случай, когда плазма вне потока имеет отличную от нуля радиальную скорость, не представляет принципиальных затруднений,

Усредненное движение частицы внутри потока приблизительно определяется движением ее центра вращения. Основной член в выражении для скорости движения ведущего центра перпендикулярно магнитному полю есть

$$\mathbf{v} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (5)$$

а следовательно,

$$\mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0. \quad (6)$$

В отсутствие электрических полей, параллельных $\mathbf{B}$ ($dB/ds=0$, см. разд. 5.1.3), уравнение (6) выражает сохранение потока через контуры, движущиеся вместе с центрами вращения (см. разд. 5.4.2). Отсюда следует, что

$$Bn^{-1}r^{-1} = \text{const}, \quad (7)$$

где n — концентрация частиц.

Уравнение непрерывности требует, чтобы

$$nvr^2 = \text{const}, \quad (8)$$

а из формул (7) и (8) получаем

$$B = \frac{\text{const}}{vr} = B_0 \frac{v_0 r_0}{vr}. \quad (9)$$

Возвращаясь к выражению (6) и используя формулы (4) и (9), находим, что внутри потока

$$\mathbf{E} = \frac{\text{const}}{r} \hat{\varphi} = E_0 \frac{r_0}{r} \hat{\varphi} \begin{cases} |\varphi| < \frac{\varphi_0}{2}, \\ |\lambda| < \frac{\lambda_0}{2}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$E_0 = \frac{v_0 B_0}{c}. \quad (11)$$

Для плазмы, окружающей поток, справедливо уравнение, аналогичное уравнению (6), а поскольку, согласно нашему предположению, вне потока $\mathbf{v}=0$, то отсюда получаем

$$\mathbf{E} = 0 \quad (|\varphi| > \frac{\varphi_0}{2}). \quad (12)$$

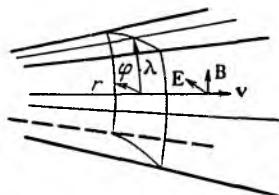


Рис. 5.18. Система координат и геометрия модели плазменной струи (φ — азимут, λ — широта).

Из уравнений (10) и (12) следует, что на границах потока существуют поверхностные заряды, а именно

$$q_s = \frac{E_0}{4\pi} \frac{r_0}{r} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi = -\frac{\varphi_0}{2}, \\ |\lambda| < \frac{\lambda_0}{2}, \end{cases} \quad (13)$$

$$q_s = -\frac{E_0}{4\pi} \frac{r_0}{r} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\varphi_0}{2}, \\ |\lambda| = \frac{\lambda_0}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

Плоскости $\varphi = \pm \varphi_0/2$ (если пренебречь краевыми эффектами) представляют собой эквипотенциальные поверхности, разность потенциалов между которыми равна

$$V_0 = r\varphi_0 E = \frac{\varphi_0 r_0 v_0 B_0}{c}. \quad (15)$$

Аналогично источниками магнитного поля являются радиальные поверхностные токи i_s , плотность которых равна

$$i_s = \frac{cB}{4\pi} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi = -\frac{\varphi_0}{2}, \\ |\lambda| < \frac{\lambda_0}{2}; \end{cases} \quad (16)$$

$$i_s = -\frac{cB}{4\pi} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\varphi_0}{2}, \\ |\lambda| < \frac{\lambda_0}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

а плотность азимутального объемного тока

$$i = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB). \quad (18)$$

В простейшем случае, когда $v = \text{const}$, из уравнения (9) следует, что B обратно пропорционально r , так что полный поверхностный ток не зависит от r и объемный ток равен нулю.

Магнитные и электрические поля в системе координат, движущейся вместе с плазмой. Чтобы рассмотреть потоки плазмы в системе координат, движущейся вместе с плазмой, выберем локальную декартову систему координат S' с осями координат ξ , η и ζ и единичными векторами $\hat{\xi}$ (параллельным $\hat{r}$), $\hat{\eta}$ (параллельным $\hat{\varphi}$) и $\hat{\zeta}$ (параллельным $\hat{\lambda}$), имеющую начало O' в точке r' , φ' , λ' . Вблизи начала координат

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2} \ll r' \quad (19)$$

уравнения преобразования координат имеют простой вид

$$\xi = r - r', \quad (20)$$

$$\eta = r' (\varphi - \varphi') \cos \lambda', \quad (21)$$

$$\zeta = r' (\lambda - \lambda'). \quad (22)$$

Теперь магнитное поле внутри потока равно

$$\mathbf{B}' \approx \mathbf{B} = B \hat{\xi} \quad (23)$$

и имеет частную производную по времени [см. (9)]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = v \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\xi} = v_0 B_0 \frac{r_0}{r'} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \right)_{r'} \hat{\xi}. \quad (24)$$

Напряженность электрического поля равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{v(r', \varphi', \lambda') \times \mathbf{B}}{c} = \\ = \frac{v_0 B_0}{c} \frac{r_0}{r'} \left\{ -\frac{\eta}{r'} \hat{\xi} - \frac{\xi}{r'} \left(\frac{1}{rB} \frac{\partial(rB)}{\partial r} \right)_{r'} \hat{\eta} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где мы использовали формулы (9)–(11). В движущейся системе электрическое поле обращается в нуль в том смысле, что оно является величиной первого порядка малости по отношению к ξ/r' и η/r' . Однако

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{v_0 B_0}{c} \frac{r_0}{r'} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \right)_{r'} \hat{\xi} \quad (26)$$

является величиной нулевого порядка, как и следовало ожидать, поскольку производная магнитного поля по времени (24) в движущейся системе координат представляет собой величину нулевого порядка.

Для рассмотрения токов и зарядов на границе расположим систему координат S' таким образом, чтобы плоскость $\xi\zeta$ совпала с плоскостью $\varphi = -\varphi_0/2$. Тогда в области $\eta > 0$ $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ определяются выражениями (23) и (25), а в области $\eta < 0$ обращаются в нуль.

Скачок магнитного поля на границе приводит к возникновению поверхностного тока

$$i'_S = \frac{cB}{4\pi}, \quad (27)$$

соответствующего току i_S , наблюдаемому в неподвижной системе координат [см. уравнение (16)]. Электрическое поле непрерывно, поэтому поверхностный заряд обращается в нуль:

$$q'_S = 0. \quad (28)$$

Различие в плотностях поверхностного заряда, измеренных в двух системах координат, является релятивистским эффектом (см., например, [44]). Действительно, результат (28) следует из формулы релятивистского преобразования

$$q'_S = \left(q_S - \frac{vi_S}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx q_S - \frac{vi_S}{c^2}, \quad (29)$$

где мы использовали формулы (9), (11), (13) и (16). Таким образом, этот эффект обусловлен существованием поверхностных токов, связанных с ограниченным в пространстве магнитным полем. Он не возникал бы, если бы магнитное поле было одинаковым снаружи и внутри плазмы. (Оба случая — как со скачком магнитного поля на границе плазмы, так и без скачка — могут оказаться существенными в различных приложениях.)

Различие суммарных плотностей поверхностных зарядов, измеренных в двух системах координат, довольно просто объяснить, используя понятие лоренцева сокращения. Поверхностный ток i_S создается положительными ионами, дрейфующими со скоростью u_i относительно плазмы, и электронами, дрейфующими со скоростью u_e . Если N'_i и N'_e — поверхностные плотности положительных и отрицательных частиц (измеренные в системе координат, движущейся вместе с плазмой), то поверхностная плотность тока равна

$$i'_S = e_i N'_i u_i + e_e N'_e u_e. \quad (30)$$

Пусть поверхностный ток создается определенным числом электронов N . В системе координат, движущейся со скоростью дрейфа, они распределены по определенному элементу длины l_e^e в радиальном направлении. В системе координат, связанной с плазмой, длина этого отрезка равна

$$l'_e = l_e^e \sqrt{1 - \left(\frac{u_e}{c} \right)^2}. \quad (31)$$

Поскольку $u_e \ll v \ll c$, то релятивистскую формулу сложения скоростей с достаточной степенью точности можно заменить классической, и скорость электронов, измеренная в неподвижной системе координат, равна $u_e + v$. Следовательно, отрезок l_e^e в неподвижной системе координат имеет величину

$$l_e = l_e^e \sqrt{1 - \frac{(u_e + v)^2}{c^2}}. \quad (32)$$

Таким образом, если N'_e — плотность электронов на поверхности, измеренная в системе координат, связанной с плазмой, то из формул (31) и (32) следует, что соответствующая плотность

в неподвижной системе координат равна

$$N_e = N'_e \frac{\sqrt{1 - (u_e/c)^2}}{\sqrt{1 - (u_e + v)^2/c^2}} \approx N'_e \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{v}{c^2} u_e + \dots \right). \quad (33)$$

Аналогичный результат получаем для ионов

$$N_i = N'_i \frac{\sqrt{1 - (u_i/c)^2}}{\sqrt{1 - (u_i + v)^2/c^2}} \approx N'_i \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{v}{c^2} u_i + \dots \right). \quad (34)$$

Поверхностный заряд в неподвижной системе координат равен

$$q_s = \left[(N'_i e_i + N'_e e_e) \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) + \frac{v}{c^2} (N'_i e_i u_i + N'_e e_e u_e) \right].$$

Если, наконец, в последний член в квадратных скобках мы снова подставим формулы (33) и (34), то, пренебрегая величинами u_i/v , u_e/v и v/c по сравнению с единицей, получим в соответствии с формулой (29)

$$\begin{aligned} q_s &= \left[N'_i e_i + N'_e e_e + \frac{v}{c^2} \times \right. \\ &\quad \times (N'_i e_i u_i + N'_e e_e u_e) \left. \right] \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \approx \\ &\approx q'_s + \left(\frac{v}{c^2} \right) i_s. \end{aligned} \quad (35)$$

5.8.2. Ускорение заряженных частиц высоких энергий

Если заряженная частица высокой энергии проходит через поток в направлении ϕ , ее энергия изменяется на величину,

$$\Delta W = eV_0 = \frac{e\phi_0 r_0 B_0 v_0}{c}, \quad (36)$$

соответствующую разности потенциалов (15) на границах (e включает в себя знак заряда).

Представляет интерес рассмотреть, каким образом происходит такое ускорение с точки зрения наблюдателя, находящегося в движущейся системе координат, где электрическое поле отсутствует. Для простоты рассмотрим ультрарелятивистскую заряженную частицу, проходящую через узкий поток $\phi_0 \ll 1$, имеющий почти параллельные границы. Пусть импульс и энергия частицы в неподвижной системе координат S равны p и W , а в движущейся системе координат p' и W' . В движущейся системе координат S' электрическое поле отсутствует, таким образом, величины p' и W' являются интегралами движения. Магнитное

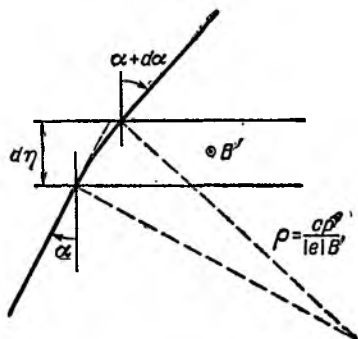


Рис. 5.19. Если частица высокой энергии пересекает поток магнитной плазмы, то под действием магнитного поля потока она отклоняется на малый угол $d\alpha$.

поле $B' = B$ отклоняет частицу на угол

$$d\alpha = \frac{eB}{cp' \cos \alpha} d\eta, \quad (37)$$

где $d\eta$ — ширина потока, а α — угол падения (рис. 5.19).

Поскольку скорость движущейся системы координат мала ($v \ll c$), то формула релятивистского преобразования для энергии (см., например, [45]) принимает простой вид

$$W = W' + vp' \sin \alpha, \quad (38)$$

где α — угол между направлением движения частицы и нормалью к границе потока. Для ультрарелятивистской частицы $p' \approx W'/c$, и формула (38) принимает вид

$$W = W' \left(1 + \frac{v}{c} \sin \alpha \right). \quad (39)$$

Поскольку энергия в движущейся системе координат является инвариантом, то энергия в неподвижной системе вследствие отклонения на угол $d\alpha$ изменяется на величину

$$dW = W' \frac{v}{c} \cos \alpha d\alpha. \quad (40)$$

Из формул (37) и (40), с точностью до членов высшего порядка малости по v/c , следует

$$dW = \frac{eBv}{c} d\eta,$$

или, поскольку $d\eta = r' \varphi_0$ и $Bv = B_0 v_0 r_0 / r'$,

$$dW = \frac{e\varphi_0 r_0 B_0 v_0}{c} = eV_0, \quad (41)$$

что соответствует формуле (36).

5.8.3. Дрейф частиц в азимутальном направлении

Скорость каждой частицы потока представляет собой сумму «тепловой» скорости и средней скорости потока. Пусть компоненты, перпендикулярная и параллельная полю B , равны $\mathbf{w}'_{\perp}$ (соответствующая кинетическая энергия $W'_{\perp}$) и $\mathbf{w}'_{\parallel}$ (энергия $W'_{\parallel}$). Поскольку частица движется вместе с расширяющимся потоком, составляющая $w'_{\perp}$ уменьшается вследствие торможения в убывающем магнитном поле. Адиабатическая инвариантность величины

$$\frac{m w_{\perp}'^2}{2B} = \frac{W'_{\perp}}{B} = \mu \quad (42)$$

(нерелятивистский случай) требует, чтобы энергия $W'_\perp$ изменялась со скоростью

$$\frac{dW'_\perp}{dt} = \frac{W'_\perp}{B} \frac{dB}{dt} = \frac{W'_\perp}{B} \frac{cE}{B} \frac{dB}{dr}. \quad (43)$$

В то же время градиент магнитного поля вызывает дрейф в направлении ϕ . Этот дрейф направлен против электрического поля для положительных частиц и параллельно полю для отрицательных частиц. Поэтому частицы совершают работу против электрических сил, что приводит к нарастанию поля. Нарастающее электрическое поле вызывает увеличение скорости радиального дрейфа, а соответствующая сила инерции приводит к дополнительному дрейфу, который частично компенсирует дрейф, обусловленный градиентом магнитного поля.

Результирующий дрейф в направлении ϕ в случае $w'_\parallel = 0$ определяется выражением

$$u_\phi = -\frac{cm}{eB} \left(-\frac{dB}{dr} \right) + \frac{cm}{eB} \frac{dv}{dt}. \quad (44)$$

Умножая это выражение на eE и используя формулы (5), (42) и (43), получаем

$$-\frac{dW'_\perp}{dt} = -eEu_\phi + \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right). \quad (45)$$

Это уравнение показывает, что энергетические потери, обусловленные уменьшением $W'_\perp$, сопряжены с изменением потенциальной энергии и частично кинетической энергии, связанной с радиальным движением.

Аналогичные явления происходят и в том случае, если имеет место перераспределение энергии между различными степенями свободы, хотя связь между $W'_\perp$ и B определяется соотношением иного вида, нежели (42).

Преобразование энергии вращения в энергию поступательного движения, связанное с дрейфом в радиально спадающем магнитном поле, играет важную роль в процессах выброса потоков плазмы, которые происходят на Солнце [46]. Это явление можно рассматривать как диамагнитное выталкивание плазмы из области сильного магнитного поля, которое сопровождается охлаждением в результате расширения.

5.9. Функция распределения

В физике плазмы, так же как и в кинетической теории обычных газов, при точном математическом анализе необходимо учитывать распределение частиц по скоростям. Это удобно сделать,

введя функцию распределения для каждого сорта частиц. Функция распределения зависит от координат, компонент скорости и времени. Она определяется таким образом, что вероятное число частиц в данном элементе объема $dx dy dz$ (в точке x, y, z), который в данный момент времени t имеют компоненты скорости в интервалах $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$ и $(v_z, v_z + dv_z)$, равно $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ или, в сокращенной записи, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\tau$. Координатное пространство, образованное координатами x, y, z конфигурационного пространства и координатами v_x, v_y, v_z пространства скоростей, является шестимерным, и «элемент его объема» мы обозначим $d\tau$. Функцию распределения можно интерпретировать как плотность частиц в указанном шестимерном пространстве.

5.9.1. Уравнения для функции распределения

Чтобы вывести уравнение для функции распределения, рассмотрим частицы, находящиеся внутри некоторого элемента объема $d\tau$ в данный момент времени t . Число таких частиц равно $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\tau$. В более поздний момент времени $t + dt$ эти же частицы занимают объем $d\tau'$, расположенный в точке $\mathbf{r} + \mathbf{v} dt$, и имеют скорость $\mathbf{v} + (\mathbf{F}/m) dt$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на одну частицу, а m — масса частицы. Если столкновений не происходит, то все частицы, находившиеся в момент времени t в объеме $d\tau$, в момент времени $t + dt$ окажутся в объеме $d\tau'$, так что

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} dt, t + dt) d\tau' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\tau. \quad (1)$$

Если сила $\mathbf{F}$ не зависит от скорости $\mathbf{v}$ и если, кроме того, $\mathbf{F}$ представляет собой силу типа лоренцевой $(e/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, то можно доказать (см., например, [10]), что элементы $d\tau$ и $d\tau'$ имеют одинаковые размеры, так что

$$d\tau = d\tau' \quad (2)$$

и

$$d\tau \left[f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} dt, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right] = 0. \quad (3)$$

Если происходят столкновения, то уравнение (3) перестает быть справедливым, поскольку те частицы, которые испытали соударения во временном интервале dt , резко изменяют свою скорость и к моменту времени $t + dt$ уже не окажутся в объеме $d\tau'$. Однако в рассматриваемый объем приходят другие частицы. Изменение числа частиц в объеме пропорционально времени dt и объему $d\tau$, и его можно записать в виде $(\partial f / \partial t)_{\text{столкн}} d\tau dt$. Таким образом, при наличии столкновений вместо уравнения (3) имеет

соотношение

$$\left[f(\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} dt, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right] d\tau = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} d\tau dt. \quad (4)$$

Если $dt \rightarrow 0$, это соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \\ + \frac{F_x}{m} \frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{F_y}{m} \frac{\partial f}{\partial v_y} + \frac{F_z}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}, \end{aligned} \quad (5)$$

или, короче,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \text{ grad}_v \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}. \quad (6)$$

Уравнение (5) представляет собой *уравнение Больцмана*, которое имеет фундаментальное значение в кинетической теории газов. Если присутствует более одного сорта частиц, как это всегда бывает в случае ионизованных газов, для каждого сорта частиц можно написать уравнение типа (5). Например, для плазмы, состоящей из электронов и протонов, функция распределения электронов подчиняется уравнению

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \text{ grad}) f_e + \left(\frac{\mathbf{F}_e}{m_e} \text{ grad}_v \right) f_e = \left[\left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} \right]_{ee} + \left[\left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} \right]_{ep}, \quad (7)$$

где последний член соответствует столкновению электронов с протонами. Аналогичное уравнение справедливо для протонов.

В случае короткодействующих сил (например, в слабо ионизованной плазме) член, учитывающий столкновения, обычно выражается через «интеграл столкновений», взятый по распределению скоростей, и уравнение Больцмана принимает вид интегродифференциального уравнения. В случае кулоновских сил, которые являются дальнедействующими, большинство столкновений приводит к незначительным изменениям скоростей (см. разд. 4.3.2). В таком случае интегралы столкновений можно разложить по степеням изменения скорости, и мы приходим к *уравнению Фоккера — Планка* (см., например, [47]).

В плазме низкой плотности средняя длина свободного пробега велика, и взаимодействие заряженных частиц обусловлено не столкновениями, а главным образом электрическими полями, которые создаются коллективным движением частиц. В таком случае в первом и достаточно хорошем приближении член, учитывающий столкновения, в уравнении (5) вообще можно отбросить. *Бесстолкновительное уравнение Больцмана*, рассматриваемое совместно с *уравнениями Максвелла*, обычно называют *уравнениями Власова* [48]. Они справедливы для разреженной «бесстолкновительной» плазмы.

5.9.2. Равновесное распределение

Точное стационарное решение уравнения (5) представляет собой распределение Максвелла — Больцмана, которое соответствует термодинамическому равновесию. Для того чтобы такое равновесие существовало, немагнитные силы должны иметь потенциал. Тогда полную силу можно записать как

$$\mathbf{F} = e \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{B} - \text{grad } \phi. \quad (8)$$

Распределение Максвелла — Больцмана имеет вид

$$f = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{-\phi + m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right\}, \quad (9)$$

где n_0 и T — постоянные, представляющие собой плотность на эквипотенциальной поверхности $\phi=0$ и температуру. Отметим, что в условиях равновесия температура везде одинакова, как в отсутствие, так и при наличии сил.

Из формулы (9) следует, что при тепловом равновесии магнитное поле само по себе не влияет на функцию распределения. *Плазма, удерживаемая магнитным полем, не находится в термодинамическом равновесии*, но она может достигать магнито-гидростатического равновесия. Это означает, что ее состояние описывается стационарным решением магнито-гидростатических уравнений (см. разд. 3.12). Поскольку времена установления термодинамического равновесия обычно велики, удержание в магнитном поле играет важную роль как в лабораторной плазме (термоядерные устройства), так и в космической физике (радиационные пояса Земли).

5.9.3. Тензор давления

Макроскопические величины, такие, как плотность, массовая скорость и т. д., являются средними по функции распределения (точнее, моментами функции распределения). Поэтому макроскопические уравнения разд. 5.2.3 можно получить, соответствующим образом проинтегрировав по пространству скоростей уравнения для функции распределения. Если провести такие расчеты (см., например, [3, 49, 50]), то мы получим макроскопические уравнения разд. 5.2.3 в несколько более общем виде, в котором они пригодны для рассмотрения случаев анизотропного распределения по скоростям. Такие уравнения вместо градиентов давлений $-\text{grad } p_e$ и $-\text{grad } p_i$ содержат дивергенции тензоров $-\text{Div } \Psi_e$ и $-\text{Div } \Psi_i$.

Опуская индексы e и i , мы можем записать их в виде

$$\begin{aligned} \text{Div } \Psi = & \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{xz} \right) + \\ & + \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{yz} \right) + \\ & + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{zz} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ — единичные векторы, параллельные осям координат.

Компоненты тензора давления Ψ можно выразить через усредненные по распределению скоростей попарные произведения компонент скорости частицы w_x , w_y , w_z , измеряемой в системе координат, которая движется со средней скоростью системы частиц

$$\begin{aligned} \Psi = & \begin{pmatrix} \Psi_{xx} & \Psi_{xy} & \Psi_{xz} \\ \Psi_{yx} & \Psi_{yy} & \Psi_{yz} \\ \Psi_{zx} & \Psi_{zy} & \Psi_{zz} \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} nm \langle w_x^2 \rangle & mn \langle w_x w_y \rangle & nm \langle w_x w_z \rangle \\ nm \langle w_y w_x \rangle & nm \langle w_y^2 \rangle & nm \langle w_y w_z \rangle \\ nm \langle w_z w_x \rangle & nm \langle w_z w_y \rangle & nm \langle w_z^2 \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению скоростей.

Во многих случаях тензор давления имеет значительно более простой вид. Например, для магнитной плазмы его часто можно привести к виду

$$\Psi = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$p_{\perp} = mn \langle w_x^2 \rangle = mn \langle w_y^2 \rangle, \quad (13)$$

$$p_{\parallel} = mn \langle w_z^2 \rangle, \quad (14)$$

если одна из координатных осей [в формулах (12) — (14) — ось z] направлена параллельно силовым линиям магнитного поля. Теперь члены $-\text{Div } \Psi_e$ и $-\text{Div } \Psi_i$ принимают вид

$$-\text{Div } \Psi = \hat{x} \left(-\frac{\partial p_{\perp}}{\partial x} \right) + \hat{y} \left(-\frac{\partial p_{\perp}}{\partial y} \right) + \hat{z} \left(-\frac{\partial p_{\parallel}}{\partial z} \right). \quad (15)$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что при наличии магнитного поля давление в направлении, параллельном полю, отличается от давления в направлении, перпендикулярном к нему. Такая анизотропия может существовать в том случае, если связь (обусловленная столкновениями или неустойчивостями) между различными поступательными степенями свободы слаба, а энергия сообщается преимущественно одной из компонент скорости $v_{\parallel}$ или $v_{\perp}$. В лабораторных условиях подобная ситуация имеет место, например, при магнитном сжатии тонкой плазмы, когда возрастает составляющая импульса $p_{\perp}$ [51], или в случае плазмы с убегающими электронами, которые ускоряются вдоль магнитного поля. В космической физике магнитные поля и процессы магнитного ускорения играют важную роль (см. разд. 2.7), и в том случае, если плотность плазмы мала и, следовательно, столкновения редки, может иметь место анизотропное распределение по скоростям.

Наконец, в простейшем случае, когда распределение по скоростям изотропно, так что

$$p_{\perp} = p_{\parallel} = p \quad (16)$$

и недиагональные члены равны нулю, тензор давления принимает вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (17)$$

который теперь не зависит от ориентации системы координат. В таком случае выражение (10) [или (15)] приводится к знакомому нам виду

$$-\operatorname{Div} \Psi = -\operatorname{grad} p.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H., Microscopic and Macroscopic models in Plasma Physics Proceedings of the Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma, ed. J. Fox, Polytechnic Press, Brooklyn, New York, 1961, p. 37.
2. Spitzer L., Equations of Motion for an Ideal Plasma, Astrophys. J., 116, 299 (1952).
3. Lehnert B., Dynamics of Charged Particles, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963.
4. Lehnert B., Plasma Physics on Cosmical and Laboratory Scale, Nuovo Cimento, Ser. X, Suppl. 13, 1 (1959).
5. Von Engel A., Steenbeck M., Elektrische Gasentladungen, I, Springer-Verlag, Berlin, 1932. (Русский перевод: Энгель А., Штеенбек М., Физика и техника электрических разрядов в газах, I, М., 1935.)
6. Cobine J. D., Gaseous Conductors, McGraw-Hill, New York, 1941.

7. Massey H. S. W., Burhop E. H. S., *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1952. (Русский перевод: Мессин С. В., Бархон Е. Г. С., *Электронные и ионные столкновения*, ИЛ, М., 1958.)
- 8*. Bates D. R., *Atomic and Molecular Processes*, Acad. Press, New York — London, 1962. (Русский перевод: под ред. Бейтса Д., *Атомные и молекулярные процессы*, «Мир», М., 1964.)
- 9*. Hasted J. B., *Physics of Atomic Collisions*, Butterworths, London, 1964. (Русский перевод: Хастед Дж., *Физика атомных столкновений*, «Мир», М., 1965.)
10. Chapman S., Cowling T. G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge Univ. Press, 2nd ed., 1958. (Русский перевод: Чепмен С., Каулинг Т., *Математическая теория неоднородных газов*, ИЛ, М., 1960.)
11. Cowling T. G., *Electrical Conductivity of an Ionized Gas in a Magnetic Field, with Applications to the Solar Atmosphere and the Ionosphere*, Proc. Roy. Soc., A, 183, 453 (1945). (Русский перевод: Каулинг Т. Г., *Электропроводность ионизованного газа в магнитном поле с применением к солнечной атмосфере и ионосфере*, статья в сборнике «Современные проблемы астрофизики и физики Солнца», ИЛ, М., 1951, стр. 154.)
12. Baker W. G., Martin D. F., *Electric Currents in the Ionosphere. I. The Conductivity*, Phil. Trans. Roy. Soc. A, 246, 281 (1953).
13. Chapman S., *The Electrical Conductivity of the Ionosphere*, Nuovo Cimento, Suppl. 4, 1385 (1956).
14. Cowling T. G., *Magneto-hydrodynamics*, Interscience, New York, 1957. (Русский перевод: Каулинг Т., *Магнитная гидродинамика*, ИЛ, М., 1959.)
15. Lehnert B., *Rotating Plasma Devices*, Plasma Physics and Thermonuclear Research, ed. J. L. Tuck, Progr. Nuclear Energy Series, 11, vol. 2, 1962.
16. Lundquist S., *Studies in Magneto-hydrodynamics*, Ark. f. fys., 5, 297 (1952).
17. Von Engel A., Steenbeck M., *Electrische Gasentladungen*, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1934. (Русский перевод: Энгель А., Штеенбек М., *Физика и техника электрических разрядов в газах*, II, М., 1936.)
18. Bennett W. H., *Magnetically Self-focusing Streams*, Phys. Rev., 45, 890 (1934).
19. Lundquist S., *Magneto-hydrostatic Fields*, Ark. f. fys., 2, 361 (1950).
20. Murty G. S., *Filamentary Structure associated with Force-free Magnetic Fields*, Ark. f. fys., 21, 203 (1961).
21. Alfvén H., *Filamentary Structures produced by an Electric Current in a Plasma*, Ark. f. fys., 19, 375 (1961).
22. Alfvén H., *Confined Electron Streams in a Plasma*, Ark. f. fys., 20, 389 (1961); *Line Currents in Cosmical Physics*, Proc. Roy. Soc., A, 233, 296 (1955). (Русский перевод: Альфвен Х., *Шнуровые токи в космической физике*, статья в сборнике «Проблемы современной физики», вып. 7, ИЛ, М., 1957.)
23. Alfvén H., *On the Filamentary Structure of the Solar Corona*, Proceedings of International Astronomical Union Symposium № 16 at Cloudcroft, Colorado, 1962.
24. Spitzer L., *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York, 2nd ed., 1962. (Русский перевод: Спитцер Л., *Физика полностью ионизованного газа*, «Мир», М., 1965.)
25. Simon A., *Diffusion of Like Particles across a Magnetic Field*, Phys. Rev., 100, 1557 (1955).

26. Longmire C. L., Rosenbluth M. N., Diffusion of Charged Particles across a Magnetic Field, *Phys. Rev.*, 103, 507 (1956).
27. Kennard E. H., Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill, New York, 1938.
28. Lehnert B., Diffusion of Ions and Electrons, *Proc. Intern. Conf. on High Magnetic Fields*, MIT Press and Wiley, 1962, p. 617.
29. Bohm D., Qualitative Description of the Arc Plasma in a Magnetic Field, The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields, eds. A. Guthrie and R. K. Wakerling, McGraw-Hill, 1949, p. 1.
30. Spitzer L., Particle Diffusion across a Magnetic Field, *Phys. Fluids*, 3, 659 (1960).
31. Taylor J. B., Stochastic Methods in the Theory of Plasma Diffusion, *J. Plasma Physics and Thermonuclear Fusion*, Suppl. Part 2, 477, 1962.
32. Lehnert B., Diffusion Processes in the Positive Column in a Longitudinal Magnetic Field, *Proc. Second U. N., Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, 32, 349, 1958. (См. перевод в сб.: «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции», Избранные доклады иностранных ученых, Госатомиздат, 1959; Ленерт Б., Процессы диффузии в положительно заряженном цилиндре в продольном магнитном поле.)
33. Hoh F. C., Low-temperature Plasma Diffusion in a Magnetic Field, *Rev. Mod. Phys.*, 34, 267 (1962).
34. Кадомцев Б. Б., Недоспасов А. В., *J. Nuclear Energy, Part C*, 1, 230 (1960).
35. Hoh F. C., Lehnert B., Screw Instability of a Plasma Column, *Phys. Rev., Letters*, 7, 75 (1961).
36. Rosenbluth M. N., Longmire C. L., Stability of Plasmas Confined by Magnetic Fields, *Ann. Phys.*, 1, 120 (1956). (См. перевод в сб.: «Проблемы современной физики», № 1, 1958; Розенблют М., Лонгмайр К., Стабильность плазмы, ограниченной магнитным полем.)
37. Lehnert B., Plasma Stability in a Inhomogeneous Magnetic Field, *Phys. Fluids*, 5, 432 (1962).
38. Ленерт Б., Винтовая и желобковая неустойчивость в плазме низкого давления, *Атомная энергия*, 14, 82 (1963).
39. Bohr N., Dissertation, Copenhagen, 1911.
40. Cowling T. G., On the Radial Limitation of the Sun's Magnetic Field, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 90, 140 (1929).
41. Graetz L., *Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus*, Bd. 4, 2, 780, Leipzig, 1915.
42. Marshall T. C., Kawczyn R. A., Goldstein L., Diamagnetic Moment of Gaseous Plasmas measured by Spin Resonance Techniques, *Nature*, 187, 584 (1960).
43. Steenbeck M., Über die magnetischen Eigenschaften des Plasmas von Gasentladungen, *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus den Siemens-Werken*, 15, 2, 1 (1936).
44. Becker R., Sauter F., *Theorie der Elektrizität*, 1. Teubner, Stuttgart, 16-te Ausgabe, 1957.
45. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
46. Alfvén H., A Theory of Magnetic Storms and of Aurorae, *Kgl. Sv. Vet. Akad. Handl.*, ser 3, 18, № 3 (1939).
47. Allis W. P., Motions of Ions and Electrons, *Encyclopedia of Physics*, 21, Springer-Verlag, Berlin, 1956, 383—444.
48. Власов А. А., On the Kinetic Theory of an Assembly of Particles with Collective Interactions, *J. Phys. (СССР)*, 9, 25 (1945).
49. Linhart J. G., *Plasma Physics*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 2nd ed., 1961.
50. Thompson W. B., *An Introduction to Plasma Physics*, Pergamon Press, 1962.

51. Post R. F., Petkins W. A., Velocity-space Plasma Instabilities observed in a Mirror Machine, *Phys. Rev., Letters*, **6**, 85 (1961).
52. Alfvén H., Momentum Spectrum of Cosmic Radiation, *Tellus*, **11**, 106 (1959).
53. Chandrasekhar S., Stochastic Problems in Physics and Astronomy, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1 (1943).
54. Herdan R., Liley B. S., Dynamical Equations and Transport Relations for a Thermal Plasma, *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 731 (1960).
55. Schlüter A., Dynamik des Plasmes II, *Z. Naturforsch.* **6a**, 73 (1951). (См. перевод в сб.: «Проблемы современной физики», № 2, ИЛ, М., 1956; Шлютер А., Динамика плазмы, II. Плазма с нейтральным газом.)
56. Thompson W. B., The Dynamics of High-temperature Plasmas, *Reports on Progress in Physics*, **14**, Inst. of Phys. and the Phys. Soc. (London), 1961.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатические инварианты** 38, 47, 49, 50, 54
- Бессилловые магнитные поля** 130—133
- Больцмана уравнение** 199, 247
- Ведущий центр** 29, 30, 41, 50
- Власова уравнение** 247
- Вмороженные силовые линии** 97, 120, 121, 224
- Возмущений метод** 27, 37—54, 57, 58
- Волокнистая структура** 16, 221, 222, 226
- Время релаксации** 80, 176, 177
- Вязкое затухание** 121
- Геомагнитное поле** 14, 46, 54, 59
- Гидромагнитная скорость** 96, 114, 123, — устойчивость 133—140
- Гидромагнитные волны** 91, 94, 97, 98, 105, 106, 124, 125
- Групповая скорость** 107, 112
- Дебаевский радиус** 164, 175
- Диамagnetизм** 231, 233, 245
- Дисперсионное соотношение** 112, 113, 116, 135
- Диффузия** 182, 227
- амбиполярная 181, 229, 235
- аномальная 230
- Бома 230
- коэффициент 119, 181, 227
- обусловленная неоднородностями магнитного поля 79, 229
- параллельно магнитному полю 227
- поперек магнитного поля 227
- Дрейфовая скорость** 32—44, 60—74, 168, 196
- Звука скорость** 115
- Звуковые волны модифицированные** 116
- Зеемана эффект** 15
- Изоротация** 127, 129
- Индукцированные электрические поля** 17—24
- Ионосфера** 9, 161, 192, 194, 219
- Каулинга теорема** 141
- Квазинейтральность** 24, 25, 188, 194, 200
- Конус потерь** 46, 191
- Корона** 16, 24, 122, 192, 194, 219
- Круссала—Шварцшильда неустойчивость** 134
- Ларморовский радиус** 29, 185
- Лундквиста критерий** 118, 121
- Магнитное давление** 91, 94, 237
- зеркало 46, 52, 76, 191
- натяжение 94
- число Рейнольдса 194
- Магнитные бури** 9, 15, 59, 68, 194, 237
- Магнитный диполь** 12—14, 23, 58
- момент 30, 38, 47, 48, 231
- поток 30, 38, 47—49
- — сохранение 119
- — усиление 145
- Магнитозвуковые волны** 91, 110, 118
- Магнитостатическое равновесие** 130—133, 236, 248
- Магнитосфера** 9, 72, 75, 77, 193, 194, 219
- Макроскопическая скорость** 196, 200
- Метод длины свободного пробега** 169, 227

Нейтральные линии 141
 Неустойчивость винтовых магнитных полей 136—140
 — желобковая 231
 — изгиба 135, 141, 144, 149
 — Крускала—Шварцшильда 134
 — спиральная 231
 — Тейлора 134
 — типа перетяжки 135, 139

Обобщенное давление 237
 Обобщенный закон Ома 203, 204
 Отражение гидромагнитных волн 102, 103, 124

Параметр столкновения 173
 Педерсена проводимость 208
 Пинч-эффект 134, 220
 Плазменная частота 165
 Подвижность 168
 Полоидальное поле 132, 143, 146, 148
 Поляризация вращающихся проводников 21—24
 — плазменного потока 238—243
 — равномерно движущейся среды 18—21
 Полярные сияния 9, 59, 75, 219, 237
 Преобразование подобия 158, 220
 Проводимость анизотропная 186, 207—215

— изотропная 186, 208
 — ионная 172
 — неоднородной плазмы 204—207
 — Педерсена 208
 — поперечная 207—210, 211—215
 — холловская 207—209, 211—215
 — электронная 172

Пространственного заряда плотность 24, 25, 164, 181, 188

Пространство скоростей 246
 Пуассона уравнение 164

Радиационные пояса 9, 46, 54, 58, 70
 Разряд 155—158
 — дуговой 158
 — искровой 158
 — таунсендовский 158
 — тлеющий 158

Распределение по скоростям 162, 179, 193, 245—248

Рассеяние на неоднородностях магнитного поля 30, 79, 229

Рейнольдса число 121

Самовозбуждающееся динамо 141
 Сжатие разрядов 158, 219
 Синхротронное излучение 84
 Скин-эффект 99
 Солнечные магнитные поля 9, 15, 192
 — пятна 9, 15, 122, 131, 144, 192
 Средняя длина свободного пробега 185, 193, 231
 Степень ионизации 155, 160, 162, 168, 207, 219
 Столкновения близкие 174
 — дальние 174
 — кулоновские 173, 247
 — парные 167
 — сечение 205
 — упругие 162, 170
 — частота 174, 185, 192, 235

Температура ионная 163, 171, 176
 — нейтрального газа 163, 171
 — электронная 163, 171, 176
 Тензор давления 200, 248—250
 Тепловая скорость 169, 176, 205
 Теплопроводность 123
 Ток диффузионный 227
 — Холла 207—209, 213, 227
 Торондальное поле 132, 143, 146, 148

Униполярная индукция 21
 Униполярные магнитные области 15
 Ускорение 75—83
 — бетатронное 38, 47, 52, 53, 78, 80
 — магнитной накачкой 78
 — механизмом Ферми 49—53, 76
 — при прохождении через плазменную струю 243

Фазовая скорость 106
 Фоккера — Планка уравнение 247
 Ферми механизм 76
 Феррари теорема 127—130
 Функция распределения 245

Хаотическое движение 79, 186, 220

Центрированный диполь 14
 Циклотронное излучение 84

Штёрмера метод 27, 55—58

Штёрмеровская длина 55

Эквивалентная диэлектрическая про-
ницаемость 101

Эквивалентный контур 210

— магнит 61, 63, 232

— потенциал 45

Экранирование электростатическое 165

Электрическая струя 215, 220

Электрическое поле 23, 28, 33, 37,
68—74

— — в магнитосфере 190, 191

— — — расширяющемся потоке
плазмы 237—243

— — индуцированное 18—24

— — эффективное 204

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие ко второму изданию	7
ГЛАВА 1. Общий обзор	9
1.1. Введение	9
1.2. Магнитные поля в космической физике	12
1.3. Индуцированные электрические поля	17
1.3.1. Индуцированное электрическое поле в равномерно движущейся среде	18
1.3.2. Индуцированные электрические поля во вращающихся телах	21
1.4. Приближенное равенство положительного и отрицательного пространственных зарядов	24
Литература	25
ГЛАВА 2. Движение заряженных частиц в магнитных полях	
2.1. Введение	27
2.2. Движение заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле	28
2.2.1. Невозмущенное движение	28
2.2.2. Движение, возмущенное действием немагнитных сил или отдельной неоднородностью магнитного поля. Ведущий центр	30
2.2.3. Движение центра вращения. Силы инерции	33
2.3. Медленно меняющееся магнитное поле	36
2.3.1. Переменное магнитное поле	37
2.3.2. Градиент магнитного поля имеет составляющую в направлении поля	38
2.3.3. Градиент магнитного поля имеет составляющую, перпендикулярную полю	40
2.3.4. Результирующая средняя скорость	42
2.3.5. Движение вдоль искривленных силовых линий	42
2.3.6. Магнитное зеркало	45
2.3.7. Адиабатические инварианты	47
2.3.8. Эксперименты и наблюдения	54
2.4. Движение в поле магнитного диполя. Метод Штёрмера	55
2.4.1. Эксперименты с «терреллой»	58
2.5. Движение в поле магнитного диполя. Метод возмущений	58
2.5.1. О применимости метода возмущений	58
2.5.2. Дрейф в поле диполя	60

2.5.3. Движение вблизи экваториальной плоскости поля диполя	63
2.5.4.	64
2.5.5.	65
2.6. Влияние электрического поля на движение заряженных частиц в магнитном поле	67
2.6.1. Движение в экваториальной плоскости	68
2.6.2. Колебания вдоль силовых линий	70
2.6.3. Разрешенные и запрещенные области движения заряженных частиц в поле магнитного диполя	72
2.7. Ускорение заряженных частиц в изменяющихся магнитных полях	75
2.7.1. Об адиабатическом изменении импульсов	75
2.7.2. Однократное ускорение	77
2.7.3. Процессы многократного ускорения	78
2.7.4. Магнитная накачка	78
2.8. Радиационные потери энергии заряженными частицами, движущимися в магнитных полях	83
Литература	85
ГЛАВА 3. Магнитная гидродинамика	88
3.1. Введение	88
ГИДРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	89
3.2. Качественное рассмотрение	89
3.2.1. Случай несжимаемой жидкости	89
3.2.2. Случай сжимаемой жидкости	90
3.3. Основные уравнения	91
3.3.1. Член, содержащий магнитную силу	92
3.4. Плоские волны в несжимаемой жидкости. Однородное магнитное поле	94
3.4.1. Бесконечная проводимость	95
3.4.2. Конечная проводимость	98
3.4.3. Гидромагнитные волны как колебания силовых линий	99
3.4.4. Гидромагнитные волны как частный случай электромагнитных волн	100
3.4.5. Гидромагнитная волна на границе двух сред	101
3.5. Волны произвольной формы в несжимаемой жидкости	104
3.5.1. Бесконечная проводимость	105
3.5.2. Замечания о действии силы Корнелиса	106
3.6. Гидромагнитные вихревые кольца в несжимаемой жидкости	107
3.7. Гидромагнитные колебания жидких тел	108
3.8. Гидромагнитные волны в сжимаемой среде. Магнитозвуковые волны	110
3.8.1. Линеаризация и упрощение основных уравнений	110
3.8.2. Дисперсионное соотношение и моды распространения	113
3.9. Критерии применимости магнитной гидродинамики	118
3.10. Экспериментальные наблюдения гидромагнитных волн	124
ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ	125
3.11. Установившееся движение проводящих жидкостей в магнитном поле	125
3.11.1. Анизотропия, вносимая магнитным полем. Эксперименты	127
3.11.2. Закон изоротации Ферраро	127
3.12. Магнитная гидростатика	130

3.12. 1. Бессилловые магнитные поля	131
3.13. Гидромагнитная устойчивость	133
3.13.1. Устойчивость винтовых магнитных полей	136
3.13.2. Модельные эксперименты по изучению неустойчивостей	138
3.14. Механизмы генерации космических магнитных полей	140
3.14.1. Теорема Каулинга	141
3.14.2. Самовозбуждающееся динамо	142
3.14.3. Модель неустойчивости типа изгиба	144
3.14.4. Опыты с плазменными кольцами	145
3.14.5. Усиление поля за счет неустойчивости	148
Литература	150
ГЛАВА 4. Плазма	155
4.1. Введение	155
4.2. Общее рассмотрение	157
4.2.1. Электрические разряды	157
4.2.2. Преобразования подобия	158
4.2.3. Общие свойства плазмы	162
4.3. Столкновительные процессы в плазме	167
4.3.1. Электрический ток в слабоионизованной плазме	168
4.3.2. Кулоновские столкновения в плазме	173
4.3.3. Ток в сильноионизованной плазме в присутствии слабого электрического поля	178
4.3.4. Высокоионизованная плазма в сильном электрическом поле. Убегающие электроны	179
4.4. Амбиполярная диффузия	181
Литература	183
ГЛАВА 5. Плазма в магнитном поле	185
5.1. Введение	185
5.1.1. Плазма высокой плотности, $\lambda \ll \rho$	185
5.1.2. Плазма средней плотности $\rho \ll \lambda \ll l_c$	186
5.1.3. Плазма низкой плотности $l_c \ll \lambda$	186
5.1.4. Магнитная плазма в космической физике	192
5.1.5. Обзор свойств магнитной плазмы	194
5.2. Теория магнитной плазмы	195
5.2.1. Микроскопическое и макроскопическое описания плазмы	195
5.2.2. Соотношение между скоростью дрейфа и макроскопической скоростью	196
5.2.3. Макроскопические уравнения	199
5.2.3.1. Модель трех жидкостей	199
5.2.3.2. Уравнения движения и обобщенный закон Ома	202
5.2.3.3. Численные значения проводимости	204
5.3. Поперечная и холловская проводимости	207
5.3.1. Эффект запирания тока Холла	209
5.3.2. Эквивалентный контур	210
5.3.3. Токи в неоднородной плазме, перпендикулярные магнитному полю	211
5.4. Вмороженные силовые линии	215
5.4.1. Макроскопическая модель	215
5.4.2. Микроскопическая модель. Плазма низкой плотности	218

5.5. Образование плазменных неоднородностей	219
5.5.1. Сжимающийся разряд	219
5.5.2. Пинч-эффект. Соотношение Беннетта	221
5.5.3. Нитевидные токи в бессилловых магнитных полях	222
5.6. Диффузия в магнитной плазме	227
5.6.1. Диффузия параллельно магнитному полю	227
5.6.2. Диффузия поперек магнитного поля	227
5.6.3. Амбиполярная диффузия	229
5.6.4. Диффузия в плазме средней и низкой плотности, обусловленная неоднородностями магнитного поля	229
5.6.5. Аномальная диффузия	230
5.7. Магнитные свойства плазмы	231
5.7.1. Термодинамически равновесная плазма	231
5.7.2. Диффузия в слабоионизованной плазме	233
5.7.3. Полностью ионизованная плазма, удерживаемая магнитным полем	236
5.8. Расширяющийся поток магнитной плазмы	237
5.8.1. Электрические и магнитные поля	238
5.8.2. Ускорение заряженных частиц высоких энергий	243
5.8.3. Дрейф частиц в азимутальном направлении	244
5.9. Функции распределения	245
5.9.1. Уравнения для функции распределения	246
5.9.2. Равновесное распределение	248
5.9.3. Тензор давления	248
Литература	250
Предметный указатель	254

Г. Альвен, К.-Г. Фельтхаммар

КОСМИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Редактор *М. Я. Рутковская*

Художник *В. К. Заикин*

Художественный редактор *Н. А. Фильчагина*

Технический редактор *Т. А. Мирошина*

Сдано в производство 10/VI 1967 г. Подписано к печати 6/XII 1967 г. Бумага тип. № 1 60×90¹/₁₆=8,13 бум. л. 16,25 печ. л. Уч.-изд. л. 14,32. Изд. № 27/3939. Цена 1 р. 23 к. Зак. 763.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.