O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT
DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

X. N. HABIBULLAYEVA

NAZARIY MEXANIKA

(DINAMIKA)

O'quv qo'llanma

Toshkent 2010

UDK. 531.8
Nazariy mexanika (Dinamika). O'quv qo'llanma.
Xabibullayeva.X.N. -Toshkent, ToshDTU, 2010. 160 b.

O'quv qo'llanma «Nazariy mexanika» fanining «Dinamika» bo'limiga bag'ishlangan bo'lib, o'quv dasturdagi barcha mavzularni o'z ichiga olgan. Har bir mavzu to'liq yoritilgan, masalalar yechilgan, takrorlash uchun savollar tuzilgan. Talabalar har bir mavzudan olgan bilimlarini tekshirishlari uchun mustaqil ta'limni hisobga olgan holda masalalar keltirilgan. O'quv qo'llanma «Muhandislik va muhandislik ishi» bakalavriat ta'lim yo'nalishida ta'lim oluvchi talabalar uchun mo'ljallangan.

Aby Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti Ilmiy-uslubiy kengashi qaroriga ko'ra chop etildi

Taqrizchilar:

O.I.Umarov
O'zbekiston Fanlar Akademiyasi Mexanika va
inshootlarning seysmik mustahkamligi instituti
laboratoriya mudiri, professor,
fizika-matematika fanlari doktori.

A.A. Hamidov
O'zMU, «Nazariy va tatbiqiy mexanika»
kafedrasi professori,fizika-matematika fanlari doktori.

R. I. Karimov
ToshDTU, «Materiallar qarshiligi, mashina va
mexanizmlar nazariyasi» kafedrasi mudiri,
professor, texnika fanlari doktori.

MUQADDIMA

Mexanika bilimlari qadimdan ma'lum bo'lib, moddiy jismlarning mexanik harakati haqidagi fandir.

Neolit davrida va bronza asrida g'ildiraklar ma'lum bo'lib, biroz vaqtdan so'ng richaglar qo'llanilgan. Qadimgi Misr piramidalarini, Vaviloniya, Xitoy, Xorazm, So'g'diyona va Eronda saqlanib qolgan irrigatsiya inshootlarini qurishda «oddiy mashinalar» - richag, pona va qiya tekisliklardan foydalanilgan. Nazariy mexanika muammolari qadimgi Yunonistonda ma'lum bo'lib, Aristotelning asarlarida ko'pgina mexanizmlar sxemasi keltirilgan. Arximedning «Yassi figuralar muvozanati yoki yassi figuralar og'irlik markazlari haqida», «Suzuvchi jismlar haqida» degan risolalari bizgacha yetib kelgan. Sharqning eng kuchli olimlari Banu Muso (aka-uka) lar, Sobit ibn Qurra, Abu Rayhon Beruniy, Abu Abdulloh Yusuf al-Xorazmiylarning mexanikaning taraqqiyotiga qo'shgan hissalari kattadir. Yevropada Uyg'onish davrida fanning rivojlanishiga Stevin, Nikolay Kuzanskiy, Kopernik va boshqalar katta hissa qo'shdilar.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari ham xuddi shu davrda ishlab chiqildi va bunda I.Kepler, Galiley, I.Nyutonning roli kattadir. Galiley-Nyuton qonunlari nazariy mexanikaning asosiy qonunlari bo'lib, ulardan mexanik sistemaning harakatini tekshirishda Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari, Gamiltonning kanonik tenglamalari, Gamilton-Yakobi tenglamasi, Appel tenglamalari, dinamikaning umumiy teoremalari chiqariladi. Shuningdek, Gaussning kichik kuchlanishlar prinsipi, Gamilton, Yakobi, Eyler, Monertyunning variatsion prinsiplari mexanikaning asosiy prinsiplaridir. Harakat ustuvorligi (turg'unligi) nazariyasi, osmon ballistikasi va osmon mexanikasi - nazariy mexanikaning tatbiqiy ahamiyatga ega bo'lgan sohalaridir. Mexanik sistemalar harakatini boshqarish usullari nazariy mexanikaning umumiy qonunlari va prinsiplari asosida ko'riladi, mexanik sistemaning tegishli xususiyatga ega bo'lish yo'llari aniqlanadi.

«Nazariy mexanika» fani oliy texnika o'quv yurtlarida o'qitiladigan asosiy fundamental fanlar turkumiga kirib, barcha mutaxassisliklar bo'yicha muhandislar tayyorlashda dasturiy fanlardan biridir. Hozirgi zamon texnikasining jadal sur'atlar bilan rivojlanib borishi, ishlab chiqarish jarayonlarida texnologik talablarni hisobga olgan holda, parametrlari va bog'lanishlari boshqariladigan mashina va mexanizmlarni keng tatbiq etish va ularning asosiy ishchi qismlari harakatlari nazariy asoslarini yaratish umummuhandislik fanlarining asosi bo'lgan «Nazariy mexanika» fani qonunlari va prinsiplariga asoslanadi. Shuning uchun ham bu fanda o'rganiladigan barcha mavzular har qanday murakkab mashina va jihozlarning ishlash sirlarini anglab yetishda dasturulamal vazifasini bajaradi.

I BOB. DINAMIKAGA KIRISH

1-§. Dinamikaning asosiy tushunchalari

Kuchlar ta'sirida bo'lgan jismlarning harakatini uning massasi va harakatni yuzaga keltiruvchi sababga bog'liq ravishda tekshiradigan nazariy mexanikaning bo'limi - dinamikadir.

Dinamikaning asosiy tushunchalaridan biri - kuchdir. Jismlar harakati o'zgarmas, miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgaruvchan kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi. O'zgarmas kuchlarga jismning xususiy og'irligi yoki ishqalanish kuchi misol bo'la oladi. O'zgaruvchan kuch vaqtga, jismning holatiga, tezligiga bog'liq bo'ladi. Ya'ni:

$$\overline{F} = \overline{F}(\overline{r},\overline{v},t) \tag{1.1}$$

Misol sifatida jismga davrli kuch yoki zarbali kuchlarning ta'sirini, elastik kuchning jism ko'chishiga proporsional ravishda ta'sirini, harakatdagi jismga muhitning ko'rsatadigan qarshiligini keltirish mumkin.

Jismlar harakati uning inertlik xususiyatiga ham bog'liqdir. Turli jismlarga bir xil kuch bilan ta'sir etsak, jism har xil tezliklar bilan harakatlanadi. Bu tajribalardan bizga ma'lum. Jismlarning bu xususiyati inertlik deyiladi. Tezligi qancha kam bo'lsa, inertligi shuncha ko'p bo'ladi. Jism inertligini miqdor jihatdan ifodalovchi fizik kattalik massa deb ataladi. Massa skalyar, o'zgarmas, musbat kattalikdir.

Jismlarning harakati shakliga ham bog‘liqdir. Shaklni jismni tashkil etuvchi zarralarning joylashuvi tashkil etadi. Shuning uchun moddiy nuqta tushunchasi kiritiladi. O‘lchamlarining ahamiyati bo‘lmagan, lekin massaga ega bo‘lgan, harakatdagi jism moddiy nuqta deyiladi. Jismlarning harakatini o‘rganishni ularni tashkil etuvchi zarralarining harakatini o‘rganishdan boshlaymiz.

Dinamika bo‘limini 2 qismga ajratib ko‘rib chiqamiz.

1. Moddiy nuqta dinamikasi.
2. Mexanik sistema va qattiq jism dinamikasi.

2-§. Dinamikaning asosiy qonunlari

Dinamika qonunlari klassik mexanika qonunlariga asoslangan bo‘lib, Isaak N'yuton tomonidan ta’riflangan.

1 - qonun. (Inersiya qonuni)

Tashqi ta‘sirlardan xoli bo‘lgan moddiy nuqtaga biror kuch ta‘sir etmaguncha, u o‘zining tinch 0000holati yoki to‘g‘ri chiziqli, teng o‘lchovli harakatini saqlashga intiladi.

Moddiy nuqta o‘z tezligini o‘zi o‘zgartira olmaydi va o‘zi-o‘ziga tezlik bera olmaydi. Tezligini o‘zgartirish uchun tashqi ta‘sir bo‘lishi kerak. Moddiy nuqtaning bu xususiyati, uning inertligini tashkil etadi. Bu qonunga inersiya qonuni, moddiy nuqta harakatiga esa inersion harakat deyiladi.

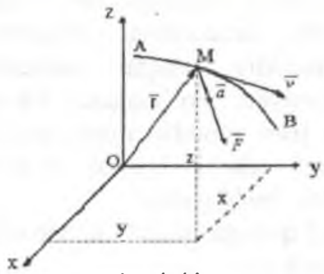
2 - qonun. (Dinamikaning asosiy qonuni)

Moddiy nuqtaning kuch ta‘sirida olgan tezlanishi shu kuch bilan bir yo‘nalishda bo‘lib, miqdori kuch miqdoriga proporsionaldir (1-shakl).

$$\overline{F} = m\overline{a} \qquad (2.1)$$

Bu yerda m – moddiy nuqta massasi bo‘lib, u o‘zgarmas miqdordir. Massa m qancha katta bo‘lsa, moddiy nuqtaga $\overline{a}$ tezlanish berishi uchun shuncha katta $\overline{F}$ kuch qo‘yish kerak. Massa m qancha katta bo‘lsa, moddiy nuqta inertligi shuncha katta bo‘ladi.

(2.1) *tenglama dinamikaning asosiy tenglamasi* deyiladi.



1 – shakl

Kinematikadan ma'lumki,

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} \qquad (2.2)$$

Buni hisobga olsak, (2.1) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\overline{F} = m\frac{d\overline{v}}{dt} \qquad (2.3)$$

Agar $\overline{v} = const$ bo'lsa, $\overline{F} = 0$ bo'ladi. Ya'ni moddiy nuqtaga kuch ta'sir etmasa, u inersion holatda bo'ladi. Kuch bilan tezlanish modullari orasidagi bog'lanishni e'tiborga olsak, (2.1) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F = ma$$

Bundan:

$$a = \frac{F}{m} \qquad (2.4)$$

kelib chiqadi.

Har qanday jism bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida yerga bir xil g tezlanish bilan tushadi. Bu tajriba yordamida aniqlangan:

$$P = mg \qquad (2.5)$$

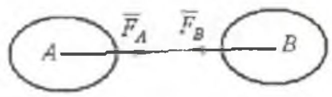
Bu yerda g=9,8 m/s^2 erkin tushish tezlanishi deyiladi. (2.5) formuladan:

$$m = \frac{P}{g} \qquad (2.6)$$

(2.6) formuladan ko'ramizki, moddiy nuqta massasi og'irligiga to'g'ri proporsional. Og'irligini tarozida o'lchab, massasini (2.6) formuladan aniqlash mumkin.

3 - qonun. (Ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuni)

Har bir ta'sir o'ziga teng va qarama-qarshi yo'nalishdagi aks ta'sirni vujudga keltiradi. Ya'ni, ikkita moddiy nuqta miqdorlari teng, yo'nalishlari qarama-qarshi, ularni tutashtiruvchi bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar bilan bir-biriga ta'sir etadi (2- shakl).



2 – shakl

$$\overline{F}_B = m_B \, \overline{a}_B \tag{2.7}$$

$$\overline{F}_A = m_A \, \overline{a}_A \tag{2.8}$$

3 - qonunga asosan:

$$\overline{F}_A = -\overline{F}_B \tag{2.9}$$

Bunda :

$$|\overline{F}_A| = -|\overline{F}_B| \tag{2.10}$$

(2.7) va (2.8) ni (2.9) ga qo'ysak:

$$m_A \, \overline{a}_A = -m_B \, \overline{a}_B \tag{2.11}$$

Bundan:

$$\frac{m_A}{m_B} = -\frac{\overline{a}_B}{\overline{a}_A} \tag{2.12}$$

4 - qonun. (Kuchlarning bir-biriga bog'liqsiz ta'sir etish qonuni)

Moddiy nuqta bir necha kuch ta'sirida bo'lsa, uning shu kuchlar ta'siridan olgan tezlanishi mazkur moddiy nuqtaga har qaysi kuchning alohida ta'siridan kelib chiqqan tezlanishlarning yig'indisiga tengdir. Moddiy nuqtaga $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin, u holda:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \tag{2.13}$$

bo'ladi.

$\overline{F}$ kuchning ta'siridan moddiy nuqtaning olgan tezlanishi $\overline{a}$ desak, (2.1) tenglamaga asosan:

$$\sum_{i-1}^{n} \overline{F}_i = m\sum_{i-1}^{n} \overline{a}_i \qquad (2.14)$$

bo'ladi.

(2.13) va (2.1) tenglamani hisobga olsak:

$$m\overline{a} = m\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \qquad (2.15)$$

yoki:

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \qquad (2.16)$$

Bu ifoda xulosamizning to'g'riligini ko'rsatadi. Bu qonundan, asosan, qattiq jismga oid masalalarni yechishda foydalaniladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Dinamikaning asosiy tushunchalari nimadan iborat?
2. O'zgaruvchan kuchlar qanday parametrlarga bog'liq?
3. Jismning inertligi deganda nimani tushunasiz?
4. Moddiy nuqta nima?
5. Inersiya qonunini ta'riflang.
6. Dinamikaning asosiy qonunini tushuntiring.
7. Ta'sir va aks ta'sir tengligi qonunini ta'riflang.
8. Kuchlarning bir-biriga bog'liqsiz ta'sir etish qonunini ta'riflang.

II BOB. MODDIY NUQTA DINAMIKASINING ASOSIY TENGLAMALARI

3-§. Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari

Moddiy nuqta $\overline{F}$ kuch ta'sirida harakatlansin (1- shakl).
Nyutonning 2-qonuniga asosan (2.1) tenglamani yozamiz:

$$\overline{F} = m\overline{a}$$

$\overline{a}$ - tezlanish vektori; m - moddiy nuqta massasi.

Agar ta'sir kuchlari bir nechta bo'lsa, (2.13) tenglamaga asosan:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

deb qaraymiz.

Kinematikadan ma'lumki, tezlanish vektori $\bar{a}$, tezlik vektori $\bar{v}$ va $\bar{r}$ radius-vektor orqali quyidagicha ifodalanadi :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

yoki:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \qquad (3.1)$$

(3.1) tenglamalarni e'tiborga olsak, (2.1) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \qquad (3.2)$$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \qquad (3.3)$$

(3.2) va (3.3) ko'rinishdagi differensial tenglamalar moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining vektorli ifodasidir. Ularni Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali ifodalasak (1-shakl), harakat differensial tenglamalarining ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$\left. m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\ ;\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\ ;\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \right\} \qquad (3.4)$$

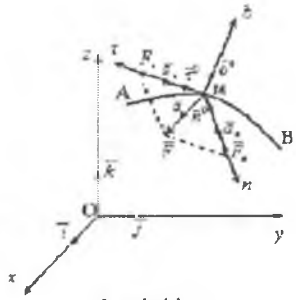
F_x, F_y, F_z -kuchning Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir.

(3.4) tenglama moddiy nuqtaning Dekart koordinata o'qlaridagi harakat differensial tenglamalari deyiladi. Harakat differensial tenglamalarining tabiiy o'qlardagi ifodasini aniqlash uchun kuchlarning tabiiy o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlaymiz (3-shakl). Tabiiy koordinata o'qlarining birlik vektorlarini mos ravishda $\bar{\tau}^0, \bar{n}^0, \bar{b}^0$ deb belgilasak, tezlanish vektorining tabiiy o'qlardagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau}^0 + a_n \bar{n}^0 \tag{3.5}$$

yoki

$$\bar{F} = F_\tau \bar{\tau}^0 + F_n \bar{n}^0 + F_b \bar{b}^0 \tag{3.6}$$



3 – shakl

Kuchning tabiiy o'qlardagi ifodasi quyidagicha:

$$\bar{F} = F_\tau \bar{\tau}^0 + F_n \bar{n}^0 + F_b \bar{b}^0 \tag{3.7}$$

Bu yerda F_τ , F_n, F_b - moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning mos ravishda urinma, bosh normal va binormal o'qlardagi proyeksiyalari. (3.6) va (3.7) ni hisobga olgan holda dinamikaning asosiy tenglamasi (2.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$F_\tau \bar{\tau}^0 + F_n \bar{n}^0 + F_b \bar{b}^0 = m\left(\frac{dv}{dt}\bar{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}^0\right) \tag{3.8}$$

mos birlik vektorlar oldidagi koeffitsientlarni tenglasak,

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b. \tag{3.9}$$

hosil bo'ladi.

(3.9) tenglama moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ifodasidir. Tenglamadagi $F_b = 0$ ifoda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuch egrilik tekisligida yotishini ko'rsatadi. Haqiqatan ham shunday, chunki kuch tezlanish bilan bir yo'nalishda bo'lib, tezlanish egrilik tekisligida yotishi bizga kinematikadan ma'lum. Silindrik koordinatalarda harakat differensial tenglamalarini r, φ, z lar orqali ifodalaymiz:

$$ma_r = F_r\ ;\ ma_\varphi = F_\varphi\ ;\ ma_z = F_Z\ . \qquad (3.10)$$

Bu yerda:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\ ;\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\ ;\ a_z = \ddot{z}. \qquad (3.11)$$

(3.11) tenglamani (3.10) ga olib borib qo'ysak, harakat differensial tenglamasining silindrik koordinatalardagi ifodasi kelib chiqadi:

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

(3.12) tenglama harakat differensial tenglamalarining silindrik koordinatalaridagi ifodasidir.

4-§. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamalari

Agar moddiy nuqta bog'lanishda bo'lsa, (2.1), (3.4), (3.9) va (3.12) tenglamalardagi ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga bog'lanish reaksiya kuchlari qo'shiladi.

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N} \qquad (4.1)$$

(4.1) tenglama bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasidir.

Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, bog'lanishdagi nuqtaning harakat differensial tenglamalarini keltirib chiqaramiz:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + N_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + N_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + N_z \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Agar moddiy nuqta silliq bo'lmagan sirt ustida harakatlansa, differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau + N_\tau\ ;\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n\ ;\ 0 = F_b + N_b. \qquad (4.3)$$

(4.2) va (4.3) tenglamalar mos ravishda bog'lanishdagi nuqtaning Dekart va tabiiy koordinata o'qlaridagi harakat differensial tenglamalaridir. Silindrik koordinatalarda bog'lanishdagi nuqtaning harakat differensial tenglamasi (4.4) ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r + N_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi + N_\varphi \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Takrorlash uchun savollar

1. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi qanday?
2. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday?
3. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ko'rinishi qanday?
4.Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi qanday?
5. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday?
6. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ko'rinishini yozib bering.
7. Bog'lanishdagi moddiy nuqtaga qanday kuchlar ta'sir etadi?
8. Differensial tenglamalarni tuzishdan maqsad nima?

III BOB. MODDIY NUQTA DINAMIKASINING IKKI ASOSIY MASALASI

5-§. Dinamikaning birinchi asosiy masalasi

Ta'sir etuvchi kuch bilan tezlanish orasidagi bog'liqlikni (2.1) tenglama bilan ifodaladik. Erkin va bog'lanishdagi moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalaridan foydalanib, dinamikaning ikki asosiy masalasini yechamiz.

Nuqtaning massasi va harakat qonunlari berilganda ta'sir etuvchi kuchlarni aniqlash dinamikaning birinchi asosiy masalasini tashkil etadi.

Harakat qonunining berilishiga qarab harakat differensial tenglamalari tuziladi va masala shartida so'ralgan kuchlar aniqlanadi. Aniqlik uchun nuqtaning harakat qonuni Dekart koordinatalarida berilganda birinchi asosiy masalaninig yechilishini ko'rib chiqamiz.

Moddiy nuqtaning harakat qonuni va m massasi berilgan bo'lsin.

Ya'ni: $x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$ (5.1)

Harakat qonunidan ikki marotaba hosila olib, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi $a_x; a_y; a_z$ larni aniqlaymiz va (3.4) harakat differensial tenglamalarini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= m\frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (5.2)$$

(5.2) tenglamadan kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi F_x ; F_y ; F_z larni aniqlaymiz. Kuchning moduli quyida keltirilgan (5.3) formuladan aniqlanadi:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (5.3)$$

Kuchlarning yo'nalishini yo'naltiruvchi kosinuslar yordamida aniqlaymiz:

$$\cos(\overline{F}\,{}^\wedge ox) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\overline{F}\,{}^\wedge oy) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\overline{F}\,{}^\wedge oz) = \frac{F_z}{F} \quad (5.4)$$

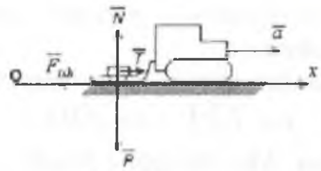
***1- MASALA**

Traktor yo'lning to'g'ri chiziqli bo'lagida $x = 10t^2 + 5t\,(m)$ qonuni bilan harakatlanadi. U massasi $600\,kg$ bo'lgan yukni tortadi (4- shakl). Agar yukning yerga ishqalanish koeffitsienti $f = 0{,}04$ bo'lsa, traktorning yukni tortish kuchi aniqlansin.

Yechish:

Traktorning harakat o'qini Ox bilan belgilaymiz. Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$F_x = ma_x \qquad (*1.1)$$



4 – shakl

Bu yerda F_x- barcha kuchlarning Ox o'qidagi proyeksiyasi, a_x- tezlanishning Ox o'qidagi proyeksiyasi bo'lib, uni aniqlash uchun harakat qonunidan ikkinchi tartibli hosila olamiz. Birinchi tartibli hosilasi tezlikning Ox o'qidagi proyeksiyasiga teng, ya'ni:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 20t + 5(m/s)$$

Ikkinchi tartibli hosilasi tezlanishning Ox o'qidagi proyeksiyasiga teng.

Ya'ni : $$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 20(m/s^2) \qquad (*1.2)$$

Kuchlarning harakat o'qidagi proyeksiyasini aniqlaymiz:

$$F_x = T - F_{ish} \qquad (*1.3)$$

(*1.3) ifodani (*1.1) ga olib borib qo'yamiz:

$$T - F_{ish} = ma_x \qquad (*1.4)$$

Bu yerda:

$$F_{ish} = fN = fP = fmg \qquad (*1.5)$$

(*1.4) va (*1.5) tenglamalardan tortish kuchi T ni aniqlaymiz:

$$T = F_{ish} + ma_x = fmg + ma_x = m(fg + a_x) = 600(0{,}04 \times 9{,}8 + 20) = 12{,}2(kN)$$

Javob: $T = 12{,}2\ kN$

***2- MASALA**

Qo'zg'almas O nuqtaga bog'langan, uzunligi $0{,}5\ m$ bo'lgan ipga osib qo'yilgan $0{,}5 kg$ massali M yuk konus shaklidagi mayatnikni tasvirlaydi, ya'ni gorizontal tekislikda aylana chizadi:

shu bilan barobar ip vertikal bilan 60^0li burchak tashkil qiladi. Yukning tezligi $\bar{v}$ ning va ipning tortilish kuchi $\bar{T}$ ning qiymatlari aniqlansin (5- shakl).

Yechish:

M yukning trayektoriyasi gorizontal tekislikda bo'lib, radiusi $O_1M = R$ bo'lgan aylanadan iborat. Yukning harakatini tabiiy koordinata o'qlarida tekshiramiz. Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$ma_\tau = F_\tau\,; \quad m\,a_n = F_n\,; \quad 0 = F_b\,. \qquad (*2.1)$$

Ta'sir etuvchi kuchlarning tabiiy $O_1\,n\tau b$ o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Ta'sir kuchlari M yukning og'irligi $\bar{P}$ va ipning tortilish kuchi $\bar{T}$ dan iborat. (*2.1) tenglamani tuzamiz:

$$m\,a_\tau = 0\,; \; -m\,a_n = -T\cos 30^0\,; \; 0 = T\cos 6\theta^0 - P. \qquad (*2.2)$$

(*2.2) tenglamani yechib, masala shartida so'ralgan M yukning tezligini va ipning tortilish kuchini aniqlaymiz:

$$T\cos 60^0 - P = 0 \qquad (*2.3)$$

(*2.3) tenglamadan ipning tortish kuchini aniqlaymiz:

$$T = \frac{P}{\cos 60^0} = \frac{mg}{\cos 60^0} = \frac{0{,}5\times 9{,}8}{0{,}5} = 9{,}8(N)$$

Demak: $T = 9{,}8(N)$

$$-ma_n = -T\cos 30^0 \qquad (*2.4)$$

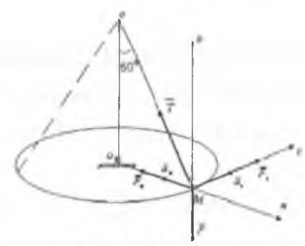
(*2.4) tenglamadan normal tezlanishning modulini aniqlaymiz:

$$a_n = \frac{T\cos 30^0}{m} = \frac{9{,}8\times 0{,}86}{0{,}5} = 16{,}85\ m/s^2$$

Kinematika bo'limidan bizga ma'lum, normal tezlanish modulini hisoblash formulasi teng:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad (*2.5)$$

ga teng .



5 – shakl

Bu formuladagi ρ trayektoriyaning egrilik radiusi bo'lib, biz ko'rayotgan masalada trayektoriya aylana bo'lganligi uchun $\rho = R$ dir.

$$R = O_1M = OM \sin 60^0 = 0{,}5 \times 0{,}86 = 0{,}43(m)$$

(*2.5) tenglamadan tezlikni hisoblaymiz:

$$v^2 = a_n \rho; \quad v = \sqrt{a_n \rho} = \sqrt{a_n R} = \sqrt{16{,}85 \times 0{,}43} = \sqrt{7{,}24} = 2{,}7\,(m/s)$$

Javob: $T = 9{,}8\ (N)$

$v = 2{,}7\,(m/s)$

Takrorlash uchun savollar

1.Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday?
2. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ko'rinishi qanday?
3. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday?
4. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ko'rinishini yozib bering.
5. Differensial tenglamalarni tuzishdan maqsad nima?
6. Dinamikaning birinchi asosiy masalasi nimadan iborat?

6-§. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi

Massasi va ta'sir etuvchi kuchlari berilganda nuqtaning kinematik xarakteristikalarini, harakat qonunlarini aniqlash dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini tashkil etadi.

Masalani yechish uchun (3.4); (3.9); (3.12); (4.2); (4.3); (4.4) ko'rinishda ifodalangan harakat differensial tenglamalarini integrallaymiz. Integral o'zgarmaslarini boshlang'ich shartlardan aniqlaymiz. Boshlang'ich shartlar vaqtning boshlang'ich payti $t = t_0$ da nuqtaning holati va tezligining qabul qiladigan qiymatlaridir. Ya'ni, nuqta radius-vektori va tezligining qiymatlari $\bar{r} = \bar{r}_0, \bar{v} = \bar{v}_0$ bo'lsa, vektorli ko'rinishdagi boshlang'ich shartlar deyiladi.

Dekart koordinatalarida boshlang'ich shartlar $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_o$, $\dot{z} = \dot{z}_0$ ko'rinishda ifodalanadi. Tabiiy koordinatalarda boshlang'ich shartlar quyidagicha: $s = s_0, \dot{s} = \dot{s}_0$. Ta'sir etuvchi kuchlar o'zgarmas va o'zgaruvchan bo'ladi. O'zgaruvchan kuchlar vaqtga, jismning holatiga, tezligiga bog'liq bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan hollar uchun harakat differensial tenglamalarini integrallashni ko'rib chiqamiz.

1.Ta'sir kuchi o'zgarmas bo'lgan hol, ya'ni $\bar{F} = const$.

Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F \to m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{6.1}$$

(6.1) tenglamada $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{6.2}$$

kelib chiqadi. (6.2) tenglamani integrallaymiz:

$$\int dv = \frac{F}{m}\int dt + C_1 \to v = \frac{F}{m}t + C_1 \tag{6.3}$$

(6.3) tenglamadagi integral o'zgarmasini boshlang'ich shartlardan aniqlaymiz:

$$t = 0 \ da \quad v = v_0 \quad C_1 = v_0 \tag{6.4}$$

(6.4) ni (6.3) ga qo'ysak:

$$v = \frac{F}{m} t + v_0 \tag{6.5}$$

tenglama kelib chiqdi.

$v = \dfrac{dx}{dt}$ ekanligini e'tiborga olib (6.5) ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0 \to \int dx = \frac{F}{m} \int t\,dt + v_0 \int dt + C_2 \to$$
$$\to x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2 \tag{6.6}$$

(6.6) tenglamada, t=0 da $x = x_0$, $C_2 = x_0$ ga teng.

Demak:

$$x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0\, t + x_0 \tag{6.7}$$

(6.5) va (6.7) tenglamalardan kinematik xarakteristikalar aniqlanadi.

2. Kuch vaqtning funksiyasi bo'lgan hol, ya'ni $\overline{F} = \overline{F}(t)$.

Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x \to m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \to \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(t) \tag{6.8}$$

Tenglamani integrallaymiz:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)dt \to v - v_0 = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt \to$$
$$\to v = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt \tag{6.9}$$

(6.9) tenglamaga belgilash kiritamiz:

$$f(t)=\frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt$$

$$v=v_0+f(t) \qquad (6.10)$$

$v=\dfrac{dx}{dt}$ ifodani (6.10) tenglamaga qo‘ysak:

$$\frac{dx}{dt}=v_0+f(t)$$

$$dx=v_0dt+f(t)dt \qquad (6.11)$$

(6.11) tenglamani integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^{x} dx=v_0\int_0^t dt+\int_0^t f(t)\,dt \rightarrow x-x_0=v_0t+\int_0^t f(t)\,dt$$

$$x=x_0+v_0t+\int_0^t f(t)\,dt \qquad (6.12)$$

(6.10) va (6.12) tenglamalardan masalaning shartlarida qo‘yilgan noma‘lum kinematik xarakteristikalarni aniqlaymiz.

3. Kuch tezlikning funksiyasi bo‘lgan hol, ya’ni $\overline{F}=\overline{F}(v)$.

Bunday hol asosan nuqtaning harakatida qarshilik kuchini hisobga olinganda uchraydi. Harakat differensial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$m\ddot{x}=F(v)\rightarrow m\frac{dv}{dt}=F(v) \qquad (6.13)$$

(6.13) tenglamani integrallaymiz:

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)} \qquad (6.14)$$

(6.14) tenglamaning chap tomonini $\varphi(v)=m\int_{v_0}^{v}\dfrac{dv}{F(v)}$ deb belgilasak va integrallasak,

$$\varphi(v)=t \qquad (6.15)$$

kelib chiqadi.

(6.15) tenglamadan teskari funksiya $v = v(t)$ ni aniqlaymiz va $v = dx/dt$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \tag{6.16}$$

(6.16) tenglamani integrallasak:

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)dt \tag{6.17}$$

hosil bo'ladi. Demak:

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)dt \tag{6.18}$$

(6.13) tenglamaga o'zgartirish kiritamiz:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \tag{6.19}$$

(6.19) ifodani (6.13) ga qo'ysak:

$$m\frac{v\,dv}{F(v)} = dx \tag{6.20}$$

kelib chiqdi. (6.20) ni integrallasak:

$$m\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)} = x - x_0 \quad \rightarrow x = x_0 + m\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)} \tag{6.21}$$

Masala shartlarining berilishiga qarab yuqorida keltirilgan tenglamalar yordamida noma'lumlar aniqlanadi.

4. Kuch nuqtaning holatiga bog'liq bo'lgan hol, ya'ni $\overline{F} = \overline{F}(x)$.

Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \rightarrow m\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F(x) \rightarrow mv\frac{dv}{dx} = F(x). \tag{6.22}$$

(6.22) tenglamani boshlang'ich shartlardan foydalangan holda integrallaymiz:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} F(x)dx \tag{6.23}$$

(6.23) tenglamaning o'ng tomonini $\psi(x)$ bilan belgilaymiz va quyidagicha yozamiz:

$$\Psi(x)=\frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} F(x)dx \rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \Psi(x) \rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \Psi(x) \tag{6.24}$$

(6.24) tenglamadan:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\Psi(x)} \tag{6.25}$$

(6.25) tenglamadagi v tezlikning algebraik qiymatini ifodalaydi. Shuning uchun ildiz ishorasi masalaning fizik ma'nosiga mos olinadi. Harakat qonunini aniqlash uchun tezlikning $v = dx/dt$ qiymatini hisobga olsak va tenglamani integrallasak, quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\Psi(x)}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\Psi(x)}} = \int_{0}^{t} dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\Psi(x)}} = t \tag{6.26}$$

(6.26) tenglamani integrallab, harakat qonuni $x = x(t)$ ni aniqlaymiz. Masala shartlarining berilishiga qarab dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi mavzusiga oid masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

a) Koordinata o'qlari tanlab olinadi;

b) Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch va bog'lanish reaksiya kuchlari yo'naltiriladi;

d)Harakat differensial tenglamalari tuzilib, boshlang'ich shartlardan foydalangan holda, integrallanadi;

e) Boshlang'ich shartlarni hisobga olgan holda, tenglama yechimlari keltiriladi.

***3- MASALA.**

Rudalarni boyitish qurilmasining OA qismi gorizontal tekislik bilan $\beta = 30^0$ burchak hosil qiluvchi qiya tekislikdan iboratdir. Qiya tekislikda rudaning bir bo'lagi tinch holatdan (O nuqtadan) harakatini boshladi va A nuqtada $v_A = 2\,m/s$ tezlik bilan otildi (6- shakl).

Qiya tekislikning sirpanishdagi ishqalanish koeffitsienti $f = 0{,}2$ ga teng. Rudaning bo'lagini moddiy nuqta deb qarab va havoning qarshiligini hisobga olmagan holda, rudaning harakat boshlaganidan to yerga tushgunigacha ketgan vaqti, qiya tekislik uzunligi, ya'ni $OA = l\ m$ rudaning qancha masofaga borib ushishi, ya'ni d va $h = 1\ m$ balandlikdan tushib, urilish paytdagi tezligi $\bar{v}_B$ ning qiymati aniqlansin.

Yechish:

Ruda bo'lagining OA qiya tekislik bo'ylab harakati davomida unga quyidagi kuchlar ta'sir etadi: og'irlik kuchi $m\bar{g}$, normal reaksiya kuchi $\bar{N}$ va sirpanishdagi ishqalanish kuchi $\bar{F}_{ish}$ (7- shakl). Ruda qismining qiya tekislikdagi trayektoriyasi bo'ylab, Ox_1 o'qini yo'naltiramiz va harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

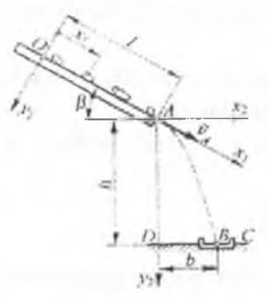
$$m\ddot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3} F_{kx_1} \quad yoki \quad m\ddot{x}_1 = mg\sin\beta - F_{ish} \qquad (*3.1)$$

Bu yerda:

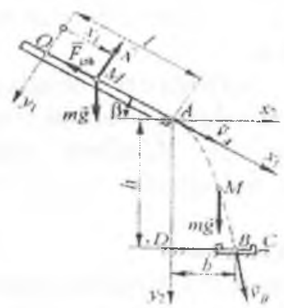
$$F_{ish} = f\,N; \quad N = m\,g\cos\beta \qquad (*3.2)$$

(*3.2) tenglamani (*3.1) ga olib borib qo'ysak:

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\beta - f\,mg\cos\beta \quad yoki \quad \ddot{x}_1 = g(\sin\beta - f\cos\beta) \qquad (*3.3)$$



6 – shakl



7 – shakl

(*3.3) tenglamani ikki marotaba integrallaymiz:

$$\frac{dv_{x_1}}{dt_1} = g(\sin\beta - f\cos\beta); \quad dv_{x_1} = g(\sin\beta - f\cos\beta)\,dt_1;$$

$$\int dv_{x_1} = \int g(\sin\beta - f\cos\beta)\,dt_1$$

Bir marotaba integrallab quyidagi natijani hosil qildik:

$$v_{x_1} = g(\sin\beta - f\cos\beta)t_1 + C_1 \qquad (*3.4)$$

$$v_{x_1} = \frac{dx_1}{dt_1} \qquad (*3.5)$$

(*3.5) ni (*3.4)ga qo'yib yana integrallaymiz:

$$\frac{dx_1}{dt_1} = g(\sin\beta - f\cos\beta)t_1 + C_1 \to dx_1 =$$

$$= [g(\sin\beta - f\cos\beta)t_1 + C_1]dt_1 \to \int dx_1 =$$

$$= \int [g(\sin\beta - f\cos\beta)t_1 + C_1]dt_1$$

$$x_1 = g(\sin\beta - f\cos\beta)\frac{t_1^2}{2} + C_1t_1 + C_2 \qquad (*3.6)$$

Integral o'zgarmaslari $C_1; C_2$ larni (*3.4) va (*3.6) tenglamalarga o'zgaruvchilarning boshlang'ich qiymatlarini qo'yib aniqlaymiz:

Boshlang'ich qiymatlar: $t_1 = 0$ da $x_1(0) = 0$; $v_{x_1}(0) = 0$.

Natijada quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$v_{x_1}(0) = C_1 = 0; \; x_1(0) = C_2 = 0.$$

Demak, quyidagi tenglamalar hosil bo'ldi:

$$v_{x_1} = g(\sin\beta - f\cos\beta)t_1 \qquad (*3.7)$$

$$x_1 = g(\sin\beta - f\cos\beta)\frac{t_1^2}{2} \qquad (*3.8)$$

Ruda OA oraliqni bosib o'tishi uchun t_1 $s.$vaqt ketgan bo'lsa, (*3.7) va (*3.8) tenglamalarda $v_{x_1} = v_A$; $x_1 = l$ ga teng bo'ladi:

$$v_A = g(\sin\beta - f\cos\beta)\,t_1$$

$$x_1 = l = g(\sin\beta - f\cos\beta)\frac{t_1^2}{2} \qquad (*3.9)$$

(*3.9) tenglamalardan OA oraliqni bosib o'tish uchun ketgan vaqtni va OA oraliqning uzunligini aniqlaymiz:

$$l = \frac{v_A^2}{2g(\sin\beta - f\cos\beta)} = \frac{2^2}{2\times 9{,}8(\sin 30^0 - 0{,}2\cos 30^0)} = 0{,}622\ m$$

$$t_1 = \frac{v_A}{g(\sin\beta - f\cos\beta)} = \frac{2}{9{,}8(\sin 30^0 - 0{,}2\cos 30^0)} = 0{,}622\,c \qquad (*3.10)$$

Endi ruda bo'lagining AB oraliqdagi harakatini tekshiramiz. Bu oraliqda ruda faqat o'z og'irligi ta'sirida harakatlanadi. Harakat differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\ddot{x}_2 = 0, \quad\quad \ddot{x}_2 = 0$$
$$\text{yoki} \qquad\qquad (*3.11)$$
$$m\ddot{y}_2 = mg \quad\quad \ddot{y}_2 = g$$

$\ddot{x}_2 = 0$ tenglamani ikki marotaba integrallaymiz:

$$\frac{dv_{x_2}}{dt_2} = 0; \quad dv_{x_2} = 0; \quad v_{x_2} = C_3. \qquad (*3.12)$$

$$\frac{dx_2}{dt_2} = C_3; \ dx_2 = C_3 dt_2; \ \int dx_2 = \int C_3 dt_2; \ x_2 = C_3 t_2 + C_4. \qquad (*3.13)$$

Ruda bo'lagining AB oraliqdagi harakatida boshlang'ich shartlar quyidagidan iborat: $t_2 = 0$ da $x_2(0) = 0$ ga teng bo'lib, boshlang'ich tezlikning Ax_2 o'qdagi proyeksiyasi $v_{x_2}(0) = v_A\cos\beta$ ga teng. Bu qiymatlami (*3.12); (*3.13) tenglamalarga qo'yib, integral o'zgarmaslarini aniqlaymiz:

$$C_3 = v_A\cos\beta; \quad C_4 = 0$$

U holda:

$$v_{x_2} = v_A\cos\beta \qquad (*3.14)$$

$$x_2 = v_A\,t_2\cos\beta \qquad (*3.15)$$

Endi $\ddot{y}_2 = g$ tenglamani ikki marotaba integrallaymiz:

$$\frac{dv_{y_2}}{dt_2} = g; dv_{y_2} = gt_2; \quad \int dv_{y_2} = \int g dt_2; v_{y_2} = gt_2 + C_5; \qquad (*3.16)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy_2}{dt_2}=gt_2+C_5;\ dy_2=(gt_2+C_5)dt_2;\\&\int dy_2=\int(gt_2+C_5)dt_2,\ y_2=\frac{gt_2^2}{2}+C_5t_2+C_6\end{aligned}\right\}\qquad(*3.17)$$

integral o'zgarmaslari C_5 ; C_6 larni aniqlash uchun boshlang'ich shartlardan foydalanamiz:

$$t_2=0 \text{ da } y_2(0)=0;\ v_{y_2}(0)=v_A\sin\beta \qquad (*3.18)$$

(*3.18) shartlarni (*3.17) ga olib borib qo'ysak:

$$C_5=v_A\sin\beta;\ C_6=0. \qquad (*3.19)$$

U holda:

$$v_{y_2}=v_A\sin\beta+gt_2 \qquad (*3.20)$$

$$y_2=v_At_2\sin\beta+\frac{gt_2^2}{2} \qquad (*3.21)$$

(*3.21) tenglamada $y_2=h=1(m)$ ekanligini e'tiborga olsak, ruda bo'lagining AB oraliqni bosib o'tish uchun ketgan vaqt t_2 ni aniqlaymiz

$$h=v_At_2\sin\beta+\frac{gt_2^2}{2};\ 1=2t_2\sin30^0+\frac{9{,}81\cdot t_2^2}{2};\ t_2=0{,}361s \qquad (*3.22)$$

OB oraliqni bosib o'tish uchun ketgan vaqt:

$$t=t_1+t_2=0{,}622+0{,}361=0{,}983\ s$$

(*3.15) tenglamadan $t_2=0{,}361\,s$ deb, yukning qancha masofaga tushganligini hisoblaymiz:

$$d=v_At_2\cos\beta=2\times0{,}361\cos30^0=2\times0{,}361\times0{,}86=0{,}625\ m$$

(*3.14); (*3.20) tenglamalardan $t_2=0{,}361\ s$ vaqt uchun ruda bo'lagi tezligining Ax_2 ; Ay_2 koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$v_{Bx_2}=v_A\cos\beta=2\cos30^0=1{,}732\ m/s$$

$$v_{By_2}=v_A\sin\beta+gt_2=2\sin30^0+9{,}81\times0{,}361=4{,}541\ m/s$$

Ruda bo'lagining DC tekislikka urilish paytdagi tezligi

$$v_B = \sqrt{v_{Bx_2}^2 + v_{By_2}^2} = \sqrt{1{,}732^2 + 4{,}541^2} = 4{,}86 m/s$$

Tezlik vektori $\overline{v}_B$ ning Ax_2 o'qiga og'ish burchagi:

$$\alpha = \arccos\frac{v_{Bx_2}}{v_B} = \arccos\frac{1{,}{,}732}{4{,}86} = 69{,}122^0 = 69^0 7' 19''$$

Javob:

$t = 0{,}983\ s$; $l = 0{,}622\ m$; $d = 0{,}625\ m$; $v_B = 4{,}86 m/s$.

Takrorlash uchun savollar

1. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasining mohiyati nimadan iborat?
2. Ta'sir kuchi o'zgarmas bo'lgan holda differensial tenglama qanday integrallanadi?
3. Boshlang'ich shartlar yordamida nimalar aniqlanadi?
4. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning moduli vaqtga bog'liq ravishda o'zgarsa, differensial tenglama qanday integrallanadi?
5. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning moduli holatiga bog'liq ravishda o'zgarsa differensial tenglama qanday integrallanadi?
6. Kuch tezlikning funksiyasi bo'lgan holda harakat differensial tenglamasi qanday integrallanadi?

IV BOB. MODDIY NUQTANING NISBIY HARAKAT DINAMIKASI

7-§. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat differensial tenglamalari

Biz yuqorida moddiy nuqtaning harakatini inersial sanoq sistemaga nisbatan o'rgangan edik. Lekin ba'zi hollarda nuqtaning harakatini noinersial sanoq sistemaga nisbatan o'rganishga to'g'ri keladi. Masalan, harakatdagi raketa, samolyot, kema va h.k. lar bilan bog'langan koordinata sistemasining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini o'rganish kerak bo'lsin. Ta'sir etuvchi kuchlarni bilgan holda moddiy nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini bilish zarur. Nuqtaning bunday harakati nisbiy harakat deyiladi. Nuqtaning harakatini o'rganish uchun qo'zg'aluvchi $Oxyz$ va qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinata sistemalarini tanlab olamiz (8-shakl).

Masalani yechish uchun M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz. Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan nuqtaning qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat tenglamasi quydagicha:

$$m\bar{a}_a = \bar{F} + \bar{R} \tag{7.1}$$

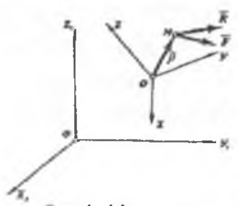
Bu yerda $\bar{F}$-aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi;

$\bar{R}$-bog'lanish reaksiyasi kuchi. Koriolis teoremasiga asosan:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k \tag{7.2}$$

(7.2) ifodani (7.1) tenglamaga qo'ysak:

$$m(\bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k) = \bar{F} + \bar{R} \tag{7.3}$$



8 – shakl

$\bar{a}_a$-nuqtaning mutlaq tezlanish vektori;

$\bar{a}_e$-nuqtaning ko'chirma tezlanish vektori;

$\bar{a}_r$-nuqtaning nisbiy tezlanish vektori;

$\bar{a}_k$-nuqtaning Koriolis tezlanish vektori.

Qavslarni ochib tenglamaga belgilashlar kiritamiz:

$$m\bar{a}_e + m\bar{a}_r + m\bar{a}_k = \bar{F} + \bar{R} \tag{7.4}$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k) \tag{7.5}$$

Bu yerda $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ ko'chirma inersiya kuchi bo'lib, miqdor jihatdan nuqta massasi bilan ko'chirma tezlanish ko'paytmasiga teng va yo'nalishi esa ko'chirma harakat tezlanishi vektoriga qarama-qarshidir. $\overline{\Phi}_k = -m\overline{a}_k$ - Koriolis inersiya kuchi bo'lib, miqdor jihatdan nuqta massasi bilan Koriolis tezlanish ko'paytmasiga teng, yo'nalishi esa Koriolis tezlanish vektoriga qarama-qarshidir. (7.5) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_\kappa \tag{7.6}$$

(7.6) tenglama nuqtaning inersial bo'lmagan sanoq sistemasiga nisbatan harakat differensial tenglamasi yoki nisbiy harakat differensial tenglamasi deyiladi. (7.6) tenglamani qo'zg'aluvchi koordinata sistemasining o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{x_1} + R_{x_1} + \Phi_{ex_1} + \Phi_{kx_1}; \\ m\ddot{y}_1 &= F_{y_{11}} + R_{y_1} + \Phi_{ey_1} + \Phi_{ky_1}; \\ m\ddot{z}_1 &= F_{z_1} + R_{z_1} + \Phi_{ez_1} + \Phi_{kz_1}. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

(7.7) tenglamalar nisbiy harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasidir.

Demak, ta'sir etayotgan kuchlar qatoriga ko'chirma inersiya kuchi va Koriolis inersiya kuchlari qo'shilsa, moddiy nuqta qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan xuddi qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati kabi harakatlanadi.

8-§. Moddiy nuqta nisbiy harakatining xususiy hollari

1.Ko'chirma harakat qo'zg'almas o'q atrofida notekis aylanma harakatdan iborat bo'lsin. Bu holda ko'chirma tezlanish:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau \tag{8.1}$$

bo'lgani uchun ko'chirma inersiya kuchi ham ikkita tashkil etuvchilarga ajraladi:

$$\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_e^n + \overline{\Phi}_e^\tau \tag{8.2}$$

$$\overline{\Phi}_e^n = -m\overline{a}_e^n ; \overline{\Phi}_e^\tau = -m\overline{a}_e^\tau . \tag{8.3}$$

$\overline{\Phi}_e^n$ - markazdan qochirma inersiya kuchi;

$\overline{\Phi}_e^\tau$ - aylanma inersiya kuchi.

(7.6) ko'rinishdagi tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\bar{a}_r = \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi}_e^n + \overline{\Phi}_e^\tau + \overline{\Phi}_\kappa \qquad (8.4)$$

Aylanma va markazdan qochirma inersiya kuchlarining moduli quyidagicha hisoblanadi:

$$\Phi_e^\tau = m|a_e^\tau| = mR|\varepsilon| \qquad (8.5)$$

$$\Phi_e^n = ma_e^n = mR\omega^2 \qquad (8.6)$$

R – nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa.

Koriolis inersiya kuchining moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$\Phi_\kappa = 2m|\omega_e|\cdot|v_r|\cdot\sin(\bar{\omega}_e \wedge \bar{v}_r) \qquad (8.7)$$

2. Ko'chirma harakat tekis aylanma harakatdan iborat bo'lsin. U holda $\varepsilon_e = 0$ bo'lib, $\overline{\Phi}_e^\tau = 0$ bo'ladi.

Differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\bar{a}_r = \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi}_e^n + \overline{\Phi}_\kappa \qquad (8.8)$$

3. Ko'chirma harakat notekis, egri chiziqli ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsin. U holda $\omega_e = 0$ bo'lib, $\Phi_k = 0$ bo'ladi. Ko'chirma inersiya kuchining tashkil etuvchilari quyidagicha ifodalanadi:

$$\Phi_e^\tau = m\left|\frac{dv}{dt}\right|; \quad \Phi_e^n = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (8.9)$$

Differensial tenglama ko'rinishi quyidagicha:

$$m\bar{a}_r = \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi}_e^\tau + \overline{\Phi}_e^n \qquad (8.10)$$

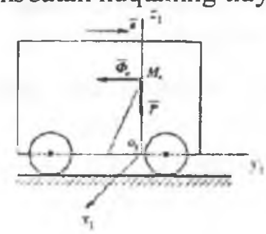
4. Ko'chirma harakat to'g'ri chiziqli, tekis ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa, $a_e = 0$; $\Phi_e = 0$ va $\Phi_k = 0$ bo'ladi. Differensial tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$m\bar{a}_r = \overline{F} + \overline{R} \qquad (8.11)$$

Nisbiy harakat differensial tenglamasi bilan absolyut harakat differensial tenglamasi bir xil ko'rinishga ega. Bu holda $O_1 x_1 y_1 z_1$ qo'zg'aluvchi koordinata sistemasi ham inersial sistema bo'ladi va har qanday mexanik tajriba bilan ham bunday sanoq sistemasining harakatini seza olmaymiz. Masalan, to'g'ri chiziqli tekis harakatdagi kemada hamma tomoni berk kayutada o'tirgan odam kema harakatdami yoki yo'qmi bila olmaydi. Bu natija Galiley tomonidan aniqlangan bo'lib, klassik mexanikaning *nisbiylik nazariyasi* deyiladi.

***4 - MASALA**

Vagon gorizontal yo'lning to'g'ri chiziqli uchastkasida o'ng tomonga qarab o'zgarmas $\overline{a}$ tezlanish bilan harakatda. Vagon bilan birgalikda harakatlanayotgan M moddiy nuqta biror vaqtdan so'ng vertikal bo'ylab erkin harakat qilib tusha boshladi (9-shakl). Vagonga nisbatan nuqtaning trayektoriyasi aniqlansin.



9 – shakl

Yechish:

Shaklda ko'rsatilgandek qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi $O_1x_1y_1z_1$ vagon bilan birgalikda harakatlanadi (O_1z_1 o'qi vertikal bo'ylab yuqoriga yo'naltirilgan bo'lib, moddiy nuqtaning boshlang'ich holati M_0 dan o'tadi). Nuqta erkin tusha boshlagan balandligi nuqtasini $z_{1_0} = h$ deb belgilaymiz.

Masala shartiga asosan boshlang'ich nisbiy tezlik nolga tengdir.

Ya'ni: $v_r = 0$ (*4.1)

Ko'chirma inersiya kuchi moduli teng:

$$\Phi_e = ma_e \quad (*4.2)$$

yo'nalishi esa vagon harakatiga qarama-qarshi chap tomonga gorizontal bo'ylab yo'nalgan. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lgani uchun Koriolis inersiya kuchi nolga tengdir. Ya'ni:

$$\Phi_k = 0 \quad (*4.3)$$

Nuqta erkin harakatda bo‘lgani uchun bog‘lanish reaksiya kuchlari ham $N=0$ ga teng. Nisbiy harakat differensial tenglamalari quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=0;\ m\frac{d^2y_1}{dt^2}=-m\,a_e\ ;\ m\frac{d^2z_1}{dt^2}=-m\,g. \qquad (*4.4)$$

yoki

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0;\ \frac{d^2y_1}{dt^2}=-a_e;\ \frac{d^2z_1}{dt^2}=-g. \qquad (*4.5)$$

(*4.4) va (4.5) tenglamalarni integrallasak:

$$\frac{dx_1}{dt}=C_1;\ \ \frac{dy_1}{dt}=-a_et+C_2;\ \ \frac{dz_1}{dt}=-gt+C_3. \qquad (*4.6)$$

Integral o‘zgarmaslari C_1, C_2, C_3 lar boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi. (*4.1) ifodaga asosan $t=0$ da $v_r=0$ shuning uchun $C_1=C_2=C_3=0$ bo‘ladi. Demak (*4.6) differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\frac{dx_1}{dt}=0;\ \ \frac{dy_1}{dt}=-a_et;\ \ \frac{dz_1}{dt}=-gt. \qquad (*4.7)$$

Ya’na ikkinchi marotaba integrallasak:

$$x_1=C_4,\ \ y_1=-\frac{a_et^2}{2}+C_5,\ \ z_1=-\frac{gt^2}{2}+C_6 \qquad (*4.8)$$

Boshlang‘ich shartlardan, ya’ni $t=0$ da $x_{10}=0,\ y_{10}=0,\ z_{10}=h$ lardan foydalanib, C_4, C_5, C_6 larni aniqlaymiz. Bu yerda, $C_4=C_5=0;C_6=h$ ga teng bo‘lib, (*4.8) tenglamaga olib borib qo‘ysak:

$$x_1=0,\ \ y_1=-\frac{a_et^2}{2},\ \ z_1=h-\frac{gt^2}{2}. \qquad (*4.9)$$

(*4.9) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, M nuqta nisbiy trayektoriyasi vertikal $O_1y_1z_1$ tekislikda yotadi. Tenglamalardan vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tenglamani hosil qilamiz:

$$a_ez_1-gy_1=a_eh$$

yoki

$$\frac{z_1}{h}-\frac{g\,y_1}{a_e\,h}=1 \qquad (*4.10)$$

(*4.10) tenglamadan ma'lumki, M nuqtaning nisbiy trayektoriyasi $O_1y_1;O_1z_1$ o'qlarini $-\frac{a_e h}{g}$ va h nuqtalarda kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iboratdir.

Takrorlash uchun savollar

1. Inersial va noinersial sanoq sistemasi nima?
2. Ko'chirma inersiya kuchi nima?
3. Koriolis inersiya kuchi nima?
4. Nisbiy harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
5. Markazdan qochirma inersiya kuchini tushuntiring.
6. Aylanma inersiya kuchini tushuntiring.
7. Klassik mexanikaning nisbiylik nazariyasini tushuntiring.
8. Nisbiylik nazariyasi kim tomondan aniqlangan?

V BOB. MODDIY NUQTANING TO'G'RI CHIZIQLI TEBRANMA HARAKATI

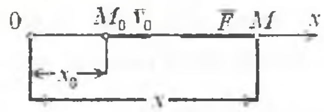
9-§. Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Tebranma harakat turlarini o'rganish mexanika, fizika va texnika fanlarining aniq masalalarini yechish uchun zarurdir. Turli qurilmalar va mexanizmlarning qismlari kuchlar ta'sirida tebranish oladi. Tebranishning me'yoridan oshishi natijasida falokatlar ro'y berishi mumkin. Ayrim hollarda esa, masalan radiotexnika sohalarida, tebranishlardan unumli foydalaniladi. Tebranish sodir bo'ladigan jarayonlarning mohiyati turlicha bo'lishiga qaramay, ularning xarakterli xususiyatlari bir xil qonuniyatlarga bo'ysunadi. Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatini ko'ramiz. Ox o'qining boshi M moddiy nuqtaning muvozanat holatida bo'lsin.

Massasi m bo'lib, qaytaruvchi $\overline{F}$ kuch ta'sir etsin (10-shakl). Qaytaruvchi kuch - moddiy nuqtani muvozanat holatiga qaytarishga intiluvchi kuch. Bu kuch hamma vaqt moddiy nuqtaning muvozanat holatiga qarab yo'naladi va moddiy nuqtaning koordinatasiga bog'liq o'zgaradi. Ya'ni:

$$F = cx \tag{9.1}$$

Bu yerda c - bikirlik koeffitsienti bo'lib, moddiy nuqtani bir birlik masofaga siljitish uchun kerak bo'lgan kuchni ifodalaydi va N/m da o'lchanadi.



10 – shakl

Bunday kuchga elastiklik kuchi misol bo'la oladi. Moddiy nuqta boshlang'ich vaqtda koordinata boshidan x_0 masofada joylashgan bo'lib, $\bar{v}_0$ tezlikka ega bo'lsin.

Moddiy nuqta harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x \tag{9.2}$$

(9.1) ni (9.2) ga qo'ysak, tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{x} = -F; \rightarrow m\ddot{x} = -cx; \rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \tag{9.3}$$

Belgilash kiritamiz:

$$k^2 = \frac{c}{m} \tag{9.4}$$

tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{9.5}$$

(9.5) tenglama moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat differensial tenglamasini ifodalaydi. Bu tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{9.6}$$

C_1 va C_2 lar integral o'zgarmaslari bo'lib, ularni boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Boshlang'ich shartlar quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$t = 0 \quad \text{da } x = x_0\,; v = v_0. \tag{9.7}$$

(9.6) tenglamadan birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \tag{9.8}$$

(9.7) ifodani (9.6) va (9.8) tenglamalarga qo'yib, integral o'zgarmaslarini aniqlaymiz.

Natijada $C_1 = x_0$ $C_2 = \frac{v_0}{k}$ kelib chiqadi.

C_1 va C_2 ning qiymatlarini (9.6) ga qo'yamiz va moddiy nuqtaning tebranma harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt \tag{9.9}$$

Agar integral o'zgarmaslarini $C_1 = a \sin\alpha$; $C_2 = a \cos\alpha$ ko'rinishda ifodalasak, (9.5) differensial tenglamaning yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = a \sin(kt + \alpha) \tag{9.10}$$

Bu tenglamada a- tebranish amplitudasi, $kt + \alpha$ - tebranish fazasi,
α - boshlang'ich tebranish fazasi deyiladi. Ular quyidagi formulalardan
aniqlanadi:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \tag{9.11}$$

$$tg\alpha = \frac{kx_0}{v_0} \tag{9.12}$$

Bu yechimdan ko'rinib turibdiki, chiziqli qaytaruvchi kuch ta'sirida moddiy nuqta garmonik tebranma harakat qiladi.
Tebranish davri T ni aniqlaymiz. Sinus va kosinus trigonometrik funksiyalar davri 2π ga tengdir. T o'zgarganda tebranish fazasi 2π ga o'sadi.
Demak:

$$k(t + T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi \tag{9.13}$$

Bu tenglamani yechsak:

$$T = \frac{2\pi}{k} \tag{9.14}$$

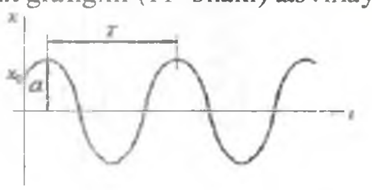
Tebranish doimiy takrorligining qiymatini qo'ysak:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \tag{9.15}$$

(9.15) tenglamada x_0 va v_0 lar qatnashmaydi. Demak tebranish davri harakatning boshlang'ich shartlariga bog'liq emas. Tebranish takrorligi γ moddiy nuqtaning massasi va qaytaruvchi kuchni xarakterlovchi bikirlikka bog'liqdir.

Ya'ni: $$\gamma = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad (9.16)$$

Erkin tebranma harakat grafigini (11- shakl) tasvirlaymiz.



11 – shakl

11- shakldagi x_0 moddiy nuqtaning boshlang'ich paytdagi og'ishi va nuqtaning bir marotaba to'liq tebranishi uchun ketgan T vaqti tebranish davridir.

10-§. Og'irlik kuchi ta'sirida moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Massasi m bo'lgan moddiy nuqta AB prujinaga ilingan. Og'irlik kuchi ta'sirida prujinaning statik cho'zilishi f_{st} ga teng. Koordinata boshini moddiy nuqtaning statik muvozanat holatidagi vaziyatida deb qabul qilib, uning harakatini tekshiramiz (12-shakl).

Prujinaning elastiklik kuchi $F = c(y + f_{st})$ ga teng.

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{y} = G - F \qquad (10.1)$$

$\overline{G}$ - moddiy nuqtaning og'irlik kuchi. Jismning muvozanat holatida $G = cf_{st}$ ga tengdir. (10.1) tenglamaga kuchlarning ifodalarini qo'ysak,

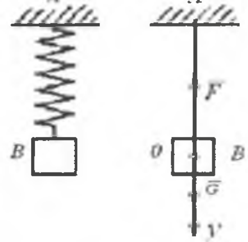
$$m\ddot{y} = cf_{st} - c(y + f_{st})$$

$$m\ddot{y} = cf_{st} + cy - cf_{st} \qquad (10.2)$$

kelib chiqdi. Ifodani soddalashtirib, belgilashlami qo'yamiz:

$$\ddot{y}+k^2y=0 \qquad (10.3)$$

(10.3) tenglama erkin tebranma harakat differensial tenglamasini ifodalaydi. Uning yechimi (9.6) ko'rinishda ifodalanadi.



12 – shakl

Uning yechimi (9.6) ko'rinishda ifodalanadi. Ya'ni:

$$y=C_1\cos kt+C_2\sin kt \qquad (10.4)$$

Integral o'zgarmaslari $C_1=y_0$ $C_2=\frac{v_0}{k}$ ga teng bo'lib, ulami o'rniga qo'yib, (10.4) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$y=y_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt \qquad (10.5)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, og'irlik kuchi jismning muvozanat holatini o'zgartirar ekan. Agar bizga prujinaning statik deformatsiyasi f_{st} berilgan bo'lsa, tebranish doiraviy takrorligi:

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{c}{\frac{G}{g}}}=\sqrt{\frac{cg}{G}}=\sqrt{\frac{cg}{cf_{st}}}=\sqrt{\frac{g}{f_{st}}} \qquad (10.6)$$

Demak, (10.6) ifodani (10.5) ga olib borib qo'ysak, og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanayotgan moddiy nuqtaning harakat qonuni kelib chiqadi. Ya'ni:

$$y=y_0\cos\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}t+\frac{v_0}{k}\sin\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}t$$

Tebranish davrini aniqlaymiz.

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{f_{st}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{f_{st}}{g}}$$

Demak, $$T = 2\pi\sqrt{f_{st}/g}$$

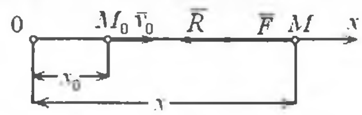
11- §. Muhit qarshilik kuchi ta'sirida moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Tabiatda va texnikada jismga qaytaruvchi kuchdan tashqari muhitning qarshilik kuchi ham ta'sir etadi. Bunday kuchlarga ishqalanish kuchi, havoning qarshilik kuchi misol bo'la oladi. Bu kuchlar harakatning tez so'nishiga olib keladi.

Muhit qarshiligining tebranma harakatga ta'sirini ko'rib chiqamiz. Massasi m bo'lgan M moddiy nuqtaga qaytaruvchi $\overline{F}$ kuchdan tashqari tezlikning funksiyasi bo'lgan va harakat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan qarshilik kuchi $\overline{R}$ ta'sir etsin (13-shakl). Nuqtaning kichik tezliklarida qarshilik kuchi tezlikning birinchi darajasiga proporsional ravishda o'zgaradi. Ya'ni:

$$R = \mu v; \quad F = cx. \tag{11.1}$$

Bu yerda μ -muhit qarshiligining proporsionallik koeffitsienti.



13 – shakl

Moddiy nuqta boshlang'ich vaqtda koordinata boshidan x_0 masofada joylashgan va $\overline{v}_0$ tezlikka ega bo'lsin. Moddiy nuqta uchun harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x \tag{11.2}$$

$$m\ddot{x} = -F - R \tag{11.3}$$

(11.1) ni (11.3) olib kelib qo'ysak:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu v \rightarrow m\ddot{x} + cx + \mu v = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \tag{11.4}$$

(11.4) tenglama hosil bo'ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$2n=\frac{\mu}{m};\quad k^2=\frac{c}{m} \tag{11.5}$$

Belgilashlarni (11.4) tenglamaga olib borib qo‘ysak:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0 \tag{11.6}$$

hosil bo‘ladi. (11.6) tenglama muhit qarshilik kuchi ta‘sirida moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat differensial tenglamasidir. Bu tenglamaning umumiy yechimi:

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \tag{11.7}$$

C_1; C_2 lar integral o‘zgarmaslari, λ_1; λ_2 lar esa:

$$\lambda^2+2n\lambda+k^2=0 \tag{11.8}$$

(11.8) xarakteristik tenglamaning yechimidir.
Ya’ni:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2} \tag{11.9}$$

Bu yerda $n=\frac{\mu}{2m}$ muhit qarshilik kuchini xarakterlaydi, $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$ esa qaytaruvchi kuchni xarakterlaydi. (11.8) tenglamadan ko‘rinadiki, (11.6) tenglamaning umumiy yechimini tuzishda quyidagi uch holni ko‘ramiz.

1. Kichik qarshiliklar bo‘lgan hol, ya’ni k>n.

Bu holda (11.8) xarakteristik tenglamaning yechimi mavhumdir:.

$$\lambda_{1,2}=-n\pm i\sqrt{k^2-n^2}, \tag{11.10}$$

yoki:

$$\lambda_{1,2}=-n\pm ik_1 \tag{11.11}$$

Bu yerda $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ va $i=\sqrt{-1}$.

(11.6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t) \tag{11.12}$$

Bunda C_1, C_2 lar integral o‘zgarmaslaridir. Ular boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi, ya’ni :

$$t=0 \text{ da } x=x_0;\quad \dot{x}=v_0. \tag{11.13}$$

Bu hol uchun tezlikning harakat o‘qidagi proyeksiyasi

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} k_1 (C_2 \cos k_1 t - C_1 \sin k_1 t) \quad (11.14)$$

(11.12) va (11.14) tenglamalarga (11.13) ni qo'yib, C_1; C_2 lami aniqlaymiz:

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \quad (11.15)$$

Demak, (11. 12) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = e^{-nt}(x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t) \quad (11.16)$$

(11.16) tenglama muhit qarshilik kuchi ta'sirida moddiy nuqta erkin tebranma harakatining kichik qarshiliklar bo'lgan hol uchun harakat qonunidir. Agar integral o'zgarmaslarini

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= a_1 \sin \beta \\ C_2 &= a_1 \cos \beta \end{aligned}\right\} \quad (11.17)$$

ko'rinishda ifodalasak, (11.6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = a_1 e^{-nt} \sin(k_1 t + \beta) \quad (11.18)$$

(11.18) tenglama (9.10) garmonik tebranma harakat tenglamasidan vaqt o'tishi bilan tez kamayuvchi e^{-nt} ko'paytma bilan farq qiladi, chunki $t \to \infty, e^{-nt} \to 0$. Shuning uchun (11.18) qonun bilan tebranuvchi moddiy nuqtaning harakati so'nuvchi tebranma harakat deyiladi. a_1 va β integral doimiylari (11.13) boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Buning uchun (11.15) va (11.17) tenglamalardan foydalanamiz:

$$a_1 \sin \beta = x_0 \quad \text{va} \quad a_1 \cos \beta = \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \quad (11.19)$$

(11.19) tenglamadan:

$$a_1 = \frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}; \quad tg\beta = \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0} \quad (11.20)$$

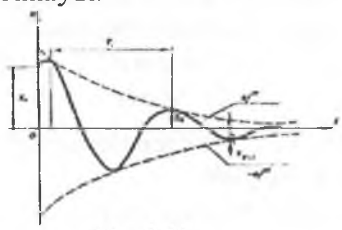
So'nuvchi tebranma harakat grafigini $a_1 e^{-nt}$ va $-a_1 e^{-nt}$ egri chiziqlarga urinib o'tuvchi so'nuvchi sinusoida grafigi ko'rinishida ta'svirlanadi (14-shakl).

Grafikdan aniq ko'rinib turibdiki M nuqtaning tebranishi davriy emas. Tebranish davri shartli ravishda qabul qilingan. So'nuvchi tebranma harakat davri erkin tebranma harakat davridan birmuncha kattadir.

Lekin qarshilik kuchi kichik bo'lganda tebranish davri taxminan $T_1 \approx T$ deb olingan.

Ya'ni:
$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (11.21)$$

(11.18) tenglamadagi $A = a_1 e^{-nt}$ ifoda so'nuvchi tebranish amplitudasi deyiladi. So'nuvchi tebranish amplitudasi vaqt o'tishi bilan kamayib borgani tufayli, tebranish fazasi 2π ga o'zgarganda nuqta o'zining avvalgi muvozanat holatidan eng katta chetga chiqishini takrorlay olmaydi.



14 – shakl

Tebranishlar amplitudasining kamayish qonunini ko'rib chiqamiz. M nuqtaning t_1 paytda O muvozanat holatidan eng katta og'ishi x_1 bo'lsin, $t_1 + T_1$ vaqtda esa x_2 bo'lsin. U holda:

$$x_1 = e^{-nt_1} a_1 \quad ; \quad x_2 = e^{-n\left(t_1 + \frac{T_1}{2}\right)} a_1 = e^{-\frac{nT_1}{2}} x_1 \quad (11.22)$$

bo'ladi.

Demak, har yarim davr o'tishi bilan tebranishlar amplitudasi, maxraji $q = e^{-\frac{nT_1}{2}}$ bo'lgan geometrik progressiya kabi kamayib boradi. $q = e^{-\frac{nT_1}{2}}$ - so'nish dekrementi deyiladi. $|\lg| = -\frac{nT_1}{2}$ esa logarifmik dekrement deyiladi. Demak, tekshirishlardan shunday xulosaga keldikki, kichik qarshiliklar tebranish davriga oz ta'sir qilib, geometrik progressiya qonuni asosida harakatni so'ndiradi.

2. Katta qarshiliklar bo'lgan hol, ya'ni n>k

Bu holda (11.8) tenglamaning yechimi haqiqiy va turli bo'lib, quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} \qquad (11.23)$$

(11.6) tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = e^{-nt}(C_1 ch\sqrt{n^2 - k^2}t + C_2 sh\sqrt{n^2 - k^2}t) \qquad (11.24)$$

Yangi belgilashlar kiritsak, ya'ni:

$$C_1 = a_1 sh\beta; \quad C_2 = a_1 ch\beta. \qquad (11.25)$$

U holda umumiy yechim quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = a_1 e^{-nt} sh(\sqrt{n^2 - k^2}t + \beta) \qquad (11.26)$$

U holda umumiy tenglamadan ko'rinib turibdiki, katta qarshiliklar bo'lgan holda umumiy yechimda trigonometrik funksiyalar ishtirok etmaydi.

Bu holda M nuqtaning harakati aperiodik harakatdan iborat bo'ladi,

chunki giperbolik sinus funksiyasi davriy bo'lmagan funksiyadir. Giperbolik funksiyaning formulalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$sh\,wt = \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}; \quad ch\,wt = \frac{e^{wt} + e^{-wt}}{2} \qquad (11.27)$$

Agar (11.27) tenglamani (11.24)ga qo'ysak, (11.6) tenglama yechimi quyidagicha yoziladi:

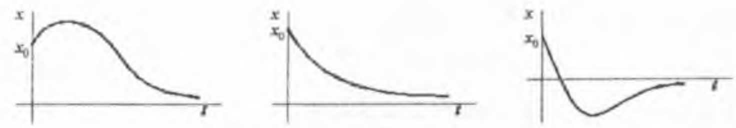
$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt}\right) \qquad (11.28)$$

Bu yerda $w = \sqrt{n^2 - k^2}$ ga teng. Integral o'zgarmaslari $C_1; C_2$ lar (11.13) boshlang'ich shartlardan foydalanib aniqlanadi:

$$C_1 = \frac{v_0 + x_0(n + \sqrt{n^2 - k^2})}{2\sqrt{n^2 - k^2}}; \quad C_2 = \frac{v_0 + x_0(n - \sqrt{n^2 - k^2})}{2\sqrt{n^2 - k^2}}; \qquad (11.29)$$

(11.29) formuladan ko'rinadiki, harakat tebranma bo'lmaydi, vaqt o'tishi bilan x kamayib nolga intilib boradi, ya'ni $t \to \infty, x \to 0$.

Boshlang'ich shartlarining qanday bo'lishiga qarab, uning grafigi 15-shaklda tasvirlangan hollardan biri kabi bo'ladi.



15 – shakl

3. Chegaraviy hol, ya'ni $n=k$.

Bu holda xarakteristik (11.8) tenglama ikkita teng, haqiqiy ildizga ega bo'ladi. Ya'ni:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n \tag{11.30}$$

bo'lib, (11.6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) \tag{11.31}$$

(11.13) boshlang'ich shartlardan foydalanib, integral doimiylarini hisoblaymiz:

$$C_1 = x_0;\ C_2 = v_0 + nx_0 \tag{11.32}$$

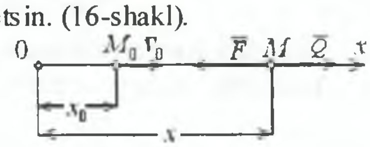
Demak, (11.6) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = e^{-nt}\left[x_0 + (v_0 + nx_0)t\right] \tag{11.33}$$

Bu hol ham davriy bo'lmagan xarakterga ega bo'lib, uning grafigi katta qarshiliklar bo'lgan hol grafigidan (15-shakl) farq qilmaydi. Nuqta harakati tebranma harakat bo'lmay, *aperiodik harakat*dan iboratdir.

12-§. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Moddiy nuqtaga qaytaruvchi kuch (9.1) dan tashqari uyg'otuvchi kuch ham ta'sir etsin. (16-shakl).



16 – shakl

Uyg'otuvchi kuch vaqtning davriy funksiyasi bo'lsin. Ya'ni:

$$Q = H\sin(pt + \delta) \tag{12.1}$$

Bu yerda H - uyg'otuvchi kuch amplitudasi, p - doiraviy takroriy son, δ - boshlang'ich faza.
Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x + Q_x \qquad (12.2)$$

Kuchlarni proyeksiyalaymiz:

$$m\ddot{x} = -F + Q \qquad (12.3)$$

(9.1) va (12.1) tenglamalarni (12.3) ga qo'yamiz:

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt + \delta) \qquad (12.4)$$

$$m\ddot{x} + cx = H\sin(pt + \delta) \rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt + \delta) \qquad (12.5)$$

Belgilash kiritamiz va (12.5) tenglamaga qo'yamiz:

$$k^2 = \frac{c}{m};\ h = \frac{H}{m}$$

$$\ddot{x} + k^2 = h\sin(pt + \delta) \qquad (12.6)$$

(12.6) tenglama moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini ifodalaydi.
Moddiy nuqtaning qaytaruvchi va uyg'otuvchi kuch ta'siridagi harakati xususiy tebranishli, k – takroriy sonli erkin tebranma harakat va p – takroriy sonli majburiy tebranma harakatdan tashkil topgan. Differensial tenglama ikkinchi tartibli, bir jinsli bo'lmagan, chap tomoni noldan farqli tenglamadir. Bu tenglamani integrallashda ikki holni ko'riladi, ya'ni $p \neq k$ va $p = k$.
a) Xususiy tebranish va uyg'otuvchi kuch takroriy sonlari teng bo'lmagan hol $p \neq k$ uchun (12.6) tenglamaning yechimini ko'ramiz.
Uning yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = x_1 + x_2 \qquad (12.7)$$

Bu yerda x_1 yechimi $\ddot{x} + k^2x = 0$ tenglamaning umumiy yechimi, x_2 esa (12.6) tenglamaning xususiy yechimidir.
Umumiy yechimi:

$$x_1 = C_1\cos kt + C_2\sin kt \qquad (12.8)$$

yoki $$x_1 = a\sin(kt + \alpha) \tag{12.9}$$

Xususiy yechimi:

$$x_2 = A\sin(pt + \delta) + B\cos(pt + \delta) \tag{12.10}$$

Bu yerda A, B lar doimiy kattaliklar bo'lib, ularni shunday tanlash kerakki (12.6) tenglama ayniyatga aylansin. (12.9) va (12.10) tenglamalarni (12.6) ga olib borib qo'yib ayniyat hosil qilamiz:

$$-Bp^2\cos(pt+\delta) - Ap^2\sin(pt+\delta) + k^2(B\cos(pt+\delta) +$$
$$+ A\sin(pt+\delta)) = h\sin(pt+\delta) \tag{12.11}$$

Ayniyat o'rinli bo'lishi uchun $\sin(pt+\delta)$ va $\cos(pt+\delta)$ lar oldidagi koeffitsientlari teng bo'lishi kerak.

Ya'ni, $B(k^2 - p^2) = 0$; $A(k^2 - p^2) = h$

Bundan: $B = 0$; $A = \dfrac{h}{k^2 - p^2}$

Demak xususiy yechimi teng:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta) \tag{12.12}$$

(12.8), (12.9) va (12.12) larni (12.7) ga qo'ysak:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta) \tag{12.13}$$

yoki

$$x = a\sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta) \tag{12.14}$$

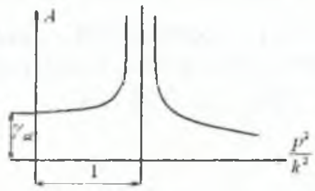
hosil bo'ldi. Bu yerda C_1, C_2 lar integral doimiy o'zgarmaslaridir. Agar $p < k$ bo'lsa, uyg'otuvchi kuch bilan majburiy tebranma harakat fazalari bir xil bo'ladi, $p>k$ bo'lsa, (12.12) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2}\sin(pt + \delta - \pi) \tag{12.15}$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, uyg'otuvchi kuch takroriy soni p xususiy tebranish takroriy sonidan katta bo'lib, lekin majburiy tebranish uyg'otuvchi kuchga nisbatan π fazaga farq qiladi. Majburiy tebranish amplitudasi o'zgarmas miqdor bo'lib, uning $\frac{p^2}{k^2}$ nisbat bilan orasidagi bog'liqlikni tekshiramiz. Ma'lumki, majburiy tebranish amplitudasi

$$A=\frac{h}{\left|k^2-p^2\right|}=\frac{\gamma_{st}}{\left|1-(p/k)^2\right|} \tag{12.16}$$

bu yerda: $\gamma_{st}=\frac{h}{k^2}=\frac{H/m}{c/m}=\frac{H}{c}$ - nuqtaga uyg'otuvchi kuchning maksimal qiymatiga teng o'zgarmas kuch ta'sir etganda, nuqtaning statik og'ishini ifodalaydi. $\frac{p^2}{k^2}$ nisbatga bog'liq ravishda A amplitudaning o'zgarish grafigi 17-shaklda keltirilgan.



17 – shakl

Harakat qonunini aniqlash uchun boshlang'ich shartlardan, ya'ni $t=0$ da $x=x_0;\ \dot{x}=v_0$ dan foydalanib, (12.13) tenglamada integral o'zgarmaslari $C_1;\ C_2$ larni aniqlaymiz:

$$x_0=C_1+\frac{h}{k^2-p^2}\sin\delta \ \text{yoki}\ C_1=x_0-\frac{h}{k^2-p^2}\sin\delta \tag{12.17}$$

(12.13) tenglamadan hosila olamiz va boshlang'ich shartlardan foydalanib C_2 ni aniqlaymiz:

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos(pt+\delta) \tag{12.18}$$

$$\dot{x}_0=C_2k+\frac{hp}{k^2-p^2}\cos\delta;\quad C_2=\frac{1}{k}\left(v_0-\frac{hp}{k^2-p^2}\cos\delta\right) \tag{12.19}$$

Demak, harakat qonuni

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\cos kt \cdot \sin\delta + \frac{p}{k} \sin kt \cdot \cos\delta \right) + \quad (12.20)$$

$$+ \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

Tenglamadan ko'rinib turibdiki, majburiy tebranish boshlang'ich shartlarga bog'liq emas.

b) Xususiy tebranish va uyg'otuvchi kuch takroriy sonlari teng bo'lgan hol $(p = k)$ uchun (12.5) tenglamaning yechimini ko'ramiz. Bu holda ham (12.7), (12.8), (12.9) formulalardan foydalanamiz. (12.5) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$x_2 = At \sin(kt + \delta) + Bt \cos(kt + \delta) \quad (12.21)$$

x_2 va $\ddot{x}_2$ lar qiymatlarini (12.5) tenglamaga olib borib qo'ysak:

$$-2Bk \sin(kt + \delta) + 2Ak \cos(kt + \delta) = h \sin(kt + \delta) \quad (12.22)$$

kelib chiqadi. Bir xil trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglab A *va* B larni aniqlaymiz:

$$-2Bk = h, \; 2Ak = 0 \quad (12.23)$$

(12.23) dan:

$$B = -\frac{h}{2k}; \quad A = 0 \quad (12.24)$$

(12.24) tengliklarni (12.21) tenglamaga olib borib qo'ysak, (12.5) tenglamaning $p=k$ bo'lgan holi uchun xususiy yechimi kelib chiqadi.

Ya'ni:

$$x_2 = -\frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta) \quad (12.25)$$

(12.8), (12.9) va (12.25) larni (12.7)ga olib borib qo'ysak, tenglamaning yechimi kelib chiqadi:

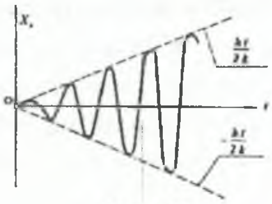
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta)$$

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta) \quad (12.26)$$

(12.26) tenglamadan ko'rinib turibdiki, biz tekshirayotgan tebranma harakatning bu holida ikkala tebranish ustma-ust tushadi. O‘zgarmas amplitudali xususiy tebranish xarakteri $p \neq k$ holidagi kabi o‘zgarmasdan qoldi. Majburiy tebranish fazasi uyg‘otuvchi kuch fazasidan $\frac{3}{2}\pi$ ga farq qiladi. Demak:

$$x_2 = -\frac{ht}{2k}\cos(kt+\delta) = \frac{hk}{2k}\sin(kt+\delta+\frac{3}{2}\pi) \quad (12.27)$$

Nuqtaning majburiy tebranma harakati amplitudasi o‘suvchi, $\frac{ht}{2k}$ ga teng bo‘lgan garmonik tebranma harakat kabi bo‘ladi.



18 – shakl

. Demak $p=k$ da rezonans hodisasi ro‘y beradi, ya’ni $t \to \infty$ da, tebranish amplitudasi cheksiz orta boradi.Bu hodisa akustika, radiotexnika va inshootlarni dinamik hisoblashda katta ahamiyatga egadir.

Grafigi sinusoida bo‘lib quyidagi $\frac{ht}{2k}, -\frac{ht}{2k}$ qonun bilan ifodalanuvchi to‘g‘ri chiziqlarga urinib o‘tadi (18-shakl).

Integral ixtiyoriy o‘zgarmaslari C_1 va C_2 lar boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi, ya’ni: $t=0$ da $x = x_0;\ \dot{x} = v = v_0$. (12.26) tenglamadan C_1 ni aniqlaymiz:

$$x_0 = C_1;\ C_1 = x_0 \quad (12.28)$$

(12.26) tenglamadan hosila olamiz:

$$\dot{x} = v = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt - \frac{h}{2k}\cos(kt+\delta) + \frac{ht}{2}\sin(kt+\delta) \quad (12.29)$$

(12.29) tenglamadan C_2 ni aniqlaymiz:

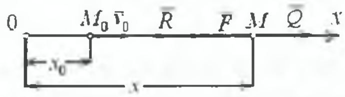
$$\dot{x}_0 = C_2 k - \frac{h}{2k}\cos\delta \ \to\ C_2 = \frac{1}{k}(v_0 + \frac{h}{2k}\cos\delta) \quad (12.30)$$

Demak, boshlang'ich shartlarga mos holda (12.5) tenglamaning yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{h}{2k}\cos\delta \right)\sin kt - \frac{ht}{2k}\cos(kt+\delta) \qquad (12.31)$$

13-§. Muhitning qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Massasi m bo'lgan M moddiy nuqtaga qaytaruvchi kuch $F = cx$ tezlikka proporsional bo'lgan muhitning qarshilik kuchi $\overline{R} = \mu\overline{v}$ va uyg'otuvchi kuch $Q = H\sin(pt+\delta)$ ta'sir etsin. Moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakat qiladi va boshlang'ich vaqtda koordinata boshidan x_0 masofada joylashgan va $\overline{v}_0$ tezlikka egadir (19-shakl).



19 – shakl

Nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = R_x + F_x + Q_x$$

$$m\ddot{x} = -cx - \mu v + H\sin(pt+\delta) \qquad (13.1)$$

Tenglamaga o'zgartirish kiritib hamma hadlarini massa m ga bo'lamiz:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}v + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt+\delta) \qquad (13.2)$$

Belgilash kiritamiz

$$\frac{H}{m} = h\ ; \quad \frac{\mu}{m} = 2n\ ; \quad \frac{c}{m} = k^2 \qquad (13.3)$$

(13.3) ni (13.2) ga olib borib qo'ysak, quyidagi formula kelib chiqadi:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin(pt+\delta) \qquad (13.4)$$

(13.4) tenglama muhit qarshilik kuchini hisobga olganda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakat differensial tenglamasidir.

Uning yechimi ikkita tenglamalar yechimlarining yig'indisidan iboratdir.

Ya'ni: $$x = x_1 + x_2 \qquad (13.5)$$

Bu yerda x_1 ni (11.6) differensial tenglamaning yechimi deb olamiz. Bu tenglama muhit qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati differensial tenglamasi bo'lib, tebranishning har bir hollari uchun yechimlari to'liq 11-§ da keltirilgan. Kichik qarshiliklar bo'lgan holda (11.6) tenglamaning yechimi (11.12) ga teng, ya'ni:

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) \qquad (13.6)$$

(13.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi x_2 bo'lib, quyidagi ko'rinishda qidiriladi:

$$x_2 = D\sin(pt + \delta - \varepsilon) \qquad (13.7)$$

noma'lum integral doimiylar D va ε ni aniqlash uchun (13.7) tenglamadan birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$\dot{x} = D\,p\cos(pt + \delta - \varepsilon) \qquad (13.8)$$

$$\ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon)$$

(13.9)(13.7),(13.8), (13.9) ifodalarni (13.4) tenglamaga qo'ysak:

$$-Dp^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nDp\cos(pt + \delta - \varepsilon) +$$
$$+ Dk^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) == h\sin(pt + \delta) \qquad (13.10)$$

(13.10) tenglamaning o'ng tomonini quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$h\sin(pt + \delta) = h\sin(pt + \delta - \varepsilon + \varepsilon) =$$
$$= h\sin(pt + \delta - \varepsilon)\cos\varepsilon + h\cos(pt + \delta - \varepsilon)\sin\varepsilon \qquad (13.11)$$

(13.11) ni (13.10) ga qo'ysak, (13.12) tenglama kelib chiqadi:

$$D(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nDp\cos(pt + \delta - \varepsilon) =$$
$$= h\cos\varepsilon\sin(pt + \delta - \varepsilon) + h\sin\varepsilon\cos(pt + \delta - \varepsilon) \qquad (13.12)$$

Bu ayniyat bajarilishi uchun (13.12) tenglamaning o'ng va chap tomonlaridagi mos trigonometrik funksiyalar, ya'ni: $\sin(pt + \delta - \varepsilon)$ va $\cos(pt + \delta - \varepsilon)$ lar oldidagi koeffitsientlar teng bo'lishi kerak. Ya'ni:

$$D\left(k^2 - p^2\right) = h\cos\varepsilon\,; \quad 2np\,D = h\sin\varepsilon \qquad (13.13)$$

(13.13) tenglamani kvadratga ko'tarib qo'shsak, (13.14) tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

$$D=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \tag{13.14}$$

(13.13) tenglamalarni o'zaro bo'lsak,

$$tg\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2} \tag{13.15}$$

kelib chiqadi.

Demak majburiy tebranishlar qonuni quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x_2=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4k^2p^2}}\sin(pt+\delta-\varepsilon) \tag{13.16}$$

(13.4) tenglamaning umumiy yechimi kichik qarshiliklar *(k>n)* bo'lgan holda quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4k^2p^2}}\sin(pt+\delta-\varepsilon)$$

$$k_1=\sqrt{k^2-n^2} \tag{13.17}$$

yechimdan ko'rinib turibdiki, muhit qarshiligi bo'lgan holdagi majburiy tebranishlar qonuni xususiy tebranishlar va majburiy tebranishlarning yig'indisidan iborat ekan. e^{-nt} ko'paytma xususiy tebranishni tez so'nishini ifodalaydi. Shuning uchun ko'p hisoblarda majburiy tebranishga ahamiyat beriladi. Katta qarshiliklar va chegaraviy hollarda (13.4) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishlarda ifodalanadi:

$$x=e^{-nt}\left(C_1ch\sqrt{n^2-k^2}t+C_2sh\sqrt{n^2-k^2}t\right)+$$
$$+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4k^2p^2}}\sin(pt+\delta-\varepsilon); \tag{13.18}$$

$$x=e^{-nt}(C_1+C_2t)+\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4k^2p^2}}\sin(pt+\delta-\varepsilon) \tag{13.19}$$

(13.17), (13.18) va (13.19) tenglamalardagi $C_1; C_2$ lar integrallash doimiylari bo'lib, ularni boshlang'ich shartlardan, ya'ni $t=0$ da $x=x_0$; $v=v_0$ dan foydalanib aniqlanadi. (13.17) tenglamadan $C_1; C_2$ integral o'zgarmaslarini aniqlaymiz:

$$C_2 = \frac{1}{k_1}(\vartheta_0 + nx_0 - nD\sin(\delta - \varepsilon) - pD\cos(\delta - \varepsilon));$$

$$C_1 = x_0 - D\sin(\delta - \varepsilon) \qquad (13.20)$$

Katta qarshiliklar va chegaraviy hollarda ham (13.4) tenglamaning yechimidagi o'zgarmaslar boshlang'ich shartlardan topiladi.

(13.17) tenglamadan ko'rinadiki $t \to \infty$ da nuqtaning harakati faqat $x = D\sin(pt + \delta - \varepsilon)$ qonun bo'yicha ifodalanuvchi majburiy tebranma harakatdan iborat bo'lib qoladi. Majburiy tebranma harakatdan farqli erkin tebranma harakat juda kichik qarshilik kuchi bo'lganda ham so'nuvchi xarakterga ega bo'ladi.

14-§. Prujinalar parallel, ketma-ket ulangan va yuk prujinalar orasiga osilgan hollarda ularni ekvivalent prujina bilan almashtirish

Bikirliklari C_1 va C_2 bo'lgan prujinalar har xil ko'rinishlarda ulangan bo'lib, ekvivalent bitta prujina bilan almashtirishni ko'rib chiqamiz (20-shakl.*a*),b),d)).

1. Prujinalar o'zaro parallel ulangan hol

Prujinalarni bitta ekvivalent prujina bilan almashtiraylik. Prujinalarning A yuk ta'siridagi deformatsiyalarini mos ravishda f_1 va f_2 bilan belgilaymiz (20-shakl.*a*)). Prujinalar o'zaro parallel bo'lganidan, ulardan har birining deformatsiyasi bilan ekvivalent prujina deformatsiyasi f bir xil bo'lishi kerak.

Ya'ni : $$f = f_1 = f_2 \qquad (14.1)$$

Bu deformatsiyalar tufayli hosil bo'lgan elastik kuchlarini mos ravishda F, F_1, F_2 deylik. U holda:

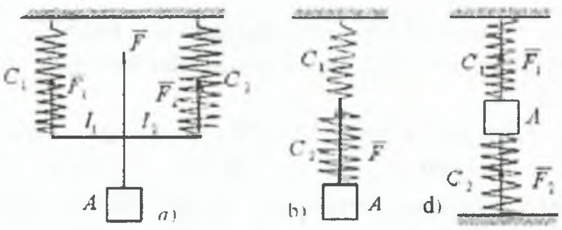
$$F = F_1 + F_2 \qquad (14.2)$$

bo'lishi kerak (bunda l_1 va l_2 masofalar $\overline{F}$ kuch qo'yilgan nuqtadan prujinalargacha bo'lgan masofa.

C_1 va C_2 prujinalar bikirliklari). (14.2) tenglikni $f = f_1 = f_2$ ga hadma-had bo'lamiz:

$$\frac{F}{f}=\frac{F_1}{f_1}+\frac{F_2}{f_2} \qquad (14.3)$$

Bundan: $\frac{F}{f}=C;\ \frac{F_1}{f}=C_1;\ \frac{F_2}{f}=C_2.$ (14.4)



20 – shakl

(14.4) tenglamani (14.3)ga qo'ysak:

$$C=C_1+C_2 \qquad (14.5)$$

hosil bo'ladi. (14.5) dan ko'ramizki, o'zaro parallel ulangan prujinalarga ekvivalent prujina bikirligi har qaysi prujina bikirliklarining yig'indisiga tengdir.

2. Prujinalar ketma-ket ulangan hol

Yuk ta'sirida prujinalar f_1 va f_2 ga teng deformatsiya olsa, prujinalarda hosil bo'ladigan elastiklik kuchi $\overline{F}$ ga tengdir.(20-shakl.b)) Agar prujinalarning umumiy deformatsiyasi f desak,

$$F=cf \qquad (14.6)$$

$$f=\frac{F}{c} \qquad (14.7)$$

tenglik o'rinlidir.

Har qaysi prujina F kuch ta'sirida deformatsiyalangani uchun:

$$f_1=\frac{F}{c_1};\quad f_2=\frac{F}{c_2} \qquad (14.8)$$

Umumiy deformatsiya,

$$f=f_1+f_2 \qquad (14.9)$$

ga tengdir.

(14.7) va (14.8) tengliklarni (14.9) ga qo'ysak:

$$\frac{F}{c}=\frac{F}{c_1}+\frac{F}{c_2} \qquad (14.10)$$

hosil bo'ladi. Bundan:

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2} \rightarrow c=\frac{c_1c_2}{c_1+c_2} \qquad (14.11)$$

kelib chiqadi. Demak ketma-ket ulangan ikkita prujinaga ekvivalent prujina bikirligi (14.11) formula bilan aniqlanadi.

3.**Yuk prujinalar orasiga osilgan hol**

A yuk ta'sirida bikrliklari C_1 va C_2 bo'lgan prujinalar f_1 va f_2 ga teng deformatsiya olsinlar. Bunda birinchi prujina cho'zilsa, ikkinchi prujina qisiladi va ularning olgan deformatsiyalari:

$$f_1=f_2 \qquad (14.12)$$

bo'ladi. (20-shakl.d))

Prujinalarning biri cho'zilib, ikkinchisi qisilgani uchun har qaysi prujinalardagi elastiklik kuchlari bir tomonga yo'naladi. Shuning uchun prujinalarga ekvivalent prujina elastiklik kuchi, birinchi va ikkinchi prujinalar elastiklik kuchlarining yig'indisiga tengdir:Ya'ni:

$$F=F_1+F_2 \qquad (14.13)$$

Bu yerda:

$$F=cf; \quad F_1=c_1f_1; \quad F_2=c_2f_2 \qquad (14.14)$$

ekanligini e'tiborga olib, (14.12) va (14.14) tenglamalarni (14.13) ga o'ysak:

$$c=c_1+c_2 \qquad (14.15)$$

kelib chiqadi.

Ya'ni yuk ikki prujina orasida joylashgan holda ekvivalent prujina bikirligi o'zaro parallel prujinalarning bikrliklari kabi aniqlanadi.

***5-MASALA.**

Ketma-ket ulangan, bikirliklari c_1 va c_2 bo'lgan deformatsiyalanmagan prujinalarning B uchi qo'zg'almas bo'lib, uning A uchiga D yuk biriktirilgan (21-shakl a)). Shu

paytda prujinaning B uchi qiya tekislik bo'ylab $\xi = 2\sin 5t(sm)$ qonunga ko'ra harakatlana boshlaydi. Yukning statik holatini koordinata boshi deb olib, uning harakat qonuni aniqlansin.
Quyidagilar berilgan:

$m_D = m = 2kg$; $c_1 = 12 N/sm$; $c_2 = 8 N/sm$ $\alpha = 30^0$.

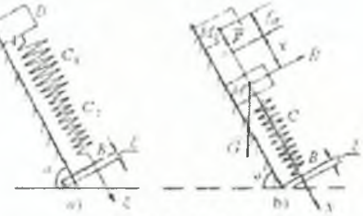
Yechish.

Ketma-ket ulangan prujinalarni ularga ekvivalent prujina bilan almashtiramiz. Ekvivalent prujina bikirligi,

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{96}{20} = 4{,}8 N/sm = 480 N/m \qquad (*5.1)$$

Koordinata o'qini masala shartiga muvofiq ravishda o'tkazamiz (21-shakl b)). D yukni M nuqtaga olamiz. M nuqtaga D yukning og'irlik kuchi $\overline{G}$, prujinaning elastiklik kuchi $\overline{F}$ ta'sir etadi. Boshlang'ich shartlar quyidagidan iborat:

$$t = 0,\ x = x_0 = -f_{st},\ v = v_0 = 0. \qquad (*5.2)$$



21-shakl

$$\sum F_{ix} = G\sin\alpha - F \qquad (*5.3)$$

(*5.3) tenglamani e'tiborga olib, M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = G\sin\alpha - F \qquad (*5.4)$$

Bunda :

$$F = cf = c(f_{st} + x - \xi);\ G\sin\alpha = c\cdot f_{st};\ \xi = 0{,}02\sin 5t. \qquad (*5.5)$$

ga teng. Qiymatlarni tenglamaga olib borib qo'ysak, (*5.4) differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + c\cdot 0{,}02\sin 5t. \qquad (*5.6)$$

(*5.6) tenglamani hadma-had m ga bo'lsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m}x + \frac{c}{m}0{,}02\sin 5t \qquad (*5.7)$$

Belgilashlar kiritamiz:

$$k^2 = \frac{c}{m};\ h = \frac{0{,}02\cdot c}{m};\quad p = 5s^{-1}. \qquad (*5.8)$$

Natijada differensial tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h\sin pt \qquad (*5.9)$$

Bu tenglama yechimini yozishdan avval k va r ni taqqoslaymiz:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{480}{2}} = 15{,}6\,s^{-1}. \qquad (*5.10)$$

Shunday qilib, $k>p$ ekan. Demak (*5.9) tenglama yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = x_0\cos kt + \frac{\vartheta_0}{k}\sin kt - \frac{ph}{k(k^2-p^2)}\sin kt + \frac{h}{k^2-p^2}\sin pt. \qquad (*5.11)$$

(*5.11) tenglamaga tegishli hisoblarni bajaramiz:

$$x_0 = -f_{st} = -\frac{mg\sin\alpha}{c} = -\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5}{480} = -0{,}02\,(m)$$

$$h = \frac{0{,}02c}{m} = \frac{0{,}02\cdot 480}{2} = 4{,}8\,m/s^2$$

$$\frac{h}{k^2-p^2} = \frac{4{,}8}{240-25} = 0{,}02(m);$$

$$\frac{p}{k}\cdot\frac{h}{k^2-p^2} = \frac{5}{15{,}6}\cdot 0.02 = 0.0064(m)$$

Bu qiymatlarni (*5.11) tenglamaga qo'yib, D yukning harakat qonunini hosil qilamiz:

$$x = -0.02\cos 15{,}6t - 0.0064\sin 15{,}6t + 0.02\sin 5t(m) \quad (*5.12)$$

(*5.12) tenglamaga asosan D yukning harakati majburiy tebranma harakatdan iboratdir.

Takrorlash uchun savollar

1. Erkin tebranma harakat qanday kuch ta'sirida sodir bo'ladi?
2. Erkin tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
3. Erkin tebranma harakat qonuni qanday ifodalanadi?
4. Erkin tebranma harakat davri, amplitudasi,boshlang'ich fazasi qanday ifodalanadi?
5. So'nuvchi tebranma harakat qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?
6. So'nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasining yechimlari nechta ko'rinishda ifodalanadi?
7. So'nish dekrementini tushuntiring.
8. So'nuvchi tebranma harakat davri, amplitudasi, boshlang'ich fazasi qanday ifodalanadi?
9. Majburiy tebranma harakat qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?
10. Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
11. Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi yechimi qanday ko'rinishda ifodalanadi?
12. Rezonans qachon ro'y beradi?
13. Muhit qarshiligi bo'lgan holda majburiy tebranma harakat qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?
14. Muhit qarshiligi bo'lgan hol uchun majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
15. Muhit qarshiligi bo'lgan hol uchun majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi yechimi qanday ko'rinishda ifodalanadi?

VI BOB. MEXANIK SISTEMA
15-§. Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarning klassifikatsiyasi

Bir-biri bilan ma'lum munosabatda bog'langan, har bir nuqtasining harakati va holati boshqa nuqtalarning holati, harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plami *mexanik sistema* deyiladi. Agar mexanik sistema nuqtalari orasidagi masofa doimo o'zgarmasdan qolsa, bunday sistema *o'zgarmas mexanik sistema* deyiladi. O'zgarmas mexanik sistemaga misol tariqasida qattiq jismni olish mumkin. Mexanik sistema erkin yoki bog'lanishda bo'lishi mumkin. Mexanik sistema nuqtalarining harakati biror sabab bilan chegaralanmagan bo'lsa, bunday mexanik sistema *erkin mexanik sistema* deyiladi. Erkin mexanik sistemaga quyosh sistemasi misol bo'ladi.

Mexanik sistema nuqtalarining harakati biror sabab bilan chegaralangan bo'lsa, bunday mexanik sistema *bog'lanishdagi mexanik sistema* deyiladi. Bog'lanishdagi mexanik sistemaga mashina mexanizmlari misol bo'la oladi. Mashina mexanizmlari qismlari o'zaro sterjenlar, sharnirlar, tasmalar, tishli g'ildiraklar vositasida bog'lanadi.

Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar ichki va tashqi kuchlardan iboratdir. *Mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning o'zaro bir-biriga ko'rsatadigan ta'siri ichki kuchlar deyiladi.* Ichki kuchlar $\overline{F}^i$ bilan belgilanadi. *Mexanik sistema tarkibiga kirmaydigan jismlar tomonidan ko'rsatiladigan kuchlar ta'siri tashqi kuchlar deyiladi.* Tashqi kuchlar $\overline{F}^e$ bilan belgilanadi.

ICHKI KUCHLAR XOSSASI

1.Ichki kuchlarning bosh vektori nolga teng.

Dinamikaning ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuniga asosan sistemani tashkil qiluvchi nuqtalari miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar bilan bir-biriga ta'sir etadi. Masalan, M_1 va M_2 nuqtalarga ta'sir etuvchi ichki kuchlar $\overline{F}_1^i = -\overline{F}_2^i$ bo'lsin (22-shakl).

Bu kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng.

$$\overline{F}_1' + \overline{F}_2' = 0 \qquad (15.1)$$

Mexanik sistemaning N ta nuqtasi uchun :

$$\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k' \qquad (15.2)$$

22-shakl

Demak, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi ichki kuchlarning geometrik yig'indisi, ya'ni ichki kuchlarning bosh vektori nolga tengdir.

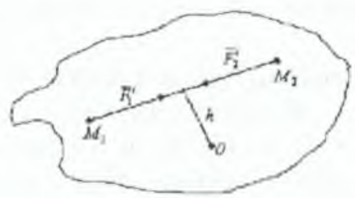
(15.2) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, $(15.2')$ formula kelib chiqadi.

Ya'ni:

$$R_x' = \sum F_{kx}' = 0\,; \quad R_y' = \sum F_{ky}' = 0; \quad R_z' = \sum F_{kz}' = 0\,. \qquad (15.2')$$

2. Ichki kuchlarning biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng.

M_1 va M_2 nuqtalarga ta'sir etuvchi ichki kuchlar $\overline{F}_1' = -\overline{F}_2'$ larning biror



23-shakl

O markazga nisbatan momenti nolga tengdir (23-shakl)

$$\overline{m}_0\left(\overline{F}_1'\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_2'\right) = 0 \qquad (15.3)$$

Mexanik sistema uchun (15.4) tenglamani hosil qilamiz:

$$\overline{M}'_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0\left(\overline{F}'_k\right) = 0 \qquad (15.4)$$

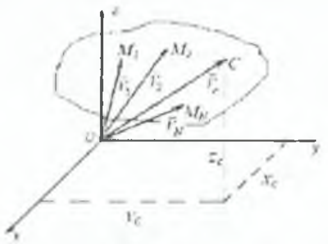
(15.4) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, (15.5) tenglamalar kelib chiqadi.
Ya'ni:

$$M'_x = \sum_{k=1}^{n} m_x\left(\overline{F}'_k\right); \; M'_y = \sum_{k=1}^{n} m_y\left(\overline{F}'_k\right); \; M'_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overline{F}'_k\right) \qquad (15.5)$$

Ichki kuchlarning bu xossalaridan ichki kuchlar o'zaro muvozanatlashadi, degan natija kelib chiqmaydi, chunki bu kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo'yilgan. Ichki kuchlar sistema nuqtalarining o'zaro ko'chishiga ta'sir qiladi, ya'ni jismning deformatsiyasiga sabab bo'ladi. Mutlaq qattiq jism o'rganilayotganda ichki kuchlar muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil qiladi.

16-§. Mexanik sistema massasi va massalar markazi

Mexanik sistema harakati, ta'sir etuvchi kuchlardan tashqari, massasiga va massaning sistema bo'ylab taqsimlanishiga ham bog'liqdir. Mexanik sistema $M_1, M_2, \ldots M_n$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo'lib, (24-shakl) ularning massalari mos ravishda $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bo'lsin.



24-shakl

Mexanik sistema nuqtalari massalarining arifmetik yig'indisiga sistema massasi deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \qquad (16.1)$$

Massaning taqsimlanishi birinchi navbatda massalar markazi yoki mexanik sistema inersiya markazining holati bilan xarakterlanadi. Mexanik sistema N ta nuqtadan iborat bo'lib, massalar markazi yoki sistema inersiya markazi C nuqtaning holati tanlab olingan koordinata sistemasiga nisbatan $\bar{r}_c$ radius-vektor bilan aniqlanadi:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k}{M} \qquad (16.2)$$

Bu yerda:

$m_k = (k = 1,2,...,N)$ mexanik sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalar massasi

$\bar{r}_k (k = 1,2,...,N)$ moddiy nuqtalar radius-vektori;

$\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k$ - O markazga nisbatan nuqtalar massalarining statik momentlarining yig'indisi.

Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \qquad (16,3)$$

(16.2) va (16.3) formulalardan ko'ramizki, sistema massalar markazining holati unga ta'sir etuvchi kuchlarga emas, sistema nuqtalari massalarining taqsimlanishiga bog'liq bo'ladi. (16.2) va (16.3) tenglamalarning surat va maxrajini g ga ko'paytirsak, og'irlik kuchi maydonida qattiq jismning og'irlik markazi aniqlanadi. Ya'ni:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum G_k \bar{r}_k}{\sum G_k} = \frac{\sum m_k g \bar{r}_k}{\sum m_k g} = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \qquad (16.4)$$

kelib chiqadi. (16.2) va (16.4) formulalardan ko'rinib turibdiki, og'irlik markazi va massalar markazi bir xil formulaga ega bo'lgani bilan mazmun jihatdan farq qiladi. Og'irlik markazi jismga ta'sir etuvchi og'irlik kuchlari teng ta'sir etuvchisining qo'yilish nuqtasidir. Sistema og'irlik kuchi maydonida harakatlanganidagina og'irlik kuchi mavjuddir. Sistema massalar markazi esa unga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq emas. Massalar markazi har qanday moddiy nuqtalar sistemasiga tegishli bo'lib, u sistemadagi massa taqsimlanishini xarakterlaydi. Sistema massalar markazi og'irlik markaziga nisbatan kengroq tushunchadir. (16.2) va (16.3) formulalami quyidagicha yozamiz:

$$M\bar{r}_c = \sum m_k \bar{r}_k \tag{16.5}$$

$$Mx_c = \sum m_k x_k; \quad My_c = \sum m_k y_k; \quad Mz_c = \sum m_k z_k. \tag{16.6}$$

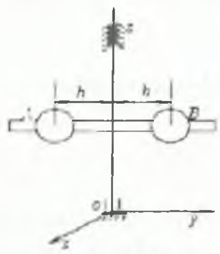
(16.5) sistemaning qutbga nisbatan, (16.6) tenglamalar esa Oxy, Oxz, Oyz tekisliklarga nisbatan statik momentlar deyiladi. Sistema massalar markazini qutb deb olsak, sistemaning unga nisbatan statik momenti:

$$M\bar{\rho}_c = \sum m_k \bar{\rho}_k = 0$$

ga teng bo'ladi. Sistemaning massalar markazidan o'tuvchi ixtiyoriy tekislikka nisbatan statik momenti ham nolga teng bo'ladi.

17-§ . Mexanik sistema va qattiq jismning inersiya momenti

Massalar markazining holati sistemada massa taqsimlanishini to'liq xarakterlamaydi. Masalan, Oz o'qidan h masofada turuvchi , bir xil massali A va B sharlar holatini bir xil masofaga o'zgartirsak, sistema massalar markazining holati o'zgarmaydi (25-shakl). Lekin sistemada massa taqsimlanishi o'zgaradi, ya'ni sistemaning o'z o'qi atrofida aylanishi tezlashadi yoki sekinlashadi. Mexanik sistemaning aylanma harakatidagi massa taqsimlanishini xarakterlaydigan miqdor uning inersiya momentidir. Inersiya momenti nuqtaga, o'qqa va tekislikka nisbatan bo'lishi mumkin.



25-shakl

Mexanik sistemaning biror o'qqa (nuqtaga, tekislikka) nisbatan inersiya momenti deb sistema har bir zarrachasi massasini shu zarrachadan mazkur o'qqacha (nuqtagacha, tekislikkacha) bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytmasining butun sistema zarrachalari bo'yicha olingan yig'indisiga aytiladi (26-shakl).

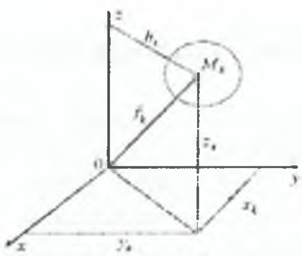
$$I_z = \sum m_k h_k^2 \qquad (17.1)$$

$m_k - M_k$ zarrachaning massasi,

$h_k - M_k$ zarrachadan Oz o'qigacha bo'lgan masofa,

I_z-*Oz* o'qiga nisbatan sistemaning inersiya momenti.

26-shakldan $h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$ ekanligini e'tiborga olsak va (17.1)ga olib borib qo'ysak hamda xuddi shunday tartibda *Ox.Oy* o'qlariga nisbatan inersiya momentlarin hisoblasak, quyidagi tenglamalar kelib chiqadi:



26-shakl

$$I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad I_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2); \quad I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \qquad (17.2)$$

(17.2) tenglama koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlarini ifodalaydi. Koordinata boshi O nuqtaga nisbatan inersiya momenti teng bo'ladi:

$$I_o = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \qquad (17.3)$$

(17.2) tengliklarni hadma-had qo'shsak va (17.3) ni e'tiborga olsak,

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \qquad (17.4)$$

(17.4) ni hosil qilamiz. Bu formula nuqtaga va o'qlarga nisbatan inersiya momentlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Sistemaning Oxu,Ouz,Oxz tekisliklariga nisbatan inersiya momentlari quyidagi (17.5) formuladan aniqlanadi:

$$I_{Oxy}=\sum m_k z_k^2;\quad I_{Oyz}=\sum m_k x_k^2;\quad I_{Oxz}=\sum m_k y_k^2. \tag{17.5}$$

(17.5) ni hadma-had qo'shib (17.3) ni e'tiborga olsak,

$$I_0=I_{Oxy}+I_{Oyz}+I_{Oxz} \tag{17.6}$$

kelib chiqadi. Qattiq jismning inersiya momentini hisoblash uchun uni juda kichik bo'lakchalardan tashkil topgan deb qarab, (17.1) - (17.5) formulalarda m_k lar o'rniga Δm_k ni qo'yamiz. Bo'lakchalar sonini orttirib borib, $N\to\infty$ $\Delta m_k\to 0$ bo'lgandagi inersiya momentining limitini hisoblash lozim. Masalan, biror $O\zeta$ o'qiga nisbatan qattiq jismning inersiya momenti quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$I_\xi=\lim_{\substack{m_k\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{k=1}^{N} m_k h_k^2=\int_v h^2 dm \tag{17.7}$$

Qattiq jismning inersiya momentlari quyidagicha ifodalanadi:

a) o'qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I_x=\int_{(v)}(y^2+z^2)dm;\; I_y=\int_{(v)}(x^2+z^2)dm;\quad I_z=\int_{(v)}(x^2+y^2)dm. \tag{17.8}$$

b) nuqtaga nisbatan inersiya momenti:

$$I_o=\int_{(v)}(x^2+y^2+z^2)dm \tag{17.9}$$

d) tekislikka nisbatan inersiya momenti:

$$I_{Oyz}=\int_{(v)}x^2dm;\quad I_{Oxz}=\int_{(v)}y^2dm\quad;\quad I_{Oxy}=\int_{(v)}z^2dm \tag{17.10}$$

Ko'pincha qattiq jismning o'qqa nisbatan inersiya momenti inersiya radiusi orqali quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$I_z=M\rho_i^2 \tag{17.11}$$

Bu yerda : ρ_i-inersiya radiusi, M- qattiq jism massasi.

Agarda qattiq jismning tajribalardan yoki hisoblardan o'qqa nisbatan inersiya momenti ma'lum bo'lsa, (17.11) formuladan inersiya radiusi aniqlanadi. Ya'ni:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \qquad (17.12)$$

Inersiya radiusi uzunlik birligida o'lchanadi.

18- §. Jismning parallel o'qlarga nisbatan inersiya momentlari orasidagi bog'lanish. Gyuygens-Shteyner teoremasi

Teorema:

Jismning biror o'qqa nisbatan inersiya momenti jism inersiya markazidan o'tuvchi va berilgan o'qqa parallel bo'lgan o'qqa nisbatan inersiya momenti bilan jism massasining mazkur o'qlar orasidagi masofa kvadrati ko'payitmasining yig'indisiga teng (27-shakl).

Ya'ni: $$I_{Oz} = I_{Cz'} + M d^2 \qquad (18.1)$$

Isbot:

Bizga ma'lum (17.2) formulaga asosan :

$$I_{Oz} = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right) \qquad (18.2)$$

27-shaklda belgilanishiga asosan:

$$x_k^1 = x_k ; y_k = y_k^1 + d \qquad (18.3)$$

(18.3) ifodani (18.2) ga olib borib qo'ysak :

$$I_{Oz} = \sum m_k \left[x_k^{1^2} + \left(y_k^1 + d\right)^2\right] = \sum m_k \left[x_k^{1^2} + y_k^{1^2} + 2y_k^1 \cdot d + d^2\right] =$$

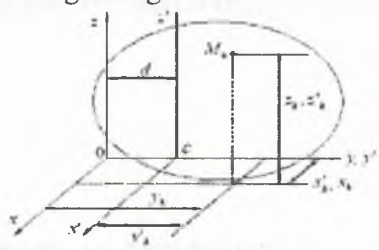
$$= \sum m_k \left(x_k^{1^2} + y_k^{1^2}\right) + +2d \sum m_k y_k^1 + \sum m_k d^2 \qquad (18.4)$$

(18.4) tenglamadagi har bir hadlar quyidagicha ifodalanadi:

$\sum m_k \left(x_k^{1^2} + y_k^{1^2}\right) = I_{cz'}$ - bu ifoda massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momenti. $\sum m_k = M$ -butun sistema massasi.

$\sum m_k y_k' = M y_c = 0$ - chunki sistemaning massalar markazini ifodalovchi C nuqta $Cx'y'z'$ koordinatalar sistemasining boshida olingani uchun $y_c = 0$. Bulami (18.4) tenglamaga olib borib qo'ysak, $I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2$ kelib chiqadi.

Demak, teorema isbotlandi. Sistemaning massalar markazi orqali o‘tuvchi o‘qqa nisbatan aniqlangan inersiya momenti, unga parallel bo‘lgan o‘qlarga nisbatan aniqlangan inersiya momentlari orasida eng kichigi hisoblanadi.

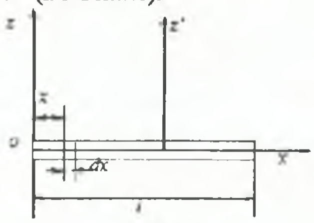


27-shakl

19-§. Ayrim bir jinsli jismlarning inersiya momentlarini hisoblash

1.Bir jinsli sterjenning inersiya momenti

Massasi M, uzunligi l bo‘lgan bir jinsli ingichka sterjenning sterjenga perpendikulyar bo‘lgan Oz o‘qiga nisbatan inersiya momenti hisoblansin (28-shakl).



28-shakl

Sterjenning $h=x$ masofada elementar dx bo‘lagini olamiz. Bo‘lak massasi $dm=\rho dx$ teng bo‘lib, bu yerda $\rho=\frac{M}{l}$ sterjenning birlik uzunligiga mos keluvchi massadir. Oz o‘qini yo‘naltiramiz va (17.7) formulaga asosan yozamiz

$$I_{Oz}=\int_0^l h^2dm=\int_0^l \rho dm=\rho\int_0^l x^2dx=\frac{\rho l^3}{3}=\frac{Ml^2}{3}; \qquad (19.1)$$

Demak,

$$I_{Oz} = \frac{Ml^2}{3} \qquad (19.2)$$

Gyuygens-Shteyner teoremasi (18.1)dan foydalanib, sterjenning massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momenti teng bo'ladi:

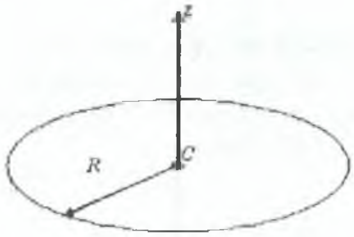
$$I_{Cz'} = I_{Oz} - M d^2 = \frac{M l^2}{3} - \frac{M l^2}{4} = \frac{M l^2}{12} \qquad (19.3)$$

Demak,

$$I_{Cz'} = \frac{M l^2}{12} \qquad (19.4)$$

2. Ingichka bir jinsli halqaning inersiya momenti

Massasi M, radiusi R bo'lgan bir jinsli halqaning halqa massalar markazidan o'tuvchi va halqa tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan Cz o'qiga nisbatan inersiya momenti hisoblansin (29-shakl).



29-shakl

$$I_{Cz} = \sum m_k h_k^{\ 2} = \sum m_k R^2 = R^2 \sum m_k = MR^2 \qquad (19.5)$$

Demak,

$$I_{Cz} = M R^2 \qquad (19.6)$$

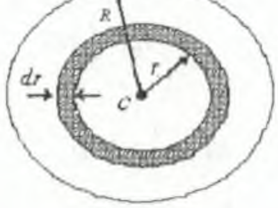
3. Bir jinsli doiraviy yupqa plastinkaning inersiya momenti

Massasi M radiusi R bo'lgan bir jinsli doiraviy yupqa plastinkaning massalar markazidan o'tuvchi va doiraviy yupqa plastinkaning tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan Cz o'qiga nisbatan inersiya momentini hisoblansin (30-shakl).

Inersiya momentini hisoblash uchun doiraviy yupqa plastinkada kengligi dr radiusi r bo'lgan elementar halqa ajratamiz.

Elementar halqa yuzi $2\pi r dr$, massasi $dm = 2\pi\rho r dr$.

Bu yerda $\rho = \dfrac{M}{\pi r^2}$ doiraviy yupqa plastinkaning birlik yuzasiga mos keluvchi massa bo'lib, (19.6) ifodadan elementar halqa uchun inersiya **momenti :**



30-shakl

$$d\,I_{Cz} = r^2\,d\,m = 2\pi\rho r^3 d\,r \qquad (19.7)$$

Doiraviy yupqa plastinka uchun inersiya momenti:

$$I_{Cz} = 2\pi\rho\int_o^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho R^4 = \frac{MR^2}{2} \qquad (19.8)$$

Demak:

$$I_{Cz} = \frac{MR^2}{2} \qquad (19.9)$$

4.Bir jinsli sharning inersiya momenti

Radiusi R massasi M bo'lgan bir jinsli sharchaning massalar markazi va massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentlari hisoblansin.

a) Sharning massalar markaziga nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz. Inersiya momentini hisoblash uchun sharda kengligi dr radiusi r bo'lgan elementar hajmda shar qatlamini ajratamiz. Shar qatlamining hajmi $4\pi r^2 dr$, massasi $dm = 4\pi\rho r^2 dr$. Bu yerda $\rho = \dfrac{M}{V}$ ifoda sharning birlik yuzasiga mos keluvchi massa bo'lib, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ shar hajmiga teng.

Demak,

$$\rho = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3} \qquad (19.10)$$

Shamning massalar markaziga nisbatan inersiya momentining integral ko'rinishdagi ifodasi quydagi ko'rinishda yoziladi:

$$I_0 = \int_V r^2 dm = 4\pi\rho\int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5$$

yoki

$$I_0 = \frac{3}{5}MR^2$$

chunki shar massasi,

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad (19.11)$$

ga teng.

b) Shamning massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz. Simmetriya tushunchasidan shaming massalar markazidan o'tuvchi koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari o'zaro tengdir.

Ya'ni:

$$I_x = I_y = I_z \qquad (19.12)$$

(17.4) formulaga asosan:

$$3I_x = 2I_0 \quad yoki \quad I_x = \frac{2}{3}I_0 \qquad (19.13)$$

(19.11)ni (19.13) ga qo'ysak, quyidagi (19.14) tenglama kelib chiqadi:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (19.14)$$

Takrorlash uchun savollar

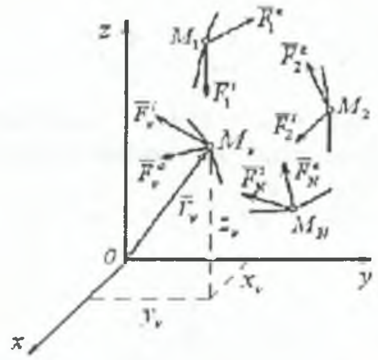
1. Mexanik sistema deb nimaga aytiladi?
2. Erkin va bog'lanishdagi mexanik sistema deb nimaga aytiladi?
3. Qanday kuchlarga ichki va tashqi kuchlar deyiladi?
4. Ichki kuchlar xossasi nimadan iborat?
5. Mexanik sistema massasi qanday aniqlanadi?
6. Mexanik sistema massasining koordinatlari formulasini yozing.
7. Nuqtaga nisbatan inersiya momenti qanday hisoblanadi?
8. O'qqa nisbatan inersiya momenti qanday hisoblanadi?
9. Tekislikka nisbatan inersiya momenti qanday hisoblanadi?

10.Gyuygens-Shteyner teoremasini ta'riflang.
11.Bir jinsli sterjenning inersiya momenti qanday?
12.Bir jinsli doiraviy yupqa plastinkaning inersiya momenti qanday?
13.Ingichka bir jinsli halqaning inersiya momenti qanday?
14.Bir jinsli sharning inersiya momenti qanday?

VII BOB. MODDIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA UCHUN DINAMIKANING UMUMIY TEOREMALARI

20-§. Mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari

$M_1, M_2, ..., M_N$ nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemaning ixtiyoriy M_ν nuqtasiga ta'sir etuvchi tashqi kuchni $\overline{F}_\nu^e$ va ichki kuchni $\overline{F}_\nu^i$ bilan belgilaymiz. Nuqtaning *Oxyz* koordinata o'qiga nisbatan radius-vektori $\overline{r}_\nu$ ga teng (31-shakl).



31-shakl

Nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m_\nu \frac{d^2 \overline{r}_\nu}{dt^2} = \overline{F}_\nu^e + \overline{F}_\nu^i \tag{20.1}$$

Bunda $\frac{d^2\overline{r}_\nu}{dt^2} = \overline{a}_\nu$ mazkur nuqtaning tezlanishi. (20.1) tenglamani *Oxyz* Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$m_v \frac{d^2x_v}{dt^2} = F^e_{vx} + F^i_{vx}\, ;\ m_v \frac{d^2y_v}{dt^2} = F^e_{vy} + F^i_{vy}\, ;\ m_v \frac{d^2z_v}{dt^2} = F^e_{vz} + F^i_{vz}. \tag{20.2}$$

Sistemaning har bir nuqtasi uchun (20.1) tenglama o'rinli bo'ladi.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d^2 r_1}{dt} = \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i, \\ m_2 \dfrac{d^2 r_2}{dt} = \overline{F}_2^e + \overline{F}_2^i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ m_k \dfrac{d^2 r_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i. \end{array}\right\} \tag{20.3}$$

(20.3) tenglamani hadma-had qo'shsak, quyidagi ifoda kelib chiqadi :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\overline{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k^i \tag{20.4}$$

(20.4) tenglamaning *Oxyz* Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{N} m_k \dfrac{d^2x_k}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{N} F_{kx}^e + \sum\limits_{k=1}^{N} F_{kx}^i \\ \sum\limits_{k=1}^{N} m_k \dfrac{d^2y_k}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{N} F_{ky}^e + \sum\limits_{k=1}^{N} F_{ky}^i \\ \sum\limits_{k=1}^{N} m_k \dfrac{d^2z_k}{dt^2} = \sum\limits_{k=1}^{N} F_{kz}^e + \sum\limits_{k=1}^{N} F_{kz}^i \end{array}\right\} \tag{20.5}$$

(20.2) va (20.5) tenglamalari mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari deyiladi.

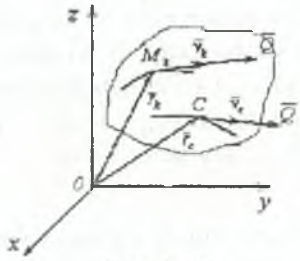
21-§. Moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat miqdori. Kuch impulsi

Mexanikada moddiy nuqta, mexanik sistemaning harakat o'lchovlari sifatida uning harakat miqdori olinadi. Moddiy nuqtaning massasini uning berilgan ondagi tezlik vektoriga ko'paytmasiga teng $\bar{q}$ - vektor *nuqtaning harakat miqdori* deyiladi. Ya'ni:

$$\bar{q} = m\bar{v} \tag{21.1}$$

$\bar{q}$ - vektor tezlik vektori bilan bir tomonga yo'naladi (21.1) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, nuqta harakat miqdorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari kelib chiqadi

$$q_x = mv_x = m\dot{x}; \quad q_y = mv_y = m\dot{y}; \quad q_z = mv_z = m\dot{z}. \tag{21.2}$$



32-shakl

Mexanik sistema nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig'indisiga teng
$\bar{Q}$ - vektor *sistemaning harakat miqdori* yoki *harakat miqdorining bosh vektori* deyiladi (32-shakl). Ya'ni:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{v}_k \tag{21.3}$$

Bu yerda $\bar{v}_k = \dfrac{d\bar{r}_k}{dt}$ ekanligini va (16.2) tenglamani e'tiborga olsak, (21.3) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\overline{Q}=\sum_{k=1}^{N}m_k\overline{v}_k=\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\overline{r}_k}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}m_k\overline{r}_k=M\frac{d\overline{r}_c}{dt}=M\overline{v}_c$$

$$\overline{Q}=M\overline{v}_c \qquad (21.4)$$

(21.4) tenglamadan ma'lumki, mexanik sistema harakat miqdori sistema massasi bilan sistema massalar markazi tezligining ko'paytmasiga teng yoki sistemaning harakat miqdori butun sistema massasi mujassamlashgan sistema massalar markazining harakat miqdoriga teng. (21.3) va (21.4) tenglamalarni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, sistema harakat miqdorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari aniqlanadi.Ya'ni:

$$Q_x=\sum_{k=1}^{N}m_k v_{kx}=Mv_{cx};\, Q_y=\sum_{k=1}^{N}m_k v_{ky}=Mv_{cy};\; Q_z=\sum_{k=1}^{N}m_k v_{kz}=Mv_{cz}. \qquad (21.5)$$

Mexanik harakatning vektorli o'lchovi sifatida harakat miqdori olinadi. Berilgan nuqtaga boshqa moddiy obyektlarning har ondagi mexanik ta'sirini xarakterlovchi o'lchov sifatida kuch olinadi. Lekin kuch ta'sirining effekti uning har ondagi miqdor va yo'nalishigagina bog'liq bo'lmay, balki uning ta'sir vaqtiga ham bog'liq bo'ladi. Miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'lgan $\overline{F}$ kuch bilan uning ta'sir vaqti t ning ko'paytmasiga teng vektor *kuchning impulsi* deyiladi. Ya'ni:

$$\overline{S}=\overline{F}\cdot t \qquad (21.6)$$

Kuch impulsi o'zaro mexanik ta'sirning vektorli o'lchovi bo'lib, uning yo'nalishi kuchning yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi va berilgan vaqt ichida moddiy nuqta (mexanik sistema) ga boshqa moddiy obyektlarning ta'sirini ifodalaydi.

SI birliklar sistemasida kuch impulsi $N{\cdot}s$ bilan o'lchanadi.

Agar ta'sir etuvchi kuch $\overline{F}=\overline{F}(t)$ vaqtning funksiyasidan iborat bo'lsa, kuchning dt vaqt ichida ta'siri *kuchning elementar impulsi* deb ataladi. Ya'ni:

$$d\overline{S}=\overline{F}dt \qquad (21.7)$$

Kuch elementar impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaymiz:

$$dS_x=F_x dt;\quad dS_y=F_y dt;\quad dS_z=F_z dt. \qquad (21.8)$$

Chekli vaqt oralig'idagi kuch impulsini aniqlash uchun (21.7) tenglamani integrallaymiz:

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F}dt \tag{21.9}$$

Kuch impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlash uchun (21.8) tenglamalarni integrallaymiz:

$$S_x = \int_0^t F_x dt; \quad S_y = \int_0^t F_y dt; S_z = \int_0^t F_z dt. \tag{21.10}$$

Kuch impulsining moduli va yo'nalishlari uning proyeksiyalari orqali quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

$$\cos(\overline{S}\wedge\overline{i}) = \frac{S_x}{S}; \quad \cos(\overline{S}\wedge\overline{j}) = \frac{S_y}{S}; \quad \cos(\overline{S}\wedge\overline{k}) = \frac{S_z}{S}. \tag{21.11}$$

Miqdor va yo'nalishi o'zgarmas bo'lgan kuch uchun kuch impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyasini (21.6) tenglamadan aniqlaymiz:

$$S_x = F_x t; \; S_y = F_y t; \; S_z = F_z t. \tag{21.12}$$

Bu yerda F_x, F_y, F_z lar $\overline{F}$ kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari.

22-§. Teng ta'sir etuvchi kuchning impulsi

Agar M nuqtaga bir necha $F_1, F_2, F_3, ..., \overline{F_n}$ kuchlar ta'sir etsa, kuchlarning teng ta'sir etuvchisi teng bo'ladi:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \cdots + \overline{F_n} \tag{22.1}$$

(22.1) tenglamaning ikki tomonini dt ga ko'paytirib, vaqt t_1 dan t_2 ga o'zgarganda integrallaymiz:

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{R}dt = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_2 + \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_3 + \cdots + \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_n \qquad (22.2)$$

(22.2) tenglamaning har bir hadi mos kuchlar impulsini tashkil etadi.

Ya'ni: $\overline{S} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 + \cdots + \overline{S}_n$ (22.3)

Demak, chekli vaqt oraligida teng ta'sir etuvchi kuchning impulsi tashkil etuvchi kuchlarning shu vaqt oraligidagi impulslarining geometrik yig'indisiga tengdir. (22.3) tenglamaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + \cdots + S_{nx}$$

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} + \cdots + S_{ny}$$

$$S_z = S_{1z} + S_{2z} + S_{3z} + \cdots + S_{nz} \qquad (22.4)$$

(22.4) tenglamadan ma'lumki, teng ta'sir etuvchi kuchning o'qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi kuchlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga tengdir.

23-§. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

Moddiy nuqtaning $\overline{F}$ kuch ta'siridagi harakat differensial tenglamasi vektor usulida berilgan bo'lsin:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \qquad (23.1)$$

(23.1) tenglamaning ikkala tomonini dt ga ko'paytirsak:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt \qquad (23.2)$$

(21.7) tenglamani e'tiborga olsak, (23.2) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$d(m\vec{v}) = d\vec{S} \qquad (23.3)$$

(23.2) yoki (23.3) tenglamalar moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishidagi ifodasidir. Ya'ni: *nuqta harakat miqdorining* *differensiali nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning elementar impulsiga tengdir.*

(23.3) ni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak,

$$d(mv_x) = F_x dt, \quad d(mv_y) = F_y dt, \quad d(mv_z) = F_z dt.$$

(23.4) (21.2) va (21.8) ifodalami e'tiborga olsak, (23.4) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$dq_x = dS_x, \quad dq_y = dS_y, \quad dq_z = dS_z. \tag{23.5}$$

Demak, nuqta harakat miqdorining biror koordinata o'qidagi proyeksiyasining differensiali nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning elementar impulsining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.

Chekli vaqt ichida nuqta harakat miqdorining o'zgarishini aniqlash uchun (23.2) tenglamani integrallaymiz (33-shakl):

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_0^t \bar{F}dt \tag{23.6}$$

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S} \tag{23.7}$$

(23.7) tenglamaning koordinata o'qlaridagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= S_x; \\ mv_y - mv_{0y} &= S_y; \\ mv_z - mv_{0z} &= S_z. \end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

Amaliyotda asosan masalalar (23.8) formulalardan foydalanilgan holda yechiladi. Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema $\bar{F}$ kuch faqat vaqtning funksiyasidan iborat yoki miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'lgan hollarda o'rinli bo'ladi. Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremadan foydalanib, nuqtaning harakat differensial tenglamalarining birinchi integrallarini aniqlash mumkin

. Agar $\bar{F} = 0$ bo'lsa, ya'ni nuqtaga hech qanday kuchlar ta'sir etmasa (yoki ta'sir etuvchi kuchlar nolga e kvivalent bo'lsa), u holda (23.2) ga ko'ra

$$d(m\bar{v}) = 0$$

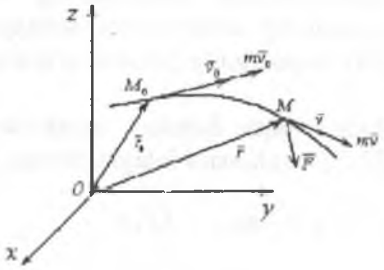
. binobarin,

$$m\bar{v} = C = const \qquad (23.9)$$

yoki (23.6) ga ko'ra

$$m\bar{v} = m\bar{v}_0 \qquad (23.10)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.



33-shakl

(23.9) yoki (23.10) tengliklar *harakat miqdorining saqlanish qonunini* bildiradi va nuqta harakat differensial tenglamasining birinchi vektorli integralini ifodalaydi. (23.9) da massa o'zgarmas bo'lgani uchun ko'rilayotgan holda $\bar{v} = const$ bo'ladi, ya'ni nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi. Bu natija Nyutonning birinchi qonuni (inersiya qonuni) ni ifodalaydi. Agar kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, ya'ni, $F_x = 0$, u holda (23.8) ga asosan,

$$mv_x - mv_{ox} = 0$$

ga teng.
Binobarin,

$$v_x = v_{ox} = C_1 \quad yoki \quad \dot{x} = C_1 \qquad (23.11)$$

(23.11) dan ko'ramizki, ta'sir etuvchi kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, nuqta tezligining mazkur o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmasdan qoladi.

24-§. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan sistema nuqtalariga ichki va tashqi kuchlar ta'sir etsin. U holda (20.1) tenglamadan:

$$m_\nu \frac{d^2 \bar{r}_\nu}{dt^2} = \bar{F}_\nu^e + \bar{F}_\nu^i \qquad (\nu = 1 \cdots N)$$

ekanligini nazarda tutib, sistemaning harakat differensial tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu) = \vec{F}_\nu^e + \vec{F}_\nu^i \quad (\nu = 1 \cdots N) \tag{24.1}$$

Sistemaning har bir nuqtasi uchun (24.1) tenglamani qo'llab hadma had qo'shsak, (24.2) hosil bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}\sum m_\nu \bar{v}_\nu = \sum \vec{F}_\nu^e + \sum \vec{F}_\nu^i \tag{24.2}$$

Bunda (21.3) ga ko'ra $\sum m_\nu \bar{v}_\nu = \bar{Q}$ ifoda sistemaning harakat miqdoriga teng. Ichki kuchlarning xossasiga ko'ra $\sum \bar{F}_\nu^i = 0$ bo'ladi. $\sum \bar{F}_\nu^e = \bar{R}^e$ tashqi kuchlarning bosh vektoriga tengligini hisobga olsak, (24.2) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \vec{R}^e \tag{24.3}$$

(24.3) *tenglama sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishidir.*

Teorema: *Sistemaning harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli u hosila sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektoriga teng.*

(24.3) tenglamada ichki kuchlar qatnashmaydi. Haqiqatan ham ichki kuchlar sistema ayrim nuqtalarining harakat miqdori o'zgarishiga ta'sir etsa-da, sistema harakat miqdorining o'zgarishiga bevosita emas,
bavosita ta'sir etadi. Agar sistemaga tashqi kuchlar ta'sir etmasa

yoki tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa $\left(\overline{R}^{e}=0\right)$, (24.3) tenglamadan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt}=0$$

Ya'ni:
$$\overline{Q}=const \qquad (24.4)$$

(24.4) tenglik *mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni* deb ataladi. Bu tengliklardan ko'ramizki, *agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning harakat miqdori vektori miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'ladi.*

(24.3) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning skalyar ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dQ_x}{dt}=R_x^e,\ \frac{dQ_y}{dt}=R_y^e,\ \frac{dQ_z}{dt}=R_z^e. \qquad (24.5)$$

Demak, *sistema harakat miqdorining biror o'qdagi proyeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.*

(24.3) tenglamaning chap va o'ng tomonini dt ga ko'paytirib, integrallasak:

$$\overline{Q}-\overline{Q}_0=\int_0^1\overline{R}^e dt \qquad (24.6)$$

(24.6) tenglama *sistema harakat miqdorining chekli vaqt ichida o'zgarishi haqidagi teoremani* ifodalaydi.

Teorema: *Sistema harakat miqdorining chekli vaqt ichida o'zgarishi sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining shu vaqt ichidagi impulsiga teng.*

(24.6) ni qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$Q_x-Q_{ox}=\int_0^t R_x^e dt,\quad Q_y-Q_{oy}=\int_0^t R_y^e dt,\quad Q_z-Q_{oz}=\int_0^t R_z^e dt. \qquad (24.7)$$

Demak, *chekli vaqt ichida biror qo'zg'almas koordinata o'qlari bo'yicha sistema harakat miqdorining o'zgarishi, shu vaqt ichida sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori* *impulsining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng bo'ladi.*

Agar tashqi kuchlar bosh vektorining biror Ox o'qidagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, ya'ni $R_x^e = 0$ bo'lsa, (24.7) tenglamadan :

$$Q_x - Q_{ox} = 0$$

kelib chiqadi.

Binobarin, $$Q_x = Q_{ox} = const \qquad (24.8)$$

bo'ladi.

(24.8) tenglik berilgan o'q bo'yicha *sistema harakat miqdorining saqlanish qonunini* ifodalaydi.

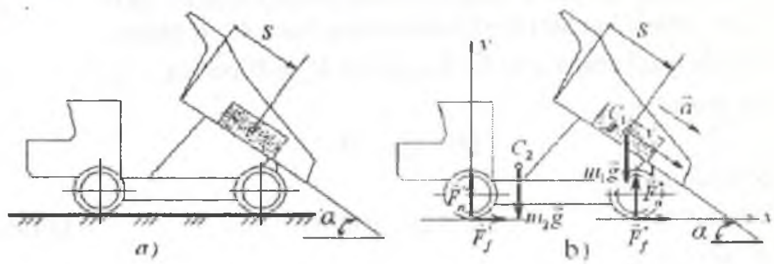
Demak, *sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdorining mazkur o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmas bo'ladi.*

***6- MASALA**

Agar kuzovdan yukning sirpanib tushish qonuni $S = \frac{at^2}{2}$ va yukning massasi $m_1 = 10T$, yuksiz samosval massasi $m_2 = 21T$, $\alpha = 50^0$ parametr $a = 3.7\,m/s$ berilgan bo'lsa, samosvalning kuzovidagi yukni tushurish paytida qo'zg'almas g'ildirak va yer o'rtasida hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi $\overline{F}_f$ hamda samosvalning yerga tushadigan bosimlarining yig'indisi F_n aniqlansin (34-shakl *a*)).

Yechish:

Mexanik sistema, samosval va yukka ta'sir etayotgan tashqi kuchlar quyidagilardan iborat (34-shakl,*b*)): yukning og'irlik kuchi m_1g, samosvalning og'irlik kuchi m_2g, yerning normal reaksiya kuchlari F_n' va F_n'' orqa, oldi g'ildiraklarga qo'yilgan F_f', F_f'' kuchlar. Bular yer ustida g'ildirakning dumalashidan hosil bo'ladi.



34-shakl

Kuzovidagi yukni tushirish vaqtida g'ildiraklarda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchlari hisobiga samosval harakatlanmaydi. Faqatgina yuk kuzov ustida harakatlanadi. Shuning uchun sistemaning harakat miqdori yukning harakat miqdoriga teng bo'ladi. Ya'ni:

$$\overline{Q} = \overline{Q}_1 = m_1 \overline{v} \qquad (*6.1)$$

Yuk kuzov ko'tarilganda tinch holatdan ilgarilanma harakat bilansirpanib tusha boshlaydi. Demak $S_0 = 0; v_0 = 0$. Yukning berilgan harakat qonunidan ma'lumki, u tekis tezlanuvchan harakat qiladi. Parametr $a = 3{,}7\, m/s$ yukning tushish tezlanishi bo'ladi. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning (24.5) tenglamasini qo'llab yechamiz:

$$\frac{dQ_y}{dt} = R_y^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e.$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_x) = F_f' + F_f'' \qquad (*6.2)$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_y) = F_n' + F_n'' - m_1 g - m_2 g.$$

$$m_1 a_x = F_f; \quad m_1 a_y = -(m_1 + m_2) g + F_n.$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 v_y) = F_n' + F_n'' - m_1 g - m_2 g .$$

$$m_1 a_x = F_f ; \quad m_1 a_y = -(m_1 + m_2)g + F_n . \qquad (*6.3)$$

Bu yerda a_x, a_y lar tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari bo'lib, $a_x = a\cos\alpha$, $a_y = -a\sin\alpha$ ga teng.

F_f - ishqalanish kuchlarining yig'indisi bo'lib, $F_f = F_f' + F_f''$

F_n - samosvaldan yerga tushadigan bosimlar yig'indisi bo'lib,

$$F_n = F_n' + F_n''$$

Endi talab etilgan noma'lumlar F_f ; F_n larni aniqlaymiz.

$F_f = m_1 a\cos\alpha = 10\cdot 3{,}7\cdot\cos 50^0 = 23{,}783\,kN$

$F_n = R_n = (m_1 + m_2)g - m_1\sin\alpha = (10+21)9{,}81 - 10\cdot 3{,}7\cdot\sin 50^0 = 275{,}766\,kN$

Shuni aytib o'tish lozimki, yuk kuzov ustida sirpanib tushayotganda samosvalning yerga tushadigan bosimlarining yig'indisi, samosvalning yuk bilan birgalikdagi og'irligidan 9,32% kam. Javob:

$$F_f = 23{,}783\,kN, \; F_n = 275{,}766\,kN.$$

Takrorlash uchun savollar

1.Harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi qanday ko'rinishda yoziladi?

2. Kuch impulsini tushuntiring.
3. Teng ta'sir etuvchi kuchning impulsi qanday aniqlanadi?
4. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdorini tushuntiring.
5. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday?

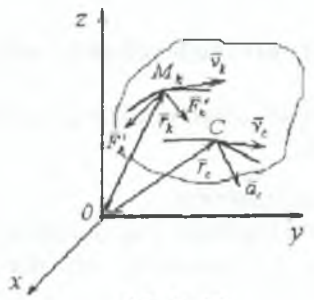
6. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli vaqt oralig'ida o'zgarishi qanday ifodalanadi?
7. Moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni qanday ta'riflanadi?
8. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday?
9. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli vaqt oralig'ida o'zgarishi qanday ifodalanadi?
10. Mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni nimani ifodalaydi?

25-§. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema

Ichki va tashqi kuchlar ta'sirida harakatlanuvchi $M_1, M_2, ..., M_N$ moddiy nuqtalar sistemasi harakatini ko'ramiz. Sistema massalar markazini (16.2) tenglamaga asosan aniqlaymiz (35-shakl).

Ya'ni:
$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k}{M} \qquad (£)$$

(£) tenglamani umumiy maxrajga keltirsak (25.1) kelib chiqadi:
$$M\bar{r}_c = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k \qquad (25.1)$$



35-shakl

Moddiy nuqtalar sistemasi harakat tenglamasi (20.4) tenglama orqali ifodalanadi. Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^i \qquad (££)$$

(££) tenglamaning chap va o'ng tomonlarida o'zgartirishlar kiritamiz:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k = \frac{d^2}{dt^2}(M\bar{r}_c) = M \frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = M\bar{a}_c \qquad (25.2)$$

$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^e = \bar{R}^e$ - tashqi kuchlar bosh vektori

$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k^i = \bar{R}^i = 0$ - ichki kuchlar xossasiga asosan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$M\bar{a}_c = \bar{R}^e \qquad (25.3)$$

(25.3) tenglama mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremaning vektor ifodasi.

Teorema:

Sistemaning massalar markazi, massasi butun sistema massaga teng va sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori ta'siridagi moddiy nuqta kabi harakatlanadi.

Agar tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, ya'ni $\bar{R}^e = 0$, (25.3) ga ko'ra:

$$M\frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0 \qquad (25.4)$$

Bundan $\bar{v}_C = const$ bo'ladi.

Bu tenglik sistema *massalar markazi harakatining saqlanish qonunini* ifodalaydi. Ya'ni:

Tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning massalar markazi tinch holatda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

Agar mexanik sistemaning massalar markazi boshlang'ich paytda qo'zg'almas bo'lib, $\bar{v}_C = 0$ bo'lsa, sistemaning massalar markazi keyinchalik ham qo'zg'almasdan qoladi, ya'ni $\bar{r}_C = const$ bo'ladi. (25.3) tenglamani qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$M\ddot{x}_C = R_x^e,\quad M\ddot{y}_C = R_y^e,\quad M\ddot{z}_C = R_z^e. \tag{25.5}$$

(25.5) tenglamalar *sistemasi massalar markazining qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga nisbatan harakat differensial tenglamalarini* ifodalaydi.

Agar tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lmay, uning biror Ox o'qidagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, u holda: $R_x^e = 0$

(25.5) tenglamadan, $M\dfrac{d\dot{x}_C}{dt} = 0$ kelib chiqadi.

Demak: $\dot{x}_C = v_{cx} = const$ bo'ladi.

Binobarin, *sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar bosh vektorining biror qo'zg'almas o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, sistema massalar markazi tezligining mazkur o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmas bo'ladi.*

Agar boshlang'ich $t = 0$ paytda sistema massalar markazi tezligining Ox o'qdagi proyeksiyasi $(v_{Cx})_0 = 0$ bo'lsa, keyinchalik ham $v_{Cx} = 0$, binobarin, $x_C = const$ bo'ladi, ya'ni sistemaning massalar markazi bu holda Ox o'q bo'yicha o'zgarmaydi. Bu natija *sistema massalar markazi koordinatalarining saqlanish qonunini* ifodalaydi.

26-§. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning differensial tenglamalari

(25.3) tenglamaga asosan:

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e \tag{26.1}$$

Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism hamma nuqtalarining tezlik, tezlanishlari miqdor va yo'nalish jihatdan teng bo'lib, $\bar{a}_c = \bar{a}$ ekanligini hisobga olsak, (26.1) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi.

Ya'ni: $$M\bar{a} = \sum \bar{F}_k^e \tag{26.2}$$

(26.2) tenglama ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning differensial tenglamasining vektor ko'rinishi. Koordinata o'qlariga proyeksiyalab differensial tenglamaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini hosil qilamiz:

$$M\ddot{x} = \sum F_{kx}^{e} \quad M\ddot{y} = \sum F_{ky}^{e} \quad M\ddot{z} = \sum F_{kz}^{e} \tag{26.3}$$

(26.2) va (26.3) differensial tenglamalar yordamida bitta moddiy nuqtaning harakatini tekshirishda foydalanish mumkin.

27-§ Moddiy nuqta harakat miqdorining momenti va sistemaning kinetik momenti

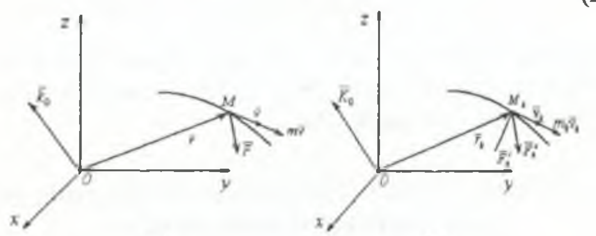
Massasi m, harakat tezligi $\bar{v}$ ga teng M nuqtaning biror O markazga nisbatan radius-vektori $\bar{r}$ ga teng bo'lsin. O markazga nisbatan nuqta harakat miqdorining momenti deb,

$$\bar{k}_o = \bar{M}_o(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v} \tag{27.1}$$

ga teng vektor kattalikka aytiladi (36-shakl a)).

M nuqta harakat miqdorining momenti $\bar{k}_0$ moment markazi O nuqtaga qo'yiladi. Koordinatalar boshini O markazda olib, qo'zg'almas x, y, z o'qlarini o'tkazsak, (27.1) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\bar{k}_o = \bar{M}_o(m\bar{v}) = m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \tag{27.2}$$



a) *b)*

36-shakl

Bu tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, o'qlarga nisbatan harakat miqdorining momentlarini aniqlaymiz:

$$k_x = M_x(m\bar{v}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}),$$
$$k_y = M_y(m\bar{v}) = m(z\dot{x} - x\dot{z}),$$
$$k_z = M_z(m\bar{v}) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (27.3)$$

SI birliklar sistemasida harakat miqdorining momenti $kg{\cdot}m^2/s$ yoki N·m·s bilan o'lchanadi. Mexanik sistema barcha nuqtalaridan O markazga nisbatan harakat miqdori momentlarining geometrik yig'indisiga teng vektor sistemaning O markazga nisbatan kinetik momenti yoki sistema harakat miqdorining bosh momenti deyiladi (36-shakl *b)*).

$$\bar{K}_o = \sum \bar{M}_O(m_N\bar{v}_N) = \sum \bar{r}_N \times m_N\bar{v}_N \qquad (27.4)$$

Sistemaning kinetik momenti $\bar{K}_0$ moment markazi O nuqtaga qo'yiladi.

Agar mexanik sistema nuqtalari biror hajm (sirt yoki chiziq) bo'yicha uzluksiz taqsimlangan bo'lsa, u holda (27.4) da yig'indi o'rniga massaning qanday taqsimlanishiga mos integral olinadi. (27.4) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalab, mos o'qlarga nisbatan sistemaning kinetik momentini aniqlaymiz:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \Sigma M_x(m_N\bar{v}_N) = \Sigma m_N(y_N\dot{z}_N - z_N\dot{y}_N), \\ K_y &= \Sigma M_y(m_N\bar{v}_N) = \Sigma m_N(z_N\dot{x}_N - x_N\dot{z}_N), \\ K_z &= \Sigma M_z(m_N\ \bar{v}_N) = \Sigma\, m_N(x_N\dot{y}_N - y_N\dot{x}_N). \end{aligned}\right\} \qquad (27.5)$$

Sistemaning harakat miqdori uning massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilama harakatini, kinetik momenti esa uning aylanma harakatini xarakterlaydi.

28-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti

Oz o'qi atrofida $\bar{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanuvchi jismning Oz o'qiga nisbatan kinetik momenti K_z ni (27.5) formulaga asosan yozamiz (37-shakl).

$$K_z = \Sigma M_z(m_N\ \bar{v}_N) \qquad (28.1)$$

Jism Oz o'qi atrofida aylanganda M_N nuqta tezligi $v_N = h_N\omega$ ga teng bo'lib, harakat miqdori vektori $m_N\overline{v}_N$ yo'nalishi h_N ga perpendikulyar bo'lib, Oz o'qiga perpendikulyar tekislikda yotadi. Harakat miqdor momenti M_N nuqta uchun quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$M_z(m_N\overline{v}_N) = h_N m_N v_N = m_N h_N^2 \omega. \qquad (28.2)$$

(28.2) tenglamani jismning hamma nuqtalari uchun qo'llasak :

$$K_z = \sum M_z(m_N \overline{v}_N) = \sum h_N m_N v_N = \sum m_N h_N^2 \omega = \omega \sum m_N h_N^2 = \omega I_z \qquad (28.3)$$

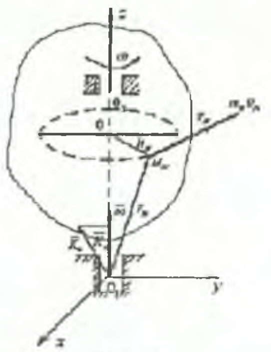
Demak:

$$K_z = I_z\omega \qquad (28.4)$$

Xulosa qilib aytganda, *qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti jismning mazkur o'qqa nisbatan inersiya momenti bilan burchak tezligining ko'paytmasiga teng.*

Agar sistema qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi bir necha jismdan tashkil topgan bo'lsa, uning kinetik momenti quyidagi formula yordamida hisoblanadi. Ya'ni:

$$K_z = I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + ... + I_{n2}\omega_n \qquad (28.5)$$



37-shakl

Bu yerda $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ lar har bir jismning burchak tezligini; I_{12}, I_{22}, ..., I_{n2} lar esa jismlarning Oz o'qqa nisbatan inersiya momentlarini ifodalaydi.

29-§. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqida teorema

M nuqtaning massasi, m ga teng bo'lib, $\overline{F}$ kuch ta'sirida $\overline{v}$ tezlik bilan harakatlansin. Nuqta uchun dinamikaning asosiy qonunini yozamiz:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{F} \qquad (29.1)$$

Tenglamaning har ikkala tomonini nuqtaning radius-vektori $\overline{r}$ ga vektorli ko'paytirsak:

$$\overline{r}\times m\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{r}\times\overline{F} \qquad (29.2)$$

Chap tomonidagi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\overline{r}\times m\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\overline{r}\times m\overline{v}\right)=\frac{d\overline{r}}{dt}\times m\overline{v}+\overline{r}\times m\frac{d\overline{v}}{dt} \qquad (29.3)$$

Bu yerda $\frac{d\overline{r}}{dt}=\overline{v}$ ekanligini e'tiborga olsak, $\frac{d\overline{r}}{dt}\times m\overline{v}$ ifoda nolga teng. Ya'ni $\overline{v}\times m\overline{v}=0$, chunki ular o'zaro $\overline{v}II\ m\overline{v}$ parallel.

$\overline{r}\times m\frac{d\overline{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\overline{r}\times m\overline{v})$ tenglikni (29.2)ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{r}\times m\overline{v}\right)=\overline{r}\times F \qquad (29.4)$$

(27.1) ga ko'ra $\overline{k}_0=\overline{r}\times m\overline{v}$ vektori nuqtaning O markaziga nisbatan harakat miqdori momentini ifodalaydi. Statika bo'limidan bizga ma'lum $\overline{M}_0(\overline{F})=\overline{r}\times\overline{F}$ ifoda M nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}$ kuchning O markazga nisbatan momentini ifodalaydi. Demak:

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times m\bar{v}\right)=\overline{M}_0\left(\overline{F}\right) \tag{29.5}$$

yoki

$$\frac{d\,\bar{k}_0}{dt}=\overline{M}_0\left(\overline{F}\right) \tag{29.6}$$

tenglama o‘rinli bo‘ladi.

(29.5) yoki (29.6) tenglamalar nuqta *harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teoremani* ifodalaydi: *moddiy nuqta harakat miqdorining biror qo‘zg‘almas markazga nisbatan momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila nuqtaga ta’sir etuvchi kuchning shu markazga nisbatan momentiga teng.*

(29.6) tenglamani Dekart koordinata o‘qlariga proyeksiyalab, nuqta harakat miqdorining koordinata o‘qlariga nisbatan momentlari o‘zgarishi haqidagi teoremani hosil qilamiz:

$$\frac{dk_x}{dt}=M_x\left(\overline{F}\right);\quad \frac{dk_y}{dt}=M_y\left(\overline{F}\right);\frac{dk_z}{dt}=M_z\left(\overline{F}\right). \tag{29.7}$$

Ya’ni moddiy nuqta harakat miqdorining biror qo‘zg‘almas o‘qqa nisbatan momentidan vaqt bo’yicha olingan hosila nuqtaga ta’sir etuvchi kuchning shu o‘qqa nisbatan momentiga teng.

30-§. Sistema kinetik momentining o‘zgarishi haqidagi teorema

L ta nuqtadan iborat mexanik sistema nuqtalariga qo‘yilgan barcha bog‘lanishlarni bog‘lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirib, sistema nuqtalariga ta’sir etuvchi barcha kuchlarni (jumladan, bog‘lanish reaksiya kuchlarini) $\overline{F}_N^e$ tashqi va $\overline{F}_N^i$ ichki kuchlarga ajratamiz. Natijada sistema nuqtalarini erkin deb qarab, har bir nuqta uchun harakat miqdor momentining o‘zgarishi haqida teoremani qo‘llaymiz:

$$\frac{d}{dt}\overline{M}_O(m_N\bar{v}_N)=\overline{M}_O(\overline{F}_N^e)+\overline{M}_O(\overline{F}_N^i)\qquad (N=1,2,\ldots,L) \tag{30.1}$$

Bu tenglamalarni qo‘shsak,

$$\frac{d}{dt}\sum \overline{M}_O(m_N\overline{v}_N) = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_N^e) + \sum \overline{M}_O(\overline{F}_N^i) \qquad (30.2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (30.2) tenglamaning chap tomonidagi ifoda

$$\overline{K}_O = \sum \overline{M}_O(m_N\overline{v}_N)$$

sistemaning kinetik momentini ifodalaydi. (30.2) tenglamaning o'ng tomonidagi ifodani

$$\overline{M}_O^e = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_N^e)$$

tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi.

Ichki kuchlarning xossasiga asosan ularning O nuqtaga nisbatan momentlarning geometrik yig'indisi nolga teng. Ya'ni:

$$\sum \overline{M}_O(\overline{F}_N^i) = 0$$

Shunday qilib, (30.2) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O^e \qquad (30.3)$$

(30.3) tenglama *sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani* ifodalaydi: sistemaning biror qo'zg'almas nuqtaga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.

(30.3) tenglamaning ikkala tomonini qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e \qquad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e \qquad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e \,. \qquad (30.4)$$

Bu yerda K_x, K_y, K_z lar mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarga nisbatan sistemaning kinetik momentlari. M_x^e, M_y^e, M_z^e lar esa mazkur o'qlarga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momentlarini ifodalaydi.

(30.4) tenglamalar qo'zg'almas koordinata o'qlariga nisbatan sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: *sistemaning biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila* *sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan bosh momentiga teng.*

Qo'zg'almas *Oz* o'qi atrofida aylanma harakat differensial tenglamasini keltirib chiqarish uchun (30.4) tenglamaga (28.4) ifodani qo'ysak:

$$\frac{d(I_z\omega)}{dt} = M_z^e \tag{30.5}$$

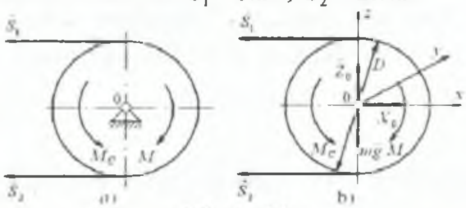
$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z^e \; ; \; I_z\varepsilon = M_z^e \tag{30.6}$$

(30.6) tenglama qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning harakat differensial tenglamasini ifodalaydi.

Xulosa qilib aytganda, *sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan jismlarning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma, sferik, giroskoplarning harakatini o'rganishda samarali foyda*laniladi.

***7- MASALA**

Massasi $m = 0.7(T)$; diametri D=0,5 (m) bo'lgan tasmali konveyer barabani tinch holatdan harakatga keltirildi. Barabanning harakat boshlanganidan $t = 3s$ dan keyingi burchak tezligi ω aniqlansin (38 - shakl,*a)*). Barabanning aylanish o'qiga nisbatan inersiya radiusi $i = 0.23(m)$; aylantiruvchi moment $M = 0.75kN \cdot m$; qarshilik kuchi momenti $M_c = 25N \cdot m$; tasmaning tortilish kuchlari: $S_1 = 5kN$, $S_2 = 2.7kN$



38-shakl

Yechish:

Baraban qo'zg'almas *Oy* o'qi atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun harakat differensial tenglamasi (30.6) tenglamadan foydalangan holda quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$I_y\varepsilon = \sum M_y\left(\overline{F}_k^e\right) \qquad (*7.1)$$

Barabanga quyidagi tashqi kuchlar va momentlar ta'sir etadi (38-shakl,*b)*): og'irlik kuchi $m\overline{g}$, aylantiruvchi moment *M*, qarshilik kuchlar momenti M_c, tasmalarning tortilish kuchlari $\overline{S}_1$; $\overline{S}_2$, podshipnikdagi reaksiya kuchining tashkil etuvchilari $\overline{X}_0$; $\overline{Z}_0$. Aylanish o'qi *Oy* ga nisbatan barabanning inersiya momenti teng:

$$I_y = mi^2 \qquad (*\ 7.2)$$

Shu o'qqa nisbatan tashqi kuchlar momentlarining yig'indisi teng:

$$\sum M_y\left(\overline{F}_k^e\right) = M - M_c - S_1\frac{D}{2} + S_2\frac{D}{2} = M - M_c - 0{,}5(S_1 - S_2)D \qquad (*7.3)$$

(*7.1) tenglamani (* 7.2) va (* 7.3) tenglamalarni hisobga olgan holda quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$\varepsilon = \frac{\sum M_y\left(\overline{F}_k^e\right)}{mi^2} = \frac{M - M_c - 0{,}5(S_1 - S_2)D}{mi^2} = const \qquad (*7.4)$$

Barabanning burchak tezlanishi ε o'zgarmas bo'lgani uchun u tekis tezlanuvchan harakat qiladi va burchak tezligi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (*7.5)$$

Baraban tinch holatdan harakatga keltirilgani uchun boshlang'ich burchak tezligi $\omega_0 = 0$ bo'ladi. (*10.5) tenglamadan:

$$\omega = \varepsilon t \qquad (*7.6)$$

kelib chiqadi.

(*7.6) tenglamaga (*7.4) tenglamadagi ε ning qiymatini olib kelib qo'ysak:

Javob:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{M - M_c - 0{,}5(S_1 - S_2)D}{mi^2}t = \frac{0{,}75 - 0{,}025 - 0{,}5(5 - 2{,}7)0{,}5}{0{,}7\cdot 0{,}23^2}\cdot 3 = 12{,}15s^{-1}$$

$$\omega = 12{,}15\ s^{-1}$$

31-§. Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni

Sistema kinetik momentining o‘zgarishi haqidagi teoremadan quyidagi natijalarni olamiz.

1.Agar sistema nuqtalariga ta‘sir etuvchi tashqi kuchlarning biror markazga nisbatan bosh moment vektori nolga teng bo‘lsa, sistemaning shu nuqtaga nisbatan kinetik moment vektori miqdor va yo‘nalish jihatdan o‘zgarmas bo‘ladi.

Ya’ni agar $\overline{M}_0^e = 0$ bo‘lsa, (30.3) tenglamadan quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = 0$$

Bundan: $$\overline{K}_0 = const \qquad (31.1)$$

2. *Agar sistema nuqtalariga ta‘sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o‘qqa (masalan, Oz o‘qqa) nisbatan bosh momenti nolga teng bo‘lsa, sistemaning shu o‘qqa nisbatan kinetik momenti harakat davomida o‘zgarmasdan qoladi.*

Agar $\overline{M}_z^e = 0$ bo‘lsa, (30.4) ga asosan $\frac{dK_z}{dt} = 0$ bo‘ladi, bundan:

$$\overline{K}_z = const \qquad (31.2)$$

kelib chiqadi.

(31.1 va (31.2) tenglamalar *sistema kinetik momentining saqlanish qonunini* ifodalaydi.

Takrorlash uchun savollar

1. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema.
2. Mexanik sistema massalar markazining saqlanish qonuni qanday?
3. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning differensial tenglamalari qanday ko‘rinishda yoziladi?
4. Moddiy nuqta harakat miqdorining momenti va sistemaning kinetic momenti qanday aniqlanadi?

5. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti qanday formula bilan hisoblanadi?
6. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ta'riflang.
7.Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ta'riflang.
8. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teorema va sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremaning koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday ifodalanadi?
9. Sistema kinetik momentining saqlanish qonunini ta'riflang.
10.Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning harakat differensial tenglamasi qanday?

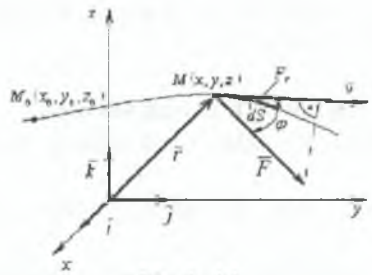
32-§. Kuchning ishi va quvvati

Kuchning biror ko'chishda ta'sirini ifodalovchi asosiy xarakteristikasi, uning shu ko'chishda bajargan ishidir. Kuchning elementar ishini, chekli oraliqdagi ishini va quvvatni ko'rib chiqamiz.

1.Kuchning elementar ishi

$\overline{F}$ kuchning cheksiz kichik elementar ds ko'chishda bajargan dA elementar ishi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$dA = \overline{F}_\tau \, dS \tag{32.1}$$



39-shakl

Bu yerda: F_τ nuqta tezligining yo'nalishiga yoki tezlik bo'yicha yo'nalgan elementar ko'chishga $\overline{F}$ kuchning proyeksiyasidir. Elementar ish skalyar miqdor bo'lib, uning ishorasi F_τ

proyeksiyasining qiymati orqali belgilanadi. Agar $F_\tau > 0$ bo'lsa, elementar ish $dA > 0$ va aksincha $F_\tau < 0$ bo'lsa, elementar ish $dA < 0$ bo'ladi. 39 - shakldan $F_\tau = F \cdot \cos\varphi$ bo'lib, $< \varphi -$kuch bilan tezlik orasidagi burchak. Bu ifodani (32.1) ga olib borib qo'ysak,

$$dA = F \cos\varphi \, dS \tag{32.2}$$

kelib chiqadi. (32.2) tenglamada F va ds qiymatlari musbat bo'lganligi uchun, elementar ish dA qiymati $\cos\varphi$ ning qiymatiga bog'liqdir. Agar φ burchak o'tkir bo'lsa, $dA > 0$ va aksincha φ burchak o'tmas bo'lsa, $dA < 0$ bo'ladi.

Demak, *kuchning elementar ishi- kuchning elementar ko'chishga proeksiyasining elementar ko'chishga ko'payitmasiga teng.*

φ burchakning ayrim qiymatlari uchun (32.2) tenglamadan foydalanib elementar ishni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} &\varphi = 0, \quad dA = F\,ds; \\ &\varphi = 90^0, \quad dA = 0; \\ &\varphi = 180^0, \quad dA = -F\,ds. \end{aligned} \tag{32.3}$$

(32.3) ifodadan ko'rinib turibdiki, kuch elementar ko'chishga perpendikulyar bo'lsa, elementar ish nolga teng bo'ladi. Kuchning normal tashkil etuvchisi $\overline{F}_n$ ning bajargan elementar ishi doim nolga tengdir. Elementar ishni hisoblashning boshqa formulalarini keltiramiz. Nuqta kinematikasidan bizga ma'lumki:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}; \quad v = |\overline{v}| = \frac{ds}{dt}. \tag{32.4}$$

Bundan:

$$ds = |d\overline{r}| = v\,dt \tag{32.5}$$

(32.5) ifodani (32.2) ga olib borib qo'ysak,

$$dA = F|d\,\overline{r}|\cos\varphi = \overline{F} \cdot d\,\overline{r} \tag{32.6}$$

(32.6) tenglamadan *kuchning elementar ishi - kuchning, kuch qo'yilgan nuqta radius-vektori differensialiga skalyar* *ko'paytmasiga tengligi,* (32.4) tenglamadan $d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt$ ni (32.6) ga qo'ysak,

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F}\bar{v} \cdot dt = \bar{F}\,dt \cdot \bar{v} \quad (32.7)$$

(32.7) tenglamadan *kuchning elementar ish i- elementar kuch impulsining nuqtaning tezligiga skalyar ko'paytmasiga tengligi,* agar $\bar{F}$ kuchni va $\bar{r}$-radius-vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali ifodalasak, (32.8) tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k},$$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (32.8)$$

(32.8) dan : $$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \quad (32.9)$$

(32.8) va (32.9) ni (32.6) ga qo'ysak:

$$dA = F_x\,dx + F_y dy + F_z\,dz \quad (32.10)$$

kelib chiqadi. (32.10) tenglama elementar ishning analitik ifodasidir.

2. Chekli oraliqda kuchning bajargan ishi

Nuqtaning M_0 holatidan M holatiga o'tishida F kuchning bajargan ishini hisoblash uchun M_0M oraliqni n ta elementar ko'chishlarga bo'lamiz. U holda ishni quyidagi formula bilan ifodalaymiz:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} dA_k; \quad (32.11)$$

Bu yerda dA_k - har bir elementar ko'chishda kuchning bajargan ishi. M_0M oraliqda kuchning bajargan ishini hisoblash uchun (32.2), (32.7), (32.10) tenglamalarni integrallaymiz. Ya'ni:

$$A = \int_{M_0}^{M} \bar{F}_\tau\,dS \qquad A = \int_{M_0}^{M} \bar{F}\cdot\bar{v}\,dt \qquad A = \int_{M_0}^{M} F_x\,dx + F_y dy + F_z\,dz \quad (32.12)$$

(32.12) tenglamalar yordamida kuchning chekli oraliqda bajargan to'liq ishi hisoblanadi.

3. Teng ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi

Agar $\bar{R}$ kuchni $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \cdots, \bar{F}_N$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deb qarasak, u holda:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_N \qquad (32.13)$$

ga teng.

(32.6) tenglamaga (32.13) ni qo'ysak:

$$dA = \overline{R}d\overline{r} = (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_N)d\overline{r} = \overline{F}_1 d\overline{r} + \overline{F}_2 d\overline{r} + \cdots + \overline{F}_N d\overline{r} \qquad (32.14)$$

Demak, *teng ta'sir etuvchi kuchning elementar ko'chishda bajargan elementar ishi tashkil etuvchi kuchlarning alohida-alohida elementar ko'chishda bajargan elementar ishlarning algebraik yig'indisiga tengdir*.

Chekli ko'chishda bajargan ishini hisoblash uchun har bir kuchning chekli oraliqdagi ishlari hisoblanib, algebraik yig'indisi olinadi. Ya'ni:

$$A = \int_{M_0}^{M} \overline{R}d\overline{r} = \int_{M_0}^{M} \overline{F}_1 d\overline{r} + \int_{M_0}^{M} \overline{F}_2 d\overline{r} + \cdots + \int_{M_0}^{M} \overline{F}_N d\overline{r} \qquad (32.15)$$

SI birliklar sistemasida ish birligi qilib Joul qabul qilingan.

1Joul = 1Nm

Agar kuchning tezlik yo'nalishiga proyeksiyasi F_τ o'zgarmas bo'lsa, (32.12) tenglamadan:

$$A = F_\tau \cdot S \qquad (32.16)$$

kelib chiqadi. Bu yerda S -nuqtaning bosib o'tgan yo'li.

$F_\tau = F \cdot \cos\varphi$ ifodani (32.16) ga qo'ysak:

$$A = F\,S\cos\varphi \qquad (32.17)$$

(32.17) formulada F va φ o'zgaruvchan bo'lgan holda ham $F \cdot \cos\varphi$ o'zgarmas miqdordir. Bu shart faqatgina F va φ o'zgarmas bo'lgandagina o'rinli.

Agar $\varphi = 0^0$ yoki $\varphi = 180^0$ bo'lsa, (32.17) tenglamadan:

$$A = \pm F\,S \qquad (32.18)$$

Kuch o'zgarmas bo'lib, uning yo'nalishi doimo trayektoriyaga urinma bo'lsa, (32.18) formula to'g'ri chiziqli va egri chiziqli harakatlar uchun o'rinlidir.

4. Quvvat

Kuchning quvvati uning vaqt birligi ichida bajaradigan ishi bilan baholanadi. Ta'rifga ko'ra quvvatni hisoblash formulasi quyidagicha aniqlanadi:

$$W = dA/dt \tag{32.19}$$

(32.7) formuladan foydalanib quvvatni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$W = \overline{F} \cdot \overline{v} = Fv\cos\varphi \tag{32.20}$$

Demak, quvvat kuch va tezlikning skalyar ko'payitmasidan iborat ekan.

(32.20) formuladan ko'rinib turibdiki, quvvat o'zgarmasligi uchun tezlik qancha katta bo'lsa, kuch shuncha kichik bo'ladi. Masalan, lokomotivning tortish kuchini oshirish uchun poyezdning tezligini kamaytirish lozim.

SI birliklar sistemasida quvvat birligi qilib Vatt qabul qilingan.

1Vatt= 1Joul/s ga teng.

33-§. Kuchning ishini hisoblashga misollar

Ishni hisoblash uchun nuqtaning harakatini o'rganish zarur. Tabiatda shunday kuchlar borki, ularning bajargan ishlarini nuqtaning boshlang'ich va oxirgi holatini bilgan holda sodda hisoblanadi. Og'irlik kuchining, Guk qonuni bo'yicha o'zgaruvchi elastiklik kuchining, qattiq jismning turli harakatlarida biror nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishini ko'ramiz.

1.Og'irlik kuchining bajargan ishi

Massasi m bo'lgan moddiy nuqtaning og'irligi $\overline{P}$ o'zgarmas bo'lib, vertikal pastga yo'nalgan (40-shakl).

Qiymati,

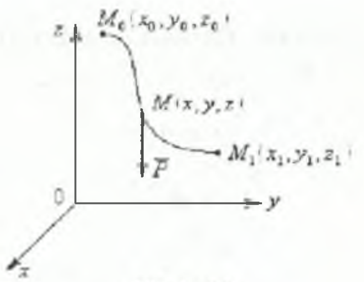
$$P = mg$$

Oxyz koordinata o'qlariga harakatlanuvchi nuqtaning og'irlik kuchini proyeksiyalaymiz.

(33.1) ifodani (32.12) formulaga olib borib go'ysa

$$A = \int_{M_0}^{M} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -mg\int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1) \tag{33.2}$$

kelib chiqadi.



40-shakl

Bu yerda $h = z_0 - z_1$ ekanligini e'tiborga olsak, (33.2) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A = mgh \tag{33.3}$$

Agar nuqta yuqoriga ko'tarilayotgan bo'lsa, og'irlik kuchining bajargan ishi manfiy bo'ladi. Umumiy holda og'irlik kuchining bajargan ishi teng:

$$A = \pm mgh \tag{33.4}$$

yoki

$$A = \pm Ph \tag{33.5}$$

(33.4) va (33.5) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, og'irlik kuchining bajargan ishi nuqtaning trayektoriyasiga bog'liq emas.

Nuqta M_0 holatdan M ga kelguncha nuqtalar ustma-ust tushsa yoki bitta gorizontal tekislikda yotsa $\overline{P}$ kuchning bajargan ishi nolga teng.

2.Chiziqli elastiklik kuchining bajargan ishi

Chiziqli elastiklik kuchi yoki chiziqli tiklovchi kuch deb Guk qonuni bo'yicha ta'sir etuvchi kuchga aytiladi (41-shakl).

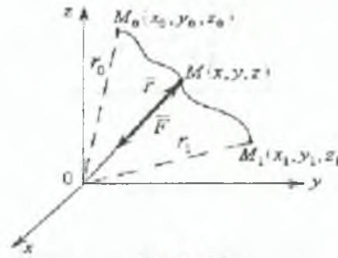
Ya'ni:

$$\overline{F} = c\overline{r} \tag{33.6}$$

Bu yerda $\overline{r} - M$ nuqtadan statik muvozanat holatidagi nuqtagacha bo'lgan masofa. Bu nuqtada kuch nolga teng bo'ladi. c - qattiqlik koeffitsienti.

Koordinata boshini nuqtaning statik muvozanat holatidagi nuqtada olsak, u holda (33.6) tenglamaning o'qlardagi proyeksiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz. \tag{33.7}$$



41-shakl

Nuqta M_0 holatdan M ga kelguncha kuchning bajargan ishini hisoblaymiz.(33.7) ifodani (32.12) formulaga olib borib qo'ysak,

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_x\,dx + F_y dy + F_z dz = -c\int_{M_0}^{M_1}(xdx + ydy + zdz) = -c\int_{r_0}^{r_1} r\,dr \tag{33.8}$$

kelib chiqadi.

(33.8) tenglamada $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$ ga teng bo'lib, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ga teng.Tenglamani integrallab, kuchni bajargan ishini hisoblaymiz. Ya'ni:

$$A = -\frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2) \tag{33.9}$$

(33.9) tenglama yordamida chiziqli elastik kuchining bajargan ishini hisoblaymiz. Agar M_0 nuqta statik muvozanat holatidagi nuqta bilan ustma- ust tushsa, u holda $\bar{r}_0 = 0$ va nuqtaning O dan M ga ko'chishda kuchning bajargan ishi,

$$A = -\frac{c}{2}r^2. \tag{33.10}$$

(33.10) tenglamadagi r-harakati tekshirilayotgan nuqta va statik muvozanat nuqtasi orasidagi eng qisqa masofa.

$r = \lambda$ belgilash kiritamiz. U holda (33.10) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2 \tag{33.11}$$

(33.11) tenglama chiziqli elastik kuchining bajargan ishini hisoblash formulasini ifodalaydi.

3. Qattiq jismning turli harakatlarida biror nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi

Qattiq jismning biror nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning elementar va to'liq ishini hisoblash uchun formulalar keltirib chiqaramiz. Avvalo qattiq jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatini, so'ngra harakatning umumiy hollarini ko'ramiz.

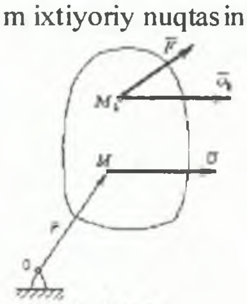
a) Qattiq jism ilgarilanma harakat qilganda hamma nuqtalarining tezliklari miqdor va yo'nalish jihatdan bir xil bo'ladi (42-shakl).

Agar qattiq jismning M_k nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchni $\overline{F}$ deb, nugtaning tezligi $\overline{v}_k = \overline{v}$ ekanligini hisobga olssak, elementar ishni hisoblaymiz.

Ya'ni:

$$dA = \overline{F}\,\overline{v}_k\, dt = \overline{F}\,\overline{v}\, dt = \overline{F}d\overline{r} \qquad (33.12)$$

Bu yerda $\overline{r}$ - qattiq jism ixtiyoriy nuqtasining radius-vektori.



42-shakl

Chekli ko'chishda bajarilgan to'liq ish teng:

$$A = \int_{M_0}^{M} \overline{F}d\overline{r} \qquad (33.13)$$

b) Qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilganda M nuqtasining tezligini vektor ifodasini yozamiz (43-shakl).

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \qquad (33.14)$$

$\overline{F}$ kuchning elementar ishi quyidagi formuladan aniqlanadi.
Ya'ni:

$$dA = \overline{F}\,\overline{v}\,dt = \overline{F}(\overline{\omega} \times \overline{r})\,dt \tag{33.15}$$

Bu yerda:

$$\overline{F}(\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega}\left(\overline{r} \times \overline{F}\right) \tag{33.16}$$

(33.16) ni (33.15) ga qo'ysak:

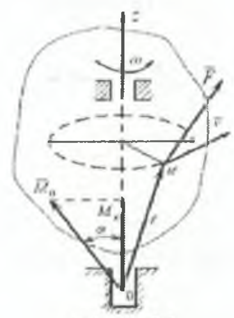
$$dA = \overline{\omega}(\overline{r} \times \overline{F})\,dt = \overline{\omega} \cdot \overline{M}_0 dt = \omega\, dt M_0 \cos\alpha \tag{33.17}$$

kelib chiqadi. Bu yerda $\left(\overline{r} \times \overline{F}\right) = \overline{M}_0\left(\overline{F}\right) = \overline{M}_0$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti, $M_9 \cos\alpha = M_z$ formula bilan aniqlanadi.

$\omega\, dt = d\varphi$ ekanligini hisobga olib (33.17) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$dA = M_z\, d\varphi \tag{33.18}$$

(33.18) formula yordamida qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning elementar ishini hisoblash formulasi.



43-shakl

To'liq ish quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z\, d\varphi \tag{33.19}$$

Xususiy holda aylanish o'qiga nisbatan kuch momenti o'zgarmas bo'lsa, ya'ni $M_z(\overline{F}) = const$, u holda ishni quyidagi formula bilan aniqlaymiz.

Ya'ni:

$$A = M_z \varphi \tag{33.20}$$

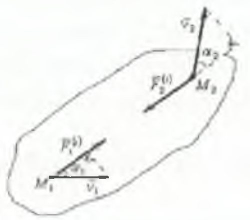
Bu yerda φ – jismning burilish burchagi.

4. Qattiq jism ichki kuchlarining bajargan ishi

Qattiq jismning har qanday ko'chishida ichki kuchlarning bajargan ishi nolga tengdir. Qattiq jismning ixtiyoriy ikki M_1 va M_2 nuqtalarini olamiz (44-shakl). Ichki kuchlar jism nuqtalarining o'zaro ta'sir kuchlari bo'lgani uchun M_1 va M_2 nuqtalar uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$\overline{F}_1^{(i)} = -\overline{F}_2^{(i)} \tag{33.21}$$

$\overline{F}_1^{(i)}$ kuch bo'ylab yo'nalgan birlik vektor $\bar{l}_0$ ni kiritamiz. U holda:



44-shakl

$$\overline{F}_1^{(i)} = \bar{l}_0 F_1^{(i)} \qquad \overline{F}_2^{(i)} = -\bar{l}_0 F_2^{(i)} = -\bar{l}_0 F_1^{(i)} \tag{33.22}$$

$\overline{F}_1^{(i)}; \overline{F}_2^{(i)}$ kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig'indisi quyidagi ko'rinishda yoziladi.

Ya'ni:

$$dA_1^{(i)} + d\,A_2^{(i)} = \overline{F}_1^{(i)} \overline{v}_1 d\,t + \overline{F}_2^{(i)} \overline{v}_2 d\,t = F_1^{(i)} d\,t(\overline{v}_1 \bar{l}_0 - \overline{v}_2 \bar{l}_0) \tag{33.23}$$

(33.23) tenglamada qavs ichidagi vektorlarning skalyar ko'payitmasini ochib chiqsak:

$$dA_1^{(i)} + d\,A_2^{(i)} = F_1^{(i)} d\,t(v_1 \cos\alpha_1 - v_2 \cos\alpha_2) = 0 \tag{33.24}$$

hosil bo'ladi. Chunki kinematikadan ma'lumki qattiq jism ixtiyoriy ikki nuqtasi tezligining ularni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqdagi proyeksiyalari tengdir. (33.24) tenglamadagi qavs ichidagi ifoda shu proyeksiyalardir. Ishoralari turli, miqdorlari teng bo'lgani uchun nolga teng. Demak:

$$\sum dA_k^{(i)} = 0 \tag{33.25}$$

Biz bilamizki, har qanday mexanik sistema uchun ichki kuchlar bosh momenti va bosh vektori nolga teng. Faqat qattiq jismlar uchun ichki kuchlar bajargan ishlarining yig'indisi nolga tengdir. Umumiy holda boshqa mexanik sistema uchun o'rinli emas.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchning elementar ishi qanday formulalar bilan hisoblanadi?
2. Teng ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi qanday hisoblanadi?
3. Chekli oraliqda kuchning bajargan ishi nimaga teng?
4. Quvvat nima?
5. Og'irlik kuchining bajargan ishi nimaga teng?
6. Chiziqli elastiklik kuchining bajargan ishi qanday aniqlanadi?
7. Qattiq jism ichki kuchlarining bajargan ishi nimaga teng?
8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi nimaga teng?

34-§. Kinetik energiya

1. Nuqta va sistema kinetik energiyasi

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi deb massaning yarmini tezlik kvadratiga ko'paytmasiga aytiladi, ya'ni $\frac{mv^2}{2}$ yoki $\frac{m\bar{v}^2}{2}$.

Chunki istalgan vektorning skalyar kvadrati vektor modulining kvadratiga tengdir. Kinetik energiya skalyar, musbat miqdordir.

SI sistemasida o'lchami $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ dan iborat. Mexanik sistema kinetik energiyasi sistemani tashkil etuvchi har bir nuqtalar kinetik energiyalarining yig'indisiga tengdir.

Ya'ni:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} \tag{34.1}$$

Mexanik sistemaning yoki nuqtaning kinetik energiyasi nuqtalar tezliklarining yo‘nalishiga bog‘liq emas. Faqatgina sistema nuqtalari tinch holatda bo‘lsa, kinetik energiya nolga teng bo‘lishi mumkin.

2. Sistema kinetik energiyasini hisoblash (Kyonig teoremasi)

Mexanik sistema harakatini massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatini ko‘chirma harakatga va koordinatalar sistemasiga nisbatan massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatini nisbiy harakatga ajratamiz. Sistemaning M_k nuqtasiga quyidagi tenglik o’rinli:

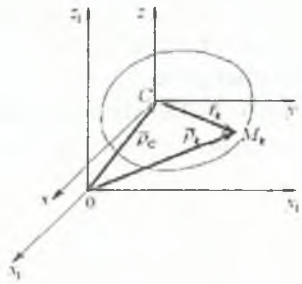
$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_c + \bar{r}_k \tag{34.2}$$

(34.2) dan hosila olsak:

$$\bar{V}_k = \bar{V}_c + \bar{V}_{kr} \tag{34.3}$$

Bu yerda:

$$\bar{V}_{kr} = \frac{d\bar{r}_k}{dt} \tag{34.4}$$



45-shakl

(34.4) tenglama yordamida nisbiy harakat tezligi aniqlanadi. Qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasi ilgarilanma harakatda bo‘lgani uchun $\bar{\omega} = 0$. $\bar{v}_k$ qiymatini (34.1) ga qo‘ysak, sistema kinetik energiyasi kelib chiqadi. Ya’ni:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\bar{v}_C^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k \bar{v}_{kr}^2}{2} + \bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_{kr} \tag{34.5}$$

Bu yerda:

$$\bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_{kr} = \bar{v}_C \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_C \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{r}_k\right) = 0$$

Chunki:

$$\sum m_k \bar{r}_k = const = 0$$

(34.5)tenglamada $\sum m_k = M$ sistemaning massasi bo'lib, $T_C^{(r)} = \sum \frac{m_k \bar{v}_{kr}^2}{2}$ ifoda esa koordinatalar sistemasiga nisbatan massalar markazi bilan birgalikda ilgarilanma harakat qiluvchi sistemaning nisbiy harakat kinetik energiyasi.

Demak (34.5) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz::

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_C^{(r)} \tag{34.6}$$

(34.6) tenglama *Kyonig teoremasi*ni ifodalaydi:

Mutlaq harakatda sistema kinetik energiyasi butun sistema massasi joylashgan sistema massalar markazining kinetik energiyasi bilan massalar markaziga nisbatan sistema kinetik energiyasining yig'indisiga tengdir.

3. Qattiq jism kinetik energiyasi

a) Ilgarilanma harakatda qattiq jismning hamma nuqtalarining tezliklari teng bo'lgani uchun $\bar{v}_k = \bar{v}$ bo'lib, kinetik energiyasi quyidagicha yoziladi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = M\frac{v^2}{2} \tag{34.7}$$

(34.7) formuladan ko'rinib turibdiki, *ilgarilanma harakatda sistema kinetik energiyasi massasi bir nuqtaga joylashgan nuqta kinetik energiyasi kabi aniqlanadi.*

b) Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyani hisoblash uchun biror M_k nuqtasini olib (40-shakl), uning tezligini quyidagicha ifodalaymiz.

Ya'ni:

$$v_k = \omega \cdot h_k \tag{34.8}$$

bu yerda h_k – nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan eng qisqa masofa;

$\omega -$ jismning burchak tezligi. Qiymatlardan foydalanib quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z$$

Demak:

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2} \tag{34.9}$$

(34.9) tenglamada I_z- qattiq jismning Oz aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti bo'lib, *qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentining burchak tezlik kvadratiga ko'payitmasining yarmiga tengdir.*

d) Tekis-parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasini hisoblash uchun Kyonig teoremasidan foydalanamiz. Biz ko'rayotgan holda qattiq jismning koordinata sistemasiga nisbatan massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakati massalar markazi atrofida ω burchak tezligi bilan aylanishni ifodalagini uchun:

$$T_C^{(r)} = I_{Cz} \frac{\omega^2}{2} \tag{34.10}$$

ga teng. (34.10) tenglamada I_{Cz} – massalar markazidan o'tuvchi Cz o'qiga nisbatan inersiya momentiga teng bo'lib, jismning harakat tekisligiga perpendikulyar yo'naladi.

(34.6) formulaga asosan:

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{Cz} \omega^2}{2} \tag{34.11}$$

(34.11) tenglamadan ko'rinib turibdiki, *tekis-parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi, massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat kinetik energiyasi va harakat tekisligiga perpendikulyar, massalar markazidan o'tuvchi, o'q atrofidagi aylanma harakat kinetik energiyalarining yig'indisidan iborat.*

35-§. Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema

Massasi m bo'lgan moddiy nuqta $\overline{F}$ kuch ta'sirida harakatlansin. Dinamikaning asosiy qonuni quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{F} \qquad (35.1)$$

(34.11) tenglamaning ikkala tomonini nuqtaning radius-vektor differensiali $d\overline{r}$ ga skalyar ko'paytiramiz:

$$m\,d\overline{v}\frac{d\overline{r}}{dt}=\overline{F}\,d\overline{r} \qquad (35.2)$$

$\overline{v}=\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ ekanligini e'tiborga olsak, (35.2) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\overline{v}\,dv=\overline{F}\,d\overline{r} \qquad (35.3)$$

Bu yerda $\overline{F}\,d\overline{r}=d\,A$ kuchning elementar ishidir.

$m\overline{v}d\overline{v}=d\left(\dfrac{m\overline{v}^2}{2}\right)=d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ ekanligini e'tiborga olib, (35.3) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dA \qquad (35.4)$$

(35.4) tenglama nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasidir. Demak, *nuqta kinetik energiyasining differensiali, nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar bajargan elementar ishiga teng,* (35.4) tenglamani M_0M chekli oraliqda integrallaymiz (42-shakl).

Ya'ni:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^{\,2}}{2}=A \qquad (35.5)$$

(35.5) tenglama nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli oraliqda o‘zgarishini ifodalaydi. Demak, *nuqta kinetik energiyasining chekli oraliqda o‘zgarishi, nuqtaga ta‘sir etuvchi kuchlarning shu oraliqda bajargan ishlariga teng.*

***8- MASALA.**

Og‘irligi P bo‘lgan jism h balandlikdan boshlang‘ich tezliksiz prujina ustiga tushadi. Agar jism ta‘sirida prujinaning statik siqilishi λ_{st} desak, eng katta siqilishi λ aniqlansin. Prujina massasi hisobga olinmasin (46-shakl).

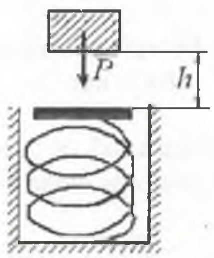
Yechish:

Nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teoremadan foydalanamiz:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\;2}}{2} = A$$

Boshlang‘ich paytda $v_0 = 0$ va eng katta siqilishda $v = 0$.

Demak $A=0$. Jism prujinaga kelib urilganda unga asosan ikkita kuch ta‘sir etadi: og‘irlik kuchi P va prujinaning elastiklik kuchi



46-shakl

Og‘irlik kuchi $h + \lambda$ ko‘chishda; elastiklik kuchi λ ko‘chishda ish bajaradi. Demak:

$$A = P(h + \lambda) - \frac{c}{2}\lambda^2 = 0 \qquad (*8.1)$$

Bu yerda, $P = c\lambda_{st}$ bo'lib, undan $c = \dfrac{P}{\lambda_{st}}$ ga teng. Ifodani (*8.1) ga qo'yamiz:

$$P(h+\lambda) - \frac{P}{2\lambda_{st}}\lambda^2 = 0 \qquad (*8.2)$$

(*8.2) tenglamani hadma-had P ga bo'lsak:

$$(h+\lambda) - \frac{1}{2\lambda_{st}}\lambda^2 = 0$$

yoki

$$\lambda^2 - 2\lambda_{st}\lambda - 2\lambda_{st}h = 0 \qquad (*8.3)$$

kelib chiqadi. (*11.3) kvadrat tenglamani yechsak:

$$\lambda = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_{st}^2 + 2\lambda_{st}h} \qquad (*8.4)$$

(*8.4) ildizning musbat ishorasi olinadi, chunki $\lambda > \lambda_{st}$. Agar $h = 0$ bo'lsa, $\lambda = 2\lambda_{st}$ kelib chiqadi. Demak, jismning prujinaga dinamik ta'sirida prujinaning eng katta siqilishi statik siqilishidan ikki barobar katta ekan.

36-§. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema

Sistemaning har bir nuqtasiga ichki va tashqi kuchlar ta'sir etsin. (35.4) tenglamani sistemaning bitta nuqtasi uchun yozamiz:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \overline{F}_k^i d\overline{r}_k + \overline{F}_k^e d\overline{r}_k, \qquad k = 1,2,3,\cdots,N. \qquad (36.1)$$

Sistemaning hamma nuqtalari uchun tenglamani tuzib, chap va o'ng tomorlarini hadma-had qo'shamiz:

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum \overline{F}_k^i d\overline{r}_k + \sum \overline{F}_k^e d\overline{r}_k,$$

yoki

$$dT = \sum d A_k^i + \sum d A_k^e \qquad (36.2)$$

Bu yerda : $T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ - sistema kinetik energiyasi,

$dA_k^i = \sum \overline{F}_k^i d\overline{r}_k$; $dA_k^e = \sum \overline{F}_k^e d\overline{r}_k$ - ichki va tashqi kuchlarning elementar ishlari.

(36.2) tenglama sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi: *sistema kinetik energiyasining differensiali ichki va tashqi kuchlar elementar ishlarining yig'indisiga teng.*

Agar (36.2) tenglamani biror chekli oraliqda integrallasak, (36.3) tenglama kelib chiqadi:

$$T - T_0 = \sum \int_{M_{k_0}}^{M_k} dA_k^i + \sum \int_{M_{k_0}}^{M_k} dA_k^e$$

yoki

$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e \tag{36.3}$$

Bu yerda: $A_k^i = \int_{M_{k_0}}^{M_k} dA_k^i$ - sistema nuqtasining M_{k_0} boshlang'ich holatidan M_k oxirgi holatiga ko'chishda ichki kuchlarning bajargan ishi, $A_k^e = \int_{M_{k_0}}^{M_k} d\,A_k^e$ - tashqi kuchlarning bajargan ishi.

(36.3) tenglama sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: *bir holatdan ikkinchi holatga o'tishda sistema kinetik energiyasining o'zgarishi, har bir holat uchun sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi ichki va tashqi kuchlarning bajargan ishlarining yig'indisiga teng.*

Xususiy hol

Mutlaq qattiq jism uchun ichki kuchlarning bajargan ishi nolga teng:

$$\sum A_k^i = 0$$

Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$T - T_0 = \sum A_k^e \qquad (36.4)$$

(36.4) tenglama mutlaq qattiq jism uchun kinetik energiyaning o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: bir holatdan ikkinchi holatga o'tishda mutlaq qattiq jism kinetik energiyasining o'zgarishi, har bir holat uchun mutlaq qattiq jismga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bajargan ishlarining yig'indisiga teng. Demak, mutlaq qattiq jism uchun ichki kuchlar hisobga olinmaydi.

***9- MASALA.**

Gorizontal tekislikda ishqalanishsiz harakat qiluvchi B g'ildirakning A blokdan o'tkazilgan ipga osilgan og'irligi $\overline{Q}$ bo'lgan M yuk harakatga keltiradi. Blok A va B g'ildirakning og'irliklari, radiuslari teng bo'lib, $\overline{P};R$ larga tengdir. Ular bir jinsli disklar deb qaralsin. G'ildirakning yumalashdagi ishqalanish koeffitsienti k ga teng. G'ildirak va blok o'qlaridagi ishqalanish, ipning massasi hisobga olinmasin. M yukning tezligini tushish balandligi h ga bog'lab aniqlansin. Boshlang'ich paytda sistema tinch holatda deb qaralsin (47-shakl).

Yechish:

Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaga asosan:

$$T - T_0 = \sum A_k^i + \sum A_k^e \qquad (*9.1)$$

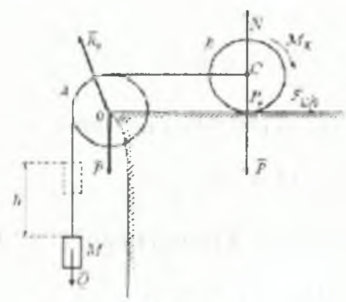
Bu tenglamada sistema boshlang'ich paytda tinch holatda bo'lgani uchun $T_0 = 0$ bo'ladi. Yuk, blok va g'ildirakning kinetik energiyalarini mos ravishda T_1, T_2, T_3 deb belgilasak, u holda:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (*9.2)$$

Bu yerda:

$$T_1 = \frac{Q}{g}\frac{v^2}{2}; T_2 = J_{Oz}\frac{\omega_A^2}{2}; T_3 = \frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2} + J_{Cz}\frac{\omega_B^2}{2} \qquad (*9.3)$$

ga teng.



47-shakl

Demak:

$$J_{Oz} = J_{Cz} = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}; \quad \omega_A = \frac{v}{R}; \quad v_C = v; \quad \omega_B = \frac{v_C}{R} = \frac{v}{R} \qquad (*9.4)$$

(*9.3) va (*9.4) tenglamalarni (*9.2) ga olib borib qo‘ysak:

$$T = \frac{v^2}{4g}(2Q + 3P + P) = \frac{v^2}{4g}(Q + 2P) \qquad (*9.5)$$

(*9.1) tenglamaning o‘ng tomonidagi ichki va tashqi kuchlarning bajargan ishlarini hisoblaymiz. Ipning tortilish kuchining bajargan ishi nolga teng bo‘lgani uchun, ip bilan tortilgan barcha qattiq jism uchun $\sum A_k^i = 0$ tenglik o‘rinlidir. Blok og‘irligi $\overline{P}$ kuchning va o‘qning $\overline{R}_0$ reaksiya kuchlarining bajargan ishlari nolga teng, chunki ular qo‘zg‘almas O nuqtaga qo‘yilgan. G‘ildirakning og‘irligi $\overline{P}$ ning yo‘nalishi ko‘chishga perpendikulyar bo‘lgani uchun, $\overline{N};\overline{F}$ kuchlarning yo‘nalishi tezliklar oniy markaziga qo‘yilgani uchun bajargan ishlari nolga teng. Bu masalada ishni $\overline{Q}$ kuch va tekislikda g‘ildirakning yumalashiga qarshilik qiluvchi juft kuch momenti M_k bajaradi. Ya‘ni:

$$\sum A_k^e = Q \cdot h - M_k \varphi \qquad (*9.6)$$

(*9.6) tenglamadagi $\varphi -$ M yuk h masofaga tushganda B g‘ildirakning burilish burchagidir.

Biz bilamizki,

$$M_k = kN = kP = const, \qquad \varphi = \frac{h}{R} \qquad (*9.7)$$

ga teng. (*9.7) tenglikni (*9.6) ga qo'ysak,

$$\sum A_k^e = Q \cdot h - kP\frac{h}{R} \qquad (*9.8)$$

kelib chiqadi. (*9.5) va (*9.8) tenglamani (*9.1) ga qo'ysak,

$$\frac{v^2}{4g}(Q+2P) = h\left(Q - \frac{k}{R}P\right);$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left(Q - \frac{k}{R}P\right)}{Q+2P}} \qquad (*9.9)$$

(9.9) tenglama M yukning h balandlikdan tushish tezligini ifodalaydi.

Takrorlash uchun savollar

1. Nuqta kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
2. Sistema kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
3. Ilgarilanma harakat kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
4. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
5. Tekis-parallel harakat kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
6. Kyonig teoremasini ta'riflang.
7. Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishdagi ifodasi qanday?
8. Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli oraliqdagi ifodasi qanday?
9. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishdagi ifodasi qanday?
10. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli oraliqdagi ifodasi qanday?

VIII BOB. ANALITIK MEXANIKA ASOSLARI

37-§. Asosiy tushunchalar

Ma'lumki, qattiq jismning muvozanatini tekshirish uchun oltita muvozanat tenglama tuzilib va ular yechilib, noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Ammo bir qancha jismlardan iborat mexanizmlami olsak, bunday sistemaning *n* ta qismlari uchun *6n* ta tenglama tuzish lozim.

Albatta bu tenglamalarni yechish noqulaydir. Chiqadigan natijalarning hammasini aniqlashga hamma vaqt imkoniyat bo'lavermaydi. Shuning uchun boshqa usul qo'llashga to'g'ri keldi. Bunday masalalarni birinchi marotaba to'la ravishda Lagranj o'zining «Analitik mexanika» sida yechdi. Analitik mexanikada mexanik sistemaning harakatini va muvozanatini tekshirish uchun umumiy, yagona usullar keltirib chiqarildi. Bu usullarni mexanik sistemalarga tatbiq etish bilan birga elektromexanik hodisalarga ham tatbiq qilishda samarali foydalanildi. Bilamizki, sistema erkin bo'lsa, nuqtalarining ko'chishi ixtiyoriy bo'ladi, bog'lanishdagi sistema uchun nuqtalarning ko'chishi cheklangan bo'ladi. Bog'lanishdagi mexanik sistema va uning harakat differensial tenglamalari bilan II bobda tanishgan edik. Mavzuning ba'zi bir mavqelari bilan shu bobda tanishib o'tamiz.

38-§. Bog'lanishlar klassifikatsiyasi

Moddiy nuqta erkin, yoki bog'lanishsiz deyiladi, agar uning harakati boshlang'ich shartlar va unga qo'yilgan aktiv kuchlar bilan aniqlansa. Aktiv kuchlar-reaksiya kuchlaridan tashqari hamma kuchlar bo'lib, boshlang'ich shartlar-nuqtaning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligidir.

Erkin moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema erkin sistema deyiladi.

Quyosh sistemasi bunga misol bo'ladi, chunki hamma planetalarning harakati butun olam tortilish kuchi ta'sirida bo'ladi.

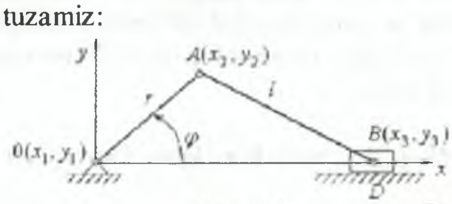
Agar moddiy nuqtaning harakatiga boshlang'ich shartlar va aktiv kuchlarga bog'liq bo'lmagan cheklar qo'yilgan bo'lsa, moddiy nuqta erkin bo'lmagan, yoki bog'lanishdagi deyiladi.

Erkin bo'lmagan moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema erkin bo'lmagan sistema yoki bog'lanishdagi sistema deyiladi.

Har qanday ixtiyoriy mexanizm bog'lanishdagi sistemaga misol bo'la oladi. Boshlang'ich shartlar va unga qo'yilgan aktiv kuchlarga bog'liq bo'lmagan mexanik sistemaning harakatini chegaralovchi sabab *bog'lanish* deyiladi. Bog'lanishlarni tenglamalar ko'rinishda ifodalanadi va *bog'lanishlar tenglamasi* deyiladi. Bu tenglamalar mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlarning matematik ifodasi vaqt, sistema nuqtalarining koordinatalari va ularning hosilalariga bog'liq tenglamalar bilan aniqlanadi.

1. Statsionar va statsionar bo'lmagan bog'lanishlar

Vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan bog'lanish *statsionar bog'lanish* deyiladi. Bog'lanish tenglamalari vaqtga aniq bog'liq bo'lmaydi. Misol uchun krivoship – shatun mexanizmining ixtiyoriy holatini *O, A* va *B* nuqtalarning holati orqali aniqlanadi. (48-shakl) Mexanik sistema uchun beshta bog'lanish tenglamasini tuzamiz:

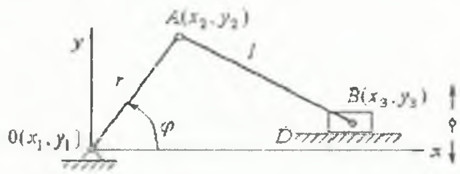


48-shakl

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = y_1 = y_3 = 0; \\ &x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0; \\ &(x_2 - x_3)^2 + y_2^2 - l^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38.1)$$

Bog'lanish tenglamalari, mexanizmning ixtiyoriy harakatida, *O* nuqtaning qo'zg'almasligini, *B* nuqtaning *Ox* o'qi bo'ylab sirpanishini, *OA* va *AB* masofalarning o'zgarmasligini va uchta nuqtalar koordinatalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. (38.1) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, ular vaqtga bog'liq emas.

Demak bu bog'lanish statsionar bog'lanishdir. Vaqt o'tishi bilan o'zgaradigan bog'lanish *statsionar bo'lmagan bog'lanish* deyiladi. Bog'lanish tenglamasi vaqtga aniq bog'liq bo'ladi. Buni 49-shakldagi misolda ko'rishimiz mumkin. Vertikal bo'ylab $y = a\sin kt$ qonuni bo'yicha garmonik tebranma harakat qiluvchi krivoship-shatun mexanizmining B polzuni stolning ustida sirpanadi (52-shakl).



49-shakl

Sistemaning bog'lanish tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 = 0; \\ y_3 - a\sin kt = 0; \\ x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0; \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l^2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (38.2)$$

Keltirib chiqarilgan bog'lanish tenglamasidan ko'rinib turibdiki, aniq vaqtga bog'liq:

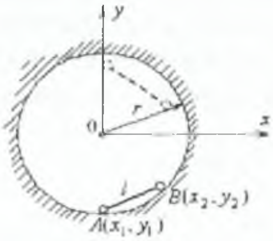
$$y_3 - a\sin kt = 0 \qquad (38.3)$$

Demak bu bog'lanish statsionar bo'lmagan bog'lanishdir.

2. Bo'shatmaydigan va bo'shatadigan bog'lanishlar

Sistema nuqtalarining butun harakati davomida o'z ta'sirini saqlab qoladigan bog'lanishlar *bo'shatmaydigan bog'lanishlar* deyiladi. Vaqt oralig'ida ta'sirini o'zgartiradigan bog'lanishlar *bo'shatadigan bog'lanishlar* deyiladi. Bo'shatmaydigan bog'lanishlar tenglamasi tenglik ishorasi bilan beriladi. Bo'shatadıgan bog'lanishlar tengsizlik ishorasi bilan beriladi. A va B nuqtalaridan iborat ixtiyoriy sistema uzunligi l bo'lgan qattiq sterjen bilan mahkamlangan bo'lib, vertikal tekislikda joylashgan aylanada sirpanadi(50-shakl).

Aniqki, ko'rilayotgan sistema ayrim boshlang'ich shartlarda va kuchlarda aylanadan ajramagan holda u bo'ylab tez harakat qiladi. Ayrim hollarda bog'lanishdan ajragan holda tushib ketadi.



50-shakl

Aniqki, ko'rilayotgan sistema ayrim boshlang'ich shartlarda va kuchlarda aylanadan ajramagan holda u bo'ylab tez harakat qiladi. Ayrim hollarda bog'lanishdan ajragan holda tushib ketadi. Ikkala holni birgalikda ko'rib, sistemaning holatini x_1, y_1, x_2, y_2 koordinatalar orqali ifodalasak, quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^2 + y_1^2 - r^2 \leq 0; \\ &x_2^2 + y_2^2 - r^2 \leq 0; \\ &(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38.4)$$

(38.4) tengsizlik bilan ifodalangan bog'lanishlar bo'shatadigan bog'lanishlar. Shuni aytib o'tish kerakki, amaliyotda ko'pincha bo'shatmaydigan bog'lanishlar uchraydi.

3. Golonomli va begolonom bog'lanishlar

Golonomli (geometrik) va begolonom (kinematik) bog'lanishlarni ko'rib chiqamiz. Mexanik sistemaning holatini chegaralovchi bog'lanish *golonomli bog'lanish* deyiladi. Golonomli bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga faqat sistema nuqtalarining koordinatlari kiradi, lekin koordinatlardan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalar kirmaydi. Begolonom bog'lanishda mexanik sistema nuqtalarining tezliklari cheklanadi. Begolonomli bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga sistema nuqtalarining koordinatlari va koordinatlardan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalar kiradi. Begolonomli bog'lanishni ifodalovchi differensial tenglamalami integrallab bo'lmaydi. Ko'rib o'tgan hamma bog'lanishlarimiz golonomli bog'lanishlariga sistema, agar golonomli bog'lanishda bo'lsa, *golonomli* deyiladi. Mexanik sistema, agar begolonomli bog'lanishda bo'lsa, *begolonomli* deyiladi.

39-§. Umumlashgan koordinatalar va mexanik sistemaning erkinlik darajasi

Mexanik sistema $3n$ ta koordinatga ega bo'lgan n ta nuqtadan iborat bo'lib, nuqtalariga s golonomli (statsionar, bo'shatmaydigan) bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0, \text{ bu yerda } i = 1,2,3,...,s \qquad (39.1)$$

Agar $s=3n$ bo'lsa, u holda (38.1) ko'rinishdagi $3n$ tenglamadan mexanik sistemaning $3n$ nuqtasining koordinatalari aniqlanadi. Bu koordinatalar doimiy qiymatga ega bo'lgani uchun mexanik sistema harakatlanmaydi. Mexanik sistema harakatlanishi uchun $s<3n$ bo'lishi kerak. Bu holda golonom sistemaning $3n$ nuqtalarining hammasi ham bir-biriga bog'liq bo'lmagan nuqtalar bo'lmaydi, chunki (38.1) ko'rinishdagi s tenglamada s koordinatasini $3n$-s koordinatalar orqali ifodalash mumkin. Demak ko'rilayotgan golonomli mexanik sistemaning biror hisob sistemasiga nisbatan holatini aniqlash uchun $3n$ koordinatalardan $3n$-s olish kifoya. 48-shakldagi krivoship-shatun mexanizmida O, A, B nuqtalarning oltita koordinatasi bir-biri bilan (39.1) tenglamadagi beshta tenglama bilan bog'langan. Sistemaning aniq holatini aniqlash uchun birgina koordinatasining o'zgaruvchilarini (x_2, y_2 yoki y_3) bilsak yetarlidir, qolganlari hammasi (38.1) tenglamadan topiladi.

Golonom sistemaning holatini aniqlash uchun bog'liqsiz koordinatalar o'rnida sistemaga tegishli nuqtaning koordinatlarini olish shart emas, istalgan parametrlami olish mumkin. Mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar golonomli bo'shatmaydigan bo'lsa, sistema nuqtalarining holatini aniqlovchi bog'liqsiz parametrlar soni *sistemaning erkinlik darajasi* deyiladi.

48-shakldagi krivoship-shatun mexanizmida mexanizmning holatini bir qiymatli aniqlovchi bog'liqsiz koordinatalar x_2, x_3 yoki y_2. Lekin bog'liqsiz koordinatalar o'rnida bularni olish shart emas. Mexanizmning holatini aniqlovchi istalgan parametrni olish mumkin. Misol uchun OA krivoshipning burilish burchagi φ ni olsak, shunda ko'rilayotgan mexanizm bitta erkinlik darajaga egadir. Natijada biz quyidagi izohga kelamiz: *sistemaning holatini bir qiymatli aniqlaydigan, bir-biriga bog'liq bo'lmagan, sistemaning erkinlik darajasiga teng parametrlar soni, golonom sistemaning umumlashgan koordinatalari deyiladi.*

Masalan, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qiluvchi qattiq jism bitta erkinlik darajaga ega bo'lgani uchun uning holati bitta umumlashgan koordinata, ya'ni o'q atrofida aylanish burchagi φ orqali aniqlanadi. Tekis–parallel harakat qiluvchi qattiq jismning erkinlik darajasi 3 ta: qo'zg'almas tekislikka parallel o'tkazilgan ixtiyoriy kesimdagi og'irlik markazining 2ta koordinatasi x_c va y_c, kesim yuziga perpendikulyar og'irlik markazidan o'tuvchi o'q atrofida aylanish burchagi φ. Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat qiluvchi qattiq jism uchta erkinlik darajaga ega bo'lgani uchun uning holati uchta umumlashgan koordinata bilan aniqlanadi, ya'ni φ, ψ, θ.

Golonomli statsionar bog'lanishli n ta nuqtadan iborat mexanik sistemaning erkinlik darajasi p bo'lsin. Golonomli sistemaning umumlashgan koordinatalarini $q_1, q_2, ..., q_p$ bilan belgilaymiz. Har bir nuqtaning koordinatalarini umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \cdots, q_p); \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \cdots, q_p); \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \cdots, q_p). \\ (k &= 1,2,3,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{39.2}$$

48- shakldagi krivoship-shatun mexanizmining erkinlik darajasi bitta bo'lib, umumlashgan koordinatasi $q = \varphi$. Mexanizmning A va B nuqtalarining koordinatalarining tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= r\cos\varphi; \\ y_2 &= r\sin\varphi; \\ x_3 &= r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}; \\ y_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{39.3}$$

Ko'ramizki, (39.2) $3n$ tenglamadan $q_1, q_2, ..., q_p$ ga teng p umumlashgan koordinatani ayirsak, $x_k; y_k; z_k (k = 1,2,3,...,n)$ nuqtalarning $3n - p = s$ tenglamasini hosil qilamiz. Bu statsionar golonomli bog'lanish tenglamalari. Golonomli mexanik sistemaning harakat tenglamasi umumlashgan koordinatalar orqali quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$q_1 = q_1(t),\ q_2 = q_2(t), \cdots, q_p = q_p(t) \tag{39.4}$$

Umumlashgan koordinatalardan olingan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar mos ravishda:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \ddot{q}_j = \frac{d^2q_j}{dt^2} \quad (j = 1,2,\cdots,p) \tag{39.5}$$

(39.5) *umumlashgan tezlik* va *umumlashgan tezlanish* deb ataladi.

40-§. Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlari

Agar mexanik sistemaga bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, u erkin istalgan yo'nalishda ko'chishi cheklanadi, chunki bog'lanishlar sistema nuqtalariga faqatgina ayrim yo'nalishlarda ko'chish berishlari mumkin. Erkin bo'lmagan mexanik sistema uchun *mumkin bo'lgan ko'chish* tushunchasi kiritiladi.

Mumkin bo'lgan ko'chish deb, berilgan holatida, bog'lanishlarni o'zgartirmasdan sistema nuqtalarining faraz qilinadigan juda kichik ko'chishlari tushuniladi.

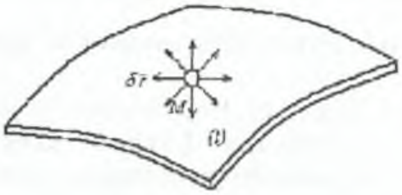
Shu qatori erkin bo'lmagan moddiy nuqta uchun ham mumkin bo'lgan ko'chish tushunchasini kiritamiz. Nuqta yoki mexanik sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishi tushunchasi sof geometrik tushunchadir. Nuqta yoki mexanik sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishi ,nuqta yoki mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'lmay, ularga qo'yilgan bog'lanishlarning xarakteriga bog'liqdir. Mumkin bo'lgan ko'chishda nuqta yoki sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar saqlanadi va geometrik ko'chishiga xalaqit bermaydi.

Moddiy nuqta M bo'shatmaydigan statsionar golonomli bog'lanishda qo'zg'almas sirtda joylashgan bo'lib, bog'lanish tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{40.1}$$

Bog'lanish tenglamasi (40.1) dan ko'rinib turibdiki, M nuqtaning birinchi ikkita koordinatasini ixtiyoriy qiymat qabul qiluvchi erkin o'zgaruvchilar deb olib, uchinchisini bog'lanish tenglamasidan ularning funksiyasi sifatida ko'rish mumkin. Sirtda M nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi biror holatini olamiz (51-shakl) va xayolan vaqtni to'xtatib, shu vaziyatda nuqtani ham qotiramiz.

Nuqtaning haqiqiy harakatini, unga ta'sir etayotgan kuchlarni va trayektoriyasini e'tiborga olmay, uning shu holatidan qo'yilgan bog'lanishlar ta'sirida qaysi yo'nalishda ko'chishini ko'ramiz. Biz ko'rayotgan misolda bog'lanish sirt bo'lgani uchun nuqta istalgan yo'nalishda sirt bo'ylab ko'chishi mumkin.



51-shakl

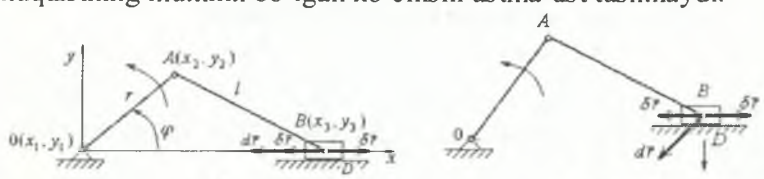
M nuqtaning sirt bo'ylab ixtiyoriy yo'nalishda cheksiz kichik ko'chishi vektori *mumkin bo'lgan ko'chish vektori* deyiladi. Vektor M nuqtada sirtga urinma ravishda ixtiyoriy tomonga yo'naladi. Demak, mumkin bo'lgan ko'chish vektori sirtga urinma tekislikda yotadi. 51-shaklda vektor $\delta\bar{r}$ bilan belgilangan bo'lib, bu yerda $\bar{r}$ nuqtaning koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektoridir. M nuqtaning cheksiz kichik ko'chishi bilan haqiqiy ko'chishini farq qilish kerak. Haqiqiy ko'chish $d\bar{r}$ yagona bo'lib, birgina bog'lanishlarga bog'liq bo'lmay, boshlang'ich shartlarga va nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarga ham bog'liqdir. Biz ko'rgan misolda sirt (statsionar bog'lanishda) qo'zg'almas bo'lib, haqiqiy harakat trayektoriyasi sirt ustida yotadi va $d\bar{r}$ haqiqiy ko'chish vektori ham sirt ustida yotadi va biror mumkin bo'lgan ko'chish vektori $\delta\bar{r}$ bilan ustma-ust tushadi.

Agar vaqt o'tishi bilan sirt(statsionar bo'lmagan bog'lanishda) o'zi ham biror qonun bilan harakatlansa, ya'ni bog'lanish (40.2) tenglama bilan ifodalansa,

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{40.2}$$

haqiqiy harakat trayektoriyasi sirt ustida yotmaydi. Haqiqiy ko'chish vektori $d\bar{r}$ ham sirtga urinma tekislikda yotmaydi. Mumkin bo'lgan ko'chish vektori $\delta\bar{r}$ esa to'xtatilgan vaqt va to'xtatilgan bog'lanishda aniqlanadi, yo'nalishi o'zgarmaydi, shuning uchun $d\bar{r}$ haqiqiy ko'chish vektori mumkin bo'lgan ko'chish vektori $\delta\bar{r}$ bilan ustma-ust tushmaydi.

52-shaklning *a)* chizmasida statsionar golonomli bog'lanish bo'lib, haqiqiy ko'chish bilan sistema biror nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi bitta o'q bo'ylab bir tomonga yoki qarama-qarshi tomonga yo'nalgan, *b)* chizmada statsionar bo'lmagan golonomli bog'lanish bo'lib, haqiqiy ko'chish bilan sistema biror nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi ustma-ust tushmaydi.



a) 52-shakl *b)*

Agar $d\bar{r}$ haqiqiy ko'chish, harakat qonuni $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ko'rinishdagi funksiyaning differensialidan iborat bo'lsa, mumkin bo'lgan ko'chish $\delta\bar{r}$ funksiyaning variatsiyasidan iborat.

Bizga ma'lumki:

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \qquad (40.3)$$

ga teng. Vektor $\delta\bar{r}$ uchun yozamiz:

$$\delta\bar{r} = \delta x\bar{i} + \delta y\bar{j} + \delta z\bar{k} \qquad (40.4)$$

(40.4) tenglamadagi $\delta x, \delta y, \delta z$ lar nuqtaning x,y,z koordinatalarining variatsiyalaridir. Funksiya qanday differensiallansa, variatsiyasini ham shunday hisoblanadi. Sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishi nuqtalarning variatsiyalarining analitik ifodalari orqali aniqlanadi.

41-§. Mumkin bo'lgan ko'chishda kuchning bajargan ishi haqida tushuncha. Umumlashgan kuch. Ideal bog'lanishlar

Golonom sistemaga ta'sir etuvchi hamma kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishini δA hisoblaymiz. Sistemaning M_k nuqtasiga ta'sir etuvchi kuch $\bar{F}_k$ bo'lsin. Bu kuchning $\delta\bar{r}_k$ mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishi

$$\delta A_k = \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = F_k \delta s_k \cos(\bar{F}_k, {}^\wedge \delta\bar{r}_k) \qquad (41.1)$$

Bu yerda $\delta\bar{r}_k$ vektorning moduli M_k nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishda chizgan trayektoriyasining δs_k yoyiga tengdir, ya'ni:

$$|\delta\bar{r}_k| = \delta s_k \qquad (41.2)$$

(41.1) tenglamani proyeksiyalari orqali ifodalasak:

$$\delta A_k = F_{xk}\delta x_k + F_{yk}\delta y_k + F_{zk}\delta z_k \qquad (41.3)$$

Sistemaning hamma nuqtalari uchun (41.1) va (41.3) tenglamalarni yozib hadma-had qo'shsak, (41.4) tenglama kelib chiqadi:

$$\delta A = \sum \delta A_k = \sum \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = \sum F_k \delta s_k \cos(\bar{F}_k, {}^\wedge \delta\bar{r}_k) =$$
$$= \sum (F_{xk}\delta x_k + F_{yk}\delta y_k + F_{zk}\delta z_k) \qquad (41.4)$$

Sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishdabajargan ishini qisqacha *mumkin ish* deb yuritamiz. Mumkin ishni golonomli sistemaning umumlashgan koordinatalari orqali ifodalaymiz. Sistema n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lib, erkinlik darajasi p ga teng. Sistemaning ixtiyoriy M_k nuqtasini (39.2) tenglamaga asosan umumlashgan koordinata orqali ifodalasak, $q_j(j=1,2,3,...,p)$ ga teng. Radius – vektorini ham umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$\bar{r}_k = x_k\bar{i} + y_k\bar{j} + z_k\bar{k} \tag{41.5}$$

Natijada sistemaning har bir nuqtasining radius-vektori uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_p)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{41.6}$$

Funksiyani Teylor qatoriga yoyib, sistemaning har bir nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi $\delta\bar{r}_k = (k=1,2,...,n)$ ni umumlashgan koordinata $q_j(j=1,2,3,...,p)$ larning bir-biriga bog'liq bo'lmagan $\delta q_j(j=1,2,3,...,p)$ variatsiyalari orqali ifodasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_p}\delta q_p$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{41.7}$$

(41.7) ifodani (41.4) tenglamaga olib borib qo'yib, umumiy ko'paytuvchi $\delta q_j(j=1,2,3,...,p)$ ni qavsdan tashqariga chiqarsak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k = \left(\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_p}\right)\delta q_p \tag{41.8}$$

Belgilash kiritamiz:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{xk}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right)$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots, p). \tag{41.9}$$

U holda (41.8) tenglamadagi mumkin ish δA quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_p\delta q_p \tag{41.10}$$

(41.10) tenglama tuzilishidan (41.3) tenglama bilan bir xil.
Demak (41.10) tenglamadagi umumlashgan koordinata variatsiyalari oldidagi koeffitsient $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ lar *umumlashgan kuchlar* deyiladi. Sistemaning bitta umumlashgan koordinatasini o'zgartirib, qolgan koordinatalami o'zgartirmasdan mumkin bo'lgan ko'chish beramiz, ya'ni:

$$\delta q_1 \neq 0, \qquad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_p = 0. \tag{41.11}$$

Kuchlarning shu mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan mumkin ishini $\delta A'$ desak:

$$\delta A' = Q_1 \delta q_1 \rightarrow Q_1 = \frac{\delta A'}{\delta q_1}. \tag{41.12}$$

kelib chiqadi. Bu Q_1 umumlashgan kuchdir.

***10-MASALA.**

Krivoship-shatun mexanizmi berilgan bo'lsin (53-shakl). Mexanizmning B polzuniga $\overline{P}$ kuch, OA krivoshipiga foydali qarshilik momenti M ta'sir etsin. Umumlashgan kuch hisoblansin, shamir va polzundagi ishqalanish kuchi hisobga olinmasin.

Yechish.

Mexanizmning erkinlik darajasi birga teng. Sistemaga mumkin bo'lgan ko'chish bersak, kuchlar ko'chishda mumkin ish bajaradi. Ya'ni:

$$\delta A = -P \delta x_3 - M \delta \varphi \tag{*10.1}$$

Lekin δx_3 erkin variatsiya bo'lmay, uni φ umumlashgan koordinataning variatsiyasi $\delta\varphi$ orqali ifodalash lozim. (39.3) formulaga asosan A va B nuqtalarning x_2, y_2, x_3 koordinatalarini φ umumlashgan koordinata orqali ifodasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

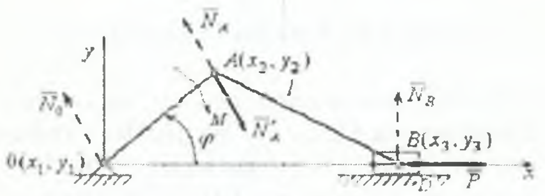
$$\left.\begin{aligned}\delta x_2 &= -r\sin\varphi\,\delta\varphi;\\ \delta y_2 &= r\cos\varphi\,\delta\varphi;\\ \delta x_3 &= -\left(r\sin\varphi + \frac{r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\delta\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{*10.2}$$

(*10.2) tenglamani (*10.1) ga olib borib qo‘yamiz:

$$\delta A = \left(\Pr\sin\varphi + \frac{P r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} - M\right)\delta\varphi. \tag{*10.3}$$

(41.10) tenglamaga asosan $q_1 = \varphi$ umumlashgan koordinataga mos umumlashgan kuch Q_1 teng bo‘ladi:

$$Q_1 = \Pr\sin\varphi + \frac{P r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} - M \tag{*10.4}$$



53-shakl

Bilamizki, bog‘lanishlar sistemaning ko‘chish erkinligini chegaralab harakatining xarakterini o‘zgartiradi. Harakatni to‘liq tekshirish uchun bog‘lanish reaksiyalarini o‘rganib chiqish lozim. Kuchlar aktiv kuchlarga va bog‘lanish reaksiya kuchlariga ajraladi.

Bog‘lanishlar ideal va ideal bo‘lmagan bog‘lanishlarga ajraydi. Sistemaning M_k nuqtasiga ta‘sir etuvchi aktiv kuchlarning (ichki va tashqi) teng ta‘sir etuvchisini $\overline{F}_k$ bilan, bog‘lanish reaksiya kuchlarining teng ta‘sir etuvchisini $\overline{R}_k$ bilan, barcha kuchlarning teng ta‘sir etuvchisini $\overline{F}_k^*$ bilan belgilaymiz.

Demak :

$$\overline{F}_k^* = \overline{F}_k + \overline{R}_k \tag{41.13}$$

Sistema nuqtalariga ko‘chish berib, kuchlarning bajargan elementar ishlarini hisoblaymiz:

$$\sum_{k=1}^{N}\delta A_k=\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k^{*}\delta\overline{r}_k=\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\delta\overline{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\overline{R}_k\delta\overline{r}_k \qquad (41.14)$$

Agar har qanday mumkin bo‘lgan ko‘chishda bog‘lanish reaksiya kuchlarining bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, sistema ideal bog‘lanishda deyiladi.
Ya’ni:

$$\sum_{k=1}^{N}\overline{R}_k\delta\overline{r}_k=0 \qquad (41.15)$$

Ideal bog‘lanishdagi sistemaga misol qilib mutlaq qattiq g‘adir-budur sirt ustida mutlaq qattiq jismning sirpanmasdan dumalashi, mutlaq silliq tekislik ustidagi sistemaning harakati, sistemaning mahkamlangan nuqtalarini keltirish mumkin.

42-§. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi

Mutlaq qattiq jismlar muvozanatining zarur va yetarli shartlari geometrik statikadan ma‘lum. Lekin jismlar sistemasining muvozanatini tekshirishda ularni bo‘laklab, har biri uchun muvozanat tenglama tuzishga to‘g‘ri keladi. Jismlar soni ortgan sari tenglamalar soni ham ortib boradi. Masalani bu usulda yechish murakkablashadi. Analitik statikada mutlaq qattiq jismlarning muvozanati tekshirish mumkin bo‘lgan ko‘chishlar prinsipiga asoslanadi. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi istalgan mexanik sistema muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalaydi, ya’ni *ideal bo‘shatmaydigan statsionar bog‘lanishdagi mexanik sistema muvozanatda bo‘lishi uchun, aktiv kuchlarning mumkin bo‘lgan ko‘chishda bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Demak mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\delta A=\sum_{k=1}^{n}F_k^{(a)}\cdot\delta\overline{r}_k=0 \qquad (42.1)$$

bu yerda $\overline{F}_k^{(a)}$-sistemaning k nuqtasiga qo'yilgan aktiv (tashqi va ichki) kuchlarning teng ta'sir etuvchisi. Birinchi navbatda sistema muvozanatda bo'lsa, (42.1) tenglama o'rinli ekanligini isbot qilamiz. Bu prinsipning zaruriy shartidir. Ideal bo'shatmaydigan statsionar bog'lanishdagi mexanik sistema muvozanatda bo'lsin. Bu shuni ko'rsatadiki, sistemaning har bir nuqtasi muvozanatda bo'ladi. Bo'shatish prinsipidan foydalangan holda sistemaning k nuqtasi uchun aktiv $\overline{F}_k^{(a)}$ kuchlar qatoriga bog'lanish reaksiya $\overline{N}_k$ kuchlarini qo'shib, geometrik statikaning muvozanat tenglamasini yozamiz:

$$\overline{F}_k^{(a)} + \overline{N}_k = 0 \qquad (42.2)$$

(42.2) tenglamani hadma – had ixtiyoriy mumkin bo'lgan ko'chishga ko'paytirib, sistemaning hamma nuqtalari uchun

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\overline{F}_k^{(a)} \delta \overline{r}_k + \overline{N}_k \delta \overline{r}_k\right) = 0 \qquad (42.3)$$

deb yozamiz.

Sistema ideal bog'lanishda bo'lgani uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{N}_k \delta \overline{r}_k = 0 \qquad (42.4)$$

U holda (42.3) tenglamadan (42.1) tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(a)} \delta \overline{r}_k = 0$$

Prinsipning zaruriy sharti isbot qilindi. Yetarli shartini, ya'ni (42.1) tenglama o'rinli bo'lsa, sistema muvozanatda bo'lishini, isbot qilamiz. Faraz qilamiz (42.1) tenglama o'rinli bo'lib, lekin sistemaning birinchi nuqtasi tinch holatdan harakatga kelgan bo'lsin. U holda nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_1 = \overline{F}_1^{(a)} + \overline{N}_1$ ga teng bo'lib noldan farqlidir. $\overline{R}_1$ kuchi ta'sirida tinch holatdagi birinchi nuqta uning ta'sir chizig'i bo'ylab haqiqiy ko'chish oladi. Biz ko'rayotgan holda bu ko'chish mumkin bo'lgan ko'chish $\delta\overline{r}_1$ bilan ustma-ust tushadi.

Shuning uchun:

$$\overline{R}_1 \cdot \delta \overline{r}_1 = R_1|\delta \overline{r}_1| > 0,$$

yoki:

$$(\overline{F}_1^{(a)}\delta \overline{r}_1 + \overline{N}_1\delta \overline{r}_1) > 0 \qquad (42.5)$$

ga teng. Qolgan nuqtalar tinch holatda deb, quyidagi tenglikni yozamiz:

$$\overline{F}_i^{(a)}\delta \overline{r}_i + \overline{N}_i\delta \overline{r}_i = 0$$

$$i = (2,3,\ldots n). \qquad (42.6)$$

(42.5) va (42.6) ifodalami hadma-had qo‘slısak :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{F}_k^{(a)}\delta \overline{r}_k + \overline{N}_k\delta \overline{r}_k\right) > 0 \qquad (42.7)$$

kelib chiqadi. Demak, (42.6) tenglamaga biror musbat tengsizlikni qo‘shsak, tengsizlik kelib chiqadi.

(42.7) tengsizlikka, muvozanatdan bitta nuqta emas, bir necha nuqta chiqsa ham, to‘g‘ri kelamiz.

Sistema ideal bog‘lanishda bo‘lgani uchun

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\delta \overline{r}_k = 0$$

bo‘ladi. Demak (42.7) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^{(a)}\delta \overline{r}_k > 0 \qquad (42.8)$$

(42.8) tengsizlik bajarilsa, (42.1) tenglama o‘rinsiz bo‘lib qoladi. Buning bo‘lishi mumkin emas. Demak sistemaning birorta ham nuqtasi harakatlanmaydi va prinsipning yetarli sharti isbotlandi.
(42.1) tenglamaning skalyar ifodasini yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}F_k^{(a)} \cdot \delta r_k \cdot \cos\left(\overline{F}_k^{(a)}, \wedge \delta \overline{r}_k\right) = 0$$

yoki

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}^{(a)}\delta x_k + F_{ky}^{(a)}\delta y_k + F_{kz}^{(a)}\delta z_k\right) = 0 \qquad (42.9)$$

Masalani yechishda (42.9) tenglamaning istalganidan foydalanish mumkin. Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini istalgan kuchlar ta‘siridagi mexanik sistema uchun qo‘llash mumkin.

***11-MASALA.**

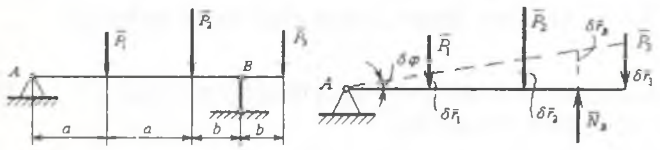
AB balka *A* va *B* tayanchlarga joylashgan bo'lib, unga vertikal $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ kuchlar ta'sir etsin. (54-shakl *a)*). *B* shamirdagi bog'lanish reaksiya kuchi aniqlansin.

Yechish:

Masalani yechish uchun *B* tayanchni bog'lanishdan ozod qilib, uning ta'sirini $\overline{N}_B$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz (54-shakl *b)*) va bu kuchni aktiv kuchlar qatoriga qo'shamiz. Sistemaning erkinlik darajasi bitta. *AB* balkani *A* shamir atrofida $\delta\varphi$ burchakka buramiz. Natijada $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ va $\overline{N}_B$ lar ta'sir etuvchi nuqtalari mos ravishda $\delta\overline{r}_1, \delta\overline{r}_2, \delta\overline{r}_3$ va $\delta\overline{r}_B$ mumkin bo'lgan ko'chishlar oladi. Ya'ni:

$$\left.\begin{aligned} &\delta r_1 = a\delta\varphi;\ \delta r_2 = 2a\delta\varphi;\\ &\delta r_B = (2a+b)\delta\varphi;\\ &\delta r_3 = 2(a+b)\delta\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (*11.1)$$

ga teng.



a) *b)*

54-shakl

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi (42.1)ga asosan yozamiz:

$$-P_1\,\delta r_1 - P_2\,\delta r_2 - P_3\,\delta r_3 + N_B\,\delta r_B = 0 \qquad (*11.2)$$

(*11.1) tenglamani (*11.2) ga qo'ysak, (*11.3) tenglama kelib chiqadi:

$$\left[-P_1\,a - 2\,P_2\,a - 2P_3\,(a+b) + N_B\,(2a+b)\right]\delta\varphi = 0 \qquad (*11.3)$$

(*11.3) tenglamada $\delta\varphi \neq 0$ bo'lgani uchun yozishimiz mumkin:

$$-P_1 a - 2P_2\,a - 2\,P_3(a+b) + N_B(2a+b) = 0 \qquad (*11.4)$$

(*11.4) tenglamadan $\overline{N}_B$ reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$N_B = \frac{P_1 a + 2P_2 a + 2P_3(a+b)}{2a+b}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Bog'lanishlar klassifikatsiyasini tushuntiring.
2. Erkin va erkin bo'lmagan mexanik sistemalarni tushuntiring.
3. Statsionar va statsionar bo'lmagan bog'lanishlar deb qanday bog'lanishlarga aytiladi?
4. Bo'shatmaydigan va bo'shatadigan bog'lanishlarni tushuntiring.
5. Golonomli va begolonom bog'lanishlar qanday bog'lanishlar?
6. Umumlashgan koordinatalar qanday aniqlanadi?
7. Mexanik sistemaning erkinlik darajasi nima?
8. Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlari qanday aniqlanadi?
9. Mumkin bo'lgan ko'chishda kuchning bajargan ishi qanday aniqlanadi?
10. Umumlashgan kuch qanday aniqlanadi?
11. Ideal bog'lanish shartini tushuntiring.
12. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini tushuntiring.

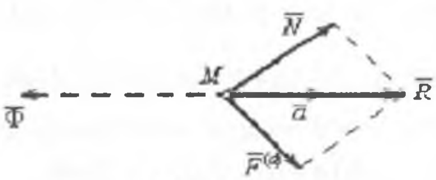
43-§. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Erkin bo'lmagan, massasi m bo'lgan moddiy nuqtaga $\overline{F}^{(a)}$ aktiv kuchlar ta'sir etsin (55-shakl).

Moddiy nuqtani fikran bog'lanishdan ozod qilib, $\overline{N}$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz.

U holda dinamikaning asosiy qonunini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\overline{a} = \overline{F}^{(a)} + \overline{N} \tag{43.1}$$



55-shakl

(43.1) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\overline{F}^{(a)} + \overline{N} + (-m\overline{a}) = 0 \tag{43.2}$$

Belgilash kiritamiz:

$$-m\overline{a} = \overline{\Phi} \tag{43.3}$$

(43.3) ifodani (43.2) ga olib borib qo'ysak, (43.4) tenglama kelib chiqadi.Ya'ni:

$$\overline{F}^{(a)} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0 \tag{43.4}$$

Miqdor jihatdan massa bilan tezlanishning ko'payitmasiga teng bo'lib, yo'nalish jihatdan tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan $\overline{\Phi}$ kuchi *inersiya kuchi* ***deyiladi.*** (43.4) tenglama erkin bo'lmagan moddiy nuqta uchun *Dalamber prinsipini* ifodalaydi.

Demak, *erkin bo'lmagan moddiy nuqtaga harakati davomida ta'sir etuvchi $F^{(a)}$ aktiv kuchlar va $\overline{N}$ reaksiya kuchlari shartli qo'yilgan $\overline{\Phi}$ inersiya kuchi bilan muvozanatlashadi.*

Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi yordamida dinamikaning birinchi asosiy masalalarini yechish qulaydir. Harakat qonunlari berilganda ta'sir kuchlarini aniqlash masalasi osongina yechiladi. (43.4) tenglamadan ko'rinib turibdiki, dinamika masalalari statika masalalariga keltirib yechiladi. Dalamber prinsipidan foydalanib masalalar yechilganda nuqtaning tezlanishi yo'nalishini bilish darkor. Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakat qilsa, tezlanish yo'nalishi aniqdir. Bunda inersiya kuchi vektori $\overline{\Phi} = -m\overline{a}$ bo'lib, moduli $\Phi = m\overline{a}$ ga teng. Nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakat qilsa, $\Phi = 0$ bo'ladi. Agar nuqta egri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlansa, inersiya kuchi urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi.

Urinma inersiya kuchi:

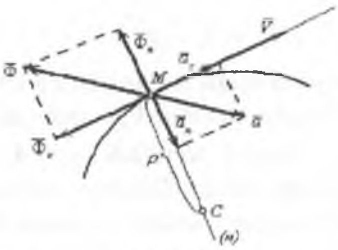
$$\overline{\Phi}_\tau = -m\overline{a}_\tau \tag{43.5}$$

ga teng bo'lib, urinma tezlanish $\overline{a}_\tau$ ga qarama-qarshi tomonga (56-shakl) yo'naladi. Normal inersiya kuchi,

$$\overline{\Phi}_n = -m\overline{a}_n \tag{43.6}$$

ga teng bo'lib, normal tezlanish $\overline{a}_n$ ga qarama-qarshi tomonga (56-shakl) yo'naladi. (43.3) ifodani 59-shaklda ko'rsatilganidek urinma inersiya kuchi va normal inersiya kuchlarini egri chiziqli trayektoriyaning bosh normal, urinma, binormal o‘qlariga proyeksiyalasak:

$$\Phi_\tau = -m a_\tau = -m\frac{dv}{dt} = -m\ddot{s}, \quad \Phi_n = -m a_n = -m\frac{v^2}{\rho} \qquad (43.7)$$



56-shakl

Xuddi shunday (43.3) ifodani Dekart koordinata o‘qlariga proyeksiyalasak:

$$\Phi_x = -m a_x = -m\ddot{x}, \Phi_y = -m a_y = -m\ddot{y}, \Phi_z = -m a_z = -m\ddot{z} \qquad (43.8)$$

Aktiv $F^{(a)}$ va $\overline{N}$ reaksiya ta‘sirida harakatlanuvchi M nuqtaning inersiya kuchi nuqtaga qo‘yilgan bo‘lmay bog‘lanishlarga qo‘yiladi. Dinamika masalalarini Dalamber prinsipi yordamida yechish usulini nazariy mexanikaning mustaqil *kinetostatika* bo‘limi deb ham yuritish mumkin. Ma'nosi shundan iboratki, dinamika masalalarini yechish uchun nuqtaning harakat differensial tenglamalarini tuzishda statika usullaridan foydalaniladi

***12-MASALA.**

Og‘irligi 100 N bo‘lgan yuk gorizontal platformada $a = 5m/s^2$ tezlanish bilan harakatlanmoqda (57-shakl). Quyidagi hollar uchun yukning platformaga ko‘rsatadigan bosimi aniqlansin:

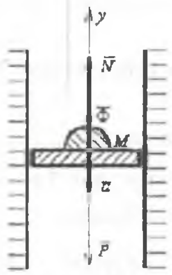
1. Tezlanishi vertikal pastga yo‘nalgan hol uchun,
2. Tezlanishi vertikal yuqoriga yo‘nalgan hol uchun.

Yechish:

Yukni M moddiy nuqta deb qarab, platforma $\overline{a}$ tezlanish bilan vertikal pastga tushganida inersiya kuchi $\overline{\Phi}$ ni vertikal yuqoriga yo‘naltiramiz (60-shakl). M moddiy nuqtaga ta‘sir etuvchi kuchlar quyidagilar: : Moduli $\Phi = ma = \frac{P}{g}a$ ga teng bo‘lgan va shartli qo‘yilgan inersiya kuchi $\overline{\Phi}$, og‘irlik kuchi $\overline{P} = m\overline{g}$ va platformaning reaksiya kuchi $\overline{N}$.

Dalamber prinsipiga asosan M moddiy nuqtaga ta‘sir etuvchi $\overline{P}, \overline{N}$ va $\overline{\Phi}$ kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. 57 - shaklda ko‘rsatilgan hol uchun muvozanat tenglamasini tuzamiz:

$$\sum_{k=1}^{3} F_{ky} = 0 \quad N - P + \Phi = 0 \tag{*12.1}$$



57-shakl

(*12.1) tenglamadan hosil qilamiz:

$$N = P - \Phi = P - \frac{P}{g}a = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) \tag{*12.2}$$

$$N = 100 \cdot \left(1 - \frac{5}{9,8}\right) = 100 \cdot 0,51 = 51(N)$$

$$N = 51(N)$$

Yukning platformaga ko‘rsatadigan bosimi, dinamikaning qonuniga asosan, modul jihatdan platforma tomonidan yukka ta‘sir etuvchi reaksiya kuchiga teng bo‘lib, yo‘nalishi qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan. Shuning uchun platformaning reaksiya kuchini aniqlash bilan yukning platformaga ko‘rsatadigan bosimini aniqlagan bo‘lamiz. (*12.2) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, bosim kuchi og‘irlik kuchidan inersiya kuchining moduliga teng miqdorda kichik ekan. Agar $a=g$ bo'lsa, yukning platformaga ko'rsatadigan bosimi nolga teng. Agar platforma $\overline{a}$ tezlanish bilan yuqoriga ko'tarilsa, inersiya kuchi $\overline{\Phi}$ pastga qarab yo'naladi. U holda muvozanat tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$N - P - \Phi = 0$$

$$N = P + \Phi = P + \frac{P}{g}a = P\left(1 + \frac{a}{g}\right) \qquad (*12.3)$$

$$N = 100 \cdot \left(1 + \frac{5}{9{,}8}\right) = 100 \cdot 1{,}51 = 151(N)$$

$$N = 151\,(N)$$

(*12.3) tenglamadan ko'rinib turibdiki, yukning platformaga ko'rsatadigan bosimi tezlanishi ortishi bilan ortib borar ekan.

44-§. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi

Massalari mos ravishda $m_1, m_2, ..., m_n$ bo'lgan, n ta nuqtadan iborat mexanik sistemaning har bir nuqtasi uchun Dalamber prinsipini qo'llaymiz. Sistemaning ixtiyoriy M_k nuqtasiga tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{F}_k^{(e)}$ (aktiv va reaksiya kuchlari), ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{F}_k^{(i)}$ ta'sir etsin. Shartli ravishda nuqtaga inersiya kuchi $\overline{\Phi}_k$ ni qo'yamiz. $\overline{F}_k^{(e)}, \overline{F}_k^{(i)}$ va $\overline{\Phi}_k$ kuchlar o'zaro muvozanatlashadi.

Ya'ni:

$$\overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)} + \overline{\Phi}_k = 0 \qquad (44.1)$$

(44.1) tenglamani sistemaning hamma nuqtalari uchun qo'llasak:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k = 0 \qquad (44.2)$$

Demak, *erkin bo'lmagan mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar qatoriga inersiya kuchlarini qo'shsak, ular o'zaro muvozanatlashadi.*

(44.2) tenglama mexanik sistema uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi. Ichki kuchlar xossasiga asosan yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(i)} = 0 \tag{44.3}$$

(44.2) tenglamaga asosan :

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k = 0 \tag{44.4}$$

Bu yerda: $\overline{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(e)}$ - tashqi kuchlarning bosh vektori,

$\overline{R}^{(u)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k$ - inersiya kuchlarining bosh vektori.

(44.4) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\overline{R}^{(e)} + \overline{R}^{(u)} = 0 \tag{44.5}$$

Mexanik sistemada biror O nuqtani qutb deb olib, qutbga nisbatan nuqtaning holatini ifodalovchi radius-vektor $\overline{r}_k$ ga (44.1) tenglamaning ikkala tomonini ko'paytiramiz:

$$\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)} + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(i)} + \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{(i)}\right) + \overline{m}_0\left(\overline{\Phi}_k\right) = 0 \tag{44.6}$$

(44.6) ifodani mexanik sistemaning hamma nuqtalari uchun qo'llasak, quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{\Phi}_k) = 0 \tag{44.7}$$

Ichki kuchlar xossasiga asosan:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(i)}) = 0 \tag{44.8}$$

(44.8) ifodaga asosan (44.7) tenglamani yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{\Phi}_k) = 0 \tag{44.9}$$

Bu yerda:

$\overline{M}_o^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_o\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$- tashqi kuchlarning O qutbga nisbatan bosh momenti,

$\overline{M}_o^{(u)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_o(\overline{\Phi}_k)$-inersiya kuchlarining O qutbga nisbatan bosh momenti.

Demak:

$$\overline{M}_0^{(e)} + \overline{M}_0^{(u)} = 0 \qquad (44.10)$$

(44.5) va (44.10) tenglamalar sistema harakat miqdorining va kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremalarga ekvivalent tenglamalardir. Ya'ni:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(e)}$$
$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_0^{(e)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(e)}) \qquad (44.11)$$

(44.5) va (44.10) tenglamalarni (44.11) bilan taqqoslasak,

$$\left.\begin{aligned} \overline{R}^{(u)} &= -\frac{d\,\overline{Q}}{d\,t}; \\ \overline{M}_0^{(u)} &= -\frac{d\,\overline{K}_0}{d\,t} \end{aligned}\right\} \qquad (44.12)$$

(44.12) tenglamadan ko'rinib turibdiki, inersiya kuchlarining bosh vektori mexanik sistema harakat miqdoridan, bosh momenti kinetik momentdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalarga teng bo'lib, yo'nalishlari ularga qarama-qarshidir. (44.4) va (44.9) tenglamalarni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'siridagi mutlaq qattiq jism muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalovchi statikaning muvozanat tenglamasini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kx} = 0; \qquad && \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{\Phi}_k) = 0; \\ &\sum_{k=1}^{n} F_{ky}^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ky} = 0; && \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{\Phi}_k) = 0 \\ &\sum_{k=1}^{n} F_{kz}^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kz} = 0. && \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{\Phi}_k) = 0 \end{aligned} \qquad (44.13)$$

Agar kuchlar bir tekislikda yotsa, yoki parallel bo'lsa, yoki ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishsa, (44.13) tenglamadagi tenglamalar soni kamayadi. Istalgan o'zgaruvchi mexanik sistemaning harakatini to'liq o'rganish uchun (44.13) tenglama zarurdir, lekin yetarli emas. Ammo mutlaq qattiq jism uchun (44.13) tenglama yetarli bo'lib, jismning harakatini to'liq aniqlaydi.

Bu metod bilan sistema harakati vaqtida yuzaga keladigan reaksiya kuchlarini aniqlash qulaydir. Chunki tenglamalarni tuzishda ichki kuchlar hisobga olinmaydi. Amaliyotda (44.5) (44.10) va (44.13) tenglamalarni qo'llash uchun inersiya kuchlarining bosh vektori $\overline{R}^{(u)}$ va bosh momenti $\overline{M}_o^{(u)}$larni hisoblash sodda formulalari avvaldan aniq bo'lishi lozim.

Statika bo'limida kuchlar qanday sodda holga keltirilgan bo'lsa,inersiya kuchlari ham xuddi shunday usulda sodda holga keltiriladi, ya'ni ixtiyoriy tanlab olingan markazga fikran kuchlar parallel ko'chiriladi, natijada keltirish markazida kuchlarga teng kuch va tashkil etuvchilari shu kuchlarga teng juftlar hosil bo'ladi. Hamma inersiya kuchlarini va momentlarini qo'shsak, keltirish markazida inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti kelib chiqadi.

Inersiya kuchlarining bosh vektori teng bo'ladi:

$$\overline{R}^{(u)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{a}_k \qquad (44.14)$$

bu yerda

$$\overline{a}_k = \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} \qquad (44.15)$$

(4.15) ifodani (44.14)ga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

$$\overline{R}^{(u)} = -\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k \qquad (44.16)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k = M\overline{r}_C$$

Bizga ma'lum bo'lgan ifodani (44.16) ga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\overline{R}^{(u)} = -\frac{d^2}{dt^2}(M\,\overline{r}_C) = -M\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

yoki

$$\overline{R}^{(u)} = -M\overline{a}_C \qquad (44.17)$$

bu yerda M – jism massasi, $\overline{a}_C$ - massalar markazi tezlanishi.

Demak, ixtiyoriy harakatdagi jism inersiya kuchlarining bosh vektori, sistema massasi va massalar markazi tezlanishining ko'paytmasiga teng bo'lib, tezlanishga qarama-qarshi tomonga yo'naladi. Inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblash ancha murakkab. Tekis-parallel harakat qiluvchi qattiq jism uchun inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblaymiz.

Keltirish markazi deb simmetriya tekisligida ixtiyoriy O nuqtaniolamiz va shu markazga nisbatan inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblaymiz:

$$\overline{M}_0^{(u)} = \sum_{k=1}^{n}\overline{m}_0(\overline{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k \times m_k\overline{a}_k \qquad (44.18)$$

bu yerda $\overline{r}_k$ - keltirish markazi O ga nisbatan jism bo'lakchasining radius-vektori, m_k - bo'lakchaning massasi, $\overline{a}_k$ - bo'lakchaning tezlanishi. Kinematika bo'limidan bizga ma'lumki,

$$\overline{a}_k = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_k - \omega^2\overline{r}_k$$

$$\overline{m}_0(\overline{\Phi}_k) = -\overline{r}_k \times m_k\overline{a}_k = -\overline{r}_k \times (\overline{a}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_k - \omega^2\overline{r}_k) = \qquad (44.19)$$
$$= \overline{a}_0 \times m_k\overline{r}_k - \overline{\varepsilon}\, m_k r_k^2 \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

Chunki,

$$\overline{r}_k \times \overline{r}_k = 0\ ;\quad \overline{r}_k \times (\overline{\varepsilon} \times \overline{r}_k) = \overline{\varepsilon} r_k^2 - \overline{r}_k \cdot (\overline{r}_k \cdot \overline{\varepsilon}) = \overline{\varepsilon}\, r_k^2 \qquad (44.20)$$

(44.20) o'rinli, chunki $\overline{r}_k \perp \overline{\varepsilon}$ bo'lgan: uchun $\overline{r}_k \cdot \overline{\varepsilon} = 0$.

Demak (44.19) tenglamani hisobga olgan holda (44.18) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

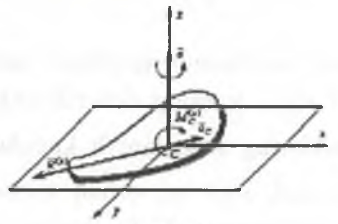
$$\overline{M}_0^{(u)} = \overline{a}_0 \times \sum_{k=1}^{n} m_k\overline{r}_k - \overline{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \qquad (44.21)$$

Massalar markazini va o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblash formulalarini e'tiborga olsak, (44.21) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\overline{M}_0^{(u)} = \bar{r}_C \times M\,\bar{a}_C - I_z\bar{\varepsilon}, \qquad (44.22)$$

bu yerda $\bar{r}_C$- keltirish markazi O nuqtaga nisbatan massalar markazining radius-vektori, I_z- keltirish markazi O nuqtadan o'tuvchi, harakat tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan Oz o'qiga nisbatan inersiya momenti.

Agar keltirish markaz deb massalar markazini olsak, u holda $\bar{r}_C = 0$ bo'ladi va (44.22) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:



58-shakl

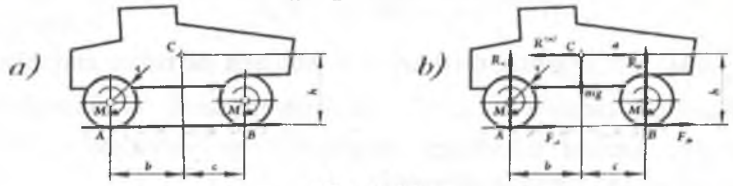
$$\overline{M}_0^{(u)} = -I_z\bar{\varepsilon}, \qquad (44.23)$$

(44.23) tenglamadagi minus ishorasi moment vektori $\overline{M}_o^{(u)}$ning yo'nalishi burchak tezlanish vektori $\bar{\varepsilon}$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi yo'naladi.

Xulosa qilib aytganda, inersiya kuchlari sistemasi massalar markaziga qo'yilgan (44.17) tenglamada ifodalangan bosh vektorga va jismning simmetriya tekisligida yotuvchi (44.23) tenglamada ifodalangan juftga keltirildi (58-shakl).

***13-MASALA**

Samosval mashinaning to'rtta g'ildiraklariga bir xil tormozlovchi moment M qo'yilgan (59-shakl a)). Samosval g'ildiraklarining radiusi R, massasi m ga teng bo'lib, massalar markazi C nuqtaga joylashgan. Shakldagi b,c,h o'lchamlar berilgan. Samosvalning $\bar{a}$ sekinlanishi va juft g'ildiraklarning yerga ko'rsatadigan bosimlari $\bar{F}_A, \bar{F}_B$ aniqlansin.



59-shakl

Yechish :

Samosvalga tormoz berilganda quyidagi tashqi kuchlar ta'sir etadi: og'irlik kuchi $m\bar{g}$, yerning normal reaksiya kuchlari $\bar{R}_A$ va $\bar{R}_B$ juft g'ildiraklaring ishqalanish kuchlari $\bar{F}_{fA}$ va $\bar{F}_{fB}$ (59-shakl b)). Mexanik sistema uchun tormozlovchi moment ichki kuch hisoblanadi. Samosval ilgarilanma harakatda bo'lgani uchun inersiya kuchlari massalar markaziga qo'yilgan birgina $\bar{R}^{(u)}$ ga keltiriladi. Uning moduli $\bar{R}^{(u)} = ma$ ga teng bo'lib, yo'nalishi sekinlanish $\bar{a}$ ga qarama-qarshidir. Dalamber prinsipining (44.13) tenglamasini tekislikda ta'sir etuvchi kuchlar uchun tuzamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kx} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ky} = 0 \qquad (*13.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^{n} m_A(\bar{\Phi}_k) = 0$$

(*13.1) tenglamani tuzamiz:

$$-R^{(u)}+F_{fA}+F_{fB}=0$$
$$-mg+R_A+R_B=0$$
$$R^{(u)}\cdot h-mg\cdot b+R_B(b+c)=0 \qquad (*13.2)$$

(*13.2.) tenglamadagi noma'lumlar sonini kamaytirish maqsadida samosvalning juft g'ildiraklari uchun qo'shimcha muvozanat shartlari kiritamiz:

$$F_{fA}\cdot R-2M=0 \qquad F_{fB}\cdot R-2M=0 \qquad (*13.3)$$

(*13.3) tenglamalami hadma-had qo'shsak,

$$F_{fA}+F_{fB}=4M/R \qquad (*13.4)$$

kelib chiqadi. (*13.4)ni (*13.2)ga qo'yamiz. U holda:

$$-ma+4M/R=0,$$
$$-mg+R_A+R_B=0,$$
$$mah-mgb+R_B(b+c)=0, \qquad (*13.5)$$

(*13.5) dan

$a=4M/mR$,

$R_B=(mgb-mah)/(b+c)=(mgb-4Mh/R)/(b+c)$,

$R_A=mg-R_B=(mgc+4Mh/R)/(b+c) \qquad (*13.6)$

Dinamikaning ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuniga asosan juft g'ildiraklaming yerga ko'rsatadigan bosimi miqdor jihatdan yeming normal reaksiya kuchiga teng bo'lib, yo'nalishi unga qarama-qarshi yo'naladi.

Demak:

$F_B=(mgb-4Mh/R)/(b+c), F_A=(mgc+4Mh/R)/(b+c)$

Javob:

$$a=4M/mR;$$
$$F_B=(mgb-4Mh/R)/(b+c);$$
$$F_A=(mgc+4Mh/R)/(b+c).$$

45-§. Dinamikaning umumiy tenglamasi

Dinamika masalalarini yechishda Dalamber prinsipi bilan birgalikda mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llaymiz. Ideal golonomli bo'shatmaydigan bog'lanishli mexanik sistema n ta nuqtadan iborat bo'lsin. Mexanik sistemaning M_k nuqtasining massasi m_k, tezlanishi a_k bo'lsin. Nuqtaga ta'sir etuvchi hamma aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{F}_k^{(a)}$, bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $\overline{N}_k$ bo'lsin. Agar nuqtaga shartli ravishda inersiya kuchi $\overline{\Phi}_k = -m_k\overline{a}_k$ ni qo'ysak, Dalamber prinsipiga asosan :

$$\overline{F}_k^{(a)} + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k = 0 \qquad (45.1)$$

Mexanik sistemaga mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. (45.1) tenglamaning hamma hadlarini M_k nuqtaning $\delta\overline{r}_k$ mumkin bo'lgan ko'chishga ko'paytiramiz:

$$(\overline{F}_k^{(a)} + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k = 0 \qquad (45.2)$$

(45.2) tenglamani sistemaning hamma nuqtalari uchun qo'llab, hadma-had qo'shsak, (45.3) tenglama kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k^{(a)} + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k = 0 \qquad (45.3)$$

yoki

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k^{(a)} + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\delta\overline{r}_k = 0 \qquad (45.4)$$

Sistema ideal bog'lanishda bo'lgani uchun reaksiya kuchlarining mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishlari nolga teng bo'ladi.

Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{N}_k\delta\overline{r}_k = 0$$

Demak, (45.4) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k^{(a)}+\overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k=0 \qquad (45.5)$$

(45.5) tenglamaning skalyar ko'paytmasini yoyib chiqsak, quyidagi analitik ifodani hosil qilamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}^{(a)}+\Phi_{kx})\delta x_k+(F_{ky}^{(a)}+\Phi_{ky})\delta y_k+(F_{kz}^{(a)}+\Phi_{kz})\delta z_k=0 \qquad (45.6)$$

(45.5) va (45.6) tenglamalar *dinamikaning umumiy tenglamasini* ifodalaydi. Bu tenglama ikkita prinsipni qo'llash natijasida kelib chiqqani uchun, dinamikaning umumiy tenglamasi, Lagranj-Dalamber tenglamasi deb ataladi. Demak, *ideal golonomli bo'shatmaydigan bog'lanishli mexanik sistemaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning va shartli qo'yilgan inersiya kuchlarining mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishlarining yig'indisi nolga tengdir*.

Inersiya kuchi $\overline{\Phi}_k=-m_k\overline{a}_k$ ni e'tiborga olsak, dinamikaning umumiy tenglamasi quyidagi qo'rinishda yoziladi:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k^{(a)}-m_k\overline{a}_k)\delta\overline{r}_k=0 \qquad (45.7)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}^{(a)}-m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(F_{ky}^{(a)}-m_k\ddot{y}_k)\delta y_k+(F_{kz}^{(a)}-m_k\ddot{z}_k)\delta z_k=0 \qquad (45.8)$$

Mexanik sistema ideal bo'lmagan bog'lanishda bo'lsa ham dinamikaning umumiy tenglamalaridan foydalanib masalalarini yechish mumkin. Bu holda hamma ishqalanish kuchlari aktiv kuchlar qatoriga kiradi. Dinamikaning umumiy tenglamasining afzalligi shundan iboratki, mexanik sistemani moddiy nuqta deb qarab sistemaning ilgarilanma harakati tekshiriladi.

***14-MASALA.**

Bloklar sistemasiga og'irliklari $P_A=100N$ va $P_B=80N$ bo'lgan A va B yuklar osilgan. A,B yuklaming tezlanishlari va bloklar sistemasidagi arqonning tortilish kuchi aniqlansin. Bloklar massasi hisobga olinmasin va arqon cho'zilmaydigan deb qaralsin (60-shakl).

Yechish:

A va B yuklar ilgarilanma harakatda bo'lganlari uchun moddiy nuqta deb qarash mumkin. Demak mexanik sistema golonomli ideal bog'lanishda bo'lib, ikkita A va B moddiy nuqtalardan iborat. Nuqtalarga $\overline{\Phi}_A$ va $\overline{\Phi}_B$ inersiya kuchlari ta'sir etib, yo'nalishlari $\overline{a}_A$ va $\overline{a}_B$ tezlanishlarga qarama-qarshi yo'naladi. Inersiya kuchlarining moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$\Phi_A = \frac{P_A}{g} a_A\,, \quad \Phi_B = \frac{P_B}{g} a_B. \qquad (*14.1)$$

Agar sistemaning A nuqtasiga yuqoriga qarab $\delta \overline{r}_A$ mumkin bo'lgan ko'chish bersak, B nuqtasi pastga yo'nalgan $\delta \overline{r}_B$ ko'chish oladi.

Dinamikaning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$(\overline{P}_A + \overline{\Phi}_A)\cdot \delta \overline{r}_A \div (\overline{P}_B + \overline{\Phi}_B)\cdot \delta \overline{r}_B = 0 \qquad (*14.2)$$

(*14.2) tenglamadagi hamma vektorlarnig yo'nalishi 60-shaklda ko'rsatilgan. Skalyar ko'paytmani ochib chiqsak,

$$-P_A|\delta \overline{r}_A| - \Phi_A|\delta \overline{r}_A| + P_B|\delta \overline{r}_B| - \Phi_B|\delta \overline{r}_B| = 0 \qquad (*14.3)$$

(*14.1) tenglamani e'tiborga olsak, (*14.3) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi :

$$-P_A|\delta \overline{r}_A| - \frac{P_A}{g} a_A|\delta \overline{r}_A| + P_B|\delta \overline{r}_B| - \frac{P_B}{g} a_B|\delta \overline{r}_B| = 0 \qquad (*14.4)$$

Arqon cho'zilmaydigan bo'lgani uchun:

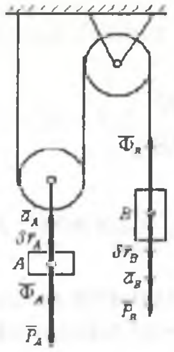
$$|\delta \overline{r}_B| = 2|\delta \overline{r}_A| \qquad (*14.5)$$

A yuk B yukka nisbatan ikki barobar sekin harakat qiladi. Ya'ni:

$$a_B = 2a_A \qquad (*14.6)$$

(*14.5) va (*14.6) tenglamalarni e'tiborga olsak:

$$\left[-P_A - \frac{P_A}{g} a_A + 2P_B - 4\frac{P_B}{g} a_A\right]|\delta \overline{r}_A| = 0 \qquad (*14.7)$$

60-shakl 61-shakl

(*14.5) va (*14.6) tenglamalarni e'tiborga olsak:

$$\left[-P_A - \frac{P_A}{g}a_A + 2P_B - 4\frac{P_B}{g}a_A\right]\left|\delta \bar{r}_A\right| = 0 \qquad (*14.7)$$

(*14.7) tenglamada $\delta r_A \neq 0$ bo'lgani uchun (*14.8) tenglama kelib chiqadi:

$$-P_A - \frac{P_A}{g}a_A + 2P_B - 4\frac{P_B}{g}a_A = 0$$

$$a_A = \frac{2P_B - P_A}{4P_B + P_A}g = 1{,}4\,m/s^2 \qquad (*14.8)$$

(*14.8) tenglamada (*14.6) tenglamani e'tiborga olsak:

$$a_B = 2a_A = 2{,}8\,m/s^2$$

A yuk B yuklarning tezlanishlarini aniqladik. Arqonning tortilish kuchini aniqlash uchun fikran arqonni qirqib inersiya kuchini yo'naltiramiz (61-shakl), kuchlar sistemasi Dalamber prinsipiga asosan nolga ekvivalentdir. Shuning uchun quyidagi tenglamani yozishimiz mumkin:

$$\bar{T} + \bar{\Phi}_B + \bar{P}_B = 0$$

yoki

$$\bar{T} + \frac{P_B}{g}\bar{a}_B + \bar{P}_B = 0 \qquad (*14.9)$$

(*14.9) tenglamani Oy koordinata o'qiga proyeksiyalasak:

$$T + \frac{P_B}{g}a_B - P_B = 0 \qquad (*14.10)$$

(*14.10) tenglamadan arqonning tortilish kuchini topamiz:

$$T = -\frac{P_B}{g} a_B + P_B = -\frac{80}{9,8} \cdot 2,8 + 80 = 57,2\ N$$

Javob:

$$a_A = 1,4\, m/s^2\ ;\ a_B = 2,8\ m/s^2\ ;\ T = 57,2\ N$$

46-§. Umumlashgan koordinatalarda mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari

Dinamikaning umumiy tenglamasidan umumlashgan koordinatalarda sistemaning harakat differensial tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Erkinlik darajasi p ga teng bo'lgan ideal golonomli bo'shatmaydigan bog'lanishli n ta nuqtadan iborat mexanik sistemani ko'ramiz. Sistemaning holatini inersial koordinata o'qlariga nisbatan $q_j(j = 1,2,....,p)$ umumlashgan koordinatalar orqali aniqlab, sistema nuqtalarining koordinata boshiga nisbatan radius-vektorlari ham umumlashgan koordinatlarning funksiyalari ko'rinishida ifodalaymiz, ya'ni (41.6) formulaga asosan :

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_p) \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{46.1}$$

(41.7) tenglamaga asosan yozamiz:

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \qquad (k = 1,2,...,n). \tag{46.2}$$

Nuqtalari aktiv kuchlar $\bar{F}_k^{(a)}\ (k = 1,2,...,n)$ ta'siridagi mexanik sistemaga Dalamber va mumkin bo'lgan ko'chish prinsiplarini qo'llab, dinamikaning umumiy tenglamasini yozamiz. Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \tag{46.3}$$

(46.3) tenglamaga (46.2) ni olib kelib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta q_j \left[\sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{\Phi}_k) \right] \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0 \tag{46.4}$$

Agar δq_j oldidagi koeffitsientlar alohida-alohida nolga teng bo'lsa, ma'lumki $\delta q_j(j=1,2,....,p)$ har biri o'zaro bog'liq bo'lmay erkin bo'lgani uchun (46.4) tenglama o'rinli bo'ladi. Demak:

$$\sum_{k=1}^{n}(\bar{F}_k^{(a)}+\bar{\Phi}_k)\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=0\quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{46.5}$$

(46.5) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=-\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^{(a)}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}\quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{46.6}$$

Bu yerda: $\sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=-Q_j$ ga teng. (41.9) formulaga asosan:

$$Q_j=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^{(a)}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}\quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{46.7}$$

Bu yerda Q_j - umumlashgan aktiv kuchlar. (46.6) tenglamaning chap tomonidagi ifoda umumlashgan inersiya kuchlarini ifodalaydi. Ya'ni:

$$Q_j^{(in)}=\sum_{k=1}^{n}\bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=-\sum_{k=1}^{n}m_k\bar{a}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}\quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{46.8}$$

(46.7) va (46.8) tenglamalarni (46.6) ga qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$Q_j^{(in)}=-Q_j\quad (j=1,2,\ldots,p) \tag{46.9}$$

(46.8) tenglamaga ayrim o'zgartirishlar kiritamiz:

$$\bar{a}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=\ddot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}\right)-\dot{\bar{r}}_k\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}\right) \tag{46.10}$$

$$(j=1,2,3,\ldots,p)$$

Quyidagi tenglik o'rinli ekanligini isbot qilamiz:

$$\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}=\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_j}; \tag{46.11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right)=\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}; \tag{46.12}$$

Aniqki:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_p),$$

$$\dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \cdots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_p}\dot{q}_p \qquad (46.13)$$

Ko'paytuvchi $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ $(j = 1,2,\ldots, p)$ umumlashgan tezlikka bog'liq bo'lmay, umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'lgani uchun (46.13) tenglamadan shunday xulosaga kelamizki,

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j};$$

Demak (46.11) tenglama isbotlandi. $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ $(j = 1,2,\ldots, p)$ ifoda umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'lgani uchun quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right)\cdot \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_i \qquad (46.14)$$

Ikkinchi tomondan:

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad (46.15)$$

Demak,

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_i \qquad (46.16)$$

(46.14) va (46.15) tenglamalarning o'ng tomonlarining tengligini e'tiborga olsak, (46.12) ifodaning to'griligi kelib chiqadi. (46.10) tenglamaga qaytib (46.11) va (46.12) lami qo'ysak:

$$\bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$$

yoki

$$\bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\dot{\bar{r}}_k^2}{2}\right). \qquad (46.17)$$

Bu yerda, $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_k$ ga teng. (46.17) tenglamani (46.8)ga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$Q_j^{(in)} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}\right), \quad j = 1,2,\ldots,p$$

Bu yerda $T = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}$ sistema kinetik energiyasi bo'lgani uchun tenglama quyidagi ko'rinishni oladi. Ya'ni:

$$Q_j^{(in)} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j = 1,2,\ldots,p) \tag{46.18}$$

(46.18) ifodani (46.9) tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1,2,\ldots,p) \tag{46.19}$$

(46.19) tenglama *umumlashgan koordinatalarda mexanik sistemaning differensial tenglamalari yoki Lagranjning II tur differensial tenglamalari deyiladi.*

Tenglamaning afzalligi shundan iboratki, *birinchidan* golonomli mexanik sistema qanday harakat qilmasin, dinamika masalalarini yechish uchun yagona sodda usuldir, *ikkinchidan* (46.19) da keltirilgan tenglamalar soni sistema nuqtalarining soniga bog'liq bo'lmay, sistemaning erkinlik darajasiga bog'liqdir, *uchinchidan,* sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar umumlashgan kuchlar ko'rinishida berilgan bo'lib, ularga faqat aktiv kuchlar kiradi. Ideal sistema uchun bog'lanish reaksiya kuchlari ishtirok etmaydi. Sistemaga ishqalanish kuchi ta'sir etganda ham ularni aktiv kuchlar qatoriga qo'shib, Lagranjning II tur differensial tenglamalaridan foydalanib masalalarni yechish mumkin.

***15- MASALA.**

Epitsiklik mexanizm vertikal tekislikda joylashgan bo'lib, OA krivoshipning og'irligi P_1 ga teng bo'lib, unga o'zgarmas aylantiruvchi M moment qo'yilgan (62-shakl). Krivoshipning burchak tezlanishi ε va g'ildiraklarning urinish nuqtasidagi zo'riqish S aniqlansin. G'ildiraklar o'qlari orasidagi masofa l

ga, qo'zg'aluvchi g'ildirakning radiusi r ga og'irligi P_2 ga teng. Krivoship bir jinsli sterjen, qo'zg'aluvchi g'ildirak bir jinsli disk deb qaralsin.

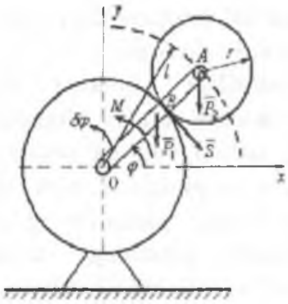
Yechish:

Epitsiklik mexanizm holati OA krivoshipning burilish burchagi φ ga bog'liq bo'lib, sistemaning erkinlik darajasi bittadir. Burilish burchagi φ ni umumlashgan koordinata deb qabul qilamiz. Demak, $q_1 = \varphi$ ga teng. U holda krivoshipning burchak tezligi teng bo'ladi:

$$\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = \omega$$

Topishimiz kerak bo'lgan burchak tezlanish teng bo'ladi:

$$\varepsilon = \ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}$$



62-shakl

Erkinlik darajasi birga teng bo'lgani uchun bitta Lagranjning II tur tenglamasi tuziladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad (*15.1)$$

Sistema kinetik energiyasini hisoblaymiz:

$$T = T_1 + T_2 \qquad (*15.2)$$

Bu yerda, T_1- krivoshipning kinetik energiyasi, T_2 - qo'zg'aluvchi g'ildirakning kinetik energiyasi. Krivoship (62–shakl) aylanma harakat va qo'zg'aluvchi g'ildirak tekis- parallel harakat qilgani uchun ularning kinetik energiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 ; \quad T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g} v_A^2 + \frac{1}{2} J_A\, \omega_1^2 \qquad (*15.3)$$

Bu yerda: J_0 - krivoshipning aylanish o'qi O ga nisbatan inersiya momenti ; J_A - qo'zg'aluvchi g'ildirakning aylanish o'qi A ga nisbatan inersiya momenti; ω_1 – qo'zg'aluvchi g'ildirakning aylanish o'qi A ga nisbatan burchak tezligi; v_A - qo'zg'aluvchi g'ildirakning A markazining tezligi. Krivoship bir jinsli sterjen, qo'zg'aluvchi g'ildirak bir jinsli disk bo'lgani uchun inersiya momentlari quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$J_O = \frac{1}{3}\frac{P_1}{g} l^2 ; \quad J_A = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g} r^2 . \qquad (*15.4)$$

Tezliklarni umumlashgan tezliklar, ya'ni $\dot{\varphi} = \omega$ orqali ifodalaymiz. Qo'zg'aluvchi g'ildirak qo'zg'almas g'ildirak ustida sirpanmasdan dumalagani uchun B nuqta tezliklar oniy markazidir.

Demak,

$$v_A = l\,\omega = r\omega_1$$

$$v_A = l\dot{\varphi}\,,\ \omega_1 = \frac{v_A}{r} = \frac{l}{r}\dot{\varphi}. \qquad (*15.5)$$

(*15.5) va (*15.4) ifodalarni (*15.3) tenglamaga so'ngra (*15.2) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$T = \frac{l^2}{12g}\left(2P_1 + 9P_2\right)\dot{\varphi}^2 . \qquad (*15.6)$$

(*15.6) tenglamadan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l^2}{6g}\left(2P_1 + 9P_2\right)\dot{\varphi}. \qquad (*15.7)$$

Umumlashgan kuch Q_1ni hisoblaymiz. Buning uchun OA krivoshipga soat miliga teskari yo'nalishda $\delta\varphi$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Sistemaga $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ kuchlar va momenti M ga teng juft kuch ta'sir etadi. $\overline{P}_1$-krivoshipning og‘irligi, $\overline{P}_2$- qo‘zg‘aluvchi g‘ildirakning og‘irligi. Shuning uchun $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ kuchlarning va momenti M ga teng juft kuchning $\delta\varphi$ mumkin bo‘lgan ko‘chishda bajargan ishlari teng: $\delta A = M\delta\varphi - P_1\frac{1}{2}\cos\varphi\delta\varphi - P_2 l\cos\varphi\delta\varphi$

elementar ishni yana quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\delta A = Q_1\delta q_1 = Q_1\delta\varphi$$

$$Q_1\delta\varphi = \frac{1}{2}\left[2M - \left(P_1 + 2P_2\right)l\cos\varphi\right]\delta\varphi$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi] \qquad (*15.8)$$

(*15.7) va (*15.8) qiymatlarni (*15.1) tenglamaga olib borib qo‘ysak,

$$\frac{l^2}{6g}(2P_1 + 9P_2)\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi] \qquad (*15.9)$$

(*15.9) tenglamadan krivoshipning burchak tezlanishi ε ni aniqlaymiz:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{3g[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi]}{l^2(2P_1 + 9P_2)} \qquad (*15.10)$$

G‘ildiraklarning urinish nuqtasidagi zo‘riqish $\overline{S}$ ni aniqlaymiz. Shu zo‘riqish hisobiga qo‘zg‘aluvchi g‘ildirak krivoshipga nisbatan aylanma harakat qiladi. Qo‘zg‘aluvchi g‘ildirakning aylanish o‘qi A ga nisbatan nisbiy harakati uchun kinetik momentning o‘zgarishi haqidagi teoremadan foydalanib $\overline{S}$ ni aniqlaymiz:

(*15.5) va (*15.6) tenglamalarni e’tiborga olsak:

$$\left[-P_A - \frac{P_A}{g}a_A + 2P_B - 4\frac{P_B}{g}a_A\right]|\delta\bar{r}_A| = 0 \qquad (*15.11)$$

Qo‘zg‘aluvchi g‘ildirakning burchak tezlanishi ε_1 va krivoshipning burchak tezlanishi $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ orasidagi bog‘lanishni e’tiborga olgan holda quyidagi tenglamani yozamiz:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r}\ddot{\varphi} \qquad (*15.12)$$

(*15.10) va (*15.12) ifodani (*18.11) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$S = \frac{1}{2}\frac{P_2 l}{g}\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\frac{P_2[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi]}{l(2P_1 + 9P_2)} \qquad (*15.13)$$

Javob:

Krivoshipning burchak tezlanishi:

$$\varepsilon = \frac{3g[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi]}{l^2(2P_1 + 9P_2)}$$

G'ildiraklaming urinish nuqtasidagi zo'riqish:

$$S = \frac{3}{2}\frac{P_2[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi]}{l(2P_1 + 9P_2)}.$$

Takrorlash uchun savollar

1. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi qanday ta'riflanadi?
2. Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi qanday ta'riflanadi?
3. Prinsiplaming afzalligi nimadan iborat?
4. Dinamikaning umumiy tenglamasini keltirib chiqarish uchun qaysi prinsiplardan foydalaniladi?
5. Umumlashgan koordinatalarda mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari qanday ko'rinishda yoziladi?
6. Lagranjning II tur differensial tenglamalarining afzalligi nimalardan iborat?

ADABIYOTLAR

1. Шохайдарова П. ва бошқалар. Назарий механика. –Т.: Ўқитувчи, 1992 .
2. Рашидов Т.Р. ва бошқалар. Назарий механика асослари. – Т.: Ўқитувчи, 1991.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 12-изд.- М.: Высшая школа, 2002.
4. Мешчерский И.В. Назарий механикадан масалалар тўплами.-Т.: Ўқитувчи, 1990.
5. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. 3-е изд.- М.: Физматлит, 2008.
6. Kepe O.E. va boshqalar. «Nazariy mexanika» fanidan qisqa masalalar to'plami. –T.: Yangi asr avlodi, 2008.
7. Перевалов В.С. и др. Сборник задач по теоретической механике на примерах из горной техники и технологии. –М.: МГГУ, 2002.
8. Karimov K.A., Habibullayeva H.N. Harakat differensial tenglamalarini integrallash. Uslubiy ko'rsatma.–Toshkent, ToshDTU, 2010.
9. Зозуля В.В., Мартыненко Л.В, Лукин А.Н. Теоретическая механика. -Харьков, 2006. Russian djvu. 1971 KB 8.1 KB/p. 300dpi OCR lib.homelinux.org /файл/

MUNDARIJA

2814z

Habibullayeva Xujasta Najibullayevna

NAZARIY MEXANIKA
(*DINAMIKA*)
O'quv qo'llanma

Muharrir: Botirbekova M.M.

Bosishga ruhsat etildi 7.04.2010 y. Bichimi 60x84 1/16.
Shartli bosma tabog'i 9,3. Nusxasi 50 dona. Buyurtma № 166.

TDTU bosmaxonasida chop etildi. Toshkent sh,
Talabalar ko'chasi 54. tel: 246-63-84.