O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM
VAZIRLIGI

TOSHKENT ARXITEKTURA QURILISH INSTITUTI

K. KENJAYEV

NAZARIY MEXANIKA

Misol va masalalarda

II qism

KINEMATIKA

Cho‘lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2018

UDK 531.1(075)
BBK 22.21ya7
K 37

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2017-yil 24-avgustdagi 603-sonli buyrug'iga asosan 5340200 «Bino va inshootlar qurilishi (sanoat va fuqaro binolari) ta'lim yo'nalishining talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan.

Taqrizchilar:

***A.T. Mamadalimov** — O'zFA akademigi, Abu Rayhon Beruniy nomidagi O'zbekiston Davlat mukofoti sovrindori, f.m.f.d., Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti professori;*
***D. Matrasulov** — f.m.f.d., Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti professori*

Mas'ul muharrir: ***Sh.A. Rahimova***

Kenjayev, K.
K 37 Nazariy mexanika misol va masalalarda. II qism. Kinematika. [Matn] o'quv qo'llanma K. Kenjayev/Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. — T.: Cho'lpon nomidagi NMIU, 2018. — 280 b.
ISBN 978-9943-5380-0-9

O'quv qo'llanmada «Nazariy mexanika» fanining «Kinematika» bo'limining nuqta kinematikasi, qattiq jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati, nuqtaning murakkab harakati, qattiq jismning tekislikka parallel harakati boblari bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar, masalalar yechish tartibi, masalalar yechish namunalari hamda mustaqil o'rganish uchun ko'p variantli masalalar taqdim etilgan.

O'quv qo'llanma TAQI o'quv ishlari bo'yicha prorektori tomonidan 2016-yil 29-avgustda tasdiqlangan «Nazariy mexanika» fani bo'yicha ishchi o'quv dasturi asosida tuzilgan.

UDK 531.1(075)
BBK 22.21ya7

ISBN 978-9943-5380-0-9

Volidayi muhtaramam Oxunjonova
Gulbining yorqin xotirasiga bag'ishlayman

SO'Z BOSHI

Nazariy mexanikaning kinematika bo'limida moddiy nuqtaning harakati harakatni yuzaga keltiruvchi sabablarga bog'lanmagan holda o'rganiladi. Shuning uchun, odatda, kinematika «harakat geometriyasi» ham deyiladi.

Kinematika bo'limi Statika va Dinamika bo'limlaridan keyinroq, XIX asrda nazariy mexanikaning alohida bo'limi sifatida shakllangan. Kinematikaning rivojlanishida mashinasozlikning rivojlanishi, turli xil mashina va mexanizmlarning yaratilishi va ishlatilishi asosiy sabablardan hisoblanadi.

Qurilish yo'nalishlarida ta'lim oluvchi talabalar uchun turli xil mashinalarni tashkil etuvchi mexanizmlarning kinematik va dinamik xususiyatlarni o'rganish, harakat qonunlarini keltirib chiqarish muhim vazifa hisoblanadi. Buning uchun talabalar kursning nazariy asoslarini chuqur o'rganishi va amaliy masalalarni yechish malakalariga ega bo'lishlari lozim.

O'quv qo'llanmani tuzishda J.L. Meriam, L.G. Kraige «Engineering mechanics statics» (2007), R.C. Hibbeler «Statics and Dynamics» (2013), Vasile Szolge «Theoretical mechanics» (2010), R.S. Khurmi «Engineering mechanics» (2011) kabi xorijiy adabiyotlardan foydalanildi.

Taqdim etilayotgan o'quv qo'llanmada nuqta kinematikasi, qattiq jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati, moddiy nuqtaning murakkab harakati, qattiq jismning tekislikka parallel harakati mavzulari bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar, masalalar yechish tartibi, namunalari va talabalar mustaqil ishlashlari uchun ko'p variantli masalalar keltirilgan.

Qo‘llanma qo‘lyozmasini o‘qib chiqib, undagi kamchiliklarni tuzatishdagi qimmatli maslahatlarini ayamaganliklari uchun texnika fanlari doktori prof. T.M. Mavlonovga, texnika fanlari doktori prof. Q.S. Abdurashidovga, Toshkent Arxitektura qurilish instituti «Qurilish mexanikasi va inshhootlar zilzilabardoshligi» kafedrasi mudiri, texnika fanlari nomzodi Z.S. Shadmanovaga, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent S.A. Abduqodirovga hamda qo‘llanma qo‘lyozmasini tayyorlashdagi beg‘araz yordami uchun muhandis-quruvchi N. Xatamovga muallif o‘zining chuqur minnatdorchiligini bildiradi.

Qo‘llanmada yo‘l qo‘yilgan kamchliklarni bartaraf etish va uning o‘quv-uslubiy qiymatini yanada oshirish borasida bildirilgan fikr va mulohazalari uchun muallif kitobxonlarga o‘zining chuqur minnatdorchligini bildiradi.

I BOB

NUQTA KINEMATIKASI

1-§. Kinematikaning asosiy tushunchalari

Nazariy mexanikaning kinematika bo‘limida moddiy nuqta va absolut qattiq jismning harakati shu harakatni vujudga keltirgan sabablarga bog‘lanmagan holda faqat geometrik nuqtayi nazardan o‘rganiladi.

Harakat tushunchasi harakatlanuvchi moddiy nuqta (yoki absolut qattiq jism), vaqt va fazo tushunchalari bilan chambarchas bog‘liqdir.

Ko‘chish va harakat tushunchalari nazariy mexanikaning asosiy tushunchalari hisoblanadi. *Moddiy nuqtaning ma’lum vaqt ichida fazoda biror sanoq sistemasiga nisbatan bir holatdan boshqa holatga ixtiyoriy ravishda o‘tishi ko‘chish deyiladi.*

Nuqtaning boshlang‘ich holatdan oxirgi holatga aniq bir usulda vaqtga bog‘liq holda o‘tishi esa harakat deyiladi.

Fazo bir vaqtda mavjud bo‘lgan obyektlarning joylashish tartibini ifodalaydi.

Klassik mexanikada fazo uch o‘lchovli, absolut qo‘zg‘almas Evklid fazosi deb qaraladi va undagi barcha o‘lchamlar Evklid geometriyasi asosida olib boriladi.

Vaqt obyektiv borliqda ro‘y beruvchi hodisalarning qancha davom etishini ifodalaydi va u absolut deb qaraladi. Vaqt barcha sanoq sistemalarida bir xil o‘tadi va bir sistemaning ikkinchi sistemaga nisbatan harakatiga bog‘liq bo‘lmaydi. SI sistemasida sekund vaqt birligi hisoblanadi.

Harakatlanayotgan moddiy nuqtaning fazoda biror sanoq sistemasiga nisbatan holati bilan vaqt orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi tenglama nuqtaning harakat qonunini ifodalaydi. Agar moddiy nuqtaning biror sanoq sistemasiga nisbatan harakat qonuni berilgan bo‘lsa, uning trayektoriyasi, tezligi va tezlanishini aniqlash mumkin bo‘ladi. *Trayektoriya deb, moddiy nuqta yoki absolut qattiq jismning harakatlanishi tufayli tekislik yoki fazoda qoldirgan iziga aytiladi.*

Kinematikaning asosiy vazifasi moddiy nuqta va absolut qattiq jismning harakat qonunlarini o‘rganishdan iborat.

2-§. Moddiy nuqta harakatining berilish usullari

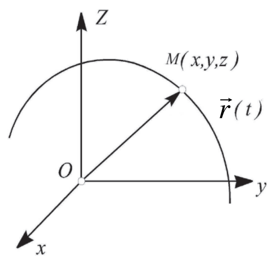
Kinematikada nuqtaning harakati vektor, koordinatalar va tabiiy usulda beriladi.

1. Vektor usuli.

Harakatdagi *M* nuqtaning *Oxyz* sanoq sistemasiga nisbatan holati *O* markazdan o‘tkazilgan $\vec{r}$ radius-vektor bilan aniqlanadi *(1.1-rasm)*.

M nuqta harakatlanganda vaqt o‘tishi bilan uning radius-vektori $\vec{r}$ miqdor va yo‘nalish jihatdan o‘zgaradi, ya’ni skalyar argument *t* ning vektorli funksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.1}$$



1.1-rasm

Agar $\vec{r}\,(t)$ funksiyasi ma’lum bo‘lsa, nuqtaning fazodagi holati vaqtning har bir payti uchun aniq bo‘ladi. Shu sababli (1.1) tenglama nuqta harakatining vektor ko‘rinishdagi kinematik tenglamasi deyiladi. Ko‘riladigan masalalarda $\vec{r}(t)$ funksiya bir qiymatli, uzluksiz va kamida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lishi lozim.

2. Koordinatalar usuli.

M nuqta *Oxyz* sanoq sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo‘lsin. Nuqtaning holatini uning uchta *x, y, z* Dekart koordinatalari orqali aniqlash mumkin *(1.2-rasm)*.

Nuqta harakatlanganda uning koordinatalari vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi, ya’ni ular *t* vaqtning funksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Agar nuqta koordinatalari bilan vaqt orasidagi munosabatlar berilgan bo‘lsa, nuqtaning istalgan paytdagi holatini aniqlash mumkin bo‘ladi. Shu sababli (1.2) tenglamalar nuqta harakatining Dekart koordinatalaridagi kinematik tenglamalarini ifodalaydi.

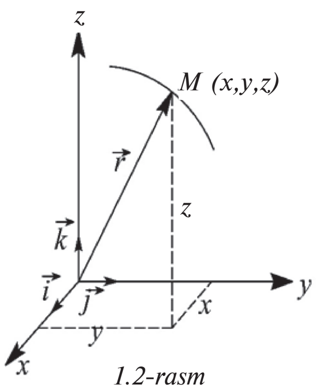
(1.2) tenglamalar nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalarini ham ifodalaydi. Bunda parametr sifatida t vaqt olingan.

(1.2) tenglamalardan t vaqtni yo‘qotib, nuqtaning koordinatalar formasidagi trayektoriya tenglamasi aniqlanadi. M nuqtaning O koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektorini $\vec{r}$, koordinata o‘qlarining birlik yo‘naltiruvchi vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilasak *(1.2-rasm),* harakatning vektor va Dekart koordinatalari orqali aniqlash usullari orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi:

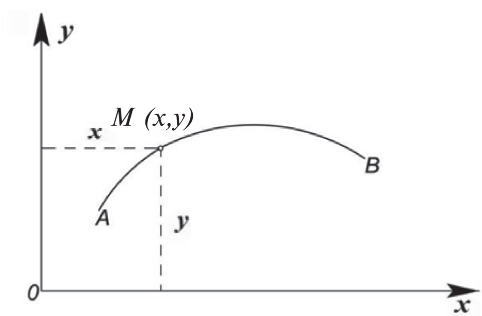
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{1.3}$$

Agar nuqta xy tekisligida harakatlansa *(1.3-rasm)*, nuqtaning tekislikdagi harakat tenglamalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{1.4}$$



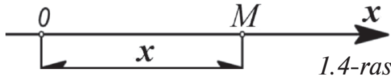
1.2-rasm



1.3-rasm

Nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsa *(1.4-rasm)*, harakat trayektoriyasi bo‘ylab x o‘qini yo‘naltiramiz. Bu holda nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x = x(t). \tag{1.5}$$



1.4-rasm

3. Tabiiy usul.

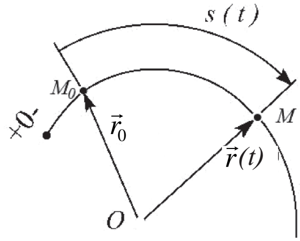
Harakatlanayotgan nuqtaning trayektoriyasi oldindan ma’lum bo‘lsa, nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash qulay. Nuqtaning trayektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan yoki egri chiziqdan iborat bo‘ladi. Trayektoriyada qo‘zg‘almas O nuqtani olib, bu nuqtaga nisbatan yoy koordinatasini o‘tkazamiz *(1.5-rasm)*. Harakatlanayotgan M nuqtaning trayektoriyadagi holatini O nuqtadan trayektoriya bo‘yicha hisoblangan $OM=S$ yoy koordinatasi bilan aniqlaymiz. O nuqtadan bir tomonga qo‘yilgan masofani musbat, ikkinchi tomonga qo‘yilgan masofani manfiy deb hisoblaymiz.

Vaqtning o‘tishi bilan harakatlanayotgan nuqtadan qo‘zg‘almas O nuqtagacha bo‘lgan OM masofa o‘zgaradi, ya’ni nuqtaning yoy koordinatasi vaqtning funksiyasidan iborat:

$$S = f(t). \tag{1.6}$$

Bu munosabatga **nuqtaning tabiiy usuldagi harakat tenglamasi** yoki **harakat qonuni** deyiladi. Agar $f(t)$ funksiya ma’lum bo‘lsa, u holda t vaqtning har bir payti uchun OM ni aniqlab, O nuqtadan trayektoriya bo‘yicha qo‘yamiz. Natijada, M nuqtaning berilgan t paytdagi holati aniqlanadi. Shunday qilib, nuqtaning harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun uning trayektoriyasida O qo‘zg‘almas nuqta (hisoblash boshi) va yoy koordinatasining hisoblash yo‘nalishi hamda $S = f(t)$ harakat tenglamasi ma’lum bo‘lishi kerak ekan. Nuqtaning S yoy koordinatasi bilan trayektoriya bo‘yicha o‘tgan OM yo‘li doimo bir xil bo‘lavermaydi. Agar M nuqtaning harakati O qo‘zg‘almas nuqtadan boshlanib, $\Delta t = t - t_0$ vaqt oralig‘ida doimo musbat yo‘nalishi bo‘yicha yuz bersa, t vaqtda nuqtaning yoy koordinatasi bilan Δt vaqt oralig‘ida o‘tilgan yo‘l o‘zaro teng.

Agar t_0 boshlang‘ich vaqtda nuqta M_0 holatda bo‘lib, Δt vaqtdan keyin M holatni egallasa, u holda Δt oralig‘ida nuqtaning bir to-



1.5-rasm

monga harakatlanishi natijasida o'tilgan yo'l $S = \int_{l_0}^{l} f(t)dt$ formula bilan aniqlanadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. *Kinematika fani nimani o'rgatadi?*
2. *Kinematika asosiy tushunchalarini ta'riflab bering.*
3. *Nuqtaning harakati qanday usullarda beriladi?*
4. *Nuqtaning vektor ko'rinishdagi harakat tenglamasini yozing.*
5. *Nuqtaning harakati koordinata usullarida berilganda harakat tenglamalari qanday ko'rinishda yoziladi?*
6. *Nuqtaning harakati tabiiy usulda berilganda harakat tenglamasi qanday ko'rinishda yoziladi?*
7. *Trayektoriya nima?*
8. *Harakat deb nimaga aytiladi?*
9. *Ko'chish deb nimaga aytiladi?*
10. *Nuqtaning harakat qonunini ta'riflang.*

3-§. Nuqtaning tezligi

Tezlik deb berilgan sanoq sistemasida har qanday vaqt onida moddiy nuqta harakatining qanchalik ildamligi va uning yo'nalishini ifodalaydigan vektor kattalikka aytiladi.

3.1. Harakat qonuni vektor usulida berilgan nuqtaning tezligi

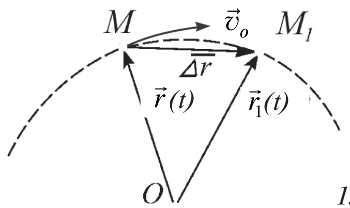
Agar nuqtaning harakati vektor usulda $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, nuqtaning berilgan ondagi tezlik vektori uning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng bo'ladi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.7)$$

Tezlik vektori nuqta trayektoriyasiga harakat yo‘nalishi bo‘yicha o‘tkazilgan urinma bo‘ylab yo‘naladi *(1.6-rasm).*

Nuqtaning Δt vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{v}_{\acute{o}} = \frac{\Delta r(t)}{\Delta t}.$$



1.6-rasm

3.2. Harakati koordinatalar usulida berilgan nuqtaning tezligi

Agar nuqtaning harakati koordinatalar usulida

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (1.8)$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, nuqta tezligining biror qo‘zg‘almas Dekart koordinata o‘qidagi proyeksiyasi mos koordinatasidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng bo‘ladi.

Shuning uchun:

$$v_x = \frac{dx}{at}, \quad v_y = \frac{dy}{at}, \quad v_z = \frac{dz}{at}. \qquad (1.9)$$

Agar tezlikning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari ma’lum bo‘lsa, uning moduli

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (1.10)$$

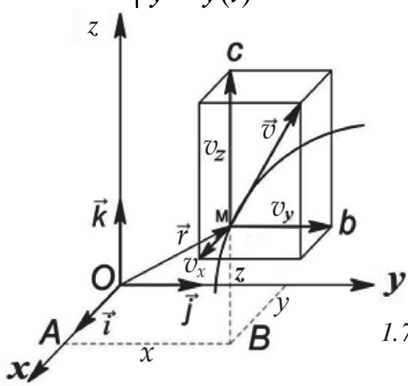
formula bilan, yo‘nalishi esa

$$\cos(\vec{v}\wedge\vec{i})=\frac{v_x}{v},\quad \cos(\vec{v}\wedge\vec{j})=\frac{v_y}{v},\quad \cos(\vec{v}\wedge\vec{k})=\frac{v_z}{v} \qquad (1.11)$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Bunda $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lar Dekart koordinata o'qlarining birlik vektorlari *(1.7-rasm)*.

Agar nuqta tekislikda harakatlansa, uning harakati

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (1.12)$$

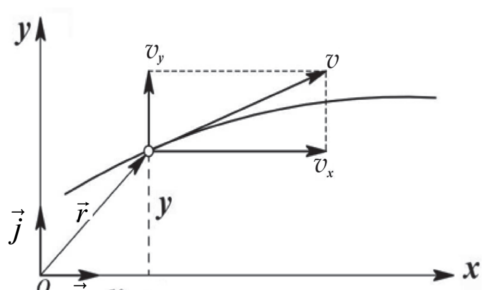


1.7-rasm

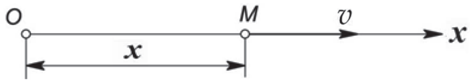
tenglamalar bilan beriladi. Bunday holda tezlik moduli va yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi *(1.8-rasm)*:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}, \qquad (1.13)$$

$$\cos\vec{v}\wedge\vec{i}=\frac{v_x}{v},\quad \cos\vec{v}\wedge\vec{j}=\frac{v_y}{v}.$$



1.8-rasm



1.9-rasm

Nuqtaning Ox o‘qi bo‘ylab to‘g‘ri chiziqli harakati

$$x = x(t) \tag{1.14}$$

tenglama bilan beriladi.

Bunday holda nuqta tezligining moduli tezlik vektorining koordinata o‘qidagi proyeksiyasining absolut qiymatiga teng bo‘ladi *(1.9-rasm):*

$$v = |v_x| = \left|\frac{dx}{at}\right|. \tag{1.15}$$

3.3. Harakati tabiiy usulda ifodalangan nuqtaning tezligi

Agar nuqta berilgan trayektoriya bo‘ylab $s{=}s(t)$ qonun asosida harakatlansa, tezlik vektori quyidagi formula orqali ifodalanadi:

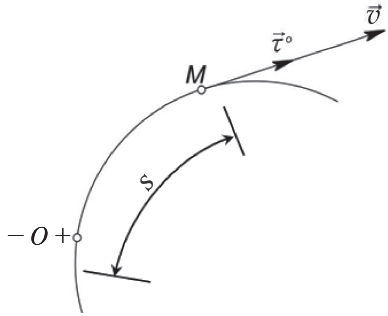
$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}^{\,0}. \tag{1.16}$$

(1.16) da $\dfrac{ds}{dt}$ hosila $\vec{v}$ tezlikning urinmadagi proyeksiyasi v_τ ni ifodalaydi va tezlikning algebraik qiymati deyiladi.

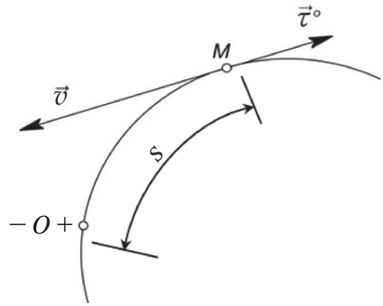
v_τ ning absolut qiymati tezlikning moduliga teng bo‘ladi:

$$v = |v_\tau| = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{1.17}$$

Bunda $\dfrac{ds}{dt} > 0$ bo‘lsa, yoy koordinatasi s orta boradi va nuqta tezligi $\vec{v}$ ning yo‘nalishi $\vec{\tau}^{\,0}$ bilan ustma-ust tushadi. Agar



1.10-a rasm



1.10-b rasm

$\dfrac{ds}{dt} < 0$ bo‘lsa, yoy koordinatasi s kamaya boradi va $\vec{v}$ tezlik vektori $\vec{\tau}^0$ ga qarama-qarshi yo‘naladi *(1.10-a, b rasmlar)*.

Takrorlash uchun savollar:

1. Nuqta tezligi tushunchasini ta’riflang.
2. Vaqt onidagi tezlik va o‘rtacha tezlik qanday yo‘naladi?
3. Tezlik vektorining Dekart o‘qlaridagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
4. Tezlik vektorining tabiiy o‘qlardagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
5. Tezlik moduli qanday aniqlanadi?
6. Xorijiy adabiyotlarda harakatini xarakterlovchi «speed» va «velosity» tushunchalarini sharhlab bering.

4-§. Nuqtaning tezlanishi

Harakatdagi nuqta tezligining vaqt o‘tishi bilan miqdor va yo‘nalish jihatidan o‘zgarishini ifodalovchi vektor kattalik tezlanish deyiladi.

4.1. Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezlanishi

Nuqtaning harakati vektor usulida

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.18}$$

tenglama bilan berilganda, uning tezligi

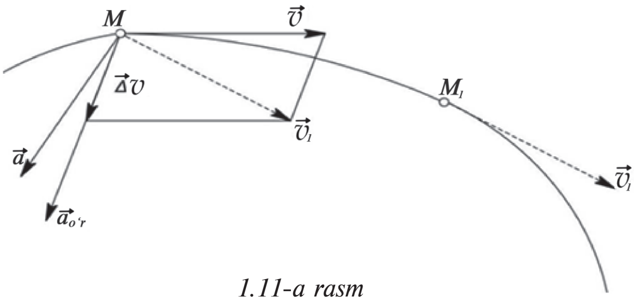
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.19)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, nuqtaning tezlanish vektori uning tezlik vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki radius vektoridan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo‘ladi:

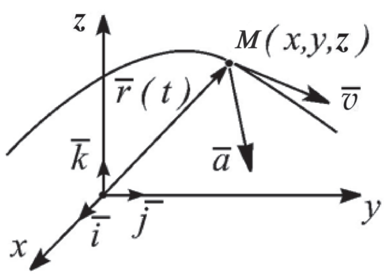
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.20)$$

Nuqta bir tekislikda yotuvchi trayektoriya bo‘ylab harakatlansa, tezlanish vektori, o‘rtacha tezlanish $\vec{a}_{ur}$ kabi trayektoriya tekisligida yotadi hamda trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘naladi.

Agar nuqtaning trayektoriyasi bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqdan iborat bo‘lsa, tezlanish vektori egrilik tekisligida yotadi va trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘naladi *(1.11-a, b rasm)*.



1.11-a rasm



1.11-b rasm

4.2. Harakati koordinatalar usulida berilgan nuqtaning tezlanishi

Nuqtaning harakati koordinatalar usulida berilganda nuqta tezligining koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1.21}$$

formulalar yordamida aniqlangan edi.

Nuqta tezlanishining biror o‘qdagi proyeksiyasi nuqta tezligining mazkur o‘qdagi proyeksiyasidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki radius vektoridan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo‘ladi.

Shuning uchun:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{v_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.22}$$

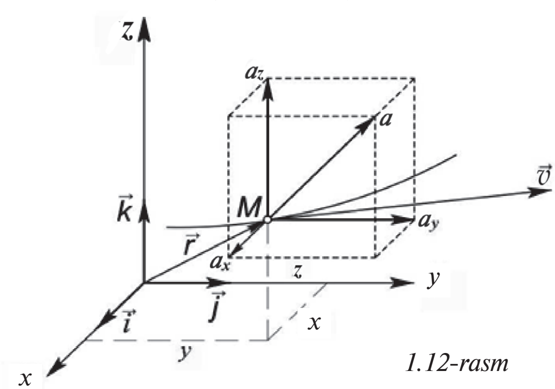
Tezlanishning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari ma’lum bo‘lsa, uning moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{1.23}$$

formula bilan, yo‘nalishi esa

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{a_z}{a} \tag{1.24}$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Bunda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar koordinata o‘qlarining birlik vektorlari *(1.12-rasm)*.



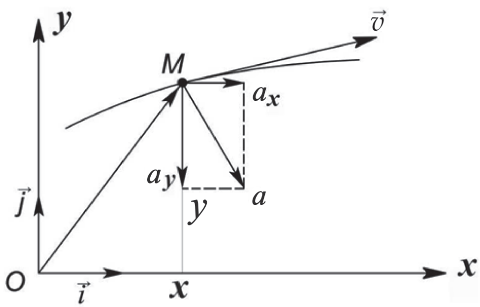
1.12-rasm

Agar nuqta Oxy tekisligida harakatlansa *(1.13-rasm)*, $a_z = v_z = \ddot{z} = 0$ bo‘lib, tezlanish miqdori va yo‘nalishi quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$a = \sqrt{ax^2 + ay^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2},$$

$$\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{i}\right) = \frac{a_x}{a}, \cos\left(\vec{a} \wedge \vec{j}\right) = \frac{a_y}{a}. \qquad (1.25)$$

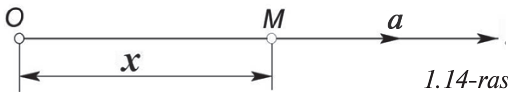
Agar nuqta Ox o‘qi bo‘ylab to‘g‘ri chiziqli harakat qilsa *(1.14-rasm)*, tezlanish moduli



1.13-rasm

$$a = |a_x| = |\ddot{x}| \qquad (1.26)$$

formula bilan aniqlanadi. Agar $\ddot{x} > 0$ bo‘lsa, tezlanish vektori $\vec{a}$ Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bo‘yicha, $\ddot{x} < 0$ bo‘lsa, manfiy yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naladi.



1.14-rasm

4.3. Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishi

Nuqtaning harakati tabiiy usulda berilganda uning tezligi quyidagicha ifodalanar edi:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}^0 = v\vec{\tau}^0. \qquad (1.27)$$

Tezlanish vektori, tezlik vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng bo‘ladi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^{\,0} + v\frac{d\vec{\tau}^{\,0}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^{\,0} + v\frac{d\vec{\tau}^{\,0}}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad (1.28)$$

Analitik geometriyadan ma’lumki,

$$\frac{d\vec{\tau}^{\,0}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}^{\,0}, \qquad (1.29)$$

bunda ρ – trayektoriyaning egrilik radiusi, $\vec{n}^{\,0}$ – trayektoriyaga o‘tkazilgan bosh normal birlik vektori.

Bularni e’tiborga olsak,

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^{\,0} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}^{\,0}. \qquad (1.30)$$

Bu ifodada $\frac{dv}{at}\vec{\tau}^{\,0}$ vektor kattalik trayektoriyaga *M* nuqtada o‘tkazilgan urinma bo‘ylab yo‘naladi va *urinma tezlanish* deyiladi:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^{\,0}. \qquad (1.31)$$

$\frac{v^2}{\rho}\vec{n}^{\,0}$ vektor kattalik trayektoriyaga *M* nuqtada o‘tkazilgan bosh normal bo‘ylab yo‘naladi va *normal tezlanish* deyiladi:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}^{\,0}. \qquad (1.32)$$

Urinmaning birlik vektori $\vec{\tau}^{\,0}$ va bosh normalning birlik vektori $\vec{n}^{\,0}$ trayektoriyaning *M* nuqtasiga o‘tkazilgan egrilik tekisligida yotganligi tufayli, tezlanish vektori ham mazkur egrilik tekisligida yotadi. Shu sababli tezlanishning binormaldagi tashkil etuvchisi nolga teng bo‘ladi.

Tezlanishning tabiiy koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{1.33}$$

Tezlanish vektori urinma tezlanish $\vec{a}_\tau$ va normal tezlanish $\vec{a}_n$ larning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.34}$$

Bu tezlanishlar o'zaro perpendikular yo'nalganidan, to'la tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1.35}$$

yoki

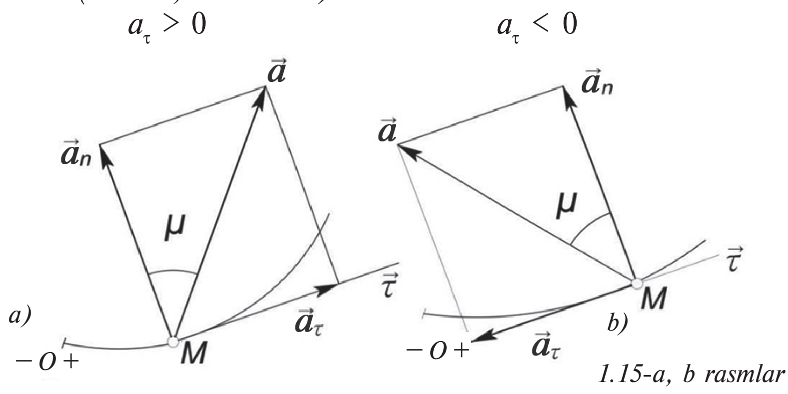
$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{1.36}$$

formula bilan, yo'nalishi esa

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} \tag{1.37}$$

formula bilan aniqlanadi *(1.15-a, b rasmlar).*

Bunda $\vec{a}_n$ har doim trayektoriyaning botiq tomoniga yo'naladi ($a_n > 0$), $\vec{a}_\tau$ proyeksiyasining ishorasiga bog'liq holda nuqtaning urinma tezlanishi M_τ o'qning musbat yoki manfiy tomoniga qarab yo'naladi *(1.15-a, b rasmlar).*



1.15-a, b rasmlar

5-§. Nuqta harakatining xususiy hollari

Nuqtaning tezlanishi tabiiy koordinata o‘qlaridagi tashkil etuvchilari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}^0. \tag{1.38}$$

Nuqtaning tezlanishiga qarab harakat turlarini aniqlash mumkin.

5.1. To‘g‘ri chiziqli tekis harakat

Nuqtaning trayektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lsa, $\rho = \infty$ bo‘ladi.

Bunday holda

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \tag{1.39}$$

bo‘lib, nuqtaning tezlanishi faqat urinma tezlanishdan iborat bo‘ladi:

$$a = a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}. \tag{1.40}$$

Bunday holda nuqtaning tezligi faqat miqdor jihatdan o‘zgaradi $(\rho = \infty)$. *Shuning uchun ham urinma tezlanish tezlikning son qiymati jihatdan o‘zgarishini ifodalaydi.*

Nuqtaning harakati davomida doimo $\vec{a}_\tau = 0, \vec{a}_n = 0,$ ya’ni $\vec{a} = 0$ bo‘lsa, $\frac{dv_\tau}{dt} = 0$ bo‘lib, $v = |v_\tau| = \text{const}$ bo‘ladi.

$\frac{v^2}{\rho} = 0$ bo‘lganidan $\rho = \infty$ ekanligi kelib chiqadi.

Bunday holda nuqta to‘g‘ri chiziqli tekis harakatda bo‘ladi.

5.2. Egri chiziqli tekis harakat

Agarda tezlikning son qiymati harakat davomida doimo o‘zgarmas holda saqlansa, nuqta egri chiziqli tekis harakatda bo‘ladi:

$$v = \text{const}.$$

Bunday holda

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad (1.41)$$

bo‘lib, nuqtaning tezlanishi faqat normal tezlanishdan iborat bo‘ladi:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (1.42)$$

Nuqtaning normal tezlanishi $\vec{a}_n$ doimo egri chiziqning botiq tomoniga yo‘nalgan bosh normal bo‘ylab yo‘naladi. $v = \text{const}$ bo‘lgani uchun bu tezlanish nuqtaning tezligi vaqt o‘tishi bilan faqat yo‘nalishini o‘zgartirishidan hosil bo‘ladi.

Shu sababli normal tezlanish nuqta tezligining yo‘nalish jihatdan o‘zgarishini ifodalaydi.

Agar $v = \dfrac{ds}{dt}$ ekanligini e’tiborga olsak, $(v = v_0)$

$$ds = vdt. \qquad (1.43)$$

Bu tenglikni mos chegaralar bo‘yicha integrallasak,

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v_0 dt$$

yoki

$$s = s_0 + v_0 t \qquad (1.44)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Agar $s_0 = 0$ bo‘lsa, $s = v_0 t$.

(1.44) tenglama nuqtaning egri chiziqli tekis harakati tenglamasini ifodalaydi.

5.3. Egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakat

Agar nuqtaning harakati davomida doimo $a_\tau = \text{const}$ bo‘lsa, bunday harakat tekis o‘zgaruvchan harakat deyiladi.

Agar $t = 0$ da $s = s_0$ va $v = v_0$ bo‘lsa,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (1.45)$$

tenglamadan

$$dv = a_\tau ds \qquad (1.46)$$

tenglik hosil bo‘ladi. $a_\tau = \text{const}$ ekanligini e’tiborga olib, (1.46) tenglikni mos chegaralar bo‘yicha integrallasak,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_\tau ds$$

yoki

$$v = v_0 + a_\tau t. \qquad (1.47)$$

(1.47) ifoda egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakatdagi nuqtaning tezligini ifodalaydi.

Agar

$$v = \frac{ds}{dt}$$

ekanligini e’tiborga olsak, (1.47) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t. \qquad (1.48)$$

Bu tenglamaning har ikkala tomoni mos chegaralar bo‘yicha integrallansa, tekis o‘zgaruvchan harakat tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \qquad (1.49)$$

To‘g‘ri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakat tezligi va harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\acute{x} = v_0 + a_x t, \tag{1.50}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{1.51}$$

Bunda $a = |a_x| = |\acute{x}|$.

Takrorlash uchun savollar:

1. *Nuqtaning tezlanishi vektori qanday ifodalanadi va nuqta trayektoriyasiga nisbatan qanday yo'naladi?*
2. *Egri chiziqning har bir nuqtasida tabiiy koordinata o'qlari qanday yo'naladi?*
3. *Tezlanish vektori qaysi tekislikda yotadi va uning tabiiy o'qlardagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?*
4. *Nuqtaning qanday harakatida urinma tezlanish va qanday harakatida normal tezlanish nolga teng bo'ladi?*
5. *Nuqtaning tezlanishiga qarab nuqta harakatining xususiy hollarini ta'riflang.*

6-§. Nuqta harakatining tenglamalari va trayektoriyasini aniqlashga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko'rsatmalar

Nuqta kinematikasida nuqtaning harakat tenglamalari berilgan bo'lib, uning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi kabi kinematik kattaliklarni aniqlash talab etiladi.

Nuqta harakatining tenglamalari va trayektoriyasini aniqlashga doir masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1) qo'zg'almas o'qlar sistemalari (to'g'ri burchakli, qutb va h.k.), ularning boshi (qo'yilish nuqtalari) tanlab olinadi;

2) masala shartiga ko'ra, tanlab olingan koordinatalar sistemasi uchun nuqtaning harakat tenglamalari tuziladi;

3) tuzilgan harakat tenglamalariga ko'ra, istalgan vaqt oni uchun nuqtaning o'rni, harakatining yo'nalishi, trayektoriyasi aniqlanadi.

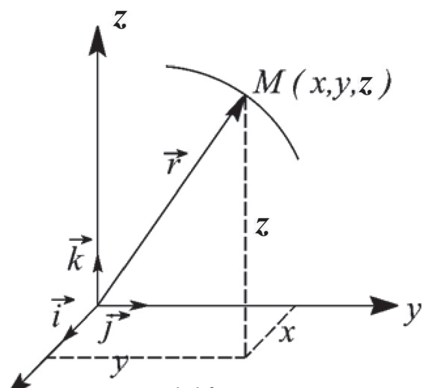
Nuqta kinematikasiga doir masalalarni yechishda quyidagilarga e'tibor berish maqsadga muvofiq bo'ladi:

– harakatdagi nuqtaning fazoda qoldirgan izi uning trayektoriyasi deyiladi. Nuqtaning trayektoriyasi tekislikda yoki fazoda yotuvchi chiziq bo‘lishi mumkin;

– nuqtaning harakati uning harakat qonuni orqali ifodalanadi. Nuqtaning harakat qonuni (tenglamasi) uning tekislikda yoki fazodagi o‘rni va vaqt oralig‘i orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \tag{1.52}$$

– nuqtaning harakati vektor usulida berilganida ixtiyoriy vaqt onidagi o‘rni koordinatalar boshidan harakatdagi nuqtaga o‘tkazilgan radius vektor orqali aniqlanadi *(1.16-rasm)*.



1.16-rasm

Nuqtaning harakati koordinatalar usulida berilganda uning ixtiyoriy vaqt oralig‘idagi o‘rni:

a) fazoda $x = f_1(t),\ \ y = f_2(t),\ \ z = f_3(t)$;

b) tekislikda $x = f_1(t),\ \ y = f_2(t)$; (1.53)

c) nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lganda $-x = f(t)$ koordinatalari orqali aniqlanadi.

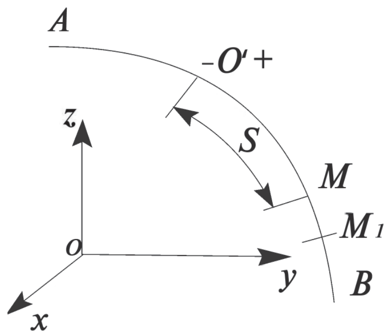
Nuqtaning harakati qutb, slindrik va sferik koordinatalarda ham beriladi. Agar nuqta harakatining trayektoriyasi oldindan ma’lum bo‘lsa, uning harakatini tabiiy usulda berish qulay bo‘ladi.

Bunday holda nuqtaning trayektoriyadagi o‘rni

$$S = f(t) \tag{1.54}$$

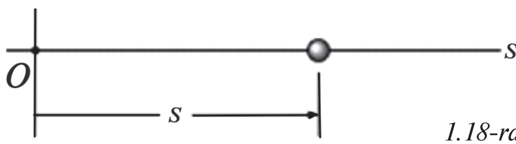
tenglama orqali aniqlanadi.

Bu ifodada S egri chiziqli koordinata bo‘lib, trayektoriya bo‘ylab tanlab olingan biror O nuqtadan hisoblanadi *(1.17-rasm)*.



1.17-rasm

Bunda nuqtaning trayektoriyasi to‘g‘ri chiziq bo‘lishi ham mumkin *(1.18-rasm)*.

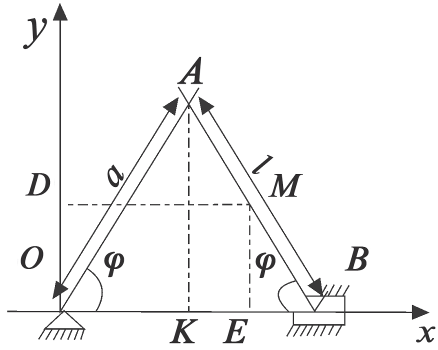


1.18-rasm

7-§. Nuqta harakatining tenglamalari, trayektoriyasini aniqlashga doir masalalar

1-masala.

Krivoship shatun mexanizmida OA krivoship doimiy φ burchak tezlik bilan aylanadi; $OA=l$, $l=a$. Shatun o‘rtasidagi M nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriya tenglamasini aniqlang. Shuningdek, B polzunning harakat tenglamasi va trayektoriya tenglamasini aniqlang. Harakat boshlanishida B polzun o‘ngdagi eng chetki holatda bo‘lgan koordinata o‘qlari va krivoship hamda shatunning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchaklari rasmda ko‘rsatilgan *(1.19-rasm)*.



1.19-rasm

Yechish: *M* nuqtaning harakat tenglamasi quyidagi shakldа yoziladi:

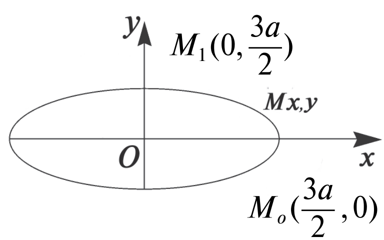
$$\left.\begin{aligned} x_M &= f_1(t), \\ y_M &= f_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1.55)$$

1.19-rasmdan M nuqtaning Dekart o'qlari sistemasidagi koordinatalarini aniqlaymiz. Buning uchun *M* nuqtadan koordinata o'qlariga *MD* va *ME* perpendikular chiziqlarni o'tkazamiz.

Mazkur perpendikular uzunliklari *M* nuqtaning koordinatalarini ifodalaydi:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= OE = OK + KE = OA\cos\varphi + AM\cos\varphi, \\ y_M &= ME = \frac{a}{2}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1.56)$$

Mexanizmda $l = a$ bo'lgani uchun φ = φ. Shuning uchun



1.20-rasm

$$\left.\begin{aligned} x_M &= a\cos\varphi + \frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{3a}{2}\cos\varphi, \\ y_M &= \frac{a}{2}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.57}$$

Masala shartiga ko‘ra,

$$\varphi = \omega t.$$

Bunday holda

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{3a}{2}\cos\omega t, \\ y_M &= \frac{a}{2}\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{1.58}$$

bo‘ladi.

(1.58) tenglamalar sistemasi M nuqtaning harakat tenglamalarini ifodalaydi.

M nuqta trayektoriyasining tenglamasini tuzish uchun (1.58)dan vaqt-parametr t ni yo‘qotish lozim. Sinus va kosinus funksiyalarining argumentlari bir xil bo‘lsa, vaqt t ni yo‘qotish uchun quyidagi trigonometrik ayniyatdan foydalanamiz:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1.59}$$

(1.58) dan

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega t &= \frac{2x}{3a}, \\ \sin\omega t &= \frac{2y}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{1.60}$$

(1.60)ning har ikkala tomonlarini kvadratga ko‘taramiz.

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\omega t &= \frac{4x^2}{9a^2}, \\ \sin^2\omega t &= \frac{4y^2}{a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.61}$$

(1.61)ning chap va o‘ng tomonlarini qo‘shsak, quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{4x^2}{9a^2}+\frac{4y^2}{a^2}=1$$

yoki

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1.$$

(1.62) tenglama *M* nuqta trayektoriyasining tenglamasini ifodalaydi. *M* nuqta trayektoriyasi yarim o‘qlari $\frac{3a}{2}$ va $\frac{a}{2}$ bo‘lgan ellipsdan iborat ekan *(1.20-rasm)*.

B polzunning harakat tenglamasini aniqlaymiz *(1.19-rasmdan)*:

$$x_B=OB=a\cos\varphi+l\cos\varphi=2a\cos\varphi=2a\ \cos\omega t. \quad (1.62)$$

B nuqta krivoship shatunli mexanizmda $\cos\omega t$ qonuni asosida ilgarilanma-qaytalanma harakatda bo‘ladi.

2-masala. Nuqtaning harakati

$$x=v_0t\ \cos\alpha,$$
$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$$

tenglamalar bilan berilgan. Bundagi v_0 va *g* lar doimiy miqdorlar.

Nuqtaning trayektoriyasi, maksimal ko‘tarilish balandligi va bunday holatda gorizontal yo‘nalishda *s* siljishi hamda qancha uzoqqa borishi aniqlansin *(1.21-rasm)*.

Yechimi:

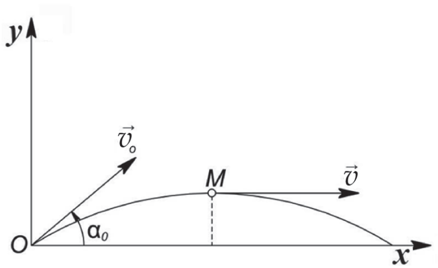
trayektoriyaning tenglamasini aniqlash uchun nuqtaning harakat tenglamalarining biridan *t* vaqtni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz:

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}, \quad (1.63)$$

$$y = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \tag{1.64}$$

(1.64) ifoda parabola tenglamasidir.

Nuqtaning trayektoriyasi mazkur parabolaning $x \geq 0$ shartni qanoatlantiruvchi qismidan iborat *(1.21-rasm)*.



1.21-rasm

Nuqta eng yuqori holatga ko'tarilguncha o'tgan vaqt va maksimal ko'tarilish balandligini aniqlash uchun tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha,$$

$$v_y = \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt. \tag{1.65}$$

Nuqta maksimal balandlikni egallaganda, uning tezligi x o'qiga parallel bo'ladi. Shu sababli

$$v_y = 0$$

yoki

$$v_0 \sin \alpha - g t_1 = 0 \tag{1.66}$$

bo'ladi. Bunda t_1 nuqta eng yuqori holatga ko'tarilguncha o'tgan vaqt. (1.66) dan

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \tag{1.67}$$

Vaqt t_1 ning qiymatini (1.64)ga qo'yib, nuqtaning maksimal ko'tarilish balandligini aniqlaymiz:

$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{\mathrm{g} v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (1.68)$$

Nuqta maksimal balandlikka ko‘tarilganda boshlang‘ich holatidan gorizontal yo‘nalishda s siljishini aniqlash uchun vaqt t_1 ning qiymatini (1.63) ga qo‘yamiz:

$$s_1 = x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \qquad (1.69)$$

Nuqtaning maksimal uchish uzoqligi (qancha uzoqqa borishi) trayektoriya tenglamasidan $y = 0$ bo‘lgan holatda (harakatlanayotgan jism yerga tushganda) aniqlanadi:

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0. \qquad (1.70)$$

Bu tenglamadan x ning ikki qiymati

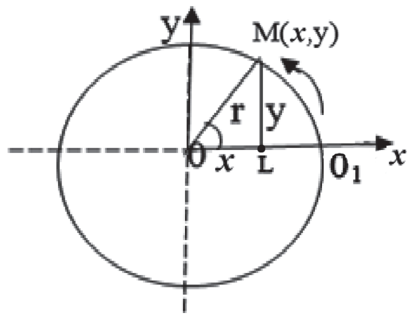
$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (1.71)$$

aniq bo‘ladi. Bunda x_1 nuqtaning boshlang‘ich holatini, x_2 esa nuqtaning gorizontal yo‘nalishda uchish uzoqligini ifodalaydi. Binobarin, nuqtaning maksimal uchish uzoqligi quyidagiga teng bo‘lar ekan:

$$x_2 = s_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{\mathrm{g}}. \qquad (1.72)$$

3-masala. Nuqta radiusi r bo‘lgan aylana bo‘ylab soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishida $s=kt$ qonunga ko‘ra harakatlanadi (k = const). Ox gorizontal o‘q nuqtaning boshlang‘ich holatidan o‘tadi deb qarab, koordinata boshi aylana markazidan o‘tuvchi xOy sistemaga nisbatan nuqtaning harakat qonuni topilsin.

Yechish: koordinata boshini r radiusli aylana markazida olib, xOy koordinata sistemasini o‘tkazamiz *(1.22-rasm)*. Masala shartiga ko‘ra nuqta trayektoriyasida sanoq boshi sifatida O_1 nuqtani olib, bu nuqtadan trayektoriya bo‘ylab soat strelkasi harakatiga teskari yo‘nalishi musbat yo‘nalishi deb qabul qilamiz.



1.22-rasm

$O_1M=S=k\,t$ qonun bo‘yicha harakatlanuvchi M nuqtaning xOy koordinata sistemasidagi koordinatalarini x, y bilan belgilaymiz. *1.22-rasmdan*:

$$\left.\begin{aligned} x &= OL, \\ y &= LM. \end{aligned}\right\} \tag{1.73}$$

Agar M nuqta harakatlanganda uning koordinatalari $\varphi = O_1M$ burchak funksiyasi sifatida o‘zgarishini e’tiborga olsak, (1.73) quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= OL = OM\cos\varphi = r\cos\varphi, \\ y &= LM = OM\sin\varphi = r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.74}$$

Yoy uzunligini hisoblash formulasiga ko‘ra $O_1M = r\varphi$; bundan

$$\varphi = \frac{O_1M}{r} = \frac{kt}{r}. \tag{1.75}$$

Aniqlangan φ burchak qiymatini (1.74)ga qo‘ysak, M nuqtaning xOy koordinata sistemasiga nisbatan harakat qonuni quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\frac{kt}{r}, \\ y &= r\sin\frac{kt}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

5-masala. *M* nuqta harakati $\vec{r} = (2t+1)\vec{i} + (2-3t)j$ tenglama bilan ifodalanadi (*r* — metrda, *t* — sekundda o'lchanadi). *M* nuqta trayektoriyasi aniqlansin hamda harakat boshlangandan so'ng qancha vaqt o'tgach, u abssissa o'qida bo'lishi topilsin.

Yechish. *M* nuqtaning *x, y, z* koordinatalari shu nuqta radius vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari hisoblanadi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.77}$$

(1.77)ni e'tiborga olsak, *M* nuqtaning harakati

$$\vec{r} = (2t+1)\vec{i} + (2-3t)\vec{j} \tag{1.78}$$

tenglama bilan ifodalanadi. (1.77) va (1.78)larni solishtirsak, nuqta harakatining koordinata usulida

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t+1, \\ y &= 2-3t \end{aligned}\right\} \tag{1.79}$$

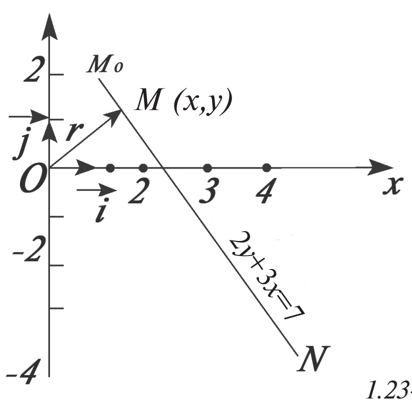
tenglamalar bilan berilishi kelib chiqadi.

M nuqta trayektoriyasini topish uchun (1.79) sistemadan vaqt *t* ni yo'qotish kerak. Buning uchun (1.79)ning birinchisini *t* ga nisbatan yechamiz:

$$t = \frac{x-1}{2}. \tag{1.80}$$

(1.80) ifodani (1.79)ning ikkinchi tenglamasiga qo'ysak,

$$2y+3x=7 \tag{1.81}$$



1.23-rasm

to‘g‘ri chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi. $t \geq 0$ bo‘lishi sharti (1.180)dan $x \geq 1$ kelib chiqadi.

Shuning uchun, M nuqta trayektoriyasi $2y+3x=7$, $x \geq 1$ tenglamalar bilan ifodalanuvchi M_0N to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lar ekan *(1.23-rasm)*.

Nuqta $t=0$ vaqtda koordinatalari $x=1$, $y=2$ dan iborat M_0 holatda bo‘ladi.

M nuqta abssissa o‘qida bo‘lganda $y=0$ bo‘ladi.

Binobarin,

$$2-3t=0$$

tenglikdan $t = \frac{2}{3}c$ vaqtda M nuqta abssissa o‘qida bo‘lishi va

$x = 2\frac{1}{3}m$ ekanligi ma’lum bo‘ladi.

6-masala. Uzunligi a bo‘lgan ON krivoship O nuqtadan o‘tuvchi rasm tekisligiga perpendikular bo‘lgan o‘q atrofida aylanadi. Qo‘zg‘almas Ox o‘q va krivoship orasidagi φ burchak vaqtga proporsional holda o‘zgaradi: $\varphi = kt$;

$$t = \frac{2}{3}c\,.$$

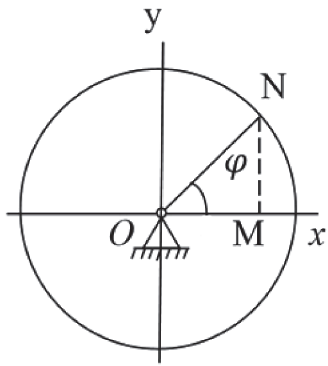
N nuqtaning Dekart koordinata o‘qlaridagi harakat tenglamalari tuzilsin. N nuqtaning to‘liq aylanish vaqti hamda N nuqtaning har ikki koordinatasining qiymatlarini o‘zaro teng bo‘lish vaqti aniqlansin *(1.24-rasm)*.

Yechish. N nuqtaning Dekart koordinata o‘qlaridagi harakat tenglamalarini tuzish uchun *1.24-rasmdan* foydalanib, uning koordinatalari x va y larni aniqlaymiz:

$$\left.\begin{aligned} x &= ON\cos\varphi, \\ y &= ON\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.82}$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos kt, \\ y &= a\sin kt. \end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$



1.24-rasm

Hosil bo‘lgan (1.83) tenglamalar sistemasi *N* nuqtaning harakat tenglamalarini ifodalaydi.

N nuqta trayektoriyasining tenglamasini tuzish uchun (1.83)dan vaqt *t* ni yo‘qotamiz. Buning uchun (1.83)ning har birini kvadratga ko‘taramiz:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2 \cos^2 kt, \\ y^2 &= a^2 \sin^2 kt. \end{aligned}\right\} \qquad (1.84)$$

Hosil bo‘lgan tenglamalarni chap va o‘ng tomonlarini qo‘shsak,

$$x^2 + y_2 = a^2 \qquad (1.85)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Ko‘rinib turibtiki, *N* nuqta trayektoriyasi radiusi *a*, markazi koordinata boshida bo‘lgan aylanadan iborat ekan.

N nuqtaning to‘liq aylanishi uchun ketadigan *T* vaqtni aniqlaymiz. *N* nuqta bir marta to‘liq aylanganda φ burchak *O* dan 2π radianga o‘zgaradi:

$$\varphi = 2\pi = kT. \qquad (1.86)$$

Bundan:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \qquad (1.87)$$

N nuqtaning boshlang‘ich holati koordinatalarini aniqlaymiz. Buning uchun (1.83) tenglamalarga $t = 0$ ni qo‘yamiz. Bunday holda

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a, \\ y_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.88)$$

Nuqtaning har ikki koordinatalari o‘zaro teng bo‘lgan t_1 vaqtni aniqlaymiz:

$$x,\ \ a \cos kt_1 = a \sin kt_1$$

yoki

$$\operatorname{tg} kt_1 = 1. \tag{1.89}$$

Bu munosabat o‘rinli bo‘ladi, agar

$$kt_1 = \pi n + \frac{\pi}{4} \tag{1.90}$$

shart bajarilsa, bunda n=0, 1, 2, 3,...

(1.90) ifodadan t_1 vaqtni aniqlaymiz:

$$t_1 = \frac{\pi}{k} n + \frac{\pi}{4k}. \tag{1.91}$$

8-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan masalalar

1-masala. Nuqtaning koordinata usulida berilgan harakat tenglamasiga ko‘ra uning trayektoriya tenglamasi topilsin va rasmda harakat yo‘nalishi ko‘rsatilsin:

$$x = 3t - 5,\ \ y = 4 - 2t.$$

2-masala. Nuqtaning koordinata usulida berilgan harakat tenglamasiga ko‘ra uning trayektoriya tenglamasi topilsin va rasmda harakat yo‘nalishi ko‘rsatilsin:

$$x = 5 \sin 10t,\ \ y = 3 \cos 10t.$$

3-masala. Nuqta harakatining berilgan tenglamalariga qarab, uning trayektoriya tenglamasi topilsin, shuningdek, masofani nuqtaning boshlang‘ich holatidan hisoblab, nuqtaning trayektoriya bo‘ylab harakatlanish qonuni ko‘rsatilsin:

$$x = 3t^2,\ \ y = 4t^2.$$

4-masala. Nuqta harakatining berilgan tenglamalariga qarab, uning trayektoriya tenglamasi topilsin, shuningdek, masofani nuqtaning boshlang‘ich holatidan hisoblab, nuqtaning trayektoriya bo‘ylab harakatlanish qonuni ko‘rsatilsin:

$$x = a\cos^2 t,\ \ y = a\sin^2 t.$$

5-masala. Nuqtaning harakati $x = 2a\cos^2\dfrac{kt}{2},\ y = a\sin kt$ tenglamalar bilan berilgan, bundagi a va k musbat oʻzgarmaslar. Masofani nuqtaning boshlangʻich holatidan hisoblab, harakat trayektoriyasi va trayektoriya boʻylab harakat qonuni aniqlansin.

6-masala. Moddiy nuqtaning harakati $S = (2t^2 - 8t + 6)m$ tenglama orqali berilgan (t sekundlarda oʻlchanadi).

1.25-rasm

Qanday vaqt momentida nuqtaning tezligi nolga teng boʻladi? Harakat boshlangan paytdan $t = 3$ s vaqt davomida bosib oʻtgan yoʻl aniqlansin *(1.25-rasm).*

9-§. Nuqtaning tezligini aniqlashga doir masalalarni yechish uchun uslubiy koʻrsatmalar

Nuqtaning tezligi deb berilgan sanoq sistemasida har qanday vaqt onida nuqta harakatining qanchalik ildamligi va yoʻnalishini ifodalovchi vektor kattalikka aytiladi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}. \qquad (1.92)$$

Bunda $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ lar koordinata oʻqlari birlik vektorlari.

Tezlik vektorining Dekart oʻqlaridagi proyeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \acute{x},\ \ v_y = \frac{dy}{dt} = \acute{y},\ \ v_z = \frac{dz}{dt} = \acute{z}.$$

Tezlik moduli

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (1.93)$$

formula asosida, uning yoʻnalishi esa

$$\cos(\vec{v} \wedge \vec{i}\,) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v} \wedge \vec{j}\,) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v} \wedge \vec{k}\,) = \frac{v_z}{v} \qquad (1.94)$$

formulalar asosida aniqlanadi.

Ko‘pincha masalalarda harakatdagi nuqtaning ma’lum vaqt oralig‘idagi «averagy velo sity» o‘rtacha sur’atini aniqlash talab etiladi:

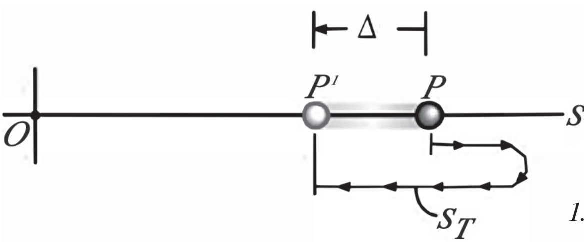
$$v_{o‘rt} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Ba’zi hollarda harakatdagi nuqtaning «average speed»i – o‘rtacha tezligini topish ham ma’lum qiziqish uyg‘otadi:

$$v_{o‘rt} = \frac{S_T}{\Delta t}.$$

O‘rtacha tezlik har doim musbat kattalik hisoblanadi.

O‘rtacha sur’at va o‘rtacha tezlik quyidagi rasmdan yaqqol ko‘rinadi:



1.26-rasm

Agar nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgan bo‘lsa, uning tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = v_\tau\ \vec{\tau}. \qquad (1.95)$$

Bunda $\vec{\tau}$ urinmaning birlik vektori, u yoy koordinatasi S ning o‘sishi tomon yo‘naladi.

Tezlik moduli quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\vec{v} = \frac{ds}{st} = \acute{s}.$$

Bunda: $v_\tau > 0$ bo‘lsa, nuqta yoy koordinatasining o‘sish tomoniga harakatlanadi.

$v_\tau < 0$ bo‘lsa, nuqta yoy koordinatasining kamayishi tomoniga harakatlanadi;

Nuqta kinematikasida nuqtaning tezligini aniqlashga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Koordinata o‘qlari sistemasi tanlab olinadi.
2. Tanlab olingan koordinata o‘qlari sistemasida nuqta harakatining tenglamalari tuziladi.
3. Nuqta harakatining tenglamalariga ko‘ra tezlik vektorining o‘qlaridagi proyeksiyalari aniqlanadi.
4. Nuqtaning tezligining o‘qlaridagi proyeksiyalariga ko‘ra miqdori va yo‘nalishi aniqlanadi.

10-§. Nuqtaning tezligini aniqlashga doir masalalar

1-masala. Sinov paytida raketaning dvigateli u yerdan 40 *m* balandlikka ko‘tarilganda ishdan chiqqan. U paytda raketa tezligi 75 *m/s* bo‘lgan. Raketaning maksimal ko‘tarilish balandligi va u qaytib yerga tushganda qanday tezlikka ega bo‘lishi aniqlansin. Erkin tushish tezlanishi $g = 9{,}81\ m/s^2$, u vertikal pastga yo‘nalgan, havo qarshiligi e’tiborga olinmasin *(1.27-rasm)*.

Yechish:

koordinata boshi sifatida yer sirtidagi *O* nuqtani tanlab, koordinata o‘qini raketa harakati tomon vertikal yuqoriga yo‘naltiramiz.

Raketaning maksimal ko‘tarilish balandligini aniqlaymiz. Raketa maksimal balandligi *B* nuqtaga yetganda uning tezligi quyidagicha ifodalanadi:

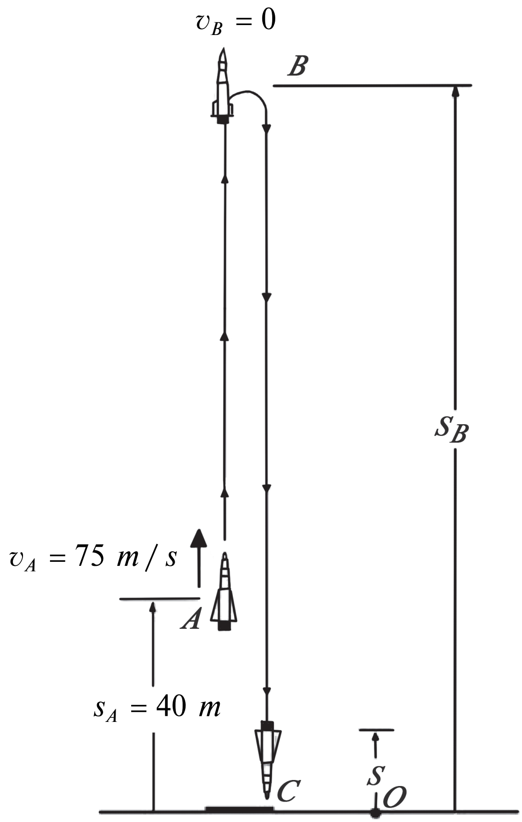
$$v_B^2 = v_A^2 + 2g(S_B - S_A).$$

Raketaning maksimal balandlikdagi tezligi $v_B = 0$ bo‘ladi. Shuning uchun

$$0 = (75\ m/s)^2 + 2(-9{,}81\ m/s^2)(S_B - 40\ m).$$

Bu ifodadan $S_B = 327\ m$.

Raketa *C* nuqtaga tushganda uning tezligi quyidagiga teng bo‘ladi:



1.27-rasm

$$v_C^2 = v_B^2 + 2g(S_C - S_B) = 0 + 2\left(-9,81\frac{m}{s^2}\right)(0 - 327).$$

Bu ifodadan

$$v_c = -80,1\ m/s.$$

$\vec{v}_c$ ning (—) ishorasi vertikal pastga yo‘nalganligidan darak beradi.

Raketaning yerga tushgandagi tezligi uning AC hududdagi harakatini o‘rganishdan ham aniqlanadi.

$$v_C^2 = v_A^2 + 2g(S_C - S_B) = \left(75\frac{m}{s}\right)^2 + 2\left(-9,81\frac{m}{s^2}\right)(0 - 40).$$

Bundan

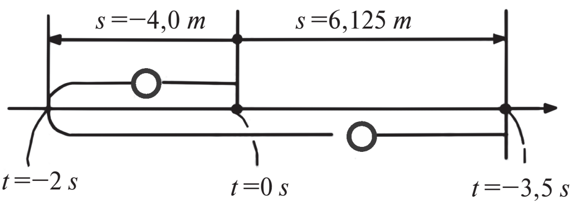
$$v_C = -80{,}1\frac{m}{s}, \quad |v_C| = 80{,}1\frac{m}{s}.$$

2-masala. Moddiy nuqta yo‘lning rasmda ko‘rsatilgan qismida $v = (3t^2 - 6t)\ m/s$ tezlik bilan harakatlanmoqda, bunda t sekundlarda o‘lchanadi.

Agar, dastlab nuqta O holatda bo‘lsa, 3,5 s davomida nuqta bosib o‘tgan masofa va shu vaqt orasidagi o‘rtacha sur’at va o‘rtacha tezlik aniqlansin.

Yechish: koordinata o‘qini nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakati trayektoriyasi bo‘ylab o‘ng tomon yo‘naltiramiz.

Koordinata boshi sifatida nuqtaning boshlang‘ich (t=0) holatini tanlaymiz *(1.28-rasm)*.



1.28-rasm

Nuqtaning berilgan trayektoriyadagi o‘rnini aniqlash usuli:

$$v = \frac{ds}{dt};$$

$$ds = vdt = (3t^2 - 6t)dt;$$

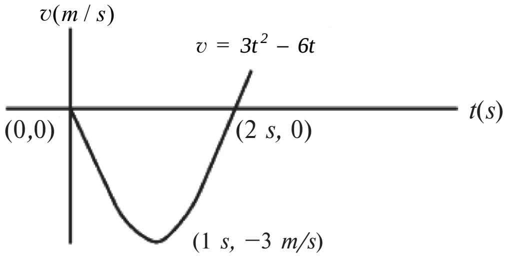
$$\int_0^S dS = \int_0^t (3t^2 - 6t)dt\ .$$

Tenglamani integrallasak va harakatning boshlang‘ich shartlaridan foydalansak, nuqtaning istalgan vaqt momentida trayektoriyadagi o‘rnini aniqlash uchun quyidagi tenglama (munobsabat)ga ega bo‘lamiz:

$$S = (t^3 - 3t^2)\ m.$$

Moddiy nuqtaning $t = 3,5$ *s* vaqt onida trayektoriyada egallagan o‘rnini aniqlash uchun harakat grafigini tuzamiz *(1.29-rasm)*.

Harakat grafigidan ko‘rinib turibdiki, $0<t<2$ *s* vaqt oralig‘ida,



1.29-rasm

nuqta tezligi manfiy ishoraga ega bo‘lar ekan va u *O* nuqtadan chap tomonga harakatlanar ekan.

$t>2$ *s* dan boshlab, nuqta tezligi musbat ishoraga ega bo‘lib, u o‘ng tomonga harakatlanar ekan. Nuqta tezligi grafigida $t = 0$, $t = 2$ *s* va $t = 3,5$ *s* vaqt onlari uchun tezliklari ko‘rsatilgan *(1.29-rasm)*.

Nuqtaning mazkur vaqt oralig‘ida trayektoriyadagi o‘rnini aniqlash uchun:

$$S = (t^3 - 3t^2)$$

munosabatdan foydalanilamiz:

$$S_{t=0}=0;\ S_{t=2\ s}= -4\ m;\ S_{t=3,5\ s}=6,125\ m.$$

Nuqtaning $t = 3,5$ *s* vaqt davomida bosib o‘tgan **masofasi** quyidagicha aniqlanadi:

$$S_T = 4,0 + 4,0 + 6,125 = 14,125 = 14,1\ m\ .$$

Nuqta $t = 0$ dan $t = 3,5$ *s* vaqt oralig‘ida **ko‘chishi** quyidagiga teng:

$$\Delta S = S\,|_{t=3,5s} - S\,|_{t=0} = 6,125\ m - 0 = 6,125\ m.$$

Buni e’tiborga olsak, shu vaqt orasidagi o‘rtacha sur’at quyidagiga teng bo‘ladi:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{6,125\ m}{3,5\ s - 0} = 1,75\ m/s.$$

O‘rtacha tezlik esa

$$v = \frac{S_T}{\Delta t} = \frac{14{,}125\ m}{3{,}5\ s - 0} = 4{,}04\ m/s.$$

3-masala. Nuqtaning harakati

$$x = v_0 t \cos\alpha_0, \tag{1.96}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.97}$$

tenglamalar bilan berilgan; *Ox* o'q gorizontal, *Oy* o'q vertikal bo'yicha yuqoriga yo'nalgan v_0, g va $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ o'zgarmas miqdorlar.

Nuqta trayektoriyasi, uning eng yuqori holatidagi koordinatalari, nuqta *Ox* o'qda bo'lgan vaqtda tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topilsin.

Yechish:

Nuqtaning trayektoriyasini aniqlaymiz.

Masala shartida nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalari berilgan. Koordinatalar formasidagi trayektoriya tenglamasini tuzish uchun berilgan tenglamalardan parameter t ni qisqartiramiz. Buning uchun (1.96) tenglamadan t ni aniqlab, (1.97) ga qo'yamiz.

Natijada, quyidagi ko'rinishdagi trayektoriya tenglamasiga ega bo'lamiz.

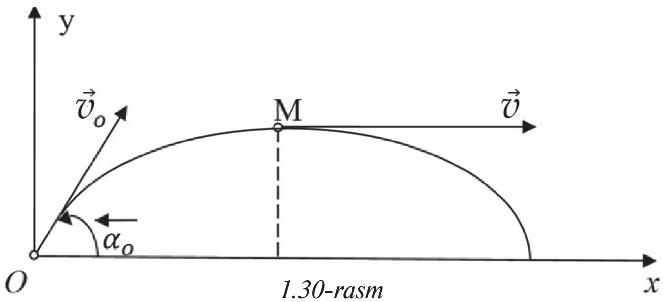
$$y = xgt\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2. \tag{1.98}$$

Mazkur tenglama parabolaning tenglamasidir. Nuqtaning trayektoriyasi parabolaning $x \geq 0$ shartni qanoatlantiruvchi qismidan iborat *(1.30-rasm)*.

Tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari uning mos koordinatasidan vaqt bo'yicha hisoblangan birinchi hosilaga teng. Masala shartiga ko'ra tezlikning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari uchun quyidagi ifodalarni olamiz:

$$v_x = x' = v_0 \cos\alpha_0, \tag{1.99}$$

$$v_y = y' = v_0 \sin\alpha_0 - gt. \tag{1.100}$$



1.30-rasm

Nuqta trayektoriyaning eng yuqori holatini egallaganda tezligi Ox o‘qiga parallel bo‘ladi. Shuning uchun $v_y = 0$ yoki $v_0 \sin \alpha_0 - gt_1 = 0$ bo‘ladi, bunda t_1 bilan nuqta eng yuqori holatga ko‘tarilguncha ketgan vaqt belgilangan. Oxirgi tenglikdan

$$t_1 = \frac{v_0 sin\alpha_0}{g}.$$

Aniqlangan vaqt t_1 ning qiymatini (1.96) va (1.97)ga qo‘yib, nuqta eng yuqori holatining koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha_0, \qquad (1.101)$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2 \alpha_0. \qquad (1.102)$$

Nuqta Ox o‘qda bo‘lgan vaqitda tezlikning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Nuqta Ox o‘qda yotgan vaqtda

$$y = 0$$

yoki

$$v_0 T \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g T^2 = 0 \qquad (1.103)$$

bo‘ladi. Mazkur ifodada t bilan nuqta Ox o‘qda bo‘lgan vaqt belgilangan.

(1.103) tenglikdan

$$T_1 = 0, \; T_2 = \frac{2v\sin\alpha_0}{g}$$

vaqtlar aniqlanadi. T_1=0 vaqt nuqtaning boshlang‘ich holatiga mos keladi. T_1 va T_2 ning qiymatini (1.99) va (1.100)ga qo‘yib, nuqta Ox o‘qda bo‘lgan vaqtdagi tezlikning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz.

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \tag{1.104}$$

$$v_y = \pm v_0 \sin\alpha_0 \tag{1.105}$$

(1.105)da musbat ishora nuqtaning boshlang‘ich holatiga mos keladi.

4-masala. Nuqtaning harakati

$$x = 2t, \tag{1.106}$$

$$y = t^2 \tag{1.107}$$

tenglamalar bilan berilgan (t – sekundlarda, x va y – santimerlarda o‘lchanadi).

$t = 1$ *s* vaqt uchun tezlik qiymati topilsin va trayektoriyada ko‘rsatilsin.

Yechish:

trayektoriya tenglamasini tuzish uchun harakat tenglamalarining biridan vaqt t ni aniqlab, ikkinchisiga qo‘yamiz:

$$t = \frac{x}{2}, \tag{1.108}$$

$$y = \frac{x^2}{4}. \tag{1.109}$$

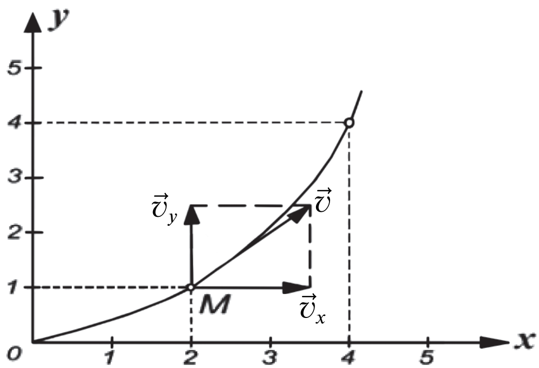
Bu tenglama parabola tenglamasi. Binobarin, nuqtaning trayektoriyasi paraboladan iborat ekan.

Trayektoriyani chizish uchun (1.109) tenglamada x ga qiymatlar berib, unga mos y ning qiymatlarini topamiz *(1.31-rasm):*

x	0	2	4
y	0	1	4

$t = 1$ sekundda nuqtaning trayektoriyadagi o‘rnini topamiz.

Buning uchun berilgan harakat tenglamalaridagi t ning o‘rniga uning qiymatini qo‘yib, nuqtaning koordinatalarini topamiz.



1.31-rasm

$$t = 1 \ s \text{ da}, \ x = 2 \ sm, \ y = 1 \ sm.$$

Demak, $t = 1$ sekundda M nuqtaning koordinatalari (2, 1) bo‘lar ekan.

Nuqtaning tezligini koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlaymiz:

$$v_x = x' = 2 \ sm/s, \ (v_x = \text{const}), \ v_y = y' = 2t \ sm/s. \quad (1.110)$$

$$t = 1 \ s \text{ da}, \ v_x = 2 \ sm/s, \ v_y = 2 \cdot 1 = 2 \ sm/s.$$

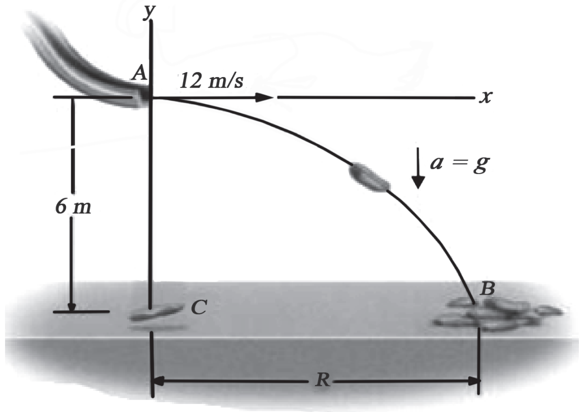
Tezlik miqdori koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari orqali quidagicha aniqlanadi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{2} \ sm/s. \quad (1.111)$$

Tezlik uchun masshtabni 1 *sm* da 2 *sm/s* deb tanlab, tezlik vektorining yo‘nalishini aniqlaymiz *(1.31-rasm)*. Tezlik vektori nuqta trayektoriyasiga urinma holda yo‘nalar ekan.

11-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

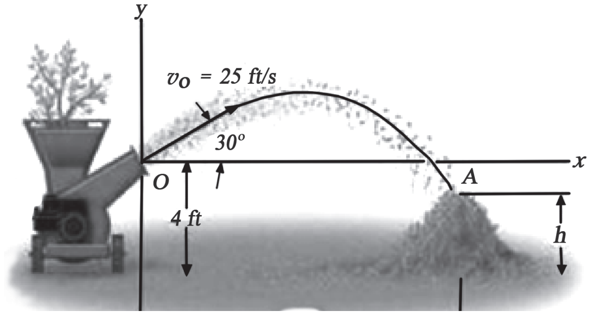
1-muammo. Qop nishablikda harakatlanib, A nuqtada $v_A = 12 \ m/s$ gorizontal tezlikka ega bo‘ladi. Agar A nuqtaning poldan balandlikgi 6 m bo‘lsa, qopning B nuqtaga tushishi uchun ketadigan vaqt va *B* nuqtaning *C* nuqtadan qanday uzoqlikda yotishi aniqlansin *(1.32-rasm)*.



1.32-rasm

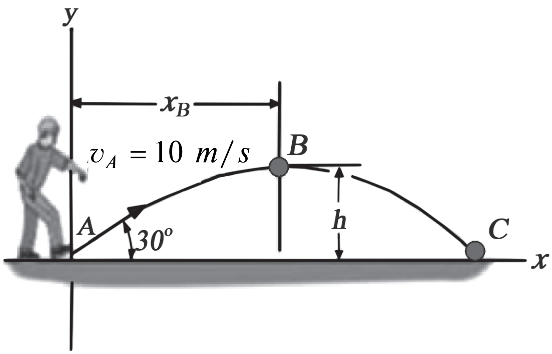
2-muammo. Yog'och qirqadigan mashinaning *a* nuqtasidan yog'och qirindisi $v_0 = 25\ m/s$ tezlik bilan otilib chiqadi.

Agar qirindining otilib chiqish tezligi gorizontal bilan 90° burchak tashkil etsa, uning *A* tushish nuqtasining yerdan qanday *h* balandlikda bo'lishi aniqlansin. *A* nuqta qirindining otilib chiqishi nuqtasidan yer bo'ylab hisoblanganda 20 *m* uzoqlikda joylashgan *(1.33-rasm)*.



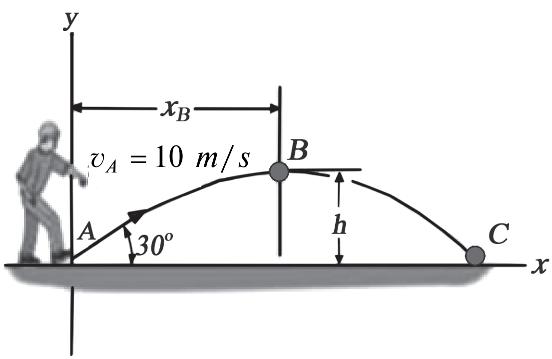
1.33-rasm

3-muammo. Koptok *A* nuqtadan $v_A = 10\ m/s$ tezlik bilan tepiladi. Koptokning maksimal ko'talish balandligini aniqlang *(1.34-rasm)*.



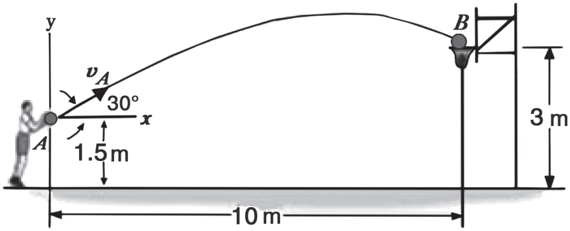
1.34-rasm

4-muammo. Koptok *A* nuqtada $v_A = 10\ m/s$ tezlik bilan tepiladi. Koptokning uchish uzoqligini va yerga tushgandagi tezligi aniqlansin *(1.35-rasm)*.



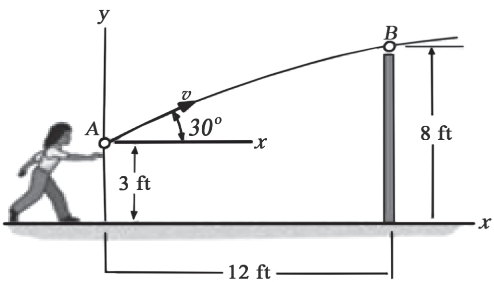
1.35-rasm

5-muammo. Basketbol to'pi *A* nuqtadan gorizont bilan $\alpha = 30°$ burchak hosil qiluvchi $\vec{v}_A$ tezlik bilan otilib, yerdan 3 *m* balandlikda turuvchi basketbol setkasiga tushadi. Basketbol to'pining otilish tezligi v_A aniqlansin *(1.36-rasm)*.



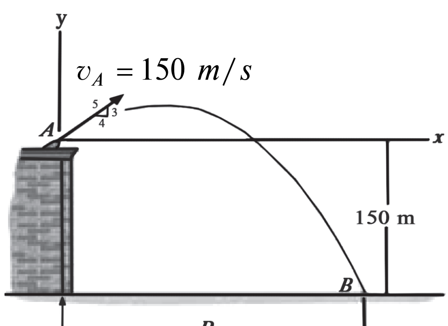
1.36-rasm

6-muammo. To‘p A nuqtadan otiladi. U yerdan 8 m, otilish nuqtasidan 12 m masofada joylashgan B nuqtaga tushish uchun qanday v_A tezlik bilan otiladi? *(1.37-rasm)*.



1.37-rasm

7-muammo. Reaktiv snaryad A nuqtadan $v_A = 150\ m/s$ tezlik bilan otiladi. Agar A nuqta yerdan 150 m balandlikda joylashgan bo‘lsa, snaryadning uchish uzoqligi aniqlansin *(1.38-rasm)*.



1.38-rasm

8-muammo. Shar vertikal holda yuqoriga yerdan 15 *m/s* tezlik bilan harakatlana boshlagan. Shar yerga qancha vaqt o‘tgach qaytib tushadi? *(1.39-rasm)*.

9-muammo. Harakatdagi nuqtaning trayektoriyadagi o‘rni $S=(2t^2-8t+6)$ *m* masofa orqali aniqlanadi. Harakat boshlangandan qanday vaqt o‘tgach nuqta tezligi 0 ga teng bo‘ladi? Nuqta $t = 3$ *s* vaqt davomida qanday masofani bosib o‘tadi? *(1.40-rasm)*

1.39-rasm

1.40-rasm

12-§. Nuqtaning tezlanishini aniqlashga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar

Nuqtaning tezlanishi deb, nuqta tezligining vaqt o‘tishi bilan miqdor va yo‘nalish jihatdan o‘zgarishini ifodalovchi vektor kattalikka aytiladi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{1.112}$$

Bu ifodada

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = x'', \; a_y = \frac{dv_y}{dt} = y'', \; a_z = \frac{dv_z}{dt} = z''.$$

Tezlanishning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari aniqlangan bo‘lsa, tezlanish moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Tezlanish vektorining yo'nalishi esa uning yo'naltiruvchi kosinuslari orqali aniqlanadi:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \ \cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \ \cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Ba'zan, masalalar yechishda nuqtaning ma'lum vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanishini aniqlash talab etiladi.

$$a_{o'r.} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

bunda

$\Delta v = v' - v$ nuqataning tezligining Δt vaqt oralig'ida o'zgarishi.

Nuqtaning harakati tabiiy usulda berilganda uning tezlanishi

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0 \tag{1.113}$$

formula asosida aniqlanadi.

Bu ifodada $\vec{a}_\tau$ va $\vec{a}_n$ lar nuqtaning urinma va normal tezlanishlarini ifodalaydi.

Bunday holda tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

formula asosida hisoblanadi.

Tezlanishning yo'nalishi esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}.$$

Nuqta kinematikasida nuqtaning tezlanishini aniqlashga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1) koordinata o'qlari sistemasi tanlab olinadi;

2) tanlab olingan koordinata o'qlari sistemasida nuqta harakatining tenglamalari tuziladi;

3) nuqta harakatining tenglamalariga ko'ra tezlanish vektorining o'qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi;

4) nuqtaning tezlanishining o‘qlardagi proyeksiyalariga ko‘ra uning miqdori va yo‘nalishi aniqlanadi.

Agar moddiy nuqtaning tezlanishi mavhum bo‘lsa, u orqali nuqta harakatining tenglamalari va trayektoriyasini aniqlash mumkin.

Nuqta harakatining tezlanishi orqali uning harakati tenglamalarini va trayektoriyasini aniqlashda quyidagi amallarni bajarish tavsiya etiladi:

1) koordinata o‘qlari sistemasi tanlab olinadi;

2) tezlanishning tanlab olingan o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi;

3) hosil bo‘lgan tenglamani integrallab, nuqta tezligining o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi;

4) nuqta tezligining ma’lum vaqt oni uchun mumkin bo‘lgan qiymatlaridan foydalanib, hosil bo‘lgan ifodalarda ishtirok etuvchi integrallash o‘zgarmaslari aniqlanadi;

5) hosil bo‘lgan tezlikning o‘qlardagi proyeksiyalari bo‘lmish ifodalarni integrallab, nuqtaning harakat tenglamalari aniqlanadi;

6) nuqtaning biror vaqt uchun ma’lum bo‘lgan koordinatalaridan foydalanib, integrallash o‘zgarmaslari aniqlanadi;

7) hosil bo‘lgan nuqtaning harakat tenglamalaridan vaqtni yo‘qotib (qisqartirib), koordinatalar formasidagi trayektoriya tenglamasi tuziladi.

13-§. Nuqtaning tezlanishini aniqlashga doir masalalar

1-masala.

Samolyotdan $h = 320$ *m* balandlikdan tashlangan yuk

$$x = 60t,\ y = 5t^2 \tag{1.114}$$

tenglamalarga muvofiq harakatlanadi, bunda *x, y* lar metrlarda, *t* sekundlarda o‘lchanadi.

Yukning trayektoriyasi, samolyotdan tashlash va yerga tushish nuqtalari orasidagi gorizontal masofa, yerga tushish paytidagi tezligi va tezlanishi, tushish nuqtasida trayektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin *(1.41-a rasm).*

Yechish:

yukning trayektoriyasini aniqlaymiz. Buning uchun harakat tenglamalarining biridan t vaqtni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz:

$$t = \frac{x}{60};\ y = 5\left(\frac{x}{60}\right)^2 = \frac{1}{720}x^2.$$

Natijada,

$$y = \frac{1}{720}x^2 \qquad (1.115)$$

ko‘rinishdagi parabola tenglamasi hosil bo‘ladi. Demak, yukning trayektoriyasi y o‘qiga simmetrik, uchi koordinata boshida bo‘lgan parabola ekan *(1.41-a rasm)*.

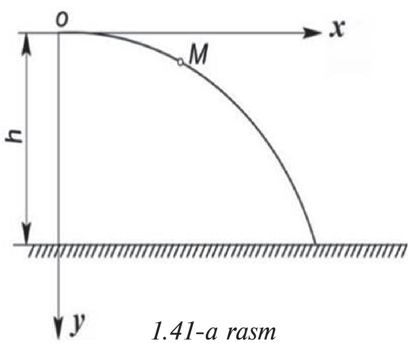
Yukning samolyotdan tashlash va yerga tushish nuqtalari orasidagi gorizontal masofani aniqlaymiz. Yukning M_1 tushish nuqtasidagi $y_1 = h$, $x_1 = l$ koordinatalarni aniqlash uchun yukning harakat tenglamalaridan foydalanamiz:

$$y = 5t^2,\ t_1 = \sqrt{\frac{y_1}{5}} = \sqrt{\frac{h}{5}} = 8\ s. \qquad (1.116)$$

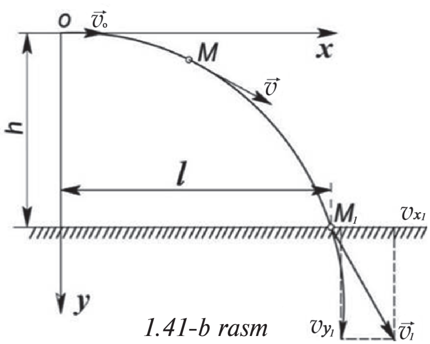
Shuning uchun

$$l = x_1 = 60t = 60 \cdot 8 = 480\ m.$$

Demak, yukning samolyotdan tashlash va yerga tushish nuqtalari orasidagi gorizontal masofa 480 m ekan.



1.41-a rasm



1.41-b rasm

Yukning tushish nuqtasidagi tezligi va tezlanishini aniqlaymiz.

Yukning tezligi uning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlanadi *(1.41-b rasm)*:

$$v_1 = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} = \sqrt{60^2 + (10t)^2}. \qquad (1.117)$$

Yuk yerga tushganda $t_1 = 8\ s$, shuning uchun

$$v_1 = \sqrt{3600 + 6400} = 100\ m/s.$$

Yukning tezlanishi ham uning tezligi kabi aniqlanadi.

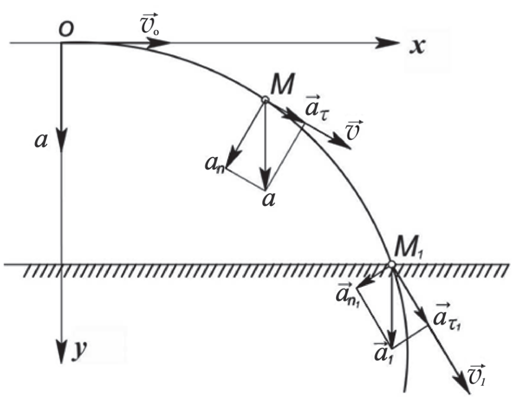
$$a_1 = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2},$$

$$a_{x_1} = \frac{dv_{x_1}}{at} = 0,\ a_{y_1} = \frac{dv_{y_1}}{at} = 10.$$

Shuning uchun

$$a_1 = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = 10\ m/s^2. \qquad (1.118)$$

Yukning yerga tushish nuqtasida trayektoriyaning egrilik radiusini aniqlash uchun uning *urinma* va *normal* tezlanishini aniqlaymiz *(1.41-c rasm)*.



1.41-c rasm

Yukning urinma tezlanishini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{at}\right| = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = 8\ m/s^2. \qquad (1.119)$$

Yukning normal tezlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2,$$

bunda

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{100 - 64} = 6\ m/s^2. \qquad (1.120)$$

Trayektoriyaning yuk tushgan M_1 nuqtasining egrilik radiusi

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{100^2}{6} = 1667\ m. \qquad (1.121)$$

2-masala.

Poyezd radiusi $R = 1\ km$ bo'lgan aylana yoyi bo'ylab tekis sekinlanuvchan harakat qiladi va $s = 560\ m$ yo'l bosadi.

Uning boshlang'ich tezligi $v_0 = 36\ km/soat = 10\ m/s$, boshlang'ich tezlanishi esa $a_0 = 0{,}125\ m/s^2$. Poyezdning yoy oxiridagi tezligi va tezlanishi aniqlansin.

Yechish:

poyezd nuqtalaridan birining, masalan, og'irlik markazining harakatini o'rganamiz.

Poyezdning harakat tenglamasini yozish uchun yoy koordinatasining sanoq boshini tanlashimiz kerak. Bunday nuqta sifatida poyezdning boshlang'ich holatini olamiz va poyezdning harakat yo'nalishini ***musbat yo'nalish*** deb qabul qilamiz. Bu holda $s_0 = 0$.

Nuqtaning tekis sekinlanuvchan harakatida uning harakat tenglamasi va tezligi quyidagi formulalar asosida ifodalanadi:

$$s = v_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2}, \qquad (1.122)$$

$$v = v_0 - a_\tau t, \qquad (1.123)$$

bunda a_τ – urinma tezlanish moduli.

Masala shartidan harakatdagi M nuqtaning yoy oxiridagi yoy koordinatasi $s = 560\ m$, boshlang'ich tezligi $v_0 = 36\ km/soat = 10\ m/s$, boshlang'ich tezlanish $a_0 = 0{,}125\ m/s^2$ hamda trayektoriyaning egrilik radiusi $R = 1000\ m$ berilgan.

M nuqtaning yoy boshidagi normal tezlanishini quyidagi formula asosida aniqlaymiz:

$$a_n o = \frac{(v_0^2)}{\rho} = \frac{100}{1000} = 0{,}1\ m/s^2.$$

M nuqtaning yoy boshidagi to‘la tezlanishini bilgan holda, uning yoy boshidagi urinma tezlanishini aniqlaymiz:

$$a_0^2 = a_{n0}^2 + a_\tau^2,$$

bunda

$$a_\tau = \sqrt{a_0^2 - a_{n0}^2} = \sqrt{0{,}125^2 - 0{,}1^2} = 0{,}075\ m/s^2.$$

Nuqtaning harakati tekis sekinlanuvchan bo‘lganligi uchun

$$a_\tau = \text{const}.$$

(1.22) va (1.23) tenglamalarga aniqlangan kattaliklarning qiymatlarini qo‘yamiz:

$$560 = 10t - 0{,}075t^2, \tag{1.24}$$

$$v = 10 - 0{,}075t. \tag{1.25}$$

Bu tenglamalardan harakatlanish vaqti t aniqlanadi:

$$0{,}075t^2 - 20t + 1120 = 0,$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 1120 \cdot 0{,}075}}{0{,}075} = \frac{10 \pm 4}{0{,}075}\ s.$$

Harakatlanish vaqti uchun kichik ildiz qiymatini tanlaymiz:

$$t = \frac{6}{0{,}075} = 80\ s, \tag{1.26}$$

chunki katta ildiz qiymati (187 *s*) nuqtaning to‘xtashi uchun $(v = 0)$ ketgan vaqtdan katta

$$\left(t_{to‘xtash} = \frac{v_0}{a} = \frac{10}{0{,}075} = 133\ sek. \right) \tag{1.27}$$

(1.23) tenglamadan nuqtaning yoy oxiridagi tezligini aniqlaymiz:

$$v = v_0 - a_\tau t = 10 - 0{,}075 \cdot 80 = 4\ m/s. \tag{1.28}$$

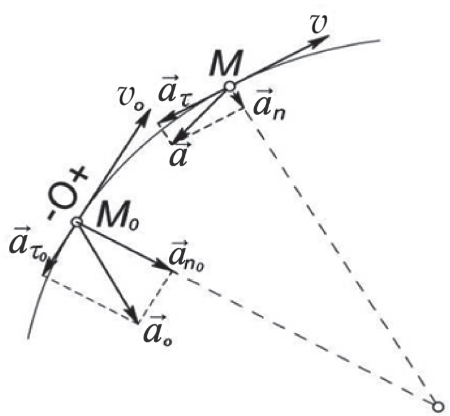
Nuqtaning yoy oxiridagi normal tezlanishi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{1000} = 0{,}016\ m/s^2. \qquad (1.29)$$

Nuqtaning yoy oxiridagi to‘la tezlanishi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(0{,}075)^2 + (0{,}016)^2} = 0{,}0767\ m/s^2. \qquad (1.30)$$

Aylana yoyi bo‘ylab tekis sekinlanuvchan harakatda nuqtaning urinma tezlanishining moduli o‘zgarmaydi, to‘la tezlanish moduli esa normal tezlanish modulining kamayishi tufayli kamayadi. Aniqlangan tezlik va tezlanishlar *1.42-rasmda* tasvirlangan.



1.42-rasm

3-masala.

M nuqtaning berilgan harakat tenglamalariga ko‘ra trayektoriyasining ko‘rinishi aniqlansin va $t = t_1$ vaqt oni uchun nuqtaning trayektoriyadagi o‘rni, uning tezligi, to‘la, urinma va normal tezlanishlari hamda trayektoriyaning egrilik radiusi topilsin:

$$x = 4\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 2\ (sm), \qquad (1.131)$$

$$y = 4\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)\ (sm), \qquad (1.132)$$

$$t = 1/2\ \text{s}.$$

Yechish:

nuqtaning trayektoriyasini aniqlaymiz. Trayektoriya tenglamasini tuzish uchun harakat tenglamalaridan *t* vaqtni yo‘qotamiz. Buning uchun berilgan masalada quyidagi ayniyatdan foydalanamiz:

$$\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)=1. \tag{1.133}$$

Masalada:

$$\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)=\frac{y}{4},\ \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)=\frac{x-2}{4}, \tag{1.134}$$

(1.33)ni e’tiborga olsak,

$$\frac{y}{4}+\frac{x-2}{4}=1,$$

yoki

$$y=6-x.$$

Nuqtaning trayektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan iborat ekan.

Harakat tenglamalaridan foydalanib, nuqtaning $t = 1/2$ sekunddagi koordinatalarini topamiz va shaklda ko‘rsatamiz *(1.43-rasm):*

$$x=4\cos^2\frac{\pi}{6}+2=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}^2\right)+2=5\ sm,$$

$$y=4\sin^2\frac{\pi}{6}=4\cdot 0{,}25=1\ sm. \tag{1.135}$$

Demak, $t = 1/2$ sekundda nuqtaning koordinatalari $x = 5$, $y = 1$ bo‘lar ekan.

Nuqtaning tezligini uning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlaymiz:

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}.$$

Buning uchun nuqta harakat tenglamalaridan vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\frac{8\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right), \qquad (1.136)$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = \frac{8\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right). \qquad (1.137)$$

$t = 1/2$ s da,

$$\upsilon_x = -\frac{4\pi^2}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = -\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -3{,}6\ sm/s,$$

$$\upsilon_y = \frac{4\pi^2}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}6\ sm/s.$$

Binobarin,

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = 5{,}1\,sm/s.$$

Tezliklar uchun masshtab tanlab, ularni shaklda ko‘rsatamiz *(1.43-rasm)*.

Nuqtaning tezlanishini uning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlaymiz:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \qquad (1.138)$$

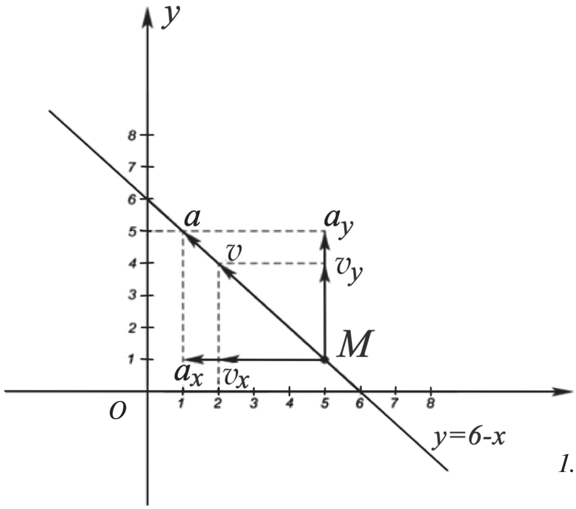
Buning uchun υ_x, υ_y lardan vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$a_x = \upsilon_x' = \ddot{x} = -\frac{8\pi^2}{9}\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right),$$

$$a_y = \upsilon_y' = \frac{8\pi^2}{9}\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right). \qquad (1.39)$$

$t = 1/2\ s$ da,

$$a_x = -\frac{8\pi^2}{9}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = -\frac{8\pi^2}{9}\cdot 0{,}5 = -4{,}4\ sm/s^2,$$



1.43-rasm

$$a_y = \frac{8\pi^2}{9}\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{8\pi^2}{9}\cdot 0{,}5 = 4{,}4\ sm/s^2.$$

Binobarin,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6{,}2\ m/s^2. \qquad (1.140)$$

Nuqtaning urinma tezlanishi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{at}\right| = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = 6{,}2\ sm/s^2.$$

Nuqtaning normal tezlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2;\ a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 0. \qquad (1.141)$$

Trayektoriyaning egrilik radiusi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho};\ \rho = \frac{v^2}{a_n} = \infty. \qquad (1.42)$$

Masalada, nuqtaning trayektoriyasi to‘g‘ri chiziq bo‘lganligi uchun, egrilik radiusi ∞ ga teng.

Hisoblash natijalarini quyidagi jadvalda joylashtiramiz:

Aniqlangan kattaliklar *1.43-rasmda* ko‘rsatilgan.

Nuqta koordinatalari (sm)		Nuqta tezligi (sm/s)			Nuqta tezlanishi (sm/s²)					Egrilik radiusi
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
5	1	−3,6	3,6	5,1	−4,4	4,4	6,2	62	0	∞

4-masala.

Avtomobil yo‘lning to‘g‘ri chiziqli uchastkasida ma’lum qisqa vaqt harakatlanib, $v = (3t^2 + 2t)\ m/s$ tezlikka ega bo‘ladi (ifodada t sekundda o‘lchanadi), harakat boshlangan vaqtdan $t_1 = 3\ s$ vaqtgacha avtomobilning bosib o‘tgan yo‘li va tezlanishi aniqlansin. $t = 0$ da $S = 0$ bo‘lgan.

Yechimi:

1. Koordinata o‘qini avtomobil harakati tomon yo‘naltiramiz.

2. Avtomobilning $t_1 = 3\ s$ da bosib o‘tgan yo‘lini aniqlaymiz. Koordinata boshi sifatida avtomobilning boshlang‘ich holatini tanlaymiz. Nuqtaning trayektoriyadagi o‘rni $v = \dfrac{dS}{dt}$ formuladan aniqlanadi. $t = 0$ da $S = 0$ bo‘lgan.

$$v = \frac{dS}{dt} = \left(3t^2 + 2t\right),$$

$$\int_0^s dS = \int_0^t \left(3t^2 + 2t\right)dt,$$

$$S\Big|_0^s = \left(t^3 + t^2\right)\Big|_0^t$$

Demak,

$$S = t^3 + t^2.$$

Harakat boshlangandan $t_1 = 3\ s$ vaqt o‘tgach, avtomobil bosib o‘tgan yo‘l quyidagiga teng bo‘ladi:

$$S = 3^3 + 3^2 = 36\ m.$$

3. Avtomobilning $t_1 = 3\ s$ dagi tezlanishini aniqlaymiz:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(3t^2 + 2t)}{dt} = 6t + 2.$$

Harakat boshlangandan $t_1 = 3$ s vaqt o‘tgach,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \ m/s^2$$

bo‘ladi.

5-masala. Nuqta radiusi 800 m bo‘lgan aylana yoyi bo‘ylab tekis o‘zgaruvchan harakat qiladi. Uning boshlang‘ich tezligi v_0 = 5 m/s bo‘lib, s = 800 m masofani o‘tgandan keyingi tezligi v_T = = 15 m/s.

Nuqtaning boshlang‘ich tezlanishi a_0, 800 m masofani o‘tish vaqti T va harakat boshlangandan keyin T vaqt o‘tganda qanday a_T tezlanishga ega bo‘lishi topilsin.

Yechish: nuqta egri chiziqli harakatda bo‘lgani uchun uning tezlanishi quyidagi formulaga ko‘ra topiladi:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Masala shartiga ko‘ra nuqta tekis o‘zgaruvchan harakatda bo‘lgani uchun egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakatdagi tezlikni va harakat qonunini ifodalovchi tenglamalardan foydalaning:

$$v = v_0 + a_\tau t, \tag{1.143}$$

$$S = S_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{1.144}$$

Sanoq boshini nuqtaning boshlang‘ich holatida olsak, S_0 = 0. Masala shartiga berilganlarni (1.143) va (1.144)ga qo‘yamiz:

$$15 = 5 + a_\tau \cdot T,$$

$$800 = 5T + a_\tau \cdot \frac{T^2}{2}.$$

Bu tenglamalar sistemasini yechsak, T = 80 s; $a_\tau = 0{,}125 \ m/s^2$ kelib chiqadi.

Nuqtaning boshlang‘ich va T paytdagi normal tezlanishlarini topamiz. Nuqta trayektoriyasi aylana bo‘lgani uchun $r = R$ = 800 m.

Shuning uchun

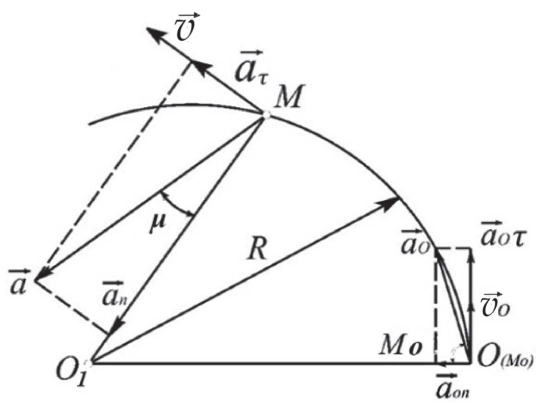
$$a_{no} = \frac{v_0^2}{r} = 0{,}029\frac{m}{s^2},\ a_{nT} = \frac{v_T^2}{r} = 0{,}281\frac{m}{s^2}.$$

Nuqtaning tezlanishi $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ formuladan topiladi. Shunga ko'ra, $t = 0$, $t = T$ vaqtlar uchun mos ravishda $a_0 = 0{,}129\ m/s^2$, $a_T = 0{,}308\ m/s^2$ kelib chiqadi. Har ikki payt uchun tezlanish yo'nalishini quyidagi formula yordamida topamiz:

$$\mu_0 = \mathrm{arctg}\frac{|a_\tau|}{a_{nO}}\mathrm{arctg}4{,}310,\ \mu_0 \approx 77^0;$$

$$\mu_0 = \mathrm{arctg}\frac{|a_\tau|}{a_{nT}}\mathrm{arctg}0{,}0444,\ \mu_T \approx 24^0.$$

Tezlanish vektori yo'nalishi *1.44-rasmda* tasvirlangan.



1.44-rasm

6-masala. Harakati $\vec{r} = 2\sin\frac{\pi t}{3}\vec{i} + \left(3\cos\frac{\pi t}{3} + 4\right)\vec{j}$ tenglama bilan ifodalangan nuqtaning trayektoriyasi va $t = 1$ paytdagi tezligi, tezlanishi hamda trayektoriyaning shu vaqtga mos keluvchi egrilik radiusi topilsin (r – metrda, t – sekundda o'lchanadi).

Yechish. Nuqta harakati tenglamasidan kelib chiqib, koordinata usulida harakatni quyidagicha ifodalaymiz:

$$x = 2\sin\frac{\pi t}{3}, \; y = 3\cos\frac{\pi t}{3} + 4. \qquad (1.145)$$

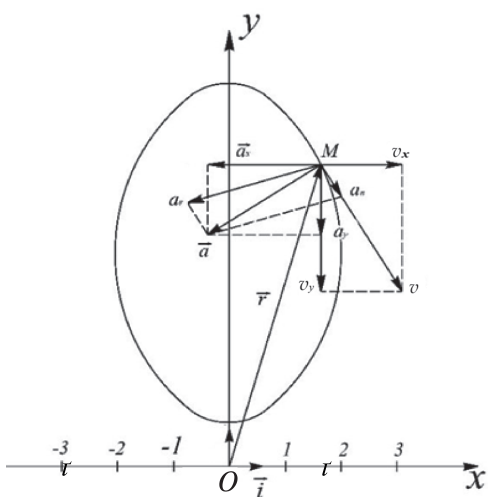
(1.145) tenglamalar sistemasi nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalari bo‘lib, ulardan vaqt t ni yo‘qotsak, trayektoriyaning qanday chiziq bo‘lishi aniqlanadi. Buning uchun (1.145)ni

$$\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi t}{3}, \; \frac{y-4}{3} = \cos\frac{\pi t}{3}$$

ko‘rinishda yozib, ularning har birini kvadratga oshirib, hadlab qo‘shamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \qquad (1.146)$$

(1.146)dan ko‘rinib turibdiki, nuqta trayektoriyasi ellips shaklida ekan *(1.45-rasm)*.



1.45-rasm

t = 1 s paytda nuqta trayektoriyaning M nuqtasida bo‘ladi. Nuqta tezligini quyidagi formulalar yordamida topamiz:

$$v_x = x' = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3},\ v_y = y' = -\pi\sin\frac{\pi t}{3},$$

$$v = \pi\sqrt{\frac{4}{9}\cos^2\frac{\pi t}{3} + \sin^2\frac{\pi t}{3}}$$

yoki

$$v = \frac{\pi}{3}\sqrt{4 + +5\sin^2\frac{\pi}{3}t}. \qquad (1.147)$$

$t = 1$ s payt uchun $v_x = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05\frac{m}{s}$, $v_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \approx -2{,}72\frac{m}{s}$,

$v = \frac{\pi}{6}\sqrt{31} \approx 2{,}92\frac{m}{s}$, $\cos(\vec{v},\hat{\ }\vec{i}) = \frac{v_x}{v} \approx 0{,}3584$, $\cos(\vec{v},\hat{\ }\vec{j}) = \frac{v_y}{v} \approx$

$\approx -0{,}9312$.

Bu kattaliklarni rasmda tasvirlab, $\vec{v}$ vektori trayektoriyaga M nuqtada o‘tkazilgan urinma bo‘yicha yo‘nalganiga iqror bo‘lamiz.

Nuqtaning tezlanishini topamiz:

$$a_x = v_x' = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3},\ a_y = v_y' = -\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi t}{3};$$

$$a = \frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{4}{9}\sin^2\frac{\pi}{3}t + \cos^2\frac{\pi}{3}t} = \frac{\pi^2}{9}\sqrt{9 - 5\sin^2\frac{\pi}{3}t}.$$

$t = 1$ s payt uchun:

$$a_x \approx -1{,}9\frac{m}{s^2},\ a_y \approx -1{,}65\frac{m}{s^2},\ a \approx 2{,}51\frac{m}{s^2},$$

$$\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{i}) = \frac{a_x}{a} \approx 0{,}7570,\ \cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{j}) = \frac{a_y}{a} \approx -0{,}6573.$$

Ma’lum masshtab tanlab olib, bu kattaliklarni ham rasmda tasvirlaymiz *(1.45-rasm)*.

Trayektoriyaning egrilik radiusini aniqlashda $a_n = \dfrac{v^2}{p}$ formuladan foydalanish mumkin. Buning uchun avval urinma va normal tezlanishlarni topish kerak.

$a_r = \dfrac{dv}{dt}$ bo‘lgani uchun (3)dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$a_\tau = v = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\frac{10}{3}\pi \cos\frac{\pi}{3}t \cdot \sin\frac{\pi}{3}t}{2\sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi}{3}t}} = \frac{5}{18}\pi^2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{3}t}{\sqrt{4 + 5\sin^2\frac{\pi}{3}t}}.$$

Bundan $t = 1$ s payt uchun $a_\tau \approx 0{,}85\dfrac{m}{s^2}$ kelib chiqadi. Urinma tezlanish tezlik vektori bo‘yicha yo‘nalgan, $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$ formuladan foydalanib, $t = 1$ s vaqt uchun normal tezlanishni aniqlaymiz:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \approx 2{,}36\frac{m}{s^2}.$$

Normal tezlanish $\vec{a}_\tau$ ga perpendikular ravishda trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘nalgan *(1.45-rasm)*.

$t = 1$ s paytda nuqtaning trayektoriyada egallagan holati uchun egrilik radiusini topamiz:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \approx 2{,}69 \ m.$$

14-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

1-muammo. Yo‘lovchi to‘g‘ri yo‘lda $v = (1{,}2 - 3t)$ m/s tezlik bilan velosipedda ketmoqda. Harakat boshlangandan $t = 1$ s vaqt o‘tgach yo‘lovchi boshlang‘ich nuqtadan 10 m chapda bo‘ladi. Yo‘lovchining $t_1 = 4$ s vaqtdagi tezlanishini aniqlang. Yo‘lovchining $t = 0$ dan $t - 10$ sek. vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘li aniqlansin.

2-muammo. Yo‘lovchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $v = (-4\ s^2)$ *m/s* tezlik bilan harakatlanmoqda (vaqt sekundlarda o‘lchanadi). Agar $t = 0$ vaqt momentida $s = 2$ *m* bo‘lsa, yo‘lovchining tezligi va tezlanishini vaqt funksiyasi sifatida aniqlang.

3-muammo. Nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatida tezlanishi $a = (0{,}02\ t^2)$ (vaqt sekundlarda o‘lchanadi). Agar $t = 0$ da $v = 0$, $s = 0$ bo‘lsa, nuqta $s = 4$ *m* masofani bosib o‘tgach, qanday tezlik va tezlanishga ega bo‘ladi?

4-muammo. Nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $a = 5/\,(3S^{1/3} + S^{5/2})$ *m*/s^2 tezlanish bilan harakatlanmoqda (masofa s metrlarda o‘lchanadi). Agar nuqta harakatlana boshlagan vaqtda $s = 1$ *m* bo‘lsa, $s = 2$ *m* masofani bosib o‘tgach, qanday tezlikka erishadi?

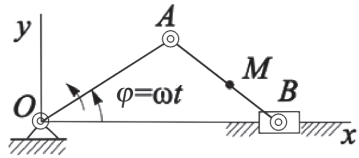
5-muammo. Nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $a = (2t - 1)$ m/s^2 tezlanish bilan harakatlanadi (vaqt t sekundlarda o‘lchanadi). Agar $t = 0$ vaqt momentida $s = 1$ m, $v = 2$ *m/s* bo‘lsa, $t = 8$ *s* vaqt momentidagi nuqtaning tezligi va holati aniqlansin. Nuqta harakatlanishi davomida bosib o‘tgan masofa ham aniqlansin.

6-muammo. Nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $v = (200\ s)$ *mm/s* tezlik bilan harakatlanmoqda (masofa s millimetrlarda o‘lchanadi). Nuqta $s = 2000$ *mm* masofa o‘tgach, qanday tezlikka ega bo‘ladi? Nuqta $s = 500$ *mm* masofani qancha vaqt davomida bosib o‘tishi ham aniqlansin.

7-muammo. Nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $a = \left(12t - 3t^{\frac{1}{2}}\right) m/s^2$ tezlanish bilan harakatlanmoqda, bunda t sekundlarda o‘lchanadi. Nuqtaning tezligi va to‘g‘ri chiziqdagi holati (o‘rni) vaqt funksiyasi sifatida aniqlansin. $t = 0$ da $v = 0$, $S = 15$ *m* bo‘lgan.

8-muammo. *OA* krivoship ω o‘zgarmas burchak tezlik bilan aylanadi. Krivoship polzunli mexanizm shatunining o‘rtasidagi *M* nuqtaning tezligi va polzunning tezligi vaqt funksiyasi sifatida topilsin:

$$OA = AB = a \quad (1.46\text{-}rasm).$$



1.46-rasm

9-muammo. Nuqtaning harakati $\vec{r} = 3ti + 3tj$ radius-vektor orqali berilgan bo‘lsa, $r = 5$ *m* bo‘lganda, *y* koordinatasini hisoblang.

10-muammo. Nuqta harakatining qonuni koordinata usulida: $x = t^2$, $y = \sin \pi t$, $z = \cos \pi t$ berilgan bo‘lsa, $t = 1$ *s* paytda uning tezligini hisoblang.

11-muammo. To‘g‘ri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezlanishi $a = 0{,}5$ m/s^2 bo‘lib, boshlang‘ich paytida $t_0=0$ da, $s_0=0$ bo‘lsa, 9 *m* masofa bosib o‘tishi uchun qancha vaqt o‘tadi?

12-muammo. Qo‘nayotgan samolyot yerga 180 *km/soat* tezlik bilan tushadi va 1000 *m* masofa bosib o‘tib to‘xtaydi. Samolyotning o‘rtacha sekinlanish modulini hisoblang.

13-muammo. Berilgan trayektoriya bo‘ylab $v = 5$ *m/s* tezlik bilan harakat qilayotgan nuqta boshlang‘ich paytda, $t_0=0$ da $s_0=26$ *m* yo‘l bosib o‘tgan bo‘lsa, $t = 18$ *s* da egri chiziqli koordinata *S* ni toping.

14-muammo. Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning tezligi $v = 0{,}2\,t$ bo‘lib, boshlang‘ich holatida, $t_0 = 0$ da, bosib o‘tgan yo‘li $s_0 = 0$ bo‘lsa, $t = 10$ *s* da qancha yo‘l bosadi?

15-muammo. Harakatlanayotgan nuqta tezligining proyeksiyalari $v_x = 0{,}2t^2$, $v_y = 3$ *m/s* bo‘lsa, $t = 2{,}5$ *s* vaqtda uning urinma tezlanishi nimaga teng?

15-§. Talabalar mustaqil o‘rganishi uchun keyslar

Nuqta harakatining berilgan tenglamalariga ko‘ra uning tezligi va tezlanishini aniqlash

M nuqtaning berilgan harakat tenglamalariga ko‘ra trayektoriyasining ko‘rinishi aniqlansin va $t = t_1$ (s) vaqt oni uchun nuqtaning trayektoriyadagi o‘rni, uning tezligi, to‘la, urinma va normal tezlanishlari hamda trayektoriyaning egrilik radiusi topilsin.

Topshiriqni yechish uchun zarur bo‘lgan ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Variantlar raqamlari	**Harakat tenglamalari**		**Vaqt**
	x=x (t), sm	*y=y (t), sm*	*t1, s*
1.	$x = 3t$	$y = 4t^2 + 1$	$^1/_2$
2.	$x = 7\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 5$	$y = -7\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	1
3.	$x = 1 + 3\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$y = 3\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3$	1
4.	$x=-5t^2-4$	$y=3t$	1
5.	$x=2-3t-6t^2$	$y = 3 - \frac{3}{2}t - 3t^2$	0
6.	$x = 6\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) - 2$	$y = 6\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right) + 3$	1
7.	$x=7t^2-3$	$y=5t$	$^1/_4$
8.	$x=3-3t^2+1$	$y = 4 - 5t^2 + \frac{5}{3}t$	1
9.	$x = -4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 1$	$y = -4\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
10.	$x=-6t$	$y=-2t^2-4$	1
11.	$x = 8\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2$	$y = -8\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 7$	1
12.	$x=4t^2+1$	$y=-3t$	1
13.	$x = 5t^2 + \frac{5}{3}t - 3$	$y=3t^2+t+3$	1
14.	$x = 2\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - 2$	$y = -2\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3$	1
15.	$x = 4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 2$	$y = -3\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
16.	$x - 5\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$y = -\frac{2}{(t+1)}$	2
17.	$x=-2t-2$	$y = -5\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	1

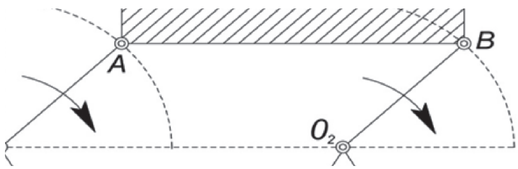
18.	$x=5\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$y=-5\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	1
19.	$x=-4t^2+1$	$y=-3t$	1/2
20.	$x=-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y=-2\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)-3$	1
21.	$x=-\frac{3}{(t+2)}$	$y=3t+6$	2
22.	$x=7\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+3$	$y=2-7\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	1
23.	$x=3t^2-t+1$	$y-5t^2-\frac{5}{3}t-2$	1
24.	$x=3t^2+1$	$y=-4t$	$^1/_2$
25.	$x=2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y=-3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+4$	1
26.	$x=4t+4$	$y=-\frac{4}{(t+1)}$	2
27.	$x=-2t^2+3$	$y=-5t$	$^1/_2$
28.	$x=4\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)+2$	$y=4\,s\,tn^2\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)-1$	1
29.	$x=-\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+3$	$y=\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)-1$	1
30.	$x=-3-9\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	$y=-9\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+5$	1

II BOB
QATTIQ JISMNING ILGARILANMA VA QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDA AYLANMA HARAKATI

16-§. Qattiq jismning ilgarilanma harakati

Jismda olingan har qanday kesma jism harakati davomida doimo o'zining boshlang'ich holatiga parallel qolsa, jismning bunday harakati ilgarilanma harakat deyiladi.

Jismning ilgarilanma harakatini uning to'g'ri chiziqli harakati bilan aralashtirib bo'lmaydi. Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtasining trayektoriyasi egri chiziqdan iborat bo'lishi ham mumkin. Masalan, *2.1-rasmda* ko'rsatilgan AB sparnikning harakati davomida O_1A va O_2B kripovshiplar O_1, O_2 nuqtalardan o'tuvchi o'qlar atrofida aylanadi, sparnik esa hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qoladi, ya'ni ilgarilanma harakatda bo'ladi.



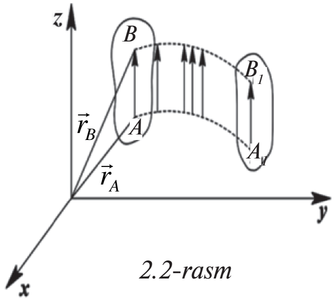
2.1-rasm

Ilgarilanma harakatda bo'lgan qattiq jismning kinematik xarakteristikalari quyidagi teoremada o'z ifodalarini topgan:

Teorema: *ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi va har onda bir xil tezlik hamda bir xil tezlanishga ega bo'ladi.*

Teoremani isbotlash uchun jismning berilgan *Oxyz* qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgarilanma harakatini o'rganamiz *(2.2-rasm)*. Jismda ixtiyoriy A va B nuqtalarni olib, ularning radius vektorlarini $\vec{r}_A$ va $\vec{r}_B$ bilan belgilaymiz. Rasmdan:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}. \qquad (2.1)$$



2.2-rasm

Jism harakatlanganda $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ o‘zgaradi, ammo AB kesmaning uzunligi va yo‘nalishi o‘zgarmaydi.

B nuqtaning tezligini aniqlash uchun (2.1)dan vaqt t bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}, \tag{2.2}$$

bunda, $\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$ bo‘lgani uchun

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

yoki

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \tag{2.3}$$

bo‘ladi.

Bu tenglik ilgarilanma harakatdagi jism barcha nuqtalarining har ondagi tezliklari bir xil bo‘lishini ifodalaydi.

Agar (2.3)dan vaqt t bo‘yicha hosila olsak:

$$\frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt}$$

yoki

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{2.4}$$

bo‘ladi.

(2.4) tenglik ilgarilanma harakatdagi jism barcha nuqtalarining har ondagi tezlanishlari bir xil bo‘lishini ifodalaydi.

Shunday qilib, teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan jismning ilgarilanma harakati uning biror nuqtasininig harakati bilan aniqlanishi mumkinligi ma'lum bo'ladi. Odatda, bunday nuqta sifatida jismning og'irlik markazi C nuqta olinadi.

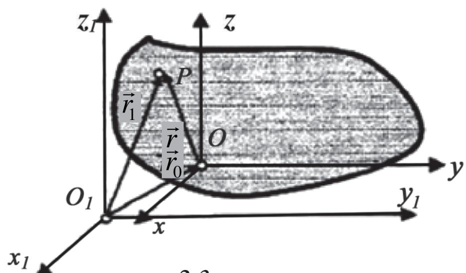
Olingan nuqtaning harakat tenglamalarini koordinata usulida quyidagicha yozish mumkin:

$$x_C = f_1(t),\ y_C = f_2(t),\ z_C = f_3(t). \qquad (2.5)$$

(2.5) tenglama C nuqtaning harakat tenglamasi bo'lib, jismning ilgarilanma harakat tenglamasini ham ifodalaydi.

Jismning ilgarilanma harakatida hamma nuqtalari uchun bir xil bo'lgan tezlik jismning ilgarilanma harakat tezligi deyiladi, tezlanish esa – jismning ilgarilanma harakat tezlanishi deyiladi. Ilgarilanma harakat tezlik vektori $\vec{v}$ va tezlanish vektori $\vec{a}$ larni jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilgan holda ko'rsatish mumkin. Bu hol qattiq jismning faqat ilgarilanma harakatida o'rinli bo'ladi. Boshqa harakatlarda jismning turli nuqtalari turlicha tezlik va turlicha tezlanishga ega bo'ladi.

Qattiq jismning ilgarilanma harakatida jism O nuqtasining tezligi $\vec{v}_0 \neq 0$ bo'lib, burchak tezlik $\vec{\omega}_0 = 0$ bo'ladi *(2.3-rasm).*



2.3-rasm

Rasmdan

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}\ .$$

Ilgarilanma harakat ta'rifidan

$$\vec{r} = \text{const}.$$

Shuning uchun $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0,$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

bo‘ladi.
Bundan

$$\vec{v}_p = \vec{v}_0$$

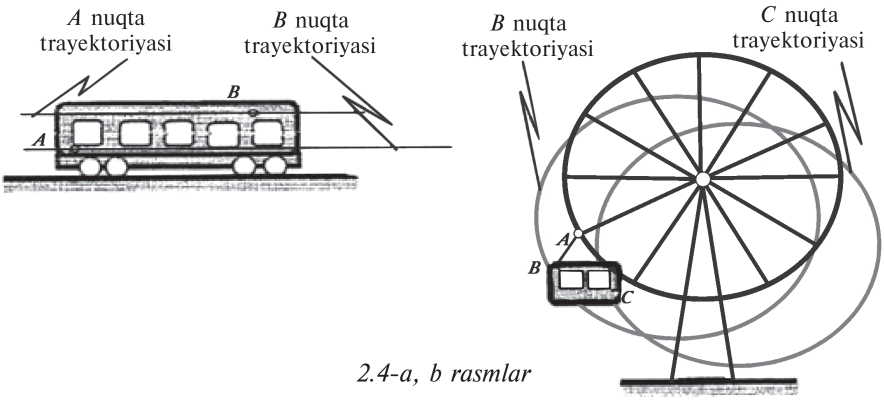
natija kelib chiqadi.

Yuqoridagi ifodadan qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning barcha nuqtalarining tezlanishini ham bir xil miqdor va yo‘nalishga ega bo‘lishi ma’lum bo‘ladi:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0.$$

2.4-a rasmda tramvayning ilgarilanma harakatida uning *A* va *B* nuqtalarining trayektoriyasi ko‘rsatilgan.

2.4-b rasmda charxpalak *A, B, C* nuqtalarining trayektoriyasi ko‘rsatilgan.



2.4-a, b rasmlar

17-§. Qattiq jismning ilgarilanma harakatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy ko‘rsatmalar

Qattiq jismning ilgarilanma harakatiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi, bunda koordinata o‘qlaridan birini jismning ilgarilanma harakati yo‘nalishida o‘tkazish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

2. Masala shartidan ilgarilanma harakatda bo‘ladigan jism tanlab olinadi.

3. Tanlab olingan koordinata o‘qlari sistemasida jismning ilgarilanma harakati tenglamasi tuziladi.

4. Jismning ilgarilanma harakat tenglamalariga ko‘ra tezlik vektorining o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi.

5. Jism ilgarilanma harakat tezligining o‘qlardagi proyeksiyalariga ko‘ra uning miqdori va yo‘nalishi aniqlanadi.

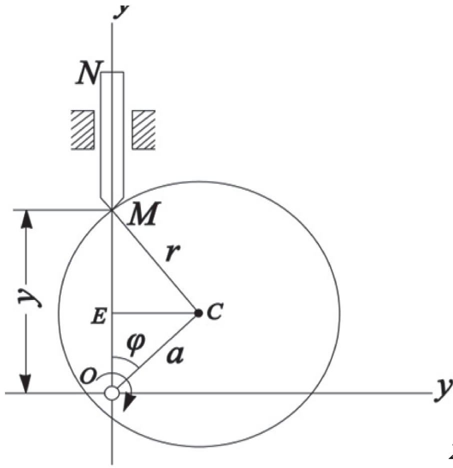
6. Jismning ilgarilanma harakat tenglamalari yoki jism tezligining o‘qlardagi proyeksiyalariga ko‘ra uning tezlanishining o‘qlardagi proyeksiyalari aniqlanadi.

7. Jism tezlanishining o‘qlardagi proyeksiyalariga ko‘ra uning miqdori va yo‘nalishi aniqlanadi.

18-§. Qattiq jismning ilgarilanma harakatiga doir masalalar

1-masala. Diametri $d = 2r$ bo‘lgan ekssentrik O nuqta atrofida aylanadi, bunda φ burchak $\varphi = \frac{\pi}{2}t$ qonunga muvofiq o‘zgaradi. Ekssentrik geometrik markazi bo‘lgan C va O nuqtalar orasidagi masofa $OC = a = \frac{r}{3}$. Vertikal yo‘nalishda harakatlanuvchi MN sterjen M nuqtasining to‘g‘ri chiziqli harakat tenglamasi tuzilsin *(2.5-rasm)* hamda $t_1 = 3\ s$ vaqt oni uchun mazkur nuqtaning tezligi va tezlanishi aniqlansin.

Yechish: masala shartiga ko‘ra MN sterjen O nuqtadan o‘tuvchi vertikal chiziq bo‘ylab to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘ladi, ya’ni MN sterjen ilgarilanma harakat sodir etadi. Shuning uchun sterjenning M nuqtasi ham O nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanadi.



2.5-rasm

Mazkur to‘g‘ri chiziq bo‘ylab Oy koordinata o‘qini o‘tkazamiz; koordinata boshi sifatida O nuqta olinadi; Ox o‘qi gorizontal holda yo‘naltiriladi. Rasmdan $OM=y$;

Bu masofa vaqtga bog‘liq holda o‘zgaradi. Bu holni aniqlash uchun OM masofani φ burchak orqali ifodalash lozim.

Buning uchun C nuqtadan OMS uchburchakning OM tomoniga CE balandlikni o‘takazamiz.

Natijada, $OM = OE + EM$ bo‘ladi.

Lekin, $OE = a\cos\varphi,\ EC = a\sin\varphi,$

$$EM = \sqrt{(MC)^2 - (EC)^2} = \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\varphi}.$$

Shuning uchun

$$y = OM = a\cos\varphi + \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\varphi}\ .$$

Hosil bo‘lgan ifodaga φ burchak qiymatini qo‘yib, $r = 3a$ ekanligini e’tiborga olsak, M nuqtaning harakat tenglamasi uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$y = a\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}\right).$$

M nuqtaning tezligini quyidagicha aniqlaymiz:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[a\left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}a\sin\frac{\pi}{2}t \cdot \left(1 + \frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}}\right) =$$

$$= -\frac{\pi a \sin\frac{\pi}{2}t}{2\sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t)}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2}t + \sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}\right),$$

yoki

$$v = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}} \cdot y$$

M nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\pi}{2}\left[y\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}}\right) + \frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}}\frac{dy}{dt}\right].$$

Agar $\dfrac{dy}{dt} = v$ va $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t}}\right) = \dfrac{9\pi\cos\frac{\pi}{2}t}{2\left(9 - \sin^2\frac{\pi}{2}t\right)^{\frac{3}{2}}}$,

ekanligini e’tiborga olsak,

$$a = -\frac{\pi}{2}\left[y\frac{9\cos\frac{\pi}{2}t}{2\left(9-\sin^2\frac{\pi}{2}t\right)^{\frac{3}{2}}} + v\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{9-\sin^2\frac{\pi}{2}t}} \right].$$

Shunday qilib,

$$a = -\frac{\pi^2}{4}y\frac{\left[9\cos\frac{\pi}{2}t - \sin^2\frac{\pi}{2}t\sqrt{9-\sin^2\frac{\pi}{2}t}\right]}{\left(9-\sin^2\frac{\pi}{2}t\right)}.$$

M nuqtaning tezligi va tezlanishi t_1 =3 *s* da quyidagi qiymatlarga ega bo‘ladi:

$$v_1 = \frac{\pi}{2}a\ sm/s,$$

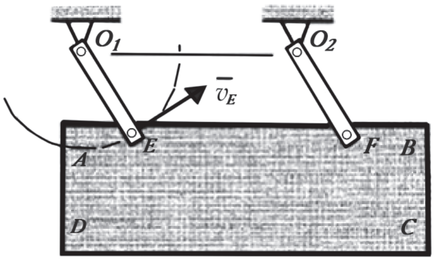
$$a_1 = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}a\ sm/s.$$

$v_1 > 0$ va $a_1 > 0$ bo‘lganligi uchun, *M* nuqtaning tezligi va tezlanishi *O* nuqtadan vertikal holda yuqoriga yo‘nalgan bo‘ladi, ya’ni *M* nuqta tezlanuvchan harakatda bo‘ladi.

2-masala. O‘lchamlari $l_{AB} = 3l$ va $l_{Bc} = 30\ sm = l$ bo‘lgan to‘g‘ri burchakli plastina o_1 va o_2 nuqtalardagi sharnirlarga sterjenlar yordamida biriktirilgan, plastinka *E* nuqtasining tezligi $v_E = 0{,}6$ *m/s.* Boshlang‘ich paytda sterjenlar vertikal holatda bo‘lgan plastina *ABC* va *D* nuqtalarining $t = t_1 = 0{,}5$ *s* dagi tezliklari va tezlanishlari aniqlansin *(2.6-rasm).* $O_1O_2 = EF = 2l$, $O_1E = O_2F = l$.

Yechish:

masalada *ABCD* plastina ilgarilanma harakat sodir etiladi, chunki u O_1E va O_2F strjenlarning aylanma harakatlari natijasida har doim o‘zining boshlang‘ich holatiga parallel qolgan holda harakatlanadi.



2.6-rasm

Boshlang'ich paytda sterjenlar vertikal holatda bo'lgan. Plastinkaning $t = t_1$ vaqt momentidagi vaziyati E nuqtaning burchak tezligi orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega_E = \frac{v_E}{l} = \frac{0,6}{0,3} = 2\ rad/s.$$

Demak, O_1E va O_2F sterjenlar tekis aylanma harakatda bo'ladi.

Sterjenlarning boshlang'ich holatiga nisbatan (vertikal holati) og'ish burchagi quyidagicha topiladi:

$$\theta = \omega_E \cdot l.$$

Bunday $t = t$ vaqt momenti uchun sterjenlarning boshlang'ich holatidan og'ish burchagi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\theta = \theta(t_1) = 2 \cdot 0,5 = 1\ rad = 57°32.$$

Demak, $t{-}t_1$ vaqt momentiga boshlang'ich holati vertikal bo'lgan sterjenlar $\theta = 57°32$ burchakka burilar ekan.

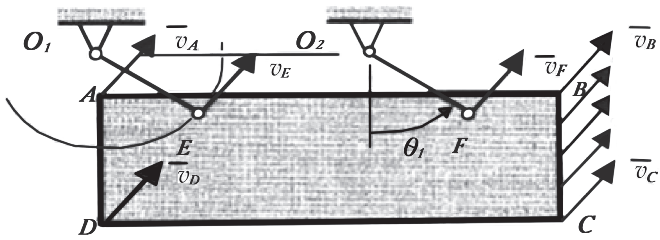
Plastinka ilgarilanma harakatda bo'lishi tufayli, uning barcha nuqtalarning tezligi E nuqtaning tezligiga teng bo'ladi va $\vec{v}_E$ bilan bir xil yo'nalishda bo'ladi:

$$v_A = v_B = v_C = v_D = v_E = v_F = 0,6\ m/s.$$

Plastinka nuqtalari tezliklarining taqsimoti *(2.7-rasm)*da ko'rsatilgan.

Plastina E nuqtasining tezlanishini aniqlaymiz. E nuqtaning tezlanishi urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_{E\tau} + \vec{a}_{En}.$$



2.7-rasm

Bunda

$$a_{E_\tau} = v'_{\mathrm{E}} = 0,$$

$$a_{En} = \frac{v_E^2}{0_1 E} = \frac{(0,6)^2}{0,3} = 1,2\ m/s^2.$$

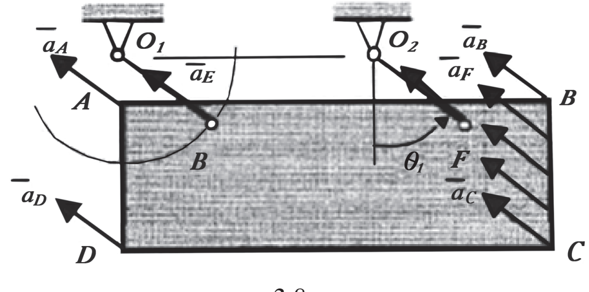
Demak, *E* nuqtaning tezlanishi u tekis aylanma harakatda bo'lishi sababli, normal markazga intilma tezlanishdan iborat bo'lar ekan:

$$a_E = a_{En} = 1,2\ m/s^2.$$

Bu tezlanish *E* nuqta chizadigan aylana radiusi bo'ylab, aylana markazi tomon yo'naladi. Plastina ilgarilanma harakatda bo'lishi tufayli, uning barcha nuqtalarining tezlanishlari ham o'zaro teng bo'ladi va $a_{\vec{E}}$ yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi:

$$a_A = a_B = a_C = a_D = a_E = a_F = 1,2\ m/s^2.$$

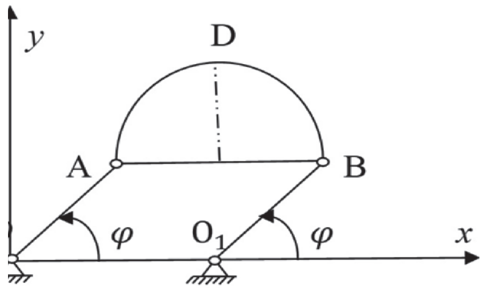
Plastina nuqtalari tezlanishlarining taqsimoti *(2.8-rasm)*da ko'rsatilgan.



2.8-rasm

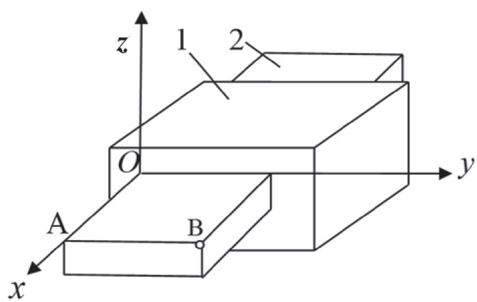
19-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan masalalar

1-masala. Uzunliklari $OA=O_1B=0,16$ *m* bo‘lgan ikki krivoshiplarning harakat qonuni $\varphi = \pi t$ bo‘lib, yarim aylana shaklidagi *ABD* jismni ilgarilanma harakatga keltiradi. Agar $AB=0,25$ *m* bo‘lsa, $t=2s$ da jismning *D* nuqtasi trayektoriyasining egrilik radiusini toping *(2.9-rasm)*.



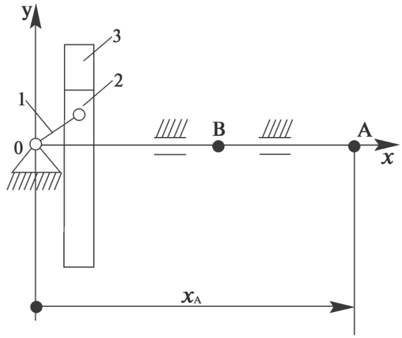
2.9-rasm

2-masala. 1 g‘ilof ichida 2 polzun harakat qiladi. Agar polzunning ilgarilanma harakat qonuni $x_A=0,1$ cost, $y_A=0,1$, $z_A=0$ bo‘lsa, $t = \pi$(sek) paytda *B* nuqtaning tezligini aniqlang. Bunda masofa $AB = 0,3$ *m (2.10-rasm)*.



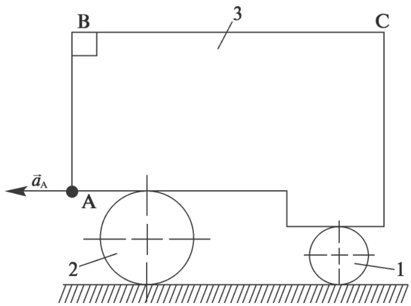
2.10-rasm

3-masala. Krivoship 1 va polzun 2 yordamida ilgarilanma harakatga keluvchi 3 kulisali mexanizm $x_A=0,4-0,1\sin t^2$ qonun asosida siljisa, $t=2$ *s* dagi *B* nuqtaning tezligini aniqlang *(2.11-rasm)*.



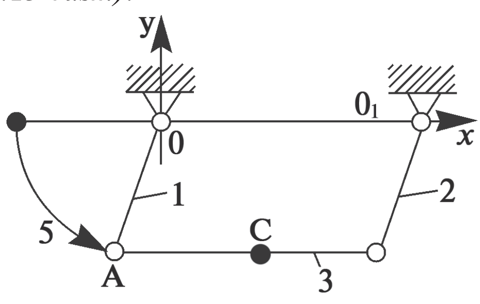
2.11-rasm

4-masala. Ikkita 1 va 2 silindrik o‘qlarga o‘rnatilgan 3 jism ilgarilanma harakat qiladi. Agar masofalar $BC=2AB=1$ *m* bo‘lib, jismning *A* nuqtasi 2 m/s^2 tezlanishga ega bo‘lsa, *C* nuqtasining tezlanishini hisoblang *(2.12-rasm)*.



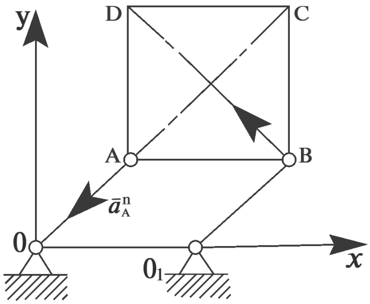
2.12-rasm

5-masala. Bir xil uzunlikdagi $OA=O_1B=0{,}2$ *m* 1 va 2 krivoshiplarga o‘rnatilgan 3 sterjen *Oxy* tekisligida ilgarilanma harakat qiladi. Uning *A* nuqtasining harakat qonuni $s=0{,}2\pi t$ bo‘lsa, $t=0$ paytdagi sterjen o‘rtasidagi *C* nuqtaning tezlanishini aniqlang. Bunda masofa $AB=0{,}36$ *m* *(2.13-rasm)*.



2.13-rasm

6-masala. *ABCD* kvadrat plastina *Oxy* tekisligida ilgarilanma harakat qiladi. Agar uning *A* nuqtasi $a_a^n = 4\ m/s^2$ normal tezlanishga va *B* nuqtasi $a_B^\tau = 3\ m/s^2$ urinma tezlanishga ega bo'lsa, *C* nuqtasining tezlanishini toping *(2.14-rasm).*



2.14-rasm

20-§. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati

Qattiq jismning harakatida ikki nuqtasi doimo qo'zg'almasdan qolsa, uning bunday harakati qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat, qo'zg'almas nuqtalardan o'tuvchi o'q esa aylanish o'qi deyiladi.

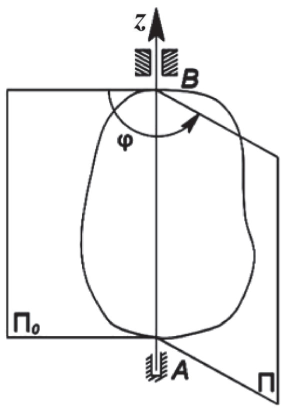
Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatida uning aylanish o'qida yotuvchi barcha nuqtalari qo'zg'almas bo'ladi. Aylanish o'qida yotmaydigan boshqa barcha nuqtalar aylanish o'qiga perpendikular tekisliklarda yotuvchi, markazi aylanish o'qida bo'lgan aylanalar bo'ylab harakatlanadi.

Qattiq jismning aylanma harakatini o'rganish uchun aylanish o'qi orqali o'tuvchi qo'zg'almas Π_0 va jismga mahkam biriktirilgan, u bilan birga harakatlanadigan Π tekisliklarni o'tkazamiz.

Jism aylanish o'qi A_Z atrofida harakatlanganda Π tekislik Π_0 tekislikka nisbatan φ burchakka buriladi. Bu burchak aylanish burchagi deyiladi va Π tekislik jism bilan mahkam biriktirilganligidan jismning holati φ burchak bilan aniqlanadi.

Jism A_Z o‘q atrofida aylanganda uning aylanish burchagi φ vaqtning uzluksiz, bir qiymatli funksiyasi sifatida o‘zgaradi:

$$\varphi = f(t). \tag{2.6}$$



2.15-rasm

Bu tenglama jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatining kinematik tenglamasi deyiladi. Aylanish burchagi radianlarda o‘lchanadi.

Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatda bo‘lgan jismning asosiy kinematik xarakteristikalari uning burchak tezligi va burchak tezlanishi hisoblanadi.

21-§. Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatda bo‘lgan jismning burchak tezligi. Tekis aylanma harakat

Burchak tezlik aylanma harakatda bo‘lgan jism aylanish burchagining o‘zgarishini ifodalovchi kattalik bo‘lib, u aylanish burchagidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$\omega = \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2.7}$$

Burchak tezlik φ burchakning o‘zgarish qonuniga mos ravishda musbat yoki manfiy qiymatga ega bo‘lishi mumkin.

Agar $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt} > 0$ bo‘lsa, aylanma harakat aylanish o‘qining musbat yo‘nalishidan qaraganda soat milining aylanishiga teskari yo‘nalishda yuz beradi; $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt} < 0$ bo‘lsa, jism soat milining aylanish yo‘nalishida aylanma harakatda bo‘ladi.

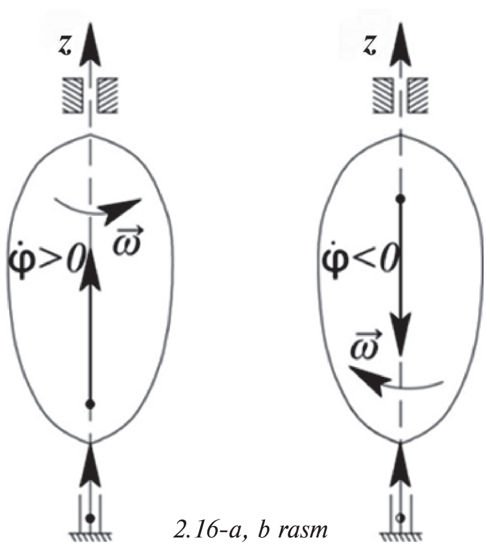
Burchak tezlik vektori aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘naladi va uning musbat yo‘nalishidan qaraganda, aylanish soat mili harakatiga teskari yo‘nalishda ko‘rinadi *(2.16-rasm)*. Burchak tezlik vektori aylanish o‘qining ixtiyoriy nuqtasiga qo‘yiladi. Shuning uchun ham u erkin vektor hisoblanadi. Burchak tezlik vektorining moduli

$$\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \tag{2.8}$$

formula yordamida aniqlanadi.

Burchak tezlik SI birliklar sistemasida rad/s yoki 1/s da o‘lchanadi.

Jism harakati davomida $\omega = \omega_0 = \text{const}$ bo‘lsa, u tekis aylanma harakatda bo‘ladi.



2.16-a, b rasm

Bu holda $\frac{d\varphi}{at} = \omega_0 = \text{const}$, shuning uchun

$$d\varphi = \omega_0 dt. \tag{2.9}$$

Vaqt 0 dan t gacha o‘zgarganda aylanish burchagi φ_0 dan φ gacha o‘zgarishini e’tiborga olib, (2.9)ni integrallasak,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \tag{2.10}$$

bo‘ladi.

(2.10) ifoda jismning tekis aylanma harakat tenglamasini ifodalaydi.

Texnikada tekis aylanma harakatda burchak tezlik ko‘pincha bir minutdagi aylanishlar soni bilan o‘lchanadi.

Jism bir marta to‘la aylanganda $\varphi = 2\pi$ bo‘ladi. Agar jism bir minutda n marta aylansa, tekis aylanma harakatning burchak tezligi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}\ rad/s. \tag{2.11}$$

22-§. Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatda bo‘lgan jismning burchak tezlanishi. Tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat

Burchak tezlanishi aylanma harakatda bo‘lgan jism burchak tezligining o‘zgarishini ifodalovchi kattalik bo‘lib, u burchak tezligidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki aylanish o‘qi atrofidagi aylanish burchagidan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo‘ladi:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{2.12}$$

Burchak tezlanish ham burchak tezlik kabi vektor kattalik hisoblanadi.

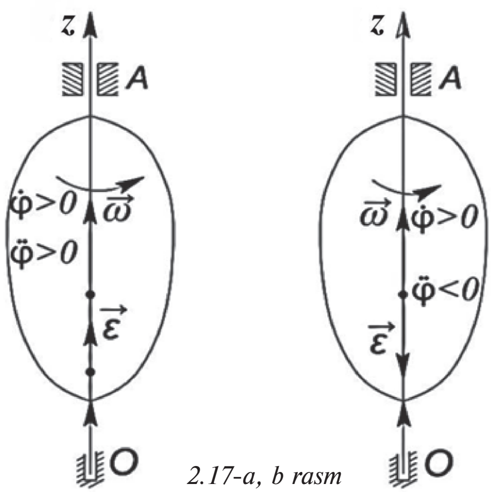
Agar $\frac{d\varphi}{dt}$ va $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ bir xil ishorali bo‘lsa, ya’ni aylanma harakat tezlanuvchan bo‘lsa, burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlari aylanish o‘qi bo‘ylab bir tomonga *(2.17-a rasm),* turli ishorali bo‘lsa, ya’ni aylanma harakat sekinlanuvchan bo‘lsa, qarama-qarshi tomonlarga yo‘naladi *(2.17-b rasm)*. Burchak tezlanish vektorining moduli

$$\varepsilon = \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| = \left|\frac{d\omega}{dt}\right| \tag{2.13}$$

formula yordamida aniqlanadi. Burchak tezlanish SI birliklar sistemasida *rad*/*s*^{2} yoki 1/*s*^{2} larda o‘lchanadi.

Agar aylanma harakat davomida $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ bo‘lsa, φ orta boradi va bunday harakat t***ezlanuvchan aylanma harakat*** deyiladi; $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ bo‘lsa, ω kamaya boradi va bunday harakat ***sekinlanuvchan aylanma harakat*** deyiladi.

Agar aylanma harakat davomida $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ bo‘lsa, jismning harakati tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat bo‘ladi.



2.17-a, b rasm

Bunday holda

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}. \tag{2.14}$$

Vaqt 0 dan t gacha o‘zgarganda, burchak tezlik ω_0 dan ω gacha o‘zgarishini e’tiborga olib, (2.14)ni integrallasak,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \tag{2.15}$$

bo‘ladi. (2.15) tenglik yordamida tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat burchak tezligi aniqlanadi.

Tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat tenglamasini ifodalash uchun (2.15)ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{2.16}$$

Bundan

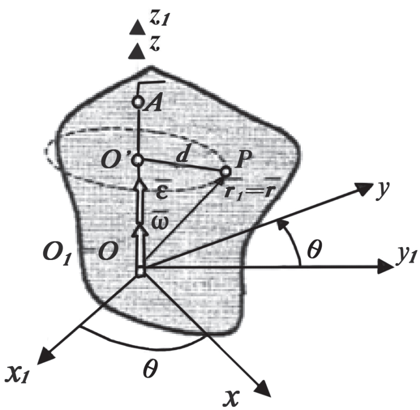
$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt. \tag{2.17}$$

(2.10)ni e’tiborga olib, (2.17)ni integrallasak,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{2.18}$$

ko‘rinishdagi tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi kelib chiqadi.

Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatini quyidagi rasm orqali soddaroq holda tushuntirish mumkin *(2.18-rasm)*.



2.18-rasm

Rasmda θ burchak orqali jismning O_z aylanish o‘qi atrofidagi aylanma harakatida burilish burchagi ko‘rsatilgan (*Oxyz* – koordinata o‘qlari sistemasi qo‘zg‘aluvchan sistema, u jism bilan bog‘langan).

Chizmada $\vec{r}_i$ vektor orqali jism ixtiyoriy nuqtasining radius vektori ko‘rsatilgan. Shuning uchun,

$$\vec{r}_i = \vec{r}$$

bo‘lib, jismning aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega = \omega_z = \theta'$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} = \theta''.$$

23-§. Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezligi

Qo‘zg‘almas O_z o‘qi atrofida ω burchak tezlik bilan aylanuvchi qattiq jismning aylanish o‘qidan R masofada joylashgan M nuqtasining tezligini aniqlaymiz *(2.19-rasm)*. Biror t vaqtda mazkur nuqta M holatda bo‘lib, dt vaqt oralig‘ida jism dφ burchakka aylansin. Bunda M nuqta aylanish o‘qiga perpendikular tekislikda aylana bo‘ylab harakatlanib, $ds = Rd\varphi$ yoyni bosib o‘tadi. M nuqta tezligining algebraik qiymati quyidagi formulaga muvofiq aniqlanadi:

$$\upsilon_\tau = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \qquad (2.19)$$

Tezlikning moduli esa

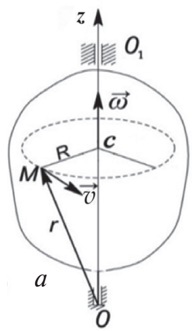
$$\upsilon = \left|\frac{ds}{dt}\right| = R\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$$

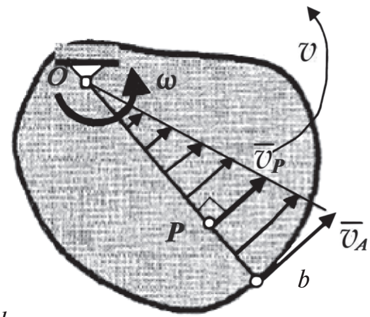
formula bilan aniqlanadi.

(2.19) formula bilan aniqlanadigan tezlik qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining chiziqli tezligi deyiladi.

Shunday qilib, qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatda bo‘lgan jism ixtiyoriy nuqtasining chiziqli tezligi miqdor jihatdan jism burchak tezligining mazkur nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofaga ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Jism barcha nuqtalarining burchak tezliklari berilgan onda bir xil qiymatga ega bo‘lgani uchun (2.19)dan qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatda bo‘lgan jism nuqtalarining chiziqli tezliklari mazkur nuqtalardan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofaga to‘g‘ri proporsional holda o‘zgarishi ma’lum bo‘ladi *(2.19-b rasm)*.





2.19-a, b rasm

Nuqtaning chiziqli tezligi vektori $\vec{v}$ nuqta chizgan aylanaga harakat yo‘nalishi bo‘yicha o‘tkazilgan urinma bo‘ylab yo‘naladi.

Chiziqli tezlik vektori burchak tezlik vektori bilan mazkur nuqtaning aylanish o‘qidagi O nuqtaga nisbatan radius-vektorining vektor ko‘paytmasiga teng bo‘ladi:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{2.20}$$

Chunki mazkur vektor ko‘paytmaning moduli

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega \cdot r \ \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \omega \cdot R$$

tezlikning moduliga teng bo‘ladi. $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektori, $\vec{\omega}$ va $\vec{r}$ yotgan tekislikka perpendikular holda jismning aylanish yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naladi, ya’ni $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ning yo‘nalishi $\vec{v}$ yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi.

Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy P nuqtasining tezligini quyidagicha aniqlash ham mumkin *(2.19-a rasm)*:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{k} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}.$$

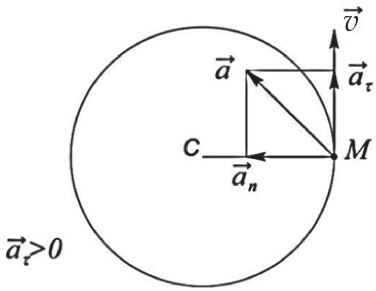
M nuqta tezligining moduli esa quyidagicha aniqlanadi:

$$v_M = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega \cdot R.$$

2.17-b rasmda aylanma harakatda bo'lgan jism nuqtalari tezliklarining taqsimoti ko'rsatilgan.

24-§. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jism nuqtasining tezlanishi

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jism nuqtalari aylanish o'qiga perpendikular tekislikda aylanalar bo'ylab harakatlanishi tufayli *M* nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlardan tashkil topadi *(2.20-rasm):*



2.20-rasm

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{2.21}$$

Agar ko'rilayotgan holda $\rho = R$ va $v = R\omega$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\varepsilon, \tag{2.22}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = \omega^2 R \tag{2.23}$$

bo'ladi.

Urinma tezlanish $\vec{a}_\tau$ aylanma harakat tezlanuvchan bo'lganda, trayektoriyaga o'tkazilgan urinma bo'ylab harakat yo'nalishida, sekinlanuvchan aylanma harakatda esa unga teskari yo‘naladi. Normal tezlanish $\vec{a}_\tau$ doimo bosh normal bo‘yicha aylanish o‘qi tomon yo‘naladi *(2.21-a rasm)*. Ba’zan $\vec{a}_\tau$ *aylanma tezlanish,* $\vec{a}_n$ *esa markazga intilma tezlanish* deb ham yuritiladi.

Agar $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ vektorlar bir xil ishorali bo‘lsa, aylanish o‘qi bo‘ylab bir tomonga *(2.21-a rasm),* turli ishorali bo‘lsa, qarama-qarshi tomonga yo‘naladi *(2.21-b rasm*).

M nuqta tezlanishining moduli:

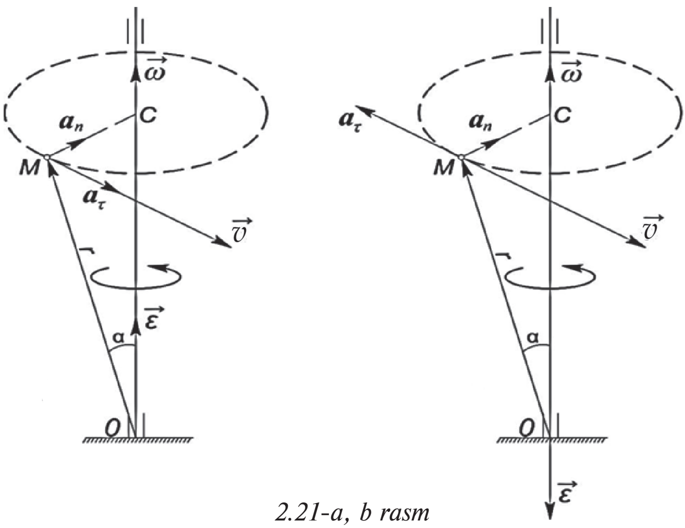
$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{2.24}$$

formula orqali aniqlanadi.

Aylanma harakatdagi qattiq jism ixtiyoriy *M* nuqtasining tezlanishini quyidagicha aniqlash ham mumkin:

$$\vec{a}_M = \varepsilon\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega\vec{k}\cdot(\omega\vec{k}\cdot\vec{r}) = (-\varepsilon y - \omega^2 x)\vec{i} + (\varepsilon x - \omega^2 y)\vec{j}\,.$$

Tezlanish moduli esa quyidagicha aniqlanadi:



2.21-a, b rasm

$$a_M = \sqrt{(x^2 + y^2)(\varepsilon^4 + \omega^4)} = d\cdot\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,,$$

bunda $d = R$.

M nuqta tezlanishining yo‘nalishi bosh normal bilan $\vec{a}$ tezlanish vektori orasidagi μ burchak orqali aniqlanadi *(2.20-rasm):*

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (2.25)$$

Aylanma harakatdagi jismning barcha nuqtalari uchun ω va ε lar bir xil bo‘lganidan, jism nuqtalarining tezlanishi aylanish o‘qidan mazkur nuqtalargacha bo‘lgan masofalarga proporsional ravishda o‘zgaradi.

Berilgan onda jismning barcha nuqtalari uchun μ burchak ham bir xil bo‘ladi.

Urinma va normal tezlanishlarning vektorli ifodalarini aniqlash uchun (2.20) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2.26)$$

Bunda

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \; \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}. \qquad (2.27)$$

Shuning uchun

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \omega \times \vec{\upsilon}. \qquad (2.28)$$

Bu formulada

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau \qquad (2.29)$$

urinma tezlanish vektorini ifodalaydi.

Ko‘rinib turibdiki, qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining urinma tezlanishi jismning burchak tezlanishi vektori bilan mazkur nuqtaning aylanish o‘qidagi ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan radius vektorining vektorli ko‘paytmasiga teng bo‘lar ekan.

(2.28) formulada

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} \qquad (2.30)$$

normal tezlanish vektorini ifodalaydi.

Demak, qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining normal yoki markazga intilma tezlanishi jismning burchak tezlik vektori bilan mazkur nuqta chiziqli tezligining vektorli koʻpaytmasiga teng boʻlar ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Qattiq jismning qanday harakatiga ilgarinlanma harakat deyiladi va bu harakatning asosiy xususiyatlari?
2. Qattiq jismning qanday harakatiga qoʻzgʻalmas oʻq atrofidagi aylanma harakat deyiladi?
3. Aylanma harakat tenglamasi qanday ifodalanadi?
4. Aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning burchak tezlik va burchak tezlanish modullari qanday formula bilan aniqlanadi?
5. Qoʻzgʻalmas oʻq atrofidagi aylanma harakat qilayotgan qattiq jism burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlari qanday yoʻnalgan boʻladi?
6. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning chiziqli tezligi qanday formula orqali ifodalanadi?
7. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning chiziqli tezlanishi qanday formula orqali ifodalanadi?
8. Eyler formulasi qanday koʻrinishda boʻladi?
9. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlik vektori qanday ifodalanadi?
10. Aylanma harakat qilayotgan nuqtaning tezlanish vektori qanday ifodalanadi?

25-§. Qattiq jismning qoʻzgʻalmas oʻq atrofida aylanma harakatiga doir masalalarni yechish uchun uslubiy koʻrsatmalar

Qattiq jismning qoʻzgʻalmas oʻq atrofida aylanishiga doir masalalarni quyidagi tartibda yechish tavsiya etiladi:

1. Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi, bunda koordinata oʻqlaridan birini (z oʻqini) aylanish oʻqi boʻylab yoʻnaltirish maqsadga muvofiq boʻladi.

2. Qattiq jismning aylanma harakati tenglamasi tuziladi.

3. Qattiq jismning aylanish burchagidan vaqt boʻyicha birinchi tartibli hosila hisoblab, burchak tezlikning aylanish oʻqidagi proyeksiyasi aniqlanadi.

4. Qattiq jismning aylanish burchagidan vaqt boʻyicha ikkinchi tartibli hosila hisoblab, burchak tezlanishning aylanish oʻqidagi proyeksiyasi aniqlanadi.

5. Aylanma harakat burchak tezligini bilgan holda, jism nuqtasining chiziqli tezligi va normal tezlanishi aniqlanadi.

6. Aylanma harakat burchak tezlanishini bilgan holda, jism nuqtasining urinma tezlanishi aniqlanadi.

7. Aniqlangan normal va urinma tezlanishlar orqali jism nuqtasining to‘la tezlanishi aniqlanadi.

Agar masalada qattiq jismning burchak tezlanishi yoki burchak tezligi berilgan bo‘lib, aylanma harakat tenglamasini qattiq jism nuqtalarining tezligi va tezlanishini aniqlash talab etilsa, masalani quyidagi tartibda yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

1. Qattiq jism burchak tezlanishining aylanish o‘qidagi proyeksiyasini ifodalovchi tenglamani integrallab, burchak tezlikning aylanish o‘qidagi proyeksiyasini aniqlaymiz. Bundan integrallash doimiylari – o‘zgarmaslari boshlang‘ich kattaliklar orqali aniqlanadi.

2. Burchak tezlikning aylanish o‘qidagi proyeksiyasini ifodalovchi tenglamani integrallab, jismning aylanma harakat tenglamasini aniqlaymiz. Bunda ham integrallash o‘zgarmaslari boshlang‘ich kattaliklar orqali aniqlanadi.

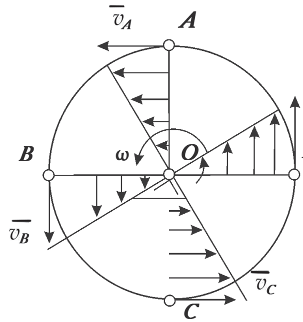
3. Burchak tezlikning aylanish o‘qidagi proyeksiyasi ifodasidan foydalanib, jism nuqtalarining tezligini va normal tezlanishini aniqlaymiz.

4. Burchak tezlanishning aylanish o‘qidagi proyeksiyasi ifodasidan foydalanib, jism nuqtalarining urinma tezlanishlarini aniqlaymiz.

5. Jism nuqtalarining normal va urinma tezlanishlarini bilgan holda uning to‘la tezlanishi aniqlanadi.

26-§. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatiga doir masalalar

1-masala. Radius R=40 *sm* bo‘lgan disk qo‘zg‘almas O nuqta atrofida o‘zgarmas $\omega = 0{,}5$ *rad/s* burchak tezlik bilan aylanadi *(2.22-rasm).* Disk gorizontal va vertikal diametrlari uchlaridagi nuqtalarning tezligi va tezlanishi aniqlansin va mazkur diametrlar nuqtalari tezliklarining taqsimoti ko‘rsatilsin.



2.22-rasm

Yechish: disk qo‘zg‘almas O nuqtadan o‘tuvchi o‘q atrofida qo‘zgarmas ω = 0,5 burchak tezlik bilan aylanma harakatda bo‘lishi sababli disk gorizontal va vertikal diametrlari uchlaridagi nuqtalarning tezliklari quydagicha aniqlanadi:

$$v_A = OA \cdot \omega = 40 \cdot 0{,}5 = 20\ sm/s;$$

$$v_B = OB \cdot \omega = 40 \cdot 0{,}5 = 20\ sm/s;$$

$$v_C = OC \cdot \omega = 40 \cdot 0{,}5 = 20\ sm/s;$$

$$v_D = OD \cdot \omega = 40 \cdot 0{,}5 = 20\ sm.$$

Mazkur tezliklar nuqtalar radiuslariga perpendikular holda ω yo‘nalishi tomon yo‘naladi:

$$v_{\vec{A}} \perp_{\vec{O}A};\ v_{\vec{B}} \perp_{\vec{O}B};\ v_{\vec{C}} \perp_{\vec{O}C};\ v_{\vec{D}} \perp_{\vec{O}D}.$$

Diskning gorizontal va vertikal diametridagi nuqtalar tezliklarining taqsimoti *2.22-rasmda* ko‘rsatilgan.

Diskning gorizontal va vertikal diametrlari uchlaridagi nuqtalar tezlanishlarining normal va urinma tashkil etuvchilarini aniqlaymiz.

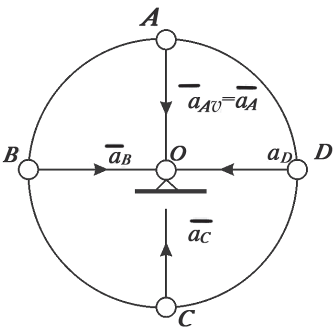
A nuqtaning tezlanishi:

$$a_{A\tau} = OA \cdot \varepsilon = OA \cdot \omega' = 0,$$

$$a_{An} = OA \cdot \omega^2 = 40 \cdot (0{,}5)^2 = 10\ sm/s^2.$$

Nuqta normal tezlanishi nuqta radiusi bo‘ylab, disk markazi tomon yo‘naladi.

Disk *B, C, D* nuqtalarining tezlanishlari ham miqdor jihatdan *A* nuqtasining tezlanishiga teng bo‘lib, nuqtalar radiuslari bo‘ylab, disk markazi tomon yo‘naladi *(2.23-rasm).*

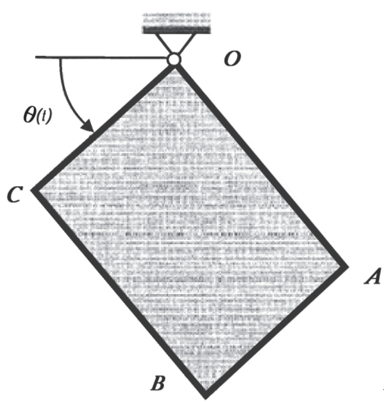


2.23-rasm

2-masala. Ko'rsatilgan *OABC* plastina chizma tekisligida *O* nuqta atrofida aylanadi. Agar plastinaning aylanma harakat tenglamasi

$$\theta(t) = \sin t(rad)$$

bo'lib, *OA*=40 *sm*, *AB*=30 *sm* bo'lsa, plastina *A*, *B* va *C* nuqtalarining tezligi, tezlanishi aniqlansin. Plastina *OA* va *AB* tomonlari nuqtalarining $t_1 = 1\ s$ vaqt onidagi tezliklarining taqsimoti ham ko'rsatilsin *(2.24-rasm)*.



2.24-rasm

Yechimi:

1. Plastinaning $t_1 = 1\ s$ vaqt onida egallagan o'rnini aniqlaymiz.

$$\theta_1 = \theta(t_1) = \sin(1\ rad) = 0{,}841\ rad.$$

Bundan

$$\theta_1 = 48°23'.$$

Plastina nuqtalarining tezliklarini aniqlash uchun dastlab uning burchak tezligini aniqlaymiz:

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \cos t_1 = 0{,}54\frac{1}{s}.$$

Burchak tezlik burilish burchak o‘sish tomoniga qarab yo‘naladi (ularning ishoralari bir xil).

Plastina A nuqtasining tezligini aniqlaymiz:

$$\vec{v}_A = \omega_1 \cdot OA = 0{,}54 \cdot 40 = 21{,}6\ sm/s.$$

$\vec{v}_A$ tezlik vektori aylanish markazi O nuqtadan o‘tkazilgan OA radiusga perpendikular holda ω_1 tomon yo‘naladi. Plastina B nuqtasining tezligini aniqlaymiz:

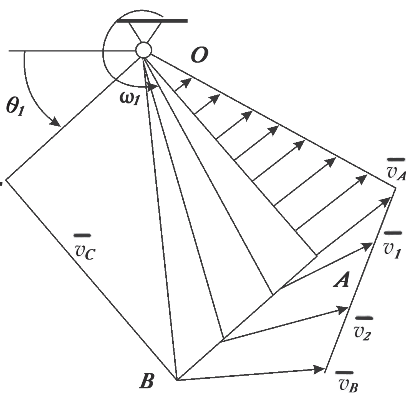
$$w_B = w_1 \cdot OB = w_1 \cdot \sqrt{(OA)^2 + (AB)^2} = 0{,}54 \cdot 50 = 27 sm/s.$$

$\vec{v}_B$ tezlik vektori aylanish markazi O nuqtadan o‘tkazilgan OB radiusga perpendikular holda ω_1 tomon yo‘naladi.

Plastina C nuqtasining tezligi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$v_c = \omega_1 \cdot OC = 0{,}54 \cdot 30 = 16{,}2 sm/s.$$

$\vec{v}_C$ tezlik vektori aylanish markazi O nuqtadan o‘tkazilgan OC radiusga perpendikular holda ω_1 tomon yo‘naladi.



2.25-rasm

Plastina OA tomoni nuqtalari tezliklarining taqsimoti *2.25-rasmda* ko‘rsatilgan:

Plastina OA tomoni nuqtalarining tezligi aylanish markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsinal holda o'sib boradi.

Plastina AB tomoni nuqtalari tezliklarining taqsimoti ham *2.25-rasmda* ko'rsatilgan.

Plastina nuqtalari tezliklarining miqdorlari nuqtalardan aylanish markazigacha bo'lgan masofalarga to'g'ri proporsional bo'ladi. Mazkur vektorlar uchlari $\vec{v}_B$ va $\vec{v}_A$ vektorlar uchlarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasida yotadi.

Plastina nuqtalarining tezlanishlarini aniqlash uchun plastinaning aylanma harakat burchak tezlanishini aniqlaymiz:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = -\sin t_1 = -0{,}841\frac{1}{s}.$$

Burchak tezlanishining «manfiy» ishorasi plastinaning aylanma harakati tekis sekinlashuvlar ekanligidan dalolat beradi. ε_1 va ω_1 yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi *(2.25, 2.26-rasmlar)*.

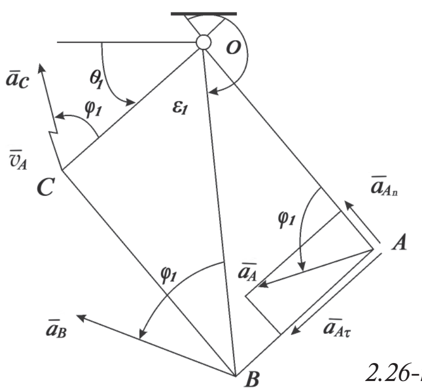
Plastina A nuqtaning urinma tezlanishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$a_{A\tau} = OA \cdot \varepsilon_1 = 40 \cdot 0{,}841 = 33{,}64 \ sm/s^2 .$$

Plastina A nuqtasining normal tezlanishi esa quyidagiga teng bo'ladi:

$$a_{An} = OA \cdot \omega_1^2 = 40 \cdot (0{,}54)^2 = 11{,}64 \ sm/s^2 .$$

$\vec{a}_{A\tau}$ vektor OA radiusga perpendikular holda ε_1 tomon, $\vec{a}_{An}$ vektor esa A nuqtadan OA radius bo'ylab aylanish markazi tomon yo'naladi.



2.26-rasm

A nuqta tezlanishining moduli quyidagiga teng:

$$a_A = \sqrt{(a_{A\tau})^2 + (a_{An})^2} = \sqrt{(33{,}64)^2 + (11{,}64)^2} = 35{,}59 sm/s^2.$$

$\vec{a}_A$ ning yo'nalishi quyidagi formula asosida aniqlanadi:

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{a_{A\tau}}{a_{An}} = \frac{33{,}64}{11{,}64} = 2{,}89,$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arc\,tg}\,2{,}89 = 70°91!$$

Plastina B nuqtasi tezlanishining miqdori va yo'nalishi quyidagicha topiladi:

$$a_B = OB \cdot \sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 50\sqrt{(0{,}84)^2 + (0{,}54)^2} = 50 \cdot 0{,}89 = 44{,}5\ sm/s^2;$$

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2} = \frac{0{,}841}{(0{,}54)^2} = 2{,}89.$$

Plastina C nuqtasi tezlanishi miqdorini va yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi:

$$a_C = OC \cdot \sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 30 \cdot 0{,}89 = 26{,}7\ sm/s^2$$

$\vec{a}_C$ vektorning plastina OC tomoni bilan hosil qilgan burchagi ham φ_1 ga teng bo'ladi.

Plastina B va C nuqtalarning tezlanishlari ham 2.26-rasmda ko'rsatilgan.

3-masala. Radiusi R = 2 m bo'lgan maxovik tinch holatdan boshlab tekis tezlanish bilan aylanadi, gardishida yotuvchi nuqtalar t = 10 s dan keyin $v = 100\ m/s$ chiziqli tezlikka ega bo'ladi. G'ildirak gardishida yotgan nuqtaning t_1 = 15 s bo'lgan vaqtdagi tezligi, urinma va normal tezlanishlari topilsin.

Yechish:

Maxovik tinch holatdan boshlab, tekis tezlanish bilan aylanadi. Shuning uchun ω_0 = 0. t = 10 s vaqt oni uchun maxovikning burchak tezligini aniqlaymiz:

$$v = \omega \cdot R.$$

Bundan

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{100\ m/s}{2\ m} = 50\frac{rad}{s}.$$

Maxovikning shu ondagi burchak tezlanishi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega = \varepsilon t.$$

Bundan

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50\ rad/s}{10\ s} = 5\frac{rad}{s^2} = \text{const}.$$

Maxovik gardishida yotgan nuqtaning $t_1 = 15\ s$ dagi tezligi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$v_1 = \omega_1 \cdot R.$$

Bunda

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = 5 \cdot 15 = 75\ rad/s.$$

Shuning uchun

$$v_1 = 150\ m/s.$$

Maxovik gardishida yotgan nuqtaning urinma va normal tezlanishlarini aniqlaymiz:

$$a_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10\ m/s^2,$$

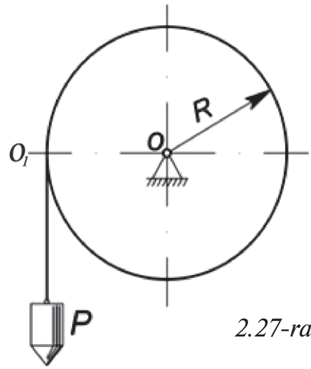
$$a_n = v_1^2/R = 11250\ m/s^2.$$

4-masala. Radiusi R = 10 *sm* bo‘lgan val unga ipda osilgan P tosh bilan aylantiriladi. Toshning harakati x = 100t^2 tenglama bilan ifodalanadi, bunda x – toshdan qo‘zg‘almas OO_1 gorizontalgacha bo‘lgan, santimetrlar hisobida ifodalangan masofa, t vaqt (sekundlar hisobida). t paytida valning burchak tezligi va burchak tezlanishi, shuningdek, val sirtidagi M nuqtaning tezligi va to‘la tezlanishi aniqlansin *(2.27-rasm)*.

Yechish:

toshning tezligi uning harakat tenglamasidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$v = x' = (100t^2)' = 200t.$$



2.27-rasm

Tosh osilgan ipni cho‘zilmaydi deb faraz qilsak, val O_1 nuqtasining chiziqli tezligi tosh tezligiga teng bo‘ladi $v = v_{0_1}$.

Shuning uchun valning burchak tezligini quyidagicha aniqlash mumkin:

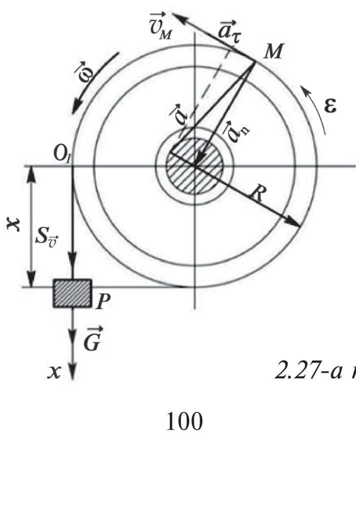
$$v = v_{0_1} = \omega \cdot R.$$

Bundan

$$\omega = \frac{v_{0_1}}{R} = v/R \quad rad/s = \frac{200t}{10} = 20t \ rad/s .$$

Valning burchak tezlanishi uning burchak tezligidan vaqt bo‘yicha hisoblangan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (20t)' = 20 \ rad/s^2.$$



2.27-a rasm

ω va ε lar yo‘nalishlari $\vec{v}$ yo‘nalishi orqali aniqlanadi, $\vec{v}$ esa toshning harakati tomon yo‘naladi *(2.27-a rasm)*.

Val sirtidagi nuqtaning to‘la tezlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Bunda

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R = 20 \cdot 10 = 200\ sm/s^2,$$

$$a_n = \omega^2 R = 400t^2 \cdot 10 = 4000t^2\ sm/s^2.$$

Shuning uchun

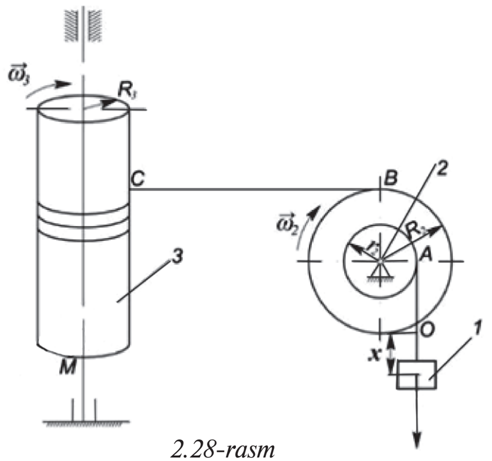
$$a = \sqrt{(200)^2 + (4000t^2)} = 200\sqrt{1 + (4000t^4)}\ sm/s^2.$$

27-§. Jismlarning ilgarilanma va aylanma harakatlarining mexanizmlarda qo‘llanilishiga doir masalalar

1-masala. 1-jismning harakat tenglamasi $x = 10 + 30t^2$ ga ko‘ra, uning vertikal o‘q bo‘ylab, $s = 0{,}3\ m$ yo‘lni o‘tgan vaqt momentida, 3 jism M nuqtasining tezligi, urinma, normal va to‘la tezlanishi topilsin *(2.28-rasm)*.

Shkiv va silindr o‘lchamlari quyidagicha:

$$R_2 = 30\ sm,\ r_2 = 20\ sm,\ R_3 = 30\ sm.$$



2.28-rasm

Yechish:

1-jismning $s = 0{,}3$ $m = 30$ sm yo‘lni o‘tish vaqti τ ni topamiz:

$$s = x_{t=\tau} - x_{t=0} = 10 + 30\tau^2 - 10 = 30\tau^2.$$

Bundan

$$t = \sqrt{s/30} = \sqrt{s/30} = 1\ s.$$

1-jism tezligini aniqlash uchun uning harakat tenglamasidan vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosila hisoblaymiz:

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = (10 + 30t^2)' = 60t.$$

Agar birinchi jism osilgan hamda 2- va 3-jismlarni biriktiruvchi tasmalarni cho‘zilmaydi deb olsak, $\vec{v}_A = \vec{v}_1$ bo‘ladi. U vaqtda

2-jismning burchak tezligi

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{v_1}{r_2} = \frac{60t}{20} = 3t$$

bo‘ladi.

Jism B nuqtasining tezligi:

$$v_B = \omega_2 \cdot R_2 = 3t \cdot 30 = 90t.$$

BC tasmani ham cho‘zilmaydi deb olsak,

$$v_B = v_c = 90t$$

bo‘ladi.

Bu holatda 3-jismning burchak tezligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\omega_3 = \frac{v_c}{R_3} = \frac{90t}{30} = 3t\frac{1}{s}.$$

3-jismning burchak tezlanishi esa uning burchak tezligidan vaqt bo‘yicha hisoblangan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{at} = (3t)' = 3\frac{1}{s^2}.$$

M va C nuqtalar silindrning sirtida, ya'ni aylanish o'qidan bir xil masofada yotganligi uchun ularning tezliklari, urinma, normal va to'la tezlanishlari o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun:

$$v_M = v_c = \omega_3 \cdot R_3 = 3t \cdot 30 = 90t,$$

$$a_\tau = \varepsilon_3 R_3 = 3 \cdot 30 = 90,$$

$$a_n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 9t^2 \cdot 30 = 270t^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{90^2 + (270t^2)^2} = \sqrt{8100 + 72900t^4}.$$

.

$t = \tau = 1$ sekundda:

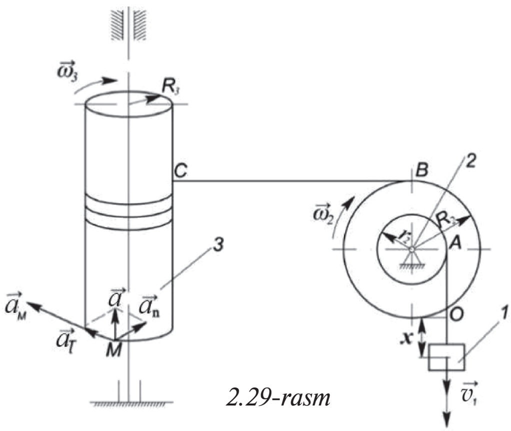
$$v_M = 90 \cdot 1 = 90\ sm/s,$$

$$a_\tau = 90\ sm/s^2,$$

$$a_n = 270 \cdot 1 = 270\ sm/s,$$

$$a = \sqrt{8100 + 72900} = 284{,}6\ sm/s^2.$$

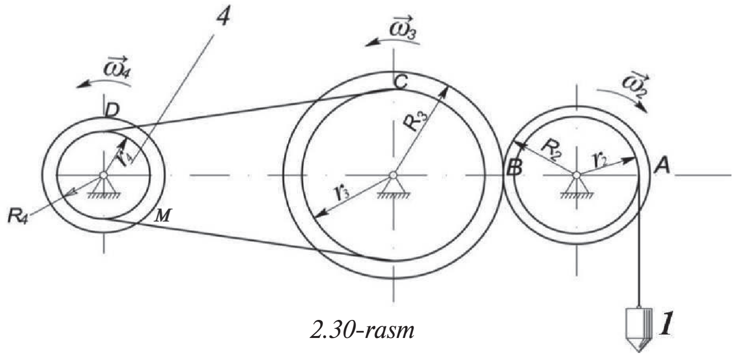
M nuqtaning tezligi, urinma, normal va to'la tezlanishi *(2.29-rasmda* ko'rsatilgan).



2.29-rasm

2-masala. 1-jismning harakat tenglamasi $x = 5 + 8t^2$ ga ko'ra, uning vertikal o'q bo'ylab, $s = 0{,}32$ m yo'lni bosib o'tgan vaqt momentida, 4-jism M nuqtasining tezligi, urinma, normal va to'la tezlanishlari topilsin. 2-, 3-, 4-jismlar radiuslari $r_2 = 16\ sm$,

R_2 = 20 *sm*, r_3 = 20 *sm*, R_3 = 25 *sm*, r_4 = 8 *sm/s*, R_4 = 12 *sm* ga teng *(2.30-rasm)*.



2.30-rasm

Yechish:

1-jismning s = 0,32 *m* yo'lni bosib o'tish vaqti τ ni aniqlaymiz:

$$s = x_{t=\tau} - x_{t=0} = 5 + 8t^2 - 5 = 8t^2.$$

Bundan

$$\tau = \sqrt{S/8} = \sqrt{32/8} = 2\ s.$$

Birinchi jism tezligini topamiz. Buning uchun uning harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila hisoblaymiz:

$$v_1 = \frac{dx}{at} = 16t.$$

Yuk osilgan arqonni cho'zilmaydi deb hisoblasak, 2-jismning burchak tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{v_1}{r_2} = \frac{16t}{16} = t,$$

bunda $v_A = v_1$ ekanligi e'tiborga olindi.

2-jism B nuqtasining tezligi esa $v_B = \omega_2 \cdot R_2 = 20t$ bo'ladi.

B nuqtani 2- va 3-jismlar uchun umumiy deb olib, 3-jismning burchak tezligini topamiz:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{R_3} = \frac{20t}{25} = 0{,}8t.$$

3-jism C nuqtasining tezligi esa quyidagiga teng bo‘ladi:

$$v_c = \omega_3 \cdot r_3 = 0{,}8t \cdot 20 = 16t.$$

Agar 3- va 4-jismlarni biriktiruvchi tasmani cho‘zilmaydi deb hisoblasak,

$$v_c = v_D$$

bo‘ladi.

Shuning uchun 4-jismning burchak tezligi

$$\omega_4 = \frac{v_D}{r_4} = \frac{16t}{8} = 2t$$

bo‘ladi.

4-jismning burchak tezlanishini aniqlash uchun burchak tezligidan vaqt bo‘yicha birinchi tartibli hosila hisoblaymiz:

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{at} = (2t)' = 2.$$

4-jism M nuqtasining tezligi, urinma, normal va to‘la tezlanishlari quyidagicha aniqlanadi:

$$v_M = \omega_4 \cdot R_4 = 2t \cdot 12 = 24t,$$

$$a_\tau = \varepsilon_4 \cdot R_4 = 2 \cdot 12 = 24,$$

$$a_n = \omega_4^2 \cdot R_4 = 4t^2 \cdot 12 = 48t^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{576 + 2304t^2}.$$

$t = \tau = 2$ sekundda:

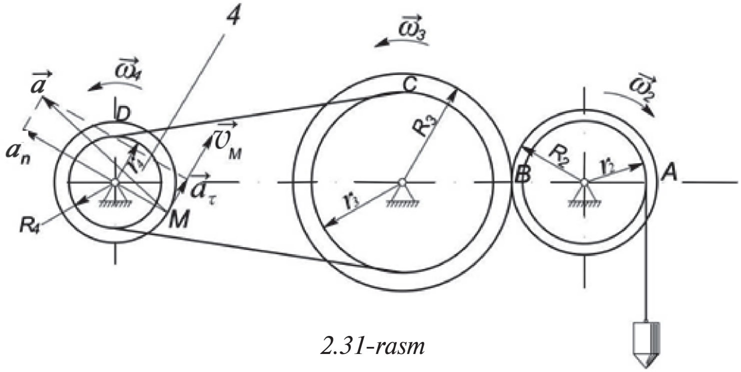
$$v_m = 24 \cdot 2 = 48\ sm/s^2,$$

$$a_\tau = 24\ sm/s^2,$$

$$a_n = 48 \cdot 4 = 192\ sm/s^2,$$

$$a = \sqrt{576 + 36864} = 193{,}4\ sm/s^2.$$

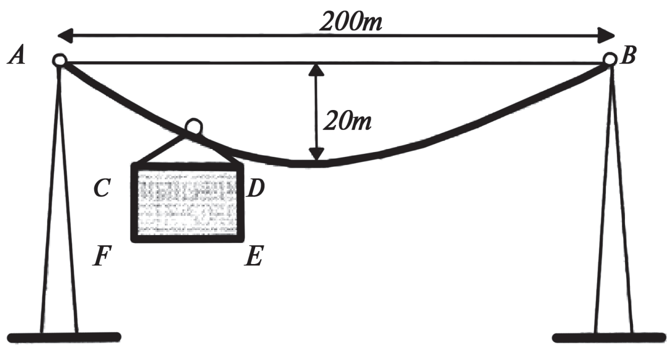
Tezlik va tezlanishlar uchun masshtab tanlab, ularni chizmada ko‘rsatamiz: M nuqtaning tezlik vektori nuqtadan trayektoriyaga o‘tkazilgan urinma bo‘ylab, to‘la tezlanish vektori esa urinma va normal tezlanishlarga qurilgan paralellogramning diagonali bo‘ylab yo‘naladi *(2.31-rasm)*.



2.31-rasm

28-§. Mustaqil o‘rganish uchun talabalarga tavsiya etiladigan muammolar

1-muammo. Lift kabinasi parabola qismi bo‘ylab *A* nuqtadan *B* nuqtaga tortilgan arqonga bog‘langan holda harakatlanmoqda. Kabina harakati *A* nuqtadan gorizontal $v_{gor} = 1\ m/s$ o‘zgarmas tezlik bilan boshlangan. Kabina *AB* arqon o‘rtasida bo‘lgan paytda $t_1 = 3$ vaqt momenti uchun uning *CDFE* nuqtalarining tezligi va tezlanishi aniqlansin *(2.32-rasm)*.



2.32-rasm

2-muammo. Kvadrat plastina chizma tekisligida o'zgarmas $\varepsilon = 1\ rad/s^2$ burchak tezlanish bilan aylanma harakat qilmoqda. Agar $t = 0$ vaqt onida plastina OA tomoni gorizontal holatni egallagan bo'lib, B nuqtaning tezligi $v_{BO} = 1\ m/s$ ga teng bo'lsa, kvadrat plastina uchlarining tezligi va tezlanishi aniqlansin va $t = 1\ s$ vaqt oni uchun kvadrat plastina diagonallarida yotuvchi nuqtalar tezliklarining taqsimoti ko'rsatilsin. Kvadrat plastina tomoni $l = 0{,}5\ m$ ga teng.

3-muammo. Jism qo'zg'almas o'q atrofida $\varepsilon = 5\ rad/s^2$ burchak tezlanish bilan aylanadi. Boshlang'ich paytda, $t_0 = 0$ da jismning burchak tezligi $\omega_0 = 0$ bo'lsa, $t = 2\ s$ da uning aylanish o'qidan $r = 0{,}2\ m$ masofadagi nuqtasining tezligini aniqlang.

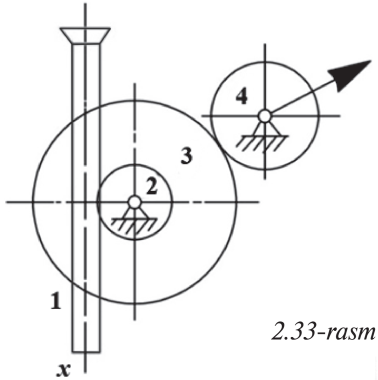
4-muammo. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jismning aylanish o'qidan $r = 0{,}2\ m$ masofadagi nuqtasining tezligi $v = 4t^2$ qonun bo'yicha o'zgarsa, $t = 2\ s$ dagi jismning burchak tezlanishini toping.

5-muammo. Jismning burchak tezligi $\omega = 1 + t$ qonun bo'yicha o'zgarsa, $t = 1\ s$ paytda uning aylanish o'qidan $r = 0{,}2\ m$ masofadagi nuqtasining tezlanishini toping.

6-muammo. Strelkani indikator mexanizmida harakat o'lchov shtiftining (1) reykasidan (2) shesterniyaga uzatiladi; (2) shesterniyaning o'qiga (3) tishli g'ildirak o'rnatilgan, (3) g'ildirak esa strelka biriktirilgan (4) shesternya bilan tishlashadi. Agar shtiftning harakati $x = a\sin kt$ tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari tegishlicha r_2, r_3 va r_4 bo'lsa, strelkaning burchak tezligi aniqlansin *(2.33-rasm)*.

7-muammo. Jismning burchak tezligi $\omega = -8t$ qonun bo'yicha o'zgarsa, $t = 3s$ da uning burilish burchagi φ ni toping. Boshlang'ich paytda, $t = 0$ da, $\varphi_0 = 5$ rad.

8-muammo. Maxovikning aylanish chastotasi $t_1 = 10\ s$ da 3 marta kamayib, 30 *ayl/min* ga teng bo'lsa, aylanishni tekis sekunlanuvchan deb, uning burchak tezlanishini aniqlang.



2.33-rasm

9-muammo. Agar jismning burchak tezligi $\omega = 2 - 8t^2$ qonun bo'yicha o'zgarsa, u to'xtaguncha qancha vaqt o'tadi?

10-muammo. Jism $\varphi = 2\pi \cos \pi t^2$ qonun asosida qo'zg'almas o'q atrofida aylansa, $t = 2$ *s* dan keyin uning burilish burchagini toping.

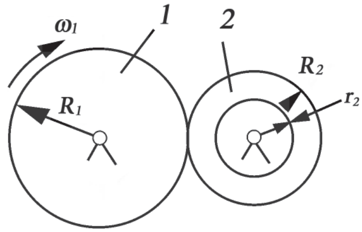
11-muammo. Soat mexanizmining balansiri $\omega = \pi \sin 4\pi t$ burchak tezlik bilan harakatlansa, $t = 0{,}125$ *s* paytdagi uning aylanish o'qidan $h = 6$ *mm* masofadagi nuqtasining tezligini toping (*sm/s*).

12-muammo. Jism qo'zg'almas o'q atrofida $\varphi = 2t^2$ qonun bo'yicha aylanadi. Jismning aylanish o'qidan $r = 0{,}2$ *m* masofada joylashgan nuqtasi normal tezlanishining $t = 2$ *s* paytdagi qiymatini aniqlang.

13-muammo. Jism $\omega = 2t^2$ burchak tezlik bilan aylanayotgan bo'lsa, uning aylanish o'qidan $r = 0{,}2$ *m* masofada joylashgan nuqtasi urinma tezlanishining $t = 2$ *s* dagi qiymatini aniqlang.

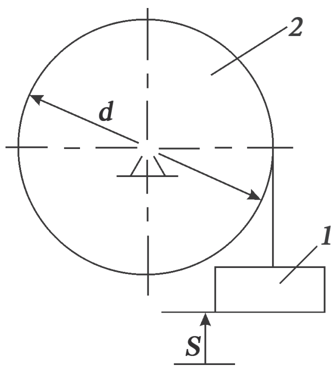
14-muammo. Elektrodvigatelning rotori berilgan paytda $\omega = 3\pi$ burchak tezlik va $\varepsilon = 8\pi$ burchak tezlanish bilan aylanayotgan bo'lsa, rotorning aylanish o'qidan 0,04 *m* masofadagi nuqtasining to'la tezlanishini toping.

15-muammo. Radiuslari $R_1 = 1$ *m*, $R_2 = 0{,}8$ *m* va $r_2 = 0{,}4$ *m* bo'lgan pog'onali g'ildiraklarga (3) yuk osilgan. Agar (1) g'ildirakning burchak tezligi $\omega_1 = 2t^2$ berilgan bo'lsa, $t = 2$ *s* da (3) yukning tezlanishini aniqlang *(2.34-rasm)*.



2.34-rasm

16-muammo. Diametri d = 50 sm li 2 baraban, 1 yukni $s = 7+5t^2$ (sm) qonun bo‘yicha yuqoriga tortadi. t = 3 s paytda 2 barabanning burchak tezligini aniqlang *(2.35-rasm).*



2.35-rasm

29-§. Talabalar mustaqil bajarishi uchun ko‘p variantli keyslar (hisob chizma ishlari uchun)

Ilgarilanma va aylanma harakatlarda qattiq jism nuqtalarining tezliklari va tezlanishlarini aniqlash.

1-yukning harakati

$$x=c_2t^2 + c_1t+c_0$$

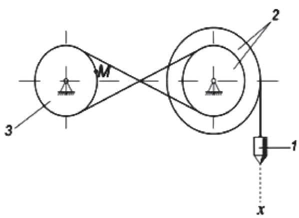
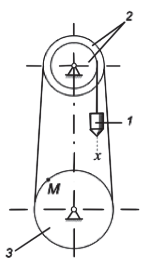
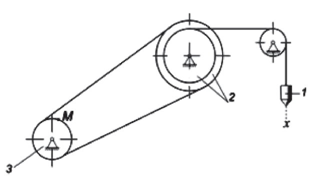
tenglama bilan tavsiflanishi kerak. Bu yerda t — vaqt, c; c_0; c_1; c_2 — doimiylar.

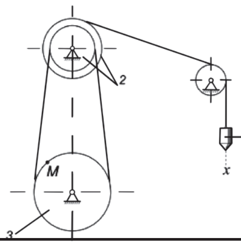
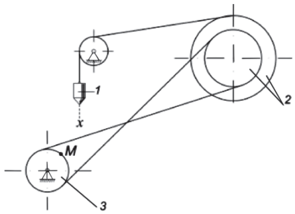
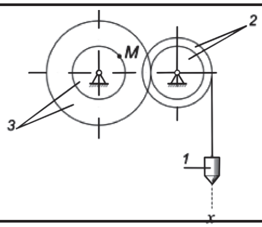
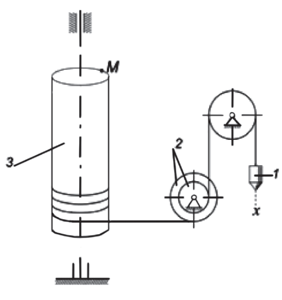
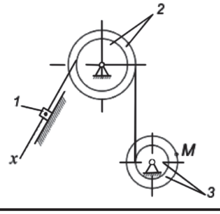
Vaqtning boshlang‘ich onida (t=0) yukning koordinatasi x_0, tezligi esa v_0 bo‘lishi kerak.

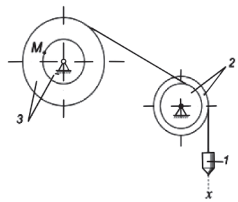
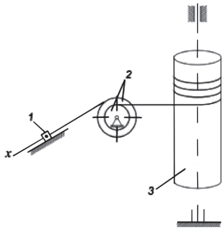
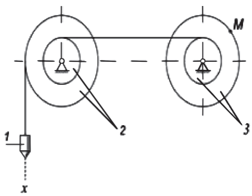
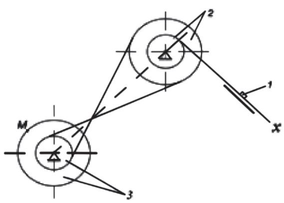
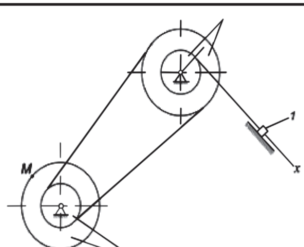
Undan tashqari, $t=t_2$ vaqt onida yukning koordinatasi x_2 ga teng bo‘lishi lozim.

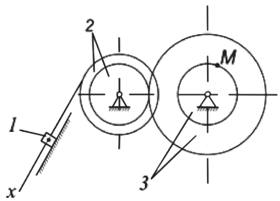
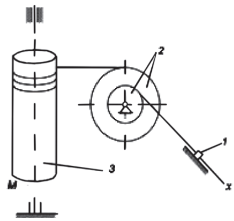
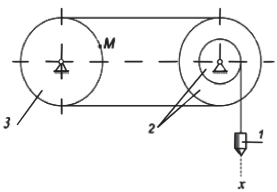
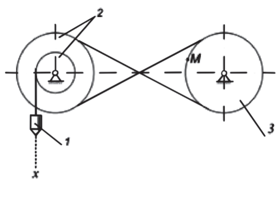
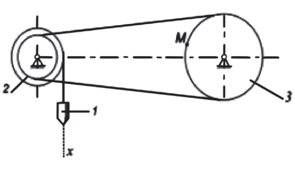
c_0, c_1, c_2 koeffitsiyentlar shunday aniqlansinki, bunda yuk 1 ning talab qilgan harakati amalga oshsin. Shuningdek, $t = t_1$ vaqt onida yukning hamda mexanizm g‘ildiraklaridan birining M nuqtasining tezligi va tezlanishi aniqlansin.

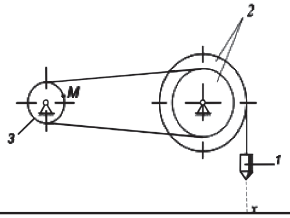
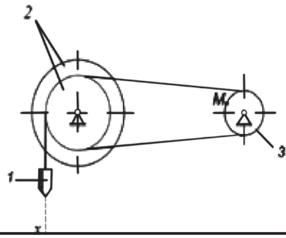
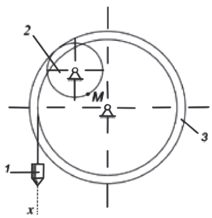
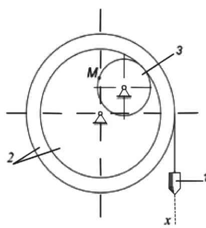
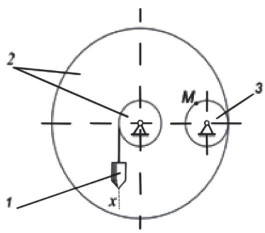
Mexanizmlarning sxemalari, hisoblash uchun kerakli ma’lumotlar jadvalda keltirilgan.

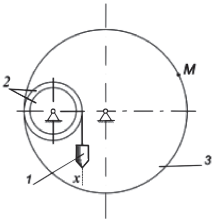
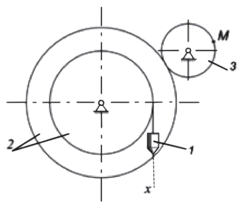
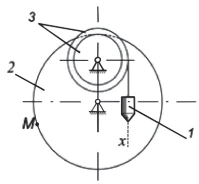
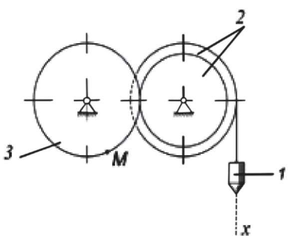
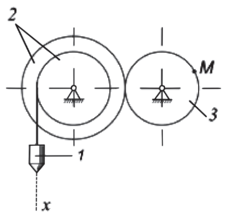
Variant raqam-lari	**Mexanizmlarning sxemalari**	**Radiuslar, sm**	**1 yukning koordinatala-ri va tezliklari**	**Hisob uchun vaqt onlari**
1	2	3	4	5
1.		R_2=20 *sm* r_2=15 *sm* R_3=15 *sm*	x_0=4 *sm* v_0= 6 *sm/s* x_2=220 *sm*	t_2=4 *s* t_1=3 *s*
2.		R_2=20 *sm* r_2=15 *sm* R_3=25 *sm*	x_0=8 *sm* v_0= 4 *sm/s* x_2=44 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
3.		R_2=25 *sm* r_2=15 *sm* R_3=10 *sm*	x_0=3 *sm* v_0= 12 *sm/s* x_2=211 *sm*	t_2=4 *s* t_1=1 *s*

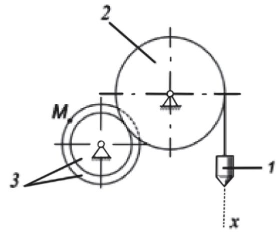
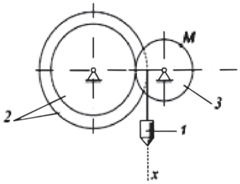
4.		R_2=20 *sm* r_2=15 *sm* R_3=25 *sm*	x_0=5 *sm* v_0= 10 *sm/s* x_2=505 *sm*	t_2=5 *s* t_1=3 *s*
5.		R_2=30 *sm* r_2=20 *sm* R_3=15 *sm*	x_0=10 *sm* v_0= 8 *sm/s* x_2=277 *sm*	t_2=3 *s* t_1=1 *s*
6.		R_2=25 *sm* r_2=15 *sm* R_3=35 *sm* r_3=15 *sm*	x_0=6 *sm* v_0= 5 *sm/s* x_2=356 *sm*	t_2=5 *s* t_1=2 *s*
7.		R_2=40 *sm* r_2=25 *sm* R_3=50 *sm*	x_0=7 *sm* v_0= 6 *sm/s* x_2=103 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
8.		R_2=50 *sm* r_2=40 *sm* R_3=40 *sm* r_3=20 *sm*	x_0=5 *sm* v_0= 9 *sm/s* x_2=194 *sm*	t_2=3 *s* t_1=2 *s*

9.		R_2=40 *sm* r_2=20 *sm* R_3=50 *sm* r_3=25 *sm*	x_0=9 *sm* v_0 = 8 *sm/s* x_2=105 *sm*	t_2=4 *s* t_1=2 *s*
10.		R_2=60 *sm* r_2=25 *sm* R_3=70 *sm*	x_0=8 *sm* v_0= 4 *sm/s* x_2=119 *sm*	t_2=3 *s* t_1=2 *s*
11.		R_2=40 *sm* r_2=20 *sm* R_3=40 *sm* r_3=20 *sm*	x_0=6 *sm* v_0= 14 *sm/s* x_2=862 *sm*	t_2=4 *s* t_1=2 *s*
12.		R_2=50 *sm* r_2=20 *sm* R_3=50 *sm* r_3=20 *sm*	x_0=5 *sm* v_0 = 6 *sm/s* x_2=193 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
13.		R_2=50 *sm* r_2=25 *sm* R_3=50 *sm* r_3=20 *sm*	x_0=8 *sm* v_0 = 5 *sm/s* x_2=347 *sm*	t_2=3 *s* t_1=2 *s*

14.		R_2=30 *sm* r_2=22 *sm* R_3=60 *sm* r_3=30 *sm*	x_0-4 *sm* v_0= 6 *sm/s* x_2=32 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
15.		R_2=40 sm r_2=20 sm R_3=25 sm	x_0=5 *sm* v_0 =7 *sm/s* x_2=128 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
16.		R_2=30 *sm* r_2=20 *sm* R_3=30 *sm*	x_0=5 *sm* v_0 =2 *sm/s* x_2=189 *sm*	t_2=4 *s* t_1=2 *s*
17.		R_2=30 *sm* r_2=20 *sm* R_3=30 *sm*	x_0-6 *sm* v_0 =3 *sm/s* x_2=80 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
18.		R_2=40 *sm* r_2=25 *sm* R_3=50 *sm*	x_0=7 *sm* v_0=0 *sm/s* x_2=557 *sm*	t_2=5 *s* t_1=2 *s*

19.		R_2=40 *sm* r_2=30 *sm* R_3=20 *sm*	x_0=5 *sm* v_0 =10 *sm/s* x_2=179 *sm*	t_2=3 *s* t_1=2 *s*
20.		R_2=50 *sm* r_2=30 *sm* R_3=25 *sm*	x_0=9 *sm* v_0 =8 *sm/s* x_2=65 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
21.		R_2=30 *sm* r_2=80 *sm* R_3=70 *sm*	x_0–5 *sm* v_0 =3 *sm/s* x_2=129 *sm*	t_2=4 *s* t_1=3 *s*
22.		R_2=40 *sm* r_2=30 *sm* R_3=15 *sm*	x_0=10 *sm* v_0=7 *sm/s* x_2=48 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
23.		R_2=40 *sm* r_2=15 *sm* R_3=15 *sm*	x_0=5 *sm* v_0=2 *sm/s* x_2=111 *sm*	t_2=3 *s* t_1=2 *s*

24.		$R_2=60$ *sm* $r_2=45$ *sm* $R_3=130$ *sm*	$x_0=8$ *sm* $v_0=16$ *sm/s* $x_2=124$ *sm*	$t_2=4$ *s* $t_1=3$ *s*
25.		$R_2=120$ *sm* $r_2=72$ *sm* $R_3=36$ *sm*	$x_0=7$ *sm* $v_0=16$ *sm/s* $x_2=215$ *sm*	$t_2=4$ *s* $t_1=2$ *s*
26.		$R_3=80$ *sm* $r_3=45$ *sm* $R_2=30$ *sm*	$x_0=3$ *sm* $v_0=15$ *sm/s* $x_2=102$ *sm*	$t_2=3$ *s* $t_1=2$ *s*
27.		$R_2=58$ *sm* $r_2=45$ *sm* $R_3=60$ *sm*	$x_0=4$ *sm* $v_0=4$ *sm/s* $x_2=172$ *sm*	$t_2=4$ *s* $t_1=3$ *s*
28.		$R_2=120$ *sm* $r_2=72$ *sm* $R_3=90$ *sm*	$x_0=8$ *sm* $v_0=6$ *sm/s* $x_2=40$ *sm*	$t_2=4$ *s* $t_1=2$ *s*

29.		R_2=100 *sm* r_3=75 *sm* R_3=60 *sm*	x_0=5 *sm* v_0=10 *sm/s* x_2=41 *sm*	t_2=2 *s* t_1=1 *s*
30.		R_2=60 *sm* r_2=45 *sm* R_3=36 *sm*	x_0–2 *sm* v_0=12 *sm/s* x_2=173 *sm*	t_2=3 *s* t_1=2 *s*