М. ЎРОЗБОЕВ

# Назарий механика асосий курси

Назарий механика асосий курси

Проф. М. Т. УРАЗБАЕВ

# ОСНОВНОЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

## СТАТИКА, КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Рекомендован в качестве учебника для высших учебных заведений Министерством высшего образования СССР*

ИЗДАТЕЛЬСТВО „УЧИТЕЛЬ"
ТАШКЕНТ — 1966



# НАЗАРИЙ МЕХАНИКА АСОСИЙ КУРСИ

## СТАТИКА, КИНЕМАТИКА ВА ДИНАМИКА

ҚАЙТА ИШЛАНГАН УЧИНЧИ НАШРИ

*СССР Олий таълим министрлиги олий ўқув юртлари учун дарслик сифатида тавсия этган*

„ЎҚИТУВЧИ" НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ — 1966

I БОБ

# КИРИШ

## 1- §. Умумий мулоҳазалар

Назарий механикада материал жисмларнинг ҳаракати ва мувозанати ўрганилади. Ф. Энгельс бундай деган эди: „Материя ҳеч қаерда ва ҳеч қачон ҳаракатсиз бўлмаган ва бўлиши ҳам мумкин эмас...“ (Ф. Энгельс, „Анти-Дюринг“, 1952, 56 — 57- бетлар).

Ф. Энгельс берган таърифга кўра, ҳаракат материянинг ажралмас ва асосий хоссасидир; шунинг учун ҳам ҳаракат оламда рўй берадиган барча ҳодисаларни ўз ичига олади. Бу нуқтаи назардан олганда, ҳаракат сўзидан фақат механик ҳаракатгина эмас, балки молекулалар, атом ва электронлар билан бўладиган мураккаб процесслар ҳам тушунилади. Материалистик диалектиканинг умумий қонунлари материя ҳаракатининг барча шакллари учун татбиқ қилинади. Шу билан бирга, ҳаракат шакллари орасида сифат фарқи борлигидан, уларни тасвирлаш ва ўрганиш усуллари ҳам турлича бўлади.

Табиатдаги барча жисмлар материядан иборатлиги маълум. Назарий механикада материянинг алоҳида физик-химиявий хоссалари назарга олинмайди. Материя доимо ҳаракатда бўлганидан, уни вақт ва фазодан ажратиб тасвирлаб бўлмайди. Назарий механиканинг вазифаси энг оддий ҳаракатларни, яъни материал жисмларнинг вақт ўтиши билан фазода бир-бирларига нисбатан қўзғалишларини ўрганишдир. Шу билан бирга, назарий механика материал жисмларнинг мувозанатда бўлиш ҳолларини ҳам текширади, чунки мувозанат механик ҳаракатнинг хусусий ҳолидир. Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, абсолют мувозанат бўлмайди. Ф. Энгельс бундай деган эди: „Ҳар қандай мувозанат *фақат нисбий* ва *вақтинчадир*“ (Ф. Энгельс, „Табиат диалектикаси“, 1950, 196- бет).

Ўрганилаётган назарий механика курси, одатда, классик механика деб аталади. Бу механиканинг асосий қонунларини даставвал Галилей билан Ньютон баён этган эдилар. XX асрнинг бошларида физика соҳасида материянинг тузилиши юзасидан ўтказилган текширишлар классик механика қонунларини ўлчамлари молекула ўлчамларидан анча катта, тезлиги эса ёруғлик тезлигидан анча кам бўлган жисмлар учун қўлланиш мумкинлигини таъкидлади. Шу билан бирга, бу текширишлар ўлчами жуда кичик, молекула ўлчамлари атрофида, тезлиги эса ёруғлик тезлиги теварагида бўлган материя ҳаракатини текшириш учун классик механика қонунларини татбиқ этиб бўлмаслигини ҳам курсатди. Масала шундаки, ёруглик тезлиги 300000 *км/сек* га тенг, аммо ҳозирги замон техникасида учратиладиган энг катта тезлик 200000 *км/сек* дан ошмайди. Шунинг учун, классик механика қонунлари ҳаётда учрайдиган реал масалаларни ечишда қаноатланарли натижалар беради. Назарий механика, қўйилган масалаларнинг қандай нуқтаи назардан текширишга қараб, уч қисмга: 1) *статика*, 2) *кинематика* ва 3) *динамикага* бўлинади.

Жисмларнинг мувозанати, уларга қўйилган кучларни қўшиш ва айириш, бу кучларни таъсир жиҳатидан эквивалент бўлган бошқа кучлар системаси билан ёки битта куч билан алмаштириш масалалари механиканинг статика қисмида текширилади.

Кинематикада жисмларнинг ҳаракати текширилади. Аммо ҳаракат, уни вужудга келтирувчи кучлар назарда тутилмай, фақат геометрик нуқтаи назардангина текширилади.

Динамикада эса жисмларнинг механик ҳаракати шу ҳаракатни вужудга келтирувчи сабабга, яъни таъсир этаётган кучга боглаб текширилади.

## 2- §. Назарий механиканинг практика билан боғланиши

Табиат тўғрисидаги фанлардан бири бўлган назарий механикани яхшилаб тушуниш ва ўрганиш — дунёга диалектик материализм нуқтаи назаридан қараш ва марксистик методлар асосида фикр юргизишга ёрдам беради. Назарий механиканинг асосий принциплари азалдан яратилган эмас.

Барча фанларнинг, жумладан механиканинг асосида жамият практикаси, тажриба, эксперимент ётади. Сунгра билим илғор назария тарзида ривожланади ва, ниҳоят, бу назария натижалари амалда қўлланилади. Пролетариат идеологиясини ифода қилган бирдан-бир революцион назария —

Маркс, Энгельс, Ленин яратган диалектик материализм назариясидир. Назарий механиканинг бутун мазмуни диалектик фикрларга асосланганидан, у диалектик метод асосида тавсифланиши лозим.

## 3- §. Назарий механикада абстракт методнинг роли

Қаттиқ жисмларнинг ҳаракати ва мувозанатига оид механик ҳодисаларни кузатганимизда уларнинг маълум хоссалари механика масалаларини ечишда турлича ўрин тутишини кўрамиз. Масалан, ип учига осилган маълум шаклдаги жисм вертикал текисликда тебранма ҳаракат қилсин, бу ҳаракатнинг тебраниш даври ипга осилган жисмнинг массасигагина боғлиқ бўлиб, унинг шаклига ва бошқа физик хоссаларига мутлақо боғлиқ бўлмайди (ҳавосиз бўшлиқда). Шунинг учун, бу ҳолда маълум шаклдаги ҳалиги жисмни ип учига осилган материал нуқта деб қарашимиз мумкин, чунки биз қўйган масалада жисмнинг шакли ҳеч қандай аҳамиятга эга бўлмай, унинг массаси масалани ҳал қилади. Механик масалани ечишда ҳажми ва шаклининг аҳамияти бўлмаган, маълум миқдордаги массаси бир нуқтага жойланган деб тасаввур қилинадиган жисм *материал нуқта* деб аталади. Жисмни материал нуқта тарзида тасаввур этиш механикада кенг қўлланилади. Маълум ўлчамли реал жисмни массаси шу жисм массасига тенг бўлган материал нуқта билан алмаштириш, кўпинча, масалаларни ечишда катта қулайлик туғдиради. Шу билан бирга, қўйилган масалани тўғри ҳал қилишга имкон беради. Бу ҳол материя хоссасининг қўйилган масала учун зарур бўлган қисмини олиб, масалани ечишда бевосита аҳамияти бўлмаган томонларини ҳисобга олмаслик имконини туғдиради.

Жисмнинг барча хоссалари бирданига эътиборга олинса, ҳеч қандай механик ҳодисани назарий ва амалий жиҳатдан текшириб бўлмайди, шу билан бирга, ечилиши жуда осон бўлган ҳар қандай масала ҳаддан ташқари мураккаблаштириб юборилади. Масалан, икки таянчга қўйилган эластик балканинг таянчларга бўлган босимини аниқлашда, балка эластиклигининг ҳеч қандай аҳамияти йўқ. Ҳолбуки, табиатдаги жисмлар маълум даражада эластиклик хоссасига эга бўлиб, қўйилган юклар таъсиридан деформацияланади. Бу деформация жисм ўлчамларига қараганда жуда ҳам кичик бўлиб, механика масалаларини ечишда унинг ҳеч қандай аҳамияти бўлмаганидан, у эътиборга олинмайди, шунинг учун, жисм абсолют қаттиқ деб қаралади.

Реал жисмларни тасаввур қилинган жисмлар билан бу тарзда алмаштириш механика масалаларини осонлаштириш учун кўрилган бир тадбирдир.

Бундай абстракт усул механикада кенг қўлланилади. Ҳар бир физик ҳодисани тасвирловчи назарияни яратишдан аввал, реал физик материал системани маълум даражада идеаллаштирилган схема билан алмаштириш масаласини, яъни қандай ҳолларда реал жисмни материал нуқта деб ва қандай ҳолларда абсолют қаттиқ жисм деб қараш кераклигини ҳал қилиш лозим. Бу масала жисмнинг хоссаларигагина боглиқ бўлмай, балки текширилаётган процесснинг характерига ва қўйилган масаладан кутиладиган жавобга ҳам боглиқдир. Масалан, металл диск ингичка симга марказидан горизонтал ҳолатда осиб қўйилган бўлсин. Агар жисмнинг маълум текисликдаги тебраниши бизни қизиқтирса, бу ҳолда унинг шакли аҳамиятга эга бўлмайди, шунинг учун уни материал нуқта деб қараса ҳам бўлади. Дискнинг осилган сим атрофидаги айланма ҳаракати текширилса, уни қаттиқ жисм деб қараш лозим, агар дискнинг қиррасига металл болғача билан урганда шу диск берадиган товуш қизиқтирса, албатта, унинг шакли ва эластиклигини эътиборга олмай туриб, масалани ечиб бўлмайди. Масаланинг қўйилишига қараб, дискнинг материал нуқта деб, қаттиқ жисм деб ёки эластик жисм деб қаралиши юқорида баён этилганлардан яққол кўриниб турибди. Аммо диск материалининг баъзи хоссалари ҳали ҳисобга олингани йўқ. Масалан, диск материалининг молекуляр тузилишига аҳамият берилмади, чунки унинг бу хоссаси қўйилган масала учун аҳамиятсиздир.

Ҳар қандай конкрет масалани ечишда реал физик жисмлар хоссаларининг нима сабабдан абстракт методлардан фойдаланиб тасаввур қилинган — соддалаштирилган схематик жисмлар билан алмаштирилганлиги энди тушунарли бўлса керак. Шундай қилиб, назарий механикада абстракт метод кенг қўлланилади

## 4- §. Назарий механика фанининг техника фанларини ривожлантиришдаги аҳамияти

Механиканинг асосий қонунлари ҳар қандай материал жисмларга, уларнинг суюқ ёки газсимон ҳолатда бўлишидан қатъи назар, бирдек татбиқ этилади. Қаттиқ, эластик, суюқ ва газсимон жисмлар механикаси, машина қисмларини ҳисоблаш назарияси, иншоотлар назарияси, гидравлика, аэрогидродинамика назарий механика қонунларига таянгани ҳолда мустақил фанлар тарзида шаклланди ва техника қуйган талабларга муваффақият билан жавоб бериб келмоқда.

Бизнинг замонамизда механиканинг бу қисмлари техника фанларининг юқорида келтирилган муҳим соҳалари бўлиб ривожланмоқда. Катта тезликлар билан ҳаракатланаётган авиация транспортининг, тез айланувчи қисмлари бўлган машиналарининг яратилиши, катта қувватга эга бўлган гидроэнергетик иншоотларнинг қурилиши, пахта териш машиналарининг яратилиши техника соҳасида янги проблемаларни майдонга ташлади. Бу янги проблемаларни ечиш масаласи юқорида келтирилган махсус техник фанлар зиммасига тушса ҳам, аммо назарий механика у фанларнинг асосий назарий манбаи сифатида ўз аҳамиятини яна ҳам оширмоқда.

## 5- §. Механиканинг тарихига оид қисқача маълумотлар

Табиий ҳодисаларнинг энг оддийси ҳам ҳар куни кузатиладиган жисмларнинг механик ҳаракати бўлиб, кишиларнинг ҳар қандай иши бу ҳаракатсиз бажарилмайди. Қадимдан қолган катта-катта иншоотлар кишиларнинг ўша замонларда оддий, ҳар хил ёрдамчи асбоб-ускуналардан фойдаланганлигини кўрсатади. Масалан, иншоотлар қуришда оғир юкларни баландга кўтариш асбоб-ускуналари ишлатилган. Демак, ўша замонларда ҳам илғор фикр эгалари амалий механика масалаларини ечиб, ўз замонларининг талабини қондирганлар. Барча фанлар, жумладан механика ҳам практика асосида келиб чиққан ва практика асосида ривожланмоқда.

Механикага оид дастлабки асарларни қадимги грек олимлари ёзган эди. Бизнинг давримиздан илгари 384 — 322 йилларда яшаган грек олими машҳур донишманд Аристотель ўзининг асарларида ричаг ва бошқа оддий машиналар мувозанати ва ҳаракатига оид умумий назарияларни ёзди. Шуни эслатиб ўтиш лозимки, Аристотель ўзининг назарий хулосаларини ҳеч қандай тажриба билан текшириб кўрмади ва, шунинг учун, у ўзгармас куч таъсир этаётган жисм текис ўлчовли ҳаракат қилади, деган нотўғри фикрга келди. Бу жиҳатдан олганда Аристотелнинг механикага оид асарлари метафизик нуқтаи назардан баён этилган.

Қадимги грек олимларидан яна бири машҳур Архимед бўлиб, у, давримиздан илгари 287 — 212 йилларда яшади ва механика соҳасида самарали текширишлар ўтказди. Архимед жисмларнинг мувозанатига ва оғирлик марказини геометрик усулда топиш масалаларига, шунингдек, сувда сузадиган жисмларнинг мувозанатига оид назарияларни ишлаб чиқади. Архимед асарлари Аристотель асарларидан тубдан фарқ қилади.

Асрлар ўтди, аммо Аристотель ва Архимед қолдирган илмий хазинага бирор муҳим фикр қўшилиши у ёқда турсин, улар қолдирган илмий меросдан бир қанчаси йўқотилиб ҳам юборилди. Ниҳоят, XI аср бошларида буюк Ўрта Осиё олими Беруний ўзининг материалистик таълимотига таяниб, Аристотелнинг кучлар соҳасидаги идеалистик классификациясига жиддий қарши чиқди.

XV асрдан бошлаб, бошқа фанлар қаторида механика фани ҳам янгидан ривожлана бошлади. Механиканинг янги ривожланиш даври 1452—1519 йилларда яшаган ва ўз замонасининг машҳур инженери ҳамда рассоми бўлган Леонардо да-Винчининг, 1473—1543 йилларда яшаган атоқли поляк олими Н. Коперникнинг асарлари билан бошланади. 1548—1620 йилларда яшаган голланд инженери С. Стевин мувозанат назариясига муҳим ҳисса қушди. У қия текисликка қўйилган жисмнинг мувозанатини текшириб, шу билан бирга бир текисликда ётадиган уч кучнинг мувозанат шартини таърифлади. XVI асрнинг иккинчи ва XVII асрнинг биринчи ярмида механиканинг ривожланиши машҳур олим Галилей номи билан боғлиқдир. Галилей табиат ҳодисаларини ниҳоятда чуқур мулоҳазалар билан кузатувчи ва ўткир тажрибакор бўлганлигидан, бу олим механиканинг амалий томонига жуда катта аҳамият бериб, икки янги проблема устида иш олиб борди. Бу проблемалардан бири ҳаракатни ўрганишга оид бўлса, иккинчиси материалларнинг қаршилигини текширишга оиддир. Галилей ўзи ўтказган чуқур текширишлар натижасида, Аристотелнинг ўзгармас куч таъсир этаётган жисм тенг ўлчовли ҳаракат қилади, деган нотўғри фикрини рад этиб, ўзгармас куч таъсир этаётган жисмнинг тенг тезланувчи ҳаракат қилишини кўрсатди. Галилей ўз муҳокамаларининг тўғрилигини энг оддий тажрибаларда текшириб кўрар эди. Шунинг учун, Галилей Аристотелнинг метафизик нуқтаи назардан баён этилган назарияларининг нотуғрилигини ўзи уткзаган тажрибалар билан исботлади. Галилейнинг механика соҳасида ўтказган текширишларини Х. Гюйгенс давом эттирди. Х. Гюйгенснинг механика соҳасидаги асари 1673 йилда босилиб чиқди. Бу асарнинг муҳим қисми тебрангич билан юрадиган соат механизмини текширишга бағишланган эди. Бундан ташқари, у асарда физик тебрангич назарияси ва марказдан қочувчи кучлар назариясига оид фикрларни ҳам исботсиз берди.

Механиканинг фан тарзида расмийлашиши тажриба асосида ҳосил қилинган маълумотларнинг умумий қонунлар тусига киришидан бошланди. 1687 йилда механиканинг асосий қонунлари гениал олим Исаак Ньютон томонидан ифодалаб берилди. И. Ньютон ҳар қандай кучлар таъсирида бўлган жисмнинг ҳаракатини текшириб, механика назариясини юқори даражада такомиллаштирди. Ҳозирги замон назарий механикасининг ҳақиқий яратувчиси бўлган И. Ньютон, назарий механика фани табиатни ва техникани ўрганишда асосий фан эканлигини баён этди. Ньютон бундай деб ёзган эди: „Қилинаётган ҳаракат ҳодисасини текшириб, табиат кучи аниқлансин. Аниқланган куч асосида табиатнинг бошқа ҳодисалари тушунтирилсин ва исботлансин". Ньютон механика олдига қўйган бу масалалар табиат ҳодисаларини чуқур урганиш ва бу ҳодисаларни вужудга келтирувчи кучларни тўхтовсиз ўрганишга даъват этади.

XVIII асрнинг биринчи ярми дифференциал ва интеграл ҳисобларининг ривожланиши ва бу ҳисобларнинг механика ҳамда физика масалаларини ечишда татбиқ этилиши билан машҳурдир. Бу воқеа механикани янада ривожлантирди. 1736 йилда рус академиги Леонард Эйлер ўзининг икки томдан иборат аналитик механикасини нашр эттирди. 1743 йилда Даламбернинг боғланишдаги материал системалар ҳаракатини динамик мувозанатга келтиришга бағишланган асари босилиб чиқди. 1760 йилда Эйлернинг қаттиқ жисм ҳаракатига оид янги асари дунёга келди.

XVIII асрнинг кейинги чорагида бир-биридан қолишмайдиган икки олим механика соҳасида катта ишлар қилиб, шуҳрат қозонди; бу олимлар аналитик механикани яратувчилардан Лагранж ва Лапласдир.

М. В. Ломоносов (1711—1765) физика-математика фанлари, жумладан, механика фани соҳасида қилган ажойиб текширишлари билан донғи кетган олимдир. Ломоносов ўзининг бутун илмий фаолияти давомида материалистик позицияда турди. Ломоносов материя бўлмаса, ҳаракат ҳам бўлмаслигини таъкидлаб, материя ва ҳаракатнинг сақланиш қонунини кашф этди. Механиканинг кенг ривожланиши XIX асрнинг бир нечта рус олимлари номи билан боғлиқдир.

Россия Фанлар академиясининг барпо этилиши, биринчи рус академиги М. В. Ломоносовнинг ташаббуси ва шу асрнинг машҳур олимларидан бири — рус академиги Л. Эйлернинг иштироки билан, XVIII асрнинг охирлари ва XIX асрнинг бошларида фаннинг кўп соҳаларида, жумладан, механика соҳасида ҳам, бир қанча илмий кадрлар тайёрланди.

Бу кадрлар ёрдамида фаннинг турли тармоқлари, жумладан, механика ҳам янада ривожлана бошлади. Шу даврда механикани ривожлантирган энг машҳур рус олимлари номини эслатиб ўтамиз. Булар: аналитик механика соҳасида қилган илмий ишлари билан шуҳрат қозонган М. Б. Остроградский (1811 — 1862), аналитик динамика тенгламаларини интеграллаш, статик мувозанат атрофида механик системанинг кичик тебраниш ҳаракатини текширишга бағишланган илмий ишлари билан танилган О. И. Сомов (1815—1876), фундаментал текширишлари натижасида механизмлар назариясига асос солган П. Л. Чебишев (1821 — 1894), автоматик регулятор назариясини яратган И. А. Вишнеградский (1831 — 1895), чўзилмайдиган ва эгилувчи ип назариясини ишлаб чиққан В. Г. Имшенецкий (1832 — 1892), қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи қаттиқ жисм ҳаракат тенгламаларини интеграллаш соҳасида қилган ишлари билан шуҳрат қозонган ва рус аёллари ичида биринчи олима С. В. Ковалевская (1850 — 1891) ва бошқалардир.

XIX асрнинг охири ва XX асрнинг бошларида яшаган, механиканинг аэродинамика қисмини тарихда мисли кўрилмаган даражага кўтарган асарлари билан машҳур бўлган Н. Е. Жуковский (1847 — 1921) ни В. И. Ленин рус авиациясининг отаси деб атаган эди. Н. Е. Жуковский механикани ғоят кўп янги саҳифалар билан бойитди. Н. Е Жуковский қилган илмий ишларнинг аҳамиятини бир неча сатр билан ифодалаб бўлмайди. Буюк рус олими С. А. Чаплигин (1869 — 1942) ҳам Н. Е. Жуковский билан бир қаторда туради. С. А. Чаплигин ўзининг аэрогидродинамика ҳамда боғланишли механик системаларнинг ҳаракатини текшириш соҳасида қилган илмий ишлари билан машҳурдир.

Механик система ҳаракатининг устивор бўлиш шартини текшириб, бу соҳада эришган муваффақиятлари билан шуҳрат қозонган А. М. Ляпунов (1857 — 1918), қаттиқ жисмларнинг суюқликдаги ҳаракатини текшириш ва потенциаллар назариясини такомиллаштириш билан шуҳрат қозонган В. А. Стеклов (1864 — 1926), ҳозирги замон реактив техникасининг асосини қурган К. Э. Циолковский (1857 — 1935), ўзгарувчан массалар механикасига асос солган И. В. Мешчерский (1859 — 1935), кемаларнинг устивор ҳаракати ва ташқи баллистикага оид муҳим илмий текширишлари билан танилган А. Н. Крилов (1863 — 1945) ва бошқалар ҳам механикани ривожлантиришда салмоқли ҳисса қўшган олимлардир.

Фан тарихида механика соҳасида қилган муҳим илмий текширишлари билан бу фанни ривожлантирган буюк олимлар ҳақидаги қисқача ахборот ана шулардан иборат.

Механикани ривожлантиришда совет олимларининг ҳам хизматлари ниҳоятда катта. Улар қилган илмий ишларнинг якунини бир-икки саҳифага жойлаш қийин булганидан, механика тарихи билан қизиқувчи китобхонларимизнинг оригинал манбаларга мурожаат қилишларини тавсия этамиз.

II БОБ

# ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ АСОСИ

Кейинги вақтларда, механикани, физикани ва техникага оид бошқа фанларни баён этишда векторлар ҳисобидан тобора кенг фойдаланилмоқда. Векторлар ҳисоби қўлланилиши натижасида турли формулалар осонгина чиқади ва уларнинг физик маъноси яққол кўриниб туради.

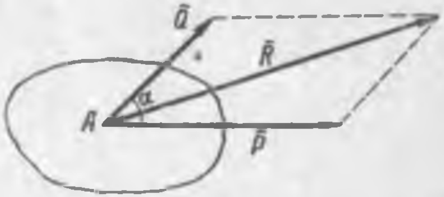
Назарий механикани векторлар ҳисоби асосида баён этиш одат бўлиб қолгани учун, векторлар ҳисоби тўғрисида қисқача маълумот бериб ўтамиз.

## 6- §. Скаляр ва вектор миқдорлар

Механикада ва техникага оид бошқа фанларда икки хил физик миқдор учратилади. Уларнинг бири скаляр миқдор, иккинчиси эса вектор миқдордир. Сон қиймати билангина аниқланадиган физик миқдор скаляр миқдор дейилади. Масалан, температура, иш, қувват ва шунга ўхшашлар скалярдир. Бу миқдорлар фақат сон қийматлари билан аниқланади. Сон қиймати ва фазодаги маълум йўналиши билан аниқланадиган физик миқдор вектор миқдор дейилади. Масалан, куч ёки тезлик йўналиши ва сон қиймати маълум бўлгандагина тўла маънога эга бўлади. Векторнинг таърифидан кўринадики, *икки векторнинг сон қийматлари баравар булгани билан йуналишлари ҳар хил булса, улар тенг булмайди.* Икки вектор бир-бирига тенг бўлиши учун, уларнинг узунлиги ҳам, йўналиши ҳам бир хил бўлиши зарур.

Векторнинг миқдори ва йўналишини тўла аниқлаш учун унинг бошини ва учини белгиловчи нуқталарнинг вазиятини фазода таққослаш системасига нисбатан курсатиш лозим, чунки бу система векторнинг фазода қандай урнашганини аниқ курсатиб беради. Бу таққослаш системаси координаталар системаси деб аталади.

3-аксиома (параллелограмм аксиомаси). *Жисмнинг бирор нуқтасига қуйилган турли йўналишдаги икки кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларга қурилган параллелограмм диагоналига миқдор жиҳатидан тенг булиб, шу диагонал буйлаб йуналади.*

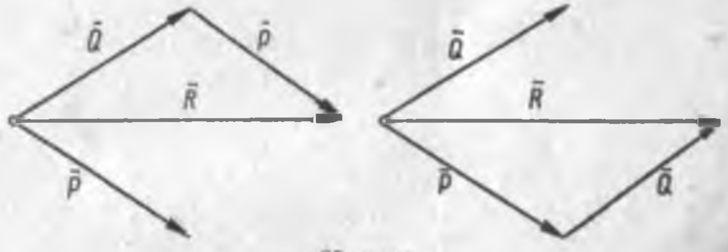



24- шакл.

Жисмнинг бирор $A$ нуқтасига бир-бири билан $\alpha$ бурчак ҳосил қилувчи $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлар қуйилган булсин (24- шакл). Ҳозиргина таърифланган аксиомага кура, мазкур $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $R$ уларга қурилган параллелограмм диагоналига, яъни $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ векторларнинг йиғиндисига тенг (8- параграфдаги хулосага мувофиқ). Шунинг учун:

$$\overline{P}+\overline{Q}=\overline{R}. \qquad (17.\ 1)$$

Бу $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларга қурилган параллелограмм *куч параллелограми* деб, кучларни бундай усулда қўшиш эса *параллелограмм усули* деб аталади. Шуни айтиб ўтиш керакки, икки кучни қўшишда параллелограммнинг ҳаммасини қуришга ҳожат йуқ, қуйидагига амал қилинса кифоя, яъни кучлардан бирини ўз ўрнида қолдирамиз, иккинчи кучни ўзига параллел кўчириб, биринчи кучнинг учига қўямиз. У



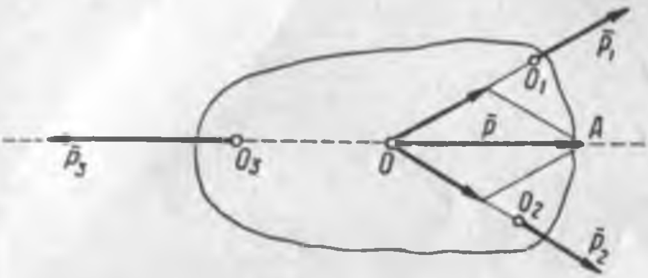

25- шакл.

вақтда биринчи кучнинг боши билан иккинчи кучнинг учини туташтирувчи вектор бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини тасвирлайди (25- шакл). Бу $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлардан қурилган учбурчак *куч учбурчаги* дейилади. Кучларни бу усул билан қўшиш *учбурчак усули* деб аталади.

## Уч куч теоремаси

Теорема. *Бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган учта куч мувозанатлашса, улар бир нуқтада кесишиб, ёпиқ кучлар учбурчагини ҳосил қилади.*

Теоремани исботлаймиз. Жисмнинг учта $O_1$, $O_2$ ва $O_3$ нуқталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ва $\overline{P}_3$ кучлар қўйилган бўлсин (26- шакл). Кучлар па-




26- шакл.

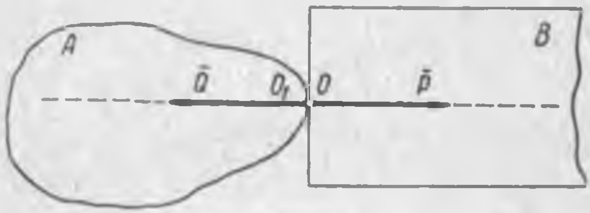
раллел бўлмаганлиги учун улардан иккитасининг таъсир чизиғи бир нуқтада кесишади. $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларнинг таъсир чизиғи $O$ да кесишади, деб фараз қилайлик. Бу кучларни мазкур $O$ нуқтага келтириб, параллелограмм ёки кучлар учбурчаги тузиш йўли билан қўшамиз. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{P}$ бўлсин. Теорема шартига кўра, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ва $\overline{P}_3$ ўзаро мувозанатлашган кучлар системасидир. Шунинг учун $\overline{P}_3$ куч $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{P}$ га тенг бўлиб, унга қарама-қарши йўналган бўлиши керак. Демак, $\overline{P}_3$ кучнинг ҳам таъсир чизиғи $O$ нуқтадан ўтиши лозим. Теореманинг биринчи қисми шу билан исботланди. Иккинчи қисмини исботлаш қийин эмас. Модомики, $\overline{P}_3$ куч $\overline{P}$ га тенг экан, унинг бошини $\overline{P}$ кучнинг учи $A$ нуқтага келтирилса, албатта учи $O$ нуқтада ётади. Шу билан $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ва $\overline{P}_3$ кучларга қурилган кучлар учбурчаги берк бўлади.

4-аксиома. *Таъсир ҳамма вақт акс таъсирга тенг ва унга қарама-қарши йўналган, яъни жисмларнинг бир-бирига таъсири ўзаро тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлади.*

Иккита $A$ ва $B$ жисмлар бир-бирига таъсир этмоқда (27- шакл). $A$ жисмнинг $B$ га кўрсатган таъсири унинг $O$ нуқтасига қўйилиб, $\overline{P}$ га тенг бўлсин; шунингдек, $B$ жисмнинг $A$ га курсатган таъсири унинг $O_1$ нуқтасига қўйилиб $\overline{Q}$ га тенг бўлсин. $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлар катталик жиҳатидан бирбирига тенг булиб, умумий таъсир чизиқлари бўйлаб қарама-қарши йўналган:

$$\overline{P} = -\overline{Q}.$$

Жисмларнинг ўзаро таъсирига оид бу қонунни Ньютон механиканинг 3-**қонуни** деб таърифлади. Бу қонун статик




**27- шакл.**

ва динамик шароит учун бирдек кучга эга. Баъзан англашилмовчилик натижасида бу қонундан ғалати хулосалар чиқарадилар. Масалан, таъсирнинг акс таъсирга тенг бўлишидан ҳеч қачон бу кучлар ўзаро мувозанатлашади деган хулосани чиқариб бўлмайди, чунки бир жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган қарама-қарши йўналишдаги иккита тенг куч ўзаро мувозанатлаша олади. Юқорида таърифланган қонунда, таъсир жисмнинг бир нуқтасига (масалан, $B$ жисмнинг $O$ нуқтасига) қўйилган бўлса, акс таъсир бошқа бир жисмнинг иккинчи бир нуқтасига (масалан, $A$ жисмнинг $O_1$ нуқтасига) қўйилган бўлади.

## Қаттиқ бўлмаган жисмларнинг мувозанати

Юқорида қаттиқ жисм учун кучнинг ўз таъсир чизиғи бўйлаб кўчирилиши мумкинлигини исботлаган эдик. Бу, қаттиқ жисм моделининг характерли хоссасидир. Деформацияланувчи жисм учун кучни ўз таъсир чизиғида бир нуқтадан бошқа нуқтага кўчиришга йўл қўйиб бўлмайди, чунки жисмнинг деформацияланиши куч қуйилган нуқтага боғлиқдир. Аммо статикада фақат жисмларнинг мувозанатига оид масалаларгина ечилганидан, бу орадаги барча мулоҳазалар мувозанат масалаларига оид бўлиб, жисмнинг бошқа хоссаларининг ҳеч қандай аҳамияти йўқ. Ҳатто суюқ ёки газсимон жисмларнинг ҳам мувозанат ҳолатини статика нуқтаи назаридан текшириш мумкин. Шунинг учун, қаттиқ бўлмаган жисмларнинг мувозанатини текширишда қуйидаги аксиомадан фойдаланилади:

5-аксиома. *Қаттиқ бўлмаган жисм кучлар таъсирида мувозанатда бўлса, жисм қотиб қолганда ҳам унинг мувозанати бузилмайди.*

Бу аксиома, кўпинча, қаттиқ бўлмаган жисмларнинг қотиш принципи дейилади.

Қаттиқ бўлмаган жисмнинг қотган жисм билан алмаштирилиши фақат жисм заррачаларининг эркин кучишинигина чеклаб, мувозанат шартининг ўзгаришига ҳеч қандай таъсир этмайди. Кўпинча, қаттиқ бўлмаган жисмларга оид амалий масалаларни ечишда қотган жисм принципи қуйидагича таърифланади:

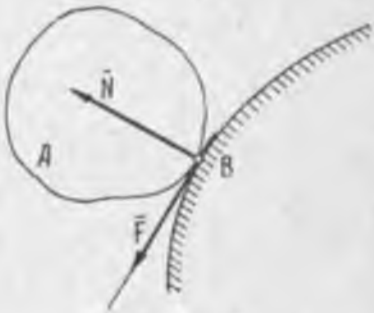
*Деформацияланадиган жисм мувозанат шартларига деформацияланадиган мазкур жисмдан ҳосил бўлган қотган жисмнинг мувозанат шарти ҳам киради.*

Бу тарздаги таърифдан, қаттиқ жисмларнинг мувозанат шарти деформацияланувчи жисмларнинг мувозанат шартининг хусусий ҳоли эканлиги аниқдир. Шунинг учун статикада, деформацияланадиган жисмларга оид бир қанча масалалар, масалан, ип, занжир, қайиш каби жисмлардаги зўриқишларни аниқлашга оид масалалар ечилиши мумкин.

## 18- §. Боғланишлар ва боғланиш реакциялари

Жисм фазода исталган томонга ҳаракатлана олса, бундай жисм эркин жисм дейилади. Жисмнинг ҳаракати бирор сабаб билан чекланган булса, бу жисм эрксиз жисм дейилади. Жисмнинг исталган томонга буладиган ҳаракатини чекловчи сабаб механикада боғланиш дейилади. Бу боғланишнинг жисмга кўрсатилган таъсирини алмаштирувчи куч реакция кучи дейилади. Эрксиз жисмлар ҳаракатини текшириш учун қуйидаги боғланиш гипотезаси қабул қилинган.

*Боғланиш таъсиридаги (яъни эрксиз) жисмни эркин жисм деб қараш учун, боғланиш таъсирини реакция кучи билан алмаштириш лозим.* Бошқача айтганда, эрксиз жисм ҳолатини эркин жисм ҳолати каби текшириш мумкин, аммо бу ҳолда жисмнинг эркин ҳолатини чеклаётган реакция кучи бўлган пассив кучни жисмга қуйилган актив куч қаторида ҳисобга олиш керак. Механика масалаларини ечишда, кўпинча, эрксиз жисмлар ҳаракати ва мувозанатини текширишга тўғри келади. Жисмларнинг эрксизлиги турли боғланишлар натижасида вужудга келиб, улар асосан таянчлар, йўналтирувчилар ва эгилувчан тиркагичлардан иборатдир. Механика масалаларини ечишда актив кучлар таъсиридаги жисмларнинг мувозанатинигина аниқламай, балки мувозанатдаги эрксиз жисмлар учун богланиш реакцияларини топишга ҳам тўғри келади. Кўпинча, амалий масалаларини ечишда, эрксиз жисмнинг мувозанат ҳолати олдиндан маълум булиб, бу ҳолат учун богланиш реакцияларини топиш лозим бўлади. Реакция кучининг катталиги ва йўналиши жисмга қўйилган актив куч ва боғланиш тартиби билан аниқланади.

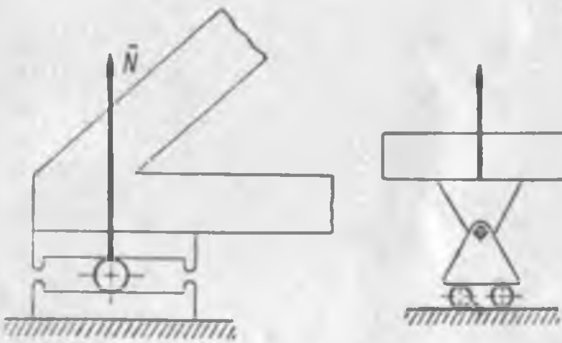


28- шакл.

Богланишларнинг асосий типларини келтирамиз.

Бирор $A$ жисм, бошқа қўзғалмас $B$ жисмга тегиб турса, $B$ нинг $A$ га реакцияси умумий ҳолда икки қисмдан иборат бўлади:

1) иккала жисм сиртларининг тегишиб турган нуқтаси орқали ўтказилган нормал билан йўналган $\bar{N}$ нормал реак-

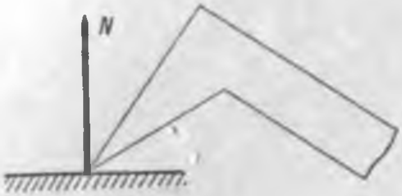


29- шакл.

ция, 2) иккала жисм сиртларининг уринма текислигида ётувчи $\bar{F}$ реакция. Бу $\bar{F}$ реакция сиртлар ғадир-будур бўлгандагина ҳосил бўлади (28- шакл) ва ишқаланиш кучи дейилади. Бу ҳақда кейинроқ батафсил маълумот берилади.

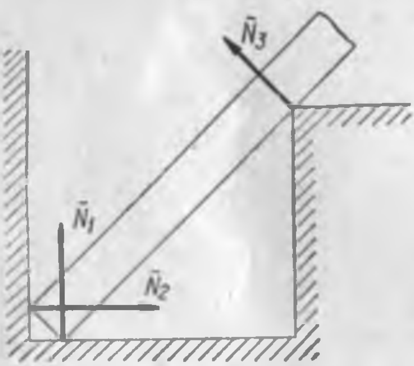
Бир-бирига уриниб турган жисмлар сирти силлиқ қилиб ишланган бўлса, ишқаланиш кучи жуда кичик бўлганидан, уни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Бу ҳолда таянч реакцияси фақат битта нормал реакциядан иборат бўлади. Бу типдаги реакциялар учун ғилдиракка ёки ғалтакка ўрнатилган ҳар хил конструкциядаги таянчлар мисол бўла олади (29-шакл).

Нормал реакциянинг йўналишини аниқлашда, бир-бирига уриниб турган жисмларнинг ўзаро геометрик ўрнашганлигини эътиборга олиб, улар сиртларининг уриниш нуқтаси орқали нормал ўтказиш керак. Нормал реакция бу умумий нормал бўйлаб йўналади.

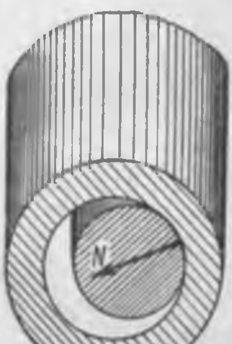


30- шакл.

Бироқ кўпгина ҳолда бу умумий нормалнинг йўналиши аниқ бўлмагандай кўринади. 30, 31, 32 - шаклларда тасвирланган, қирраси ёки чўққиси билан уринган ҳоллар бунга мисол бўла олади. Бундай ҳолларда қайси сиртга (жисм ёки таянч сиртига) нормал ўтказиш тўғри келса, нормал реакция шу нормал билан йўналади.



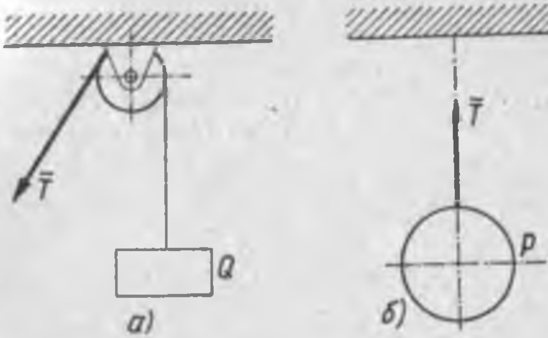
31- шакл.



32- шакл.

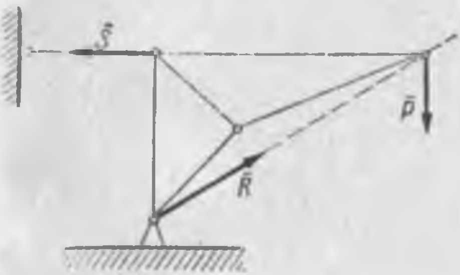
Боғланиш эгилувчан ёки бошқа бирор эластик жисм воситаси билан вужудга келган бўлсин. Масалан, жисм сим, арқон, қайиш, занжир каби эгилувчан материал воситаси билан осилган ёки тортиб қўйилган бўлса (33- шакл, *а*, *б*), шунингдек, қаттиқ стержень орқали шарнир воситаси билан бошқа жисмга бириктирилган бўлса (34- шакл), бу ҳолларда реакция шу боғланиш бўйлаб йўналади.

Боғланиш сферик шарнир воситасида вужудга келган бўлсин (35- шакл). Сферик шарнир жисмнинг шу шарнир марказн $O$ дан ўтадиган ҳар қандай ўқ атрофида айлани-

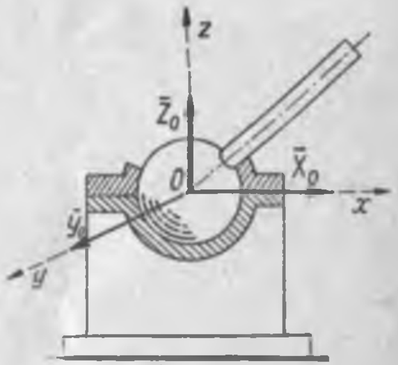



33- шакл.

шига тўсқинлик қилмайди. Сферик шарнир реакцияси шарнир марказидан ўтади, аммо қайси томонга йўналишини ол-




34- шакл.




35- шакл

диндан айтиб бўлмайди. Масала ечишда бундай реакцияни танлаб олинган координата ўқларига параллел ташкил этувчилардан иборат деб қаралади.

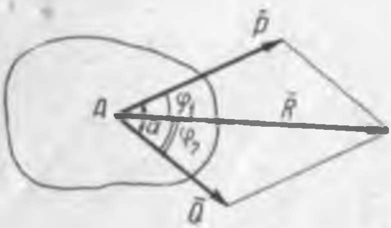
## 19- §. Бир нуқтага қўйилган икки кучни қўшиш

Жисмнинг қандайдир $A$ нуқтасига ўзаро $\alpha$ бурчак ҳосил қилувчи $\bar{P}$ ва $\bar{Q}$ кучлар қўйилган (36- шакл). Кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларга қурилган параллелограмм диагоналига тенг эканлиги маълум (параллелограмм аксиомасидан).

Кучларнинг тенг таъсир этувчиси билан берилган кучлар орасидаги бурчакларни $\varphi_1$ ва $\varphi_2$ орқали белгилаймиз:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha.$$

Энди бу параллелограммнинг битта учбурчагини оламиз. У ҳолда $\bar{P}$ ва $Q$ кучларининг тенг таъсир этувчиси $R$ мазкур $\bar{P}$ ва $\bar{Q}$ векторларнинг йиғиндиси тарзида ифодаланади (37- шакл).




36- шакл.

Энди, тенг таъсир этувчининг миқдорини аниқлаймиз. 37- шаклдан, косинуслар теоремасини татбиқ этиб, $R$ ни қуйидагича ифодалаймиз:

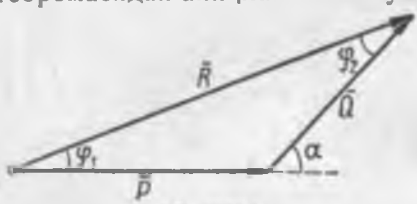
$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2\,PQ\cos(180° - \alpha),$$

бундан:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}. \quad (19.\ 1)$$

$R$ йўналишининг $P$ ва $Q$ кучлар билан ҳосил қилган $\varphi_1$ ва $\varphi_2$ бурчакларини синуслар теоремасидан аниқлашимиз мумкин:

$$\frac{\sin\varphi_1}{Q} = \frac{\sin\varphi_2}{P} = \frac{\sin\alpha}{R}, \quad (19.\ 2)$$




37- шакл.

бу тенгламалардан:

$$\sin\varphi_1 = \frac{Q}{R}\sin\alpha, \quad \sin\varphi_2 = \frac{P}{R}\sin\alpha. \quad (19.\ 3)$$

Бир нечта хусусий ҳолни кўриб чиқамиз: $\alpha = 0$ деб фараз қилайлик, у ҳолда $\cos\alpha = 1$ бўлади. Шунинг учун, (19. 1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ} = \sqrt{(P+Q)^2} = P + Q,$$

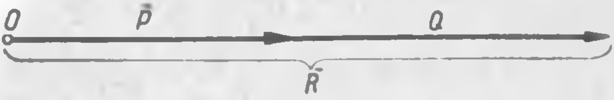
$\alpha = \pi$ бўлса, $\cos\alpha = -1$ бўлади, у ҳолда

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,PQ} = \sqrt{(P-Q)^2} = P - Q.$$

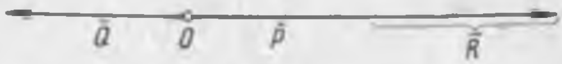
*Демак, бир нуқтага қўйилган икки куч бир йўналишда бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучлар қўйилган нуқтага қўйилиб, миқдори мазкур кучларнинг йиғин-*

алгебриг

*дисига тенг ва улар билан бир хилда йўналган бўлади* (38- шакл); *бир нуқтага қўйилган икки кучнинг йўналиши бир тўғри чизиқда ва қарама-қарши йўналишда бўлса,*




38- шакл.

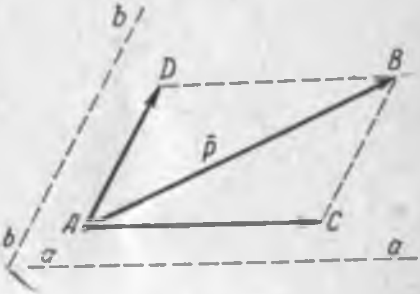



39- шакл.

*уларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучлар қўйилган нуқтага қўйилиб, миқдори уларнинг айирмасига тенг* (39- шакл) *ва катта куч томон йўналган бўлади.*

## 20- §. Кучни икки тузувчига ажратиш

Кучлар параллелограми ёки учбурчаги қуриш билан юқоридаги параграфда баён этилган масаланинг аксини, яъни маълум кучни икки тузувчига ажратиш масаласини ечиш мумкин. Бунинг учун, маълум кучдан ташқари, куч учбурчагини қуриш учун етарли яна маълум шарт берилиши керак: тузувчи кучларнинг ё модуллари ёки уларнинг таъсир чизиқлари ёхуд шу кучлардан биттасининг модули ҳамда йўналиши берилган бўлиши керак.



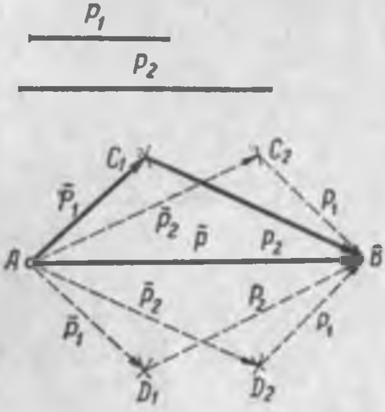

40- шакл.

Қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз:

1. Кучни бирор нуқтадан ўтувчи ва таъсир чизиқлари $a - a$ ва $b - b$ га параллел булган тузувчиларга ажратамиз (40- шакл).

$\overline{P}$ кучнинг $A$ боши ва $B$ учидан $a - a$ ва $b - b$ га параллел чизиқлар ўтказиш билан $ADBC$ параллелограмнни ҳосил қиламиз. Бунда $\overline{P}$ куч параллелограммнинг диагонали булгани учун, унинг $AC$ ва $AD$ томонлари $\overline{P}$ кучнинг $\overline{P_1}$ ва $\overline{P_2}$ тузувчиларини беради.

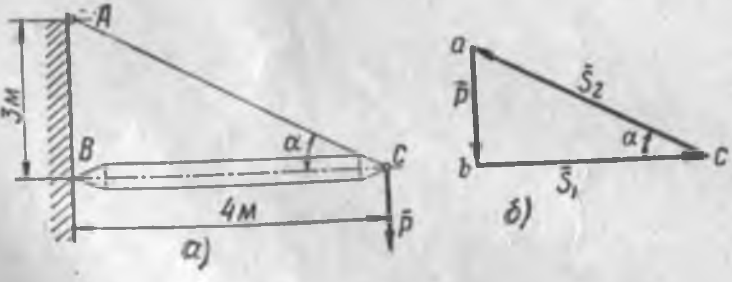
2. $\bar{P}$ кучни сон қийматлари $P_1$ ва $P_2$ бўлган икки тузувчига ажратамиз (41- шакл). Бу ҳолда масала $\bar{P}_1$ билан $\bar{P}_2$нинг йўналишини топишдан иборат бўлади. Бунинг учун $\bar{P}$ кучнинг $A$ боши ва $B$ учидан $P_1$ ва $P_2$ радиуслар билан ёй чизиб, уларнинг кесишган нуқтаси $C_1$ ёки $C_2$ ни топамиз. Бу $C_1$ нуқтани $A$ ва $B$ нуқталар билан туташтириб, $A$ дан $C_2B$ га тенг ва параллел қилиб $AD_2$ чизиқни ўтказамиз. Қурилган параллелограммдан $AC_1$ билан $AD_2$ бўйича $\bar{P}_1$ ва $\bar{P}_2$ кучларнинг йўналганлигини кўрамиз. $AC_1B$ учбурчагидан $\bar{P}_1$ ва $\bar{P}_2$ йўналишини аниқладик. $AD_1B$ учбурчагини олганимизда, кучларнинг йўналиши $AD_1$ билан $AC_2$ га мос келар эди. Демак, бу ҳолда масала иккита ечилишга эга экан.




41- шакл.

Энди, кучларнинг параллелограмм ёки куч учбурчаги ёрдами билан қўшиш, ажратиш ва бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган учта куч таъсиридаги жисмнинг мувозанатига оид бир нечта масалаларни ечамиз.

**1- масала.** $ABC$ кронштейннинг $C$ болтига $P = 3m$ куч таъсир этса, $BC$ брус билан $AC$ тортқида қандай еакция кучлари ҳосил бўлади (42- шакл, *а*).




42- шакл.

Ечиш. $C$ шарнир болтига қўйилган $P$ куч ва $BC$ брус билан $AC$ тортқи реакциялари таъсиридан мувозанатда туради. Бу реакциялар тегишлича $BC$ ва $CA$ бўйлаб йўналган бўлиб, уларнинг катталиги номаълум. Биз уларни тегишлича $S_1$ ва $S_2$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб, масалани $P$ кучнинг икки $BC$ ва $CA$ бўйлаб йўналган тузувчи $S_1$ ва $S_2$ кучларга ажратишга келтирдик. Энди $P$ кучни маълум бир масштабда $ab$ кесма орқали қўйиб, унинг учи ва бошидан, яъни $a$ ва $b$ нуқталар орқали $BC$ ва $CA$ ларга параллел чизиқлар ўтказамиз ва бу чизиқларнинг кесишган нуқтасини $c$ билан белгилаймиз (42- шакл, *б*). Куч стрелкаларини юқорида айтилганча қўйсак, учбурчакнинг $bc$ томони $S_1$ кучнинг, $ca$ томони эса $S_2$ кучнинг йўналиши ва катталигини белгилайди. $ABC$ ва $abc$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

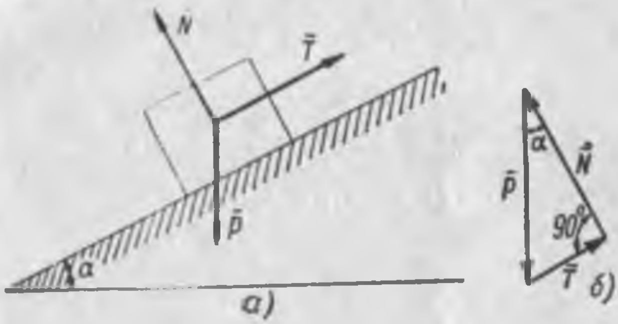
$$\frac{P}{AB} = \frac{S_1}{BC} = \frac{S_2}{AC}.$$

$\triangle ABC$ дан $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ *м*.
Пропорциядан:

$$S_1 = 4m, \; S_2 = 5m$$

эканини топамиз:

**2- масала.** Горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ҳосил қилувчи абсолют силлиқ қия текислик устига оғирлиги $P = 6m$ ли жисм қўйилган. Бу жисмни




43- шакл.

тутиб тура олувчи, оғма текисликка параллел йўналган $T$ куч топилсин (43- шакл, *а*).

Ечиш. Жисм ўзининг оғирлиги $P$, тортиш кучи $T$ ва қия текислик реакцияси $N$ таъсирида мувозанатда туради. Юқорида кўрсатилганча, кучлар учбурчагини ясаб, $T$ ва $N$ нинг қийматини топамиз, яъни (43- шакл, *б*) ни ясаймиз. Шаклдан:

$$T = P \sin \alpha = 3m.$$

**3- масала.** Узунлиги $2\,l$ бўлган арқоннинг учлари бир хил баландликдаги $C$ ва $O$ нуқталарга илиниб, унинг уртасига $P$ юк осилган. Арқоннинг зўриқиши топилсин (44- шакл, *а*).

Ечиш. $AC$ ва $AO$ ипларда зўриқишлар бир-бирига тенг. $A$ тугун $\bar{T}'_a$ ва $\bar{T}''_a$ зўриқиш ва $P$ куч таъсиридан мувозанатда тургани учун, мазкур кучларга ясалган кучлар учбурчаги ёпиқ бўлиши керак (44- шакл, *б*).

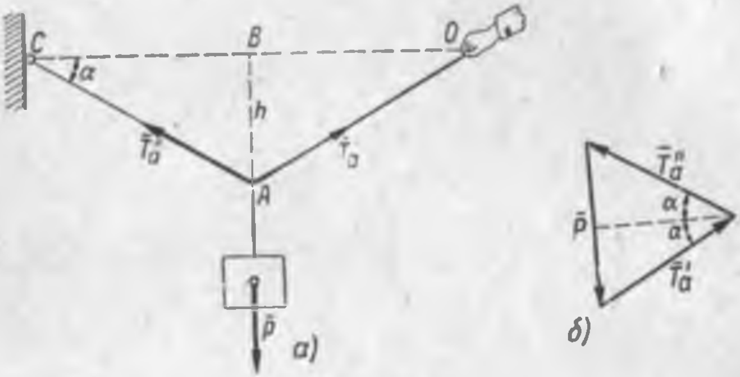
Кучлар учбурчагидан:

$$T = T'_a = T''_a = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{Pl}{2h}.$$

$\triangle ABC$ дан $\sin\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{h}{l}$, буни олдинги тенгликка қўйсак:

$$T = T_a' = T_a'' = \frac{P \cdot l}{2h}$$

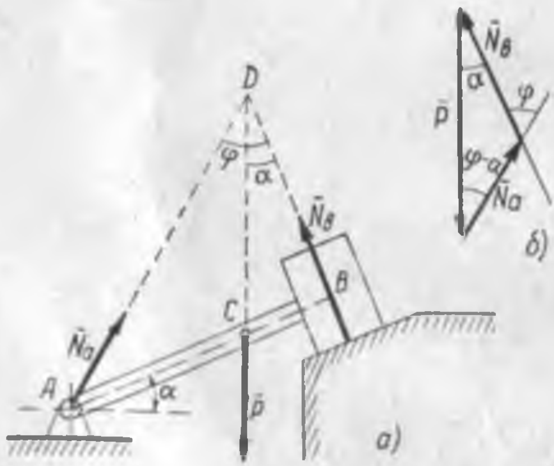
бўлади.




44- шакл.

Бундан кўрамизки, $A$ нуқтанинг пасайиши қанча кичик булса, арқондаги зуриқиш шунча катта бўлади.

Агар $\alpha = 5°$ бўлса, $\sin 5° = 0{,}1$; $T = 5P$ бўлади.




45- шакл.

**4- масала.** Оғирлиги $P = 1m$ бўлган болға дастасининг учи шарнирга маҳкамланган. Болғанинг оғирлиги дастасининг $A$ учидан $^3/_4$ узунликда ётувчи $C$ нуқтага қўйилган. Даста горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил этади. $A$ ва $B$ нуқталарда ҳосил бўладиган реакциялар топилсин (45- шакл, $a$).

Ечиш. Қўйилган $P$ кучнинг катталиги ва йўналиши ҳамда $B$ нуқта $N_b$ реакциясининг йўналиши маълум.

$A$ шарнирдаги $\overline{N}_a$ реакциянинг йўналишини аниқлаш учун $\overline{P}$ билан $\overline{N}_b$ кесишган $D$ нуқтани топамиз. Шу $D$ нуқтани $\overline{N}_a$ ҳам кесиб ўтиши керак.

Мувозанатда бўлган, бир нуқтада кесишувчи бу учта куч учун кучлар учбурчагини ясаймиз (45- шакл, *б*).

$\overline{N}_a$ ва $\overline{N}_b$ реакциялар ўртасидаги бурчакни $\varphi$ деб, синуслар теоремасини қўллаб, қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{N_a}{\sin\alpha} = \frac{N_b}{\sin(\varphi-\alpha)} = \frac{P}{\sin\varphi}. \qquad \text{(a)}$$

$\varphi$ бурчакни аниқлаш учун $\triangle BCD$ га эътибор қиламиз. Бу учбурчакдан $BD = BC\operatorname{ctg}\alpha$ ни топамиз. Сўнгра $\triangle ABD$ дан:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC\operatorname{ctg}\alpha} = 4\operatorname{tg}\alpha = 4\frac{\sqrt{3}}{3} = 2{,}31$$

келиб чиқади.

$\operatorname{tg}\varphi$ орқали $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ ни топиш қийин эмас:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = 0{,}917, \qquad \varphi \approx 66^\circ$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = 0{,}397.$$

Тенглама (а) дан:

$$N_a = \frac{P\sin\alpha}{\sin\varphi} = 0{,}545\,m$$

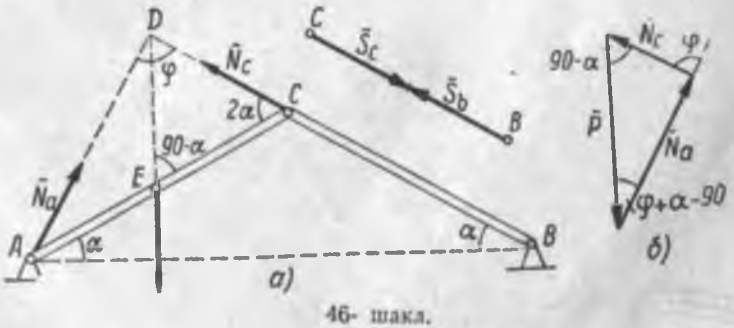
ҳамда

$$N_b = \frac{P\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi} = P(\cos\alpha - \operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha) = 0{,}65m$$

бўлади.

**5- масала.** 46- шакл, *а* да кўрсатилган $AC$ ва $CB$ шарнирли стерженларнинг узунлиги тенг бўлиб, горизонт билан $\alpha$ бурчак ташкил қилади. Стерженлардан бирининг ўртасига $P = 2m$ юк қўйилган. Стержень системасининг огирлиги эътиборга олинмай, таянч реакциялари топилсин.

Ечиш. Аввал юк қўйилмаган $BC$ стерженнинг мувозанатини текширамиз. Бу стерженга бир-бирига тенг ва қарама-қарши йўналган сиқувчи




46- шакл.

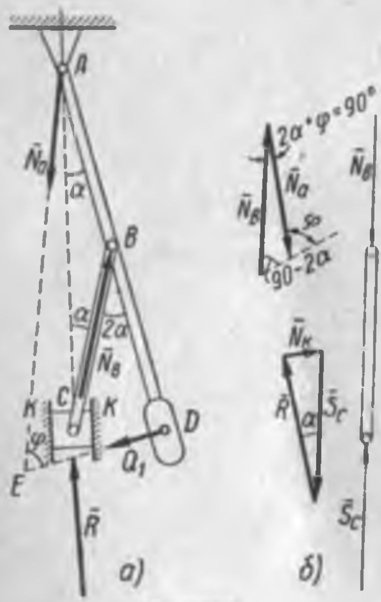
$\overline{S}_c$ ва $\overline{S}_b$ кучлар таъсир қилади. $AC$ стерженнинг $C$ нуқтасига кўрсатган $\overline{N}_c$ таъсири стержень бўйича йўналиб, сон жиҳатдан $\overline{S}_c$ га тенгдир. $\overline{N}$ билан $\overline{P}$ кучларнинг таъсир чизиқлари кесишган нуқтасини аниқлаб, $A$ нуқта реакциясининг йўналишини топамиз. Куч учбурчагини тузиб (46- шакл, *б*) синуслар теоремасини ёзамиз:

$$\frac{N_a}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{N_c}{\sin(\varphi + \alpha - 90^\circ)} = \frac{P}{\sin(180^\circ - \varphi)}$$

ёки

$$\frac{N_a}{\cos\alpha} = \frac{N_c}{\cos(\alpha + \varphi)} = \frac{P}{\sin\varphi}. \qquad (a)$$

$\varphi$ бурчакни аниқлаш учун $\triangle CAD$ га эътибор қиламиз. $\triangle DCE$ тенг ёнли бўлгани учун, $DC = \frac{1}{2}AC$ бўлади.





47- шакл.

$\triangle CAD$ дан:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{\sin(\varphi + 2\alpha)}{\sin\varphi}.$$

Демак:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\frac{1}{2} - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

$\alpha = 30^\circ$ бўлгани учун (а) тенгламадан: $\operatorname{ctg}\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$.

Бундан:

$$\frac{N_a}{\sin 60^\circ} = \frac{N_c}{\sin 30^\circ} = P.$$

$$N_c = P\sin 30^\circ = 1 m,$$
$$N_a = P\sin 60^\circ = 1{,}73\ m$$

бўлади.

**6- масала.** Пресс поршенининг қаршилиги $R = 100$ *кг* (47- шакл, *а*). Шу қаршиликни енгиш учун пресс поршени $AD$ дастасининг $D$ учига қўйилган $Q_1$ куч топилсин:

$$AB = BC = \frac{1}{2}AD; \ \alpha = 15^\circ.$$

Ечиш. Олдин $R$ қаршилик кучи қийматидан фойдаланиб, шарнирли $CB$ стержендаги зўриқишни топамиз. Бунинг учун поршеннинг мувозанатини текширамиз: унга $\overline{R}$ ва $BC$ стерженнинг сиқувчи $\overline{S}_c$ кучидан бошқа $KK$ цилиндр деворининг $\overline{N}_k$ реакцияси қўйилган. Бу реакция, ишқаланишни эътиборга олсак, $KK$ цилиндр деворига тик йўналган. Бу кучлар $C$ нуқтада кесишади. Уларга ясалган кучлар учбурчагидан $S_c = \frac{R}{\cos\alpha}$ ни оламиз. Биз бу ерда $BC$ нинг реакциясини топдик. $BC$ нинг мувозанат шартидан $B$ нуқтадаги реакцияни топамиз:

$$S_c = N_b = \frac{R}{\cos\alpha} = 103{,}5\ кг.$$

Бу реакция билан $D$ ласта учига қўйилган $Q$ куч таъсир чизигининг кесишган $E$ нуқтасидан $A$ нуқта $N_a$ реакциясининг таъсир чизиги ўтиши керак. Ундан $N_a$ нинг йўналишини топиб, кучлар учбурчагини ясаймиз (47- шакл, *б*) ва синуслар теоремасини ёзамиз:

$$\frac{Q}{-\cos(2\alpha+\varphi)} = \frac{N_b}{\sin\varphi} = \frac{N_a}{\cos 2\alpha}. \tag{a}$$

Бундан $Q$ ва $N_a$ ни топамиз:

$$Q = -S_c\frac{\cos(2\alpha+\varphi)}{\sin\varphi} = -R\frac{\cos(2\alpha+\varphi)}{\sin\varphi\cos\alpha},$$

$$N_a = S_c\frac{\cos 2\alpha}{\sin\varphi}.$$

$\angle AED = \varphi$ ни топиш учун, $\triangle AED$ ва $\triangle BDE$ га эътибор қиламиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD}{ED} = \frac{AD}{BD\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{3}{2\operatorname{tg}2\alpha}.$$

$\alpha = 15^\circ$ бўлса, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}6$; $\sin\varphi = 0{,}934$.

Демак: $P = 17{,}3$ *кг*; $N_a = 96$ *кг*.

IV БОБ

# БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР

Жисмга қўйилган кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишса, бундай кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси ёки кесишувчи кучлар системаси дейилади.

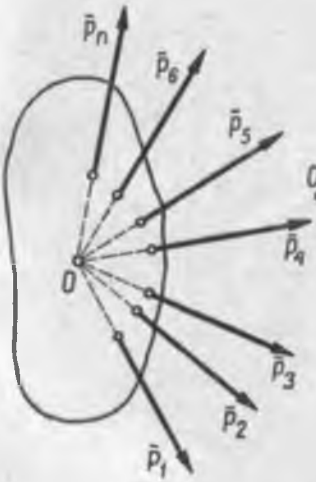
Кесишувчи кучларнинг таъсир чизиқлари фазода жойлашган бўлса, бундай система фазовий кесишувчи кучлар системаси дейилади.

Кесишувчи кучларнинг таъсир чизиқлари битта текисликда ётса, бундай система бир текисликда ётган кесишувчи кучлар системаси ёки текис кесишувчи кучлар системаси деб аталади.

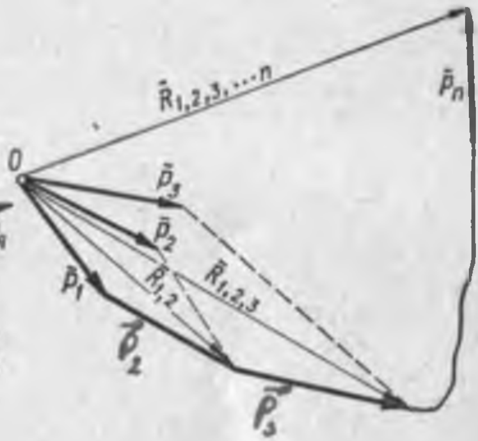
## 21- §. Бир нуқтада кесишувчи кучларни геометрик қўшиш

Жисмга таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, . . . , $\overline{P}_n$ кучлар қўйилган, деб фараз қилайлик (48- шакл). Шу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш керак. Олдин уларни таъсир чизиғи бўйлаб кесишган $O$ нуқтага кўчирамиз. У ҳолда бир нуқтага қўйилган $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, . . . , $\overline{P}_n$ кучларни оламиз. Энди, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}$ ни аниқлаймиз. Тенг таъсир этувчини параллелограмм қоидасидан фойдаланиб топамиз. Бунинг учун олдин $\overline{P}_1$ билан $\overline{P}_2$ кучларни қўшамиз. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}_{1,2}$ бўлсин. Сўнгра, $\overline{R}_{1,2}$ билан $\overline{P}_3$ ни қўшамиз, уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}_{1,2,3}$ бўлсин; шу тартибда қўшиб, қолган кучларнинг ҳам тенг таъсир этувчиларини топамиз. Кучлардан қурилган кўпбурчак *куч кўпбурчаги* дейилади. 49- шаклдан кўриниб турибдики, бир нуқтада кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларга ясалган кўпбурчакнинг ёпувчисига тенг экан. Бу ёпувчи тузувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига, яъни вектор йиғиндисига тенг:

$$(\overline{P}_1, \overline{P}_2) \backsim \overline{R}_{1,2},$$
$$(\overline{R}_{1,2}, \overline{P}_3) \backsim (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3) \backsim \overline{R}_{1,2,3},$$
$$(\overline{R}_{1,2,3}, \overline{P}_4) \backsim (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4) \backsim \overline{R}_{1,2,3,4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\overline{R}_{1,2,3,\ldots,n-1}, \overline{R}_n) \backsim (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n) \backsim \overline{R}_{1,2,3,\ldots,n}.$$




48- шакл.




49- шакл.

Биз бу $n$ та кучлар тенг таъсир этувчисининг геометрик йиғиндисини, юқорида айтиб ўтилган параллелограмм аксиомасига биноан, қуйидагича ёзамиз:

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{R}_{1,2},$$
$$\overline{R}_{1,2} + \overline{P}_3 = \overline{R}_{1,2,3} \text{ ёки } \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = \overline{R}_{1,2,3},$$
$$\overline{R}_{1,2,3} + \overline{P}_4 = \overline{R}_{1,2,3,4} \text{ ёки } \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}_4 = \overline{R}_{1,2,3,4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{R}_{1,2,3,\ldots,n-1} + \overline{P}_n = \overline{R}_{1,2,\ldots,n} \text{ ёки } \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_n =$$
$$= \overline{R}_{1,2,3,\ldots,n}.$$

# IV БОБ БИР НУҚТАДА КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР

Жисмга қўйилган кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишса, бундай кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси ёки кесишувчи кучлар системаси дейилади.

Кесишувчи кучларнинг таъсир чизиқлари фазода жойлашган бўлса, бундай система фазовий кесишувчи кучлар системаси дейилади.

Кесишувчи кучларнинг таъсир чизиқлари битта текисликда ётса, бундай система бир текисликда ётган кесишувчи кучлар системаси ёки текис кесишувчи кучлар системаси деб аталади.

## 21- §. Бир нуқтада кесишувчи кучларни геометрик қўшиш

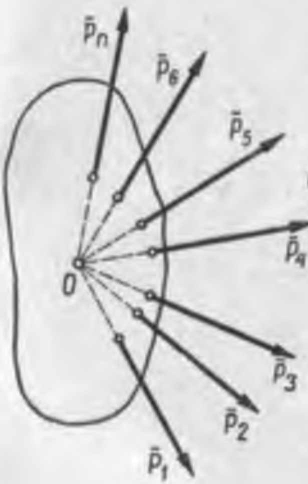
Жисмга таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишувчи $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, . . . , $\overline{P}_n$ кучлар қўйилган, деб фараз қилайлик (48- шакл). Шу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш керак. Олдин уларни таъсир чизиғи бўйлаб кесишган $O$ нуқтага кўчирамиз. У ҳолда бир нуқтага қўйилган $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, . . . , $\overline{P}_n$ кучларни оламиз. Энди, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}$ ни аниқлаймиз. Тенг таъсир этувчини параллелограмм қоидасидан фойдаланиб топамиз. Бунинг учун олдин $\overline{P}_1$ билан $\overline{P}_2$ кучларни қўшамиз. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}_{1,2}$ бўлсин. Сўнгра, $\overline{R}_{1,2}$ билан $\overline{P}_3$ ни қўшамиз, уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}_{1,2,3}$ бўлсин; шу тартибда қўшиб, қолган кучларнинг ҳам тенг таъсир этувчиларини топамиз. Кучлардан қурилган кўпбурчак *куч кўпбурчаги* дейилади. 49- шаклдан кўриниб турибдики, бир нуқтада кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларга ясалган кўпбурчакнинг ёпувчисига тенг экан. Бу ёпувчи тузувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига, яъни вектор йиғиндисига тенг:

$$(\overline{P}_1,\ \overline{P}_2) \backsim \overline{R}_{1,2},$$
$$(\overline{R}_{1,2},\ \overline{P}_3) \backsim (\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3) \backsim \overline{R}_{1,2,3},$$
$$(\overline{R}_{1,2,3},\ \overline{P}_4) \backsim (\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3,\ \overline{P}_4) \backsim \overline{R}_{1,2,3,4},$$

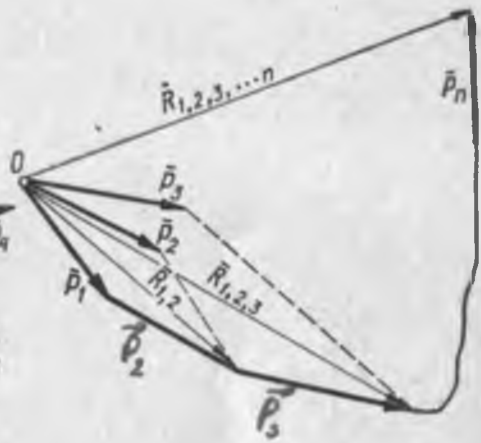
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(\overline{R}_{1,2,3,\ldots,n-1},\ \overline{R}_n) \backsim (\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3,\ \ldots,\ \overline{P}_n) \backsim \overline{R}_{1,2,3,\ldots,n}.$$




48- шакл.




49- шакл.

Биз бу $n$ та кучлар тенг таъсир этувчисининг геометрик йиғиндисини, юқорида айтиб ўтилган параллелограмм аксиомасига биноан, қуйидагича ёзамиз:

$$\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{R}_{1,2},$$
$$\overline{R}_{1,2} + \overline{P}_3 = \overline{R}_{1,2,3} \text{ ёки } \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = \overline{R}_{1,2,3},$$
$$\overline{R}_{1,2,3} + \overline{P}_4 = \overline{R}_{1,2,3,4} \text{ ёки } \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{P}_4 = \overline{R}_{1,2,3,4},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\overline{R}_{1,2,3,\ldots,n-1} + \overline{P}_n = \overline{R}_{1,2,\ldots,n} \text{ ёки } \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_n = $$
$$= \overline{R}_{1,2,3,\ldots,n}.$$

Буларни умуман тубандагича ёзишимиз мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = \overline{R}_{1,2,\ldots,n} = \overline{R}. \qquad (21.\ 1)$$

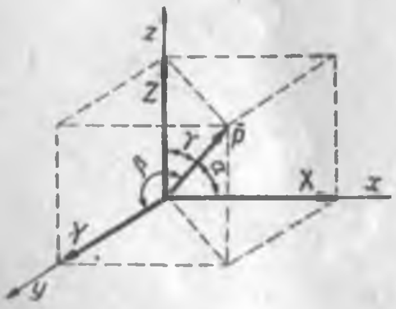
Демак, *бир нуқтада кесишувчи бир қанча кучларнинг тенг таъсир этувчиси шу нуқтадан ўтиб, бу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.* Кучларни геометрик қўшиш натижасида куч кўпбурчаги ёпилиб қолса, бу ҳолда тенг таъсир этувчи нулга тенг бўлиб, кучлар мувозанатлашади. Бу кучлар таъсиридаги жисм мувозанатда бўлиб, (21. 1) тенгламанинг ўнг томони нулга тенглашади. Бу эса мувозанат шартини ифодалайди:

$$\overline{R} = 0 \text{ ёки } \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = 0. \qquad (21.\ 1)$$

Демак, *бир нуқтани кесиб ўтувчи кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанатда бўлиши учун, у кучларга қурилган кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлиб, тенг таъсир этувчи нулга тенг бўлиши керак. Бу, мувозанатнинг етарли ва зарур шартидир.*

## 22- §. Тенг таъсир этувчини аналитик усулда аниқлаш

Энди, тенг таъсир этувчининг катталигини ва йўналишини аналитик йўл билан аниқлаймиз. Бунинг учун, векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш усулларидан фойдаланамиз.




50- шакл.

Бирор векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини топиш учун, бу векторнинг бошидан координата ўқларига параллел ўқлар ўтказиш ёки координата бошини векторнинг бошига жойлаштириш мумкинлиги векторлар алгебрасидан (11- § га қаранг) маълум (50- шакл).

$\overline{P}$ векторнинг $ox$, $oy$ ва $oz$ ўқларидаги проекцияларини $X$, $Y$ ва $Z$ билан белгилаймиз. 50 шаклдан $\overline{P}$ вектор ўзининг координата ўқларидаги проекцияларига қурилган параллелепипеднинг диагонали экани кўриниб турибди. Параллелепипед диагоналининг квадрати унинг учта тузувчи томонлари квадратларининг йиғиндисига тенглиги маълум:

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \qquad (22.\ 1)$$

$\overline{P}$ векторнинг $ox$, $oy$ ва $oz$ координата ўқларн билан тузган бурчакларини $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ десак (50- шакл), бу векторнинг $X$, $Y$, $Z$ проекциялари учун қуйидаги формулани ёзамиз:

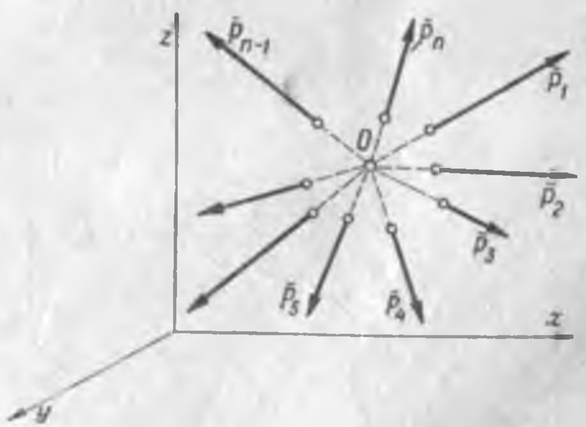
$$X = P\cos\alpha,$$
$$Y = P\cos\beta, \qquad (22.\ 2)$$
$$Z = P\cos\gamma.$$

(22. 1) ва (22. 2) формулаларга асосланиб, векторнинг йўналтирувчи косинуслари учун қуйидаги формулаларни ёзишимиз мумкин:

$$\cos\alpha = \frac{X}{P},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{P}, \qquad (22.\ 3)$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{P}.$$

Бир векторнинг уч проекцияси маълум бўлса, (22. 1) дан бу векторнинг катталигини ва (22. 3) дан унинг йўналишини топишимиз мумкин; аксинча, бирор векторнинг йўналиши ҳамда катталиги маълум бўлса, (22. 2) дан фойдаланиб, унинг координата ўқларидаги проекцияларини топа оламиз.

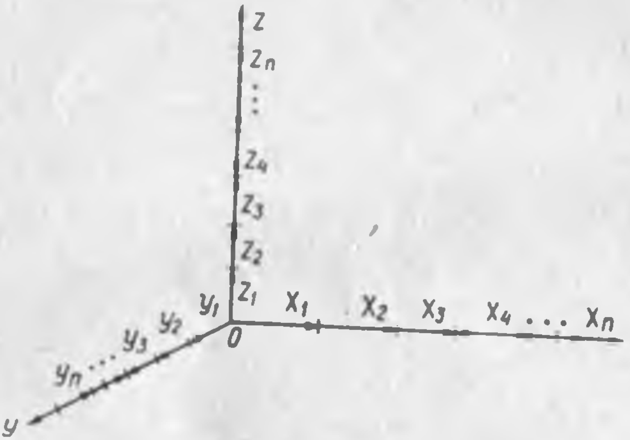
Жисмга қўйилган, бир нуқтада кесишувчи $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, ... , $\overline{P_n}$ кучларнинг $Ox$, $Oy$ ва $Oz$ ўқларидаги проекцияларини оламиз (51- шакл). Бу кучларнинг $Ox$, $Oy$ ва $Oz$ ўқларидаги проекциялари тегишлича $X_1$, $X_2$, $X_3$, . . . , $X_n$; $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, . . . , $Y_n$ ва $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$,. . . , $Z_n$ бўлсин, у ҳолда бу проекцияларни схематик равишда 52- шаклдагича тасвирлаш мумкин.




51- шакл.

Ҳар қайси $P_i$ куч координата ўқларидаги унга эквивалент бўлган $X_i, Y_i, Z_i$ проекцияла́ри билан алмаштирилса, юқорида берилган $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n$ кучлар ўрнига уларга эквивалент бўлган уч группа ўзаро тик кучлар ҳосил бўлади; улар:

$$\left.\begin{matrix}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)\\(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)\\(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n)\end{matrix}\right\} \backsim (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n).$$




52- шакл.

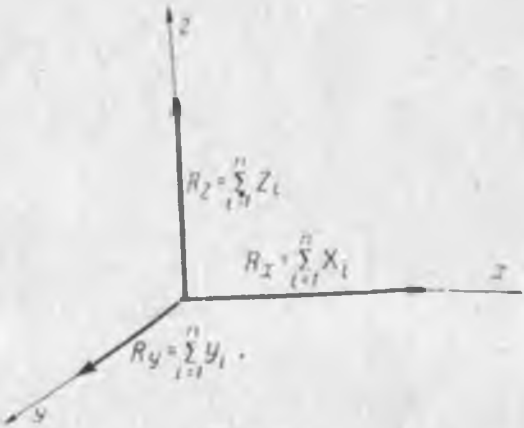
Ана шу кучлар группаларининг ҳар қайсиси бир йўналишда бўлгани учун, уларнинг тенг таъсир этувчилари кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Бу ҳар қайси группа кучларининг тенг таъсир этувчисини тегишлича $R_x$, $R_y$ ва $R_z$ десак, улар учун қуйидаги формулани ёза оламиз:

$$\left.\begin{aligned}X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i = R_x,\\Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = R_y,\\Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = R_z.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Бу уч группа кучларнинг геометрик тасвири 53- шаклда кўрсатилган. Шундай қилиб, $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n$ кучларни уларга эквивалент бўлган ва ўзаро тик йўналган учта $R_x$, $R_y$, $R_z$ кучларга келтирдик.

Демак, $(\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}, \ldots, \overline{P_n}) \backsim (\overline{R_x}, \overline{R_y}, \overline{R_z})$. Бу уч кучнинг тенг таъсир этувчиси, (22. 1) формулага биноан, шу кучларга қурилган параллелепипеднинг диагоналига тенг:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2.$$




53- шакл.

$R_x$, $R_y$, $R_z$ нинг қийматларини (а) дан келтириб қўйсак, бундай кўринишда ёзилади:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2}. \qquad (22.\ 4)$$

Бу формуладан фойдаланиб, тенг таъсир этувчининг абсолют қийматини топамиз. Унинг $Ox$, $Oy$, $Oz$ ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ бўлсин. Бу бурчакларнинг косинуслари тенг таъсир этувчининг йўналишини аниқлайди. (22. 3) дан фойдаланиб, йўналтирувчи косинуслар учун қуйидаги формулаларни ёзамиз:

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{R}; \quad \cos\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{R}. \qquad (22.\ 5)$$

Бир текисликда ётувчи кучлар учун $x$, $y$ ўқларни шу текисликда олиб, (22. 4) ва (22. 5) формулаларни қуйидагича ёзамиз:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}. \qquad (22.\ 6)$$

$\beta = 90 - \alpha$ бўлгани учун:

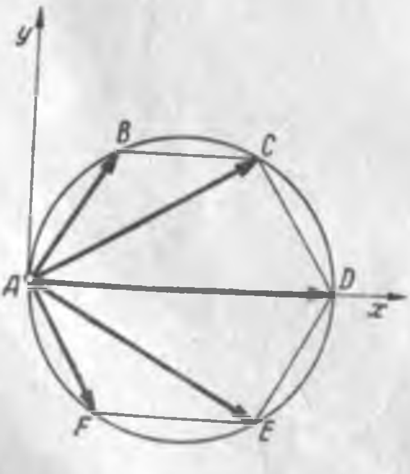
$$\cos\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{R}; \quad \sin\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{R} \qquad (22.\ 7)$$

бўлади.

Тенг таъсир этувчининг катталик ва йўналишини (22. 4) ва (22. 5) дан ҳисоблаб топиш учун, олдин унинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш зарур. Координата ўқларининг йўналиши мувофиқ суратда танлангандан кейин, куч проекцияларини қуйидаги схемада аниқлаш масалани анча осонлаштиради.

**Куч проекцияларини топиш схемаси**

| Кучлар / Координата ўқлари | $P_1$ | $P_2$ | $P_i$ | Проекциялар йиғиндиси |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $P_1\cos(\widehat{\overline{P}_1, x})$ | $P_2\cos(\widehat{\overline{P}_2, x})$ | $P_i\cos(\widehat{\overline{P}_i, x})$ | $\sum_{i=1}^{n} P_i\cos(\widehat{\overline{P}_i, x})$ |
| $y$ | $P_1\cos(\widehat{\overline{P}_1, y})$ | $P_2\cos(\widehat{\overline{P}_2, y})$ | $P_i\cos(\widehat{\overline{P}_i, y})$ | $\sum_{i=1}^{n} P_i\cos(\widehat{\overline{P}_i, y})$ |
| $z$ | $P_1\cos(\widehat{\overline{P}_1, z})$ | $P_2\cos(\widehat{\overline{P}_2, z})$ | $P_i\cos(\widehat{\overline{P}_i, z})$ | $\sum_{i=1}^{n} P_i\cos(\widehat{\overline{P}_i, z})$ |




54- шакл.

Бу айтилганларни ойдинлаштириш учун битта масала ечамиз.

**7- масала.** Мунтазам $ABCDEF$ олтибурчакнинг $A$ учига қўйилган ҳамда $AB$, $AC$, $AD$, $AE$ ва $AF$ кесмалар билан тасвирланган бешта кучнинг тенг таъсир этувчиси топилсин (54- шакл).

Ечиш. Координата ўқларини шаклда тасвирланганча танлаб, куч проекцияларини юқоридаги схемага қўямиз.

| Кучлар / Координата ўқлари | $AB$ | $AC$ | $AD$ | $AE$ | $AF$ | Проекциялар йиғиндиси |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $AB\cos 60^\circ$ | $AC\cos 30^\circ$ | $AD$ | $AE\cos 30^\circ$ | $AF\cos 60^\circ$ | $\sum\limits_{i=1}^{5} X$ |
| $y$ | $AB\sin 60^\circ$ | $AC\sin 30^\circ$ | 0 | $-AE\sin 30^\circ$ | $-AF\sin 60^\circ$ | $\sum\limits_{i=1}^{5} Y$ |
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\sum\limits_{i=1}^{5} Z$ |

$$AF = AB = r; \quad AC = r\sqrt{3}; \quad AD = 2r; \quad AE = r\sqrt{3}$$

булгани учун:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = AB\cos 60^\circ + AC\cos 30^\circ + AD + AE\cos 30^\circ + AF\cos 60^\circ = 6r,$$

$$\sum_{i=1}^{5} Y_i = AB\sin 60^\circ + AC\sin 30^\circ - AE\sin 30^\circ - AF\sin 60^\circ = 0$$

булади. Булардан:

$$R = 6r,$$

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma X}{R} = \frac{6r}{6r} = 1, \quad \sin\alpha = 0.$$

Демак, $\overline{R}$ кучи $x$ ўқи буйича йўналган экан.

## 23- §. Бир нуқтада кесишувчи бир қанча куч таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанат шартлари

Юқорида бир нуқтада кесишувчи кучлар таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанат шартини (21. 2) билан ифодалаган эдик. Энди, шу шартни кучларнинг проекциялари орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (22. 4) даги $R$ нинг ўрнига нуль қўямиз:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2} = 0$$

ёки

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2=0.$$

Уч мусбат ҳаддан иборат йиғинди нулга тенг бўлиши учун ҳар бир қавс ичидаги ифода алоҳида равишда нулга тенг бўлиши керак:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i=0; \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i=0. \qquad (23.1)$$

Демак, бир нуқтада кесишувчи кучлар таъсиридан жисм мувозанатда бўлсин учун, шу кучларнинг ҳар бир координата ўқидаги проекциялари йиғиндиси нулга тенг бўлиши керак. Бу (23. 1) тенгламалар кесишувчи кучлар таъсирндагн жисмнинг **мувозанат тенгламалари** дейилади. Бир нуқтада кесишувчи кучлар бир текисликда ётса, $Ox$ ва $Oy$ ўқларини шу текисликда олиб, айнан нулга тенг бўлган учинчи қисми эътиборга олинмаслиги натижасида (23. 1) қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i=0; \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i=0. \qquad (23.2)$$

Мувозанатдаги жисм эркин булмай, қандайдир боғланишда бўлса, унинг реакцияларини эътиборга олиш лозим. Кўпинча, статикада эрксиз жисм қўйилган юклар таъсиридан мувозанатда турадиган ҳоллар текширилади.

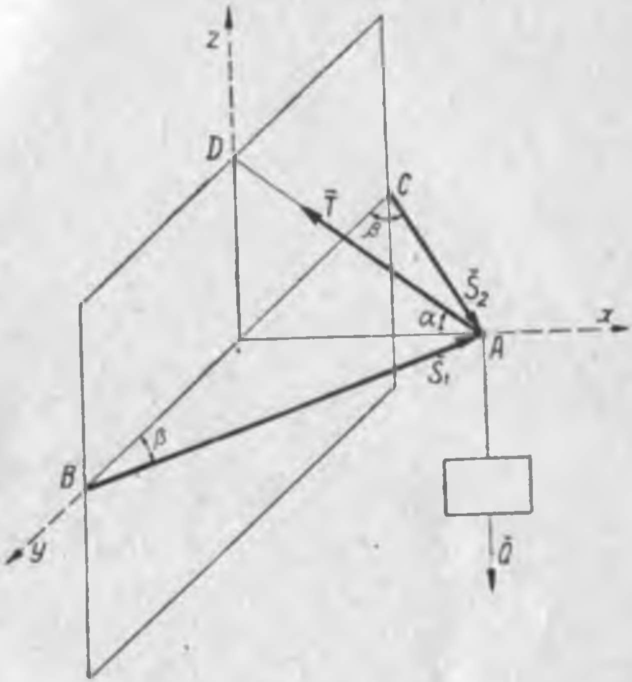
Демак, бундай ҳолларда боғланиш реакциялари қўйилган юклар билан мувозанатлашади. Жисмга бевосита қўйилган юклар ва боғланиш реакциялари бир нуқтада кесишиб ўтса, номаълум реакцияларни аниқлаш учун 23- параграфда чиқарилган мувозанатнинг геометрик шартидан ёки бу параграфда чиқарилган (23. 1) мувозанат тенгламаларидан фойдаланиш лозим. Геометрик шартдан фойдаланилганда, график равишда ёпиқ куч кўпбурчаги қурилади. Мувозанатнинг график шартидан, график статикада кўпроқ фойдаланилади.

**8- масала.** $Q = 80$ *кг* юкни тутиб турувчи $AB$, $AC$ стерженлардаги ва $AD$ занжиридаги зўриқишлар топилсин. $A$, $B$ ва $C$ нуқталар шарнирли бириктирилган (55- шакл).

Берилишича:

$$\angle CBA = \angle BCA = \beta = 60^\circ,$$
$$\angle EAD = \alpha = 30^\circ.$$

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек йўналтириб, $A$ нуқтага қўйилган кучлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:



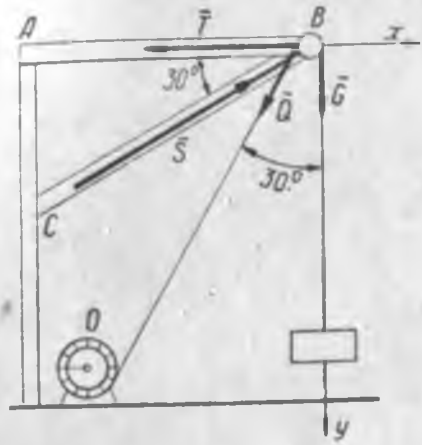

55- шакл.

| Кучлар / Координата ўқлари | $\overline{Q}$ | $\overline{S_1}$ | $\overline{S_2}$ | $\overline{T}$ | Мувозанат тенгламалари |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $S_1 \sin\beta$ | $S_2 \sin\beta$ | $-T\cos\alpha$ | $\sum X = S_1 \sin\beta + S_2 \sin\beta - T\cos\alpha = 0$ |
| $y$ | 0 | $-S_1\cos\beta$ | $S_2\cos\beta$ | 0 | $\sum Y = S_2\cos\beta - S_1\cos\beta = 0$ |
| $z$ | $-Q$ | 0 | 0 | $T\sin\alpha$ | $\sum Z = T\sin\alpha - Q = 0$ |

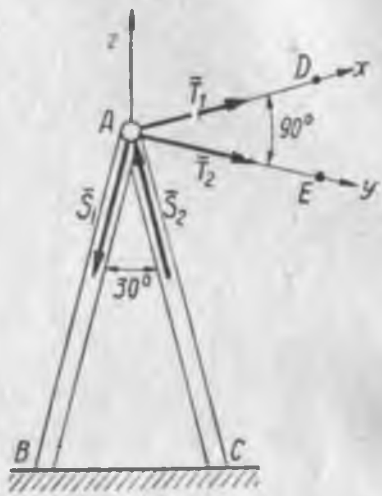
Схеманинг охирги мувозанат тенгламаларидан $S_1$, $S_2$ ва $T$ нинг қийматларини топамиз:

$$S_1 = S_2 = \frac{Q\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\sin\beta}; \qquad T = \frac{Q}{\sin\alpha}.$$

**9- масала.** $B$ қўзғалмас галтакдан ўтказилган $G = 2\ m$ оғирликдаги юк $O$ чиғириққа ўралган арқон воситаси билан кўтарилади. Ғалтакда пайдо бўладиган ишқаланишни эътиборга олмай (56- шакл), $AB$ тўсиндаги ва $BC$ тиргакдаги $T$ ва $S$ зўриқиш топилсин. Бурчакларнинг қиймати шаклда кўрсатилган.




56- шакл.




57- шакл.

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилганча танлаб, куч проекцияларини яна юқорида келтирилган схема ёрдами билан топамиз:

| Кучлар / Координата ўқлари | $\overline{G}$ | $\overline{Q}$ | $\overline{T}$ | $\overline{S}$ | Мувозанат тенгламалари |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $-Q\cos 60°$ | $-T$ | $S\cos 30°$ | $\sum X = S\cos 30° - T - Q\cos 60° = 0$ |
| $y$ | $G$ | $Q\cos 30°$ | 0 | $-S\cos 60°$ | $\sum Y = G + Q\cos 30° - S\cos 60° = 0$ |

$$Q = G.$$

Бу мувозанат тенгламаларидан:

$$S = 7{,}45\ m,\ T = 5{,}45\ m.$$

**10- масала.** Симёғоч учлари бир-бирига бириктирилган икки $AB$ ва $AC$ устунлардан тузилган. Бунда $\angle BAC = 30°$ (57- шакл). Бу симёғоч бир-бири билан тўғри бурчак ташкил этадиган горизонтал $AD$ ва $AE$ симларни ушлаб туради. Ҳар бир симнинг тортиш кучи 100 $\kappa\Gamma$ га тенг.

Устунларнинг оғирлигини ҳисобга олмай, $ABC$ текислик $\angle DAE$ ни тенг иккига бўлади, деб фараз қилиб, устунлардаги зўриқишни топинг.

Ечиш. Симларнинг тортилиши тегишлича $T_1$, $T_2$; устунлардаги зўриқиш эса $S_1$ ва $S_2$ дейилса, уларнинг қийматлари қуйидаги схемадан топилади:

| Кучлар / Координата ўқлари | $\overline{T}_1$ | $\overline{T}_2$ | $\overline{S}_1$ | $\overline{S}_2$ | Мувозанат тенгламалари |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $T_1$ | 0 | $-S_1\cos 75^\circ\times$ $\times\cos 45^\circ$ | $-S_2\cos 75^\circ\times$ $\times\cos 45^\circ$ | $\sum X = T_1 -$ $- S_1\cos 75^\circ\cdot\cos 45^\circ -$ $- S_2\cos 75^\circ\cdot\cos 45^\circ = 0$ |
| $y$ | 0 | $T_2$ | $-S_1\cos 75^\circ\times$ $\times\sin 45^\circ$ | $S_2\cos 75^\circ\times$ $\times\sin 45^\circ$ | $\sum Y = T_2 - S_1\cos 75^\circ\times$ $\times\sin 45^\circ - S_2\cos 75^\circ\times$ $\times\sin 45^\circ = 0$ |
| $z$ | 0 | 0 | $-S_1\cos 15^\circ$ | $S_2\cos 15^\circ$ | $\sum Z = - S_1\cos 15^\circ +$ $+ S_2\cos 15^\circ = 0$ |

Мувозанат тенгламаларининг учинчи қисмидан $S_1 = S_2$ келиб чиқади. Қолган икки тенгламанинг биридан $S_1$ ни топамиз:

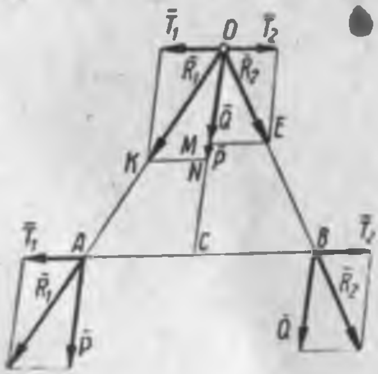
$$S_1 = - S_2 = \frac{100}{2\cos 75^\circ\cdot\sin 45^\circ} = 100(1+\sqrt{3}) = 273\ кг.$$

V БОБ

# ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР

## 24- §. Бир томонга йўналган икки параллел кучни қўшиш

Жисмнинг *A* ва *B* нуқталарига бир томонга йўналган икки параллел $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлар қўйилган (58- шаклда жисмнинг расми кўрсатилмаган). Шу кучлар тенг таъсир этувчисининг миқдори, йўналиши ва қўйилган нуқтасини топиш керак.




58- шакл.

Бу икки куч қўйилган *A* ва *B* нуқталарни туташтириб, *A* ва *B* нуқталарга *AB* чизиқ бўйлаб йўналган нуль система кучларни қуямиз. Улар ($\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$) $\backsim$ 0 бўлсин.

*A* нуқтадаги ($\overline{T}_1$, $\overline{P}$) ва *B* нуқтадаги ($\overline{T}_2$, $\overline{Q}$) кучларни параллелограмм қоидаси асосида қўшиб, уларнинг $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ тенг таъсир этувчиларини топамиз. Бу *A* ва *B* нуқталарга қўйилган $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ кучларнинг таъсир чизиқларининг то учрашгунларича давом эттирамиз. Таъсир чизиқларининг кесишган нуқтасини *O* деймиз. $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб *O* нуқтага кўчирамиз. Энди *O* нуқтадаги $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ кучларни тузувчиларга ажратамиз. $\overline{R}_1$ ва $\overline{R}_2$ нинг тузувчиларини шундай танлаймизки, уларнинг ҳар қайсиси тегишли тузувчилардан бири $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ га параллел ҳамда катталик жиҳатидан шу кучларга тенг бўлсин. Бунинг учун *O* нуқтадан $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ га параллел чизиқ ўтказамиз. *O* нуқтадаги $\overline{R}_1$ нинг бир тузувчиси $\overline{P}$ га тенг бўлганидан иккинчи тузувчиси, албатта, $\overline{T}_1$ га тенг бўлади, чунки $\overline{R}_1$ нинг ўз

$\overline{P}$ ва $\overline{T}_1$ кучларнинг йиғиндисидан ташкил топган эди. Худди шунингдек, $\overline{R}_2$ нинг тузувчиларидан бири $\overline{Q}$ бўлганидан иккинчиси $\overline{T}_2$ бўлиши керак. $O$ нуқтадаги ($\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$) кучлар нулга эквивалент бўлганликлари учун ташлаб юборсак, бу нуқтада фақат бир чизиқ устида ётувчи $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлар қолади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси уларнинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни:

$$P + Q = R \tag{24. 1}$$

ва $\overline{P}$ ҳам $\overline{Q}$ билан бир йўналишдадир.

Энди, $\overline{R}$ тенг таъсир этувчининг қуйилган нуқтасини топамиз. Бунинг учун $\overline{R}$ нинг таъсир чизиғи билан $AB$ кесманинг кесишган нуқтаси $C$ ни топамиз. Бу нуқта тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи ўтадиган нуқтадир.

Унинг ҳолатини $A$ ва $B$ нуқталарга нисбатан аниқлаймиз. Шаклдан курамизки:

$$\triangle OAC \backsim \triangle OKN;$$
$$\triangle OBC \backsim \triangle OEM.$$

Бу ўхшашликлардан қуйидаги нисбатларни оламиз:

$$\frac{AC}{KN} = \frac{OC}{ON}; \quad \frac{BC}{EM} = \frac{OC}{OM}$$

ёки

$$\frac{AC}{T_1} = \frac{OC}{P}; \quad \frac{BC}{T_2} = \frac{OC}{Q}.$$

Булардан:

$$AC \cdot P = T_1 \cdot OC,$$
$$BC \cdot Q = T_2 \cdot OC.$$

Аммо:

$$OC \cdot T_1 = OC \cdot T_2$$

бўлгани учун:

$$AC \cdot P = Q \cdot BC$$

келиб чиқади.

Шунга кўра:

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}. \tag{24. 2}$$

Демак, $P$ ва $Q$ кучлар $AC$ билан $BC$ га тескари пропорционал бўлар экан, яъни $P$ қанча катта булса, $AC$ шунча кичик, шунга ўхшаш $Q$ қанча кичик бўлса, $BC$ шунча катта бўлади. *Бир томонга йўналган икки параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенг булиб, йўналиши шу кучлар йўналишида,* *тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса P ва Q кучларнинг қўйилган нуқтасини туташтирувчи кесмани тегишлича шу кучларга тескари пропорционал қисмларга бўлиб ўтади.*

(24. 2) дан ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{Q}{AC} = \frac{P}{BC} = \frac{Q+P}{AC+BC} = \frac{R}{l}$$

ёки

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{l}. \qquad (24.\ 3)$$

Кесманинг қисмларини тенг таъсир этувчи орқали ифодалаймиз, унда:

$$AC = \frac{Q}{R} l; \quad BC = \frac{P}{R} l. \qquad (24.\ 4)$$

## 25- §. Тескари йўналган, катталиклари тенг бўлмаган икки параллел кучни қўшиш

Жисмга қўйилган $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлар параллел бўлиб, бирбирига тескари йўналган бўлсин (59- шакл). $P$ ни $Q$ дан катта деб фараз қилиб, уни икки тузувчига ажратамиз. Бу тузувчилардан бири $\overline{Q'}$ ни шундай танлаймизки, у, сон жиҳатидан, берилган $Q$ га тенг, лекин қарама-қарши томонга йўналган бўлиб, $B$ нуқтадан ўтсин. У вақтда иккинчи тузувчи $R = P - Q$ бўлиб, $AB$ нинг давомидаги бирор $C$ нуқтага қўйилади. Бу нуқтанинг ҳолати (24. 2) га биноан, қуйидаги пропорциядан аниқланади:


59- шакл.

$$\frac{Q}{P-Q} = \frac{AC}{AB}. \qquad (25.\ 1)$$

$P$ ва $Q$ кучлардан $B$ нуқтага қўйилган $(\overline{Q}, \overline{Q'}) \backsim 0$ бўлгани учун $C$ нуқтада $R$ кучгина қолади. Бу куч $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлади:

$$R = P - Q. \qquad (25.\ 2)$$

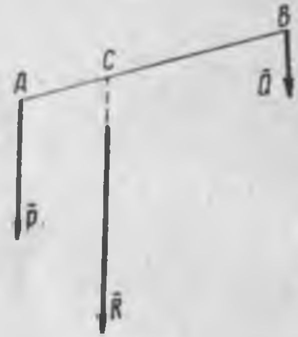
Булардан ташқари:

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{l}. \qquad (25.\ 3)$$

Демак, *бир-бирига тескари иккита параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси уларнинг айирмасига тенг ва йўналиши катта куч йўналишида бўлади. Тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса AB кесма устида катта куч қўйилган нуқта томонида ётиб, шу кесмани ташқи равишда кучларга тескари пропорционал қисмларга бўлади.*

## 26- §. Берилган кучни икки параллел тузувчига ажратиш

25- параграфда чиқарилган натижалардан фойдаланиб, берилган кучни икки параллел ва бир-бирига тескари параллел тузувчиларга ажратиш масаласини еча оламиз. $\bar{R}$ кучни $A$ ва $B$ нуқталарга қўйилган ва шу $\bar{R}$ кучга параллел бўлган тузувчиларга ажратамиз. Бунинг учун берилган $A$ ва $B$ нуқталарни туташтириб, $\bar{R}$ нинг таъсир чизиғини $AB$ кесма билан кесишган $C$ нуқтага келтирамиз (60- шакл). $A$ ва $B$ нуқталар берилгани учун $AC$ ва $BC$ кесмалар маълумдир. Уларни тегишлича $AC = p$ ва $BC = q$, изланаётган кучларни $P$ ва $Q$ десак, (24. 1) ва (24. 2) га биноан:




60- шакл.

$$R = P + Q; \quad \frac{P}{q} = \frac{Q}{p} = \frac{R}{l}$$

формулаларни ёзиш мумкин. Бу ерда $l = AB$.

Юқоридаги формуладан:

$$P = \frac{q}{l} R, \quad Q = \frac{p}{l} R \qquad (26.\ 1)$$

келиб чиқади.

$C$ нуқта $AB$ кесманинг орасида ётмасдан, ташқарисида бўлса, (25. 1) ва (25. 3) дан фойдаланилади.

Параллел кучларни ажратиш учун чиқарилган формулалар татбиқ этиладиган бир мисол келтирамиз.

**11- масала.** Узунлиги $AB = l = 6$ *м* бўлган балканинг чап таянчидан $a = 2$ *м* узоқликдаги $C$ нуқтага $P = 8$ *т* юк қўйилган. Балканинг учлари таянчга эркин тиралган. $A$ ва $B$ таянч реакциялари топилсин (61- шакл).

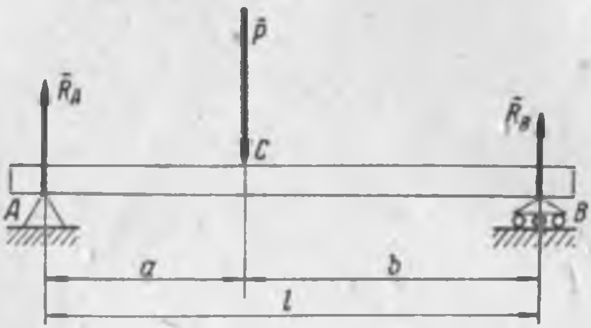
$A$ ва $B$ нуқталардаги аниқланаётган реакциялар $P$ кучнинг таянчларга кўрсатган босимларига тенг ва қарама-қарши йўналган. Шунинг учун (26. 1) дан фойдаланиб, уларнинг қийматларини бевосита топа оламиз:

$$R_A = \frac{b}{l} P; \; R_B = \frac{a}{l} P.$$

Энди, $P$ нинг қийматларини қўйсак:

$$R_A = \frac{16}{3}\,m;\quad R_B = \frac{8}{3}\,m$$

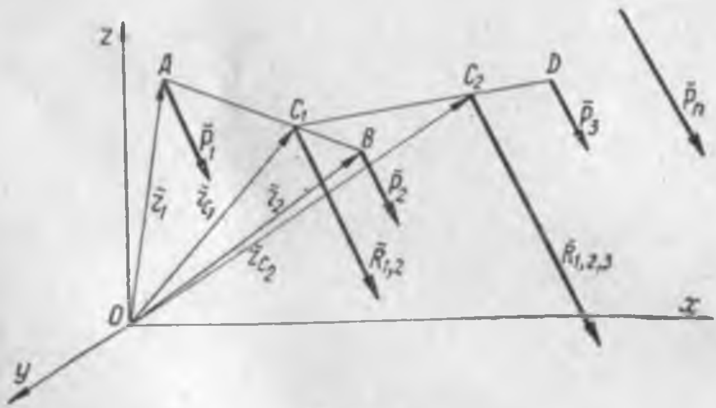
бўлади.




61- шакл.

## 27- §. Бир қанча параллел кучларни қўшиш

Масалан, бир қанча $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3, \ldots,$ $\overline{P}_n$ параллел кучлар берилган бўлиб, буларнинг қўйилган нуқталари




62- шакл.

$A$, $B$, $D$, . . . , $E$ бўлсин (62- шакл). Шу кучларнинг тенг таъсир этувчиси ва унинг қўйилган нуқтасини топиш керак.

Маълумки, фазода ҳар бир нуқтанинг ҳолати уч координата ёки бир радиус-вектор билан аниқланади. Шунга кура, $\overline{P}_1$ куч қуйилган нуқтани аниқловчи $\overline{r}_1$ радиус-вектор на $\overline{P}_2$ куч қуйилган нуқтани аниқловчи $\overline{r}_2$ радиус-вектор бўлсин. Олдин $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ кучлар тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқтани топамиз. Бунинг учун $A$ ва $B$ нуқталарни туташтирамиз. Бу икки кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта $C_1$ ва у нуқтани аниқловчи радиус-вектор $\overline{r}_{c_1}$ бўлсин. Шу нуқтани аниқловчи $\overline{r}_{c_1}$ радиус-векторни топиш керак.

(24. 3) га биноан:

$$\frac{P_1}{C_1B} = \frac{P_2}{AC_1}; \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{P_2}{P_1}. \tag{а}$$

Шаклдан:

$$\overline{AC_1} = \overline{r}_{c_1} - \overline{r}_1;$$
$$\overline{C_1B} = \overline{r}_2 - \overline{r}_{c_1}.$$

Бу қийматларни (а) га қўйсак:

$$\frac{\overline{r}_{c_1} - \overline{r}_1}{\overline{r}_2 - \overline{r}_{c_1}} = \frac{P_2}{P_1}$$

келиб чиқади. Бундан:

$$\overline{r}_{c_1} = \frac{P_1\overline{r}_1 + P_2\overline{r}_2}{P_1 + P_2} \tag{б}$$

бўлади.

$\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}_{1,2}$ бўлсин. У вақтда:

$$P_1 + P_2 = R_{1,2} \tag{в}$$

бўлади.

$\overline{R}_{1,2}$ ва $\overline{P}_3$ нинг тенг таъсир этувчиси $\overline{R}_{1,2,3}$ қўйилган $C_2$ нуқтани аниқловчи $\overline{r}_{c_2}$ радиус-векторни (б) га биноан тубандагича ёза оламиз:

$$\overline{r}_{c_2} = \frac{R_{1,2}\overline{r}_{c_1} + P_3\overline{r}_3}{R_{1,2} + P_3}; \quad R_{1,2} + P_3 = R_{1,2,3}.$$

$\overline{r}_{c_1}$ ва $R_{1,2}$ қийматларини (б) ва (в) дан бу формулага қўйиб, $r_{c_2}$ учун қуйидаги ифодани чиқарамиз:

$$\overline{r}_{c_2} = \frac{P_1\overline{r}_1 + P_2\overline{r}_2 + P_3\overline{r}_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Бу формулага мувофиқ, барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқтани аниқловчи радиус-вектор:

$$\overline{r}_c = \frac{P_1\overline{r}_1 + P_2\overline{r}_2 + P_3\overline{r}_3 + \ldots + P_n\overline{r}_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}$$

ёки

$$\overline{r}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i \overline{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}, \qquad (27.\ 1)$$

тенг таъсир этувчиси эса

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i \qquad (27.\ 2)$$

бўлади.

Агар $\overline{r}_c$ векторнинг $Ox$, $Oy$, $Oz$ ўқларидаги проекцияларини $x_c$, $y_c$, $z_c$; $\overline{r}_i$ векторники $x_i$, $y_i$, $z_i$ десак, (27. 1) дан туъбандаги формулани чиқариш мумкин:

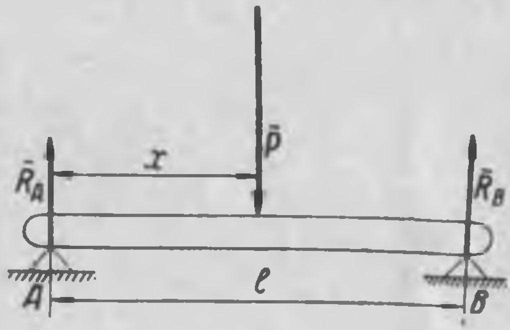
$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}; \quad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}; \quad z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}. \qquad (27.\ 3)$$

Бу формулалардан кўринадики, агар ҳамма кучларининг йўналишлари бир хилда ўзгартирилса ҳам, уларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта ўзгармайди. Кучлар йўналишининг ўзгариши билан тенг таъсир этувчи ҳам, кучлар билан биргаликда, шу нуқта атрофида айланади. Шуниг учун, бу нуқта, кўпинча, **параллел кучлар маркази** дейилади.

зиқ тенгламаси дейилади. Тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи устида олинган бирор нуқтасининг координаталарини топиш учун, уларнинг бири ихтиёрий равишда, иккинчиси эса (32. 1) дан аниқланади.

## 33- §. Бир текисликда ётувчи параллел кучлар таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанат шарти

Мувозанатдаги жисмга қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлмаслиги, яъни $\overline{R}=0$ бўлиши керак. У ҳолда (31. 3) дан $x_0=\infty$ келиб чиқади, яъни тенг таъсир этувчи қўйилган нуқта чексизда ётади. Бироқ тенг таъсир этувчи




72- шакл.

бўлмаганлиги учун у қўйилган нуқта аниқ бўлмайди. Бу талабни қаноатлантириш мақсадида (31. 3) нинг суратини ҳам нулга тенглаштириш лозим, яъни:

$$\sum_{i=1}^{n} m_0(\overline{P_i}) = 0.$$

Акс ҳолда жисм айланма ҳаракатда бўлиши мумкин. Демак, *бир текисликда ётувчи параллел кучларнинг таъсиридаги* жисм мувозанатда бўлсин учун, жисмга қўйилган кучларнинг алгебраик йиғиндиси нулга тенг бўлиши билан бирга, бу кучларнинг, кучлар текислигидаги бирор нуқтага нисбатан олинган моментларининг алгебраик йиғиндиси ҳам нулга тенг бўлиши, яъни:

$$\sum_{i=1}^{n} F = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_0(\overline{F}) = 0 \qquad (33.\ 1)$$

бўлиши керак.

**14- масала.** Узунлиги $l$ бўлган $AB$ балка вертикал таянчларга эркин тиралиб туради. Балкага $A$ таянчдан $x$ масофада вертикал $P$ куч қўйилган. Таянч реакциялари топилсин (72- шакл).

Е ч и ш. Таянч реакцияларининг вертикал йўналиши табиийдир. (33. 1) га мувофиқ:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = R_A + R_B - P = 0, \tag{1}$$

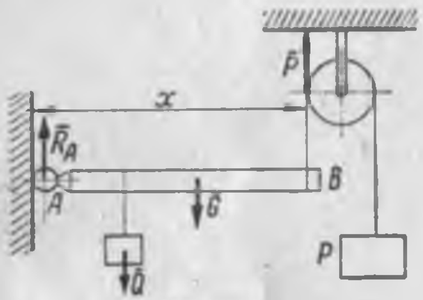
$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\bar{F}_i) = -R_B l + P_x = 0 \tag{2}$$

бўлади.

Бу тенгламалардан $A$ ва $B$ реакцияларининг қиймати:

$$R_B = \frac{l-x}{l} P = \left(1 - \frac{x}{l}\right) P, \; R_A = \frac{x}{l} P.$$

**15- масала.** Огирлиги $G = 100$ *кг* бўлган горизонтал $AB$ стержень қўзғалмас $A$ нуқта атрофида айланиши мумкин (73- шакл). Стерженнинг $B$ учи ғалтакдан ўтказилган арқонга боғланган $P = 150$ *кг* юк ёрдами билан вертикал юқорига тортилиб туради. $B$ учидан 20 *см* узоқликдаги нуқтага $Q = 500$ *кг* юк осилган. $AB$ стержень горизонтал ҳолатда мувозанатда бўлсин учун, унинг $x$ оралиги қанча бўлиши керак?




73- шакл.

Е ч и ш. Арқоннинг тортиш кучини осилган $P$ юкка тенг деб оламиз (ғалтакнинг ўққа ишқаланиши кичик бўлганидан, уни эътиборга олмаймиз). Мувозанат тенгламасини тузишда моментни $A$ га нисбатан оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\bar{F}_i) = Q(x-20) + G\frac{x}{2} - P_x = 0,$$

бу тенгламадан:

$$x = 25 \text{ см}.$$

**16- масала.** Бир жинсли бўлмаган 1,5 *кг* ёғоч $A$ учидан осилиб $AB = 30$ *см* оралиқдаги тарози палласига ўрнатилган таянчга $B$ нуқтаси билан горизонтал ҳолатда тираб қўйилган. Тарозини мувозанатлаш учун унинг бошқа палласига 1 *кг* юк қўйилиши лозим. Ёғочнинг $A$ учидан оғирлик марказигача бўлган $x$ оралиқ топилсин (74- шакл).

Е ч и ш. Ёғочнинг тарози палласига $B$ таянч орқали кўрсатган босими $N$ ни топиш учун, тарозининг мувозанатини алоҳида текширамиз. У $N = 1$ *кг* бўлади. Ёғочнинг мувозанат шартини ёзиш учун $A$ нуқтага нисбатан момент оламиз:

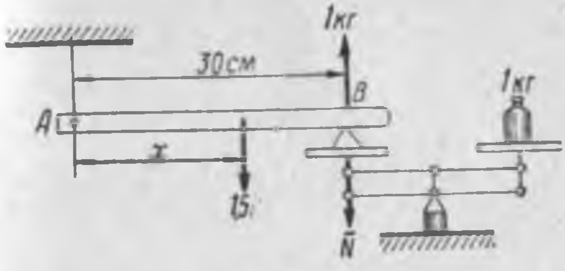
$$\sum m_A(\bar{F}) = 1{,}5x - 1\cdot 30 = 0,$$

бундан:

$$x = 20 \text{ см}$$

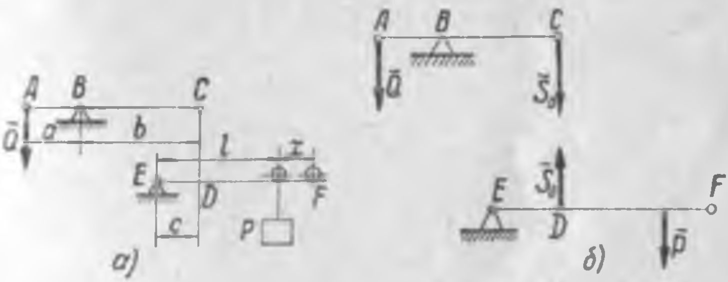
бўлади.

**17- масала.** Катта зўриқишларни ўлчаш учун бир-бирига $CD$ тортқи билан бириктирилган ва елкалари тенг бўлмаган икки $ABC$ ва $EDF$ ричаглар системаси тузилиб, улар $B$ ва $E$ нуқталарда қўзғалмас таянчга




74- шакл.

тиралган (75- шакл, *а*). $EDF$ ричагда $P = 12{,}5$ *кг* юк қузғалиши мумкин. $E$ нуқтадан $l$ узоқликда ўрнатилган $P$ юк $A$ нуқтага қўйилган $Q$ юкни мувозанатлайди. $Q$ юк 1000 *кг* га кўпайтирилганда, мувозанат ўзгармаслиги учун $P$ юкни қанча ораликка кўчириш керак? Берилишича: $a = 3{,}3$ *мм*, $b = 660$ *мм*, $c = 50$ *мм*.




75- шакл.

Ечиш. $P$ кучнинг $l$ узоқликдаги ҳолати учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. $CD$ тортқининг бу ҳолатга тегишли зуриқишини $S_0$ деймиз. $ABC$ ва $EDF$ ричагларининг мувозанат тенгламаларини алохида (75- шакл, *б*) тузамиз:

$$\sum m_B(\overline{F}) = -Qa + S_0 b = 0,$$
$$\sum m_E(\overline{F}) = -S_0 c + Pl = 0,$$

булардан:

$$Qa = S_0 b, \qquad (1)$$
$$Pl = S_0 c \qquad (2)$$

бўлади.

Энди, $Q$ юк 1000 *кг* га кўпайтирилган ва $P$ юкнинг $x$ қўзғалган ҳолати учун мувозанат тенгламаларини тузамиз.

Бу ҳолат учун $CD$ тортқидаги зўриқиш $S$ бўлсин.

$$\sum m_B(\overline{F}) = -(Q + 1000)\,a + Sb = 0,$$
$$\sum m_E(\overline{F}) = -Sc + P(l + x) = 0,$$

булардан:

$$(Q + 1000)\,a = Sb, \qquad (3)$$
$$P(l + x) = Sc. \qquad (4)$$

(1) ни (3) дан, (2) ни (4) дан айирсак:

$$1000\,a = (S - S_0)\,b, \qquad (5)$$
$$P\cdot x = (S - S_0)\,c \qquad (6)$$

тенгламалар чиқади.

Бу чиққан тенгламалар нисбатини оламиз:

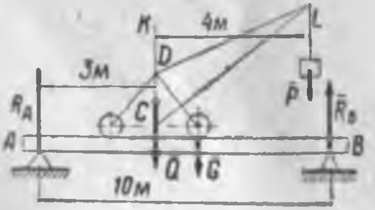
$$\frac{Px}{1000\,a} = \frac{c}{b},$$

бундан:

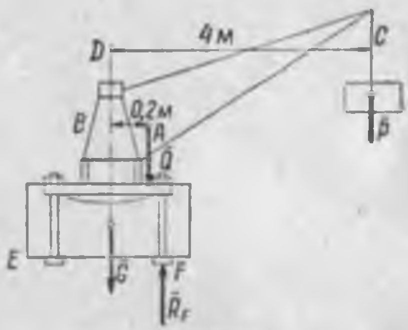
$$x = \frac{1000\cdot ac}{Pb} = 20 \text{ мм}$$

бўлади.

**18- масала.** $l = 10$ м узунликдаги $AB$ балка устига юк кўтариш крани учун йўл солинган. Кранинг оғирлиги 5 $т$ бўлиб, оғирлик маркази $CD$ ўқда ётади. Кран кўтарадиган юк билан $CD$ оралиғи $KL = 4$ м, $AC = 3$ м, $P$ юкнинг оғирлиги




76- шакл.




77- шакл.

1 $т$, балканинг оғирлиги 3 $т$. Кран билан балка бир вертикал текисликда турган ҳолда $A$ ва $B$ нуқталардаги таянч реакциялари топилсин (76- шакл).

Е ч и ш.

$$\sum F = R_A + R_B - 9 = 0,$$
$$\sum m_A(\overline{F}) = 3\cdot 5 + 5\cdot 3 + 7\cdot 1 - 10R_B = 0.$$

Бу тенгламалардан:

$$R_B = 3{,}7\ т; \quad R_A = 5{,}3\ т$$

бўлади.

**19- масала.** Кўтариш крани тош пойдеворда (77- шакл). Кранининг оғирлиги $Q = 2{,}5$ *т* бўлиб, унинг ўқидан $AB = 0{,}2$ *м* ораликда ётувчи оғирлик маркази $A$ нуқтага қўйилган. Кран кўтарадиган юк билан ўқ оралиғи $CD = 4$ *м*. Пойдеворнинг туби томони $EF = 2$ *м* бўлган квадратдан иборат; солиштирма оғирлиги $\gamma = 2 т/м^3$. Кран 3 *т* оғирликни кўтариш учун белгиланган бўлса, пойдевор $F$ қирраси атрофида тўнтарилмасдан туриши учун унинг баландлиги қанча бўлиши керак?

Ечиш. Пойдевор кран, юк ва ўзининг оғирлиги таъсирида мувозанатда туради. Барча кучларнинг $F$ қиррасига нисбатан моментини оламиз:

$$\sum m_F(\bar{F}_i) = -G\cdot 1 - Q\cdot 0{,}2 + P\cdot 3 < 0;\ G = Fh\gamma = 2\cdot 2h\cdot 2 = 8h,$$

булардан:

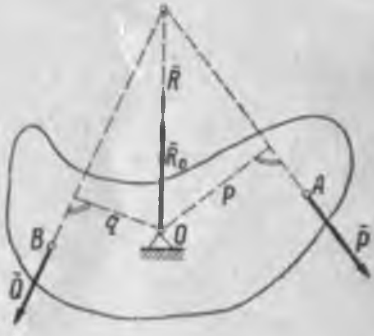
$$8h < -0{,}2\cdot Q + 3P.$$

Демак,

$$h = \frac{8.5}{8} > 1{,}1 \text{ м}.$$

## 34- §. Ричагнинг мувозанат шарти

Синиқ шакл схемасидаги ричаг мувозанатига оид масалани Вариньон теоремасидан фойдаланиб жуда осон ечиш мумкин. У схема қуйидагича: ихтиёрий шаклдаги қаттиқ жисмнинг бирор нуқтаси шарнир воситаси билан бириктирилиб, шарнирнинг ўқига тик текисликда (шакл текислигида) жисмнинг $A$ ва $B$ нуқталарига $P$ ва $Q$ кучлар қўйилган (78- шакл). Мазкур кучлар таъсиридан ричагнинг мувозанат шарти топилсин. Ричагнинг мувозанатида $P$ ва $Q$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $R$ қўзғалмас нуқта $O$ шарнир маркази орқали ўтиб, унинг реакцияси $R_0$ билан мувозанатлашади. Модомики, $R$ қўзғалмас $O$ нуқтадан ўтар экан, унинг бу нуқтага нисбатан моменти нулга тенг бўлиши керак, чунки момент елкаси нулга тенг. Бу ҳол учун Вариньон теоремаси қуйидагича ёзилади:



78- шакл.

$$m_0(\bar{R}) = m_0(\bar{P}) + m_0(\bar{Q}) = 0. \qquad (34.\ 1)$$

78- шаклдан:

$$m_0(\bar{P}) = P\cdot p;\ m_0(\bar{Q}) = -Q\cdot q.$$

Шунинг учун:

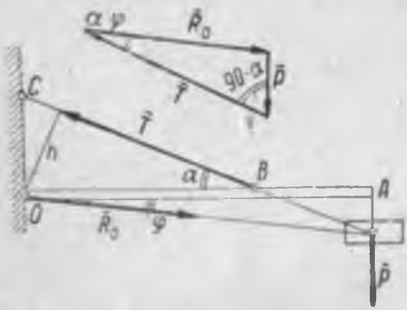
$$P\cdot p - Q\cdot q = 0,$$

бундан:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$

булади.

Ричагнинг мувозанатида $P$ ва $Q$ кучлар қўзгалмас $O$ нуқтага нисбатан аниқланган $p$ ва $q$ елкаларга тескари пропорционал бўлар экан. Қўзгалмас $O$ нуқтанинг $R_0$ реакцияси $P$ ва $Q$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $R$ билан мувозанатлашганидан, у $R$ га тенг бўлиб, қарама-карши йўналади. Унинг қиймати $P$ ва $Q$ га қурилган параллелограмм ёки кучлар учбурчагидан аниқланади. Битта қўзгалмас нуқтаси бўлган ричагга ўхшаш жисмларнинг мувозанатини бу усулда жуда ҳам осон ечиш мумкин.




79 шакл.

**20- масала.** $O$ нуқтага шарнир воситаси билан бириктирилган балкани $B$ нуқтадан горизонт билан $\alpha$ бурчак ташкил этувчи тортқи мувозанатда тутиб туради. Балканинг $A$ учига огирлиги $P$ га тенг юк осилган. $OA = l$, $OB = \frac{2}{3}l$; тортқида ҳосил бўладиган зўриқиш билан шарнир реакцияси аниқлансин (79- шакл).

Ечиш. Балка ричаг деб қаралса, қўйилган $P$ юкнинг елкаси $l$, тортқидаги зўриқиш $T$ нинг елкаси $O$ дан унинг йўналишига туширилган тик кесма $h$ га тенг бўлади. Унинг қиймати:

$$h = OB\sin\alpha = \frac{2}{3}l\sin\alpha; \quad m_0(P) = Pl; \quad m_0(T) = -\frac{2}{3}Tl\sin\alpha;$$

буларнинг йигиндиси нулга тенг бўлиши керак:

$$Pl - \frac{2}{3}Tl\sin\alpha = 0, \text{ бундан: } T = \frac{3P}{2\sin\alpha}.$$

$P$, $T$ ва $R_0$ га қурилган учбурчакдан, синуслар ёки косинуслар теоремасини татбиқ этиб, $R_0$ ни ҳисоблаб топиш мумкин:

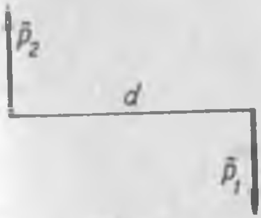
$$R_0 = \frac{P}{2}\sqrt{1 + 9\,\mathrm{ctg}^2\alpha}.$$

VII БОБ

# ЖУФТ КУЧЛАР НАЗАРИЯСИ

## 35- §. Жуфт куч ва жуфт куч моменти

*Маълум ораликда бир-бирига тескари параллел йўналишдаги, миқдор жиҳатидан тенг бўлган икки куч жуфт куч деб аталади.* Жуфт куч $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ билан белгиланади (80- шакл). Жуфтни тузувчи кучларнинг оралиги жуфт елкаси деб аталади ва $d$ билан белгиланади.




80- шакл.


81- шакл.

Жуфт куч таъсиридан жисм айланади. Жуфт куч ётган текислик жуфт текислиги дейилади (81- шакл). Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси бўлмайди (25. 2) ва (25. 3) га биноан:

$$R = P_1 - P_2 = 0,$$

чунки:

$$P_1 = P_2$$

ва

$$\frac{P}{BC} = \frac{R}{AB},$$

бундан:

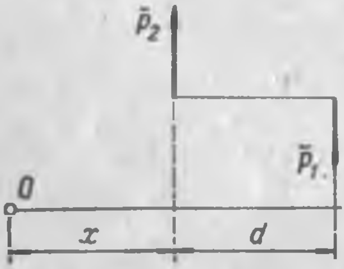
$$BC = \frac{P \cdot AB}{R} = \frac{P \cdot d}{P_1 - P_2} = \infty.$$

Демак, жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта чексизликда ётиб, унинг катталиги нулга тенг бўлади ва, шу билан бирга, жуфтни ҳосил қилувчи кучлар мувозанатлашмайди. Бинобарин, жуфт куч тенг таъсир этувчиси бўлмаган ва мувозанатлашмайдиган кучлар системасидан иборат экан. *Жуфт кучни тузувчи кучлардан бири билан жуфт елкасининг купайтмаси жуфт моменти дейилади.* Жуфт моменти $m$ билан белгиланади, у вақтда:

$$m = P_1 d = P_2 d \tag{35. 1}$$

бўлади.

Жуфтни ҳосил қилувчи кучлар килограммда, елкаси метрда ўлчанса, жуфт куч моменти *кГм* да ифодаланади.



82- шакл.

Жуфт куч жисмни соат стрелкаси айланиши бўйича айлантирмоқчи бўлса, унинг моментини мусбат, акс ҳолда манфий ишора билан оламиз.

1- теорема. *Жуфт тузувчи кучларнинг жуфт текислигида олинган ҳар қандай нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси жуфт моментига тенг.*

$(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ жуфт берилган (82- шакл).

Жуфт текислигида бирор $O$ нуқтани момент маркази қилиб олиб, бу нуқтада жуфт тузувчи кучларнинг йўналишига тик чизиқ ўтказамиз.

$\bar{P}_2$ куч билан момент маркази оралигини $x$ десак, $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ кучларнинг $O$ га нисбатан моментлари бундай ёзилади:

$$m_0(\bar{P}_2) + m_0(\bar{P}_1) = -P_2 x + P_1(x + d) = P_1 d.$$

Шундай қилиб, теорема исботланди.

## 36- §. Эквивалент жуфтлар

Бир жуфтнинг жисмга курсатадиган таъсирини бошқа жуфт кўрсата олса, бундай жуфтлар эквивалент жуфтлар дейилади.

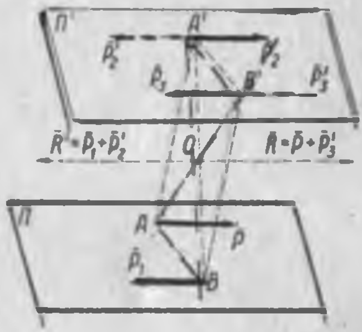
1- теорема. *Жуфтнинг жисмга курсатадиган таъсирини узгартмасдан, уни жуфт текислигига параллел бўлган ҳар қандай текисликка кўчириш мумкин.*

Теоремани исбот этиш учун, берилган жуфт текислиги $\Pi$ га параллел, $\Pi'$ текисликда $AB$ га параллел ва тенг $A'B'$ кесмани оламиз. $A'$ ва $B'$ нуқталарга $(\bar{P}_2, \bar{P}_2)$ ва $(\bar{P}_3, \bar{P}_3)$ нуль системаларни қўямиз (83- шакл). Бу нуль системаларни $(\bar{P}, \bar{P}_1)$ кучларга параллел ва миқдор жиҳатидан тенг қилиб оламиз. $AB$ ва $A'B'$ елкаларга параллелограмм қуриб, $AB'$ ва $BA'$ диагоналларни ўтказамиз. $\overline{P}$ билан $\overline{P_3}$ ни, $\overline{P_1}$ билан $\overline{P_2}$ ни қўшамиз. Уларнинг тенг таъсир этувчилари тегишлича:

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{P_3};\ \overline{R'} = \overline{P_1} + \overline{P_2}$$

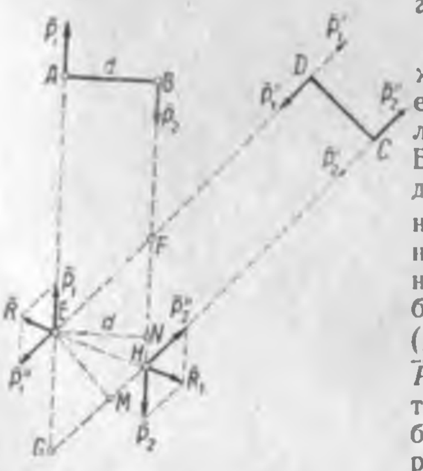
бўлади.

Булар бир томонга йўналган бир-бирига тенг икки параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси бўлгани учун диагоналларнинг кесишган $O$ нуқтасига қўйилиб, қарама-қарши томонга йўналган. Бу тенг таъсир этувчилар миқдор жиҳатидан бир-бирига тенг бўлганлиги учун ўзаро мувозанатлашади. Уларни ташлаб юборамиз. Натижада, барча кучлар системасидан фақат $\Pi'$ текисликда ётувчи $\overline{P_2}$ ва $\overline{P_3}$ кучлар қолади. Бу кучлар жуфтни ташкил қилади ва $\Pi$ текисликдаги $(\overline{P}, \overline{P_1})$ жуфтга тенг бўлади, яъни: $(\overline{P_2}, \overline{P_3}) \backsim (\overline{P}, \overline{P_1})$. Шу билан 1- теорема исботланди.




83- шакл.

**3- теорема.** *Жуфтни ўз текислигида ихтиёрий томонга бурсак, унинг жисмга курсатадиган таъсири ўзгармайди.*




84- шакл.

$AB = d$ елкали $(\overline{P_1}, \overline{P_2})$ жуфт берилган. Бу жуфтнинг елкасини $AB = d$ дан $DC = d$ ҳолатига келтирамиз (84- шакл). Бунинг учун жуфт текислигида $D$ ва $C$ нуқталарини олиб, бу нуқталарга $(\overline{P'_1}, \overline{P'_1})$ ва $(\overline{P'_2}, \overline{P'_2})$ нуль системалар қўямиз. Уларни шаклда кўрсатилганича, берилган жуфт тузувчилари $(\overline{P_1}, \overline{P_2})$ га тенг қилиб оламиз. $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ ва $\overline{P'_1}$, $\overline{P_2}$ кучларнинг таъсир чизиқларини бир-бири билан кесишгунча давом эттириш натижасида $EFHG$ параллелограмм ҳосил бўлади. Бу параллелограмминг ромб эканини исбот этиш керак. Шаклдан:

$$\triangle EFN = \triangle EMG,$$

чунки буларнинг катетлари $EN = EM = d$, бурчаклари $\angle EFN = \angle EGM$ дир. Шундай бўлса, $EG = EF$. Демак, $EFHG$ шакли ромб экан.

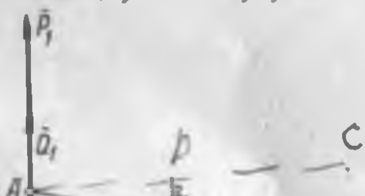
Энди $\overline{P}_2$ ва $\overline{P}'_2$ кучларни $H$ нуқтага, $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}'_1$ кучларни $E$ нуқтага келтириб, уларнинг тенг таъсир этувчилари $\overline{R}$ ва $\overline{R}_1$ ни параллелограмм қоидаси билан топамиз.

Бу тенг таъсир этувчилар миқдор жиҳатидан тенг бўлиб, ромбнинг диагонали бўйича қарама-қарши томонга йўналганлиги учун, улар ўзаро мувозанатлашади. Натижада, фақат $D$ ва $C$ нуқталарга қўйилган $\overline{P}'_1$ ва $\overline{P}'_2$ кучлар қолади. Бу кучлар жуфт ташкил қилиб, берилган $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ жуфтга эквивалент бўлади, яъни:

$$(\overline{P}_1, \overline{P}_2) \backsim (\overline{P}'_1, \overline{P}'_2).$$

Шу билан 3 теорема исботланди.

4- теорема. *Жуфт моментининг қиймати ўзгартирилмай, унинг тузувчи кучлари билан елкаси ўзгартирилса, жуфтнинг жисмга таъсири ўзгармайди*



85- шакл.

$(\overline{P}, \overline{P}_1)$ жуфтни оламиз (85-шакл). Бу жуфтни шундай ўзгартирамизки, унинг $\overline{Q}$ тузувчиси берилган жуфтнинг $\overline{P}$ тузувчисидан кичик бўлсин. Бунинг учун $\overline{P}$ кучни икки $\overline{Q}$ ва $(\overline{P} - \overline{Q})$ тузувчиларга ажратамиз ва улардан $(\overline{P} - \overline{Q})$ ни $A$ нуқтага қўямиз. Бу ажратилган кучларнинг тузувчилари учун қуйидаги пропорцияни тузишимиз мумкин:

$$\frac{Q}{AB} = \frac{P-Q}{BC} = \frac{P}{AC}. \qquad \text{(a)}$$

$A$ нуқтага қўйилган $\overline{P}_1$ ва $(\overline{P} - \overline{Q})$ кучларни қўшиб, уларнинг йиғиндисини топамиз:

$$P_1 - (P - Q) = P_1 - P_1 + Q = Q = Q_1.$$

5- Шакл теоремага асос эмас.

Бу $Q_1$ куч юқорига қараб йўналган. Шундай қилиб, $(\overline{P}, \overline{P}_1)$ жуфт куч ўрнига $(\overline{Q}, \overline{Q}_1)$ жуфт кучни олдик. Пропорция (а) га диққат қилсак:

$$P\cdot AB = Q\cdot AC$$

эканлигини кўрамиз.

Бунда $P\cdot AB$, олинган $(\overline{P}, \overline{P}_1)$ жуфтнинг, $Q\cdot AC$ эса $(\overline{Q}, \overline{Q}_1)$ жуфтнинг моментидир. Шундай қилиб, берилган жуфтнинг ўрнига тузувчи кучлар ва елкаси ўзгарган бошқа жуфт олдик. Бу жуфтнинг моменти олдинги жуфтнинг моментига тенг, яъни:

$$(\overline{Q}, \overline{Q}_1) \backsim (\overline{P}, \overline{P}_1)$$

бўлади.

## 37- §. Текисликдаги жуфтларни қўшиш

Бир текисликда ётувчи бир нечта, масалан, тўртта жуфт берилган (86- шакл). Уларнинг моментлари, $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ бўлсин. Шу жуфтларнинг йиғиндисини топамиз, яъни бу жуфтларни бир тенг таъсир этувчи жуфт билан алмаштирамиз.

Бунинг учун уларнинг ҳаммасини бир хил елкага келтирамиз. Шу елка учун $AB = d$ кесмани оламиз. Бу жуфтларни тузувчи кучларнинг тегишли қийматларини (35. 1) ёрдами билан топамиз. Улар:


86- шакл.

$$P_1 = \frac{m_1}{d},\ P_2 = \frac{m_2}{d},\ P_3 = \frac{m_3}{d},\ P_4 = \frac{m_4}{d}$$

бўлади.

Энди, ўтган параграфда исботланган 3- теоремага биноан, бу жуфтларнинг ҳаммасини $AB = d$ елкага жойлаштирамиз (87- шакл). $A$ ва $B$ нуқталарга қўйилган $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4)$ ва $(\overline{P}_1', \overline{P}_2', \overline{P}_3', \overline{P}_4')$ кучларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчиларини $\overline{R}$ ва $\overline{R}'$ билан белгилаймиз ($n$ та жуфт учун):

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = \frac{m_1}{d} + \frac{m_2}{d} + \frac{m_3}{d} + \ldots + \frac{m_n}{d} =$$
$$= \frac{1}{d}(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n). \quad \text{(a)}$$

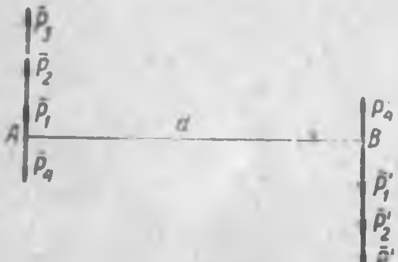
Худди шунга ўхшаш:

$$R' = \frac{1}{d}(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n).$$

$R$ ва $R'$ тенг бўлгани учун улар жуфт кучни ҳосил қилади. Уларнинг моментларини $L$ десак, у:

$$L = Rd$$

бўлади. Бу формулага $R$ нинг қийматини (а) дан келтириб қўйсак, жуфтнинг тенг таъсир этувчиси $L$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:




87- шакл.

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (37.\ 1)$$

Демак, текисликдаги бир қанча жуфтнинг тенг таъсир этувчиси жуфт бўлиб, унинг моменти (яъни берилган жуфтларга эквивалент бир жуфт) берилган жуфтларнинг моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Жуфтларни қўшиш натижасида $R = 0$ бўлса, тенг таъсир этувчи жуфт моменти $L = 0$ бўлиб, ҳалиги $m_1, m_2, \ldots, m_n$ жуфтлар таъсиридаги жисм мувозанатда бўлади. Бу ҳолда мувозанат тенгламаси:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \qquad (37.\ 2)$$

кўринишда ёзилади.

**21- масала.** Мувозанатлашган олтита жуфт текисликда ётади. Бу жуфтлар кучларининг миқдорлари тегишлича 5, 3, 2, 3, $\frac{1}{2}$ ва 1 *кг*; елкалари 2, 1, 4, $x$, 6 ва 3 *м* га тенг.

Бу жуфтлардан биринчи учтасининг моментлари мусбат, қолганлари манфий. Тўртинчи жуфт елкаси $x$ топилсин.

Ечиш.

$$m_1 = 5\cdot 2 = 10\ кГм;\ m_2 = 3\cdot 1 = 3\ кГм;\ m_3 = 2\cdot 4 = -8\ кГм,$$

$$m_4 = -3x;\ m_5 = -\frac{1}{2}\cdot 6 = -3\ кГм;\ m_6 = -1\cdot 3 = -3\ кГм.$$

Булар нулга эквивалент бўлгани учун, йиғиндини нулга тенглаштирамиз:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 0$$

ёки

$$10 + 3 + 8 - 3x - 3 - 3 = 0,$$

бундан:

$$x = 5\ м$$

келиб чиқади.

**22- масала.** *хоу* текисликда ётувчи жуфтнинг кучларидан бири координаталари (2, 2) бўлган нуқтага қўйилиб, унинг проекциялари $X = 1\ кг$, $Y = 5\ кг$. Иккинчиси қўйилган нуқта (4. 3). Бу жуфт моменти топилсин.

Ечиш. Жуфтни икки $(\overline{X}, \overline{X_1})$ ва $(\overline{Y}, \overline{Y_1})$ жуфтларнинг йиғиндиси десак бўлади. Демак, жуфтнинг моменти бу жуфтлар моментларининг йиғиндисига тенг.

$(\overline{X}, \overline{X_1})$ жуфтнинг елкаси $d_1 = (y_2 - y_1) = 3 - 1 = 1\ см$,

$(\overline{Y}, \overline{Y_1})$ " " $d_2 = (x_2 - x_1) = 4 - 2 = 2\ см$.

моментлари:

$$m_1 = -X \cdot d_1 = -1\ кГсм,$$
$$m_2 = Y \cdot d_2 = 10\ кГсм,$$
$$m = m_1 + m_2 = 9\ кГсм$$

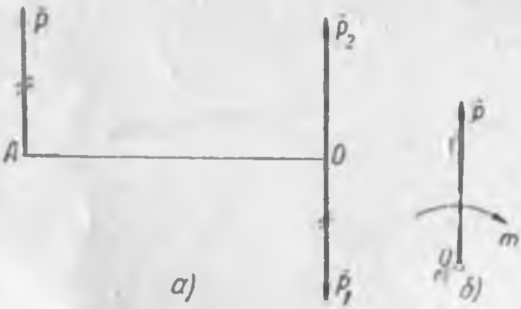
бўлади.

# VIII БОБ

# ТЕКИСЛИКДА ИХТИЁРИЙ ЎРНАШГАН КУЧЛАР

## 38- §. Кучни ўзига параллел йўналишда бир нуқтадан бошқа нуқтага келтириш леммаси

Жисмнинг бирор $A$ нуқтасига $\overline{P}$ куч қўйилган. Шу кучнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини ўзгартмасдан, уни бошқа бир нуқтага, масалан, $O$ нуқтага (88- шакл, *a*) келтириш керак. Бу $O$ нуқта келтириш маркази дейилади. Бунинг




88- шакл.

учун $O$ нуқтага нуль система $(\overline{P_1}, \overline{P_2}) \backsim 0$ ни қуямиз ва бу нуль система кучларининг катталигини берилган куч катталигига тенг қилиб оламиз. $P_2 = P_1 = P$, у вақтда $A$ нуқтадаги $\overline{P}$ куч билан $O$ нуқтадаги $\overline{P_1}$ куч жуфт ҳосил қилади. Шундай қилиб, $A$ нуқтадаги $\overline{P}$ кучни $O$ га келтириш натижасида, $O$ нуқтада, берилган $\overline{P}$ кучга тенг $\overline{P_2}$ куч билан бир жуфт кучни олдик (*Пуассон леммаси*) (88- шакл, *б*). Демак:

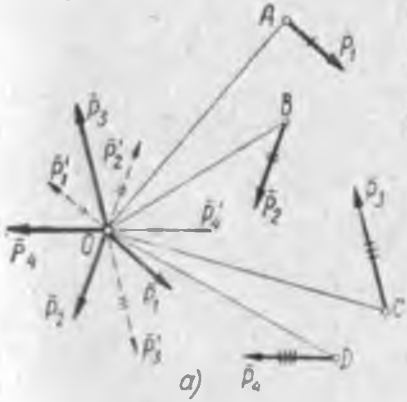
$$P \backsim \begin{cases} P \\ m_0(\overline{P}). \end{cases}$$

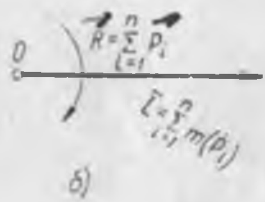
$m = m_0(\overline{P})$ жуфти қ ў ш и л г а н ж у ф т дейилади.

Демак, кучни шу куч қўйилган нуқтадан бошқа бир нуқтага келтиришда ҳосил бўладиган қўшилган жуфтнинг моменти келтирилаётган кучнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментига тенг бўлади.

## 39- §. Бир текисликда ҳар қандай вазиятда ўрнашган кучларни қўшиш

Жисмнинг $A, B, C, D, \ldots$ нуқталарига бир текисликда ётувчи $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4, \ldots$ кучлар қўйилган, деб фараз қилайлик. Бу кучларни қўшиш учун уларнинг ҳар қайсисини бирор $O$ нуқтага келтириш керак. Олдинги параграфда исботланган Пуассон леммасига биноан, ҳар қайси куч $O$ нуқтага ўзининг жуфти билан келади. Бунинг натижасида $O$ нуқтада келтирилган кучлар




89- шакл.

ва шу кучларнинг қўшилган жуфтлари ҳосил бўлади (89- шакл, $a$).

Бу келтирилган кучлар ва қўшилган жуфтларни қўшамиз. Кучлар геометрик, жуфтлар эса алгебраик қўшилади. Кучларнинг геометрик йиғиндиси $\overline{R}$; жуфтларнинг алгебраик йиғиндиси $L$ бўлсин:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i, \qquad L = \sum_{i=1}^{n} m_0(\overline{P}_i). \tag{39. 1}$$

Бунда $\overline{R}$ — жисмга қўйилган барча кучларнинг **бош вектори**, $\overline{L}$ эса кучларни $O$ нуқтага келтириш натижасида ҳосил бўлган қўшилган жуфтларнинг **бош моменти** дейилади (89- шакл, $б$). Демак:

$$(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n) \backsim (\overline{R}, \overline{L}). \tag{39. 2}$$

Бу ерда $\overline{R}$ ни тенг таъсир этувчи демадик: у, жисмга қўйилган кучларга эквивалент бўла олмайди, чунки ундан ташқари яна бош момент ҳам бор.

Демак, *текисликда ҳар қандай вазиятда ўрнашган кучларни исталган нуқтага қўйилган бир бош вектор билан келтириш марказига нисбатан олинган бир бош моментга келтириш мумкин экан.*

Бош вектор $\overline{R}$ ни ҳисоблаш учун, бир нуқтада кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини ҳисоблаш учун чиқарилган (21. 1) формуладан фойдаланиш мумкин.

## 40- §. Текисликда ҳар қандай вазиятда ўрнашган кучлар таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанат шарти

Жисм бир текисликда ҳар қандай вазиятда ётувчи кучлар системасининг таъсирида бўлса, бу кучлар бир бош вектор ва бир бош моментга эквивалент эканлиги маълумдир. Жисм берилган кучлар таъсирида мувозанатда бўлса, бу кучларнинг $\overline{R}$ бош вектори ва $L$ бош моменти алоҳида равишда нулга тенг бўлиши керак:

$$\overline{R}=0, \quad L=0. \qquad (40.\ 1)$$

Бош момент бош векторни мувозанатлаштира олмагани учун, уларнинг алоҳида равишда нулга тенг бўлиши жисм мувозанатининг з а р у р ва е т а р л и ш а р т л а р и н и ифодалайди.

Энди, мувозанат шартларини ифодаловчи тенгламаларни проекцияда ёзамиз. Бунинг учун $\overline{R}$ вектор ва $\overline{L}$ моментнинг аналитик қийматини (40. 1) га қўямиз:

$$R=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2}=0;$$

$$L=\sum_{i=1}^{n}m_0(\overline{P}_i)=0.$$

Икки сон квадратларининг йиғиндиси нулга тенг бўлса, бу сонларнинг ҳар бири алоҳида равишда нулга тенг, яъни:

$$\sum_{i=1}^{n}X_i=0;\ \ \sum_{i=1}^{n}Y_i=0;\ \ \sum_{i=1}^{n}m_0(\overline{P}_i)=0 \qquad (40.\ 2)$$

бўлади.

Демак, бир текисликда ётувчи ҳар қандай кучлар таъсиридаги жисм мувозанатда бўлсин учун, жисмга қўйилган кучларнинг $x$, $y$ ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси ва ихтиёрий нуқтага нисбатан олинган куч моментларининг йиғиндиси алоҳида равишда нулга тенг бўлиши керак. Жисм эркин ҳолатда бўлмай, богланишда бўлса, унинг таъсирини реакция билан алмаштириб, жисмни эркин деб қараш мумкин.

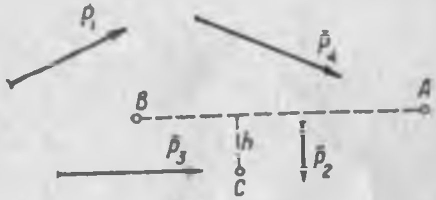
Хусусий ҳол: текис системали кучларни бир нуқтага келтириш натижасида улар фақат бир бош моментга эквивалент бўлса, у вақтда жисм айланма ҳаракатда бўлади. Бошқача айтганда, жисм жуфт куч таъсирида бўлади. Бундай жисм мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган жуфтларнинг йиғиндиси нулга тенг бўлиши керак:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i = 0. \qquad (40.\ 3)$$

## 41- §. Мувозанат шартларининг бошқача кўринишлари

Теорема. *Текисликда ётувчи ҳар қандай кучларнинг бир чизиқ устида ётмайдиган уч нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нулга тенг бўлса, бундай кучлар таъсиридаги жисм мувозанатда булади.*

Бир текисликда ётувчи $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n$ кучлар берилган (90- шакл) ва уларнинг $A$, $B$ ва $C$ нуқталарга нисбатан моментларининг йиғиндиси нулга тенг бўлсин:




90- шакл.

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{P}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{P}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_C(\overline{P}_i) = 0. \qquad (41.\ 1)$$

Бу тенгламалардан бирортасини, масалан, биринчисини оламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{P}_i) = 0.$$

Вариньон теоремасига мувофиқ, бунинг ўнг томони берилган кучлар тенг таъсир этувчисининг $A$ га нисбатан моментини ифодалаши керак. Ҳолбуки, у нулга тенг бўлаётир. Тенг таъсир этувчининг моменти нулга тенг бўлиши учун, у ё $A$ нуқтадан ўтиши ёки нулга тенг булиши керак. Тенг таъсир этувчи нулга тенг бўлмай, $A$ нуқтадан ўтади деб фараз қилайлик. У ҳолда $B$ нуқтани ҳам тенг таъсир этувчининг устида олсак:

$$\sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{P}_i) = 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, $R$ тенг таъсир этувчи $A$ ва $B$ нуқталардан ўтаётир. Демак, Вариньон теоремасига бионан, (41. 1) нинг учинчи қисмини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n} m_C(\overline{P_i}) = Rh = 0.$$

Теоремага мувофиқ: $h \neq 0$. Бу ҳолда $R = 0$ бўлиши керак. Шу билан теорема исботланди.

Мувозанат шартларининг яна бир кўринишини келтирамиз.

Координата ўқларидан бирини $A$ ва $B$ нуқталар орқали утказамиз. Кучларнинг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нулга тенг бўлса, (41. 1) нинг биринчи икки қисми қаноатланиши билан бирга, тенг таъсир этувчининг ҳам нулга тенглигини кўрсатган бўламиз.

$A$ ва $B$ дан ўтувчи ўқни $x$ десак, мувозанат тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{P_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{P_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 0. \qquad (41.\ 2)$$

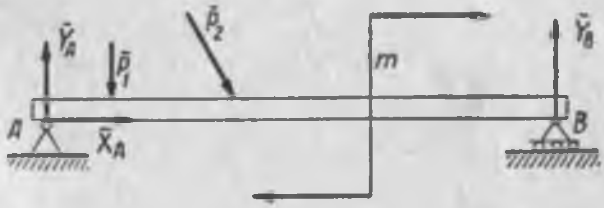
Кучлар параллел бўлса, $x$ ўқнни йўналишга тик олиб (41.2) мувозанат шартларини қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{P_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{P_i}) = 0. \qquad (41.\ 3)$$

## 42- §. Статика мувозанат шартларининг амалий масалаларни ечишда татбиқ этилиши

Юқорида мувозанат тенгламаларининг уч хил кўринишини чиқардик. Уларнинг ҳар қайсиси: (40. 2), (41. 1) ва (41. 2) мувозанат шартини ифодалаш билан баравар, уларни текширилаётган жисмнинг вазияти ва масала шартига қараб татбиқ этиш керак.

Статика масалаларини ечишда мувозанати текширилаётган жисмнинг вазиятини яққол тасаввур қилиш зарур. Эркснз жисмлар мувозанати текширилганда мувозанат шартларидан боғланиш реакцияларини топишга тўғри келади. Шунинг учун бундай ҳолларда мувозанат шартлари мувозанат тенгламалари дейилади. Ечилаётган масалага мувозанат тенгламаларини татбиқ қилиш учун жисмга бевосита қўйилган кучлар билан унда пайдо бўладиган реакцияларни эътиборга олиш керак. Реакцияларнинг йўналиши аниқ бўлмаган ҳолларда уларнинг проекция ва моментларини мусбат ишора билан олиш тавсия этилади. Бу ҳолда масаланинг ечилиши натижасида реакциялардан бирортаси манфий ишора билан чиқиб қолса, унинг йўналиши координаталар ўқининг манфий томонига йўналган бўлади. Агар реакцияларнинг ҳақиқий йўналишлари шубҳа туғдирмаса, уларни координата ўқлари йўналишларига боғламаслик, яъни реакциялар қаёққа йўналган бўлса, шу томонга йўналтириш керак. Кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблашда аввало бу проекцияларнинг абсолют қийматларини мусбат йўналишлари орасидаги бурчакка қараб қўйиш керак: бу бурчак ўткир бўлса, проекция ишораси мусбат, ўтмас бўлса — манфий бўлади. Момент марказини танлашда шуни эътиборга олиш керакки, мувозанат тенгламаларида номаълум кучлар сони қанча кам бўлса, тенгламалар шунча осонлик билан ечилади. Шунинг учун момент маркази номаълум реакциялар кесишган нуқтада олинса, момент мар-




91- шакл.

казида кесишувчи номаълум реакциялар момент тенгламаларига кирмайди. Масалани осонлик билан ечиш, асосан, мувозанат тенгламаларини танлашга ҳам боғлиқдир. Мувозанат тенгламалари қайси кўринишда олинмасин, ҳар қайси тенгламада номаълумлар сони биттадан ортмаса, масала осонлик билан ечилади. Шунинг учун мувозанат тенгламаларининг кўринишини танлашда юқорида айтилган шартни кўзда тутиш керак. Мисол учун 91- шаклда кўрсатилган балкани оламиз. Бу балканинг таянчларида пайдо бўлган реакцияларни топиш керак. $A$ таянч — қўзғалмас шарнир. Шу сабабли унинг реакциясининг катталиги номаълум бўлиши билан бирга, йўналиши ҳам аниқ эмас. Шунинг учун бу реакциянинг ўрнига унинг горизонтал ва вертикал тузувчиларини оламиз ва уларни тегишлича $X_A$ ва $Y_A$ билан белгилаймиз. $B$ таянч ғилдиракка ўрнаштирилгани учун унинг реакцияси вертикал йўналган. Уни $Y_B$ билан белгилаймиз. Шаклда $X_A$, $Y_A$ ва $Y_B$ реакциялар координата ўқларининг

Шундай қилиб, $R$ тенг таъсир этувчи $A$ ва $B$ нуқталардан утаётир. Демак, Вариньон теоремасига бионан, (41. 1) нинг учинчи қисмини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^{n} m_C(\overline{P_i}) = Rh = 0.$$

Теоремага мувофиқ: $h \neq 0$. Бу ҳолда $R = 0$ бўлиши керак. Шу билан теорема исботланди.

Мувозанат шартларининг яна бир кўринишини келтирамиз.

Координата ўқларидан бирини $A$ ва $B$ нуқталар орқали ўтказамиз. Кучларнинг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нулга тенг бўлса, (41. 1) нинг биринчи икки қисми қаноатланиши билан бирга, тенг таъсир этувчининг ҳам нулга тенглигини кўрсатган бўламиз.

$A$ ва $B$ дан утувчи ўқни $x$ десак, мувозанат тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{P_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{P_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 0. \qquad (41.\ 2)$$

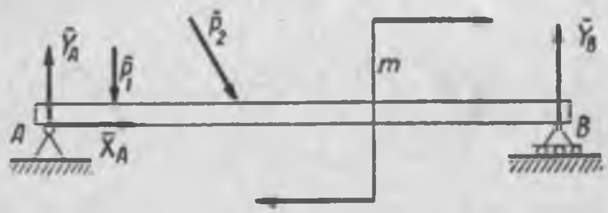
Кучлар параллел бўлса, $x$ ўқини йўналишга тик олиб (41.2) мувозанат шартларини қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{P_i}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{P_i}) = 0. \qquad (41.\ 3)$$

## 42- §. Статика мувозанат шартларининг амалий масалаларни ечишда татбиқ этилиши

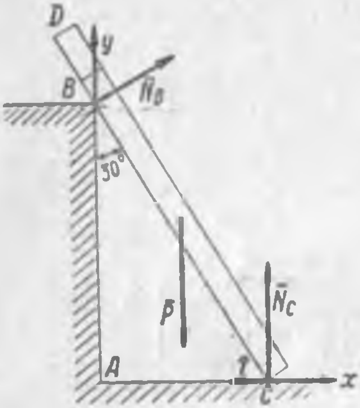
Юқорида мувозанат тенгламаларининг уч хил куринишини чиқардик. Уларнинг ҳар қайсиси: (40. 2), (41. 1) ва (41. 2) мувозанат шартини ифодалаш билан баравар, уларни текширилаётган жисмнинг вазияти ва масала шартига қараб татбиқ этиш керак.

Статика масалаларини ечишда мувозанати текширилаётган жисмнинг вазиятини яққол тасаввур қилиш зарур. Эрксиз жисмлар мувозанати текширилганда мувозанат шартларидан боғланиш реакцияларини топишга тўғри келади. Шунинг учун бундай ҳолларда мувозанат шартлари мувозанат тенгламалари дейилади. Ечилаётган масалага мувозанат тенгламаларини татбиқ қилиш учун жисмга бевосита қўйилган кучлар билан унда пайдо бўладиган реакцияларни эътиборга олиш керак. Реакцияларнинг йўналиши аниқ бўлмаган ҳолларда уларнинг проекция ва моментларини мусбат ишора билан олиш тавсия этилади. Бу ҳолда масаланинг ечилиши натижасида реакциялардан бирортаси манфий ишора билан чиқиб қолса, унинг йўналиши координаталар ўқининг манфий томонига йўналган бўлади. Агар реакцияларнинг ҳақиқий йўналишлари шубҳа туғдирмаса, уларни координата ўқлари йўналишларига боғламаслик, яъни реакциялар қаёққа йўналган бўлса, шу томонга йўналтириш керак. Кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблашда аввало бу проекцияларнинг абсолют қийматларини мусбат йўналишлари орасидаги бурчакка қараб қўйиш керак: бу бурчак ўткир бўлса, проекция ишораси мусбат, ўтмас бўлса — манфий бўлади. Момент марказини танлашда шуни эътиборга олиш керакки, мувозанат тенгламаларида номаълум кучлар сони қанча кам бўлса, тенгламалар шунча осонлик билан ечилади. Шунинг учун момент маркази номаълум реакциялар кесишган нуқтада олинса, момент мар-




91- шакл.

казида кесишувчи номаълум реакциялар момент тенгламаларига кирмайди. Масалани осонлик билан ечиш, асосан, мувозанат тенгламаларини танлашга ҳам боғлиқдир. Мувозанат тенгламалари қайси кўринишда олинмасин, ҳар қайси тенгламада номаълумлар сони биттадан ортмаса, масала осонлик билан ечилади. Шунинг учун мувозанат тенгламаларининг кўринишини танлашда юқорида айтилган шартни кўзда тутиш керак. Мисол учун 91- шаклда кўрсатилган балкани оламиз. Бу балканинг таянчларида пайдо бўлган реакцияларни топиш керак. *A* таянч — қўзғалмас шарнир. Шу сабабли унинг реакциясининг катталиги номаълум бўлиши билан бирга, йўналиши ҳам аниқ эмас. Шунинг учун бу реакциянинг ўрнига унинг горизонтал ва вертикал тузувчиларини оламиз ва уларни тегишлича $X_A$ ва $Y_A$ билан белгилаймиз. *B* таянч ғилдиракка ўрнаштирилгани учун унинг реакцияси вертикал йўналган. Уни $Y_B$ билан белгилаймиз. Шаклда $X_A$, $Y_A$ ва $Y_B$ реакциялар координата ўқларнинг мусбат томонига қараб йўналган. Лекин балкага қўйилган кучларнинг йўналишларига қараганда, $X_A$ тескари томонга қараб йўналган бўлиши керак. Шунинг учун масаланинг жавобида $X_A$ нинг ишораси манфий чиқади. Бу реакцияларни топиш учун мувозанат тенгламаларини (40. 2) ёки (41. 1) кўринишда олсак, тенгламалар системасини ечишга тўғри келади.




92- шакл.

Уларнинг ҳар қайсисини бевосита топиш учун таянч нуқталарга нисбатан икки момент тенгламаси билан кучларнинг $x$ ўқидаги проекциялари йиғиндисини оламиз, яъни (41. 2) дан фойдаланамиз. $A$ нуқтага нисбатан момент олганимизда тенгламада фақат $Y_B$ бўлиб, қолган реакцияларнинг моментлари нулга тенг бўлади. Худди шундай, $B$ нуқтага нисбатан момент олганимизда $X_A$ ва $Y_B$ ларнинг моментлари нуль бўлиб, тенгламадан $Y_A$ ни топамиз. Кучларнинг $x$ ўқидаги проекцияларини олиш билан $X_A$ ни аниқлаймиз.

**23- масала.** Огирлиги $P = 60$ *кг*, узунлиги $l = 4$ *м* булган бир жинсли тўсин бир учи билан ерга ва ораликдаги бирор $B$ нуқтаси билан баландлиги 3 *м* булган деворга таяниб, вертикал билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил этади (92- шакл). Тўсинни шу ҳолатда ер бўйлаб тортилган $AC$ арқон ушлаб туради. Ишқаланиш ҳисобга олинмай, арқоннинг тортиши $T$, деворнинг реакцияси $N_B$ ва ер реакцияси $N_C$ топилсин.

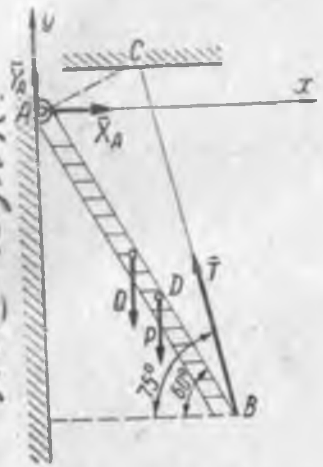
Ечиш. Координата ўқларини девор ва $AC$ бўйлаб йўналтириб, момент марказини $C$ да оламиз. Куч проекцияларини ва момент ифодасини қуйидаги схема билан топамиз:

| Кучлар / Координата ўқлари | $P$ | $N_C$ | $N_B$ | $T$ | Мувозанат тенгламалари |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | $N_B\cos\alpha$ | $-T$ | $\Sigma X_i = N_B\cos\alpha - T = 0$ |
| $y$ | $-P$ | $N_C$ | $N_B\sin\alpha$ | 0 | $\Sigma Y_i = -P + N_C + N_B\sin\alpha = 0$ |
| $m_C$ | $-2P\sin\alpha$ | 0 | $\frac{3N_B}{\cos\alpha}$ | 0 | $\Sigma m_C(P) = -2P\sin\alpha + \frac{3N_B}{\cos\alpha} = 0.$ |

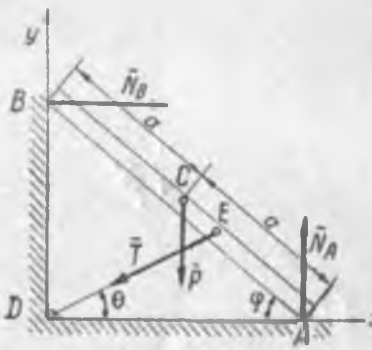
Схемада тузилган тенгламаларнинг учинчисидан $N_B$ ни, биринчи ва иккинчисидан $T$ ва $N_C$ ни топамиз:

$$N_B = 17{,}3 \text{ кг},$$
$$N_C = 51{,}3 \text{ кг},$$
$$T = 15 \text{ кг}.$$

**24- масала.** Горизонт билан $\alpha = 60°$ бурчак ташкил этиб, $A$ ўқ атрофида айланадиган нарвоннинг оғирлиги $Q = 240$ *кг*, узунлиги $l = 6$ *м* (93- шакл). Нарвоннинг $B$ учидан 2 *м* масофадаги $D$ нуқтада оғирлиги $P = 80$ *кг* ли киши туради. Нарвоннинг $B$ учини горизонт билан $\beta = 75°$ бурчак ташкил қиладиган $BC$ арқон тутиб туради. Арқоннинг $T$ тортиш кучи ва $A$ ўқнинг реакцияси топилсин.




93- шакл.




94- шакл.

Ечиш. Яна юқоридаги схема асосида мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\Sigma X = X_A - T\cos\beta = 0,$$
$$\Sigma Y = T\sin\beta + Y_A - P - Q = 0,$$
$$\Sigma m_A(\overline{F}) = \frac{Ql}{2}\cos\alpha + \frac{2}{3}Pl\cos\alpha - Tl\sin(\beta - \alpha) = 0.$$

Булардан:

$$T = 334{,}8 \text{ кг}; \; X_A = 86{,}7 \text{ кг}; \; Y_A = -3{,}4 \text{ кг}.$$

**25- масала.** Узунлиги $AB = 2a$, оғирлиги $P$ бўлган тўсин 94- шаклда кўрсатилгандек бир учи билан вертикал деворга ва иккинчи учи билан горизонтал полга таяниб туради. Ундан ташқари, $E$ нуқтасидан $D$ нуқтага ип тортиб қўйилган. $A$ ва $B$ нуқталардаги босимлар ҳамда $DE$ ипнинг тортилишидан ҳосил бўлган зўриқиш топилсин. Тўсинга таъсир этувчи кучларнинг ҳаммаси шаклда кўрсатилган.

Ечиш. Масаланинг жавобини схемадан оламиз:

$$\Sigma X = N_B - T\cos\theta = 0,$$
$$\Sigma Y = N_A - P - T\sin\theta = 0,$$
$$\Sigma m_D(\overline{P}) = Pa\cos\varphi - N_A 2a\cos\varphi + N_B 2a\sin\varphi = 0.$$

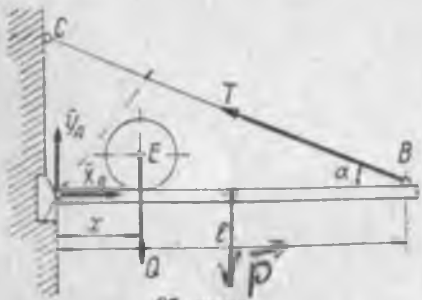
Булардан:

$$N_A = P + \frac{P\cos\varphi\sin\theta}{2\sin(\varphi-\theta)},$$

$$N_B = \frac{P\cos\varphi\cos\theta}{2\sin(\varphi-\theta)},$$

$$T = \frac{P\cos\varphi}{2\sin(\varphi-\theta)}.$$

Топилган $N_A$ ва $N_B$ лар — $A$ ва $B$ нуқталардаги реакциялар. Шу нуқталардаги босимлар ҳам миқдор жиҳатидан реакцияга тенг, бироқ қарама-қарши томонга йўналган.




95- шакл.

**26- масала.** Кранинг $AB$ горизонтал балкасининг оғирлиги $P$ га, узунлиги $l$ га тенг (95- шакл). Балка бир учи билан $A$ нуқтадаги шарнирга бириктирилиб, иккинчи учи $B$ нуқтадан горизонт билан $\alpha$ бурчак тузувчи $BC$ тортқи воситаси билан деворга тортиб қўйилган. Балка устида оғирлиги $Q$ бўлган юк қўзғалиши мумкин. Юкнинг ҳолати $AE = x$ оралиқ билан аниқланади. $AC$ тортқининг $T$ тортилиш кучини юкнинг ҳолатини аниқловчи $x$ нинг функцияси тарзида ифодалаш керак.

Е ч и ш. Бу масалада фақат битта номаълумни топиш талаб қилинади. Шунинг учун изланаётган номаълумдан бошқа $X_A$, $Y_A$ номаълумлар кирмаган битта тенглама тузилса кифоя. Момент марказини $A$ нуқтада олиб, барча моментларнинг йиғиндисини нулга тенглаштирамиз:

$$\Sigma m_A(\overline{F}) = P\frac{l}{2} + Qx - Tl\sin\alpha = 0.$$

Бундан:

$$T = \frac{Pl + 2Qx}{2l\sin\alpha}.$$

$x = l$ бўлганда энг катта тортилиш кучи ҳосил бўлади:

$$T_{max} = \frac{P + 2Q}{2\sin\alpha}.$$

## 43- §. Статик аниқ ва статик аниқмас масалалар

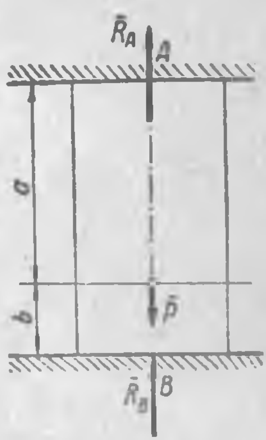
Текширилаётган масалада номаълум кучларнинг сони мувозанат тенгламаларининг сонига тенг ёки ундан кам бўлса, бундай масалани с т а т и к  а н и қ масала деймиз. Юқорида кўриб чиқилган масалаларнинг ҳаммаси статик аниқ масалалардир.

Текширилаётган масаладаги номаълум кучларнинг сони мувозанат тенгламалар сонидан кўп бўлса, бундай масалалар с т а т и к  а н и қ м а с масалалар дейилади.

Мисол учун 96- шаклда кўрсатилган устунни оламиз. Бу устун шип билан пол орасида сиқилиб, унинг юқори учидан $a$ ораликда устуннинг ўқи бўйлаб $P$ куч қўйилган. Шип ва полнинг бу куч таъсиридан ҳосил бўлган реакцияларини топамиз. Устунга қўйилган кучлар бир йўналишда бўлганлиги учун (40. 2) нинг биринчи ва учинчи қисмлари айнан нуль бўлади. Иккинчи қисмидан:

$$\sum Y = R_A + R_B - P = 0.$$

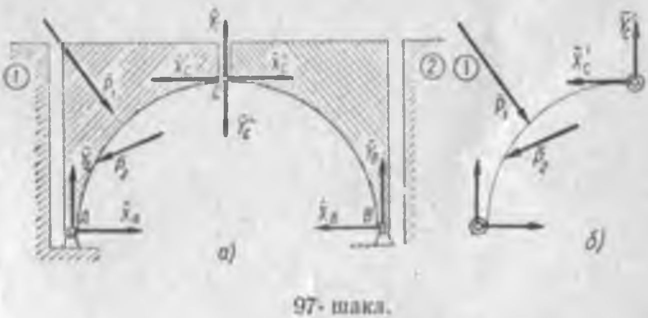
Бу бир тенгламада икки номаълум $\bar{R}_A$ ва $\bar{R}_B$ реакциялар бўлиб, уларни аниқлаш мумкин эмас. Шу сингари масалаларни чиқариш учун, жисмнинг деформация шартидан фойдаланиб, қўшимча тенглама тузилади. Бундай масалалар „Материаллар қаршилиги" фанида чиқарилади.




95- шакл.

Бошқа мисол учун шарнирли аркани оламиз (97- шакл, $a$).

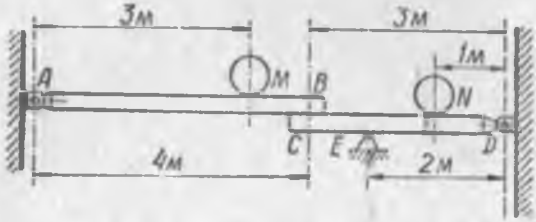
Бу ерда $C$ нуқтада шарнир воситаси билан боғланган биринчи ва иккинчи ярим қисмларни алоҳида текширамиз (97- шакл, $б$). Реакцияларнинг сони шаклда кўрсатилганича




97- шакл.

саккизта бўлиб, улардан $X'_c = X''_c$ ва $Y'_c = Y''_c$, ундан ташқари, ҳар қайси ярим қисм учун алоҳида мувозанат тенгламаларини тузишимиз мумкин. Одатда бутун жисм учун учта мувозанат тенгламасини тузиб, сўнгра қўшимча учта тенглама арканинг исталган ярим қисми учун тузилади. Шундай қилиб, олти номаълум реакцияни топиш учун олтита тенглама тузишимиз мумкин. Бу ҳолда, гарчи биринчи курнишда номаълум реакциялар сони статика тенгламалари сонидан кўп булса ҳам, масаланинг статик аниқ эканини кўрамиз.

**27- масала.** $AB$ балканинг узунлиги $l_1 = 4$ *м*, оғирлиги $Q_1 = 200$ *кг* бўлиб, $A$ ўқи атрофида айланиши мумкин (98*а*- шакл). Балканинг $B$ учи бошқа $CD$ балкага тиралиб туради. $CD$ балканинг узунлиги $l_2 = 3$ *м*, оғирлиги $Q_2 = 160$ *кг*. Унинг учи деворга шарнир воситаси билан бириктири-




98*а*- шакл.

либ, $E$ нуқтада таянчга тиралган. $M$ ва $N$ нуқталарга 80 *кг* дан юк қўйилган. $MA = 3$ *м*, $ED = 2$ *м* ва $DN = 1$ *м*. Таянч реакциялари топилсин.

Ечиш. $CD$ балканинг $AB$ га таъсирини $N_B$ билан алмаштириб, уни $AB$ балканинг мувозанатидан топамиз (98*б*- шакл). Сўнгра $CD$ нинг мувозанатини текширамиз.

$AB$ балканинг мувозанатини текшириш учун $A$ ва $B$ нуқталарга нисбатан момент оламиз:


98*б*- шакл.

$$\sum m_A(\overline{F}) = 3\cdot 80 + 2\cdot 200 - N_B\cdot 4 = 0,$$

$$\sum m_B(\overline{F}) = N_A\cdot 4 - 200\cdot 2 - 80\cdot 1 = 0.$$

Булардан:

$$N_B = 160 \text{ кг},$$
$$N_A = 120 \text{ кг}.$$

Энди $CD$ балканинг мувозанатини текширамиз (98*г*- шакл).

$CD$ балканинг мувозанат тенгламаларини тузиш учун $D$ ва $E$ нуқталарга нисбатан момент оламиз:

$$\sum m_D(\overline{F}) = -N_B\cdot 3 + N_E\cdot 2 - 80\cdot 1 - 160\cdot \frac{3}{2} = 0,$$ L, e

$$\sum m_E(\overline{F}) = -N_B\cdot 1 + 160\cdot \frac{1}{2} + 80\cdot 1 - N_D\cdot 3 = 0.$$

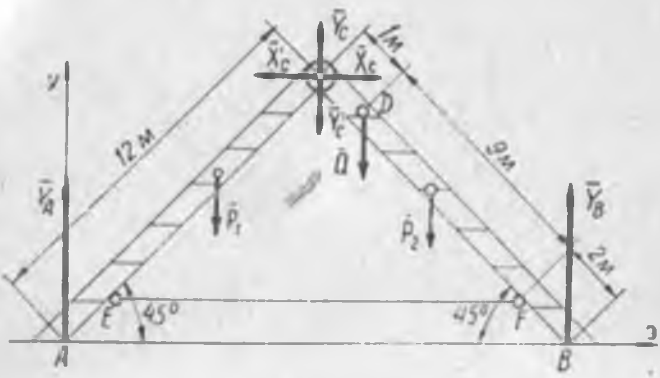
Булардан:

$$N_E = 400 \text{ кг},$$
$$N_D = 0.$$

**28- масала.** Ҳар бирининг оғирлиги $P = 18$ *кг*, узунлиги $l = 12$ *м* бўлган $AC$ ва $BC$ қисмлардан иборат кўчма нарвон горизонтал силлиқ текисликда туради (99*а*- шакл). Ушбу $AC$ ва $BC$ қисмлар $EF$ арқон ва $C$ шарнир билан бириктирилган. $BF = AE = 2$ *м*. $CD = 1$ *м* оралиқдаги $D$

нуқтада оғирлиги $Q = 72$ *кг* ли киши босиб туради. $\angle BAC = \angle ABC = 45°$. Пол реакцияси билан $EF$ арқоннинг $T$ тортиш кучи топилсин.

Ечиш. Олдин бутун система учун мувозанат тенгламаларини тузамиз, кейин нарвоннинг бирор қисми (99*б*- шакл.) мувозанатини алоҳида




99*а*- шакл.

текширамиз. $AC$ қисмнинг $C$ нуқтасига $BC$ нинг кўрсатган таъсирини $X_C$ ва $Y_C$ деймиз. $BC$ қисмининг $C$ нуқтасида $AC$ нинг кўрсатган таъсири ҳам худди шундай бўлади. Арқоннинг тортишини $T$, $A$ ва $B$ нуқталарнинг реакцияларини $N_A$ ва $N_B$ деб, мувозанат тенгламаларини (41. 2) куринишда оламиз:

$$\sum X = 0,$$

$$\sum Y = N_A + N_B - Q - 2P = 0,$$

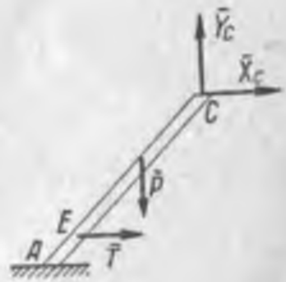
$$\sum m_C(F) = N_A \cdot 12 \cdot \cos 45° - N_B \cdot 12 \cdot \cos 45° + Q \cos 45° = 0.$$

$AC$ қисми учун:

$$\sum X = T + X_C = 0,$$

$$\sum Y = Y_C + N_A - P = 0,$$

$$\sum m_C(\overline{F}) = P \cdot 6 \cdot \cos 45° + T \cdot 10 \cdot \cos 45° - N_A \cdot 12 \cdot \cos 45° = 0.$$




99*б*- шакл.

Бу тенгламалардан:

$N_B = 57$ *кг*, $N_A = 51$ *кг*, $T = 50{,}4$ *кг*,
$X_C = -50{,}4$ *кг*, $Y_C = -33$ *кг*.

IX БОБ

# ИШҚАЛАНИШ

## 44- §. Ишқаланиш кучи

Горизонтал текисликда ётувчи жисм ўзининг оғирлиги ва текислик реакцияси таъсиридан мувозанатда туради. Жисмни текисликда силжитмоқчи бўлсак, улар тегишиб турган сиртларнинг ғадир-будурлиги туфайли, ҳар қандай катталикдаги горизонтал куч жисмни қўзғата олмайди.

100- шакл.

Бу қаршилик, қўзғатувчи куч йўналишига, ҳаракатдаги жисм учун эса унинг тезлиги йўналишига қарама-қарши бўлиб, *ишқаланиш кучи* дейилади (100- шакл).

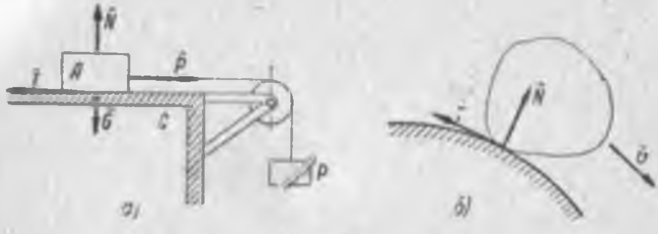
Ишқаланиш кучи ишқаланувчи жисмларнинг бир-бирига нисбатан силжиганларидагина эмас, балки уларнинг мувозанат ҳолатида ҳам пайдо бўлади. Бир жисмнинг иккинчисига нисбатан қиладиган ҳаракати характерига қараб, ишқаланиш икки хил бўлади:

1) сирпаниб ишқаланиш ёки биринчи хил ишқаланиш,
2) юмалаб ишқаланиш ёки иккинчи хил ишқаланиш.

## 45- §. Сирпаниб ишқаланиш ва Кулон қонунлари

Бирор текисликда ётувчи жисм текисликка параллел йўналишдаги куч таъсиридан ҳамма вақт ҳам қўзғалавермайди, чунки жисмнинг текислик билан тегишиб турган нуқталарида ҳосил бўладиган қаршилик кучи қўйилган кучга қарама-қарши йўналиб, унинг таъсирига қаршилик кўрсатади (101- шакл, *a*). Шунинг учун, жисмга қўйилган $P$ куч $T$ қаршилик кучини енгадиган даражадаги миқдорга эришгунча жисм қўзғалмайди.

Жисмнинг қўзғалиши олдидан ҳосил бўлган қаршилик кучи максимал ишқаланиш кучидир. Бу куч жисмни қўзғатиш учун зарур бўлган кучга катталик жиҳатидан тенг ва унга қарама-қарши йўналган.



101- шакл.

Кулон ва Амантон ўзлари ўтказган тажрибаларга асосланиб, ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифладилар:

I. *Максимал ишқаланиш кучи жисмнинг нормал босимига тўғри пропорционалдир* (101- шакл, *б*):

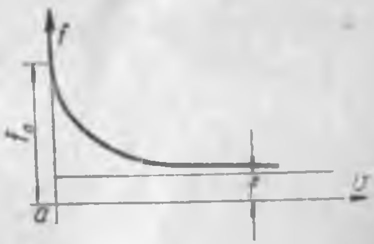
$$T_{\max} = fN. \qquad (44.\ 1)$$

Бу ерда $N$—нормал босим, $f$—пропорционаллик коэффициенти. Бу коэффициент ишқаланиш коэффициенти дейилади.

II. *Ишқаланиш кучи ишқаланувчи жисмлар сиртларининг ишланишига боғлиқ, яъни сиртлар қанча силлиқ бўлса, ишқаланиш кучи шунча кам бўлади.*

III. *Ишқаланиш кучи ишқаланувчи жисмларнинг физик хоссаларига боғлиқ, яъни ҳар хил жисмлар учун ишқаланиш кучи ҳар хил бўлади.*

IV. *Ишқаланиш кучи жисм ҳаракатда бўлганда тинч турғандагига қараганда камроқ бўлади.*



102- шакл.

Ишқаланиш кучи бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниш нисбий тезлигига боғлиқ. Ишқаланиш коэффициенти нисбий тезликнинг кўпайиши билан озайиб, асимптотик равишда маълум қийматга интилади (102- шакл). Тинч (статик) ҳолатдаги ишқаланиш коэффициенти максимал қийматга эга эканлигини ўтказилган тажриба оқибатларига асосланиб қурилган юқоридаги шаклдан кўриш мумкин. Кейинги вақтларда ўтказилган илмий текшириш ишлари натижасида юқоридаги қонунларга бирмунча тузатишлар киритилган. Лекин бу қўшимчалар асосий қонунларнинг мазмунини бузмагани учун, ишқаланиш қонунлари ҳали ҳам юқоридагича таърифланади.

Ишқаланиш коэффициенти икки кучнинг нисбати бўлганидан, ўлчовсиз сон бўлиб, унинг қиймати турли материаллар учун справочникларда берилади. Улардан баъзи муҳимларини келтирамиз.

Сирти силлиқ қилиб ишланган металлнинг металл буйлаб ишқаланиши (ёйма пўлат) . . . . . . . $f = 0{,}16$.

Қайишнинг силлиқ чўян сирти билан ишқаланиши . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $f = 0{,}30-0{,}40$.

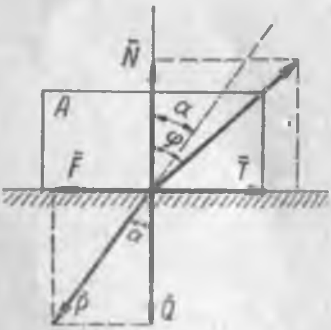
Тошнинг ёғоч билан ишқаланиши . . . $f = 0{,}46$.

Ғиштнинг бетон билан ишқаланиши . . . $f = 0{,}55$.

Ғиштнинг лой билан (сариқ тупроқдан қилинган лой билан) ишқаланиши . . . . . $f = 0{,}65$.

## 46- §. Ишқаланиш бурчаги ва ишқаланиш конуси

*A* жисм $\overline{P}$ куч таъсиридан қандай шартларни қаноатлантирганда ҳаракатланиши мумкин (103- шакл)? Бу саволга жавоб бериш учун $\overline{P}$ кучни иккита $\overline{Q}$ ва $\overline{F}$ тузувчиларга шаклда кўрсатилганидек ажратамиз. Бу кучлардан бири, яъни $\overline{F}$ куч жисмни чап томонга қараб қўзғатишга интилади. Аммо бунга $\overline{T}$ ишқаланиш кучи қаршилик курсатади. $F < T_{max}$ бўлиб тураверса, жисм тинчликда қолади. 103- шаклга мувофиқ:



103- шакл.

$$F = Q \operatorname{tg} \alpha = N \operatorname{tg} \alpha.$$

Шунинг учун жисм тинч турганда:

$$N \operatorname{tg} \alpha < f N$$

ёки

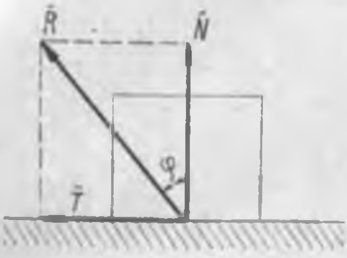
$$\operatorname{tg} \alpha < f$$

булиши керак. Шунга кўра, $P$ куч билан вертикал орасидаги бурчак тангенси ишқаланиш коэффициентидан кичик булса, жисм қузғалмайди.

$\alpha$ бурчакнинг тангенси $f$ га тенг булса, бу ҳол мувозанат чегараси ҳисобланади. Бу чегарага тегишли $\alpha$ бурчакнинг қийматини $\varphi$ билан белгилаб, қуйидаги формулани оламиз:

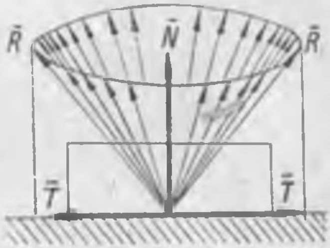
$$\operatorname{tg}\varphi = f. \qquad (46.\ 1)$$

$\alpha$ бурчакнинг қиймати $\varphi = \operatorname{arctg} f$ дан кам бўлмаса жисм ҳаракатлана бошлайди. Бу $\varphi$ бурчакни ишқаланиш бурчаги деймиз.





104- шакл.





105- шакл.

Тўла реакция умумий ҳолда ишқаланиш кучи билан нормал реакцияга қурилган параллелограммнинг диагоналига тенгдир (104- шакл). Ишқаланувчи жисмлар абсолют силлиқ бўлса, у ҳолда тўла реакция ишқаланиш сиртига нормал йўналган бўлади. Ишқаланиш бурчаги маълум булса, берилган жисм учун ишқаланиш коэффициенти (46. 1) дан топилади. Ҳаракатнинг йуналишига қараб, тўла реакция вектори фазода конус чизади, бу конус ишқаланиш конуси дейилади (105- шакл). Ишқаланиш конусининг геометрик уқи нормал реакция бўйлаб, ясовчиси эса тула реакция бўйлаб йуналади.

Агар:

$$\alpha \leqslant \varphi$$

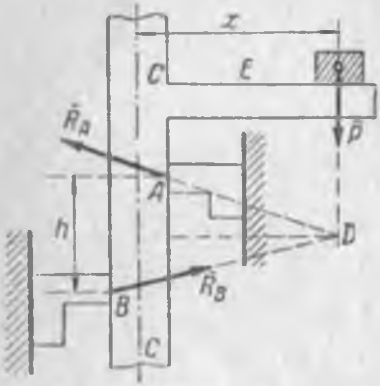
бўлса, жисм тинч турганича қолаверади. Бошқача айтганда, жисмнинг қўзғалмаслиги учун, куч ишқаланиш конусининг ичида бўлиши керак. Куч ишқаланиш конусининг сиртида бўлганда ҳам жисм қўзғалмаслиги мумкин. Шунинг учун бу ҳол, ўз-ўзини тормозлаш дейилади (106- шакл)



106- шакл.

**29- масала.** *E* платформанинг сирти билан унинг *A* ва *B* йуналтирувчилар орасидаги ишқаланиш коэффициенти *f* га тенг (107- шакл). *P* билан $CC$ платформа ўқининг оралиги қандай қийматга эга бўлганда бу куч платформани мувозанатда тута олади?

Ечиш. Мувозанат ҳолатида $P$ юкнинг таъсир чизиги $R_A$ ва $R_B$ реакциялар таъсир чизиқларининг кесишган нуқтасидан ўтиши керак. Бу нуқтани топиш учун, $\varphi$ ишқаланиш бурчагининг қийматидан фодаланамиз. Мувозанат бошланиши олдида $R_A$ ва $R_B$ реакциялар ишқаланиш конуси устида ётади. Бу ҳолда:




107- шакл.

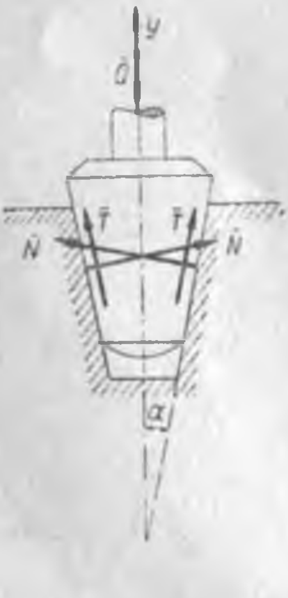
$$x_{\min} = \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\varphi = \frac{h}{2}\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h}{2f}.$$

Платформа ўз-ўзидан тормозловчи бўлиши учун:

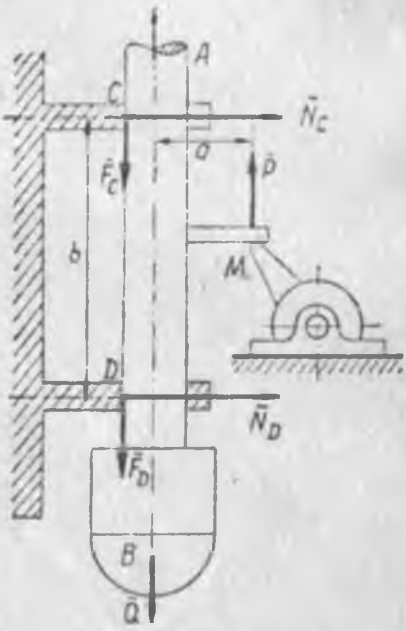
$$x > \frac{h}{2f}$$

бўлиши керак.

**30- масала.** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}05$ ли қия пона $Q = 6$ $m$ куч билан $BB$ чуқурликка қоқилган. Ишқаланиш коэффициенти $f = 0{,}1$. Понани суғуриб олиш учун зарур бўлган $P$ куч ва пона юзига тўғри келган $N$ нормал босим топилсин (108- шакл).




108- шакл.




109- шакл.

Ечиш. Олдин понанинг қоқилишини текширамиз. Ундан нормал босим $N$ ни аниқлаймиз:

$$\sum x = -Q + 2N\sin\alpha + 2T\cos\alpha = 0. \quad (1)$$

Кулон қонунига мувофиқ $T = fN$. Бу тенгламани кўзда тутиб, (1) дан нормал босимни топамиз:

$$N = \frac{Q}{2(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 20\,m.$$

Энди қоқилган понани чиқариб олишда унга вертикал бўйлаб юқорига йўналган қандай $P$ куч қўйилишини топамиз. Бу вақтда $\overline{T}, \overline{T}$ ишқаланиш кучлари понанинг ён томони бўйлаб пастга йўналади:

$$\sum x = P + 2N\sin\alpha - 2T\cos\alpha = 0,$$

бундан $P = 2\,m$. Понани чиқариб олиш учун вертикал $P = 2\ m$ куч қўйиш керак экан.

**31-масала.** $AB$ соп валга ўтказилган $M$ бармоқ билан ҳаракатга келади. Сопнинг оғирлиги $Q = 180$ *кг*, $C$ ва $D$ йўналтирувчилар оралиғи $b = 1{,}5$ *м*. Вал ўқидан паррак тегиб турган бармоққача бўлган оралиқ $a = 15$ *см*. Соп билан $C$ ва $D$ орасидаги ишқаланиш кучи ишқаланувчи жисмлар босимининг 0,15 қисмини ташкил қилса, сопни кўтарувчи $P$ куч қанчага тенг бўлади (109-шакл)? Соп билан йўналтирувчилар орасидаги ишқаланиш ва $C$, $D$ даги реакцияларнинг йўналиши шаклда кўрсатилган.

Ечиш. Момент марказини $C$ ва $D$ да олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum Y = P - F_C - F_D - Q = 0, \quad (1)$$

$$\sum m_C = -P\cdot a + N_D\cdot b = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_D = -P\cdot a + N_C\cdot b = 0. \quad (3)$$

Бу кейинги иккита тенгламадан:

$$N_C = N_D = \frac{P\cdot a}{b}.$$

Демак:

$$F_C = F_D = f\cdot\frac{P\cdot a}{b},$$

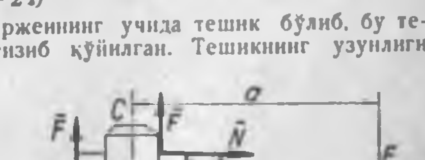
бунда $f = 0{,}15$. Буларни (1) га қўйиб, $P$ ни топамиз:

$$P = \frac{Q\cdot b}{b - 2af} = 186\ кг.$$

**32-масала.** Горизонтал $AB$ стерженнинг учида тешик бўлиб, бу тешикка юмалоқ $CD$ тиркагич киргизиб қўйилган. Тешикнинг узунлиги $b = 2$ *см*. Тиркагичнинг ўқидан $a$ узоқликдаги $E$ нуқтага $P$ юк осилган (110-шакл). $AB$ стерженнинг оғирлигини ҳисобга олмасдан, унинг мувозанатини таъмин қила оладиган $a$ оралиқни топинг. Стержень билан тиркагич орасидаги ишқаланиш коэффициенти:

$$f = 0{,}1l.$$

Ечиш. $P$ куч таъсиридан $AB$ стерженнинг тиркагич бўйлаб қўзғалишига улар орасида пайдо




110-шакл.

бўладиган ишқаланиш қаршилик кўрсатади. Нормал реакция ва ишқаланиш кучларининг йўналиши шаклда кўрсатилган. Момент марказини $D$ нуқтада олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum Y = 2F - P = 0,$$

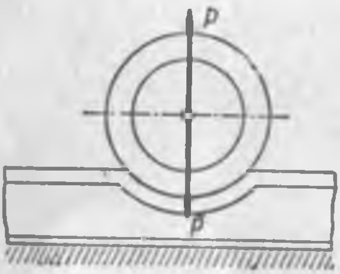
$$\sum m_D(\overline{F}) = -Nb + Pa = 0.$$

Бу тенгламалардан

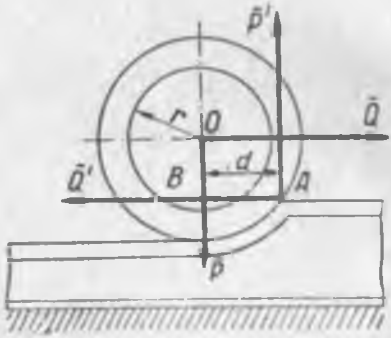
$$a = 10 \text{ см}.$$

## 47- §. Юмалаб ишқаланиш

Бир жисм иккинчи жисм устида сирпанмасдан юмаласа ёки юмаланишга интилса, юмалаб ишқаланиш ҳосил булади. Ғилдирак бутун оғирлиги билан рельсни 111-шаклда кўрсатилганча босиб турса, у ўз оғирлиги таъсири билан рельсни




111- шакл.




112- шакл.

симметрик равишда эзади. Рельснинг ғилдиракка кўрсатган реакцияси ғилдирак оғирлигига тенг бўлиб, унга қарама-қарши йўналади. Ғилдиракка яна бир ғилдирак марказидан ўтувчи горизонтал куч қўйилса, у қўйилган куч таъсиридан рельс устида юмаламоқчи булади (112- шакл). Натижада рельснинг эзилиши симметрик равишда босилмайди. Бу ҳолда рельснинг ғилдиракка кўрсатган реакцияси юқоридагича бўлмай, $\overline{P}'$ ва $\overline{Q}'$ кучларга параллел ва тенг тузувчиларга ажралади. Бу реакциялар қўйилган $\overline{P}$ ва $\overline{Q}$ кучлар билан $(\overline{P}, \overline{P}')$ ва $(\overline{Q}, \overline{Q}')$ жуфтларни ташкил қилади. Ғилдирак мувозанатда бўлиши учун бу жуфтлар моменти бир-бирига тенг бўлиши керак:

$$P \cdot d = Q \cdot OB. \qquad (47.\ 1)$$

$OB$ кесмани ғилдирак радиусига тенг деб қарашимиз мумкин, чунки рельс деформацияси жуда ҳам кичик: $OB = r$.

Горизонтал $Q$ кучнинг қийматини гилдирак юмалай бошлагунча кўпайтириб борамиз. $P$ кучнинг гилдирак юмалай бошлагандаги елкасини $\delta$ билан белгиласак, ғилдиракнинг бу ҳолати учун (47. 1) қуйидагича ёзилади:

$$P\delta = Qr. \qquad (47.\ 2)$$

Бундан $Q$ кучни топамиз:

$$Q = \delta \frac{P}{r}. \qquad (47.\ 3)$$

(47. 3) даги пропорционаллик коэффициенти $\delta$ *юмалаб ишқаланиш коэффициенти* дейилади. Бу формуладан $\delta$ нинг узунлик ўлчовида ўлчанишини кўрамиз. Бу коэффициент турли материаллар учун ҳар хилдир. Масалан, чўян темирда юмалаган ҳол учун $\delta$ нинг қиймати тахминан 0,5 *мм* бўлади. Юмалаб ишқаланишни ҳам энг аввал Кулон текширган эди. Кулон, ўтказган тажрибаларига асосланиб, юмалаб ишқаланиш қонунларини қуйидагича таърифлади:

1. *Юмалаб ишқаланиш кучи сирпаниб ишқаланиш каби, нормал босимга пропорционалдир.*

2. *Юмалаб ишқаланиш кучи юмаловчи жисмнинг радиусига тескари пропорционалдир.*

3. *Юмалаб ишқаланиш коэффициенти бир-бирига тегиб турган материалларнинг физик хоссаларига ва уларнинг ишланишига (ғадир-будур ва силлиқлигига) боғлиқдир.*

Юмаловчи жисмга қўйилган айлантирувчи моментини $L$ десак, унинг қиймати қуйидагича ифодаланади:

$$L = Qr = P\delta. \qquad (47.\ 4)$$

Куч юмаланувчи жисмнинг айланасига қўйилган булса, айлантирувчи моментнинг қиймати бундай ёзилади:

$$L = Q\,2r = P(\delta + \delta'). \qquad (47.\ 5)$$

Бунда $\delta'$ — юмаловчи жисм билан унинг устига қўйилган юкнинг ишқаланиш коэффициенти, $\delta$ эса юмаловчи жисм билан жисм юмалаётган сиртнинг ишқаланиш коэффициенти.

**33-масала.** Рельсда оғирлиги $Q = 15$ *т* бўлган вагон ҳаракатланаётганида ҳосил бўлган ишқаланиш кучини қандай куч енга олади? Вагон ғилдирагининг радиуси $r = 50$ *см*, ўқининг радиуси эса $r_1 = 4{,}5$ *см*. Ғилдираклар вагон ўқига мустаҳкам қилиб бириктирилган ва уларнинг оғирлиги $Q_1 = 2$ *т*. Ғилдирак билан рельс орасидаги юмалаб ишқаланиш коэффициенти $\delta = 0{,}05$ *см*. Ғилдирак гупчаги тешигининг сирти билан ўқ орасидаги ишқаланиш коэффициенти $f = 0{,}02$.

Е ч и ш. Ишқаланиш икки қисмдан иборат.

1. Юмалаб ишқаланиш кучи:

$$R_1 = \delta \frac{Q}{r} = 15\ кг.$$

2. Ўқ сиртидаги ишқаланиш кучи (113- шакл):

$$F = N_1 f.$$

Нормал босим:

$$N = Q - Q_1 = 15 - 2 = 13\ m.$$

Бир ғилдиракка тўғри келган босим:

$$N_1 = \frac{N}{n},$$

бу ерда $n$ — ғилдираклар сони.

Демак:

$$F = \frac{N}{n} f = \frac{260}{n}\ кг.$$

Бу қаршиликларни енгиш учун ғилдирак айланасига қўйилган кучни ғилдирак марказига нисбатан олинган момент тенгламасидан топамиз:

$$\sum m_0 (\bar{P}) = R_2' r - F r_1 = 0,$$

бундан:

$$R_2' = \frac{260}{n} \cdot \frac{r_1}{r} = \frac{23.4}{n}\ кг.$$

Вагоннинг барча ғилдиракларидаги қаршилик кучи:

$$R_2 = R_2' n = 23{,}4\ кг.$$

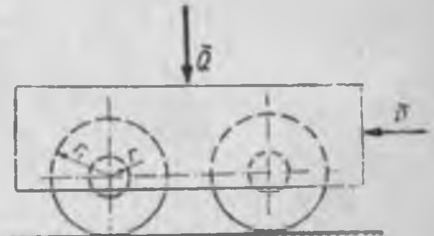
Иккала хил ишқаланиш натижасида ҳосил бўлган қаршилик уларнинг йиғиндисига тенг:

$$R = R_1 + R_2 = 38{,}4\ кг.$$

Қаршиликни енгувчи куч 38,4 *кг* дан кам бўлмаслиги керак.

**34- масала.** Ғилдирак устида юмалайдиган платформанинг оғирлиги юки билан бирга $Q = 1500$ *кг*. Ғилдиракнинг радиуси $r = 20$ *см*. Ўқнинг


113- шакл.




114- шакл.

радиуси $r_1 = 2{,}5$ *см*. Ишқаланиш коэффициенти $\delta = 0{,}08$ *см*. Платформани қўзғатиш учун зарур бўлган куч топилсин (114- шакл).

Ечиш. Бу ҳолда иккала қаршилик ҳам юмалаб ишқаланишдан ҳосил бўлиб, унинг қиймати:

$$R = \delta \frac{Q}{r} + \delta \frac{Q}{r_1} = \delta Q \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) = 54\ кг.$$

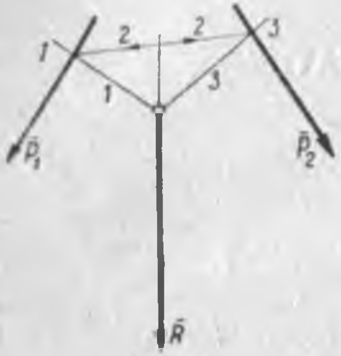
# Х БОБ ГРАФИК СТАТИКА

График статикада статика масалалари график усул билан ечилади. График қанча аниқ қурилса, масала шунча аниқ бўлади. Кўпинча, статик масалаларни аналитик равишда чиқариш қулай бўлмаганидан, бундай масалалар график усулда жуда осон ва тез чиқарилади. График усул билан, асосан, текисликда ётувчи кучлар системасига доир масалалар чиқарилади. Шунинг учун бу бобни фақат текис системали кучларга тегишли масалаларни чиқаришга бағишлаймиз.

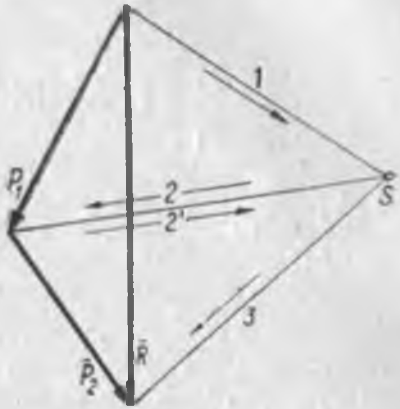
## 48- §. Куч ва арқон кўпбурчаклари

Аввало, график усулни икки кучни қўшишдан бошлаймиз, сўнгра бу усулни умумлаштирамиз. $\overline{P}_1$ва $\overline{P}_2$ кучлар берилган бўлсин. Уларнинг кесишган нуқтаси шакл текислигидан ташқарида бўлиши ҳам мумкин (115- шакл). Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш учун куч кўпбурчагини ясаймиз (116- шакл). Куч кўпбурчаги ёрдами билан тенг таъсир этувчининг йўналишини ва катталигини топдик, аммо у қўйилган нуқтани билмаймиз. Тенг таъсир этувчи қўйилган нуқтани топиш учун, $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларни уларга эквивалент кучлар билан алмаштирамиз. Бунинг учун, куч ётган текисликда бирор $S$ нуқтани оламиз ва бу нуқтани қутб деб атаймиз. Куч кўпбурчагининг учларини шу қутб билан туташтирамиз. Бу туташтирувчи чизиқлар *куч нурлари* дейилади. $P_1$ ва $P_2$ кучларни куч нурлари бўйлаб ажратамиз. Бу ажратиш натижасида $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ кучларнинг ўрнига *1*, *2*, *2'*, *3* нурлар бўйлаб йўналган туртта куч оламиз.

Иккинчи нур бўйлаб йўналган *2*, *2'* кучлар бир-бирига тенг ва қарама-қаршидир (116- шакл). $\overline{P}_1$ нинг устида бир ихтиёрий нуқта оламиз (115- шакл) ва шу нуқта орқали $\overline{P}_1$ га эквивалент бўлиб, *1* ва *2* нурлар бўйлаб йўналган кучларни ўтказамиз. $\overline{P}_2$ кучнинг йўналиши билан *2* нурнинг кесишган нуқтасидан *3* нурни ўтказамиз. Иккинчи нур бўйлаб йўналган *2* ва *2′* кучлар бир-бирига тенг ва қарама-қарши бўл-




115- шакл.

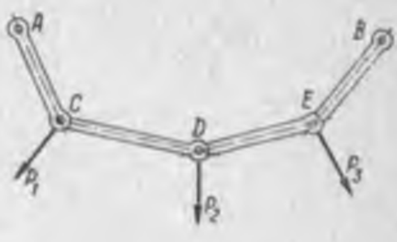



116- шакл.

ганлиги учун, улар нулга эквивалентдир. Шундай қилиб, *1* ва *3* нурлар бўйлаб йўналган кучлар — берилган $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларга эквивалент бўлади. Шунинг учун, бу икки систематнинг тенг таъсир этувчиси ҳам бир хилда бўлиб, *1* ва *3* нурларнинг кесишган нуқтаси тенг таъсир этувчи қўйилган нуқтани беради. Мазкур *1*, *2*, *2′*, *3* нурлардан тузилган кўпбурчак В а р и н ь о н ёки а р қ о н к ў п б у р ч а г и дейилади. Демак, кучларнинг график равишда тенг таъсир


117- шакл.

этувчисининг катталиги ва йўналишини топиш учун, бу кучларга к у ч к ў п б у р ч а г и н и, тенг таъсир этувчи қўйилган нуқтани топиш учун эса В а р и н ь о н к ў п б у р ч а г и н и қуриш керак. Вариньон кўпбурчагининг биринчи ва сўнгги нурлари кесишган нуқта тенг таъсир этувчи қўйилган нуқтани беради. Арқон ёки ипнинг икки учи боғланган ҳолда, бир нечта нуқтасига қўйилган кучлар билан тортиб қўйилиши натижасида ҳосил бўлган кўпбурчак **арқон кўпбурчаги** булади (117- шакл). Аммо арқон фақат чўзилишгагина ишлай олгани учун, арқоннинг ўрнига чўзилиш ва сиқилишга бир хилда қаршилик кўрсата оладиган шарнирлар билан туташтирилган тўғри ўқли стерженларда ҳосил бўлган кўпбурчак олинади (118- шакл), чунки арқон кўпбурчагининг томонлари ва сиқувчи кучлар бир хилда қабул қилиниши мумкин.

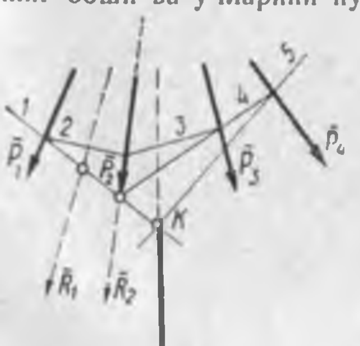



118- шакл.

Энди, чиқарилган бу хулосадан фойдаланиб, бир қанча кучларнинг тенг таъсир этувчисини график равишда топамиз. Масалан, $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ ва $\bar{P}_4$ кучларни оламиз (119- шакл). Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш тартибини, юқорида чиқарилган натижага биноан, қуйидагича ифодалаш мумкин:

1. Берилган кучлар учун *ABCDE* куч кўпбурчагини қуриш лозим (120- шакл).

2. *S* нуқтани қутб қилиб олиб, бу нуқта билан кучларнинг боши ва учларини нурлар орқали туташтириш лозим. Масалан, *1*- кучнинг рақами унинг бошини туташтирувчи нур рақами *1* га мос келиши керак.

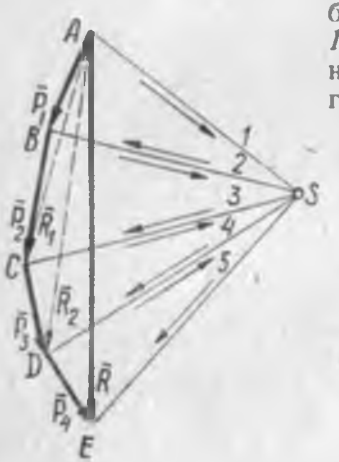



119- шакл.

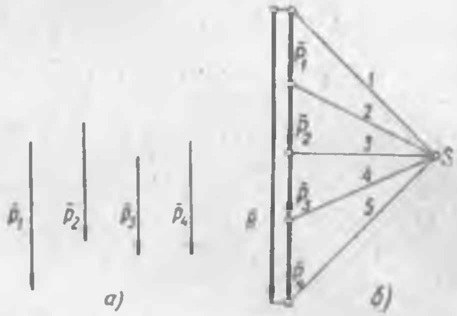
3. Нурларни ўз йўналишида кўчириб, арқон кўпбурчаги қуриш лозим (119- шакл). Бунда *1* нур бирор ихтиёрий нуқтадан, *2* нур эса *1* нурнинг *1*- куч йўналиши билан кесишган нуқтасидан утказилади. Шунга ўхшаш, *3* нур ҳам *2* нурнинг *2*- куч йўналиши билан кесишган нуқтаси орқали ўтказилади. Қолган нурлар ҳам шу тартибда ўтказилиб, Вариньон кўпбурчаги қурилади.

4. Биринчи ва сўнгги нурлар ўзаро кесишгунча давом эттирилиб ва кесишган нуқтаси *K* билан белгиланиб, бу нуқтага тенг таъсир этувчи ўз йўналишида ўтказилади.

Куч ва Вариньон кўпбурчакларидан ўтказилган *1*, *2*, *3*, *4* ва *5* нурлар $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ ва $\bar{P}_4$ кучларнинг (*1*, *2*), (*2*, *3*), (*3*, *4*) ва (*4*, *5*) кучларга ажратилиши натижасида ҳосил булган. Бу кучларнинг *1* ва сўнгги нурлар билан йўналганлигидан бошқа ҳар қайсисида тегишлича иккитадан тенг ва қарама-қарши кучлар йўналган (120- шакл). Шунинг учун улар ўзаро мувозанатлашади. Натижада $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ва $\overline{P}_4$ кучлар *1* ва *5* нурлар билан йўналган кучларга эквивалент бўлади. Бинобарин, Вариньон кўпбурчагидаги *1* ва сўнгги нурларнинг кесишган нуқтаси тенг таъсир этувчи қўйилган нуқтани беради.




120- шакл.



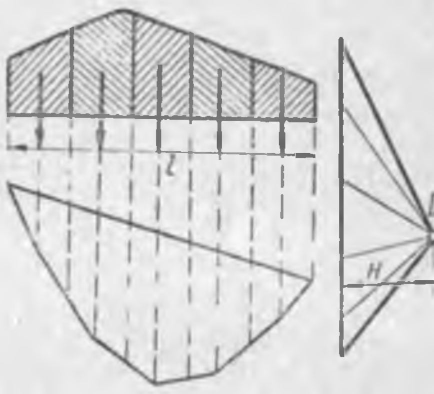

121- шакл.

Берилган кучлардан фақат бир нечтасининг тенг таъсир этувчисини топмоқчи бўлсак, у ҳолда, шу кучларга қурилган кўпбурчакнинг ёпувчиси мазкур кучлар тенг таъсир этувчисининг катталиги ва йўналишини кўрсатади. Бу ёпувчининг боши ва учи билан туташтирилган нурларнинг арқон кўпбурчагидаги кесишган нуқтаси тенг таъсир этувчининг қўйилган нуқтасини белгилайди. 119- шаклда штрих чизиқлар билан ($\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$) ва ($\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$) кучларнинг тенг таъсир этувчилари $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ кўрсатилган.

Энди, график усулда текисликдаги параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг катталиги, йўналиши ва қўйилган нуқтасини топамиз. Мисол учун, бир-бирига параллел $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ва $\overline{P}_4$ кучларни оламиз (121- шакл, *а*). Бу ҳолда куч кўпбурчаги тўғри чизиққа айланиши табиийдир. Куч кўпбурчаги қуриш учун кучларга параллел бир тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ бўйлаб берилган кучларни маълум масштабда кетма-кет қўямиз, уларнинг йиғиндиси тенг таъсир этувчининг катталиги ва йўналишини аниқлайди. Қутбни танлаш ва Вариньон кўпбурчагини қуриш юқоридаги умумий ҳолдан фарқ қилмайди.

## 49- §. Ёйилган кучлар учун арқон кўпбурчаги

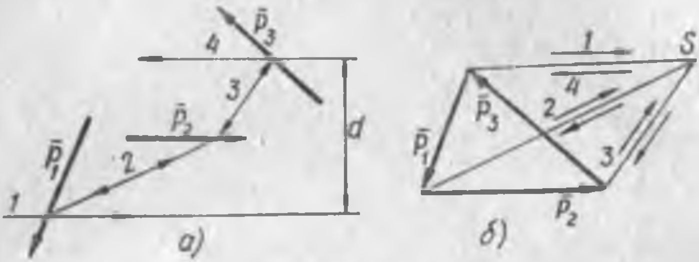
Жисмнинг бир нечта нуқтасига қўйилган — тўпланган кучлар учун чиқарилган арқон кўпбурчагини қуриш қоидасини бирор участкада маълум қонун билан ўзгарувчи ёйилган кучларга татбиқ этамиз. Ёйилган кучларга қурилган арқон кўпбурчаги арқон э г р и ч и з и ғ и г а айланади. Арқон эгри чизиғини қуриш учун ҳалиги участкадаги ёйилган юкни бир нечта оралиққа ажратиб, ҳар қайси оралиқдаги ёйилган юкни унинг тенг таъсир этувчиси билан алмаштириш лозим. Бунинг натижасида ёйилган кучлар системасининг урнига унга эквивалент бўлган маълум оралиқлардаги ва параллел йўналишдаги тупланган кучлар системасини оламиз. Бу янги система учун қурилган арқон кўпбурчагининг ичига чизилган эгри чизиқ арқон чизиғини беради. Мисол учун, интенсивлиги 122- шаклда тасвирланган эгри чизиқ ординатаси билан аниқланадиган ёйилган юкни оламиз. Юкни алоҳида участкаларга ажратиб, унинг ҳар қайси участкадаги қийматини тегишли тенг таъсир этувчиларн билан алмаштириб, штрихлаб қўйилган юзаларнинг оғирлик марказига қуямиз. Бу кучлар учун қурилган арқон кўпбурчаги нуқтали чизиқлар билан тасвирланган. Арқон чизиғини олиш учун, ёйилган юкнинг ҳар иккита қўшни участка чегарасига тегишли нуқталарга уринма қилиб, ички равишда эгри чизиқ ўтказиб, арқон эгри чизиғини оламиз. 122- шаклда у йўғон чизиқ билан тасвирланган.



122- шакл.

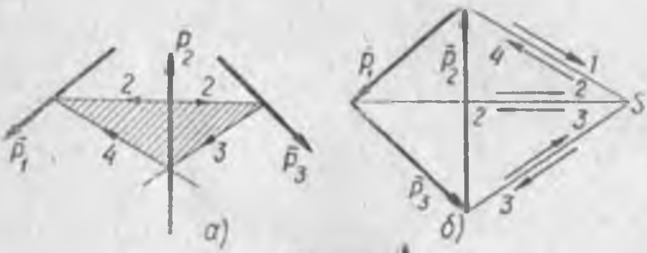
## 50- §. Кучларнинг график мувозанат шарти

Ёпиқ куч кўпбурчагини тузадиган уч кучдан иборат система берилган (123- шакл, *а*). Бу кучлар учун қутб танлаб, *1*, *2*, *3* ва *4* нурларни ўтказамиз (123- шакл, *б*). Шаклда биринчи кучнинг боши билан сўнгги кучнинг учи бир нуқтада бўлгани учун, уларни туташтирувчи нурлар (*1* ва *4*) бир чизиқ буйлаб йўналган бўлади. Бу нурлар арқон купбурчагида бир-бирига параллел бўлса ҳам, бир чизиқда йўналмаган. Иккинчи ва учинчи нурлар билан йўналган кучлар тегишлича тенг ва бир чизиқ устида қарама-қарши томонларга қараб кетгани учун, улар ўзаро мувозанатлашади. Шундай қилиб, бир-бирига тенг ва тескари параллел *1* ва *4* нурлар бўйича йўналган икки кучга эга бўлдик.




123- шакл.

Бу кучлар жуфт ҳосил қилади. Унинг елкасини *d* билан белгилаймиз. Демак, ***куч кўпбурчаги ёпиқ бўлгани билан кучлар мувозанатлашмас экан.*** Энди, қандай қўшимча шарт мавжуд бўлганида, ёпиқ учбурчак тузувчи кучлар системаси мувозанатлашишини текширамиз. Фараз қилайлик,




124- шакл.

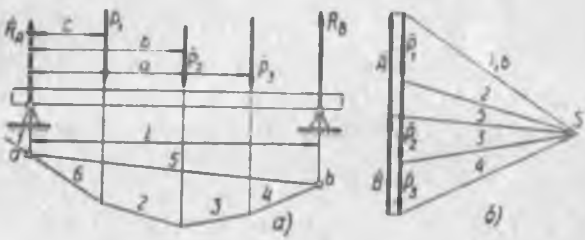
ёпиқ куч учбурчагини тузувчи $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ва $\overline{P}_3$ кучлар системаси берилган. Аммо улар юқоридаги системага қараганда бошқачароқ ўрнашган (124- шакл, *a*). Бу ҳол учун қурилган арқон кўпбурчагининг биринчи ва сўнгги томонлари бир чизиқ устида ётибди (124- шакл, *a*). Арқон кўпбурчагининг бу томонларига мос кучлар катталиги *1* ва *4* нурлар билан тасвирланиб, йўналишлари қарама-қарши бўлгани учун, улар, ўзаро мувозанатлашади.

Демак, кучлар мувозанатда бўлсин учун, ***куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши билан баравар Вариньон кўпбурчаги ҳам ёпиқ бўлиши керак***, бошқача айтганда, *1* нур билан сўнгги нур бир чизиқ устида ётиши керак. *Куч кўпбурчагининг ёпиқлиги бош векторининг нулга тенглигини, Вариньон кўпбурчагининг ёпиқлиги эса бош моментнинг нулга тенглигини кўрсатади.*

## 51- §. Таянч реакцияларини график усулда топиш

Куч ва Вариньон кўпбурчаклари усулини татбиқ этиб, параллел кучлар таъсиридаги икки таянчда ётувчи балканинг $\bar{R}_A$ ва $\bar{R}_B$ таянч реакцияларини график усулда топамиз (125-шакл, *a*).

Балкага қўйилган $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ ва $\bar{P}_3$ кучлар вертикал бўлгани учун реакциялар ҳам вертикал йўналишда бўлади. Балкага





125- шакл.

қўйилган кучлар реакциялар билан мувозанатлашганда, уларга қурилган куч ва Вариньон кўпбурчаклари ёпиқ бўлиши керак. Куч кўпбурчагининг ёпилиш шартидан номаълум реакция $\bar{R}_A$ ва $\bar{R}_B$ лар йиғиндисинингина аниқлай оламиз (125-шакл, *б*). Куч кўпбурчагининг ёпиқлигидан учинчи кучнинг учи билан $\bar{R}_B$ реакциясининг боши ва биринчи кучнинг боши билан $\bar{R}_A$ реакциянинг учини қутб билан туташтирувчи нурлар *4*, *1* ва *6* нурлар йўналишида булади. Куч кўпбурчагида $\bar{R}_B$ реакциянинг учи ёки $\bar{R}_A$ реакциянинг боши маълум бўлмагани учун, бу нуқтани қутб билан бирлаштирувчи нурнинг йўналиши ҳам маълум эмас. Бу нур биз текшираётган ҳол учун *5* дир. Умуман, у, энг сўнгги нурдан илгаригиси бўлиши керак. Бу нурнинг йўналишини, шунинг билан бирга, $R_A$ нинг бошини ёки $R_B$ нинг учини аниқлаш учун Вариньон кўпбурчагининг ёпиқлик шартидан фойдаланамиз.

Вариньон кўпбурчагини қуриш тартибига мувофиқ *5* нур *4*- куч билан *4* нурнинг кесишган нуқтасидан ўтиб, *5*- кучни кесиши керак. Биз текшираётган ҳолда 4- куч ўрнида $\overline{R}_B$ реакция булиб, у билан 4 нурнинг кесишган нуқтаси $b$ ҳарфи билан белгиланган. Шунингдек, 5- куч $\overline{R}_A$ реакция булиб, у билан 6 нурнинг кесишган нуқтаси $a$ билан белгиланган. 5 нурнинг $b$ ва $a$ нуқталардан ўтувчи чизиқ билан йўналиши табиийдир. Қутбдан 5 нурнинг йўналишида параллел чизиқ ўтказиб, $\overline{R}_B$ нинг учини ёки $\overline{R}_A$ нинг бошини топамиз, 4 ва 5 нурлар орасидаги кесма $\overline{R}_A$ реакцияни, 5 ва 6 нурлар орасидаги кесма эса $\overline{R}_A$ реакцияни тасвирлайди.

## 52- §. Текисликда ётувчи кучлар моментини график усулда топиш

Бир текисликда ётувчи бир қанча, масалан, $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$ кучларнинг шу текисликда олинган бирор нуқтага нисбатан моментини топиш керак (126- шакл, $a$). Олдин кучларнинг тенг таъсир этувчисини топамиз. У $\overline{R}$ бўлсин. Бу $\overline{R}$ тенг таъсир этувчи Вариньон кўпбурчагининг биринчи ва сўнгги нурлари кесишган


126- шакл.

$C$ нуқтадан ўтади. Момент марказини бирор $A$ нуқтада олиб, берилган кучлар моментини топиш учун Вариньон теоремасидан фойдаланамиз.

$A$ момент марказидан тенг таъсир этувчининг йўналишига тик тушириб, уни $h$ деймиз. $A$ га нисбатан тенг таъсир этувчи моментининг абсолют қиймати:

$$M_A = hR \tag{52. 1}$$

бўлади.

Бу ерда $R$ нинг қиймати куч кўпбурчагидан (126- шакл, *б*), $h$ эса арқон кўпбурчагидан олинади. Моментни график билан тасвирламоқчи бўлсак, (52. 1) куринишдаги формуладан фойдаланиш ноқулайдир. Шунинг учун бу формулани ўзгартириб, қулайроқ куринишда ёзамиз. Бунинг учун $A$ нуқтадан $R$ га параллел чизиқ ўтказиб, бу чизиқнинг $a$ ва $b$ нурлар билан кесишган кесмасини $y$ билан белгилаймиз. Арқон кўпбурчагининг $a$ ва $b$ томонлари билан $y$ кесмадан ташкил топган $CBE$ учбурчак куч кўпбурчагидаги 1 ва 5 нур ҳамда $\overline{R}$ тенг таъсир этувчилардан ташкил топган учбурчакка ўхшашдир. Бу учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{y}{h} = \frac{R}{H} \text{ ёки } Rh = Hy \tag{52. 2}$$

бўлади.

(52. 2) нинг чап томонини (52.1) нинг ўнг томони билан солиштириб, момент учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$M_A = Hy. \tag{52. 3}$$

Бу ерда $H$ — қутб билан $R$ ўртасидаги оралиқ булиб, куч билан, $y$ кесма эса узунлик билан ўлчанади. Демак, нуқтага нисбатан куч моменти $H$ қутб оралиги билан $y$ кесманинг кўпайтмасига тенг экан. $A$ момент марказининг қўзғалиши натижасида моментнинг ўзгаришини тасвирлаш учун $a$ ва $b$ нурлар билан чегараланган текислик $y$ га параллел чизиқлар билан штрихлаб кўрсатилади.

$H$ қутб оралиғи ўзгармас сон бўлганидан момент $y$ кесмага пропорционал равишда ўзгаради. Кучлардан фақат бир нечтасининг, масалан, $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларнинг моментини топмоқчи бўлсак, $a$ ва $b$ нурлар ўрнига, бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқловчи $a$ ва 3 нурларни оламиз. Бу ҳол учун момент графиги 126- шакл, $a$ нинг чап томонида $\overline{P}_1$ ва $\overline{P}_2$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлган штрих чизиққа параллел — $a$ ва 3 нурлар кесишган нуқтадан ўтган штрих чизиқ билан тасвирланган.

## 53- §. Параллел кучларнинг моментлари

Кучлар параллел бўлганда ҳамма группа кучлар учун тенг таъсир этувчининг йуналиши бир хилда бўлади. Бинобарин, моментларни тасвирловчи штрихларнинг йуналиши ҳам бир хилда бўлади. Шунинг учун, бир график ёрдами билан бир қанча группа кучлар моментини тасвирлай оламиз. Бирор ихтиёрий $A$ нуқтадан кучларга параллел ўтказилган чизиқ арқон кўпбурчаги нурлари билан $BC$, $BD$ ва

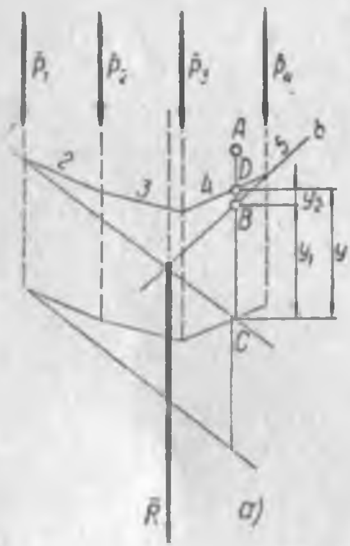
*CD* кесмаларни ташкил этади. Бу кесмалар ёрдами билан *A* нуқтага нисбатан барча ёки бир нечта куч моментларини топа оламиз (127- шакл, *a*). (52. 3) га мувофиқ ҳамма кучларнинг *A* нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиси қуйидагича ифодаланади:

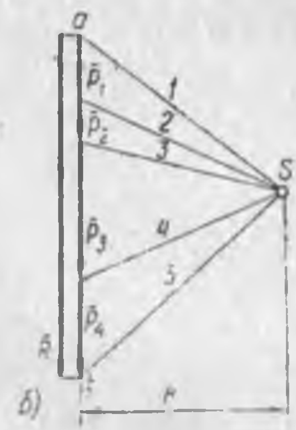
$$M_A = BC \cdot H = y_1 \cdot H. \qquad (53.\ 1)$$

*A* нуқтанинг чап томонидаги кучлар моментларининг йиғиндиси бундай ёзилади:

$$M_A = DC \cdot H = -y \cdot H. \qquad (53.\ 2)$$

Бу ерда *A* атрофида соат стрелкасининг айланишига қарши томонга айланишга интиладиган момент манфий ишора билан олинди. Бундан ташқари, чап томондаги кучлар учун 4 нур охирги нур ҳисобланади. *A* нуқтанинг ўнг



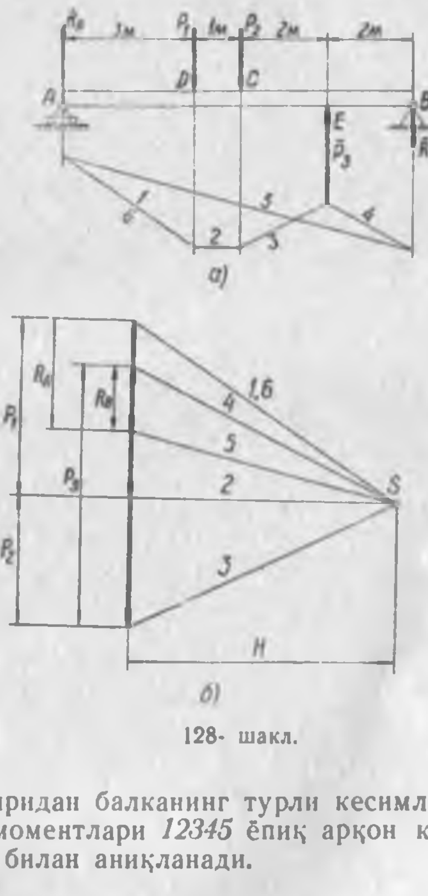




127- шакл.

томонидаги $P_4$ кучнинг моменти бундай ёзилади:

$$M_A = BD \cdot H = y_2 H. \qquad (53.\ 3)$$

*A* нуқта куч текислиги бўйича қўзғалса, у, кучлар ўртасидаги оралиқнинг биридан иккинчисига ўтади. Бунинг натижасида момент марказига нисбатан кучлар группаси ўзгариб, чап группа кучлардан ўнгга ёки ўнг группа кучлардан чапга ўтади. *y* кесма ҳамма вақт Вариньон кўпбурчагининг энг кейинги томони билан навбатдаги томони орасида бўлишини 127- шакл, *a* дан кўриш мумкин. Мувозанатлашган кучлар системаси учун чап томондаги кучлар моменти ўнг томондаги кучлар моментига тенг бўлиб, ишоралари ҳар хил бўлиши керак. Бу ҳолда Вариньон кўпбурчагининг энг кейинги томонлари бўлган *a* ва *b* нурлар бир чизиқ устида ётади. 127- шакл, *a* да мувозанатлашган куч-




128- шакл.

лар куч таъсиридан балканинг турли кесимларига нисбатан олинган куч моментлари *12345* ёпиқ арқон кўпбурчагининг ординаталари билан аниқланади.

**35- масала.** 128- шаклда кўрсатилган балканинг $P_1 = 4$ *т*, $P_2 = 3$ *т*, $P_3 = 6$ *т* кучлари таъсиридан ҳосил бўлган реакциялари ва *C*, *E*, *D* кесимларидаги моментлар график усулда топилган:

$$R_A = 5\ т,\ R_B = -3\ т,$$

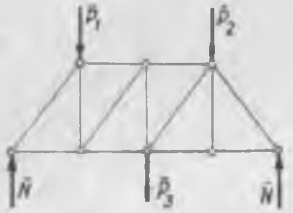
$$M_C = 9{,}6\ т.м,\ M_E = -6\ т.м,\ M_D = 12\ т.м.$$

Масаланинг график ечилишини мустақил равишда такрорлашни ўқувчиларга тавсия қиламиз.

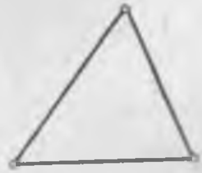
## 54- §. Фермалар мувозанати

Стерженларнинг шарнирлар ёрдами билан геометрик ўзгармас қилиб туташтирилишидан ҳосил бўлган конструкция ферма дейилади. Стерженларнинг учларини туташтирган нуқта тугун (узел) деб айтилади.

Фермага қўйиладиган кучлар фақат шарнирларга қуйилган деб фараз қилинади (129- шакл). Шарнирларга қўйилган кучлар таъсиридан ферманинг стерженлари фақат чўзилиш




129- шакл.



130- шакл.

ёки сиқилишга қаршилик кўрсатади, чунки стержень учлари тугунда шарнир воситаси билан туташтирилганидан, шарнир ўқи атрофида эркин айланиши мумкин.

Фермалар статик аниқ ва статик аниқмас бўлиши мумкин. Ферма статик аниқ бўлса, унинг бирорта стерженини ҳам олиб ташлаб бўлмайди: битта стержень олиниши биланоқ унинг бикрлиги бузилиб, геометрик узгарувчи механизмга айланади. Ферманинг бирорта стержени олиб ташланганда, унинг бикрлиги бузилмаса, яъни геометрик узгармаслигича қолаверса, бундай фермалар статик аниқмас ферма дейилади. Масалан, туртбурчакдан иборат бўлган ферманинг икки диагонали бўлиб, ўтказилган стерженлардан бирини олиб ташласак, бу тўртбурчакнинг бикрлиги бузилмайди. Шунинг учун, тўрт бурчакли ферма учларини диагоналлар билан туташтирганда, уларнинг бири ортиқча бўлиб, туртбурчак статик аниқмас фермага айланади.

Бу ерда фақат статик аниқ фермаларни ҳисоблаш усуллари билан таништирамиз. Ферма шарнирларининг сони $n$ булса, ферма статик аниқ бўлиши учун ундаги стерженлар сони қанча бўлишини текширамиз. Ихтиёримиздаги шарнирлардан иккитасини олиб, уларни бир стерженнинг учларига жойлаймиз. Қолган $n-2$ шарнирларнинг ҳар бирини олиб, олдинги икки шарнирга қушмоқчи бўлсак, шакл геометрик узгармас бўлиши учун, иккита қўшимча стержень талаб қилинади (130- шакл). Демак, қолган $n-2$ шарнирларни туташтириш учун $2\ (n-2)$ стержень зарур.

Шундай қилиб, шарнирдан геометрик ўзгармас шакл тузиш учун:

$$m = 2(n-2)+1 = 2n-3 \qquad (54.\ 1)$$

стержень керак бўлар экан.

Эркин статик аниқ ферма бир-бири билан мувозанатлашувчи текис кучлар таъсирида бўлса, ферма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш мумкин. Статик аниқ ферма боғланишда бўлиб, боғланиш реакцияларининг сони 3 тадан ошмаса, улар мувозанат тенгламаларидан аниқланади. Фермага қўйилган кучлар учун мувозанат тенгламалари тузганда фермани абсолют қаттиқ жисм деб қараш керак.

Ферма стерженларида пайдо бўладиган зўриқишларни, яъни ферма стерженларини сиқувчи ёки чўзувчи кучларни аниқлашнинг бир қанча усуллари бор. Биз олдин улардан энг аҳамиятга эга бўлганлари — тугунни кесиш ва Кремон—Максвелл усуллари устида тўхтаб ўтамиз.

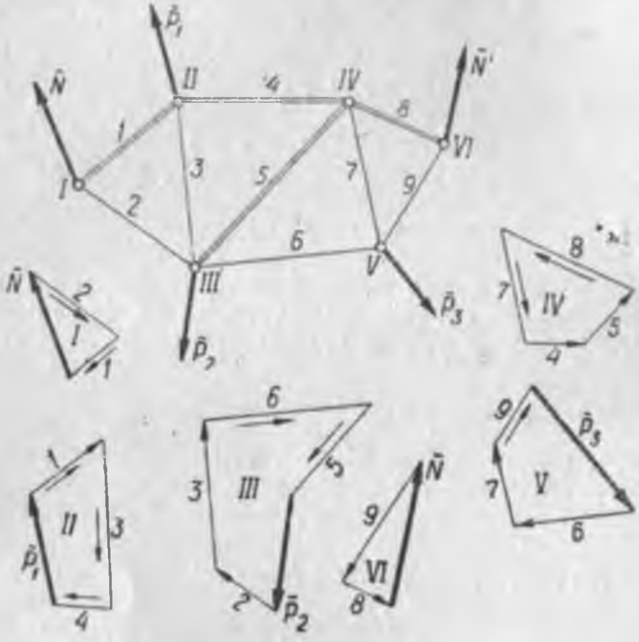
100

## 55- §. Тугунни кесиш усули

Аввало, берилган ферманинг тугунларини рим рақамлари билан, стерженларни эса араб рақамлари билан белгилаймиз. Ферма стерженларидаги зўриқишларни топишнинг энг оддий усули тугунни кесиш усулидир. Ферма бевосита қўйилган $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ кучлар билан $N$ ва $N'$ таянч реакциялари таъсиридан мувозанатда туради (131- шакл). Бу ферма стерженларидаги зўриқишларни топиш учун фермадан бирор тугунни бир ёпиқ контур ёрдами билан кесамиз. Кесишни шундай тугундан бошлаш керакки, ўтказилган контур фақат номаълум зўриқишли иккитадан кўп бўлмаган стерженнигина кесиб ўтсин. Бундай тугун биз текшираётган ҳолда *I* билан кўрсатилган. Тугунни фермадан ажратилган деб ҳисоблаб, унга қўйилган кучни кесилган стерженлардаги *1* ва *2* зўриқиш билан мувозанатлаштирамиз. Бунинг учун *N*, *1* ва *2* кучларга ёпиқ куч учбурчагини қуриб, бу *I* учбурчакдан *1* ва *2* стерженлардаги зўриқишларни топамиз. Бу *I* куч учбурчагидан *1* стерженнинг сиқилишини ва *2* стерженнинг чўзилишини кўрамиз. *I* куч учбурчагида тасвирланган *1* ва *2* кучлар стерженлардаги зўриқишларнинг *I* тугунга кўрсатган реакциясидир. *I* реакция тугунга қараб йўналганлиги учун стержендаги зўриқиш унга тескари йўналган. Демак, стержень сиқилади. Келгусида ферма стерженларининг сиқиладиганини икки қават чизиқ билан тасвирлаймиз. *2* реакция куч учбурчагида текширилаётган

*I* тугунга қараб йўналмаган. Шунинг учун унга тегишли *2* зўриқиш стерженни чўзади.

*II* тугунга ўтамиз. Бу тугундан ҳам бир контур ўтказамиз. Бу контур уч стерженни кесиб ўтади. Бироқ бу стерженлардан *1* даги сиқувчи куч олдинги тугуннинг мувоза-




131- шакл.

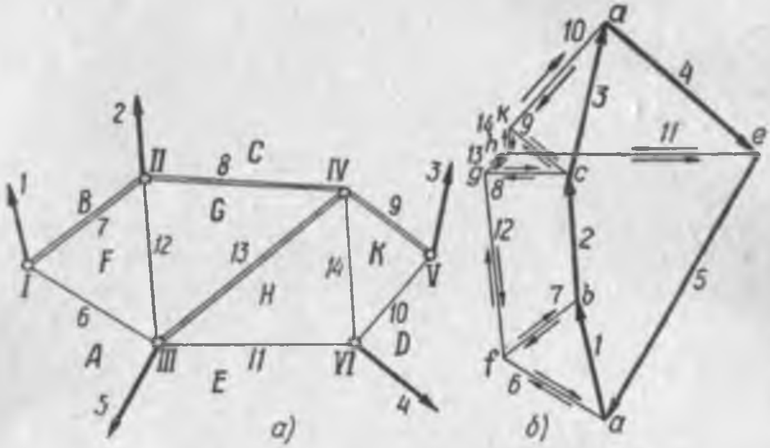
натини текширганимизда аниқланган. *II* тугунга қўйилган $\overline{P}_1$ куч ва *1* стержендаги зўриқиш *3* ва *4* стерженлардаги зўриқишлар билан мувозанатлашади. Бунинг учун бу тўртта кучга *II* ёпиқ куч кўпбурчагини қурамиз. Бу куч кўпбурчагидан *3* ва *4* зўриқишларни аниқлаймиз. *II* куч кўпбурчагидан кўрамизки, *3* стержень чўзилишга, *4* стержень эса сиқилишга ишлайди. Кейинги *III* ва *IV* тугунлардан *III* ни текширамиз, чунки *IV* тугунга зўриқишлари номаълум учта стержень, *III* га эса зўриқишлари номаълум иккита стержень киради, холос. Шунинг учун, бу тугунга қўйилган кучларга *III* куч кўпбурчагини қуриб, *5* ва *6* стерженлардаги зўриқишларни топамиз. Бу ҳолда *5* стержень сиқилади, *6* стержень эса чўзилади. Шунингдек, *IV*, *V* ва *VI* тугунлар учун куч кўпбурчагини қуриб, тегишли стерженлардаги зўриқишларни ва уларнинг чўзилиш ҳамда сиқилишини аниқлаймиз. Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, V тугундаги 9 зўриқишдан бошқаси олдинги тугунларнинг мувозанатидан аниқланган. 9 зўриқишни маълум нуқталарни туташтириш билан аниқлаш мумкин, яъни у, $\overline{P_3}$ кучнинг боши ва 7 зўриқишнинг учини туташтириш билан топилади. Бу зуриқишнинг тегишли стерженга параллел йўналиши олдинги тузилган куч кўпбурчакларининг тўғрилигини тасдиқлайди. Энг кейинги VI тугундаги зўриқишлар илгариги тугунларнинг мувозанатидан аниқланган. Бу тугунга қўйилган кучлар учун қурилган куч кўпбурчагининг ёпилиши илгариги қурилган куч кўпбурчакларининг тўғри эканлигидан далолат беради.

## 56- §. Кремон—Максвелл диаграммаси

Тугунларни кесиш усули қулай бўлса ҳам, чизмачилик нуқтаи назаридан ноқулайдир. Кесиш усулини қўллаииб тузилган куч кўпбурчакларини сочиб қўймай, уларни бир шаклга тўплаш мумкин. Ҳосил бўлган шакл ферма ва унга қўйилган кучлар билан ўзаро муносабатда бўлади. Бу шаклларнинг ўзаро муносабати назариясини энг аввал К. Максвелл (1831 — 1879) текширган эди. Бу назарияни математика профессори Кремон (1830 — 1903) қулай тарзда таърифлаб берган. Шунинг учун, бу шакл Кремон — Максвелл диаграммаси дейилади. Бу назарияни англатиш учун яна юқорида текширилган фермани оламиз (132- шакл, *а*).

Тугунларга таъсир этувчи барча кучларни ферманинг ташқи томонига жойлаштирамиз. Уларни тегишлича *1,2,3,4* ва *5* рақамлар билан белгилаймиз. Шунингдек, ферма стерженларининг зуриқишларини ҳам юқоридаги кучларни кўрсатувчи рақамларнинг давоми билан белгилаймиз (биз текшираётган ҳолда улар *6, 7, 8, 9, ..., 14* рақамлар билан белгиланган). Фермани қўйилган ташқи кучлар билан биргаликда бир бутун шакл деб қараймиз. Бу шаклнинг *5, 6, 1* кучлар билан чегараланган соҳасини — *A*; *1, 7, 2* кучлар билан чегараланган соҳасини — *B* ва энг кейинги *4, 11, 5* кучлар билан чегараланган соҳасини *E* билан белгилаймиз. Тугунга қуйилган *1, 2, 3, 4* ва *5* кучлар билан чегараланган ва бир томони чексиз бўлган соҳалар ташқи соҳалар дейилади. Булардан ташқари, яна ички соҳалар ҳам бор. Улар шаклнинг *6, 7, 12* томонлари билан чегараланган — *F*; *12, 8, 13* томонлар билан чегараланган — *G*; *13, 14, 11* томонлар билан чегараланган — *H* ва *14, 9, 10* томонлар билан чегараланган — *K* соҳалардир. Бу ҳамма ички ва ташқи соҳалар бир хилда аҳамиятга эга.

Энди *1*, *2*, . . . , *14* кучларнинг мувозанат шартини тасвирловчи куч купбурчагини қурамиз, яъни ферманинг ҳамма тугунларига қўйилган ташқи ва ички кучлар ўзаро мувозанатлашиб, ёпиқ куч кўпбурчагини ташкил этиши табиийдир. Бу кучларга қурилган ёпиқ куч кўпбурчаги 132- шакл, *б* да *abcde* йўғонроқ чизиқ билан тасвирланган. Шуниг учун, Кремон — Максвелл диаграм-




132- шакл.

масини қуришни ташқи кучларнинг куч кўпбурчагини қуришдан бошлаймиз. Уни қуйидаги тартибда бажарамиз: *1* куч *A* ва *B* соҳаларни чегаралагани учун унинг бошини *a*, учини *b* деймиз. Тугунга қўйилган кучлар учун куч кўпбурчагини қуришда кучни ўз йўналишида олиб, бир соҳадан иккинчи соҳага ўтишда тугун атрофида соат стрелкаси айланиши бўйича ўтиш керак, соҳаларни белгиловчи катта ҳарфларни диаграммада тегишлича кичик ҳарфлар билан ёзамиз. Диаграммада *b* нуқтадан *2* кучга параллел чизиқ ўтказиб, бу чизиқ бўйича шу кучнинг катталигини қўйиш керак. Фермада бу куч *B* ва *C* соҳаларни чегаралагани учун, диаграммада унинг учини *c* билан белгилаймиз. Ҳамма куч учун куч кўпбурчагини қуришни шу тартибда давом эттирсак, сунгги *5* кучнинг боши *e* да бўлиб, охири *a* га келиб тўхтайди, чунки бу охирги куч *E* соҳа билан *A* соҳани чегаралайди. Фермани айланганимизда ташқи кучларни қандай тартибда учратсак, диаграммада ҳам улар шу тартибда қўйилади. Келгусида ҳамма вақт соат стрелкаси айланиши томонига қараб айланамиз.

Ташқи кучлар кўпбурчаги чизилганидан кейин, тугунларни кеса бошлаймиз. Яна илгаригидек, қайси тугунда стерженларнинг сони иккита бўлса, кесишни шу тугундан бошлаймиз. Текшираётган ҳолда, бу *I* тугундир (132- шакл, *а*). Бу *I* тугунга қўйилган кучлардан *1* кучнинг ҳолати диаграммада *ab* кесма билан тасвирланган. *7* кучни қуриш учун *b* нуқтадан *7* стерженга параллел чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ устида *f* нуқта ётиши керак, чунки *7* стержень фермада *B* ва *F* соҳаларни чегаралайди. Шунингдек, *6* стержендаги куч ҳам *F* ва *A* соҳаларни чегаралайди. Шунинг учун *а* нуқтадан *6* стерженга параллел чизиқ утказсак, бу чизиқ устида ҳам *f* нуқта ётиши керак. *b* ва *а* нуқталардан *7* ва *6* стерженларга ўтказилган параллел чизиқлар *f* нуқтани белгилайди, яъни бу чизиқларнинг кесишган жойи нуқтани беради. Шундай қилиб, ёпиқ *abf* куч учбурчаги ҳосил бўлди. Бу куч учбурчаги ферманинг *I* тугунига қўйилган *1*, *6* ва *7* кучларга мосдир. Бу учта кучдан *1* нинг катталиги ва йўналиши маълум. Қолган *6* ва *7* кучларнинг катталик ва йўналишларини шу кучларга қурилган куч учбурчагининг ёпилиш шартидан аниқлаймиз. Бу кучлар бирин-кетин йўналишда *abf* учбурчакни айланиши керак. Бундан *7* стерженнинг сиқилишини, *6* стерженнинг эса чўзилишини кўрамиз. Ферманинг *I* тугунига диққат билан қараб, унинг атрофидан соат стрелкаси айланиши билан ўтсак, *A*, *B* ва *F* соҳалар ҳам шу тартибда учрайди.

*Энди, II (7, 2, 8, 12) тугунга ўтамиз.* Қавс ичида шу тугунга қўйилган кучлар кўрсатилган. Бу тугундаги кучлардан *F* ва *B* соҳаларни чегараловчи *7* куч ҳамда *B* ва *C* соҳаларни чегараловчи *2* куч диаграммада тегишлича *fb* ва *bc* кесмалар билан белгиланган. Бу кучлар *8* ва *12* кучлар билан мувозанатлашади. *8* куч *C* ва *G* соҳаларни чегаралагани учун уни диаграммада *с* нуқтадан ўтказиш керак. Шунингдек, *12* куч *F* ва *G* соҳаларни чегаралагани учун уни ҳам диаграммада *f* нуқтадан ўтказамиз. Бу икки нуқтадан ўтказилган чизиқларнинг кесишган жойи *g* нуқтани аниқлайди. *II* тугун учун қурилган *fbcg* куч кўпбурчагининг ёпилиш шартидан *8* ва *12* кучларнинг катталик ва йўналишини аниқлаймиз. Тугун қўйилган кучларнинг йўналишини қуйидагича белгилаш мумкин. Тугун атрофида соат стрелкаси айланган томонга қараб ўтишда соҳалар қандай тартибда учратилса, тугунга қўйилган кучлар учун қурилган кўпбурчакнинг шу соҳаларга тегишли нуқталари ҳам худди шундай тартибда учраши керак. *I* тугун учун *7* кучнинг катталиги ва йўналиши *bf* вектор билан, *II* тугун учун эса *fb* вектор билан белгиланади. Бу ҳол диаграммада кучлар бўйлаб қўйилган стрелкалар билан кўрсатилган.

*II* тугун учун *cg* ва *gf* векторлар *8* стерженнинг сиқилганини ва *12* стерженнинг чўзилганини кўрсатади.

*III (5, 6, 12 13, 11) тугунга ўтамиз.* Бу тугундаги кучлардан *5, 6, 12* маълум бўлиб, улар ёпилмаган *eafg* кўпбурчакни тузади. Бу кўпбурчак юқоридаги муҳокама асосида ва *e* нуқталардан ўтувчи *13* ва *11* кучлар билан ёпилиб, нуқтани белгилайди. Ферманинг *K* соҳасини тасвирловчи — диаграмманинг энг кейинги *k* нуқтаси *IV (8, 9, 14, 13)* тугунни текширганимизда *h* ва *d* нуқталардан ўтувчи *14* ва *10* кучларнинг кесишган нуқтаси билан аниқланади.

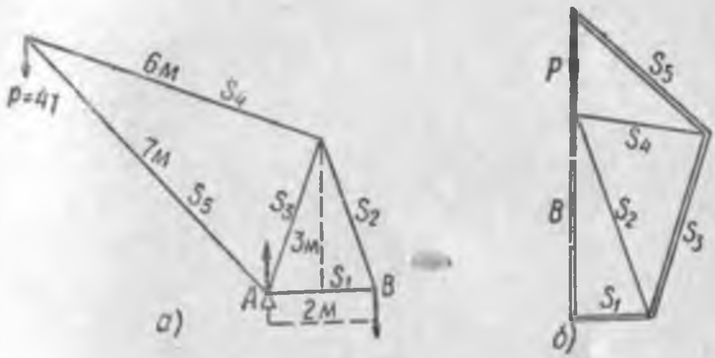
*V (10, 9, 3) тугунга ўтамиз.* Бу тугунга тегишли куч кўпбурчагини қуриш учун *k* нуқтани *d* билан туташтириш кифоя, чунки олдинги тугуннинг мувозанатидан *10* куч аниқланган (*V* тугунга нисбатан бу куч тескари йўналишда бўлиши керак). Мувозанат шартини қаноатлантириши учун *9* куч вектор билан ифодаланиши керак. Иш *VI (14, 10, 11, 4)* тугунни кесиш йўли билан тугайди. Бу тугунга тегишли куч кўпбурчаги диаграммада қурилиб қўйилган. *У ehkd* куч кўпбурчагидир. Бу куч кўпбурчагида ҳамма кучлар тугунни ўраган соҳаларга тегишли нуқталар орқали ўтган. Кучлар қўйилган тугун атрофида айланганда соҳалар қай тартибда учраса, куч кўпбурчагида кўрсатилган стерженлар зўриқишларининг йўналиши ҳам шу тартибда бўлиши керак. Кўрамизки, ферма тугунига қўйилган кучлар ва бу ферма учун қурилган Кремон—Максвелл диаграммаси ўзаро муносабатдаги шакл бўлар экан. Ферманинг тугуни диаграммадаги куч кўпбурчагига мос келади: тугунда қанча куч кесишса, диаграммада шунча куч кўпбурчагининг шу кучларга параллел томонлари бўлади. Ферма соҳалари диаграмма тугунига мос келади. Соҳа нечта томон билан чегараланган бўлса, диаграммадаги соҳани тасвирловчи нуқталарда ҳам шунча мазкур томонларга параллел кучлар учрашади.

Юқорида тугунларни кесиш билан ферма стерженларидаги зўриқишларни топганимизда, уларнинг ишораси ҳақида, яъни стерженларнинг сиқилиши ёки чўзилиши ҳақида тегишли маълумот берган эдик.

Энди, бу ҳолни Кремон—Максвелл диаграммаси учун қуйидагича таърифлаймиз.

Стержендаги зўриқиш ишорасини аниқлаш учун, биринчидан, энг аввал бу стержень қайси тугунга нисбатан текширилаётганлиги кўз олдига келтирилиши лозим. Сўнгра, у қандай соҳаларни чегараласа, шу соҳаларни белгиловчи ҳарфлар билан диаграммада бу тугундаги кучларни кўрсатиш керак. *Диаграммада стержендаги зўриқишни тасвирловчи вектор тугунга қараб йўналган бўлса, тегишли стержень сиқилади, тугундан кетган бўлса, чўзилади.* Юқорида текширган мисолимизда *13* стержень сиқилади. Бу стерженни *III* тугунга нисбатан текширсак тугунни соат стрелкаси айланиши билан ўтганимизда у, *G* ва *H* соҳаларни чегаралайди. Диаграммада бу стерженга тегишли зўриқиш *gh* вектори *III* тугунга қараб йўналади.

133- шакл, *а* да тасвирланган ферма учун 133- шакл, *б* да Кремон—Максвелл диаграммаси қурилган. Бу диаграммадан




133- шакл.

ташқи реакция кучлари ва ферма стерженларида ҳосил бўлган зўриқишларнинг қиймати қуйидагичадир:

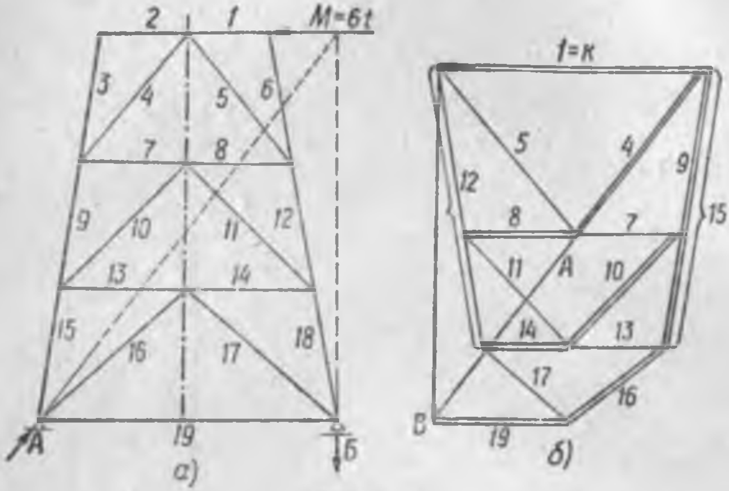
$$R_A = 13{,}049\ т;\ R_B = 9{,}049\ т;\ S_1 = 3{,}016\ т;\ S_2 = 9{,}538\ т;$$
$$S_3 = 7{,}176\ т.\qquad S_4 = 5{,}742\ т;\ S_5 = 8{,}179\ т.$$

Ферма стерженларининг узунлиги метр билан, юклар эса тонна билан ифодаланган.

134- шакл, *а* да тасвирланган ферма учун 134- шакл, *б* да Кремон—Максвелл диаграммаси тасвирланган; у диаграммадан ферма стерженларидаги зўриқишларнинг қиймати қуйидагича:

$$R_A = 9{,}9\ т,\ R_B = 7{,}8\ т;\ P = 6\ т;\ S_2 = S_3 = 0;\ S_4 = S_5 = 4{,}8\ т;$$
$$S_6 = 0;\ S_7 = -S_8 = 2{,}4\ т;\ S_9 = -S_{12} = 3{,}7\ т;$$
$$S_{10} = S_{11} = -3{,}5\ т;\ S_{13} = -S_{14} = 2\ т;\ S_{15} = -S_{18} = 6{,}3\ т;$$
$$S_{16} = -S_{17} = 2{,}5\ т;\ S_{19} = 3\ т.$$

Шу иккита диаграммани қайтадан қуриб, уларнинг тўғри бажарилганига ишониш, тегишли таянч реакциялари билан стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларнинг тўғри аниқланганлигини текшириб кўриш ўқувчиларга тавсия этилади.




134- шакл.

## 57- §. Ферма стерженларидаги зўриқишларни Риттер усули билан аниқлаш

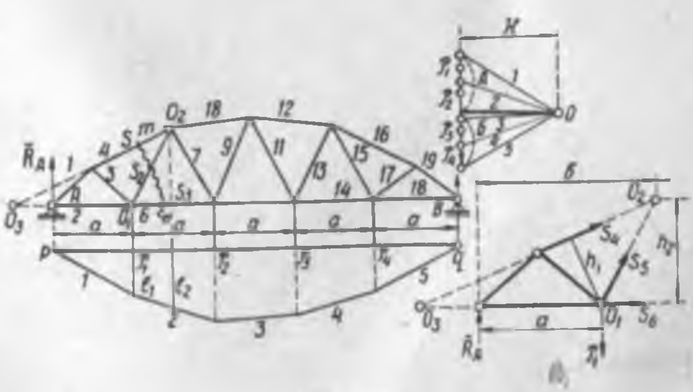
Берилган ташқи кучлар таъсиридан ферма стерженларининг ҳаммасидаги зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса, албатта, Кремон—Максвелл диаграммасини қуриш энг қулай. Аммо ферма стерженларидан баъзи бирида ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса, Риттер усули масаланинг жавобини тезроқ беради. Бу усул шундан иборат: ферма зўриқиши аниқланадиган стержендан ўтувчи бирор *mn* контур билан фикран икки қисмга ажратилиб, унинг бир қисми мувозанати текширилади. Ферма *mn* контур билан фикран икки қисмга ажратилганда, кесилган стерженларнинг сони учтадан ошмаслиги шарт, чунки учтадан ошса, тегишли зўриқишларнинг сони кўпайиб, масала статик аниқмас бўлиб қолади.

Фермани кесмай туриб, олдин унинг таянч реакцияларини аниқлаб олиш зарур. Реакциялар олдиндан аниқланмаса, у ажратилган қисмдаги учта номаълум зўриқиш билан бирга яна статик аниқмас системани ташкил қилади.

Кесилган стерженлар чўзилади деб, зўриқишлар ферманинг ташланган қисми томон йўналтирилади. Масала ечилганда зуриқишлардан бирортаси манфий ишорада чиқиб колса, унинг йуналиши қабул қилинган йуналиш билан қарама-қарши бўлиб, у сиқилади. Ажратилган қисмдаги учта номаълум зўриқиш статиканинг учта мувозанат тенгламасидан аниқланади. Ҳар бир стержендаги зўриқишни статиканинг учала тенгламасини бирга ечиш натижасида эмас, балки бевосита битта тенгламадан аниқлаш учун, мувозанат тенгламаларининг (41. 1) куринишидан фойдаланиш қулай. У ҳолда, ҳар қайси стержендаги зўриқиш бошқа иккитаси кесишган нуқтага нисбатан тузилган момент тенгламасидан аниқланади. Агар стерженлардан иккитаси параллел булса, у ҳолда, статика тенгламаси мазкур параллел стерженларга тик йўналган ўқдаги проекциялари йиғиндисидан аниқланади.

Масалан, 135- шаклдаги ферманинг тугунларига $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ кучлар қуйилиб, шаклда кўрсатилган *4*, *5*, *6* стерженлардаги $S_4$, $S_5$ ва $S_6$ зўриқишларни аниқлаш талаб қилинсин. Аввало, куч ва арқон кўпбурчаклари қурилиб таянч реакциялари аниқланади. *mn* контур билан ажратилган қисмга $R_A$ реакция ва қўйилган $P_1$ кучдан ташқари, аниқланиши зарур бўлган $S_4$, $S_5$, $S_6$ зўриқишлар таъсир курсатаётир. Бу зўриқишларнинг ҳар қайсисини, бир-биридан қатъи назар, аниқлаш учун момент марказларини мувофиқ равишда танлаймиз. Буни аниқлаш учун, $S_5$ ва $S_6$ зурикишларнинг кесишган нуқтаси $O_1$ ни момент маркази қилиб оламиз: у ҳолда:

$$m_{o1}(\overline{R}_A) + m_{o1}(\overline{S}_4) = 0.$$



135- шакл.

135- шакл, $c$ дан:

$$m_{o1}(\bar{R}_A) = R_A a; \; m_{o1}(\bar{S}_4) = S_4 h_1.$$

Шунинг учун:

$$S_4 = -\frac{R_A a}{h_1}$$

бўлади.

Демак, $S_4$ зўриқиш сиқувчи экан, шунинг учун тескари томонга йўналган бўлиши керак.

$S_6$ ни аниқлаймиз. Бунинг учун $S_4$ билан $S_5$ нинг кесишган нуқтаси $O_2$ га нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$m_{o2}(\bar{R}_A) + m_{o2}(\bar{P}_1) + m_{o2}(\bar{S}_6) = 0.$$

135- шаклдан:

$$m_{o2}(\bar{R}_A) = R_A b; \; m_{o2}(\bar{P}_1) = -P_1(b-a);$$

$$m_{o2}(\bar{S}_6) = -S_6 h_2,$$

шунинг учун:

$$S_6 = \frac{R_A b - P_1(b-a)}{h_2}$$

бўлади.

Худди шу тарзда $S_5$, шунингдек, ферманинг бошқа ҳар қандай стерженларидаги зўриқишни ҳам аниқлаш мумкин.

XI БОБ

# ФАЗОДАГИ СТАТИКА

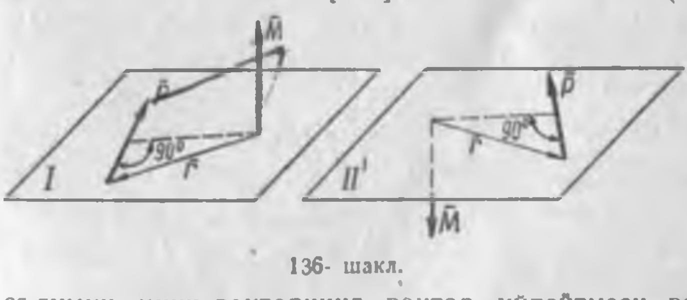
## 58- §. Куч моментининг векторлиги

Фазонинг бирор $A$ нуқтасига қўйилган $\overline{P}$ кучнинг $O$ момент марказига нисбатан моментини оламиз. Бунинг учун мазкур $\overline{P}$ куч ва $O$ момент маркази орқали бир текислик ўтказамиз. Куч қўйилган $A$ нуқтанинг $O$ момент марказига нисбатан радиус-векторини $\overline{r}$ билан аниқлаймиз. Таърифга кўра, нуқтага нисбатан куч моменти бундай ёзилади:

$$M = Ph = Pr \sin (\widehat{\overline{r}, \overline{P}}).$$

Бу ифода $\overline{r}$ радиус-вектор билан $\overline{P}$ куч вектор купайтмасининг абсолют қийматидир. Кўрамизки, нуқтага нисбатан куч моменти куч қўйилган нуқтани аниқловчи радиус-вектор билан кучнинг вектор купайтмасига тенг экан, яъни:

$$\overline{M} = [\overline{r}\ \overline{P}]. \qquad (58.\ 1)$$

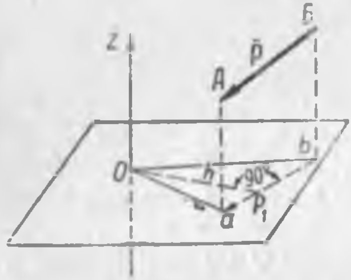



136- шакл.

Маълумки, икки векторнинг вектор кўпайтмаси вектор бўлиб, у мазкур икки вектор ётган текисликка тик бўлади. Шунинг учун куч моменти ҳам вектор бўлиб, у, куч ва момент маркази орқали ўтувчи текисликка тикдир. Унинг йўналиши қуйидагича аниқланади: момент вектори учидан қаралганда кучнинг радиус-векторга қараб айланиши соат стрелкаси айланиши буйича бўлса, момент вектори мусбат, акс ҳолда манфий бўлади. 136- шаклнинг *I* қисмида мусбат, *II* қисмида манфий ишорали момент векторлари тасвирланган.

## 59- §. Ўққа нисбатан куч моменти

*P* кучнинг *z* ўққа нисбатан моментини топиш учун ўққа тик бир текислик утказамиз (137- шакл). Кучнинг текисликка проекциясини туширамиз. Ўқнинг текислик билан кесишган нуқтасини *O* билан белгилаймиз. Кучнинг текисликка туширилган проекциясидан *O* га нисбатан момент оламиз:




137- шакл.

$$m_z(\overline{P}) = ba \cdot h. \qquad (59.\ 1)$$

Чиқарилган бу формулага қуйидагича таъриф бериш мумкин: *кучнинг ўққа тик қилиб олинган текисликка туширилган проекциясидан ўқ билан текисликнинг кесишган нуқтасига нисбатан олинган моменти ўққа нисбатан куч моменти деб аталади.* Куч ўқ атрофида жисмни соат стрелкаси айланиши бўйича бурмоқчи булса, унинг моментини мусбат, акс ҳолда манфий ишора билан оламиз.

Кучнинг уққа нисбатан моменти икки ҳолда: 1) куч ўққа параллел бўлганда ва 2) кучнинг таъсир чизиғи ўқ билан кесишганда нулга тенг бўлади.

## 60- §. Уққа нисбатан куч моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан куч моменти орасидаги муносабат

(59. 1) формулани тубандаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$m_z(\overline{P}) = 2\triangle\ ob\imath \text{ юзи.} \qquad (60.1)$$

$\overline{P}$ кучнинг *O* га нисбатан олинган моменти вектори $\overline{OAB}$ учбурчакнинг юзига тик йўналган. Буни $\overline{L}_0$ билан белгилаймиз (138- шакл).

$\overline{P}$ кучнинг *z* ўққа нисбатан олинган моменти ҳам *oba* текисликка тик бўлади. У векторни $\overline{L}_z$ билан белгилаймиз. Шаклдан кўринадикиқ *OBA* учбурчакнинг *П* текисликка туширилган проекцияси *oba* учбурчакка тенгдир:

$$\text{Пр}\Pi \triangle OBA = \triangle oba. \qquad \text{(a)}$$

(60. 1) га биноан, бу формуланинг ўнг томонини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$2 \triangle oba \text{ юзи} = m_z(\overline{P}) = L_z. \qquad (б)$$

Бундан ташқари:

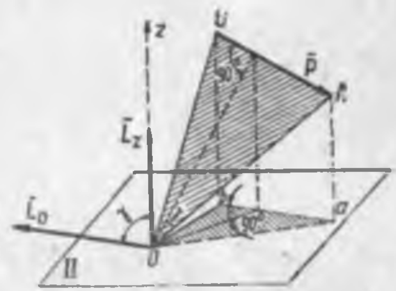
$$2 \triangle OBA \text{ юзи} = m_o(\overline{P}) = L_o. \qquad (в)$$

Бу кейинги (б) ва (в) ифодаларга биноан, (а) формулани:

$$\text{Пр}_z L_O = L_z \qquad (60.\ 2)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Демак, *бирор ўққа нисбатан куч моменти ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан куч моментининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг бўлар экан.* Нуқтага нисбатан олинган момент вектори билан ўқ орасидаги бурчакни $\gamma$ десак, (60. 2)ни қуйидагича ёзиш мумкин:




138- шакл.

$$L_z = L_O \cos\gamma$$

ёки (б) ва (в) формулалар эътиборга олинса:

$$m_z(\overline{P}) = m_O(\overline{P}) \cos\gamma \qquad (60.\ 3)$$

бўлади.


139- шакл.

$L_O$ векторнинг $O$ нуқтадан ўтган $x$, $y$ ва $z$ ўқларидаги проекцияларини $L_x$, $L_y$, $L_z$ десак, 139- шакл ва (60. 2) га мувофиқ:

$$L_x = L_O \cos\alpha,$$
$$L_y = L_O \cos\beta, \qquad (60.\ 4)$$
$$L_z = L_O \cos\gamma.$$

(б) формулага мувофиқ, $L_x$, $L_y$ ва $L_z$ қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$L_x = m_x(\overline{P}),$$
$$L_y = m_y(\overline{P}), \qquad (60.\ 5)$$
$$L_z = m_z(\overline{P}).$$

139- шаклдан:

$$L_O = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}. \qquad (60.\ 6)$$

Демак, ўққа нисбатан олинган куч моментларининг геометрик йиғиндиси нуқтага нисбатан олинган куч моментига тенг бўлар экан. $\cos(\overline{L}_o \hat{x}) = \frac{L_x}{L_o}$ , ,

## 61- §. Ўққа нисбатан куч моментининг аналитик ифодаси

Нуқтага нисбатан куч моментининг вектор ифодаси, (58. 1) га мувофиқ, тубандагича ёзилади:

$$\overline{L}_O = [\overline{r}\,\overline{P}]. \qquad (61.\ 1)$$

$\overline{r}$ радиус-векторнинг координата ўқларидаги проекциялари $x$, $y$, $z$; $\overline{P}$ кучнинг координата ўқларидаги проекциялари эса $X$, $Y$, $Z$ бўлсин. У вақтда бу векторлар $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ бирлик векторлар орқали бундай ёзилиши мумкин:

$$\begin{aligned} \overline{r} &= x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}, \\ \overline{P} &= X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}. \end{aligned} \qquad (61.\ 2)$$

Вектор алгебрасидаги (8. 7) га биноан, $\overline{L}_O$ ни $\overline{r}$ ва $\overline{P}$ нинг проекциялари орқали тубандагича ифодалаш мумкин:

$$[\overline{r}\ \overline{P}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (61.\ 3)$$

$\overline{L}_o$ ни унинг координата ўқларидаги проекциялари орқали тубандагича ёза оламиз:

$$\overline{L}_O = L_x\overline{i} + L_y\overline{j} + L_z\overline{k}. \qquad (61.\ 4)$$

(61. 3) ва (61. 4) ифодаларни (61. 1) га қўйсак, қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$L_x\overline{i} + L_y\overline{j} + L_z\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \text{ ёки}$$

$$L_x\overline{i} + L_y\overline{j} + L_z\overline{k} = (yZ - zY)\overline{i} + (zX - xZ)\overline{j} + (xY - yX)\overline{k}.$$

Бу айниятдан $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ бирлик векторлар олдидаги коэффициентларни солиштириб, $L_x$, $L_y$, $L_z$ лар учун:

$$\begin{aligned} L_x &= yZ - zY, \\ L_y &= zX - xZ, \\ L_z &= xY - yX \end{aligned}$$

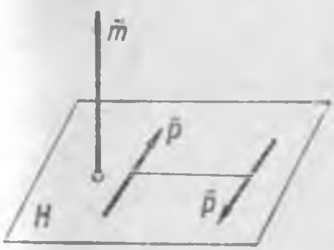
тенгликларни чиқарамиз.

Бу формулани эсда тутиб қолиш учун, унга диққат қилсак, нуқта координаталарининг бирин-кетин келишини курамиз. Айлана чизиб, унинг уч нуқтасига $x$, $y$, $z$ ларни стрелка билан кетма-кет жойласак, 140- шаклда кўрсатилгандек (61. 5) формуланинг тузилишини тушуниш қийин эмас.

140- шакл.

## 62- §. Фазодаги жуфт моментининг векторлиги

Фазодаги жуфт моментининг вектор эканлигини кўрсатиб ўтамиз. Жуфт куч моментининг вектори ҳам, куч моменти каби, жуфт ётган текисликка тик йўналган. Жуфт ётган текисликнинг жуфт таъсиридан айланиш йўналишини текислик тепасидан қараб биламиз. Шунинг учун, жуфт куч моментининг векторини шу жуфт куч ётган текисликка тик қилиб оламиз. Жуфт моменти векторининг куч моменти векторидан фарқи шундаки, бу векторни ўзига параллел ҳолда ихтиёрий жойга кўчириш мумкин. Шунинг учун жуфт моменти вектори **э р к и н  в е к т о р** дейилади. Жуфт моменти векторининг йўналиши ҳам куч моменти векторининг йўналиши каби аниқланади. Жуфт моменти мусбат ишорали булса, уни тасвирловчи векторни учидан қараб жуфт ётган текисликнинг соат стрелкаси айланиши томонига бурилишини кўришимиз керак. 141- шаклда мусбат йўналишдаги жуфт моменти вектори тасвирланган.



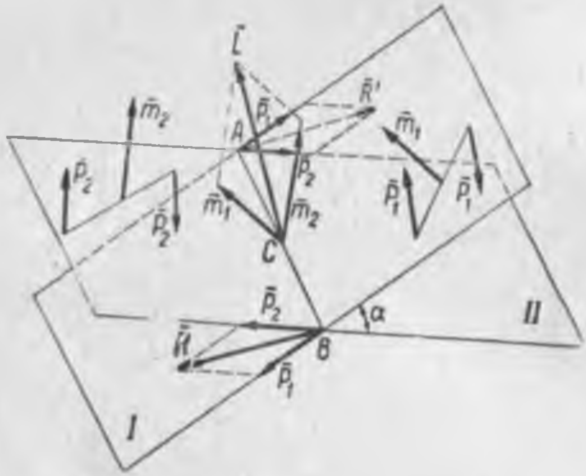
141- шакл.

## 63- §. Фазодаги жуфтларни қўшиш

Аввало, икки кесишувчи текисликда ётувчи жуфтларни қўшишни ўрганамиз. Бир-бири билан кесишувчи $I$ ва $II$ текисликлар берилган. Бу текисликларда моментлари $\overline{m}_1$ ва $\overline{m}_2$ бўлган жуфтлар ётсин (142- шакл). Шу икки жуфт йиғиндисини топамиз. Бунинг учун уларни олдин бир умумий елкага келтирамиз. Бу умумий елка учун $I$ ва $II$ текисликларнинг кесишган $AB$ чизиғини оламиз. Бу $AB$ кесма узунлигини $d$ билан белгилаймиз. $m_1$ ва $m_2$ жуфтларни ўз текислигида $AB$ елкага келтирамиз. Бу жуфтларни ташкил этувчи кучлар, тегишлича $(\overline{P_1}, \overline{P_1})$ ва $(\overline{P_2}, \overline{P_2})$ бўлсин. Уларнинг катталиги қуйидаги формуладан аниқланади:

$$P_1 = \frac{m_1}{d},\ P_2 = \frac{m_2}{d}. \qquad (63.\ 1)$$

Мазкур $(\overline{P_1}, \overline{P_1})$ ва $(\overline{P_2}, \overline{P_2})$ кучлар $A$ ва $B$ нуқталарга қўйилган. Уларни параллелограмм қоидаси билан қўшиб, тенг таъсир этувчиларни тегишлича $\overline{R}$ ва $\overline{R'}$ билан ифодалаймиз.




142- шакл.

Бу тенг таъсир этувчилар бир-бирига параллел ва катталик жиҳатидан тенг бўлганлиги учун улар жуфтни ташкил этади. Бу жуфтнинг моменти:

$$L = Rd. \qquad (63.\ 2)$$

Шаклдан $R$ нинг қийматини топамиз:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha}.$$

Бу ифодани, (63. 1) ни эътиборга олиб (63. 2) га қуйсак:

$$L = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\alpha} \qquad (63.\ 3)$$

формулани оламиз.

Бу формуладан фазодаги жуфтларнинг геометрик равишда қўшилишини кўрамиз.

Энди, бу икки $\overline{m_1}$ ва $\overline{m_2}$ жуфтларнинг тенг таъсир этувчиси бўлган $\overline{L}$ жуфтнинг $(\overline{R}, \overline{R'})$ текисликка тик йўналганлигини исботлаймиз. Жуфт моменти вектори эркин бўлганлигидан, уни ўзига параллел қилиб, ихтиёрий жойга кўчира оламиз. $AB$ кесмаси иккала текисликда ётганидан $\overline{m}_1$ ва $\overline{m}_2$ векторларни $AB$ устида олинган бирор $C$ нуқтага келтирамиз; $\overline{m}_1$ билан $\overline{m}_2$ ўртасидаги бурчак $\alpha$ бўлади. Иккинчидан, $\overline{m}_1 \perp \overline{P}_1$ ва $\overline{m}_2 \perp \overline{P}_2$ бўлганлиги учун:

$$(\widehat{\overline{P}_1, \overline{R}}) = (\widehat{\overline{m}_1, \overline{L}})$$

ва

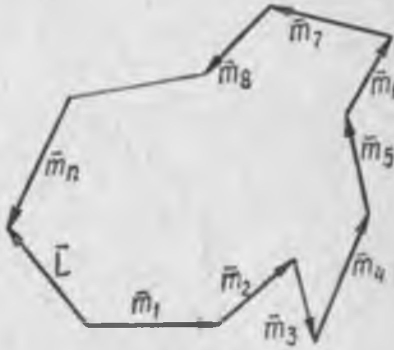
$$(\widehat{\overline{P}_2, \overline{R}'}) = (\widehat{\overline{m}_2, \overline{L}})$$

булади.

Шунга кўра, $L$ ҳам $R$ га тик булади.

(63. 3) ни вектор кўринишида ёзамиз:

$$\overline{L} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2. \quad (63.\ 4)$$



143- шакл.

Фазода бир қанча $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \ldots, \overline{m}_n$ жуфтлар берилган булса (143- шакл), чиқарилган натижага мувофиқ, уларнинг йиғиндисини параллелограмм қоидаси билан (геометрик равишда қўшиб) топишимиз мумкин:

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}. \qquad (63.\ 5)$$

## 64- §. Фазода ихтиёрий йўналишда бўлган бир қанча кучларни қўшиш

Фазода бир қанча $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n$ кучлар берилган (144- шакл). Булар қўйилган нуқталар тегишлича $A, B, C, \ldots, K$ бўлсин. Бу кучлар фазода турли томонларга йўналган. Уларнинг ҳаммасини бирор $O$ нуқтага келтириб, бу нуқтани келтириш маркази деймиз. Кучларни $A, B, C, \ldots, K$ нуқталардан $O$ нуқтага келтирганимизда, Пуассон леммасига мувофиқ, ҳар қайси кучнинг жуфти ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, келтириш натижасида $O$ нуқтада $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, P_n$ кучлар билан $(\overline{P}_1, \overline{P}_1), (\overline{P}_2, \overline{P}_2), \ldots, (\overline{P}_n, \overline{P}_n)$ жуфтларни оламиз. $O$ нуқтадаги мазкур кучлар билан жуфтлар бир текисликда ётмайди. Бу кучлар ва жуфтларни геометрик равишда қўшиб, уларнинг тегишли йиғиндиларини топамиз.

Кучларни $O$ га келтириш натижасида ҳосил бўлган жуфтларнинг моментларини $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3, \ldots, \bar{L}_n$ деймиз. Кучлар билан жуфтларнинг геометрик йиғиндисини тегишлича $\bar{R}$ ва $\bar{L}$ билан белгилаб, уларни қуйидагича ифодалаймиз:

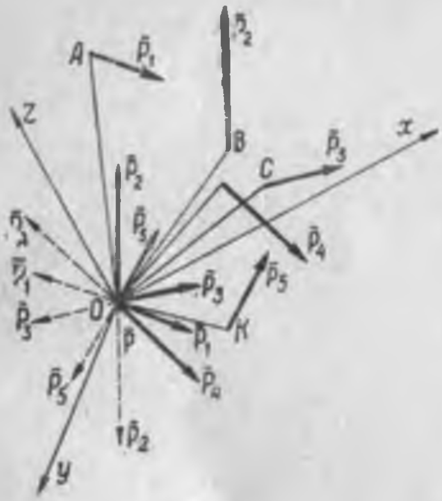
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i, \ \bar{L} = \sum_{i=1}^{n} \bar{L}_i. \tag{64. 1}$$

Бунда:

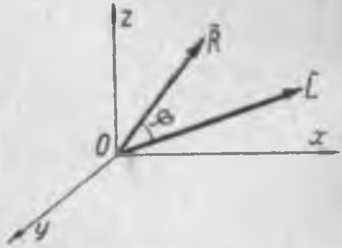
$$\bar{L}_i = m_o(\bar{P}_i). \tag{64. 2}$$

$\bar{R}$ — кучларнинг бош вектори, $\bar{L}$ эса кучларнинг бош моменти дейилади. $\bar{R}$ бош вектор ва $\bar{L}$ бош момент мутлақо ихтиёрий йўналишда бўлганлари учун, улар орасидаги бурчак ҳам ҳар қандай бўлиши мумкин.

Фазода ихтиёрий ўрнашган кучлар системасини бир бош вектор ва бир бош моментга келтирдик. Энди, шу бош




144- шакл.




145- шакл.

вектор ва бош моментнинг абсолют катталик ва йўналишларини топамиз. Бунинг учун $O$ нуқтадан $x$, $y$, $z$ ўқларни ўтказамиз (145- шакл). Бош векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини $R_x$, $R_y$, $R_z$, бош моментникини эса $L_x$, $L_y$, $L_z$ деймиз. Аналитик геометриядан маълумки, ёпувчининг проекцияси тузувчилар проекцияларининг йиғиндисига тенг. Шунга кўра:

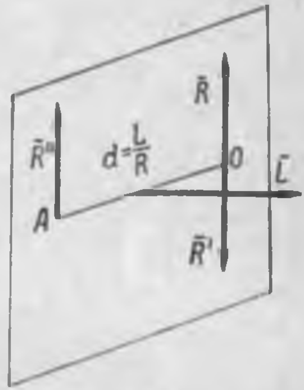
$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \ R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{64. 3}$$

ва

$$L_x = \sum_{i=1}^{n} L_{xi}, \ L_y = \sum_{i=1}^{n} L_{yi}, \ L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{zi}. \tag{64. 4}$$

$\overline{R}'$ куч қолади ва бу куч берилган куч системасига эквивалент ва у қуйилган $A$ нуқта $O$ дан $d = \frac{L}{R}$ масофада бўлади. Шундай қилиб, теорема исботланади.

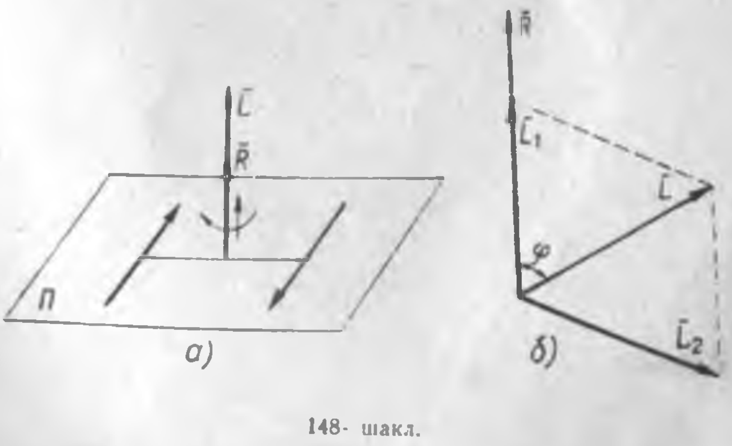
Бош вектор нулга тенг бўлса, кучлар бир бош моментга келтирилиши мумкин. Бу ҳолда жисм мувозанатлашган кучлар билан мувозанатлашмаган жуфтлар ёки фақат жуфтлар таъсирида бўлади. Бу жуфтларнинг бош моменти ўзгармас миқдор бўлиб, келтириш марказига ҳеч қандай боглиқ бўлмайди.




147- шакл.

## 66- §. Кучларни динамага келтириш

Бош вектор билан бош момент бир йўналишда бўлса, бу ҳол динама дейилади (148- шакл). Динама таъсиридаги жисм винт ҳаракати қилади. $\overline{R}$ билан $\overline{L}$ бир-бирига нисбатан ҳар қандай йўналишда бўлса ҳам (фақат бир-бирига тик бўлмаса), уларни динамага келтириш мумкин. $\overline{R}$ билан $\overline{L}$ орасидаги бурчак $\varphi$ бўлсин (148- шакл, б). $\overline{L}$ бош момент векторини икки тузувчига ажратамиз: улардан бири $\overline{L_1}$ ни




148- шакл.

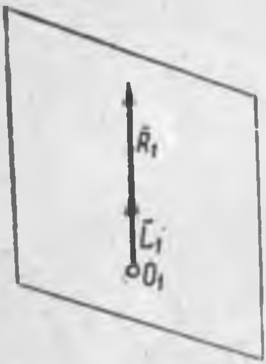
$\overline{R}$ буйлаб, иккинчиси $\overline{L}_2$ ни унга тик қилиб йўналтирамиз. У ҳолда:

$$L_1 = L \cos \varphi,$$
$$L_2 = L \sin \varphi \qquad (66.\ 1)$$

бўлади.

$\overline{R} \perp \overline{L}_2$ бўлгани учун, $(\overline{R}, \overline{L}_2)$ системаси олдинги параграфда исботланган теоремага мувофиқ, $\overline{R} = \overline{R}_1$ бир тенг таъсир этувчига келтирилиб, қуйилган $O_1$ нуқта қуйидаги формула билан аниқланади (149- шакл):

$$OO_1 = \frac{L_2}{R} = \frac{L \sin \varphi}{R}. \qquad (66.\ 2)$$




149- шакл.

Натижада $O$ ва $O_1$ нуқталарда бир-бирига параллел $\overline{L}$ ва $\overline{R}_1$ векторлар қолди. Лекин жуфтнинг $\overline{L}_1$ вектори эркин бўлгани учун уни ўзига параллел равишда истаган жойга келтириш мумкин. Уни $O$ дан $O_1$ га келтирамиз (149- шакл). Шундай қилиб, биз $O_1$ нуқтада динама олдик, лекин бу динаманинг ўқи $O$ келтириш марказидан $OO_1 = \frac{L \sin \varphi}{R}$ узоқликда туради (149- шакл).

$O_1$ нуқтадан ўтувчи $\overline{L}_1$ ва $\overline{R}_1$ векторлар билан бир йўналишда бўлган ўқ кучлар системасининг марказий ўқи дейилади.

Демак, $O_1$ шундай келтириш маркази бўлдики, бу марказ учун система бир йўналишда бўлган бош вектор ва бош моментга келтирилди. Бу $\overline{R}_1$ ва $\overline{L}_1$ векторлар коллениар бўлгани учун, $O_1$ келтириш маркази қуйидаги шарт билан аниқланади:

$$\overline{L}_1 = \overline{R}p, \qquad (66.\ 3)$$

чунки бу векторлар бир йўналишда бўлиб, катталиги пропорционалдир. (66. 3) ни скаляр равишда $\overline{R}$ га кўпайтирамиз:

$$(\overline{L}_1, \overline{R}) = R^2 p$$

ёки

$$p = \frac{(\overline{L}_1, \overline{R})}{R^2}. \qquad (66.\ 4)$$

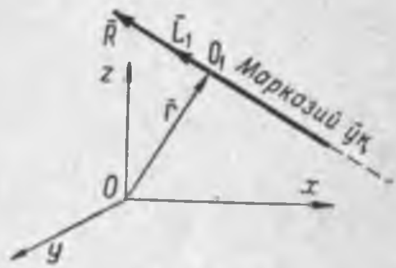
Бу формулани проекциялар орқали ёзамиз:

$$p = \frac{L_{1x}R_x + L_{1y}R_y + L_{1z}R_z}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \qquad (66.\ 5)$$

$p$ миқдор динама винтининг параметри дейилади. Берилган винт учун параметр ўзгармас миқдор бўлиб, узунлик билан ўлчанади.

Энди, марказий ўқ тенгламасини чиқарамиз. Марказий ўқда $O_1$ нуқтанинг ҳолатини $O$ га нисбатан $\overline{OO_1} = \overline{r}$ радиус-вектор билан аниқлаймиз (150-шакл). $O$ координаталар бошига нисбатан момент олинса, у ҳолда тубандаги формулани ёзишимиз мумкин:

$$\overline{L_1} = \overline{L} - [\overline{r}\,\overline{R}]. \qquad (66.\ 6)$$



150- шакл.

Бундай тенгламани марказий ўқ устида ётувчи ҳар қандай нуқта учун ҳам ёза оламиз. Шунинг учун, бу тенглама *марказий ўқнинг вектор кўринишидаги* тенгламасидир.

Марказий ўқнинг координата ўқларига нисбатан тенгламасини чиқариш учун, $\overline{L}$, $\overline{R}$ ва $\overline{r}$ векторларни уларнинг проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\overline{L} = L_x \overline{i} + L_y \overline{j} + L_z \overline{k},$$
$$\overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k},$$
$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Бу ерда $x$, $y$, $z$ — $O_1$ нуқтанинг координаталари. (66. 6) тенгламани координата ўқларига олинган проекциялари орқали ёзишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} L_x - (yR_z - zR_y) &= R_x p, \\ L_y - (zR_x - xR_z) &= R_y p, \\ L_z - (xR_y - yR_x) &= R_z p. \end{aligned} \qquad (66.\ 7)$$

Бу тенгламалардан $p$ параметрни чиқариб юбориб, марказий ўқ тенгламасини оламиз:

$$\frac{L_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{L_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{L_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}. \qquad (66.\ 8)$$

Келтириш маркази фазонинг ҳар хил нуқталарида олинганда $\overline{R}$ билан $L$ орасидаги бурчак нулдан катта қийматга эга бўлади. Агар келтириш маркази учун марказий ўқда ётадиган нуқта олинган бўлса, $\bar{R}$ билан $\bar{L}$ орасидаги бурчак 0 ёки 180° га тенг бўлади:

$$L_{min} = L_1 = L \cos (\widehat{\bar{R}, \bar{L}}). \qquad (66.9)$$

Энди, чиқарилган бу натижалардан фойдаланиб, фазодаги куч системаси учун Вариньон теоремасини исботлаймиз.

Теорема. *Ихтиёрий момент марказига нисбатан куч системаси тенг таъсир этувчисининг моменти шу марказга нисбатан олинган барча кучлар моментларининг вектор йиғиндисига тенг.*

Фараз қилайлик, кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси $\bar{R}$ бўлиб, у $O_1$ га қўйилган бўлсин. У ҳолда:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i$$

булади.

Тенг таъсир этувчини бирор ихтиёрий $O$ нуқтага келтирамиз. У ҳолда $\bar{R}$ бу нуқтага ўз моменти:

$$\bar{L} = \bar{m}_O(\bar{R}) = [\overline{OO_1}, \bar{R}]$$

билан келади.

Иккинчи томондан, $\bar{L}$ кучлар системасининг $O$ га нисбатан бош моменти бўлгани учун, у барча кучларнинг мазкур $O$ га нисбатан олинган моментларининг геометрик йиғиндисига тенглиги, яъни:

$$\bar{L} = \sum \bar{m}_o(\bar{P}_i) = \sum [\bar{r}_i \bar{P}_i]$$

эканлиги маълум.

Кейинги икки тенгламанинг ўнг томонларини солиштириб, фазодаги куч системаси учун Вариньон теоремасини оламиз:

$$m_O(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_o(\bar{P}_i).$$

**35- масала.** Текис системали тўртта $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ ва $\bar{P}_4$ кучларнинг проекциялари ва қўйилган нуқталарининг координаталари қуйидаги жадвалда берилган:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | $-2$ | 3 | $-4$ |
| $Y$ | 4 | 1 | $-3$ | $-3$ |
| $x$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ |
| $y$ | 1 | $-1$ | $-3$ | $-6$ |

Бу система координаталар бошига келтирилиб, марказий ўқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Олдин бош вектор билан бош моментни топамиз:

$$R_x = \Sigma X_i = -2 \text{ кг}. \quad R_y = \Sigma Y_i = -1 \text{ кг}.$$

Булардан бош вектор катталиги:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5} \text{ кг}$$

булади. Энди:

$$L_x = \Sigma m_x(P) = 0,$$
$$L_y = \Sigma m_y(P) = 0,$$
$$L_z = \Sigma m_z(P) = \Sigma(xY - yX) = -12 \text{ кГм}.$$

Булардан бош момент катталиги:

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = 12 \text{ кГм}$$

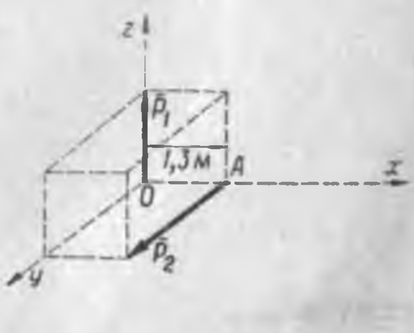
булади.

Бу ҳолдаги марказий уқ тенгламасини топиш учун (66. 8) дан фойдаланамиз. У:

$$x - 2y + 12 = 0$$

булади.

**36-масала.** 151-шаклда курсатилгандек, куб қирралари бўйлаб $P_1 = 8$ *кг*, $P_2 = 12$ *кг* куч таъсир қилади. Кубнинг томони $OA = 1{,}3$ *м*. Бу системани динамага келтириш керак. Марказий ўқ тенгламаси, марказий ўқнинг йўналтирувчи косинуслари ва унинг $xOy$ текислик билан кесишган нуқтасининг координаталари топилсин.




151- шакл.

Ечиш. $O$ нуқтани координаталар боши учун қабул қилиб, кучларни бу нуқтага келтирамиз. Бу нуқта учун бош вектор ва бош моментни топамиз:

$$R_x = \Sigma X = 0, \quad R_y = \Sigma Y = 12 \ кг$$

ва

$$R_z = \Sigma Z_i = 8 \ кг,$$
$$L_x = \Sigma m_x (P) = 0,$$
$$L_y = \Sigma m_y (P) = 0$$

ва

$$L_z = \Sigma m_z (P) = 15{,}6 \ кГм.$$

Демак:

$$R = 14.42 \ кг, \quad L = 15{,}6 \ кГм.$$

Бош векторнинг йўналтирувчи косинуслари:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = 0, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} = 0{,}82, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R} = 0{,}555.$$

Демак, бош вектор $x$ ўқига тик.

Бош моментнинг бош вектор йўналишига олинган проекцияларини топамиз. Бунинг учун олдин $\cos \varphi$ ни ҳисоблаймиз:

$$\cos \varphi = \frac{R_x L_x + R_y L_y + R_z L_z}{RL} = 0{,}555.$$

Бундан фойдаланиб, $L_1$ ни топамиз:

$$L_1 = L \cos \varphi = 8{,}65 \ кГм.$$

Динама параметри:

$$p = \frac{L_1}{R} = 0{,}6$$

бўлади.

Энди, марказий ўқнинг координата ўқлари билан тузган бурчаклари косинусларини топамиз.

Марказий ўқ бош вектор билан колленеар бўлгани учун бош векторнинг йўналтирувчи косинуслари марказий ўқнинг ҳам йўналтирувчи косинуслари бўлади; шунинг учун:

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = 0{,}82, \quad \cos \gamma = 0{,}555.$$

Марказий ўқнинг $xOy$ текислик билан кесишган нуқтасини координаталарини топамиз. Бу ҳолда координата $z = 0$ булади. Марказий ўқ тенгламаси:

$$\frac{L_x - yR_z}{R_x} = \frac{L_y + xR_z}{R_y} = p.$$

Бундан:

$$x = \frac{R_y p - L_y}{R_z} = 0{,}9 \ м, \quad y = \frac{L_x - R_x p}{R_z} = 0$$

келиб чиқади.

Демак, марказий ўқ $\overline{R}$ га параллел бўлиши билан бирга, $x$ ўқини координаталар бошидан 0,9 $м$ масофада кесиб ўтар экан.

## 67- §. Ихтиёрий ўрнашган кучлар таъсиридаги эркин жисмнинг мувозанат шартлари

Фараз қилайлик, жисм бир қанча ихтиёрий $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, ..., $\overline{P}_n$ кучлар таъсирида бўлсин.

Умумий ҳолда бу кучлар бир бош вектор ва бир бош моментга келтирилади. Бу кучларнинг бош вектори $\overline{R}$, бош моменти $\overline{L}$ бўлсин. Жисм бу кучлар таъсирида мувозанатда бўлсин учун, уларнинг бош вектори билан бош моменти алоҳида-алоҳида нулга тенг бўлиши керак:

$$\overline{R} = 0, \quad \overline{L} = 0. \tag{67. 1}$$

Кучлар битта тенг таъсир этувчига келтирилса, яъни бош момент нулга эквивалент бўлса, мувозанат шарти тубандагнча бўлади:

$$\overline{R} = 0. \tag{67. 2}$$

Кучлар келтириш натижасида фақатгина бир бош моментга эквивалент бўлса, мувозанат шарти бундай бўлади:

$$\overline{L} = 0. \tag{67. 3}$$

Энди, мувозанат шартини проекцияда ёзамиз.

Бунинг учун $\overline{R}$ бош вектор ва $\overline{L}$ бош моментнинг қийматларини (67. 1) га қўйсак, олтнта мувозанат шартини оламиз.

$$\begin{aligned} &\Sigma X = 0, \\ &\Sigma Y = 0, \\ &\Sigma Z = 0, \\ &\Sigma m_x(\overline{P}) = 0, \\ &\Sigma m_y(\overline{P}) = 0, \\ &\Sigma m_z(\overline{P}) = 0. \end{aligned} \tag{67. 4}$$

Демак, фазовий ихтиёрий ўрнашган кучлар таъсиридаги жисм мувозанатда бўлсин учун, бу кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларининг ва шу кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида нулга тенг бўлиши керак.

Жисмга қўйилган кучлар бир тенг таъсир этувчига келтирилса, уларнинг мувозанат шартлари:

$$\begin{aligned} &\Sigma X = 0, \\ &\Sigma Y = 0, \\ &\Sigma Z = 0 \end{aligned} \tag{67. 5}$$

кўринишда ёзилиши бизга маълум.

Жисм жуфт кучлар таъсирида булса, бундай жисмнинг мувозанат шартлари тубандагича ёзилади:

$$\Sigma m_x(\overline{P}) = 0,$$
$$\Sigma m_y(\overline{P}) = 0, \qquad (67.\ 6)$$
$$\Sigma m_z(\overline{P}) = 0.$$

Жисм фазодаги параллел кучлар таъсирида бўлса, ўқни кучларга параллел қилиб йўналтирамиз. У вақтда (67.4) тенгламанинг биринчи, иккинчи ва охирги қисми айнан нуль бўлиб, мувозанат шартлари бундай ёзилади:

$$\Sigma P = 0,$$
$$\Sigma m_x(\overline{P}) = 0, \qquad (67.\ 7)$$
$$\Sigma m_y(\overline{P}) = 0.$$

Жисм эркин булмай, боғланишда бўлса, (67. 4)ни ва ундан кейинги тенгламаларни тузишда богланиш реакцияларини эътиборга олиш керак. Боғланиш реакциялари мувозанат тенгламаларига мувофиқлаб қўшилганда, мувозанат шартлари реакцияларини аниқловчи тенгламаларга айланади.

## 68- §. Бир нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари

Бир нуқтаси билан маҳкамланган жисмнинг мазкур нуқтасини координаталар боши учун қабул қиламиз. Жисм шу нуқта атрофида ёки нуқтадан ўтказилган учта координата ўқи атрофида айланиши мумкин (152- шакл).

152- шакл.

Фараз қилайлик, бу жисмга $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ кучлар қўйилган. Жисм координата ўқлари атрофида айланмасдан, тинч туриши учун унга қўйилган барча кучларнинг бу ўқларга нисбатан моментлари йиғиндиси нулга тенг бўлиши керак. Қўзғалмас нуқтанинг реакциясини $\overline{N}$ деймиз. Бу реакциянинг координата ўқларидаги проекцияларини $N_x$, $N_y$ ва $N_z$ билан белгилаймиз. Реакция компонентларининг координата ўқларига нисбатан моментлари нулга тенг. Шунинг учун бу жисмнинг мувозанат шартида реакция кучлари иштирок этмайди, яъни:

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\overline{P}_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\overline{P}_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{P}_i) = 0 \qquad (68.\ 1)$$

бўлади.

Демак, бир қўзғалмас нуқтали жисм мувозанатда бўлсин учун, унга қўйилган актив кучларнинг координата ўқларига нисбатан олинган моментлари йиғиндиси алоҳида-алоҳида нулга тенг бўлиши керак.

Энди, қўзғалмас нуқтанинг реакциясини топиш учун, жисмга қўйилган кучларнинг бош вектори билан бу реакциянинг мувозанатлашиш шарти:

$$\overline{R} + \overline{N} = 0$$

дан фойдаланамиз. Яъни бош вектор реакцияга катталик жиҳатдан тенг бўлиб, қарама-қарши томонга йўналган. Бу реакциянинг катталигини (67. 4)нинг биринчи қисмидан топамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i + \overline{N} = 0,$$

буни координата ўқларидаги проекциялари орқали ёзамиз:

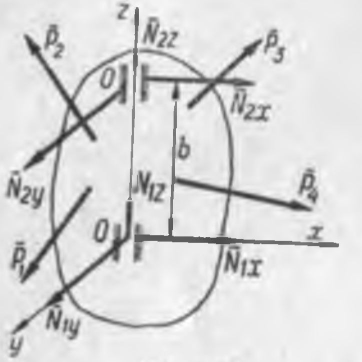
$$\sum_{i=1}^{n} X_i + N_x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i + N_y = 0, \qquad (68.\ 2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i + N_z = 0.$$

## 69- §. Икки нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари

Икки нуқтаси билан маҳкамланган жисм мазкур нуқталар орқали ўтказилган ўқ атрофида айланиши мумкин, маҳкамланган нуқталари $O$ ва $O_1$, уларга тегишли реакцияларни $\overline{N}_1$ ва $\overline{N}_2$ деймиз. Координаталар бошини $O$ нуқтага ўрнаштириб, $z$ ўқини $O$ ва $O_1$ нуқталар орқали ўтказамиз. Реакцияларнинг координата ўқларидаги проекцияларини тегишлича $N_{1x}$, $N_{1y}$, $N_{1z}$, $N_{2x}$, $N_{2y}$ ва $N_{2z}$ билан белгилаймиз (153- шакл). Жисм фақат $z$ ўқи атрофида айланиш имкониятига эга. Бу айланишни йўқ қилиш учун жисмга қўйилган кучларнинг айланиш ўқига нисбатан моментлари йиғиндиси нулга тенг бўлиши керак:



153- шакл.

$$\Sigma m_z(\overline{P}) = 0. \qquad (69.\ 1)$$

Маҳкамланган нуқталарнинг $\overline{N}_1$ ва $\overline{N}_2$ реакциялари $z$ ўқи билан кесишгани учун бу тенгламага кирмайди. Демак, икки нуқтаси билан маҳкамланган жисм мувозанатда бўлиши учун, жисмга қўйилган кучларнинг маҳкамланган нуқталардан ўтувчи ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нулга тенг бўлиши керак. Энди, маҳкамланган $O$ ва $O_1$ нуқталарнинг реакцияларини топиш учун мувозанат тенгламаларининг қолган бештаси:

$$\Sigma X + N_{1x} + N_{2x} = 0, \qquad (1)$$

$$\Sigma Y + N_{1y} + N_{2y} = 0, \qquad (2)$$

$$\Sigma Z + N_{1z} + N_{2z} = 0, \qquad (3)$$

$$\Sigma m_x(\overline{P}) - N_{2y} b = 0, \qquad (4)$$

$$\Sigma m_y(\overline{P}) + N_{2x} b = 0 \qquad (5)$$

дан фойдаланамиз.

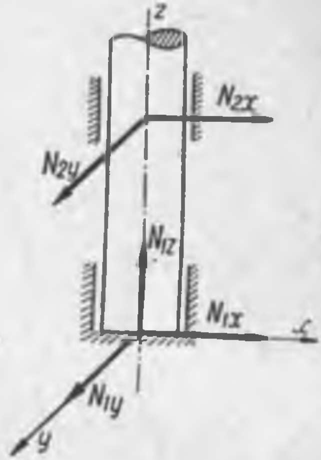
$N_{1z}$ ва $N_{2z}$ (3) тенгламадан бошқа ҳеч қайси тенгламага кирмайди. Шунинг учун, масала бу реакцияларга нисбатан статик аниқмас ҳисобланади. Реакцияларнинг қолган қисмини топиш осон, (5) тенгламадан $N_{2x}$ ни топиб (1) тенгламага қўйсак, $N_{1x}$ чиқади. Шунга ўхшаш, (4) тенгламадан $N_{2y}$ ни топиб, (2) тенгламага қўйсак $N_{1y}$ чиқади. Демак:

$$\begin{aligned} N_{2x} &= -\frac{1}{b}\Sigma m_y(\overline{P}), \\ N_{2y} &= \frac{1}{b}\Sigma m_x(\overline{P}), \qquad (69.\ 2) \\ N_{1x} &= -\Sigma X + \frac{1}{b}\Sigma m_y(\overline{P}), \\ N_{1y} &= -\Sigma Y - \frac{1}{b}\Sigma m_x(\overline{P}). \end{aligned}$$

$N_{1z}$ ва $N_{2z}$ ни топиш учун, маҳкамланган нуқталарнинг маҳкамланиш шарти берилган бўлиши керак. Масалан, жисм пастки нуқтаси билан абсолют қаттиқ таянчга тиралиб, юқори нуқтаси $z$ ўқида эркин бўлса, $N_{2z}=0$ бўлиб, $N_{1z}$ (3) тенгламадан аниқланади (154- шакл):

$$N_{1z}=-\Sigma Z_i. \qquad (69.\ 3)$$

Умуман икки нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмга таъсир этувчи реакция кучларини мувозанат тенгламаларидан топа олмаймиз. Демак, бу масала статик аниқмасдир.




154- шакл.

**37- масала.** Трансмиссия валидаги *I* шкивдан ўтказилган қайишларнинг тортилиши $T_1'$ ва $T_1''$ бўлиб, *II* шкивдан ўтказилган қайишнинг иккинчи учидаги тортилиш $T_2''$ ҳамда *A* ва *B* подшипникларнинг реакциялари топилсин. Трансмиссия ва шкивларнинг ўлчамлари 155- шаклда кўрсатилган.

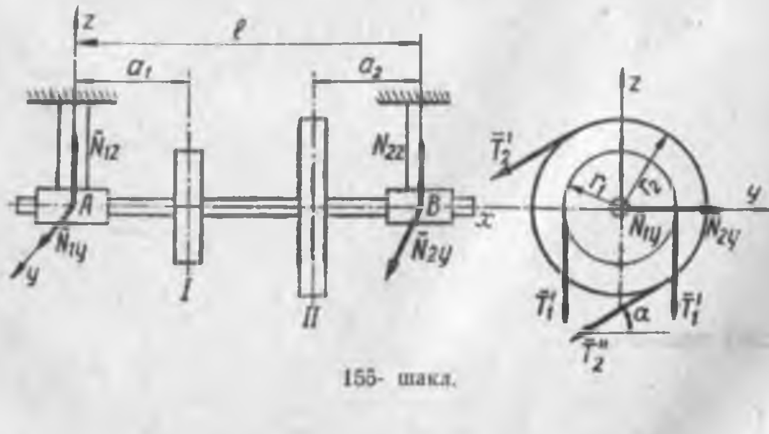
Ечиш. Масалани ечишни $T_2''$ ни топишдан бошлаймиз. Бунинг учун $x$ ўқига нисбатан момент тенгламасини тузамиз. Бу тенгламага подшипник реакциялари кирмайди, чунки улар $x$ ўқини кесиб ўтган:

$$\sum m_x(\overline{P})=T_1'r_1-T_1''r_1-T_2''r_2+T_2'r_2=0.$$

Бундан:

$$T_2''=T_2'-(T_1''-T_1')\frac{r_1}{r_2}. \qquad (a)$$

Энди, подшипникларнинг ён реакцияларини топамиз. Уларнинг $y$ ва $z$ ўқларидаги проекцияларини: $N_{1y}$, $N_{2y}$, $N_{1z}$, $N_{2z}$ билан белгилаймиз. Валнинг ўз ўқи бўйлаб силжиши мумкинлигидан бўйлама реакциялари $N_{1x}$




155- шакл.

ва $N_{2x}$ нулга тенг бўлади. Координаталар бошини $A$ подшипникнинг марказида олиб, қолган тўрт мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\Sigma Y_i = -\left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)\cos\alpha + N_{2y} + N_{1y} = 0.$$

$$\Sigma Z_i = -\left(T_1^{'} + T_1^{''}\right) - \left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)\sin\alpha + N_{2z} + N_{1z} = 0,$$

$$\Sigma m_y(P) = \left(T_1^{'} + T_1^{''}\right)a_1 + \left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)(l - a_2)\sin\alpha - lN_{2z} = 0,$$

$$\Sigma m_z(P) = -\left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)(l - a_2)\cos\alpha + lN_{2y} = 0.$$

Бу тенгламалардаги номаълум реакцияларнинг қийматлари тенгламаларни ечиб топилса, қуйидагича бўлади:

$$N_{2y} = \left(1 - \frac{a_2}{l}\right)\left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)\cos\alpha,$$

$$N_{1y} = \frac{a_2}{l}\left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)\cos\alpha,$$

$$N_{1z} = \left(1 - \frac{a_1}{l}\right)\left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)\sin\alpha + \left(T_1^{'} + T_1^{''}\right)\frac{a_2}{l}, \qquad (б)$$

$$N_{2z} = \left(1 - \frac{a_1}{l}\right)\left(T_1^{'} + T_1^{''}\right) + \left(T_2^{'} + T_2^{''}\right)\frac{a_2}{l}\sin\alpha.$$

Мисол учун:

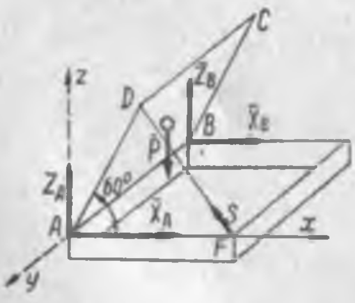
$$l = 2\ м,\quad a_1 = 0.5\ м,\quad a_2 = 0{,}4\ м,\quad \frac{r_1}{r_2} = 0.6,\quad \alpha = 60^\circ,$$

$$T_1^{'} = 400\ кг,\quad T_1^{''} = 600\ кг,\quad T_2^{'} = 500\ кг$$

бўлса, (а) ва (б) тенгламалардан:

$T_2^{''} = 380\ кг,\quad N_{1y} = 112\ кг,\quad N_{1z} = 944\ кг,\quad N_{2y} = 418\ кг,\quad N_{2z} = 1020\ кг$

бўлади.




156- шакл.

**38- масала.** $ABCD$ тўғри бурчакли сандиқнинг қопқоғи (156- шакл) бир томонидан $DF$ тиргакка таяниб туради. Қопқоқнинг оғирлиги $P = 12$ *кг*, узунлиги $AB = 90$ *см*, эни $AF = AD = 60$ *см*, горизонт билан ташкил қилган бурчаги $\angle FAD = 60^\circ$. $A$ ва $B$ шарнирларининг реакциялари ва тиргакнинг оғирлиги ҳисобга олинмай, ундаги зўриқиш $S$ топилсин.

Ечиш. Бу масала учун ҳам мувозанат тенгламалари юқоридагича тузилади:

$$\Sigma X = X_A + X_B - S\cos 60^\circ = 0.$$

$$\Sigma Z = Z_A + Z_B - P + S\sin 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma m_x(\overline{P}) = P\frac{AD}{2} - Z_B AB = 0.$$

$$\Sigma m_y(\overline{P}) = P\frac{AB}{2}\cos 60^\circ - S\frac{AF}{2}\sin 60^\circ = 0,\quad \Sigma m_z(\overline{P}) = X_B AB = 0.$$

Бу тенгламалардан:

$$Z_B = 0, \quad X_B = 0, \quad Z_A = 3 \text{ кг}, \quad X_A = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ кг}, \quad S = 3{,}45 \text{ кг}.$$

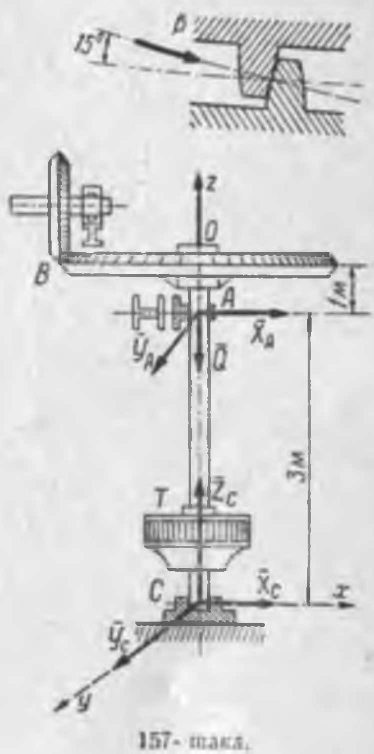
**39- масала.** Сув турбина $T$ ни айлантирувчи жуфтнинг моменти $m = 120$ *кгм*. Бу жуфт гилдиракнинг конус профилли тиши $B$ даги босим ва таянч реакцияси билан мувозанатлашади. $B$ тишга бўлган $P$ босим $OB = 0{,}6$ *м* радиус бўйлаб йўналиб, горизонт билан 15° бурчак ташкил қилади. $AC = 3$ *м*, $AO = 1$ *м*. Турбина ўқи ва гилдирак огирликлари $Q = 1{,}2$ *т* бўлиб, $CC$ ўқ бўйлаб йўналган. Товон таги (подпятник) $C$ билан подшипник $A$ нинг реакцияси топилсин (157- шакл).

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек йўналтириб, мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\Sigma X = X_A + X_C = 0,$$
$$\Sigma Y = Y_A + Y_C - P\cos 15^\circ = 0,$$
$$\Sigma Z = Z_C - Q - P\sin 15^\circ = 0,$$
$$\Sigma m_x(\overline{P}) = 4P\cos 15^\circ - 3Y_A = 0,$$
$$\Sigma m_y(\overline{P}) = 0{,}6P\sin 15^\circ - 3X_A = 0,$$
$$\Sigma m_z(\overline{P}) = m - 0{,}6P\cos 15^\circ = 0.$$

Бу тенгламалардан:

$$X_A = -X_C = 10{,}72 \text{ кг}, \quad Y_A = 267 \text{ кг},$$
$$Y_C = -67 \text{ кг}, \quad Z_C = 1253 \text{ кг}.$$




157- шакл.

**40- масала.** Буг машинанинг вали тирсакли бўлиб, унинг бўйин ўртаси $D$ га тўпланган $P = 20\,000$ *кг* босим горизонт билан 10° бурчак ҳосил қилиб таъсир этади. $D$ бўйин билан $OO_1$ ўқ орқали ўтадиган $ODO_1$ текислик вертикал билан 30° бурчак ташкил қилади. Қувват тирсакли вал орқали $M$ маховикдаги арқон ёрдами билан ҳаракатланувчига узатилади. Арқон учлари параллел бўлиб, горизонт билан 30° бурчак ташкил қилади. $P$ кучнинг таъсири арқонларнинг тортиши $t$ ва $T$ подшипник реакциялари билан мувозанатлашади. Маховикнинг огирлиги $Q = 1500$ *кг*, диаметри $d = 2$ *м*. Арқон учлари тортишларининг йиғиндиси $t + T = 750$ *кг*. 158- шаклдан: $r = 125$ *мм*, $l = 250$ *мм*, $m = 300$ *мм*, $n = 450$ *мм*.

$A$ ва $B$ подшипникларнинг реакциялари топилсин.

Ечиш. Координата ўқларини 158- шаклда кўрсатилгандек ўтказиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\Sigma X = X_A + X_B - (T + t)\cos 30^\circ - P\cos 30^\circ = 0,$$
$$\Sigma Y = Y_A + Y_B = 0,$$

2. *Жисмнинг иккита симметрия текислиги бўлса, унинг оғирлик маркази шу текисликларнинг кесишган чизиғи устида ётади.* Олдинги пунктдаги хулосага биноан, $xOy$ ва $xOz$ текисликларни симметрия текисликлари деб қарасак:

$$y_c = 0, \quad z_c = 0$$

бўлади.

3. *Жисмнинг учта симметрия текислиги бўлса, унинг оғирлик маркази шу текисликларнинг кесишган нуқтасида ётади.*

4. Энди, мураккаб жисмларнинг огирлик марказини топамиз. Бир жинсли бир қанча оддий кўринишдаги, оғирлик марказининг ҳолати маълум бўлган жисмлардан иборат жисмнинг оғирлик марказини топиш учун, унинг таркибидаги ҳар қайси жисм учун (71. 2) интегрални алоҳида ҳисоблаб, қуйидаги хулосани чиқарамиз:

$$x_c = \frac{\int x dv}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} \int_{v_i} x_i dv_i, \tag{74. 1}$$

бундан:

$$vx_c = \sum_{i=1}^{n} \int_{v_i} x_i dv_i. \tag{74. 2}$$

Ҳажми $v$ бўлган жисм оғирлик марказининг абсциссасини $x_c^{(i)}$ орқали белгиласак, уни аниқлаш учун қуйидаги формулани ёзишимиз мумкин:

$$x_c^{(i)} = \frac{\int_{v_i} x dv}{v} \quad \text{ёки} \quad x_c^{(i)} v = \int_{v_i} x dv. \tag{74. 2'}$$

Демак, (74. 2) ни бундай ёзишимиз мумкин:

$$vx_c = \sum_{i=1}^{n} v_i x_c^{(i)},$$

бундан:

$$x_c = \frac{\Sigma x_c^{(i)} v_i}{v}, \quad y_c = \frac{\Sigma y_c^{(i)} v_i}{v}, \quad z_c = \frac{\Sigma z_c^{(i)} v_i}{v}. \tag{74. 3}$$

$y_c$ ва $z_c$ ифодалар ҳам юқоридаги мулоҳаза асосида ёзилади.

Мураккаб сирт, текис шакл ва чизиқлар оғирлик марказини аниқлаш учун шу хилдаги формулаларни чиқариш мумкин.

Ҳажмда тешиклар бўлса,(74. 3) нинг тешикка тегишли ҳадини манфий ишора билан олиш керак. Текис шакллар учун юқоридаги формула тубандагича ёзилади:

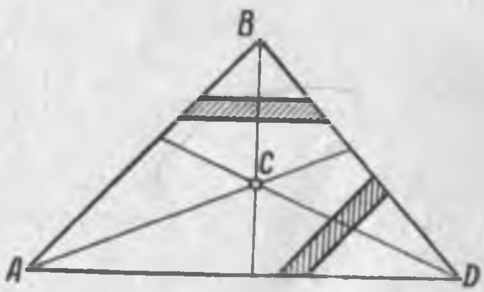
$$x_c = \frac{\Sigma x_c^{(i)} F_i}{F} = \frac{\Sigma S_y^{(i)}}{F}, \quad y_c = \frac{\Sigma y_c^{(i)} F_i}{F} = \frac{\Sigma S_x^{(i)}}{F}. \qquad (74.\ 4)$$

Худди шундай формулани мураккаб чизиқдан тузилган шакл учун ҳам чиқариш мумкин. Бунинг учун $F$ нинг ўрнига $L$ қўйиш керак, холос.

## 75- §. Баъзи бир оддий кўринишдаги шаклларнинг оғирлик марказлари

### 1. Учбурчак юзининг оғирлик маркази

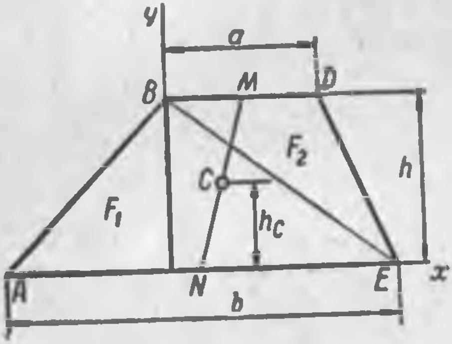
Учбурчак юзини полосаларга ажратиб, уларни учбурчак асосига параллел қилиб оламиз (165- шакл). Ҳар қайси полосанинг оғирлик маркази унинг ўртасидадир. Бу полосалар оғирлик марказларининг геометрик йиғиндиси учбурчак асосининг медианасини беради. Шунинг учун учбурчакнинг оғирлик маркази шу медиананинг устида ётиши керак. Худди шундай муҳокамани учбурчакнинг бошқа томонлари медианалари устида ҳам юргизиб, учбурчак юзининг оғирлик маркази бу медианаларнинг кесишган нуқтасида ётишини кўрсатамиз. Демак, *учбурчак юзининг оғирлик маркази унинг асосидан медиананинг $\frac{1}{3}$ қисмида ётар экан. Медианаларнинг кесишган нуқтаси учбурчак асосидан баландликнинг $\frac{1}{3}$ қисмида ётиши ўқувчиларимизга геометриядан маълум.* Учбурчак юзининг оғирлик марказини топа билганимиздан кейин ихтиёрий купбурчак шакллар юзининг оғирлик марказини топишимиз мумкин. Бунинг учун бундай шакллар юзини бир қанча учбурчакларга ажратиб, (74. 4) формуладан фойдаланамиз.



165- шакл.

## 2. Трапеция юзининг оғирлик маркази

Трапеция юзининг оғирлик маркази унинг параллел томонларининг ўртасини туташтирувчи $MN$ чизиқ устида ётиши керак (166- шакл). Оғирлик марказининг $h_c$ баландлигини топиш учун, трапеция юзини $ABE$ ва $BED$ учбурчакларга ажратиб, (74. 4) га биноан, қуйидаги ифодани ёзамиз:




166- шакл.

$$y_c = h_c = \frac{y_c^{(1)}F_1 + y_c^{(2)}F_2}{F}, \quad (a)$$

$$F_1 = \frac{bh}{2}, \quad F_2 = \frac{ah}{2},$$

$$F = \frac{a+b}{2}h, \quad y_c^{(1)} = \frac{h}{3},$$

$$y_c^{(2)} = \frac{2}{3}h.$$

Бу ифодаларни (а) га қўйсак:

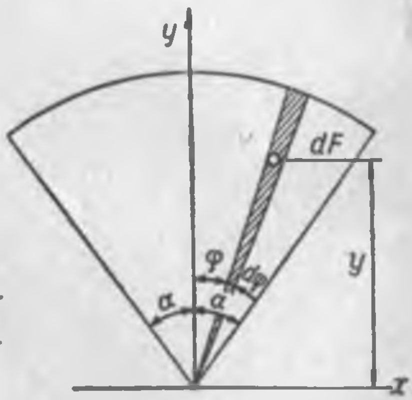
$$h_c = \frac{hb + 2ha}{3(a+b)} \quad (75.\ 1)$$

келиб чиқади.

## 3. Доира сектори юзининг оғирлик маркази

$y$ ўқини сектор юзининг симметрия ўқи билан йўналтирамиз (167- шакл). Шунинг учун, оғирлик маркази шу $y$ ўқи устида ётади. $x_c = 0$, $y_c$ ни эса (72. 2) нинг иккинчи қисмидан топамиз. Сектордан бир элементар секторча ажратиб, буни учбурчак деб қабул қилсак, унинг оғирлик маркази координаталар бошидан $\frac{2}{3}r$ узоқликда бўлади. Шаклдан:

$$y = \frac{2}{3} r \cos\varphi.$$




167- шакл.

Бундан ташқари:

$$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi, \quad F = r^2\alpha,$$

$$y_c = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} r \cos\varphi \frac{1}{2} r^2 d\varphi}{\alpha r^2} = r \cdot \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \, d\varphi}{3\alpha}.$$

Демак:

$$y_c = \frac{2 r \sin\alpha}{3\alpha}.$$

Бу ерда $\alpha$ — радиан билан ўлчанади. Сектор ўрнида ярим доира бўлса, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлиб:

$$y_c = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}424r$$

қийматига эга.

4. Айлана қисмининг (ёйнинг) оғирлик маркази

Бу ҳол учун ҳам $y$ ўқини айлана қисмининг симметрия ўқи бўйича йўналтирамиз (168- шакл). Унинг оғирлик маркази $y$ ўқи устида ётиши керак. Шунга кўра, $x_c = 0$ бўлиб, $y_c$ ни (73. 2)нинг иккинчи қисмидан топамиз. Шаклда кўрсатилганидек айланадан элементар ёйни ажратамиз. Унинг узунлиги $dl = r d\varphi$ бўлади. Бу элементар ёйнинг оғирлик маркази:

$$y = r \cos\varphi$$

бўлади.

Демак:

$$y_c = \frac{\int y dl}{L} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos\varphi \, d\varphi}{2r\alpha} = r \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (75.\ 3)$$

Ярим айлана учун $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлганидан:

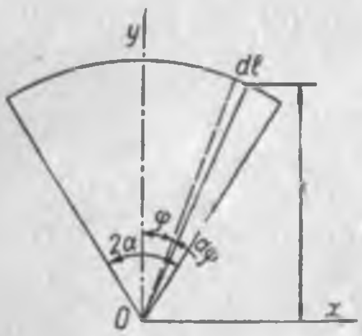
$$y_c = \frac{2r}{\pi} \approx 0{,}63r$$

бўлади.

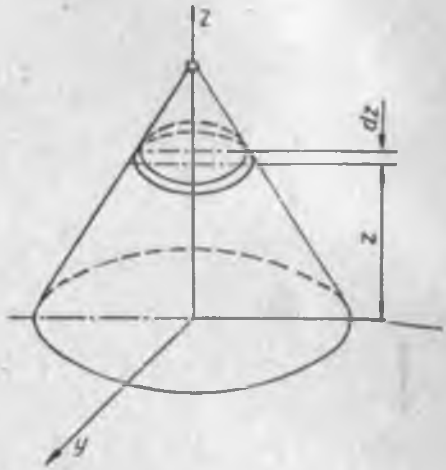
Жисм ҳажмининг оғирлик марказини топишга мисол тариқасида, доиравий конуснинг оғирлик марказини топамиз (169- шакл). Албатта, конуснинг оғирлик маркази унинг ўқида ётади. Шунинг учун $x_c = 0, y_c = 0, z_c$ ни (71. 2) нинг охирги қисмидан топамиз. Унинг учун конуснинг асосидан $z$ узоқлигида бир элементар ҳажм ажратамиз. Бу ҳажмнинг катталиги:

$$dv = F(z)\,dz$$

бўлади.




168- шакл.




169- шакл.

Параллел асосларн юзларининг нисбати уларнинг баландликлари квадратларининг нисбатига пропорционалдир, шунинг учун:

$$F(z) = \frac{F_0 (h - z)^2}{h^2}.$$

Буни эътиборга олсак:

$$z_c = \frac{F_0}{h^2 v_0} \int_0^h (h - z)^2 z dz = \frac{h}{4}$$

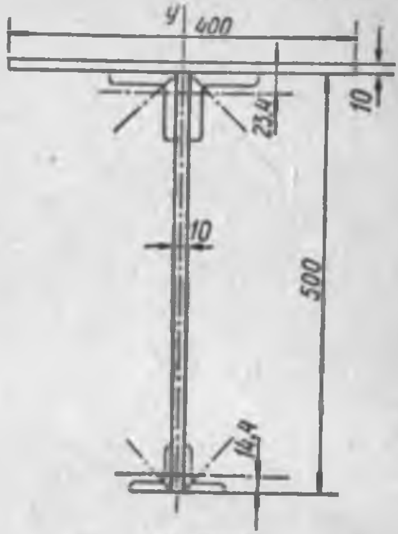
бўлади.

Демак, конуснинг оғирлик маркази унинг асосидан баландлигининг $\frac{1}{4}$ қисми оралиғида ётар экан. Оғирлик марказини топишнинг шу келтирилган мисолларн билан чегараланамиз. Кўпинча, тажрибада учрайдиган геометрик шаклларнинг оғирлик марказларини топиш учун тегишли формулалар турли инженерлик справочникларида берилган.

**41- масала.** 170- шаклда кўрсатилган профиль бир горизонтал лист, икки жуфт тенг ёнли бурчакликдан ва бир вертикал листдан тузилган. Кирким оғирлик марказининг координаталари топилсин. Ўлчамлар *мм* да берилган. Бундай профиллар юзи, оғирлик маркази координаталари ва бошқа ўлчамлари ГОСТ жадвалида берилган. Бизнинг масаламиздаги бурчакликлар учун:

$F_1 = 1511$ *мм*$^2$, $z_c = 23{,}4$ *мм* (№ 8 учун);

$F_2 = 569$ *мм*$^2$, $z_c = 14{,}4$ *мм* (№ 5 учун);




170- шакл.

Е ч и ш. Қирқимда симметрия ўқи бўлгани учун, оғирлик маркази шу ўқ устида ётади: $x_c = 0$. $y_c$ ни (74. 4) дан топамиз:

$$S_{x1} = 400 \cdot 10 \cdot 505 = 202 \cdot 10^4 \text{ мм}^3,$$

$$S_{x2} = S_{x3} = 1511 \cdot 476{,}6 = 72 \cdot 10^4 \text{ мм}^3;$$

$$S_{x4} = 50 \cdot 10 \cdot 250 = 125 \cdot 10^4 \text{ мм}^3,$$

$$S_{x6} = S_{x5} = 569 \cdot 14{,}4 = 8 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Булардан:

$$\Sigma S_{xi} = (202 + 2 \cdot 72 + 125 + 2 \cdot 0{,}8) \cdot 10^4 = 473 \cdot 10^4 \text{ мм}$$

Қирқим юзи:

$$\Sigma F_i = 4000 + 2 \cdot 1511 + 5000 + 2 \cdot 569 = 13\,160 \text{ мм}^2.$$

Демак:

$$y_c = \frac{\Sigma S_{xi}}{F} = 360 \text{ мм}.$$

**42- масала.** Радиуси $R$ га тенг $AOB$ ярим айлана билан узунликлари бир хилда бўлган $AD$ ва $BD$ тўғри чизиқлар орасида чегараланган юзанинг $C$ оғирлик маркази топилсин: $OD = 3R$ (171- шакл).

Е ч и ш. Юзанинг симметрия ўқи бўлгани учун оғирлик маркази шу $OD$ ўқда ётади, яъни $y_c = 0$, $x_c$ ни (74. 4) дан топамиз.

$A\overline{O}B$ ярим доиранинг оғирлик маркази $C_1$, унинг $x_1$ координатаси $OC_1 = x_1 = R - \frac{4R}{3\pi}$, юзи $S_1 = \frac{\pi R^2}{2}$. $ABD$ учбурчак юзининг оғирлик маркази $C_2$, унинг $x_2$ координатаси:

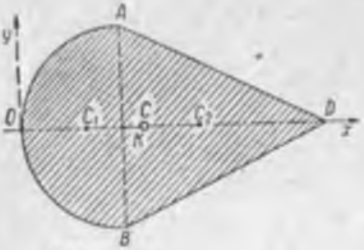
$$x_2 = R + \frac{2}{3} R = \frac{5}{3} R, \text{ юзи } S_2 = \frac{1}{2} R \cdot 2R = R^2.$$

Буларни (74. 4) га қўйсак:

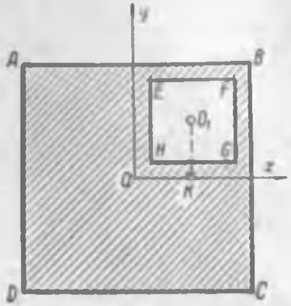
$$OC = x_c = \frac{3\pi + 16}{2\pi + 12} R \approx 1{,}19R$$

бўлади.

**43- масала.** Томонлари 2 *м* бўлган бир жинсли $ABCD$ квадрат пластинкадан $EFGH$ пластинка кесиб олинган. Тешикнинг томонлари $ABCD$ томонларига параллел ва унинг ҳар бир томони 0,7 *м* га тенг (172- шакл). $OK = O_1K = 0{,}5$ *м*. Тешик пластинка оғирлик марказининг координаталари топилсин.




171- шакл.




172- шакл.

Ечиш. (74. 4) дан фойдаланамиз. Бу юзани икки юзадан иборат деб қараймиз. Биринчиси $ABCD$ квадрат, иккинчиси $EFGH$ квадрат, бу манфий юза. Буларнинг оғирлик марказини, координаталарини ва юзларини топамиз.

Биринчи квадрат учун:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad S_1 = 4 \text{ м}^2.$$

Иккинчи манфий квадрат учун:

$$x_2 = 0{,}5 \text{ м}; \quad y_2 = 0{,}5 \text{ м}; \quad S_2 = 0{,}49 \text{ м}^2.$$

Буларни (74. 4)га қўямиз:

$$x_c = \frac{x_1S_1 - x_2S_2}{S_1 - S_2} = -7 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{y_1S_1 - y_2S_2}{S_1 - S_2} = -7 \text{ см}.$$

Демак:

$$x_c = y_c = -7 \text{ см}.$$

## 76- §. Гульден теоремалари

Кўпинча, юза ва чизиқлар оғирлик марказларини топиш Гульден теоремалари ёрдами билан жуда ҳам осонлашади.

Биринчи теорема

*Бир текисликда ётувчи эгри чизиқнинг шу чизиқ текислигида ётувчи, лекин у билан кесишмайдиган уқ атрофида айланишидан келиб чиққан шаклнинг сирти* *эгри чизиқнинг узунлиги билан шу эгри чизиқ оғирлик марказининг уқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг.*

Теоремани исботлаш учун, эгри чизиқдан $dl$ қисмни оламиз. 173- шаклда ажратилган $dl$ қисм чексиз кичик бўлгани учун унинг айланишидан ҳосил бўлган сиртни цилиндр дейишимиз мумкин; у ҳолда бу цилиндрнинг сирти:

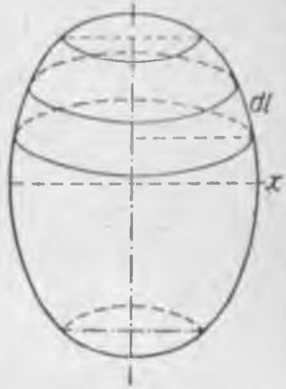
$$d\sigma = 2\pi\, x dl \qquad (a)$$

булади.

Бунда $\sigma$ — сирт юзини белгилайди. $AB$ чизиқнинг айланишидан келиб чиққан шаклнинг сиртини топиш учун (а) ифодадан интеграл оламиз:

$$\sigma = \int 2\pi x dl = 2\pi \int x dl.$$

(73. 2) га биноан, бу интегрални тубандагича ёзамиз:



173- шакл.

$$\int x dl = L x_c.$$

Бундан:

$$\sigma = 2\pi\, x_c L \qquad (76.\ 1)$$

ёки

$$x_c = \frac{\sigma}{2\pi L}. \qquad (76.\ 2)$$

**44- масала.** Гульденнинг биринчи теоремасидан фойдаланиб, радиуси $R$ га тенг булган ярим айлананинг оғирлик марказини топамиз. Ярим айлана ўз диаметри атрофида айланганда, у сфера чизади. (76. 2) га мувофиқ:

$$x_c \approx 0{,}63\, R.$$

## Иккинчи теорема

*Бирор контур билан чегараланган юзни, шу юз ётган текисликда ётувчи, лекин юз контури билан кесишмайдиган уқ атрофида айланиши натижасида келиб чиққан шаклнинг ҳажми шу контур юзаси билан оғирлик марказининг айланиши натижасида келиб чиққан айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг.*

Теоремани исботлаш учун $S$ контурдан бир чексиз кичик юза ажратамиз (174- шакл). Бу $dF$ элементар юзанинг $y$ ўқи атрофида айланишидан чиққан ҳажм икки ҳажмнинг айнрмасига тенг бўлади:

$$dv = \pi(x + dx)^2 dy - \pi x^2 dy = 2\pi x dx dy = 2\pi x dF. \qquad \text{(a)}$$

$\pi dy(dx)^2$ жуда кнчик бўлгани учун ташлаб юбордик.

Бутун контурнинг айланишидан чиққан шакл ҳажмини топиш учун (а) ифодадан интеграл оламиз:

$$v = 2\pi \int_F x dF. \qquad (76.\ 3)$$

(72. 2) га биноан, бу интегрални тубандагича ёзишимиз мумкин:

$$\int_F x dF = x_c F.$$

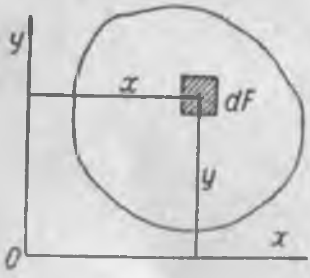
Бундан:

$$v = 2\pi x_c F \qquad (76.\ 4)$$

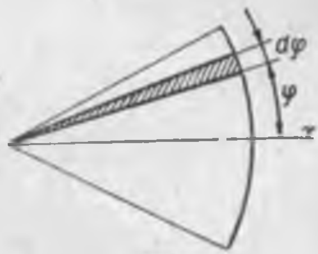
ёки

$$x_c = \frac{v}{2\pi F}. \qquad (76.\ 5)$$

**45- масала.** (76.5) дан фойдаланиб, сектор юзининг огирлик маркази топилсин (175- шакл).




174- шакл.




175- шакл.

Шаклдан:

$$x_c = \frac{2}{3} r \cos\varphi, \quad dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

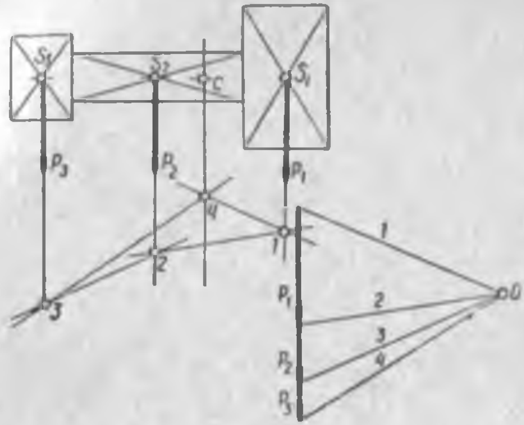
(76. 3) га мувофиқ, айланиш натижасида чиққан шакл ҳажми:

$$v = 2\pi \int_F x dF = 4\pi \int_0^\alpha \frac{2}{3} \cos\varphi \frac{1}{2} r^3 dF = \frac{4}{3} \pi r^3 \sin\alpha.$$

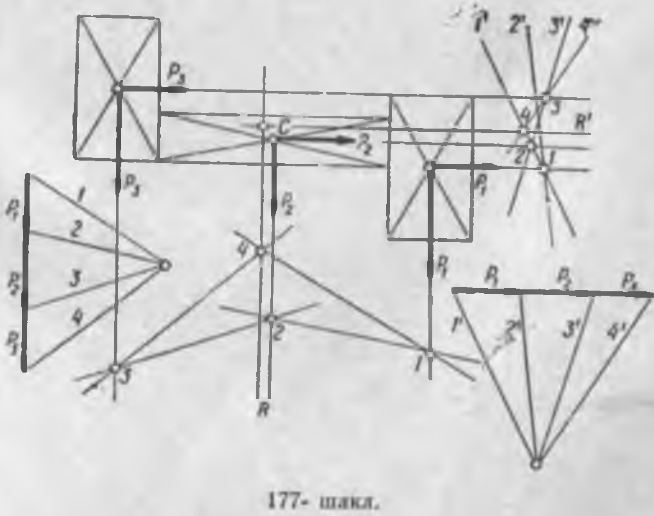
(75. 5) га биноан:

$$x_c = \frac{4\pi r^3 \sin\alpha}{3 \cdot 2 \cdot \pi r^2 \alpha} = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Текис шаклларнинг огирлик марказини график усулда топишни кўриб чиқамиз. Юзаларнинг огирлик марказини




176- шакл.




177- шакл.

арқон кўпбурчагини қуриш йўли билан аниқлаш мумкин. Юзанинг симметрик ўқи бўлса, масала яна ҳам осонлашади. 176- шаклдаги симметрия ўқи бўлган юзнинг оғирлик марказини график усулда аниқлаймиз. Бунинг учун, шаклни учта юзга ажратамиз, чунки улар оғирлик марказларининг ҳолати маълум. Ҳар қайси юзнинг қийматини куч тарзида тегишли оғирлик марказларига қўямиз. Улар: $F_1 = P_1$; $F_2 = P_2$; $F_3 = P_3$ бўлсин. Энди, бу учта параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳолатини арқон кўпбурчагидан аниқлаймиз. Мазкур тенг таъсир этувчининг йўналиши билан юзнинг симметрия ўқи кесишган нуқтаси юзнинг оғирлик маркази $C$ ни аниқлайди. Тегишли қурилишлар шаклда кўрсатилган; уларнинг қандай бажарилганини ўқувчиларимиз шаклдан тушуниб олади. Юзнинг симметрия ўқи бўлмаган ҳолда, арқон кўпбурчагини икки марта қуришга тўғри келади. Юзни оғирлик маркази маълум бўлган бир нечта қисмларга ажратиб, ҳар қайси қисм юзасини куч тарзида тасвирлаб, уларни тегишли оғирлик марказларига қўйиш лозим. Натижада, параллел йўналишдаги бир нечта кучни оламиз. Текширилаётган юзнинг оғирлик маркази бу параллел кучларнинг тенг таъсир этувчисининг устида ётади. Биз 32- параграфда параллел кучлар ўз маркази атрофида айлантирилганда, марказнинг ҳолати ўзгармаслигини кўрсатган эдик. Шунинг учун, кучларнинг ҳаммасини 90° га буриб, уларнинг бу ҳолати учун тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз. Бу тенг таъсир этувчи билан олдинги ҳолат учун аниқланган тенг таъсир этувчининг кесишган нуқтаси юзнинг оғирлик марказини беради. Бу ҳол учун ҳам 177- шаклда тегишли қурилишлар кўрсатилган.

# КИНЕМАТИКА

## 77- §. Умумий мулоҳазалар

Жисмнинг ҳаракати шу жисм билан маълум муносабатда бўлган бошқа жисм таъсиридан вужудга келади. Шундай бўлишига қарамай, жисмнинг ҳаракатини фақат геометрик нуқтаи назардан текшириш ҳам мумкин. Ҳаракат геометрик томондан текширилганда, уни вужудга келтирувчи сабаб билан боғламасдан, ҳаракатнинг характеригина текширилади. Механиканинг бу қисми, яъни ҳаракатни фақат геометрик нуқтаи назардан текширадиган қисми к и н е м а т и к а дейилади.

Жисмнинг вақт ўтиши билан фазода ўз ҳолатини узлуксиз равишда ўзгартириши м е х а н и к ҳ а р а к а т дейилади.

Ҳаракат тушунчаси ф а з о, в а қ т ва ҳ а р а к а т л а н у в ч и ж и с м (объект) тушунчаларига боғлиқ.

Фазони жисмларнинг оламда ишғол этган ўрни билан тасаввур қиламиз. Фазони у з л у к с и з деб қараймиз.

Оламдаги ҳодисаларни кузатар эканмиз, вақт тушунчаси келиб чиқади. Вақтни ҳам у з л у к с и з, ч е к с и з ва фазонинг ҳамма нуқталари учун б и р х и л д а (абсолют) деб қараймиз.

Исталган вақтда жисмнинг фазодаги ҳолатини аниқлаш мумкин бўлгандагина унинг ҳаракати маълум бўлади. Жисмнинг ҳаракати бошқа бир жисмга нисбатан белгиланади. Бинобарин, ҳаракат қайси жисмга нисбатан текширилса, координаталар системаси шу жисм билан боғланади. Бундан кўринадики, жисмнинг тинчлик ҳолати ёки кинематикада текшириладиган механик ҳаракати бошқа жисмга нисбатан кузатилганидан, у бу маънода нисбий тушунчадир. Бир жисмнинг ўзи ҳар хил саноқ системаларига нисбатан бир вақт ичида турли ҳаракатларни қилиши мумкин. Масалан, ҳаракатдаги вагонда турган жисм вагонга бирлаштирилган саноқ системасига нисбатан қўзғалмас бўлиб, ерга бириктирилган саноқ системасига нисбатан бу жисм вагон билан бир хилда ҳаракат қилади.

Классик механикада материал жисмнинг ҳаракати кузатилаётган фазога уч ўлчамли деб қаралиб, ҳаракат ўлчамига оид барча мулоҳазалар уч ўлчамли геометрия асосида юргизилади.

Вақт ҳеч қандай саноқ системасига боғланмасдан, ҳар қандай система учун бир хилда ва ҳаракатнинг нисбийлигидан қатъи назар деб қаралади; шунинг учун, ҳеч нарсага боғлиқ бўлмаган ўзгарувчи бўлиб, ҳаракатнинг аргументи дейилиб, $t$ билан белгиланади. Вақт ўлчови учун техникада соат ёки минут, механикада асосан секунд қабул қилинган.

Кинематика назарий механиканинг мустақил қисми тарзида XIX асрнинг биринчи ярмиларидан бошлаб расмийлашди. Бу техниканинг ривожланиши ва мураккаб машиналарнинг барпо этилиши билан боғлиқдир. Янги машиналар яратиш ва улар механизмлари ҳаракатининг геометрик хоссаларини текшириш механика олдига катта вазифалар қўйди. Бу эса кинематиканинг ривожланишига катта йўл очди.

Қаттиқ жисмнинг ҳаракатини кузатар эканмиз, унинг турли нуқталарининг турлича ҳаракатланишини кўрамиз. Масалан, рельсдаги вагон гилдирагининг ҳаракатини олсак, унинг маркази тўғри чизиқли ҳаракат қилса, кегайида олинган нуқта эгри чизиқли ҳаракат қилади. Бу нуқталарнинг бир вақт ичида ўтган йўли ҳар хил бўлади. Шунинг учун, жисм ҳаракатини ўрганиш унинг бирор нуқтасининг ҳаракатини ўрганишдан бошланади, яъни нуқта кинематикасидан бошланади.

XIII БОБ

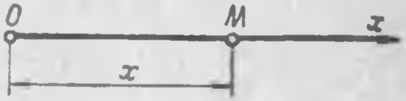
# НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

Кинематикани материал нуқта ҳаракатини текширишдан бошлаймиз. Сўнгра, чиққан натижаларни материал нуқталар системаси ва қаттиқ жисм ҳаракатини текшириш учун татбиқ қиламиз.

## 78- §. Материал нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати

Материал нуқта ўзининг фазодаги ҳаракати натижасида туғри чизиқли йулни ўтса, бундай ҳаракат тўғри чизиқли ҳаракат дейилади.

Ҳаракатдаги нуқтанинг фазода қолдирган изи, яъни унинг фазода чизган чизиғи траектория дейилади.




178- шакл.

$O$ нуқтани координаталар боши десак, бирор $M$ нуқта ҳаракатланмасдан олдин $O$ да ёки $O$ дан маълум узоқликда бўлади (178- шакл).

Бирор $t$ вақт ўтгандан сўнг нуқтанинг ҳолатини аниқлаш учун бу вақт билан нуқтанинг $x$ масофаси (координатаси) орасидаги муносабат маълум бўлиши керак. Бу муносабатни аналитик равишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

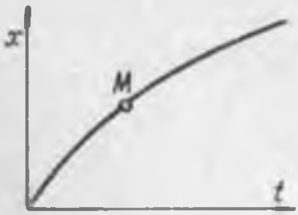
$$x = f(t). \tag{78. 1}$$

Бу тенглама ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонуни дейилади. Нуқтанинг ҳаракат тенгламаси берилган бўлса, истаган вақт учун фазода унинг ҳолатини аниқлаш мумкин. Мисол учун, ҳаракат тенгламасини қуйидагича оламиз:

$$x = 5t^2 + 2.$$

Ҳаракат бошланмасдан олдин, яъни $t = 0$ бўлганда нуқта, ҳаракат ҳисобланган система бошидан $x = 2$ *см* оралиқда бўлади. Демак, нуқта координаталар бошидан 2 *см* узоқликдан бошлаб ҳаракатланар экан. $t = 1$ *сек* бўлса, $x = 7$ *см*. Юқоридаги тенгламадан фойдаланиб, нуқтанинг $x$ ўқидаги ҳолатини истаган вақт учун аниқлаш мумкин.

Ҳаракат қонуни турли кўринишда берилиши мумкин: 1) аналитик кўриниш (тенглама ёрдами билан), 2) график кўриниш (нуқтанинг $x$ масофаси билан $t$ вақт орасидаги муносабат график воситаси билан) (179- шакл) ва, ниҳоят, 3) нуқтанинг вақт ўтиши билан босган йўли жадвал орқали берилиши ҳам мумкин. Масалан, поезд ҳаракатининг жадвали.

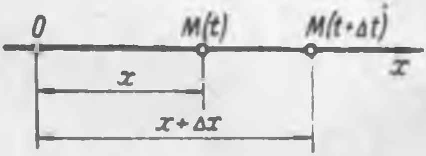



179- шакл.

Ҳаракат қонунининг энг қулай кўриниши унинг аналитик ифодасидир. Назарий механикада ҳаракатни аналитик усул билан ўрганишга катта аҳамият берилади. Ҳаракат қонунини аналитик равишда ифодалаш мумкин бўлмаган ҳолларда ва ҳаракат тенгламалари жуда мураккаб булганда график усулдан фойдаланиш қулайдир. Масалан, механизмлар назариясида ҳаракат, асосан, график усулда текширилади.

## 79- §. Тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланиши

Ҳаракатни текширишда йўлнинг ўзгариши (координатанинг усиши ёки камайиши) катта аҳамиятга эга. Материал нуқтанинг $t$ вақтда юрган йўли $x$, $\Delta t$ вақт ўтгандан кейинги йўли $x + \Delta x$ бўлсин (180- шакл).




180- шакл

$\Delta x$ нинг $\Delta t$ га нисбати:

$$v^* = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (79.\ 1)$$

нуқтанинг ў р т а ч а т е з л и г и дейилади. Ўртача тезлик умуман $\Delta t$ га боғлиқдир. $\Delta t$ нинг ўзгариши билан ўртача тезлик ҳам ўзгаради. $\Delta t$ ни нулга интилтириб, ўртача тезлик ифодаси (79. 1) дан лимит олсак, берилган пайтдаги ҳақиқий тезликни топамиз, яъни:

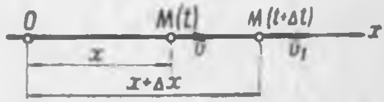
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ёки

$$v = \frac{dx}{dt}. \qquad (79.\ 2)$$

Шундай қилиб, нуқта йўлининг вақт бирлигида ўзгариши унинг **тезлиги** дейилади.

Демак, *тезлик, нуқтанинг юрган йўлидан вақтга нисбатан олинган биринчи ҳосиласига тенг бўлар экан.* Йўл $x$ *см* да ўлчанса, тезлик $v$ *см/сек* да ўлчаниши (79. 2) дан кўриниб турибди.




181- шакл.

Умуман, тезлик ҳам $t$ вақтнинг узлуксиз функцияси булади.

Фараз қилайлик, материал нуқта $t$ вақтда $M$ да булиб, тезлиги $v$ бўлсин (181 -шакл). $\Delta t$ вақт ўтгандан кейин, у $M_1$ да булиб тезлиги $v_1$ бўлсин. $\Delta t$ ичида тезликнинг ўзгариши:

$$\Delta v = v_1 - v$$

булади. Тезликнинг вақт бирлигидаги ўртача ўзгаришини топамиз. Бунинг учун $\Delta v$ нинг $\Delta t$ га нисбатини оламиз:

$$w^* = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (79.\ 3)$$

Бу ифода **ўртача тезланиш** дейилади. Ҳақиқий тезланишни топиш учун (79. 3) да $\Delta t$ ни нулга интилтириб, лимит оламиз:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ёки

$$w = \frac{dv}{dt}. \qquad (79.\ 4)$$

$v$ нинг қийматини (79. 2) дан келтириб қўйсак, тезланишни йўл орқали ифодалаган буламиз:

$$w = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (79.\ 5)$$

Шундай қилиб, *нуқта тезлигининг вақт бирлигида ўзгариши унинг тезланиши дейилади.*

Демак, *тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши тезликнинг вақтга нисбатан биринчи ҳосиласига ёки масофанинг иккинчи ҳосиласига тенг булар экан.*

12*

Масофа билан йўл орасида фарқ бор.

Ҳаракат тезланувчи бўлса, $w > 0$, сусаювчи бўлса, $w < 0$ бўлади. Тезланишнинг *см/сек*$^2$ билан ўлчаниши (79. 4) дан кўриниб турибди.

Нуқтанинг тезланиши ўзгармас бўлса, нуқта доимий тезланиш билан ёки бир текис ўзгарувчан ҳаракат қиляпти дейилади.

Доимий тезланиш билан ҳаракатланувчи нуқтанинг ҳаракат тенгламасини топамиз. Нуқта тезланишли ҳаракат қилиб, унинг тезланиши $a$ бўлсин. У ҳолда (79. 4) дан:

$$\frac{dv}{dt} = a$$

бўлади. Бундан $v$ ни аниқлаймиз:

$$v = \int a dt + c_1 = at + c_1.$$

Бошланғич пайтда, яъни $t = 0$ бўлганда $v = v_0$ бўлса, $c_1 = v_0$ бўлади. Демак:

$$v = v_0 + at. \tag{79. 6}$$

Бу формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$a = \frac{v - v_0}{t},$$

тенг ўзгарувчи ҳаракатда тезланиш маълум вақт ичида тезлик ўзгаришининг шу вақтга нисбатига тенг бўлар экан. (79. 2) га мувофиқ:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at.$$

Бундан:

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} + c_2.$$

$c_2$ ни бошлангич шартдан топамиз. $t = 0$ бўлганда $x = 0$ бўлса, $c_2 = 0$ бўлади. Демак, ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{79. 7}$$

Бу формулани яна бошқача кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$x = \frac{t}{2}(2v_0 + at).$$

(79. 6) кўзда тутилса:

$$x = \frac{v_0 + v}{2} t. \tag{79. 8}$$

Жисм юқоридан бошлангич тезликсиз тушса, $v_0 = 0$ бўлиб, унинг ҳаракат тенгламаси ва тезлиги (79. 6) ва (79. 7) дан қуйидагича ёзилади:

$$v = gt; \qquad x = \frac{gt^2}{2}. \tag{79. 9}$$

Булардан вақтни чиқариб, тезликни қуйидагича ифодалаймиз:

$$v = \sqrt{2xg}. \tag{79. 10}$$

## 80- §. Гармоник ҳаракат

Тўғри чизиқли ҳаракат учун мисол тариқасида, техника масалаларида катта аҳамиятга эга бўлган гармоник ҳаракатни текширамиз.

Бирор $M$ нуқта:

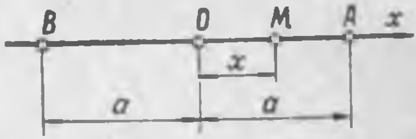
$$x = a \sin \omega t \tag{80. 1}$$

тенгламаси билан ҳаракат қилса, бундай ҳаракат оддий гармоник ҳаракат дейилади. $x$ ни $O$ нуқтадан ҳисоблаймиз (182- шакл).

$$-1 \leqslant \sin \omega t \leqslant 1$$

бўлгани учун $x$ нинг қиймати $-a$ билан $a$ орасида ўзгаради, яъни:

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$




182- шакл.

Шунга кўра, $M$ нуқта тебранма ҳаракат қилади. $M$ нуқтанинг мувозанат ҳолати $O$ дан энг катта оғишига тегишли $A$ нуқтагача бўлган $a$ оралиқ тебраниш амплитудаси дейилади. $AB = 2a$ оралик эса қулоч деб аталади.

$M$ нуқта $O$ дан $A$ га келиб, яна $O$ орқали $B$ га қайтади. Сўнгра, яна ҳаракат бошланган жойи $O$ га келади. Нуқтанинг ана шу бир бориб келиши унинг тўла тебраниши дейилади. Тўла тебраниш бўлгандан кейин, яна бу ҳаракат такрорлана бошлайди. Тўла тебраниш учун кетган $T$ вақт тебраниш даври дейилади. $T$ даврнинг қийматини:

$$\sin \omega (T + t) = \sin (\omega t + 2\pi) \tag{80. 2}$$

тенгламадан топамиз.

$T$ давр ўтганда, $x$ нинг қиймати ўзгармаслиги керак. Шунинг учун, (80. 2) дан:

$$\omega T = 2\pi$$

бўлади. Бундан:

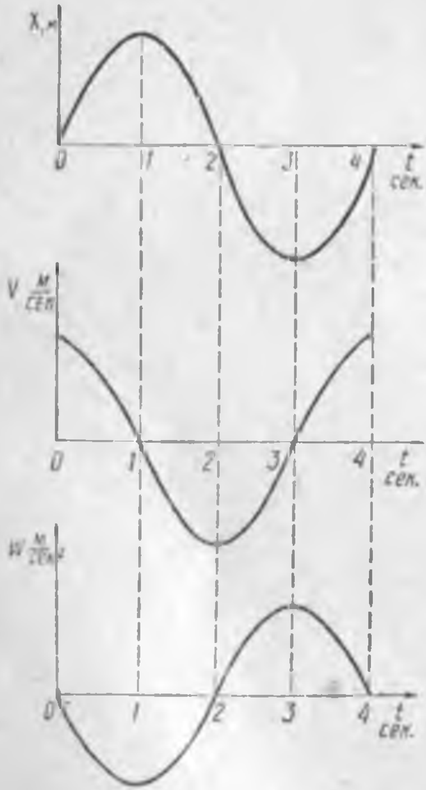
$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (80.\ 3)$$

Даврнинг тескари қиймати:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (80.\ 4)$$

тебраниш такрорлиги дейилади.

$\nu$ — бир секунддаги тебраниш сони, $\omega$ — доиравий такрорлик, $\omega t$ — тебраниш фазаси.



183- шакл.

(80. 3) дан $T$ давр ҳаракатнинг бошланғич шартига боғлиқ эмас эканлигини кўрамиз.

(79. 2) ва (79. 4) дан фойдаланиб, гармоник ҳаракат қилувчи $M$ нуқтанинг тезлиги ва тезланишини топамиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t,$$

$$w = \frac{dv}{dt} =$$

$$= -a\omega^2 \sin \omega t. \qquad (80.\ 5)$$

Бундан кўринадики, тезлик ва тезланиш даврий ўзгариб, ўзгариш оралиги (интервали) тезлик учун:

$$-a\omega \leqslant v \leqslant a\omega$$

бўлади. Тезликнинг энг катта қиймати $O$ нуқтада бўлиб, $A$ ва $B$ нуқталарда нулга тенгдир. Тезланиш эса:

$$-a\omega^2 \leqslant w \leqslant a\omega^2$$

оралиғида ўзгаради. Унинг энг катта қиймати $A$ ва $B$ да бўлиб, тебраниш маркази $O$ да нулга айланади. 183- шаклда масофа, тезлик ва тезланиш графиклари келтирилган.

Энди тезлик ва тезланишни $x$ масофа орқали ифодалаймиз. Бунинг учун масофа, тезлик ва тезланиш ифодаларини қуйидагича ёзамиз:

$$x = a \sin \omega t,$$
$$v = a\omega \cos \omega t,$$
$$w = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Буларда: $\frac{x}{a} = \sin \omega t$, $\frac{v}{a\omega} = \cos \omega t$.

Буларни квадратга ошириб, сўнгра қўшамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2\omega^2} = 1.$$

Бундан:

$$v = \pm \sqrt{(a^2 - x^2)\omega^2}.$$

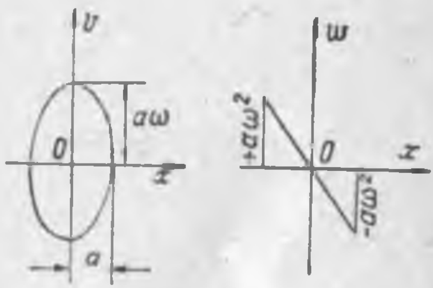
Тезланиш:

$$w = -\omega^2 x$$

бўлади.

Демак, тезланиш ҳамма вақт $O$ марказга қараб йўналиб, $x$ масофага пропорционал бўлар экан.

Тезлик билан масофа орасидаги боғланишни тасвирловчи график эллипс, тезланишники эса тўғри чизиқ кесмасидир (184- шакл).




184- шакл.

**46- масала.** Горизонтал ўққа бириктирилган $AB$ рама $OC$ кривошип воситаси билан ҳаракатланади. Кривошип $O$ атрофида айланганда, бурчак $\varphi = \omega t$ қонуни билан ўзгаради. Кривошипнинг узунлиги $a$ га тенг. Раманинг ҳаракат тенгламаси топилсин (185- шакл).

Ечиш. Рама $O$ нуқта олдида тебранма ҳаракат қилади. Раманинг ҳамма нуқталарининг ҳаракати бир хилда бўлгани учун унинг ўртасидаги бирор $M$ нуқта ҳаракатини топамиз. $M$ нуқтанинг ҳолати қўзғалмас $O$ нуқтадан $x$ масофа билан белгиланади:

$$OM = x.$$

$\triangle OMC$ дан $x = a \cos \varphi$ ни топамиз. Бунга $\varphi = \omega t$ ни қўйсак:

$$x = a \cos \omega t$$

келиб чиқади.

Демак, $M$ нуқта, яъни рама гармоник ҳаракат қилар экан, унинг амплитудаси кривошипнинг узунлиги 1 $a$ га, даври эса $\frac{2\pi}{\omega}$ га тенг.

Раманинг тезлиги ва тезланиши осонлик билан топилади; улар:

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t, \qquad w = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t.$$

**47- масала.** Буғ машина механизмнинг $OA = a$ кривошипи (186- шакл) доимий бурчак тезлиги билан айланади. $M$ ползун (сирпангич) нинг тезлиги ва тезланиши топилсин.

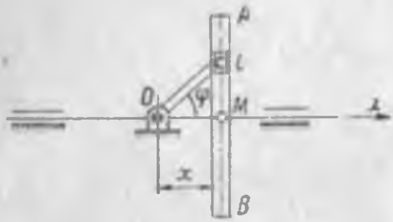
Ечиш. $M$ нуқтанинг чап томонидаги энг кейинги ҳолати $M_0$ бўлсин, $M_0M$ ни $x$ десак:

$$\angle AOM = \angle AMO = \varphi = \omega t$$

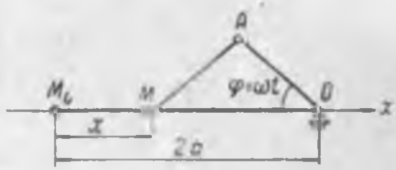
бўлади.

Бу ерда $t$ — масофа $x$ ни ўтиш учун зарур бўлган вақт, $\triangle MAO$ дан:

$$2a - x = 2a \cos \omega t,$$




185- шакл.




186- шакл.

бундан:

$$x = 2a(1 - \cos \omega t)$$

келиб чиқади.

Энди, $v$ ва $w$ ни топиш қийин эмас; улар:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2a\omega \sin \omega t, \qquad w = \frac{d^2x}{dt^2} = 2a\omega^2 \cos \omega t,$$

XIV БОБ

# ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ҲАРАКАТДАГИ МАТЕРИАЛ НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

## 81- §. Материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракати

Бирор $M$ нуқтанинг траекторияси эгри чизиқ бўлса, унинг ҳаракати эгри чизиқли ҳаракат дейилади (187- шакл).

Исталган вақт учун нуқтанинг траекториядаги ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун траекторияда бирор $O$ нуқтани олиб, уни ҳисоблаш боши деб қабул қиламиз. У ҳолда траекториядаги $M_0$, $M_1$, $M_2$,... нуқталар $s_0$, $s_1$, $s_2$,... ёйлар билан аниқланади.

Нуқтанинг ўтган $s$ йўли билан $t$ вақт орасидаги муносабат берилган бўлса, унинг траекториядаги ҳолатини исталган вақт учун аниқлаш мумкин. Бу муносабат умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

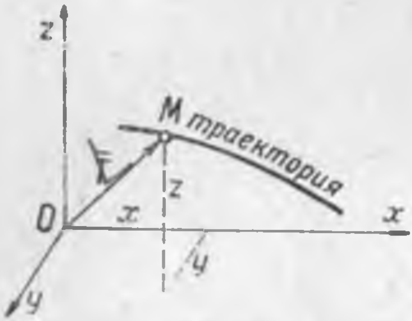
$$s = s(t). \qquad (81.\ 1)$$


187- шакл.

Бу тенглама нуқтанинг траектория бўйича ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонуни дейилади. Нуқтанинг ҳолатини шу йўл билан аниқлаш табиий усул дейилади. Бунда $s$ вақтнинг функцияси ҳамда бир қийматли бўлиб, бу функциядан вақт бўйича икки марта ҳосила олиш мумкин. Умуман нуқтанинг ҳолати биргина $\overline{r}$ радиус-вектор билан аниқланиши маълум. Бу ҳолда нуқта ҳаракати тенгламасининг вектор ифодаси:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \qquad (81.\ 2)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламанинг ўнг томони $t$ вақт скаляр аргументнинг вектор функциясидир. Ҳаракат тенгламасини аналитик равишда ифодаламоқчи бўлсак, $\overline{r}$ радиус-векторнинг ўрнига унинг бирор координаталар системасидаги проекцияларини олиш мумкин. Механикада кўпинча Декарт координаталар системаси қўлланилади. Ҳаракатни Декарт координаталар системасига нисбатан текширмоқчи булсак, координаталар бошини радиус-векторнинг бошига жойлаштирамиз (188- шакл). Нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш учун исталган вақтда унинг координаталарини белгилашимиз керак, яъни ҳаракат тенгламалари нуқтанинг координаталари орқали берилган бўлиши лозим:




188- шакл.

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t). \tag{81. 3}$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бири нуқтанинг координаталар ўқидаги проекциясининг ҳаракат қонунини беради. (81. 3) тенгламалар ҳаракат қонунини ифодалаш билан баравар, нуқта траекториясининг параметрик тенгламалари ҳамдир. Бу ерда $t$ вақт параметр уринидадир. Траекториянинг $x$, $y$, $z$ билан боғланган траектория тенгламасини топиш учун параметр бўлмиш $t$ вақтни (81. 3) дан чиқариб ташлаш керак. Ҳаракат текисликда бўлса, траектория текис эгри чизиқ булади. ($x$, $y$) текисликни ҳаракат текислигида олсак, (81. 3) тенгламаларнинг учинчиси йўқолиб ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x = x(t), \ y = y(t). \tag{81.4}$$

(81. 3) ҳаракат тенгламаларидан фойдаланиб, нуқтанинг маълум вақт ичида ўтган йўлини топишимиз мумкин. Чексиз кичик вақт ичида нуқтанинг ўтган йўли элементар ёйга тенг, шунга кўра:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

бўлади. (81. 3) дан $dx, dy, dz$ қийматларини келтириб қўямиз:

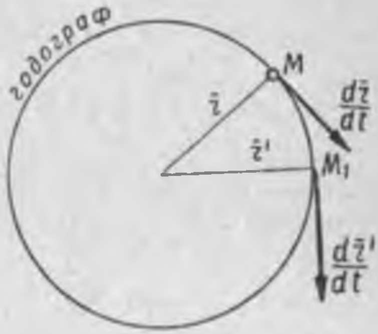
$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{81. 5}$$

Бу ерда $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — тегишли координаталарнинг вақтга нисбатан ҳосилалари, $t - t_0$ вақт ичида ўтилган йўлни топиш учун $ds$ ни интеграллаймиз:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{81. 6}$$

Амалий масалаларни ечишда бу формуладан фойдаланиш осон бўлмаганидан йўлни ва масофани ҳисоблаш учун ҳар

Ҳақиқатан ҳам, скаляр аргумент $t$ ўзгариши билан вектор функциянинг йўналиши ва катталиги бирданига ўзгаради. Вектор функциянинг абсолют қийматидан олинган ҳосила, умумий ҳосиласининг бир қисмидир. Масалан, вектор функция ҳамма вақт бир текисликда бўлиб, катталиги ўзгармаса, $|\bar r| = \text{const}$ бўлса, годограф $r$ радиусли айлана бўлади. Аммо вектор йўналишининг ўзгариши туфайли, у векторнинг ҳосиласи айланага урима бўлиб, айлана радиусига тик бўлади (191- шакл). Ҳолбуки, бу ҳолда векторнинг абсолют катталиги ўзгармас сон бўлиши туфайли, унинг ҳосиласи нулга тенгдир. Вектор функцияни скаляр аргумент бўйича дифференциаллашда, скаляр функцияларни дифференциаллаш учун чиқарилган қоидалар тамоман сақланади. Масалан, вектор йиғиндиларининг ҳосиласи вектор ҳосилаларининг йиғиндисига тенг бўлади:



191- шакл.

$$\bar r = \sum_{i=1}^{n} \bar r_i; \quad \frac{d\bar r}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\bar r_i}{dt} \qquad (82.\ 2)$$

Шунингдек, векторнинг скалярга кўпайтмасининг ҳосиласи ҳам худди оддий анализдагидек бажарилади, яъни:

$$\frac{d}{dt}(\alpha\bar r) = \frac{d\alpha}{dt}\bar r + \alpha\frac{d\bar r}{dt}. \qquad (82.\ 3)$$

Энди, йўналиши ўзгармайдиган векторларнинг скаляр аргументга нисбатан ҳосиласини текширамиз. Бунинг учун, вектор функцияни унинг вектор бирлиги орқали ифодалаймиз:

$$\bar r = r\cdot\bar r^{\circ}.$$

$\bar r^{\circ}$ векторнинг йўналиши ўзгармаса, $\frac{d\bar r^{\circ}}{dt} = 0$ бўлади. У ҳолда (82. 3) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\bar r}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar r^{\circ}. \qquad (82.\ 4)$$

$\frac{dr}{dt} > 0$ бўлса, яъни скаляр аргумент $t$ ўсиши билан $\bar r$ ҳам ўсса, $\bar r^{\circ}$ нинг $\frac{dr}{dt}$ га купайтмаси мусбат бўлиб, $\frac{d\bar r}{dt}$ ҳосиласи $\overline{r^{\circ}}$ йуналишида бўлади. $\frac{dr}{dt} < 0$ бўлса, унинг $\overline{r^{\circ}}$ га купайтмаси манфий бўлиб, $\frac{d\overline{r}}{dt}$ ҳосиласи $\overline{r^{\circ}}$ га тескари йуналади.

Векторларнинг скаляр ва вектор кўпайтмаларининг ҳосиласи тамоман оддий функция кўпайтмаларининг ҳосиласини олиш учун чиқарилган қоидага мувофиқ олинади:

$$\frac{d}{dt}(\overline{a}\overline{b}) = \left(\frac{d\overline{a}}{dt}\overline{b}\right) + \left(\overline{a}\frac{d\overline{b}}{dt}\right), \qquad (82.\ 5)$$

$$\frac{d}{dt}[\overline{a}\,\overline{b}] = \left[\frac{d\overline{a}}{dt}\overline{b}\right] + \left[\overline{a}\frac{d\overline{b}}{dt}\right]. \qquad (82.\ 6)$$

Энди, вектор функциянинг ҳосиласини йуналиши ўзгармайдиган координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаймиз. Координата ўқлари $ox$, $oy$, $oz$ бўйича вектор бирликлари $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ бўлсин. У ҳолда:

$$\overline{r}(t) = r_x(t)\overline{i} + r_y(t)\overline{j} + r_z(t)\overline{k}$$

буладн. Бу тенгликнинг иккала томонидан $t$ га нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r_x\overline{i}) + \frac{d}{dt}(r_y\overline{j}) + \frac{d}{dt}(r_z\overline{k}).$$

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ узгармас вектор булганидан (82. 4) га мувофиқ:

$$\frac{d}{dt}(r_x\overline{i}) = \frac{dr_x}{dt}\overline{i};\quad \frac{d}{dt}(r_y\overline{j}) = \frac{dr_y}{dt}\overline{j};\quad \frac{d}{dt}(r_z\overline{k}) = \frac{dr_z}{dt}\overline{k}.$$

Шунинг учун:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\overline{i} + \frac{dr_y}{dt}\overline{j} + \frac{dr_z}{dt}\overline{k}. \qquad (82.\ 7)$$

Бу формула $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ олдидаги $\frac{dr_x}{dt}$, $\frac{dr_y}{dt}$, $\frac{dr_z}{dt}$ коэффициентлар $\frac{d\overline{r}}{dt}$ векторининг тегишли координата ўқларидаги проекцияларига тенглигини кўрсатади, яъни:

$$\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_x = \frac{dr_x}{dt};\quad \left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_y = \frac{dr_y}{dt};\quad \left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_z = \frac{dr_z}{dt}. \qquad (82.\ 8)$$

Демак, *вектор функция ҳосиласининг узгармас ўқдаги проекцияси вектор функциянинг шу ўқдаги проекциясининг ҳосиласига тенг бўлар экан.* Агар координата ўқлари скаляр аргумент ўзгариши билан ўз йуналишини ўзгартса, вектор бирликлари $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ ўзгарувчи бўлиб (йуналиш жиҳатдан), бу хулоса тўғри булмайди.

## 83- §. Эгри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтанинг тезлиги

Фараз қилайлик, бирор $t$ вақтда $M$ нуқтанинг ҳолати $r$ радиус-вектор билан аниқлансин. $t + \Delta t$ вақтда нуқта $M_1$ да бўлиб, унинг радиус-вектори:

$$\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t)$$

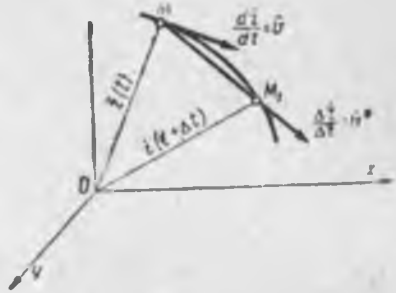
бўлсин (192- шакл). У ҳолда $M$ нуқтанинг $\Delta t$ вақтдаги кўчиши:

$$\overline{MM_1} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$$

бўлади.

Нуқтанинг ўртача тезлигини топиш учун, радиус-векторнинг $\Delta\bar{r}$ орттирмасини $\Delta t$ га бўламиз:

$$\bar{v}^* = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \qquad (83.\ 1)$$



192- шакл.

Бу ўртача тезлик ватар бўйлаб йўналган вектор эканлиги шаклдан кўриниб турибди. Ҳақиқий тезликни топиш учун, $\Delta t$ ни нулга интилтириб, ўртача тезлик ифодасидан лимит оламиз:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

ёки

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (83.\ 2)$$

бўлади. Демак, *эгри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтанинг тезлиги унинг ҳолатини аниқловчи радиус-векторнинг вақтга нисбатан олинган ҳосиласига тенг бўлар экан.* Тезликнинг йўналишини топамиз. 192- шаклда кўрсатилган $M$ нуқтанинг $\Delta t$ вақтда ўтган элементар йўли:

$$|\Delta \bar{r}| = \Delta s = MM_1$$

бўлади.

Ўртача тезлик ифодасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\bar{v}^* = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Бу ифоданинг лимитини оламиз:

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Бунинг ўнг томонидаги лимитларни алоҳида текширамиз:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

$dr = ds$ бўлганидан, $v$ тезликнинг модулидир.
Энди:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta s} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{r}^{\circ}. \qquad (83.\ 4)$$

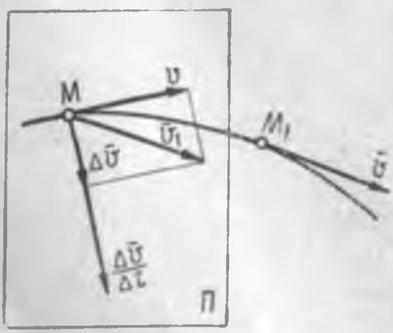
Лимитда $d\overline{r}$ нинг модули $ds$ га тенглашиб, траекторияга $M$ нуқтадан ўтказилган уринма билан йўналади. Шунга биноан, $\overline{r}^{\circ}$ уринманинг бирлик вектори бўлади. Бинобарин, тезлик векторини бундай ифодалаш мумкин:

$$\overline{v} = v\overline{r}^{\circ}. \qquad (83.\ 5)$$

Бундан кўрамизки, *эгри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтанинг тезлиги унинг траекториясига уринма бўлиб йўналар экан.*

## 84- §. Эгри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтанинг тезланиши

Фараз қилайлик, материал нуқта $t$ вақтда $M$ да бўлиб, унинг тезлиги $\overline{v}$ бўлсин. $t + \Delta t$ вақт ўтгандан сўнг нуқта $M_1$ га келиб, $\overline{v}_1$ тезликка эга бўлсин (193- шакл). Тезликнинг $\Delta t$ вақтдаги ўзгаришини топамиз. Бунинг учун $\overline{v}_1$ ни $M$ га кўчирамиз. У ҳолда тезликнинг ўзгариши:



193- шакл.

$$\Delta \overline{v} = \overline{v}_1 - \overline{v}$$

булади. Бунинг ўртача тезланиши бундай ёзилади:

$$\overline{w}^* = \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}. \qquad (84.\ 1)$$

Ҳақиқий тезланишни топиш учун, ўртача тезланишнинг лимитини оламиз:

$$\overline{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt}$$

ёки

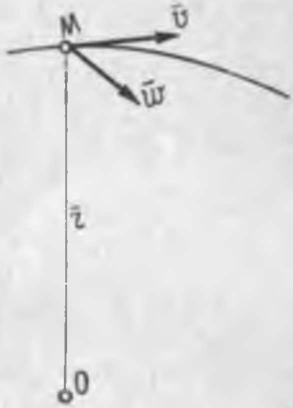
$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt}. \qquad (84.\ 2)$$

Тезлик векторининг вақт бирлигидаги ўзгариши тезланиш деб аталади. (84.2) га тезликнинг қийматини (83.2) дан келтириб қўйсак, тезланишни радиус-вектор орқали ифодалаган бўламиз:

$$\overline{w} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \qquad (84.3)$$

Демак, *тезланиш вектори тезлик векторининг вақтга нисбатан биринчи ҳосиласига ёки радиус-векторнинг вақтга нисбатан иккинчи ҳосиласига тенг.*

Эгри чизиқда олинган бир-бирига чексиз яқин учта нуқтадан ўтувчи ёки уринма билан уриниш нуқтасига чексиз яқин нуқта орқали ўтувчи текислик уринма текислик дейилади. Тезланиш векторининг уринма текисликда ётиши унинг таърифидан кўриниб турибди (193- шакл). $\Delta\overline{v}$ тезлик орттирмаси траекториянинг ботиқ томонига қараб йўналгани учун, тезланиш вектори ҳам шу томонга қараб йўналади (194- шакл).




194- шакл.

## 85- §. Тезлик векторининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари

$\overline{r}$ радиус-векторни координата ўқларидаги проекциялари орқали ёзиш мумкин:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}. \qquad (85.\ 1)$$

Бунда $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ координата ўқлари бўйлаб йўналган бирлик векторлардир. Тезлик векторининг координата ўқларидаги проекциялари $v_x$, $v_y$, $v_z$ бўлсин. У ҳолда $\overline{v}$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}. \qquad (85.\ 2)$$

(85.1) ва (85.2) ифодаларни (83.2) га қўямиз:

$$v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Бу ифода айният бўлгани учун, бирлик векторлар олдидаги коэффициентлар тегишлича бир-бирига тенг бўлиши керак. Шунга кўра:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (85.\ 3)$$

Демак, *тезлик векторининг координаталар ўқидаги проекцияси ҳаракатдаги нуқтанинг тегишли координатасидан вақтга нисбатан олинган ҳосиласига тенг бўлар экан.*

Векторнинг проекциялари маълум бўлса, унинг модули ва йўналишини топиш мумкин. У проекцияларга қурилган параллелепипеднинг диагоналига тенгдир. Шунга кўра:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (85.\ 4)$$

Тезлик векторининг йўналтирувчи косинуслари учун қуйидаги формулаларни ёза оламиз:

$$\cos(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\cos(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \qquad (85.\ 5)$$

$$\cos(\widehat{\bar{v}, z}) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Ҳаракат текисликда бўлса, $x$, $y$ текисликни ҳаракат текислигида олиб, (85.3) ва (85.5) ни:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \end{aligned}\right\}, \qquad (85.\ 6)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \qquad (85.\ 7)$$

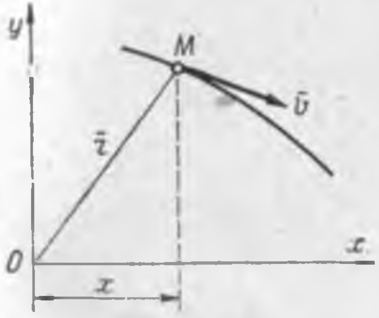
$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{v}, x}) &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ \cos(\widehat{\bar{v}, y}) &= \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (85.\ 8)$$

кўринишида ёзамиз (195- шакл).

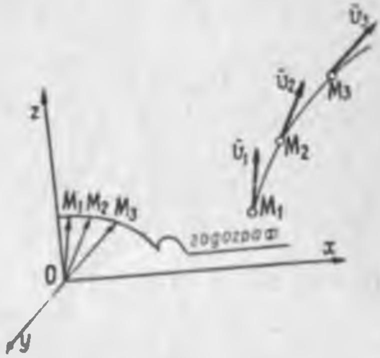
Умумий ҳолда $\bar{v}$ тезлик вектори скаляр аргумент бўлган $t$ вақтнинг функциясидир, яъни:

$$\bar{v} = \bar{v}(t).$$

Тезлик векторнинг боши учун бирор $O$ нуқтани олсак, вақт ўтиши билан унинг учи фазода маълум чизиқ чиза-




195- шакл.

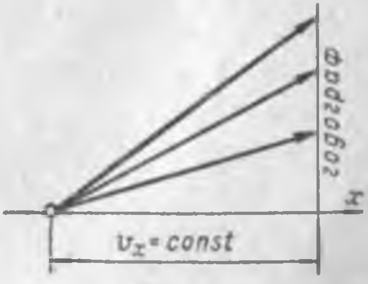



196- шакл.

ди. Бу чизиқ тезлик векторининг годографи дейилади. Координаталар бошини тезлик векторининг бошида олсак (196- шакл), годографнинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\dot{x} = v_x(t), \quad \dot{y} = v_y(t), \quad \dot{z} = v_z(t).$$

Координата ўқлари учун $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ қабул қилинади. Тезлик годографининг тенгламасини топиш учун бу параметрик тенгламалардан вақт $t$ ни чиқариб ташлаш керак. Тезлик годографини график усулда ҳам қуриш мумкин. Бунинг учун нуқтанинг бир-бирига яқин бир қанча ҳолатларидаги тезликларини аниқлаб, бир нуқтага (қутбга) ўз йўналишида кўчирилган бу тезликлар учларини туташтириш билан годограф графигини оламиз. Тезликнинг модули доимий бўлса, годограф $v$ радиусли сфера устидаги эгри чизиқдан иборат бўлади. Модули




197- шакл.

ўзгармас тезлик вектори доимо бирор текисликка параллел бўлса, годограф айлана бўлади.

Тезлик маълум текисликда бўлиб, унинг шу текисликда ётувчи бирор ўқдаги проекцияси ҳамма вақт ўзгармас сон бўлса (197- шакл), годограф шу ўққа тик ва тезлик бошидан $v_x$ узоқликдаги вертикал чизиқ бўлади.

## 86- §. Тезланиш векторининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари

Тезланиш векторининг координата ўқларидаги проекциялари $w_x$, $w_y$, $w_z$ бўлсин. $\overline{w}$ тезланиш ва $\overline{v}$ тезликни уз проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\overline{w} = w_x\overline{i} + w_y\overline{j} + w_z\overline{k},$$
$$\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}.$$

Буларни (84.2) га қуямиз:

$$w_x\overline{i} + w_y\overline{j} + w_z\overline{k} = \frac{d}{dt}(v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}) = $$
$$= \frac{d}{dt}(v_x\overline{i}) + \frac{d}{dt}(v_y\overline{j}) + \frac{d}{dt}(v_z\overline{k}).$$

Бу ифода айният бўлгани учун, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ бирлик векторларнинг олдидаги коэффициентлар тегишлича бир-бирига тенг бўлиши керак. Шунга кўра:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad w_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (86.\ 1)$$

Бу формулаларга $v_x$, $v_y$, $v_z$ нинг қийматларини (84.3) дан келтириб қўйсак, тезланиш проекцияларини координаталар орқали ифодалаган буламиз:

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ w_y &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ w_z &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned} \qquad (86.\ 2)$$

Демак, *тезланиш векторининг координата ўқидаги проекцияси тезлик векторининг тегишлича координаталар ўқидаги проекциясининг вақтга нисбатан биринчи ҳосиласига ёки ҳаракатланувчи нуқта координатасининг иккинчи ҳосиласига тенг бўлар экан.*

Тезланишнинг модули ва унинг йўналтирувчи косинуслари қуйидагича ёзилади:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}, \tag{86. 3}$$

$$\cos(\widehat{\bar{w}, x}) = \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

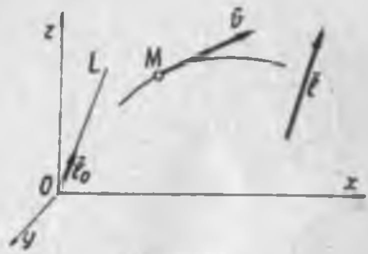
$$\cos(\widehat{\bar{w}, y}) = \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \tag{86. 4}$$

$$\cos(\widehat{\bar{w}, z}) = \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

## 87- §. Тезлик ва тезланиш векторларининг ихтиёрий ўқдаги проекциялари

Тезликнинг бирор ихтиёрий ўқдаги проекциясини оламиз. У ўқ $\bar{l}$ йўналишида бўлсин. Координаталар бошидан $\bar{l}$ га параллел қилиб, $OL$ чизиқни ўтказамиз (198- шакл). Бу ўқнинг бирлик вектори $\bar{l}^\circ$ бўлсин. Тезликнинг $\bar{l}$ даги проекциясини топиш учун, уни координата ўқларидаги проекциялари орқали ёзамиз:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}. \tag{87.1}$$




198- шакл.

Бу ифодани $\bar{l}^\circ$ га скаляр равишда кўпайтирсак:

$$(\bar{v}\,\bar{l}^\circ) = v_x(\bar{i}\,\bar{l}^\circ) + v_y(\bar{j}\,\bar{l}^\circ) + v_z(\bar{k}\,\bar{l}^\circ) \tag{87. 2}$$

келиб чиқади.

Векторлар скаляр кўпайтмасининг таърифига кўра:

$$(\bar{v}\,\bar{l}^\circ) = v\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{l}})$$

ва унинг проекциялари:

$$v_x(\bar{i}\,\bar{l}^\circ) = v_x\cos(\widehat{\bar{l}, x}),$$

$$v_y(\bar{j}\,\bar{l}^\circ) = v_y\cos(\widehat{\bar{l}, y}),$$

$$v_z(\bar{k}\,\bar{l}^\circ) = v_z\cos(\widehat{\bar{l}, z})$$

бўлади.

Буни эътиборга олиб, (87.2) ни бундай ёзамиз:

$$v\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{l}}) = v_x \cos(\widehat{\bar{l}, x}) + v_y \cos(\widehat{\bar{l}, y}) + \\ + v_z \cos(\widehat{\bar{l}, z}). \quad (87.3)$$

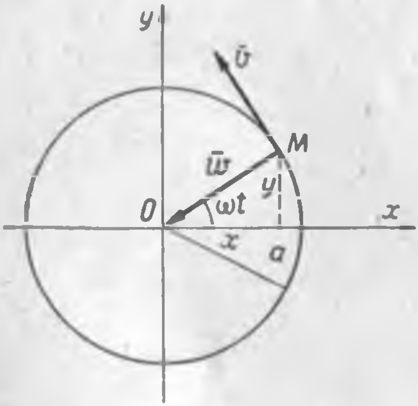
Юқоридаги мулоҳаза асосида, тезланишнинг ҳам ихтиёрий $\bar{l}$ ўқдаги проекциясини топамиз:

$$w\cos(\widehat{\bar{w}, \bar{l}}) = w_x \cos(\widehat{\bar{l}, x}) + w_y \cos(\widehat{\bar{l}, y}) + \\ + w_z \cos(\widehat{\bar{l}, z}). \quad (87.4)$$

**48- масала**. Материал нуқтанинг ҳаракат тенгламалари қуйидагича берилган:

$$x = a\cos\omega t, \; y = a\sin\omega t.$$

Ҳаракат траекторияси, тезлик ва тезланиш топилиб, тезлик годографи қурилсин.




199- шакл.

Ечиш. Траекторияни топиш учун, ҳаракат тенгламаларидан вақтни чиқариб ташлаймиз; бунинг учун ҳаракат тенгламаларини квадратга ошириб, сўнгра қўшамиз:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Демак, траектория $a$ радиусли айлана бўлар экан (199- шакл). Тезлик ва тезланишнинг проекцияларини топамиз:

$$v_x = \dot{x} = -a\omega\sin\omega t,$$
$$w_x = \ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t,$$
$$v_y = \dot{y} = a\omega\cos\omega t,$$
$$w_y = \ddot{y} = -a\omega^2\sin\omega t.$$

Тезлик ва тезланишнинг катталиклари, (85.4) ва (86.3) га биноан, қуйидагича ёзилади:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega = \text{const}.$$
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2 = \text{const}.$$

Тезликнинг йўналиши йўналтирувчи косинуслар:

$$\cos(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{\dot{x}}{v} = -\sin\omega t,$$

$$\cos(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{\dot{y}}{v} = \cos\omega t$$

билан аниқланади. Демак, тезлик айлана радиуси $OM$ га тик йўналар экан.

Тезланишнинг йўналтирувчи косинуслари:

$$\cos(\widehat{\bar{w}, x}) = \frac{\ddot{x}}{w} = -\cos\omega t,$$

$$\cos(\widehat{\bar{w}, y}) = \frac{\ddot{y}}{w} = -\sin\omega t$$

бўлади.

Бу формулалардан тезланиш векторининг айлана радиуси бўйлаб марказга томон йўналганлигини кўрамиз.

Тезлик ўзгармас бўлса ҳам, ҳаракат эгри чизиқли бўлгани учун, тезланиш мавжуддир.

Годографни топиш учун, тезлик проекциясидан вақтни чиқариб ташлаймиз:

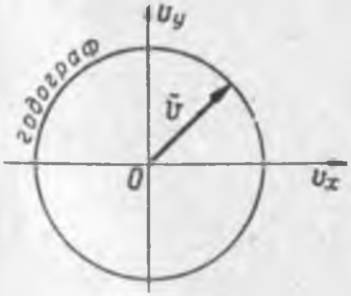
$$v_x^2 + v_y^2 = a^2\omega^2.$$

Демак, годограф, радиуси $a\omega$ га тенг айлана бўлар экан (200- шакл).

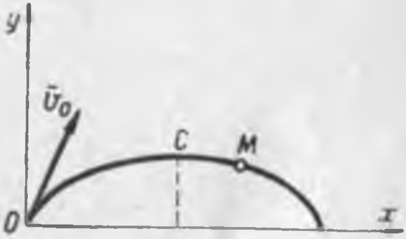
**49- масала.** Нуқтанинг ҳаракат тенгламалари:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\alpha, \\ y &= v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

кўринишда берилган, $\alpha$ ва $v_0$—маълум ўзгармас миқдорлар. Ҳаракат траекторияси ва тезланиши топилсин.




200- шакл.




201- шакл.

Ечиш. Олдин нуқта траекториясини топамиз: бунинг учун ҳаракат тенгламаларидан $t$ вақтни чиқариб ташлаймиз. (а) нинг биринчи қисмидан $t$ ни топамиз:

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}.$$

Уни иккинчи қисмга қўямиз:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Бу — координаталар бошидан ўтувчи ярим парабола тенгламасидир (201- шакл). Тезлик проекцияларини топамиз:

$$v_x = v_0\cos\alpha,$$
$$v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Тезликнинг $x$ ўқидаги проекцияси ўзгармас, $y$ ўқидаги проекцияси эса ўзгарувчи сондир. $v_y$ олдин мусбат, бир қанча вақт ўтгандан кейин нулга айланиб, сўнгра манфий бўлади. $v_y$ нинг нулга айланган вақтини топамиз.

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0,$$
$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Бу вақтда нуқта энг баландликка кўтарилади. Уни $y_{max}$ деб, (а) нинг иккинчи қисмидан топамиз:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

тезликнинг модули:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2t^2}$$

ёки

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

бўлади. Тезланиш проекциялари:

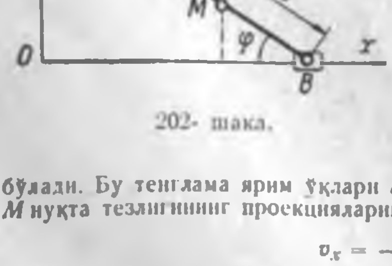
$$w_x = 0,$$
$$w_y = -g.$$

Бундан:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = g.$$

**50- масала.** *AB* кесманинг учлари ўзаро тик чизиқлар устида силжийди. Унинг бирор *M* нуқтасининг ҳаракати текширилсин (202- шакл). *AB* кесманинг ҳаракатида $\varphi$ бурчак вақтга пропорционал ўзгаради:

$$\varphi = \omega t.$$



202- шакл.

Ечиш. *AB* чизиқда олинган бирор *M* нуқтанинг координаталарини топамиз. Шаклдан:

$$x = a \cos \omega t,$$
$$y = b \sin \omega t$$

бўлади.

Булардан траектория тенгламасини топиш қийин эмас, у:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

бўлади. Бу тенглама ярим ўқлари $a$ ва $b$ бўлган эллипс тенгламасидир. *M* нуқта тезлигининг проекцияларини топамиз:

$$v_x = -a\omega \sin \omega t,$$
$$v_y = b\omega \cos \omega t.$$

Бу ифодалардан тезлик годографи ярим ўқлари $a\omega$ ва $b\omega$ бўлган эллипс эканлиги кўринади (203- шакл).

Тезланишнинг проекциялари:

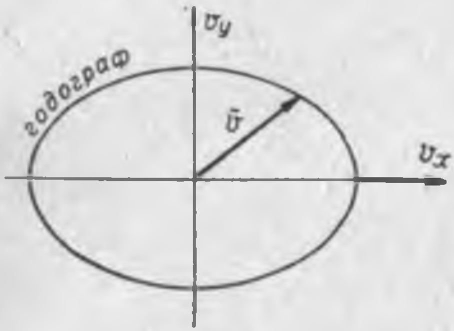
$$w_x = -a\omega^2 \cos \omega t,$$
$$w_y = -b\omega^2 \sin \omega t$$

бўлади. Бу масалада ҳам тезланиш эллипс марказига йўналган.

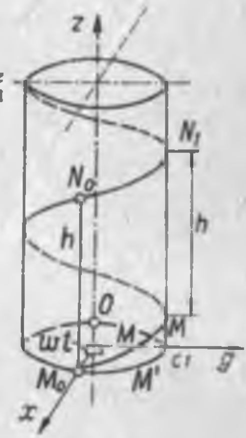
**51- масала.** Ҳаракатланувчи $M$ нуқтанинг $xOy$ текисликдаги проекцияси $M_1$ нинг ҳаракат қонуни:

$$x = a\cos \omega t, \qquad y = a \sin \omega t$$

кўринишида берилган. Унинг $z$ ўқидаги проекцияси $M_z$ эса $z = ct$ тенгламага мувофиқ, тенг ўлчовли тўғри




203- шакл.




204- шакл.

чизиқли ҳаракат қилади (204- шакл). Нуқта ҳаракатининг траекторияси, тезлиги, тезлик годографи ва тезланиши топилсин.

Е ч и ш. Траекторияни топиш учун ҳаракат тенгламалари:

$$x = a\cos \omega t,$$
$$y = a \sin \omega t, \tag{a}$$
$$z = ct$$

дан вақтни чиқариб ташлаш керак. Бунинг учун кейинги тенгламадан $t$ ни топиб, биринчи икки тенгламага қуямиз. Траектория тенгламалари:

$$x = a\cos \frac{\omega}{c} z,$$
$$y = a \sin \frac{\omega}{c} z \tag{б}$$

бўлади. $M$ нуқтанинг $xOy$ текисликдаги проекцияси шу текисликда $\frac{2\pi}{\omega}$ давр мобайнида тўла айлана чизиши (а) нинг биринчи икки қисмидан кўриниб турибди. Шу давр ичида нуқта $z$ ўқи бўйлаб:

$$h = 2\pi \frac{c}{\omega} \tag{в}$$

баландликка кутарилади.

(а) тенгламаларн билан берилган ҳаракат винт ҳаракати дейилади. Унинг траекторияси эса винт чизиги дейилади. Винт чизиги радиуси $a$ бўлган цилиндр устига ўралади. Ясовчи чизиқ устида олинган икки ўрам оралиғи ($h$) винт қадами дейилади. Тезликни топиш учун (а) ҳаракат тенгламаларидан ҳосила оламиз:

$$v_x = -a\omega \sin \omega t,$$
$$v_y = a\omega \cos \omega t, \qquad (г)$$
$$v_z = c.$$

Нуқтанинг $xOy$ текисликдаги проекцияси айлана чизиб, унинг тезлиги:

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega$$

бўлади.

Нуқтанинг винт устидаги тезлиги:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + c^2}.$$

Тезлик йўналиши йўналтирувчи косинуслар:

$$\cos(\widehat{\bar{v}, x}) = -\frac{a\omega \sin \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}}, \quad \cos(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{a\omega \cos \omega t}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}},$$

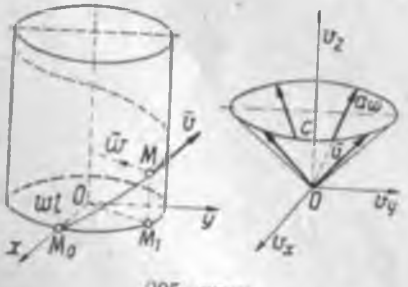
$$\cos(\widehat{\bar{v}, z}) = \frac{c}{\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}}$$

билан аниқланади.

Тезлик годографи тенгламаси:

$$v_x^2 + v_y^2 = a^2\omega^2,$$
$$v_z = c$$

бўлади. Бу тенгламалардан кўрамизки, годограф асоси доира, учи координаталар бошида бўлган конус экан. Годограф конусининг ясовчилари нуқтанинг ҳар хил ҳолатлари учун тезликнинг йўналиши ва миқдорини беради (205- шакл).




205- шакл.

Тезланишнинг катталик ва йўналиши осонгина топилади:

$$w_x = -\omega^2 a \cos \omega t = -\omega^2 x,$$
$$w_y = -\omega^2 a \sin \omega t = -\omega^2 y,$$
$$w_z = 0.$$

Булардан:

$$w = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = a\omega^2$$

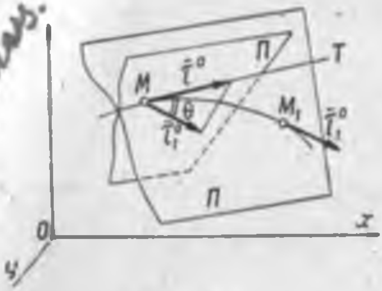
ва

$$\cos(\widehat{\bar{w}, x}) = -\cos \omega t,$$
$$\cos(\widehat{\bar{w}, y}) = -\sin \omega t,$$
$$\cos(\widehat{\bar{w}, z}) = 0.$$

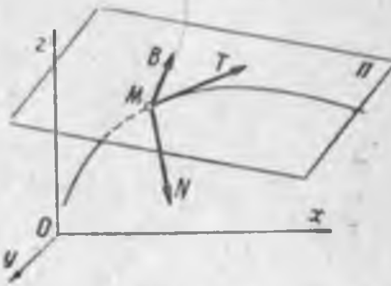
Тезланиш ҳаракатланувчи нуқтадан цилиндр ўқига туширилган тик чизиқ бўйича йўналган.

## 88- §. Дифференциал геометриядан баъзи маълумотлар

Фараз қилайлик, фазода берилган эгри чизиқдаги бирор $M$ нуқтадан $MT$ уринма ўтган бўлсин. Эгри чизиқда $M$ нуқтага қўшни бўлган $M_1$ нуқтани оламиз. $MT$ уринма ва $M_1$ нуқта орқали $\Pi$ текисликни ўтказамиз (206- шакл). Энди,




206- шакл.




207- шакл.

$M_1$ нуқтани $M$ нуқтага чексиз равишда яқинлаштирамиз. Бу ҳолда ҳалиги текисликнинг ўрни ўзгара бошлайди ва у, $MT$ уринма атрофида айланиб, маълум ҳолатни олишга интилади. Текисликнинг лимитдаги ҳолати **эгрилик текислиги** дейилади. Фазодаги эгри чизиқни текширишда бу текисликнинг аҳамияти катта.

Фазодаги эгри чизиқнинг $M$ нуқтасидан ўтиб, ушбу нуқта орқали ўтказилган уринмага тик бўлган ҳар бир чизиқ нормал дейилади. Бу нормалларнинг ҳаммаси нормал текисликда ётади. Улардан иккитаси катта аҳамиятга эгадир. Буларнинг бири эгрилик текислигида ётувчи $MN$, иккинчиси эгрилик текислигига тик бўлган, $MB$ нормаллардир (207- шакл). $MN$ бош нормал, $MB$ бинормал дейилади. Эгри чизиқ уринмаси, бош нормал ва бинормаллардан ташкил топган координата ўқлари **табиий ўқлар** дейилади.

Бу ўқлар ўзаро худди $x$, $y$, $z$ каби ўрнашган, уринманинг мусбат йўналиши ёйнинг ўсиб бориши томонига қараб, бош нормалники эса эгри чизиқнинг ботиқ томонига қараб йўналган. $Oz$ ўқи $Ox$ ва $Oy$ ўқларига нисбатан қандай йўналган бўлса, бинормал ҳам уринма ва бош нормалга нисбатан худди шундай йўналган.

Бу ўқларнинг бирлик векторларини тегишлича $\bar{\tau}^\circ$, $\bar{n}^\circ$, $\bar{b}^\circ$ билан белгилаймиз. Ҳар қайси нуқтада бу уч йўналиш координаталар системасини ташкил этади. Бу система **табиий (натурал) координаталар системаси** дейилади.

Табиий координаталар $\overline{\tau^\circ}$, $\overline{n^\circ}$, $\overline{b^\circ}$ бирлик векторларнинг радиус-вектор орқали ифодасини топамиз.

Фараз қилайлик, $\overline{r}$ радиус-вектор ёйнинг функцияси бўлсин:

$$\overline{r} = \overline{r}(s). \tag{88. 1}$$

$\frac{d\overline{r}}{ds}$ вектор катталик жиҳатидан 1 га тенг ва $s$ ёйга уринма бўлиб йўналганлиги бизга маълум эди. Шунинг учун у, $\overline{\tau^\circ}$ бирлик векторига тенгдир, яъни:

$$\overline{\tau^\circ} = \frac{d\overline{r}}{ds}. \tag{88. 2}$$

Бош нормалнинг $\overline{n^\circ}$ бирлик векторини топиш учун 206- шаклга эътибор берамиз. $\Pi$ текисликда ётувчи $M_1$ нуқта $M$ нуқтага чексиз яқин бўлгани учун $\overline{\tau^\circ}$ билан $\overline{\tau_1}$ орасидаги $\Theta$ бурчак ҳам чексиз кичикдир. $\overline{\tau^\circ}$, $\overline{\tau_1^\circ}$ ва $\Delta\overline{\tau}$ лардан тузилган тенг ёнли учбурчакдан $\Delta\tau^\circ$ нинг модулини топамиз:

$$|\Delta\overline{\tau^\circ}| = 2|\overline{\tau^\circ}|\sin\frac{\Delta\Theta}{2} \approx 2\cdot 1\cdot\frac{\Delta\Theta}{2} = \Delta\Theta. \tag{88. 3}$$

$\Delta\overline{\tau^\circ}$ векторни тақрибий равишда $\overline{\tau^\circ}$га тик дейишимиз мумкин. У ҳолда:

$$\Delta\overline{\tau^\circ} = \Delta\Theta\cdot\overline{n^\circ}$$

бўлади. Бундан:

$$\overline{n^\circ} = \frac{\Delta\overline{\tau^\circ}}{\Delta\Theta} = \frac{\Delta\overline{\tau^\circ}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta\Theta}. \tag{88. 4}$$

$\Delta s$ нулга интилса, $M_1$ нуқта $M$ нуқта ўрнини эгаллашга интилади. У ҳолда $\Pi$ текислик $\Pi_0$ эгрилик текислигига интилиб, $\overline{n^\circ}$ бош нормалнинг бирлик вектори булади. (88.4) нинг ўнг томони лимитини оламиз:

$$\overline{n^\circ} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overline{\tau^\circ}}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta\Theta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\Theta}.$$

Биринчи лимит

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overline{\tau^\circ}}{\Delta s} = \frac{d\overline{\tau^\circ}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\overline{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\overline{r}}{ds^2}. \tag{88. 5}$$

Иккинчи лимитнинг тескариси эгри чизиқнинг $M$ нуқтасидаги **э г р и л и г и** дейилади. Уни $k$ десак:

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\Theta}{\Delta s} \tag{88. 6}$$

бўлади.

Эгриликнинг тескари қиймати $\frac{1}{k}$ — эгрилик радиуси дейилади. Уни $\rho$ десак:

$$\rho = \lim_{\Delta\Theta \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\Theta} \qquad (88.\ 7)$$

бўлади.

Шундай қилиб, бош нормал бирлик вектори учун:

$$\overline{n}^{\circ} = \rho \frac{d\overline{\tau}^{\circ}}{ds} = \rho \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} \qquad (88.\ 8)$$

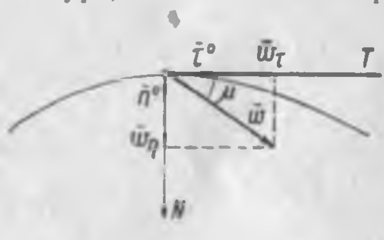
ифодаси келиб чиқди.

Бинормал бирлик вектори $\overline{b}^{\circ}$ ни топиш қийин эмас. $\overline{\tau}^{\circ}$, $\overline{n}^{\circ}$, $\overline{b}^{\circ}$ бирлик векторлар $x$, $y$, $z$ Декарт координаталар системаси каби ўрнашгани учун $\overline{\tau}^{\circ}$ билан $\overline{n}^{\circ}$ вектор кўпайтмасининг $\overline{b}^{\circ}$ га тенглиги табиийдир:

$$\overline{b}^{\circ} = [\overline{\tau}^{\circ}\ \overline{n}^{\circ}] = \rho \left[ \frac{d\overline{r}}{ds}\ \frac{d^2\overline{r}}{ds^2} \right]. \qquad (88.\ 9)$$

## 89-§. Тезланиш векторининг табиий координата ўқларидаги проекциялари. Уринма ва нормал тезланишлар

Тезланиш векторининг табиий координата ўқларидаги проекцияларини топамиз. Таърифга кўра, тезланиш вектори эгрилик текислигида ётгани учун унинг бинормал ўқидаги проекцияси нулдир. Тезланишнинг уринма ва бош нормалдаги проекцияларини $w_\tau$ ва $w_n$ деймиз. 208- шаклдан тезланиш векторини унинг уринма ва бош нормал ўқларидаги проекциялари орқали:



208- шакл.

$$\overline{w} = w_\tau \overline{\tau}^{\circ} + w_n \overline{n}^{\circ} \qquad (89.\ 1)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

$w_\tau$ ва $w_n$ қийматларини топамиз. Бунинг учун тезлик векторининг (83.5) формуласидан, яъни $\overline{v} = v\overline{\tau}$ ифодадан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\overline{w} = \frac{d(v \cdot \overline{\tau}^{\circ})}{dt} = \frac{dv}{dt} \overline{\tau}^{\circ} + v \frac{d\overline{\tau}^{\circ}}{dt}. \qquad (89.\ 2)$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қўшилувчиларнинг ҳар қайсисини алоҳида текширамиз. Биринчи қўшилувчи ўз-ўзидан аниқ кўриниб турибди. У, тезлик модулининг ўзгаришидан келиб чиққан тезланиш бўлиб, уринма билан бир йўналишдадир. Бу тезланиш **уринма тезланиш** ёки **тангенциал тезланиш** дейилади.

Энди, тенгликнинг иккинчи қисмидаги $\frac{d\overline{\tau^\circ}}{dt}$ ни текширамиз. Бунинг учун (88.8) ни:

$$\frac{d\overline{\tau^\circ}}{ds} = \frac{\overline{n^\circ}}{\rho}$$

кўринишда ёзамиз. Буни эътиборга олсак:

$$\frac{d\overline{\tau^\circ}}{dt} = \frac{d\overline{\tau^\circ}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\overline{n^\circ}}{\rho} v \qquad (89.3)$$

бўлади.

Чиққан ифодаларни (89.2) га қўйсак:

$$\overline{w} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau^\circ} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n^\circ} \qquad (89.4)$$

келиб чиқади. Бу ифодани (89.1) нинг чап томонига қўйсак:

$$w_\tau \overline{\tau^\circ} + w_n \overline{n^\circ} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau^\circ} + \frac{v^2}{\rho}\overline{n^\circ}$$

айниятига эга бўламиз. Бундан $\overline{\tau^\circ}$ билан $\overline{n^\circ}$ олдидаги коэффициентларни солиштириб, $w_\tau$ ва $w_n$ учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (89.5)$$

Бу формуланинг биринчи қисми устида юқорида тўхтаб ўтган эдик. Иккинчи қисми эса эгри чизиқли ҳаракат учун тезланишнинг асосий қисми бўлиб, у тезлик вектори йўналишининг ўзгариши натижасида келиб чиқади. Тезланишнинг бу қисми бош нормал билан эгрилик марказига қараб йўналгани учун, у **нормал тезланиш** ёки **марказга интилувчи** тезланиш дейилади.

Тўла тезланиш модулини нормал ва тангенциал тузувчилар орқали ифодалаймиз. 208- шаклдан:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (89.6)$$

Тезлик билан тўла тезланиш орасидаги бурчакни $\mu$ десак, бу бурчак тангенси учун 208- шаклдан:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{w_n}{w_\tau} \tag{89. 7}$$

формулани оламиз:

Амалий масалаларни ечишда катта аҳамиятга эга бўлган икки хусусий ҳолни текширамиз:

а) фараз қилайлик: $v = \text{const}$ бўлсин. У ҳолда:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

бўлади. Иккинчидан:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Шунинг учун тўла тезланиш:

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

бўлади.

Ўзгармас тезлик билан ҳаракатланувчи нуқтанинг траекторияси радиуси $R$ га тенг айлана бўлса, бу ҳолда ҳам юқоридаги натижани оламиз, яъни:

$$w = w_n = \frac{v^2}{R},$$

б) ҳаракат тўғри чизиқли бўлсин. Бу ҳолда $\rho = \infty$ ва $w_n = 0$. Демак тезланиш:

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Бу текширилган ҳоллардан курамизки, ҳаракат тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли бўлгандагина тезланиш нулга тенг бўлар экан.

Демак, тангенциал тезланиш тезлик модулининг ўзгариши натижасида, нормал тезланиш тезлик йўналишининг ўзгариши натижасида ҳосил бўлади.

Ҳаракат тенгламалари маълум булса, (89.5) ва (89.6) дан фойдаланиб, траекториянинг эгрилик радиусини топиш мумкин:

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}, \tag{89. 8}$$

бундан:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

ва

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**52- масала.** $a$ радиусли цилиндрга қадами $h$ бўлган винт чизиги ўралган. Винт чизигининг эгрилик радиуси топилсин.

Е ч и ш. Нуқтанинг винт ҳаракати:

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = a\sin\omega t,$$
$$z = ct$$

тенгламалар орқали ифодаланиши 51- масаладан маълум. Бу ҳол учун тезлик:

$$v^2 = a^2\omega^2 + c^2$$

ва тезланиш:

$$w = a\omega^2.$$

Тезлик ўзгармас бўлганидан:

$$w_\tau = 0.$$

Демак:

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Бундан:

$$\rho = \frac{a^2\omega^2 + c^2}{a\omega^2} = a + \frac{1}{a}\left(\frac{c}{\omega}\right)^2.$$

Винт қадами $h = 2\pi\frac{c}{\omega}$ эди, буни эътиборга олсак:

$$\rho = a\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)$$

бўлади.

209- шакл.

**53- масала.** Радиуси $a$ бўлган гилдирак тўгри чизиқли рельсда сирпанмасдан думалайди. Гилдирак устидаги бирор нуқта траекториясининг эгрилик радиуси топилсин (209- шакл).

Е ч и ш. Бирор $M$ нуқтани олиб, унинг ҳаракатини текширамиз. Гилдиракни рельсга тегиб турган $N$ нуқтасидан гилдирак ҳаракатининг тескари томонига $NO = NM$ кесмани қўйиб, $O$ нуқтани координаталар боши деб қабул қиламиз. $\angle MCN$ ни $\varphi$ орқали белгилаб, шаклдан $M$ нуқтанинг координатаси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$x = OK = ON - KN = a\varphi - a\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = a(\varphi - \sin\varphi),$$

$$y = MK = MS + SK = a + a\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = a(1 - \cos\varphi).$$

Траектория тезликка боглиқ бўлмагани учун, гилдирак марказининг тезлигини ўзгармас деб фараз қиламиз. Ўтилган йўл:

$$S = v_0 t$$

бўлади.

Иккинчи томондан, $s = ON = a\varphi$. Бундан: $a\varphi = v_0 t$ ёки $\varphi = \frac{v_0 t}{a}$ келиб чиқади. $\frac{v_0}{a} = \omega$ десак, $\varphi = \omega t$ бўлади. Бундан фойдалансак:

$$x = a(\omega t - \sin \omega t),$$
$$y = a(1 - \cos \omega t).$$

$\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$

Бу тенгламалар циклоиданинг параметрик тенгламаларидир.

Тезликнинг проекцияларини топамиз; улар:

$$v_x = a\omega(1 - \cos \omega t),$$
$$v_y = a\omega \sin \omega t$$

бўлади.

Тезликнинг катталиги:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2a\omega \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Тезланиш эса:

$$w_x = a\omega^2 \sin \omega t,$$
$$w_y = a\omega^2 \cos \omega t.$$

Булардан:

$$w = a\omega^2.$$

Тангенциал ва нормал тезланишлар:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = a\omega^2 \cos \frac{\omega t}{2},$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = a\omega^2 \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Булардан:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 4a \sin \frac{\omega t}{2}.$$

XV БОБ

# ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИЛГАРИЛАМА ВА ҚЎЗҒАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

Энди, қаттиқ жисмларнинг ҳаракатини ўрганишга ўтамиз. Қаттиқ жисмларнинг абсолют қаттиқ деб, яъни унинг икки нуқтасининг оралиғи жисмнинг ҳар қандай шароитида ўзгармайди деб фараз қиламиз.

Қаттиқ жисмларнинг ҳаракатини унинг энг оддий кўринишидан бошлаймиз. Улар жисмнинг илгарилама ва қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатидир. Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай мураккаб ҳаракатини бу икки типдаги оддий ҳаракатга келтирилишини кейинчалик кўрсатамиз.

## 90- §. Илгарилама ҳаракат

Қаттиқ жисмда олинган ҳар қандай кесма жисмнинг ҳаракатида ҳамма вақт ўз-ўзига параллел қолса, жисмнинг бундай ҳаракати **илгарилама ҳаракат** дейилади.

Теорема. *Илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил траектория чизади ва ҳар онда жисм нуқталарининг тезлик ва тезланиш векторлари бир-бирига тенг бўлади.*

Илгарилама ҳаракат таърифдан кўринадики, илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталарининг траекторияси бир хилда ва бир-бирига параллел бўлади (210- шакл). Қаттиқ жисмда олинган кесма учларини $A$ ва $B$ билан белгилаймиз.

Бу $A$ ва $B$ нуқталарнинг радиус-векторлари $\overline{r}_A$ ва $\overline{r}_B$ бўлсин. У ҳолда, шаклдан:

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{AB} \qquad (90.\ 1)$$

ни оламиз. Жисмнинг ҳаракатида $\overline{AB}$ векторнинг на катталиги ва на йўналиши ўзгаради. $\overline{r}_A$ ва $\overline{r}_B$ векторлар ўзгарув-

Нуқта траекторияcининг бир хил эканлиги кўрсатилмаган.

чандир. $B$ нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун, (90.1) дан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

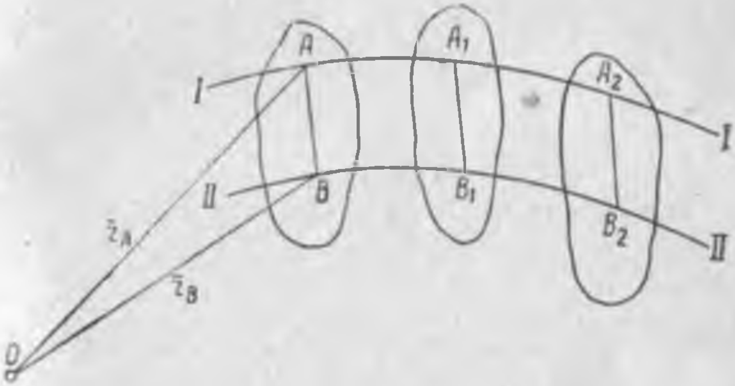
$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt}.$$

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = 0 \text{ бўлганидан: } \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} \text{ бўлади.}$$

Бундан:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A. \qquad (90.\ 2)$$

$A$ ва $B$ нуқталар ихтиёрий танлангани учун, илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталарининг тезликлари бир




210- шакл.

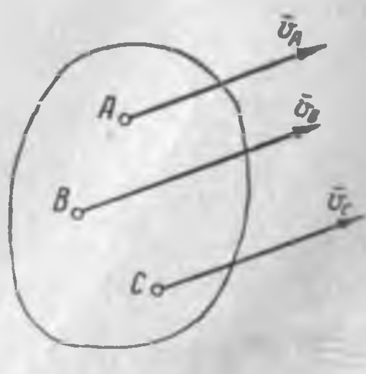
хилда бўлар экан. Шунинг учун, жисм илгарилама ҳаракатда бўлса, унинг нуқтасининг тезлиги демасдан, жисм тезлиги дейиш ҳам мумкин (211- шакл). (90.2) дан вақтга нисбатан ҳосила олсак, илгарилама ҳаракадаги жисм тезланишини топамиз

$$\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

ёки

$$\bar{w}_A = \bar{w}_B = \bar{w}. \qquad (90.\ 3)$$

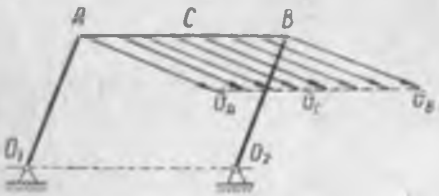
Тезланиш ҳам жисмнинг барча нуқталари учун бир хилдадир. Илгарилама ҳаракат




211- шакл.

таърифидан ва (90.2) ҳамда (90.3) дан кўрамизки, жисмнинг бу хилдаги ҳаракати унинг бир нуқтасининг ҳаракати билан аниқланар экан. Шунинг учун, илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг кинематикаси нуқта кинематикасидан фарқ қилмайди.

**54- масала.** Кривошиплари тенг бўлган 4 звеноли механизм берилган; $O_2B = O_1A$, $O_1O_2 = AB$ (212- шакл). Кривошиплар тенг ўлчовли ҳаракат билан айланиб, $\varphi$ бурчак вақтга пропорционал кўпаяди. $AB$ спарник нуқталарининг тезлик ва тезланишлари топилсин.




212- шакл.

Ечиш. 4 звеноли $O_1ABO_2$ механизм параллелограмм бўлганидан $AB$ спарник илгарилама ҳаракат қилади. Шунинг учун унинг бирор нуқтасининг тезлик ва тезланишини топсак, бутун спарник ҳаракатини аниқлаган бўламиз. Бунинг учун $A$ нуқтани оламиз. Нуқта айлана чизгани учун, унинг ҳаракат қонуни:

$$s = r\varphi = r\omega t$$

булади. Бу ҳолда $A$ нуқтанинг тезлиги:

$$v_A = \frac{ds}{dt} = \omega r$$

бўлади.

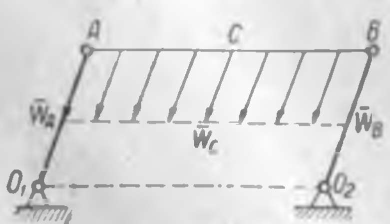
$v_A$ ўзгармас бўлгани учун тангенциал тезланиш бўлмайди ва тўла тезланиш нормал тезланишга тенг бўлади, яъни:

$$w_\tau = \frac{dv_A}{dt} = 0, \; w = w_n.$$

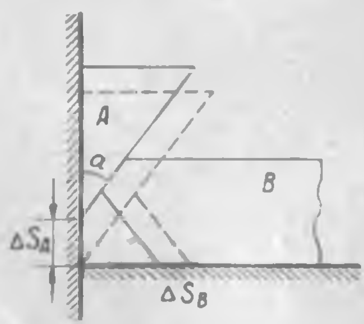
Нормал тезланиш эса:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = r\omega^2.$$

Тезлик, тезланиш графиклари 212 ва 213- шаклларда тасвирланган.




213- шакл.



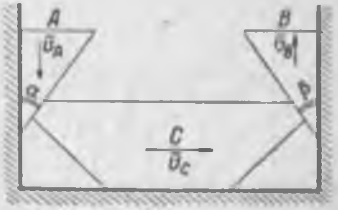

214- шакл.

**55- масала.** $A$ пона $v_A$ тезлик билан илгарилама ҳаракат қилиб, $B$ понани ҳаракатлантиради. $\alpha$ бурчак маълум. $B$ понанинг тезлиги $v_B$ топилсин (214- шакл).

Ечиш. Поналарнинг кўчишлари бўлган $\Delta s_A$ ва $\Delta s_B$ орасидаги муносабатни топамиз. Шаклда поналарнинг кўчган ҳолатлари нуқтали чизиқ билан кўрсатилган. $B$ нуқтанинг кўчиши $\Delta s_B = \Delta s_A \operatorname{tg}\alpha$. Бу тенгламанинг иккала томонини $\Delta t$ га бўлиб ва лимит олиб, $B$ пона тезлигини топамиз:

$$v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha.$$

**56- масала.** $A$ пона $v_A$ тезлик билан пасайса, $B$ пона қандай тезлик билан кўтарилади? $\alpha$ ва $\beta$ бурчаклар маълум (215- шакл).



215- шакл.

Ечиш. Юқоридаги масала натижасидан фойдаланамиз: $C$ жисм $v_c = v_A \operatorname{tg}\alpha$ тезлик билан силжийди.

Иккинчи томондан, $v_c$ ни $v_B$ орқали худди шундай ифодалаш мумкин:

$$v_c = v_B \operatorname{tg}\beta.$$

$v_c$ ифодаларининг ўнг томонларини солиштириб, $v_B$ ни топамиз:

$$v_B = v_A \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Агар $\alpha = \beta$ бўлса:

$$v_A = v_B$$

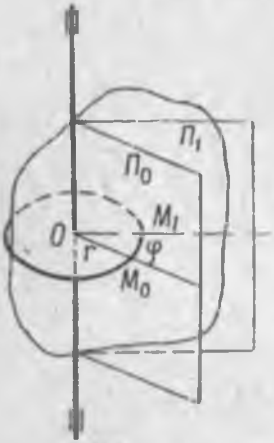
булади.

## 91- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати

Юқорида иккита қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмнинг мувозанатини текширганимизда, жисм шу нуқталардан утувчи қўзгалмас ўқ атрофида айланиши мумкинлиги ҳақида тухтаб утган эдик. Энди, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги бу айланма ҳаракатини текширамиз. $z$ ўқи жисмнинг қўзгалмас айланиш ўқи бўлсин. Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатини текшириш учун, айланиш ўқи орқали утувчи икки текислик оламиз. Улардан бири жисмга нисбатан қўзғалмас текислик $\Pi_0$, иккинчиси эса жисм билан бирга ҳаракатланувчи ва унга бириктирилган $\Pi$ текислик бўлсин (216- шакл). Текисликлар орасидаги бурчакни $\varphi$ билан белгилаймиз. Бу бурчак радиан билан ифодаланиб, айланиш бурчаги дейилади. Қаттиқ жисмнинг ҳолати исталган вақт учун шу $\varphi$ бурчаги билан аниқланади. Шу сабабдан, $\varphi$ бурчаги вақтнинг функцияси булади:

$$\varphi = \varphi(t). \qquad (91.\ 1)$$

Бу тенглама қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги ***айланма ҳаракат тенгламаси*** дейилади. $\Delta\varphi$ бурчак $\varphi$ нинг $\Delta t$ вақтдаги орттирмаси бўлса, $\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ чексиз кичик $\Delta t$ вақтдаги бурчак тезлигининг ўртача қиймати бўлади. Бунинг лимити бурчак тезлигининг ҳақиқий қийматини беради:



216- шакл.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

ёки

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (91.\ 2)$$

Демак, бурчак тезлиги айланиш бурчагининг вақтга нисбатан олинган биринчи ҳосиласига тенг бўлар экан.

Бурчак тезлигидан олинган ҳосила бурчак тезланишини беради. Уни $\varepsilon$ орқали белгилаймиз:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (91.\ 3)$$

(91.2) ва (91.3) дан кўрамизки, $\omega \frac{рад}{сек}$ ёки $\omega \frac{1}{сек}$ билан, $\varepsilon \frac{рад}{сек^2}$ ёки $\varepsilon \frac{1}{сек^2}$ билан ўлчанар экан. Жисм бир текис айланса, бурчак тезлиги кўпинча бир минутдаги айланиш сони $n$ билан ифодаланади. $\omega$ билан $n$ ўртасидаги муносабатни топамиз. Бир секунддаги айланиш сони $\frac{n}{60}$ га тенг. Жисм ҳар бир айланишда $2\pi$, бир секундда $\frac{2\pi n}{60}$ радиан ўтади. Бу эса таърифга кўра, бурчак тезлигидир:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \qquad (91.\ 4)$$

Жисм тенг тезланиш билан айланса, унинг бурчак тезланиши ўзгармас бўлади, яъни:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \text{const}.$$

Бу ифодани интеграллаб, бурчак тезлиги ва айланма ҳаракат тенгламасини топамиз:

$$\omega = \varepsilon t + c_1,$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Бошланғич пайтда, яъни $t = 0$ бўлганда, $\varphi_0 = 0$ ва $\omega = \omega_0$ бўлсин. Бу шартлардан: $c_1 = \omega_0$, $c_2 = 0$. Бу ҳол учун:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (91.\ 5)$$

бўлади.

Тенг тезланишли ҳаракатдаги жисмнинг $t$ вақт ичидаги айланиш сони:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}. \qquad (91.\ 6)$$

## 92- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг тезлиги ва тезланиши

Айланма ҳаракатдаги жисмнинг бирор $M$ нуқтасини оламиз (217- шакл, *а*). Унинг $t$ вақтда ўтган йўли (217-шакл, *б*) $\overset{\frown}{M_0M_1} = s = r\varphi$ бўлади. Нуқта тезлигини топиш учун, йўлдан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:


217- шакл.

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Бунда:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Шунга кўра:

$$v = r\omega \qquad (92.\ 1)$$

бўлади.

Бу формуладан кўрамизки, қаттиқ жисм нуқталарининг тезлиги текшираётган нуқта билан айланиш ўқининг орали-

Ечиш. Бошлангич бурчак тезлиги $\omega_0 = 0$ бўлиб, бурчак тезланиши $\omega = \varepsilon t$ формуладан аниқланади; $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{10\pi}{t} = \pi$ $^1/сек^2$; $t = 10$ секунд ичида айланиш сони $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = 50\,\pi$.

**58- масала.** Маховик тенг ўлчовли ҳаракатланиб, минутига 900 марта айланади. Кейин, ҳаракатини секинлаштириб, 10 марта айлангандан кейин тўхтайди. Маховик тўхтагунча қанча вақт ўтиши аниқлансин.

Ечиш. Масала шартига мувофиқ, $\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 30\pi$ $^1/сек$, $\varphi = 20\,\pi$. Шунинг учун:

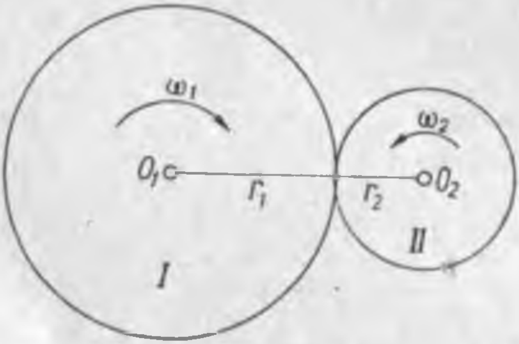
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 0,$$

$$20\pi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Бу тенгламалардан:

$$t = 1{,}33 \text{ сек.}$$

**59- масала.** Радиуси $r_1$ ва минутига $n_1$ марта айланувчи тишли гилдирак радиуси $r_2$ бўлган тишли бошқа бир гилдирак билан илашган. Бу




221- шакл.

гилдиракнинг $n_2$ айланиш сонини топиш керак (221- шакл).

Ечиш. Гилдиракларнинг тегишиб турган нуқтаси, қайси гилдиракка қарашли бўлмасин, унинг айланма тезлиги бир хилда бўлади. Шунинг учун

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

ёки

$$n_1 r_1 = n_2 r_2.$$

Бундан:

$$n_2 = \frac{r_1}{r_2} r_1.$$

Ҳар қайси гилдирак тишлари сонини тегишлича $z_1$ ва $z_2$ билан, икки қўшни тишлар оралигини $h$ билан белгиласак ($h$ қадам), айланалар узунликлари:

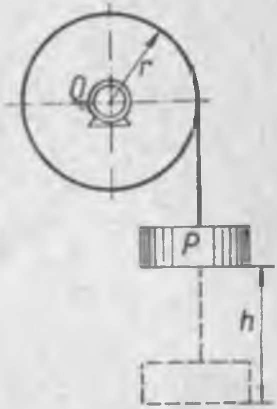
$$2\pi r_1 = z_1 h \text{ ва } 2\pi r_2 = z_2 h$$

бўлади. Бундан:

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

Демак, гилдиракларнинг бурчак тезликлари уларнинг радиусларига ёки тишлари сонларига тескари пропорционал бўлар экан.

**60- масала.** $r = 0,5$ *м* радиусли барабанга ўралган арқон учига богланган юк бошлангич тезликсиз тенг тезланувчи ҳаракат билан пастга тушади. $t = 10$ *сек* ичида юк пастга $h = 10$ *м* тушади. Барабаннинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши топилсин (222- шакл).



222- шакл.

Ечиш. Барабан сиртидаги ҳамма нуқталарнинг тезлиги арқон тезлиги билан бир хилдадир. Арқон тезлиги эса юк тезлигига тенг. Шунинг учун, юкнинг тезлигини топиш билан баравар барабан сиртидаги нуқтанинг тезлигини топган бўламиз. Маълумки, $h = \frac{at^2}{2}$.

Бундан:

$$a=0,2 \ м/сек^2.$$

Тезлик эса:

$$v = at = 2 \ м/сек.$$

Демак, барабан сиртидаги нуқтанинг тангенциал тезланиши $w_\tau = 0,2$ *м/сек²* дир. Бурчак тезлиги ва тезланишини топиш қийин эмас. Улар:

$$\omega = \frac{v}{r} = 4 \ ^1/сек,$$

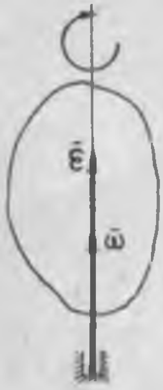
$$\varepsilon = \frac{w_\tau}{r} = 0,4 \ ^1/сек^2.$$

## 93- §. Бурчак тезлигининг векторлиги

Қўзгалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм нуқталарининг тезлик ва тезланишларини аниқлаш учун олдинги параграфларда чиқарилган формулалар бу соҳага оид амалий масалаларни чиқариш учун етарлидир.

Аммо қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмларнинг ҳаракатини текшириш учун тезлик ва тезланишларнинг вектор формулаларнни чиқариш зарур. Унинг учун, айланма ҳаракатни характерловчи катталиклардан бурчак тезлигини вектор тарзида тасвирлаш қулай.

Қўзгалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмда ўзгармайдиган бирдан-бир йўналиш қўзғалмас айланиш ўқи бўлганидан, бурчак тезлигини шу йўналиш билан боғлаш табиийдир. Шунинг учун, бурчак тезлик вектори айланиш ўқи билан йўналган вектор тарзида тасвирланади. Худди момент векторини тасвирловчи вектор каби, бурчак тезлигининг қаёққа йўналганлигини кўрсатиш масаласи шартли бўлиб, у, координата ўқларининг чап ёки ўнг системада танланишига боғлиқдир. Масалан, чап координаталар системасида унинг йўналишини аниқлаш учун айланиш ўқининг учидан қараганимизда, айланма ҳаракат соат стрелкаси юрадиган томонга булаётганини кўрсак, бурчак тезлигининг вектори ўқнинг мусбат томони бўйлаб йўналади; акс ҳолда, тескари йўналишда бўлади. 223- шаклда $\bar{\omega}$ нинг йўналиши тасвирланган.



223- шакл.

Айланиш ўқи қўзғалмас бўлса, $\bar{\omega}$ нинг йўналиши ўзгармасдир. Шунинг учун, $\bar{\varepsilon}$ бурчак тезланиши вектори ҳам айланиш ўқи бўйлаб йўналган бўлади. Ҳаракат тезланувчи, яъни $\varepsilon > 0$ бўлса, $\bar{\varepsilon}$ ва $\bar{\omega}$ бир йўналишда, ҳаракат секинланувчи, яъни $\varepsilon < 0$ бўлса, улар қарама-қарши йуналишда бўлади (223- шакл). $z$ ўқини айланиш ўқи орқали ўтказсак:

$$\bar{\omega} = \bar{k}\omega \qquad (93.\ 1)$$

бўлади. Бу ерда $\bar{k}$ — $z$ ўқи бўйлаб йўналган бирлик вектор.

## 94- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисм нуқтаси тезлик ва тезланишининг вектор ифодаси

Қаттиқ жисмда олинган $M$ нуқтанинг ҳолати $\bar{r}$ радиус-вектор билан аниқлансин (224- шакл). Бу $M$ нуқта тезлигининг модули:

$$v = O_1M\omega. \qquad (94.\ 1)$$

Шаклдан:

$$O_1M = r\sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}). \qquad (94.\ 2)$$

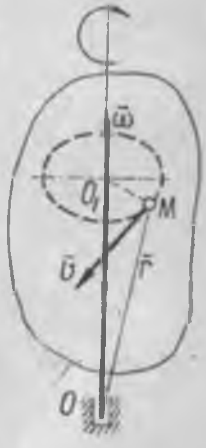
Буни эътиборга олсак:

$$v = \omega r \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}) \qquad (94.\ 3)$$

бўлади.

$\bar{v}$ тезлик вектори $\bar{r}$ радиус-вектор билан $\bar{\omega}$ бурчак тезлиги текислигига тик йўналган. Икки векторнинг вектор купайтмаси ифодасини эсласак, (94.3) тенглиги худди $\bar{\omega}$ билан $\bar{r}$ нинг вектор кўпайтмаси модулини ифодалайди. Шунга кура:

$$\bar{v} = [\bar{\omega}\bar{r}]. \qquad (94.\ 4)$$



224- шакл.

Демак, *айланувчи жисм нуқтасининг $\overline{v}$ тезлиги $\overline{\omega}$ бурчак тезлиги вектори билан нуқтанинг ҳолатини аниқловчи $\overline{r}$ радиус-векторнинг вектор кўпайтмасига тенг экан.*

(84.2) га мувофиқ, (94.4) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = [\overline{\omega}\,\overline{r}]. \tag{94. 5}$$

Энди, айланувчи жисм нуқтасининг тезланишини топамиз. Бунинг учун тезликдан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\overline{\omega}\,\overline{r}] = \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}\,\overline{r}\right] + \left[\overline{\omega}\,\frac{d\overline{r}}{dt}\right].$$

Бу ерда

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = [\overline{\omega}\,\overline{r}] = \overline{v}$$

бўлгани учун олдинги тенгламани бундай ёзишимиз мумкин:

$$\overline{w} = [\overline{\varepsilon}\,\overline{r}] + [\overline{\omega}\,\overline{v}]. \tag{94. 6}$$

$[\overline{\varepsilon}\,\overline{r}]$ вектор, $\overline{\varepsilon}$ билан $\overline{r}$ га тик бўлгани учун, нуқта траекторияси бўлган айланага уринма бўлиб йўналган. Унинг модули:

$$\varepsilon r \sin(\widehat{\overline{\varepsilon}, \overline{r}}) = \varepsilon O_1 M.$$

Шунинг учун бу ифода нуқтанинг уринма тезланишидир. Уни:

$$\overline{w}_\tau = [\overline{\varepsilon}\,\overline{r}] \tag{94. 7}$$

билан белгилаймиз. Бу $\overline{w}_\tau$ вектор $\overline{v}$ тезлик вектори бўйича йўналиб, $\varepsilon$ нинг ишорасига биноан, $\overline{v}$ билан бир йўналишда ёки қарама-қарши йўналишда бўлади. $[\overline{\omega}\,\overline{v}]$ векторни текширамиз:

$$\overline{v} = [\overline{\omega}\,\overline{r}]$$

бўлгани учун:

$$[\overline{\omega}\,\overline{v}] = [\overline{\omega}\,[\overline{\omega}\,\overline{r}]]$$

келиб чиқади. Бу икки қайтали вектор кўпайтмани (15. 3) формулага мувофиқ ёямиз, (94.1) ва 224- шаклни эътиборга олсак:

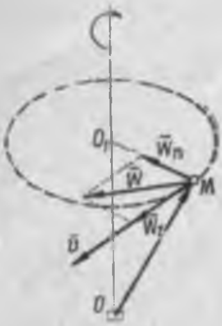
$$[\overline{\omega}\,\overline{v}] = \overline{\omega}(\overline{\omega}\,\overline{r}) - \omega^2\overline{r} = \omega^2\overline{k}\,(\overline{k}\,\overline{r}) - \omega^2\overline{r} =$$
$$= \omega^2\,(\overline{k}r\cos\alpha - \overline{r}) = \omega^2\overline{MO_1}$$

келиб чиқади.

Бу натижадан кўрамизки, $[\overline{\omega}\,\overline{v}]$ вектор $O_1$ марказга йўналар экан. Унинг модули $\omega^2 O_1M$ га тенг. Шунинг учун $[\overline{\omega}\,\overline{v}]$ вектор нормал тезланишни ифодалайди:

$$\overline{w}_n = [\overline{\omega}\,\overline{v}]. \qquad (94.\ 8)$$

Бу тезланиш м а р к а з г а и н т и л у в ч и тезланишнинг вектор ифодасидир. Шундай қилиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тўла тезланишини (94.6) формула билан қуйидагича ифодалаш мумкин (225- шакл):



225- шакл.

$$\overline{w} = [\overline{\varepsilon}\,\overline{r}] + [\overline{\omega}\,\overline{v}] = \overline{w}_\tau + \overline{w}_n. \qquad (94.\ 9)$$

Координата ўқларини ихтиёрий йўналтириб, тезлик ва тезланиш векторларининг шу ўқлардаги проекцияларини топамиз.

Вектор кўпайтмасининг координата ўқларидаги проекциялари 3- тартибли детерминант орқали ифодаланиши бизга векторлар алгебрасидан маълум. Шунга кўра, $\overline{r}$ радиус-векторнинг проекцияларини $x, y, z$; $\overline{\omega}$ нинг проекцияларини $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ десак, тезлик вектори учун бундай формулани ёзишимиз мумкин:

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \qquad (94.\ 10)$$

Бундан тезлик векторининг проекциялари учун қуйидаги формулаларни оламиз:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \qquad (94.\ 11).$$

$z$ ўқини айланиш ўқи орқали ўтказсак, у ҳолда $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ бўлади. (94. 11) қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega y, \\ v_y &= \omega x, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \qquad (94.\ 12)$$

Бу ҳол учун тезланиш проекцияларини топамиз:

$$\bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} - \omega^2(\bar{i}x + \bar{j}y).$$

Бундан:

$$\begin{aligned} w_x &= -\varepsilon y - \omega^2 x, \\ w_y &= \varepsilon x - \omega^2 y, \\ w_z &= 0 \end{aligned} \tag{94. 13}$$

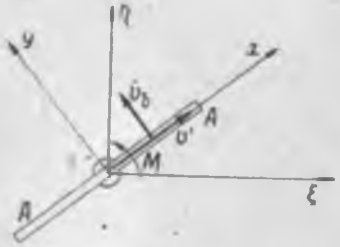
бўлади.

XVI БОБ

# НУҚТАНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

## 95- §. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва мураккаб ҳаракати

Нуқтанинг ҳаракати қандайдир маълум бир координаталар системасига нисбатан текширилади. Бироқ бу системанинг ўзи ҳам бошқа бир координаталар системасига нисбатан қандайдир ҳаракат қилиши мумкин. *У ҳолда нуқтанинг ҳаракати қўзғалмас системага нисбатан мураккаб ҳаракат* бўлади.




226- шакл.

Нуқта, ҳаракатланаётган системанинг ҳаракатида ҳам иштирок этаётганидан, у, бу система билан бирга кўчади. *Шунинг учун, бу ҳаракат кучирма ҳаракат* дейилади. Бошқача айтганда, нуқтанинг ҳаракатланаётган система билан бирга қилган ҳаракати *кўчирма ҳаракат* дейилади. Нуқтанинг ҳаракатланаётган системага *нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат* дейилади.

Айтилган таърифларни ойдинлаштириш учун бир қанча мисоллар келтирамиз.

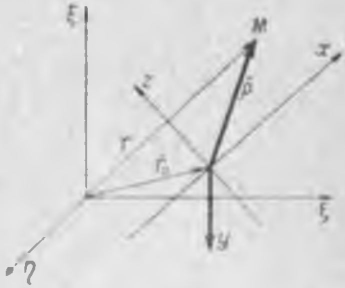
Самолётнинг парраги устидаги бирор нуқтани оламиз. Бу паррак нуқтасининг самолётга нисбатан қилган ҳаракати нисбий, самолёт билан биргаликда қилган ҳаракати кучирма, ерга нисбатан қилган ҳаракати мураккаб ҳаракат бўлади.

Бошқа мисол учун, вертикал $\xi o \eta$ текислигида горизонтал ўқ атрофида айланувчи трубани оламиз (226- шакл). Бу труба ичида бирор шарча тебранма ҳаракат қилсин. Шарчанинг труба билан биргаликда айланиши кўчирма ҳаракат, унинг труба ичида тебраниши нисбий ҳаракат, айланиш ўқига нисбатан қилган ҳаракати мураккаб ҳаракат бўлади.

## 96- §. Нисбий ва мураккаб ҳаракат тенгламалари

Нуқтанинг нисбий ва мураккаб ҳаракатларини текшириш учун, икки координаталар системасини: $o\xi\eta\zeta$ қузғалмас ва $oxyz$ қузғалувчи системаларни оламиз.

Аввал, нуқта ҳаракатини қўзғалмас системага нисбатан текширамиз. Бу ҳолда ҳар қандай $M$ нуқтанинг ҳаракати $o\xi\eta\zeta$ га нисбатан мураккаб, $oxyz$ га нисбатан нисбий ва $oxyz$ билан биргаликда қилган ҳаракати кўчирма ҳаракат бўлади (227-шакл).

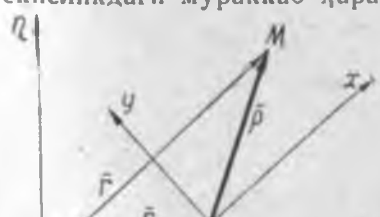


227- шакл.

Ҳаракатдаги системанинг қузғалмас системага нисбатан ҳаракатнни $\overline{r}_0$ радиус-вектор, нуқтанинг ҳаракатдаги системага нисбатан ҳолатини $\overline{\rho}$ радиус-вектор ва унинг қўзғалмас системага нисбатан мураккаб ҳаракатини $\overline{r}$ радиус-вектор билан белгилаймиз. У ҳолда, ҳаракат тенгламасининг вектор ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\overline{r} = \overline{r}_o + \overline{\rho} \tag{96. 1}$$

Текширилаётган ҳол учун. $\rho$ нинг йўналишингина эмас, катталиги ҳам ўзгаради. (96.1) вектор тенгламадан фойдаланиб, нуқтанинг мураккаб, нисбий ва кўчирма ҳаракатлари тенгламаларининг аналитик ифодасини чиқарамиз. Хусусан, бу тенгламалар нуқтанинг текисликдаги ҳаракати учун жуда ҳам қулай кўринишда ёзилади (228- шакл). Нуқтанинг текисликдаги мураккаб ҳаракат тенгламалари:



228- шакл.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \eta &= \eta_0 + x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{96. 2}$$

Нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламаларини тузамиз; унинг учун (96. 1) тенгламадан $\overline{\rho}$ ни $\overline{r}$ ва $\overline{r}_0$ орқали ифодалаб, уларнинг қўзғалувчи системадаги проекцияларини олиш лозим; у ҳолда:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi, \\ y &= y_0 - \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \end{aligned} \tag{96. 3}$$

бунда $x_o$, $y_o$ — қўзғалмас координаталар бошининг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан координатаси. Турли координата системаларига нисбатан $M$ нуқтанинг ҳолатини белгиловчи координаталарни аниқлайдиган формулалар бир хилда бўлиб, (96.2) дан (96.3) ни чиқариш мумкин. Унинг учун, $\xi$ ни $x$ га, $\xi_o$ ни $x_o$ га ва, шунингдек, $\varphi$ бурчагини $-\varphi$ га алмаштириш зарур, чунки $xoy$ системаси $\xi o\eta$ га нисбатан $\varphi$ бурчагига айлантирилганда, $\xi o\eta$ системаси $xoy$ га нисбатан $-\varphi$ га оғади. Хусусий ҳолда, қўзғалувчи система қўзғалмас системага нисбатан илгарилама ҳаракат қилса, $\varphi$ бурчак ўзгармайди. Уни $\varphi = 0$ қилиб олсак ҳам бўлаверади. Бу ҳол учун (96.2) ва (96.3) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_o + x \\ \eta &= \eta_o + y \end{aligned} \qquad (96.\ 4)$$

ва

$$\begin{aligned} x &= x_o + \xi \\ y &= y_o + \eta. \end{aligned} \qquad (96.\ 5)$$

Қўзғалувчи система қўзғалмас системага нисбатан айланма ҳаракат қилса, уларнинг бошини бир марказга келтириб, юқоридаги тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \eta &= x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (96.\ 6)$$

Нисбий ҳаракат учун:

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ y &= -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (96.\ 7)$$

Бу тенгламалардан фойдаланиб, нуқтанинг мураккаб ва нисбий ҳаракатларини текшира оламиз.

Фараз қилайлик, нуқтанинг кўчирма ва нисбий ҳаракатлари қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\xi_o = \xi_o(t),\ \ \eta_o = \eta_o(t),\ \ \varphi = \varphi(t),\ \ x = x(t),\ \ y = y(t).$$

Булар воситаси билан мураккаб ҳаракат тенгламаларини туза оламиз. Бунинг учун юқоридаги функцияларни (96. 2) га қўйиш лозим:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_o(t) + x(t)\cos\varphi(t) - y(t)\sin\varphi(t), \\ \eta &= \eta_o(t) + x(t)\sin\varphi(t) + y(t)\cos\varphi(t). \end{aligned} \qquad (96.\ 8)$$

Бу тенгламалардан $t$ вақтни чиқариб ташлаб, нуқтанинг мураккаб траекторияси тенгламасини топа оламиз.

Агар нуқтанинг мураккаб ва кўчирма ҳаракатлари тенгламалари маълум бўлса, нисбий ҳаракат траекториясини топишимиз қийин эмас.

Мураккаб ҳаракатга мисол тарзида қуйидаги масалани ечамиз.

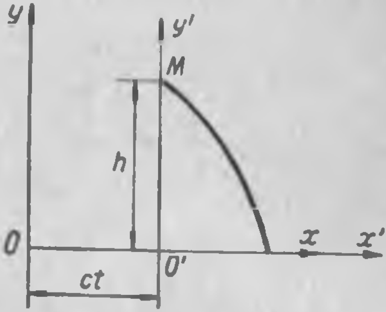
**[illegible]- масала.** Тўғри рельсда кетаётган тенг ўлчовли ҳаракатдаги вагоннинг тезлиги $v_0$. Вагоннинг $h$ баландликдаги деразасидан вагонга нисбатан бошланғич тезликсиз оғир материал нуқта ташланган. Ташланган нуқтанинг рельсга ва вагонга нисбатан траекториялари топилсин.

Ечиш. Қўзғалувчи системани вагонга, қўзғалмас системани рельсга бириктирамиз (229- шакл). У ҳолда (96.4) га мувофиқ:

$$\xi = v_0 t + x,$$
$$\eta = y.$$

Нуқтанинг вагонга нисбатан ҳаракат тенгламалари:

$$x = 0;\ y = h - \frac{gt^2}{2}$$



229- шакл.

бўлгани учун, унинг рельсга нисбатан тенгламалари бундай ёзилади:

$$\xi = ct,$$
$$\eta = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Булардан:

$$\eta = h - \frac{g}{2c^2}\xi^2.$$

Демак, нуқтанинг рельсга нисбатан ҳаракатининг траекторияси парабола бўлар экан. Унинг вагонга нисбатан траекторияси тўғри чизиқдир (229- шакл).

## 97- §. Кўчирма ҳаракати илгарилама бўлган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланиши

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг кўчирма, нисбий ва абсолют тезликлари ва тезланишлари ўзаро богланишда бўлади. Шу богланишларни топамиз.

Бу параграфда кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракат бўлган мураккаб ҳаракатнинг хусусий ҳолини текширамиз.

Бундан олдинги параграфдан мураккаб ҳаракатдаги нуқта ҳаракат тенгламасининг вектор ифодасини оламиз:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{\rho}. \qquad (96.\ 1)$$

бунда $x_o$, $y_o$ — қўзғалмас координаталар бошининг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан координатаси. Турли координата системаларига нисбатан $M$ нуқтанинг ҳолатини белгиловчи координаталарни аниқлайдиган формулалар бир хилда бўлиб, (96.2) дан (96.3) ни чиқариш мумкин. Унинг учун, $\xi$ ни $x$ га, $\xi_o$ ни $x_o$ га ва, шунингдек, $\varphi$ бурчагини — $\varphi$ га алмаштириш зарур, чунки $xoy$ системаси $\xi o\eta$ га нисбатан $\varphi$ бурчагига айлантирилганда, $\xi o\eta$ системаси $xoy$ га нисбатан — $\varphi$ га огади. Хусусий ҳолда, қўзғалувчи система қўзғалмас системага нисбатан илгарилама ҳаракат қилса, $\varphi$ бурчак ўзгармайди. Уни $\varphi = 0$ қилиб олсак ҳам бўлаверади. Бу ҳол учун (96.2) ва (96.3) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_o + x \\ \eta &= \eta_o + y \end{aligned} \tag{96. 4}$$

ва

$$\begin{aligned} x &= x_o + \xi \\ y &= y_o + \eta. \end{aligned} \tag{96. 5}$$

Қўзғалувчи система қўзғалмас системага нисбатан айланма ҳаракат қилса, уларнинг бошини бир марказга келтириб, юқоридаги тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \eta &= x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{96. 6}$$

Нисбий ҳаракат учун:

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ y &= -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi. \end{aligned} \tag{96. 7}$$

Бу тенгламалардан фойдаланиб, нуқтанинг мураккаб ва нисбий ҳаракатларини текшира оламиз.

Фараз қилайлик, нуқтанинг кучирма ва нисбий ҳаракатлари қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\xi_o = \xi_o(t),\ \eta_o = \eta_o(t),\ \varphi = \varphi(t),\ x = x(t),\ y = y(t).$$

Булар воситаси билан мураккаб ҳаракат тенгламаларини туза оламиз. Бунинг учун юқоридаги функцияларни (96. 2) га қўйиш лозим:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_o(t) + x(t)\cos\varphi(t) - y(t)\sin\varphi(t), \\ \eta &= \eta_o(t) + x(t)\sin\varphi(t) + y(t)\cos\varphi(t). \end{aligned} \tag{96. 8}$$

Бу тенгламалардан $t$ вақтни чиқариб ташлаб, нуқтанинг мураккаб траекторияси тенгламасини топа оламиз.

Агар нуқтанинг мураккаб ва кучирма ҳаракатлари тенгламалари маълум бўлса, нисбий ҳаракат траекториясини топишимиз қийин эмас.

Мураккаб ҳаракатга мисол тарзида қуйидаги масалани ечамиз.

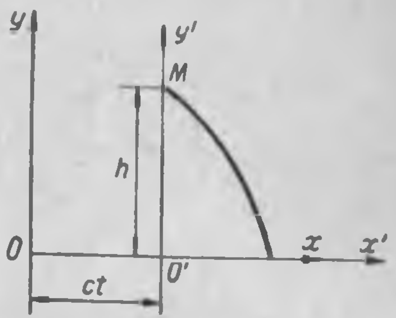
**6[illegible]- масала.** Тўгри рельсда кетаётган тенг ўлчовли ҳаракатдаги вагоннинг тезлиги $v_0$. Вагоннинг $h$ баландликдаги деразасидан вагонга нисбатан бошлангич тезликсиз оғир материал нуқта ташланган. Ташланган нуқтанинг рельсга ва вагонга нисбатан траекториялари топилсин.

Ечиш. Қўзғалувчи системани вагонга, қўзғалмас системани рельсга бириктирамиз (229- шакл). У ҳолда (96.4) га мувофиқ:

$$\xi = v_0 t + x,$$
$$\eta = y.$$

Нуқтанинг вагонга нисбатан ҳаракат тенгламалари:

$$x = 0; \quad y = h - \frac{gt^2}{2}$$




229- шакл.

бўлгани учун, унинг рельсга нисбатан тенгламалари бундай ёзилади:

$$\xi = ct,$$
$$\eta = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Булардан:

$$\eta = h - \frac{g}{2c^2}\xi^2.$$

Демак, нуқтанинг рельсга нисбатан ҳаракатининг траекторияси парабола бўлар экан. Унинг вагонга нисбатан траекторияси тўгри чизиқдир (229- шакл).

## 97- §. Кўчирма ҳаракати илгарилама бўлган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланиши

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг кўчирма, нисбий ва абсолют тезликлари ва тезланишлари узаро боғланишда бўлади. Шу боғланишларни топамиз.

Бу параграфда кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракат бўлган мураккаб ҳаракатнинг хусусий ҳолини текширамиз.

Бундан олдинги параграфдан мураккаб ҳаракатдаги нуқта ҳаракат тенгламасининг вектор ифодасини оламиз:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{\rho}. \qquad (96.1)$$

Нуқтанинг тезлигини топиш учун (96.1) дан вақтга нисбатан ҳосила оламиз. Ҳосила олишда шуни эсда тутиш керакки, кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракат бўлгани учун, қўзғалувчи координата ўқлари системасининг йўналиши ўзгармайди, яъни у ўқлар системасининг $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ортлари ўзгармас векторлар ва нуқтанинг кўчирма ҳаракати қўзғалувчи координата ўқлари системасининг боши $O$ нинг ҳаракати билан бир хил бўлади.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt} \tag{97. 1}$$

$\frac{d\bar{r}}{dt}$ ни $\bar{v}_a$, $\frac{d\bar{r}_0}{dt}$ ни $\bar{v}_0$ деймиз, бу ерда $\bar{v}_a$ — нуқтанинг мураккаб ёки абсолют ҳаракат тезлиги, бу тезлик нуқтанинг *абсолют тезлиги* дейилади.

$\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{v}_0$ — қўзғалувчи координаталар системаси боши $O$ нинг тезлиги; кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракат бўлгани учун қўзғалувчи системанинг ҳамма нуқталарининг тезлиги бир хил, яъни $\bar{v}_0$ га тенг, уни $\bar{v}_e$ деймиз, $\bar{v}_e$ — кўчирма ҳаракат тезлиги, бу тезлик *кўчирма тезлик* дейилади:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_0 = \frac{d\bar{r}_0}{dt}. \tag{97. 2}$$

Умуман, кўчирма ҳаракатнинг кинематик элементларини „$e$“ белгиси билан кўрсатамиз.

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \tag{97. 3}$$

Бунда $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторлар ўзгармас векторлар бўлгани учун уларнинг ҳосиласи нулга тенг.

$\frac{dx}{dt} = v_{xr}$; $\frac{dy}{dt} = v_{yr}$; $\frac{dz}{dt} = v_{zr}$ лар нуқтанинг нисбий ҳаракат тезлигининг қўзғалувчи координата ўқлари системасидаги проекциялари бундай бўлади:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = v_{rx}\bar{i} + v_{ry}\bar{j} + v_{rz}\bar{k} = \bar{v}_r. \tag{97. 4}$$

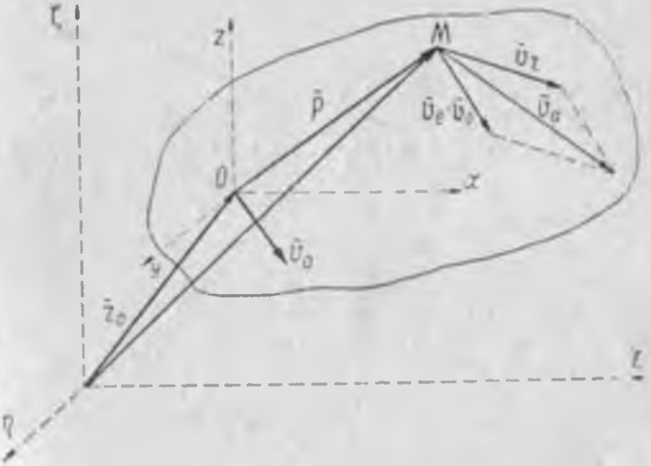
$\frac{d\bar{\rho}}{dt}$ ни $\bar{v}_r$ деймиз, $\bar{v}_r$ — нуқтанинг нисбий ҳаракат тезлиги, бу тезлик нуқтанинг *нисбий тезлиги* дейилади.

Умуман нисбий ҳаракатнинг кинематик элементларини „$r$“ белгиси билан кўрсатамиз.

(97.3) ва (97.4) ларни (97.1) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \tag{97. 5}$$

Демак, *кўчирма ҳаракати илгарилама бўлган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезлиги кўчирма ҳаракат тезлиги билан нисбий ҳаракат тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг булар экан* (230*а*-шакл).




230*а*- шакл.

Энди тезланишни топамиз. Бунинг учун (97.1) дан вақтга нисбатан яна бир марта ҳосила оламиз:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}. \tag{97. 6}$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \bar{w}_a, \quad \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} = \bar{w}_0 = \bar{w}_e$$

ва

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{d}{dt^2}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \bar{w}_r$$

деймиз.

Бу ерда $\bar{w}_a$ — нуқтанинг мураккаб ёки абсолют ҳаракат тезланиши, бу тезланиш *абсолют тезланиш* дейилади.

$\bar{w}_e$ — нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезланиши, бу тезланиш *кучирма тезланиш* дейилади.

$\overline{w}_r$ — нуқтанинг нисбий ҳаракат тезланиши, бу тезланиш *нисбий тезланиш* дейилади.

Юқоридагиларни (97.6) га қўйсак, қуйидаги келиб чиқади:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r. \tag{97. 7}$$

Демак, ***кўчирма ҳаракати илгарилама бўлган мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезланиши кўчирма ҳаракат тезланиши билан нисбий ҳаракат тезланишининг геометрик йиғиндисига тенг бўлар экан.***

## 98- §. Нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезлиги

Нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезлигини топиш учун $\overline{r}$ радиус-вектордан вақтга нисбатан ҳосила оламиз.

Ҳосила олишда, $\overline{\rho}$ радиус-векторнинг катталик ва йўналишини ҳамда қўзғалувчи координаталар системаси йўналишларининг ўзгаришини эътиборга олиш керак. Бунинг натижасида, қўзғалувчи координата ўқлари $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ орт векторларининг йўналиши ўзгаради.

Бунга эътибор қилиб, $\overline{r}$ дан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt}. \tag{98. 1}$$

$\frac{d\overline{r}}{dt}$ ни $\overline{v}_a$, $\frac{d\overline{r}_0}{dt}$ ни эса $\overline{v}_0$ деймиз. $\overline{v}_a$ — материал нуқтанинг мураккаб ёки абсолют ҳаракатининг тезлиги.

$\frac{d\overline{r}}{dt}$ нинг катталигини топишда юқорида айтилган мулоҳазани кўзда тутамиз:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} + $$
$$+ x\frac{d\overline{i}}{dt} + y\frac{d\overline{j}}{dt} + z\frac{d\overline{k}}{dt}. \tag{98. 2}$$

Биринчи уч йиғиндини $\frac{d'\overline{\rho}}{dt}$ билан белгилаймиз:

$$\frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} = \frac{d'\overline{\rho}}{dt}. \tag{98. 3}$$

Бу формула нуқтанинг қўзғалувчи координатага нисбатан ҳаракатининг ўзгаришини ифодалайди.

Энди, (98.2) нинг кейинги уч ҳадини текширамиз. Қўзғалувчи координата ўз маркази атрофида $\omega$ бурчак тезлиги билан айланса, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ бирлик векторларининг вақтга нисбатан ҳосилалари (94.5) га мувофиқ бундай ёзилади:

$$\frac{d\overline{i}}{dt} = [\overline{\omega}\ \overline{i}],\quad \frac{d\overline{j}}{dt} = [\overline{\omega}\ \overline{j}],\quad \frac{d\overline{k}}{dt} = [\overline{\omega}\ \overline{k}].$$

Буларни кўзда тутиб, $\frac{d\overline{\rho}}{dt}$ учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d'\overline{\rho}}{dt} + [\overline{\omega}\ \overline{\rho}]. \tag{98. 4}$$

Бу ҳосиланинг иккинчи қисми $[\overline{\omega}\ \overline{\rho}]$ — қўзғалувчи координата системаларининг мазкур системага нисбатан айланишидан келиб чиққан $\frac{d\overline{\rho}}{dt}$ радиус-вектор $\overline{\rho}$ нинг локал ҳосиласи дейилади; умуман, ҳар қандай векторнинг ҳосиласини қузғалувчи координата системаларига нисбатан олишда (98.4) дан фойдаланиб, локал ҳосилани эсдан чиқармаслик керак. $\frac{d\overline{\rho}}{dt}$ нинг қийматига эътибор қилсак, нуқтанинг мураккаб тезлиги учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\overline{v}_u = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + [\overline{\omega}\ \overline{\rho}] + \frac{d'\overline{\rho}}{dt}. \tag{98. 5}$$

Бунда, $\frac{d\overline{r}_0}{dt} = \overline{v}_o$ — қўзғалувчи координаталар системаси бошининг тезлиги, $[\overline{\omega}\ \overline{\rho}]$ вектор эса ҳаракатдаги нуқтанинг қузғалувчи координаталар системасининг $O$ боши атрофида координаталар системасининг айланишида иштирок этишидан келиб чиққан тезликдир. Бу икки тезлик кўчирма ҳаракатга тобе бўлгани учун, уларнинг йиғиндисини $\overline{v}_e$ орқали белгилаймиз:

$$\overline{v}_e = \overline{v}_o + [\overline{\omega}\ \overline{\rho}]. \tag{98. 6}$$

Бу тезлик қўзғалувчи системанинг шундай нуқтасининг тезлигики, у нуқта шу онда нисбий ҳаракатдаги нуқтага дуч келиб қолади.

$\frac{d'\overline{\rho}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} = \overline{v}_r$ — ҳаракатдаги нуқтанинг қўзғалувчи системага нисбатан ўзгаришинигина кўрсатгани учун, у нисбий тезлик дейилади.

Шундай қилиб, мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_e + \overline{v}_r \qquad (98.\ 7)$$

Демак, *мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезлиги кўчирма ҳаракат тезлиги билан нисбий ҳаракат тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг бўлар экан* (230б- шакл).


230 *б*-шакл.

Хусусий ҳолларни текширамиз.

1) Фараз қилайлик, кўчирма ҳаракат илгарилама бўлсин, у ҳолда $\omega = 0$, $v_e = v_o$ бўлади.

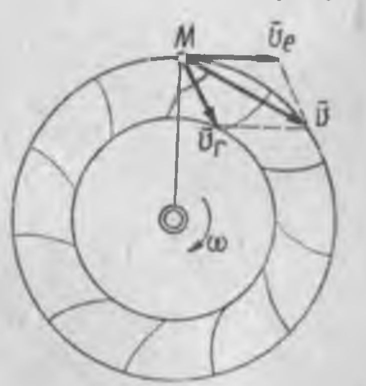
2) Кўчирма ҳаракат қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракат бўлсин, у ҳолда, $v_o = 0$, $\overline{v}_e = [\overline{\omega}\ \overline{\rho}]$.

3) Нисбий ҳаракат текисликда бўлса, у ҳолда $\overline{\omega} \perp \overline{\rho}$ бўлиб, $v_e = \omega\rho$ дир. Мураккаб ҳаракатдаги нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари юқорида айтиб ўтилган умумий усулдан фойдаланиб топилади.

**62- масала.** Гидравлик турбинанинг айланувчи ғилдирагига йўналтирувчи аппаратдан тушадиган сув зарба билан кирмаслиги учун, унинг кураги шундай ўрнатилганки, кирадиган сув заррасининг нисбий тезлиги куракка уринма бўлиб йўналади. Кираётган сув заррасининг абсолют тезлиги $v_a = 15$ *м/сек.* Абсолют тезликнинг ғилдирак радиуси билан тузган бурчаги $\alpha = 60°$, ғилдиракнинг минутдаги айланиш сони $n = 30$, радиуси $R = 2$ *м*. Ғилдирак устки айланасидаги сув заррасининг нисбий тезлиги топилсин (231- шакл).

Ечиш. Кўчирма ҳаракат тезлиги ғилдирак айланасига уринма бўлиб, радиусига тик йўналгани учун, унинг катталиги: $v_e = \frac{\pi R n}{30} = 6{,}28$ *м/сек* бўлади. $v_r$ нисбий тезлик куракка уринма бўлиб йўналгани учун, унинг катталигини косинуслар теоремасидан топамиз:

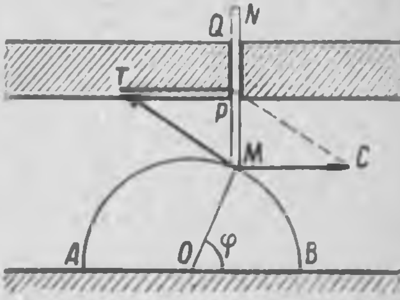
$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2 - 2v_a v_e \sin\alpha} = 10 \text{ м/сек.}$$




231- шакл.

**63- масала.** Вертикал текисликдаги ярим доира ўзининг *AB* диаметри йўналишида *c* ўзгармас тезлик билан илгарилама ҳаракат қилади (232- шакл). $PQ$ вертикал оралиқда эркин ҳаракатланувчи $MN$ штифтнинг $M$ учи доиранинг сиртига тиралиб туради. $M$ учининг тезлиги топилсин.

Ечиш. Ярим доиранинг ҳаракати нисбийдир. Штифтнинг барча нуқталарининг абсолют тезликлари бир хилда бўлиб, улар штифт ўқи билан йўналган. $M$ нуқта мураккаб ҳаракат қилади. Кўчирма ҳаракат $v_e = c$ тезлигининг йўналиши $AB$ га параллелдир. $M$ нуқтанинг нисбий тезлиги доира айланасига $MT$ урима билан йўналган. $BOM$ бурчакни $\varphi$ деб, тезликларга қурилган параллелограммдан $M$ нуқтанинг мураккаб ҳаракат тезлигини топамиз:




232- шакл.

$$v_a = v_e \operatorname{ctg} \varphi = c \operatorname{ctg} \varphi.$$

**64- масала.** $AB$ ва $BC$ стерженлар қўзғалмас $B$ шарнир атрофида бир хилдаги $\omega$ бурчак тезлиги билан қарама-қарши томонларга қараб айланади (233- шакл). Ушбу $AB$ ва $BC$ стерженларда ҳаракатланувчи икки ползунни туташтирувчи $DE = a$ стержень тенг ёнли $DBE$ учбурчакни ташкил қилади. $\angle ABC = 60^\circ$ бўлган пайтда $DE$ стержень нуқталарининг тезлиги топилсин.

Ечиш. $AB$ ва $BC$ стерженлар симметрик равишда айлангани учун $DE$ стержень илгарилама ҳаракат қилади ва унинг нуқталари тезлиги $DE$ га тик йўналган. Бу тезлик $D$ ва $E$ нуқталар учун мураккаб тезликдир. $D$ ва $E$ нуқталарнинг нисбий тезлиги $AB$ ва $CB$ стерженлар билан, кўчирма тезлиги эса уларга тик йўналган. Тезликлар параллелограмидан:

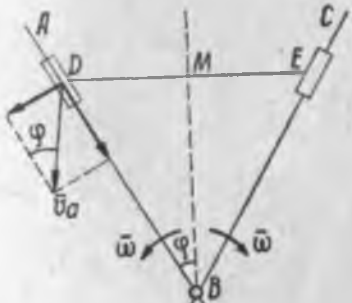
$$v_e = v_a \sin \varphi.$$

Иккинчи томондан кўчирма тезлик:

$$v_e = BD\omega = \frac{a}{2 \sin \varphi} \omega = a\omega.$$

Демак:

$$v_a = \frac{v_e}{\sin \varphi} = 2a\omega.$$




233- шакл.

## 99- §. Нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезланиши

Нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезланишини топиш учун унинг $\overline{v}_a$ тезлик векторидан вақтга нисбатан ҳосила оламиз. $\overline{v}_e$ нинг қийматини (98.6) дан (98.7) га келтириб қўйиб, $v_a$ ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\overline{v}_a = \overline{v}_O + [\overline{\omega}\ \overline{\rho}] + \overline{v}_r.$$

Бунинг ҳосиласини оламиз:

$$\frac{d\overline{v}_a}{dt} = \frac{d\overline{v}_o}{dt} + \frac{d}{dt}\left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right] + \frac{d\overline{v}_r}{dt}. \qquad \text{(a)}$$

$\overline{\rho}$ ва $\overline{v}_r$ нинг ҳосилаларини ҳисоблашда локал қийматини эътиборга оламиз, яъни:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d'\overline{\rho}}{dt} + \left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right] = \overline{v}_r + \left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right],$$

$$\frac{d\overline{v}_r}{dt} = \frac{d'\overline{v}_r}{dt} + \left[\overline{\omega}\ \overline{v}_r\right].$$

Бу ифодаларни кўзда тутиб, (а) формулани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_O + \left[\overline{\omega}\left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right]\right] + \left[\overline{\varepsilon}\ \overline{\rho}\right] + 2\left[\overline{\omega}\ \overline{v}_r\right] + \frac{d\overline{v}_r}{dt}. \qquad (99.\ 1)$$

Нисбий ҳаракат бўлмаса $\overline{v}_r = 0$ булиб, (99.1) формула бундай кўринишда ёзилади:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_O + \left[\overline{\omega}\left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right]\right] + \left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right]. \qquad (99.\ 2)$$

Бу формула қўзғалувчи системанинг ҳаракатида иштирок этувчи нуқта тезланишини, яъни кўчирма ҳаракат тезланишини ифодалайди. Бунда: $\overline{w}_O = \frac{d\overline{v}_o}{dt}$ — қўзғалувчи координаталар бошининг тезланиши, қолган икки ҳади эса қўзғалувчи системанинг айланишидан келиб чиққан тезланишдир. (99.1) формуланинг $\frac{d\overline{v}_r}{dt}$ қисми нисбий тезланиш бўлиб, уни $\overline{w}_r$ орқали белгилаймиз. У ҳолда (99.1) формула қуйидагича ёзилади:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r + 2\left[\overline{\omega}\ \overline{v}_r\right]. \qquad (99.\ 3)$$

Бундан кўрамизки, мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тула тезланиши умумий ҳолда уч тезланишнинг геометрик йиғиндисидан иборат бўлар экан. Улар:

1) кўчирма ҳаракат тезланиши: $\overline{w}_e = \overline{w}_o + \left[\overline{\omega}\left[\overline{\omega}\ \overline{\rho}\right]\right] + \left[\overline{\varepsilon}\ \overline{\rho}\right]$,

2) нисбий ҳаракат тезланиши: $\overline{w}_r = \frac{d\overline{v}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\overline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}$.

3) қўшимча тезланиш: $2\left[\omega\,\overline{v_r}\right]$. Бу тезланишни Кориолис ёки бурилма тезланиши деймиз, уни $\overline{w_k}$ орқали белгилаймиз:

$$\overline{w_k}=2\left[\overline{\omega}\ \overline{v_r}\right]. \qquad (99.\ 4)$$

(99.4) ни эътиборга олиб, (97.3) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\overline{w_a}=\overline{w_e}+\overline{w_r}+\overline{w_k}. \qquad (99.\ 5)$$

Бу формула тезланишларни қўшиш теоремасини ифодалайди:

Демак, *кўчирма ҳаракат илгарилама бўлмаганда, мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишини кўчирма, нисбий ва қўшимча тезланиш — Кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлар экан.*

**Хусусий ҳоллар**

1. Кўчирма ҳаракат илгарилама бўлса, қўзғалувчи системанинг ҳамма нуқталари учун тезлик ва тезланиш векторлари бир хилда бўлади. Бу ҳолда мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши икки вектор йиғиндисидан иборатдир:

$$\overline{w_a}=\overline{w_e}+\overline{w_r}. \qquad (99.\ 6)$$

Бундан:

$$\overline{w_e}=\overline{w_O},\ w_r=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\ .$$

2. Кўчирма ҳаракат $\omega$ бурчак тезлиги билан тенг ўлчовли айланма ҳаракат бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $M$ нуқтанинг кучирма ҳаракат тезланиши:

$$\overline{w_e}=-\omega^2\,\overline{PM} \qquad (99.\ 7)$$

бўлади.

Бунда $P$ нуқта — $M$ нуқтанинг айланиш ўқидаги проекцияси. Шунинг учун мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши қуйидагича ёзилади:

$$\overline{w_a}=-\omega^2\,\overline{PM}+\overline{w_r}+2\left[\overline{\omega}\ \overline{v_r}\right]. \qquad (99.\ 8)$$

Айланиш ўқи учун $z$ ўқи қабул қилинса, (99.8) формула проекциялар орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} w_{ax}&=-\omega^2x+\ddot{x}-2\,\omega\,\dot{y},\\ w_{ay}&=\omega^2y+\ddot{y}+2\,\omega\,\dot{x},\\ w_{az}&=\ddot{z}. \end{aligned} \qquad (99.\ 9)$$

3. Кўчирма ҳаракат тенг ўлчовли винт ҳаракати бўлиб, нисбий ҳаракат тезлиги винт ўқига параллел бўлса, кўчирма ҳаракат тезланиши:

$$\overline{w}_e = -\omega^2 \overline{PM}$$

бўлади. Бу ҳолда Кориолис тезланиши бўлмайди, чунки $\overline{\omega} \parallel \overline{v}_r$ бўлиб, улар орасидаги бурчак 0 ёки 180° га тенг бўлади:

$$\overline{w}_a = -\omega^2 \overline{PM} + \overline{w}_r. \qquad (99.10)$$

## 100- §. Кориолис тезланиши

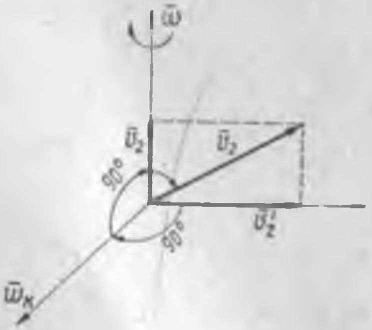
(99.4) формулага мувофиқ Кориолис тезланиши:

$$\overline{w}_k = 2[\overline{\omega}\, \overline{v}_r]$$

формула билан ифодаланади. Унинг абсолют қиймати:

$$w_k = 2\omega v_r \sin(\widehat{\overline{\omega}\, \overline{v}_r}) \qquad (100.1)$$

бўлади. Кориолис тезланиши $\overline{w}_k$ нинг йўналиши $[\overline{\omega}\, \overline{v}_r]$ вектор кўпайтма йўналишидадир. Мураккаб ҳаракатдаги $M$ нуқта кўчирма ҳаракатининг бурчак тезлиги $\overline{\omega}$ билан нисбий ҳаракат тезлиги $\overline{v}_r$ 234- шаклда тасвирланганча бўлсин. $\overline{w}_k$ вектори $\overline{\omega}$ ва $\overline{v}_r$ орқали ўтказилган текисликка тик йўналиши керак. Унинг қайси томонга кетганини аниқлаш учун $\overline{w}_k$ нинг учидан қараб, $\omega$ нинг $v_r$ билан 180° дан кичик бурчак ўтиб қопланишини, соат стрелкасининг айланишида кўришимиз керак. Кориолис тезланишининг абсолют қийматини ва йўналишини аниқлашда қуйидаги қоидадан фойдаланиш қулайдир: нисбий тезлик $\overline{v}_r$ ни кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги $\overline{\omega}$ бўйича ва унга тик йўналишдаги тузувчиларга ажратиб, унинг кейинги тузувчиси $v_r'$ билан белгиланса, у $v_r' =$



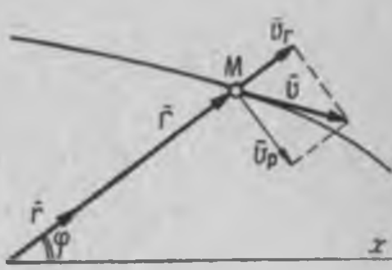
234- шакл.

тезланишларини шу катталикларни қўшиш ҳақида олдинги параграфларда исботланган теоремалардан фойдаланиб чиқариш осон.

$\bar{r}$ радиус-векторни бирлик вектор орқали ифодалаймиз (238- шакл):

$$\bar{r} = r\bar{r}^{\circ}. \qquad (101.\ 1)$$

Бунда $\bar{r}^{\circ}$ вектор $\bar{r}$ радиус-векторнинг бирлик векторидир. Нуқтанинг ҳаракатида $\bar{r}$ радиус-векторнинг модули ва йўналиши ўзгаради. Шунинг учун, $\bar{r}$ ва $\bar{r}^{\circ}$ векторлар $t$ вақтнинг функциясидир. (101. 1) нинг иккала томонидан вақтга нисбатан ҳосила олсак, қуйидаги ифодага эга бўламиз:




238- шакл.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{r}^{\circ} + r\frac{d\bar{r}^{\circ}}{dt}. \qquad (101.\ 2)$$

Бундан тезликни қутб координаталарига нисбатан ҳисоблаганимизда у икки қўшилувчидан иборат эканини кўрамиз: $\frac{dr}{dt}\bar{r}^{\circ}$, яъни биринчи қўшилувчи, $\bar{r}$ билан бир йўналишда бўлиб, у радиус-вектор модулининг ўзгаришидан келиб чиқади. Уни **радиал тезлик** деб, $\bar{v}_r$ билан белгилаймиз:

$$\bar{v}_r = \frac{dr}{dt}\bar{r}^{\circ}. \qquad (101.\ 3)$$

Иккинчи қўшилувчининг мазмунини аниқлаш учун $\frac{d\bar{r}^{\circ}}{dt}$ нинг модулини ва йўналишини топамиз. Маълумки:

$$|d\bar{r}^{\circ}| = d\varphi.$$

Бирлик векторнинг ҳосиласи ўзига тик йўналган. Шунинг учун:

$$\frac{d\bar{r}^{\circ}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^{\circ}.$$

$\bar{p}^{\circ}$ вектор $\bar{r}^{\circ}$ векторга тик йўналганлигидан (101.2) нинг иккинчи қўшилувчисини $\bar{v}_p$ билан белгилаймиз. У вақтда:

$$\bar{v}_p = r\frac{d\bar{r}^{\circ}}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^{\circ} \qquad (101.\ 4)$$

бўлади.

Бу тезлик $\bar r$ га тик йўналган бўлиб, у трансверсал тезлик дейилади.

Тўла тезлик:

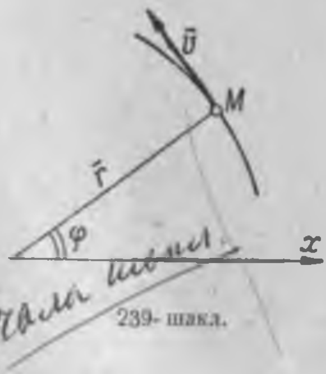
$$\bar v = \bar v_r + \bar v_p = \frac{dr}{dt}\bar r^0 + \frac{d\varphi}{dt}\bar p^0 \qquad (101.\ 5)$$

бўлади.

Бу формулага бундай қараш мумкин: $M$ нуқта $\bar r$ радиус-вектор билан бирга айланиб, кўчирма ҳаракатда иштирок этади ва унинг тезлиги $\bar v_p = \bar v_e$ бўлади.

Бундан ташқари, $\bar r$ радиус-вектор устида нисбий ҳаракат қилиб, унинг бу ҳаракатидаги тезлиги $\bar v_r$ бўлади. Шунинг учун $M$ нуқтанинг мураккаб тезлиги кўчирма ва нисбий тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

$M$ нуқтанинг ҳаракат қонуни қутб координаталарида берилган бўлса, яъни:




239- шакл.

$$r = r(t),$$
$$\varphi = \varphi(t) \qquad (101.\ 6)$$

маълум бўлса, нуқта тезлигини радиал ва трансверсал тузувчилар орқали ифодалаш мумкин (239-шакл).

Ҳаракат қонунидан $v_r$ ва $v_p$ ифодалари қуйидагича ёзилади:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad (101.\ 7)$$
$$v_p = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Тезлик модули:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}. \qquad (101.\ 8)$$

Тезланишни топиш учун тезлик векторидан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

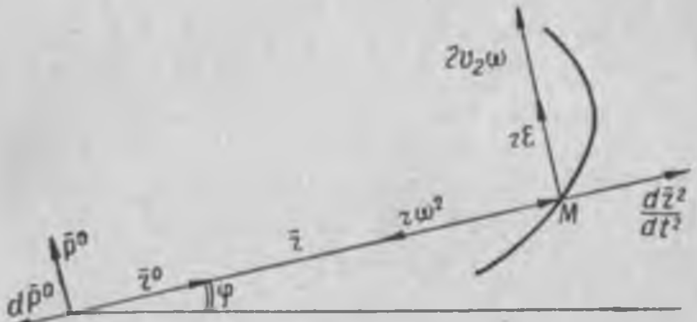
$$\bar w = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\bar r^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\bar p^0\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\bar r^0 + \frac{dr}{dt}\frac{d\bar r^0}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\bar p^0 +$$
$$+ r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\bar p^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d\bar r^0}{dt}. \qquad (101.\ 9)$$

Бу тенглама $\frac{d\bar{p}^\circ}{dt}$ ни ўз ичига олганидан бошқа ҳамма ҳадлари маълум. Шунинг учун $\frac{d\bar{p}^\circ}{dt}$ векторни аниқлаймиз. $d\bar{p}^\circ$ вектор $\bar{p}^\circ$ га тик булиб, $\bar{r}^\circ$ га қарама-қарши йўналган (240- шакл). Маълумки:

$$\left|\frac{d\bar{p}^\circ}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Демак:

$$\frac{d\bar{p}^\circ}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\bar{r}^\circ. \qquad (101.\ 10)$$




240- шакл.

(101. 10) нинг қийматини (101. 9) га қуямиз. $\bar{r}^\circ$ ва $\bar{p}^\circ$ бирлик векторларни қавс ташқарисига чиқариб, тезланиш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\bar{w} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{p\varphi}{dt}\right)^2\right]\bar{r}^\circ + \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\bar{p}^\circ. \quad (101.\ 11)$$

Бу формуладан тезланишнинг радиал ва трансверсал тузувчилари:

$$w_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$
$$(101.\ 12)$$
$$w_p = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt},$$

куринишда ёзилади, $\bar{w}_r$ радиус-вектор буйлаб, $\bar{w}_p$ ~~радиал~~ трансверсал — тезланиш эса $\bar{r}$ га тик йўналган. Трансверсал ва радиал тезланишларни нормал ва тангенциал тезланишлар билан алмаштирмаслик керак.

Ҳаракат тенгламалари қутб координаталарида берилган бўлса, тезланиш (101.12) дан осонгина топилади:

$$w = \sqrt{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]^2 + \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]^2} . \quad (101.13)$$

Аммо бу чиқарилган тезланиш ифодасига бошқача нуқтаи назардан қараш ҳам мумкин. $M$ нуқтанинг ҳаракати, илгаригидек, радиус-векторнинг айланиш ҳаракати—кўчирма ҳаракатдаги иштироки билан у бўйлаб қилаётган нисбий ҳаракатларидан иборат деб қаралса, (101.12) формуладаги радиал тезланишнинг биринчи қисми $w_r = \frac{d^2r}{dt^2}$ нисбий тезланиш бўлиб, шунингдек, унинг иккинчи қисми: $-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -r\omega^2$ ва трансверсал тезланишнинг биринчи қисми: $r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\varepsilon$ нуқтанинг радиус билан бирга айланишидан ҳосил бўлган нормал ва уринма тезланишлар бўлиб, кўчирма ҳаракатнинг тезланишидир. Шунинг учун, уни $w_e$ деб, $\overline{w}_e = r\varepsilon\overline{p}^\circ - r\omega^2\overline{r}^\circ$ ифодани оламиз; бунинг абсолют қиймати $w_e = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ бўлади. Ниҳоят, трансверсал тезланишнинг иккинчи қисми $2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 2v_r\omega$ Кориолис тезланиши бўлиб, уни $w_k$ десак, $M$ нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезланиши:

$$\overline{w} = \overline{w}_r + \overline{w}_e + \overline{w}_k \quad (101.14)$$

кўринишида ёзилади. Буни юқорида бошқа мулоҳазалар асосида чиқарган эдик.

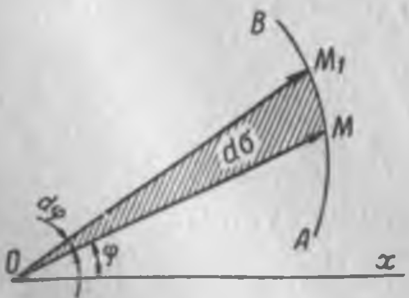
## 102- §. Секториал тезлик

Фараз қилайлик, ҳаракатланувчи нуқта $AB$ траекторияни чизсин. У бирор $t$ вақтда $M$ да, $dt$ вақт ўтгандан кейин $M_1$ да бўлсин. Бу вақт ичида $\overline{r}$ радиус-вектор $d\varphi$ га бурилиб, $d\sigma$ секторни ўтади (241- шаклда штрих билан кўрсатилган). Бу элементар сектор юзи:

$$d\sigma = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$$

бўлади. Бу тенгликнинг иккала томонини $dt$ га бўламиз:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}. \quad (102.1)$$




241- шакл.

Бу тезлик секториал тезлик дейилади.

Секториал тезлик $\bar{r}$ радиус-вектор чизган сектор юзининг ўзгаришини характерлайди. (102.1) ни эътиборга олсак, трансверсал тезланишини қуйидагича ифодалашимиз мумкин:

$$w_p = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left|\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}\right| = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left|\frac{d\sigma}{dt}\right|.$$

Демак:

$$w_p = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left|\frac{d\sigma}{dt}\right| = \frac{2}{r}\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \qquad (102.\ 2)$$

Нуқтанинг тезланиши ҳамма вақт радиус бўйлаб йўналган бўлса:

$$w_p = 0$$

бўлади. (102. 2) дан:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{const}. \qquad (101.\ 3)$$

(102.3) нинг интеграли:

$$\sigma = c_1 t + c_2 \qquad (101.\ 4)$$

бўлади. Бу ҳолда сектор юзи вақтга пропорционал ўзгаради. (102.4) да $c_1$ ва $c_2$ ихтиёрий ўзгармас сонлардир. Трансверсал тезланиш бўлмаса, радиал тезланиш ҳамма вақт координаталар марказидан ўтади. Бу ҳол учун нуқтанинг тезлиги ва радиал тезланиш ифодасини топамиз. (102.1) ва (102.4) дан:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{2}$$

булсин. Бундан:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \qquad (102.\ 5)$$

Бу тенглик ёрдамн билан тезликни ва радиал тезланишни фақат $r$ ва $\varphi$ орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}. \qquad (102.\ 6)$$

(101.8) га асосан:

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

(102.5) ва (102.6) ни эътиборга олсак, тезлик:

$$v^2 = c^2\left\{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\} \qquad (102.\ 7)$$

кўринишида ёзилади.

(102.6) дан ҳосила оламиз:

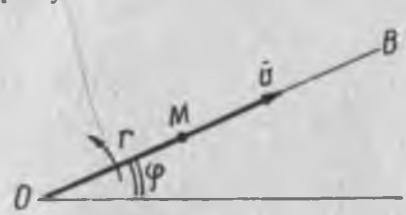
$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}. \qquad (102.8)$$

Буни эътиборга олиб, радиал тезланиш учун:

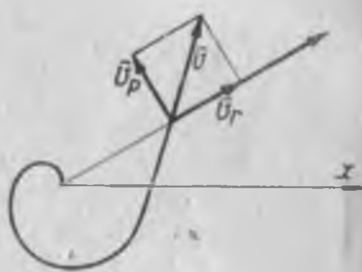
$$w_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right] \qquad (102.9)$$

формулага эга бўламиз. Бу Биене формуласи дейилади.

**67- масала.** $M$ нуқта $OB$ тўгри чизиқда ўзгармас $v_0$ тезлик билан ҳаракат қилади. $OB$ чизиқ ўз навбатида $O$ атрофида $\varphi = \omega t$ қонуни билан айланади (242- шакл). $M$ нуқтанинг траекторияси, тезлиги, тезланиши ва эгрилик радиуси топилсин.




242- шакл.




243- шакл.

Ечиш. Нуқтанинг ҳаракат қонунини қутб координаталарида ёзамиз. Нуқта ўз ҳаракатини $O$ дан бошлайди, деб фараз қиламиз. У ҳолда:

$$r = v_0 t, \qquad (a)$$
$$\varphi = \omega t.$$

Бу тенгламалардан вақтни чиқариб ташласак, нуқта траекториясининг тенгламасини топган бўламиз:

$$r = \frac{v_0}{\omega}\varphi.$$

Бу, Архимед спиралининг тенгламасидир (243- шакл).

Тезликнинг радиал ва трансверсал тузувчиларини топамиз; улар:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v_0,$$

$$v_p = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega = v_0\omega t$$

бўлади.

Тезликнинг модули:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = v_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

бўлади. Шунингдек, тезланишини ҳам топамиз:

$$w_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -r\omega^2 = -v_0\omega^2 t,$$

$$w_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} = 2v_0\omega$$

тўла тезланиш модули:

$$w = v_0\omega\sqrt{4 + \omega^2 t^2}.$$

Эгрилик радиусини аниқлаш учун тангенциал ва нормал тезланишни топамиз. Тезлик квадрати:

$$v^2 = v_0^2 + v_0^2\omega^2 t^2$$

ва унинг ҳосиласи:

$$v\frac{dv}{dt} = v_0^2\omega^2 t$$

бўлади.

Тангенциал тезланиш:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0^2\omega^2 t}{v}.$$

Нормал тезланиш:

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2 = \frac{v_0^2\omega^2\left(4v^2 + t^2v^2\omega^2 - v_0^2\omega^2 t\right)}{v^2}$$

Бундан траекториянинг эгрилик радиусини осонлик билан топамиз:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v_0}{\omega}\cdot\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}.$$

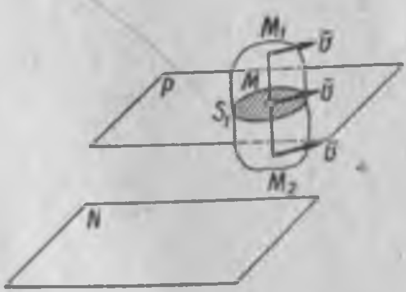
XVII БОБ

# ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

Қўзғалмас

## 103- §. Умумий мулоҳазалар

Қаттиқ жисм нуқталарининг траекториялари маълум текисликка параллел текисликда ётса, бундай ҳаракат текис параллел ёки текис ҳаракат дейилади. Жисмдан бу қўзғалмас текисликка тик қилиб ўтказилган бирор $M_1 M_2$ кесма нуқталарининг тезликлари бир хилда бўлади. Шунинг учун, қаттиқ жисмнинг текис ҳаракатини текширишда, унинг қўзғалмас текисликка параллел қилиб олинган бирор қирқими юзасининг ҳаракатини текшириш кифоя.




244- шакл.

Фараз қилайлик, жисмнинг ҳаракати $N$ текисликка параллел бўлсин (244- шакл). Жисм орқали $N$ текисликка параллел қилиб, $P$ текисликни ўтказамиз. У текислик жисмда $S_1$ қирқимни ҳосил қилсин. Мазкур $S_1$ қирқимнинг ҳаракати қаттиқ жисмнинг текис ҳаракатини тўла аниқлайди. Аммо бу $S_1$ қирқим ўз ҳаракатида доимо $N$ текисликка параллел қолганидан, унинг ҳолатини ундан олинган бирор кесма билан аниқлаш мумкин. Бинобарин, текис ҳаракатдаги жисмдан ҳаракат текислигига параллел бўлган бирор кесмани ажратиб, шу кесманинг ҳаракати билан қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганиш мумкин экан.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг ҳаракати текис ҳаракатнинг хусусий ҳолидир.

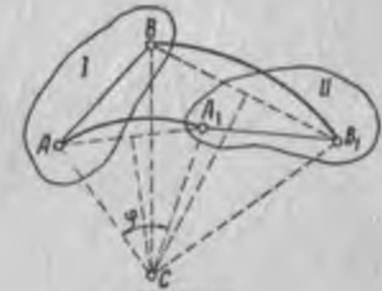
Кўпинча, машина ва механизмлар ва уларнинг алоҳида қисмлари текис ҳаракат қилгани учун, текис ҳаракат кинематиканинг энг муҳим булимларидан бири ҳисобланади.

## 104- §. Шаль теоремаси

Теорема. *Жисмнинг ҳар қандай текис кўчишини ҳаракат текислигида ётувчи бирор марказ атрофида бир айлантириш билан бажариш мумкин.*

Теоремани исботлаймиз. Шакл текислиги ҳаракат текислиги бўлсин. Шаклни биринчи ҳолатдан иккинчи ҳолатга бир айлантириш билан келтириш мумкин бўлса, жисмнинг барча нуқталари бир марказ атрофида радиуслари ҳар хил бўлган айланалар чизади (245- шакл).

Бирор $A$ нуқтани олсак, у $\overset{\frown}{AA_1}$ ёйни, $B$ нуқта эса $\overset{\frown}{BB_1}$ ёйни чизади. Бу ёйлар марказини топиш қийин эмас. Бу марказ $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{BB_1}$ ёйлар ватарлари ўртасидан тик қилиб утказилган чизиқларнинг кесишган $C$ нуқтасида бўлади.



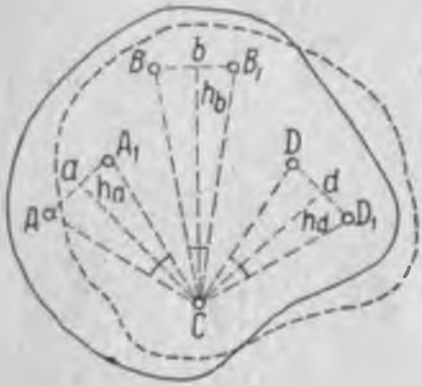
245- шакл.

Энди, теореманинг тўғрилигига ишониш учун $AB$ кесманинг (унинг билан баравар, текис ҳаракатдаги жисмнинг) айланиш маркази $C$ атрофида бир айланиш билан биринчи ҳолатдан иккинчи ҳолатга кўчирилиши мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $A$ ва $B$ нуқталарни $C$ айланиш маркази билан туташтириб, $\triangle ABC$ ни оламиз. Шунингдек, $A_1$ ва $B_1$ нуқталарни $C$ нуқта билан туташтириб, $\triangle A_1B_1C$ ни оламиз. $\triangle ABC$ ни $C$ атрофида $\angle ACA_1 = \varphi$ бурчакка айлантирсак, у, $\triangle A_1,B_1C$ га ҳамма нуқталари билан жойлашади, чунки, бу учбурчаклар тенгдир. Ҳақиқатан ҳам, жисм қаттиқ бўлгани учун ҳаракат вақтида $AB$ да ҳеч қандай ўзгариш бўлмайди. Шунга кўра, $AB = A_1B_1$, иккинчидан, $C$ нуқта $AA_1$ кесманинг ўртасидан ўтказилган тик чизиқнинг устида ётгани учун, у $A$ билан $A_1$ дан тенг узоқликда бўлади. Шунга кўра: $AC = A_1C$. Шунингдек, $BC = B_1C$. Демак, текис ҳаракатдаги жисмни ўз текислигида бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга бир айлантириш билан кўчириш мумкин экан. Бу $C$ нуқта айланиш маркази дейилади.

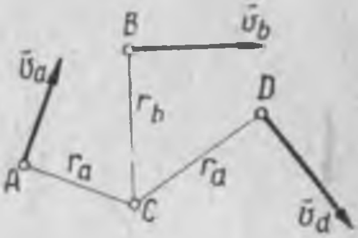
Текис шакл ўрнига қаттиқ жисм олсак, унинг текис ҳаракати ҳар вақт ҳаракат текислигига тик ва айланиш маркази $C$ дан ўтувчи уқ атрофида бир айлантириш билан бажарилади.

## 105- §. Оний айланиш маркази. Қўзғалмас ва қўзғалувчи поллодия ва аксоидлар

Фараз қилайлик, текис шакл чексиз кичик вақтда бирор ($A$, $B$, $D$, ...) ҳолатдан бошқа ($A_1$, $B_1$, $D_1$, ...) ҳолатга кўчсин (246- шакл). Ҳозир исботланган Шаль теоремасига биноан, нуқталарнинг элементар кўчиши $AA_1$, $BB_1$, $DD_1$,... лар ўртасидан ўтказилган тик $h_A$, $h_B$, $h_D$, ... лар, ўтган вақтнинг қанчалигидан қатъи назар, $C$ нуқтада кесишади, $\angle ACA_1$, $\angle BCB_1$, $\angle DCD_1$, ... ларнинг ўзаро тенглиги табиийдир. Бу бурчакни $\Delta\varphi_c$ билан белгиласак, $AA_1$, $BB_1$, $DD_1$, ... элементар кўчишлар учун қуйидаги ифодаларни оламиз:




246- шакл.




247- шакл.

$$AA_1 = h_A \cdot \Delta\varphi_c,\ BB_1 = h_B \cdot \Delta\varphi_c,\ DD_1 = h_D \cdot \Delta\varphi_c,\ \ldots$$

Буларни $\Delta t$ га бўлиб, лимит олсак, $A$, $B$, $D$, ... нуқталар тезликларини топамиз. Лимитда $h_A$, $h_B$, $h_D$, ... лар $A$, $B$, $D$, ... нуқталарнинг абсолют траекторияларининг нормали билан бир йўналишда бўлади. $h_A$, $h_B$, $h_D$, ... ларнинг лимитдаги қийматларини тегишлича $r_a$, $r_b$, $r_d$, ... десак, $A$, $B$, $D$, ... нуқталар тезликлари учун қуйидаги ифодаларни оламиз (247- шакл):

$$\begin{aligned} v_A &= r_a\frac{d\varphi}{dt} = r_a\omega, \\ v_B &= r_b\frac{d\varphi}{dt} = r_b\omega, \\ v_D &= r_d\frac{d\varphi}{dt} = r_d\omega, \\ v_c &= 0. \end{aligned} \qquad (105.\ 1)$$

Демак, текис ҳаракатдаги жисм нуқталарининг траекторияларига ўтказилган нормаллар ҳар онда бир нуқтада кесишиб, бу нуқтанинг шу ондаги тезлиги нулга тенг бўлар экан.

Бошқа нуқталарнинг тезликлари эса $C$ атрофидаги айланма тезлик каби аниқланади. Жисмни кўчирилган ҳолатидан бошқа қўшни ҳолатга ўтказмоқчи булсак, айланиш маркази қандайдир $C_1$ да бўлади. Жисмни кетма-кет бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга кучишида айланиш марказлари ҳам тегишлича ўз ҳолатларини ўзгартади. Шунга кўра, текис ҳаракатини ҳар хил марказлар атрофидаги оний айланиш ҳаракатларнинг йиғиндисидан ташкил топган деб қараш мумкин. Айланиш маркази ҳар он учун бошқа бўлганлигидан, у оний айланиш маркази дейилади. Бу марказга мос келган бурчак тезлиги оний бурчак тезлиги деб аталади. Ҳаракатдаги шаклда ва ҳаракат текислигидаги ҳар он учун оний марказ ҳолатига белги қуйиб борсак, бу белгиларнинг геометрик йиғиндиси икки чизиқни ташкил қилади. Буларнинг бири ҳаракатдаги текис шаклда, иккинчиси қўзғалмас текисликда бўлади. Бу чизиқларнинг биринчиси қўзғалувчи поллодия, иккинчиси қўзғалмас поллодия дейилади.

Демак, оний марказлар қолдирган излардан ташкил топган чизиқ поллодия дейилар экан. Текис шаклдан жисмнинг ҳаракатига ўтилса, ҳар онда унинг ҳаракати ҳаракат текислигига тик ва оний марказдан ўтувчи ўқ атрофида айлантиришга келтирилади.

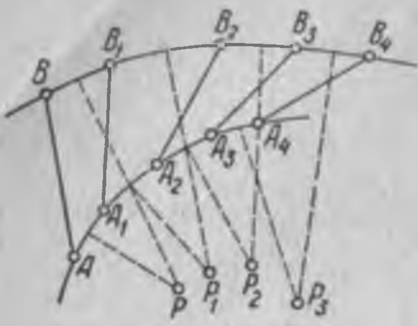
Бу ўқ оний айланиш ўқи дейилади. Оний айланиш ўқларининг ҳаракатдаги жисмда ва қўзғалмас фазода қолдирган излари сирт ҳосил қилади. Бу сиртнинг ҳаракатдаги фазода ҳосил бўлгани қўзғалувчи аксоид, қўзғалмас фазода ҳосил бўлгани қўзғалмас аксоид дейилади.

Бу аксоидларнинг йўналтирувчилари тегишлича қўзғалувчи ва қўзғалмас поллодиялар бўлади.

## 106- §. Поллодияларни геометрик усулда қуриш

Текис жисмнинг $t$, $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ вақтларга мос бир қанча кетма-кет ҳолатларига белги қўйиб борамиз. Шаль теоремасига мувофиқ, ҳар қайси ҳолат учун айланиш маркази (оний марказ), $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3, \ldots, P_n$ бўлсин (248- шакл). У ҳолда $S$ текис жисмнинг ҳаракатини $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3, \ldots, P_n$ марказлар атрофида $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3, \ldots, \varphi_n$ бурчакларга айланишдан иборат деб тасвирлашимиз мумкин.

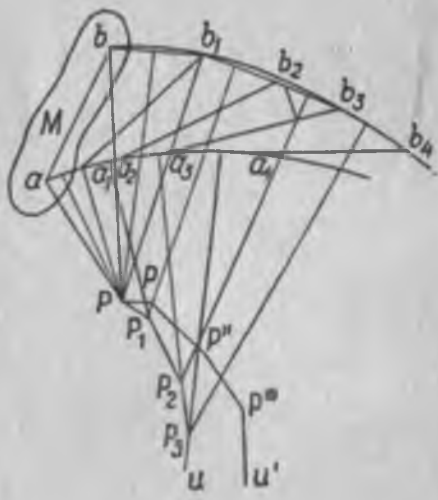
$\Delta t$ нулга интилса, $S$ текис жисмнинг ҳаракати оний айланишлардан иборат экани билинади. Оний марказлар ҳар онда $AB$ кесма учларининг траекториясига ўтказилган нор




248- шакл.

малларнинг кесишган нуқтасида ётади, чунки лимитда $AA_1$ ва $BB_1$ ватарлар ўртасига ўтказилган тик чизиқлар траекториянинг $A$ ва $B$ нуқталаридан ўтувчи нормал бўлади. 248- шаклда $S$ нинг бир қанча ҳолатлари $AB$, $A_1B_1$, $A_2B_2$, ... билан тасвирланган. Ҳар бир ҳолатдан қўшни ҳолатга ўтишдаги оний айланиш маркази аниқланган. Улар $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$,... синиқ чизиқни тузади. Бу чизиқни $Ц$ ҳарфи билан белгилаймиз. $Ц$ синиқ чизиқ тахминан қўзғалмас поллодияни тасвирлайди (249- шакл).

$S$ текис жисмнинг $ab$ дан $a_1b_1$ га ўтиши $P$ оний марказ атрофида айланиш билан бажарилади. Бу ўтишда $S$ билан маҳкамланган текисликда шундай бир $P'$ нуқтани топиш мумкинки, у, $P_1$ оний марказга дуч келсин. $S$ текис жисмнинг $a_1$ $b_1$ ҳолатидан $a_2$ $b_2$ га ўтишида бошқа бир $P''$ нуқтани кўз олдимизга келтиришимиз мумкинки, у, оний марказ $P_2$ га дуч келсин. Бундай мулоҳаза билан $S$ жисмга маҳкамланган текисликда бир қанча $P'$, $P''$, $P'''$, ... нуқтани топишимиз мумкин.




249- шакл.

Уларни туташтиришдан келиб чиққан синиқ чизиқни $Ц'$ билан белгилаймиз. $Ц$ чизиқ маълум бўлса, $Ц'$ ни қуриш қийин эмас. Бунинг учун юқорида айтилганларга биноан, қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\overline{PP'} = \overline{PP_1}, \ \overline{P'P''} = \overline{P_1P_2}, \ \overline{P''P'''} = \overline{P_2P_3}, \ldots$$

$$(\widehat{\overline{PP_1}, \overline{PP'}}) = (\widehat{\overline{PA}, \overline{PA_1}}), (\widehat{\overline{P'P''}, \overline{P_1P_2}}) = (\widehat{\overline{P_1A_1}, \overline{P_1A_2}}), \ldots$$

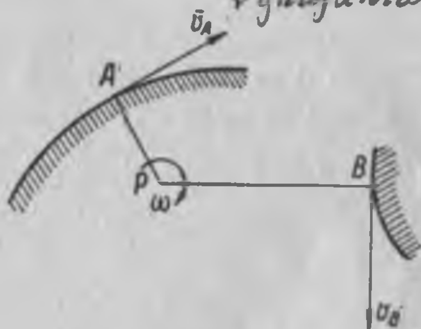
Бу икки синиқ чизиқнинг лимитда узлуксиз эгри чизиққа айланиши юқорида айтиб ўтилган эди. Демак, $S$ текис жисмнинг ҳар қандай текис ҳаракатини шу жисм билан бириктирилган $Ц'$ қўзғалувчи поллодияни $Ц$ қўзғалмас поллодия устида сирпантирмасдан юмалатиш билан олиш мумкин экан. Бу натижа энг аввал Пуансо томонидан топилгани учун у, Пуансо теоремаси дейилади. Иккала поллодиянинг уринган нуқтаси шу он учун оний айланиш марказини беради.

## 107- §. Оний айланиш марказини топиш

Оний айланиш марказини қуриш учун текис жисм икки нуқтасининг траекторияси ёки бу нуқталар тезликларининг йўналишлари маълум бўлиши керак.

Ҳақиқатан ҳам, оний айланиш марказининг таърифига кўра, икки нуқта траекторияларига нормалларнинг кесишган нуқтаси ёки шу нуқталардан уларнинг тезликларига тик қилиб ўтказилган чизиқларнинг кесишган нуқтаси оний маркази беради. Фараз қилайлик, жисмнинг $A$ ва $B$ нуқталарнинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчишдаги тезлиги $\bar{v}_A$ ва $\bar{v}_B$ бўлсин. Бу нуқталардан $\bar{v}_A$ ва $\bar{v}_B$га ўтказилган тик чизиқларнинг кесишган нуқтаси оний айланиш марказини беради (250- шакл).

қўйилган



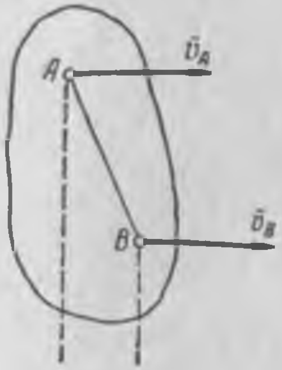

250- шакл.

Текис жисмдаги бошқа нуқталарнинг т злиkларини топиш қийин эмас. Бирор нуқта тезлигини топиш учун уни оний марказ билан туташтириб, бу икки нуқта оралиғини оний бурчак тезлигига кўпайтириш керак.

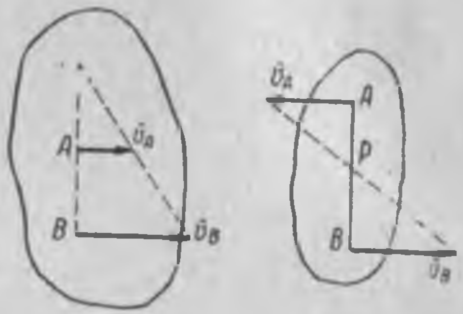
Берилган нуқталардан бирортасининг тезлиги маълум бўлса, оний бурчак тезлигини топиш осон. Масалан, текис жисм $A$ нуқтасининг тезлиги $v_A$ маълум бўлсин, у ҳолда:

$$\omega = \frac{v_A}{AP}$$

Агар $A$ нуқтанинг $v_A$ тезлиги бошқа $v_A$ га тик бўлмаган чизиқ устидаги бирор $B$ нуқтанинг $v_B$ тезлигига параллел бўлса, бу нуқталардан тезликларга тик қилиб ўтказилган чизиқлар кесишмайди, яъни оний айланиш маркази чексизда бўлади: $AP=\infty$ (251- шакл). Бу ҳолда текис жисм айланмай, унинг барча нуқталарининг тезликлари бу онда бир




251- шакл.




252- шакл.

хилда бўлиб, текис жисм илгарилама ҳаракат қилади.

Агар $A$ ва $B$ нуқталарни туташтирувчи чизиқ $\bar{v}_A$ билан $\bar{v}_B$ га тик бўлиб, бу нуқталарнинг тезликлари $\bar{v}_A$ ва $\bar{v}_B$ катталик жиҳатидан фарқ қилса, оний марказни топиш учун иккала нуқта тезликларининг катталиги ёки уларнинг нисбатн берилиши керак. У ҳолда оний марказнинг ҳолати қуйидаги шартлардан топилади (252- шакл).

$$\frac{v_A}{AP}=\frac{v_B}{BP}=\omega,$$

$$PB \pm PA = AB. \qquad (107.\ 1)$$

Ҳар қандай контур билан чегараланган жисм бошқа бирор қўзғалмас сиртда сирпанмасдан юмаласа, оний марказ ҳаракатдаги жисм контурининг тегишиб турган нуқтасида бўлади, чунки бу қўзғалмас нуқта ҳозирги онда иккала сиртга тегишли бўлиб, унинг тезлиги нулга тенгдир (253- шакл). Мисол тариқасида, рельсда юмаловчи ғилдиракни ёки қўзғалувчи тишли ғилдиракнинг қўзғалмас ғилдиракда юмаланишини кўрсатишимиз мумкин (254- шакл).

**68- масала.** *Узунлиги $l$ га тенг бўлган $AB$ стерженнинг учлари ползун воситаси билан $Ox$ ва $Oy$ ўқлар бўйлаб ҳаракатланади (255- шакл). Стерженнинг қўзғалмас ва қузғалувчи поллодиялари топилсин.*

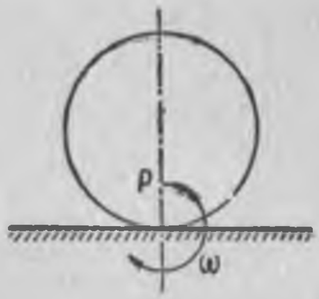
Ечиш. $A$ ва $B$ нуқталар тўғри чизиқли траектория—$Ox$ ва $Oy$ уқлар бўйлаб ҳаракатлангани учун, уларнинг тезликлари ҳам шу чизиқ бўйлаб йуналган. Шунинг учун, $AB$ нинг оний айланиш маркази $A$ ва $B$ нуқталардан тезликларига ўтказилган $AC$ ва $BC$ тик чизиқларнинг кесишган нуқтасида ётади.

$AB$ стержень қандай ҳолатда бўлса ҳам, $OACB$ шакл тўғри бурчаклигича қолиши шаклдан кўриниб турибди:

$$OC = AB = l,\ O_1C = \frac{l}{2}$$

Демак, оний марказ стерженнинг ҳар қандай ҳолати учун қўзғалмас $O$ нуқтадан бир хилдаги оралик $l$ да, қўзғалувчи $O_1$ нуқтадан эса $\frac{l}{2}$ оралик-

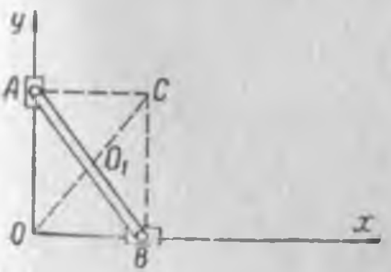
253- шакл.



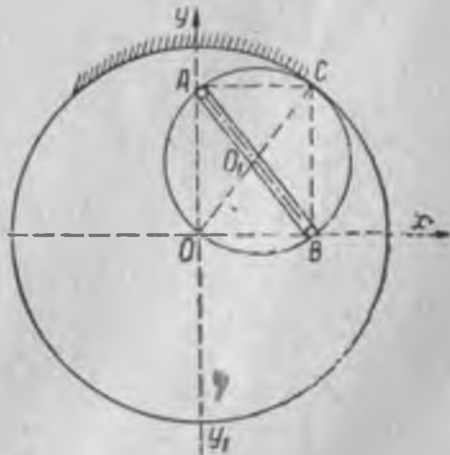

254- шакл.

да бўлар экан. Бундан, қўзғалмас поллодиянинг радиуси $l$, қўзғалувчи поллодиянинг радиуси эса $\frac{l}{2}$ бўлган айлана эканлигини кўрамиз (256-шакл).

**69- масала.** Узунлиги кривошип узунлигига тенг бўлган $AB$ шатун учун қузғалмас ва қўзғалувчи поллодиялар топилсин (257-шакл). $AB = OA = r$.

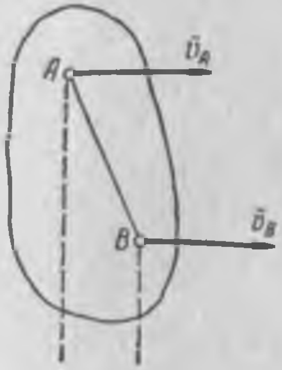



255- шакл.

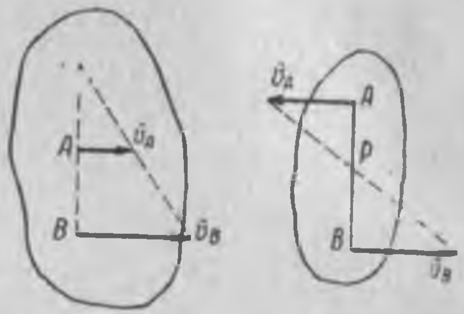



256- шакл.

чизиқлар кесишмайди, яъни оний айланиш маркази чексизда бўлади: $AP=\infty$ (251- шакл). Бу ҳолда текис жисм айланмай, унинг барча нуқталарининг тезликлари бу онда бир




251- шакл.




252- шакл.

хилда бўлиб, текис жисм илгарилама ҳаракат қилади.

Агар $A$ ва $B$ нуқталарни туташтирувчи чизиқ $\bar{v}_A$ билан $\bar{v}_B$ га тик бўлиб, бу нуқталарнинг тезликлари $\bar{v}_A$ ва $\bar{v}_B$ катталик жиҳатидан фарқ қилса, оний марказни топиш учун иккала нуқта тезликларининг катталиги ёки уларнинг нисбати берилиши керак. У ҳолда оний марказнинг ҳолати қуйидаги шартлардан топилади (252- шакл).

$$\frac{v_A}{AP}=\frac{v_B}{BP}=a,$$
$$PB \pm PA = AB. \qquad (107.1)$$

Ҳар қандай контур билан чегараланган жисм бошқа бирор қўзғалмас сиртда сирпанмасдан юмаласа, оний марказ ҳаракатдаги жисм контурининг тегишиб турган нуқтасида бўлади, чунки бу қўзғалмас нуқта ҳозирги онда иккала сиртга тегишли бўлиб, унинг тезлиги нулга тенгдир (253- шакл). Мисол тариқасида, рельсда юмаловчи ғилдиракни ёки қўзғалувчи тишли ғилдиракнинг қўзғалмас ғилдиракда юмаланишини кўрсатишимиз мумкин (254- шакл).

**68- масала.** *Узунлиги $l$ га тенг бўлган $AB$ стерженнинг учлари ползун воситаси билан $Ox$ ва $Oy$ ўқлар бўйлаб ҳаракатланади (255- шакл). Стерженнинг қўзғалмас ва қузғалувчи поллодиялари топилсин.*

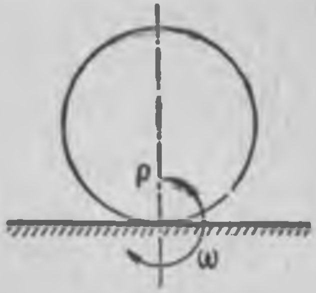
Е ч и ш. $A$ ва $B$ нуқталар тўғри чизиқли траектория—$Ox$ ва $Oy$ ўқлар бўйлаб ҳаракатланганн учун, уларнинг тезликлари ҳам шу чизиқ буйлаб йўналган. Шунинг учун, $AB$ нинг оний айланиш маркази $A$ ва $B$ нуқталардан тезликларига ўтказилган $AC$ ва $BC$ тик чизиқларнинг кесишган нуқтасида ётади.

$AB$ стержень қандай ҳолатда бўлса ҳам, $OACB$ шакл тўғри бурчаклигича қолиши шаклдан кўрниб турибди:

$$OC = AB = l, \; O_1C = \frac{l}{2}.$$

Демак, оний марказ стерженнинг ҳар қандай ҳолати учун қўзғалмас $O$ нуқтадан бир хилдаги оралиқ $l$ да, қўзғалувчи $O_1$ нуқтадан эса $\frac{l}{2}$ оралиқ-

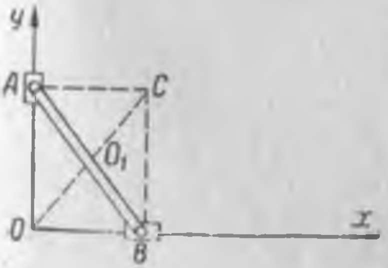
253- шакл.



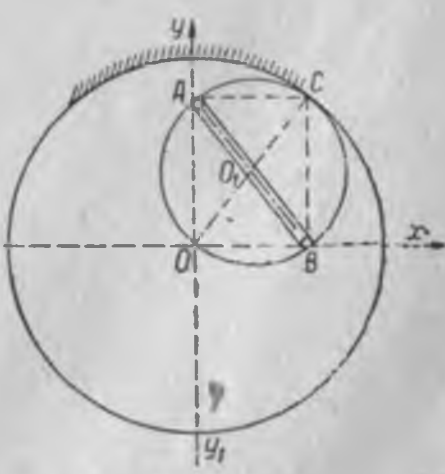

254- шакл.

да бўлар экан. Бундан, қўзғалмас поллодиянинг радиуси $l$, қўзғалувчи поллодиянинг радиуси эса $\frac{l}{2}$ бўлган айлана эканлигини кўрамиз (256-шакл).

**69- масала.** Узунлиги кривошип узунлигига тенг бўлган $AB$ шатун учун қўзғалмас ва қўзғалувчи поллодиялар топилсин (257-шакл). $AB = OA = r$.




255- шакл.



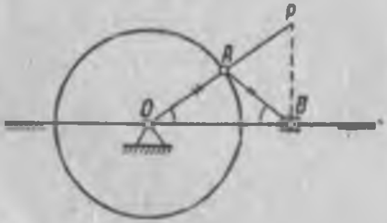

256- шакл.

Ечиш. $A$ нуқта айлана чизиб, $B$ нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатлангани учун, оний марказ $B$ нуқтадан $OB$ га ўтказилган тик чизиқ билан $OA$ нинг давоми кесишган нуқтада ётади. Шатуннинг ҳар қандай ҳолатига $P$ оний марказ қўзғалмас $O$ нуқтадан доимий $OP = 2r$ масофада бўлгани учун қўзғалмас поллодия радиуси $2r$ ва маркази $O$ даги айлана бўлади. Шунингдек, қўзғалувчи поллодия ҳам радиуси $AP = r$ ва маркази $A$ даги айлана бўлади.

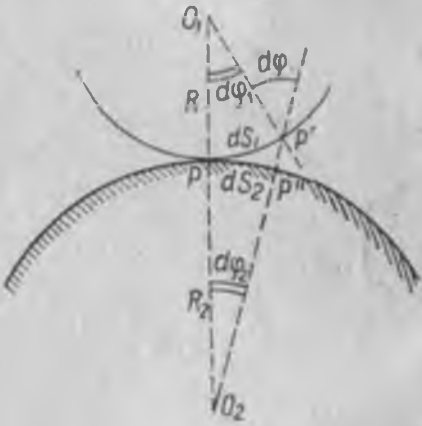
## 108- §. Оний айланиш марказининг тезлиги

Маълумки, жисмнинг текис ҳаракати қўзғалувчи поллодиянинг қўзғалмас поллодия устида сирпанмасдан юмалашидан вужудга келади. Ҳар он учун оний бурчак тезлиги ҳам маълум бўлсин (258- шакл).

Оний айланиш марказининг тезлигини топамиз. Қўзғалувчи поллодия қузғалмас поллодия устида юмалаганда, уларнинг




257- шакл.




258- шакл.

тегишиб турган нуқтаси $P$ дан $P'$ га кўчади. Сирпаниш бўлмагани учун: $\overset{\frown}{PP'} = \overset{\frown}{PP''}$ ёки $ds_1 = ds_2 = ds$. Қўзғалувчи поллодия билан бириктирилган жисмнинг айланиш бурчаги $d\varphi$ шаклдан:

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2$$

бўлади.

Поллодияларнинг эгрилик радиусини тегишлича $R_1$, $R_2$ десак:

$$d\varphi_1 = \frac{ds_1}{R_1},\ d\varphi_2 = \frac{ds_2}{R_2}$$

бўлади. Демак:

$$d\varphi = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ds.$$

Бу ифоданинг иккала томонини $dt$ га бўлиб, $P$ нуқтанинг тезлиги учун бундай формулани оламиз:

$$v_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\omega. \tag{108. 1}$$

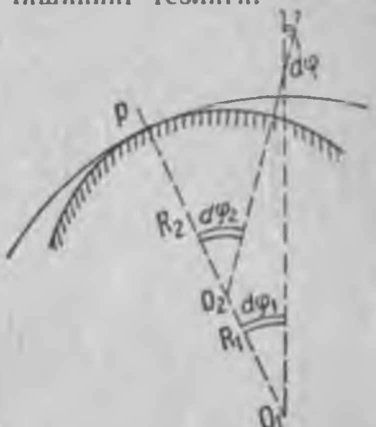
Бу ерда $v_p$ — оний марказ кўчишининг тезлиги.

(108.1) формула жисмнинг оний марказ билан дуч келган нуқтасининг тезлиги эмаслигига эътибор қилиш керак.

Қўзғалувчи поллодия ботиқ томони билан қўзғалмас поллодиянинг қаварик томонига тегиб турса (259- шакл), оний айланиш марказининг тезлиги қуйидагича ифодаланади:

$$v_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}\omega. \tag{108. 2}$$

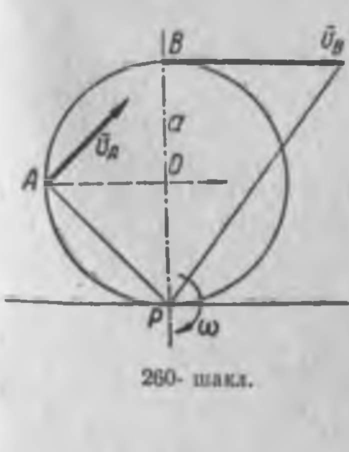
Чиқарилган формулаларни татбиқ этиш учун қуйидаги масалани ечамиз.




259- шакл.

**70- масала.** Тўғри чизиқли рельсда радиуси $a$ га тенг бўлган гилдирак сирпанмасдан юмалайди. Ғилдирак марказининг тезлиги $v_0$. $A$ ва $B$ нуқталарнинг ва оний айланиш маркази кучишининг тезликлари топилсин (260- шакл).

Ечиш. Ғилдирак айланаси ва рельс чизиғи тегишлича қўзғалувчи ва қўзғалмас поллодиялар ва уларнинг тегиб турган нуқтаси оний айланиш маркази бўлади. Шунинг учун:




260- шакл.

$$\omega_p = \frac{v_0}{a},$$

$$v_A = AP\,\omega_p = a\sqrt{2}\,\omega_p = \sqrt{2}\,v_0,$$

$$v_B = 2a\,\omega_p = 2v_0.$$

Оний айланиш марказининг кўчиш тезлигини топиш учун $R_1 = a, R_2 = \infty$ деб, уларни (108. 1) га қуямиз:

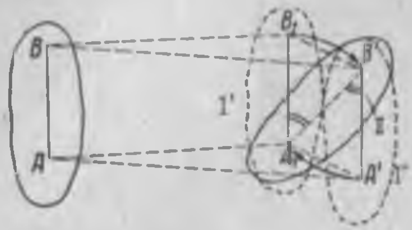
$$v_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\omega_p = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}\omega_p =$$

$$= a\omega_p = v_0.$$

## 109- §. Даламбер теоремаси

Теорема. *Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай текис ҳаракатини бир илгарилама ва қутб деб олинган бирор ихтиёрий нуқта атрофидаги айланма ҳаракатлардан иборат деб қараш мумкин.*

Теоремани исботлаймиз. Текис ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳолати унинг икки нуқтаси ёки бу нуқталарни туташтирувчи кесма билан аниқланиши маълум. Бу нуқталар $A$ ва $B$ бўлсин (261- шакл).



261- шакл.

Қаттиқ жисм олдин $I$ ҳолатдан $I'$ ҳолатга илгарилама ҳаракат билан кўчсин. Бу ҳолда унинг барча нуқталарининг кўчиши $A$ нуқтанинг кўчиши $AA_1$ билан бирдек бўлади. Сўнгра жисм $I'$ ҳолатдан $A_1$ атрофида $\angle B_1A_1B'$ га айлантириш билан $II$ ҳолатга келтирилсин. Бу ерда асосий нуқта, яъни қутб учун $A$ ни танладик. Лекин асосий нуқта — қутб учун $B$ ни олишимиз ҳам мумкин. Бу ҳолда олдин жисм $I''$ ҳолатга илгарилама ҳаракат билан келтирилиши натижасида унинг барча нуқталарининг кўчиши $BB'$ билан бирдек бўлади.

Жисм мазкур ҳолатда $B'$ атрофида $\angle A'B'A_1$ га айлантириш билан $II$ ҳолатга келтирилади. Илгарилама ҳаракат таърифига кўра, юқорида айтилган иккала ҳол учун:

$$A_1B_1 \# A'B' \# AB.$$

Демак:

$$\angle B_1A_1B' = \angle A'B'A_1.$$

Айланиш маркази, яъни қутб учун қайси нуқтани олмайлик, ҳамма вақт айланиш бир томонга қараб бажарилади.

Энди бу теорема асосида, текис жисмнинг бирор нуқтасининг кўчишини топамиз. Бу нуқта учун $B$ ни оламиз. $A$ нуқтанинг илгарилама кўчиш векторини $\bar{r}_A$, $B$ нинг $A_1$ атрофида айланма кўчишини $\bar{r}_{AB}$ ва $B$ нинг умумий кўчиши $\overline{BB_1}$ ни $\bar{r}_B$ билан белгиласак, шаклдан:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB} \tag{109. 1}$$

тенгликни оламиз.

$\bar{r}_A$ вектор текис жисмнинг барча нуқталарнинг $A$ билан бирга қилган илгарилама ҳаракатини тасвирлайди.

Бу (109. 1) тенгликда: $\bar{r}_A$ ни жисмнинг, шу билан бирга, $B$ нуқтанинг кўчирма ҳаракати, $\bar{r}_{AB}$ ни $B$ нуқтанинг $A$ га нисбатан нисбий ҳаракати ва $\bar{r}_B$ ни $B$ нуқтанинг мураккаб ҳаракати деб қараш мумкин.

## 110- §. Текис жисм нуқтасининг тезлиги

Оний айланиш маркази маълум бўлса, текис жисм нуқтасининг тезлигини топишни кўрсатиб ўтган эдик. Даламбер теоремасига мувофиқ, (109. 1) дан фойдаланиб, текис жисм нуқтасининг тезлигини топамиз. Бунинг учун, у тенгликнинг $t$ га нисбатан ҳосиласини оламиз; у ҳолда:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} \qquad (110.\ 1)$$

Бу ерда $\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{v}_B$ — $B$ нуқтанинг тезлиги, $\frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{v}_A$ — жисмнинг илгарилама ҳаракатини ифодаловчи $A$ нуқтанинг тезлиги ва $\frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{v}_{AB}$ — $B$ нуқтанинг $A$ атрофида айланиш тезлиги. Буларни (110. 1) га қўйсак:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB} \qquad (110.\ 2)$$

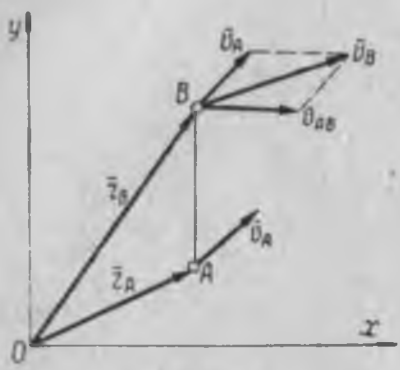
келиб чиқади. $B$ нуқтанинг айланиш тезлиги $\bar{v}_{AB}$ нинг $AB$ кесмага тик йўналганлиги табиийдир. Шунинг учун уни, (94.5) га мувофиқ, қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\bar{v}_{AB} = \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = [\bar{\omega}\ \bar{r}_{AB}]. \qquad (110,3)$$

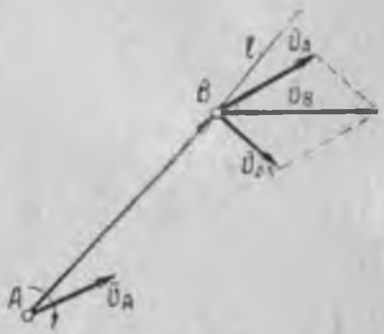
262- шаклда $A$ ва $B$ нуқталарнинг тезлик векторлари тасвирланган. Бундан кўрамизки, текис жисмнинг бирор $A$ нуқтасининг тезлиги маълум бўлса, бошқа ҳар қандай $B$ нуқтасининг тезлиги шу $A$ нуқтанинг $v_A$ тезлиги билан $B$ нуқтанинг $A$ нуқта атрофидаги айланиш тезлиги $\bar{v}_{AB}$ нинг геометрик йиғиндисига тенг бўлар экан.

Агар $\omega = 0$ бўлса, текис жисм $\bar{v}_B = \bar{v}_A$ тезлик билан илгарилама ҳаракат қилади.

Шунга эътибор қилиш керакки, $A$ ва $B$ нуқталар учун бошқа икки нуқтани олсак, уларнинг тезлик векторлари, албатта, бошқа бўлади. Лекин қайси нуқтани асосий қилиб олмайлик, $\omega$ бурчак тезлиги бир хилда бўлади, чунки Даламбер теоремасига биноан, текис жисмнинг айланиши асосий нуқтанинг қандай танланганига боғлиқ эмас.




262- шакл.




263- шакл.

(110. 2) дан фойдаланиб, амалий масалаларни ечишда катта аҳамиятга эга бўлган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

*Текис ҳаракатдаги жисмнинг икки нуқтаси тезликларининг шу нуқталарни туташтирувчи чизиқ йўналишидаги проекциялари узаро тенгдир.*

Бу теоремани (110. 1) нинг иккала томонини $AB$ йўналишдаги проекцияларини олиш билан исбот этамиз (263-шакл).

$AB$ кесманинг йўналиши $\bar{l}$ бўлсин, у ҳолда:

$$\text{пр}_l(\bar{v}_B) = \text{пр}_l(\bar{v}_A) + \text{пр}_l(\bar{v}_{AB}).$$

Бу ерда $\bar{v}_{AB} \perp \bar{l}$ бўлгани учун:

$$\text{пр}_l(\bar{v}_{AB}) = 0.$$

Шунга кўра:

$$\text{пр}_l(\bar{v}_A) = \text{пр}_l(\bar{v}_B). \qquad (110.\ 4)$$

Энди, (110. 2) нинг қўзғалмас ва қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини оламиз. Олдин қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларни топамиз. Бунинг учун $A$ нуқта координаталарини $\xi_0$, $\eta_0$, $B$ нуқта координаталарини $\xi$, $\eta$ билан белгилаймиз. У вақтда:

$$v_{B_\xi}\bar{i}+v_{B_\eta}\bar{j}=v_{A_{\xi_0}}\bar{i}+v_{A_{\eta_0}}\bar{j}+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ \xi-\xi_0, & \eta-\eta_0, & 0\end{vmatrix}.$$

Бундан:

$$v_{B_\xi}=v_{A_{\xi_0}}-\omega(\eta-\eta_0),$$
$$v_{B_\eta}=v_{A_{\eta_0}}+\omega(\xi-\xi_0). \qquad (110.\ 5)$$

Текис жисмнинг ҳаракатини текшириш учун, унинг асосий нуқтасининг координаталари $x_0$, $y_0$ ва бу нуқта атрофида $\varphi$ айланиш бурчаги вақтнинг функцияси тарзида берилган бўлиши керак. У ҳолда асосий нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари ва асосий нуқта атрофида айланма ҳаракат бурчак тезлиги:

$$v_{Ax}=\dot{x}_0,$$
$$v_{Ay}=\dot{y}_0, \qquad (110.\ 6)$$
$$\omega=\dot{\varphi}$$

маълум бўлади.

Текис жисм нуқтаси тезлигининг қузғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини олиш учун координаталар бошини $A$ га жойлаб, $B$ нуқта координаталарини $x$, $y$ билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$v_{Bx}\bar{i}+v_{By}\bar{j}=v_{Ax_1}\bar{i}+v_{Ay_1}\bar{j}+\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & 0\end{vmatrix}. \qquad (110.\ 7)$$

Бу ерда:

$$v_{Ax_1}=v_{Ax}\cos\varphi+v_{Ay}\sin\varphi,$$
$$v_{Ay_1}=-v_{Ax}\sin\varphi+v_{Ay}\cos\varphi.$$

(110. 7) айниятдан:

$$v_{Bx}=v_{Ax}\cos\varphi+v_{Ay}\sin\varphi-y\omega,$$
$$v_{By}=-v_{Ax}\sin\varphi+v_{Ay}\cos\varphi+x\omega. \qquad (110.\ 8)$$

## 111- §. Оний марказнинг координаталари
### (поллодиялар тенгламалари)

Юқорида текис ҳаракатдаги жисмда ҳар он учун тезлиги нуль бўладиган оний марказ борлигини курсатган эдик. Энди, бу нуқтанинг жисмдаги ҳолатини (110. 2) дан фойдаланиб топамиз. Бунинг учун $\bar{v}_A$ тезликка тик $MA$ чизиқни ўтказамиз. $MA$ чизиқда шундай $P$ нуқтани топиш мумкинки, унинг айланма тезлиги $\bar{v}_{AP} \perp MA$ асосий нуқта тезлиги $v_A$ га тенг ва у билан қарама-қарши йўналган бўлсин, яъни:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{AP}. \qquad (111.\ 1)$$

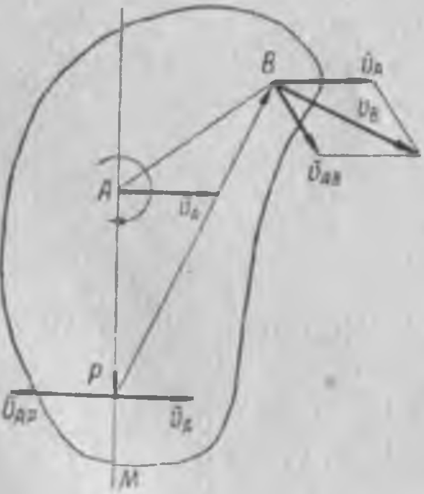
Иккинчи томондан (264- шакл):

$$v_{AP} = \omega AP = v_A.$$

Бундан:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}. \qquad (111.\ 2)$$

$P$ нуқтанинг тезлиги $v_P = 0$ бўлгани учун бу нуқта оний марказ бўлиб, яна 105- § даги натижага келдик.




264- шакл.

(111.1) ни (110.2) асосий тенгламадан айирамиз:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{AB} - \bar{v}_{AP} = [\bar{\omega}\,\bar{r}_{AB}] - [\bar{\omega}\,\bar{r}_{AP}] = [\bar{\omega},\ \bar{r}_{AB} - \bar{r}_{AP}].$$

264- шаклдан:

$$\bar{r}_{AB} - \bar{r}_{AP} = \bar{r}_{PB}.$$

Демак:

$$\bar{v}_B = [\bar{\omega}\,\bar{r}_{AP}]. \qquad (111.\ 3)$$

Шундай қилиб, яна Шаль теоремасидан чиқарилган натижага келдик, яъни текис ҳаракатдаги жисм тезлигини ҳар онда оний марказдан ўтувчи ўқ атрофида айланадиган жисм нуқтасининг тезлиги сингари аниқладик.

Энди, (110. 5) ва (110. 8) дан фойдаланиб, оний марказнинг қўзғалмас ва қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини топамиз.

Оний марказда $v_P = 0$ булгани учун унинг қўзғалмас ўқдаги проекциялари қуйидагича бўлади:

$$v_{A\xi} - \omega(\eta_P - \eta_A) = 0,$$
$$v_{A\eta} + \omega(\xi_P - \xi_A) = 0.$$

Бу тенгламалардан:

$$\xi_p = \xi_A - \frac{v_{A\eta}}{\omega},$$

$$\eta_p = \eta_A + \frac{v_{A\xi}}{\omega}. \qquad (111.\ 4)$$

Маълум текис ҳаракат учун, $x_A$, $y_A$ ва $\varphi$ ҳамда уларнинг вақтга нисбатан ҳосилалари берилган функциядир. Шунинг учун (111. 4) ва (111. 5) лар қўзгалмас ва қўзғалувчи поллодияларнинг параметрик тенгламалари бўлади.

Бу тенгламалардан вақтни чиқариб ташласак, поллодиялар тенгламалари келиб чиқади.

Шунингдек, оний марказнинг координаталарини қўзғалувчи ўқларга нисбатан аниқлаймиз:

$$x_p = \frac{v_{Ax}\sin\varphi - v_{Ay}\cos\varphi}{\omega},$$

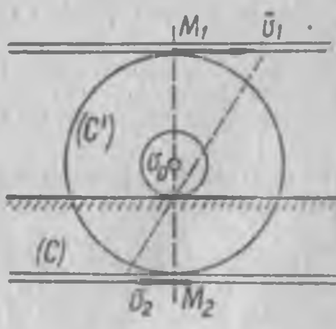
$$y_p = \frac{v_{Ax}\cos\varphi + v_{Ay}\sin\varphi}{\omega}. \qquad (111.\ 5)$$

**71- масала.** Икки параллел рейка қарама-қарши томонларга $v_1$ ва $v_2$ тезликлар билан ҳаракатланади (265- шакл). Рейкалар орасидаги радиуси $a$ га тенг диск ишқаланиши натижасида уларга нисбатан сирпанмасдан юмалайди. Рейкалар билан дискнинг тегишиб турган нуқталари $M_1$ ва $M_2$ нинг тезлиги ҳам тегишлича $v_1$ ва $v_2$ бўлади.

Дискнинг бурчак тезлиги $\omega$, марказнинг тезлиги $v_0$ ва поллодиялар аниқлансин.

Ечиш. $O$ ни асосий нуқта учун қабул қилиб, $v_1$ ва $v_2$ ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{v}_{OM_1}, \qquad (a)$$
$$\bar{v}_2 = \bar{v}_0 + \bar{v}_{OM_2}.$$



265- шакл.

Агар $v_1 < v_2$ бўлса, диск соат стрелкаси айланиши бўйича айланади. (а) тенгламанинг $v_1$ йўналишидаги проекциясини оламиз:

$$v_1 = v_0 + a\,\omega,$$
$$v_2 = v_0 - a\,\omega. \qquad (б)$$

Бу тенгламалардан:

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2a}.$$

$v_1 = v_2$ бўлса, дискнинг маркази қўзғалмайди.

Бу масалани оний марказни топиш йўли билан чиқариш ҳам мумкин. (105.1) га биноан:

$$\frac{v_1}{PM_1} = \frac{v_2}{PM_2} = \omega,$$

$$PM_1 + PM_2 = 2a.$$

Ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{v_1 + v_2}{v_2} = \frac{PM_1 + PM_2}{PM_2} = \frac{2a}{PM_2}.$$

Бу тенгламалардан:

$$PM_2 = \frac{2av_2}{v_1 + v_2},$$

$$OP = a - PM_2 = a\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}. \qquad (c)$$

Диск марказининг тезлиги:

$$v_0 = \omega \cdot OP = \frac{v_1 + v_2}{2a} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a = \frac{v_1 - v_2}{2a}.$$

Шундай қилиб, яна юқорида чиқарилган натижага келдик.

Оний марказ $P$ диск марказидан ўзгармас масофада туради. Демак, оний марказларнинг геометрик йиғиндиси қўзғалмас текисликда диск марказидан $OP$ масофадаги тўғри чизиқ бўлиб, қўзғалувчи текисликда эса $OP$ радиусли айлана бўлади. (111. 4) ва (111. 5) дан фойдаланиб, буни аналитик равишда исботлаш қийин эмас.

Агар диск ўқига радиуси $r = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a$ бўлган концентрик ўрнатиб, унинг марказига $v_0$ тезлик берилса, дискнинг $M_1$ ва $M_2$ нуқталарига тегиб турган рейкалар қарама-қарши йўналган $v_1$ ва $v_2$ тезликлар билан ҳаракатланади. Кинематика нуқтаи назаридан бу ҳаракат юқоридаги икки рейка орасидаги диск ҳаракати билан эквивалент ҳисобланади.

## 112- §. Текис ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши. Тезланиш маркази

Текис ҳаракатдаги жисмнинг бирор нуқтасининг тезланишини топиш учун, бу нуқта тезлиги векторидан вақтга нисбатан ҳосила оламиз. (110. 2) ва (110. 3) га мувофиқ:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + [\bar{\omega}\,\bar{r}_{AB}].$$

Бундан ҳосила олсак:

$$\bar{w}_B = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt}\,\bar{r}_{AB}\right] + \left[\bar{\omega}\,\frac{d\bar{r}_{AB}}{dt}\right]$$

келиб чиқади.

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ҳадларнинг ҳар қайсисини алоҳида текширамиз. 1- қисм $\bar{w}_A = \frac{d\bar{v}_A}{dt}$ — асосий нуқтанинг тезланиши, 2- қисм $[\bar{\varepsilon}\,\bar{r}_{AB}] = \bar{w}_{AB}^{(\tau)}$ — асосий нуқта атрофидаги айланма ҳаракат тезланиши. Бунда $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ —бурчак тезланишининг вектори.

Бу айланма тезланиш вектори $\overline{w}_{AB}^{(\tau)} \perp \bar{r}_{AB}$, ҳаракат тезланувчи бўлса, $\bar{v}_{AB}$ билан бир йўналишда, сусаючи бўлса, қарама-қарши йўналишда бўлади. $\overline{w}_{AB}^{(\tau)}$ нинг катталиги:

$$w_{AB}^{(\tau)} = \varepsilon r_{AB} \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r}_{AB}) = \varepsilon r_{AB}.$$

3- қисми асосий нуқтага қараб йўналган марказга интилувчи тезланишдир:

$$\overline{w}_{AB}^{(n)} = \left[\bar{\omega}\ \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt}\right] = [\bar{\omega}\bar{v}_{AB}] = \left[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{r}_{AB}]\right].$$

Бу тенгликнинг ўнг томони икки қайтали вектор купайтма булгани учун:

$$\overline{w}_{AB}^{(n)} = \bar{\omega}(\bar{\omega}\bar{r}_{AB}) - \bar{r}_{AB}(\bar{\omega}\bar{\omega})$$

бўлади.

$\bar{\omega} \perp \bar{r}_{AB}$ бўлганидан:

$$(\bar{\omega}\bar{r}_{AB}) = 0 \text{ ва } (\bar{\omega}\bar{\omega}) = \omega^2.$$

Шунга кўра:

$$\overline{w}_{AB}^{(n)} = -\omega^2 \bar{r}_{AB}.$$

Марказга интилувчи тезланиш—текширилаётган $B$ нуқтадан асосий $A$ нуқтага қараб йўналган ва унинг катталиги $\omega^2 r_{AB}$ га тенг.

Шундай қилиб, текис ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши учун:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{AB}^{(\tau)} + \overline{w}_{AB}^{(n)} = \overline{w}_A + [\bar{\varepsilon}\bar{r}_{AB}] - \omega^2 \bar{r}_{AB} \qquad (112.\ 1)$$

формулани оламиз.

Демак, текис ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши бутун жисмнинг асосий нуқта тезланишига тенг бўлган илгарилама ҳаракат тезланиши, асосий нуқта атрофида айланма тезланиши ва асосий нуқтага қараб йўналган марказга интилувчи тезланиши векторларнинг йиғиндисига тенг бўлар экан. $\overline{w}_{AB}^{(\tau)}$ билан $\overline{w}_{AB}^{(n)}$ ўзаро тик бўлгани учун уларнинг йиғиндиси:

$$w_{AB} = r_{AB}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (112.\ 2)$$

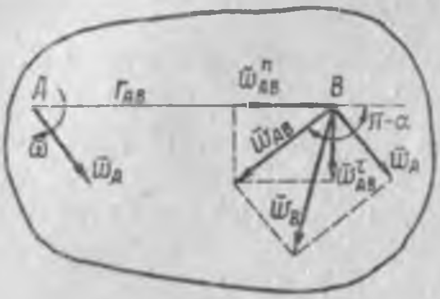
булади.

$\overline{w}_{AB}$ билан $\overline{r}_{AB}$ орасидаги катта бурчакни $\pi - \alpha$ десак (266- шакл):

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right| \qquad (112.\ 3)$$

бўлади.

Бу ерда шуни эслатиб ўтиш керакки, $\alpha$ бурчак жисмнинг ҳамма нуқталари учун ҳам бир хил бўлади.




266- шакл.

Энди, текис ҳаракатдаги нуқта тезланишининг координата ўқларидаги проекцияларини оламиз.

Тезланиш вектори $\overline{w}_B$ нинг проекцияларини $w_x$, $w_y$, шунингдек, $\overline{w}_A$ нинг проекцияларини $w_{Ax} = \ddot{x}_A$, $w_{Ay} = \ddot{y}_A$деймиз. $B$ нуқтанинг координаталарини $x$, $y$; $A$ нинг координаталарини $x_A$, $y_A$ деймиз. Бу ҳолда (112. 1) формула проекция орқали қуйидагича ёзилади:

$$\overline{w}_B = w_x\overline{i} + w_y\overline{j} = w_{Ax}\overline{i} + w_{Ay}\overline{j} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x - x_A & y - y_A & 0 \end{vmatrix} -$$

$$- \omega^2\left[(x - x_A)\overline{i} + (y - y_A)\overline{j}\right].$$

Бу айниятдан $\overline{i}$, $\overline{j}$ олдидаги коэффициентларни солиштириб, $w_x$, $w_y$ учун бундай формулаларни оламиз:

$$\begin{aligned} w_x &= \ddot{x}_A - \ddot{\varphi}(y - y_A) - \dot{\varphi}^2(x - x_A), \\ w_y &= \ddot{y}_A + \ddot{\varphi}(x - x_A) - \dot{\varphi}^2(y - y_A). \end{aligned} \qquad (112.\ 4)$$

Вақтнинг функцияси бўлган асосий нуқтанинг $x_A$, $y_A$ координаталари ва $\varphi$ айланиш бурчаги жисмнинг текис ҳаракатини аниқлагани учун, (112. 4) нинг ўнг томонидаги катталикни ҳисоблаш мумкин.

Текис ҳаракатдаги жисмда ҳар он учун шундай бир нуқта топиладики, унинг тезланиши шу онда нулга тенг бўлади. Бундай нуқта **тезланиш маркази** дейилади.

Ҳақиқатан ҳам шундай нуқтанинг борлигини кўрсатиш учун, асосий $A$ нуқтадан $w_A$ билан $\alpha$ бурчак тузувчи $AL$

чизиқни ўтказамиз (267- шакл). $AL$ чизиқ устидаги нуқталарнинг тезланиши $w_A$ билан айланма тезланишнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Масалан, бирор $D$ нуқтанинг тезланиши:

$$w_D = w_{AD} - w_A \tag{112.5}$$

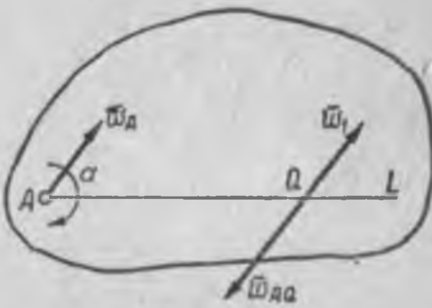
булади.

Бу чизиқ устида айланма тезланиш катталик жиҳатдан $w_A$ га тенг бўлган бирор $Q$ нуқтани топиш мумкин. Бу нуқтанинг $w_A$ абсолют тезланиши, (112. 5) га мувофиқ, нулга тенг бўлади, яъни:

$$w_Q = w_{AQ} - w_A = 0. \tag{112.6}$$

(112. 2) ва (112. 6) га мувофиқ:

$$w_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$



267- шакл.

Бундан $A$ га нисбатан $Q$ нуқтанинг ҳолатини аниқлаймиз:

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{112.7}$$

$Q$ нуқтанинг шу ондаги тезланиши нулга тенг бўлгани учун, мазкур нуқта, таърифга мувофиқ, тезланиш маркази булади.

Тезланиш маркази маълум бўлса, текис ҳаракатдаги жисм нуқталари тезланишларини аниқлаш жуда ҳам осонлашади. Асосий нуқта учун $A$ ни олмай, тезланиш маркази бўлган $Q$ ни олсак, $w_Q = 0$ бўлиб, (112.1) қуйидагича ёзилади:

$$\bar{w}_B = \bar{w}_{QB}^{(\tau)} + \bar{w}_{QB}^{(n)} = [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}_{QB}] - \omega^2 \bar{r}_{QB}. \tag{112.8}$$

Бу формуланинг биринчи қисми $w_{QB}^{(\tau)}$—айланма тезланиш булиб, $\overline{QB}$ радиус-векторга тик ва жисм айланган томонга қараб йўналган. Иккинчи қисми $w_{QB}^{(n)}$ эса марказга интилувчи тезланиш бўлиб, у $Q$ дан $\overline{BQ}$ радиус-вектор бўйлаб $B$ га қараб йўналган. LB

LQ

Айланма ва марказга интилувчи тезланишларнинг абсолют қийматлари:

LB

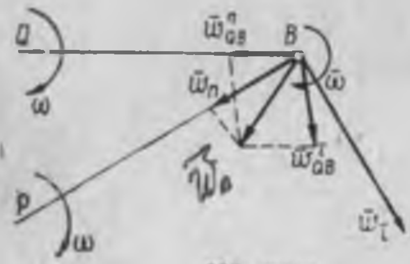
$$w_{QB}^{(\tau)} = \varepsilon r_{QB},$$
$$w_{QB}^{(n)} = \omega^2 r_{QB} \tag{112.9}$$

бўлади.

$B$ нуқта тўла тезланишининг абсолют қиймати:

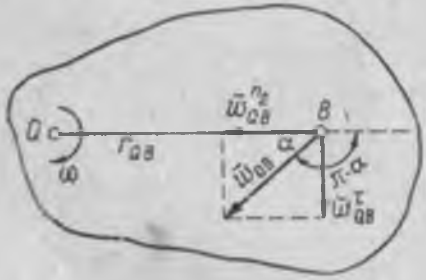
$$w_B = r_{QB}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (112.10)$$

Бундан кўрамизки, ҳар онда ҳар қандай $B$ нуқтанинг тўла тезланишининг қиймати нуқта билан тезланиш марказининг оралигига пропорционал бўлар экан.




268- шакл.

Бу ерда $B$ нуқта ихтиёрий олинди. Шунинг учун ҳам унинг тезланиши билан тезланиш марказини туташтирувчи радиус-векторининг тузган бурчаги жисмнинг ҳамма нуқталари учун бир хилда бўлади (268- шакл).




269- шакл.

Бу ерда айланма тезланиш билан тангенциал тезланишнинг, шунингдек, марказга интилувчи тезланиш билан нормал тезланишнинг фарқига бориш керак.

$w_\tau$ тенгенциал тезланиш нуқта траекториясининг уринмаси буйлаб, $w_n$ нормал тезланиш эса бош нормал буйлаб йўналган. Бошқача айтганда, тангенциал тезланиш нуқтанинг оний маркази билан туташтирувчи $r_{PB}$ радиус-векторга тик, $w_n$ нормал тезланиш эса радиус-вектор буйлаб, $P$ оний марказга қараб йўналган (269- шакл).

Тезланиш марказининг координаталарини топамиз. Бунинг учун, (112. 4) даги $B$ нуқтанинг $x, y$ координаталари ўрнига $Q$ нинг $x_Q$, $y_Q$ координаталарини қўямиз. У ҳолда: $w_x = w_y = 0$ бўлади. Шунга кўра:

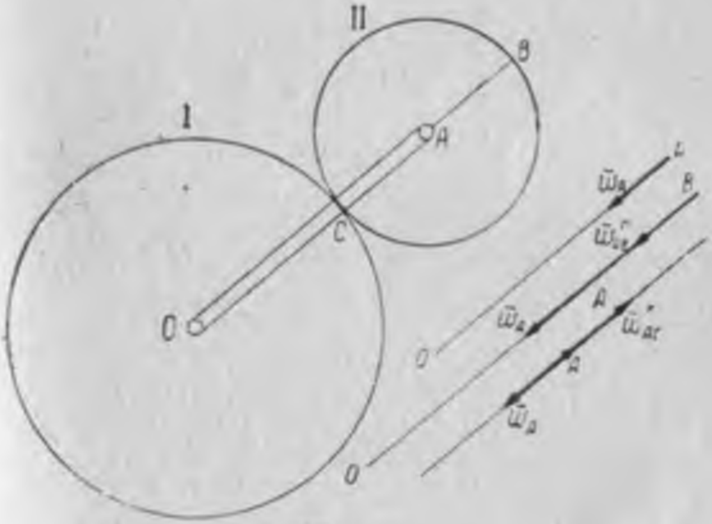
$$x_Q = x_A + \frac{\omega^2 w_{Ax} - \varepsilon w_{Ax}}{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

$$y_Q = y_A + \frac{\omega^2 w_{Ay} + \varepsilon w_{Ay}}{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (112.11)$$

**72- масала.** Тўғри чизиқли рельсда сирпанмасдан юмалаётган, радиуси $a$ га тенг ғилдирак марказининг тезлиги $v_0$. Ғилдирак айланасидаги нуқтанинг тезланиши топилсин.

Ечиш. Ғилдирак марказининг тезланиши $w_0 = 0$ бўлгани учун, тезланиш маркази мазкур нуқтада бўлади. Оний бурчак тезлиги $\omega = \frac{v_0}{a} = \text{const}$ бўлганидан, оний бурчак тезланиши $\varepsilon = 0$ бўлади. Шунинг учун, ғилдирак айланаси ҳар қандай нуқтасининг тезланиши $w = \omega^2 a = \frac{v_0^2}{a}$ бўлиб, ғилдирак марказига қараб йўналган.

**73- масала.** Доимий бурчак тезлиги билан айланувчи $OA$ кривошипнинг $A$ бармоғига радиуси $r_2$ бўлган тишли II ғилдирак ўрнаштирилган. Кривошип айланганда II ғилдирак радиуси $r_1$ ва маркази $O$ да қўзғалмас тишли I ғилдирак устида юмалайди. Тишли II ғилдиракнинг $B$ ва $C$ нуқталари тезланиши ва бу ғилдиракнинг тезланиш маркази топилсин (270-шакл).




270- шакл.

Ечиш. Аввало, II ғилдиракнинг $\omega_2$ бурчак тезлигини топамиз. $C$ нуқта оний айланиш маркази бўлгани учун:

$$\omega_2 AC = OA\,\omega$$

бўлади. Бундан:

$$\omega_2 = \frac{OA}{CA}\omega = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega.$$

$\omega = \text{const}$ бўлганидан $\varepsilon = 0$ бўлади.

Асосий нуқта қилиб $A$ ни оламиз. Бунинг тезланиши катталик жиҳатидан $w_A = \omega^2 (r_1 + r_2)$ бўлиб, $A$ дан $O$ га қараб йўналган.

Энди, $B$ нуқтанинг тезланишини топамиз. Бу нуқтанинг $A$ га нисбатан айланма тезланиши:

$$w_{AB}^{(n)} = 0$$

бўлади. Марказга интилувчи тезланиши эса:

$$w_{AB}^{(n)} = \omega_2^2 r^2 = \frac{(r_1+r_2)^2}{r_2^2}\,\omega^2 r_2 = \frac{(r_1+r_2)^2}{r_2}\,\omega^2.$$

Бу тезланиш $B$ дан $A$ га йўналган, яъни $w_A$ билан бир йўналишдадир. Демак, $B$ нуқтанинг тўла тезланиши:

$$w_B = \omega^2(r_1+r_2) + \omega^2\,\frac{(r_1+r_2)^2}{r_2} = \frac{(r_1+r_2)(r_1+2r_2)}{r_2}\,\omega^2.$$

$C$ нуқтанинг тезланиши:

$$w_C = \frac{(r_1+r_2)^2}{r_2}\,\omega^2 - (r_1+r_2)\,\omega^2 = \frac{r_1(r_1+r_2)}{r_2}\,\omega^2$$

бўлар экан.

Тезланиш марказини қуйидаги шартдан топамиз:

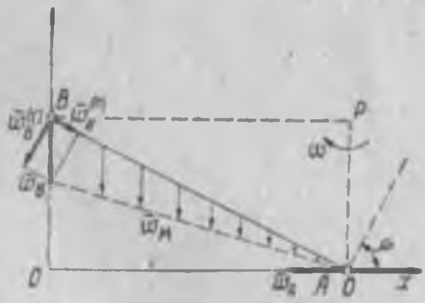
$$w_{AC}^{(n)} = w_A$$

ёки:

$$\omega^2\left(\frac{r_1+r_2}{r_2}\right)^2 r_Q = \omega^2(r_1+r_2).$$

Бундан:

$$r_Q = \frac{r_2^2}{r_1+r_2}.$$




271- шакл.

**74- масала.** Эллипсограф линейкаси ихтиёрий нуқтасининг тезланиши топилсин (271-шакл).

Ечиш. $A$ нуқтанинг ҳаракати тенг ўлчовли ва тўғри чизиқли бўлгани учун, бу нуқта тезланиш маркази булади. Бурчак тезлиги:

$$\omega = \frac{v_A}{l\sin\varphi}.$$

$B$ нуқтанинг марказга интилувчи тезланиши:

$$w_B^{(n)} = l\,\omega^2 = \frac{v_A^2}{l\sin^2\varphi}.$$

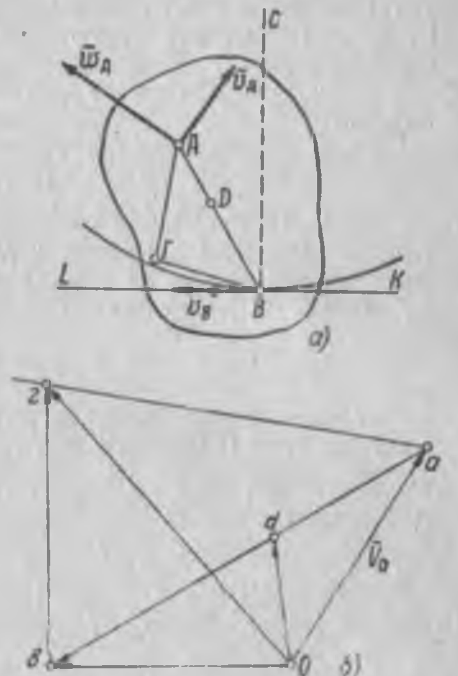
Тўла тезланиш:

$$w_B = \frac{w_B^{(n)}}{\cos\varphi} = \frac{v_A^2}{l}\cdot\frac{1}{\cos\varphi\sin^2\varphi}.$$

## 113- §. Текис ҳаракатдаги жисмларнинг тезлик ва тезланиш плани

Текис ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезлик ва тезланишларини аниқлаш учун чиқарилган формулалардан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечамиз. Маълум вақтда текис ҳаракатдаги жисмнинг бирор $A$ нуқтасининг тезлиги $\bar{v}_A$ ва тезланиши $\bar{w}_A$ бўлсин. Бошқа бир $B$ нуқтаси тезлигининг йўналиши $LK$ маълум бўлсин (272- шакл, $a$). Ана шу берилганлардан фойдаланиб, шу вақт учун текис ҳаракатдаги жисмнинг ҳар қандай бошқа нуқтасининг, шунингдек, $B$ нуқтанинг тезлик ва тезланиши график усулда аниқлансин.

Олдин, масаланинг биринчи қисмини ечамиз, яъни текис ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезлигини график усулда аниқлаймиз. Бунинг учун, қуйидаги геометрик ясаш тадбирини кўрамиз (272- шакл, $б$). Ҳаракат текислигидан бирор $O$ нуқтани олиб, уни қутб $C$ деймиз. Бу $O$ қутбдан $\overline{Oa} = \bar{v}_A$ векторини қўямиз. Бу векторнинг боши $O$ дан $LK$ га параллел чизиқ ўтказамиз, яъни $B$ нуқта тезлигининг йўналишини ўтказамиз. $\bar{v}_B$ тезликнинг миқдори маълум бўлса эди, $LK$ чизиғида бу тезликни тасвирловчи $\overline{Ob}$ векторининг учи $b$ аниқ бўлар эди. $b$ нинг $LK$ даги ҳолатини аниқлаш учун (110. 2) формуладан фойдаланамиз:




272- шакл.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}.$$

Ҳалиги $b$ нуқта $\bar{v}_{AB}$ тезликни ҳам аниқлаши керак. Аммо, $v_{AB} \perp AB$ бўлганидан, бу тезликнинг йўналиши маълум. Шунинг учун $\overline{Oa}$ векторининг учи $a$ дан $AB$ га тик чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқнинг $O$ нуқтадан $LK$ га параллел қилиб ўтказилган чизиқ билан кесишган нуқтаси $b$ ни беради. 272- шакл, $б$ дан:

$$\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab} \qquad (113.\ 1)$$

муносабатини оламиз. Бунда $\overline{Oa} = \bar{v}_A$ бўлиб, $Ob \parallel \bar{v}_B$ ва $\overline{ab} \parallel \bar{v}_{AB}$ бўлганидан, $\overline{Ob} = \bar{v}_B$ ва $\overline{ab} = \bar{v}_{AB}$ бўлиши керак, чунки вектор маълум йўналишлар бўйича ажратилганда, уларнинг тузувчилари ягона бўлиши керак. Текис шаклдаги жисмнинг бу ондаги бурчак тезлиги қуйидаги муносабатдан аниқланади:

$$v_{AB} = AB\,\omega,$$

бундан:

$$\omega = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{ab}{AB}. \tag{113. 2}$$

Энди, $AB$ кесмасида олинган бирор $D$ нуқтанинг тезлигини топамиз. $AB$ да олинган $D$ нуқта уни қандай нисбатда икки қисмга бўлса, $ab$ кесмадаги $D$ нуқтага тегишли $d$ нуқта ҳам $ab$ ни худди шундай нисбатда бўлади. Шунинг учун:

$$\frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB}. \tag{113. 3}$$

Бу шартдан фойдаланиб, $ab$ даги $d$ ни аниқлаймиз. Бу нуқтани қутб $O$ билан туташтириб, $v_D$ тезликни тасвирловчи $\overline{Od}$ векторини оламиз. У векторни шаклдан қуйидагича ифодалашимиз мумкин:

$$\overline{Od} = \overline{Oa} + \overline{ad}.$$

$\overline{ad}$ вектор $AD$ кесмага тик бўлиб, $D$ нуқтанинг $A$ га нисбатан айлана тезлиги $v_{AD}$ га тенгдир. Ҳақиқатан ҳам:

$$ad = \frac{AD}{AB}\,ab = \frac{ab}{AB}\,AD = AD\cdot\omega,$$

шунинг учун, $\overline{ad} = \bar{v}_{AD}$ бўлади. Бунга кўра:

$$\overline{Od} = \bar{v}_A + \bar{v}_{AD}.$$

демак:

$$\overline{Od} = \bar{v}_D.$$

Энди текис ҳаракатдаги жисмнинг бирор $Г$ нуқтасининг тезлигини тасвирловчи векторни ясаймиз (272- шакл, *а* ва *б* лар). Бу нуқта тезлигининг миқдори ва йўналиши номаълум бўлганидан, у векторни аниқлаш учун, иккита тенглама тузишга тўғри келади. Шунинг учун, нуқтанинг тезлигини $A$ ва $B$ нуқталар тезликлари орқали ифодалаймиз:

$$\bar{v}_Г = \bar{v}_A + \bar{v}_{AГ}, \tag{113. 4}$$

$$\bar{v}_Г = \bar{v}_B + \bar{v}_{BГ}. \tag{113. 5}$$

$\overline{v}_{AГ} \perp AГ$ ва $\overline{v}_{BГ} \perp BГ$ булганидан, $a$ нуқтадан $AГ$ га, $b$ нуқтадан $BГ$ га тик чизиқлар ўтказамиз. Улар кесишган нуқта $г$ ни аниқлаймиз ва уни қутб $O$ билан туташтириб $\overline{Oг}$ векторни оламиз. Бу векторнинг $\overline{v}_{Г}$ ни ифодалаши $Oaг$ ёки $Obг$ вектор учбурчакларидан кўриниб турибди. Текис ҳаракатдаги жисмнинг $A$, $B$, $D$, $Г$ нуқталарининг тезлигини тасвирлаш учун ясалган шакл **тезлик плани** деб аталади. Текис ҳаракатдаги жисм нуқталари $A$, $B$,... тезликларининг учи тезлик планида шу ҳарфларнинг кичиги $a$, $b$,... орқали белгиланади. Масалан:

$$\overline{v}_A = \overline{Oa},\ \overline{v}_B = \overline{Ob},\ \overline{v}_D = \overline{Od},\ \overline{v}_Г = \overline{Oг}.$$

Тезлиги аниқланаётган нуқталарни туташтиришдан ҳосил булган шакл билан тезлик планини (масалан, биз текшираётган ҳолда $\triangle ABГ$ билан $\triangle abг$ ни) солиштириб, қуйидаги хулосага келамиз. Тезлик планида кичик ҳарфлар билан белгиланган кесмалар жисмда бу нуқталарга тегишли катта ҳарфлар билан белгиланган кесмаларга тик йуналиб, мазкур катта ҳарфларни туташтиришдан ҳосил булган шакл тегишли кичик ҳарфларни туташтиришдан ҳосил бўлган шаклга нисбатан 90° га бурилган ўзаро ўхшаш шаклларни ҳосил қилади. Айланиш йўналишини айрилмаган.

Энди тезланиш планини қуришга ўтамиз. Текис ҳаракатдаги жисмнинг ҳар қандай нуқтасининг, жумладан, $B$ нуқтасининг тезланиши, (112. 1) га мувофиқ, қуйидагича ёзилиши бизга маълум:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}^{(n)}_{AB} + \overline{w}^{(\tau)}_{AB}.$$

Бу тенгликда $\overline{w}_A$ ниниг миқдори ва йуналиши берилган.

$w^{(n)}_{AB}$ нинг йуналиши маълум, у $B$ дан $A$ га томон йуналган, миқдори эса:

$$w^{(n)}_{AB} = AB\,\omega^2 = \frac{(ab)^2}{AB}. \qquad (113.\ 6)$$

Шунингдек, $w^{(\tau)}_{AB}$ нинг йўналиши ҳам маълум, у $AB$ га тик йуналган. $w_B$ нинг миқдор ва йўналишини, $w^{(\tau)}_{AB}$ нинг миқдорини аниқлаш учун, ҳаракат текислигида бирор $O_1$ нуқтани олиб, бу нуқтага $\overline{O_1a_1} = \overline{w}_A$ векторини қўямиз (272-шакл, *в*). Бу векторнинг учи $a_1$ дан $\overline{a_1n_1} = \overline{w}^{(n)}_{AB}$ векторини қўямиз. $n_1$ нуқтадан $w^{(\tau)}_{AB}$ га параллел, $AB$ га тик чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ устида $w^{(\tau)}_{AB}$ ни тасвирловчи векторнинг учи $b_1$ ётади. Унинг ҳолатини аниқлаш учун $\overline{w}_B$ тезланишини нормал ва тангенциал тузувчиларга ажратамиз, $\overline{w}_B$ ни $\overline{w}_B = \overline{w}_B^{(n)} + \overline{w}_B^{(\tau)}$ кўринишда ёзамиз. Бу вектор йиғиндининг биринчи қўшилувчиси маълум, у:

$$\overline{w}_B^{(n)} = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(ab)^2}{BC}$$

дир.

*B* нуқта траекториясининг эгрилик маркази *C* маълум бўлсин. У ҳолда, *BC* маълум сон бўлиб, $\overline{w}_B^{(n)}$ шу чизиқ бўйлаб, *C* га томон йўналган. $\overline{ab}$ нинг қиймати тезлик планидан олинади. $w_B^{(\tau)}$ эса *BC* га тик йўналишда бўлиши бизга маълум. Энди, қутб $O_1$ дан $\overline{w}_B^{(n)}$ ни тасвирловчи $\overline{O_1m_1}$ векторини қўямиз. $m_1$ нуқтадан *BC* га тик ёки $w_B$ га параллел чизиқ ўтказиб, бу чизиқ билан ҳалиги $a_1n_1$ га тик қилиб ўтказилган чизиқнинг кесишган нуқтаси $b_1$ ни аниқлаймиз. Бу $b_1$ нуқтани қутб $O_1$ билан туташтириб, $O_1b_1 = w_B$ ни оламиз. Ясалиш бўйича:

$$\overline{O_1b_1} = \overline{O_1a_1} + \overline{a_1n_1} + \overline{n_1b_1},$$

вектор йиғиндиси:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + w_{AB}^{(n)} + w_{AB}^{(\tau)}$$

га мос келади.

Бошқа томондан: $\overline{O_1b_1} = \overline{O_1m_1} + \overline{m_1b_1}$ эса $\overline{w}_B = w_B^{(n)} + \overline{w}_B^{(\tau)}$ га мос келади. Ясалган шаклдан текис ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезланишини аниқлаймиз:

$$\varepsilon = \frac{w_{AB}^{(n)}}{AB} = \frac{n_1b_1}{AB} \qquad (113.\ 7)$$

*B* нуқтанинг *A* га нисбатан тўла айлана тезланиши:

$$\overline{w}_{AB} = \overline{w}_{AB}^{(n)} + \overline{w}_{AB}^{(\tau)} = \overline{a_1n_1} + \overline{n_1b_1} = \overline{a_1b_1},$$

ундан ташқари, $\overline{w}_{AB}$ нинг абсолют қиймати:

$$w_{AB} = a_1b_1 = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

бундан:

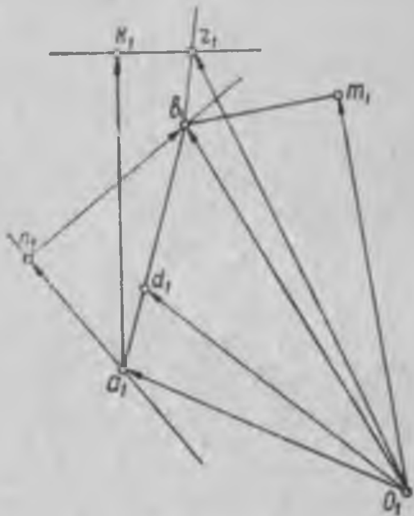
$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a_1b_1}{AB}. \qquad (113.\ 8)$$

272- шакл, *в* дан:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1n_1}{n_1b_1} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

$\overline{a_1b_1}$ векторнинг йўналиши $AB$ йўналиши билан $180° - \alpha$ бурчак ҳосил қилаётир. $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} > 0$ деб фараз қиламиз.

Энди, $AB$ кесмадаги бирор $D$ нуқта тезланишини аниқлаш лозим бўлсин. $D$ нуқта $AB$ кесмани қандай нисбатда бўлса, $d_1$ ҳам $\overline{a_1b_1}$ ни худди шундай нисбатда булиши керак. Шунинг учун: $\frac{a_1d_1}{a_1b_1} = \frac{AD}{AB}$, бу муносабатдан $d_1$ нинг ҳолатини аниқлаймиз. Буни $O_1$ билан туташтириб, $\overline{O_1d_1} = \overline{w}_D$ векторни оламиз.



272 *в*- шакл.

Энди, текис ҳаракатдаги жисмнинг қандайдир нуқтасининг тезланишини аниқловчи векторни ясаймиз. Яна илгаригидек, бу нуқтанинг тезланишини $A$ ва $B$ нуқталарнинг тезланиши орқали ифодалаймиз:

$$\overline{w}_\Gamma = \overline{w}_A + \overline{w}^{(n)}_{A\Gamma} + \overline{w}^{(\tau)}_{A\Gamma}, \quad (113.9)$$

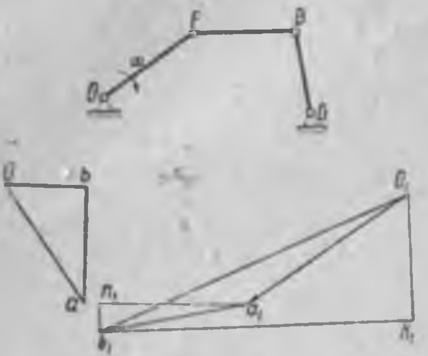
$$\overline{w}_\Gamma = \overline{w}_B + \overline{w}^{(n)}_{B\Gamma} + \overline{w}^{(\tau)}_{B\Gamma} \quad (113.10)$$

$\overline{w}^{(n)}_{A\Gamma}$ $A$ дан $\Gamma$ га томон йўналган, унинг катталиги эса:

$$w^{(n)}_{A\Gamma} = A\Gamma\,\omega^2 = \frac{v_\Gamma^2}{A\Gamma}.$$

272 *в*- шаклдаги $a_1$ нуқтадан $\overline{a_1k_1} = \overline{w}^{(n)}_{\Gamma A}$ векторни қўямиз. $k_1$ нуқтадан $w^{(\tau)}_{A\Gamma}$ га параллел, яъни $A\Gamma$ га тик чизиқ утказамиз. Бу чизиқнинг ҳалиги $z_1$ дан $A\Gamma$ га тик қилиб утказилган чизиқ билан кесишган нуқтаси $s_1$ ни беради. Аниқланган бу $z_1$ нуқтани қутб $O_1$ билан туташтириб $\overline{w}_\Gamma = O_1z$ тезланишни аниқлаймиз. Текис ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезланишини тасвирловчи бу 272 *в*- шакл, **т е з л а н и ш п л а н и** деб аталади. Тезланиши аниқланаётган $A$, $B$, $D$, ... нуқталар тезланиш планида $a_1$, $b_1$, $d_1$, ... нуқталарга мос келади. Тезланиш планидаги $a$, $b$, $z$ шакл текис ҳаракатдаги жисмнинг $A$, $B$, $\Gamma$ нуқталарини туташтиришдан ҳосил бўлган шаклга ўхшаш булиб, унга нисбатан $\pi - \alpha$ бурчакка бурилган.

**75- масала.** 273- шаклда икки кривошипли тўрт звеноли механизм берилган. $OF$ кривошип тенг ўлчовли айланма ҳаракат қилади. Минутига айланиш сони $n$ бўлсин. Механизмнинг шаклда тасвирланган ҳолати учун, тезлик ва тезланиш плани қурилсин.



273- шакл.

Ечиш. Кривошип $OF$ нинг бурчак тезлиги $\omega = \frac{\pi n}{30}$ бўлади. $F$ нуқтанинг тезлиги $OF$ га тик бўлиб, $v_F = OF \cdot \omega$ дир. Қутб $O$ ни танлаб, ундан $v_F$ тезликни тасвирловчи $\overline{Oa}$ векторни қуямиз. Коромисло $FB$ нинг $B$ нуқтаси тезлигини аниқлаш учун, $a$ дан $FB$ га тик чизиқ ўтказамиз, бу чизиқда $b$ нуқта ётиши керак, аммо унинг ҳолати ҳозирча номаълум. $B$ нуқтанинг тезлиги $O_1B$ га тик йўналганлиги, $O$ дан $O_1B$ га тик чизиқ ўтказиб, $b$ нинг ҳолатини аниқлаймиз. Бу ерда $\overline{Ob} = \bar{v}_B$ бўлади (273- шакл).

Тезланиш планини қурамиз. $\omega$ = const бўлганидан $F$ нуқтанинг тезланиши фақат марказга интилувчи бўлиб, $F$ дан $O$ га томон йўналган, унинг катталиги: $w_F = OF \cdot \omega^2$ дир. Қутб $O_1$ ни танлаб, $O_1a_1 = w_F$ ни қуямиз. $a_1$ дан $\overline{a_1n_1} = w^{(n)}_{FB} = \frac{(ab)^2}{FB}$ векторини қуямиз; бу вектор $B$ дан $F$ га томон йўналган. Энди, $n_1$ дан $FB$ га тик чизиқ ўтказамиз; бу чизиқда $b_1$ ётади, аммо унинг ҳолати аниқ эмас. Шунинг учун, олдин $w^{(n)}_B$ ни аниқлаймиз, у

$$w^{(n)}_B = \frac{v_B^2}{O_1B} = \frac{(Ob)^2}{O_1B};$$

$O_1$ дан бу тезланишни тасвирловчи $O_1k_1$ векторини қуямиз. $\bar{w}^{(\tau)}_B$ тезланиш $O_1B$ га тик йўналганидан, $k_1$ дан $O_1B$ га тик чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқнинг ҳалиги $n_1$ дан ўтказилган чизиқ билан кесишган нуқтаси $b_1$ ни беради. $b_1$ ни $O_1$ билан туташтириб, $\bar{w}_B$ тезланишни тасвирловчи $\overline{O_1b_1} = \bar{w}_B$ векторини оламиз.

# XVIII БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗГАЛМАС НУҚТА АТРОФИДАГИ ҲАРАКАТИ

Масалан, жисмнинг битта қўзғалмас нуқтаси бўлиб, жисм шу нуқта атрофида ҳар қандай ҳаракат қила олади, дейлик. Бундай жисмнинг ҳолатини бир чизиқда ётмайдиган учта нуқта билан аниқлаш мумкин. Бу нуқталардан бирини жисмнинг қўзғалмас нуқтаси деб олсак, бизнинг ихтиёримизда иккита нуқта қолади. Икки нуқтани, маркази қўзғалмас нуқтада бўлган ва ихтиёрий радиусли сфера устида олиш қулайроқ.

Фараз қилайлик, бу икки нуқта сфера устида олинган бўлсин. Ушбу нуқталар орқали сферанинг катта айланасини ўтказамиз. У ҳолда бу нуқталар катта айлана ёйи билан туташтирилган бўлади. Жисмнинг ҳаракатида ҳамма вақт бу ёй сферанинг катта айланасининг ёйи бўлиб қолаверади.

Шундай қилиб, қўзғалмас нуқтаси бўлган қаттиқ жисмнинг ҳолатини ушбу ёй ҳолати билан характерлаб, унинг ҳаракатини сфера устидаги ёй ҳаракатини текширишга келтирдик.

## 114- §. Даламбер-Эйлер теоремаси

Теорема. *Қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмни бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга шу нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида бир айлантириш билан келтириш мумкин.*

Теореманинг исботи. Жисмнинг бир ҳолати $\overset{\frown}{AB}$ ёйи билан, бошқа ҳолати $\overset{\frown}{A_1B_1}$ билан аниқлансин (274- шакл). $A$ нуқтани $A_1$ билан, $B$ нуқтани $B_1$ билан катта айлана ёйлари орқали туташтириб, $\overset{\frown}{AA_1}$ ва $\overset{\frown}{BB_1}$ ёйларининг ўртасини $E$ ва $F$ билан белгилаймиз. Бу нуқталардан $\overset{\frown}{AA_1}$ ва $\overset{\frown}{BB_1}$ ёйларига тик ёйлар ўтказиб, уларнинг кесишган нуқтасини $C$ деймиз.

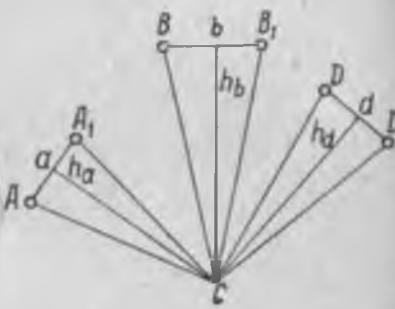
Бу $C$ нуқтани катта айлана ёйлари орқали $A$, $A_1$, $B$ ва $B_1$ нуқталар билан туташтирамиз. Натижада $CAB$ ва $CA_1B_1$ тенг сферик учбурчаклар ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан ҳам:

$$\breve{AC} = \breve{A_1C},$$
$$\breve{BC} = \breve{B_1C}.$$

Бундан ташқари, қаттиқ жисм қўзғалганда унинг икки нуқтасининг оралиги ўзгармаганидан $\breve{AB} = \breve{A_1B_1}$ бўлади. Сфе-


274- шакл.




275- шакл.

рик учбурчак $ACB$ ни $C$ қутб ёки $OC$ ўқ атрофида $\angle BCB_1 = \varphi$ бурчакка бурсак, $\breve{CB}$ ёйи $\breve{CB_1}$ ёйи ҳолатини эгаллайди. $\triangle CAB$ эса $\triangle CA_1B_1$ га ҳамма нуқталари билан жойланади. Шундай қилиб, Даламбер-Эйлер теоремаси исботланди.

## 115- §. Оний айланиш ўқи. Аксоидлар. Пуансо теоремаси

Фараз қилайлик, жисм чексиз кичик вақт ичида $ABD$ ҳолатидан $A_1B_1D_1$ ҳолатига кўчган бўлсин (275- шакл). Даламбер-Эйлер теоремасига биноан, бу кўчишни жисмнинг қўзғалмас нуқтасидан ўтувчи ўқ атрофида бир айлантириш билан бажариш мумкин. Фараз қилайлик, ҳозирги онда шакл текислиги шу ўққа тик бўлсин. Нуқталарнинг элементар кўчишлари бўлган $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ ўртасидан мазкур кўчишларга тик қилиб ўтказилган текисликлар қўзғалмас нуқтадан ўтувчи ўқ орқали ўтиб, $\angle ACA_1$, $\angle BCB_1$, . . . бурчакларни тенг қисмларга бўлади. Бу бурчакларнинг ҳаммаси бир хилда бўлгани учун уларнинг қийматини $\Delta\varphi$ десак, $A$, $B$, . . . нуқталарнинг кўчишлари:

$$\overline{AA_1} = h_A \Delta\varphi,$$
$$\overline{BB_1} = h_B \Delta\varphi,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

куринишида ифодаланади. Бу нуқталарнинг ўртача тезликлари:

$$v_A^* = \frac{AA_1}{\Delta t} = h_A \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$
$$v_B^* = \frac{BB_1}{\Delta t} = h_B \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

бўлади.

Бу ерда $h_A$, $h_B$, . . . — тегишли нуқталар кўчишларининг уртасидан айланиш ўқига туширилган тик кесмалар.

Элементар вақт нулга интилса, лимитда $C$ дан ва $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ кўчишлари ўртасидан ўтказилган текисликлар тегишли нуқталар траекторияларига ўтказилган нормал текисликларга айланади, айланиш ўқи $C$ эса текисликларнинг кесишган чизиги бўлади. $h_A$, $h_B$, ... тик кесмаларнинг лимитдаги қийматларини тегишлича $r_A$, $r_B$, . . . десак, нуқталарнинг ҳақиқий тезликлари қуйидагича ёзилади:

$$v_A = r_A \frac{d\varphi}{dt} = r_A \omega,$$
$$v_B = r_B \frac{d\varphi}{dt} = r_B \omega, \qquad (115.\ 1)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Бундан кўрамизки, жисм қўзғалмас нуқта атрофида айланганда, унинг нуқталари траекторияларига ўтказилган нормал текисликлар ҳар онда $C$ дан утувчи чизиқда кесишади. Бу чизиқ устидаги барча нуқталарнинг тезлиги шу онда нулга тенг бўлади. Қолган нуқталарнинг тезлиги эса шу $C$ ўқ атрофида айланувчи жисм тезлиги каби айланади. Демак, қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмнинг узлуксиз ҳаракатини ҳар хил ўқлар атрофида бир қанча кетма-кет оний айланиш ҳаракатларидан иборат деб қараш мумкин. Бу ўқлар **о н и й  а й л а н и ш  ў қ л а р и** дейилади.

Нуқталарнинг оний ўққача бўлган оний радиус бурчак тезлиги эса оний бурчак тезлиги дейилади.

Оний ўқларнинг қўзғалмас фазода ва ҳаракатланувчи жисмда қолдирган излари икки конус сирт ҳосил қилади. Улардан бири қўзғалмас аксоид, иккинчиси қўзғалувчи аксоид дейилади (276- шакл).

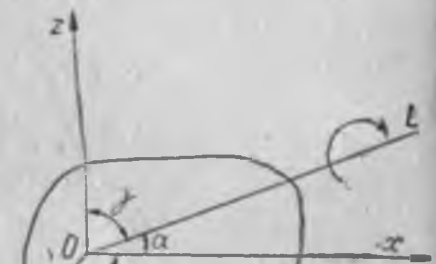

276- шакл.

Бу ҳол учун Пуансо теоремаси қуйидагича таърифланади: *Қўзғалмас нуқтаси бўлган жисм ҳаракатини қўзғалувчи аксоиднинг қўзғалмас аксоид устида юмалатиш билан бажариш мумкин.*

Шуни ҳам айтиш керакки, конус шаклидаги жисмнинг ҳаракати бошқа конус устида сирпантирмасдан юмалатиш билан бажарилса, бу икки конуснинг тегишиб турган ясовчиси оний айланиш ўқи бўлади.

## 116- §. Қўзғалмас нуқтали жисмнинг ҳолатини аниқлаш. Эйлер бурчаклари

Фараз қилайлик, қўзғалмас нуқтаси бўлган жисм бу нуқта атрофида ҳар қандай айланма ҳаракат қила олсин. Бундай жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун бир-бирига боғлиқсиз нечта параметр зарур эканлигини текширамиз. Бунинг учун, қўзғалмас $O$ нуқтадан жисмга бириктирилган бир $OL$ ўқини ўтказамиз (277 - шакл). Бу ўқнинг ҳолати унинг координата ўқларидан иккитаси билан тузган бурчаклари орқали аниқланади. Бирор бу икки катталик жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун етарли эмас, чунки жисм бу ўқ атрофида айланиши мумкин. Яна шу ўқ атрофида жисмнинг айланишини тасвирловчи бирор бурчакни олсак, у ҳолда, юқоридаги икки бурчак билан бу кейинги бурчак жисм ҳолатини тўла аниқ-




277 - шакл.

Eйл Oч ии

лайди. Демак, бир қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмнинг ҳолати уч параметр билан аниқланар экан.

Жисмнинг ҳолатини аниқловчи бир-бирига боғлиқсиз параметрлар **эркинлик даражаси** дейилади.

Бундан кўрамизки, бир қўзғалмас нуқтали жисмнинг эркинлик даражаси учта бўлар экан. Бу параметрлар учун қандай уч катталикни танлаш мумкинлиги устида тўхтаб ўтамиз.

Қаттиқ жисмга бириктирилган $x$, $y$, $z$ ўқларини оламиз. Бу ўқларнинг ҳолатини қўзғалмас $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ўқларига нисбатан аниқлаймиз (278- шакл). Улар орасидаги бурчак косинуслари қуйидаги жадвалда берилган:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ |
| $\eta$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
| $\zeta$ | $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ |

Жисмнинг бирор нуқтасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан координаталари берилган бўлса, қўзғалувчи системага нисбатан бу координаталар қийматларини курсатилган косинуслар жадвалидан фойдаланиб ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} x &= a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z &= c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta. \end{aligned} \qquad (116.\ 1)$$

Шунингдек, қўзғалмас система координаталарини ҳам қузғалувчи система координаталари орқали айтилган жадвалдан фойдаланиб ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ \eta &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ \zeta &= a_3x + b_3y = c_3z. \end{aligned} \qquad (116.\ 2)$$

(116. 1) ва (116. 2) дан кўрамизки, жисмнинг ҳар қандай нуқтаси координаталари қайси системага нисбатан олинмасин, мазкур координата ўқлари уртасидаги туққизта бурчак

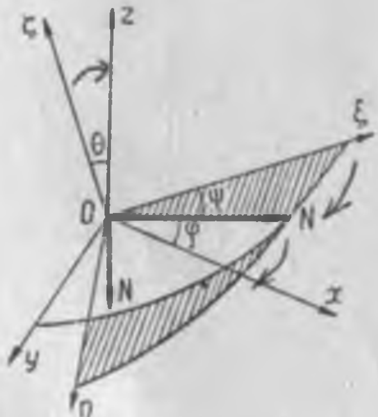
косинусларини билишимиз зарур экан. Бу тўққизта косинус қуйидаги олтита шарт билан боғланган:

$$
\begin{aligned}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1,\\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1,\\
a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1
\end{aligned}
\tag{116. 3}
$$

ва

$$
\begin{aligned}
a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0,\\
a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0,\\
a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{116. 4}
$$

Бундан кўрамизки, тўққизта косинусдан фақатгина учтаси бир-бирига боғлиқсиз экан. Лекин бу учта косинус орқали қолган олтита косинусни ифодалаш осон масала эмас, чунки иккинчи даражали тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Шунга кура, бу учта бир-бирига боғлиқсиз бурчак учун координата уқлари орасидаги бурчаклардан учтасини олмай, Эйлер томонидан тавсия этилган бошқа бурчакларни олиш қулайдир. Бу бурчаклар Эйлер бурчаклари дейилади.



278- шакл.

Эйлер бурчаклари орқали юқорида айтилган тўққизта косинусни осонлик билан ифодалаш мумкин.

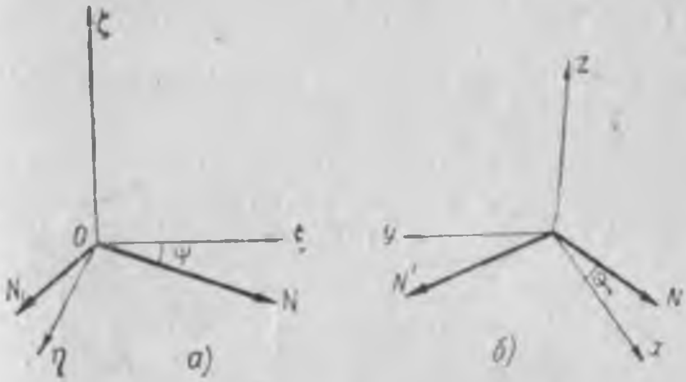
Эйлер бурчаклари қуйидагича танланади:

$xOy$ текислик билан $\xi O \eta$ текислик кесишган $ON$ чизиқ тугун чизиғи дейилади (278- шакл).

Қўзғалувчи текислик $\xi O \eta$ да $O\zeta$ уқи билан $ON$ орасидаги бурчак $\psi$ орқали белгиланади ва процессия бурчаги дейилади. $O\zeta$ ўқи учидан қаралганда $O\xi$ ўқи $ON$ га қараб, энг кичик бурчак билан соат стрелкаси айланиши бўйича айланганини курсак, $\psi$ бурчак мусбат бўлиб, акс ҳолда манфий бўлади.

Қўзғалувчи текислик $xOy$ да $ON$ уқи билан $Ox$ орасидаги бурчак $\varphi$ билан белгиланади ва соф айланиш бурчаги дейилади. $Oz$ учидан қаралганда $ON$ ўқи, $Ox$ га қараб, энг кичик бурчак билан соат стрелкаси айланиши бўйича айланса, бурчак мусбат бўлади. Ниҳоят, $\eta O\zeta$ текислигида $\theta$ бурчаги бўлиб, бу бурчак нутация бурчаги дейилади. У $O\zeta$ дан $Oz$ га қараб, соат стрелкаси айланиши бўйича айланганда $ON$ учидан қаралса, мусбат бўлади.

Бу бурчакларни вақтнинг функцияси тарзида белгиласак, қўзғалмас координаталар системасига нисбатан қузгалувчи




279 шакл.

ҳоғизини

системани истаган вақт учун аниқлаган бўламиз. Чунончи, $\varphi$ бурчакни билсак, $ON$ чизиқнинг $xOy$ текисликдаги ҳолатини аниқлаган бўламиз. Шунингдек, $ON$ орқали ўтувчи ва $xOy$ текислик билан $\theta$ бурчак тузувчи бир текислик ўтказсак, $\xi O\eta$ текисликнинг ҳолати аниқланади. $\psi$ бурчак берилган булса, $\xi$ ёки $\eta$ ўқнинг $ON$ га нисбатан ҳолати маълум булади. Шундай қилиб, бу учта бурчак воситаси билан қаттиқ жисм ҳолатини тўла равишда аниқлаш мумкин экан.

Жисмнинг ҳаракатида бу бурчаклар вақтнинг узлуксиз функцияси булганидан, уларни:

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t) \qquad (116.\ 5)$$

тарзида ифодалаймиз.

Бу тенгламалар воситаси билан жисмнинг исталган вақтдаги ҳолатини аниқлаш мумкин булгани учун, улар жисмнинг ҳаракат тенгламалари дейилади.

Энди, ана шу учта Эйлер бурчаклари воситаси билан туққизта косинус орасидаги муносабатларни топамиз. Бунинг учун асосий $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ортлардан ташқари, яна қуйидаги ортларни киритамиз: $\overline{ON}$ тугун чизиғининг ортини $\bar{n}$ билан ишоралаймиз. $\overline{ON}$ чизиққа тик йўналган $\xi O\eta$ текисликда ётувчи $ON_1$

чизиқнинг орти $\bar{n}_1$ (279- шакл, *а*) ва $ON$ чизиққа тик йўналган $xOy$ текисликда ётувчи $ON''$ чизиқнинг орти $\bar{n}'$ бўлсин (279- шакл, *б*).

$ON_1$ нинг йўналишини шундай танлаймизки, у $O\xi\eta\zeta$ каби $ON_1N\zeta$ координаталар системаси чап системани ташкил этсин. Шунингдек, $ON'$ ни ҳам шундай танлаймизки, у $Oxyz$ каби $ONN'z$ координаталар системаси чап системани ташкил этсин.

$ON_1$ ва $ON'$ ўқлар орасидаги бурчак $\xi O\eta$ билан $xOy$ орасидаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги эканлигини кўрамиз (бу бурчак $\theta$ бурчакка тенг).

Қўзғалувчи ва қўзғалмас координата ўқларининг ортларини тегишлича $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{n}'$ ва $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{n}_1$ билан ишоралаймиз. У ҳолда $\bar{i}$, $\bar{i}_1$ ва $\bar{j}$, $\bar{j}_1$ ни $\bar{n}$, $\bar{n}_1$ орқали ифодалаш осон. Бунинг учун 279- шакл, *а* ва *б* лардан қуйидаги жадвални тузамиз:

| | $\bar{i}$ | $\bar{j}$ | $\bar{i}_1$ | $\bar{j}_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{n}$ | $\cos\psi$ | $\cos(90-\psi)$ | $\cos\varphi$ | $\cos(90+\varphi)$ |
| $\bar{n}_1$ | $\cos(90+\psi)$ | $\cos\psi$ | — | — |
| $\bar{n}'$ | — | — | $\cos(90-\varphi)$ | $\cos\varphi$ |

Бу жадвалдан:

$$\bar{i} = \bar{n}\cos\psi - \bar{n}_1\sin\psi,$$
$$\bar{j} = \bar{n}\sin\psi + \bar{n}_1\cos\psi,$$
$$\bar{i}_1 = \bar{n}\cos\varphi + \bar{n}'\sin\varphi,$$
$$\bar{j}_1 = -\bar{n}\sin\varphi + \bar{n}'\cos\varphi.$$

Бу формулалардан фойдаланиб ва косинуслар жадвалини эслаб, қуйидагиларни чиқарамиз:

$$a_1 = (\bar{i}\,\bar{i}_1) = (\bar{n}\cos\psi - \bar{n}_1\sin\psi)(\bar{n}\cos\varphi + \bar{n}'\sin\varphi) =$$
$$= (\overline{n}\,\overline{n})\cos\psi\cos\varphi + (\overline{n}\,\overline{n}')\cos\psi\sin\varphi - (\overline{n}_1\overline{n})\sin\psi\cos\varphi -$$
$$- (\overline{n}_1\overline{n}')\sin\psi\sin\varphi.$$

Бунда: $(\overline{n}\,\overline{n}) = 1$, $(\overline{n}\,\overline{n}_1) = 0$, $(\overline{n}\,\overline{n}') = 0$, $(\overline{n}_1\overline{n}') = \cos\theta$.
Шундай бўлгани учун:

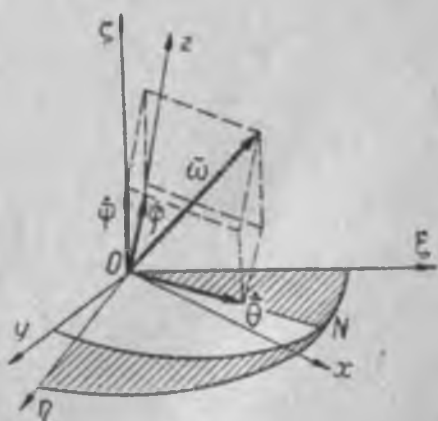
$$a_1 = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta.$$

Худди шундай мулоҳаза билан қолган косинусларнинг ҳам Эйлер бурчаклари орқали ифодасини топамиз, улар:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \cos(\widehat{\xi, x}) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
a_2 &= \cos(\widehat{\eta, x}) = \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
a_3 &= \cos(\widehat{\zeta, y}) = \sin\psi\sin\theta,\\
b_1 &= \cos(\widehat{\xi, y}) = \sin\varphi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
b_2 &= \cos(\widehat{\eta, y}) = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta. \qquad (116.\ 6)\\
b_3 &= \cos(\widehat{\zeta, y}) = -\cos\psi\sin\theta,\\
c_1 &= \cos(\widehat{\xi, z}) = \sin\varphi\sin\theta,\\
c_2 &= \cos(\widehat{\eta, z}) = \cos\psi\sin\varphi\theta,\\
c_3 &= \cos(\widehat{\zeta, z}) = \cos\theta.
\end{aligned}
$$

## 117- §. Бурчак тезлигининг вектори ва унинг қўзғалувчи ва қўзғалмас ўқлардаги проекциялари

Қўзғалмас нуқтали жисм ҳаракатини, Даламбер-Эйлер теоремасига мувофиқ, бир қанча кетма-кет кичик айланишлар тўпламидан иборат деб қараш мумкин. Бу айланишлар натижасида айланиш оний ўқи қўзғалмас нуқтадан ўтиб, ўз ҳолатини қўзғалмас фазода ва ҳаракатланаётган жисмга нисбатан узлуксиз равишда ўзгартиради.



280- шакл.

Оний бурчак тезлигининг вектори қўзғалмас нуқтадан ўтиб, уқ буйлаб йўналиши бизга маълум (280- шакл).

Қўзғалмас нуқтали жисм ҳаракати асосан учта Эйлер бурчаги билан аниқлангани учун $\bar{\omega}$ оний бурчак тезлигини бу бурчаклар орқали ифодалаймиз.

Жисм $ON$ ўқи атрофида айланганда, айланиш бурчаги $\theta$ бўлгани учун, $\dot{\theta}$ — шу $ON$ ўқ бўйлаб; $O\zeta$ атрофида айланганда, фақат $\psi$ бурчак ўзгарганидан $\dot{\psi}$ шу $O\zeta$ ўқ бўйлаб ва $Oz$ атрофида айланганда, фақат $\varphi$ бурчак ўзгаргани учун, $\dot{\varphi}$ бу ўқ бўйлаб йўналади. Бу уч ўқ атрофида айланма ҳаракатлар бурчак тезликлари $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ ни тегишли ўқлар билан йўналтирсак, $\bar{\omega}$ оний бурчак тезлигининг вектори уларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\varphi}} + \bar{\dot{\theta}}. \tag{117. 1}$$

Бу формуланинг икки томонининг қўзғалмас ва қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини оламиз. Бунинг учун $\bar{\omega}$ векторнинг проекцияларини тегишлича $\omega_\xi$, $\omega_\eta$, $\omega_\zeta$ ва $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ билан белгилаймиз. У ҳолда оний бурчак тезлигининг қўзғалмас ўқлардаги проекциялари қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\, a_3, \\ \omega_\eta &= \dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\, b_3, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned} \tag{117. 2}$$

(116. 6) дан фойдаланиб, $a_3$ ва $b_3$ нинг қийматини (117. 2) га қўйсак:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned} \tag{117. 3}$$

келиб чиқади.

Худди шундай ифодани қўзғалувчи ўқларга нисбатан ёзамиз:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y &= -\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{117. 4}$$

Бу чиқарилган формулалардан фойдаланиб, оний бурчак тезлигининг абсолют қийматини Эйлер бурчаклари орқали ифодалаймиз:

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2. \tag{117. 5}$$

$\omega_x$, $\omega_y$ ва $\omega_z$ нинг қийматини (117. 4) дан келтириб қўйсак:

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \tag{117. 6}$$

формулани оламиз.

(117 3,4) га Эйлернинг кинематик

## 118- §. Қўзғалмас нуқтаси бўлган жисм нуқталарининг тезлик ва тезланиш векторлари ва уларнинг проекциялари

Энди, қузғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм бирор нуқтасининг тезлигини топамиз. Бу ҳолда ҳар қандай нуқтанинг тезлигини оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тезлиги деб қараб, уни (94. 4) га мувофиқ бундай кўринишда ёзамиз:

$$\bar{v} = [\bar{\omega}\, \bar{r}]. \qquad (118.\ 1)$$

Бу формуладан фойдаланиб, тезлик векторининг қузғалмас ва қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини оламиз:

$$\begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi \end{aligned} \qquad (118.\ 2)$$

ва

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \qquad (118.\ 3)$$

Оний айланиш ўқида ётувчи нуқтани олсак, бундай нуқта учун $v = 0$ бўлади. Бундан фойдаланиб, (118.2) ва (118.3) га мувофиқ иккала координаталар системасига нисбатан оний айланиш ўқининг тенгламасини топамиз:

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta} \qquad (118.\ 4)$$

ва

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \qquad (118.\ 5)$$

Бу тенгламалар ўз навбатида — тегишли аксоидлар тенгламалари эканлиги табиийдир.

Тезланишни топиш учун қаттиқ жисм нуқтасининг айланма тезлик векторидан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{\omega}\, \bar{r}] = [\bar{\varepsilon}\, \bar{r}] + [\bar{\omega}\, [\bar{\omega}\, \bar{r}]]. \qquad (118.\ 6)$$

Бу тенгламанинг унг томонининг ташқи кўриниши — қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланишига ўхшайди, бироқ маъно жиҳатидан фарқ қилади. Унинг фарқи шундаки, $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ бурчак тезланиш вектори $\bar{\omega}$ оний айланиш уқи устида ётмайди, чунки $\bar{\omega}$ нинг йўналиши ўзгарувчи бўлгани учун унинг геометрик ҳосиласи у билан бир йўналишда бўлмайди, $\bar{\varepsilon}$ бурчак тезланиш векторининг йуналиши **т е з л а н и ш  ў қ и** дейилади.

(118. 6) нинг ўнг томонидаги биринчи ҳад нуқтанинг айланма тезланиши бўлганидан:

$$\overline{w}^{(\tau)} = [\bar{\varepsilon}\,\bar{r}]. \qquad (118.\ 7)$$

Бу тезланишнинг абсолют катталиги $\varepsilon p_1$ га тенг (281-шакл), чунки:

$$\dot{w}^{(\tau)} = \varepsilon r \sin(\widehat{\bar{\varepsilon}, \bar{r}}) = \varepsilon p_1.$$

Бу ерда $p_1$ — нуқта $M$ билан тезланиш ўқи орасидаги масофа, $w^{(\tau)}$ — ушбу $p_1$ радиус билан чизилган ва маркази тезланиш ўқида олинган айланага уринма равишда йўналган айланма тезланиш.

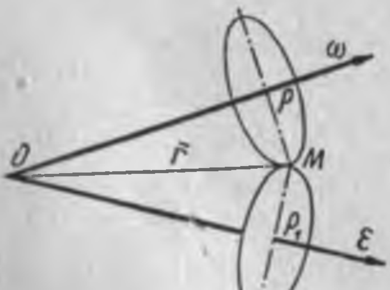
Унинг иккинчи ҳади эса марказга интилувчи тезланишни ифодалайди. У, икки қайтали вектор кўпайтмаси бўлганидан уни тегишли қоидага мувофиқ ёйиб ёзамиз:

$$\overline{w}^{(n)} = [\bar{\omega}\,[\overline{\omega\, r}]] = \bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\bar{r}) - \omega^2\bar{r}. \qquad (118.\ 8)$$

Бу тезланишнинг катталиги ва йуналишини топиш учун скаляр кўпайтмани ёйиб, $\bar{\omega}$ векторнинг модули ва бирлик вектори орқали ифодалаймиз:

$$\overline{w}^{(n)} = \omega r \cos(\widehat{\bar{\omega}^{\circ}, \bar{r}})\,\omega\cdot\bar{\omega}^{\circ} - \omega^2\bar{r} = \omega^2\left[r\cos(\widehat{\bar{\omega}^{\circ}, \bar{r}})\,\bar{\omega}^{\circ} - \bar{r}\right].$$

Бунда $\bar{\omega}^{\circ}$ — оний айланиш ўқининг бирлик вектори.



281- шакл.

281- шаклдан:

$$r\cos(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}) = h.$$

Шунинг учун:

$$\overline{w}^{(n)} = \omega^2\left(h\bar{\omega}^{\circ} - \bar{r}\right) = \omega^2\bar{\rho}.$$

Бу ерда $\bar{\rho}$ — текширилаётган нуқтанинг оний айланиш ўқигача булган масофаси. Бу тезланиш мазкур $\bar{\rho}$ бўйлаб, текширилаётган нуқтадан оний ўққа қараб йўналган.

Энди, $\overline{w}$ тезланиш векторининг қўзғалмас ва қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини оламиз. Бунинг учун (118. 6) нинг ўнг томонини проекциялари орқали ёзамиз:

$$\bar{w}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta & \varepsilon_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}+(\omega_\xi\xi+\omega_\eta\eta+\omega_\zeta\zeta)(\omega_\xi\bar{i}+\omega_\eta\bar{j}+\omega_\zeta\bar{k})-$$
$$-(\xi\bar{i}+\eta\bar{j}+\zeta\bar{k})\,\omega^2.$$

Шундай қилиб, тезланишнинг қўзғалмас ўқлардаги проекциялари учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\begin{aligned} w_\xi &= (\varepsilon_\eta\zeta-\varepsilon_\zeta\eta)+(\omega_\xi\xi+\omega_\eta\eta+\omega_\zeta\zeta)\,\omega_\xi-\xi\omega^2, \\ w_\eta &= (\varepsilon_\zeta\xi-\varepsilon_\xi\zeta)+(\omega_\xi\xi+\omega_\eta\eta+\omega_\zeta\zeta)\,\omega_\eta-\eta\omega^2, \\ w_\zeta &= (\varepsilon_\xi\eta-\varepsilon_\eta\xi)+(\omega_\xi\xi+\omega_\eta\eta+\omega_\zeta\zeta)\,\omega_\zeta-\zeta\omega^2. \end{aligned} \qquad (118.\ 9)$$

Тезланишнинг қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини топиш учун, аввало қуйидаги бир ҳол устида тўхтаб ўтамиз. Векторнинг қўзғалмас ўқдаги проекциясининг ҳосиласи ҳосила проекциясига тенг, яъни:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_x=\frac{d\omega_x}{dt}, \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_y=\frac{d\omega_y}{dt}, \\ \varepsilon_z &= \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_z=\frac{d\omega_z}{dt}. \end{aligned} \qquad (118.\ 10)$$

Бу ҳолни, умуман, қўзғалувчи ўққа нисбатан ёзиш тўғри бўлмайди. Бироқ жисм билан бирликда бир хил бурчак тезлиги билан айланувчи ўққа нисбатан проекциянинг ҳосиласи ҳосиланинг проекциясига тенг булади. Буни исботлаймиз.

$\bar{\omega}$ ни қўзғалувчи ўқ бирлик векторлари орқали ифодалаймиз:

$$\bar{\omega}=\omega_x\bar{i}_1+\omega_y\bar{j}_1+\omega_z\bar{k}_1.$$

Бунинг вақтга нисбатан ҳосиласи:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\frac{d\omega_x}{dt}\bar{i}_1+\frac{d\omega_y}{dt}\bar{j}_1+\frac{d\omega_z}{dt}\bar{k}_1+\omega_x\frac{d\bar{i}_1}{dt}+\omega_y\frac{d\bar{j}_1}{dt}+\omega_z\frac{d\bar{k}_1}{dt}. \quad (118.\ 11)$$

Ўқлар қўзғалувчи бўлганидан $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ нинг йўналиши ўзгаради. Уларнинг ҳосиласини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\frac{d\bar{i}_1}{dt}=[\bar{\omega}\,\bar{i}_1],\ \ \frac{d\bar{j}_1}{dt}=[\bar{\omega}\,\bar{j}_1],\ \ \frac{d\bar{k}_1}{dt}=[\bar{\omega}\,\bar{k}_1].$$

Шунга кўра, (118. 11) нинг кейинги уч ҳадини бундай ёза оламиз:

$$\omega_x \frac{d\bar{i}_1}{dt} + \omega_y \frac{d\bar{j}_1}{dt} + \omega_z \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \omega_x [\bar{\omega}\, \bar{i}_1] + \omega_y [\bar{\omega}\, \bar{j}_1] + \omega_z [\bar{\omega}\, \bar{k}_1] =$$
$$= [\bar{\omega}(\omega_x \bar{i}_1 + \omega_y \bar{j}_1 + \omega_z \bar{k}_1)] = [\bar{\omega}\, \bar{\omega}] = 0.$$

Шундай қилиб:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt} \bar{i}_1 + \frac{d\omega_y}{dt} \bar{j}_1 + \frac{d\omega_z}{dt} \bar{k}_1.$$

Бундан:

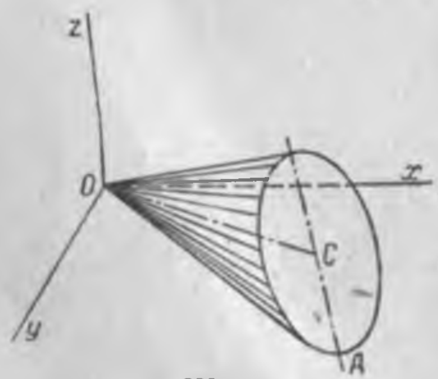
$$\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_x = \frac{d\omega_x}{dt},$$
$$\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_y = \frac{d\omega_y}{dt},$$
$$\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_z = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Бинобарин, биз текшираётган ҳол учун векторнинг қўзғалувчи ўқдаги проекциясининг ҳосиласи ҳосиланинг проекциясига тенг бўлар экан.

Бу ҳолдан фойдаланиб, тезланиш векторининг қўзғалувчи ўқлардаги проекцияларини олишимиз мумкин. Улар ифодасининг ташқи кўриниши (118.9) дан фарқ қилмайди, фақат $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ни мос равишда $x$, $y$, $z$ билан алмаштириш зарур.

Бурчак тезланиши $\varepsilon$ нинг қийматини унинг қўзгалмас ва қўзгалувчи координата ўқларидаги проекциялари: $\dot{\omega}_\xi$, $\dot{\omega}_\eta$, $\dot{\omega}_\zeta$ ҳамда $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ орқали ифодалаймиз:

$$\varepsilon = \sqrt{\dot{\omega}_\xi^2 + \dot{\omega}_\eta^2 + \dot{\omega}_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2}. \qquad (118.\ 12)$$



282- шакл.

**76- масала.** Баландлиги $h = 4$ *см*, асосининг радиуси $r = 3$ *см* ва учи қўзгалмас $O$ нуқтада ётувчи конус текисликда сирпанмасдан юмалайди (282- шакл). Конус асосининг $C$ марказининг тезлиги $v_c = 48$ *см/сек*. Тезлик годографини чизувчи нуқтанинг координаталари ва бурчак тезланиши топилсин.

Ечиш. Конуснинг $xOy$ текислик билан тегиб турган $OA$ чизиги оний ўқи бўлади. Шунинг учун $v_A = 0$. Оний бурчак тезлигини топиш учун $C$ нуқтадан $OA$ га тик туширамиз. У вақтда $C$ нинг тезлиги:

$$v_c = r \cos\alpha \cdot \omega$$

булади.

Бундан $\omega$ оний бурчак тезлигининг қийматини топамиз:

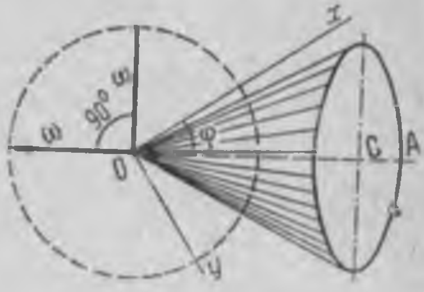
$$\omega = \frac{v_c}{r\cos\alpha} = 20\ {}^1/сек.$$

Бурчак тезлигининг годографини чизувчи нуқта координаталарини топиш учун годографни қурамиз. Годограф маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси $\omega = 20\ {}^1/сек$ га тенг $xOy$ текисликдаги айланадан иборат (283- шакл). Унинг координаталарини топиш учун $OA$ оний ўқнинг $O$ атрофида, $xOy$ текисликда қандай бурчак тезлиги билан айланишини топамиз. Бунинг учун $v_c$ тезликни $z$ ўқи атрофида айланаётган жисм нуқтаси тезлиги тарзида ифодалаймиз:

$$v_c = \omega_1 h\cos\alpha.$$

Бундан $z$ ўқи атрофида $\omega_1$ айланма бурчак тезлигини топамиз:

$$\omega_1 = \frac{v_c}{h\cos\alpha} = 15\ {}^1/сек.$$




283- шакл.

$OA$ ўқнинг $x$ билан тузган бурчаги $\varphi = \omega_1 t = 15t$.

Энди, $A$ нуқтанинг координаталарини топиш қийин эмас:

$$\omega_x = \omega\cos\varphi = 20\cos 15t,$$
$$\omega_y = \omega\sin\varphi = 20\sin 15t,$$
$$\omega_z = 0.$$

Бу тенгликлардан фойдаланиб бурчак тезланиши $\varepsilon$ ни топамиз:

$$\varepsilon = \sqrt{\dot\omega_x^2 + \dot\omega_y^2 + \dot\omega_z^2} = 300\ {}^1/сек^2.$$

**77- масала.** Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланиш бурчаклари:

$$\varphi = 4t,\quad \psi = \frac{\pi}{2} - 2t \quad \text{ва} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

билан берилган. Бурчак тезлик годографини чизувчи нуқта координаталари, бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши топилсин.

Е ч и ш. Бурчак тезлиги векторининг проекциялари годограф чизувчи нуқтанинг координаталари бўлганидан масалани ечишда (117. 3) дан фойдаланамиз:

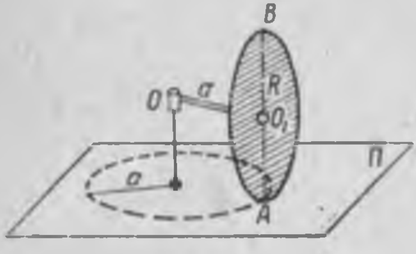
$$\xi = \omega_\xi = \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi = 2\sqrt{3}\cos 2t,$$
$$\eta = \omega_\eta = \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi = -2\sqrt{3}\sin 2t,$$
$$\zeta = \omega_\zeta = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi = 0.$$
$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = 2\sqrt{3}\ {}^1/сек.$$

$\varepsilon$ бурчак тезланишини топиш учун бурчак тезлигининг проекцияларидан ҳосила олиб, уларнинг геометрик йиғиндисини тузамиз:

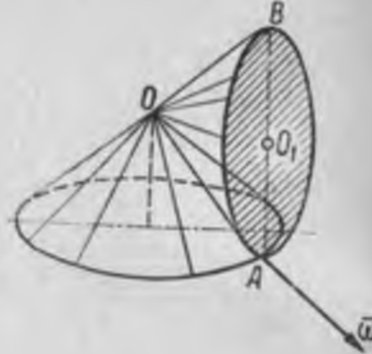
$$\varepsilon = \sqrt{\dot\omega_\xi^2 + \dot\omega_\eta^2 + \dot\omega_\zeta^2} = 4\sqrt{3}\ {}^1/сек^2.$$

**78- масала.** Радиуси $R = 10\sqrt{2}$ *см* бўлган $AB$ диск $П$ текисликда сирпанмасдан юмалайди (284- шакл). Диск текислиги ҳамма вақт $П$ га тик бўлиб, $O_1$ марказининг тезлиги $v_0 = 20$ *см/сек*, радиуси $a = 10\sqrt{2}$ *см* бўлган айлана чизади. Дискнинг $A$ ва $B$ нуқталарининг тезлик ва тезланишлари топилсин.

Е ч и ш. Олдин оний айланиш ўқини топамиз. $O$ нуқта қузғалмасдир. Шунингдек, дискнинг текисликка тегиб турган нуқтаси $A$ ҳам ҳозирги

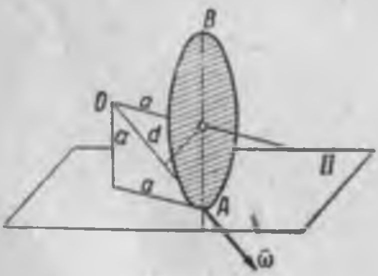



284- шакл.




285- шакл.

онда қўзғалмайди. Шунинг учун бу $O$ ва $A$ нуқталардан ўтувчи ўқ оний бўлиб, унинг ҳолати вақт ўтиши билан ўзгаради. Натижада, $A$ нуқта фазода учи $O$ да бўлган конус (қўзғалмас аксоид) чизади. Шунинг учун у, жисмда ҳам маркази $O_1$ да бўлган бошқа бир конус (қўзғалувчи аксоид) чизади (285- шакл). Диск маркази $O_1$ нинг тезлиги бир томондан $OO_1$ га тик бўлиб, иккинчи томондан $O_1$ дан оний ўққа туширилган кесмага тикдир (286- шакл). Бу кесма узунлигини $d$, оний бурчак тезлигини $\omega$ десак:




286- шакл.

$$d = \frac{aR}{\sqrt{a^2 + R^2}}, \quad v_0 = \omega d,$$

$$\omega = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0\sqrt{a^2 + R^2}}{aR} = 2\ 1/сек.$$

$B$ нуқтанинг тезлиги:

$$v_B = \omega d_1 = 2\omega d$$

ёки

$$v_B = \frac{2\omega Ra}{\sqrt{a^2 + R^2}} = 40 \text{ см/сек}$$

бўлади.

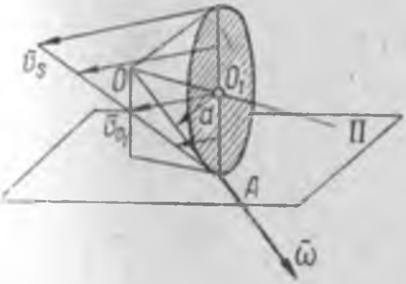
Бу $v_B$ ҳам $O_1$ нинг тезлигидек йўналган (287- шакл). $O_1$ нуқтанинг тезлиги ўзгармас бўлгани учун $\omega$ ҳам абсолют қиймат жиҳатидан ўзгармас катталикдир. Бироқ, унинг йўналиши ўзгарувчи бўлганидан, бурчак тезланиши ҳосил бўлади. Бурчак тезланиши векторининг модули ўзгармас бўлганидан унинг учи айлана чизади. Бу айлананинг текислиги $П$

текисликка параллелдир (288- шакл). Айлана радиуси қуйидагича ёзилади:

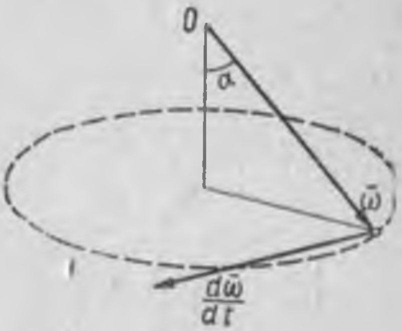
$$\omega \sin \alpha = \frac{a\omega}{\sqrt{a^2 + R^2}}.$$

Векторнинг учи айлана чизиб, унинг бир минутдаги айланиш сони $n$ бўлсин. У ҳолда:

$$v_0 = \frac{\pi a n}{30}, \quad n = \frac{30 v_0}{\pi a}.$$




287- шакл.




288- шакл.

Энди, $\omega$ учининг тезлигини топамиз. Бу тезлик бурчак тезланишига тенг булади, яъни:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{\pi n}{30} \omega \sin \alpha = \frac{v_0 \omega}{\sqrt{a^2 + R^2}} = 2\ 1/сек^2.$$

$\varepsilon$ бурчак тезланиш вектори—радиуси $\omega \sin \alpha$ бўлган годограф айланасига уринма бўлиб йўналган. $\omega$ ва $\frac{d\omega}{dt}$ нинг миқдор ва йўналиши аниқлангандан кейин $B$ нуқтанинг тезланишини топиш қийин эмас.

Айланма тезланиш модули:

$$w^{(\tau)} = \varepsilon r \sin 90^\circ = \varepsilon \sqrt{a^2 + R^2} = 40\ см/сек^2.$$

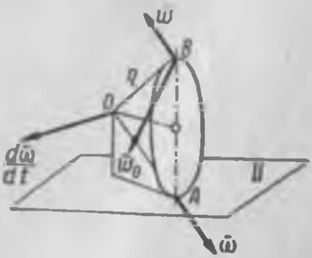
Ўққа интилган тезланиш модули:

$$w^{(n)} = \omega v \sin 90^\circ = 80\ см/сек^2.$$

Тўла тезланиш:

$$w_e = \sqrt{w^{(\tau)2} + w^{(n)2}} = 40\sqrt{5}\ см/сек^2.$$

Буларнинг йўналиши 289- шаклда кўрсатилган.



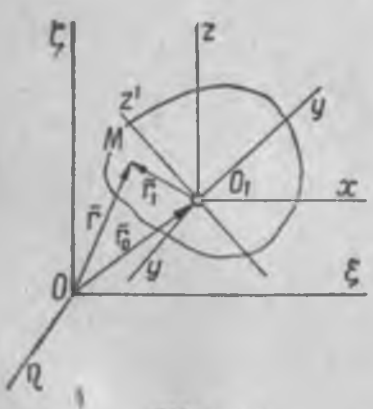

289- шакл.

XIX БОБ

# ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТИНИНГ УМУМИЙ ҲОЛИ

## 119- §. Ҳаракат тенгламалари

Энди, қаттиқ жисм ҳаракатининг энг умумий ҳолини текширишга ўтамиз. Фараз қилайлик, эркин қаттиқ жисм фазода ихтиёрий ҳаракатда бўлсин, жисмнинг бундай ҳаракатини текширишдан аввал, унинг фазодаги ҳолатини аниқлаш учун зарур булган бир-бирига боғлиқсиз параметрлар сонининг қанча бўлиши устида тўхтаб ўтамиз.




290- шакл.

Бунинг учун, энг олдин жисмнинг бирор нуқтасини „асосий нуқта" деб танлаб, бу нуқтанинг ҳолатини аниқлаш керак. Танланган нуқтанинг ҳолатини бирор $\bar{r}_O$ радиус-вектор ёки нуқтанинг координаталари ($x_O$, $y_O$, $z_O$) орқали аниқлаш мумкин.

Жисмнинг ҳаракатини ҳар онда мазкур асосий нуқтадан утувчи оний ўқ атрофидаги айланишдан иборат деб қараш мумкин. Шунга кўра, танланган асосий нуқта ҳозирги онда қўзғалмас деб қаралса, бу нуқтадан ўтувчи ўқнинг ҳолати учта параметр билан аниқланиши бизга маълум. Бу уч параметр учун Эйлер бурчакларини оламиз (290- шакл).

Демак, қаттиқ жисмнинг ҳолати умумий ҳолда олтита параметр билан аниқланади, яъни қаттиқ жисмнинг эркинлик даражаси олтита бўлар экан. Бу олти параметр учун, юқорида айтилган асосий нуқта координаталари билан учта Эйлер бурчагини оламиз:

$$
\begin{aligned}
x_{O1} &= x_{O1}(t), \quad & y_{O1} &= y_{O1}(t), \quad & z_{O1} &= z_{O1}(t); \\
\psi &= \psi(t), & \varphi &= \varphi(t), & \theta &= \theta(t).
\end{aligned} \qquad (119.\ 1)
$$

Бу тенгламалар воситаси билан исталган вақт учун жисм ҳар қандай нуқтасининг ҳолатини белгилашимиз мумкин. Жисмнинг ҳаракатини бирор қўзғалмас координаталар системасига нисбатан текширамиз. Унинг бирор нуқтасининг ҳолати мазкур координаталар системасига нисбатан $\overline{r}$ радиус-вектор билан аниқлансин. Мазкур нуқтанинг асосий нуқтага нисбатан ҳолати $\overline{r}_1$ радиус-вектор ва асосий нуқтанинг қўзғалмас координаталар бошига нисбатан ҳолати $\overline{r}_0$ билан белгилансин. У ҳолда:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{r}_1 = \overline{r}_0 + x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}. \qquad (119.\ 2)$$

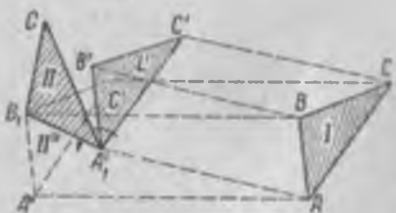
Ёки бу вектор тенгламани координата ўқларидаги проекциялари орқали ёзамиз:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \eta &= \eta_0 + a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \zeta &= \zeta_0 + a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{aligned} \qquad (119.\ 3)$$

Бу ерда $a_1$, $a_2$, $a_3$; $b_1$, $b_2$, $b_3$; $c_1$, $c_2$, $c_3$ — координата ўқлари орасидаги бурчак косинуслари, уларнинг қиймати Эйлер бурчаклари $\psi$, $\varphi$, $\theta$ орқали (116. 6) дан аниқланади.

## 120- §. Эркин жисм учун Шаль теоремаси

Теорема. *Эркин жисмнинг фазодаги ҳар қандай кўчишини бир илгарилама ҳаракат билан ва қаттиқ жисмда асосий нуқта учун олинган бирор нуқта атрофида бир оний айлантириш билан бажариш мумкин.*



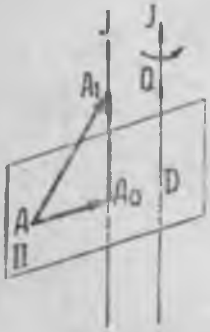

291- шакл.

Бу теоремани исботлаш учун жисмда бир чизиқ устида ётмайдиган учта нуқта оламиз. Бу нуқталарни туташтириб, ҳосил бўлган учбурчак билан эркин жисмнинг ҳолатини аниқлаймиз (291- шакл). Учбурчакнинг $A$ нуқтаси асосий нуқта бўлсин. Жисмни бирор $I$ ҳолатдан бошқа бир—$II$ ҳолатга келтириш учун уни олдин илгарилама ҳаракат билан $AA_1'$ га кўчириб, $I'$ га келтирамиз. Сўнгра, $I'$ дан $II$ га келтириш учун Эйлер теоремасига мувофиқ, жисмни $A'_1$ дан ўтадиган оний ўқ атрофида бир айлантирамиз. Натижада, жисм $I$ ҳолатдан, $II$ ҳолатга кўчирилади. Шу билан теорема исботланди.

Ҳаракатни бу хилдаги илгарилама ва айланма қисмларга ажратиш билан бу ерда биз жисмнинг ҳақиқий ҳаракатини курсатаётганимиз йуқ. Бизни қизиқтираётган нарса жисмнинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтишидир. Бу ўтиш аслида биз айтган илгарилама ва айланма ҳаракатдан фарқ қилиши ҳам эҳтимол. Шуннингдек, бу ҳаракатларнинг қайси тартибда қилиниши ҳам ҳар хил бўлиши мумкин.

## 121- §. Моцц теоремаси

Теорема. *Эркин қаттиқ жисмнинг ҳар қандай ҳаракатини умумий ҳолда бир винт ҳаракатига келтириш мумкин.*




292- шакл.

Фараз қилайлик, жисм $I$ ҳолатдан бошқа $II$ ҳолатга бирор $AA_1$ илгарилама ҳаракат ва $A_1$ дан ўтувчи оний ўқ атрофида бир айлантириш билан келтирилган бўлсин. Илгарилама ҳаракатни тасвирловчи $AA_1$ векторни икки қисмга ажратамиз. Тузувчилардан биттасини айланиш ўқига тик қилиб, иккинчисини шу ўқ бўйлаб оламиз (292- шакл).

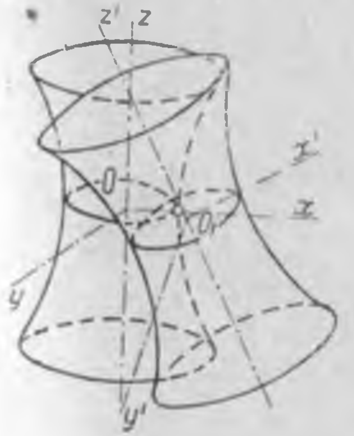
Шундай қилиб, эркин жисм ҳаракатини икки илгарилама ҳаракат ва бир айланма ҳаракатга келтирдик. Илгарилама ҳаракатнинг айланиш ўқига тик $\overline{AA_0}$ қисми билан айланма ҳаракат бир текис ҳаракатга келтирилиши бизга маълум. Шаль теоремасига биноан, бу ҳаракатни ҳаракат текислигига тик бирор ўқ атрофидаги оний айланиш ҳаракати билан алмаштириш мумкин.

Шундай қилиб, жисмнинг ҳаракатини бир йўналишда бўлган оний айланиш ва илгарилама ҳаракатга келтирдик. Бу турдаги икки ҳаракат йиғиндиси оний винт ҳаракатини беради. Шу билан Моцц теоремаси исботланди.

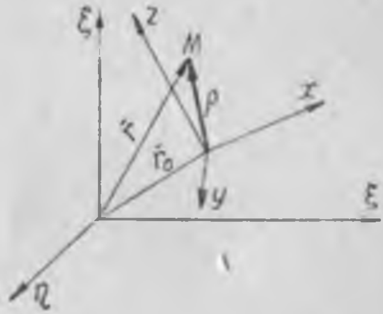
Бундан, қуйидаги хулосани чиқаришимиз мумкин.

Ҳар вақт шундай бир винт билан гайкани кўз олдимизга келтиришимиз мумкинки, жисмни шу гайкага бириктириб, гайкани винтга нисбатан айлантириш билан жисмни бирор ҳолатдан бошқа ҳолатга келтирган бўлайлик. Моцц теоремасида айтилган винт ҳаракат ҳам, албатта, ҳақиқий ҳаракатни тасвирлайди. Ҳақиқий ҳаракат бир қанча чексиз кичик ҳаракатлар йиғиндисидан иборат булгани учун ҳар қайси чексиз кичик ҳаракатни тегишлича винт ҳаракатига келтира оламиз. Бу кетма-кет қилинаётган чексиз кичик винт ҳаракатларини бир-бирига қанча яқин олсак, ҳақиқий ҳаракатни тасвирлашга шунча яқинлашган бўламиз.

Иккита кетма-кет винт ҳаракати қилиш учун кетган вақт чексиз кичик бўлса, бу винт ҳаракатларининг ўқлари оний винт ўқлари дейилади. Бу оний винт ўқлари тегишли аксоидларни беради. Бу аксоидлар ёйилмайдиган чизиқли сиртларни ташкил этади. Жисм ҳаракатини қўзғалувчи аксоидни қўзғалмас аксоид устида юмалатиш билан олиш мумкин. Ҳар онда аксоидларнинг умумий ясовчиси оний винт ўқи бўлади (293-шакл).




293- шакл.




294- шакл.

## 122- §. Қаттиқ жисм нуқтасининг тезлиги ва тезланиши

Қаттиқ жисмнинг фазодаги ҳолатини аниқлаш учун бирор қўзғалмас $\xi\eta\zeta$ координаталар системасини танлаймиз. Бундан ташқари, жисм билан бириктирилган бошқа бир қўзғалувчи $xyz$ системани оламиз. У ҳолда, жисмнинг бирор $M$ нуқтасининг $O$ қўзғалмас система бошига нисбатан ҳолатини $\overline{r}$ радиус-вектор билан қуйидагича аниқлашимиз мумкин (294- шакл):

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{\rho}. \tag{122. 1}$$

Бунда $\overline{r_0}$ — жисм билан биргаликда қўзғалувчи координаталар системаси бошини аниқловчи радиус-вектордир. Бу нуқтани асосий нуқта деб қабул қиламиз. $\overline{r_0}$ радиус-вектор жисмнинг илгарилама ҳаракатини ифодалайди. $\overline{\rho}$ — жисмда олинган бирор $M$ нуқтанинг $O_1$ қўзғалувчи координаталар бошига нисбатан радиус-вектори.

Жисм асосий $O_1$ нуқтадан ўтувчи оний ўқ атрофида айланган пайтда $\overline{\rho}$ нинг узунлиги ўзгармай, фақат йўналиши ўзгаради, яъни:

$$\rho = O_1M = \text{const}.$$

Бу ҳолни кўзда тутиб, $M$ нуқтанинг тезлиги ва тезланишини топамиз. Тезликни топиш учун (122. 1) дан вақтга нисбатан ҳосила оламиз:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt}.$$

Бу тенгликнинг ҳар қайси ҳадини алоҳида текширамиз: $\frac{d\overline{r}_0}{dt} = \overline{v}_0$ — жисмнинг илгарилама ҳаракатини ифодаловчи асосий $O_1$ нуқтанинг тезлиги;

$\frac{d\overline{\rho}}{dt}$ — $O_1$ дан ўтувчи оний ўқ атрофидаги айланма ҳаракатнинг тезлиги. Бу ҳаракатга тегишли оний бурчак тезлигини $\overline{\omega}$ десак, айланма ҳаракат тезлиги учун қуйидаги формулани ёзамиз:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = [\overline{\omega}\,\overline{\rho}].$$

Шундай қилиб, $M$ нуқтанинг тезлиги:

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + [\overline{\omega}\,\overline{\rho}]. \qquad (122.\ 2)$$

Эркин жисм бирор нуқтасининг ҳаракат қонуни ва бу нуқта атрофидаги айланма ҳаракат маълум булса, бошқа ҳар қандай нуқтанинг тезлигини (122. 2) дан топиш мумкин.

Тезликнинг координата ўқларидаги проекцияларини топиш учун юқорида қўлланилган умумий усулдан фойдаланамиз. Тезлик векторини қўзғалмас ўқлардаги проекцияларп орқали ёзамиз:

$$\overline{v} = v_{0\xi}\overline{i} + v_{0\eta}\overline{j} + v_{0\zeta}\overline{k} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi - \xi_0 & \eta - \eta_0 & \zeta - \zeta_0 \end{vmatrix}.$$

Бу тенгламадан:

$$\begin{aligned} v_\xi &= v_{0\xi} + \omega_\eta(\zeta - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta - \eta_0), \\ v_\eta &= v_{0\eta} + \omega_\zeta(\xi - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta - \zeta_0), \\ v_\zeta &= v_{0\zeta} + \omega_\xi(\eta - \eta_0) - \omega_\eta(\xi - \xi_0). \end{aligned} \qquad (122.\ 3)$$

Тезлик векторининг қўзғалувчи ўқлардаги проекциялари эса:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \tag{122. 4}$$

*О* нуқта тезлигининг қўзғалувчи ўқлардаги проекциялари $v_{0x}$, $v_{0y}$, $v_{0z}$ ни топиш учун уларни тегишлича шу нуқта тезлигининг қўзғалмас ўқлардаги проекциялари орқали қуйидагича ифодалаш керак:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= a_1 v_{0\xi} + b_1 v_{0\eta} + c_1 v_{0\zeta}, \\ v_{0y} &= a_2 v_{0\xi} + b_2 v_{0\eta} + c_2 v_{0\zeta}, \\ v_{0z} &= a_3 v_{0\xi} + b_3 v_{0\eta} + c_3 v_{0\zeta}. \end{aligned} \tag{122. 5}$$

Жисмда олинган нуқтанинг координаталари $x$, $y$, $z$ қўзғалувчи системага нисбатан ўзгармас сондир. Шу нуқтанинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан координаталари $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ўзгарувчи бўлиб, уларнинг $x$, $y$, $z$ орқали ифодаси (119. 3) билан берилган.

Энди, жисм нуқтасининг тезланишини топамиз. Бунинг учун, тезликни ифодаловчи (122. 2) формуладан ҳосила оламиз:

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d\overline{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\overline{\omega}}{dt}\overline{\rho}\right] + \left[\overline{\omega}\frac{d\overline{\rho}}{dt}\right].$$

Бу ерда:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \left[\overline{\omega}\,\overline{\rho}\right].$$

Шунинг учун, тезланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\overline{w} = \overline{w}_0 + \left[\overline{\varepsilon}\,\overline{\rho}\right] + \left[\overline{\omega}\left[\overline{\omega}\,\overline{\rho}\right]\right]. \tag{122. 6}$$

Бу формуланинг биринчи ҳади $w_0$ — асосий нуқтанинг тезланиши. Иккинчи ва учинчи ҳадлари *О* нуқта атрофида жисмнинг айланма ҳаракатига мос тезланишлар бўлиб, уларнинг миқдор ва йўналишлари ҳақида тўла мулоҳазаларни аввалги бобда айтиб ўтган эдик. Бу формула Ривальс теоремасини ифодалайди.

## 123- §. Оний винт ўқининг тенгламаси

Оний винт ўқининг тенгламсини топиш учун, унинг таърифига диққат қилишимиз керак.

Тезликларнинг йўналиши ҳозирги онда $\overline{\omega}$ билан коллинеар бўлган нуқталарнинг геометрик йиғиндиси оний винт ўқи деб аталади. Оний винт ўқи бўйлаб йўналган тезликнинг оний бурчак тезлигига нисбати:

$$\frac{v}{\omega} = p \qquad (123.\ 1)$$

оний винтнинг параметри дейилади; $p$ — скаляр катталик. (123.1) нинг махраж ва суратини скаляр равишда $\bar{\omega}$ га кўпайтириб, $p$ параметрнинг модули учун қуйидаги формулани оламиз:

$$p = \frac{(\bar{v}\,\bar{\omega})}{\omega^2} = \frac{v \cos(\widehat{\bar{v},\bar{\omega}})}{\omega}. \qquad (123.\ 2)$$

Бунда $v \cos(\widehat{\bar{v},\bar{\omega}})$ — тезликнинг оний айланиш ўқидаги проекцияси.

Бу тенгламани қўзғалмас координаталар системаси учун, (122. 3) дан фойдаланиб, бундай кўринишда ёза оламиз:

$$\frac{v_{0\xi} + \omega_\eta(\zeta - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta - \eta_0)}{\omega_\xi} = \frac{v_{0\eta} + \omega_\zeta(\xi - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta - \zeta_0)}{\omega_\eta} =$$
$$= \frac{v_{0\zeta} + \omega_\xi(\eta - \eta_0) - \omega_\eta(\xi - \xi_0)}{\omega_\zeta} = p. \qquad (123.\ 3)$$

Оний винт ўқининг тенгламаси қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан (122. 4) га мувофиқ бундай ёзилади:

$$\frac{v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}. \qquad (123.\ 4)$$

Бу тенгламалардан вақтни чиқариб ташласак, тегишли аксоидларнинг тенгламалари келиб чиқади.

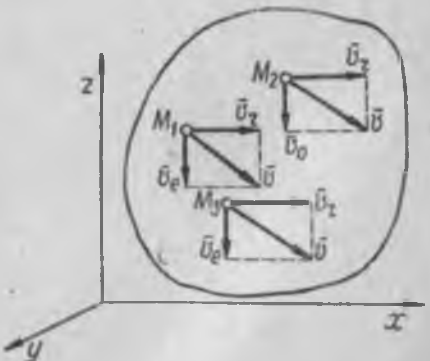
XX БОБ

# ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТЛАРИНИ ҚЎШИШ

Қаттиқ жисм ҳаракати бирор қўзғалувчи системага нисбатан текширилса, у ҳаракат умуман мураккаб бўлиб, нисбий ҳаракат билан кўчирма ҳаракат йиғиндисига тенг бўлади. Қўзғалувчи система бошқа бир қўзғалувчи системага нисбатан ҳаракатланса, у ҳолда мураккаб ҳаракат уч ҳаракат йиғиндисидан иборат бўлади. Умуман жисм бирданига бир қанча ҳаракатларда иштирок этиши мумкин. У ҳолда, унинг мураккаб ҳаракати ана шу ҳаракатларнинг йиғиндисига тенг бўлади.

## 124- §. Илгарилама ҳаракатларни қўшиш

Фараз қилайлик, қаттиқ жисм қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан $\bar{v}_r$ нисбий тезлик билан илгарилама ҳаракат қилсин. Қўзғалувчи координаталар системаси ҳам, ўз навбатида, илгарилама ҳаракатда бўлиб, унинг кўчирма тезлиги $\bar{v}_e$ бўлсин. Қаттиқ жисмнинг $M_1$ ва $M_2$ нуқталарини олиб, уларнинг мураккаб ҳаракат тезликларини топамиз. Жисм илгарилама ҳаракатда бўлгани учун $M_1$ ва $M_2$ нуқталарнинг нисбий тезликлари бир хилда бўлиб, улар $\bar{v}_r$ га тенгдир. Шунингдек, бу нуқталарнинг кўчирма ҳаракат тезликлари ҳам жисмнинг ҳамма нуқталари учун бир хилда бўлиб, улар $\bar{v}_e$ га тенг.



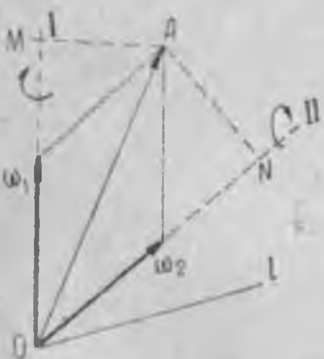

295- шакл.

Бу нуқталар тезликларини параллелограмм қоидасига биноан қўшиб, мураккаб тезликларни топамиз (295- шакл).

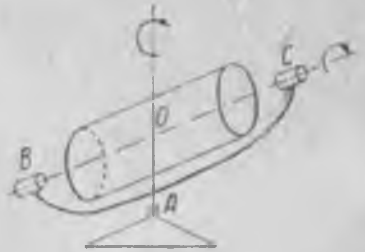
Улар бир-бирига тенг ва параллелдир: $v = \bar{v}_r + \bar{v}_e$; демак, илгарилама ҳаракатларнинг қўшилишидан яна илгарилама ҳаракат келиб чиқар экан. Унинг тезлиги қўшилувчи ҳаракатлар тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг. Шу каби мулоҳаза билан бир қанча илгарилама ҳаракатларни ҳам қўшишимиз мумкин, фақат тезликларни қўшишда параллелограмм урнига тезлик векторлар кўпбурчагини қуриш керак.

## 125- §. Бир-бири билан кесишувчи икки ўқ атрофида айланувчи жисм ҳаракатларини қўшиш

Жисм бир-бири билан кесишувчи икки ўқ атрофидаги айланма ҳаракатда иштирок этсин (296- шакл). Бу икки ўқ атрофидаги бурчак тезликлари тегишлича $\bar{\omega}_1$ ва $\bar{\omega}_2$ бўлсин. Жисмнинг мураккаб ҳаракатини топиш керак.




296- шакл.




297- шакл.

Мисол учун вертикал ўқ атрофида айланаётган рамага жойлашган $BC$ уқ атрофида айланувчи цилиндрни оламиз. Цилиндр бирданига икки кесишувчи ўқ атрофидаги айланма ҳаракатда иштирок этаётир (297- шакл). Ўқларнинг кесишган нуқтаси ҳамма вақт қўзғалмаганидан жисмнинг ҳаракатини бир қўзғалмас нуқтаси бор жисм ҳаракати каби текширишимиз мумкин. Бундай жисмнинг ҳаракати шу қўзғалмас нуқтадан ўтувчи оний ўқ атрофида оний айланиш ҳаракатидан иборат эканлиги бизга маълум. Оний ўқ ҳолатини аниқлаш учун, жисмда тезлиги ҳозирги онда нуль бўлган яна бир нуқтани топамиз. Бу нуқтани қўзғалмас нуқта билан туташтириб, оний ўқ ҳолатини аниқлаймиз. Шунинг билан баравар, жисмнинг мураккаб ҳаракатини аниқлаган бўламиз. Бунинг учун, бурчак тезлик векторларини ҳар қайси айланиш ўқи бўйича ўқларнинг кесишган $O$ нуқтасига келтирамиз ва бу векторларга параллелограмм қурамиз. Параллелограмм диагоналининг учи $A$ бўлсин. Шу $A$ нуқта тезлигини топамиз. Бу нуқта жисм билан биргаликда, иккала айланма ҳаракатда иштирок этади. Шунинг учун унинг тезлиги икки айланма тезлик йиғиндисидан иборат. $I$ ўқ атрофида айланганда:

$$v_A^{I} = \omega_1 \cdot MA. \qquad \text{(a)}$$

$II$ уқ атрофида айланганда:

$$v_A^{II} = \omega \cdot NA. \qquad \text{(б)}$$

Бу тезликлар шакл текислигига тик бўлиб, қарама-қарши томонларга йуналган. Уларнинг катталиги $\bar{\omega}_1$ ва $\bar{\omega}_2$ векторларга қурилган параллелограмм юзига тенглиги (а) ва (б) тенгликлардан кўриниб турибди. Шунинг учун, $A$ нуқтанинг мураккаб ҳаракат тезлиги нулга тенг бўлади:

$$v_A = \omega_1\ MA - \omega_2\ NA = 0.$$

Демак, $A$ нуқта оний айланиш ўқининг устида ётар экан. Шундай қилиб, оний айланиш ўқи $\omega_1$ ва $\omega_2$ га қурилган параллелограммнинг диагонали бўйлаб йўналар экан.

Энди, оний бурчак тезлигини аниқлаймиз. Бунинг учун, жисмда бирор $L$ нуқтани олиб, унинг мураккаб тезлигини топамиз (296- шакл):

$$\bar{v}_e = [\bar{\omega}_1 \bar{r}] + [\bar{\omega}_2 \bar{r}] = [\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{r}]. \qquad (125.\ 1)$$

Иккинчи томондан, жисм оний ўқ атрофида айлангани учун унинг ҳар қандай $L$ нуқтасининг тезлиги оний бурчак тезлиги билан радиус-вектор купайтмасига тенг:

$$\bar{v}_e = [\bar{\Omega} \bar{r}]. \qquad (125.\ 2)$$

$\bar{\Omega}$ — мураккаб ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги. $\bar{r} = \overline{OL}$.

Бу (125. 1) ва (125. 2) ифодалар бир нуқтанинг тезлигини аниқлагани учун, уларнинг ўнг томонлари ўзаро тенг бўлади:

$$[\bar{\Omega} \bar{r}] = [\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{r}]. \qquad (125.\ 3)$$

Бундан:

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \qquad (125.\ 3')$$

Демак, *бир нуқтада кесишувчи иккита уқ атрофида айланадиган қаттиқ жисм ҳаракатини бир оний уқ атрофида айланиш ҳаракати билан алмаштириш мумкин экан. Бу оний уқ ҳамма вақт икки бурчак тезлигига қу-*

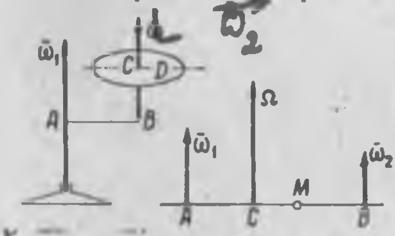
*рилган параллелограмм диагонали бўйлаб йўналиб, оний бурчак тезлиги эса диагоналнинг узунлигига тенг бўлар экан.* $\bar{\omega}_1$ ва $\bar{\omega}_2$ бурчак тезликлари орасидаги бурчак $\alpha$ бўлса, оний бурчак тезлигининг катталиги:

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \cos\alpha} \qquad (125.\ 4)$$

бўлади.

## 126- §. Икки параллел ўқ атрофида айланувчи жисм ҳаракатларини қўшиш

Қаттиқ жисм икки параллел ўқ атрофида $\omega_1$ ва $\omega_2$ бурчак тезликлари билан бир томонга қараб айлансин. Мисол учун 298- шаклда кўрсатилган $D$ дискни оламиз. Бу диск ўз ўқи атрофида $\bar{\omega}_2$ бурчак тезлиги билан ва бу ўққа параллел бўлган бошқа ўқ атрофида $\omega_1$ бурчак тезлиги билан айланади. Демак, бу диск икки параллел ўқ атрофидаги ҳаракатда иштирок этади. Айланиш ўқларига параллел ҳар қандай тик




298- шакл.

чизиқ устидаги нуқталарнинг тезликлари бир хилда бўлгани учун, бу ўқларга тик бир $AB$ текисликни ўтказамиз. Бу текисликдаги бирор $M$ нуқта ҳаракатини текширамиз. Бу нуқта ҳаракати бутун жисмнинг ҳаракатини белгилаши табиийдир (298- шакл). Бу нуқтанинг тезлиги икки қисмдан иборатдир:

$$v_M = \omega_1 \cdot MA - \omega_2 MB. \qquad (126.\ 1)$$

$AB$ да шундай бир нуқтани топиш мумкинки, унинг шу ондаги мураккаб тезлиги нулга тенг бўлсин. У ҳолда бу нуқта жисмнинг оний маркази бўлади. Фараз қилайлик, бу айтилган нуқта $C$ бўлсин, у ҳолда:

$$v_c = \omega_1 AC - \omega_2 BC = 0. \qquad (126.\ 2)$$

Берилган ўқларга параллел қилиб, мазкур $C$ нуқтадан ўтказилган ўқ оний айланиш ўқидир. (126. 2) дан оний айланиш ўқининг ҳолатини топамиз:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{AC}{BC}. \qquad (126.\ 3)$$

Оний бурчак тезлигини аниқлаш учун $A$ ёки $B$ нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$v_A = \omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot AB. \qquad (126.\ 4)$$

нотўғри .

Иккинчи томондан, жисмнинг оний айланиш ўқи атрофидаги ҳаракатини эътиборга олсак:

$$v_A = \Omega \cdot AC. \qquad (126.\ 5)$$

$\Omega$ — мураккаб ҳаракатнинг оний бурчак тезлиги.

(126. 4) ва (126. 5) дан:

$$\Omega \cdot AC = \omega_2 \cdot AB.$$

Бундан:

$$\Omega = \omega_2 \frac{AB}{AC} = \omega_2 \frac{AC + CB}{AC} = \omega_2 \left(1 + \frac{CB}{AC}\right).$$

(126. 3) эътиборга олинса:

$$\Omega = \omega_2 \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \omega_1 + \omega_2$$

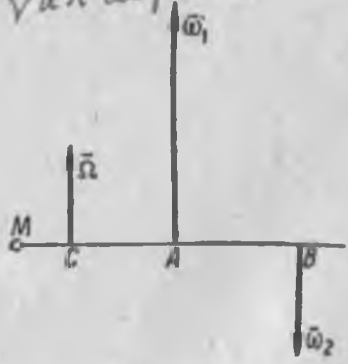
ёки

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad (126.\ 6)$$

бўлади.

Демак, *бир-бирига параллел икки ўқ атрофида бир томонга қараб айланувчи жисмнинг оний айланиш ўқи параллел ўқлар орасини туташтирувчи кесмани бурчак тезликларига нисбатан тескари пропорционал қисмларга бўлади, оний бурчак тезлиги эса берилган бурчак тезликларининг йиғиндисига тенг.*

алгебраик




299- шакл.

Энди жисм бир-бирига параллел икки ўқ атрофида қарама-қарши томонга қараб катталиклари ҳар хил бўлган бурчак тезлиги билан айланганда ги ҳолни текширамиз. Бунинг учун $AB$ нинг давомида олинган бирор $C$ нуқта тезлигини топамиз (299- шакл).

$\omega_1 > \omega_2$ деб фараз қилайлик.

Нуқтанинг тезлиги:

$$v_c = AC \cdot \omega_1 - \omega_2 \cdot CB.$$

Бу нуқтани шундай танлаймизки, унинг бу ондаги тезлиги нулга тенг, яъни:

$$v_c = AC \cdot \omega_1 - CB\ \omega_2 = 0$$

бўлсин. Бундан:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{CB}{AC}. \qquad (126.\ 7)$$

$C$ нуқтанинг тезлиги нулга тенг бўлгани учун, бу нуқтадан берилган ўқларга параллел қилиб утказилган чизиқ оний айланиш ўқи, $C$ нуқта эса оний марказ бўлади. Жисмнинг шу оний айланиш ўқи атрофидаги оний бурчак тезлигини топамиз. Бунинг учун юқоридаги мулоҳаза асосида қуйидаги тенгламаларни ёзамиз:

$$v_A = AB \cdot \omega_2,$$
$$v_A = AC \cdot \Omega. \tag{126. 8}$$

Булардан:

$$\Omega = \frac{AB}{AC} \cdot \omega_2 = \frac{CB - AC}{AC} \omega_2 = \left(\frac{CB}{AC} - 1\right) \omega_2.$$

(126. 7) ни эътиборга олсак:

$$\Omega = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1\right) \omega_2$$

ёки

$$\Omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{126. 9}$$

булади.

Демак, *жисм параллел ўқ атрофида қарама-қарши томонга қараб айланса, унинг оний айланиш ўқи шу ўқларни туташтирувчи кесманинг давомида бўлиб, бу кесмани бурчак тезликларига нисбатан ташқари равишда тескари пропорционал қисмларга булади, оний бурчак тезлиги эса қайси бурчак тезлиги катта булса, шу томонга қараб йўналиб, бурчак тезликларнинг айирмасига тенгдир.*

Оний айланиш ўқининг ҳолатини берилган ўқлардан бирортасига нисбатан аниқлаймиз. Бунинг учун, (126. 7) дан ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{CB - CA}{CA} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}$$

ёки

$$\frac{AB}{CA} = \frac{\Omega}{\omega_2}.$$

Демак:

$$CA = AB \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}. \tag{126. 10}$$

### 127- §. Жуфт айланиш

Жисм параллел икки ўқ атрофида қарама-қарши томонга катталиклари тенг бўлган бурчак тезликлари билан айланса, бундай ҳаракат жуфт айланиш дейилади.

Жисм параллел икки ўқ атрофида қарама-қарши томонга айланиб, уларнинг бурчак тезликлари катталик жиҳатидан бир-бирига тенг бўлсин, яъни: $|\bar{\omega}_1| = |\bar{\omega}_2| = |\bar{\omega}|$. Бу ҳолда, (126. 10) га биноан, оний айланиш ўқи чексизда туради, яъни мураккаб ҳаракат чексиздаги оний айланишдан иборат бўлиб, тегишли оний айланиш бурчак тезлиги нулга тенгдир. Демак, бу ҳолда жисм илгарилама ҳаракатда бўлади.


300- шакл.

Теорема. *Жуфт айланишдаги жисм ҳамма нуқталарининг тезлиги бир хилда бўлиб, уларнинг катталиги бурчак тезликларидан бири билан ўқлар оралиги кўпайтмасига тенг.*

Жисмдан бирор ихтиёрий $M$ нуқтани олиб, унинг тезлигини топамиз (300- шакл).

$$\bar{v}_M = [\bar{\omega}, -\overline{MA}] + [-\bar{\omega}, \overline{BM}] = [\bar{\omega}, -\overline{MA} - \overline{BM}] = [\bar{\omega}, \overline{AB}],$$

ёки:

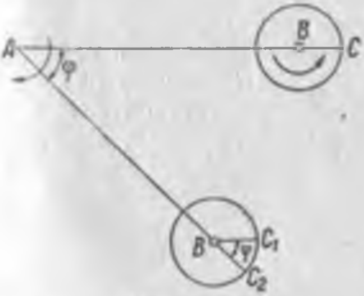
$$v_M = \omega \cdot d, \text{ чунки } \bar{\omega} \perp \overline{AB}.$$

Демак:

$$v = \omega \cdot d. \tag{127. 1}$$

Шундай қилиб, теорема исботланди.

Жуфт айланиш илгарилама ҳаракатга эквивалент эканлигини мисолда кўрсатамиз. $AB$ кривошипнинг $B$ ўқига эркин равишда ғилдирак ўрнатилган (301- шакл). Ғилдирак $B$ ўқ атрофида $\omega$ бурчак тезлиги билан соат стрелкасига тескари томонга, $AB$ кривошип билан биргаликда эса $A$ ўқ атрофида шу $\omega$ бурчак тезлиги билан соат стрелкаси айланган томонга айлансин. $AB$ кривошип $A$ ўқ атрофида $t$ вақт ичида $\varphi$ бурчакка айланганда, ғилдирак ўзининг $B$ ўқи атрофида шу вақтнинг ичида худди шундай бурчакка тескари томонга айланади. Шунинг учун $\angle BAB_1 = \angle C_1B_1C_2$. Бошқача айтганда, $BC \parallel B_1C_1$ бўлади. Демак, ғилдиракнинг устида олинган ҳар қандай кесма илгарилама ҳаракатда бўлар экан. Шундай қилиб, жуфт айланиш ҳаракатидаги жисм илгарилама ҳаракатда бўлади.

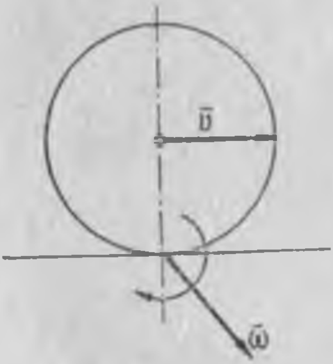



301- шакл.

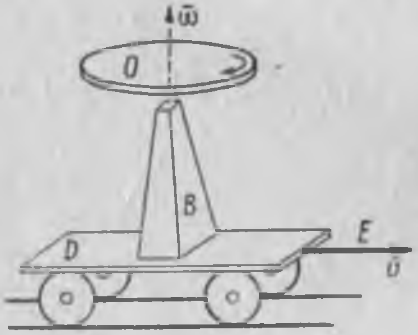
## 128- §. Жисмнинг илгарилама ҳаракати билан айланма ҳаракатини қўшиш

Айланма ҳаракатдаги жисм айланиш ўқи билан биргаликда илгарилама ҳаракатда ҳам иштирок этсин. Шу икки ҳаракатда иштирок этаётган жисмнинг мураккаб ҳаракатини топиш керак:

1 - ҳ о л. Илгарилама ҳаракат тезлиги айланиш ўқига тик йўналган бўлсин. Мисол учун, рельсда юмаловчи гилдиракни олсак, унинг марказининг $\bar{v}$ илгарилама тезлиги, ғилдирак текислигига тик, $\bar{\omega}$ бурчак тезлигига тик бўлади. Бу икки вектор ўзаро тик йўналган (302- шакл).




302- шакл.




303- шакл.

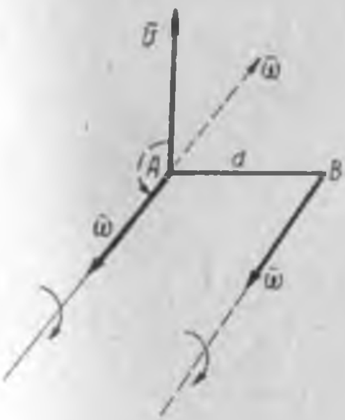
Бошқа мисол учун, горизонтал текисликда илгарилама ҳаракатдаги платформага ўрнатилган вертикал ўқ атрофида айланувчи дискни оламиз (303- шакл). Платформа ҳаракатининг йўналиши диск ўқига тик бўлгани учун, $\bar{v} \perp \bar{\omega}$ бўлади. Бу ҳаракатни қўшиш учун, илгарилама ҳаракат тезлигини жуфт айланишга ажратамиз. Жуфт айланишнинг тузувчисини шундай танлаймизки, у $\bar{\omega}$ га тенг бўлсин. У ҳолда жуфт айланишнинг оралигини, (137. 1) га мувофиқ, қуйидагича ифодалаймиз:

$$d = \frac{v}{\omega}.$$

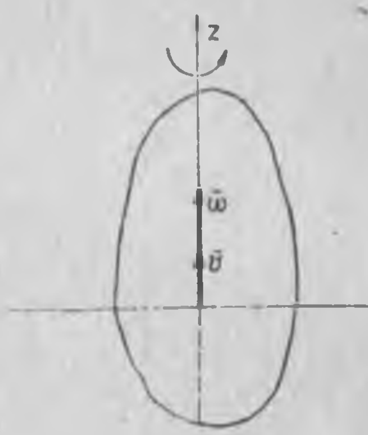
$\bar{v}$ ни жуфт айланиш билан алмаштириш натижасида қарама-қарши ва бир-бирига тенг бурчак тезликлари $A$ дан ўтувчи ўқ бўйлаб йўналгани учун, бу ўқ атрофида ҳеч қандай айланиш бўлмайди. Жуфтнинг тузувчиси, $AB = d = \frac{v}{\omega}$ масофасидан ўтувчи ўқ бўйлаб йўналади (304- шакл).

Шундай қилиб, ҳаракат $B$ нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланишга келтирилди. Демак, илгарилама ҳаракат тезлиги билан айланма ҳаракат ўқлари бир-бирига тик бўлса, ҳаракатларни қўшиш натижасида, айланма ҳаракат келиб чиқар экан. Бу айланиш ўқи эски ўққа параллел бўлиб, уларнинг ораси: $d = \frac{v}{\omega}$. Бу ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги эса берилган бурчак тезлигига тенг.

2-ҳол. Илгарилама ҳаракат билан айланма ҳаракат ўқи бир йўналишда бўлсин (305-шакл). Жисм қўзғалмас ўқ ат-



304-шакл.



305-шакл.

рофида $\omega$ бурчак тезлиги билан айланиб, шунинг билан баравар, айланиш ўқи бўйлаб $v$ тезлик билан илгарилама ҳаракатда булсин. Бу ҳолда жисмнинг ҳаракати бир чизиқ билан йўналган $\bar{\omega}$ ва $\bar{v}$ векторлар билан аниқланади.

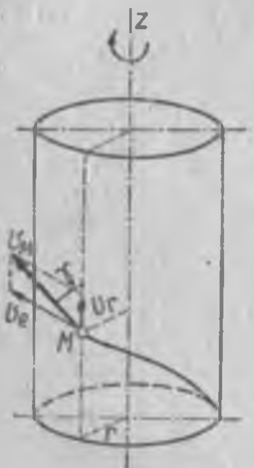
Бундай ҳаракатларнинг қўшилиши натижасида винт ҳаракатининг келиб чиқиши бизга маълум. $\bar{\omega}$ бурчак тезлиги ва $\bar{v}$ илгарилама ҳаракат тезлиги бир томонга қараб йўналган бўлса, винт ўнг системали, қарама-қарши бўлса, винт чап системали бўлади.

$\frac{\bar{v}}{\bar{\omega}} = p$ нисбати винт ҳаракатининг параметри ёки винт параметри дейилади. Жисмнинг айланиш ўқи атрофидаги айланиш бурчагини $\theta$, шу ўқ бўйлаб кўтарилишини $s$ десак: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ва $v = \frac{ds}{dt}$ ни оламиз. Бундан:

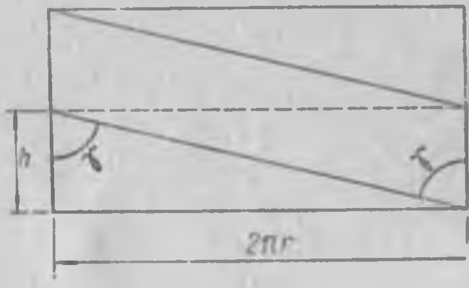
$$p = \frac{ds}{d\theta} \tag{128. 1}$$

Винт қўзғалмас гайкада ҳаракатланса, унинг параметри ўзгармас бўлади. Бундай винт учун (128. 1) ни интеграллаймиз. Қуйи ва юқори лимитлари 0, $s$ ва 0, $\theta$ бўлсин; у ҳолда $s = p\theta$. Агар $\theta = 2\pi$ ва $s = h$ бўлса, $h = 2\pi p$ ёки $p = \frac{h}{2\pi}$ бўлади. Жисм ўз ўқи атрофида тўла айланишда шу ўқ бўйлаб кўтарилиш масофаси $h$ — винтнинг қадами дейилади (51- масалада винт ҳаракати, винт чизиғи тенгламаси берилган эди).

Винт чизиғи устида олинган бирор $M$ нуқтанинг тезлиги икки тезлик йиғиндисига тенг: 1) нисбий айланма ҳаракат тезлиги $v_r = \omega r$, 2) кўчирма — илгарилама ҳаракат тезлиги $v_e = v$




306- шакл.




307- шакл.

(306- шакл). Бу тезликлар ўзаро тик бўлганлигидан, мураккаб тезлик қуйидагича бўлади:

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2} = \omega \sqrt{p^2 + r^2}. \qquad (128.\ 2)$$

Мураккаб тезлик билан винт чизиғи ўралган цилиндр ясовчиси орасидаги $\gamma$ бурчак қуйидаги формуладан топилади:

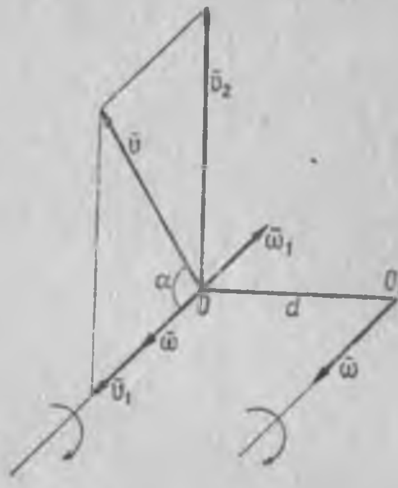
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_r}{v_e} = \frac{r\omega}{p\omega} = \frac{r}{p}. \qquad (128.\ 3)$$

$p = \text{const}$ бўлса, $\gamma$ бурчак ҳам ўзгармас бўлади. Бу ҳолда винт чизиғи цилиндр ясовчиси билан бир хилдаги бурчак остида кесишади. Цилиндр ясовчиси бўйлаб кесиб ёйилса, винт чизиғи бир хилда қия параллел тўғри чизиқларни беради (307- шакл). Винт қадамини аниқлаш учун, шаклдан қуйидаги формулани чиқарамиз:

$$h = 2\pi r \operatorname{ctg} \gamma. \qquad (128.\ 4$$

3-ҳол. Айланиш ўқи билан илгарилама ҳаракатнинг тезлик вектори ихтиёрий бурчак ташкил этсин. Бу ҳолда илгарилама ҳаракат тезлигини икки тузувчига ажратиб, уларнинг бирини $\bar{\omega}$ йўналишида, иккинчисини унга тик қилиб оламиз (308- шакл):

$$v_1 = v \cdot \cos\alpha,$$
$$v_2 = v \cdot \sin\alpha.$$



308- шакл.

$v_2$ тезлик $\omega$ га тик йўналганлиги учун уни жуфт айланиш билан алмаштиришимиз мумкин. Фақат жуфт айланишнинг тузувчисини $\bar{\omega}$ га тенг қилиб оламиз. $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}$ бўлгани учун, $O$ нуқтада: $(\bar{\omega}, \bar{\omega}_1) \backsim 0$. Натижада жисм ҳаракатини тезлиги $v_1 = v \cdot \cos\alpha$ бўлган илгарилама ҳаракат билан унга параллел ва ундан $d = \frac{v \sin\alpha}{\omega}$ масофадаги ўқ атрофида айланма ҳаракатга келтирдик. Илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг барча нуқталари тезлиги бир хилда бўлгани учун, $v_1$ ни $O$ дан $O_1$ га келтиришимиз мумкин. Бунинг натижасида $v_1$ билан $\omega$ бир йўналишда бўлиб, уларнинг қўшилиши винт ҳаракатини беради. Фақат бу винтнинг ўқи берилган айланиш ўқига параллел бўлиб, ундан $d = \frac{v \cdot \sin\alpha}{\omega}$ масофада туради. Демак, бу ҳолда ҳам жисм ҳаракатларнинг қўшилиши натижасида яна винт ҳаракатини олдик.

Бу винтнинг параметри ва қадами учун қуйидагиларни оламиз:

$$p = \frac{v \cdot \cos\alpha}{\omega}. \tag{128. 5}$$

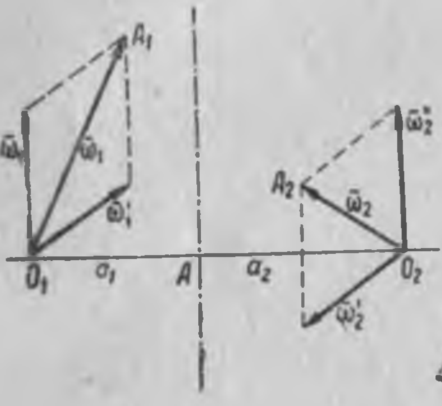
$$h = 2\pi \frac{v \cos\alpha}{\omega}. \tag{128. 6}$$

## 129- §. Бир-бири билан кесишмайдиган ва параллел бўлмаган икки ўқ атрофида айланувчи жисм ҳаракатларини қўшиш

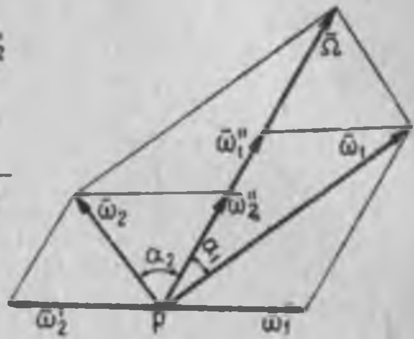
Бир-бири билан кесишмайдиган икки $O_1A_1$ ва $O_2A_2$ ўқлар берилган. Уларнинг энг яқин оралиги $O_1O_2 = a$ бўлсин. $\omega_1$ ва $\omega_2$ — бу ўқларга тегишли бурчак тезликлари (309- шакл).

Ана шу ҳаракатларни қўшамиз.

Теорема. *Кесишмайдиган ва параллел бўлмаган икки ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларнинг қўшилиши винт ҳаракатини беради.*




309- шакл




310- шакл.

Теоремани исботлаш учун, бирор $P$ нуқтани олиб, бу нуқтада $\omega_1$ ва $\omega_2$ бурчак тезликларига параллелограмм қурамиз (310- шакл). Унинг диагонали:

$$\overline{\Omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}$$

бўлади.

Шаклдан:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}. \qquad (129.\ 1)$$

$\overline{\omega_1}$ ва $\overline{\omega_2}$ нинг ҳар бирини икки тузувчига ажратамиз. Тузувчилардан бирини $\overline{\Omega}$ га тик, иккинчисини унга параллел қилиб оламиз:

$$\overline{\omega_1} = \overline{\omega_1'} + \overline{\omega_1''}, \quad \overline{\omega_2} = \overline{\omega_2'} + \overline{\omega_2''}.$$

Бунда:

$$\overline{\omega_1'} \perp \overline{\Omega} \text{ ва } \overline{\omega_2'} \perp \overline{\Omega} \text{ ҳам } \overline{\omega_1''} \parallel \overline{\omega_2''} \parallel \overline{\Omega}.$$

Шунга кўра, шаклдан:

$$\omega_1' = \omega_1 \sin\alpha_1,$$
$$\omega_2' = \omega_2 \sin\alpha_2 \qquad (129\ .2)$$

бўлади.

(129. 1) ни эътиборга олиб, (129. 2) дан $\omega_1' = \omega_2'$ эканлигини чиқарамиз. $\omega_1'$ ва $\omega_2'$ бурчак тезликлари $O_1$ ва $O_2$ нуқталарга қўйилган бўлиб, қарама-қарши йўналганидан, жуфт айланиш ҳосил қилади. Шунга кўра, уларнинг тезлиги $v$ бўлган илгарилама ҳаракатга эквивалент булади, яъни $(\omega_1', \omega_2') \backsim v$. Илгарилама ҳаракат $v$ тезлиги жуфт айланиш $(\omega_1', \omega_2')$ текислигига тик йўналган. Шунинг учун $v$ тезлик $\Omega$ билан бир йўналишдадир. (127. 1) га биноан, бу тезлик катталиги:

$$v = \omega_1' \cdot O_1O_2 = \omega_1 a \sin\alpha_1. \qquad (129.\ 3)$$

310- шаклдан $\sin\alpha_1 = \frac{\omega_2}{\Omega} \sin\alpha$ бўлгани учун:

$$v = \frac{\omega_1\omega_2}{\Omega} a \sin\alpha. \qquad (129.\ 4)$$

$\omega_1''$ ва $\omega_2''$ бурчак тезликларини қўшиш натижасида бу векторларга параллел ўқ атрофида оний айланиш ҳаракатини оламиз. Оний айланиш бурчак тезлигининг $\Omega$ га тенглиги 310- шаклдан кўриниб турибди. Унинг катталиги:

$$\Omega = \omega_1\cos\alpha_1 + \omega_2\cos\alpha_2. \qquad (129.\ 5)$$

$\Omega$ ўқ $O_1O_2$ оралиқни $\omega_1''$ ва $\omega_2''$ га тескари пропорционал қисмларга бўлиб ўтади. Уларни тегишлича $a_1$ ва $a_2$ десак, 309- шаклдан:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega_2''}{\omega_1''} = \frac{\omega_2\cos\alpha_2}{\omega_1\cos\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Демак:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} \qquad (129.\ 6)$$

ва

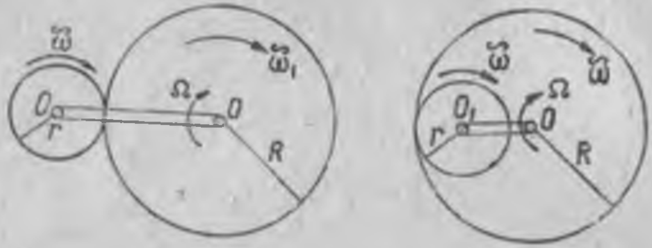
$$a_1 + a_2 = a.$$

Бу ерда $O_1O_2$ нинг оралигини $a$ билан белгиладик. $\Omega$ билан $v$ параллел булгани учун уларнинг йиғиндиси винт ҳаракатини беради. (129. 5) ва (129. 6) формулалар бу винт ҳаракатини тўла аниқлайди. Бу ҳол учун винт параметри қуйидагича ифодаланади:

$$P = \frac{v}{\Omega} = \frac{\omega_1\omega_2 a\sin\alpha}{(\omega_1\cos\alpha_1 + \omega_2\cos\alpha_2)^2}. \qquad (129.\ 7)$$

## 130- §. Эпициклик механизмлар

Юқорида чиқарилган формулаларни татбиқ қилиш учун бир қанча амалий масалалар ечамиз. Параллел ўқларга доир масалалар учун мисол тариқасида эпициклик механизмларни оламиз. Ҳаракатланувчи дастага ўрнатилган ва параллел ўқлар атрофида айланувчи икки ёки бир қанча гилдиракнинг




311- шакл.

қўшилишидан ҳосил бўлган механизм эпициклик механизм дейилади (311- шакл). Эпициклик механизм таркибидаги ғилдиракларнинг четидагидан бирининг ўқи қўзгалмас бўлиши керак. Ғилдиракларнинг қўшилиши ички ва ташқи равишда бўлади. Айланувчи даста учига боғланган ғилдирак сателлит дейилади. Ташқи ва ички равишда қушиладиган ҳоллар учун, гилдираклар ва даста бурчак тезликлари орасидаги умумий муносабатни тузамиз.

Қузгалмас ўқ атрофида айланувчи ғилдиракнинг бурчак тезлиги $\omega_1$, дастанинг бурчак тезлиги $\Omega$ ва сателлитники $\omega$ бўлсин. Шаклда ҳамма бурчак тезликлари соат стрелкаси айланишида кўрсатилган. Уларнинг ишораси ҳақиқий айланиш йўналишини курсатади (яъни манфий ишорада бўлса, тескари йўналишда бўлади). Қуйилган масалани ечиш учун Виллис усулидан фойдаланамиз. Бутун механизм асосига даста бурчак тезлигига тенг ва унга қарама-қарши йўналган бурчак тезлигини берамиз. У ҳолда дастанинг абсолют бурчак тезлиги нуль бўлиб, даста қўзғалмас ҳолатда бўлади. Натижада қўзгалмас икки параллел ўқ атрофида айланувчи ғилдираклар қўшилмасини оламиз. Бу ғилдиракларнинг абсолют бурчак тезликлари тегишлича $\omega_1 - \Omega$ ва $\omega - \Omega$ бўлади. Мазкур бурчак тезликлари билан гилдираклар радиуслари орасидаги муносабат қуйидагича ёзилади:
ташқи илашиш учун:

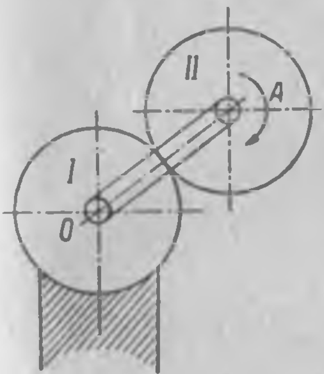
$$\frac{\omega - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = -\frac{R}{r}, \qquad (130.\ 1)$$

ички илашиш учун:

$$\frac{\omega-\Omega}{\omega_1-\Omega}=\frac{R}{r}. \tag{130. 2}$$

Бу формулалардан фойдаланиб, параллел ўқлар атрофидаги ҳаракатга доир турли масалаларни ечиш мумкин.

**79- масала.** *OA* кривошип воситаси билан ҳаракатга келувчи *II* тишли ғилдирак қўзғалмас *I* тишли ғилдиракда юмалайди. Ғилдираклар радиуслари бир хилда. Кривошипнинг бурчак тезлиги $\omega_0$. *II* ғилдиракнинг нисбий ва абсолют бурчак тезликлари топилсин (312- шакл).




312- шакл.

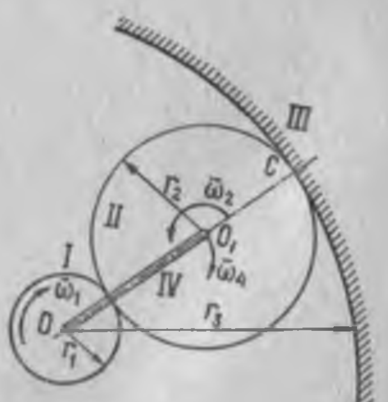
Ечиш. Кривошипнинг ҳаракати кўчирма, *II* ғилдиракнинг кривошипга нисбатан айланиши нисбий ва унинг *I* ғилдиракка нисбатан айланиши абсолют бўлади. (130. 1) дан фойдаланамиз. Текширилаётган масалада $\Omega$ ўрнида $\omega_0$, *I* ғилдирак қўзғалмас бўлганидан $\omega_1=0$. Шунинг учун:

$$\frac{\omega-\omega_0}{-\omega_0}=-\frac{r}{r}.$$

Бу тенгламадан *II* ғилдиракнинг абсолют бурчак тезлигини топамиз, у $\omega=2\omega_0$. Нисбий бурчак тезлиги:

$$\omega_2=\omega-\omega_1=\omega.$$

**80- масала.** Етакловчи вал етарли тез айланмаса, бурчак тезлигини ошириш учун қуйидаги механизм ишлатилади (313- шакл). *IV* даста *O* қўзғалмас марказ атрофида айланиб, унинг бошқа $O_1$ учига радиуси $r_2$ бўлган ғилдирак ўрнатилган. Бу ғилдирак радиуси $r_3$ бўлган обойма (қўзғалмас цилиндрик сирт) билан илашган *III* ғилдиракнинг шу қўшилиш натижасида олган бурчак тезлиги *O* ўққа эркин ўтказилган *I* ғилдиракка берилади. Даста бурчак тезлиги билан *I* ғилдиракнинг бурчак тезлиги орасидаги муносабат топилсин.




313- шакл.

Ечиш. Виллис усулидан фойдаланамиз. Бу ҳолда обойманинг бурчак тезлиги $\overline{\omega_4}$, *I* ғилдиракники $\omega_1-\overline{\omega_4}$ бўлади. Бу тарзда текширишда $O_1$ ва *O* ўқлар қўзғалмайди, *II* ғилдирак эса воситачи бўлиб қолади. Бироқ бу ғилдиракнинг мавжуд бўлиши натижасида, *I* ғилдиракдан *III* ғилдиракка берилган ҳаракатнинг йўналиши ўзгаради.

(130. 1) га мувофиқ:

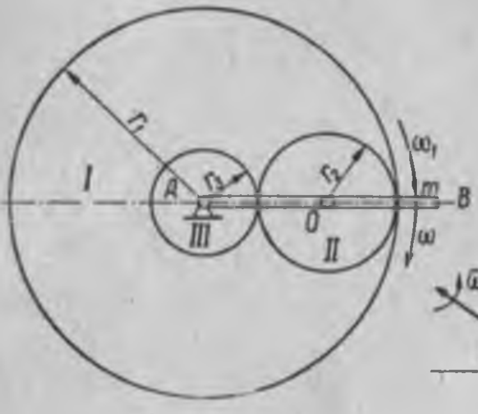
$$\frac{\omega_1-\omega_4}{-\omega_4}=-\frac{r_3}{r_1}.$$

Бундан:

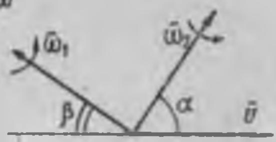
$$\omega_1 = \frac{r_3 + r_2}{r_2}\omega_4.$$

Агар $r_3 = 9r_1$ бўлса, $\omega_1 = 10\ \omega_4$ бўлади.

**81- масала.** Баретто механизми қуйидагича тузилган (314- шакл). Тишлари ичкарисига ўйилган, радиуси $r_1$ бўлган катта ғилдирак $I$ нинг маркази $A$ га ўқ ўрнатилган. Бу ўққа радиуси $r_3$ бўлган тишли $III$ ғил-




314- шакл.




315- шакл.

дирак билан етакловчи $AB$ даста ўтказилган. Етакловчи $AB$ даги $O$ ўққа радиуси $r_2$ бўлган тишли $II$ ғилдирак ўтказилган. Бу ғилдирак $III$ ғилдирак билан ташқи, $I$ ғилдирак билан ички равишда илашган. Етакловчи $AB$ ва $I$ ғилдиракнинг бурчак тезликлари тегишлича $\omega_1$ ва $\omega$. $III$ ғилдиракнинг бурчак тезлиги $\omega_3$ топилсин.

Ечиш. Виллис усулидан фойдаланиб, (130. 1) ва (130. 2) ни қўллаймиз. Бутун механизмни $-\omega$ бурчак тезлиги билан тескарига айлантирамиз.

$I$ ва $II$ ғилдираклар учун:

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega} = \frac{r_2}{r_1}.$$

$II$ ва $III$ ғилдираклар учун:

$$\frac{\omega_3 - \omega}{\omega_2 - \omega} = -\frac{r_2}{r_3}.$$

Бу тенгламаларнинг нисбатини оламиз:

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_3 - \omega} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Бундан:

$$\omega_3 = \omega\left[1 + \frac{r_1}{r_3}\right] - \omega_1\frac{r_1}{r_3}.$$

Бундан кўрамизки, *I* ғилдиракнинг айланиши етакловчига нисбатан тескари бўлса, *III* ғилдиракнинг тезлиги катта қийматга эга бўлар экан.

**82- масала.** Ҳозирги онда икки: $\omega_1 = \sqrt{5}$ ва $\omega_2 = 2$ бурчак тезликлари билан айланувчи жисм тезлиги $v = 6$ *м/сек* бўлган илгарилама ҳаракатда ҳам иштирок этади. $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ ва $\bar{v}$ векторлар бир текисликда ётади (315- шакл). $\omega_1$ ва $\omega_2$ илгарилама ҳаракат тезлиги $v$ билан $\alpha = 60°$ ва $\beta = 30°$ ларни ташкил этади. Жисмнинг мураккаб ҳаракати топилсин.

Ечиш. $\omega_1$ билан $\omega_2$ нинг қўшилишидан чиққан $\Omega$ оний бурчак тезлиги илгарилама ҳаракатга тик йўналади. Унинг катталиги:

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 2\sqrt{3}\ {}^1/\text{сек}.$$

$\bar{v}$ ни жуфт айланиш ҳаракатига ажратамиз. Унинг тузувчисини $\bar{\Omega}$ га тенг қилиб оламиз: у ҳолда жисм $d = \frac{v}{\Omega}\sqrt{3}$ *м* масофадаги ўқ атрофида $\Omega = 2\sqrt{3}\ {}^1/$*сек* бурчак тезлиги билан айланади.

# МАТЕРИАЛ НУҚТА ДИНАМИКАСИ

## XXI БОБ УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

### 131- §. Динамиканинг асосий тушунчалари

Курсимизнинг кинематика бўлимида ҳаракатни фақат геометрик нуқтаи назардангина текширган эдик. Энди, ҳаракатни уни вужудга келтирувчи сабабларга боғлаб текширишга ўтамиз.

Механиканинг ҳаракатни уни вужудга келтирувчи сабабларга боғлаб текширадиган қисми *динамика* дейилади.

Ҳаракат қилаётган жисмнинг кинематик элементларини унинг массаси ва қўйилган кучлар билан боглаш масаласи тажрибага асосланган мулоҳазалар билан аниқланади. Бу масала билан шуғулланган Галилей жисмнинг ҳаракати ташқи куч таъсир этгандагина ўзгаради деган фикрни айтган эди.

Динамика масалаларини ечишдан аввал қуйидаги мулоҳазаларни кўздан кечирамиз.

Механикада ҳар қандай материал жисмни фикран материал нуқталарнинг йиғиндиси ёки система деб қараш мумкинлиги ҳақида муқаддимада айтиб ўтган эдик.

Аввало, айрим материал нуқтанинг ҳаракат қонунини ўрганамиз. Сўнгра, чиққан натижани бир қанча материал нуқталар учун умумлаштириб, система ҳаракатининг қонунларини чиқарамиз. Шунинг учун ҳам, материал нуқта динамикасини материал нуқталар системаси динамикасига муқаддима деб ҳисоблаш мумкин. Лекин, айрим ҳолларда, нуқтанинг ҳаракатини текшириш билан ҳам масалани ҳал қилиб бўлади. Масалан, илгарилама ҳаракат қилаётган жисмнинг ҳаракатини ўрганиш учун ундаги бир нуқтанинг ҳаракатини текшириш кифоя.

### 132- §. Механиканинг асосий қонунлари

Материал нуқта динамикасини ўрганиш учун, дастлаб механика қонунларини таърифлаймиз. Механика қонунларини даставвал Ньютон ифода қилганлиги ҳақида курсимизнинг бошида тўхтаб ўтган эдик. Ташқи муҳитдан ажратилган материал нуқтани, яъни бирорта ҳам материал жисм таъсирида бўлмаётган материал нуқтани тасаввур қиламиз. Бундай материал нуқта учун механиканинг биринчи қонуни қуйидагича таърифланади:

1 - қонун (инерция қонуни). *Ташқи муҳитдан ажратилган материал нуқта ташқи куч таъсир этмагунча ўзининг тинчлик ҳолатини ёки тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатини сақлашга интилади.*

Бинобарин, материал нуқта ўз тезлигини ўзича ўзгартира олмайди ва ўз-ўзига тезлик бера олмайди. Материал нуқтанинг тезлигини ўзгартириш учун, бирор ташқи таъсир бўлиши керак. Материал нуқтанинг бу хусусияти унинг инертлиги дейилади. Механиканинг бу ҳодисани таърифловчи биринчи қонуни эса инертлик қонуни деб аталади.

Энди, тўғри чизиқли ва тенг ўлчовли ҳаракатда бўлмай, балки маълум тезланиш билан ҳаракатланаётган материал нуқтани кўз олдимизга келтирамиз. Бундай материал нуқта ташқи муҳитдан ажратилган бўлмай, балки бошқа бир материал жисм таъсирида бўлади.

Материал нуқта бошқа бир материал жисм таъсирида бўлса, унинг ҳаракати ўзгаради, ҳаракатни ўзгартирувчи бу сабаб ***куч*** деб аталади.

2 - қонун. *Материал нуқтанинг ҳаракатлантирувчи куч таъсиридан олган тезланиши шу куч билан бир йўналишда бўлиб, миқдори куч миқдорига пропорционалдир.*

Материал нуқтага қўйилган кучни $\overline{F}$, бу куч таъсиридан материал нуқта олган тезланишни $\overline{w}$ десак, иккинчи қонуннинг математик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\overline{F} = m\overline{w}. \qquad (132.\ 1)$$

Бу ерда $m$ — ўзгармас миқдор. Ўзгармас $m$ қанча катта булса, материал нуқтага $w$ тезланишни бериш учун унга шунча катта $F$ куч қўйиш керак.

Яъни, $m$ қанча катта булса, материал нуқтанинг инертлиги шунча зўр бўлади. Бу ўзгармас $m$ миқдор берилган материал нуқтанинг *массаси* дейилади. $\overline{F}$ куч билан бу кучнинг материал нуқтага берган $\overline{w}$ тезланиши орасидаги математик боғланишни ифодаловчи (132. 1) вектор тенглама *динамиканинг асосий тенгламаси* дейилади. Масса материал нуқтанинг инертлик ўлчови эканлигини яна бир карра таъкидлаб ўтамиз: масса материал нуқтага қўйилган куч билан мазкур нуқта тезланишининг нисбатига тенг бўлган ўзгармас сондир, яъни:

$$m = \frac{F}{w}. \qquad (132.\ 2)$$

Энди, массани ўлчаш масаласига ўтамиз. Ўз оғирлик кучи таъсирида ерга эркин тушаётган материал нуқтани оламиз. Бу материал нуқтанинг оғирлик кучини $P$, массасини $m$ деймиз. Бўшлиқда эркин тушувчи нуқтанинг тезланиши $g$ билан белгиланади. Бу физикадан маълум. Бу хусусий ҳол учун динамиканинг асосий тенгламасини татбиқ қилиб:

$$P = mg$$

ни оламиз. Бундан:

$$m = \frac{P}{g} \tag{132. 3}$$

формулага эга бўламиз.

Бу формуладан кўрамизки, материал нуқтанинг массаси унинг оғирлигига тўғри пропорционал бўлар экан. Жисмнинг оғирлигини тарозида аниқлаб, массасини (132. 3) дан топиш мумкин.

316- шакл.

3-қонуни (таъсир ва акс таъсир қонуни). *Ҳар бир таъсир ўзига тенг ва қарама-қарши йўналишдаги акс таъсирни вужудга келтиради.*

Бу қонун материал нуқтага қўйилган куч манбаи бошқа бир материал нуқтада эканлигини кўрсатади. Массаси $m$ бўлган материал нуқтага қўйилган кучнинг манбаи бошқа бир $N$ материал нуқтада бўлсин, дейлик. Бу $N$ материал нуқта таъсиридан $M$ материал нуқта ҳаракат қилади; бу таъсир этувчи кучнинг миқдори эса (132. 1) дан аниқланади. Юқорида таърифланган учинчи қонунга мувофиқ, $N$ нуқтага ҳам $M$ нуқта томонидан худди шундай куч таъсир қилади (316-шакл). Бу куч $M$ материал нуқтага қўйилган $\bar{F}$ кучга тенг бўлиб, унга қарама-қарши йўналган. Буни $\bar{J}$ билан белгилаймиз ва ***инерция кучи*** деб атаймиз. Бу ҳолда инерция кучи учун:

$$\bar{J} = -m\bar{w} \tag{132. 4}$$

формулани ёзиш мумкин.

Юзаки қараганда, текширилаётган нуқта мувозанатда бўлгандек кўринади. Лекин қўйилган куч билан инерция кучи жисмнинг бир нуқтасига эмас, иккала жисмга оид бўлган нуқталарга қўйилгани учун, бу кучлар таъсиридан жисмлар ўзаро ҳаракатда бўлади.

4- қонуни. Кучлар таъсирининг эркинлик қонуни. *Материал нуқта бир қанча куч таъсирида бўлса, унинг тезланиши мазкур материал нуқтага ҳар қайси кучнинг* *алоҳида таъсиридан келиб чиққан тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

Материал нуқтага $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,..., $\overline{F}_n$ кучлар қуйилган бўлсин (317- шакл). Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{F}$ булсин, у ҳолда:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

бўлади.

$\overline{F}$ таъсиридан материал нуқтанинг тезланишини $\overline{w}$ десак, (132. 1) тенгламага мувофиқ, $\overline{F} = m\overline{w}$ ёки $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i = m\overline{w}$ га эга бўламиз. $\overline{F}_i$ таъсиридан материал нуқтанинг тезланиши $\overline{w}_i$ бўлса, у ҳолда: $\overline{F}_i = m\overline{w}_i$ бўлади. Бу ифодани юқоридаги йиғиндига қуйсак:


317- шакл.

$$m\sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i = m\overline{w} \quad \text{ёки} \quad \overline{w} = \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i$$

ифода, яъни юқоридаги хулоса келиб чиқади.

Бу қонундан асосан, қаттиқ жисмларга оид масалаларни ечишда фойдаланиш тўғри бўлади.

**Бирлик системалари.** Назарий механикада учратиладиган механик-физик миқдорларни ўлчашда уч хил ўлчов системасидан: абсолют (физик), яъни (СГС) системаси, техник, яъни (МКГСС) системаси ва халқаро, яъни (СИ) системасидан* фойдаланиш мумкин.

Бу кейинги икки системанинг бир-биридан асосий фарқи шундаки, техник системада механик бирлик учун асос қилиб куч бирлиги, халқаро системада эса масса бирлиги олинган.

Бу учта системани кўриб чиқамиз.

**МКГСС — техник система.** Техник системада узунлик *метр (м)* ҳисобида, вақт *секунд (сек)* ва куч килограмм *(кГ)* ҳисобида ифодаланади. Бошқа ҳар қандай техник система билан ифодаланадиган миқдорлар шу учта асосий ўлчов бирликларининг ҳосиласидан иборатдир. Бу техник системада масса:

$$[\text{масса}] = \left[\frac{\text{куч}}{\text{тезланиш}}\right] = \left[\frac{\text{куч}\cdot\text{вақт}^2}{\text{узунлик}}\right] = \left[\frac{кГ\cdot сек^2}{м}\right].$$

---

* Халқаро (СИ) система Совет Иттифоқида 1963 йил 1 январдан киритилган.

Техник системада масса бирлиги учун 1 *кГ* куч таъсир қилганида 1 *м/сек*$^2$ тезланиш оладиган материал нуқтанинг массаси олинади:

$$[m] = \frac{[F]}{[w]} = \frac{кГсек^2}{м}.$$

**СИ — халқаро система.** Халқаро системада узунлик *метр (м)*, вақт *секунд (сек)* ва масса бирлиги килограмм *(кг)* ҳисобида ифодаланади. СИ системасида куч бирлиги иккинчи қонундан топилади. (132. 1) фомулага $m = 1$ *кг* ва $w = 1\,\frac{м}{сек^2}$ ни қуйсак, куч бирлиги келиб чиқади:

$$1 \text{ куч бирлиги} = 1\ кг \cdot 1\,\frac{м}{сек^2} = 1\,\frac{кг.м}{сек^2}.$$

Бу куч бирлиги *ньютон* дейилади.

Демак, *массаси* 1 *кг бўлган материал нуқтага* 1 $\frac{м}{сек^2}$ *тезланиш берадиган куч ньютон (н) деб аталади.*

Ньютон *(н)* куч бирлиги қуйидагича бўлади:

$$[F] = [m]\,[w] = кг \cdot м \cdot сек^{-2} = м \cdot кг \cdot сек^{-2}.$$

Агар асосий бирликлар учун: узунлик бирлиги *сантиметр (см)*, вақт бирлиги *секунд (сек)* ва масса бирлиги *грамм (г)* ҳисобида олинса, абсолют (СГС) система бўлади. Бу системада куч бирлиги қонундан топилади. (132. 1) формулага $m = 1$ *г*, $w = 1\,\frac{см}{сек^2}$ қўйсак, (СГС) системасида куч бирлигини ҳосил қиламиз.

$$1 \text{ куч бирлиги} = 1\ г \cdot 1\,\frac{сек}{сек^2} = 1\,\frac{г \cdot см}{сек^2}.$$

Бу куч бирлиги *дина* дейилади.

Демак, *массаси* 1 *г бўлган материал нуқтага* 1 $\frac{см}{сек^2}$ *тезланиш берадиган куч дина (дин) деб аталади.*

Дина *(дин)* нинг ўлчамлиги қуйидагича бўлади:

$$[F] = [m]\,[w] = г \cdot см \cdot сек^{-2} = см \cdot г \cdot сек^{-2}.$$

Бирликларнинг бир системасидан иккинчи системасига ўтиш иловадаги 1-жадвалда берилган.

XXII БОБ

# МАТЕРИАЛ НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ АСОСИЙ ТЕНГЛАМАЛАРИ ВА УЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛИ

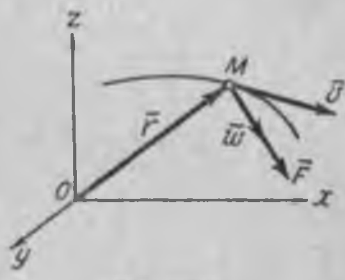
## 133- §. Материал нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

$M$ материал нуқта қандайдир $\overline{F}$ куч таъсиридан ҳаракат қилсин (318- шакл). Бу куч билан нуқтанинг тезланиши орасидаги боғланиш қуйидагича ифодаланган эди:

$$\overline{F} = m\overline{w}. \qquad (133.\ 1)$$

Бунда $\overline{w}$ — тезланиш вектори; $m$ — материал нуқтанинг массаси бўлиб, материал нуқтанинг $P$ оғирлиги билан $g$ оғирлик тезланишининг нисбатига тенг эди:

$$m = \frac{P}{g}. \qquad (133.\ 2)$$




318- шакл.

$\overline{F}$ куч — материал нуқтага таъсир этувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчиси, яъни:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

бўлиши мумкин.

Кинематикадан маълумки, тезланиш вектори $\overline{v}$ тезлик вектори ва $\overline{r}$ радиус-вектор орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\overline{w} = \frac{d\overline{v}}{dt} \quad \text{ёки} \quad \overline{w} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}.$$

Булар эътиборга олинса, юқорида ёзилган (133. 1) тенгламага кўра:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} \qquad (133.\ 3)$$

ёки

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \qquad (133.\ 4)$$

куринишларидаги ҳаракат дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз. *Бу тенгламалар материал нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг вектор ифодасидир.*

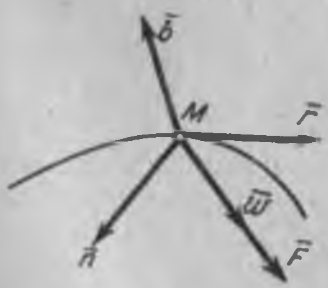
(133. 4) тенгламани ҳар қандай ўқлар системасига проекцияласак, материал нуқтанинг шу системадаги проекциялар орқали ҳаракат дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз.

**1. Материал нуқтани Декарт координата ўқларидаги ҳаракат дифференциал тенгламалари.**

Ҳаракат дифференциал тенгламасини Декарт координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаймиз. $M$ материал нуқтанинг координаталари ёки $\overline{r}$ Радиус-векторининг қўзғалмас Декарт координата ўқларидаги проекциялари $x$, $y$, $z$ ва унга қўйилган $\overline{F}$ кучнинг шу координата ўқларидаги проекциялари $X$, $Y$, $Z$ бўлса, ҳаракат дифференциал тенгламаларининг скаляр кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right\} \qquad (133.\ 5)$$

Бу тенгламалар эгри чизиқли ҳаракатдаги материал нуқтанинг Декарат координата ўқларидаги проекциялари орқали ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади.



319- шакл.

**2. Материал нуқтани табиий ўқлар системасидаги ҳаракат дифференциал тенгламалари.**

Тезланиш векторининг траекторияга бўлган уринма, бош нормал ва бинормалдаги проекцияларининг қуйидагича ифодаланиши кинематикадан маълум (319- шакл):

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0.$$

Материал нуқтага қўйилган кучнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари $F_\tau$, $F_n$ ва $F_b$ бўлсин, у ҳолда ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$mw_\tau = m\frac{dv}{dt} = F_\tau,$$
$$mw_n = m\frac{v^2}{\rho} = F_n,$$
$$mw_b = 0 = F_b$$

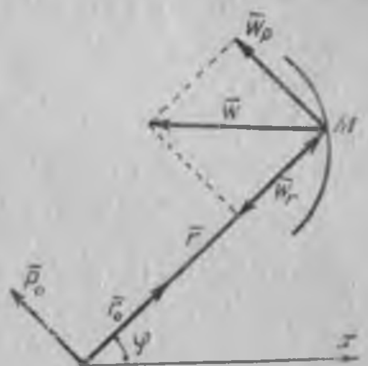
ёки

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, 0 = F_b. \tag{133. 6}$$

Бу тенгламаларнинг кейингисидан материал нуқтага таъсир этувчи куч эгрилик текислигида ётишини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам шундай бўлиши керак, чунки куч тезланиш билан бир йўналишда бўлиб, тезланиш эгрилик текислигида ётиши бизга кинематикадан маълум.

**3. Материал нуқтанинг қутб координаталар системасидаги ҳаракат дифференциал тенгламалари.**

Энди, ҳаракат тенгламаларининг қутб координаталар системасидаги проекцияларини топамиз. Бунинг учун (133. 1) асосий тенгламанинг қутб радиуси ва унга тик йўналган ўқдаги проекциясини оламиз (320- шакл).



320- шакл.

$$mw_r = F_r$$

ва

$$mw_p = F_p.$$

Бу ерда:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$
$$w_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$

Шунинг учун:

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r, \\ \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= F_p. \end{aligned}\right\} \tag{133. 7}$$

Булар, материал нуқтанинг қутб координаталар системасидаги ҳаракат дифференциал тенгламаларидир.

Материал нуқта динамикасининг ҳаракат дифференциал тенгламаларининг турли координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодасидан фойдаланиб, қуйидаги икки асосий масалани қуйишимиз мумкин.

1. Материал нуқтанинг массаси билан барча кинематик элементлари берилган; ҳаракатни вужудга келтирувчи кучни топиш керак (*динамиканинг биринчи масаласи*).

2. Массаси маълум бўлган материал нуқтага таъсир этувчи куч берилган; бу куч таъсиридан материал нуқтанинг кинематик элементларини топиш керак (*динамиканинг иккинчи масаласи*). Бу икки масаланинг жавобини қўйилиш тартибида кейинги параграфларда берамиз.

## 134- §. Динамиканинг биринчи масаласи. Материал нуқта учун Даламбер принципи

Материал нуқтанинг ҳаракат тенгламалари берилган бўлса, яъни нуқтанинг ҳаракат қонуни маълум бўлса, динамиканинг биринчи масаласини ечиш жуда ҳам осон. Масалан, материал нуқтанинг ҳаракат тенгламаси Декарт координаталарида берилган бўлсин:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t), \tag{134. 1}$$

унинг массаси $m$ бўлсин; у ҳолда ҳаракатни вужудга келтирувчи кучни (133. 5) тенгламалардан фойдаланиб топамиз. Бунинг учун, ҳаракат тенгламаларидан икки қайта ҳосила олиб, (133. 5) га қўямиз. Ундан:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{d^2x}{dt^2} = mf_1''(t), \\ Y &= m\frac{d^2y}{dt^2} = mf_2''(t), \\ Z &= m\frac{d^2z}{dt^2} = mf_3''(t) \end{aligned}\right| \tag{134. 2}$$

чиқади.

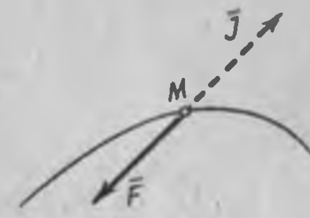
Куч проекциялари маълум бўлса, кучни топиш қийин эмас. Демак, материал нуқтанинг ҳаракат тенгламалари маълум бўлса, ҳаракатни вужудга келтирувчи кучни топиш мазкур тенгламаларни дифференциаллаш билан ҳал бўлар экан. Бироқ кучни ўтилган масофага ёки тезликка боғлаш тўғри келганда, масала бир оз мураккаблашади.

Кўпинча, техника масалаларини ечишда материал нуқтанинг кинематик элементлари маълум бўлади. Бу ҳолда кучни топиш учун қўлланиладиган яна бир қулай усул бор. У ҳам бўлса, динамика масаласини расман статика масаласига айлантирадиган усулдир. Бу усулни Д а л а м б е р тавсия этган, у қуйидагича ифодаланади.

Ҳаракатдаги моддий нуқтага қўйилган $\bar{F}$ кучдан ташқари, фикран унга $\bar{J}$ инерция кучи қўйилган деб фараз қиламиз (321- шакл). У ҳолда, материал нуқта бу кучлар таъсиридан шу онда мувозанатда бўлади. Шунга кўра, мувозанат шартини қуйидагича ёза оламиз:

$$\bar{F} + \bar{J} = 0. \tag{134. 3}$$

$\bar{J}$ вектор инерция кучи бўлиб, уннинг миқдори (132. 4) формуладан аниқланади. Демак, *ҳаракатдаги материал нуқтага фикран инерция кучини қўйсак, у ҳозирги онда мувозанатда булар экан.* Ҳаракатдаги $M$ материал нуқтага фақат $\bar{F}$ куч қуйилса, бу куч унга қандайдир $\bar{w}$ тезланиш беради. $\bar{J}$ эса мазкур $M$ нуқтага ҳақиқатан қуйилмаган. Бу инерция кучи $\bar{J} = -\bar{F}$ бўлиб, механиканинг учинчи қонунига мувофиқ, ҳаракатдаги $M$ нуқтанинг бошқа бир жисмга кўрсатган реакциясидир. $\bar{J}$ инерция кучининг $M$ материал нуқтага куч тариқасида қўйилишини фақат динамика масаласини статика масаласига айлантириш учун қабул қилинган бир йўл деб тушуниш керак. Бу йўл гарчи юзаки аҳамиятга эга бўлса-да, кўпинча, масалани ечишда унинг катта қулайлиги бор. $\bar{J}$ инерция кучининг Декарт ва табиий ўқлардаги проекцияларини олиб, (134. 3) тенгламани проекция орқали қуйидагича ифодалаймиз (322, 323-шакллар):




321- шакл.


322- шакл.

$$\left.\begin{aligned} J_x &= -m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ J_y &= -m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ J_z &= -m\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{134. 4}$$


323- шакл.

$$\left.\begin{aligned} J_\tau &= -m\frac{dv}{dt}, \\ J_n &= -m\frac{v^2}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{134. 5}$$

Бунда $J_\tau$ — уринма ва $J_n$ — марказдан қочувчи инерция кучлари. Юқоридаги (134. 4) ва (134. 5) формулалардан фойдаланиб, Даламбер тенгламасини проекцияларда қуйидагича ифодалаймиз:

$$\left.\begin{aligned} X + \left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= 0, \\ Y + \left(-m\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= 0, \\ Z + \left(-m\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (134.\ 6)$$

ва

$$\left.\begin{aligned} F_\tau + \left(-m\frac{dv}{dt}\right) &= 0, \\ F_n + \left(-m\frac{v^2}{\rho}\right) &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (134.\ 7)$$

Бу параграфда тавсия этилган усул бир нуқтанинг мувозанати учун татбиқ этилиб, у, умумий усулнинг хусусий ҳолидир.

Курсимизнинг кейинги бобларида бу назарияни умумий ҳол учун тўла тавсиф этамиз.

**82- масала.** Материал нуқтанинг оғирлиги 2 *г* бўлиб, ҳаракати $x = 3\cos 2\pi t$, $y = 4\sin 2\pi t$ тенгламалар билан ифодаланади ($x$, $y$ *см* ва $t$ эса *сек* ҳисобида).

Нуқтага таъсир қилиб турувчи кучнинг проекциялари топилсин.

Ечиш. Берилган ҳаракат тенгламаларидан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, массасига кўпайтирсак, масаланинг жавоби чиқади, яъни:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -12\pi^2\cos 2\pi t, \\ \ddot{y} &= -16\pi^2\sin 2\pi t, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} X &= \frac{P}{g}\ddot{x} = -\frac{2}{981}12\pi^2\cos 2\pi t, \\ Y &= \frac{P}{g}\ddot{y} = -\frac{2}{981}16\pi^2\sin 2\pi t \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки}$$

$$X = -\frac{1}{981}\cdot 8\pi^2 x,$$

$$Y = -\frac{1}{981}8\pi^2 y$$

бўлади.

**83- масала.** Ғадир-будур горизонтал ерда $v_0 = 2\,\frac{м}{сек}$ бошланғич тезлик билан тўғри чизиқли ва теңг секинланувчи ҳаракат қилаётган жисм $x = 4$ *м* масофани ўтгандан сўнг тўхтайди. Мазкур жисмнинг ерга нисбатан ишқаланиш коэффициенти топилсин.

Ечиш. Дастлаб жисмнинг тезланишини (секинланишини) топамиз. Бу ҳол учун тезлик ва ҳаракат тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$v = v_0 - wt, \quad x = v_0 t - \frac{1}{2}wt^2.$$

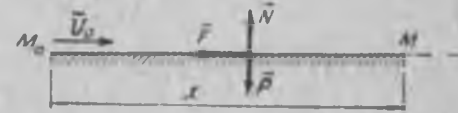
Жисм тўхтаганда, $v = 0$. $w = \frac{v_0}{t}$ бўлади. Буни масофа тенгламасига қўйиб вақтни топамиз:

$$t = \frac{2x}{v_0} = 4 \text{ сек.}$$

Жисмга таъсир этувчи куч ишқаланиш кучи бўлгани учун, у, Кулон қонунига мувофиқ, $F = fN$ бўлади. Бунда $N = P$, нормал босим жисмнинг оғирлигига тенг (324- шакл).

Энди, ҳаракат тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{P}{g} w = fP.$$

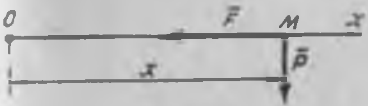


324- шакл.

Бундан:

$$f = \frac{w}{g} = 0{,}051.$$

**84- масала.** Оғирлиги 20 г бўлган жисм горизонтал тўғри чизиқ устида тебранма ҳаракат қилади. Ҳаракат $x = 10 \sin \frac{\pi}{2} t$ тенглама билан ифодаланади. Жисмга таъсир қилувчи $F$ куч билан утилган $x$ масофа орасидаги боғланиш ва шу кучнинг максимал қиймати топилсин (325- шакл).



325- шакл.

Ечиш. Жисм тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун $F = X = m\ddot{x}$, бу ерда $\ddot{x} = -\frac{\pi^2}{4} 10 \sin \frac{\pi}{2} t = -\frac{\pi^2}{4} x$, $m = \frac{P}{g} = \frac{20}{g}$.

Демак,

$$F = X = -\frac{5\pi^2}{g} x,$$

$$X_{max} = \frac{50\pi^2}{g}.$$

**85- масала.** Горизонт билан $\alpha$ бурчак ҳосил қилган рельсда ҳаракатланувчи вагоннинг оғирлиги $P$ га тенг. Вагон ўзгармас $w$ тезланиш билан ҳаракатланади деб фараз қиламиз. Ғилдиракларнинг рельсга ишқаланишидан ҳосил буладиган тормозловчи куч топилсин (326- шакл).

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек танлаб, рельснинг нормал босимини $\bar{N}$, тормозлаш кучини $\bar{F}$ билан белгиласак, ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = P \sin \alpha - F,$$

$$\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = N - P \cos \alpha.$$

326- шакл.

Вагон тезланиши ўзгармас бўлиб, ҳаракат $x$ ўқи бўйлаб қилингани учун $y = 0$ бўлади. Шунга кўра:

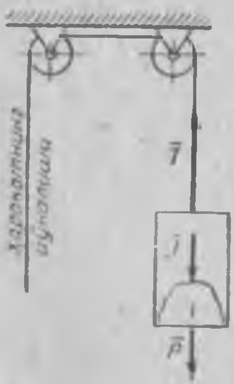
$$F = P\left(\sin\alpha - \frac{w}{g}\right), \quad N = P\cos\alpha.$$

Бундан кўринадики, $F$ ўзгармас миқдор экан. Бу чиққан натижадан фойдаланиб, ишқаланиш коэффициентини топамиз:

$$f = \frac{F}{N} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{w}{g\cos\alpha}.$$

Рельснинг қиялигини ўзгартириб, қиялик бурчагининг шундай бир қийматини ($\alpha = \varphi$) топамизки, унинг шу қиймати учун вагон текис ўлчовли ҳаракатда бўлиб, $w = 0$ бўлсин; у ҳолда $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$ бўлади (бунда $\varphi$ — ишқаланиш бурчаги).

**86- масала.** Лифт учун йўл қўйилган тезланишнинг максимал қиймати 0.29 *м/сек*$^2$ га тенг. Унинг оғирлиги $P$. Лифтнинг сим арқонида ҳосил бўладиган максимал ва минимал тортилиш кучи топилсин (327- шакл).




327- шакл.


328- шакл.

Ечиш. Инерция кучи билан сим арқоннинг тортилишини шаклда кўрсатилгандек йўналтириб, Даламбер тенгламасини ёзамиз:

$$T - P - J = 0. \text{ Бундан: } T = P + J \text{ ёки } T = P\left(1 - \frac{w}{g}\right).$$

Агар, лифт секин кўтарилса ёки тез тушса, $w > 0$ бўлади, тез кўтарилиб, секин тушса, $w < 0$ бўлиб:

$$T_{max} = 1{,}03P; \quad T_{min} = 0{,}97P$$

бўлади.

**87- масала.** Оғирлиги $P$ бўлган юк стержень учига боғланган бўлиб, кичик тебранма ҳаракат қилади. Стержень чўзилмайди ва оғирлигини ҳисобга олмаса бўлади деб фараз қиламиз (328- шакл).

Тебраниш даври $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ бўлиб, бошланғич оғиши (бурчак амплитудаси) $\varphi_0$ га тенг. Юкнинг мувозанат ҳолатидан ўтиш олдида стерженда пайдо бўлган зўриқиш топилсин.

Ечиш. Стержендаги $S$ зўриқиш учун Даламбер тенгламасини тузамиз:

$$P + J_n = S \text{ ёки } S = P\left(1 + \frac{v^2}{gl}\right).$$

Ҳаракат шартидан, тебранма ҳаракат тенгламасини ёзамиз:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Бундан:

$$v = l\dot{\varphi}$$

ёки

$$v = \sqrt{gl}\,\varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Юк мувозанат ҳолатидан ўтиш олдида $\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t = 0$, яъни $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = 1$ бўлгани учун:

$$v = \sqrt{gl}\,\varphi_0.$$

Бундан:

$$S = P(1 + \varphi_0^2)$$

келиб чиқади.

**88- масала.** Велосипед минган киши ўзгармас $v$ тезлик билан ҳаракатланиб, горизонтал текисликда ётувчи радиуси $a$ бўлган айлана чизади (329- шакл).

Велосипед минган киши йиқилмаслиги учун велосипед текислигининг вертикал текислик билан ҳосил қилган қиялик бурчаги $\alpha$ қанча бўлиши керак?

Ечиш. Велосипед тўғри чизиқли йўлдан бурилиши учун, унга траекториянинг ботиқ томонига қараб йўналган қандайдир горизонтал куч қўйилиши керак. Тенг ўлчовли ҳаракатда велосипедга вертикал йўналишдаги оғирлик кучи билан нормал реакция таъсир қилади. Айлана чизаётган велосипеддаги киши, велосипед текислигини айлана марказига қараб қиялантирганда, нормал реакция ҳам велосипед текислиги билан бирга оғади; унинг оғиши велосипеднинг марказига қўйилган $\overline{P}$ ва $\overline{N}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $R$ таъсиридан ҳосил бўлади. $\overline{R}$ ни ёки $\overline{P}$ ва $\overline{N}$ кучларни мувозанатлаштириш учун, Даламбер принципига биноан, велосипедчининг оғирлик марказига нормал $J_n$ инерция кучи қўямиз. Инерция кучи $\overline{J_n} = -\overline{R}$.

Бу $\overline{P}$, $\overline{N}$, $\overline{J_n}$ кучлар кесишувчи бўлгани учун, мувозанат шартини ифодаловчи куч учбурчагини қурамиз. Куч учбурчагидан:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_n}{P} = \frac{v^2}{ag}.$$

Бундан:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{v^2}{ag}$$

келиб чиқади.

**89- масала.** Оғирлиги $P$ бўлган $M$ шарча қўзғалмас $A$ нуқтага боғланган $MA$ ип билан ўзгармас тезликда горизонтал айлана чизади (330- шакл). Ипнинг узунлиги $l$, вертикал билан тузган бурчаги $\alpha$. Ипнинг тортилиши, шарининг тезлиги ва қанча вақтда тўла айлана чизиши топилсин.

Ечиш. Шарчага таъсир этувчи инерция кучлари ва ипнинг тортилиши шаклда кўрсатилган. Даламбер принципининг Декарт ўқларидаги тенгламаларини тузамиз:

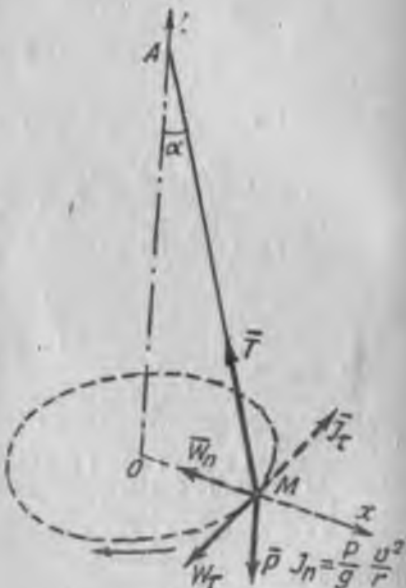
$$T\cos\alpha - P = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$T\sin\alpha - J_n = 0 \text{ ёки } T\sin\alpha - \frac{P}{g}\frac{v^2}{r} = 0. \qquad \text{(б)}$$

а) дан ипнинг тортилиши:

$$T = \frac{P}{\cos\alpha},$$


329- шакл.




330- шакл.

(б) дан: $v^2 = \frac{Tgr\sin\alpha}{P}$. Бунга $T$ нинг қийматини ва $r = l\sin\alpha$ ни қўйсак, $v = \sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}$ ни оламиз. Айланиш даври:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}$$

бўлади.

## 135- §. Динамиканинг иккинчи масаласи. Материал нуқтага таъсир этувчи кучларнинг характери

Берилган куч таъсиридан материал нуқтанинг ҳаракатини ва кинематик элементларини топиш масаласи биринчи масаланинг аксидир. Динамиканинг асосий тенгламаси (133. 5),

(133. 6) ва (133. 7) кўринишларидан бирида ёзилса, ҳаракатдаги материал нуқта координаталари ($x$, $y$, $z$) ёки ($r$, $\varphi$) номаълум бўлиб, улар иккинчи ҳосиласи билан ифодаланган. Шунинг учун, ҳаракатни топиш масаласи мазкур ҳаракат дифференциал тенгламаларини ечишдан иборатдир. Бу тенгламаларнинг интегралини топиш учун, аввало, материал нуқтага таъсир қилувчи $\overline{F}$ кучнинг қандай факторларга боғлиқ эканлигини аниқлаш керак. Энг оддий ҳолда бу куч узгармас бўлади, яъни: $F = \text{const}$. Бундай куч учун материал нуқтанинг ўз огирлиги ёки ишқаланиш кучи мисол бўла олади.

Материал нуқтага таъсир қилувчи куч вақтнинг функцияси бўлиши мумкин: $\overline{F} = \overline{F}(t)$.

Бу ҳол, хусусан, материал нуқта, даврли куч ёки зарбали куч таъсирида бўлган чоқларда учратилади.

Куч ҳаракатдаги материал нуқтанинг ҳолатига боғлиқ булиши мумкин: $\overline{F} = \overline{F}\,(r)$.

Бу ҳол учун мисол тариқасида эластик кучни кўрсатиш мумкин. Гук қонунига мувофиқ, эластик куч нуқтанинг кўчишига пропорционал бўлади, яъни: $\overline{F} = C\overline{r}$. Бунда $C$ — нуқтани узунлик бирлигига кўчириш учун зарур бўлган куч (у, эластиклик доимийлиги деб аталади). Бу хилдаги куч учун Ньютоннинг тортиш кучи ҳам мисол бўла олади. Тортиш майдонида массаси $m_1$ бўлган материал нуқтани бирор геометрик нуқтага, массаси $m_2$ бўлган материал нуқтани бошқа геометрик нуқтага жойласак, Ньютон қонуни бундай ёзилади:

$$\overline{F} = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\overline{r}^{\circ}\,.$$

Бу иккала мисолда ҳам кучнинг проекциялари улар таъсиридаги нуқтанинг номаълум координаталарининг функцияларидир.

Куч материал нуқта тезлигининг функцияси бўлиши мумкин: $\overline{F} = \overline{F}(v)$.

Бундай куч учун нуқта ҳаракатланаётган муҳитнинг ҳаракатга кўрсатган қаршилиги мисол бўла олади. Маълумки, нуқта ҳавода ёки суюқликда қанча тез ҳаракатланса, унинг ҳаракатига муҳит шунча катта қаршилик курсатади. Бу соҳада кўпгина тажрибалар ўтказилган ва тегишли натижалар чиқарилган. Бу келтирилган ҳоллар, кўпинча, амалий масалаларда учратилади.

Булардан ташқари, материал нуқтага таъсир этувчи куч юқорида келтирилган факторларнинг бир йула бир нечтасига боғлиқ бўлиши мумкин. Масалан, замбаракдан отилган ўқни олсак, ўққа, ўзининг оғирлигидан ташқари, муҳитнинг қаршилик кучи ҳам таъсир қилади. Бу қаршилик кучи, ўз навбатида, ўқ жуда баландликда бўлган чоқларда, ҳавонинг зичлиги ўзгариши натижасида, ўқнинг фазодаги ҳолатига ҳам боғлиқ бўлади. Демак, умумий ҳолда материал нуқтага таъсир қилувчи куч бирданига бир қанча факторларга боғлиқ бўлиши мумкин, масалан:

$$\overline{F} = \overline{F}\ (t, \overline{r}, \overline{v}).$$

Бу умумий ҳол учун, кучнинг проекцияларини қуйидагича ифодалаймиз:

$$X = X\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),$$
$$Y = Y\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),$$
$$Z = Z\ (t,\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}).$$

Бу ифодани (133. 5) тенгламага қўйсак, ҳаракат дифференциал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}). \end{aligned}\right| \qquad (135.\ 1)$$

Бу дифференциал тенгламалар системани ҳосил қилаётир, чунки ҳар қайси тенглама барча номаълум $x$, $y$, $z$ ва уларнинг ҳосиласи $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ни ўз ичига олаётир.

Фараз қилайлик, қандайдир йўл билан бўлса ҳам, шу дифференциал тенгламалар системасини бир марта интеграллашга муваффақ бўлайлик: у ҳолда, ўз ичига иккинчи ҳосилани олмаган қандайдир учта муносабатни оламиз. Бу уч муносабатда вақт, нуқта координаталари ва координаталарнинг биринчи ҳосиласи бўлади. Булардан ташқари, учта ихтиёрий ўзгармас $C_1$, $C_2$, $C_3$ лар мавжуд бўлиши керак. Ечаётган тенгламаларимиз тенгламалар системаси бўлгани учун, ундаги аргумент ва уларнинг ҳосиласи биридан-бирига ўтказилиб, аралашиб кетади. Натижада, юқорида айтилган уч муносабат қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= 0,\\ \Phi_2\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= 0,\\ \Phi_3\ (t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (135.\ 2)$$

Бу тенгламаларни ҳам интеграллаш имкониятига эга бўлсак, у ҳолда, координаталарнинг ҳосилаларидан бутунлай қутуламиз. Бу интеграллаш натижасида яна учта ихтиёрий ўзгармас: $C_4$, $C_5$ ва $C_6$ лар пайдо бўлади. Яна илгаригидек, бу ихтиёрий ўзгармовчилар, шу уч муносабатга киради. Натижада юқоридаги (135. 2) дифференциал тенгламаларнинг интеграллари қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6) = 0, \\ \Psi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6) = 0, \\ \Psi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (135.\ 3)$$

Бу муносабатларга координаталарнинг ҳосилалари кирмайди; фақат координата билан вақт орасидаги муносабатгина боғланган. Бу (135. 3) тенгламаларни динамиканинг иккинчи масаласига жавоб деб бўлмайди, чунки тенгламада олтита ихтиёрий ўзгармас сон бор. (135. 3) тенгламалардан материал нуқта координаталарини вақт функцияси тарзида топмаганимизда ҳам, шу олти ихтиёрий ўзгармас сон мавжуд бўлади. Натижада, масаланинг жавоби бир эмас, бир неча кўринишда топилган бўлади. Масаланинг жавобини маълум бир кўринишдагина олмоқ учун, материал нуқта ҳаракатининг бошланғич шарти берилиши керак. Материал нуқта бирор $t = t_0$ вақтдан бошлаб ҳаракатлансин; унинг бу вақтдаги ҳолати $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ координаталар билан аниқланиб, тезлигининг проекциялари $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ бўлсин. У ҳолда, материал нуқта ҳаракатининг бошланғич шарти қуйидагича ёзилиши мумкин, $t = t_0$ бўлганда:

$$x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0;$$
$$\dot{x} = \dot{x}_0;\ \dot{y} = \dot{y}_0;\ \dot{z} = \dot{z}_0$$

бўлади. Бу шартни (135. 2) ва (135. 3) тенгламаларга қўйиб, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$, $C_6$ ихтиёрий ўзгармовчиларни топиш учун, олтита тенглама оламиз. Бу тенгламаларни ечиб, олти ихтиёрий ўзгармовчини топамиз, натижада, материал нуқтанинг координаталари қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x = x(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ y = y(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ z = z(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \end{aligned}\right\} \quad (135.\ 4)$$

Демак, *динамиканинг иккинчи масаласини маълум шаклда ечиш учун материал нуқтага таъсир қилувчи кучнинг характерини билиш билан бирга, материал нуқта ҳаракатининг бошланғич шартини ҳам билиш зарур экан.* Бошлангич шарт берилмаса, динамиканинг иккинчи масаласининг ечилиши маълум жавобга эга бўлмайди. Динамиканинг иккинчи масаласини ечишда, ҳаракат тенгламасини баъзи бир амалий масалаларга татбиқ этиш учун икки ҳолни текширамиз:

1) материал нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати; 2) материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракати.

## 136- §. Эркин материал нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати

Материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг йўналиши ўзгармас бўлиб, нуқтанинг ҳаракати шу куч йўналишида бўлса, бундай ҳаракат **тўғри чизиқли ҳаракат** деб аталади. Кучнинг таъсир чизиғи $x$ ўқи деб қабул қилинса, юқоридаги (135. 5) тенгламаларнинг фақат биринчиси қолади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X. \qquad (136.\ 1)$$

Юқорида айтилганидек, материал нуқтага таъсир этувчи куч бир қанча факторларга боғлиқ бўлиши мумкин, бу ерда мазкур кучларнинг ҳар қайсисини алоҳида текширмасдан, куч қандай кўринишда бўлса ҳам, (136. 1) тенгламани интеграллашга ўтамиз. Бу тенгламани қуйидаги икки кўринишдан бирига келтирамиз. Бунинг учун $\frac{d^2x}{dt^2}$ тезланишни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}.$$

Бу ерда $v$ тезликни $x$ масофанинг функцияси, $x$ ни эса $t$ вақтнинг функцияси деб қарасак, у ҳолда:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{dv}{dx}$$

бўлади.

Бу икки ифодадан фойдаланиб, (136. 1) тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидаги икки курินишда ёзишимиз мумкин:

$$m\frac{dv}{dt} = X$$

ёки (136. 2)

$$mv\frac{dv}{dx} = X.$$

Бу икки кўринишдаги тенгламадан фойдаланиб, материал нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатига доир бир қанча масалаларни ечамиз.

**1. Материал нуқтага таъсир этаётган куч ўзгармас, яъни $F$ = = const.**

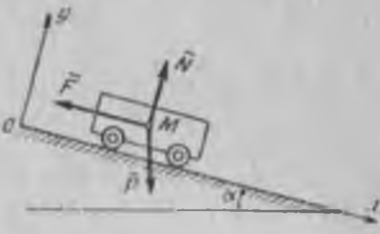
**90- масала.** Вагон оғма текисликда ғилдирайди (331- шакл). Текисликнинг горизонт билан тузган бурчаги $\alpha = 5°$ бўлиб, ишқаланиш қаршилиги ўзгармай, ишқаланиш коэффициенти $f = 0{,}002$ га тенг. Вагоннинг қўзғалишидан $t = 10$ *сек* ўтгандан кейинги тезлиги топилсин.

Ечиш. Вагон илгарилама ҳаракат қилганидан, уни материал нуқта деб қарасак, унга қўйилган куч:

$$X = P\sin\alpha - f\,P\cos\alpha$$

бўлади. (136. 2) тенгламанинг биринчи кўринишини оламиз:

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = P\sin\alpha - f\,P\cos\alpha.$$




331- шакл.

Маълум қийматларни қўйиб, ўзгарувчиларни айириб интеграллаcак, $v = 0{,}835\,t + C$; бошлангич пайтда $t = 0$ бўлганда $v = 0$ эди. Шунга кура $C = 0$. Демак, $v = 0{,}835$; $t = 10$ *сек* дан кейин $v = 8{,}35$ *м/сек* ёки $v = 30$ *км/соат*.

**2. Материал нуқтага таъсир этувчи куч вақт функцияси, яъни $\overline{F} = \overline{F}(t)$**

**91- масала.** Трамвай ҳайдовчи аста-секин реостатни очиб, моторнинг тортиш кучини нулдан бошлаб, ҳар секундда 12 *кг* дан вақтга пропорционал равишда оширади. Вагоннинг огирлиги, $P = 9{,}8$ *т*, ишқаланиш қаршилиги ўзгармас бўлиб, 0,2 *т* га тенг. Вагоннинг ҳаракат тенгламаси топилсин.

Ечиш. Вагонга қўйилган куч $X = 12\,t - 200$ (*кГ*). Бундан курамизки, ҳаракат реостатнинг очилишидан $t = \frac{200}{12} = 16\frac{2}{3}$ *сек* ўтгандан кейин бошланар экан. Унгача моторнинг тортиш кучи қаршиликни енгишга сарф қилинади. (136. 2) тенгламанинг биринчи кўринишини оламиз:

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = 12t - 200.$$

Бундан:

$$v = \frac{12}{2000}\left(t - 16\frac{2}{3}\right)^2 + C_1.$$

$t = 16\frac{2}{3}$ *сек* бўлганда, $v = 0$ эди; шунинг учун $C_1 = 0$ бўлади. Демак. $v = \frac{12}{2000}\left(t - 16\frac{2}{3}\right)^2$.

Буни яна интеграллаб, $x = \frac{2}{1000}\left(t - 16\frac{2}{3}\right)^2 + C_2$

ни оламиз. Яна $t = 16\frac{2}{3}$ *сек* булганда $x = 0$ эди; шунга кўра $C_2 = 0$ бўлади.

Вагоннинг ҳаракат тенгламаси:

$$x = 0{,}002\left(t - 16\frac{2}{3}\right)^3$$

бўлади.

3. **Материал нуқтага таъсир этувчи куч тезлик функцияси, яъни** $\bar{F} = \bar{F}(v)$.

**92- масала.** Материал жисм вертикал кесманинг юқори учидаги $A$ нуқтадан бошланғич тезликсиз тушади (332- шакл).

Муҳит қаршилиги тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб жисмнинг ҳаракат тенгламаси топилсин.


332- шакл.

Ечиш. Муҳит қаршилиги $R = mkv$ бўлсин; у ҳолда $A$ нуқтадан тушаётган жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси бундай ёзилади:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kmv$$

ёки

$$\frac{dv}{dt} = g - kv.$$

Бу тенгламани икки марта интеграллаймиз. Биринчи марта интеграллаганимизда $\frac{1}{k}\ln(g - kv) = -t + C_1$ чиқади. Бошлангич $t = 0$ бўлганда $v = 0$ шартдан $C_1$ ни топамиз:

$C_1 = \frac{1}{k}\ln g$. Буни эътиборга олиб, чиққан тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\ln\left(1 - \frac{k}{g}v\right) = -kt.$$

Бундан:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Яна бир марта интеграллаб:

$$x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) + C_2$$

ни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартдан

$$C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Шунга кўра:

$$x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) - \frac{g}{k^2}.$$


333- шакл.

**93- масала.** Самолёт бошланғич вертикал тезликсиз шўнғийди. Ҳавонинг қаршилик кучи тезлик квадратига пропорционал. Берилган пайтдаги вертикал тезлик билан ўтилган масофа ва шўнғишнинг максимал тезлиги орасидаги боғланиш топилсин.

Ечиш. Самолётни вертикал $Ox$ ўқи бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган материал нуқта деб қараймиз. Самолёт шўнғий бошлаган жойини координаталар боши деймиз (333- шакл). У вақтда ҳаракатнинг бошланғич шартлари $t = 0$ бўлганда $x_0 = 0$ ва $\dot{x}_0 = 0$ бўлади.

Нуқта $P$ оғирлик кучи ва ҳавонинг $R = kv^2$ қаршилик кучи таъсирида ҳаракат қилади, бу ерда $k$ — пропорционаллик коэффициенти.

Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = P - kv^2. \qquad (1)$$

Тезлик $v_{max}$ бўлганда $\frac{dv}{dt}=0$, буни (1) га қўйсак:

$$0 = P - kv^2_{max},$$

бундан

$$k = \frac{P}{v^2}$$

келиб чиқади. Қушимча янги $S$ параметр киритамиз ва (1) ни ўзгартиб, қуйидаги куринишда ёзамиз:

$$\frac{1}{g}\frac{dv}{ds}\cdot\frac{dS}{dt} = 1 - \frac{v_2}{v_{max}}.$$

$\frac{dS}{dt} = v$ деб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dS = \frac{1}{g}\,\frac{vdv}{1-\frac{v^2}{v^2_{max}}}.$$

Буни интегралласак:

$$S = -\frac{v^2_{max}}{2g}\ln\left(1-\frac{v^2}{v^2_{max}}\right) + C \qquad (2)$$

булади. Бошлангич шартлардан фойдаланиб, (2) дан $C$ ни топсак, $C=0$ бўлади.

Демак,

$$v = v_{max}\sqrt{1-e^{-\frac{2Sg}{v^2_{max}}}}.$$

## 137- §. Жисмнинг баландликдан тушиши

Жисм жуда юқори баландликдан тушса, унинг ҳаракати Галилей қонунига мувофиқ бўлади, деб бўлмайди. Тушиш тезланишини ўзгармас деб бўлмайди, чунки бу ҳолда тезланишнинг масофага боғлиқ эканлигини эътиборга олиш лозим.

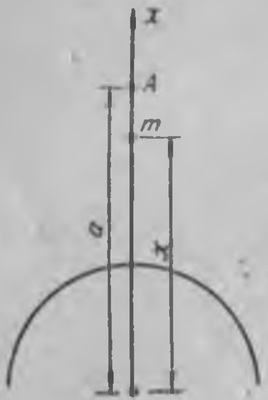
Жисмнинг ҳаракати ердан жуда юқори баландликда деб қаралганда, ернинг тортиш кучи ўзгарувчи бўлади. Бу куч Ньютоннинг бутун олам тортилиш қонунига мувофиқ, Ер марказидан олинган масофа квадратига тескари пропорционал бўлиб, жисм билан ернинг массасига тўғри пропорционал узгаради. Бу ҳол учун, баландликдан ташланган жисм ёки йиқилаётган самолётнинг тушиши мисол бўла олади.

$M$ — Ернинг массаси, $m$ — тушаётган жисмнинг массаси, $x$ — жисмнинг қандайдир ҳолати билан Ер марказининг оралиги бўлсин (334- шакл). Жисмга таъсир қилаётган куч Ньютон қонунига мувофиқ:

$$X = f\frac{mM}{x^2}$$

бўлади.

Бунда $f$ — пропорционаллик коэффициенти. Унинг миқдорини топиш учун $Mf = \mu$ десак, $X = \mu\frac{m}{x^2}$ бўлади.




334- шакл.

Жисм ер устида бўлса, $x = R$ бўлиб ($R$ — Ер радиуси), бу формула қуйидагича ёзилади:

$$mg = \mu\frac{m}{R^2}.$$

Бундан:

$$\mu = R^2g = 9{,}81R^2$$

келиб чиқади.

Баландликдан тушаётган жисмга таъсир этувчи куч масофага боғлиқ бўлгани учун (136. 2) тенгламанинг иккинчи кўринишини оламиз, у: $mv\frac{dv}{dx} = X$. $x$ ўқини Ер марказидан юқорига йуналтирсак, кучнинг ишораси манфий булади:

$$X = -\mu\frac{m}{x^2}.$$

Дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu\frac{m}{x^2}.$$

Бу тенгламадан $m$ ни қисқартириб:

$$vdv = -\mu\frac{dx}{x^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$v^2 + C = 2\mu\frac{1}{x}.$$

Жисмнинг бошланғич ҳолатини эътиборга олиб, ихтиёрий ўзгармовчини топамиз. Жисм $A$ нуқтада турганда, $x = a$ бўлиб, тезлик $v = 0$ эди. Буларни чиққан тенгликка қўйсак: $C = 2\frac{\mu}{a}$ келиб чиқади. Демак:

$$v = -\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}. \qquad (137.\ 1)$$

Тезлик $x$ ўқининг манфий томонига йўналгани учун, радикал олдида манфий ишора олинди. Бу формула Ер марказидан $x$ масофада тушаётган жисмнинг тезлигини аниқлайди.

Чексиз баландликдан Ер сиртига тушаётган жисмнинг тезлигини топамиз. У ҳолда $a=\infty$ бўлиб, $x=R$ бўлади. (137. 1) формуладан:

$$v=-\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\infty}\right)}=-\sqrt{\frac{2\mu}{R}},$$

$\mu=gR^2$ бўлганидан:

$$v=-\sqrt{2Rg}=\text{const}.$$

$R\approx 6370$ *км*, $g=9{,}81$ *м/сек*$^2$ бўлгани учун $v\approx 11179$ *м/сек* келиб чиқади. Ваҳоланки, жуда ҳам катта бўлмаган баландликлар учун чиқарилган Галилей формуласидан фойдаланганимизда, тезлик чексиз катта қийматга эга бўлар эди. $a-x$ йўлни ўтишдаги вақтни топамиз. Бунинг учун (137. 1) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2\mu(a-x)}{ax}}.$$

Буни интегралласак:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{a}}\,t=\sqrt{ax-x^2}+\frac{a}{2}\arccos\left(\frac{2x-a}{a}\right)+C_1$$

келиб чиқади. $C_1$ ни бошлангич шартдан топамиз. $t=0$ бўлганда $x=a$ эди. Шунга кўра $C_1=0$ бўлади. Демак:

$$t\sqrt{\frac{2\mu}{a}}=\sqrt{ax-x^2}+\frac{a}{2}\arccos\frac{2x-a}{a}. \qquad (137.\ 2)$$

Чиқарилган (137. 1) ва (137. 2) формулалар баландликдан тушаётган жисмнинг ҳаракатини тўла аниқлайди. Галилей формуласи бу формулаларнинг хусусий ҳолидир.

Энди, баландлиги $h$ бўлган минорадан ташланган жисмнинг ерга тушиш вақтини аниқлаймиз (335- шакл). Бу ҳол учун:

$$a=R+h,\ a-x=h,\ x=R;$$

буларни (137. 2) га қўйсак:

$$t\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}=\sqrt{Rh}+$$
$$+\frac{R+h}{2}\arcsin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}$$

35- шакл.

келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала томонини $\sqrt{R}$ га бўламиз; ўнг томонининг иккинчи ҳадини $\sqrt{h}$ га бўлиб ва кўпайтирсак, мазкур тенглик бундай кўринишда ёзилади:

$$t\sqrt{2g\frac{R}{R+h}} = \sqrt{h} + \sqrt{h}\,\frac{\arcsin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}}{\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}}.$$

Миноранинг $h$ баландлиги Ернинг $R$ радиусига қараганда жуда ҳам кичик булгани учун, аргументнинг ёйи ва синуси ҳам кичик бўлади. Шунинг учун уларнинг нисбати лимитда бирга тенг бўлади:

$$\lim\frac{\arcsin\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}}{\sqrt{\frac{4Rh}{(R+h)^2}}} = 1.$$

Юқоридаги тенглик қуйидагича ёзилади:

$$t\sqrt{\frac{2g}{1+\frac{h}{R}}} = 2\sqrt{h}.$$

Ҳозиргина айтилган мулоҳазага кўра, $\frac{h}{R}$ ҳам бирга қараганда жуда кичик сон бўлгани учун, уни ташлаш мумкин. У ҳолда, $t\sqrt{2g} = 2\sqrt{h}$ бўлади. Бундан:

$$h = \frac{1}{2}gt^2.$$

Шунинг билан, бўшлиқда тушувчи жисм ўтган йўлнинг физика курсида берилган формуласини ҳосил қилдик.

## 138- §. Қаршилик кўрсатувчи муҳитда жисмнинг тушиши

Жисмнинг Галилей томонидан берилган тушиш қонуни бўшлиқда тушаётган жисмлар учунгина тўғридир, бу ҳолда жисмнинг тезлиги вақтга пропорционал равишда ўзгаради:

$$v = gt.$$

Жисм қандайдир муҳитда (масалан, ҳавода ёки суюқликда) ҳаракатланса, жисмнинг ҳаракатини Галилей қонуни билан текшириб бўлмайди, чунки жисмнинг ҳаракатига муҳит қаршилик кўрсатади. Умуман, қаршилик курсатувчи муҳитда тушаётган жисмнинг кинетик энергияси ҳавода циркуляция туғдиришга ҳамда тушаётган жисмга ҳаво заррачаларининг ёпишиши натижасида вужудга келган молекуляр кучларнинг қаршиликларини енгишга сарф бўлади.

Тушаётган жисмга ҳавонинг кўрсатган қаршилиги жуда ҳам мураккабдир. Бу қаршилик кучи, тушаётган жисмнинг тезлигигагина боғлиқ бўлмасдан, унинг массасига ва шаклига ҳам боглиқдир.

Агар тушаётган жисмнинг тезлиги жуда кичик (тахминан 0,1 *м/сек*) бўлганда, қаршилик кучи тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб олинса, унинг аниқлиги етарли даражада бўлади. Тезлик катта бўлса, қаршилик кучи тезликнинг иккинчи ва юқори даражаларига пропорционал равишда ўсади. Бу ҳол учун қаршилик кучини ўтказилган тажриба натижаларига мувофиқ $R = \nu v^2$ кўринишда ифодалай оламиз. Бу ерда $\nu$ коэффициенти муҳитнинг $\rho$ зичлигига ва жисмнинг ҳаракати йўналишига тик қилиб олинган $S$ кирқим юзига боглиқдир, яъни:

$$\nu = c\rho S.$$

Бунда $c$ — тушаётган жисм шаклига боғлиқ коэффициент булиб, тажрибадан аниқланади. Кўпинча учратиладиган шаклдаги жисмлар учун уларнинг тажриба йўли билан олинган қийматлари қуйидаги жадвалда берилган:

| Тушаётган жисмнинг шакли ва номи | $c$ |
|---|---|
| 1. Квадрат шаклидаги текис пластинка (юзи ҳаракат йўналишига тик бўлса) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 0,64 |
| 2. Доиравий текис диск (юзи ҳаракат йўналишига тик бўлса) | 0,56 |
| 3. Шар . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 0,25 |
| 4. Цилиндрик жисм (ўқи ҳаракат йўналишига тик булса) . . | 0,045 |

Муҳитнинг қаршилик кучи қуйидагича ифодаланади:

$$R = \nu v^2 = c\rho S v^2. \tag{138. 1}$$

Бу формуладан фойдаланиб, қаршилик кўрсатувчи муҳитдаги жисм ҳаракатини текширишимиз мумкин.

Фараз қилайлик, оғирлиги $P$ булган жисм қаршилик кўрсатувчи муҳитда ўзининг бошланғич $O$ ҳолатидан туша бошлаган. Бир неча вақт ўтгандан кейин у, $M$ да булсин (336-шакл).

$x$ ўқини $O$ дан пастга қаратиб йўналтирамиз. $M$ нуқтага унинг ўз $P$ огирлиги билан ҳавонинг қаршилик кучи $R$ таъсир қилади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини $X$ десак: $X = P - \nu v$ ифодани ҳосил қиламиз.

Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини тузиш учун (136. 2) тенгламани унинг биринчи кўриниши:

$$m\frac{dv}{dt} = P - \nu v^2;$$

да $\frac{\nu}{m} = a$; $\frac{P}{\nu} = c^2$ қабул қилиб, ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

336- шакл.

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 - v^2).$$

Бу тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб, биринчи интегрални топамиз:

$$\frac{1}{2c}\ln\frac{c+v}{c-v} = at + \alpha,$$

бунда $\alpha$ — ихтиёрий ўзгармовчи. Уни бошланғич шартдан аниқлаймиз. $t = 0$ булганда $v = v_0$ булсин; бунда $v_0$ — бошланғич тезлик. У ҳолда $\alpha$ нинг қиймати қуйидагича булади:

$$\alpha = \frac{1}{2c}\ln\frac{c+v_0}{c-v_0}.$$

Бу қийматни юқоридаги тезлик ифодасига қўйиб, тезликни топамиз:

$$v = c\frac{(c+v_0)e^{2act} - (c-v_0)}{(c+v_0)e^{2act} + (c-v_0)}.$$

Гиперболик функцияларни киритсак, бу формула анчагина соддалашади. Маълумки:

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Буларни эътиборга олиб, тезлик формуласини қуйидагича ифодалаймиз:

$$v = c\frac{c\operatorname{sh}(act) + v_0\operatorname{ch}(act)}{c\operatorname{ch}(act) + v_0\operatorname{sh}(act)}.$$

Янги ихтиёрий ўзгармовчи $A$ билан $\delta$ ни киритамиз. Улар қуйидаги шартни қаноатлантирсин:

$$c = A\operatorname{ch}\delta, \ v_0 = A\operatorname{sh}\delta. \tag{1}$$

Бироқ:

$$\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$$

бўлгани учун:

$$c^2 - v_0^2 = A^2(\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x) = A^2,$$

бундан:

$$A = \sqrt{c^2 - v_0^2}.$$

(1) тенгликларнинг нисбатини оламиз:

$$\frac{v_0}{c} = \operatorname{th} \delta.$$

Буларни эътиборга олсак, тезлик формуласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$v = c\frac{\operatorname{sh}(act)\operatorname{ch}\delta + \operatorname{ch}(act)\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{ch}(act)\operatorname{ch}\delta + \operatorname{sh}(act)\operatorname{sh}\delta} = c\,\frac{\operatorname{sh}(act+\delta)}{\operatorname{ch}(act+\delta)}.$$

Бу ифода гиперболик функцияларнинг қўшилиш теоремасидан келиб чиқди. Уни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$v = \operatorname{th}(act+\delta)\cdot c = c\,\frac{e^{2(act+\delta)}-1}{e^{2(act+\delta)}+1}. \qquad (138.\ 2)$$

$a$, $\delta$, $c$ қийматлари маълум бўлса, гиперболик функциялар жадвалидан исталган вақт учун тезликни топишимиз мумкин. Гиперболик тангенснинг аргументи ортиши билан, функция 1 га жуда ҳам тез интилади. Масалан, $\operatorname{th}3 = 0{,}995$ бўлади, яъни $\operatorname{th}3$ нинг қиймати 1 дан $\frac{1}{2}\%$ фарқ қилади. Шунинг учун, қаршилик кўрсатаётган муҳитда тушаётган жисм тезлиги лимитда $c$ га интилади. Тахминан $act_1 + \delta = 3$ бўлганда, яъни вақт $t_1 = \frac{3-\delta}{ac}$ бўлганда, ҳаракат, текис ўлчовли бўлиб, тезлиги ўз лимити $c$ га эришади. Бу катта аҳамиятга эга бўлган амалий хулосадир.

Бошланғич тезлик бўлмаган хусусий ҳол учун, яъни $\delta = 0$ бўлган ҳол учун $t_1$ вақтни асосий ўзгармовчилар орқали ифода қила оламиз:

$$t_1 = \frac{3}{ac} = \frac{3}{g}\sqrt{\frac{P}{\nu}} = \frac{3}{g}\sqrt{\frac{P}{c\rho s}}. \qquad (138.3)$$

Бундан кўрамизки, жисмнинг оғирлиги кўпайиши билан вақт ортади; қаршилик коэффициенти муҳит зичлиги ва жисмнинг кўндаланг қирқим юзи кўпайиши билан озаяр экан.

Шу вақт ўтгандан кейин, жисмнинг тезлиги:

$$v_k = \sqrt{\frac{P}{\nu}} = \sqrt{\frac{P}{c\rho s}} \qquad (138.\ 4)$$

бўлади. Бу тезлик критик тезлик дейилади. Бўшлиқда $h$ баландликдан тушаётган жисмнинг тезлиги $v = \sqrt{2gh}$ формула билан аниқланиши маълум. Муҳит қаршилиги таъсирида бу тезликнинг нақадар ўзгаришини билиш учун ҳаракат тенгламасининг иккинчи интегралини топамиз. Бунинг учун (138. 2) формулани оламиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = c \cdot \operatorname{th}(act + \delta).$$

Бундан:

$$x = c \int \operatorname{th}(act + \delta)\, dt = \frac{c}{ac} \ln \operatorname{ch}(act + \delta) + \beta$$

келиб чиқади. Ихтиёрий ўзгармовчи $\beta$ ни топиш учун бошланғич шартдан фойдаланамиз: $t = 0$ бўлганда, $x = 0$ эди. Шунга кура:

$$\beta = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} \delta.$$

Бошланғич тезлик булмаса, $\operatorname{ch} \delta = 1$ бўлиб, $\beta = 0$ бўлади. Демак:

$$x = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch}(act). \qquad (138.\ 5)$$

(138. 3) ва (138. 5) тенгламалардан вақтни чиқариб, $v$ тезлик ва ўтилган $x = h$ йўл орасидаги богланишни топиш қийин эмас. (138. 5) тенгламадан:

$$\operatorname{ch}(act) = e^{ax} = e^{\frac{gh}{c^2}}.$$

Бу қийматни (138. 3) формулага қуйсак:

$$v = c\frac{\operatorname{sh}(act)}{\operatorname{ch}(act)} = c\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(act) - 1}{\operatorname{ch}(act)}} = c\sqrt{1 - e^{\frac{2gh}{c^2}}}$$

келиб чиқади. Қаршилик коэффициенти $\nu$ кичик бўлиб, $c$ катта бўлса, радикал остидаги ифодани қаторга ёйиб, қуйидаги натижани оламиз:

$$v = c\sqrt{1 - 1 + \frac{2gh}{c^2} - \frac{2g^2h^2}{c^4} + \ldots} =$$

$$= \sqrt{2gh}\sqrt{1 - \frac{gh}{c^2} + \ldots} \approx \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{gh}{c^2}\right).$$

Бундан куринадики, қаршилик кўрсатувчи муҳит тушаётган жисм тезлигини камайтирар экан. Тезликнинг бўшлиқдагига нисбатан камайишини топамиз; у:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{1}{2}\frac{gh^2}{c^2}$$

булади. $\nu$ қаршилик коэффициенти катта бўлган чоқларда, масалан, парашют ҳаракатида, тезликни (138. 4) формулага биноан ҳисобласак, катта хато қилмаган буламиз.

Мазкур (138. 4) формуладан фойдаланиб, қуйидаги қизиқ бир масалани ечамиз. Икки геометрик ўхшаш жисм бир хил муҳитда пастга тушсин. Уларнинг солиштирма оғирликлари $\gamma_1$ ва $\gamma_2$ бўлсин. У ҳолда:

$$\frac{v_{k_1}}{v_{k_2}} = \frac{\sqrt{\frac{P_1}{c\rho s}}}{\sqrt{\frac{P_2}{c\rho s}}} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$

ни ҳосил қила оламиз:

Демак, геометрик ўхшаш ва тенг икки жисмнинг критик тезликлари уларнинг солиштирма оғирликлари нисбатининг квадрат радикалига пропорционал бўлар экан. Бу натижа даставвал Мариотта томонидан топилган.

**94- масала.** $r$ радиусли $\gamma$ солиштирма оғирликли шар, зичлиги $\rho$ бўлган суюқликда юқоридан тушса, унинг тезлиги қанча вақтда критик қийматга эришади ва критик тезликнинг қиймати қанча бўлади? Шар учун $c = 0{,}25$.

Ечиш. Критик тезликка эришиш учун зарур бўлган вақтни (138. 3) формуладан, критик тезликни (138. 4) формуладан топамиз:

$$t = \frac{3}{g}\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\gamma}{c\rho\pi r^2}} = 0{,}704\sqrt{\frac{\gamma r}{\rho}},$$

$$v_k = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\gamma}{c\rho\pi r^2}} = 2{,}31\sqrt{\frac{\gamma r}{\rho}}.$$

Шар чўян бўлиб, $r = 4$ *см* бўлса. чўян учун $\gamma = 7250$ *кг/м*$^3$ бўлади. Ҳавонинг зичлиги $\rho = 0{,}132\,\frac{кг\,сек^2}{м}\cdot\frac{1}{м^3}$, сувнинг зичлиги $\rho = 132\frac{кг\,сек^2}{м^4}$

Буларни назарга олсак:

ҳавода: $t_1 = 33$ *сек* ўтганда тезлик $v_k = 318$ *м/сек* га эришади.

сувда: $t_1 = 1{,}2$ *сек* ўтганда тезлик $v_k = 3{,}9$ *м/сек* га эришади.

Шундай радиусли ёғоч шар ҳавода ҳаракат қилса, $\gamma = 700$ *кг/м*$^3$ бўлиб критик тезлик $v_k = 33{,}6$ *м/сек*, вақт $t_1 = 10{,}5$ *сек* бўлади.

**95- масала.** Жисмнинг ерга тушиш олдидаги тезлиги тахминан критик қийматга эга бўлсин учун, бу жисм қандай баландликдан ташланиши керак?

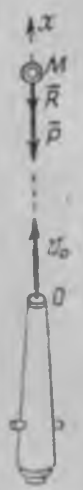
Ечиш. (138. 5) формуланинг аргументи ($act$) тахминан 3 га тенг бўлганда тезлик ўзининг критик қийматига эришади. Шунинг учун $h$ баландликни $h = \frac{1}{a}\ln \mathrm{ch}\, 3$ шартидан топамиз. $\ln \mathrm{ch}\, 3$ нинг қийматини тегишли жадвалдан олиб, $a$ нинг қийматини келтириб қўйсак, $h = \frac{2,3\,c^2}{g}$ келиб чиқади. Жисмнинг шакли $r$ радиусли шар бўлиб, солиштирма оғирлиги $\gamma$ бўлса, бу формула қуйидаги кўринишда ёзилади:

$h \approx 12{,}3 \frac{\gamma r}{g}$ (шар учун $c = 0{,}25$). Шар чўяндан бўлиб, ҳаракат ҳавода бўлса ($r = 4$ *см*, $\gamma = 7250$ *кг/м*³), $h = 2760$ *м* булади; ҳаракат сувда бўлса $h = 3{,}57$ *м* бўлади.

Шар ёғочдан ишланиб, ҳаракат ҳавода бўлса, $h = 266$ *м* бўлади.

## 139- §. Бошланғич тезлик билан пастдан юқорига отилган жисмнинг ҳаракати

Фараз қилайлик, оғирлиги $P$ бўлган жисм пастдан юқорига вертикал чизиқ бўйлаб, $v_0$ бошланғич тезлик билан отилган (337- шакл). Бу жисмнинг қандайдир $M$ ҳолатида унга пастга қараб йўналган икки куч таъсир қилади. Унинг оғирлиги $P$ ва муҳит қаршилиги $R = \nu v^2$; $x$ ўқини ҳаракат йўналиши бўйича юқорига қарата йўналтирсак, жисмга қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси тубандагича ифодаланади:




337- шакл.

$$X = -P - \nu v^2 = -P\left(1 + \frac{\nu}{P} v^2\right).$$

$\frac{\nu}{P} = k^2$ десак:

$$X = -P(1 + k^2v^2).$$

Ҳаракатнинг (136. 2) дифференциал тенгламасини биринчи кўринишда оламиз:

$$m\frac{dv}{dt} = -P(1 + k^2v^2).$$

Бу тенгламани $m$ га қисқартириб ва иккала томонини $kdt$ га кўпайтириб, ўзгарувчиларни ажратиб, чиққан натижани интеграллаcак:

$$C - kgt = \operatorname{arc\,tg}(kv)$$

келиб чиқади.

Бошланғич шартдан $C$ ни топамиз. $t = 0$ бўлганда $v = v_0$ эди. Шунга кўра:

$$C = \operatorname{arc\,tg}(kv_0).$$

Демак:

$$\operatorname{arc\,tg}(kv_0) - \operatorname{arc\,tg}(kv) = kgt.$$

Тригонометрик формула:

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x - y}{1 + xy}$$

дан фойдаланиб, юқоридаги ифодани тубандагича ёза оламиз:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{kv_0 - kv}{1 + k^2 v_0 v} = kgt.$$

Бундан:

$$v = \frac{kv_0 - \operatorname{tg}(kgt)}{k[1 + kv_0 \operatorname{tg}(kgt)]}. \tag{139. 1}$$

Бу тенглама ихтиёрий вақт учун тезлик билан вақт орасидаги боғланишни ифодалайди.

Бу тенгламадан фойдаланиб, қуйидаги масалани чиқарамиз. Қандай вақт ичида жисм энг баланд нуқтага кўтарилади. Бу вақтни $\tau$ деймиз. Ана шу вақтнинг ичида жисм энг катта баландликка кўтарилиб, сўнгра қайтиб туша бошлайди. Тушиш олдида унинг тезлиги $v = 0$ бўлади. Шунинг учун (139. 1) формуладаги $t$ ўрнига $\tau$ ни қўйиб, $v$ нинг ўрнига нуль қўйсак, тубандаги тенглама келиб чиқади:

$$kv_0 - \operatorname{tg} kg\tau = 0$$

ёки

$$kv_0 = \operatorname{tg} kg\tau.$$

Бундан:

$$\tau = \frac{\operatorname{arc\,tg} kv_0}{kg}. \tag{139. 2}$$

Бу формуладан фойдаланиб, жисмнинг энг юқори нуқтага кўтарилиш вақти топилади. Энди, (139. 1) тенгламани яна интеграллаймиз; $v$ нинг ўрнига $\frac{dx}{dt}$ ни қўйиб, тенгламанинг иккала томонини $k^2gdt$ га кўпайтириб, $\operatorname{tg} kgt$ нинг ўрнига $\frac{\sin(kgt)}{\cos(kgt)}$ ни қўйсак:

$$C_1 + k^2g\,x = \ln\{kv_0 \sin kgt + \cos kgt\}$$

келиб чиқади. Бошланғич шартдан $C_1$ ни топамиз. $t = 0$ бўлганда $x = 0$ эди. Шунга кўра: $C_1 = 0$ бўлади. Демак:

$$x = \frac{1}{gk^2} \ln\{kv_0 \sin kgt + \cos kgt\}. \tag{139. 3}$$

Бу тенгламадан, юқорига қараб отилган жисмнинг қандай максимал баландликка кўтарилишини топамиз. Унинг энг максимал баландлиги $x_{max} = h$ бўлсин; бундай баландликка кўтарилиш $\tau$ вақтда бажарилса, (139. 3) формуладаги $t$ нинг ўрнига $\tau$ ни қўямиз; натижада:

$$kg^2 h = \ln\{kv_0 \sin kg\tau + \cos kg\tau\}$$

келиб чиқади. (139. 2) формуладан фойдаланиб, $\sin kg\tau$ билан $\cos kg\tau$ нинг қийматларини топамиз. Улар:

$$\sin kg\tau = \frac{kv_0}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}$$

$$\cos kg\tau = \frac{1}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}$$

бўлади. Шунинг учун юқоридаги ифодани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$k^2gh = \ln\frac{1+k^2v_0^2}{\sqrt{1+k^2v_0^2}} = \frac{1}{2}\ln(1+k^2v_0^2).$$

Бундан:

$$h = \frac{\ln(1+k^2v_0^2)}{2k^2g}. \qquad (139.\ 4)$$

Жисм энг максимал баландликка кўтарилиб, оний вақт тўхтайди, сўнгра қайтиб туша бошлайди. Энди, унинг қандай тезлик билан пастга тушишини топамиз. Жисмнинг қайтиб тушишида қаршилик кучи тескарига, яъни юқорига қараб йўналади. Шунинг учун жисмга қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси тубандагича ифодаланади:

$$X = -mg + k^2mgv^2 = -mg(1-k^2v^2).$$

Бу ҳол учун ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини (136. 2) нинг иккинчи кўринишида оламиз:

$$mv\frac{dv}{dx} = -mg(1-k^2v^2),$$

$m$ га қисқартириб, ўзгарувчиларни ажратиб интегралласак:

$$\ln(1-k^2v^2) = C_2 + 2k^2gx$$

келиб чиқади.

Бошланғич шартдан $C_2$ ни топамиз. $t=0$ бўлганда $x=h$, $v=0$ эди. Шунинг учун $C_2 = -2k^2gh$ булади. Демак:

$$2k^2gx - 2k^2gh = \ln(1-k^2v^2)$$

келиб чиқади. $2k^2gh$ нинг қийматини (139. 4) формуладан келтириб қўйсак, $x$ нинг қиймати қуйидагича ёзилади:

$$x = \frac{\ln[(1-k^2v^2)(1+k^2v_0^2)]}{2k^2g}. \qquad (139.\ 5)$$

Бу тенглама ихтиёрий вақт учун $v$ тезлик билан $x$ масофа орасидаги муносабатни ифодалайди (жисмнинг қайтиб тушишида). Бу формуладан фойдаланиб, жисмнинг ерга тушиш олдидаги тезлигини топамиз. Жисм ерга етганда $x = 0$ бўлади. Бунда:

$$\ln[(1 - k^2v^2)(1 + k^2v_0^2)] = 0$$

ёки

$$(1 - k^2v^2)(1 + k^2v_0^2) = 1.$$

Бу тенгламадан $v$ ни аниқлаймиз:

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + k^2v_0^2}}. \qquad (139.\ 6)$$

Демак, жисмнинг ерга қайтиб тушиш олдидаги тезлиги унинг кутарилиши олдидаги тезлигидан кичик бўлар экан. Бошлангич тезлик жуда катта бўлса, (139. 6) формуладан тезликнинг лимитидаги критик қиймати келиб чиқади; яъни:

$$v^2 = \frac{1}{\frac{1}{v_0^2} + k^2} \text{ даги } \lim \frac{1}{v_0^2} \approx 0 \text{ бўлса,}$$

$$\lim v = v_k = \frac{1}{k} \quad \text{ёки} \quad v_k = \sqrt{\frac{P}{\gamma}} = \sqrt{\frac{P}{c\rho s}}$$

бўлиб, яна юқорида чиқарилган натижага эга бўламиз.

## 140- §. Материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракати

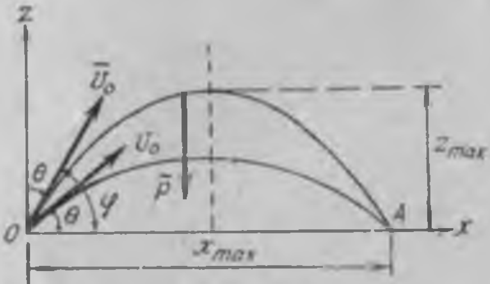
Материал нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатини аниқлаш учун бизда бир-бири билан муносабатда бўлган қуйидаги дифференциал тенгламалар системаси бор эди:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right| \qquad (140.\ 1)$$

Бу ерда $X$, $Y$, $Z$ — материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциялари бўлиб, улар қандай факторларга боғлиқлиги бизга маълум. Умумий ҳолда бу дифференциал тенгламаларнинг интегралларини топиш математика нуқтаи назаридан жуда ҳам қийин масаладир. Агар бу тенгламалар бир-бирига боғлиқсиз бўлса, у ҳолда, уларнинг интеграллари осонлик билан топилади.

## 141- §. Горизонтга қия қилиб, бошланғич тезлик билан отилган жисмнинг ҳаракати

Муҳит қаршилигини эътиборга олмасдан, горизонтга қия қилиниб, $v_0$ бошланғич тезлик билан отилган жисм ҳаракатини текширамиз. Фараз қилайлик, жисм $v_0$ бошланғич тезлик билан $O$ нуқтадан горизонтга қия қилиб отилган бўлсин. Бу ҳаракатни Декарт координаталар системасига нисбатан текширамиз. Координаталар бошини $O$ нуқтада олиб, $xOz$ текисликни $v_0$ орқали ўтказамиз, у ҳолда ташланган жисмнинг ҳаракати ана шу $xOz$ текисликда бўлади (338- шакл). Жисм фақат ўзининг оғирлиги таъсиридагина ҳаракатда бўлгани учун, оғирлик кучининг координата ўқларидаги проекциялари тубандагича бўлади:



338- шакл.

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = -mg. \qquad (141.\ 1)$$

У ҳол учун (140. 1) дифференциал тенгламалар тубандагича ёзилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg. \qquad (3)$$

Ҳаракат $xOz$ текисликда бўлгани учун, (2) тенглама айнан нулга тенг бўлади. Шунинг учун, (1) ва (3) тенгламаларнинг интегралларини топамиз. Мазкур тенгламалардан:

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \qquad (a)$$

$$\frac{dz}{dt} = C_2 - gt \qquad (б)$$

ни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартдан $C_1$ билан $C_2$ ни аниқлаймиз. $t = 0$ бўлганда:

$$v_x = v_0 \cos\theta,\ v_z = v_0 \sin\theta.$$

Шунга кўра:

$$C_2 = v_0 \cos \theta, \ C_2 = v_0 \sin \theta.$$

$C_1$ ва $C_2$ нинг қийматини (а) ва (б) тенгламаларга қуйиб, иккинчи марта интеграллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = v_0 \sin \theta - gt. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Булардан:

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t + C_3,$$

$$z = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 + C_4.$$

Яна бошланғич шартдан $C_3$ билан $C_4$ ни аниқлаймиз. $t = 0$ бўлганда, нуқта координаталар бошида эди, яъни $x = z = 0$ эди. Шунинг учун $C_3 = C_4 = 0$ бўлади. Демак, ҳаракат тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \theta, \\ z &= v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2. \end{aligned}\right\} \quad (141.\ 2)$$

Энди, траектория тенгламасини топамиз. Бунинг учун ҳаракат тенгламаларидан вақтни чиқарамиз. (141. 2) тенгламанинг биринчи қисмидан $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ ни олиб, иккинчисига қуйсак:

$$z = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (141.\ 3)$$

келиб чиқади. Бу — парабола тенгламаси бўлиб, унинг ўқи $z$ ўқига параллелдир.

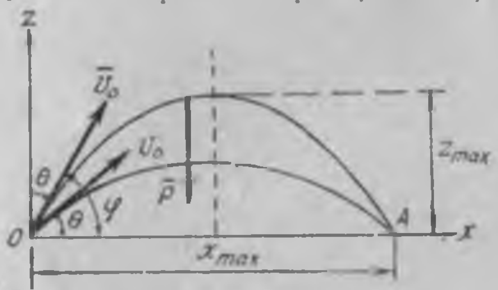
Чиққан тенгламадан фойдаланиб, қуйидаги икки муҳим масалани ечиш мумкин: 1) бошланғич тезлик билан горизонтга қия қилиб отилган жисм қандай баландликка кўтарилади ва қанча масофага бориб тушади, 2) $\theta$ оғиш бурчагининг қандай қийматида бу баландлик ва масофа энг максимал қийматларга эришади.

Олдин биринчи масалани ечамиз. Жисм энг баландликка кўтарилганда, унинг тезлиги траекторияга уринма бўлиб, горизонтал йўналишда бўлади, шунинг учун бу нуқтада тезликнинг вертикал тузувчиси нулга тенг бўлади. Бу ҳолдан фойдаланиб, (4) формуланинг иккинчи қисмидан жисмнинг энг юқорига кўтарилиш вақти $t_1$ ни топамиз; у:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}.$$

## 141- §. Горизонтга қия қилиб, бошланғич тезлик билан отилган жисмнинг ҳаракати

Муҳит қаршилигини эътиборга олмасдан, горизонтга қия қилиниб, $v_0$ бошланғич тезлик билан отилган жисм ҳаракатини текширамиз. Фараз қилайлик, жисм $v_0$ бошланғич тезлик билан $O$ нуқтадан горизонтга қия қилиб отилган бўлсин. Бу ҳаракатни Декарт координаталар системасига нисбатан текширамиз. Координаталар бошини $O$ нуқтада олиб, $xOz$ текисликни $v_0$ орқали ўтказамиз, у ҳолда ташланган жисмнинг ҳаракати ана шу $xOz$ текисликда бўлади (338- шакл). Жисм фақат ўзининг оғирлиги таъсиридангина ҳаракатда бўлгани учун, оғирлик кучининг координата ўқларидаги проекциялари тубандагича бўлади:



338- шакл.

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = -mg. \qquad (141.\ 1)$$

У ҳол учун (140. 1) дифференциал тенгламалар тубандагича ёзилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg. \qquad (3)$$

Ҳаракат $xOz$ текисликда бўлгани учун, (2) тенглама айнан нулга тенг бўлади. Шунинг учун, (1) ва (3) тенгламаларнинг интегралларини топамиз. Мазкур тенгламалардан:

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \qquad (a)$$

$$\frac{dz}{dt} = C_2 - gt \qquad (б)$$

ни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартдан $C_1$ билан $C_2$ ни аниқлаймиз. $t = 0$ бўлганда:

$$v_x = v_0 \cos\theta,\ \ v_z = v_0 \sin\theta.$$

Шунга кўра:

$$C_2 = v_0 \cos\theta, \quad C_2 = v_0 \sin\theta.$$

$C_1$ ва $C_2$ нинг қийматини (а) ва (б) тенгламаларга қуйиб, иккинчи марта интеграллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\theta - gt. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Булардан:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t + C_3,$$
$$z = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 + C_4.$$

Яна бошлангич шартдан $C_3$ билан $C_1$ ни аниқлаймиз. $t = 0$ булганда, нуқта координаталар бошида эди, яъни $x = z = 0$ эди. Шунинг учун $C_3 = C_1 = 0$ бўлади. Демак, ҳаракат тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\theta, \\ z &= v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} gt^2. \end{aligned}\right\} \tag{141. 2}$$

Энди, траектория тенгламасини топамиз. Бунинг учун ҳаракат тенгламаларидан вақтни чиқарамиз. (141. 2) тенгламанинг биринчи қисмидан $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ ни олиб, иккинчисига қуйсак:

$$z = x \operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \tag{141. 3}$$

келиб чиқади. Бу — парабола тенгламаси бўлиб, унинг ўқи $z$ ўқига параллелдир.

Чиққан тенгламадан фойдаланиб, қуйидаги икки муҳим масалани ечиш мумкин: 1) бошланғич тезлик билан горизонтга қия қилиб отилган жисм қандай баландликка кўтарилади ва қанча масофага бориб тушади, 2) $\theta$ огиш бурчагининг қандай қийматида бу баландлик ва масофа энг максимал қийматларга эришади.

Олдин биринчи масалани ечамиз. Жисм энг баландликка кўтарилганда, унинг тезлиги траекторияга уринма булиб, горизонтал йўналишда булади, шунинг учун бу нуқтада тезликнинг вертикал тузувчиси нулга тенг бўлади. Бу ҳолдан фойдаланиб, (4) формуланинг иккинчи қисмидан жисмнинг энг юқорига кўтарилиш вақти $t_1$ ни топамиз; у:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}.$$

тенглама келиб чиқади. Бу чиққан тенглама траекториялар — параболалар эгувчисининг тенгламаси булиб, у ҳам, парабoладир. Бу парабола хавфсизлик параболаси дейилади. Бу парабола энг баланд кўтарилиш нуқтаси билан энг узоқ тушиш нуқтасидан ўтади. Ҳақиқатда ҳам (141. 6) тенгламага $z = 0$ ни қўйсак, $x = \frac{v_0^2}{g} = a$ булади. Худди шуннингдек, $x = 0$ бўлганда, $z = \frac{v_0^2}{2g} = h$ бўлади.

Бу мулоҳазаларнинг ҳаммаси бир текисликда отилган жисм ҳаракати устида юргизилмоқда. Отилган жисмнинг эгаллаши мумкин бўлган фазони билмоқчи булсак, $xOz$ текисликни $z$ ўқи атрофида айлантирамиз. У вақтда айланиш параболоиди ҳосил бўлади. Бу параболоид ичидаги барча нуқталар хавф остида бўлади, чунки отилган жисм бу нуқталарни шикастлаши мумкин. Бу чиқарилган натижаларнинг ҳаммаси бўшлиқда отилган жисмнинг ҳаракатига оиддир.

**96-масала.** Материал нуқта $AB$ горизонтал текисликда $v_0$ тезлик билан ҳаракатланиб, текислик қирғоғига етганда, эркин равишда бошқа $CD$ горизонтал текислик қирғоғига тушади (340-шакл). Текисликларнинг вертикал оралиқлари $h$, қирғоқларнинг узоқлиги $a$ бўлса, $v_0$ бошланғич тезликнинг миқдори қандай бўлади?

Ечиш. Координата ўқларини шаклда кўрсатилганча танлаб, ҳаракат дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg.$$

Бошланғич шартни эътиборга олиб ва бу тенгламаларни икки марта интеграллаб, нуқтанинг ҳаракат тенгламаларини топамиз:

$$x = v_0 t,$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Бу тенгламалардан $t$ ни чиқариб, траектория тенгламасини топамиз:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Бу тенглама $C$ нуқтанинг $(a, h)$ координаталарини қаноатлантириши керак. Шунинг учун:

$$h = \frac{g}{2v_0^2} a^2.$$

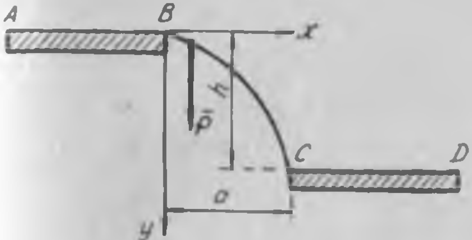
Бундан:

$$v_0 = a\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

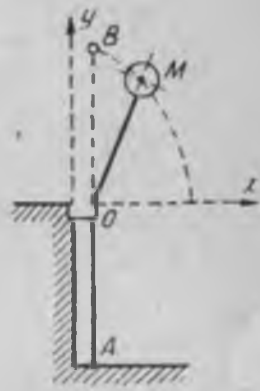
келиб чиқади.

**97- масала.** Бир учи $A$ нуқтага боғланган эластик ип қўзғалмас $O$ ҳалқадан ўтади, бошқа учига массаси $m$ бўлган $M$ шарча боғланган (341- шакл).

Ипнинг $OA$ қисмининг чўзилмаган вақтидаги узунлиги $l$ га тенг, уни 1 *см* узунликка чўзиш учун $k^2m$ дина куч зарур. Ипни $AB$ тўғри чизиқ бўйлаб чўзганда, икки марта узаяди. Ипнинг учига боғланган шарча $AB$ га тик йўналган $v_0$ тезлик берилган. Ипнинг тортилишини унинг чўзилишига тўғри пропорционал деб, ипнинг оғирлигини ҳисобга олмай, шарчанинг траекториясини топинг.




340- шакл.




341- шакл.

Ечиш. (136. 2) нинг иккинчи кўринишида ҳаракат дифференциал тенгламаларини ёзиб, $m$ га қисқартирсак:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -k^2x,$$

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -k^2y$$

келиб чиқади. Бу тенгламаларни интеграллаймиз.

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{1}{2}k^2x^2 + C_1,$$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} = -\frac{1}{2}k^2y^2 + C_2,$$

$t = 0$ бўлганда $x = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, $y = l$, $\dot{y} = 0$ эди. Шунга кўра $C_1 = \frac{v_0^2}{2}$, $C_2 = \frac{k^2l^2}{2}$. Буларни ҳисобга олиб, биринчи интегрални ёзамиз:

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - k^2x^2, \quad \dot{y}^2 = k^2(l^2 - y^2).$$

Бу тенгламаларни яна интеграллаймиз:

$$\arcsin\frac{kx}{v_0} = kt + C_3, \quad \arcsin\frac{y}{l} = kt + C_4.$$

Юқорида келтирилган бошланғич шартдан: $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{\pi}{2}$.

23*

Демак:

$$\frac{kx}{v_0} = \sin kt, \quad \frac{y}{l} = \cos kt.$$

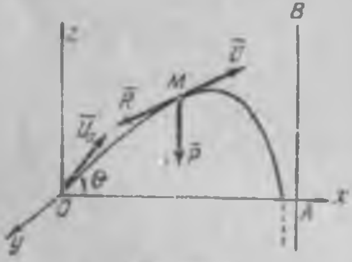
Бу тенгламалардан $t$ вақтни чиқарсак, траектория тенгламасини топамиз. Бунинг учун, чиққан ҳаракат тенгламасини квадратга ошириб, қўшсак:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$

келиб чиқади. Демак, траектория ярим ўқлари $\frac{v_0}{k}$ ва $l$ га тенг бўлган эллипс экан.

## 142- §. Қаршилик кўрсатувчи муҳитда горизонтга қия қилиб отилган жисмнинг ҳаракати

Жисм қаршилик кўрсатувчи муҳитда отилса, муҳит қаршилиги ҳаракат ва траекторияни анчагина ўзгартади. Фараз қилайлик, қаршилик кўрсатувчи муҳитда шар шаклидаги жисм $v_0$ бошланғич тезлик билан горизонтга қия қилиб отилган бўлсин. Ҳаракат тезлигининг миқдори 0,1 *м/сек* дан ошмасин. У ҳолда муҳит қаршилигини ташланган жисм тезлигининг биринчи даражасига пропорционал деб оламиз. Координата ўқларини шаклда кўрсатилгандек танлаб, $xOz$ текисликни $v_0$ бошлангич тезлик орқали ўтказамиз (342- шакл). Жисм ҳаракатида унга $P$ оғирлик кучи билан муҳитнинг $R$ қаршилик кучи таъсир қилади. Бу ерда:



342- шакл.

$$R = \nu v.$$

Бу куч $v$ тезликка қарама-қарши йўналган.

Координата ўқлари бўйича куч проекциялари тубандагича бўлади:

$$X = -\nu\frac{dx}{dt}; \quad Y = 0; \quad Z = -\nu\frac{dz}{dt} - mg.$$

Ҳаракат дифференциал тенгламаларини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -mk\frac{dx}{dt}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mk\frac{dz}{dt} - mg. \end{aligned}\right| \qquad (a)$$

Бунда: $\nu = mk$. Ҳаракат $xOz$ текисликда бўлгани учун, иккинчи тенглама айнан нуль бўлади. (а) тенгламаларнинг икки томонини $m$ га қисқартсак:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -k\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = -k\frac{dz}{dt} - g$$

кўринишидаги тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламаларни интеграллаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = -kx + C_1,$$

$$\frac{dz}{dt} = -kz - gt + C_2.$$

Бошланғич шартдан $C_1$ билан $C_2$ ни аниқлаймиз. $t = 0$ бўлганда, $x = z = 0$ бўлгани учун: $v_x = v_0 \cos\theta$, $v_z = v_0 \sin\theta$. Шунинг учун: $C_1 = v_0 \cos\theta$, $C_2 = v_0 \sin\theta$.
Буларнинг қийматини юқоридаги тенгламаларга қўйсак:

$$\frac{dx}{dt} = -kx + v_0 \cos\theta,$$

$$\frac{dz}{dt} = -kz - gt + v_0 \sin\theta$$

келиб чиқади.

Бу тенгламаларни яна интеграллаймиз. Уларни $e^{kt}$ га кўпайтириб, қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(xe^{kt}) &= v_0 e^{kt} \cos\theta, \\ \frac{d}{dt}(ze^{kt}) &= v_0 e^{kt} \sin\theta - gte^{kt}. \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Бу тенгламалардан биринчисини интеграллаймиз:

$$xe^{kt} = \frac{v_0 e^{kt} \cos\theta}{k} + C_3.$$

$t = 0$ бўлганда $x = 0$ эди, шунинг учун: $C_3 = -\frac{v_0 \cos\theta}{k}$.
Демак:

$$x = -\frac{v_0 e^{-kt} \cos\theta}{k} + \frac{v_0 \cos\theta}{k}$$

ёки

$$x = \frac{v_0 \cos\theta\,(1 - e^{-kt})}{k}. \tag{в}$$

(б) нинг иккинчи қисмини интеграллаймиз:

$$ze^{kt} = \frac{v_0 \sin\theta}{k} e^{kt} - g\int te^{kt}\,dt. \tag{г}$$

$\int te^{kt}\,dt$ ни бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int te^{kt}\,dt = \frac{te^{kt}}{k} - \frac{1}{k}\int \frac{e^{kt}dt}{k} = \frac{te^{kt}}{k} - \frac{e^{kt}}{k^2}.$$

Бу чиққан интегрални (г) га қўйсак:

$$ze^{kt} = \frac{v_0 \sin\theta}{k} e^{kt} - \frac{gt}{k} e^{kt} + \frac{g}{k^2} e^{kt} + C_4$$

ни ҳосил қиламиз. $t = 0$ бўлганда $z = 0$ эди, шунинг учун:

$$C_4 = -\frac{v_0 \sin\theta}{k} - \frac{g}{k^2} = -\frac{g + kv_0 \sin\theta}{k^2}$$

бўлади, демак:

$$ze^{kt} = \frac{v_0 \sin\theta}{k} e^{kt} - \frac{gt}{k} e^{kt} + \frac{g}{k^2} e^{kt} - \frac{g + kv_0 \sin\theta}{k^2}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, ҳаракатни текшириш учун қуйидаги тенгламаларни ҳосил қилдик:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{v_0 \cos\theta}{k}(1 - e^{-kt}), \\ z &= \left(\frac{v_0 \sin\theta}{k} + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \end{aligned}\right\} \qquad (142.\ 1)$$

Бу тенгламалардан $t$ вақтни чиқарсак, траектория тенгламасини топамиз. Бу ҳол учун траектория тенгламаси алгебраик бўлмай, трансцендент функция бўлади. Траектория асимптотаси тўғри чизиқ бўлгани учун бу асимптота тенгламасини топамиз. (142. 1) дан биринчи тенгламани олиб, вақтни чексизга интилтирамиз: $t \to \infty$. У ҳолда, $x$ нинг лимити $\frac{v_0 \cos\theta}{k}$ га тенг бўлади. Демак, асимптота $z$ ўқига параллел бўлиб, $OA$ масофадан ўтар экан (342- шакл).

Ҳаракат тезлиги катта булса, муҳит қаршилиги тезликнинг иккинчи ва юқори даражасига пропорционал бўлади. Бу тарздаги масалалар баллистикага оид бўлиб, у махсус фанни ташкил этади. Шунинг учун, бу бобдаги мулоҳазаларни шу билан чегаралаймиз.

XXIII БОБ

# МАТЕРИАЛ НУҚТА ДИНАМИКАСИНИНГ УМУМИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

Умумий ҳолда материал нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг интегралларини топиш мумкин эмас. Аммо баъзи бир хусусий ҳолларда уларни топиш мумкин. Бу ҳоллар бир неча теорема билан таърифланади. Мазкур теоремалар ***динамиканинг умумий қонунлари*** деб ҳам аталади.

## 143- §. Ҳаракат миқдорининг теоремаси

Материал нуқта массасининг тезлик векторига кўпайтмаси унинг ***ҳаракат миқдори*** дейилади. Ҳаракат миқдори вектор қиймат бўлиб, у ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги билан бир йўналишда. Ҳаракат миқдори нуқтанинг ҳаракатини характерловчи фактордир. Ҳаракат миқдорининг ўлчов бирлигини унинг ифодасидан, яъни ($m\bar{v}$) формуладан топамиз: [ҳаракат миқдор] = [масса $\times$ тезлик] = $\left[\frac{\text{куч}}{\text{тезланиш}}\times\right.$ $\times$ тезлик] $=\left[\frac{\text{куч}\times\text{вақт}^2}{\text{узунлик}}\times\frac{\text{узунлик}}{\text{вақт}}\right]$ = [куч $\times$ вақт].

Демак, ҳаракат миқдорининг ўлчов бирлиги куч билан вақт кўпайтмасига тенг экан. Техник системада ҳаракат миқдори ***килограмм-секунд*** (***кГ сек***) да, халқаро (СИ) системасида эса ***кГ. м. сек*** да ўлчанади.

$\bar{F}$ куч материал нуқтага $dt$ вақт ичида таъсир қилса, ($\bar{F}\cdot dt$) ифода $\bar{F}$ кучнинг ***элементар импульси*** дейилади.

Ҳаракат миқдори билан куч импульси орасидаги муносабатни топамиз.

Динамиканинг асосий тенгламасини оламиз:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{F}\ \text{ёки}\ m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}.$$

Бу тенгламани тубандаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt}=\bar{F}. \qquad (143.\ 1)$$

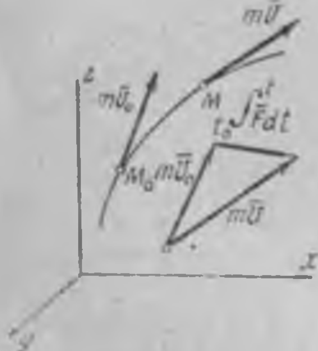
$m\bar{v}$ — **ҳаракат миқдорининг** векгори, $\bar{F}dt$ эса кучнинг **элементар импульси** дейилади. Юқоридаги тенгламанинг иккала томонини $dt$ га кўпайтирсак:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt \qquad (143.\ 2)$$

келиб чиқади. Бунга асосланиб, ҳаракат миқдорининг **теоремасини** қуйидагича таъриф қиламиз:

*Ҳаракат миқдори векторининг дифференциали материал нуқтага қўйилган кучнинг элементар импульсига тенг.*

Куч импульсининг бирлиги ҳаракат миқдори бирлиги билан бир хил эканлиги (143. 2) формуладан кўриниб турибди.




343- шакл.

Энди, мазкур теореманинг интеграл ифодасини чиқарамиз. Материал нуқтанинг бошланғич тезлиги $\bar{v}_0$ бўлиб, $t$ секунд ўтгандан кейинги тезлиги $\bar{v}$ бўлсин. Бу чегараларда (143. 2) тенгламани интегралласак:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^{t}\bar{F}dt \qquad (143.\ 3)$$

келиб чиқади. Демак, *маълум вақт ичида ҳаракат миқдори векторининг ўзгариши материал нуқтага таъсир қилувчи кучнинг шу вақт ичидаги тўла импульсига тенг* бўлар экан.

Материал нуқтанинг $t_0$ ва $t$ вақтдаги ҳаракат миқдори вектори $m\bar{v}_0$ ва $m\bar{v}$ маълум бўлса, тўла импульс қиймати $\int_{t_0}^{t}\bar{F}dt$ ни геометрик усулда, 343- шаклда тасвирланганча аниқлаш мумкин. (143. 3) тенгламани проекциялар орқали ифодалаймиз:

$$\left.\begin{aligned} m\dot{x} - m\dot{x}_0 &= \int_{t_0}^{t} X\,dt, \\ m\dot{y} - m\dot{y}_0 &= \int_{t_0}^{t} Y\,dt, \\ m\dot{z} - m\dot{z}_0 &= \int_{t_0}^{t} Z\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (143.\ 4)$$

Куч проекциялари $t$ вақтнинг функцияси ёки ўзгармас бўлса, бу интеграллардан куч импульсини топиш осон.

Фараз қилайлик, ҳаракат тўғри чизиқли бўлиб, куч ўзгармас бўлсин, яъни: $X = \text{const}$, $Y = Z = 0$ бўлсин. У ҳолда:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = X(t - t_0)$$

келиб чиқади. Бундан, ҳаракат миқдори ва куч импульсининг *кГ сек* билан ўлчанишини курамиз.

Баъзи бир хусусий ҳолларда ҳаракат миқдори теоремаси биринчи интегралларни беради. Масалан, $F = 0$ бўлган ҳолда: $d(m\bar{v}) = 0$ бўлади. Бундан: $\bar{v} = \text{const}$. Ёки:

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \quad \frac{dy}{dt} = C_2, \quad \frac{dz}{dt} = C_3$$

келиб чиқади. Бу ҳолда материал нуқта инерцион ҳолатда булади.

Фараз қилайлик, материал нуқтага таъсир қилувчи куч координата ўқларидан бирига, масалан, $z$ ўқига параллел бўлсин. У ҳолда: $X = Y = 0$ бўлиб, $Z = F$ бўлади. Шунинг учун: $\frac{dx}{dt} = C_1$, $\frac{dy}{dt} = C_2$ келиб чиқади. Бу тенгликларнинг биринчисини $C_2$ га, иккинчисини $C_1$ га кўпайтириб, сўнгра биридан иккинчисини айириб, чиққан натижани интегралласак:

$$C_2x - C_1y = C_3$$

келиб чиқади. Бу ифода $z$ ўқига параллел текисликнинг тенгламасидир.


344- шакл.

Демак, материал нуқтага қўйилган куч координата ўқларидан бирига параллел бўлса, нуқтанинг траекторияси текис эгри чизиқ бўлиб, шу куч ётган текисликда ётар экан (344-шакл). Шунингдек, нуқтанинг траекторияси текис эгри чизиқ бўлса, унга қўйилган кучнинг йўналиши ўзгармас булади.

## 144- §. Ҳаракат миқдори моментининг теоремаси (юзалар қонуни)

Динамиканинг асосий тенгламасини оламиз:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

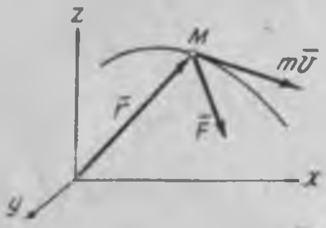
Бу тенгламанинг иккинчи томонини вектор тарзида $\bar{r}$ га кўпайтирамиз (345- шакл):

$$\left[\bar{r},\ m\frac{d\bar{v}}{dt}\right] = [\bar{r},\ \bar{F}]. \tag{a}$$

Мазкур тенгликнинг чап томонини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\left[\bar{r},\ \frac{d\bar{v}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\bar{r},\ \bar{v}] - [\bar{v},\ \bar{v}] = \frac{d}{dt}[\bar{r},\ \bar{v}],$$

чунки, $[\bar{v},\ \bar{v}] = 0$. Шунинг учун (а) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:




345- шакл.

$$\frac{d}{dt}[\bar{r},\ m\bar{v}] = [\bar{r},\ \bar{F}]. \tag{144. 1}$$

Демак, *бирор нуқтага нисбатан олинган ҳаракат миқдори моментининг вақт бўйича ҳосиласи материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу нуқтага нисбатан олинган моментига тенг бўлар экан.*

(144. 1) тенгликни координата ўқларидаги проекциялари орқали ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{m(y\dot{z} - z\dot{y})\} &= m_x(\bar{F}) = yZ - zY, \\ \frac{d}{dt}\{m(z\dot{x} - x\dot{z})\} &= m_y(\bar{F}) = zX - xZ, \\ \frac{d}{dt}\{m(x\dot{y} - y\dot{x})\} &= m_z(\bar{F}) = xY - yX. \end{aligned}\right\} \tag{144. 2}$$

Бу теорема ҳам баъзи бир хусусий ҳолларда биринчи интегралларни беради. Масалан, фараз қилайлик, ташқи кучнинг моменти бирор нуқтага нисбатан нулга тенг бўлсин:

$$[\bar{r},\ \bar{F}] = 0.$$

Бу ҳолда ё $F = 0$ бўлиши ёки кучнинг таъсир чизиғи ҳамма вақт момент марказидан ўтиши керак.

Биринчи ҳолни эҳтимолдан ташқарига чиқарамиз. Иккинчи ҳолни оламиз.

Ҳамма *вақт таъсир чизиғи бир нуқтадан ўтувчи куч марказий куч дейилади.* Бу ҳолда (144. 1) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$[\bar{r},\ m\bar{v}] = \overline{\mathrm{const.}} \tag{144. 3}$$

Демак, *материал нуқта марказий куч таъсирида бўлган. ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас бўлар экан.* Ҳаракат миқдори моментининг вектори бу ҳолда ўзгармас йўналишда бўлиб, у, $\bar{v}$ тезлик вектори билан $\bar{r}$ радиус-вектор текислигига тик йўналади.

(144. 3) тенглама *марказга нисбатан ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонуни дейилади.*

(144. 3) тенгламани проекцияда ёзамиз:

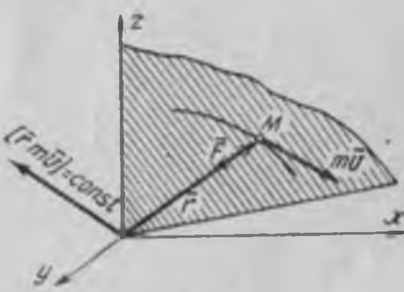
$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1,$$
$$z\dot{x} - x\dot{z} = C_2,$$
$$x\dot{y} - y\dot{x} = C_3.$$

Бу тенгламаларнинг ҳар қайсисини тегишлича $x$, $y$, $z$ га купайтириб, чиққан натижани қўшсак:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0 \tag{144. 4}$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенглама координаталар бошидан ўтувчи текислик тенгламасидир.

Демак, марказий куч таъсирида ҳаракатланувчи нуқтанинг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантирар экан, бошқача айтганда, *марказий куч таъсиридаги нуқта ҳаракати мазкур марказдан ўтувчи текисликда бўлиб, траекторияси текис эгри чизиқ бўлар экан* (346- шакл).




346- шакл.

(144. 3) тенгламани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{1}{2}[\bar{r}, \bar{v}] = C = \overline{\text{const}}. \tag{144. 5}$$

Бу тенгламанинг чап томони — секториал тезликнинг ифодаси эканлиги бизга кинематикадан маълум (347- шакл). Шунинг учун уни қуйидаги кўринишда кўчириб ёзамиз:

$$\frac{\overline{d\sigma}}{dt} = \frac{1}{2}[\bar{r}, \bar{v}] = C = \overline{\text{const}}. \tag{144. 6}$$

(144. 6) нинг ўнг томонининг миқдори:

$$C = \frac{1}{2} rv \sin(\widehat{\bar{r}, \bar{v}}) \tag{144. 7}$$

ёки (102. 1) га биноан:

$$C = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \qquad (144.\ 7')$$

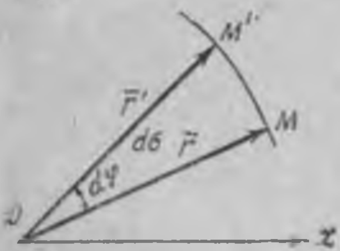
(144. 6) ни интеграллаганда, миқдор жиҳатидан:

$$\sigma = Ct + C_1$$

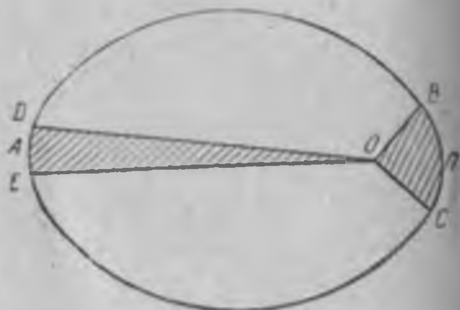
бўлади.
Бундан:

$$\sigma = Ct + C_1.$$

Демак, *марказий куч таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳолатини аниқловчи $\bar{r}$ радиус-векторнинг чизган юзаси вақтга пропорционал равишда ўсар экан*. Шунинг учун ҳам мазкур чиқарилган тенглик *юза теоремаси* дейилади.




347- шакл.




348- шакл.

Тортиш кучи таъсирида ҳамма планеталар Қуёш атрофида шу қонун билан ҳаракат қилади. Кеплер (1571—1630) қонунига кўра ҳар қайси планета Қуёш атрофида эллипс буйича ҳаракат қилади ва бу эллипснинг битта $O$ фокусида Қуёш бўлади (348- шакл). Планетанинг радиус-вектори бир хил вақт ичида катталиги тенг бўлган юза чизади, яъни $OBC$ юза $ODE$ юзага тенг. Юзаларнинг тенглигидан планетанинг энг катта тезлиги $П$ нуқтада, энг кичик тезлиги $A$ нуқтада бўлади. $П$ нуқта перигелий, $A$ нуқта афелий дейилади.

## 145- §. Кинетик энергия теоремаси

Массаси $m$ бўлган $M$ материал нуқта $\bar{F}$ куч таъсирида эгри чизиқ буйлаб ҳаракат қилаётган бўлсин (349- шакл). Бу материал нуқта учун динамиканинг асосий тенгламасини оламиз:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини скаляр равишда $\overline{dr}$ га купайтирамиз:

$$\left(m\frac{\overline{dv}}{dt}, \overline{dr}\right) = (\overline{F}, \overline{dr}).$$

Чиққан тенгликнинг чап томонини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\left(m\frac{\overline{dv}}{dt}, \overline{r}\right) = \left(m\frac{\overline{dr}}{dt}, \overline{dv}\right) = (m\overline{v}, d\overline{v}),$$

Буни кўзда тутиб, юқоридаги тенгликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = (\overline{F}, d\overline{r}). \qquad (145.1).$$

$\frac{mv^2}{2}$ — нуқтанинг *кинетик энергияси* ёки жонли куч дейилади. $(\overline{F}, d\overline{r})$ эса $\overline{F}$ кучнинг *элементар иши* дейилади.

Демак, материал нуқтанинг кинетик энергияси (жонли кучи) скаляр бўлиб, миқдори нуқта массаси ва тезлиги квадратлари купайтмасининг ярмига тенг.

Кинетик энергия ҳам ҳаракат миқдорига ўхшаш механик ҳаракатларни характерловчи асосий факторлардан биридир. Кинетик энергия ҳаракат миқдорига қараганда кенгроқ тушунчадир. Ҳаракат миқдори фақат бир нуқта иккинчи нуқтага берадиган механик ҳаракатни ифодаласа, кинетик энергия механик ҳаракатни унга эквивалент бўлган бошқа механик ҳаракатларга ўтишини ифодалайди. (145. 1) тенглик бундай таърифланади:

*Кинетик энергиянинг дифференциали материал нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар ишига тенг.*

Элементар ишни тубандагича ёзишимиз мумкин:

$$dA = (\overline{F}, d\overline{r}) = F\,dr\cos(\widehat{\overline{F}, d\overline{r}}). \qquad (145.\ 2)$$

Энди, элементар ишни $\overline{F}$ ва $d\overline{r}$ нинг проекциялари орқали ифодалаймиз. $\overline{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекциялари $X$, $Y$, $Z$, $d\overline{r}$ элементар кўчишнинг проекциялари эса $dx$, $dy$, $dz$ бўлсин. У ҳолда, кучнинг элементар иши қуйидагича ифодаланади:

$$dA = (\overline{F}, d\overline{r}) = Xdx + Ydy + Zdz. \qquad (145.\ 3)$$

$dA$ элементар иш $\overline{F}$ кучнинг чексиз кичик вақт ичида бажарган иши. Вақт бирлиги ичида бажарилган иш қувват дейилади. Қувватни $W$ билан белгилаймиз. Кучнинг вақт бирлигида бажарган ишини топиш учун (145·2) формуланинг иккала томонини $dt$ га бўламиз.

$$W = \frac{dA}{dt} = \left(\bar{F}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

ёки

$$W = Fv\cos(\widehat{\bar{F}, v}) \qquad (145.\ 4)$$

бўлади.

Куч билан тезлик бир чизиқ буйлаб йўналса, (145.4) қуйидагича ёзилади:

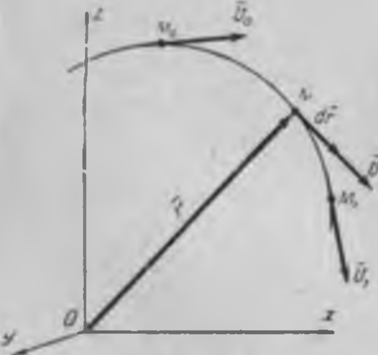
$$W = Fv. \qquad (145.\ 5)$$

Қувватнинг $\frac{кГм}{сек}$ билан ўлчаниши унинг таърифидан кўриниб турибди.

Қувват от кучи билан ҳам улчанади. Бир секундда бажарилган 75 *кГм* иш 1 *от кучи* дейилади. Қувватнинг от кучи билан ифодаси $N$ билан белгиланади:

$$N = 75\ \frac{кГм}{сек}. \qquad (145.\ 6)$$

*СГС* системасида ҳар бир грамм масса 981 динага тенг булганидан, 1 *кгм* $= 981 \cdot 10^5$ *эрг* $=$ $= 9{,}81$ *жоуль* булади. Шунинг учун, қувватнинг техник системадаги улчови: 1 от кучи $= 75\frac{кГм}{сек} = 736$ *ватт* $=$ $= 0{,}736$ *киловатт* булади.




349- шакл.

Халқаро (СИ) системада қувватнинг улчов бирлиги ватт бўлади. $M_0$ ҳолатга келишда ўтган йул $S_0$ бўлиб, шу пайтдаги тезлиги $v_0$ булган материал нуқта $\bar{F}$ куч таъсиридан $M_1$ ҳолатга $v_1$ тезлик билан келсин (349- шакл). Энди (145. 1) тенгликни траектория буйича $M_0$ дан $M_1$ нуқтагача интеграллаймиз:

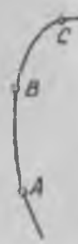
$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{S_0}^{S} F\cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{r}})\ ds = \int_{M_0}^{M} (\bar{F},\ d\bar{r})$$

ёки

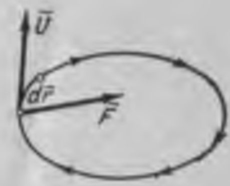
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{S_0}^{S} F\cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{r}})\,ds = A \qquad (145.\ 7)$$

бўлади. Демак, ***материал нуқта кинетик энергиясининг ўтилган маълум йўлдаги ўзгариши унга қўйилган кучнинг шу йўлда бажарган тўла ишига тенг бўлар экан.***

Умуман, материал нуқтага қўйилган кучнинг бажарган иши унинг юрган йўлига боғлиқ. Бажарилган ишни топиш учун, эгри чизиқли интегрални интеграллаш лозим. Бу хилдаги интегрални чиқариш учун траектория маълум бўлиши керак. Умуман, эгри чизиқли интегрални интеграллаш осон эмас. Лекин материал нуқтага таъсир қилувчи куч маълум шартларни қаноатлантирса, бундай интеграллар жуда осон чиқади.




350- шакл.




351- шакл.

## 146- §. Куч майдони

Материал нуқта фазо соҳасининг қандай ерида бўлса ҳам, унга таъсир этувчи куч шу нуқта координаталарининг узлуксиз функцияси бўлса, бундай соҳа **к у ч  м а й д о н и** дейилади. Материал нуқта куч майдонида, унга қўйилган куч таъсиридан $ABC$ эгри чизиғида ҳаракатланса (350- шакл), материал нуқтага қўйилган майдон кучининг бажарган иши:

$$A = \int\limits_{\smile ABC} F \cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{r}})\, ds$$

ёки

$$A = \int\limits_{\smile ABC} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

бўлади. Бу ерда кучнинг $X$, $Y$, $Z$ проекциялари материал нуқтанинг ҳолатига боғлиқ функция бўлиб, уларнинг бажарган иши эса ўтилган йўлга боғлиқдир. Материал нуқта куч майдонида қандайдир ёпиқ эгри чизиқ чизса (351- шакл), у кучнинг бажарган иши тубандагича ифодаланади:

$$A = \oint (\bar{F}, d\bar{r})$$

ёки

$$A = \oint (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \qquad (146.\ 1)$$

Вектор функциясидан ёпиқ чизиқ бўйича олинган интеграл вектор **ц и р к у л я ц и я с и** дейилади.

Биз текшираётган ҳолда кучнинг бажарган иши куч циркуляциясига тенг бўлади. Бундан кўрамизки, умумий ҳолда, кучнинг бажарган иши қандай бўлса-да, нуқтанинг юрган йўлига боғлиқ бўлар экан.

## 147- §. Куч потенциали

Бирор $\overline{F}$ майдон кучи материал нуқтага таъсир қилиб турса, бу кучнинг бажарган элементар иши тубандагича ифодаланиши мумкин:

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Материал нуқтага таъсир этувчи $F$ кучнинг $X, Y, Z$ проекциялари қандай шартни қаноатлантирса, элементар ишнинг ифодаси бирор функциянинг тўла дифференциалига тенг бўлади, яъни:

$$dU(x,\ y,\ z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

бўлади. Бу шартни топамиз.

$U$ функция—куч функцияси ёки потенциал функция дейилади.

$U$ нинг тўла дифференциали элементар ишга тенг бўлса:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

бўлади. $dx$, $dy$, $dz$ ихтиёрий бўлганидан юқоридаги тенглик айният бўлиши учун мазкур $dx$, $dy$, $dz$ олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг, яъни:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (147.\ 1)$$

бўлиши керак.

Демак, *кучнинг $X$, $Y$, $Z$ проекциялари куч функциясининг нуқта координаталари бўйича олинган хусусий ҳосилаларига тенг бўлса, у ҳолда кучнинг элементар иши шу потенциал функциянинг тўла дифференциалига тенг бўлар экан*, яъни:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = dU(x,\ y,\ z). \qquad (147.\ 2)$$

Куч потенциаллик бўлсин учун у юқорида чиқарилган (147. 1) шартдан ташқари, қандай қўшимча шартни қаноатлантириши керак, (147. 1) шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай куч потенциаллик бўлаверадими? Ёки маълум турдаги кучларнинг потенциали бўладими? Бу масалани ечиш учун (147. 1) формуладан қуйидагича хусусий ҳосилалар оламиз:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Бу ифодалардан:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad (147.\ 3)$$

келиб чиқади. *Бу куч проекцияларидан олинган хусусий ҳосилалар орасидаги боғланиш $\overline{F}$ кучнинг потенциалли бўлишининг зарур шартидир.* Куч майдонида нуқтага таъсир қилиб, унинг координаталарига функция бўлган ҳар қандай куч ҳам бу шартни қаноатлантиравермайди.

Масалан, $\overline{F}$ кучнинг проекциялари қуйидаги тенгламалар билан ифодалансин:

$$\left.\begin{aligned} X &= x^2 + y^2, \\ Y &= xy, \\ Z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Бу ҳолда:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = y.$$

Бу натижа (147. 3) шартни қаноатлантирмаслиги ўз-ўзидан кўриниб турибди. Демак, бу куч потенциалли бўлмайди. Яна бир мисол. Куч проекциялари қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$X = 3x^2 y,$$

$$Y = x^3,$$

$$Z = 0.$$

Бу кучлар учун (147. 3) шартни тузамиз:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 3x^2,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

(147. 3) шарт қаноатлантирилгани учун, бу куч потенциаллидир.

Бу ҳол учун потенциал функцияни топишимиз мумкин. У қуйидагича ёзилади:

$$U = x^3 y + \text{const.}$$

Буни аниқлаш учун юқоридаги хусусий ҳосилали тенгламалар системаси интеграллanади.

Топилган функциянинг тўғрилигини билиш учун, ундан куч проекцияларини аниқлаймиз:

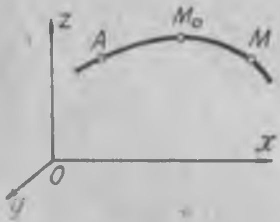
$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = x^3.$$

Демак, куч функцияси тўғри топилган.

## 148- §. Потенциалли кучнинг консервативлиги

Потенциалли куч қуйидаги консерватив хусусиятга эга.

Т е о р е м а. *Куч майдонида ҳаракат қилаётган материал нуқтанинг ҳаракатида потенциалли кучнинг бажарган иши нуқтанинг ўтган йўлига боғлиқ бўлмай, фақат унинг бошланғич ҳам сўнгги ҳолатига боғлиқ бўлади.*




352- шакл.

Теоремани и с б о т л а ш учун $\overline{F}$ кучнинг элементар иш ифодасини қуйидагича ёзамиз:

$$dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU. \quad (148.\ 1)$$

Фараз қилайлик, нуқта бошланғич пайтда $M_0$ да бўлиб, унга қуйилган куч потенциали $U_0$ бўлсин. Бирмунча вақт ўтгандан кейин, нуқта $M$ да бўлиб, бу нуқтага тегишли потенциал $U$ бўлсин (352- шакл).

Нуқта $M_0$ дан $M$ га келгунча $\overline{F}$ кучнинг бажарган ишини топамиз. Бу ерда:

$$\int\limits_{(M_0)}^{(M)} dA = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} dU.$$

Бундан:

$$A = U - U_0. \quad (148.\ 2)$$

Демак, потенциалли кучнинг куч майдонида бажарган иши нуқтанинг ўтган йўлига боғлиқ бўлмай, унинг охирги ва бошланғич ҳолатидаги потенциалларининг айирмасига тенг бўлар экан.

## 149- §. Потенциалли кучлар учун кинетик энергия теоремаси

Материал нуқта учун кинетик энергия теоремаси умумий ҳолда тубандагича ёзилиши бизга маълум:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Бунда $A$ — кучнинг бажарган тўла иши.

Потенциалли куч учун тўла иш ифодаси (148. 2) тенглама билан берилган. Материал нуқта $M_0$ бўлганда куч потенциали $U_0$ ва $M$ га келганда тегишли потенциал функцияси $U$ бўлса:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = U - U_0. \qquad (149.\ 1)$$

Демак, *консерватив куч майдонида ҳаракатланувчи нуқта кинетик энергиясининг маълум йўлдаги ўзгариши потенциал функциянинг сўнгги ва бошланғич қийматларининг айирмасига тенг бўлар экан.* Кучнинг консервативлик хоссаси шундаки, унинг бажарган иши нуқтанинг траекторияси ва ҳаракат қонунига боғлиқ эмас. Юқорида чиқарилган тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{mv^2}{2} + (-U) = \frac{mv_0^2}{2} + (-U_0). \qquad (149.\ 2)$$

Потенциал функциянинг тескари белгиси билан олинган қиймати потенциал энергия дейилади. Потенциал энергия $V$ билан белгиланади. Бу миқдор яширин энергия бўлиб, у, нуқтанинг ҳаракатида яширинликдан жонли кучга айланади.

$M$ даги потенциал энергия: $V = -U$,

$M_0$ даги потенциал энергия: $V_0 = -U_0$.

Буларни кўзда тутиб, юқорида чиқарилган тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{mv^2}{2} + V = \frac{mv_0^2}{2} + V_0. \qquad (149.\ 3)$$

Демак, *консерватив куч майдонида ҳаракатланувчи нуқта учун ҳамма вақт кинетик энергия билан потенциал энергиянинг йиғиндиси ўзгармас миқдор экан.* Тўла энергияни $E$ десак, юқоридаги кинетик энергия билан потенциал энергиянинг йиғиндиси $E$ га тенг бўлади:

$$E = \frac{mv^2}{2} + V = \frac{mv_0^2}{2} + V_0 = \text{const}. \qquad (149.\ 4)$$

Бу формула энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди. Потенциал функция мавжуд бўлса, ҳаракатдаги нуқтанинг тўла энергияси ўзгармайди. Кинетик энергия кўпайса, потенциал энергия камаяди, аксинча, потенциал энергия кўпайса, кинетик энергия камаяди.

Мисол учун, эркин тушаётган жисмни оламиз. Жисм оғирлик кучи майдонида ҳаракатланганидан, куч потенциалли бўлади. Бу ҳол учун ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини ёзамиз:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg. \tag{149. 5}$$

Бу тенгликни $\frac{dz}{dt}$ га кўпайтириб, қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = -mg\frac{dz}{dt}. \tag{149. 6}$$

Бу тенгламани интеграллсак:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + mgz = \text{const} \tag{149. 7}$$

келиб чиқади. Бу тенглама оғирлик кучи майдонида ўз оғирлиги таъсиридан ҳаракатланувчи жисм энергиясининг сақланиш қонунини ифодалайди. Бу тенгликнинг биринчи қисми тушаётган жисмнинг кинетик энергияси, иккинчи қисми эса потенциал энергиясидир.

Фараз қилайлик, $t=0$ бўлганда жисм $h$ баландликда бўлсин; бу ҳолатда унинг кинетик энергияси нуль, потенциал энергияси эса $mgh$ бўлади. Буни юқоридаги тенгламага қўйсак:

$$mgh = \text{const} \tag{149. 8}$$

келиб чиқади. Демак, тушаётган жисмнинг тўла энергияси $mgh$ га тенг бўлар экан. Бу ҳол учун энергиянинг сақланиш қонуни қуйидагича ёзилади:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + mgz = mgh. \tag{149. 9}$$

Бу тенглама кинетик энергиянинг потенциал энергияга ва потенциал энергиянинг кинетик энергияга айланишини аниқ кўрсатаётир. $z=h$ бўлганда, яъни нуқта ўзининг энг юқори ҳолатида турганда $\frac{dz}{dt}=0$ бўлиб, кинетик энергия бўлмайди; потенциал энергия эса $V=mgh$ бўлади. Жисм пасайган сари $z$ озайиб, кинетик энергия кўпаяди. $z = 0$ бўлганда, $V = 0$ бўлиб, кинетик энергия $mgh$ га тенг бўлади.

Кинетик энергияни $T$ билан бeлгиласак, энергиянинг сақланиш қонуни қуйидагича ёзилади:

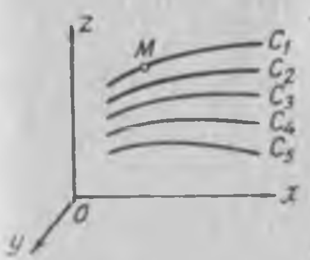
$$T + V = \text{const.} \tag{149. 10}$$

Потенциалли кучлар сифатида қуйидаги кучларни олишимиз мумкин: Ньютоннинг тортиш кучи, электр кучи, магнит кучи, молекуляр куч (эластик куч), оғирлик кучи, марказдан қочувчи куч ва ҳоказо. Мазкур кучларнинг куч майдонида бажарган иши ўтилган йўл шаклига боғлиқ бўлмай, ҳамма вақт (149. 4) консервативлик шартини қаноатлантиради.

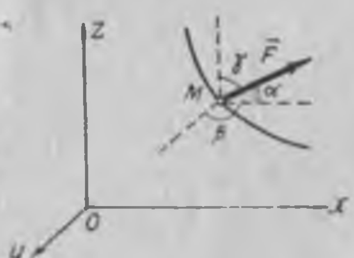
## 150- §. Эквипотенциалли сирт

### (тенг потенциалли сирт)

Бирор сирт устида олинган ҳар қандай нуқта учун потенциал функциянинг қиймати ўзгармас бўлса, бундай сирт




353- шакл.




354- шакл.

эквипотенциалли ёки тенг потенциалли сирт дейилади. Материал нуқта куч майдонида потенциал функцияси $U$ бўлган куч таъсирида бўлса, эквипотенциалли сирт тенгламаси, ўзининг таърифига кўра, қуйидагича ёзилади:

$$U(x, y, z) = \text{const.} \tag{150. 1}$$

const нинг ҳар хил қийматлари учун бир-бирига параллел бир қанча қаватма-қават сиртларни оламиз (353- шакл). Бу сиртлар куч майдонини ташкил этади.

Теорема. *Консерватив куч майдонида нуқтага таъсир қилувчи куч тенг потенциалли сирт нормали бўйича йўналган бўлади.*

Фараз қилайлик, консерватив куч майдонида нуқтага таъсир этувчи $\overline{F}$ кучнинг координата ўқлари билан тузган бурчаклари $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ бўлсин. У ҳолда 354- шаклдан:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Куч потенциалли бўлганидан, унинг проекциялари (147. 1) дан аниқланади, яъни:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Шунинг учун, юқоридаги $\cos\alpha$ нинг қийматини бундай ифодалаш мумкин:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.$$

Бу ифода $U = \text{const}$ сиртининг нормали билан $x$ ўқи орасидаги бурчак косинуси эканлиги бизга математикадан маълум. Шунга кўра, материал нуқтага таъсир қилувчи куч ва $U = \text{const}$ эквипотенциалли сирт нормали бир йўналишда бўлади. Шу билан теорема исботланди.

Юқоридаги теоремадан қуйидаги хулосани чиқаришимиз мумкин:

Материал нуқта тенг потенциалли сирт устида ҳаракатланса, унга *таъсир қилувчи майдон кучининг бажарган иши нулга тенг бўлади.* Бу нарса табиий ҳолдир, чунки: $U = \text{const}$. Шунинг учун, *унинг тўла дифференциали нулга тенг булади.* Бошқача айтганда, *нуқтага таъсир қилувчи куч элементар кўчишига тик йўналган.*

## 151- §. Материал нуқтанинг марказий куч майдонидаги ҳаракати. Бинэ тенгламаси

Массаси $m$ бўлган $M$ материал нуқта $\overline{F}$ марказий куч таъсирида $AB$ эгри чизиқ бўйича ҳаракат қилади (355- шакл).

Динамиканинг асосий тенгламасини ёзамиз:

$$m\overline{w} = \overline{F}.$$

$M$ нуқтанинг ҳаракатини қутб координаталар системасида текширамиз, чунки марказий куч таъсиридаги нуқтанинг ҳаракатини қутб координаталар системасида текшириш қулайроқдир. (151. 1)-тенгликнинг иккала томонини $\overline{r} = \overline{OM}$ радиус-вектор йўналишига проекциялаймиз:

$$mW_r = F_r. \qquad (151.\ 2)$$

$M$ нуқтанинг радиал тезланиши (101. 12) формуласига мувофиқ:

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2. \qquad (151.3)$$

Марказий $\overline{F}$ кучнинг $\overline{r}$ радиус-вектор йўналишидаги проекцияси:

$$F_r = \pm F, \qquad (151.\ 4)$$

355- шакл.

бунда марказий куч итарувчи бўлса, мусбат (+) ишора, тортувчи бўлса, манфий (—) ишора олинади.

$W_r$ ва $F_r$ ларнинг қийматларини (151. 2) қўйсак:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \pm F. \qquad (151.\ 5)$$

келиб чиқади: Секториал тезлик (144. 7′) дан:

$$C = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}, \qquad (151.\ 6)$$

бундан:

$$\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}.$$

(144. 6) ни назарда тутиб, (102. 8) формуладан $\ddot{r}$ ни топамиз:

$$\ddot{r} = -\frac{4C}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (151.\ 7)$$

$\dot{\varphi}$ ва $\ddot{r}$ ларнинг қийматларини (151. 5) қўйсак:

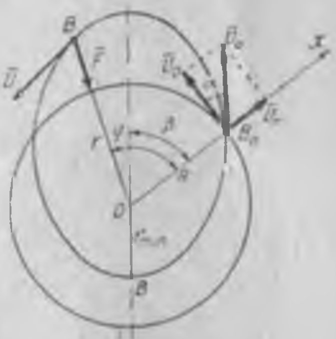
$$-m\frac{4C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = \pm F \qquad (151.\ 8)$$

бўлади.

Бу дифференциал тенглама итарувчи ёки тортувчи марказий куч катталиги билан ҳаракат қилаётган $M$ материал нуқта масофаси орасидаги муносабатни ифодалайди. Бу (151.8) тенглама Бинэ тенгламаси дейилади. Бу тенглама марказий куч таъсирида берилган траектория бўйича ҳаракат қилаётган нуқтанинг марказий кучини топиш ёки марказий куч маълум бўлганда $M$ нуқтанинг траекториясини топиш имкониятини беради. Бинэ тенгламаси осмон механикасида кўпроқ қўлланилади.

## 152 -§. Материал нуқтанинг Ньютон тортиш кучи майдонидаги ҳаракати. Ер сунъий йўлдошларининг траекториялари ҳақида тушунча

Ернинг тортиш кучи майдонида Ердан узоқлиги ва ҳаракат траекториясининг баландлиги катта бўлган (яъни Ер радиуси билан таққослаш мумкин булган) материал нуқтанинг ҳаракатини текширамиз. Бу ҳолда масофа ўзгарганда Ернинг тортиш кучи ўзгариши ҳисобга олинади.



356- шакл.

Бу текшириладиган масала узоққа учадиган ракеталар ҳаракатини ва Ернинг сунъий йўлдошлари ҳаракатини урганишда, шунингдек планеталараро алоқаларни урганишда катта роль ўйнайди.

Бирор вақтда Ер устида $B_0$ ҳолатдаги $m$ массали материал нуқтанинг бошланғич тезлиги горизонтга $\alpha$ бурчак остида қия бўлиб, $v_0$ га тенг (356-шакл).

Ер ҳаракат қилмайди деб фараз қилиб, ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмасак, материал нуқтага Ернинг фақат битта марказий ва Ер марказига йўналган тортиш кучи $\overline{F}$ таъсир қилади. Бу кучнинг катталигини Ньютоннинг бутун олам тортилиш қонунидан топамиз:

$$F = f\frac{mM}{r^2}, \tag{152. 1}$$

бунда: $f$ — гравитацион константа, $M$ — Ернинг массаси, $r$ — Ер марказидан материал нуқтагача бўлган масофа.

Гравитацион константа $f$ ни топиш учун, материал нуқтани Ер сиртида десак, у вақтда:

$$r = R \text{ ва } \overline{F} = m\overline{g}$$

бўлади; Бунда $R$ — Ернинг радиуси, $\overline{g}$ — Ер тортиш кучининг тезланиши.

Булардан:

$$mg = f\frac{mM}{R^2},$$

демак:

$$f = \frac{gR^2}{M}.$$

$f$ нинг қийматини (152. 1) қўйсак:

$$F = mg\frac{R^2}{r^2} \qquad (152.\ 2)$$

келиб чиқади.

Материал нуқта $\overline{F}$ марказий куч таъсиридан ҳаракат қилгани учун, унинг траекторияси бир текисликда ётган текис эгри чизиқ бўлади. Шуни ҳисобга олиб, $B$ материал нуқтанинг ҳаракатини қутб координаталар системасида текширамиз. Координаталар боши учун Ернинг маркази $O$ ни оламиз ва $Ox$ ўқини (356- шаклда кўрсатилгандек) $B_0$ нуқтадан утказамиз. Ҳар қандай вақтда $B$ материал нуқтанинг ҳолати $r = OM$ қутб координата ва $\varphi$ бурчак орқали аниқланади. $B$ материал нуқтанинг траекторияси турини билишда (151. 2) ни назарга олиб, Бинэ тенгламаси (151. 8) дан фойдаланамиз. У ҳолда:

$$m\frac{4C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = mg\frac{R^2}{r^2}$$

булади. Тенгликни $\frac{m}{r^2}$ га қисқартириб, иккала томонини $4C^2$ га булсак:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{gR^2}{4C^2} \qquad (152.\ 3)$$

келиб чиқади. Материал нуқтага марказий куч таъсир қилганда, $C$ нинг ифодаси $\dot{r}$ ва $\dot{\varphi}$ орқали қуйидагича ёзилиши (144. 7′) дан маълум:

$$C = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Номаълум ўзгармас $C$ ни бошланғич шартдан топамиз. Текширилаётган ҳолда, $t = 0$ бўлганда $r = R$ ва $v_p = r\dot{\varphi} = v_c\cos\alpha$ бўлади (356- шаклга қаранг). У вақтда:

$$C = \frac{1}{2}Rv_0\cos\alpha. \qquad (152.\ 4)$$

Топилган $C$ нинг қийматини (152. 3) га қўйсак:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (152.\ 5)$$

бўлади.

$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = p$ деб белгилаймиз, у вақтда (152.5) қуйидагича бўлади:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}. \qquad (152.\ 6)$$

Бу—дифференциал тенгламанинг умумий ечими. Унинг бир жинсли қисми умумий ечими билан ўзининг хусусий ечими йиғиндисидан иборат, яъни:

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{1}{p}. \qquad (152.\ 7)$$

Ихтиёрий ўзгармовчиларни $C_1 = A \cos\beta$, $C_2 = A \sin\beta$ деб, сўнгра $Ap = e$ десак, (152. 7) қуйидаги кўринишга келади:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \beta)}. \qquad (152.\ 8)$$

Бу тенгламадаги $p$ фокал параметр ва эксцентриситет $e$ асосий параметрлар бўлиб, улар конус кесими шаклини аниқлайди. Конус кесими ҳаракатланувчи $B$ нуқтанинг траекториясидир. $\beta$ бурчак фокал ўқнинг ҳолатини отилган $B_0$ нуқтага нисбатан аниқловчи бурчакдир. Фокал ўқ конус кесманинг симметрия ўқи бўлиб, $O$ қутбдан ўтади. Бу нуқта Ер маркази $O$ га тўғри келадиган фокуслардан бирига мосдир. $e$ ва $\beta$ ларнинг қийматлари бошланғич шартлардан топилади. Буларни топиш учун (152. 7) дан $\varphi$ бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi.$$

$C_1$ ва $C_2$ ларнинг қийматини қўйсак:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\sin(\varphi - \beta) \qquad (152.\ 9)$$

бўлади. Бошланғич шартларни, яъни $t = 0$ бўлганда $\varphi = 0$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{R}$,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{dr}{rd\varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\varphi}{dt}} = -\frac{1}{r}\frac{v_r}{v_p} = -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha$$

(356- шаклга қаранг). Буларни (152. 9)га қўямиз:

$$R = \frac{p}{1 + e\cos\beta} \quad \text{ва} \quad -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha = \frac{e}{p}\sin\beta.$$

булардан:

$$\left.\begin{aligned} e\cos\beta &= -\frac{R-p}{R}, \\ e\sin\beta &= -\frac{p}{R}\operatorname{tg}\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{152. 10}$$

булардан $e$ ва $\beta$ ларни топамиз:

$$e=\sqrt{\frac{(R-p)^2}{R^2}+\frac{p^2}{R^2}\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{p\operatorname{tg}\alpha}{R-p}.$$

Белгиланган $p$ ифодасини қуйсак:

$$e=\sqrt{1+\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{R^2g^2}(v_0^2-2Rg)} \tag{152. 11}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2(Rg-v_0^2\cos^2\alpha)} \tag{152. 12}$$

бўлади. (152. 11) ни анализ қилиб, нуқтанинг траекторияси турларини топамиз:

1) агар $v_0<\sqrt{2gR}$ бўлса, ($e<1$) эллипс;

2) агар $v_0=\sqrt{2gR}$ бўлса, ($e=1$) парабола;

3) агар $v_0>\sqrt{2gR}$ бўлса, ($e>1$) гипербола бўлади.

Тезлик $v_0=\sqrt{2gR}$ бўлса, параболик тезлик ёки иккинчи космик тезлик ($v_{II}$) дейилади.

Ернинг радиуси $R=6378$ *км* ва унинг тортиш кучи таъсирида жисмнинг эркин тушиш тезланиши $g=9{,}81$ *м/сек*$^2$ десак, у вақтда параболик тезлик:

$$v_{II}=\sqrt{2gR}=11{,}2\,\frac{км}{сек}$$

бўлади.

Агар $v_0\geqslant\sqrt{2gR}$ шартни бажарса, Ер устидан горизонтга ҳар қандай $\alpha$ бурчак билан қия қилиб отилган $B$ нуқта парабола ёки гипербола бўйича ($\alpha=90^\circ$ бўлганда тўғри чизиқ бўйича) ҳаракат қилиб Ердан узоқлашиб боради. Бундай тезлик планеталараро ҳаракат қилиш учун зарур. Ер сиртидан отилган материал нуқтанинг бошлангич тезлиги $v_0<\sqrt{2gR}$ бўлганда у ё Ерга қайтиб тушади ёки Ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолади.

Нуқтанинг эллиптик траекторияси Ернинг ички томонидан утмаса, яъни нуқта траекториясининг ҳамма нуқталари $r>R$ ёки $r_{\min}=R$ шартни қаноатлантирса, отилган материал нуқта Ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолади. Бунда $r_{\min}=$

$= OB$ (356- шаклга қаранг); $R$ — Ер экваторининг радиуси, $r_{min} = R$ бўлса, $B$ нуқта ер сиртида нуқта отилган жойда бўлади. Бу ҳолда $\beta = \pi$. Аммо, (152. 10) дан кўрамизки, $\alpha = 0$ ёки $\alpha = \pi$ бўлганда ва шарт бажарилгандагина $\beta = \pi$ бўлади. Шундай қилиб, ер сиртидан отилган $B$ материал нуқта Ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолиши учун икки шарт бажарилиши керак:

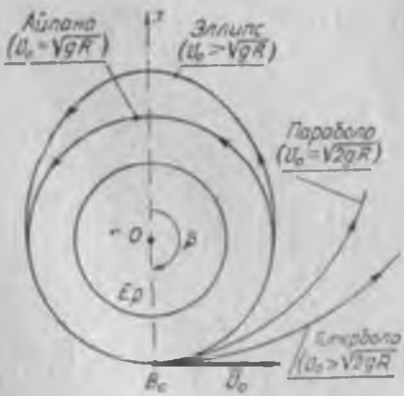
$$\alpha = 0 \text{ ва } \sqrt{2gR} > v_0 > \sqrt{gR}.$$

Ер йўлдоши траекториясининг эксцентриситети $\alpha = 0$ ва $\beta = \pi$ бўлганда (152. 10) нинг биринчисидан:

$$e = \frac{v_0^2}{gR} - 1 \tag{152. 13}$$

бўлади.

Агар $v_0 = \sqrt{gR}$ бўлса, $e = 0$ ва (152. 8) дан $r = R$ бўлади, яъни Ер йўлдоши, радиуси $R$ бўлган доиравий орбита бўйича ҳаракат қилади. $v_0 = \sqrt{gR}$ бўлган ҳолдаги тезлик доиравий тезлик ёки биринчи космик тезлик ($v_k$) дейилади. $g = 9{,}81$ *м/сек*$^2$ ва $R = 6378$ *км* бўлганда биринчи космик тезлик $v_k = 7910$ *м/сек* бўлади. Агар $v_0 > \sqrt{gR}$ бўлса, Ер йўлдошининг траекторияси эллипс бўлади ва $v_0$ тезлик катталашган сари эксцентриситети ҳам катталашиб боради (357-шакл).



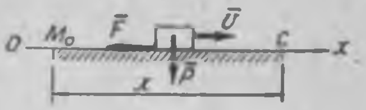

357- шакл.

Ернинг сунъий йўлдошини яратишда бошқарилувчи ракеталардан фойдаланиш мумкин. Уларни сунъий йўлдош билан бирга тегишли асбоблар ёрдамида Ернинг тортиш кучи майдонидан керакли баландликка кўтариб, сунъий йўлдошга горизонт билан $\alpha = 0$ бурчак ҳосил қиладиган зарур $v_0$ тезлик берилади.

Бундай усул билан биринчи марта бизнинг мамлакатимизда Ернинг сунъий йўлдоши учирилди. Агар $\alpha > 0$ ва $v_0 < \sqrt{2gR}$ бўлса, Ер сиртидан отилган материал нуқта эллипс ёйини чизиб, ерга тушади. Узоққа отиладиган ракеталар, масалан, қитъалараро ракеталар шундай эллиптик траекториялар чизади. Охирида шуни айтиб ўтишимиз кераккi, қилинган ҳисоблар материал нуқта бўшлиқда, яъни ташқи муҳитдан ажратилган ҳолатда ҳаракат қилади деб фараз қилинди.

## Динамиканинг умумий теоремаларини татбиқ этиш учун масалалар

**98- масала.** Поезд тўғри чизиқли темир йўлда ҳаракат қилади. Поездни тормозлаганда, тормозлаш кучи поезд оғирлигининг 0,1 қисмини ташкил этади. Тормозлаш олдида, поезднинг тезлиги $v_0 = 72$ *км/соат* эди. Поезд тўхтагунча уни тормозлаш учун кетган вақт ва ўтилган йўл топилсин.




358- шакл.

Е ч и ш. Поезд тормозланганда, унга фақат тормозлаш кучи таъсир қилади (358- шакл). Бу кучнинг миқдори масала шартига мувофиқ:

$$F = 0{,}1\ P.$$

Бошланғич тезлик $v_0 = 72$ *км/соат* $= 20$ *м/сек* бўлиб, поезд тўхтаганда тезлик нулга тенг бўлади. Тормозлаш учун кетган вақтни (143.3) тенгламадан топамиз:

$$\frac{P}{g} v_0 = \int_0^{\tau} 0{,}1\ P dt.$$

Бундан:

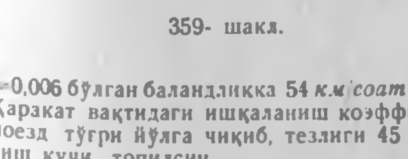
$$\tau = \frac{v_0}{0{,}98} = 20{,}4 \text{ сек}.$$

Ўтилган йўлни топиш учун кинетик энергия қонунидан фойдаланамиз. (145. 6) формуладан:

$$\frac{P}{g}\,\frac{v_0^2}{2} = \int_0^{x} 0{,}1\ P dx.$$

Бундан:

$$x = \frac{v_0^2}{0{,}2g} = 204 \text{ м}.$$




359- шакл.

**99-масала.** Оғирлиги 400 *т* бўлган поезд қиялиги $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}006$ бўлган баландликка 54 *км/соат* тезлик билан кўтарилади (359-шакл). Ҳаракат вақтидаги ишқаланиш коэффициенти: $f = 0{,}005$, $\tau = 50$ *сек* ўтганда поезд тўғри йўлга чиқиб, тезлиги 45 *км/соат* га тушади. Поезднинг тортиш кучи топилсин.

Е ч и ш. Ҳаракат миқдори теоремасини бевосита татбиқ этиб, (143. 3) тенгламадан масаланинг жавобини оламиз:

$$\frac{P}{g}(v - v_0) = \int_0^{\tau} (F - P(\sin\alpha + f\cos\alpha))\, dt.$$