

Н. Н. АВЛИЯКУЛОВ, И. И. САФАРОВ

СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ



НАЦИОНАЛЬНАЯ ХОЛДИНГОВАЯ КОМПАНИЯ «УЗБЕКНЕФТЕГАЗ»

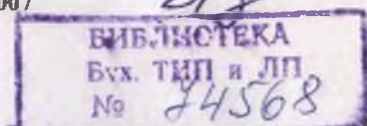
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

539.4
Ч 20

Н.Н. АВЛИЯКУЛОВ, И.И. САФАРОВ

СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

ТАШКЕНТ – 2007



Авлиякулов Н.Н., Сафаров И.И. Современные задачи статики и динамики подземных трубопроводов. Ташкент, «Fan va texnologiya», 2007, 306 стр.

В монографии оснащены вопросы прочности и напряженно-деформируемого состояния подземных сооружений при действии статических и динамических нагрузок. Рассмотрены задачи создания основ теоретических и экспериментальных исследований колебания подземных трубопроводов, цилиндрических тел находящихся под воздействием сейсмических нагрузок с жидкостью и без жидкости. Приведены перспективные методики прочностного расчета элементов трубопроводов.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов, магистров, инженерно-технических работников, интересующихся вопросами проектирования, строительства и эксплуатации трубопроводов в сейсмических районах.

AVLIYAKULOV N.N., SAFAROV I.I. Modern tasks of statics and dynamics of underground pipelines. Tashkent: «Fan va texnologiya», 2007

In the monography questions of durability and intense - deformable conditions of underground constructions at action of static and dynamic loadings are given. Tasks of creation of bases of theoretical and experimental researches of oscillation of underground pipelines, cylindrical bodies taking place under influence of seismic loadings with a liquid and without a liquid are considered. Perspective methods of durable calculation of elements of pipelines are resulted.

The book is intended for science workers, post-graduate students, masters, the engineer-technical staff who are interested in questions of designing, construction and operation of pipelines in seismic areas.

Рецензенты: Заведующий кафедрой «строительная механика и сейсмостойкость сооружений» ташкентского архитектурно-строительного института
д.т.н., проф. К.С. Абдурашидов;

Председатель Правления
ОАО «Мубарекнефтегазмонтаж» М.А. Камбаров.

ISBN 978-9943-10-079-4

© Изд-во «Fan va texnologiya», 2007.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ГЛАВА I. Состояние подземных трубопроводов при воздействии сейсмических волн.....	6
1.1 Необходимые требования при расчете подземных трубопроводов.....	6
1.2 Характеристики окружающей грунтовой среды, используемые в расчетах трубопроводов.....	8
1.3 Некоторые натурные наблюдения и антисейсмические мероприятия... 14	
1.4 Сейсмические и сейсмозрывные воздействия на подземные сооружения.....	16
1.5 Методы оценки сейсмостойкости подземных сооружений.....	20
1.6 Оценка сейсмонапряженного состояния подземных сооружений методами волновой динамики.....	29
1.7 Механические характеристики системы трубопровод-грунт используемые при сейсмических воздействиях.....	41
1.8 О статических расчетах подземных параллельных труб.....	44
ГЛАВА II. Взаимодействие цилиндрических подземных сооружений со средой и методы ее решения.....	50
2.1. Постановка и методы решения задач колебания цилиндрических тел, взаимодействующих со средой.....	50
2.2. Алгоритм вычисления функции Ханкеля первого и второго рода произвольного порядка. Алгоритм вычисления несобственных интегралов.....	58
2.3. Колебания цилиндрических тел с внешним трением.....	68
2.4. О собственных антиплоских колебаниях цилиндрического сооружения с внешним трением.....	78
2.5. О собственных плоских колебаниях цилиндрического сооружения находящегося в грунтовой среде.....	88
2.6. Вынужденные установившиеся колебания цилиндрического тела с внешним трением	103
2.7. Крутильные колебания цилиндрической оболочки в упругой среде....	109
2.8. Защита подземных сооружений в упругой среде от плоских сейсмических волн.....	117
ГЛАВА III. Дифракция гармонических, сейсмических и нестационарных волн на цилиндрические тела.....	126
3.1. Воздействие сейсмических волн на подземные трубопроводы с жидкостью.....	126
3.2. Динамические напряжения вблизи поверхности цилиндрического выработка от плоской волны.....	135

3.3. Дифракция сейсмических волн относительно подкрепленной полости в упругой среде.....	147
3.4. Импульсные волны в упругих цилиндрических сооружениях, находящихся в грунтовой среде.....	162
3.5. Взаимодействие сейсмических волн на пространственные цилиндрические оболочки.....	174
3.6. Воздействие продольных и поперечных сейсмических волн на трубу с жидкостью.....	194
3.7. Методы повышения сейсмостойкости подземных трубопроводов с использованием изоляции из мягкого грунта.....	207
3.8. Определение коэффициента трения и частоты собственных колебаний трубопроводов, находящихся в грунтовой среде	215
ГЛАВА IV. Взаимодействие сейсмических волн с параллельными трубопроводами содержащие жидкость находящихся в грунтовой среде	
4.1. Некоторые основные соотношения динамических задач строительной механики подземных сооружений.....	220
4.2. Дифракция сейсмических волн на параллельных трубопроводах с жидкостью.....	224
4.3. Определение динамического напряженно-деформированного состояния параллельных трубопроводов при воздействии сейсмических волн.....	231
4.4. Взаимодействие нестационарных волн с параллельными цилиндрическими оболочками	238
ГЛАВА V. Статическое напряженно-деформированное состояние параллельных труб, в упругой среде.....	
5.1. Применение метода конечных элементов для решения статических задач подземных трубопроводов.....	246
5.2. Определение статического давления грунта на трубопроводы.....	249
5.3. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных подземных круглых труб.....	252
ГЛАВА VI. О взаимодействии упругих волн с заглубленными сооружениями и алгоритм ее решения МКЭ.....	
6.1. Математическая постановка задачи дифракции нестационарных волн на заглубленных телах.	271
6.2. Алгоритм решения плоской динамической задачи теории упругости МКЭ	274
РЕКОМЕНДАЦИИ к обеспечению сейсмостойкости подземных сооружений с учетом характеристик окружающей грунтовой среды.....	293

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время объем строительства подземных сооружений в сейсмически активных районах непрерывно возрастает, так как эти регионы являются основными по добыче нефти и газа и вопросы обеспечения прочности и надежности становятся более актуальными.

Строительство и эксплуатация трубопроводов в районах со сложными природными и климатическими условиями обуславливают необходимость усовершенствования методов их проектирования и принятия новых конструктивных решений. Сооружение трубопроводов в сейсмически активных районах приводят к возникновению высоких напряжений при их эксплуатации и необходимости принятия конкретных мер по обеспечению надежной и безопасной эксплуатации трубопроводов, требующие проведения широких исследований.

Большое внимание в книге уделено актуальным вопросам оценки колебаний грунта и влияния грунтовых условий на сейсмостойкость сооружений. Поэтому при подготовке этой книги было изучено огромное число публикаций.

Анализ существующих научных работ показал необходимость изучения влияния окружающей грунтовой среды на частоты собственных колебаний трубопроводов путем определения коэффициента взаимодействия. Подземные трубопроводы находятся в сложном взаимодействии с окружающей грунтовой средой, определение которых требует учета воздействия различных факторов влияющих на прочность трубопроводов. Для решения этих задач изучаются физические и механические особенности грунтов. Выявлено, что также актуальным является исследование влияния наличия жидкости на напряженно-деформированное состояние трубопроводов при воздействии сейсмических волн.

На практике приходится часто обеспечивать сейсмостойкость сооружений также от сейсмовзрывных нагрузок, промышленных и строительных взрывов, учет которых может быть осуществлен принципиально теми же методами, что и в случае землетрясений. В работе описываются основные результаты исследований механических (деформационных и прочностных) свойств материалов при сейсмических воздействиях, некоторые натурные наблюдения за подземными сооружениями при землетрясениях, а также основные антисейсмические мероприятия. Проанализированы имеющиеся информации и предложены основные тенденции, совершенствования методов обеспечения сейсмостойкости подземных сооружений.

Строительство сейсмостойкого сооружения требует разработки соответствующих методов производства работ, базирующихся на сочетании научного и производственного опыта разных специалистов.

ГЛАВА I. СОСТОЯНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

1.1. НЕОБХОДИМЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Результаты обследований реальных трубопроводов, данные экспериментальных и теоретических исследований позволяют выделить следующие наиболее характерные причины разрушения или повреждения подземных трубопроводов:

- смещения грунтового массива на уровне прокладке трубопроводов;
- растяжение, сжатие, сдвиг или осадки при совместных сейсмических деформациях трубопровода и грунтовой среды за пределами зоны влияния тектонического разлома;
- растяжение, сжатие, изгиб или срез в местах присоединения их к другим трубопроводам или сооружениям, а также на границах участков трассы, сложенных грунтами и различными деформационными свойствами;
- действие сейсмической волны, распространяющейся вдоль продольной оси трубопровода;
- возникновение в грунтовой среде больших сейсмических напряжений сжатия, направленных по нормали к их продольной оси (значительная деформация поперечного сечения трубопроводов больших диаметров).

Предположим, что бесконечно длинный прямолинейный подземный трубопровод защемлен окружающим его грунтом, который обладает упругими свойствами. От очага землетрясения в грунте распространяется сейсмические волны. Трубопровод, связанный с грунтом, вовлекается в колебательный процесс. Однако грунт передает усилия трубопроводу с некоторым проскальзыванием, т.е. невозможно предположить, что при значительных смещениях грунта не будет происходить срыва по границе труба-грунт. Таким образом, относительные смещения в грунтовой среде ε_{gr} будут больше, чем относительное смещение ε_{tr} трубопровода, т.е. $\varepsilon_{gr} = \alpha \varepsilon_{tr}$, где α - коэффициент взаимодействия. Величина коэффициента взаимодействия α зависит от следующих параметров:

- трубы: диаметра- d , плотности- ρ ;
- грунта: модуля упругости- E , плотности- ρ , коэффициента Пуассона- ν .

С увеличением диаметра трубопровода степень его взаимодействия (защемления) в одних и тех же грунтах снижается, поэтому с увеличением диаметра трубопровода продольные напряжения уменьшаются, а изгибающие — возрастают. Взаимодействие трубопровода будет снижаться также при понижении жесткости грунта, что соответствующим образом скажется на изменении напряжений в трубопроводе. Протяженность трубопровода влияет

на напряжения для участков, длина которых соизмерима с длиной сейсмической волны.

Весьма существенное влияние на продольные напряжения в трубопроводе оказывают жесткость и демпфирование грунта. Влияние демпфирования грунта в поперечном направлении мало и его можно не учитывать. В условиях реальных трасс, как правило, вдоль трубопровода свойства грунтов меняется постепенно. Но нередки случаи, когда можно достаточно четко указать границу раздела вдоль трассы между грунтовыми толщами с различными свойствами. Естественно, что реакция на сейсмические воздействия трубопровода, пересекающего грунты с различными свойствами, будут отличаться от реакции трубопровода, проложенного в однородных грунтах. На границе раздела между средами, как известно, происходит частичное отражение волны, а часть волны проходит через границу раздела. Амплитуды и углы наклона к границе отраженной и прошедшей через границу раздела волн зависят от свойств грунтовых сред обоих участков (соотношения жесткости сред) и углов подхода сейсмической волны. Причем максимальное значение напряжений соответствует сечению, совпадающему с границей раздела. Когда волна P переходит из зоны с более плотной средой в зону с менее плотной средой, возрастание осевых напряжений более значительно, чем в случае, когда волна переходит из более мягкой среды в более плотную.

Существенно также влияние жесткости самого трубопровода. При наличии подвижных стыков, сифонных компенсаторов и т.п. осевые продольные напряжения в трубопроводе снижаются. Явление резонанса возможно только при большой жесткости системы и малой длине волны. Осевые усилия в трубопроводе возрастают в мягких грунтах с увеличением частоты колебаний, а в твердых грунтах наблюдается также снижение продольных усилий с уменьшением длины волны.

При расчетах во всех случаях следует рассматривать колебание системы трубопровод – грунт с учетом технологии монтажных работ при использовании ЭВМ [49], динамические характеристики которой будут отличаться от динамических характеристик трубопровода, условно выделенного из грунтовой среды. Таким образом, возможны две схемы работы подземного трубопровода при распространении сейсмической волны вдоль его продольной оси:

- трубопровод (бесконечный или ограниченной длины), погруженный в грунт, вовлечен в колебательный процесс; дополнительные усилия в трубопроводе вызываются напряженным состоянием грунтовой среды;
- колеблющийся трубопровод (бесконечный или ограниченной длины), погруженный в грунтовую среду, препятствующую колебательному процессу.

Как известно, значительное число повреждений и разрушений трубопровода происходит именно в результате сейсмического воздействия, проявляющегося в виде деформаций грунтовой толщи в направлении

продольной оси трубопровода. При этом подходе к решению поставленной задачи сейсмическое воздействие можно рассматривать как квазистатическое.

Как показывают многочисленные экспериментальные данные и результаты обследований трубопроводов, проложенные в средних по сейсмическим свойствам грунтах (грунты II категории), достаточно жестко связаны с грунтовым массивом. Разрушения подземных трубопроводов вызваны деформациями сжатия-растяжения, изгиба или сдвиговыми деформациями грунта.

Пологость изогнутой оси и гибкость стальных трубопроводов, деформирующихся совместно с грунтовым массивом, свидетельствуют о том, что даже при значительных сейсмических воздействиях разрушение трубопроводов большой протяженности в однородных грунтах достаточно редко вызывается действием только напряжений изгиба. Например, при диаметре трубопровода 500 мм взаимное смещение слоев под трубопроводом и над верхней образующей трубы составит 0,10-0,25 см (смещение 0,25 см возникает в рыхлых грунтах, где сцепление между грунтом и трубопроводом невелико).

Изложенное определенным образом объясняет то, что стальные трубопроводы малых диаметров, обладающие небольшой поперечной и продольной жесткостью и проложенные в однородных слабых грунтах, в ряде случаев не разрушаются даже во время достаточно сильных землетрясений.

Как известно, грунты окружающие подземные трубопроводы, являются не только источником сейсмического воздействия, но и участвуют в колебательном процессе (и деформировании) совместно с самим трубопроводом. От свойств грунтов существенно зависят интенсивность сотрясения и особенности развития колебательного процесса в системе "трубопровод-грунт". В зависимости от плотности и однородности окружающей трубопровод грунтовой среды, наличия мерзлоты, степени обводнения и льдистости грунтов будут различными интенсивность проявления землетрясений, спектральный состав сейсмических колебаний и механизм взаимодействия сооружения (в данном случае трубопровода) с грунтовой средой [8].

1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОКРУЖАЮЩЕЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАСЧЕТАХ ТРУБОПРОВОДОВ

При проектировании трубопроводов, для определения параметров окружающей грунтовой среды необходимо владеть обширной информацией: инженерно-геологических, природно-климатических, гидрогеологических, геокриологических, геоморфологических и других. Такую информацию получают в результате специальных изысканий (аэро- и космическое фотографирование, разведочное бурение, геофизические исследования,

полевые и лабораторные определения водно-физических, механических и теплофизических свойств грунта и др.), а также путем обработки справочных и картографических материалов, данных метеостанций, мерзлотных станций.

Исходная информация, в основном, включает:

- картографические материалы обзорных и крупных масштабов (1:2500000, 1:1000000 и 1:25000), инженерно-геологические профили и ситуационные планы;
- материалы лабораторных и полевых определений основных физико-механических свойств грунтов: гранулометрического состава, плотности, объемной массы, естественной влажности, коэффициента пористости и пластичности, консистенции, коэффициента фильтрации, угла внутреннего трения, сцепления грунта, модуля упругости;

Геологические, гидрогеологические, геокриологические и геоморфологические данные берут за основу для разделения изучаемых участков, примыкающих к трассе трубопровода, на зоны со сходными условиями, а также для выбора пунктов, в которых необходимо производить измерения колебаний грунтов в соответствии с инструментальным методом сейсмического микрорайонирования.

При проведении сейсмического микрорайонирования на участках, расположенных на крутых склонах гор и в других районах со сложным рельефом, необходимо учитывать возможность возникновения остаточных деформаций от сейсмических воздействий. Основными типами повреждений и разрушений склонов и насыпей при сейсмических воздействиях являются: оползание склонов, обвалы, оседание насыпей, появление трещин и явления сопутствующие разжижению грунтов.

При установлении сейсмичности участков трассы следует учитывать возможное изменение свойств грунтового основания в процессе строительства и эксплуатации трубопровода, в том числе изменение температурного режима растепление или замерзание окружающего трубопровод грунта, обводнение участков трассы и т.п.

Выделение разрывных нарушений на строительных площадках, в частности при их сейсмическом микрорайонировании, несмотря на многолетний опыт подобных исследований, по-прежнему остается одной из сложных задач инженерно-геологических изысканий.

Важнейший фактор, учитываемый при изучении разрывных нарушений на строительных площадках, особенно по трассам магистральных трубопроводов, — наличие активных тектонических разломов, в зонах которых могут продуцироваться как медленные (криповые), так и быстрые (сейсмогенные, сеймотектонические) смещения, опасные для сооружений различного назначения.

Активными («живыми») считаются разломы, проявляющие подвижность в настоящее время и способные проявить ее в ближайшем будущем. Вследствие неравномерности и дискретности тектонических движений для установления

подвижности обычно рассматривается достаточно длительный период времени, который в сейсмоактивных «орогенных областях» охватывает поздний плейстоцен и голоцен, т. е. последние 100—130 тыс. лет [13]. Однако в относительно стабильных регионах (окраины платформ, внутриплитные орогены умеренной и слабой активизации) подобный временной интервал из-за сравнительно умеренно-пассивных тектонических движений должен включать, по мнению ряда исследователей, и средний плейстоцен, т. е. охватывать последние 700 тыс. лет. Помимо прямых признаков (геолого-геоморфологические или геодезические) современных и молодых тектонических перемещений по активным разломам в их зонах могут наблюдаться косвенные признаки таких перемещений, фиксируемые по данным геофизических исследований (гравитационные, магнитные или термальные аномалии, смещение сейсмических границ), а также сейсмологических и геохимических (флюидогазовая активность) исследований.

Криповые и сейсмогенные подвижки являются прямыми (очевидными) признаками смещений по активным разломам. Медленные (криповые) современные смещения определяют с помощью периодически возобновляемых геодезических измерений. Для оценки вертикальных смещений используют повторные нивелировки, для горизонтальных — повторные триангуляционные и дальномерные измерения.

При длительном развитии унаследованные со среднего или позднего плейстоцена современные криповые смещения, опасные для инженерных сооружений, отчетливо проявляются в рельефе в виде различно выраженных техногенных морфоскульптурных форм. Тектонические нарушения с подобными активными смещениями выявляют с помощью структурно-геоморфологических построений. Активные разломы обычно нарушают молодые позднеплейстоценголоценовые террасы и другие формы рельефа и при длительных поступательных движениях способны сформировать достаточно крупные эрозионно-тектонические уступы (или отчетливые флексурнообразные перегибы склонов и водоразделов).

На профилях, пересекающих активный разлом в районе площадки строительства, выделяют ряд нарушенных им местных геоморфологических уровней, проводят корреляцию этих уровней с поверхностями регионального профиля и их геологическую датировку в соответствии с принятой методикой [25]. На основании анализа и оценки поэтапных тектонических движений устанавливают амплитуды вертикального смещения по разлому за период времени каждого из этапов и суммарную амплитуду смещения. В итоге вычисляют среднюю скорость разрывного смещения (мм/год) и оценивают современную активность разлома.

По скорости можно определить амплитуду возможных разрывных смещений за 50 или 100 лет (типовые сроки службы инженерных сооружений) и дать градацию степеней современной активности разломов. К примеру, на горном участке трассы газопровода «Голубой поток» (Россия — Турция) при

пересечении Большого Кавказа была принята условная градация степени активных разломов по прогнозируемым смещениям за 100 лет: до 5 мм — низкая активность; 5—10 мм — средняя, свыше 10 мм — высокая. При этом следует иметь в виду, что прогнозируемые оценки разрывных смещений получены в результате осреднения главным образом суммарных движений. Поскольку наблюдаемая общая тенденция ускорений тектонических движений проявляется, по-видимому, и на современном этапе, приведенные значения амплитуд возможных смещений рекомендуется увеличивать при проектировании, по крайней мере, на порядок. Это оправданно и с точки зрения повышения надежности защитных инженерных мероприятий, что особенно важно по отношению к сооружениям повышенной ответственности, таким как магистральные трубопроводы и др.

Сейсмогенные разрывные смещения проявляются, как правило, в виде сейсмотектонических структур (дислокаций, деформаций), образующихся при выходе очага на поверхность в эпицентральных зонах землетрясений. К сейсмотектоническим дислокациям относятся сейсмогенные разрывы со смещением (сеисмосбросы, взбросы, сдвиги), морфологически выраженные в виде уступов и сейсмогенных рвов. Протяженность их зон зависит от магнитуды коровых землетрясений и варьируется от сотен метров (при $M = 6—6,5$) до сотен километров (при $M = 8,5$). При этом максимальные наблюдаемые амплитуды вертикального смещения достигают 10—12 м, а горизонтального — 8,9 м. Одно из следствий сейсморазрывных проявлений — сопутствующее смещение природных и техногенных объектов (ограды, дороги, различные инженерные сооружения).

Методика выявления и картирования активных разломов основана на комплексе аэрокосмических и наземных полевых методов, позволяющих по проявлениям в рельефе и смещениям молодых отложений распознать активный разлом, закартировать зону оперяющих его нарушений и деформаций, определить морфокинематический тип и амплитуду смещений. По космическим снимкам (КС) можно выделить морфоструктурные зоны с активными разломами. При дешифрировании крупномасштабных аэро-снимков и КС высокого разрешения возможна фиксация небольших амплитуд смещений молодых отложений или форм рельефа (до 0,5—1 м), сравнимых с величиной одной сейсмогенной подвижки по разлому.

Полевое изучение активных разломов предусматривает применение геолого-геоморфологических и палеосейсмогеологического методов, необходимых для определения кинематического типа разлома, геометрии его сместителя и амплитуды вертикального и горизонтального смещений. Для выявления и оценки вертикального смещения по активному разлому наиболее полную информацию дают наблюдения в пересекаемых разломами долинах и озерных котловинах, где отмечаются изменения их продольного профиля, ширины, количества и высоты террас и их разреза. Сдвиговые смещения

фиксируются по одноподправленным латеральным изгибам русел, водоразделов и других элементов рельефа независимо от общего уклона местности.

Специальным методом изучения активных разломов, направленным на выявление и датирование смещений по разлому, величины одноактных подвижек и периода их повторяемости является «тренинг» — вскрытие зон разломов поперечными траншеями. В результате получают данные о магнитуде связанных с подвижками палеоземлетрясений, времени последнего из них и периоде их повторяемости.

Одна из характеристик разломов, важная при проектировании инженерных сооружений, — ширина зоны разлома, в которой могут проявиться активные нарушения и деформации. В зоне разлома (разрывной зоне) обычно различают три элемента:

- основной смеситель разлома (осевая зона разлома);
- собственно зону разлома (зона аномальной трещиноватости и деформации) как совокупность всех связанных со смесителем нарушений;
- зону воздействия разлома.

Зоны сместителей активных разломов представляют собой отдельные плоскости либо сложные сочетания поверхностей отрыва и скольжения, сопровождающиеся тектонической брекчией, глиной трения, бороздами и зеркалами скольжения. Мощность этих зон в коренных породах обычно не превышает 1 м, в рыхлом осадочном чехле она может возрастать до нескольких метров, реже до первых десятков метров.

Собственно зоны разломов — это совокупность оперяющих главный смеситель разрывов, трещин и при разломных складчатых деформаций. В научной литературе эти зоны именуются по-разному и сопоставляются с под зонами аномальной трещиноватости и тектонических клиньев [12] либо с зонами динамического влияния разлома [41]. Ширина таких зон изменчива и зависит от кинематики и геометрии разлома, а также от возраста и физико-механических свойств вмещающих пород. Так, ширина наиболее раздробленной части зоны Таласо-Ферганского разлома в разных сегментах колеблется от десятков до сотен метров, при этом позднечетвертичное смещение сосредоточено в узкой полосе вдоль одного смесителя.

Под зоной воздействия разлома понимается при разломная полоса, в которой развиты пликативные или пликативно-дизъюнктивные деформации, нередко рассеянные по всей зоне и постепенно затухающие к ее периферии. Ширина зоны такого воздействия изменчива и зависит от структурной значимости разлома, его протяженности и скорости перемещения.

В комплексе исследований по выделению разрывных нарушений и оценке их современной активности с инженерными целями существенная роль отводится геофизическим методам. Среди них ведущую позицию занимают сейсморазведка, электроразведка, газовойманоационная съемка, реже гравирозведка и магниторозведка.

В изучении строения разрывов во вмещающей среде наиболее эффективна сейсморазведка на отраженных волнах методом общей глубинной точки (МОГТ) в сочетании с методом преломленных волн (МПВ). Сейсморазведка МОГТ с использованием для возбуждения колебаний специальных ударных установок позволяет осветить разрез до глубин в несколько сотен метров. При этом на временных и глубинных разрезах, по данным МОГТ, признаками наличия разрывных нарушений являются локальные смещения осей синфазности отражений, нарушение корреляции отражений вследствие шероховатости границ в зоне разлома, а также ряд др.

По данным сейсморазведки МПВ, признаками наличия в разрезе разрывов являются смещение преломляющих границ, как правило, снижение скоростей продольных и поперечных волн в разрывной зоне, обусловленное повышенной трещиноватостью пород, иногда наличие дифрагированных волн на сейсмограммах вследствие резких вертикальных и крутонаклонных границ в разрезе и др.

Среди электроразведочных методов наиболее информативным представляется вертикальное электрическое зондирование методом двух составляющих (ВЭЗ МДС), способное не только выделить разрывное нарушение в геоэлектрическом разрезе, но и определить его простирание и углы падения крыльев. В последнее время начал успешно применяться метод становления поля в ближней зоне, компьютерная обработка результатов которого позволяет наглядно выделять в плане и разрезе неоднородности, связанные с разрывами. Гравиразведка и магниторазведка, реже используемая в инженерных изысканиях, в основном направлены на выделение и изучение строения зон разрывов.

Современную активность разрывных нарушений и геодинамическую обстановку на площадке строительства или вдоль трассы изысканий можно оценить по результатам газово-эманационной съемки. В настоящее время большинством специалистов принимается концепция о наличии пространственно-временной связи между разрывами, в зоне которых наблюдается повышенная проницаемость инертных и радиоактивных газов (радона и торона) и интенсивностью эманаций. Содержание в надпочвенном воздухе газов и радиоактивных эманаций может изменяться во времени по нескольким причинам (колебание напряжений в зоне разрыва, вариации атмосферного давления и др.). Поэтому рекомендуется проводить газово-эманационную съемку на площадке или по трассе неоднократно в разное время, но не менее 2 раз.

Комплексное рассмотрение результатов геолого-тектонических, структурно-геоморфологических, сейсмологических и геофизических исследований позволяет относительно надежно выделить в процессе изысканий разрывные нарушения и оценить их современную активность. Это, в свою очередь, способствует принятию наиболее рациональных проектных решений, правильному выбору методов инженерной защиты, обеспечивающих

безопасность эксплуатации зданий и сооружений, в том числе линейных — магистральных трубопроводов, железных дорог и т. д.

1.3. НЕКОТОРЫЕ НАТУРНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ И АНТИСЕЙСМИЧЕСКИЕ МЕРОПРИЯТИЯ

Данные о разрушениях подземных сооружений или их элементов во время землетрясений служат ценным источником информации для выявления наиболее уязвимых мест и типичных повреждений, учета влияния различных факторов на сейсмостойкость подземных сооружений. Фактические данные, систематизированные в [11, 15], позволили сделать вывод о том, что практически при каждом сильном землетрясении подземные сооружения оказывались поврежденными в большей или меньшей степени. Эти данные опровергают распространенное до недавнего времени мнение о малой опасности сейсмических воздействий для подземных сооружений. Сведения о поведении подземных конструкций при землетрясениях позволяют разработать как общие рекомендации, так и конкретные антисейсмические мероприятия, а также имеют большое значение в качестве одного из критериев оценки применяемых в теории сейсмостойкости теоретических и экспериментальных методов. Во время землетрясения интенсивностью 8 баллов в северной части полуострова Иду (Япония, 1930г.) образовался тектонический разрыв земной коры, прослеженный на протяжении 30км. Этот разрыв можно наблюдать в железнодорожном туннеле Танна длиной 7295м, который в то время находился еще в проходке. Разрыв произошел в средней части туннеля по четырем линиям, перпендикулярным оси туннеля. Наибольшее смещение, горизонтальная составляющая которого 2,44м, располагалось близко к старому тектоническому нарушению, пересекающему туннель под углом 90° на глубине 150 м, заполненному разжиженной песчано-глинистой массой.

Аналогичная авария произошла в туннеле в горах Санта-Крус (Калифорния) в 1906г. Туннель длиной 1890 м пересекал сеймотектоническую линию сдвига под углом 80° . В этом месте туннель был смещен во время землетрясения по горизонтали на 1,5 м, причем отклонения оси туннеля от начального направления наблюдались на расстоянии до 1500м от места разрыва. Во время землетрясения интенсивностью в 10 баллов в районе земляной плотины Сан-Андреас (Калифорния, США) по тектоническому разрыву произошел сдвиг на 2,4м, который, не задев ни плотины, ни дамбы, пресек водосбросной туннель, расположенный в коренных породах (серпентин и диабаз). Часть туннеля была смещена на 2,5м, припортовая часть с каменной облицовкой

толщиной 0,4м была разрушена полностью на протяжении почти 8,5м. Землетрясения интенсивностью 10 баллов в центральном Чили в 1943 году оставило неповрежденной плотину Коготи, построенную из каменных наброски, однако припортальные участки туннелей, проложенные в скальных породах, были полностью разрушены.

Кроме вышеупомянутых аварий подземных сооружений во время землетрясений за рубежом отмечен еще ряд аналогичных случаев. В основном с транспортными туннелями, подробное описание и анализ которых приводился в [15]. Там же приводится подробное описание воздействия Махачкалинского землетрясения 1970 года на подземные сооружения Чиркейской ГЭС на р. Судак. На основании результатов исследовательских работ и материала натурных наблюдений [15] сформулированы некоторые основные принципы проектирования подземных сооружений в сейсмических районах. Эти принципы сводятся к равномерному распределению сейсмических нагрузок, что достигается симметричностью конструкций, к требованию снижения величин инерционных нагрузок, т.е. облегчению собственного веса и снижению жесткости элементов обделки, и к применению крупноразмерных сборных элементов, изготовленных из материалов, хорошо воспринимающих пластические и упругие деформации. В подземных гидротехнических сооружениях, расположенных в горных сейсмических районах в скальных породах на значительных глубинах, инерционное давление обделок вносит очень незначительный вклад в нагрузки сооружения за счет большого инерционного горного давления, а требования облегчения обделки могут вступить в противоречие с требованием обеспечения прочности сооружения прежде всего от наиболее опасных, инерционных нагрузок. Применение сборных элементов в сооружениях глубокого заложения может оказаться нетехнологичным. Одним из наиболее важных требований в данном случае является выбор трассы протяженных сооружений (прежде всего туннелей) во главе с более благоприятным основанием для обеспечения его однородности, так как при неравномерной осадке грунтов под сооружением возможно образование зон концентрации напряжений. Накопление фонда подземных инструментальных записей сильных землетрясений чрезвычайно важно (как уже неоднократно отмечалось) для решения практически всех вопросов подземного сейсмостойкого строительства. Вопросы организации инженерно-сейсмологической службы в подземных сооружениях подробно рассмотрены в [15]. Способы снижения сейсмического давления массовых взрывов на горные выработки подразделяются на две группы: активные и пассивные [30]. При активных способах для уменьшения сейсмического эффекта взрывов подбираются соответствующие параметры производства работ при пассивных способах применяются приспособления конструктивных элементов к условиям воздействия.

1.4. СЕЙСМИЧЕСКИЕ И СЕЙСМОВЗРЫВНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

При распространении в грунтовой среде сейсмических волн в ней возникают напряжения растяжения – сжатия и сдвига. В подземных сооружениях, находящихся в поле распространения волн, создается динамическое напряженно-деформированное состояние, которое зависит от многих факторов и прежде всего от соотношения длины сейсмической волны и размеров сооружения.

При решении задач о сейсмонапряженном состоянии подземных сооружений трудно учесть многие определяющие его факторы. Поэтому приходится исходить из некоторых допущений, касающихся прежде всего свойств грунтов и спектрального состава воздействия. Наиболее употребительной и самой простой расчетной моделью грунта является линейно - упругая среда. Форма волнового фронта вблизи сооружений также определяется различными, как правило, не поддающимися учету обстоятельствами. Поэтому принято условно считать сейсмические волны от землетрясений в отдалении от эпицентра плоскости.

Для плоской гармонической волны в линейно-упругой среде максимальные нормальные напряжения (растяжения- сжатия) σ_r и тангенциальные (сдвига) τ_r определяются выражениями [26,21]:

$$\sigma_r = \pm \frac{1}{2\pi} K_c g \rho C_p T_0, \quad (1.1)$$

$$\tau_r = \pm \frac{1}{2\pi} K_c g \rho C_s T_0$$

где, ρ – плотность грунта; C_p и C_s – скорости распространения продольной (P) и поперечной (S) волн; T_0 – преобладающий период сейсмических колебаний частиц грунта; K_c – коэффициент сейсмичности $K_c = \frac{a_0(x,t)}{g}$; $a_0(x,t)$ – максимальное ускорение смещения частиц грунта.

Формулы (1.1) приводятся в КМК [54] для определения сейсмических нормальных напряжений в грунтовой среде. Преобладающий период сейсмических колебаний назначается по данным инженерно-сейсмологической службы при отсутствии таких данных следует принимать $T_0 = 0,5$ с.

Реальное сейсмическое воздействие не является гармоническим, оно носит весьма сложный «хаотический» характер и может быть схематизирован в первом приближении пакетом гармоник. Вопросам анализа сейсмических волн посвящена обширная сейсмологическая литература, например [64,65]. Однако инструментальные записи землетрясений – основной источник информации о характере и структуре сейсмических воздействий – осуществлялись в основном на поверхности земли (или на незначительных глубинах). Поэтому имеющаяся

довольно обширная информация о сейсмических колебаниях грунта при землетрясениях относится к дневной поверхности, а не к интересующим нас подземным условиям. В [91] приводятся данные пяти инструментальных записей, выполненных на различных глубинах. Они свидетельствуют о затухании сейсмических ускорений с увеличением глубины залегания. Однако, приведенные результаты обработки (рис.1.1) акселерограмм весьма противоречивы. Очевидно, характер затухания определяется свойствами грунтов, геологическим разрезом, спектральным составом воздействия, углом подхода и эпицентральной дистанцией. В связи с практически полным отсутствием достоверных инструментальных данных большой интерес представляют результаты некоторых теоретических работ, посвященных этому вопросу.

В [66] рассмотрено изменение интенсивности колебаний с глубиной и отмечается, что оно различно для различных типов волн. В случае объемных волн, подходящих снизу, на поверхности полупространства регистрируются удвоенные амплитуды за счет отражения от дневной поверхности. Следовательно, на глубине, равной половине длины волны λ , амплитуда колебаний уменьшается вдвое.

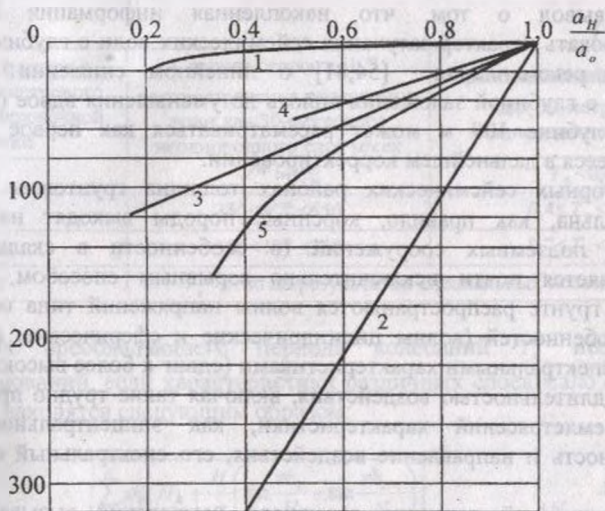
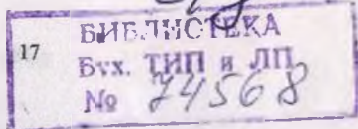


Рис. 1.1. Затухание сейсмических ускорений с глубиной заложения выработки по данным разных авторов [91].

1,2 – К. Кандя, Т.Танака; 3 – Б.К. Карапетяна; 4 – С. Окомота,

Т.Мицукуси; 5 – М.И.Дандурова; $\frac{a_n}{a_0}$ – отношение сейсмических

ускорений на глубине H и на дневной поверхности.



1.4. СЕЙСМИЧЕСКИЕ И СЕЙСМОВЗРЫВНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

При распространении в грунтовой среде сейсмических волн в ней возникают напряжения растяжения — сжатия и сдвига. В подземных сооружениях, находящихся в поле распространения волн, создается динамическое напряженно-деформированное состояние, которое зависит от многих факторов и прежде всего от соотношения длины сейсмической волны и размеров сооружения.

При решении задач о сеймонапряженном состоянии подземных сооружений трудно учесть многие определяющие его факторы. Поэтому приходится исходить из некоторых допущений, касающихся прежде всего свойств грунтов и спектрального состава воздействия. Наиболее употребительной и самой простой расчетной моделью грунта является линейно-упругая среда. Форма волнового фронта вблизи сооружений также определяется различными, как правило, не поддающимися учету обстоятельствами. Поэтому принято условно считать сейсмические волны от землетрясений в отдалении от эпицентра плоскости.

Для плоской гармонической волны в линейно-упругой среде максимальные нормальные напряжения (растяжения-сжатия) σ_r и тангенциальные (сдвига) τ_r определяются выражениями [26,21]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \pm \frac{1}{2\pi} K_c g \rho C_p T_0, \\ \tau_r &= \pm \frac{1}{2\pi} K_c g \rho C_s T_0\end{aligned}\quad (1.1)$$

где, ρ — плотность грунта; C_p и C_s — скорости распространения продольной (P) и поперечной (S) волн; T_0 — преобладающий период сейсмических колебаний частиц грунта; K_c — коэффициент сейсмичности $K_c = \frac{a_0(x,t)}{g}$; $a_0(x,t)$ — максимальное ускорение смещения частиц грунта.

Формулы (1.1) приводятся в КМК [54] для определения сейсмических нормальных напряжений в грунтовой среде. Преобладающий период сейсмических колебаний назначается по данным инженерно-сейсмологической службы при отсутствии таких данных следует принимать $T_0 = 0,5$ с.

Реальное сейсмическое воздействие не является гармоническим, оно носит весьма сложный «хаотический» характер и может быть схематизирован в первом приближении пакетом гармоник. Вопросам анализа сейсмических волн посвящена обширная сейсмологическая литература, например [64,65]. Однако инструментальные записи землетрясений — основной источник информации о характере и структуре сейсмических воздействий — осуществлялись в основном на поверхности земли (или на незначительных глубинах). Поэтому имеющаяся

довольно обширная информация о сейсмических колебаниях грунта при землетрясениях относится к дневной поверхности, а не к интересующим нас подземным условиям. В [91] приводятся данные пяти инструментальных записей, выполненных на различных глубинах. Они свидетельствуют о затухании сейсмических ускорений с увеличением глубины залегания. Однако, приведенные результаты обработки (рис.1.1) акселерограмм весьма противоречивы. Очевидно, характер затухания определяется свойствами грунтов, геологическим разрезом, спектральным составом воздействия, углом подхода и эпицентральным расстоянием. В связи с практически полным отсутствием достоверных инструментальных данных большой интерес представляют результаты некоторых теоретических работ, посвященных этому вопросу.

В [66] рассмотрено изменение интенсивности колебаний с глубиной и отмечается, что оно различно для различных типов волн. В случае объемных волн, подходящих снизу, на поверхности полупространства регистрируются удвоенные амплитуды за счет отражения от дневной поверхности. Следовательно, на глубине, равной половине длины волны λ , амплитуда колебаний уменьшается вдвое.

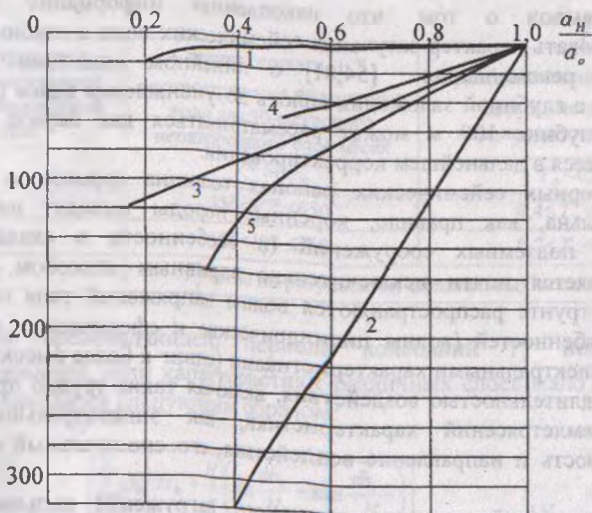
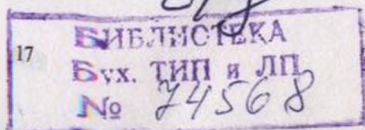


Рис. 1.1. Затухание сейсмических ускорений с глубиной залегания
выработки по данным разных авторов [91].

1,2 – К. Кандя, Т.Танака; 3 – Б.К. Карапетяна; 4 – С. Окомота,

Т.Мицукоси; 5 – М.И.Данурова; $\frac{a_H}{a_0}$ – отношение сейсмических

ускорений на глубине H и на дневной поверхности.



В [70] решена одномерная задача о распространении продольных сейсмических волн в грунте, представленном плоско-параллельной двухслойной средой, покоящейся на жестком основании. Рассмотрен случай падения волны нормально к границам раздела. Каждый из слоев предполагается однородным и изотропным. Внутри слоев смещения распределяются по закону стоячей волны. Спектральные кривые смещений показывают, что положение экстремумов в функции периода колебаний от соотношения как толщин слоев, так и акустических жесткостей из материалов. Чем меньше отношение акустических жесткостей материалов верхнего и нижнего слоев, тем значительнее величины смещений на поверхности.

Таким образом, рассмотрение частных задач [70,66] позволяет установить тенденцию уменьшения интенсивности воздействия с глубиной, однако не дает возможности надежно прогнозировать балльность в зоне проектируемого конкретного подземного сооружения. Более того, если, действительно, затухание низкочастотных составляющих сейсмической волны, наиболее опасных с точки зрения задачи о концентрации напряжений, незначительно, то, по-видимому, не всегда правомерно ставить вопрос о снижении балльности с глубиной при расчете подземных сооружений. В настоящее время, однако, можно лишь сделать вывод о том, что накопленная информация не позволяет прогнозировать характер затухания сейсмических волн с глубиной, и поэтому известная рекомендация [54,81] о линейном снижении коэффициента смещения с глубиной заложения вплоть до уменьшения вдвое (т.е. на 1 балл) уже на глубине 100 м может рассматриваться как первое приближение, нуждающееся в дальнейшем корректировании.

В горных сейсмических районах толщина грунтового слоя обычно незначительна, как правило, коренные породы выходят на поверхность. Проходка подземных сооружений (в особенности в скальных грунтах) осуществляется почти исключительно взрывным способом. В результате взрыва в грунте распространяются волны напряжений типа сейсмических с рядом особенностей (волны цилиндрические и сферические, а не плоские), другими спектральными характеристиками (сдвиг к более высоким частотам) и меньшей длительностью воздействия, включая такие трудно предсказуемые в случае землетрясений характеристики, как эпицентральное расстояние, интенсивность и направление воздействия, его спектральный состав, эффект затухания.

Сферический источник взрывного нагружения вызывает в массиве упругие смещения, скорость которых может быть определена по эмпирической формуле вида [82,86].

$$v = B \left(\frac{Q^a}{R} \right)^r, \quad (1.2)$$

где, Q – вес заряда, кг; R – расстояние от источника до точки наблюдения, м.; B – коэффициент, учитывающий свойства грунтов и ВВ; ν – показатель затухания, зависящий от диссипативных свойств среды.

Коэффициенты B , n , ν неоднократно определялись как аналитическим решением задачи, так и в натуральных условиях для различных зарядов грунтов. Результаты большинства натуральных наблюдений позволяют считать в случае достаточного заглубления регистрирующего прибора, т.е. для воздействия на подземные сооружения; наибольший интерес для подземного гидротехнического строительства представляют результаты измерений [90], проведенных на строительстве туннелей Красноярской, Токтогульской и Нурекской ГЭС. Регистрация опытных и производственных взрывов обнаружила существование двух типов колебаний: высокой (30-100 Гц) и низкой 91-3 Гц) частот, причем интенсивность первой группы значительно выше, чем второй.

Среднее значение скоростей распространения поперечных волн V_s^{φ} и преобладающих периодов T_0 по основному тону колебаний грунтов для различных категорий грунта приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Категория грунтов в пределах 30-метрового слоя от планировочной отметки	Средняя скорость, V_s^{φ} распространения поперечных волн для 30-метрового неоднородного слоя м/сек	Преобладающий период T_0 для 30-метрового неоднородного слоя сек
I	$V_s^{\varphi} > 650$	$T_0 < 0,4$
II	$350 < V_s^{\varphi} \leq 650$	$0,4 \leq T_0 < 0,7$
III	$180 < V_s^{\varphi} \leq 350$	$0,7 \leq T_0 < 1,0$
IV	$V_s^{\varphi} \leq 180$ по результатам специальных исследований	

Значения преобладающего периода колебаний T_0 неоднородных грунтовых оснований, если характеристики различных слоев мало отличаются друг от друга находятся следующим образом:

$$T_0 = 4H \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n \rho_k \left[H_k + \frac{H}{\pi} \left(\sin \frac{\pi h_k}{H} - \sin \frac{\pi h_{k-1}}{H} \right) \right]}{\sum_{k=1}^n G_k \left[H_k - \frac{H}{\pi} \left(\sin \frac{\pi h_k}{H} - \sin \frac{\pi h_{k-1}}{H} \right) \right]}} \quad \text{или} \quad T_0 = \frac{4H}{V_s^{\varphi}},$$

$$V_s^{\varphi} = \frac{\sum_{k=1}^n H_k}{\sum_{k=1}^n \frac{H_k}{V_{sk}}}$$

где H – общая мощность неоднородной многослойной поверхности толщи (до коренных пород с $V_s > 800$ м/сек, $H_k, \rho_k, G_k, V_{sk} = \sqrt{G_k / \rho_k}$ – соответственно мощность, плотность, модуль сдвига и скорость распространения поперечных волн k -ого слоя, $h_k = \sum_{i=1}^k H_i$ ($h_0 = 0, h_n = H$), n – число слоев.

За расчетное значение T_0 принимается наибольшее из двух значений.

1.5. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Вплоть до начала 50-х годов 20 го столетия расчеты сооружений на сейсмические воздействия осуществлялись по статической теории сейсмостойкости, суть которой в сведении колебаний сооружений под действием сейсмической нагрузки к переносному движению сооружения как жесткого целого совместно с основанием. Деформации сооружений при этом не учитываются, и ускорения всех его частей считаются совпадающими по амплитуде и фазе с ускорением совершающего гармонические колебания основания. В этом случае действие сейсмической нагрузки схематизируются горизонтально направленными статически приложенными инерционными силами S , которые пропорциональны массам элементов сооружения m (или их весам Q)

$$S = ma_s = Q \frac{a_s}{g} = K_c Q \quad (1.3)$$

Сейсмический коэффициент $K_c = \frac{a_s}{g}$ устанавливается на основании сейсмических данных и нормируется. Несмотря на известные недостатки статической теории, которые привели к вытеснению её из практики инженерных расчетов наземных сооружений, для подземных сооружений она является единственной, разработанной достаточно полно. Все действующие нормативные документы в области подземного строительства основаны на статической теории сейсмостойкости.

При проектировании сооружений для строительства в сейсмически опасных районах, помимо расчетов на основное сочетание нагрузок, следует выполнять также расчеты на особое сочетание нагрузок с учетом сейсмических воздействий.

Основные и особые сочетания нагрузок принимаются согласно действующим КМК "Нагрузки и воздействия".

В особое сочетание нагрузок следует включать:

- нормативные значения постоянно действующих нагрузок;
- нормативные значения временной длительной нагрузки с умножением их на коэффициент сочетаний, равный 0,95;

– сейсмические воздействия, определяемые в соответствии с указаниями настоящего раздела.

Дальнейшим шагом в развитии теории сейсмостойкости сооружений явилась линейно-спектральная теория сейсмостойкости. Основная идея методов расчета по спектральным кривым состоит в том, что вместо описания сейсмических колебаний в функции времени дается оценка максимальных величин различных факторов (усилий, напряжений, смещений, ускорений и т.п.) по отдельным формам этих колебаний.

Сейсмическая сила, приложенная к грузу Q_k , для i – й формы колебаний определяется выражением:

$$S_{ik} = Q_k K_c \beta_i \eta_{ik}, \quad (1.4)$$

где, K_c – коэффициент сейсмичности, определяемый так же, как в (1.3); β_i – коэффициент динамичности, являющийся функцией периода собственных колебаний конструкции и определяемый по спектральной кривой; η_{ik} – коэффициент формы, зависящий от формы деформации сооружения при ik -м тоне колебаний под воздействием землетрясения и места приложения груза Q_k .

Метод спектральных кривых широко применяется в современной теории сейсмостойкости и положен в основу нормативных документов ряда стран. Чтобы вычислить сейсмические нагрузки по (1.4), необходимо знать динамические характеристики сооружения: частоты и формы собственных колебаний и параметры затухания. В КМК [54] формально проведен линейно-спектральный подход и для подземных гидротехнических сооружений, так, предлагается определять инерционные сейсмические нагрузки по формуле (1.4), считая однако, при этом $\beta_i, \eta_{ik}=1$, т.е. сводя расчет по существу к статической теории. Несмотря на значительное развитие линейно-спектральной теории, применение её в области подземного сейсмостойкого строительства встречает затруднения принципиального характера, связанные с недостаточной разработанностью методов определения динамических характеристик подземных сооружений, а также с отсутствием достаточно обоснованных спектральных кривых. Кроме того, установлено, что для подземных сооружений основным видом сейсмической нагрузки являются не инерционные силы от веса обделки и горного давления, а динамическое изменение сеймонапряженного состояния массива при прохождении волн напряжений при этом имеют место сложные дифракционные и интерференционные явления, которые в принципе не могут быть учтены линейно-спектральной теорией.

В расчетах сооружений Линейно-спектральным методом (ЛСМ) материалы сооружения и основания считаются линейно-упругими.

Сейсмическое ускорение основания задается постоянной во времени векторной величиной, модуль которой определяется по формуле:

$$|U_0| = k_A \cdot g \cdot A$$

где, A – расчетная амплитуда ускорения основания (в долях g), определенная с учетом реальных грунтовых условий на площадке строительства для землетрясений с периодом повторяемости $T_{повт}^{норм}$, принятым в национальных нормах; для стран, использующих комплект карт ОСР-97, значения A даны в табл. 1.2;

k_A – коэффициент, учитывающий вероятность сейсмического события за назначенный срок службы сооружения $T_{сл}$, а также переход от нормативного периода повторяемости $T_{повт}^{норм}$ к периоду повторяемости, принятому для ПЗ или МРЗ в соответствии с указаниями для стран, использующих комплект карт ОСР-97, значения k_A , соответствующие нормативным периодам повторяемости 500 (карта А) и 5 000 (карта С) лет, приведены в табл. 1.3; g – ускорение свободного падения ($9,81 \text{ мс}^2$).

Таблица 1.2.

Значения расчетной амплитуды A (в долях g)

Категория грунта	$I_{расч}$, баллы									
	6		7		8		9		10	
	$I_{расч}$ баллы	A	$I_{расч}$ баллы	A	$I_{расч}$ баллы	A	$I_{расч}$ баллы	A	$I_{расч}$ баллы	A
I	-	-	-	-	7	0,12	8	0,24	9	0,48
I-II	-	-	7	0,08	8	0,16	9	0,32	-	-
II	-	-	7	0,10	8	0,20	9	0,40	-	-
II-III	7	0,06	8	0,13	9	0,25	-	-	-	-
III	7	0,08	8	0,16	9	0,32	-	-	-	-

Таблица 1.3.

Значения коэффициента k_A

Назначенный срок службы $T_{сл}$, годы	$T_{повт}^{ПЗ}$, годы					$T_{повт}^{МРЗ}$, годы	
	100	200	300	400	500	5000	10000
10	0,55	0,60	0,65	0,68	0,70	0,70	0,80
20	0,63	0,70	0,74	0,78	0,80	0,80	0,90
50	0,70	0,78	0,83	0,87	0,90	0,90	1,00
100 и более	0,80	0,87	0,93	0,97	1,00	1,00	1,10

В тех случаях, когда при расчете сейсмостойкости сооружения система «сооружение-основание» разбита на отдельные дискретные объемы, то в качестве сейсмических нагрузок используются узловые инерционные силы $\bar{P}_a$, действующие на элемент системы, отнесенный к узлу k при i -ой форме собственных колебаний.

В общем случае значения компонент узловых сил P_{ik} по трем ($j = 1, 2, 3$) взаимно ортогональным направлениям определяются по формуле:

$$P_{ikj} = k_f k_v m_k \bar{U}_0 \beta_i \eta_{ikj}$$

где, k_f — коэффициент, отражающий степень недопустимости в сооружении повреждений;

k_v — коэффициент, учитывающий демпфирующие свойства конструкций;

m_k — масса элемента сооружения, отнесенного к узлу k (с учетом присоединенной массы воды);

$\bar{U}_0$ — сейсмическое ускорение основания;

$\beta(T_i)$ (или β_i) — коэффициент динамичности, соответствующий периоду собственных колебаний сооружения T_i по i -й форме колебаний;

η_{ikj} — коэффициент формы собственных колебаний сооружения по i -й форме колебаний:

$$\eta_{ikj} = U_{ikj} \frac{\sum_k m_k \sum_{j=1}^3 U_{ikj} \cos(U_{ikj}, \bar{U}_0)}{\sum_k m_k \sum_{j=1}^3 U_{ikj}^2}$$

где, U_{ikj} — проекции по направлениям j смещений узла k по i -й форме собственных колебаний сооружения;

$\cos(U_{ikj}, \bar{U}_0)$ — косинусы углов между направлениями вектора $\bar{U}_0$ сейсмического воздействия и перемещениями U_{ikj} .

Примечание. Указанные в пункте коэффициенты следует учитывать аналогичным образом в расчетах по методикам, позволяющим определять смещения, деформации, напряжения и усилия, возникающие в сооружении под

влиянием сейсмического воздействия, без предварительного нахождения сейсмических нагрузок.

Наряду с линейно-спектральной теорией развивается и другая разновидность динамического метода расчета — расчет по аналоговым акселерограммам, который основан на решении дифференциальных уравнений колебаний конструкций. Воздействие может задаваться в виде инструментальных записей прошлых землетрясений или синтезированных акселерограмм, учитывающих особенности площадки строительства. Однако решение таких уравнений численными методами значительно ограничивается возможностями существующей вычислительной техники. Кроме того, следует иметь в виду практическое отсутствие инструментальных записей, осуществленных в подземных условиях.

Применение к подземным сооружениям, исследования, связанные с расчетами по акселерограммам, развивались по двум основным направлениям: Одно из них, так называемая динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений [3,96,105], изучает колебания протяженных и разветвленных трубопроводов и туннелей.

При этом подземная сеть коммуникаций рассматривается как система, состоящая из упругих стержней и сопрягающих узловых элементов большей жесткости. Грунт моделируется сплошной средой с заданными реологическими свойствами и рассматриваются совместные колебания окружающей грунтовой среды и стержневой системы.

Второе направление связано с изучением сейсмонапряженного состояния элементов сооружения и прилегающего массива методами волновой динамики. Грунт, в котором расположено сооружение, рассматривается как сплошная упругая или вязкоупругая среда. Подземное сооружение представлено в виде подкрепленной или неподкрепленной полости. Расчет сооружений сводится к решению динамических задач теории упругости или вязкоупругости расчетными или экспериментальными методами.

Методы определения сейсмонапряженного состояния подземных сооружений по статической теории сейсмостойкости являются в настоящее время единственными, разработанными в достаточной для практических расчетов степени, они положены в основу действующих нормативных документов [54] и практики проектирования.

Особенностью сейсмонапряженного состояния подземных сооружений является то, что давление на обделку обуславливается не только инерционными силами, но и сейсмонапряженным состоянием окружающего массива. Инерционные нагрузки на подземные сооружения могут быть определены по основной формуле статической теории (1.3). Для определения сейсмонапряженного состояния обделок и массива от инерционных нагрузок, т.е. от распространения волн напряжений в массиве, в рамках статической теории созданы специальные методы расчета, основанные на решении плоской статической задачи теории упругости, позволяющие учесть ряд характеристик

воздействия, которые в рамках обычных методов статической теории учтены быть не могут.

В [21] дано обоснование возможности раздельного учета инерционных и неинерционных нагрузок для определения максимальных значений сейсмических напряжений, причем показано, что прочность подземных сооружений обуславливается сеймонапряженным состоянием массива в значительно большей степени, чем инерционными усилиями от веса сооружения, окружающего грунта или воды.

Сеймонапряженное состояние элементов конструкций одиночных протяженных выработок и окружающего массива может быть определено (в статической постановке) из рассмотрения плоской задачи теории упругости.

Сейсмическое горное давление при прохождении плоских продольных волн определяется по формуле [17]

$$P = a \sigma, \quad (1.5)$$

Величина σ , находится из (1.1). Следует обратить внимание на то, что выражение (1.1) получено из рассмотрения задачи о распространении плоских гармонических волн в линейно-упругой среде, т.е. эта величина зависит как от преобладающей частоты и динамических характеристик, так и от динамических характеристик грунта.

Безразмерный коэффициент a из решения статической задачи теории упругости о растяжении (сжатии) плоскости, ослабленной подкрепленным отверстием. Ввиду того, что поперечные сечения туннелей при прохождении плоских волн в направлении, перпендикулярном оси сооружения, находятся в условиях плоской деформации, рассматривается двусное растяжение (сжатие) плоскости интенсивностью σ , в направлении распространения волны и $\frac{\nu}{1-\nu}\sigma$,

в направлении, параллельном волновому фронту, где ν - коэффициент Пуассона материала грунта.

Решение этой задачи, полученное для кругового отверстия [35, 58] на основе методики [36], рассмотрены примеры расчета и таблицы значений коэффициентов концентрации для обделки туннелей кругового поперечного сечения.

Решение может быть получено не только для продольных, но и для поперечных волн [55] из рассмотрения задачи о концентрации напряжений в плоскости, испытывающей сдвиговые усилия, которые вычисляются также по (1.1). Если для одиночных выработок расчеты по статической и динамической теориям дают близкие результаты, то для систем, состоящих из нескольких близко расположенных подземных сооружений. А также вблизи свободной поверхности (мелкое заложение) методы статической теории неприменимы ввиду существенного влияния волновых эффектов дифракции и интерференции на сложное напряженное состояние массива. Учет нагрузок, направленных

вдоль оси сооружения, когда задача сводится к плоской, методами статической теории не разработаны, хотя в принципе возможно.

Как уже указывалось, статическая теория, не учитывающая спектральных состав воздействия и деформации сооружения, ныне вытесненная применительно к наземным сооружениям линейно-спектральной теорией (ЛСТ).

Спектральные методы расчета распространения не получили из-за ряда специфических трудностей и прежде всего из-за отсутствия соответствующих спектральных кривых. Согласно ЛСТ, составляющая сейсмической нагрузки в точке сооружения, соответствующая i — му тону его собственных колебаний, определяется по (1.4). Упругая реакция сооружений, находящихся в толще пород должна отличаться о реакции наземных сооружений. Это отразится на значении коэффициента β_i , являющегося функцией периода собственных свободных колебаний сооружения T_p и параметра затухания. Кроме того, защемление сооружения в грунтовой среде будет сказываться на характере упругих связей элементов конструкции [58], что неизбежно повлияет на собственные частоты и формы, причем существенную роль будут играть свойства грунтов. В результате специальных исследований установлено, что вследствие особенностей работы подземных сооружений можно принимать коэффициент динамичности меньшим по сравнению с наземными сооружениями и определить по графику, который не дифференцируется в зависимости от свойств грунтов (рис.1.2).

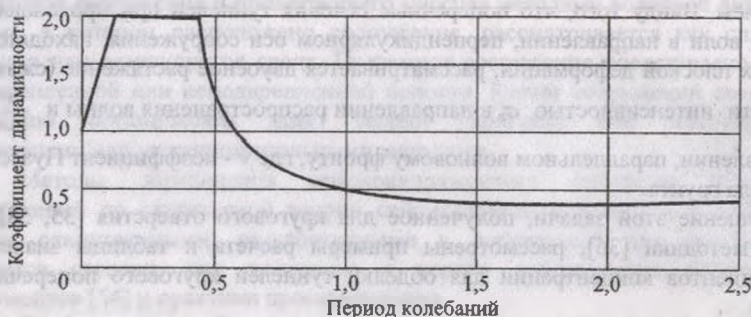


Рис. 1.2. График изменения коэффициента динамичности для подземных сооружений.

Для туннелей и других подземных сооружений при отсутствии данных о колебаниях с учетом сравнительно большого затухания колебаний в [78] считается возможным принимать для основного тона β_i , $\eta_1 = 1,5$. Анализ пунктов КМК [54], относящихся к расчету сейсмостойкости подземных сооружений, показывает, что содержащиеся в нем материалы недостаточны для полного учета сейсмических нагрузок.

Следует также отметить, что вся глава КМК, кроме этих пунктов, использует линейно-спектральную теорию сейсмостойкости и таким образом нарушается единый методический подход.

Существующие методы расчета подземных сооружений, аналоговые акселерограммы могут быть условно подразделены на две основные группы, в основу которых положены разные схематизации как самих сооружений, так и взаимодействия их с окружающей средой. Одно из направлений, так называемая сейсмодинамическая теория сложных систем подземных сооружений, развивается применительно к трубопроводам и туннелям метрополитенов Т.Р.Рашидовым и его школой [58,100,97]. В этих районах предполагается, что протяженное разветвляющееся сооружение имеет в зонах разветвления жесткие или податливые узлы и схематизируется совокупностью взаимодействующих с грунтом балочно-рамных конструкций и жестких массивных тел, обладающих шестью степенями свободы. Стыкуемые между собой участки трубопроводов или туннелей рассматриваются как балки, работающие на растяжение – сжатие, изгиб и кручение и взаимодействующие с грунтом и узловыми сооружениями. При учете взаимодействия с грунтом рассматривается ряд реологических моделей грунта.

В этой связи была проделана большая экспериментальная работа по исследованию взаимодействия различных труб и обделок с грунтом. Анализ решений [7,98,93,58,100], полученных для поперечных колебаний элементов однопутных туннелей из круговых прямоугольных цельно секционных обделок, взаимодействующих с идеально упругим и вязкоупругим грунтом, показал, что грунтовые условия существенно влияют на значения первых нескольких частот собственных колебаний, влияние вязких свойств грунта на более высокие частоты незначительно.

При расчете по сейсмодинамической теории максимальный изгибающий момент обделки больше, чем получающийся при расчете по статической теории. Численные расчеты, выполненные для конкретных примеров обделок метрополитенов, позволили сделать ряд заключений конструктивного характера, например, в случае жесткого защемления основания (массивное основание) значительные напряжения возникают около защемления, твердая боковая засыпка стенок и мягкая засыпка ригелей ведет к росту собственных частот. Сейсмодинамическая теория позволяет рассмотреть также продольные колебания туннелей [58] и трубопроводов [97].

Как показано в [97], реакция туннелей на сейсмодинамическое воздействие существенно зависит от конструктивных особенностей сооружения и грунтовых условий, причем возможно существование в подземных сооружениях двух типов волн : так называемых дозвуковых и сверхзвуковых, что определяется значением числа $M = \frac{C_p}{V}$ (C_p – скорость распространения волны в грунте, V – скорость распространения волны в материале обделки). Если $M < 1$, то происходит «дозвуковое движение», а при $M > 1$ –

«сверхзвуковое» [58]. В [58] также рассмотрены продольные колебания нескольких конструктивных схем перегонных туннелей метрополитенов для случаев монолитных обделок. Обделок с податливым соединением секций, а также перегонные туннели с сейсмическими швами.

Наиболее существенными из полученных результатов являются следующие. В случае жестких монолитных обделок и мягких грунтов (низкие значения C_p) жесткость грунта и длительность сейсмического импульса τ_0 существенно влияют на максимальные смещения обделок, причем, чем меньше величина τ_0 , тем больше смещения. При податливом соединении элементов секций между собой продолжительность импульса влияет существенно на значения смещений и напряжений по сравнению со случаем жесткого соединения элементов по длине. Увеличение жесткости сейсмического шва приводит к уменьшению смещений точек соседних секций, величина смещений зависит от жесткости сейсмошвов и жесткости соединений секций между собой. На основании приведенных вычислений [58] предложена формула для определения расстояния L между сейсмошвами вдоль перегонного туннеля, внесенная в [78].

Оценка сейсмического действия на сооружение производится по величине ускорения смещения почвы вызываемого землетрясения. В зависимости от величины ускорения производится деление землетрясений на баллы. По этому признаку составлены все существующие шкалы бальности землетрясений.

При расчете сооружения на действие землетрясения полагают, что действие последнего эквивалентно силам инерции, действующим на сооружение при землетрясении. Величина этих сил принимается равной массе рассматриваемого элемента, умноженной на ускорение колебания грунта. Таким образом действительное ускорение колебания сооружения заменяется ускорением землетрясения. Подобное допущение законно лишь для сооружений, частота собственных колебаний которых значительно больше частоты колебаний грунта при землетрясении. В этом случае землетрясение оказывает статическое действие на сооружение и ускорение колебаний сооружения равно ускорению колебаний землетрясения.

Частоты колебаний грунта при землетрясениях находятся обычно вблизи $6-4 \text{ сек}^{-1}$. следовательно указанная методика оценки и способа расчета сооружений на действие землетрясений может применяться без большой погрешности лишь для сооружений, собственные частоты которых значительно больше $6-4 \text{ сек}^{-1}$. Для многих сооружений это имеет место.

Так например, при частоте сейсмозрывных волн 60 сек^{-1} , ускорение 100 см/сек^2 наблюдается при амплитуде колебаний грунта около $0,025 \text{ см}$. Колебания грунта с подобной амплитудой для многих сооружений является совершенно безопасными.

Приведенные соображения показывают, что по величине ускорения колебаний грунта, вызываемых сейсмозрывными волнами, нельзя сделать

достоверного заключения о действии этих волн на сооружение. Поэтому для решения вопроса о действии сейсмозрывных волн необходимо выяснить, какие другие характеристики сейсмозрывной волны (амплитуда, частота, скорость) оказывают влияние на колебания сооружений и напряжений в нем.

Попытки решения этого вопроса производились сравнительно давно. Роквелл, указавший на невозможность оценки сейсмозрывной волны по ее ускорению, рекомендует без особых обоснований, в качестве критерия влияния сейсмозрывных волн на сооружения принимать величину кинетической энергии, сообщаемую сейсмозрывными волнами сооружению.

Таким образом им в качестве основного критерия «бальности» сейсмозрывной волны принимается не ускорение, а скорость ее. М. Садовским на основании сопоставления сейсмических разрушений при взрывах с величинами амплитуд, скорости и ускорений колебаний грунта, при которых эти разрушения наблюдались, приходит к заключению, что существует прямая связь между величиной скорости колебаний грунта и разрушениями, при этом в сооружениях, расположенных на грунтах средней прочности, разрушения наблюдаются только при скорости колебания, равной или больше $12-14 \text{ см/сек}$. Поэтому Садовский делает допущение, что деформации, а следовательно и напряжения сооружения пропорциональны скорости колебаний грунта.

1.6. ОЦЕНКА СЕЙСМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДАМИ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

Гидротехнические сооружения, в зависимости от вида и класса сооружения и уровня расчетного землетрясения (ПЗ или МРЗ), рассчитываются на сейсмические воздействия:

а) прямым динамическим методом (ПДМ) с представлением сейсмического воздействия в виде набора записей сейсмического движения основания как функций времени;

б) линейно-спектральным методом (ЛСМ).

Области применения методов расчета на сейсмические воздействия представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4.

Области применения методов расчета ГТС

Расчетное землетрясение	Класс сооружения		
	I-II	III-IV	I-IV
	Водоподпорные, подземные и морские нефтегазопромысловые сооружения	Водоподпорные и подземные сооружения	Остальные ГТС
ПЗ	ПДМ	ЛСМ	ЛСМ
МРЗ	ПДМ	-	-

Динамические деформационные и прочностные характеристики материалов сооружений и грунтов оснований при расчете сейсмостойкости ГТС следует определять экспериментально.

В случаях отсутствия соответствующих экспериментальных данных в расчетах ЛСМ допускается использовать корреляционные связи между величинами статического модуля общей деформации E_0 (или статического модуля упругости E_c) и динамического модуля упругости E_d . Допускается также использование статических прочностных характеристик материалов сооружения и грунтов основания с использованием при этом дополнительных коэффициентов условий работы, устанавливаемых нормами проектирования конкретных сооружений для учета влияния на эти характеристики кратковременных динамических воздействий.

В расчетах подземных сооружений следует учитывать отдельно:

- а) сейсмическое давление грунта, вызванное прохождением в грунтовой среде сейсмических волн сжатия-растяжения и сдвига;
- б) инерционные сейсмические нагрузки от массы конструкции подземного сооружения и массы породного свода.

Другой путь определения сейсмонапряженного состояния конструкций подземных сооружений при расчете их на аналоговые акселерограммы связан с использованием методов волновой динамики. В случае достаточно протяженной полости и воздействия, направленного перпендикулярно её продольной оси, окружающая полость среда и обделка находятся в условиях плоской деформации, а задача определения напряженного состояния массива и обделок сводится к плоской задаче динамической теории упругости (или вязкоупругости).

Ввиду того, что длины сейсмических волн λ , как правило, превышают характерные размеры поперечных сечений выработок (например, диаметр D), особый интерес представляют решения дифракционных задач для длинноволновых воздействий, т.е. когда $\frac{D}{\lambda} < 1$.

В [16] решена задача о концентрации напряжений в безграничной линейно-упругой плоскости около круговой полости диаметра D при распространении продольных гармонических волн длиной λ . Максимальные коэффициенты динамических концентраций напряжений K_σ (отношение максимальных напряжений на контуре отверстия к амплитуде падающей плоской волны) представлены на рис. 1.3-1.4 в зависимости от значений параметра $\frac{D}{\lambda}$ и коэффициента Пуассона ν материала плоскости. При больших длинах волн ($\frac{D}{\lambda} = 0,04 + 0,16$) максимальные коэффициенты динамических концентраций оказались на 5-10 % больше, чем при соответствующем двусосном статическом нагружении ($\lambda = \infty$). Это так называемый «динамический выброс». При $\frac{D}{\lambda} > 0,16$ динамические концентрации напряжений существенно ниже статических.

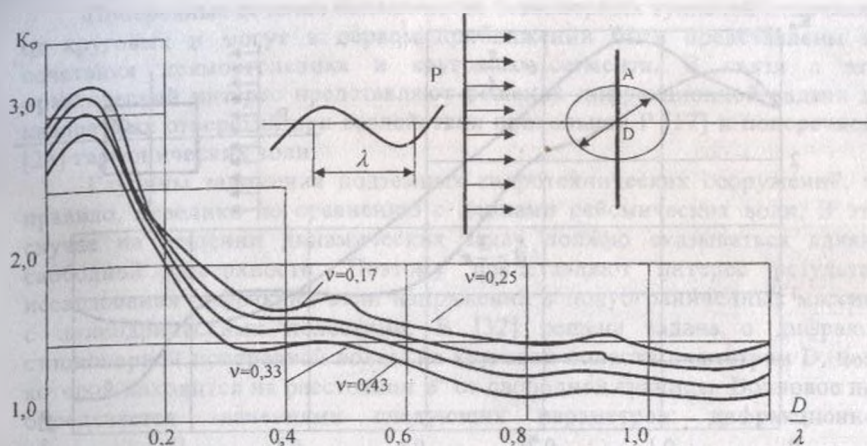


Рис.1.3. Зависимость коэффициента концентрации напряжения K_σ в точке A от соотношения диаметра отверстия D и длины продольной волны λ .

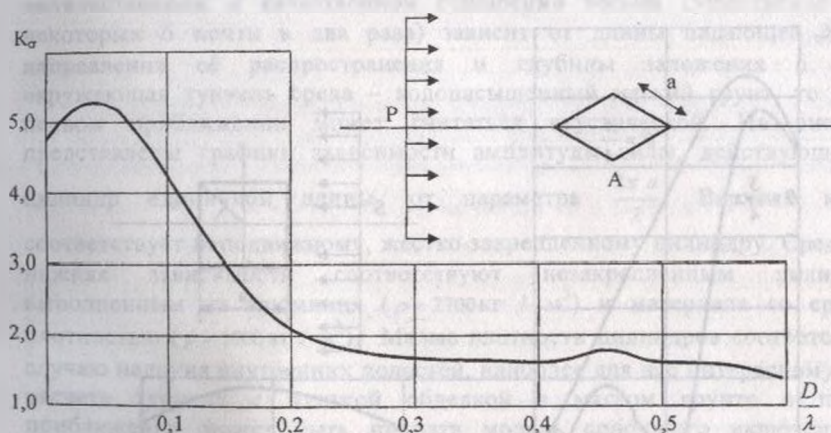


Рис.1.4. Зависимость K_σ в точке A от соотношения a и длины поперечной волны λ .

Зависимость K_σ на свободном контуре кругового отверстия приводится на рис. 1.5-1.6. В области «динамического выброса» напряжения на 10 – 15 % превышают статические.

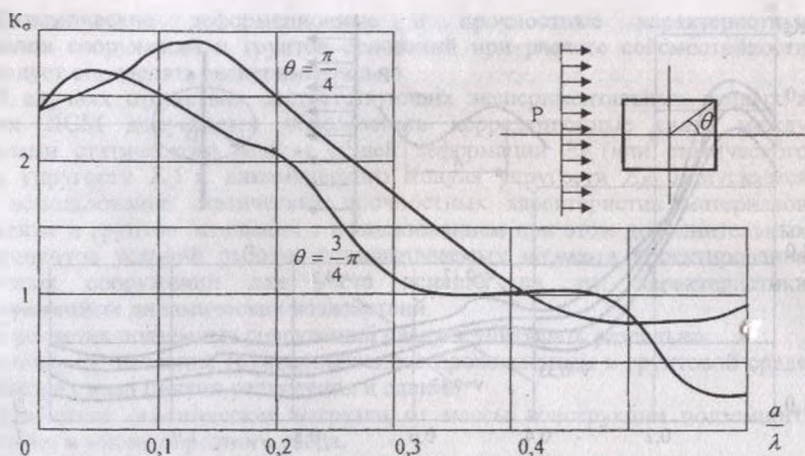


Рис. 1.5. Зависимость K_0 на свободном контуре квадратного отверстия от значений параметра $\frac{a}{\lambda}$ при дифракции продольной волны.

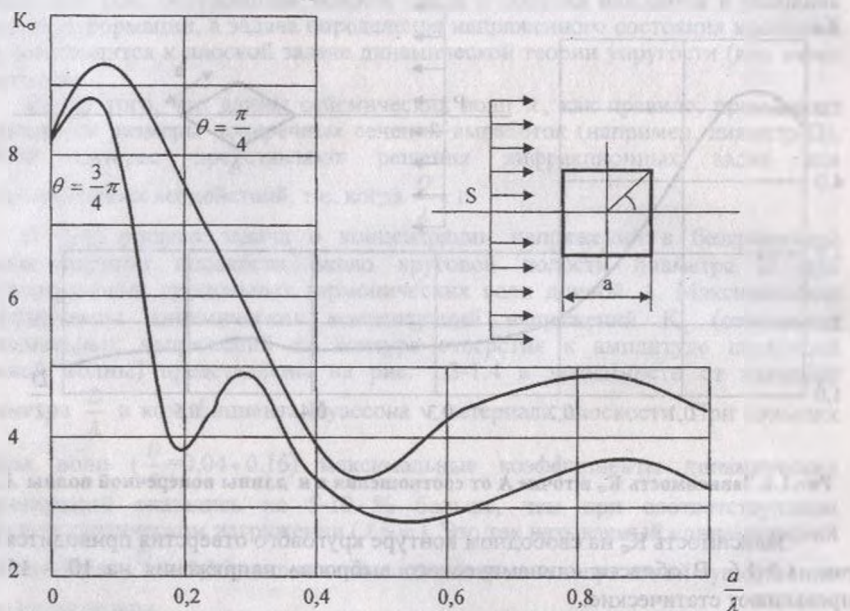


Рис.1.6. Зависимость K_0 на свободном контуре квадратного отверстия от значений параметра $\frac{a}{\lambda}$ при дифракции поперечной волны.

Поперечные сечения большинства безнапорных туннелей отличаются от круговых и могут в первом приближении быть представлены как сочетания прямоугольника и кругового сегмента. В связи с этим практический интерес представляют решения дифракционной задачи для квадратных отверстий при воздействии продольной Р [17] и поперечной S [28] гармонических волн.

Глубины заложения подземных гидротехнических сооружений, как правило, невелики по сравнению с длинами сейсмических волн. В этом случае на решении динамических задач должно сказываться влияние свободной поверхности. Поэтому представляют интерес результаты исследования дифракции волн напряжений в полуограниченных массивах с цилиндрическими полостями. В [32] решена задача о дифракции стационарной поперечной волны на круговой полости диаметром D , центр которой находится на расстоянии δ от свободной границы. Волновое поле определяется значениями следующих параметров: дифракционного параметра $\frac{D}{\lambda}$, глубины заложения $\delta = \frac{\delta'}{\lambda}$ и угла падения волны на граничную поверхность полуплоскости γ . Полученные результаты свидетельствуют о следующем. Распределение напряжений на перемычке в количественном и качественном отношении весьма существенно (при некоторых δ почти в два раза) зависит от длины падающей волны, направления её распространения и глубины заложения δ . Если окружающая туннель среда – водонасыщенный мягкий грунт, то она в первом приближении может считаться акустической. На рис. 1.7 представлены графики зависимости амплитуды силы, действующей на цилиндр единичной длины, от параметра $\frac{2\pi a}{\lambda}$. Верхняя кривая соответствует неподвижному, жестко закрепленному цилиндру. Средняя и нижняя зависимости соответствуют незакрепленным цилиндрам выполненным из алюминия ($\rho = 2700 \text{ кг / м}^3$) и материала со средней плотностью ($\rho = 1000 \text{ кг / м}^3$). Малые плотности цилиндров соответствуют случаю наличия внутренних полостей, наиболее для нас интересному. Для расчета туннеля с жесткой обделкой в мягком грунте в первом приближении может быть принята модель сплошного включения из упругого материала в упругой плоскости с отношением плотностей материалов включения и среды больше единицы. Задача о дифракции плоской Р-волны на круглом сплошном включении диаметра D рассмотрена в [16] для случая жесткого сцепления между включением и плоскостью («жесткая заделка») и некоторого проскальзывания упругой шайбы. Графики [16] характерны большим «динамическим выбросом», достигающим 200-300% , т.е. напряжения при длинноволновых воздействиях превосходят решения статической задачи [102] в несколько

раз. Увеличение жесткости включения ведет к росту максимальных касательных напряжений в массиве на границе с включением.

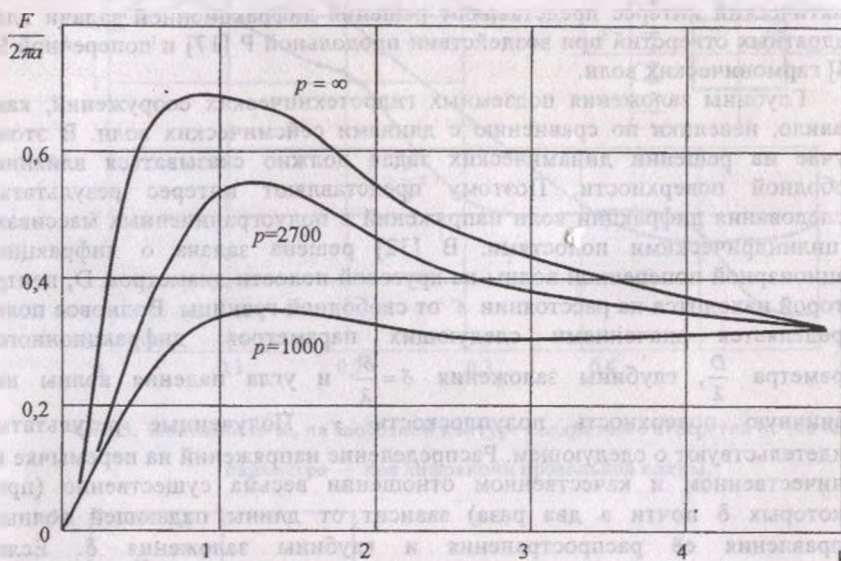


Рис.1.7. Графики зависимости амплитуды силы давления F , действующей на единицу длины упругого цилиндра радиуса a в акустической среде при дифракции гармонической волны давления длиной λ от значений параметра $\mu = \frac{2\pi a}{\lambda}$.

Для определения сейсмонапряженного состояния туннелей наибольший интерес представляют решения динамических задач о концентрации напряжений на круговых цилиндрических оболочках, расположенных в упругих массивах.

Взаимодействие гармонических упругих Р-волн с напорным туннелем посвящена работа [39], причем учтено наличие воды в туннеле. Для случая обделки в виде тонкого инерционного кольца получены формулы, позволяющие определить напряжения и смещения в обделке, а также смещения в массиве на контуре обделки.

Распространение упругих волн в многосвязных областях (в случае плоской задачи это плоскость или полуплоскость с несколькими полостями) определяется эффектами дифракции на полостях и интерференции продифрагировавших волн. Решение этой задачи требует, прежде всего, привлечения методов волновой динамики так как интерференционные эффекты, вносящие

основной вклад в динамическое напряженное состояние многосвязной области могут быть не учтены иными способами. Для целей настоящей работы решения подобных задач представляют значительный интерес, так как к ним сводятся задачи определения сейсмонапряженного состояния систем близкорасположенных выработок, часто встречающихся в гидротехническом строительстве. Это могут быть несколько параллельно идущих ниток водоводов, комплекс помещений здания подземной ГЭС и т.п. Анализ задач о динамическом напряженном состоянии многосвязных областей посвящена монография [32].

При падении плоской гармонической продольной волны длиной λ на бесконечный ряд круговых отверстий диаметром D , расположенных в линейно-упругой плоскости параллельно волновому фронту, исследовалось распределение напряжений между отверстиями в зависимости от значений параметра D и расстояния между центрами отверстий δ . Характер напряженного состояния зоны между отверстиями при фиксированном δ определяется значениями параметра $\frac{D}{\lambda}$ аналогично дифракции на одиночном

отверстии («динамический выброс» и т.п.). В длинноволновой области ($\frac{D}{\lambda} \leq 0,2$) при фиксированном δ или с уменьшением δ (при фиксированном $\frac{D}{\lambda}$) происходит выравнивание напряжений по перемычке, в результате чего суммарные напряжения в области между отверстиями могут значительно превысить напряжения на контурах отверстий. Значения напряжений на свободных контурах отверстий (для всех значений δ) имеют максимумы при одинаковых значениях $\frac{D}{\lambda}$ ($\frac{D}{\lambda} = 0,03 + 0,06$). Эти максимумы превышают соответствующие статические напряжения (при двусосном растяжении плоскости усилиями P_x и $P_y = 0,3 P_x$) приблизительно на 18-20 %.

Создавая еще один «динамический выброс», определяемый значениями δ .

Аналогичные выводы можно сделать и из решения той же задачи для поперечной волны.

В напорных туннелях и водоводах сейсмическое давление воды направлено нормально к обделке. В связи с этим интерес представляет решение задачи о плоскости с двумя одинаковыми круглыми отверстиями (диаметр отверстия D , расстояние между их центрами δ), к контурам которых приложено (изнутри) гармоническое давление. К этой задаче сводится (в стационарной постановке) исследование сейсмонапряженного состояния обделок и межкамерных целиков двух ниток параллельно проложенных напорных водоводов. Определяющими параметрами задачи являются $\frac{D}{\lambda}$ и $\frac{\delta}{\lambda}$.

При $\frac{D}{\lambda} = 0,06 \pm 0,1$ контурные напряжения максимальны при всех δ , превышая статическое значение на 18-20 % («динамический выброс»). Для напряжений σ , в середине перемычки при каждом заданном δ существуют значения $\frac{D}{\lambda}$, при которых σ принимает максимальные значения. Самый высокий уровень σ , наступает, когда длина волны λ приблизительно равна двум расстояниям между отверстиями. Максимальное значение этого напряжения может превышать [32] в 5-6 раз результаты решения статической задачи.

Наибольший интерес представляет реакция подземных сооружений на нестационарные (импульсные) воздействия. Как известно [60], по реакции сооружения на какое-либо импульсное воздействие можно определять реакцию на любое другое нестационарное воздействие. Таким образом, можно получить информацию для расчета подземных сооружений непосредственно на заданное сейсмическое воздействие произвольного вида, например, на реальную акселерограмму. Рассматривая нестационарное воздействие, мы учитываем опасную для конструкций фазу вступления волны.

В [94] проведено сопоставление коэффициентов концентрации K_σ по результатам, полученным при исследовании взаимодействия подкрепленной полости с гармонической продольной волной, и полученных для той же задачи, но для ступенчатой волны давления. Исследовались относительно тонкие ($\frac{h}{D} = 0,025$) и массивные ($\frac{h}{D} = 0,09$) обделки из материалов с большей, чем окружающая среда жесткостью n . Коэффициенты концентрации (уровень «динамического выброса») в линейно-упругой постановке от характера нагружения (в длинноволновой области) почти не зависят.

В [94] также анализируется влияние параметров n и $\frac{h}{D}$ на уровень K_σ при дифракции p -волн на цилиндрических оболочках в линейно-упругих средах.

На рис.1.8 [94] представлена зависимость $K_\sigma = f(\frac{D}{\lambda}, n)$, иллюстрирующая влияние этих параметров на уровень максимальных концентраций напряжений при фиксированной толщине обделки $\frac{h}{D} = 0,05$. Анализ рис. 1.8 показывает, что общий характер зависимостей $K_\sigma(\frac{D}{\lambda})$ одинаков, однако численные значения K_σ существенно определяются величиной параметра n . Концентрация напряжений на внутреннем свободном контуре относительно жестких ($n < 1$) может и на порядок больше превосходить значения K_σ для податливых ($n > 1$) обделок.

Теоретические методы решения задач о дифракции нестационарных волн напряжений на полостях различного очертания разработаны в настоящее время недостаточно [115] и ограничиваются возможностями вычислительной техники.

В связи с этим большое распространение получили экспериментальные методы исследования дифракционных задач, а также определения сейсмонапряженного состояния конкретных подземных сооружений.

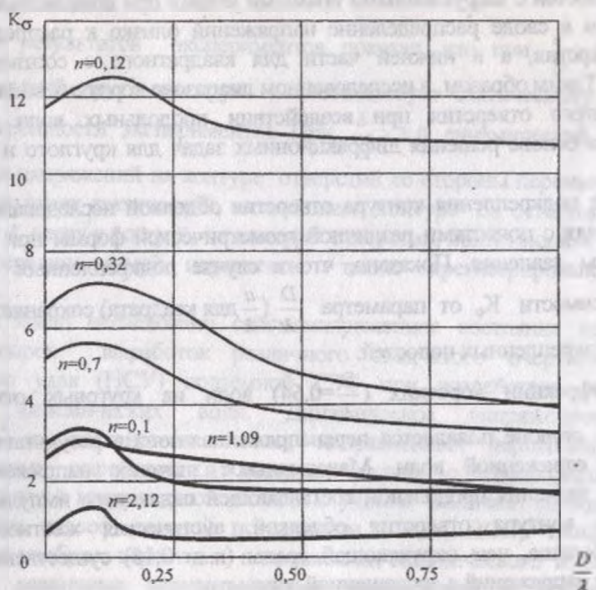


Рис. 1.8. Зависимость максимальных K_σ на свободном контуре подкрепляющего кольца от значений $\frac{D}{\lambda}$ и относительной акустической жесткости материала кольца n .

Большая часть таких работ выполнена в линейно-упругой постановке методом динамической фотоупругости. Экспериментальные трудности не позволили в большинстве случаев подробно исследовать дифракционные задачи в длинноволновом диапазоне, наиболее интересном для задач сейсмостойкости. Лишь в нескольких работах параметр $\frac{D}{\lambda} \leq 0.2$. В области $\frac{D}{\lambda} \geq 0.2$ экспериментальные значения максимальных концентраций напряжений, пересчитанные на ступенчатое воздействие, хорошо ложатся на теоретические зависимости, полученные для стационарных и нестационарных воздействий. В [115] удалось получить на основе экспериментальных результатов «динамический выброс». Для поперечной волны опыты проводились в коротковолновом диапазоне значений параметров $\frac{D}{\lambda}$ ($0.9 \leq \frac{D}{\lambda} \leq 1.5$). Экспериментальные точки хорошо ложатся

на кривую, полученную в работе [129], что еще раз подтверждает незначительность различий в K_0 для стационарных и нестационарных воздействий на круглые неподкрепленные отверстия в линейно-упругой безграничной плоскости.

Влияние формы отверстия на величину K_0 исследовано для квадратных и сводчатых полостей с закругленными прямыми углами при воздействии Р и S волн. Оказалось, что в своде распределение напряжений близко к распределению для круглого отверстия, а в нижней части для квадратного с соответствующими параметрами. Таким образом, в исследованном диапазоне коротких волн напряжения около сводчатого отверстия при воздействии продольных волн могут быть определены на основе решения дифракционных задач для круглого и квадратного отверстий.

Влияние подкрепления контура отверстия обделкой исследовано в [116] на плоских моделях с полостями различной геометрической формы при воздействии плоской волны давления. Показано, что в случае подкрепленных отверстий характер зависимости K_0 от параметра $\frac{D}{\lambda}$ ($\frac{a}{\lambda}$ для квадрата) сохраняется таким же как и для неподкрепленных полостей.

При дифракции коротких ($\frac{D}{\lambda}=0,64$) волн на круговых отверстиях на «освещенной» стороне появляется перенапряженная зона в результате наложения падающей и отраженной волн. Максимальное значение напряжений больше амплитудного значения продольной составляющей падающего импульса в 2 раза. Подкрепление контура отверстия обделкой, аустическая жесткость которой значительно больше, чем окружающей среды ($n = 0,16$) существенно изменяет распределение напряжений в «освещенной зоне».

Полученные результаты воздействия более длинных Р-волн ($\frac{D}{\lambda}=0,25 \div 0,6$) на круглое отверстие с жесткой подкрепляющей обделкой ($n = 0,08$ и $n = 0,16$) свидетельствуют о том, что концентрация напряжений на свободном контуре обделки существенно (почти в два раза) превышает величину K_0 для неподкрепленной полости, но наличие обделки уменьшает концентрацию напряжений в массиве на 20-40%. Установлено, что увеличение жесткости обделки ведет к росту концентраций напряжений.

При дифракции Р-волны на подкрепленном квадратном отверстии, так же как для свободных полостей аналогичной формы, K_0 зависит от ориентации отверстия относительно фронта волны. Исследование дифракции волн около сводчатых подкрепленных отверстий показало, что характер процесса и величина K_0 для практического профиля полости (в исследованном диапазоне коротких волн) находятся в хорошем соответствии с данными, полученными для кругового и квадратного отверстий.

Дифракция плоской волны сжатия (импульс куполообразной формы длиной $\frac{\lambda}{2}$) на системе из двух круговых отверстий диаметра D при варьировании

расстояния между их центрами $\delta(\frac{\delta}{D} = 1,35 \pm 3,5)$, фронт волны оставался паралелен линии центров. Параметр $\frac{D}{\lambda} = 0,022$, т.е. исследовался случай очень длинных волн, когда для стационарного воздействия на одиночное отверстие K_0 равняется статическому значению.

Анализ результатов экспериментов показал, что при $\frac{\delta}{D} \geq 2$ отсутствует влияние отверстий друг на друга и соответствует статическому значению (в пределах погрешности эксперимента). При $\frac{\delta}{D} \geq 2,0$ динамический коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстий со стороны перемычки несколько (на 11%) превышает статический, на внешнем контуре он остается неизменным. Уменьшение δ ведет к росту K_0 на контуре отверстий, прилегающем к перемычке, причем в середине самой перемычки также зарегистрировано повышение напряжений.

В [92] было исследовано сеймонапряженное состояние породы вокруг системы четырех выработок различного сводчатого очертания напорного стационарного узла (НСУ) подземной ГЭС при воздействии продольных и поперечных сейсмических волн. Динамическое напряженное состояние определялось от воздействия волн, направленных перпендикулярно осям неподкрепленных выработок, и решалась задача о плоскодеформированном состоянии сложной многосвязной области с учетом наличия свободной границы (моделировался рельеф дневной поверхности над НСУ). Ввиду отсутствия информации о наиболее вероятных направлениях сейсмического воздействия были исследованы различные варианты таких направлений и построены эпюры огибающих максимальных напряжений.

Известно, что большинство грунтов при динамических воздействиях проявляют различные неупругие свойства, например многие связные грунты ведут себя как существенно вязкоупругая среда. Упругая идеализация при решении дифракционных задач для таких сред может оказаться недостаточно точной. В [62] представлены числовые результаты для случая дифракции ступенчатых волн растяжения и сдвига на бетонном цилиндре, помещенном в песчаник, который характеризуется свойствами стандартного линейного тела (рис.1.9). При расчетах принято следующее: относительная толщина обделки $\frac{h}{D} = 0,05$, отношение плотностей песчанника и бетона равняется 0,987. На рис 1.10-1.11 приводятся зависимости K_0 на свободной поверхности цилиндра для продольной и поперечной ступенчатых волн и двух предельных вариантов упругой реологической модели: релаксирующей и нерелаксирующей. Влияние вязкости окружающей среды заключается в увеличении (в некоторых окружающей очень резком) напряжений в обделке по сравнению со случаем линейно-упругой среды. Для рассмотренного числового примера такое увеличение достигает 400-500%.

Динамическое действие взрывов на выработки зависит от их взаимного расположения. Если взрывы производят близко от выработок, то волны отражаются от их поверхности и в массиве, окружающем выработку, появляются напряжения противоположного знака, т.е. растягивающие, если исходить из того, что основная энергия взрыва сосредоточена в фазе сжатия [47].

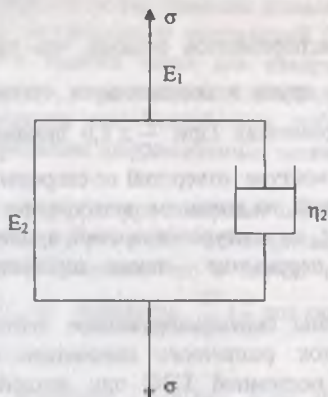


Рис. 1.9. Модель вязкоупругой среды (стандартное линейное тело).

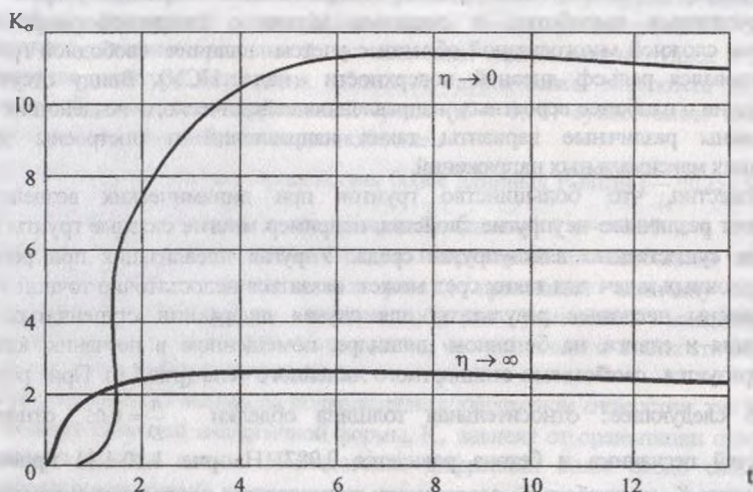


Рис. 1.10. Зависимость максимальных концентраций напряжений на внутренней поверхности полого кругового цилиндра, помещенного в вязкоупругую среду, от времени падения ступенчатой продольной волны.

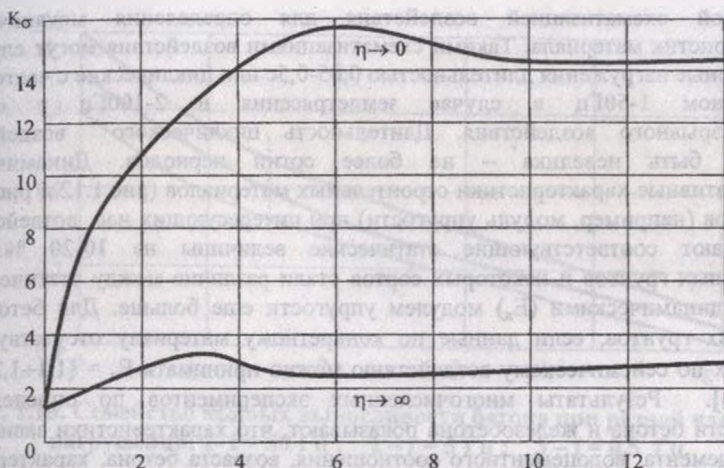


Рис.1.11. Зависимость максимальных концентраций напряжений на внутренней поверхности полого кругового цилиндра, помещенного в вязкоупругую среду, от времени падения ступенчатой поперечной волны.

1.7. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ТРУБОПРОВОД-ГРУНТ ИСПОЛЗУЕМЫЕ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Расчеты подземных сооружений на сейсмические воздействия требуют знания деформативно - прочностных характеристик конструкционных материалов и грунтов [9,10]. Известно, что механические свойства материалов при динамическом нагружении существенно зависят от скорости приложения нагрузки, а также таких параметров воздействия, как его частотная характеристика и длительность. Результаты динамических испытаний материалов, как правило, отличаются от результатов, полученных при статическом (квазистатическом) нагружении. Поскольку при воздействии сейсмических волн конструкции подвергаются существенно динамическому нагружению, при расчетах в рамках динамической теории следует использовать механические характеристики материалов, определенные в условиях соответствующих динамических испытаний. Прогнозирование основных параметров ожидаемого сейсмического воздействия землетрясения (в меньшей степени это относится также и к сейсмовзрывному воздействию) является ненадежным и не позволяет провести испытания материалов в условиях, соответствующих реальным нагружениям. Следовательно, необходимо задаться

некоторой схематизацией воздействия для определения механических характеристик материала. Такими схематизациями воздействия могут служить импульсные нагружения длительностью 0,05-0,5с или циклические с частотным диапазоном 1-50Гц в случае землетрясения и 2-100Гц в случае сейсмовзрывного воздействия. Длительность циклического воздействия должна быть невелика – не более сотни периодов. Динамические деформативные характеристики строительных материалов (рис.1.12 и рис 1.13) – грунтов (например, модуль упругости) при интересующих нас воздействиях превышают соответствующие статические величины на 10-20 %. Для пластичных грунтов и некоторых сортов стали различие между статическими ($E_{ст}$) и динамическими ($E_{д}$) модулем упругости еще больше. Для бетонов и скальных грунтов, если данные по конкретному материалу отсутствуют, в расчетах по сейсмическому воздействию можно принимать $E_{д} = (1,1 \div 1,2) E_{ст}$ [63, 83]. Результаты многочисленных экспериментов по определению прочности бетона и железобетона показывают, что характеристики зависят от марки цемента, водоцементного соотношения, возраста бетона, характеристик наполнителей, процента армирования и т.п. Общая тенденция однако вполне очевидна – прочность R (на сжатие, растяжение, на изгиб) различных сортов бетона с возрастом свыше 28 суток при импульсных воздействиях длительностью 0,05 – 0,5с превышают статическую на 8-15 %, а при циклическом воздействии с частотой 22-100 Гц и количестве циклов N до 50 % прочность превышает статическую на 5-12%, причем увеличение количества циклов ведет к снижению прочности.

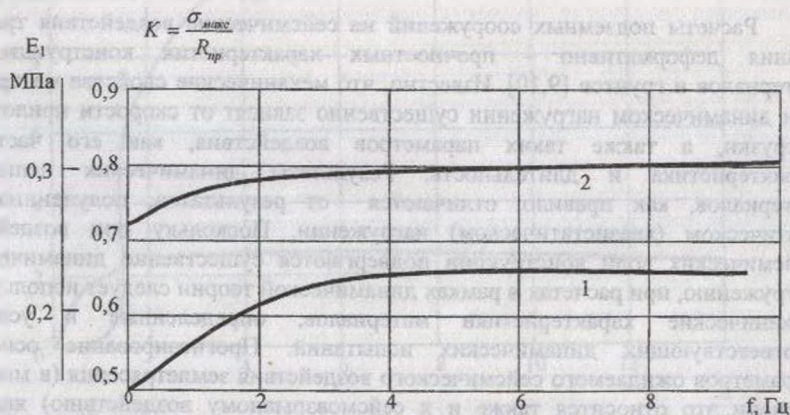


Рис.1.12. Влияние частоты приложения нагрузки на выносливость (кривая 1) и модуль упругости (кривая 2) бетона.

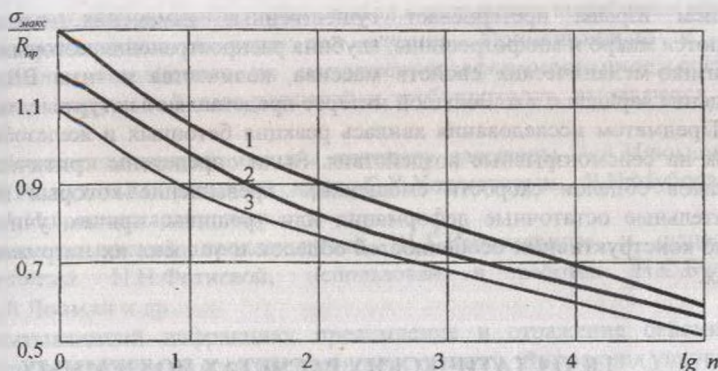


Рис. 1.13. Семейство кривых выносливости бетона при разной частоте нагружения: 1 - $f = 50$ Гц; 2 - $f = 5$ Гц; 3 - $f = 0,5$ Гц.

Связь прочностных характеристик с видом и параметрами нагружения существует и для грунтов, в частности, для горных пород [95, 63, 83]. В [95] приводятся результаты испытаний на циклические растяжения ряда скальных грунтов: мрамора, песчаника, габбро.

Статистическая обработка результатов показала, что для частоты воздействия 10 Гц может быть применена эмпирическая зависимость

$$\frac{R_{\text{дин}}}{R_{\text{ст}}} = 1,3 - 0,145 \lg N \quad (1.6)$$

При расчетах на прочность обделок туннелей по предельным состояниям вводятся коэффициенты капитальности и сочетаний $m_{\text{кс}}$, равные 0,95 для бетонных обделок, 1,0 для железобетонных и стальных обделок сооружений 1 класса капитальности и при особом сочетании нагрузок. Суммирование статических и сейсмических напряжений с методической точки зрения оправдано лишь при использовании принятой для подземных сооружений в настоящее время статической теории сейсмостойкости. При использовании динамических теорий (в особенности в рамках волнового подхода) такое суммирование является весьма условным. В нормативной и инструктивной литературе говорится только о расчете обделок на сейсмические воздействия. Никаких указаний о проверке целиков на прочность не приводится.

Однако в случае сближенных выработок чрезвычайно важно обеспечение сохранности межкамерных целиков. При решении вопроса о прочности массива (целиков) следует учитывать, что стены выработок, пройденных взрывным способом, значительно ослаблены. Этот вопрос исследовался неоднократно [117]. Как отмечают некоторые исследователи, приконтурный слой массива под

действием взрыва претерпевает существенные изменения, т.е. в нем появляются макро и микротрещины, глубина распространения которых зависит от физико-механических свойств массива, количества и типа ВВ, формы размещения зарядов и т.п. Большой интерес представляют натурные измерения [121]. Предметом исследования явилась реакция бетонных и железобетонных обделок на сейсмозрывные воздействия. Были определены критические для материалов обделок скорости смещений, превышение которых вызывает нежелательные остаточные деформации или трещины, причем учитывалось влияние конструктивных особенностей обделок и условия их нагружений при взрывах.

1.8. О СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ПОДЗЕМНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРУБ

Развитие в последние годы системы подземных коммуникаций в сейсмически активных районах потребовало проведения широких исследований. К основным подземным сооружениям относятся трубопроводы нефти и газа, системы водоснабжения и канализации, тоннели, подземные переходы, подземные выемки и подводные тоннели. Существующие аналитические решения, соответствующие многониточной укладке, не учитывают разнообразные факторы, встречающиеся в проектной практике: условия опирания труб, неоднородность грунта, форму и положение поверхностных нагрузок и т.д. Экспериментальные исследования по данной проблеме вообще отсутствуют. Применение круглых труб, уложенных в несколько ниток, не ограничиваются потребностями мелиоративного строительства, выполненные из таких материалов как бетон, железобетон, асбестоцемент, чугун и др. Многониточные трубопроводы используют для водоснабжения и канализации, дренажа, пропуска воды под насыпями автомобильных и железных дорог и т.д.

В настоящее время в нашей стране и за рубежом хорошо разработанными являются методики статического и динамического расчета одиночно уложенной трубы, которая без всякого изменения применяются проектными организациями и для расчета труб, уложенных в несколько ниток. Это связано с тем, что вопрос о работе труб многониточной укладки является малоизученным. Разработанные методика, программы и формулы расчета могут быть внедрены в практику проектирования подземных трубопроводов мелиоративного и гидротехнического назначения, а также систем водоснабжения и канализации. При землетрясениях, в зависимости от интенсивности сейсмического воздействия, подземные, сооружения получают повреждения разной степени - от незначительного сотрясения до заметных деформаций и полного разрушения. Так разрушительное Ташкентское землетрясение 1966 г. сопровождалось многочисленными

значительными обрушениями горных пород в подземных выработках угольных шахт, оказывающихся в зоне его влияния. Применительно к оценке динамического воздействия на напряженно-деформированное состояние подземных сооружений типа тоннелей и трубопроводов, выделяются разные подходы.

1. Сейсмодинамический, основы которого заложены А.А.Илюхиным и Т.Р.Рашидовым, развитый далее Г.Х.Хожметовым, Я.Н.Мубораковым, А.А.Ишонходжаевым и др.
2. Квазистатический предложенный Ш.Т.Напетваридзе и существенно развитый Н.Н.Фотиевой, использован в работах Н.С.Булычева, И.Я.Лопман и др.
3. Учитывающий дифракцию, преломление и отражение сейсмических волн на подземные сооружения и конструкции. Дифракция упругих волн на полостях и неоднородностях рассмотрена в работах А.Н.Гузя, В.Г.Головчани, В.Д.Кубенко, А.Н.Шульги, В.Б.Поручикова, Б.Н.Мардонова, М.Ш.Исроилова, И.И.Сафарова и др.

Аналитические решения. В первые плоская задача об определении статического давления грунта на одиночную трубу, уложенную в насыпи или в траншее, была поставлена и решена в начале XX века.

Это решение основано на теории предельного равновесия сыпучей среды, при наличии определенных допущений. Применительно к жесткой трубе, уложенной в насыпи, теория Марстона А. утверждает следующее: из-за резкой сжимаемости жесткой трубы и находящейся рядом с ней засыпкой происходят разные соединения выше лежащих масс грунта над этой засыпкой и непосредственно над самим сооружением. При этом в состоянии предельного равновесия засыпки, находящейся выше сооружения, образуются вертикальные плоскости скольжения, касательные к трубе, которые либо доходят до поверхности земли (в случае низкой насыпи), либо до некоторого уровня, расположенного ниже дневной поверхности (случай высокой насыпи). Этот уровень был назван «уровнем равной осадки». Кроме веса насыпи, находящейся над сооружением, на него передается еще дополнительная нагрузка от сил трения, действующих по плоскостям скольжения. Основываясь на этих предположениях, А.Марстон составил обыкновенное дифференциальное уравнение равновесия элемента насыпи малой толщины, ограниченного плоскостями скольжения. В равном осадке давления насыпи распределяется по гидростатическому закону.

У этой теории было много последователей. К ним относятся такие зарубежные исследователи, как: Шпенглер М.Г., Шлик В.Д., Кларк Н.В., Марквард Е., Зеки К., Геррен А., Лазард Р. [2,35,37] и др. В формулах Марстона А. они уточняли и вводили новые коэффициенты, учитывающие условия опирания трубы, а также разную сжимаемость материала трубы и грунтов засыпки и основания. В отличие от Марстона А., Фельми А. предложил рассматривать не вертикальные плоскости скольжения, а наклоненные под углом внутреннего трения в сторону противоположную от места положения трубы.

Значительный вклад в определении давления грунта на трубы по теории предельного равновесия были сделаны отечественными учеными.

В [39] предложен закон изменения сил трения по плоскостям скольжения пропорциональным весу засыпки над трубой. Клейн Г.К. считал, что боковое давление и сила трения по плоскостям скольжения возрастают с глубиной по экспоненциальному закону. В [48] имеются упоминания об исследованиях, принимающие поверхности скольжения не прямолинейными, а криволинейными, что подтверждается, в частности, исследованиями [50, 68], в которых считается, что конфигурация линий скольжения зависит от высоты насыпи. Анализ работ перечисленных исследований показал, что уровень равной осадки расположен в среднем, на расстоянии 2,5-3 диаметра от верха трубы. По данным [50,68,73], теория Марстона А. дает завышенные значения вертикального давления грунта на трубу по сравнению с результатами эксперимента. В своей статье [127] прямо указал: «Для определения давления грунта на практике в основном применяется решение теории предельного равновесия, к которому механически добавляются совместности деформации трубопровода, окружающей его засыпки и основания. Избежать этого противоречия можно только с предельного равновесия к решениям по теории упругости, уже нашедшей широкое применение в других задачах механики грунтов и геотехники». Того же мнения придерживаются и ряд др. авторов. Все рассмотренные исследования по теории предельного равновесия относятся только к расчету трубопроводов, уложенных в одну нитку. В работе [136] впервые рассмотрена задача о давлении грунта на трубы, уложенные в две нитки в насыпи или в траншее. Ее решение, основанное на теории Янсона позволило в частности, получить важный вывод: давление грунта насыпи в замке железобетонных труб двухниточной укладки меньше, чем в замке одиночно уложенной трубы.

Впервые решение по теории упругости было применено к расчету трубопроводов в насыпях [51], который использовал решение Иванова С.А., решившего задачу о деформируемости кольца под действием нормальной и касательной нагрузок. Другая формула расчета трубопровода в насыпи была получена [39, 48], который для определения напряженного состояния грунта вблизи поверхности трубы исходил из решения для плоской задачи о растянутой в одном направлении бесконечной пластинки, в которую впаяна упругая шайба. Для перехода от сплошной шайбы к трубе в условиях плоской деформации Клейн Г.К. исходил из условия равенства укорочения вертикальных диаметров.

В работа [72,76,80,92] получено решение для задачи о давлении плоской весомой среды на цилиндрическую трубу. Вначале решена задача о напряженном состоянии весомой среды, ослабленной отверстиями, используя функцию напряжений, а усилия в трубе определены методом сил. Такое решение, в частности позволяет рассчитывать трубы, имеющие в поперечном сечении шарниры.

В работе [77] поставлена и решена задача о сжатии в двух направлениях упругой плоско деформирующейся бесконечной невесомой среды, в которую либо впаяно (без проскальзывания), либо вставлено кольцо.

Следует отметить, что аналогичные решения теории упругости (плоская деформация) применяют и для расчета обделок тоннелей. Сюда следует отнести работу [135,190], рассматривающую, аналогично Малышеву М.В. и Орлову С.А., задачу о давлении весомой среды на упругое кольцо. Бялер И.Я. рассмотрел плоскую задачу в биполярных координатах. Случай проскальзывания и спаянности кольца в весомой среде рассмотрел Хартман Ф.

Для расчета обделок также применялось решение задачи о двухстороннем сжатии невесомой плоской упругой бесконечной среды, в которую впаяно кольцо. Известно большое количество ряда авторов, имеющих приложения в других отраслях техники, которые с успехом могут быть применены к расчету подземных трубопроводов. Эти работы посвящены изучению распределения напряжений в пластинке, ослабленной подкрепленным отверстием, работающей в условиях плоской деформации.

К наиболее значительным исследованиям в этой области можно отнести работу, решившую задачу в растяжении пластинки, в которую вложено или впаяно кольцо.

Упомянутые авторы пользовались, так называемыми, "классическими методами" плоской теории линейной упругости, основанными на развитии метода Колосова, Мусхелишвили [122] и использовании теории функций комплексного переменного.

Таким образом для расчета подземного трубопровода уложенного в одну нитку применяются две расчетные модели теории упругости в условиях плоской деформации:

1. Весомая упругая среда, содержащая кольцо;
2. Сжатая невесомая среда;

Граничные условия на контуре трубы могут варьироваться для обеих моделей, а именно: для кольца закреплено в среде (без проскальзывания). Граничные условия на внешнем контуре тела насыпи для первой модели заканчиваются в том, что верхняя горизонтальная граница свободна от внешних воздействий, а для второй модели - вдоль контура действует сжимающая нагрузка в одном или в двух направлениях.

В работах [57,38] отмечается, что первая модель применима для труб, расположенных на глубине не более чем от поверхности насыпи (случай низкой насыпи), а вторая модель - на заглубленных трубопроводах (случай высокой насыпи).

Анализ полученных решений для второй модели показывает, что если нагрузка приложена выше некоторого уровня, то коэффициент концентрации статического давления грунта (отношение статического давления грунта на трубу к приложенной на внешней уровень нагрузке) остается постоянным. Для жесткой трубы этот уровень обычно находится на расстоянии 2,5 (1-3,0) от верха

трубы и является, таким образом, границей между высокой и низкой насыпью. Этот частный результат, полученный по теории упругости, является одним из основных положений теории Марстона А. Кроме того, подсчитано, что в случае проскальзывания грунта по поверхности жесткой трубы, он больше, чем в случае без проскальзывания, в то же время в боковых частях замечено обратное явление. Согласно полученным решениям также установлено, что с увеличением коэффициента Пуассона (грунта насыпи) уменьшается давление грунта, приходящееся на трубу. Существенными недостатками обеих моделей является следующее:

- не учитывается многониточность укладки труб;
- не учитывается пространственная работа труб;
- не учитываются разнообразные факторы, встречающиеся в проектной практике: условия опирания труб, неоднородность грунта, форма и положение поверхностной нагрузки.

Кроме того, остается невыясненным вопрос с применимости этих решений для расчета подземных трубопроводов, учитывая, что грунт не является линейно-упругим материалом. Рассмотрим работы, касающиеся расчета трубопроводов, уложенных в насыпи в несколько ниток. В настоящее время в проектных организациях расчет таких трубопроводов производится также, как и для одиночно уложенной трубы. Тем не менее, существуют решения, которые можно применить и для этой проблемы. Известно, например, решение [45] для расчета двух и трех параллельных тоннельных обделок кругового очертания, подверженных давлению горной породы [126]. При решении задачи о сжатии в двух направлениях плоскодеформируемой среды, ослабленной несколькими подкрепленными отверстиями, Бялер И.Я. применил метод последовательных приближений, основанный на "обобщенном алгоритме Шварца" и разработанный Соболевым С.Л. и Михлиным С.Г. На основании проведенных расчетов Бялер И.Я. пришел к тому что, напряжения на контуре труб практически не зависят от расстояния между ними, чего нельзя сказать о напряжениях в грунтовой среде.

На основании первого вывода он приходит к заключению о том, что при расчете труб, уложенных в несколько ниток, можно пользоваться решением для одиночной трубы. Фотиева Н.Н. [122], используя решение Шермана Д.И., разработала программу по квазистатическому расчету двух параллельных панелей. Ею рассматривалась задача о напряжениях, возникающих в весомай упругой среде с двумя подкрепленными или неподкрепленными круговыми отверстиями. Как и в случае с одиночной трубой, для расчета труб, уложенных в насыпи в несколько ниток, могут быть использованы решения других авторов, которые не нашли применения в данной проблеме. Сюда можно отнести работы по определению напряженно-деформированного состояния в пластине, ослабленной рядом круговых подкрепленных отверстий.

Решения, основанные на численных методах. Среди наиболее употребительных вычисленных методов, применяемых при расчете подземных трубопроводов и тоннельных конструкций метод сеток. Используя этот метод, Чече А.А. решил плоскую задачу теории упругости для одиночного подземного трубопровода при различных условиях его опирания: на плоское основание и спрофилированное напряжение. Кроме того, используя метод упругих решений, он вывел конечно - разностные уравнения для статического расчета замкнутого кольца, находящегося внутри упруго-пластической полуплоскости. К вариационно-разностным методам относятся: метод Бубнова Галеркина, метод Рунге и метод конечных элементов. Остановимся на последнем, который нашел в настоящее время широкое распространение для решения практических инженерных задач. При проведении расчетов производилась неравномерная разбивка расчетной области на прямоугольные и треугольные конечные элементы. Эта разбивка стучалась по мере приближения к зоне грунта прилегающей к трубе. В [124] работе рассматривалась арочная железобетонная труба, в других работах [123, 125] железобетонные трубы кругового очертания. В статьях [133, 112] рассмотрено опирание трубы на спрофилированное основание. Кроме того, во всех работах американских авторов учтены разные упругие характеристики грунта.

ГЛАВА II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ СО СРЕДОЙ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

2. 1. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СРЕДОЙ

В цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ рассматривается изотропное упругое тело V , состоящее из кусочно-однородных цилиндрических тел $V_k (k = 1, N)$ (рис.2.1). Тело V погружено в однородную упругую среду. Между кусками ставятся условия жесткого или скользящего контакта. Кусочно-однородное тело и окружающая среда характеризуется следующими параметрами [75,85,106,107]:

$$c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}; \quad c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}; \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где, c_{pj} — скорость продольных волн j -го куска; c_{sj} — скорость поперечных волн j -го куска; ρ_j — плотность; λ_k, μ_k — коэффициенты упругости Ляме.

Связь между компонентами тензора напряжений и деформаций выражается формулой

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (2.1)$$

где, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; δ_{ij} — символ кронекера; θ — объемная деформация; ε_{ij} — тензор деформаций. Линейное уравнение движения в векторной форме при отсутствии объемных сил имеет вид:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

где, $\vec{u}$ — вектор перемещений; ρ — плотность среды. Если вектор перемещений представить в виде суммы потенциальной и соленоидальной частей [44], то

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi}, \quad \text{div } \vec{\psi} = 0 \quad (2.3)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) получим

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } (\text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi}) + \mu \nabla^2 (\text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi})$$

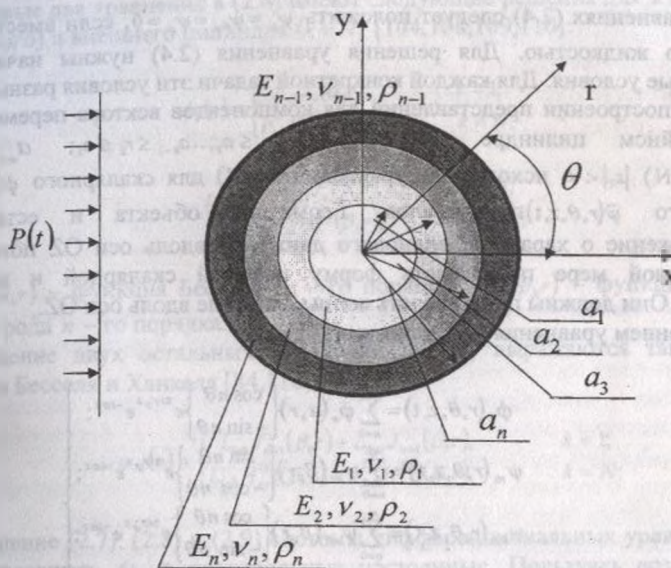


Рис. 2.1. Расчетная схема кусочно-однородного цилиндрического тела.

Так как $\text{div grad} = \nabla^2$, $\text{div rot} = 0$, то из (2.5) найдем

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi_k - \frac{1}{c_{\pi}^2} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2} &= 0; \\
 \Delta \psi_{\alpha} - \frac{1}{c_{\pi}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\alpha}}{\partial t^2} &= 0; \\
 \Delta \psi_{\alpha} - \frac{\psi_{\alpha k}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \theta} - \frac{1}{c_{\pi k}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\alpha}}{\partial t^2} &= 0; \\
 \Delta \psi_{\theta k} - \frac{\psi_{\theta k}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{c_{\pi k}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\theta}}{\partial t^2} &= 0; \\
 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\
 u_{rk} &= \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{\alpha k}}{\partial z}; \\
 u_{\alpha k} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_k}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{\alpha k}}{\partial r}; \\
 u_{\theta k} &= \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{\alpha k}}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial \theta};
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$k = 1, 2, \dots, N$

В уравнениях (2.4) следует положить $\psi_j = \psi_{\theta j} = \psi_{\varphi j} = 0$, если вместо j -тело заполнено жидкостью. Для решения уравнения (2.4) нужны начальные и граничные условия. Для каждой конкретной задачи эти условия разные.

При построении представлений для компонентов вектора перемещений в многослойном цилиндре $0 < r_1 \leq a_1$; $a_1 \leq r_2 \leq a_2$; ... $a_{N-1} \leq r_N \leq a_N$; $a_N \leq r \leq \infty$ ($k=1,2,\dots,N$) $|z_1| < \infty$ исходим из уравнений (2.4) для скалярного $\phi(r, \theta, z, t)$ и векторного $\vec{\varphi}(r, \theta, z, t)$ потенциалов. Геометрия объекта и естественное предположение о характере волнового движения вдоль оси OZ позволяют в значительной мере предугадать форму искомой скалярной и векторной функции. Они должны представлять волны, бегущие вдоль оси OZ.

Решением уравнения (2.4) примем [26]:

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\alpha_k, r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_k r^2} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{rk}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{rn}(\beta_k, r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_k r^2} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{\theta k}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n\theta}(\beta_k, r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_k r^2} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{zk}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{zn}(\beta_k, r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_k r^2} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где, n — целое число; γ_k — постоянная величина распространения;

ω — собственная частота; $r = r_1/a_0$, $z = z_1/a_0$. На бесконечности ($r \rightarrow \infty$) ставятся условия Зоммерфельда для каждого компонента. Подставляя (2.5) в (2.4) получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \phi_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_k}{dr} + \left(\alpha_k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi_k &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{zk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{zk}}{dr} + \left(\beta_k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \psi_{zk} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_{rk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{rk}}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 \psi_{rk} + 2n \psi_{\theta k} - \psi_{\theta k}) \beta_k^2 \psi_{rk} &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{\theta k}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{\theta k}}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 \psi_{\theta k} + 2n \psi_{rk} - \psi_{rk}) \beta_k^2 \psi_{\theta k} &= 0; \end{aligned}$$

где,

$$\alpha_k^2 = \frac{\Omega_k^2}{\gamma_k^2} - \gamma_p^2; \quad \beta_k^2 = \Omega_k^2 - \gamma_p^2; \quad \Omega_k = \frac{\omega a_k}{c_{sk}}; \quad \gamma_k^2 = \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k}.$$

Первые два уравнения в (2.6) имеют следующие решения для $k=1$ первого (сплошного) и внешнего цилиндра ($k=N$) [104,108,109,110]:

$$\phi_k(r) = \begin{cases} F_{nk} J_n(\alpha_k r), & k=1; \\ F'_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k r), & k=N; \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\psi_k(r) = \begin{cases} M_{1k} J_n(\beta_k r), & k=1; \\ M'_{1k} H_n^{(1)}(\beta_k r), & k=N; \end{cases} \quad (2.8)$$

где, $J_n(\alpha_k r)$ – функция Бесселя n – го порядка; $H_n^{(1)}(\beta_k r)$ – функция Ханкеля первого рода n – го порядка.

Решение двух остальных уравнений в (2.6) выражаются также через функции Бесселя и Ханкеля [84,118,119]:

$$\psi_{rk}(r) = \begin{cases} L_{1nk} J_{n-1}(\beta_k r) + L_{2nk} J_{n+1}(\beta_k r), & k=1; \\ L'_{1nk} H_{n-1}^{(1)}(\beta_k r) + L'_{2nk} H_{n+1}^{(2)}(\beta_k r), & k=N; \end{cases} \quad (2.9)$$

Решение (2.7), (2.8) и (2.9) системы дифференциальных уравнений (2.8) будет содержать $6k-2$ произвольные постоянные. Пользуясь возможностью поступить в значительной мере произвольно при выборе значений одной из постоянных полагаем [85], далее $L_{1k} = L'_{1k} = 0$, т.е. $\psi_{rk} = \psi_{rk}$. Это удобно с точки зрения последующего удовлетворения граничных условий на k -ой цилиндрической поверхности. При этом условия сопряжения на границе принимают вид:

$$\begin{aligned} M_r^{(k-1)}|_{r=r_0} &= M_r^{(k)}|_{r=r_0}; & M_\theta^{(k-1)}|_{r=r_0} &= M_\theta^{(k)}|_{r=r_0}; \\ M_z^{(k-1)}|_{r=r_0} &= M_z^{(k)}|_{r=r_0}; & \sigma_{rr}^{(k-1)}|_{r=r_0} &= \sigma_{rr}^{(k)}|_{r=r_0}; \\ \sigma_{r\theta}^{(k-1)}|_{r=r_0} &= \sigma_{r\theta}^{(k)}|_{r=r_0}; & \sigma_{rz}^{(k-1)}|_{r=r_0} &= \sigma_{rz}^{(k)}|_{r=r_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

для полного контакта, а для гладкого контакта касательного напряжения приравняются к нулю.

Если первый цилиндр полный, тогда при $r=0$ ставятся условия ограниченности силовых факторов. Если полый цилиндр, тогда на свободной поверхности ставятся однородные граничные условия.

Чтобы полностью замкнуть постановку задачи, необходимо к условиям (2.10) добавить условия на бесконечности

$$u \rightarrow 0 \text{ при } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

дополненные некоторыми условиями излучения. Для нестационарных задач в качестве условий излучения требуется выполнение принципа причинности: в среде должны отсутствовать перемещения вне области, ограниченной передним фронтом волн, идущих от источников колебаний.

Для установившихся гармонических колебаний $\bar{u} = \bar{u}_0 e^{-i\omega t}$ уравнения относительно комплексной амплитуды $u(x, y, z)$ принимают вид:

$$\mu \nabla^2 \bar{u}_0 + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u}_0 + \omega^2 \rho \bar{u}_0 = 0 \quad (2.12)$$

Граничные условия на границе раздела слоев (2.10) и на бесконечности (2.11) по форме остаются прежними, а в качестве условий излучения может быть использован один из следующих принципов:

1. Принцип Зоммерфельда: в решении удерживаются составляющие, описывающие волны, уходящие от источника в бесконечность, и отбрасываются те, скорость которых направлена к источнику.
2. Принцип излучения энергии (принцип Мандельштама): поток энергии в среде должен быть направлен от источников в бесконечность.
3. Принцип предельного поглощения: в качестве решения задачи для идеально упругой среды берется равномерный по всем параметрам предел решения соответствующей задачи.
4. Принцип предельной амплитуды: в качестве решения гармонической задачи берется предел при $t \rightarrow \infty$ нестационарной задачи с нулевыми начальными и гармоническими граничными условиями.

Вопрос об эквивалентности этих принципов в общем случае до конца не решен. Известны примеры, когда они приводят к различным результатам "обратная волна" в слое, [139].

Рассмотрение волновых движений при полном или гладком контакте k -ой цилиндрической поверхности, приводит к однородной линейной системе (8N) уравнений с (8N) неизвестными. Условия существования ее нетривиального решения определяет дисперсионным соотношением, связывающее допустимые значения γ и ω .

Аргументами функций Бесселя и Ханкеля в выражениях (2.7)-(2.9) являются многозначные функции

$$\alpha_k = \left(\frac{\Omega^2}{\gamma_k^2} - \gamma_p^2 \right)^{1/2}; \quad \beta_k = (\Omega^2 - \gamma_p^2)^{1/2}$$

Из анализа дисперсионного уравнения однослойного цилиндра [85] следует, что при любом выборе ветвей однозначности этих функций само уравнение не меняется [119].

При установившихся вынужденных колебаниях на свободной поверхности первого цилиндра действует гармоническая нагрузка в виде

$$\sigma_{\pi}|_{r=a_0} = f_1 = P_1(\bar{x})e^{i\Omega t}; \quad \sigma_{r\theta}|_{r=a_0} = f_2 = P_2(\bar{x})e^{i\Omega t}; \quad \sigma_{\pi}|_{r=a_0} = f_3 = P_3(\bar{x})e^{i\Omega t}, \quad (2.13)$$

где P_1, P_2, P_3 - амплитуда внешних нагрузок; Ω - заданная действительная частота. Рассмотренная проблема в частном случае может быть сведена к задаче плоского деформируемого состояния ($f_i = f_i(r, \theta)$, $i = 1, 2, 3$). Решение уравнения (2.8) ищется в виде [119]:

$$\begin{bmatrix} \phi_i(x, t) \\ \psi_i(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i(x) \\ \psi_i(x) \end{bmatrix} e^{i\Omega t}. \quad (2.14, a)$$

На бесконечности ($r \rightarrow \infty$) ставятся полные условия излучения Зоммерфельда для каждого компонента ϕ и ψ .

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r\phi &= \text{const} & \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik_1 \phi \right) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r\psi &= \text{const} & \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - ik_1 \psi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.14, b)$$

На контакте k -ой поверхности ставятся условия жесткого контакта (2.10). Рассмотрение установившегося многослойного кусочно-однородного цилиндра приводит к неоднородной линейной системе 6N уравнений для постоянных $F_{12k}, F_{22k}, L_{12k}, L_{22k}, L'_{12k}, L'_{22k}$. Система неоднородных алгебраических уравнений решается методом Гаусса с выделением главного элемента. Исследуются амплитуды перемещений и напряжений в зависимости от частоты [85]. Основной целью задачи является изучение резонансных процессов, возникающих в системе при воздействии гармонических нагрузок.

На границе раздела Γ можно задавать три типа условия (рис.2.1): В случае жесткого контакта на границе раздела Γ ставятся условия непрерывности, соответствующих составляющих напряжений и вектора перемещений, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{(1)} &= \sigma_{nn}^{(2)}, & \sigma_{n\theta_1}^{(1)} &= \sigma_{n\theta_1}^{(2)}, & \sigma_{n\theta_2}^{(1)} &= \sigma_{n\theta_2}^{(2)} \\ u_n^{(1)} &= u_n^{(2)}, & u_{\theta_1}^{(1)} &= u_{\theta_1}^{(2)}, & u_{\theta_2}^{(1)} &= u_{\theta_2}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.15, a)$$

Если на Γ не учитывается трение, то

$$\sigma_{nn}^{(1)} = \sigma_{nn}^{(2)}, \quad \sigma_{ns_1}^{(1)} = \sigma_{ns_1}^{(2)} = \sigma_{ns_2}^{(1)} = \sigma_{ns_2}^{(2)} = 0, \quad u_n^{(1)} = u_n^{(2)} \quad (2.15,6)$$

3. Если на Γ учитывается трение, то

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{(1)} &= \sigma_{nn}^{(2)}, & \sigma_{ns_1}^{(1)} &= \sigma_{ns_2}^{(1)} = k\sigma_{nn}^{(1)}, \\ \sigma_{ns_1}^{(2)} &= \sigma_{ns_2}^{(2)} = k\sigma_{nn}^{(2)}, & u_n^{(1)} &= u_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.15,в)$$

где, σ_{ns} , σ_{nn} – касательные и нормальные напряжения; n, s – нормаль и касательная к Γ ; $|k|$ – коэффициент трения.

Уравнение движения каждого слоя записывается в потенциалах перемещения:

$$\nabla \varphi_i - \frac{1}{C_{pi}^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = f_{1i}(\vec{x}_i), \quad \nabla \bar{\psi}_i - \frac{1}{C_{si}^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial t^2} = f_{2i}(\vec{x}_i) \quad (2.16)$$

Для решения (2.16) необходимы условия на контакте (2.10) и на бесконечности (2.14,б).

Собственные колебания тел находящихся в упругой среде. Идеальное упругое тело не имеет потерь. Такое тело характеризуется линейной однозначной связью между напряжением и деформацией, которые всегда находятся на фазе. Есть напряжение и деформация, которые не связаны однозначной зависимостью в течении периода колебаний, тогда происходит диссипация энергии упругой волны. Отсутствие такой однозначной зависимости между напряжением и деформацией возникает, когда в уравнении, связывающем напряжение и деформацию, появляются временные производные напряжения и (или) деформации. Есть и уравнения, которые линейны относительно напряжения и деформации, а наличие временных производных всегда связано с диссипацией. При переменном напряжении возникает эффект гистерезиса. Это означает, что в диапазоне частот, в котором затухание имеет заметную величину, деформация отстает от напряжения.

Затухание упругих волн в твердом теле вызывается пространственными различиями в упругих свойствах. Различия в упругих свойствах и плотности вызываются разнообразными причинами, представляющими интерес при исследовании свойств твердого тела, а также в области сейсмических колебаний включений (вибрационная техника). Эти различия могут быть связаны с дефектами или группами дефектов: такими как, границы зерен, включения упругой фазы, неоднородности состава, стенки магнитных доменов, и до дефектов атомных масштабов. В общем любая неоднородность будет представлять

атомных масштабов. В общем любая неоднородность будет представлять собой центр затухания (или рассеяния), и с повышением частоты упругих волн появляется возможность обнаруживать дефекты все меньших и меньших размеров и в меньшем количестве.

Для исследования собственных колебаний различных неоднородностей, находящихся в упругой безграничной среде, на бесконечности ставятся условия излучения Зоммерфельда (2.14,6). Из [139] известно что, условие Зоммерфельда не обеспечивает единственности и устойчивости решения задачи. Поэтому разрабатывать альтернативные граничные условия для решения задачи необходимо. Решение уравнения (2.16) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\psi} \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\psi} \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad (2.17)$$

где $\omega = \omega_R + i\omega_I$ - комплексная собственная частота; которую необходимо определить. На бесконечности в место условия излучения Зоммерфельда (2.14,6) ставятся условия не отражающих границ (специально разработанных условий) [45,59,61].

Гармонические колебания. Воздействия правых частей уравнений (2.16) и граничных условий на полости гармонические по времени, т.е., эти уравнения имеют общий множитель $e^{-i\Omega t}$, Ω - заданная действительная частота

$$\begin{pmatrix} f_k \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_k \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \end{pmatrix} e^{-i\Omega t} \quad (k=1,2) \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.16) ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\psi} \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\psi} \left(\frac{\bar{x}}{x} \right) \end{pmatrix} e^{-i\Omega t} \quad (2.19)$$

На бесконечности полные условия Зоммерфельда для каждого компонента φ, ψ . [33,34,44].

2.2. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ХАНКЕЛЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Как известно, функции Бесселя от комплексного аргумента могут быть представлены разложением в ряды [22]:

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2k}}{K! \Gamma(n+k+1)}$$

Если $z = \rho e^{i\varphi}$, то для функции $I_n(\rho e^{i\varphi})$ справедливо разложение

$$I_n(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{n+2k}}{K! \Gamma(n+k+1)} e^{i\varphi(n+2k)} = \operatorname{Re} I_n(\rho, \varphi) + i \operatorname{Im} I_n(\rho, \varphi),$$

где,

$$\operatorname{Re} I_n(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2k}}{K! \Gamma(n+k+1)} \cos(\varphi(n+2k)) \quad (2.20)$$

$$\operatorname{Im} I_n(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2k}}{K! \Gamma(n+k+1)} \sin(\varphi(n+2k)) \quad (2.21)$$

Ряды (2.20) и (2.21), очевидно, сходятся, и тем быстрее, чем меньше ρ . Для $\rho \leq 10$ достаточно взять по 10 членов в каждом ряду, отбросив остальные слагаемые, так как их вклад в сумму ряда не превышает половины единицы седьмого десятичного знака после запятой.

Представив в виде ряда функцию Неймана:

$$\begin{aligned} Y_n(\rho e^{i\varphi}) = & -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{K!} \left(\frac{\rho}{K}\right)^{2k-n} [\cos(2k-n)\varphi + i \sin(2k-n)\varphi] + \\ & + \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{\rho}{2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) \right] I_n(\rho e^{i\varphi}) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \varphi(k+1) + \varphi(n+k+1) \} * \\ & * \frac{(-1)^k}{K! (n+k)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+n} [\cos(2k+n)\varphi + i \sin(2k+n)\varphi] \end{aligned}$$

Если мы ограничимся суммами ($n=1$)

$$\operatorname{Re} Y_n(\rho, \varphi) = \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{Re} I_n(\rho, \varphi) \left\{ \gamma + \ln \frac{\rho}{2} \right\} - \right. \\ \left. - \operatorname{Im} I_n(\rho, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k!)^2} \cos 2k\varphi \right]$$

то абсолютная погрешность вычисления $\operatorname{Re} Y_n(\rho, \varphi) \operatorname{Im} Y_n(\rho, \varphi)$ ($n \leq 6$) не будет превышать шестого знака после запятой.

Функции Ханкеля $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(2)}(z)$ получим по формулам

$$H_n^{(1)(2)}(z) = I_n(z) \pm i Y_n(z). \quad (2.22)$$

Оператор обращения к подпрограмме имеет вид:

$$CALL _BSEL(m, R0, C11, CNZ, FI),$$

где,

m – порядок функции Бесселя и Неймана;

$$R0 = \rho, \quad FI = \varphi, \quad C11 = I_n, \quad CNZ = N_n.$$

Приведем некоторые замечания относительно практической реализации сферических функций Бесселя $I_m(\omega)$ и Неймана $Y_m(\omega)$ ($m=0, 1, 2, \dots$). Так как значение функции Бесселя $I_m(\omega)$ при $m > \omega$ с увеличением индекса m быстро уменьшается, то ее приходится вычислять в направлении уменьшения индекса m . Для проведения такого расчета необходимы значения функции $j_m(\omega)$ при двух наибольших рассматриваемых значениях индекса: $m = M+1$, $m = M$. Во избежание этой трудности, введем вспомогательную функцию $j_m^*(\omega)$ и зададим два значения этой функции в форме

$$j_{m+1}^*(\omega) = 0, \quad j_M^*(\omega) = \varepsilon,$$

где, ε – абсолютная погрешность результатов расчета, величина которой задается в зависимости от требуемой точности, а стартовый индекс $N \geq M$ подбирается по формуле

$$\frac{(2\omega)^N N!}{(2N+1)!} = \varepsilon.$$

Далее, начиная от стартового индекса N вычислим значения вспомогательной функции $j_m^*(\omega)$ до индекса $m=0$:

$$j_m' = \frac{2m+\varepsilon}{\omega} j_{m+1}'(\omega) - j_{m+2}'(\omega)$$

Значения сферических функций Бесселя определим по соотношениям

$$j_m(\omega) = \frac{j_0(\omega)}{j_0'(\omega)} j_m'(\omega), \quad j_0(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega},$$

а функции Неймана — в направлении роста индекса по формуле

$$h_m(\omega) = \frac{2m-1}{\omega} h_{m-1}(\omega) - h_{m-2}(\omega).$$

Двумя первыми индексами здесь являются $m=0$ и $m=1$, причем

$$h_0(\omega) = -\frac{\cos \omega}{\omega}, \quad h_1(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega} - \frac{\cos \omega}{\omega^2}.$$

Производные от функции Бесселя и Неймана по аргументу ω вычисляются по формулам:

$$j_m'(\omega) = \frac{dj_m(\omega)}{d\omega} = j_{m-1}(\omega) - \frac{m+1}{\omega} j_m(\omega),$$

$$h_m'(\omega) = \frac{dh_m(\omega)}{d\omega} = h_{m-1}(\omega) - \frac{m+1}{\omega} h_m(\omega).$$

Некоторые значения вычисления функции Бесселя комплексного аргумента приведены в таблицах 2.1-2.3. При $\varphi=0$ мнимые части комплексных функций Бесселя равны нулю. Значения функции Бесселя при $\varphi=5^\circ$ и $\varphi=80^\circ$ приведены в таблице 2.2 и 2.3.

В настоящей работе предлагается следующий путь решения задачи о собственных значениях комплексного матричного уравнения

$$|[\bar{C}] - \omega^2[A]| = 0, \quad (2.23)$$

где, $[C]$ — комплексная матрица, элементы которой имеют вид

$$\bar{C}_{ij}(\omega_R) = C_{Rij}(\omega) + C_{Iij}(\omega),$$

где, $[A]$ — симметричная действительная матрица; ω_R — действительная величина.

Функции $J_0(\rho e^{i\varphi})$ и $J_1(\rho e^{i\varphi})$ при $\varphi = 0$.

Таблица 2.1.

ρ	$J_0(\rho e^{i\varphi})$		$J_1(\rho e^{i\varphi})$	
	Re	Im	Re	Im
0.00	+1	0	0	0
.01	+0.99997 50002	0	+0.00499 99375	0
.02	+0.99990 00025	0	+0.00999 95000	0
.03	+0.99977 50127	0	+0.01499 83126	0
.04	+0.99960 00400	0	+0.01999 60003	0
0.05	+0.99937 50976	0	+0.02499 21883	0
.06	+0.99910 02025	0	+0.02998 65020	0
.07	+0.99877 53751	0	+0.03497 85669	0
.08	+0.99840 06399	0	+0.03996 80085	0
.09	+0.99797 60249	0	+0.04495 44529	0
0.10	+0.99750 15621	0	+0.04993 75260	0
.11	+0.99697 72869	0	+0.05491 68544	0
.12	+0.99640 32387	0	+0.05989 20648	0
.13	+0.99577 94606	0	+0.06486 27842	0
.14	+0.99510 59992	0	+0.06982 86400	0
0.15	+0.99438 29052	0	+0.07478 92602	0
.16	+0.99361 02327	0	+0.07974 42729	0
.17	+0.99278 80397	0	+0.08469 33070	0
.18	+0.99191 63877	0	+0.08963 59917	0
.19	+0.99099 53422	0	+0.09457 19568	0
0.20	+0.99002 49722	0	+0.09950 08326	0
.21	+0.98900 53505	0	+0.10442 22501	0
.22	+0.98793 65533	0	+0.10933 58407	0
.23	+0.98681 86610	0	+0.11424 12368	0
.24	+0.98565 17571	0	+0.11913 80711	0
0.25	+0.98443 59293	0	+0.12402 59773	0
.26	+0.98317 12686	0	+0.12890 45898	0
.27	+0.98185 78697	0	+0.13377 35435	0
.28	+0.98049 58311	0	+0.13863 24746	0
.29	+0.97908 52548	0	+0.14348 10196	0

продолжение табл. 2.1.

ρ	$J_0(\rho e^{i\nu})$		$J_1(\rho e^{i\nu})$	
	Re	Im	Re	Im
0.30	+0.97762 62465	0	+0.14831 88163	0
.31	+0.97611 89155	0	+0.15314 55031	0
.32	+0.97456 33747	0	+0.15796 07195	0
.33	+0.97295 97406	0	+0.16276 41059	0
.34	+0.97130 81332	0	+0.16755 53037	0
0.35	+0.96960 86763	0	+0.17233 39552	0
.36	+0.96786 14971	0	+0.17709 97040	0
.37	+0.96606 67264	0	+0.18185 21944	0
.38	+0.96422 44986	0	+0.18659 10722	0
.39	+0.96233 49515	0	+0.19131 59841	0
0.40	+0.96039 82267	0	+0.19602 65780	0
.41	+0.95841 44689	0	+0.20072 25029	0
.42	+0.95638 38267	0	+0.20540 34094	0
.43	+0.95430 64519	0	+0.21006 89488	0
.44	+0.95218 25001	0	+0.21471 87741	0
0.45	+0.95001 21300	0	+0.21935 25395	0
.46	+0.94779 55040	0	+0.22396 99004	0
.47	+0.94553 27878	0	+0.22857 05137	0
.48	+0.94322 41507	0	+0.23315 40376	0
.49	+0.94086 97651	0	+0.23772 01319	0
0.50	+0.93846 98072	0	+0.24226 84577	0

Метод Мюллера позволяет получить комплексные корни характеристического уравнения без записи последнего в явном виде. Используя корни трансцендентного уравнения при трех заданных точках $Z^{[n-2]}$, $Z^{[n-1]}$ и $Z^{[n]}$ и соответствующие значения функции, обозначенные через f_{n-2} , f_{n-1} и f_n , Мюллер составляет квадратичную функцию от f , интерполирующую при точке (Z_i, f_i) , где $i = n-2, n-1, n$. В качестве Z_{n+1} затем выбирается один из двух нулей квадратичной функции, который ближе к Z_n . Далее это же повторяется с Z_{n-1}, Z_n, Z_{n+1} .

Функции $J_0(\rho e^{i\varphi})$ и $J_1(\rho e^{i\varphi})$ при $\varphi = \pi/36 = 5^\circ$.

Таблица 2.2.

ρ	$J_0(\rho e^{i\varphi})$		$J_1(\rho e^{i\varphi})$	
	Re	Im	Re	Im
0.00	+1	0	0	0
.01	+0.99997 53800	-0.00000 43412	+0.00498 09131	+0.00043 57625
.02	+0.99990 15216	-0.00001 73640	+0.00996 14640	+0.00087 14280
.03	+0.99977 84301	-0.00003 90665	+0.01494 12905	+0.00130 68994
.04	+0.99960 61145	-0.00006 94456	+0.01992 00305	+0.00174 20797
0.05				
.06	+0.99938 45869	-0.00010 84967	+0.02489 73219	+0.00217 68719
.07	+0.99911 38633	-0.00015 62141	+0.02987 28028	+0.00261 11791
.08	+0.99879 39630	-0.00021 25907	+0.03484 61114	+0.00304 49044
.09	+0.99842 49089	-0.00027 76182	+0.03981 68860	+0.00347 79511
	+0.99800 67274	-0.00035 12871	+0.04478 47654	+0.00391 02225
0.10				
.11	+0.99753 94485	-0.00043 35863	+0.04974 93881	+0.00434 16219
.12	+0.99702 31056	-0.00052 45037	+0.05471 03934	+0.00477 20531
.13	+0.99645 77356	-0.00062 40259	+0.05966 74206	+0.00520 14195
.14	+0.99584 33790	-0.00073 21383	+0.06462 01093	+0.00562 96250
	+0.99518 00797	-0.00084 88247	+0.06956 80995	+0.00605 65737
0.15				
.16	+0.99446 78852	-0.00097 40680	+0.07451 10315	+0.00648 21696
.17	+0.99370 68465	-0.00110 78497	+0.07944 85462	+0.00690 63171
.18	+0.99289 70181	-0.00125 01499	+0.08438 02847	+0.00732 89206
.19	+0.99203 84577	-0.00140 09476	+0.08930 58886	+0.00774 98851
	+0.99113 12270	-0.00156 02206	+0.09422 50000	+0.00816 91153
0.20				
.21	+0.99017 53907	-0.00172 79452	+0.09913 72616	+0.00858 65165
.22	+0.98917 10174	-0.00190 40966	+0.10404 23165	+0.00900 19942
.23	+0.98811 81787	-0.00208 86487	+0.10893 98084	+0.00941 54540
.24	+0.98701 69501	-0.00228 15744	+0.11382 93816	+0.00982 68020
	+0.98586 74102	-0.00248 28449	+0.11871 06811	+0.01023 59444
0.25				
.26	+0.98466 96415	-0.00269 24304	+0.12358 33525	+0.01064 27877
.27	+0.98342 37294	-0.00291 03001	+0.12844 70419	+0.01104 72390
.28	+0.98212 97631	-0.00313 64214	+0.13330 13963	+0.01144 92053
.29	+0.98078 78352	-0.00337 07611	+0.13814 60635	+0.01184 85942
	+0.97939 80416	-0.00361 32842	+0.14298 06917	+0.01224 53136

ρ	$J_0(\rho e^{i\varphi})$		$J_1(\rho e^{i\varphi})$	
	Re	Im	Re	Im
0.30	+0.97796 04817	-0.00386 39550	+0.14780 49304	+0.01263 92719
.31	+0.97647 52584	-0.00412 27361	+0.15261 84295	+0.01303 03775
.32	+0.97494 24777	-0.00438 95893	+0.15742 08398	+0.01341 85397
.33	+0.97336 22494	-0.00466 44749	+0.16221 18131	+0.01380 36677
.34	+0.97173 46864	-0.00494 73521	+0.16699 10021	+0.01418 56714
0.35	+0.97005 99050	-0.00523 81790	+0.17175 80603	+0.01456 44612
.36	+0.96833 80250	-0.00553 69124	+0.17651 26423	+0.01493 99477
.37	+0.96656 91695	-0.00584 35078	+0.18125 44034	+0.01531 20421
.38	+0.96475 34648	-0.00615 79197	+0.18598 30001	+0.01568 06561
.39	+0.96289 10409	-0.00648 01015	+0.19069 80901	+0.01604 57016
0.40	+0.96098 20307	-0.00681 00051	+0.19539 93318	+0.01640 70913
.41	+0.95902 65708	-0.00714 75815	+0.20008 63850	+0.01676 47384
.42	+0.95702 48008	-0.00749 27806	+0.20475 89102	+0.01711 85563
.43	+0.95497 68638	-0.00784 55508	+0.20941 65696	+0.01746 84593
.44	+0.95288 29061	-0.00820 58397	+0.21405 90260	+0.01781 43619
0.45	+0.95074 30774	-0.00857 35937	+0.21868 59438	+0.01815 61794
.46	+0.94855 75304	-0.00894 87578	+0.22329 69885	+0.01849 38276
.47	+0.94632 64213	-0.00933 12762	+0.22789 18266	+0.01882 72228
.48	+0.94404 99095	-0.00972 10918	+0.23247 01262	+0.01915 62819
.49	+0.94172 81575	-0.01011 81465	+0.23703 15566	+0.01948 09224
0.50	+0.93936 13312	-0.01052 23809	+0.24157 57883	+0.01980 10625

$$Z^{[l+1]} = Z^{[l]} - (Z^{[l]} - Z^{[l-1]}) \frac{2C_j}{|B_j| + \sqrt{B_j^2 - 4A_jC_j}} \operatorname{sign} q_j, \quad \text{где,}$$

$$A_j = q_j f_j - q_j (1 + q_j) f_{j-1} + q_j^2 f_{j-2}; \quad B_j = (2q_j + 1) f_j - (1 + q_j) f_j + q_j^2 f_{j-2};$$

$$C_j = (1 + q_j) f_j; \quad f_j = f(Z^{[l]}), \quad q_j = \frac{Z^{[l]} - Z^{[l-1]}}{Z^{[l-1]} - Z^{[l-2]}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Мюллер доказал, что последовательность $\{Z^{[l]}\}$ сходится, если начальные значения $Z^{[l-1]}$, $Z^{[l]}$, $Z^{[l-2]}$ находятся в достаточно малой окрестности корня уравнения.

Таблица 2.3.

Функции $J_0(\rho e^{i\varphi})$ и $J_1(\rho e^{i\varphi})$ при $\varphi = 4\pi/9 = 80^\circ$.

ρ	$J_0(\rho e^{i\varphi})$		$J_1(\rho e^{i\varphi})$	
	Re	Im	Re	Im
5.00	+18.01964 49683	-17.65850 93424	+16.17505 75128	+15.78336 80039
.01	+18.14741 11647	-17.84616 43735	+16.34879 29150	+15.89897 84302
.02	+18.27601 64276	-18.03574 06169	+16.52432 49629	+16.01535 55300
.03	+18.40546 51920	-18.22725 71894	+16.70167 16662	+16.13250 33750
.04	+18.53576 19012	-18.42073 33931	+16.88085 12106	+16.25042 60448
5.05	+18.66691 10075	-18.61618 87175	+17.06188 19588	+16.36912 76256
.06	+18.79891 69711	-18.81364 28405	+17.24478 24527	+16.48861 22109
.07	+18.93178 42601	-19.01311 56308	+17.42957 14146	+16.60888 39008
.08	+19.06551 73507	-19.21462 71494	+17.61626 77495	+16.72994 68019
.09	+19.20012 07264	-19.41819 76517	+17.80489 05463	+16.85180 50267
5.10	+19.33559 88777	-19.62384 75891	+17.99545 90798	+16.97446 26941
.11	+19.47195 63025	-19.83159 76107	+18.18799 28126	+17.09792 39283
.12	+19.60919 75050	-20.04146 85655	+18.38251 13965	+17.22219 28591
.13	+19.74732 69961	-20.25348 15043	+18.57903 46746	+17.34727 36213
.14	+19.88634 92925	-20.46765 76813	+18.77758 26830	+17.47317 03548
5.15	+20.02626 89170	-20.68401 85560	+18.97817 56526	+17.59988 72039
.16	+20.16709 03979	-20.90258 57956	+19.18083 40110	+17.72742 83172
.17	+20.30881 82685	-21.12338 12765	+19.38557 83843	+17.85579 78472
.18	+20.45145 70674	-21.34642 70865	+19.59242 95991	+17.98499 99504
.19	+20.59501 13374	-21.57174 55267	+19.80140 86844	+18.11503 87864
5.20	+20.73948 56260	-21.79935 91134	+20.01253 68731	+18.24591 85180
.21	+20.88488 44843	-22.02929 05805	+20.22583 56047	+18.37764 33108
.22	+21.03121 24673	-22.26156 28809	+20.44132 65264	+18.51021 73326
.23	+21.17847 41330	-22.49619 91895	+20.65903 14958	+18.64364 47535
.24	+21.32667 40426	-22.73322 29043	+20.87897 25823	+18.77792 97454
5.25	+21.47581 67598	-22.97265 76490	+21.10117 20695	+18.91307 64815
.26	+21.62590 68504	-23.21452 72753	+21.32565 24570	+19.04908 91360
.27	+21.77694 88823	-23.45885 58645	+21.55243 64628	+19.18597 18840
.28	+21.92894 74246	-23.70566 77303	+21.78154 70246	+19.32372 89008
.29	+22.08190 70477	-23.95498 74202	+22.01300 73027	+19.46236 43617

ρ	$J_0(\rho e^{i\varphi})$		$J_1(\rho e^{i\varphi})$	
	Re	Im	Re	Im
5.30	+22.23583 23226	-24.20683 97185	+22.24684 06818	+19.60188 24415
.31	+22.39072 78207	-24.46124 96481	+22.48307 07727	+19.74228 73144
.32	+22.54659 81131	-24.71824 24726	+22.72172 14152	+19.88358 31532
.33	+22.70344 77707	-24.97784 36990	+22.96281 66796	+20.02577 41292
.34	+22.86128 13632	-25.24007 90795	+23.20638 08692	+20.16886 44117
5.35	+23.02010 34591	-25.50497 46142	+23.45243 85225	+20.31285 81676
.36	+23.17991 86251	-25.77255 65532	+23.70101 44153	+20.45775 95608
.37	+23.34073 14254	-26.04285 13990	+23.95213 35629	+20.60357 27521
.38	+23.50254 64220	-26.31588 59089	+24.20582 12225	+20.75030 18985
.39	+23.66536 81733	-26.59168 70973	+24.46210 28953	+20.89795 11529
5.40	+23.82920 12342	-26.87028 22381	+24.72100 43290	+21.04652 46634
.41	+23.99405 01557	-27.15169 88674	+24.98255 15200	+21.19602 65733
.42	+24.15991 94840	-27.43596 47856	+25.24677 07157	+21.34646 10200
.43	+24.32681 37602	-27.72310 80599	+25.51368 84170	+21.49783 21352
.44	+24.49473 75201	-28.01315 70270	+25.78333 13804	+21.65014 40438
5.45	+24.66369 52930	-28.30614 02957	+26.05572 66209	+21.80340 08638
.46	+24.83369 16019	-28.60208 67490	+26.33090 14138	+21.95760 67057
.47	+25.00473 09625	-28.90102 55471	+26.60888 32976	+22.11276 56718
.48	+25.17681 78828	-29.20298 61298	+26.88970 00765	+22.26888 18559
.49	+25.34995 68627	-29.50799 82190	+27.17337 98223	+22.42595 93428
5.50	+25.52415 23931	-29.81609 18217	+27.45995 08778	+22.58400 22074

Процесс прекращается, если

$$|z^{(l)} - z^{(l-1)} / z^{(l)}| < \varepsilon,$$

где, ε — наперед заданная положительная величина, характеризующая точность приближенного значения корня (в данной работе $\varepsilon = 10^{-16}$). Найденный корень отделяется и процесс повторяется для определения следующего корня.

Таким образом, использование метода Мюллера для определения собственных значений уравнений (2.23) имеет следующее преимущество: при организации вычислительной процедуры нет необходимости в получении характеристического многочлена $f_n(\omega)$, достаточно иметь лишь алгоритм для вычисления определителя при заданном значении $\omega = \omega_0^*$.

В настоящей работе в качестве начальных приближений выбираются собственные частоты колебаний упругой системы, для определения которых применены стандартные подпрограммы (рис 2.2). Оператор обращения к подпрограмме имеет вид:

CALL $\square$ NROOT(N,C,A,X,Y)

где, N—число степеней свободы; A и C — матрицы масс и жесткости; X — вектор, содержащий вычисленные частоты ω^2 ; Y — матрица, столбцы которой являются собственными формами V_a .

Свойства упругого тела и окружающих его рядов приведены в табл. 2.4, которые в дальнейшем используются для численных расчетов на ЭВМ.

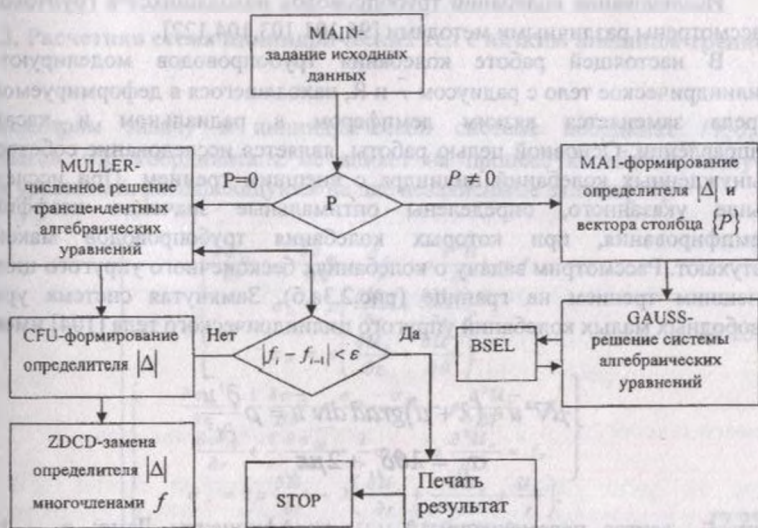


Рис.2.2. Блок-схема построения решения характеристического уравнения.

Таблица 2.4.

Физико-механические параметры упругих сред.

Отношение коэффициентов	Песчанник и-сталь П- С	Гранит- сталь Г-С	Мягкий грунт МГ- С	Песчаники - бетон П-Б	Гранит- бетон Г-Б
E_1/E_2	0.100	0.300	0.400	1.250	3.650
ν_1/ν_2	0.202	0.342	0.156	0.987	1.156
μ_1/μ_2	0.006	0.300	0.417	1.250	3.751
λ_1/λ_2	0.002	0.300	0.434	1.250	3.907

2.3. КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ВНЕШНИМ ТРЕНИЕМ

Исследование колебаний трубопроводов находящихся в грунтовой среде рассмотрены различными методами [96,101,103,104,122].

В настоящей работе колебания трубопроводов моделируются как цилиндрическое тело с радиусом r и R , находящегося в деформируемой среде. Среда заменяется вязким демпфером в радиальном и касательном направлении. Основной целью работы, является исследование собственных и вынужденных колебаний цилиндра с внешним трением. При исследовании выше указанного, определены оптимальные значения коэффициентов демпфирования, при которых колебания трубопроводов максимально затухают. Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечного упругого цилиндра с внешним трением на границе (рис.2.3а,б). Замкнутая система уравнений свободных малых колебаний упругого цилиндрического тела [104] имеет вид:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \\ \sigma_{,i} = \lambda \theta \delta_{,i} + 2\mu \epsilon_{,i} \end{cases} \quad (2.24)$$

где, $\bar{u}$ – вектор перемещений; λ, μ – коэффициенты Ламе; ρ – плотность цилиндра; $\sigma_{,i}$ – тензор напряжений; $\epsilon_{,i}$ – тензор деформаций. На части границы

r_0 заданы перемещения: $\bar{u} = 0$; на части r_1 – напряжения: $\bar{n} \bar{\sigma} = B \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$.

А также заданы начальные условия:

$$\bar{u}|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

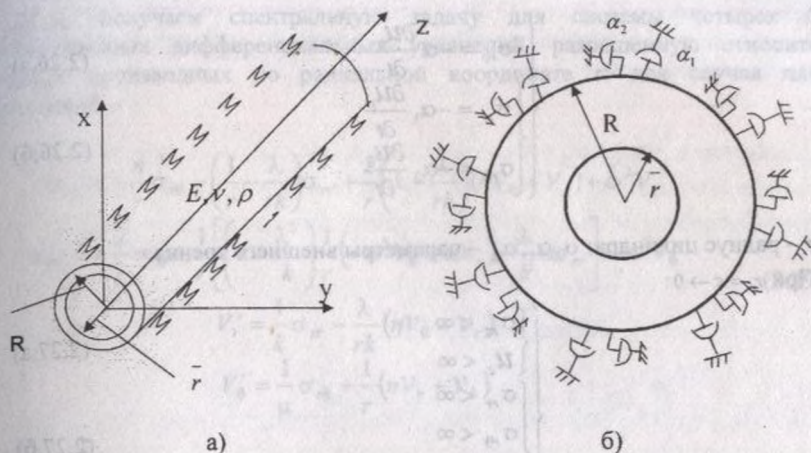


Рис. 2.3. Расчетная схема цилиндрических тел с вязким внешним трением.

Рассмотрим задачу в цилиндрической системе координат $/r, \theta, z/$. Предполагая, что координата z не влияет на процесс колебаний, получим систему уравнений, распадающуюся на две независимые задачи [18]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= f; \\ \sigma_r &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \sigma_\theta &= \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \right. \quad (2.25, a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= f_r; \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= f_\theta; \\ \sigma_r &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right); \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right); \end{aligned} \right. \quad (2.25, b)$$

С краевыми условиями при $r = r_0$:

$$\begin{cases} \sigma_{rz} = -\alpha \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2.26, a)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\alpha_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\theta} = -\alpha_2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \end{cases} \quad (2.26, b)$$

где, r – радиус цилиндра; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ – параметры внешнего трения.

При $r_0 = \varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{rz} < \infty \\ u_z < \infty \end{cases} \quad (2.27, a)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} < \infty \\ \sigma_{r\theta} < \infty \\ u_r < \infty \\ u_\theta < \infty \end{cases} \quad (2.27, b)$$

Тогда назовем краевую задачу (2.25,а, 2.26,а, 2.27,а) – антиплоской, а (2.25,б, 2.26,б, 2.27,б) – плоской или задачей о плоских колебаниях цилиндра.

Собственные колебания. Назовем собственными колебаниями упругого цилиндра решение краевой задачи (2.25,а, 2.26,а, 2.27,а) ($f=0$) для антиплоского случая вида:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_r(r) \\ \sigma_\theta(r) \\ v(r) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.28, a)$$

краевой задачи (2.25,б, 2.26,б, 2.27,б) для плоского случая вида:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \\ u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_r(r) \\ \sigma_\theta(r) \\ v_r(r) \\ v_\theta(r) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.28, b)$$

где, $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, v, v_r, v_\theta$ – неизвестные функции радиальной формы колебаний; ω – комплексная собственная частота колебаний цилиндра, действительная часть которой характеризует частоту колебаний цилиндра, а мнимая часть – скорость затухания, $n=0, 1, 2, \dots$. Подставляя представление (2.28,б), (2.28,а) в уравнения (2.25,б), (2.25,а) и краевые условия (2.26,б),

(2.26,а), получаем спектральную задачу для системы четырех /двух/ обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно первых производных по радиальной координате r : для случая плоских колебаний —

$$\begin{cases} \sigma'_r = -\frac{n}{r} \sigma_{r\theta} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{rk} \right) \sigma_r + \frac{1}{r} \left(k - \frac{\lambda}{rk} \right) (nV_\theta + V_r) + \omega^2 V_r \\ \sigma'_{r\theta} = -\frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \frac{1}{r} \left[\left(k - \frac{\lambda^2}{k} \right) \frac{1}{r} (-n^2 V_\theta + nV_r) - \frac{\lambda}{k} n \sigma_r \right] + \omega^2 V_\theta \\ V'_r = \frac{1}{k} \sigma_r - \frac{\lambda}{rk} (nV_\theta + V_r) \\ V'_\theta = \frac{1}{\mu} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} (nV_r + V_\theta) \end{cases} \quad (2.29,а)$$

антиплоских —

$$\begin{cases} v' = \frac{\sigma_r}{\mu} \\ \sigma'_r = \left(\frac{\mu n^2}{r^2} - \rho \omega^2 \right) v \end{cases} \quad (2.29,б)$$

Можно показать, что условия конечности всех неизвестных в центре для сплошного цилиндра эквивалентны следующим краевым условиям — для плоских колебаний цилиндра:

$$\text{при } n=0: \quad v_r = 0, v_\theta = 0;$$

$$\text{при } n=1: \quad \sigma_r = 0, \sigma_{r\theta} = 0;$$

при $n>1$ можно положить равными нулю любой набор из двух неизвестных. Действительно, если выполняются условия конечности в центре цилиндра, то $\sigma_r, \sigma_{r\theta}, V_r, V_\theta$ можно представить в виде:

$$\begin{cases} \sigma_r = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots \\ \sigma_{r\theta} = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \dots \\ V_r = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots \\ V_\theta = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + \dots \end{cases} \quad (2.30,а)$$

где,

$a_i, b_i, c_i, d_i \quad i=0, 1, 2, \dots$ — неизвестные коэффициенты.

Тогда подставляя (2.30,а) в (2.29,а) получим систему четырех уравнений. Приравнявая в них коэффициенты при одинаковых степенях r получаем рекуррентное соотношение:

$$r^{-1}: \begin{cases} -nb_0 - a_0 + \frac{\lambda}{k}a_0 + knd_0 + kc_0 - \frac{\lambda^2}{k}nd_1 - \frac{\lambda^2}{k}c_1 = 0 \\ -2b_0 + \left(k - \frac{\lambda^2}{k}\right)n^2d_1 + \left(k - \frac{\lambda^2}{k}\right)nc_1 + \frac{\lambda}{k}na_0 = 0 \\ -\frac{\lambda}{k}nd_0 - \frac{\lambda}{k}c_0 = 0 \\ nc_0 + d_0 = 0 \end{cases}$$

$$r^i: \begin{cases} (i+1)a_{i+1} = -\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)a_{i+1} - nb_{i+1} + knd_{i+1} + kc_{i+1} - \frac{\lambda^2}{k}nd_{i+2} - \frac{\lambda^2}{k}nc_{i+2} + \omega^2c_i \\ (i+1)b_{i+1} = -2b_{i+1} + \left(k - \frac{\lambda^2}{k}\right)n^2d_{i+2} + \left(k - \frac{\lambda^2}{k}\right)nc_{i+2} + \frac{\lambda}{k}na_{i+1} + \omega^2d_i \\ (i+1)c_{i+1} = \frac{1}{k}a_i - \frac{\lambda}{k}nd_{i+1} - \frac{\lambda}{k}c_{i+1} \\ (i+1)d_{i+1} = \frac{1}{\mu}b_i + nc_{i+1} + d_{i+1} \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots$

При $r_0 \rightarrow 0$ получаем, что при $n=0$ σ_r, σ_θ - конечны, U_r, U_θ стремятся к нулю; при $n=1$ U_r, U_θ - конечны, σ_r, σ_θ - стремятся к нулю; при $n>1$ к нулю стремятся все неизвестные. В случае антиплоских колебаний цилиндра: при $n=0$ $\sigma_r = 0$; при $n=1$: $U_r = 0$, при $n>1$ любое из двух неизвестных можно положить равным нулю. Действительно, если выполняются условия конечности в центре цилиндра тогда:

$$\begin{cases} \sigma_r = \ell_0 + \ell_1 r + \ell_2 r^2 + \dots \\ v = m_0 + m_1 r + m_2 r^2 + \dots \end{cases} \quad (2.30,б)$$

где, ℓ_i, m_i $i=0, 1, 2, \dots$ - неизвестные коэффициенты.

Подставляя (2.30,б) в (2.29,б) получим систему двух уравнений. Приравнявая в них коэффициенты при одинаковых степенях получим рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} r^{-2}: \quad 0 &= \mu n^2 m_0 \\ r^{-1}: \quad 0 &= \mu n^2 m_1 - \ell_0 \end{aligned}$$

$$r^j: \begin{cases} 0 = im_i - \frac{\ell_{i-1}}{\mu} \\ 0 = -i\ell_i + \mu n^2 m_{i+1} - \rho \omega^2 m_{i-1} - \ell_i \end{cases}$$

Тогда при $r = \varepsilon \rightarrow 0$ при $n=0$ V -конечно, σ_r стремится к нулю; при $n=1$ σ_r - конечно, V -стремится к нулю, при $n>1$ к нулю стремятся оба неизвестных.

Общее решение системы уравнений (2.25,а и 2.25,б) можно выразить через функции Бесселя и Неймана n -го порядка:

$$\begin{cases} v(r) = A I_n \left(\frac{\omega r}{c_s} \right) + B Y_n \left(\frac{\omega r}{c_s} \right) \\ \sigma_r(r) = \mu \left[A \frac{\omega}{c_s} I_n' \left(\frac{\omega r}{c_s} \right) + B \left(\frac{\omega}{c_s} \right) Y_n' \left(\frac{\omega r}{c_s} \right) \right] \end{cases} \quad (2.31)$$

где, A, B - произвольные константы; I_n - функции Бесселя порядка n ; Y_n - функция Неймана порядка n . При подстановке (2.31) в (2.27,а, 2.27,б) получаем характеристическое уравнение относительно ω :

$$\mu \frac{\omega}{c_s} I_n' \left(\frac{\omega r}{c_s} \right) = -\alpha i \omega Y_n' \left(\frac{\omega r}{c_s} \right) \quad (2.32)$$

Теорема о базисности. Докажем базисность собственных функций для антиплоской задачи о собственных колебаниях (2.25,а, 2.26,а, 2.27,а) ($F=0$). Для этого удобнее переписать уравнение колебаний и краевые условия через перемещения. Тогда при решении вида имеем: $u = u(r) \cos n\theta e^{i\omega t}$

Теорема. Пусть собственные значения ω_k краевые задачи

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r} u' + \frac{1}{c^2} \omega^2 u = 0 & C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \\ r \rightarrow a: u = 0 \quad a = const > 0 \\ r \rightarrow R: u' + i\omega \alpha u = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

простые. Тогда система функций $y_k = \left\{ \begin{matrix} u_k \\ i\omega_k u_k \end{matrix} \right\}$, где u_k - собственные функции задачи (2.33, 2.34), соответствующие собственным значениям ω_k , образует базис Рисса в пространстве $L_2 \oplus W_2^1$.

Доказательство.

1. Для доказательства теоремы введем ряд определений из работы [104]. Рассматриваемая краевая задача представляется в виде:

2.

$$\ell(y, \lambda) = y^{(n)} + p_1(x, \lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x, \lambda)y = 0 \quad (2.35)$$

$$U_j(y, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

где, $p_s(x, \lambda) = \sum_{v=0}^s p_{sv}(x)\lambda^v$, $p_{ss}(x) = \text{const}$, $s = 1, \dots, n$, $p_{nn} \neq 0$;

a_{jk} , b_{jk} – произвольные полиномы от λ .

Определение 1.1. Назовем число χ_j порядком линейной формы $U_j(y, \lambda)$ вида (2.36), если эта форма содержит переменные $\lambda^v y^{(k)}(0)$ или $\lambda^v y^{(k)}(1)$ при $v+k = \chi_j$ и не содержит таких переменных при $v+k > \chi_j$. Порядком краевого условия $U_j(y, \lambda) = 0$ будем называть порядок соответствующей линейной форме $U_j(y, \lambda)$. Число $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_n$ назовем суммарным порядком краевых условий (2.36).

Определение 1.2. Будем называть краевые условия (2.36) нормированными, если любые n краевых условий, им эквивалентных, т.е. полученных (2.36) линейными комбинациями имеют не меньший суммарный порядок. Приведенным суммарным порядком краевых условий (2.36) назовем суммарный порядок краевых условий, получающихся из (2.36) после нормировки.

Перепишем уравнение (2.33) в виде (2.35) и краевые условия (2.34) в виде (2.36). Для этого необходимо произвести замену переменных, таким образом, чтобы новое неизвестное изменялось от нуля до единицы.

$$\text{Введем } x = \frac{r-a}{1-a} \Rightarrow r = (1-a)x + a$$

Уравнение (2.33) примет вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1-a}{(1-a)x+a} \frac{du}{dx} - \lambda^2(1-a)^2 u = 0 \quad (2.37)$$

$$\text{Введем коэффициенты } p_1 = \frac{1}{x + \frac{a}{1-a}} \Rightarrow p_{01} = \frac{1}{x + \frac{a}{1-a}}; p_{11} = 0$$

$$p_2 = -(1-a)^2 \lambda^2 \Rightarrow p_{02} = 0; p_{12} = 0; p_{22} = -(1-a)^2$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} U_1 = u(0) = 0 \\ U_2 = \lambda \alpha u(1) + \frac{1}{1-a} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=1} = 0 \\ a_{10} = 1 \quad a_{11} = 0 \quad b_{20} = \lambda \alpha \quad b_{21} = \frac{1}{1-a} \end{cases} \quad (2.38)$$

$\chi = 1$ - суммарный порядок

Характеристическое уравнение для (2.35) имеет вид:

$$\omega^n + p_1 \omega^{n-1} + \dots + p_{n-1} \omega - 1\omega + p_n = 0 \quad (2.39)$$

Его корни обозначаются $\omega_1, \dots, \omega_n$. Подставляя найденные коэффициенты получаем:

$$\omega^2 - (1-a)^2 = 0 \quad (2.40)$$

$$\omega_1 = 1-a \quad \omega_2 = -(1-a)$$

Если корни характеристического уравнения (2.40) простые, а коэффициент $p_{vs} \in W_1^{r-s+v+1}[L_1]$, то из работы [104] известно, что комплексную плоскость можно разбить на $2h$ секторов $s_1, \dots, s_{2h}$ $h \leq n$, в каждом из которых уравнение (2.35) имеет фундаментальную систему решений $y_1(x, \lambda) \dots y_n(x, \lambda)$ причем эти решения и их производные до порядка $n-1$ допускают при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в этих секторах асимптотические разложения:

$$y_k^{(s-1)}(x, \lambda) = \omega_k^{s-1} \lambda^{s-1} \ell^{\omega_k} (\eta_{k,s,0}(x) + \dots + \lambda^{-r} \eta_{k,s,r}(x) + o(\lambda^{-r-1})), k, s = 1 \dots n \quad (2.41)$$

где $\eta_{k,s,v}(x) \in W_1^{r-v+1}$ $v = 0, \dots, r$ причем первые члены разложений - функции $\eta_{k,s,0}(x) \in \eta_{k,s}(x)$ от s не зависят. В [104] отмечается также, что функции $\eta_{k,s,v}(x)$, участвующие в разложениях (2.41), не зависят от выбора сектора и определяются последовательно из системы рекуррентных равенств.

Представим решения нашей задачи в виде (2.41):

$$y_1 = \ell^{(1-a)x/\omega} \eta_{10}(x) + o\left(-\frac{1}{\omega^2}\right); y_2 = \ell^{-(1-a)x/\omega} \eta_{20}(x) + o\left(-\frac{1}{\omega^2}\right), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} a \quad y_1' &= e^{(1-a)x/a_0} (1-a)(i\omega) \eta_{1c}'(x) + 0 \left(-\frac{1}{\omega^2} \right); \\ y_2' &= i\omega(a-1)e^{-(1-a)x/a_0} \eta_{2c}' + 0 \left(-\frac{1}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Собственные значения задачи (2.35, 2.36) определяются нулями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, который имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^e \sum_k [F_{jk}], e^{i\omega x}. \quad (2.44)$$

где $\mu_k = \sum_{\alpha \in j_k} \omega_\alpha$; $j_k, k=1, \dots, n$, - произвольный набор различных натуральных чисел, изменяющихся от 1 до n . При $k=0$ положим $\mu_{j_0} = 0$.

В рассматриваемом случае $\mu_1 = -(1-a), \mu_2 = (1-a), \mu_0 = 0$

$$U_1(y_1) = \eta_{1d_0} + 0 \left(-\frac{1}{\omega^2} \right) = 0, \quad U_2(y_1) = i\omega \alpha e^{(1-a)x/a_0} \eta_{1d_1} + \frac{1-a}{1-a} i\omega e^{(1-a)x/a_0} \eta_{1d_1} + 0 \left(-\frac{1}{\omega^2} \right).$$

$$F_{01} = \eta_{1d_0} \eta_{2d_1} (\alpha - 1)$$

$$F_{02} = \eta_{101} \eta_{201} (-\alpha - 1)$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \lambda^e \left[\eta_{1d_0} \eta_{2d_1} e^{(1-a)x/a_0} (\alpha - 1) + \eta_{1d_1} \eta_{2d_0} e^{(1-a)x/a_0} (-\alpha - 1) + 0 \left(-\frac{1}{\omega^2} \right) \right] \quad (2.45)$$

Введем еще два определения из работы [104]:

Определение 1.3. Краевую задачу (2.35, 2.36) назовем регулярной, если все коэффициенты $p_{v_s}(x)$ в уравнении (2.35) - суммируемые функции и числа F_0^{jk} в разложениях $[F^{jk}]_0$, отвечающих угловым точкам μ_{jk} отличны от нуля.

Через M обозначается наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки μ_{jk} /в нашем случае M - отрезок /. Точки μ_{jk} которые

оказались на границе многоугольника M , называются граничными, а точки, лежащие в вершинах M — угловыми.

Определение 1.4. Регулярную краевую задачу назовем усиленно регулярной, если нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным числом $\delta > 0$.

$F_{01} \neq 0$ если $\alpha \neq 1$, $F_{02} \neq 0$ если $\alpha \neq -1$.

А полученные в уравнении (2.37) коэффициенты $p_{\nu, \tau}(x)$ — суммируемые функции. Значит в случаях, когда $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq -1$ рассматриваемая нами задача регулярна. Покажем, что она является усиленно регулярной задачей. Найдем асимптотическое приближение нулей определителя $\Delta(i\omega)$. Для этого введем обозначение $z = e^{(1-\alpha)\beta}$. Тогда (2.45) запишется в виде:

$$\Delta(i\omega) = i\omega \left[\eta_{10}(0)\eta_{20}(1)\frac{1}{z}(\alpha-1) + \eta_{10}(1)\eta_{20}(0)z(-\alpha-1) + 0\left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \right] = 0$$

Положим, не изменяя общности, что $\eta_{10}(1)\eta_{20}(0) \neq 0$. Тогда обозначим

$$\beta = \frac{\eta_{10}(0)\eta_{20}(1)}{\eta_{10}(1)\eta_{20}(0)}. \text{ Уравнение примет вид:}$$

$$(1-\alpha)\beta + (1+\alpha)z^2 = 0 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\beta$$

При $\alpha \neq -1$ существует счетное множество собственных значений, определяемых с помощью многозначной функции логарифма:

$$i\omega_n = \lambda_n = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \ln \left| \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \right| + \begin{cases} 2\pi i & \alpha > 1 \\ 2\pi(n+1) & \alpha < 1 \end{cases} \right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.46)$$

Значит нули характеристического определителя $\Delta(i\omega)$ асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным δ / их действительные части одинаковы, а мнимые отстоят друг от друга на 2π . Значит задача (2.37, 2.38) усиленно регулярна.

Из следствия теоремы, работы [104] для усиленно регулярной задачи получаем базисность системы функций $y_k = \left\{ \begin{matrix} u_k \\ i\omega_k u_k \end{matrix} \right\}$ в пространстве $L_2 \oplus W_2^1$.

Теорема доказана.

2.4. О СОБСТВЕННЫХ АНТИПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ С ВНЕШНИМ ТРЕНИЕМ

Результаты расчетов приводятся в безразмерной системе единиц, в которой величины модуля сдвига μ , плотности цилиндра ρ , радиуса цилиндра R равны единице. Коэффициент Пуассона ν предполагается равным 0,25.

В случае $\alpha = 0$ корни уравнения (2.32) соответствуют собственным частотам колебаний свободного упругого цилиндра.

Для малых α решение характеристического уравнения было найдено методом малого параметра, то есть предполагалось, что

$$\omega = \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 + \dots \quad (2.47)$$

Тогда после подстановки (2.47) в (2.33) имеем:

$$\omega_1 \alpha = i \alpha_1 \omega Y_0 \left(\frac{\omega_0 r}{cs} \right) / Y_1' \left(\frac{\omega_0 r}{cs} \right) \quad (2.48)$$

где,

ω_0 — решение задачи о собственных антиплоских колебаниях упругого цилиндра при $\alpha = 0$.

В случае, когда α не может считаться "малым" параметром, непосредственное решение трансцендентного характеристического уравнения решается методом Мюллера. Для малых α численное решение полностью совпадает с решенным методом малого параметра — смотри рис. 2.4,а,б: пунктирная линия — решение задачи методом малого параметра, сплошная линия — решение задачи методом Мюллера; на рисунке 2.4,а — представлена зависимость действительной части собственной частоты колебаний от параметра внешнего трения α , на рисунке 2.4,б — мнимой части, номерами на графиках помечены номера мод.

При $\alpha \rightarrow \infty$ корни характеристического уравнения (2.35), полученные численным методом, стремятся к собственным частотам упругих колебаний, закрепленного по внешней поверхности цилиндра.

Во всех рассмотренных случаях решение спектральной задачи (2.34, 2.30), в отличие от составного полубесконечного стержня, существует для любых параметров внешнего трения.

На рисунке 2.4-2.8 показаны зависимости действительных (а) и мнимых (б) частей собственных значений спектральной задачи (3.35, 2.30) от параметра α для $n=0, 1, 2, 3, 4$ соответственно. Цифрами на графиках обозначены номера собственных колебаний в порядке возрастания действительной части собственных значений. Во всех рассмотренных случаях, за исключением первой моды ($n=0, 1, 2, 3, 4$) и второй моды ($n=4$) для действительных частей эти зависимости имеют вид сглаженных убывающих ступенек с максимальным

углом наклона касательной на отрезке $\alpha \in [0,85; 1,0]$ соответствующие мнимые части имеют характерный максимум. С ростом номера моды значение максимума увеличивается, значение α , до которого он достигается возрастает, оставаясь меньше единицы. Значение α , которых достигают максимумы приведены в таблице 2.5 и таблице 2.6.

У нулевой гармоники при любых α существует нулевое собственное значение и при α меньших единицы существует чисто мнимое собственное значение, которое стремится к бесконечности при подходе к единице слева. Нулевое собственное значение соответствует движению цилиндра как жесткого целого.

Таблица 2.5.

Значения коэффициента затухания в зависимости
от номера гармоник

Номер Моды	Номера гармоник				
	0	1	2	3	4
1				0,90	0,86
2	0,94	0,94	0,93	0,90	0,95
3	0,98	0,98	0,98	0,92	0,95
4	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96

В случае $n=1, 2$ для первой моды существуют критические значения $\alpha_1 = 0.90, \alpha_2 = 0.97$ соответственно, начиная с которых комплексное собственное значение становится чисто мнимым, то есть колебательный процесс сменяется аperiодическим (рис.2.9,а,б). При α больших данных критических значений мнимые части раздваиваются, причем одна ветвь стремится к нулю при α стремящемся к бесконечности, а вторая неограниченно возрастает (см. рис.2.9, номерами на графиках помечены номерами гармоник).

Таблица 2.6.

**Значения максимума затухания колебаний в зависимости
от номера гармоник**

Номер Моды	Номера гармоник				
	0	1	2	3	4
1				2,795	2,506
2	1,319	1,561	1,871	2,371	2,246
3	1,635	1,760	1,903	2,039	2,012
4	1,796	1,906	2,021	2,142	2,200

Для $n=3$ также существует критическое значение $\alpha_3 = 0.92$, начиная с которого ветви первой и второй мод сливаются в одну, а при $\alpha > \alpha_3$ минимальное собственное значение становится кратным. Вблизи критической точки при $\alpha < \alpha_3$ у мнимых частей первых двух мод наблюдается максимум, превышающий величины максимумов остальных рассмотренных мод. Кроме того, на отрезке $\alpha \in [0,9864; 0,990]$ обнаружены чисто мнимые корни, зависимости которых от α приведены на рисунке 2.10,а. Аналогичный случай получен при $n=4$. При критическом значении $\alpha_4 = 0.95$ ветви второй и третьей мод сливаются, а при $\alpha > \alpha_4$ второе собственное значение становится кратным. Вблизи критической точки при $\alpha < \alpha_4$ у мнимой части второй моды наблюдается максимум, превышающий величины максимумов остальных рассмотренных мод.

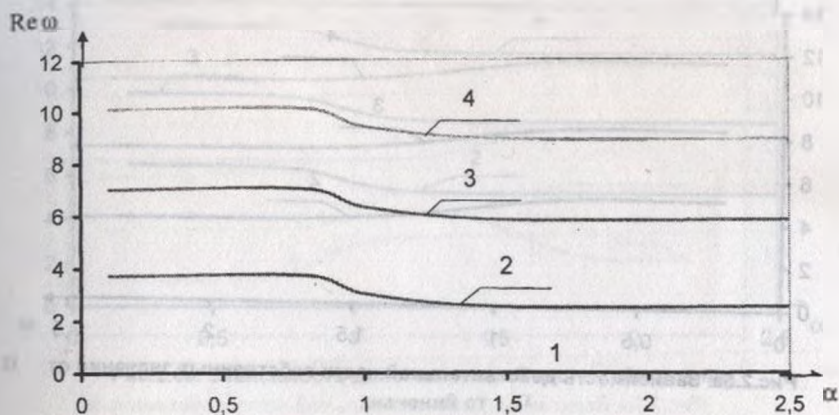


Рис.2.4а. Зависимость действительной части собственных значений от α

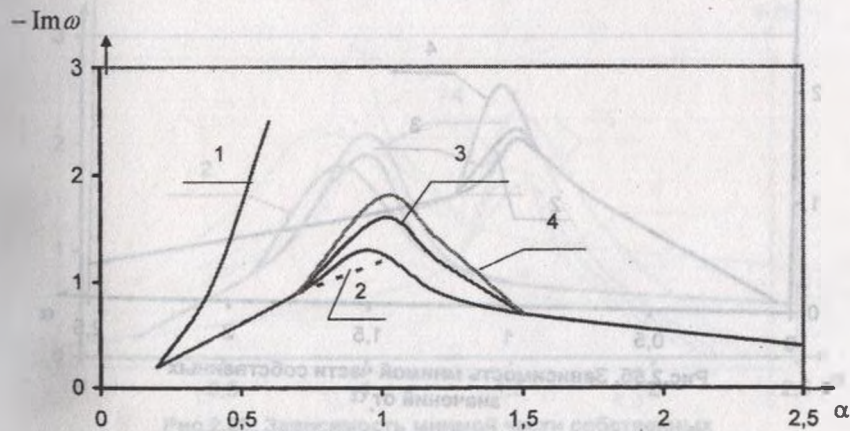


Рис.2.4б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

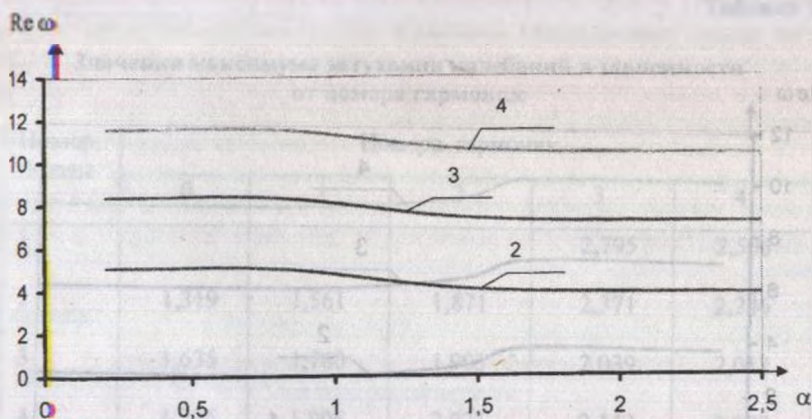


Рис.2.5а. Зависимость действительной части собственных значений от α

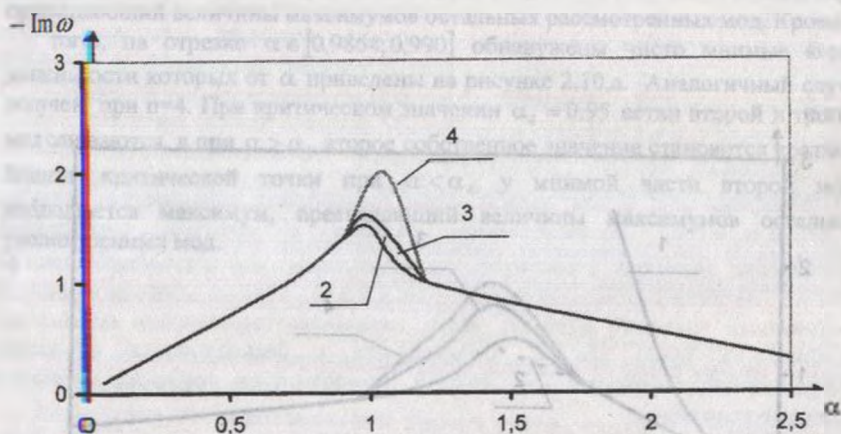


Рис.2.5б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

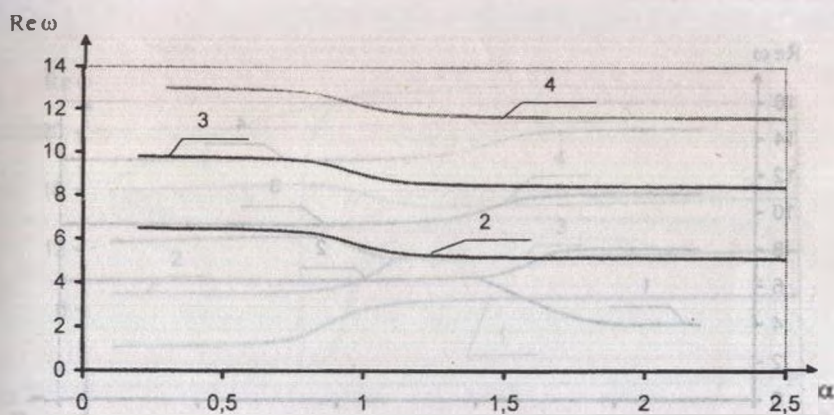


Рис.2.6а. Зависимость действительной части собственных значений от α

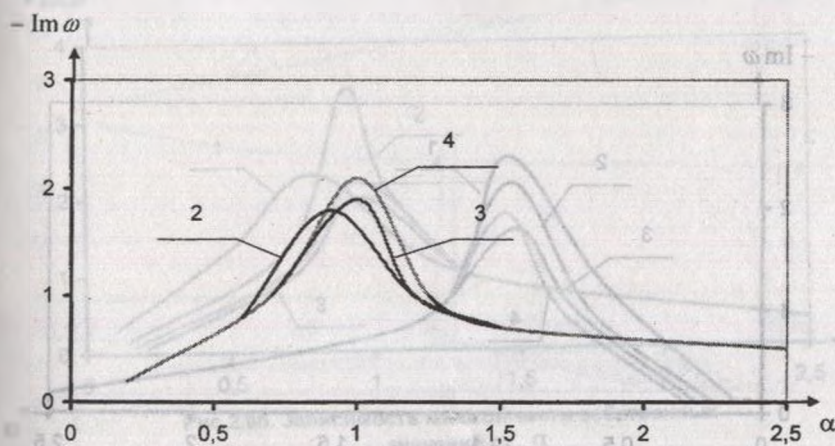


Рис.2.6б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

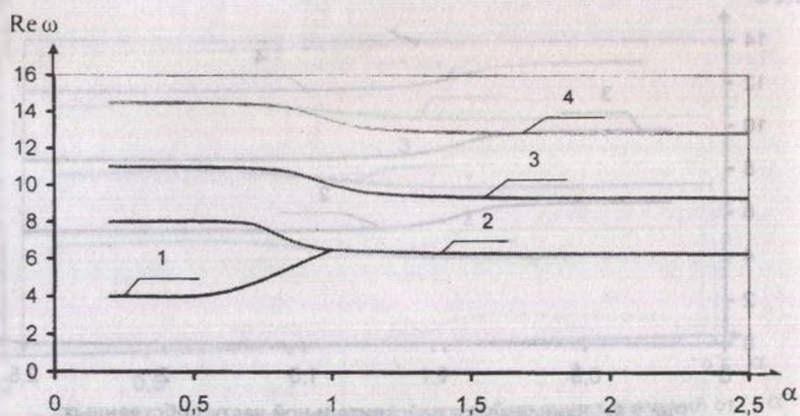


Рис.2.7а. Зависимость действительной части собственных значений от α

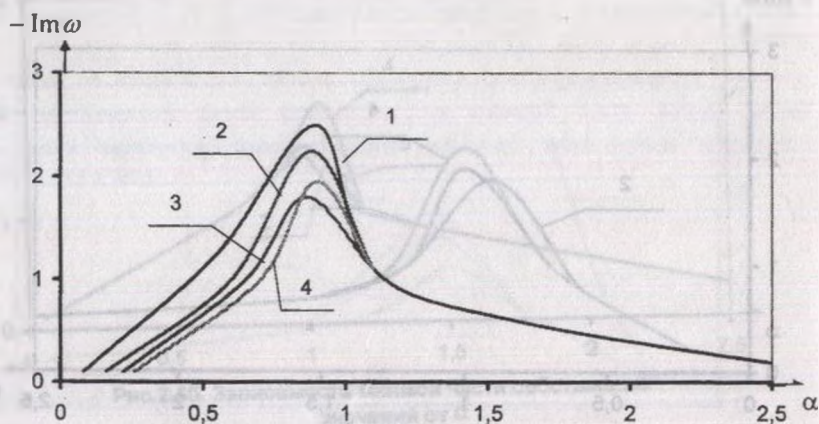


Рис.2.7б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

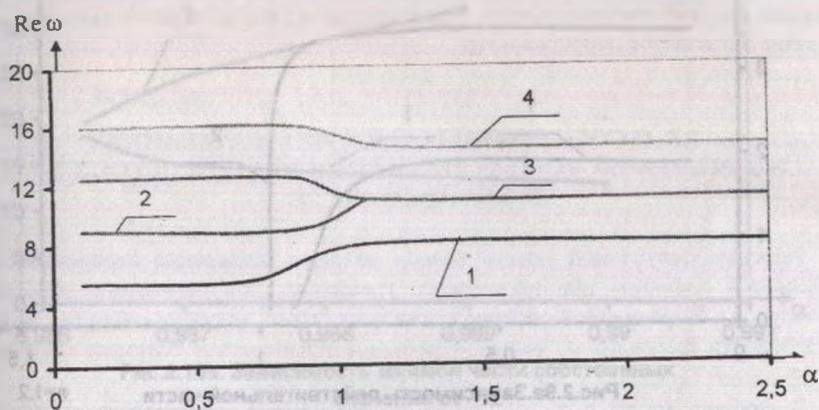


Рис.2.8а. Зависимость действительной части собственных значений от α

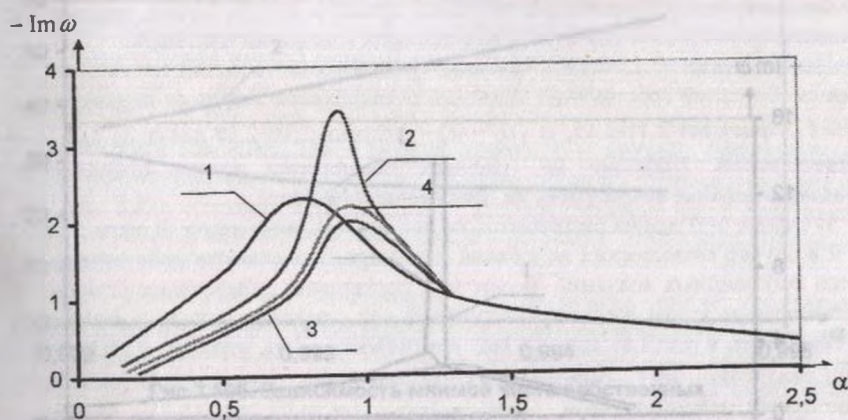


Рис.2.8б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

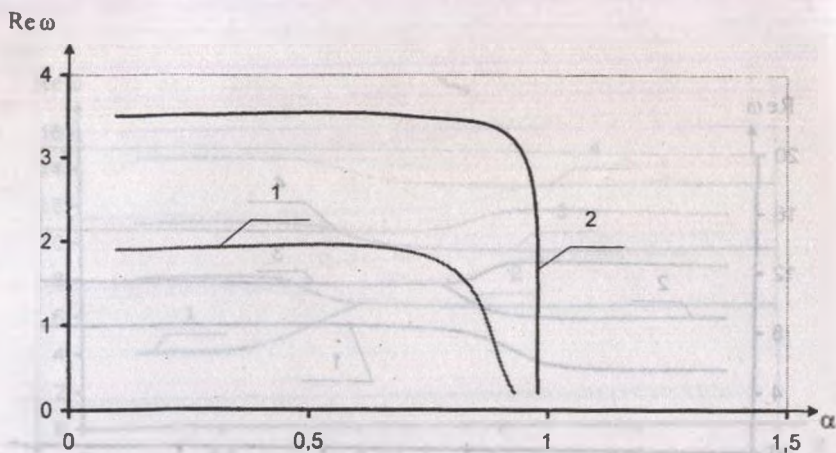


Рис.2.9а. Зависимость действительной части
собственных значений от α $\eta=1.2$

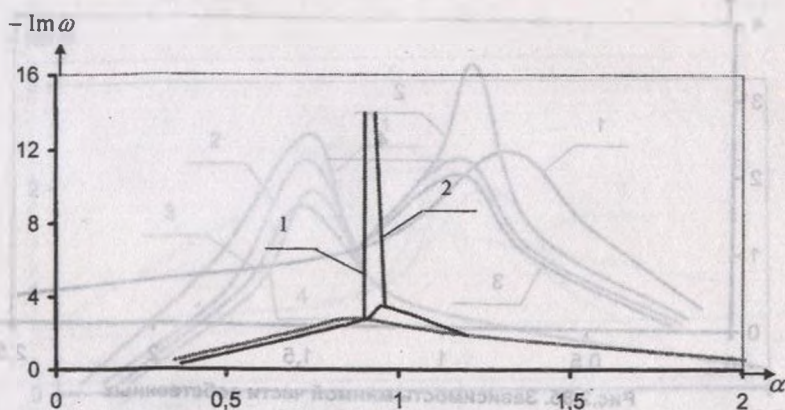


Рис.2.9б. Зависимость мнимой части собственных
значений от α

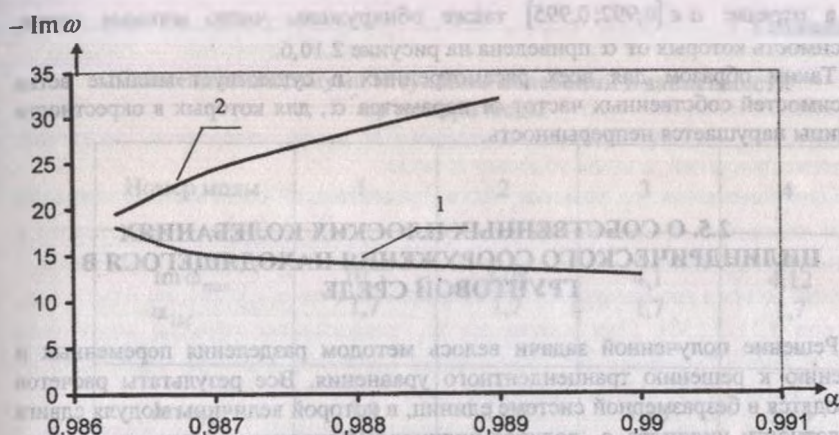


Рис.2.10а. Зависимость мнимой части собственных значений от α

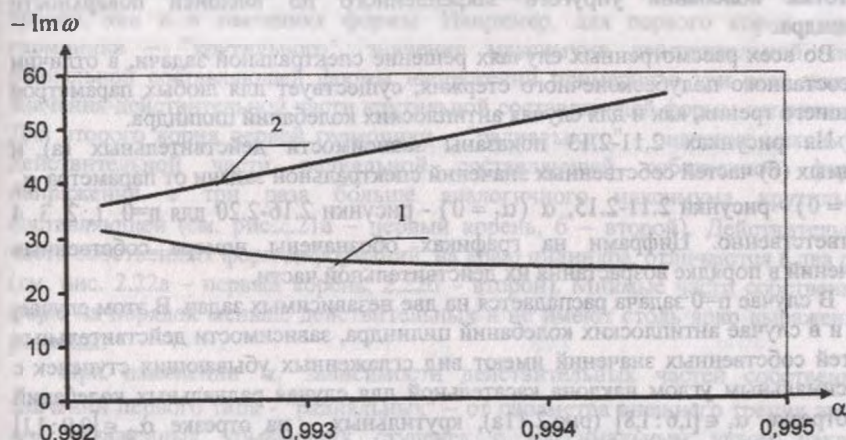


Рис.2.10б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

а отрезке $\alpha \in [0,992; 0,995]$ также обнаружены чисто мнимые корни, зависимость которых от α приведена на рисунке 2.10,б.

Таким образом для всех рассмотренных n существует мнимые ветви зависимостей собственных частот от параметра α , для которых в окрестности единицы нарушается непрерывность.

2.5. О СОБСТВЕННЫХ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ НАХОДЯЩЕГОСЯ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

Решение полученной задачи велось методом разделения переменных и сведению к решению трансцендентного уравнения. Все результаты расчетов приводятся в безразмерной системе единиц, в которой величины модуля сдвига μ , плотности цилиндра ρ , радиуса цилиндра R считаются равными единице. Коэффициент Пуассона ν предполагается равным 0,25.

В случаях $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ корни соответствуют собственным частотам колебаний свободного упругого цилиндра. При $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \rightarrow \infty$ либо $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \rightarrow \infty$ корни, полученные численным методом стремятся к собственным частотам колебаний упругого закрепленного по внешней поверхности цилиндра.

Во всех рассмотренных случаях решение спектральной задачи, в отличии от составного полубесконечного стержня, существует для любых параметров внешнего трения, как и для случая антиплоских колебаний цилиндра.

На рисунках 2.11-2.13 показаны зависимости действительных (а) и мнимых (б) частей собственных значений спектральной задачи от параметра α_1 ($\alpha_2 = 0$) - рисунки 2.11-2.15, α ($\alpha_1 = 0$) - рисунки 2.16-2.20 для $n=0, 1, 2, 3, 4$ соответственно. Цифрами на графиках обозначены номера собственных значений в порядке возрастания их действительной части.

В случае $n=0$ задача распадается на две независимых задач. В этом случае, как и в случае антиплоских колебаний цилиндра, зависимости действительных частей собственных значений имеют вид сглаженных убывающих ступенек с максимальным углом наклона касательной для случая радиальных колебаний на отрезке $\alpha_1 \in [1,6; 1,8]$ (рис.2.11а), крутильных - на отрезке $\alpha_2 \in [0,9; 1,1]$ (рис.2.16а). На этих отрезках соответствующие мнимые части имеют характерный максимум $\text{Im } \omega_{\text{max}}$ при $\alpha_1 = \alpha_{1M}$ ($\alpha_2 = 0$) (рис.2.11б.), $\alpha_2 = \alpha_{2M}$ ($\alpha_1 = 0$) (рис.2.16б). Как и в антиплоском случае, с ростом номера гармоник значение максимума увеличивается, за исключением первого радиального корня (см. таблицу - 2.7). Он отличается от остальных собственных значений еще и тем, что его действительная часть обращается в ноль, что соответствует движению цилиндра как жесткого целого.

Таблица 2.7.

**Значения максимума затухания колебаний в зависимости
от номера моды**

Номер моды	1	2	3	4
$\text{Im } \omega_{\text{max}}$ α_{1M}	10,3 1,7	4,08 1,7	4,1 1,7	4,12 1,7
$\text{Im } \omega_{\text{max}}$ α_{2M}	0,9 0,95	1,09 0,95	1,23 0,95	1,46 0,98

Для всех рассмотренных случаев, при $n > 1$, наблюдается явное разделение корней на два типа. Различия между этими типами корней проявляются как в характере зависимостей их собственных значений от параметров внешнего трения, так и в значениях формы. Например, для первого корня первой гармоники – "крутильного", значение максимума действительной части радиальной составляющей формы напряжений примерно в три раза меньше значения действительной части крутильной составляющей формы напряжений. Для второго корня первой гармоники – "радиального" – значение максимума действительной части радиальной составляющей собственной формы напряжений в три раза больше аналогичного максимума крутильной составляющей (см. рис.2.21а – первый корень, б – второй). Действительные части собственных форм деформаций, на краю цилиндра, отличаются в два раза (см. рис. 2.22а – первый корень, 2.22б – второй). Мнимые части собственных форм на порядок меньше действительных и не имеют столь ярко выраженной разницы.

При изменении α_1 зависимости действительных частей собственных значений первого типа – "радиальных" – от параметра внешнего трения имеют вид сглаженных убывающих ступенек с максимальным углом наклона касательной на интервале $\alpha_1 \in [1,6; 1,8]$ за исключением первой моды второй, третьей, четвертой гармоник. Зависимости действительных частей собственных значений второго типа – "крутильных" имеют в данном случае вид близко к линейному (см.рис. 2.12-2.15а).

В случае изменения α_2 зависимости действительных частей "крутильных" собственных значений имеют вид убывающих сглаженных ступеней с максимальным углом наклона касательной на интервале $\alpha_2 \in [0,9; 1,1]$, за

исключением второй моды второй, третьей, четвертой гармоник; а зависимости действительных частей "радиальных" собственных значений – близких к линейному виду (см. рис. 2.17 - 2.20а).

Действительные части выделенных в обоих случаях собственных значений, на соответствующих определенных выше интервалах, достигают некоторых значений, а затем убывают до нуля.

При изменении α_1 мнимые части "радиальных" собственных значений имеют характерный максимум на интервале $\alpha_1 \in [1,6;1,8]$, значение которого в десятки раз превышает значения мнимых частей "крутильных" собственных значений на всем рассматриваемом интервале (то есть $\alpha_1 \in [0;+\infty]$, $\alpha_2 = 0$), (см. рис 2.11-2.15б). При изменении α_2 аналогичным образом ведут себя мнимые части "крутильных" собственных значений, достигая максимума на интервале $\alpha_2 \in [0,9;1,1]$ (см. рис.2.16-2.20б).

Мнимые части выделенных собственных значений в точке обращения в нуль действительной части раздваиваются, причем один корень устремляется к $+\infty$, а второй спадает с нуля. Значение мнимой части собственного значения при котором происходит появление второго чисто мнимого корня ($\text{Im } \omega_M$) растет с ростом n и сдвигается вправо по оси α , раздваиваясь при $\alpha = \alpha_p$ (см.таблицу 2.8; рис.2.13б, 2.14б, 2.15б, 2.18б, 2.19б, 2.20б).

В отличие от случая антиплоских колебаний цилиндра здесь нет выраженного роста значения максимума с ростом моды и сдвига его по оси α .

Таблица 2.8.

Значения максимума затухания колебаний в зависимости от номера гармоник

Значение n	1	2	3
Рассматрив. $\text{Im } \omega_M$ $\alpha_{1p} (\alpha_2 = 0)$	первая мода 3,287 1,7	12,415 1,717	25,48 1,727
Рассматрив. $\text{Im } \omega_M$ $\alpha_{2p} (\alpha_1 = 0)$	вторая мода 8,218 0,905	16,272 0,952	27,39 0,978

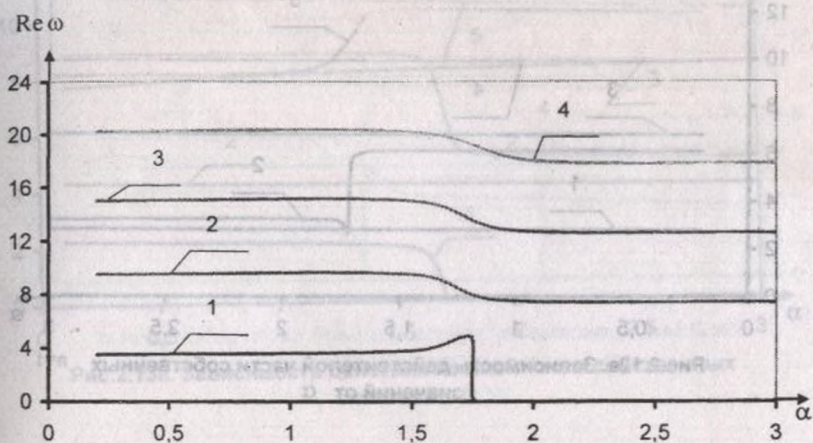


Рис.2.11а. Зависимость действительной части собственных значений от α $n=0$

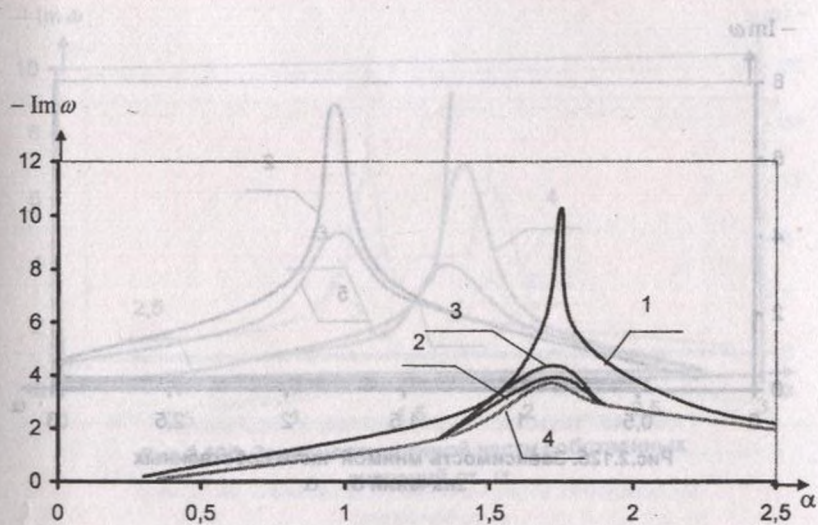


Рис.2.11б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

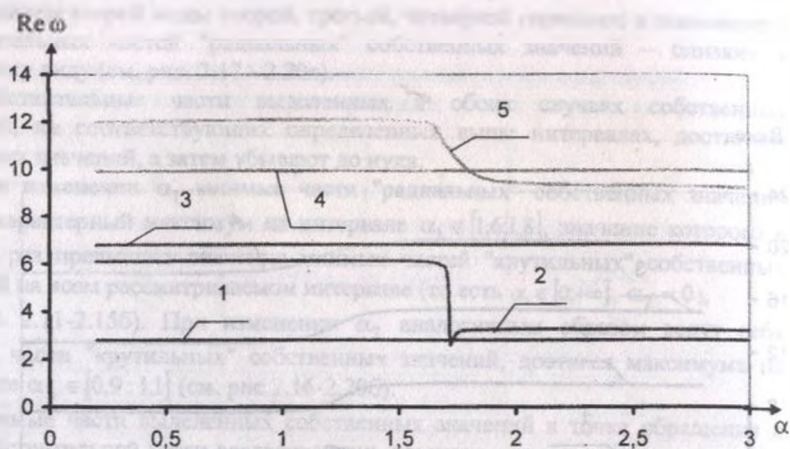


Рис.2.12а. Зависимость действительной части собственных значений от α $n=1$

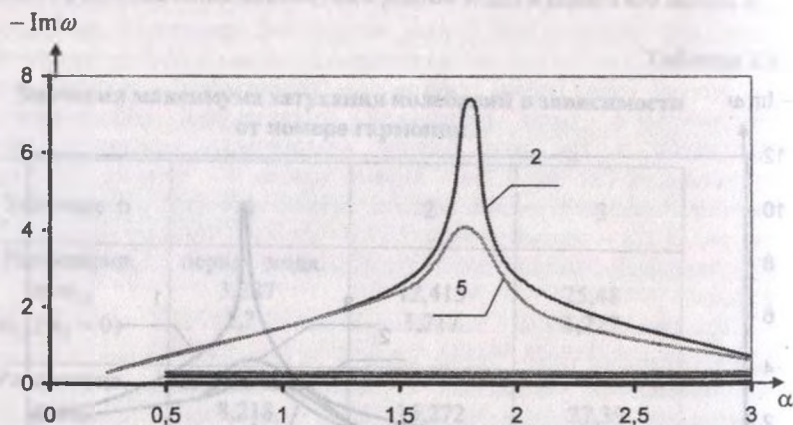


Рис.2.12б. Зависимость мнимой части собственных значений от α $n=1$

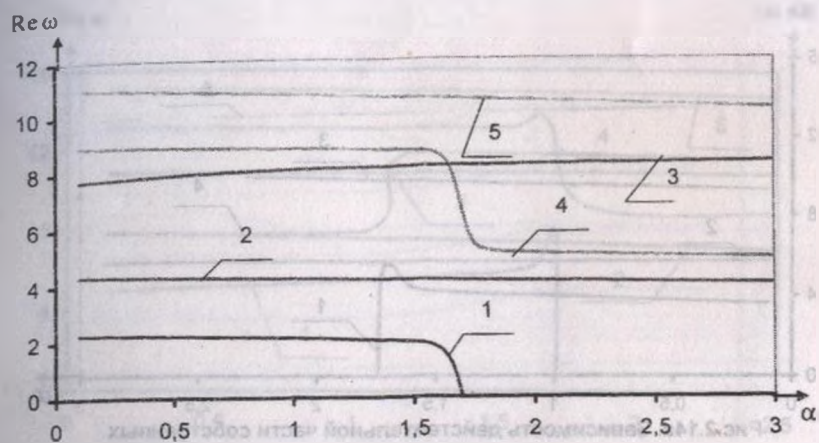


Рис.2.13а. Зависимость действительной части собственных значений α

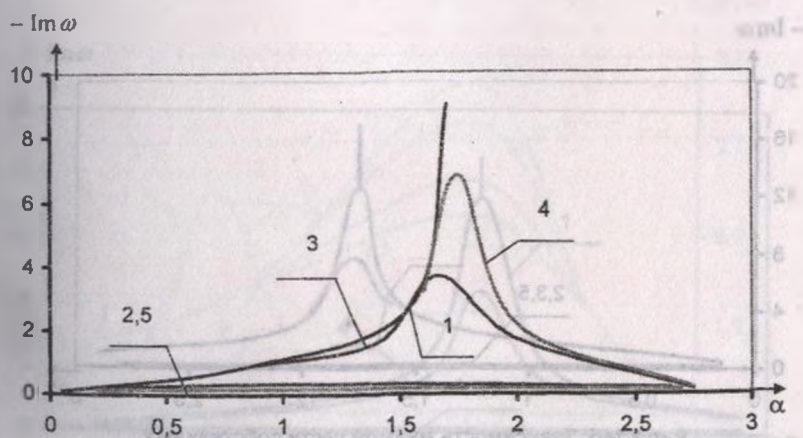


Рис.2.13б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

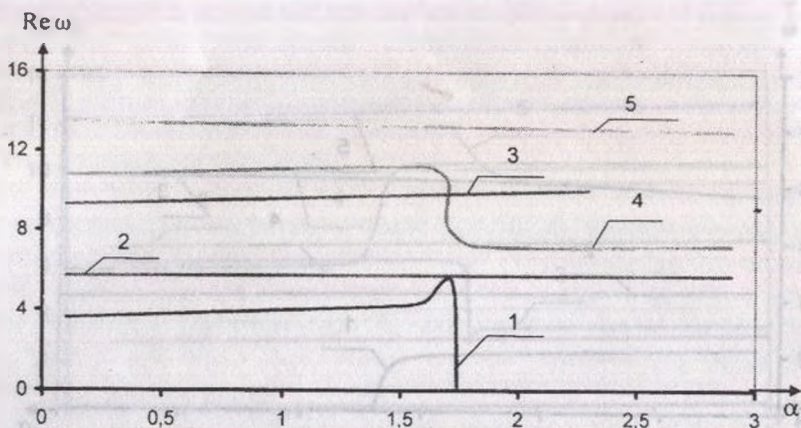


Рис.2.14а. Зависимость действительной части собственных значений от α

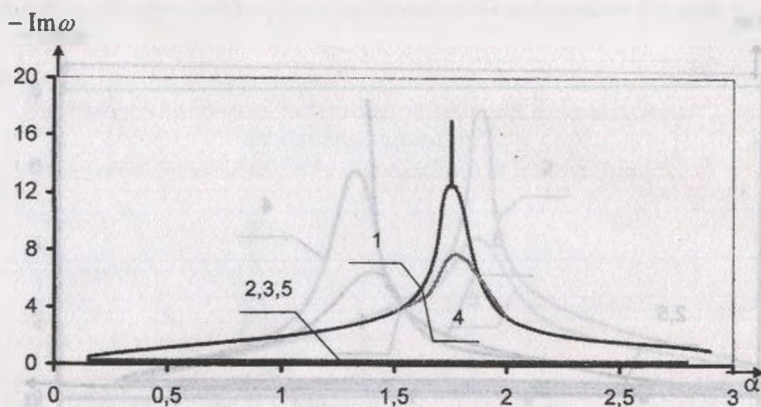


Рис.2.14б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

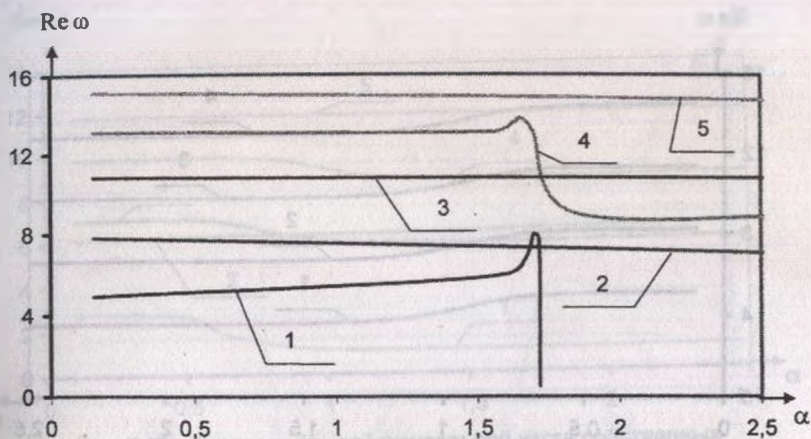


Рис.2.15а. Зависимость действительной части собственных значений от α

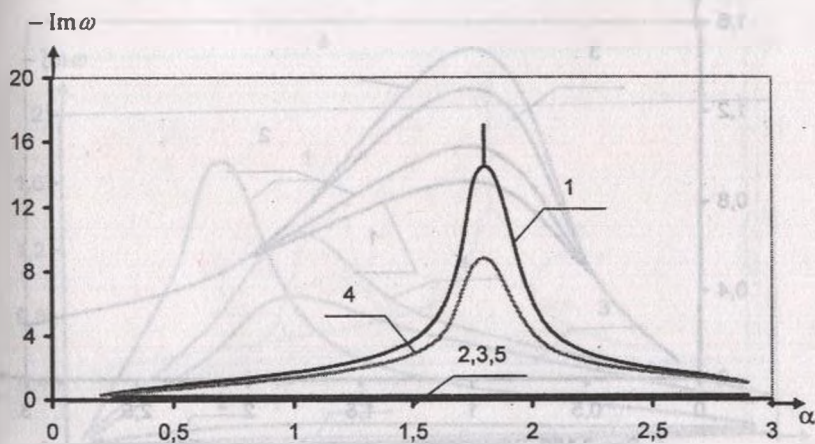


Рис.2.15б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

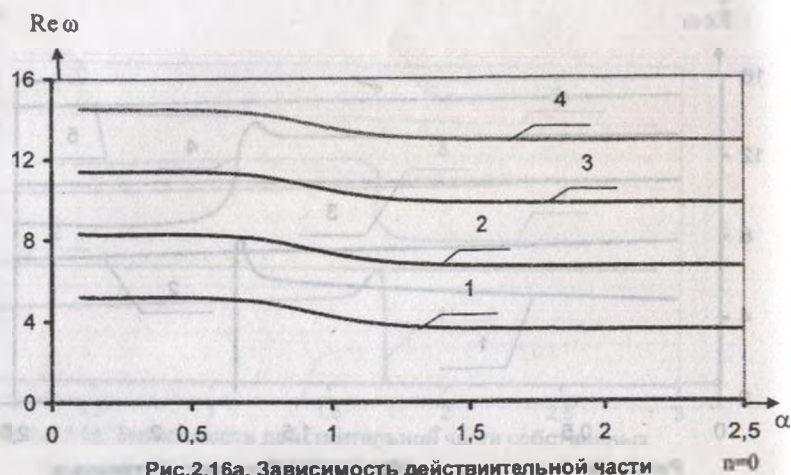


Рис.2.16а. Зависимость действительной части собственных значений от α

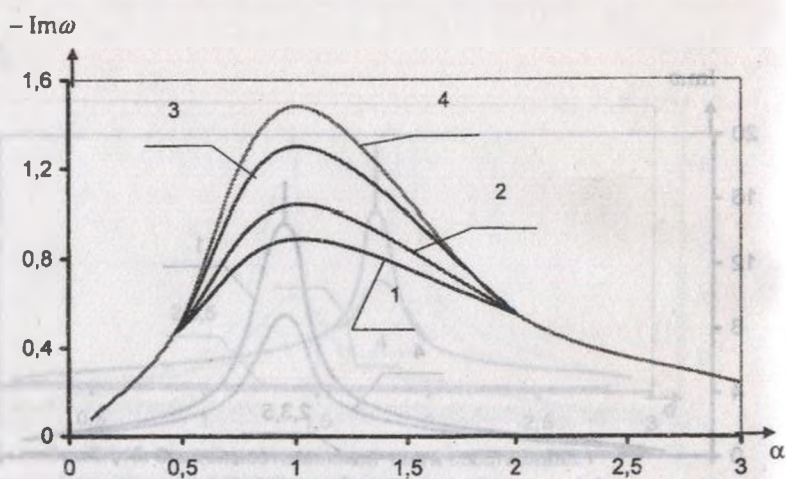


Рис.2.16б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

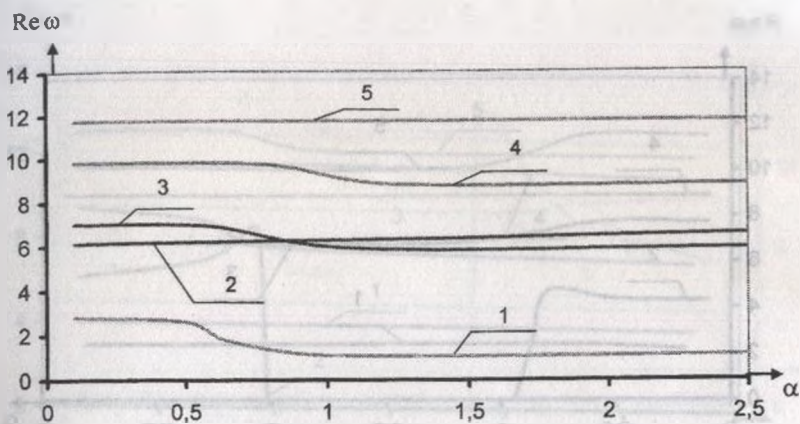


Рис.2.17а. Зависимость действительной части собственных значений от α

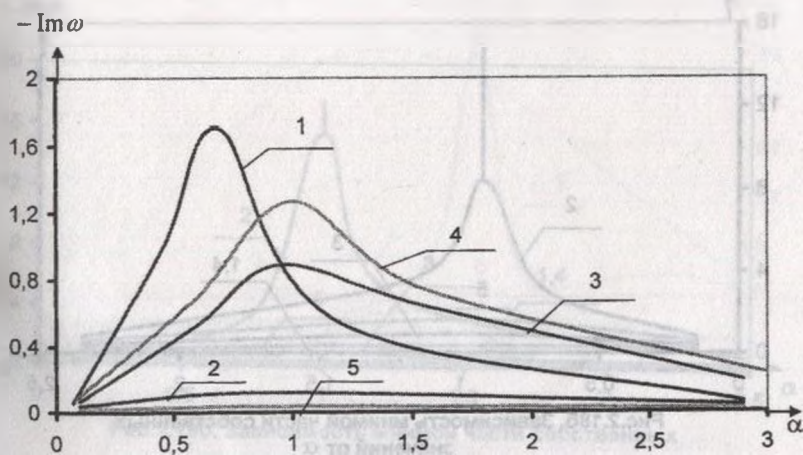


Рис.2.17б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

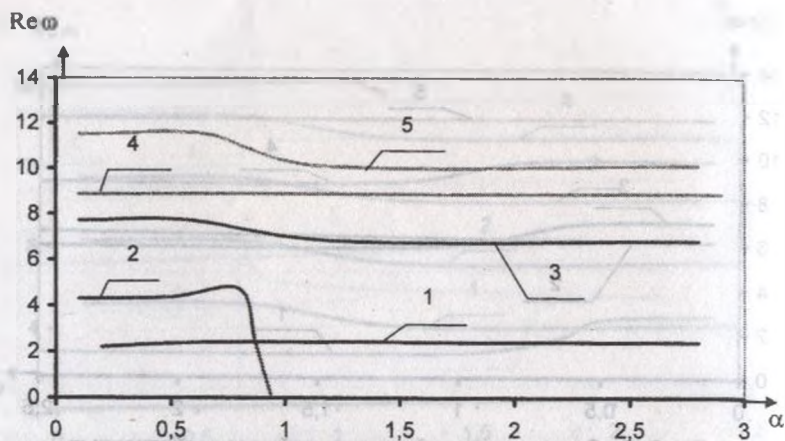


Рис.2.18а. Зависимость действительной части собственных значений от α

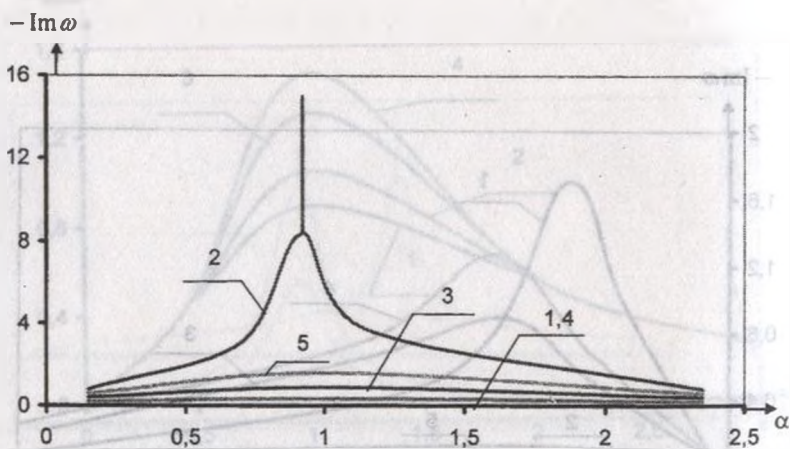


Рис.2.18б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

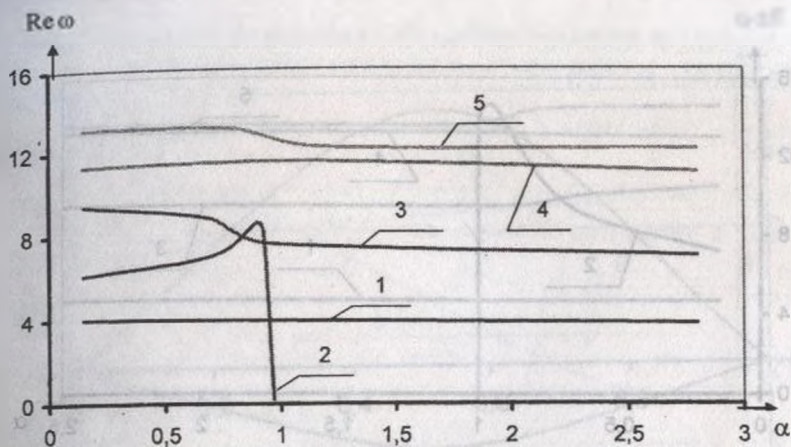


Рис.2.19а. Зависимость действительной части собственных значений от α

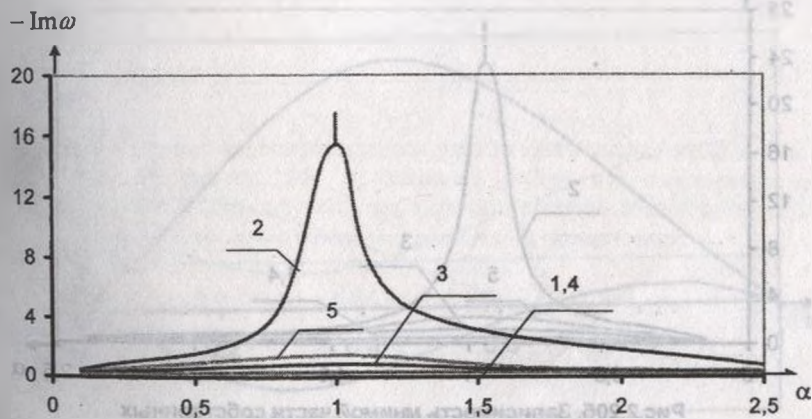


Рис.2.19б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

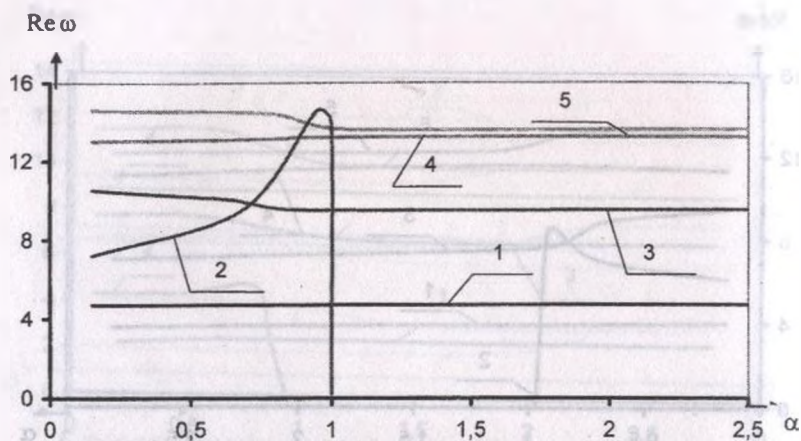


Рис.2.20а. Зависимость действительной части собственных значений от α

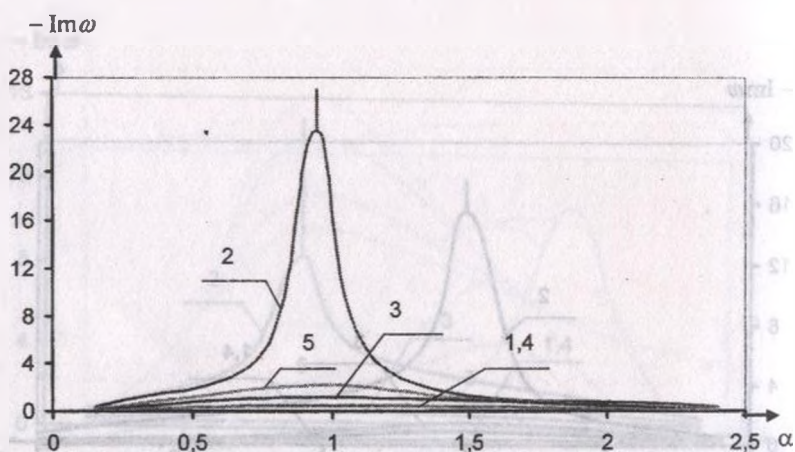


Рис.2.20б. Зависимость мнимой части собственных значений от α

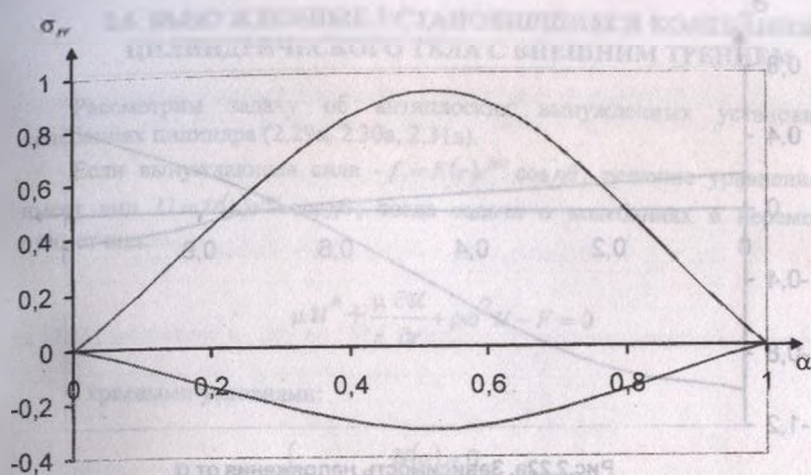


Рис.2.21а. Зависимость напряжения первого корня от α

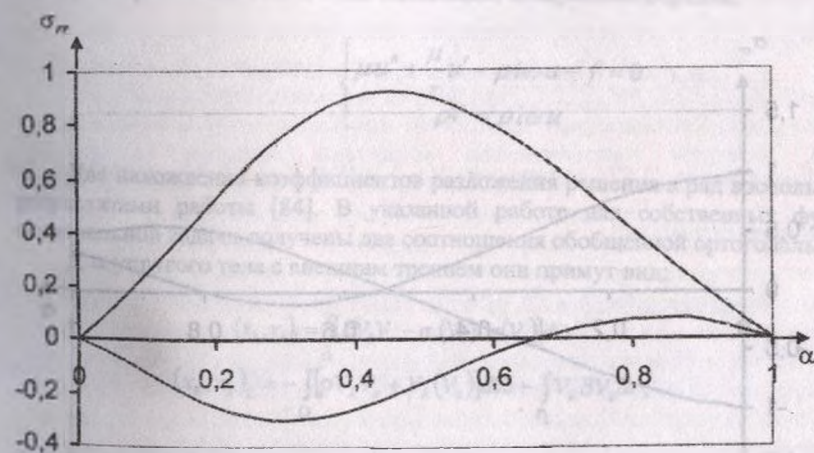


Рис.2.21б. Зависимость напряжения второго корня от α

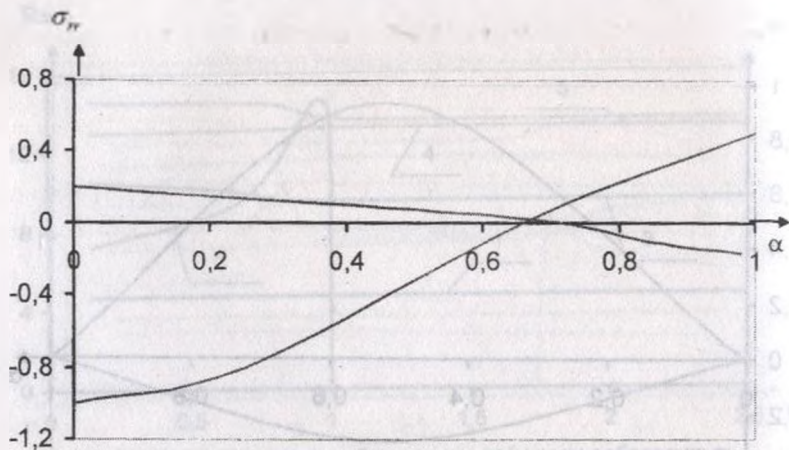


Рис.2.22а. Зависимость напряжения от α

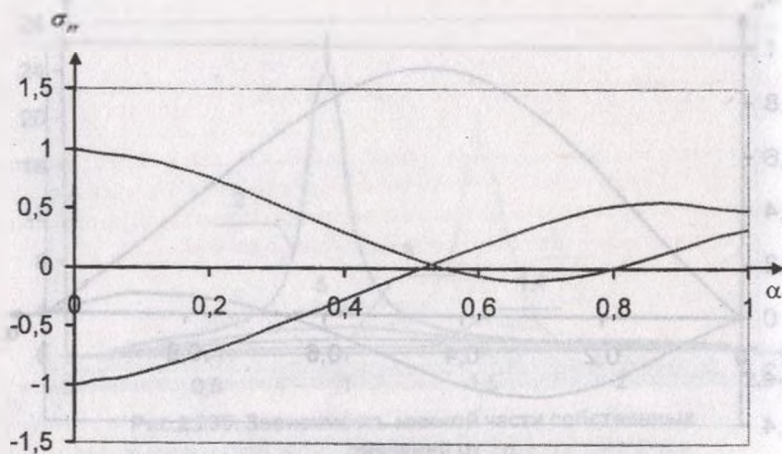


Рис.2.22б. Зависимость напряжения от α

2.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ВНЕШНИМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрим задачу об антиплоских вынужденных установившихся колебаниях цилиндра (2.29а, 2.30а, 2.31а).

Если вынуждающая сила $-f = F(r)e^{i\omega t} \cos n\theta$, решение уравнения (2.29) имеет вид $U = u(r)e^{i\omega t} \cos n\theta$, тогда задача о колебаниях в перемещениях примет вид:

$$\mu u'' + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \omega^2 u - F = 0 \quad (2.49)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(a) = 0 \\ i\omega \alpha u|_{r=R} + \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

где, ω – частота вынуждающей силы.

Линеаризованная по ω задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \mu u'' + \frac{\mu}{r} u' - \rho i \omega u - f = 0 \\ \rho V = \rho i \omega u \end{cases} \quad (2.51)$$

$$(2.52)$$

Для нахождения коэффициентов разложения решения в ряд воспользуемся результатами работы [84]. В указанной работе для собственных функций спектральной задачи получены два соотношения обобщенной ортогональности.

Для упругого тела с внешним трением они примут вид:

$$(x_k, x_e)_1 = \int_{\Omega} [\rho V_k V_e - \sigma_i(v_e) \cdot \varepsilon(v_k)] d\Omega \quad (2.53)$$

$$(x_k, x_e)_2 = - \int_{\Omega} [\rho v_k v_e + v_k(v_e)] d\Omega + \int_{\Gamma_1} v_k B V_e dr, \quad (2.54)$$

где, x_k, x_e – любые два решения краевой задачи, соответствующие различным собственным значениям, Ω – область решения задачи, в нашем случае – кольцо с внутренней окружностью $r=a$, внешней с $r=R$, Γ_1 – часть границы на которой заданы напряжения, $\sigma_i(v)$ – тензор упругих напряжений, u, V – собственные функции формы краевой задачи,

$$x_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad x_e = \begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \end{Bmatrix}$$

Для нашей конкретной задачи соотношения ортогональности примут вид:

$$(x_k, x_e)_1 = 2\pi \int_a^R \rho(i\omega_k u_k i\omega_e u_e) r - \mu u'_k u'_e r dr \quad (2.55)$$

$$(x_k, x_e)_2 = -2\pi \int_a^R \rho(i\omega_k u_k u_e + i\omega_e u_k u_e) r dr - 2\pi \alpha u_k u_e R \Big|_{r=a}^R \quad (2.56)$$

Теперь домножим скалярно уравнение (2.55) на ru_k , а уравнение (2.56) на rV_k :

$$2\pi \int_a^R \left(\mu u'' + \frac{\mu}{r} u' - \rho i\omega u - f \right) r u_k dr = 0$$

$$2\pi \int_a^R (\rho V - \rho i\omega u) r V_k dr = 0$$

Сложив полученные уравнения и произведя замену переменных в одном из интегралов $(ru'' + u')dr = d(ru')$, получим:

$$2\pi \left\{ \int_a^R \mu u_k d(ru') + \int_a^R \rho V V_k r dr - i\omega \int_a^R \rho u_k V_k r dr - i\omega \int_a^R \rho u V_k r dr - \int_a^R f u_k r dr \right\} = 0 \quad (2.57)$$

Подставим в (2.57) выражение $u = \sum_{l=1}^{\infty} c_l u_l$ и $V = \sum_{l=1}^{\infty} c_l V_l$, и возьмем по частям первый интеграл.

$$2\pi \left\{ \mu u_k r u' \Big|_a^R - \int_a^R \mu \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l u'_l \right) u'_k dr + \int_a^R \rho \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l V_l \right) V_k r dr - \right. \\ \left. - i\omega \int_a^R \rho \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l V_l \right) u_k r dr - i\omega \int_a^R \rho \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l u_l \right) V_k r dr - \int_a^R f u_k r dr \right\} = 0 \quad (2.58)$$

Теперь учитывая краевые условия $\mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\alpha i\omega u$, $u(a) = 0$, видим, что выражение (2.58) можно записать в виде:

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_l 2\pi \int_a^R \rho i\omega u_l i\omega u_k r - \mu u_l u'_k r dr - 2\pi i\omega \sum_{l=1}^{\infty} c_l \int_a^R \left(\int_a^R V_l V_k + u_l i\omega u_k \right) r dr -$$

$$-2\pi\alpha u_k u_k R - \int_0^R f u_k r dr = 0$$

Вспоминая выражения для скалярных квадратов (2.56), (2.57) и учитывая, что $(x_k, x_e)_1 = 0$, $(x_k, x_e)_2 = 0$ при $\omega_k \neq \omega_e$ получим:

$$c_k(x_k, x_k)_1 + i\omega c_k(x_k, x_k)_2 - (f, u_k) = 0$$

$$c_k = \frac{(f, u_k)}{(x_k, x_k)_1 + i\omega(x_k, x_k)_2}$$

Из работы [66] известно, что $\lambda_k = -\frac{(x, x)_1}{(x, x)_2}$.

Тогда

$$c_k = \frac{(f, u_k)}{(-\lambda_k + i\omega)(x_k, x_k)_2}$$

Теперь зная выражение для c_k можем найти решение рассматриваемой задачи $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$.

Интегралы при вычислении скалярного квадрата и (f, x_k) считались численным методом Симпсона.

Результаты представлены на рисунках 2.23, 2.24, 2.25, 2.26 (показаны зависимости собственных форм от частоты вынуждающей силы, единицей обозначено решение найденное аналитическим методом, 2- при представлении решения в виде суммы из двух слагаемых, 3-где различие заметно – решение в виде суммы четырех слагаемых), для $\alpha = 0,2; 0,9; 1,0; 10,0$ соответственно. В таблице 2.9 даны значения относительной погрешности решения в виде ряда в процентах для различных значений параметра внешнего трения и различных частот вынуждающей силы. Для всех рассмотренных параметров внешнего трения, в том числе и для $\alpha = 1$, уже при шести учтенных членах разложения погрешность имеет порядок одного – двух процентов. При этом нельзя не отметить, что при очень малых (α порядок 0,2 – 0,5) и при очень больших ($\alpha \approx 10$) уже при четырех членах разложения погрешность составляет десятые доли процентов.

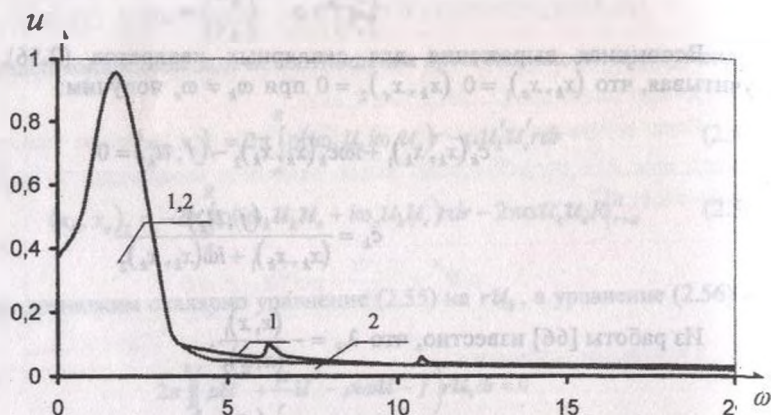


Рис.2.23. Зависимости собственных форм от частоты вынуждающей силы.

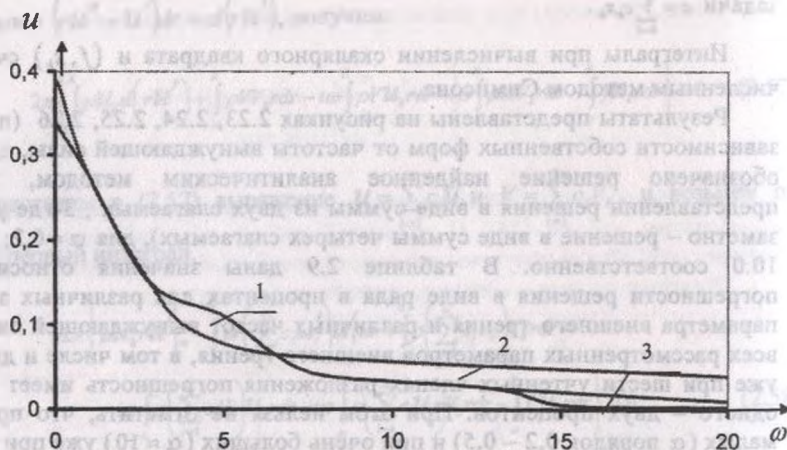


Рис.2.24. Зависимости собственных форм от частоты вынуждающей силы.

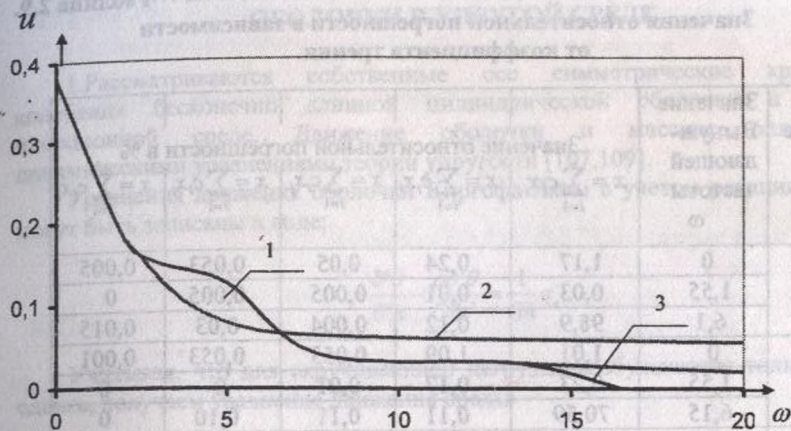


Рис. 2.25. Зависимость собственных форм от частоты вынуждающей силы.

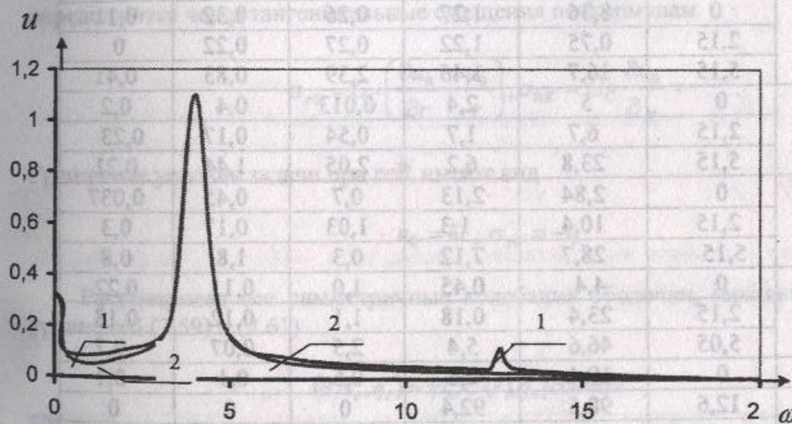


Рис. 2.26. Зависимость собственных форм от частоты вынуждающей силы.

Таблица 2.9.

**Значения относительной погрешности в зависимости
от коэффициента трения**

Значение α	Значение Вынуж- дающей частоты ω	Значение относительной погрешности в %				
		$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$	$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$	$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$	$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$	$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$
$\alpha=0$	0	1,17	0,24	0,05	0,053	0,005
	1,55	0,03	0,01	0,005	0,005	0
	6,1	98,9	0,12	0,004	0,03	0,015
$\alpha=0,2$	0	1,01	1,09	0,053	0,053	0,001
	1,55	0,23	0,17	0,01	0	0
	6,15	70,59	0,11	0,11	0,10	0
$\alpha=0,5$	0	0,24	0,08	0,053	0	0
	1,1	0,94	0,47	0,23	0,023	0
	5,75	50	1,14	1,2	1,28	1,0
$\alpha=0,9$	0	7,55	0,34	0,24	0,11	0,05
	5,15	22,58	4,3	1,07	0,21	0,21
	0	8,36	1,27	0,26	0,32	0,11
$\alpha=0,95$	2,15	0,75	1,22	0,27	0,22	0
	5,15	16,7	1,46	2,39	0,83	0,41
	0	5	2,4	0,013	0,4	0,2
$\alpha=0,98$	2,15	6,7	1,7	0,54	0,17	0,23
	5,15	23,8	6,2	2,05	1,44	0,21
	0	2,84	2,13	0,7	0,45	0,037
$\alpha=1,0$	2,15	10,4	1,3	1,03	0,17	0,3
	5,15	28,7	7,12	0,3	1,8	0,8
	0	4,4	0,45	1,0	0,11	0,22
$\alpha=1,1$	2,15	23,4	0,18	1,1	0,12	0,18
	5,05	46,6	5,4	2,5	0,07	0,7
$\alpha=10$	0	19,4	0,6	0,6	0,1	0,1
$\alpha=10$	12,6	98,5	92,4	0	0	0
$\alpha=100$	0	19,4	0,56	0,58	0,11	0,106
$\alpha=100$	4,1	99	0	0	0	0
$\alpha=100$	12,55	100	99	0,9	0,013	0

2.7. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

1. Рассматриваются собственные осе симметрические крутильные колебания бесконечно длинной цилиндрической оболочки в упругой инерционной среде. Движение оболочки и массива описываются динамическими уравнениями теории упругости [107,109].

Уравнения движения оболочки Киргофа-Лявы с учетом реакции массива могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial' \theta}{\partial' x} - \frac{\rho \partial' \theta}{G \partial' t} = \frac{1}{Gh} q, \quad (2.59)$$

Учитывая, что для скручивающей нагрузки возбуждаются только волны сдвига, получаем уравнение движения среды

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} = \frac{\rho_c \partial^2 u_\theta}{G_c \partial t^2} \quad (2.60)$$

Значения, отличных от нуля, компонентов тензора напряжений в среде определяются через тангенциальные смещения по формулам

$$\sigma_{r\theta} = G_c \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \sigma_{\theta x} = G_c \frac{\partial u_\theta}{\partial x}$$

Граничные условия задачи при $r=R$ имеют вид

$$u_\theta = U, \sigma_{r\theta} = -q_c \quad (2.61)$$

Рассматривая осе симметричные колебания оболочки, находим решения уравнений (2.59) и (2.61)

$$(u_\theta, q_c) = \{\theta_0, U(r), q_0\} \cos m x e^{i \omega t} \quad (2.62)$$

где

m – длина волны вдоль образующей ;

ω – круговая частота собственных колебаний .

Подставив выражения (2.62) в (2.59), получим связь между амплитудами реакции массива и перемещениями оболочки.

$$q_0 = G \chi^2 (\chi^2 \omega^2 - \delta^2) U; \quad \chi = h/R \quad \delta = mR;$$

$$\omega^2 = \frac{\rho R^2}{G \chi^2} \omega'^2; \quad U_0 = U/h \quad (2.63)$$

Зависимости (2.63) позволяют граничное условие для среды при $r=R$ в виде:

$$\sigma_{r\theta}^0 = -G \chi^2 (\chi^2 \omega' - \delta^2) U_0; \quad (2.64)$$

Подставив выражение (2.62) в (2.60), получаем

$$\frac{d^2 U_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_0}{dr} - \frac{U_0}{r^2} - (\delta^2 - \alpha^2) U_0 = 0 \quad (2.65)$$

где,

$$\bar{r} = r/R; \quad U_0 = U/h; \quad \alpha^2 = \chi^2 \gamma / \rho \omega'^2; \quad \gamma = G/G_c; \quad \rho' = \rho/\rho_c$$

Решая уравнения (2.65) с учетом условия затухания колебаний на бесконечности, имеем

$$\begin{aligned} U_0 &= AK_1(\beta r'); & \alpha < \delta; & & U_0 &= A/r; & \alpha = \delta; \\ U_0 &= AH_1^{(2)}(\beta r'); & \alpha > \delta, & & & & \end{aligned} \quad (2.66)$$

где,

$K_1(x), H_1^{(2)}(x)$ — функции Макдональда и Ханкеля.

$$\beta = \sqrt{\delta^2 - \alpha^2}; \quad \bar{\beta} = \sqrt{\alpha^2 - \delta^2}.$$

Если не учитывать инерционность среды, то $\rho_c = 0 (\alpha = 0)$ и решением уравнения (2.66) будет равенство

$$U_0 = AK_1(\delta r') \quad (2.67)$$

Подставив решения (2.67) в (2.61) с учетом (2.65), получим характеристическое уравнение:

$$\chi \gamma (\delta^2 - \chi^2 \omega'^2) + 2 - \bar{\beta} \frac{H_0^{(1)}(\bar{\beta})}{H_1^{(1)}(\bar{\beta})} = 0, \alpha > \delta \quad (2.68)$$

При $\alpha < \delta$ в уравнении (2.68) в место последнего слагаемого необходимо вставить со знаком плюс выражение $\beta K_0(\beta)/K_1(\beta)$.

Условие $\alpha = \delta$ выполняется для $\rho' = \gamma + 2/\chi\delta^2$, этот случай не представляет практического интереса, так как для большинства материалов $\rho' < \gamma$. Заметим, что частота колебаний оболочки в вакууме

$$(\gamma = \infty) \quad \omega = \delta/\chi \quad (2.69)$$

В безинерционной среде:

$$\omega^2 = (\chi\gamma\delta^2 + 2 + \delta K_0(\delta)/K_1(\delta))/\chi^3\gamma \quad (2.70)$$

Для оболочки в инерционной среде собственные частоты колебаний определяются решением трансцендентного уравнения (2.70) на ЭВМ.

Опишем колебания оболочки уравнениями типа Тимошенко. Тогда для осесимметричного крутильного движения имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{k^2}{R} \beta - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= \frac{1}{Gh} q_c \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 12 \frac{k^2}{h^2} \beta - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \frac{6}{Gh^2} q_c \end{aligned} \quad (2.71)$$

где,

k^2 — коэффициент Тимошенко; β — угол поворота нормали в тангенциальном направлении.

Граничные условия для среды при $r=R$ имеют вид:

$$u_0 = r + \frac{h}{2} \beta; \quad \sigma_{r\theta} = -q_c \quad (2.72)$$

Представляя решение уравнений (2.71) в виде (2.62), определим параметры q_c :

$$\begin{aligned} q_{c0} &= Gx^3 \frac{a_1 \alpha_1}{Gk^2 + x\alpha_1} \bar{U}_0; \quad \alpha_1 = G\gamma \frac{a_1}{GR^2 + x\alpha_1} \bar{U}_0 \\ a_1 &= \chi^2 \omega^2 - \delta^2 - 12 \frac{k^2}{x^2}; \quad a_2 = \chi^2 \omega^2 - \delta^2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Учитывая выражение (2.77), преобразовываем граничное условие для среды:

При $\gamma=1$;

$$\sigma_{\theta}^0 = -G\chi^2 \frac{a_2}{a_3 a_4} U_0$$

где,

$$a_3 = 1 + \frac{k_2}{x} \frac{6}{a_1}; \quad a_4 = 1 + \left(\frac{3a_2}{a_1 a_3} \right) \quad (2.74)$$

Поскольку решение уравнения движения среды не зависит от принятой модели оболочки, дальнейший вывод уравнений аналогичен рассмотренному выше для оболочки Киргофа-Лява. Выбор модели оболочки влияет только на вид граничных условий (2.74).

Вместо характеристического уравнения (2.71) запишем уравнения

вида:
$$\chi\gamma \frac{a_2}{a_3 a_4} + 2 - \bar{\beta} \frac{H_0^{(2)}(\bar{\beta})}{H_1^{(2)}(\bar{\beta})} = 0; \quad \alpha > \delta \quad (2.75)$$

Для случая $\rho_c = 0 (\alpha = 0)$ получаем характеристическое уравнение для оболочки Тимошенко в без инерционной среде. При $G_c = 0$ находим частоты крутильных колебаний оболочки Тимошенко в вакууме

$$\omega_1 = \delta / \chi; \quad \omega_2 = \frac{1}{x} \sqrt{\delta^2 + 12 \frac{k^2}{x^2}} \quad (2.76)$$

Первая частота, как и для оболочки Киргофа-Лява, соответствует повороту сечения как кольцо, вторая - форме колебаний, вызванных поворотом нормали в тангенциальном направлении.

Положив в уравнениях (2.65), (2.71) $h = 0 (\alpha = 0)$ и введя безразмерную частоту $\omega^2 = \rho_c R^2 \omega^2 / G_c$ получим характеристическое уравнение для собственных осе симметричных крутильных колебаний упругого инерционного массива с цилиндрической полостью,

$$\bar{\beta}_2 H_0^{(2)}(\bar{\beta}_2) - 2 H_1^{(2)}(\bar{\beta}_2) = 0, \quad (2.77)$$

причем $\omega > \delta_1$
$$\bar{\beta}_2 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

Частотное уравнение (2.77) решалось численным методом Мюллера, при следующих значениях параметра $h = 0.05; v_0 = 0.25; \eta = \rho_c / \rho_0 = 0.1$

Результаты расчетов представлены в таблице 2.10.

Таблица 2.10.

Изменение комплексной собственной частоты, в зависимости от отношения модуля Юнга $\{E_1 / E_0\}$

E_1/E_0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15
Ω_R	1.208D+00	1.2976D+00	1.2670D+00	1.1665D+00	1.0050D+00
$-\Omega_1$	1.9767D-01	4.5891D-01	7.1776D-01	9.5568D-01	1.1758D+00
E_1/E_0	0.18	0.21	0.24	0.27	0.3
Ω_R	7.6822D-01	3.5025D-01	3.7852D-08	6.5434D-11	2.3252D-09
$-\Omega_1$	1.3691D+00	1.5506D+00	1.1038D+00	9.2554D-01	8.2096D-01
0					
					0.33
					3.0838D-09
					7.4780D-01

Из результатов видно, что с увеличением модуля упругости и коэффициента Пуассона соответствующие собственные частоты механической системы медленно увеличиваются.

2. Пусть бесконечно длинная цилиндрическая оболочка с радиусом $r=R$ погружена в упругую среду. Рассматриваемая проблема сводится к решению плоской задачи строительной механики. Основные уравнения для таких задач и плоской деформации сводятся к следующему [119].

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{C_p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{C_s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.78)$$

где,

φ и ψ - являются потенциалами перемещения;

C_p, C_s - фазовые скорости распространения волн расширения и сдвига.

Тогда граничные условия будут такими:

$$\begin{aligned} \text{при } r=R: & \quad u_r^{(1)} = u_0; \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_0 \\ \text{при } r=R-h: & \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

здесь индекс 1 обозначает оболочку.

Общее решение уравнений движения цилиндрического слоя запишем в виде:

$$U_{\theta}^{(1)} = A_1 K_1(\beta_1 r) + \beta_1 I_1(\beta_1 r); \quad \chi \omega < \delta$$

$$U_0^{(1)} = A_1 \frac{1}{r} + \beta_1 r; \quad \chi\omega = \delta; \quad (2.80)$$

$$U_0^{(1)} = A_1 Y_1(\bar{\beta}_1 r) + \beta_1 J_1(\bar{\beta}_1 r); \quad \chi\omega > \delta$$

$$\beta_1 = \sqrt{\delta^2 - \chi^2 \omega^2}; \quad \bar{\beta}_1 = \sqrt{\chi^2 \omega^2 - \delta^2}$$

$J_1(x), Y_1(x)$ -функции Бесселя и Неймана первого порядка.

Подставляя выражение (2.80) в (2.78) и удовлетворяя граничные условия 79) получаем характеристическое уравнение

$$\det |a_{ij}| = 0; \quad i, j=1, 2, 3. \quad (2.81)$$

Элементы определителя: $\det |a_{ij}|$

1) $\chi\omega < \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \delta$; $\sqrt{\frac{\rho}{\gamma}} \delta < \chi\omega < \delta$ $\delta < \chi\omega$ имеет различный вид. Например, в третьем случае:

$$a_{11} = Y_1(\bar{\beta}_1) a_{12} = J_1(\bar{\beta}_1) a_{13} = -H_1^{(2)}(\bar{\beta}_1);$$

$$a_{21} = \bar{\beta}_1 Y_0(\bar{\beta}_1) - 2Y_1(\bar{\beta}_1) a_{22} = \bar{\beta}_1 J_0(\bar{\beta}_1) - 2J_1(\bar{\beta}_1); \quad (2.82)$$

$$a_{23} = -(1/\gamma)(\bar{\beta}_1 H_1^{(2)}(\bar{\beta}_1)) - 2H_1^{(2)}(\bar{\beta}_1);$$

$$a_{31} = \bar{\beta}_1 Y_0(\bar{\beta}_1, \varepsilon) - (2/\varepsilon)Y_1(\bar{\beta}_1, \varepsilon);$$

$$a_{32} = \bar{\beta}_1 J_0(\bar{\beta}_1, \varepsilon) - (2/\varepsilon)J_1(\bar{\beta}_1, \varepsilon) a_{33} = 0; \varepsilon = 1 - \chi$$

Для всех рассмотренных видов уравнения движения оболочки получены численные результаты. На рис.2.27 показана зависимость безразмерной частоты крутильных колебаний от относительной толщины оболочки. Расчет 1 проводим для

$$\delta = 3, \gamma = 30, \rho = 4, k^2 = 2/3$$

Кривая 1 -соответствует первой моде движения ,2-второй ,3-третьей. Сплошной линией отмечена оболочка в инерционном массиве, пунктирной - в безинерционной среде, штрих пунктирной - в вакууме. Результаты, полученные при описании движения оболочки уравнениями теории упругости

(2.71), соответствуют кривой — 0 —. Расчеты показали, что для первой моды движения результаты по всем трем теориям практически совпадают, причем влияние среды на частоту колебаний особенно существенно для сравнительно тонких оболочек ($\chi < 0.03$). Если инерционность среды не учитывается, значение первой частоты завышается. На третью частоту (вторую для оболочки Тимошенко) среда почти не влияет. Так, для оболочки толщиной $\chi < 0.07$ полученные значения частоты практически совпадают с точными.

Если движения оболочки описываются уравнениями теории упругости, появляется вторая мода (кривая 2), связанная с неравномерным скручиванием цилиндра по толщине, вызванным наличием упругого массива.

Таким образом, для определения первой частоты колебаний оболочки в упругой среде необходимо пользоваться уравнениями (2.82) (формула (2.71) дает завышенные значения), для высших частот колебаний уравнением (2.81).

Зависимость первой частоты колебаний оболочки в упругой среде от безразмерной длины волны для различной относительной жесткости массива представлена на рис. 2.28 ($\chi = 0.01$). Для кривых $1 - \gamma = 120, \rho = 4$; $2 - \gamma = 30, \rho = 4$; $3 - \gamma = 5, \rho = 1$

Сплошной линией показаны частоты колебаний оболочки в инерционном массиве, пунктирной — безинерционном, штрихпунктирной — в вакууме. Как видно из рис. 2.28 с увеличением жесткости массива растет погрешность вносимая не учетом инерционности среды (особенно в области коротких волн). Используя асимптотические представления цилиндрических функций, получаем формулы для первой частоты собственных колебаний в случае длинных волн.

$$\omega^2 = \frac{\bar{P}}{\chi^2 \gamma} (a + \sqrt{a^2 + b})$$

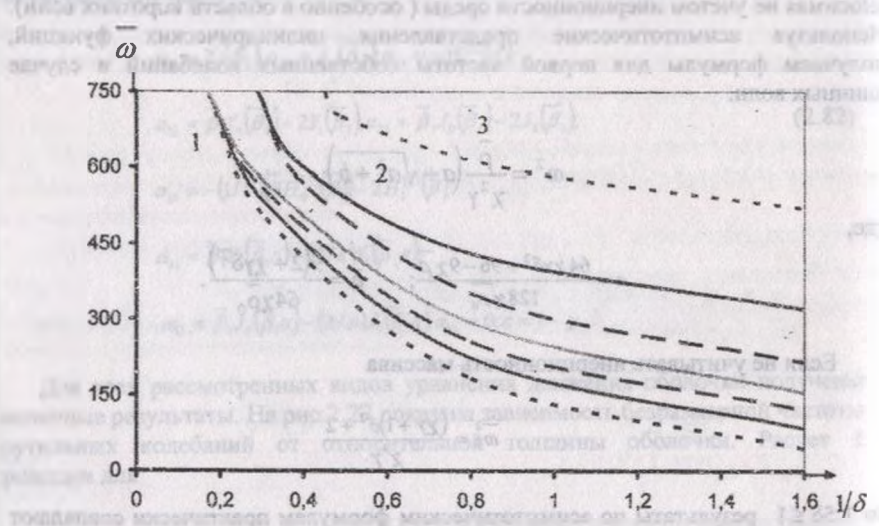
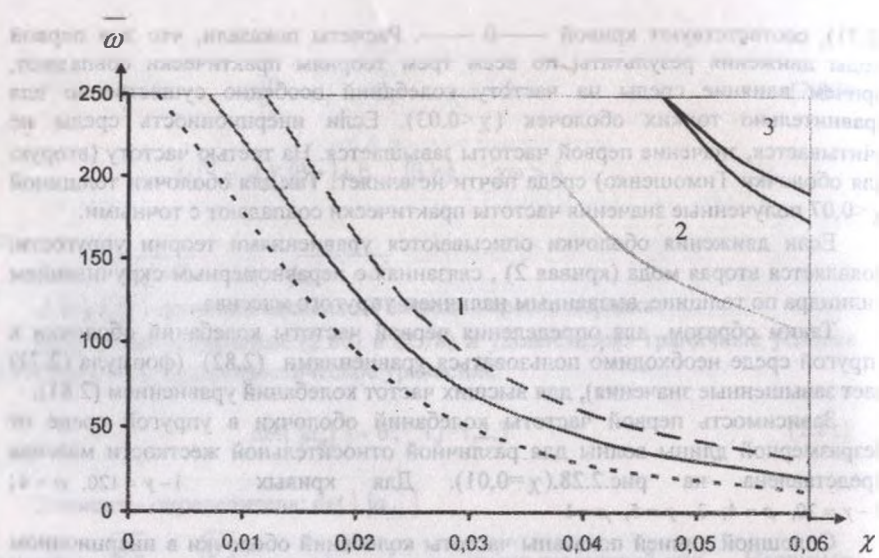
где,

$$a = \frac{64\chi\gamma\delta^2 + 96 - 9\chi\bar{\rho}}{128\chi\bar{\rho}_0}, \quad b = \frac{9(2 + \chi\gamma\delta^2)}{64\chi\bar{\rho}_0}$$

Если не учитывать инерционность массива

$$\omega_0^2 = \frac{(\chi\gamma + 1)\delta^2 + 2}{\chi^2 \gamma}$$

то $1.58 \leq 1$ результаты по асимптотическим формулам практически совпадают с точным решением.



2. 8. ЗАЩИТА ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ОТ ПЛОСКИХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Конструктивно система виброзащиты может осуществляться следующим образом: данные объекты размещаются в достаточно жестких пустотелых конструкциях (например, толстостенных железобетонных трубах), и все сооружение может быть полностью заглублено в грунт. Виброзащита внутреннего объекта от передающегося на него через внешнюю часть сооружения сейсмовзрывного воздействия может быть выполнена с помощью линейных поглотителей колебаний. Выбор линейных упругих амортизаторов зависит от уровня требований, предъявляемых к виброзащитной системе [4].

В настоящей работе рассматривается частный случай такой системы (рис.2.29 а, б). В качестве расчетной модели принята следующая: внешняя часть системы представляет жесткий пустотелый круговой цилиндр бесконечной длины, помещенный в упругой системе, заложенный в грунт, предполагается достаточно большой, влиянием поверхности земли можно пренебречь.

Амортизируемый агрегат представляет симметричное относительно оси цилиндра тело бесконечной длины, ось инерции которого совпадает с его геометрической осью. Внутреннее тело прикреплено на упругих элементах соосно к внешнему цилиндру.

Демпфирующие элементы отсутствуют. Нормально к оси падает плоская гармоническая продольная или поперечная упругая волна.

Для решения задачи введем координаты кругового цилиндра r, θ , так, что ось совпадает с осью системы. Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, остановимся на анализе колебаний и поперечных упругих волн (рис. 2.29а, 2.29б).

Граничные условия, выражающие абсолютный контакт цилиндра со средой могут быть в виде

$$U_r|_{r=a} = x \cos \theta + y_0 \sin \theta \quad U_\theta|_{r=a} = -x \sin \theta + y_0 \cos \theta + \gamma_0 \quad (2.83)$$

Динамические граничные условия, выраженные через потенциалы смещений [104]:

$$U_0 = \frac{\rho a}{m} \int_0^{2\pi} [\varphi \cos \theta + \psi \sin \theta] d\theta, V_0 = \frac{\rho a}{m} \int_0^{2\pi} [\varphi \sin \theta + \psi \cos \theta] d\theta$$

$$\gamma = \frac{\rho a}{I} \left[\frac{4\pi\gamma}{k_2} - \int_0^{2\pi} \psi d\theta \right]$$

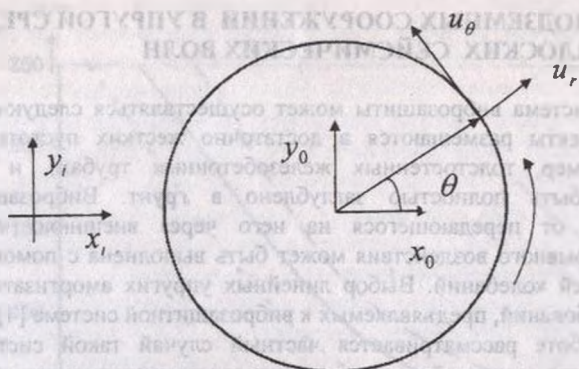


Рис. 2.29а - Координаты продольных и поперечных волн.

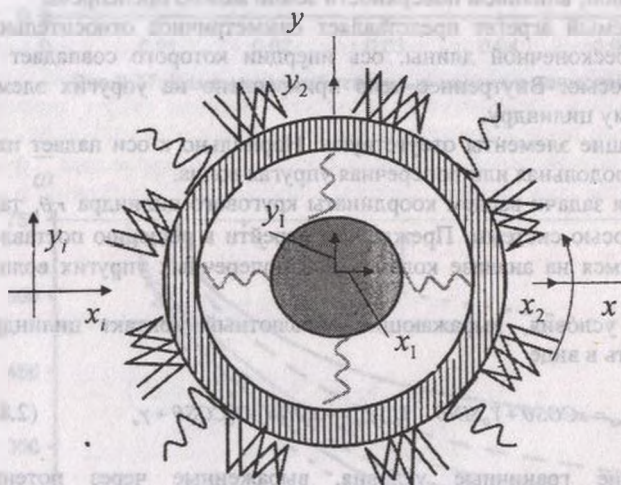


Рис. 2.29б - Расчетная схема амортизируемого агрегата.

Плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси X , с продольным смещением X и потенциалом

$$\varphi_1 = (-ik_1)^{-1} x_1 e^{-ik_1 x_1 + i\omega t}; \quad (2.84)$$

или ее можно представить в виде

или ее можно представить в виде

$$\varphi = 2(-ik)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n I_n(k, r) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (2.85)$$

Пусть продольная волна с потенциалом (2.84) падает на цилиндр (рис.2.29а), тогда решение можно искать в виде:

а) для продольных рассеянных волн.

$$\varphi_p = A_n H_n^{(2)}(k_1 r) \cos n\theta \quad (2.86)$$

б) для поперечных рассеянных волн.

$$\psi_s = B_n H_n^{(2)}(k_1 r) \sin n\theta \quad (2.87)$$

Коэффициенты A_n и B_n неизвестны;

$H_n^{(2)}(z)$ -функции Ханкеля второго рода порядка n функции Ханкеля удовлетворяют условию при $z \rightarrow \infty$. Выбор тригонометрических функций в (2.86) и (2.87) следует из симметрии задачи. Подставляя сумму выражений (2.85), (2.86) и разложение (2.87) в уравнение (2.83), на основании ортогональности тригонометрических функций или интегральной теоремы Фурье можно заключить, что перемещения жесткого цилиндра соответствует пространственная гармоника $n=1$. Тогда, при $Y_0 = \gamma = 0$ с учетом преобразованного динамического уравнения, будем иметь систему трех линейных уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & k_1 a H_1^{(2)}(k_1 a) & H_1^{(2)}(k_2 a) \\ 1 & H_1^{(2)}(k_1 a) & k_2 a H_1^{(2)}(k_2 a) \\ \beta_0 & H_1^{(2)}(k_1 a) & H_1^{(2)}(k_2 a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 / x_i \\ -\frac{A_1}{a} \\ -\frac{B_1}{a} \end{pmatrix} = \frac{2}{k_1 a} \begin{pmatrix} k_1 a j_1(k_1 a) \\ j_1(k_1 a) \\ j_1(k_1 a) \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Система уравнений совпадает с приведенной в [104], ее решение относительно, полученное с помощью функциональных соотношений:

$$2H_1^{(2)}(z) = H_1^{(2)} - H_2(z), 2z^{-1}H_1^{(2)}(z) = H_0^{(2)}(z) + H_2^{(2)}(z), I_1(z)H_1^{(2)}(z) - I_1(z)H_1^{(2)} = -2i/\pi.$$

Также, следуя [104], запишем в вид

$$\frac{x_0}{x} = \frac{\varphi(k_1 a)}{q(k_1 a; k_2 a; \beta_0)}; \varphi(k_1 a) = 4i \left[\frac{\pi}{(k_1 a)^2} H_2^{(2)}(k_1 a) \right]^{-1}$$

$$q(k_1 a; k_2 a; \beta_0) = 1 - \frac{\beta_0 - 1}{2} [h(k_1 a) + h(k_2 a)] h(ka) = H_0^{(2)}(ka) / H_2^{(2)}(ka)$$

Амплитудные кривые (x_0/x_1) для $\nu = 0,25$ приведены на (рис. 2.30а) $\beta = 1,2$. При падении плоской волны с поперечным смещением J_1 : имеющий потенциал

$$\psi_1 = -(ik_2)^{-1} Y_1 e^{-ik_2 r} \quad (2.89)$$

Исходя из симметрии задачи можно сразу получить:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{\varphi(k_1, a)}{q(k_1, a; k_2, a; \beta_0)} \quad (2.90)$$

Цилиндр при падении на него поперечной волны совершает вращательные колебания относительно продольной оси. Для определения поворота, решение можно искать в виде:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-ik_2)^{-1} J_1(-i) J_n(k_1 r) + C_n H_n^{(2)}(k_2 r) \right] \cos n\theta, \quad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n H_n^{(2)}(k_1 r) \sin n\theta$$

Подставляя эти разложения в (2.83):

$$\gamma = \frac{2\pi^2 \rho}{I} \left[\frac{2\gamma}{k_2^2} + \frac{iJ_1 J_0 k_2}{k_2} - C_0 H_0^{(2)}(k_2, l) \right] \quad (2.91)$$

очевидно, поворот цилиндра определяется только поперечным потенциалом с нулевой ($n=0$) пространственной гармоникой. Учитывая это обстоятельство и подставляя выражение для поперечного потенциала из условия (2.89), положив в нем $x_0 = y_0 = 0$, получим

$$\gamma_0 = iJ_1 J_0(k_2 a) - k_2 C_0 H_0^{(2)}(k_2, a) \quad (2.92)$$

Исключая C_0 , будем иметь [101]:

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_0} = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left\{ \left[2 - \frac{I(k_2 a)}{2\pi^2 \rho} \right] H_1^{(2)}(k_2, l) - k_2 a H_0^{(2)}(k_2, a) \right\}^{-1}$$

Значения $\frac{\gamma_0}{\gamma_0}$ при $G = 1/4$ и $1/\pi \alpha^4 q = 1/2$ приведены на (рис. 2.30б).

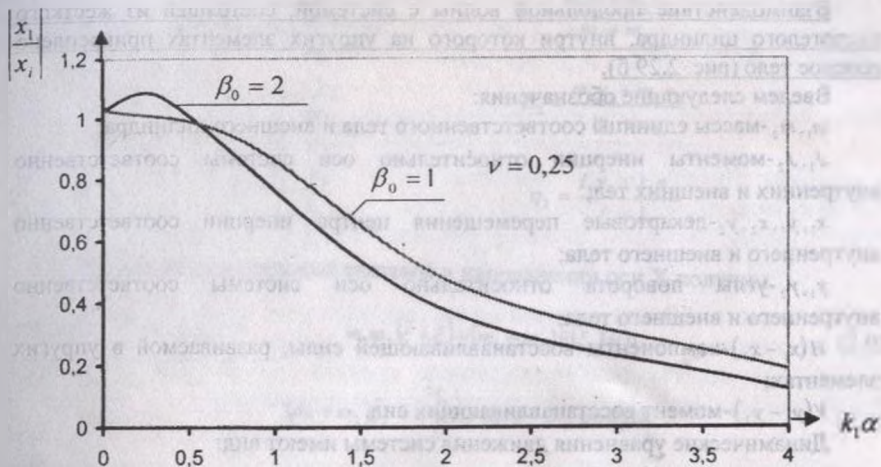


Рис. 2.30а.- Амплитудные кривые x_0/x_i при падении плоской волны.

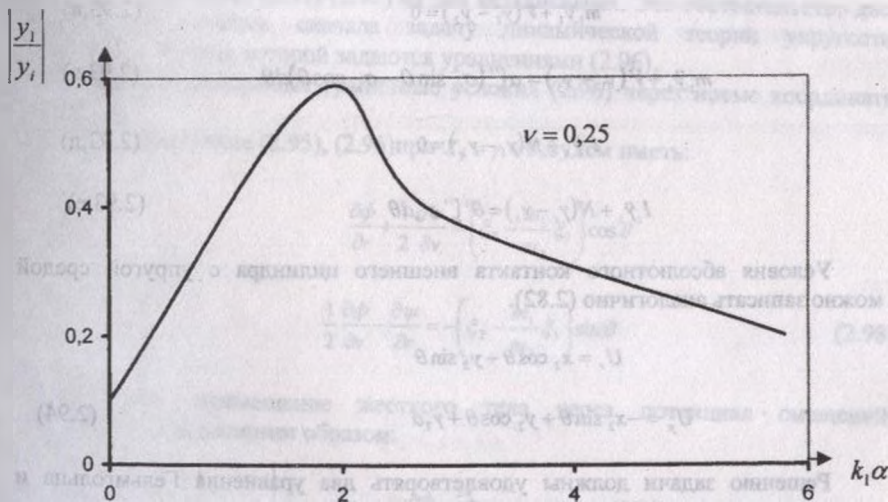


Рис. 2.30б - Значение $\frac{y_1}{y_i}$ для поперечного потенциала.

Взаимодействие продольной волны с системой, состоящей из жесткого пустотелого цилиндра, внутри которого на упругих элементах прикреплено соосное тело (рис. 2.29 б).

Введем следующие обозначения:

m_1, m_2 - массы единицы соответственного тела и внешнего цилиндра;

J_1, J_2 - моменты инерции относительно оси системы соответственно внутренних и внешних тел;

x_1, y_1, x_2, y_2 - декартовы перемещения центра инерции соответственно внутреннего и внешнего тела;

γ_1, γ_2 - углы поворота относительно оси системы соответственно внутреннего и внешнего тела;

$H(x_1 - x_2)$ - компоненты восстанавливающей силы, развиваемой в упругих элементах;

$V(y_1 - y_2)$ - момент восстанавливающих сил.

Динамические уравнения движения системы имеют вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 + H(x_1 - x_2) = 0 \quad (2.93, a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - H(x_1 - x_2) = a \int_0^{2\pi} (\sigma_{xx} \cos \theta - \sigma_{xy} \sin \theta) d\theta \quad (2.93, б)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + V(y_1 - y_2) = 0 \quad (2.93, в)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + V(y_1 - y_2) = a \int_0^{2\pi} (\sigma_{xy} \sin \theta - \sigma_{yy} \cos \theta) d\theta \quad (2.93, г)$$

$$I_1 \ddot{\gamma}_1 + N(\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \quad (2.93, д)$$

$$I_2 \ddot{\gamma}_2 + N(\gamma_1 - \gamma_2) = a \int_0^{2\pi} \sigma_{xy} d\theta \quad (2.93, е)$$

Условия абсолютного контакта внешнего цилиндра с упругой средой можно записать аналогично (2.82).

$$U_r = x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta$$

$$U_y = -x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta + \gamma_2 a \quad (2.94)$$

Решению задачи должны удовлетворять два уравнения Гельмгольца и граничные условия (2.93).

Введем новые координаты движения систем $\xi_1, E_1, \eta_1, \xi_2, E_2, \eta_2$:

$$\xi_1 = \frac{x_1 - x_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\xi_2 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$E_1 = \frac{y_1 - y_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$E_2 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

$$\eta_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 + \frac{I_1}{I_2}}$$

$$\eta_2 = \frac{I_1 \gamma_1 + I_2 \gamma_2}{I_1 + I_2}$$

Тогда для перемещений системы в направлении оси X получим:

$$m_1 m_2 (\ddot{\xi} + \xi) + (m_1 + m_2) R(\xi_1) = 0 \quad (2.95)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{\xi}_2 = a \int_0^{2\pi} [\delta_{22} \cos \theta - \delta_{2\phi} \sin \theta] d\theta \quad (2.96)$$

где,

$$R(\xi) = R(x_1 - x_2) \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (2.97)$$

Использование новых координат движения системы позволило разделить уравнения движения (2.93)–(2.97) на два независимых. Это обстоятельство дает возможность решать сначала задачу динамической теории упругости, граничные условия которой задаются уравнениями (2.96).

Выразим контактные граничные условия (2.96) через новые координаты движения.

Учитывая также (2.95), (2.96) при $J_2 = \gamma = 0$, будем иметь:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial v} = \left(\xi_2 - \frac{m_1}{m_2} \xi_1 \right) \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\xi_2 - \frac{m_1}{m_2} \xi_1 \right) \sin \theta \quad (2.98)$$

выраженное перемещение жесткого тела через потенциал смещений, выражается следующим образом:

$$\xi_2 = \frac{\rho \phi}{m_1 + m_2} \int_0^{2\pi} [\phi \sin \theta - \psi \cos \theta] d\theta \quad (2.99)$$

Далее решение задачи будем искать в виде (2.90) и (2.92). Тогда интегрирование правой части (2.99) после подстановки в него указанных разложений при $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ и $\psi = \psi_1 + \psi_2$ дает:

$$\beta \xi_2 = \frac{2x_1}{k_1 a} J_1(k_1 a) + A_1 H_1^{(2)}(k_1 a) + B H_1^{(2)}(k_2 a) \quad (2.100)$$

где,

$$\beta = \frac{m_1 + m_2}{\pi \rho a^2}$$

Очевидно, из общего волнового поля, возмущенного движением системы и характеризуемого разложениями, как и ранее, выделяется одна пространственная гармоника $n=1$. После подстановки решения в условие (2.100), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & k_1 a H_1^{(0)}(k_1 a) & H_1^{(0)}(k_1 a) \\ 1 & H_1^{(0)}(k_1 a) & k_1 a H_1^{(0)}(k_1 a) \\ \beta & H_1^{(0)}(k_1 a) & H_1^{(0)}(k_2 a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 - \frac{m_1}{m_2} \xi_2 \\ -\frac{A}{a} \\ -\frac{B}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a J_1'(k_1 a) \\ J_1(k_1 a) \\ J_1(k_2 a) \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

При отсутствии внутреннего тела ($m_1 = 0$), решение очевидно переходит в (2.101).

Система алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Задача приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2} X_\beta\right) \ddot{\xi} + \lambda(\xi_1) \dot{\xi} = -\ddot{X}_0 \quad (2.102)$$

где,

$$\lambda(\xi_1) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \theta \left[\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \xi \right]$$

$$X_\beta = \frac{q(k_1 a; k_2 a; 0)}{q(k_1 a; k_2 a; \beta)}$$

В низкочастотном приближении при $k_1 a \rightarrow 0$ коэффициент трения стремится к нулю и рассеяние энергии системой за счет уходящих в бесконечность волн практически отсутствует. В этом случае среда оказывает, главным образом, инерционное воздействие на систему. Приращение инерции будет равно тогда массе вытесненной среды. В области низких и средних

частот $1/2 \leq k, a \leq 2+3$ среда оказывает максимальное как инерционное, так и демпфирующее влияние на движение системы.

Также следует, что при больших значениях k, a это влияние становится менее значительным.

Установлено, что в высокочастотном диапазоне при увеличении общей массы системы β , среда слабее реагирует на движение системы.

Коэффициент Пуассона ν не оказывает существенного влияния на колебание системы, однако при $\nu=1/2$ (случай сжимаемой жидкости) за счет нарушения принятых условий контакта влияние среды на систему резко уменьшается; при $k, a \rightarrow 0$ ее поведение в этом случае зависит от массы β .

(1.1)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F \cos(\omega t + \phi)$$

ГЛАВА III. ДИФРАКЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ, СЕЙСМИЧЕСКИХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

3.1. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОДЗЕМНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ С ЖИДКОСТЬЮ

При землетрясениях от очага к сооружению подходит сейсмическая волна, которая несет с собой определенную энергию. Если эпицентр близкий, а гипоцентр глубокий по отношению к рассматриваемому сооружению, первой к нему подходит объемная продольная волна, т.е. волна сжатия – растяжения. Она проходит по сооружению так же, как через грунт, меняя при этом свои характеристики из-за изменения упругих свойств среды. За объемной продольной подходит объемная поперечная (сдвиговая) волна, которая и несет с собой основную массу энергии. В случае достаточно протяженных подземных сооружений, воздействия направленные перпендикулярно к ее продольной оси, окружающая среда и обделка сводится к плоской задаче динамической теории упругости (или вязко упругости). В предположении обобщенного плоско деформированного состояния уравнение движения в смещениях имеет вид [27]

$$(\lambda + 2\mu)gr\operatorname{div}\bar{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{u} + \bar{b} = \rho\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где, λ и μ – модули упругости, называемыми постоянными Ламе; $\bar{b}$ – вектор плотности объемных сил ($b = 0$); ρ – плотность материала, $\bar{u}$ – вектор смещения, который зависит от r, θ, t .

Поставленная задача решается в потенциалах перемещений

$$\bar{u} = u_r\bar{i} + u_\theta\bar{k}; \quad u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Потенциалы φ и ψ удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{C_\alpha^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{C_\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (3.2)$$

где, φ и ψ – являются потенциалами перемещений, C_α и C_β – фазовая скорость распространения волн расширения и сдвига.

В работе [27] показано, что жидкость можно считать идеальной, а ее движение без вихревым и изотермическим.

При давлениях до 100 МПа движение жидкости вполне удовлетворительно описывается волновыми уравнениями для потенциалов скорости частиц жидкости [28]

$$\nabla \varphi = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где, C_0 – скорость звука в жидкости. Потенциал φ и вектор скорости жидкости связаны зависимостью $\vec{V} = \text{grad} \varphi$.

Давление жидкости можно определить с помощью линейаризованного интеграла Коши-Лагранжа

$$P = -\rho_0 C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где, ρ_0 – плотность жидкости.

При условии безотрывного обтекания жидкости нормальный компонент скорости жидкости и оболочки на поверхности их контакта должны быть равны. Отсюда следует следующее граничное условие

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial u_n}{\partial t},$$

где, S_0 – поверхность контакта; n – нормальные поверхности оболочки; u_n – перемещения оболочки по нормали.

Падающая плоская волна расширения (или сдвига) рассматривается распространяющейся в положительном направлении оси x и представляется следующим образом (рис.3.1)

$$\varphi^{(p)} = \varphi_0 e^{i(\alpha x - \omega t)}; \quad \psi^{(p)} = 0; \quad \text{или} \quad \psi^{(p)} = \psi_0 e^{i(\beta x - \omega t)}; \quad \varphi^{(p)} = 0,$$

где, φ_0 или ψ_0 – величина амплитуды; ω – круговая частота; $\alpha^2 = \omega^2 / C_p^2$ и $\beta^2 = \omega^2 / C_s^2$ – волновые числа расширения и сдвига соответственно.

Если граница области, в которой изучается волновое поле, уходит в бесконечность, тогда требуются дополнительные условия в бесконечности. Впервые эти условия получены Зоммерфельдом и подробно обсуждены в работах [27,28]. Если функция φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (в нашем случае удовлетворяет), то однозначность решения задачи в бесконечной области можно обеспечить требованиям условия излучения Зоммерфельда. Здесь r радиус в цилиндрической системе координат. На границе двух тел,

выполняется условие жесткого контакта, т.е. выполняется условие равенства соответствующих перемещения и напряжения

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}; \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}; u_r^{(1)} = u_r^{(2)}; u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)};$$

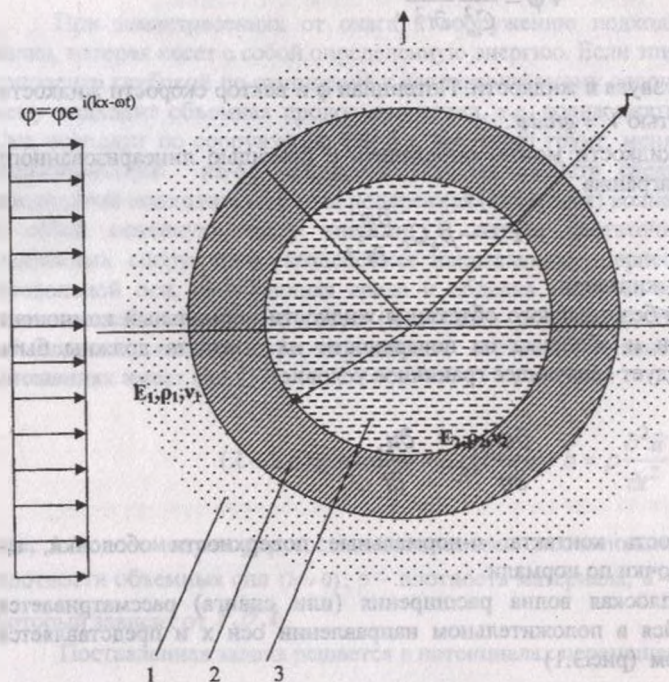


Рис. 3.1 Расчетная схема цилиндрического тела с жидкостью.

Одна из задач посвящена распространению гармонических сдвиговых волн, в двумерном упругом теле с круглым отверстием (подкрепленным). В такой постановке изучается наложение подходящих волн и отраженных от отверстия волн сдвига и растяжения – сжатия, что приводит к концентрации напряжения. Решение дифракционной задачи для плоской гармонической сдвиговой волны получено в [27], которые имеет следующий вид ($\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$, $\sigma_\theta = \mu \beta^2 \psi_0$; ψ_0 – амплитуда падающих волн, μ – коэффициент Ламе)

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{n \left(n^2 - 1 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2}\right) H_n(\alpha a)}{\Delta_n} \sin n\theta e^{-i\omega t}$$

где,

$$\Delta_n = \alpha a H_{n-1}(\alpha a) \left[(n^2 - 1) \beta a H_{n-1}(\beta a) - (n^3 - n + \frac{1}{2} \beta^2 \alpha^2) H_n(\beta a) \right] +$$

$$+ H_n(\alpha a) \left[- (n^3 - n + \frac{1}{2} \beta^2 \alpha^2) \beta a H_{n-1}(\beta a) + (n^2 - n - \frac{1}{4} \beta^2 \alpha^2) \beta^2 \alpha^2 H_n(\beta a) \right],$$

$H_n(\beta a)$ – функция Ханкеля; $\alpha = \omega/C_p$; $\beta = \omega/C_s$; C_p и C_s – соответственно скорости распространения продольных и поперечных волн; ω – круговая частота, $\pi = 3,14$.

Расчеты методами теории упругости дают при отсутствии обделки вокруг отверстия и длине волны существенно больше диаметра отверстия следующее приближенное выражение для напряжений по периметру

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2Gv_0}{c_s} (1 - c_s^2/c_p^2) \sin 2\theta \sin \omega t,$$

где, G – модуль сдвига для грунта, v_0 – амплитуда скорости падающий сейсмические волны.

Ввиду того, что длины сейсмических волн как правило превышают характерные размеры поперечных сечений выработок (например диаметр D), особый интерес представляют решение дифракционных задач для длинноволновых воздействий, т.е. когда $\frac{D}{\lambda} < 1$. Максимальные коэффициенты

динамических концентраций напряжений K_σ (отношение максимальных напряжений на контуре к амплитуде падающей плоской волны) на рис.3.2, в зависимости от значений параметра $\frac{D}{\lambda}$ и коэффициента Пуассона ν материала

плоскости. При больших длинах волн ($\frac{D}{\lambda} = 0,04 \div 0,16$) максимальные коэффициенты динамических концентраций оказалась на 5 – 10% больше, чем при соответствующем двусном статическом нагружении ($\lambda \rightarrow \infty$) [27]. При $\frac{D}{\lambda} > 0,16$ динамические концентрации напряжений существенно ниже статических. Числовые результаты, представленные на рис.3.2 и рис.3.3, показывает, что здесь в отличие от случая жесткого включения [27], величина K_σ очень сильно зависит от $\frac{D}{\lambda}$. Эти различия можно отнести к возможности

распространения обобщенных волн типа Релея на вогнутой свободной цилиндрической поверхности полости. Учет вязких свойств материала окружающей среды при расчете на действие сейсмических волн, снижает напряжения и перемещения на 10 – 15%. Расчеты показывают, что при фиксированных значениях амплитуд и длительности действия падающей волны с увеличением акустических параметров жидкости, прогибы и усилия также увеличиваются. В области длинных волн распределения напряжения трубы с жидкостью и без жидкости отличается до 15%, а в области коротких волн в некоторых значениях частоты они отличаются до 40%. При отверстии с обделкой напряжения в грунте будет меньше, чем для случая отверстия без усиления. С другой стороны, усиления будут подвергаться напряжениям от сейсмических нагрузок и должны их выдерживать. В радиальном направлении отрыв усиления от окружающей скалы не допускается. Тогда сейсмическая нагрузка на усиление при падающих волнах с длиной значительно больше диаметра отверстия равна

$$\sigma_{\pi} = -\frac{6G_s v_0}{c_s} \sin 2\theta \sin \omega t,$$

где, G_s – модуль сдвига для грунта; v_0 – амплитуда скорости падающей сейсмической волны.

Если же задача рассматривается в статической постановке, то вычисления существенно упрощаются. При этом в случае уменьшения жесткости облицовки сейсмическая нагрузка на нее существенно снижается. Отсюда можно прийти к выводу о том, что для более эффективной работы при сейсмических воздействиях облицовки следует выполнять податливыми, а не очень жесткими и хрупкими. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Методы волновой динамики позволили решить ряд плоских и пространственных задач о концентрациях напряжений в линейно упругой постановке. Полученные результаты показывают, что при воздействии сейсмических волн на сооружения возникает сложное поле, которое принципиально не может быть изучено другими методами. В следующем примере рассмотрим поле динамических напряжений и смещений, возникающее вблизи горных выработок (цилиндрических полости) и включения произвольной плотности в упругой среде при прохождении плоской волны сдвига. Падающая плоская волна сдвига рассматривается в положительном направлении оси x и представляется следующим образом

$$\psi^{(p)} = \psi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\beta r) \cos n\theta e^{-i\omega t}, \varphi^{(p)} = 0,$$

где, ψ_0 – величина амплитуды; ω – круговая частота; а $\beta = \omega/C_\beta$ – волновое число сдвига; $C_\beta^2 = \mu/\rho$; λ и μ – константы Ламе; ρ – плотность; $\epsilon_n = \{1, n=0; 2, n \geq 1\}$; J_n – функция Бесселя; ψ_0 – амплитуда падающих волн; (r, θ) – полярная системы координат.

Если начало полярной системы координат поместить в центре цилиндрической поверхности разрыва, то отраженные волны можно представить таким образом

$$(\psi^{(s)})_{\psi^{(s)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n H_n(\alpha r)}{B_n H_n(\beta r)} \right) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

где, $\alpha = \omega/C_\alpha$ – волновое число сжатия; H_n – функции Ханкеля; A_n и B_n – коэффициенты разложения, которые определяются соответствующими граничными условиями.

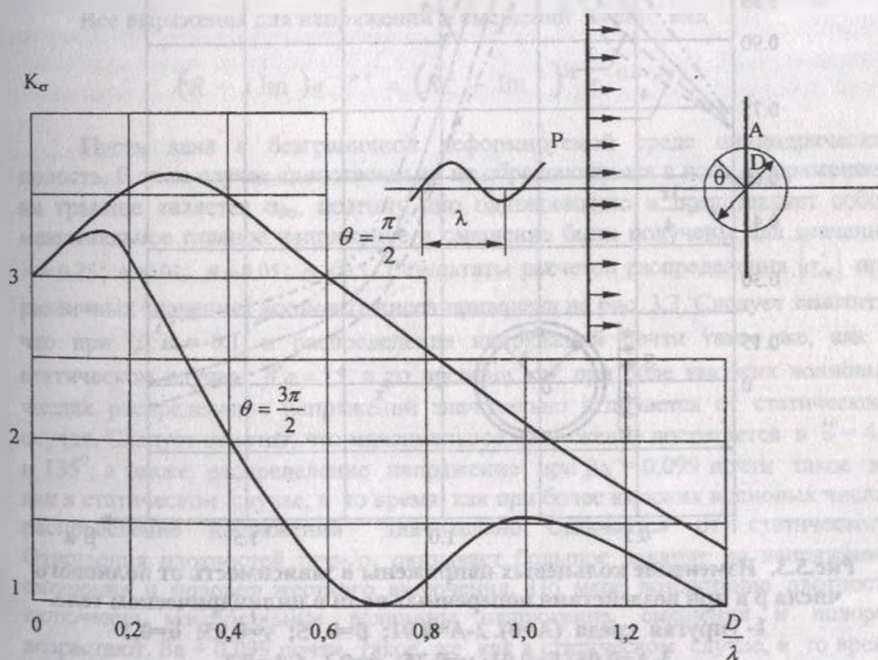


Рис.3.2. Зависимость коэффициента концентрации напряжения от длины волны.

Граничные условия при $r=a$, где a - радиус цилиндрической поверхности разрыва будет $\sigma_r = \sigma_{\theta} = 0$ (радиальное и касательное напряжение). Коэффициенты A_n и B_n - определяются из предыдущих условий для каждого значения n . Если длина падающей волны сдвига стремится к бесконечности, решение полученные для случаев полости и жесткого выключения, должны сводиться к статическим решением [27]

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}^* = -4 \sin 2\theta$$

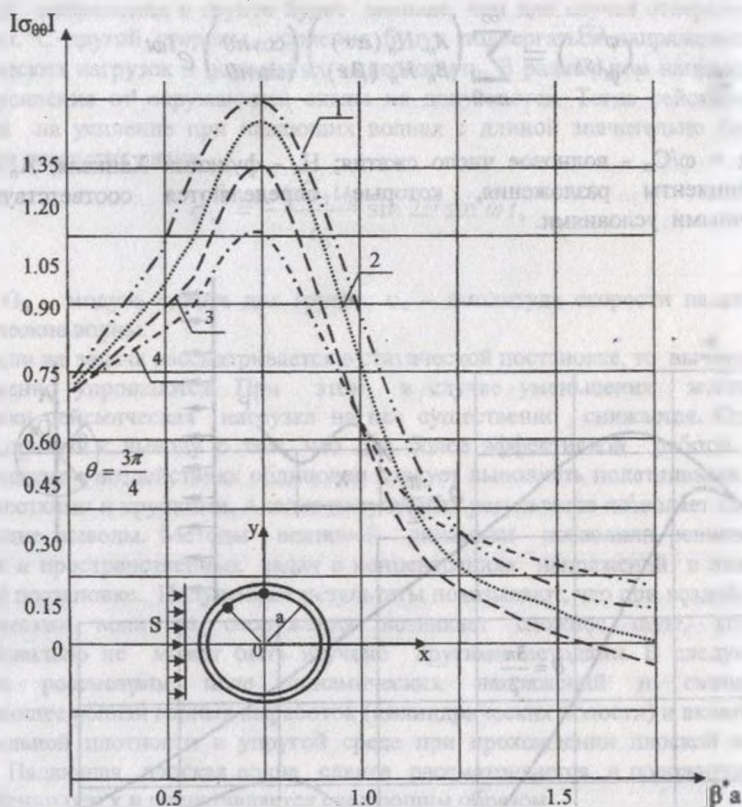


Рис.3.3. Изменение кольцевых напряжений в зависимости от волнового числа βa при воздействия поперечных волн в цилиндрическом теле.

1- упругая среда ($A=0$). 2- $A=0,01$; $\beta=0,05$; $\nu=0,25$; $\alpha=0,1$
 3- $A=0,05$; $\beta=0,01$; $\nu=0,25$; $\alpha=0,1$ 4- $A=0,3$.

На границе $r=a$ безразмерные напряжения $\sigma_{\theta\theta}^*(\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0, \sigma_0=\mu\beta^2\psi_0)$ выражаются следующими формулами

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -\frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{n \left(n^2 - 1 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2}\right) H_n(\alpha a)}{\Delta_n} \cdot \sin n\theta,$$

где,

$$k^2 = \beta^2 / \alpha^2 = \frac{c_\alpha^2}{c_\beta^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \nu - \text{коэффициент Пуассона};$$

$$\Delta_n = \beta^2 \alpha^2 \left(n^2 + n - \frac{\beta^2 \alpha^2}{4} \right) H_n(\alpha a) H_n(\beta a) + \alpha \beta a^2 (n^2 - 1) H_{n-1}(\alpha a) \times \\ H_{n-1}(\beta a) + \left(n - n^3 - \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right) [\beta a H_n(\alpha a) H_{n-1}(\beta a) + \alpha a H_{n-1}(\alpha a) H_n(\beta a)].$$

Все выражения для напряжений и смещений имеют вид

$$(R + i \operatorname{Im}) e^{-i\omega t} = (R^2 + \operatorname{Im}^2)^{1/2} e^{-i(\omega t - \gamma)}.$$

Пусть дана в безграничной деформируемой среде цилиндрическая полость. В этом случае единственным, не обращающимся в ноль, напряжением на границе является $\sigma_{\theta\theta}$, поэтому оно одновременно и представляет собою максимальное главное напряжение и смещение были получены для значений $\nu=0.25$; $A=0.01$; $\beta=0.05$; $\alpha=0.1$. Результаты расчетов распределения $|\sigma_{\theta\theta}^*|$ при различных значениях волновых чисел приведена на рис. 3.3. Следует заметить что при $\beta^*a=0,1$ и распределения напряжений почти такое же, как в статическом случае, $\beta^*a=1,5$ в то время как при более высоких волновых числах распределение напряжений значительно отличается от статического случая. Следует отметить, что максимальное напряжение достигается в $\theta=45^\circ$ и 135° , а также распределение напряжения при $\beta a=0,099$ почти такое же как в статическом случае, в то время как при более высоких волновых числах распределение напряжений значительно отличается от статического. Отношения плотностей $\eta=\rho_0/\rho_1$ оказывает большое влияние на напряжения, смещения и поворот жесткого включения. По мере возрастания плотности включения максимальные величины напряжения, смещения и поворота возрастают. $\beta a=0,099$ почти такое же как в статическом случае, в то время как при более высоких волновых числах распределение напряжений значительно отличается от статического. Отношения плотностей $\eta=\rho_0/\rho_1$ оказывает большое влияние на напряжения, смещения и поворот жесткого

включения. По мере возрастания плотности включения максимальные величины напряжения, смещения и поворот возрастают.

Эти величины становятся более заметными при отношении плотности 0,5. Для определения резонансных частот колебаний необходимо найти собственные значения, которые являются корнями частотных уравнений $\Delta_n = 0$. Все собственные значения можно определить при помощи итерационного метода Мюллера [56]. Итерационный метод представляет собой схему квадратичной интерполяции, которая дает быструю сходимость в окрестности корня решения даже при грубом первом приближении. В качестве примера рассмотрим собственные колебания цилиндрического слоя, находящегося в упругой среде. Задача сводится к решению системы однородных алгебраических уравнений. Из условия существования решения однородных алгебраических уравнений следует-определитель уравнений должен быть равен нулю. Если считать, что $v_1=v_2$, $\rho_1=\rho_2$, $E_1=E_2$, получим результаты расчетов собственных частот колебаний цилиндрического отверстия в упругой среде. Полученные результаты совпадают с результатами, полученными в работе [74] с разницей до 10 % ($N = 150$, $v=0,20$). В таблице 3.1 приведены собственные частоты колебаний цилиндрических слоев, находящихся в упругой среде при различных значениях отношения модуля упругости материалов ($v=0,20$; $v_2=0,25$; $\rho_1/\rho_2=0,45$; $E=E_1/E_2$). Установлено, что с увеличением отношения модуля упругости волновая диссипация в среде происходит

Таблица 3.1.
Собственные частоты цилиндрических отверстий, находящихся в упругой среде.

0	1	2	3	4	N
0,44647	1,09272	1,30754	2,75652	3,63132	$R_\epsilon \omega$
-i44127	-i0,76538	-i0,89781	-i0,99154	-i1,06662	$I_m \omega$
		0,28620	0,79461	1,29786	$R_\epsilon \omega$
		-i0,27857	-i0,32447	-i0,34471	$I_m \omega$
		0,40406	1,23248	2,07816	$R_\epsilon \omega$
		-i1,78516	-i0,22814	-i2,57984	$I_m \omega$
				0,25806	$R_\epsilon \omega$
				-i1,10251	$I_m \omega$
				0,41540	$R_\epsilon \omega$
				-i3,10033	$I_m \omega$

интенсивнее в высших частотах. Таким образом, разработанная методика и алгоритм для решения поставленных задач, позволяют найти напряженно-деформированное состояние цилиндрических тел при воздействии гармонических волн.

3.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВЫРАБОТКА ОТ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

В работе изучается реакция цилиндрического слоя находящегося в вязкоупругой среде, при воздействии поперечной (продольной) сейсмической волны. Предполагаем, что гармоническая волна плоская и что фронт волны параллелен оси цилиндрического слоя (рис.3.4). Основные уравнения теории вязко упругости для этой задачи о плоской деформации сводятся к следующему уравнению

$$\Delta \varphi - \int [R_\lambda(t-\tau) + 2R_\mu(t-\tau)] \Delta \varphi d\tau = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad (3.3)$$

$$\Delta \bar{\psi} - \int R_\mu(t-\tau) \Delta \bar{\psi} d\tau = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2},$$

где $a^2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho$; $b^2 = \mu_0/\rho$; φ и $\bar{\psi}$ – потенциалы перемещений. $R_\lambda(t-\tau)$ и $R_\mu(t-\tau)$ – ядро релаксации; ν – коэффициент Пуассона, которого считаем нерелаксирующей величиной [46].

Падающая плоская волна рассматривается распространяющейся в положительном направлении оси x и представляется следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi^{(i)} = \varphi_0 e^{i(\alpha x - \omega t)}, \varphi^{(i)} = \text{при воздействии продольных волн} \\ \bar{\psi}^{(i)} = \bar{\psi}_0 e^{i(\beta x - \omega t)}, \bar{\psi}^{(i)} = \text{при воздействии волн сдвига} \end{cases} \quad (3.4)$$

где, φ_0 и $\bar{\psi}_0$ – величины амплитуды; ω – круговая частота; α и β – волновые числа, которые должны быть комплексными числами

$$\alpha = \alpha_R + i\alpha_I; \quad \beta = \beta_R + i\beta_I, \quad (3.5)$$

$\alpha_I < 0$ и $\beta_I < 0$ обозначают коэффициенты затухания; α_R и β_R обозначают волновые числа продольных волн и волн сдвига соответственно. Решение уравнения (3.3) можно искать в виде:

$$\varphi(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r, \theta) e^{i\omega t}; \quad \bar{\psi}(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k(r, \theta) e^{i\omega t}, \quad (3.6)$$

где, $\varphi_k(r, \theta)$ и $\bar{\psi}_k(r, \theta)$ – действительные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\Phi_k + \frac{\alpha_k}{1-L_k}\Phi_k = 0; \Delta\psi_k + \frac{\beta_k}{1-M_k}\psi_k = 0;$$

$$\text{где, } L_k = \int_0^\infty [R_1(\xi) + 2R_\mu(\xi)] \exp(-i\omega\xi) d\xi, M_k = \int_0^\infty R_\mu(\xi) \exp(-i\omega\xi) d\xi. \quad (3.7)$$

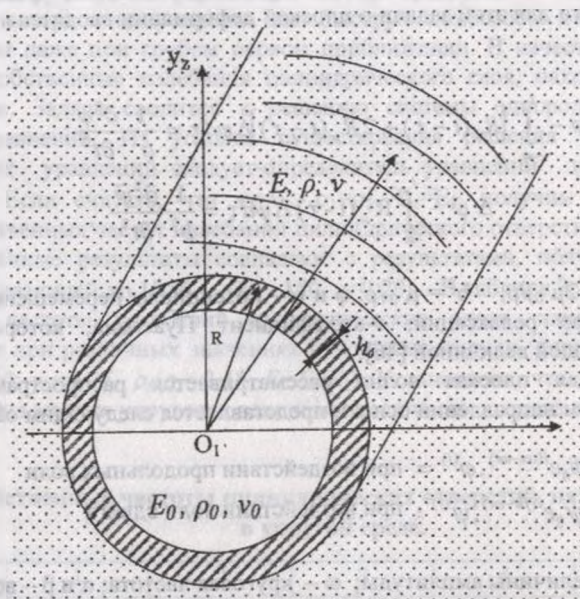


Рис.3.4. Расчетная схема цилиндрического подкрепленного отверстия находящегося в вязкоупругой среде.

Для описания вязкоупругих свойств материала использована наследственная теория Больцмана – Вольтера с ядром релаксации Ржаницына – Колтунова в виде $R(t) = Ae^{-\beta t^{\alpha-1}}$. При этом синус $\Gamma^{(s)}$ и косинус $\Gamma^{(c)}$ образны Фурье ядро релаксации $R(t)$ выражается через $\Gamma(\alpha)$ -Гамма функция

$$\Gamma^s = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\alpha/2}} \sin(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}), \quad \Gamma^c = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\alpha/2}} \cos(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}).$$

Решение уравнения (3.7) выражается через функции Ханкеля 1-го и 2-го рода n -го порядка:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\alpha^* r) + A_n' H_n^{(2)}(\alpha^* r) \right] \cos n\theta e^{-i\omega t} \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n H_n^{(1)}(\beta^* r) + B_n' H_n^{(2)}(\beta^* r) \right] \sin n\theta e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (3.8)$$

$$\alpha_{kA}^{*2} = \frac{\alpha_{kA}}{1 - L_k}; \quad \beta_k^{*2} = \frac{\beta_k}{1 - M_k}, \quad (3.9)$$

где, A_n, A_n', B_n, B_n' — коэффициенты разложения, которые определяются соответствующими граничными условиями; $H_n^{(1)}(\alpha^* r)$ и $H_n^{(2)}(\alpha^* r)$ — соответственно функция Ханкеля 1-го и 2-го рода n -го порядка $H_n^{(2)}(\alpha r) = I_n(\alpha r) - iN_n(\alpha r)$.

Решение (3.8) удовлетворяет в бесконечности $r \rightarrow \infty$ условию излучения Зоммерфельда (2,146).

Для этого должно быть $A_n' = B_n' = 0$. Решение уравнения (3.7) представляется в виде:

$$\begin{aligned}\varphi^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha^* r) \cos(n\theta) e^{-i\omega t}; \\ \psi^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta^* r) \sin(n\theta) e^{-i\omega t}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Полный потенциал можно определить путем наложения потенциалов падающих и отраженных волн. Таким образом, потенциалы смещений будут [114]:

$$\varphi = \varphi^{(i)} + \varphi^{(k)}, \quad \varphi^{(p)} = \varphi(r, \theta, t), \quad \psi = \psi^{(i)} + \psi^{(k)}, \quad \psi^{(p)} = \psi(r, \theta, t). \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что напряжения и смещения легко могут быть выражены через потенциалы смещений

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \tilde{\lambda} \nabla^2 \varphi + 2\tilde{\mu} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \right]; \\
\sigma_{\theta\theta} &= \tilde{\lambda} \nabla^2 \varphi + 2\tilde{\mu} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right]; \\
\sigma_{zz} &= \tilde{\lambda} \nabla^2 \varphi; \quad \sigma_{r\theta} = 2\tilde{\mu} 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right),
\end{aligned} \quad (3.12)$$

где,

$$\{(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) f(t)\} = (\lambda_0, \mu_0) \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_{\lambda, \mu}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right],$$

$f(t)$ – некоторая функция; u_r – радиальное смещение; u_θ – тангенциальное смещение; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}$ – элементы тензора деформации; $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ – элементы тензора напряжений.

Как упоминалось выше, коэффициенты A_n и B_n определяются из соответствующих граничных условий.

Полость. Граничные условия при $r = a$, a – радиус цилиндрической поверхности разрыва будет:

$$\sigma_{rr} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (3.13)$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются из соответствующих граничных условий для каждого значения n . Таким образом, концентрации напряжений в потоке при воздействии волны сдвига (3.4) принимает следующее значение [134].

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -\frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} \frac{n(n^2 - 1 - \frac{\Omega_2}{2}) H_n(\Omega_1)}{\delta_n} \text{Sinn} \theta;$$

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \Omega_2^2 (n^2 + n - \frac{\Omega_2^2}{4}) H_n(\Omega_1) H_n(\Omega_2) + \Omega_1 \Omega_2 (n^2 - 1) * H_{n-1}(\Omega_1) H_{n-1}(\Omega_2) + \\
&+ (n^2 - n^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}) [\Omega_2 H_n(\Omega_1) H_{n-1}(\Omega_2) + \Omega_1 H_{n-1}(\Omega_1) H_n(\Omega_2)];
\end{aligned}$$

$$\Omega_1 = \alpha_1 a; \quad \Omega_2 = \beta_1 a; \quad K^2 = \frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{C_a^*}{C_A^2} = \frac{2(1-\nu) \Gamma_1^*}{(1-2\nu) \Gamma_2^*}$$

где, Γ_1^* и Γ_2^* – описывают вязкоупругие свойства материала.

Жесткие включения с произвольной жесткостью. Как указывалось выше, жесткие включения, вообще говоря, будут поворачиваться и перемещаться вместе с окружающей средой. Результирующие силы и крутящий момент, действующие на включения и приложенные к границе напряжений, появляющихся в результате действия падающей и отраженной волны, выражаются как

$$F_x = \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) a d\theta \Big|_{r=a};$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} (\sigma_{\theta\theta} \sin \theta - \sigma_{r\theta} \cos \theta) a d\theta \Big|_{r=a}, T = \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta} a^2 d\theta \Big|_{r=a}. \quad (3.14)$$

Подставляя выражения для σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ при $r = a$ в уравнения (3.14) и используя ортогональность функции, можно показать, что при $F_x = 0$ F_y зависит только от члена ряда при $n=1$, а T зависит от члена ряда при $n=0$. Из второго закона Ньютона известно, что

$$(\pi a^2 \rho_1) \ddot{U}_y = F_y; \quad \left(\frac{\pi \rho_1 a^2}{2} \right) \ddot{\theta} = T,$$

где, ρ_1 — плотность жесткого включения.

Таким образом, перемещение жесткого тела U_y и поворот θ жесткого включения могут быть определены интегрированием, если учесть, что поворот связан с членом при $n=0$, а перемещение с членом при $n=1$. Смещения на границе с включением ($r = a$) должны быть

$$U_r = V_y \sin \gamma \theta; \quad U_\theta = V_y \cos \gamma \theta + a \dot{\theta}.$$

Если выражения для U_r и U_θ подставить в уравнения (3.14) и использовать условия ортогональности, то получим, что A_n и B_n определяются из пары уравнений для каждого n .

Упругое цилиндрическое тело. В случае упругого цилиндрического тела в вязкоупругой среде на границе $r = a$ ставятся условия жесткого контакта, при которых на границе выполняется непрерывность напряжений и смещений:

$$\sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}; \quad \sigma_{r\theta1} = \sigma_{r\theta2};$$

$$u_{r1} = u_{r2}; \quad u_{\theta1} = u_{\theta2},$$

где, σ_{rr1} , $\sigma_{r\theta1}$ — напряжения в вязкоупругой окружающей среде; σ_{rr2} и $\sigma_{r\theta2}$ — напряжения вязкоупругого включения; u_{r1} , $u_{\theta1}$ — радиальное и тангенциальное

смещения окружающей среды; u_{r2} , $u_{\theta 2}$ - радиальное и тангенциальное смещения упругого включения. Если на границе контакта отсутствует трение, то $\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$; $\sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 2} = 0$; $u_{r1} = u_{r2}$.

Напряжения и смещения точек деформируемого тела имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2 \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\epsilon_n i^n \varphi_0 \in^{(1)}_{11} + A_n \in^{(3)}_{11} + B_n E^{(3)}_{12} \right) \cos n\theta e^{-i\omega t}; \\ \sigma_{r\theta} &= 2 \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\epsilon_n i^n \varphi_0 \in^{(1)}_{n1} + A_n \in^{(3)}_{n1} + B_n E^{(3)}_{n2} \right) \sin n\theta e^{-i\omega t}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2 \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\epsilon_n i^n \varphi_0 \in^{(1)}_{21} + A_n \in^{(3)}_{21} + B_n E^{(3)}_{22} \right) \cos n\theta e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (3.15)$$

где,

$$\begin{aligned}\in^{(3)}_{42} &= \left(n^2 + n - \frac{\beta^2 r^2}{2} \right) H_n^{(1)}(\beta_k^* r) + \beta_{,r} H_{n-1}^{(1)}(\beta_k^* r); \\ \in^{(1)}_{21} &= - \left(n^2 + n - \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right) I_n(\alpha_k^* r) + \alpha_{,r} I_{n-1}^{(1)}(\alpha_k^* r); \\ \in^{(3)}_{21} &= - \left(n^2 + n - \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right) H_n^{(1)}(\alpha_k^* r) + \alpha_{,r} H_{n-1}^{(1)}(\alpha_k^* r); \\ \in^{(3)}_{12} &= -n[(n+1)H_n^{(1)}(\beta_k^* r) - \beta_{,r} H_{n-1}^{(1)}(\beta_k^* r)]; \\ \in^{(1)}_{41} &= -n[-(n+1)I_n(\alpha_k^* r) + \alpha_{,r} I_{n-1}^{(1)}(\alpha_k^* r)]; \\ \in^{(3)}_{41} &= -n[-(n+1)H_n^{(1)}(\alpha_k^* r) + \alpha_{,r} H_{n-1}^{(1)}(\alpha_k^* r)].\end{aligned}$$

Подставляя (3.15) в граничные условия (3.13), найдем произвольные постоянные A_n и B_n .

$$A_n = -\epsilon_n i^n \varphi_0 \frac{\begin{vmatrix} \in^{(1)}_{11} & \in^{(3)}_{12} \\ \in^{(1)}_{41} & \in^{(3)}_{42} \end{vmatrix}}{\Delta_n}; \quad B_n = -\epsilon_n i^n \varphi_0 \frac{\begin{vmatrix} \in^{(3)}_{11} & \in^{(3)}_{12} \\ \in^{(3)}_{41} & \in^{(3)}_{42} \end{vmatrix}}{\Delta_n};$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \in^{(3)}_{11} & \in^{(3)}_{12} \\ \in^{(3)}_{41} & \in^{(3)}_{42} \end{vmatrix}.$$

где, $E_{11}^{(1)}$, $E_{11}^{(3)}$, $E_{12}^{(1)}$, $E_{42}^{(3)}$, $E_{11}^{(1)}$, $E_{41}^{(3)}$ определяется из $\epsilon_{11}^{(1)}$, $\epsilon_{41}^{(1)}$, $\epsilon_{12}^{(3)}$, $\epsilon_{42}^{(3)}$, $\epsilon_{11}^{(3)}$, $\epsilon_{41}^{(3)}$, подставляя вместо $r = a$.

Аналогично можно определить напряжения и перемещения в упругом цилиндрическом теле и окружающей его среде при воздействии продольных волн:

$$\sigma_x^{(i)} = -\sigma_0(1 + i\alpha x) \rightarrow -\sigma_0; \sigma_{xy}^{(i)} = \frac{-\nu}{1-\nu} \sigma_0(1 + i\alpha x) \rightarrow \frac{-\nu}{1-\nu} \sigma_0;$$

$$u_x^{(i)} = \alpha \varphi_0[-\alpha x] \rightarrow -\alpha^2 \varphi_0 x.$$

$$u_{r1} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \in_n i^n \varepsilon_{n1}^{(1)}(\alpha_1^* r) + A_n \varepsilon_{n1}^{(3)}(\alpha_1^* r) + B_n \varepsilon_{n2}^{(3)}(\beta_1^* r)] \cos n\theta e^{-i\omega t};$$

$$u_{\theta 1} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \in_n i^n \varepsilon_{n1}^{(1)}(\alpha_1^* r) + A_n \varepsilon_{n1}^{(3)}(\alpha_1^* r) + B_n \varepsilon_{n2}^{(3)}(\beta_1^* r)] \sin n\theta e^{-i\omega t};$$

$$u_{r2} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \varepsilon_{n1}^{(1)}(\alpha_1^* r) + D_n \varepsilon_{n1}^{(4)}(\alpha_2^* r) + M_n \varepsilon_{n2}^{(3)}(\beta_2^* r) + N_n \varepsilon_{n2}^{(4)}(\beta_2^* r)] \cos n\theta e^{-i\omega t};$$

$$u_{\theta 2} = r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \varepsilon_{n1}^{(1)}(\alpha_2^* r) + D_n \varepsilon_{n1}^{(4)}(\alpha_2^* r) + M_n \varepsilon_{n2}^{(3)}(\beta_2^* r) + N_n \varepsilon_{n2}^{(4)}(\beta_2^* r)] \sin n\theta e^{-i\omega t}.$$

Определение напряжений при $r=a$. Вблизи цилиндрической полости контурные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ при $r=a$ выражают концентрацию напряжений. Контур напряжений при воздействии продольной гармонической волны имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \left\{ (\bar{\alpha}a) H_{n-1}(\bar{\alpha}a) \left[(n^2 - 1) \bar{\beta} a H_{n-1}(\bar{\beta}a) - (n^3 - n + \frac{1}{2} \bar{\beta}^{-2} a^2) H_n(\bar{\beta}a) \right] - \right. \\ \left. - H_n^{(1)}(\bar{\alpha}a) \left[(n^3 - n + \frac{1}{2} \bar{\beta}^{-2} a^2) \bar{\beta} a H_{n-1}(\bar{\beta}a) - n^2 + n - \frac{1}{4} \bar{\beta}^2 a^2 \right] \right\}$$

Концентрация напряжений при воздействии волны сдвига (или поперечных волн) имеет следующий вид

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \frac{\sigma_0}{\sigma_0} \Big|_{r=a} = \frac{\nu}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\chi^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \in_n i^{n+1} S_n^* \cos n\theta e^{-i\omega t},$$

где,

$$S_n^* = \left\{ (n^2 - 1) \bar{\beta} a H_{n-1}(\bar{\beta}a) - (n^3 - n + \frac{1}{2} \bar{\beta}^{-2} a^2) H_n(\bar{\beta}a) \right\};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -\frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\chi^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{n(n^2 - 1 - \frac{\bar{\beta}^2 a^2}{2}) H_n^1(\bar{\alpha}a)}{\Delta_n} \sin n\theta e^{-i\omega t};$$

$$\Delta_n = \bar{\beta}^2 \alpha^2 (n^2 + n - \frac{\bar{\beta}^2 \alpha^2}{2}) H_n^{(1)}(\bar{\alpha} a) H_n^{(1)}(\bar{\beta} a) + \bar{\alpha} \bar{\beta} a^2 (n^2 - 1) H_{n-1}(\bar{\beta} a) + \\ + (n - n^2 - \frac{\bar{\beta}^2 \alpha^2}{2}) [\bar{\beta} \alpha H_n(\bar{\alpha} a) H_{n-1}(\bar{\beta} a) + \bar{\alpha} a H_{n-1}(\bar{\alpha} a) H_n(\bar{\beta} a)]$$

Напряжение на границе жесткого включения при воздействии волны сдвига ($\Gamma = a$) в безразмерном виде имеет вид:

$$\sigma_{\pi}^* = \frac{4}{\pi} \left\{ - \frac{(1 - \eta) H_1^{(1)}(\bar{\alpha} a)}{\delta_1} \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1} H_n(\bar{\alpha} a)}{\Delta n} \sin n \theta \right\} e^{-i \omega t},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \frac{2}{\pi} \left\{ - \frac{i \bar{\beta} a^2}{\bar{\beta}^3 a^3 H_1^{(1)}(\bar{\beta} a) + 8 \eta \left(\frac{\bar{\beta}^2 a^2}{2} H^{(1)}_0(\beta a) - \bar{\beta} a H_1(\beta a) \right)} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\delta_1} [(1 + \eta) H_1(\bar{\alpha} a) - \bar{\alpha} a H_0(\bar{\alpha} a) \cos \theta] - \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1} [-n H_n^{(1)}(\bar{\alpha} a) + (\bar{\alpha} a) H_{n-1}(\bar{\alpha} a)]}{\Delta n} \cos n \theta \right\} e^{i \omega t}$$

$$\delta_1 = -4 \eta H_1^{(1)}(\bar{\alpha} a) H_1(\bar{\beta} a) + (1 + \eta) \bar{\alpha} a H_0(\bar{\alpha} a) + H_0(\bar{\beta} a),$$

$$\Delta n = n \bar{\alpha} a H_{n-1}(\bar{\alpha} a) H_{n-1}(\bar{\beta} a) + n (\bar{\beta} a) H_{n-1}(\bar{\beta} a) H_n(\bar{\alpha} a) - \\ - \alpha \bar{\beta} a^2 H_{n-1}^{(1)}(\bar{\alpha} a) H_{n-1}^{(1)}(\bar{\beta} a).$$

Здесь $\eta = \rho/\rho_1$ представляет собой отношение плотности окружающей среды на плотность включения.

При воздействии продольных волн в жестком включении компоненты тензора напряжений $\sigma_{\pi\pi}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ принимают вид:

$$\sigma_{\pi}^* = -\frac{2}{\pi} \left\{ [(\bar{\alpha}) H_1^{(1)}(\bar{\alpha} a)]^2 - 2 [(1 + \eta) H_1^{(1)}(1 - \eta) H_1^{(1)}(\bar{\beta} a) - \bar{\beta} a H_0(\bar{\beta} a)] \cos(\theta/\Delta_1) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2}^{\infty} i^{n+1} [-\bar{\beta} a H_0(\bar{\beta} a)/\Delta_n] \cos n \theta \right\} e^{-i \omega t},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -\left(\frac{2}{\pi} \right) \left\{ 2(1 - \eta) - H_1^{(1)}(\bar{\beta} \sin \theta/\Delta_1) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} i^{n-1} [n H_n^{(1)}(\bar{\beta} a)/\Delta_n] \sin \theta \right\} e^{-i \omega t}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = (1 - \frac{1}{\chi^2}) \sigma_{\pi}^*; \chi^2 = \frac{\bar{c}_a^2}{\bar{c}_\beta^2}.$$

Компоненты тензора напряжений σ_{rr}^* и $\sigma_{\theta\theta}^*$ упругого цилиндрического включения при $r=a$ в условиях воздействия продольных волн принимают следующий вид:

$$\sigma_{rr}^* = \frac{\eta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n I_n(\bar{\alpha}_2 a) \bar{\beta}_1^2 a^2}{\Delta_n} \times \left\{ \beta_1 a H_{n-1}^{(0)}(\bar{\beta}_1 a) - (n^2 + n - \frac{\bar{\beta}_1^2 a^2}{2}) H_n^{(0)}(\bar{\beta}_1 a) \right\} \cos n\theta e^{-i\omega t},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -\frac{\eta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n i^{n+1}}{\Delta_n} \left\{ \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} - 1 \right) \left(\frac{n \bar{\beta}_1^2 a^2}{2} (n-1) - n^2 (n^2 - 1) - \eta \frac{\bar{\beta}_1^4 a^4}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\beta}_1^2 a^2}{4} \eta (n(n+1) - \frac{1}{2} \bar{\beta}_1^2 a^2) \right\} * \\ * I_n(\alpha_2 a) + \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} - 1 \right) \left(n^3 - n + \frac{1}{2} \bar{\beta}_1^2 a^2 \right) (\alpha_2 a) I_{n-1}(\alpha_2 a) H_n^{(0)}(\bar{\beta}_1 a) + \\ + \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} - 1 \right) (1 - n^2) (\alpha_2 \bar{\beta}_1 a^2) I_{n-1}(\alpha_2 a) H_{n-1}(\bar{\beta}_1 a) \left\} \cos n\theta e^{-i\omega t},$$

где,

$$\eta = \rho_2 / \rho_1 \quad \bar{\chi}^2 = \frac{\bar{\beta}_1^2}{\alpha_1^2}.$$

Функции Бесселя и Ханкеля действительного аргумента табулированы также, как тригонометрические функции логарифма и являются известными функциями своего аргумента. Поскольку это действительные функции, они описывают установившиеся волны, на самом деле, установившаяся цилиндрическая волна представляет собой суперпозицию двух бегущих волн: одна расходится с осью цилиндра, а другая сходится с ней. Так как при $r=0$ фазы этих двух волн противоположны, они гасят друг друга, и поэтому амплитуда установившейся волны остается конечной при $r=0$ [134]. Это утверждение используется при решении задачи распространения волн в вязкоупругих средах. В цилиндрической волне $I_0(kr)$ соответствует плоская установившаяся волна $\cos(kx - \pi/4)$; амплитуды последовательных максимумов вследствие распределения энергии на все большие цилиндрические поверхности не постоянны, а уменьшаются с расстоянием. Цилиндрическая волна $N_0(kr)$ асимптотически соответствует плоской волне $\sin(kx - \pi/4)$. На оси цилиндра ($r=0$) grad и падающей и отраженной волны одинаковы, а амплитуда отраженной волны становится бесконечно большой в противоположность случаю плоской волны; поэтому функция N_0 на оси цилиндра ($r=0$) имеет полюс, т.е. представляет собой источник.

Функции Ханкеля связаны с функциями Бесселя и Неймана следующими соотношениями:

$$H^{(1)}_0(x) = I_0(x) + i N_0(x) \quad \text{и} \quad H^{(2)}_0(x) = I_0(x) - i N_0(x).$$

Если длина падающей продольной волны (или волны сдвига) стремится к бесконечности, то решения, полученные для случаев полости и жесткого включения, должны сводиться к статическим решениям [114]. При чистом сдвиге под действием, статическое решение в случае полости на границе будет иметь вид:

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -4 \sin 2\theta.$$

При воздействии цилиндрического отверстия σ_0 ($\alpha \rightarrow 0$) статическое решение на границе полости имеет вид:

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \frac{2}{\chi^2} [(\bar{\chi}^2 - 1) - 2 \cos 2\theta].$$

А статическое решение в случае жесткого включения запишется следующим образом:

$$\sigma_{rr}^* = -\frac{2\bar{\chi}^2}{\chi^2 + 1} \sin 2\theta; \quad \sigma_{r\theta}^* = -\frac{2\bar{\chi}^2}{\chi^2 + 1} \cos 2\theta; \quad \sigma_{\theta\theta}^* = (1 - \frac{2}{\chi^2}) \sigma_{rr}^*.$$

При малых значениях аргумента Бесселевы функции аппроксимируются первыми членами своих разложений в ряд. Коэффициенты при гармонических функциях в выражении $\sigma_{\theta\theta}^*$ в случае полости сводятся в пределах к следующему виду: при $\beta \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ член при $n = 1$ стремится к нулю, а для $n \geq 2$

$$\frac{n(n^2 - 1 - \frac{\bar{\beta}^2 a^2}{2} H_n(\alpha a))}{\Delta_n} \rightarrow \begin{cases} 2 \left(1 - \frac{1}{\chi^2} \right) & n = 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

Когда $\eta = 0$ и $n=1$ при $\beta \rightarrow 0$, тогда функция Ханкеля представляется в виде:

$$\frac{H_1(\beta a)}{\Delta_1} = \frac{\bar{\chi}^2}{(1 + \bar{\chi}^2)\beta a} = \frac{\bar{\chi}^2}{(1 + \bar{\chi}^2)\beta(1 - \Gamma_R)},$$

для получения выражения (3.3) и (3.5) использовано асимптотическое выражение функции Ханкеля, при $a \gg 1$

$$H_n(\alpha a) \sim \left(\frac{2}{\pi \alpha a} \right)^{1/2} e^{i(\alpha a - n\pi/2 - \pi/4)}$$

Перемещение жесткого включения при воздействии продольных волн имеет следующий вид:

$$u = \eta a^{-1} [2i\varphi_0 I_1(\alpha a) + A_1 H_1(\alpha a) + B_1 A_1(\beta a)],$$

где, $\eta = \rho_1 / \rho_2$.

Подставляя (3.4) в (3.3), получим систему алгебраических уравнений второго порядка, которые решаются методом Гаусса

$$A_n = - \frac{\varphi_0 \epsilon_n i^n}{\Delta n} [\bar{\alpha} \bar{\beta} a^2 I'_n(\bar{\alpha} a) H'_n(\bar{\beta} a) - n^2 I_n(\bar{\alpha} a) H_n(\bar{\beta} a)];$$

$$B_n = - \frac{\varphi_0 \epsilon_n i^{n+1}}{\Delta n} \left(\frac{2\xi n}{\pi} \right)$$

$$\Delta n = [\bar{\alpha} \bar{\beta} a^2 H'_n(\bar{\alpha} a) H'_n(\bar{\beta} a) - n^2 H_n(\bar{\alpha} a) H_n(\bar{\beta} a)], \text{ для } n=1$$

$$A_1 = \frac{2i\varphi_0}{\Delta} [-4\eta I_1(\bar{\alpha} a) H'_1(\bar{\beta} a) + (1+\eta) I_1(\bar{\alpha} a) * \bar{\beta} a H_0(\bar{\beta} a) + \\ + (1+\eta) \bar{\alpha} a I_0(\bar{\alpha} a) H_1(\bar{\beta} a) - \bar{\alpha} \bar{\beta} a^2 I_0(\bar{\alpha} a) * H_0(\bar{\beta} a)];$$

$$B = - \frac{2i\varphi_0}{\Delta_1} \cdot \frac{2i(1-\eta)}{\pi};$$

$$\Delta_1 = 4\eta H_1(\bar{\alpha} a) H_1(\bar{\beta} a) - (1+\eta) \bar{\beta} a H_0(\bar{\beta} a) H_1(\bar{\alpha} a) - \\ - (1+\eta) \bar{\alpha} a H_0(\bar{\alpha} a) H_1(\bar{\beta} a) + \bar{\alpha} \bar{\beta} a^2 H_0(\bar{\alpha} a) * H_0(\bar{\beta} a).$$

Асимптотика перемещения жесткого включения при больших длинах волн (рис.3.5а) имеет вид:

$$u^*(\bar{\alpha} a) \approx \frac{\bar{\alpha}^2 a^2}{4\eta} [\bar{\chi}^2 (\eta-1) \ln(\bar{\chi} \bar{\alpha} a) + \ln \bar{\alpha} a] + \frac{i\pi \alpha^2 a^2}{8\eta} [(1-\eta) \chi^2 + (1+\eta)];$$

$$\lim_{\alpha a \rightarrow 0} u^*(\alpha a) = 1.$$

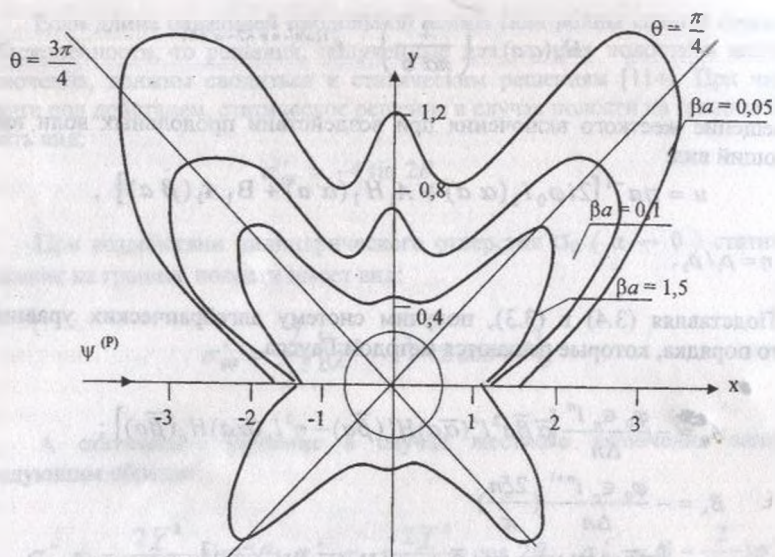


Рис.3.5.а Распределения $|\sigma_{\theta\theta}|$ при различных значениях βa при воздействии волн сдвига.

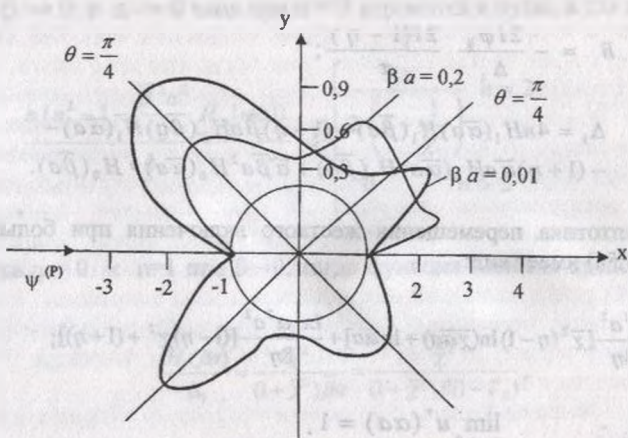


Рис.3.5.б. Распределение $|\sigma_{\theta\theta}|$ при $\beta a = 0,01$.

В этом случае единственным, не обращающимся в нуль, напряжением на границе является $\sigma_{\theta\theta}$, поэтому оно одновременно и представляет, собой максимальное главное напряжение и смещение были получены для значений $\nu = 0.25$ и $\nu = 0.35$ и для безразмерных волновых чисел в интервале $0.01 \leq \alpha \leq 3.0$.

$$1) A=0.01; \beta = 0.05; \alpha = 0.1; A=0.05; \beta = 0.1; \alpha = 0.1.$$

Результаты расчетов распределения $|\sigma_{\theta\theta}^*|$ при различных значениях волновых чисел приведены на рис.3.5,а. Следует заметить, что при $\beta^*a = 0,1$ и $\beta^*a = 1,5$ распределения напряжений почти такое же, как в статическом случае, в то время как при более высоких волновых числах распределение напряжений значительно отличается от статического случая. На рис.3.5б представлены распределения контурного напряжения при различных $\beta a = 0.01$ в условиях воздействия волны сдвига. Пусть дан в безграничной вязкоупругой среде цилиндрический слой, в котором требуется определить изменение кольцевого напряжения в свободной поверхности ($r=R$) при воздействии продольных (или поперечных) волн. Максимальное динамическое напряжение 10-15% выше статического, а волновые числа, при которых достигается максимальное значение, лежат между 0,25- 0,75.

3.3 ДИФРАКЦИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПОЛОСТИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В этом параграфе рассматриваются дифракционные задачи для случая, когда полость в упругой среде подкреплена тонким, без инерционным упругим кольцом. Приведены выражения рядов по $\cos(n\theta)$ и $\sin(n\theta)$, когда n пробегает ряд целых чисел от 0 до ∞ . При этом значение $n=0$ соответствует равномерному давлению на подкрепляющую полость конструкции. В случае $n=1$ решение описывает жесткое смещение контура как единого целого и наконец, при $n>2$ подкрепляющая конструкция (кольцо) и окружающая полость упругая среда деформируется совместно. Ниже рассматривается каждый из этих случаев в отдельности. При этом равенство смещений кольца и окружающей его упругой среды являются граничные условия для определения неизвестных коэффициентов [1,18].

Случай $n=0$. Падающие возмущения и дополнительные потенциалы представлены формулами:

$$\phi_{\text{пад}}^{(p)} = P_0 J_0(k_1 r), \quad (P_0 = 1), \quad \phi_{\text{отр}}^{(s)} = A_0 H_0(k_1 r), \quad \psi_{\text{отр}} = 0,$$

Смещения точек упругой среды контура полости вычисляются по формулам:

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

при $p=0$; U_r и U_θ принимают следующий вид:

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -k \left[J_1(k_1 r) + L_0 H_1^{(2)}(k_1 r) \right]_{r=r_0}; \quad (3.16)$$

$$U_\theta = 0;$$

Напряжения на площадках касательных к контуру, определяются по следующему формулам:

$$\frac{\sigma_{rr}}{2\mu} = 0.5\beta^2\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right]$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu} = (\alpha^2 - 0.5\beta^2)\varphi; \quad (3.17)$$

где,

$$\beta = \frac{\omega}{c_r}; \quad \alpha = \frac{\omega}{c_s}; \quad \alpha < \beta;$$

Радиальное напряжение окружающей среды после прохождения волн принимает следующий вид:

$$\sigma_r = -\rho a^2 K_1^2 \left[J_0(k_1 r) + L_0 H_0^{(2)}(k_1 r) \right] + \frac{2\rho \delta^2}{r} k_1 \left[J_1(k_1 r) + L_0 H_1^{(2)}(k_1 r) \right]_{r=r_0}; \quad (3.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0;$$

Выражения для радиальных смещений кольца под действием равномерной нагрузки (3.16) имеет вид:

$$U_r = \frac{r^2 q}{h E_K} \Big|_{r=r_0}; \quad (3.19)$$

где, q — внешнее давление на кольцо; h — толщина кольца; E_K — модуль упругости материала кольца; r — средний радиус кольца.

В виде малости отношения $\frac{h}{r_0}$ внешний радиус кольца также принимается равным h . Подставляя (3.16) и (3.18) в (3.19) получаем уравнение для определения неизвестного коэффициента A_0 :

$$A_0 \left\{ r_0^3 \omega^3 \beta H_0^{(2)}(\alpha) - \alpha H_1^{(2)}(\alpha) [1 + 2\beta b^2 r_0] \right\} = \left\{ r_0 \omega^2 \beta J_0 H_1^{(2)}(\alpha) [1 + 2\beta^2 r_0] \right\}, \quad (3.20)$$

где,

ω — круговая частота падающего возмущения; $\alpha = k_1 r_0$; $\beta = \frac{\rho}{h E_K}$; ρ — плотность упругой среды.

Зная величину A_0 и пользуясь известным соотношением для производных цилиндрических функций из (3.20) определяем величину равномерного давления на подкрепляющее кольцо:

$$\frac{\rho b^2}{r_0^2} \frac{2i}{\pi} \frac{m^2 \alpha (1+i)}{\alpha m^2 i H_0^{(2)}(\alpha) - H_1^{(2)}(\alpha) (2i+1)} = \text{Re } p + i \text{Im } p$$

где,

$$\alpha = k_1 r_0; \quad k_2 r_0 = n k \kappa; \quad (3.21)$$

$$\frac{\rho b^2 r_0}{h E_K} = \frac{r_0}{h} \frac{E_{0P}}{E_K 2(1+\alpha)} = i$$

амплитудное значение внешнего давления на кольцо определяется по формуле:

$$P_0 = \sqrt{(\text{Re } F)^2 + (\text{Im } F)^2}.$$

Максимальное усилие в кольце F вычисляется по формуле:

$$F = P_0 r_0.$$

Случай $n=1$. Падающее возмущение, соответствующее случаю $n=1$ описывается вторым членом в разложении

$$\varphi_{\text{пад}}^{(p)} = 2i J_1(k_1 r) \cos \theta. \quad (3.22)$$

Потенциалы перемещения в случае жесткого смещения $n=1$, имеют вид:

$$\varphi^{(s)} = A_1 H_1^{(1)}(k_1 r) \cos \theta; \quad \psi^{(s)} = B_1 H_1^{(1)}(k_1 r) \sin \theta;$$

Напряжения на площадках касательных к контуру, и смещения точек контура полости нетрудно записать, используя формулу (3.21), (3.22) и соотношения для производных цилиндрических функций:

$$U_{r1} = \left[k_1 H_1^{(2)}(k_1 r_0) A_1 + \frac{1}{r_0} H_1^{(2)}(k_1 r_0) B_1 + \varphi_0 i k_1 J_1(k_1 r_0) \right] \cos \theta \quad (3.23)$$

$$U_{\theta 1} = - \left[\frac{1}{r_0} H_1^{(2)}(k_1 r_0) A_1 + k_2 H_1^{(2)}(k_1 r_0)' B_1 + \frac{\varphi_0 i}{G_0} J_1(k_1 r_0) \right] \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} = & A \left[-\rho \alpha^2 k^2 H_1^{(2)}(k, r_s) + \frac{2\rho b^2 k}{r_s} H_1^{(2)}(k, r_s) \right] \cos \theta - \\ & - B_1 \frac{2\rho b^2 k_1}{r_0} H_1^{(2)}(k_1 r_0) \cos \theta + \left[-\rho \alpha^2 k_1^2 J_1(k_1 r_0) + \frac{\varphi_0 \rho b^2 k_1}{r_0} J_2(k_1 r_0) \right] \cos \theta; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 1} = & \frac{2\rho b^2 k}{r_s} H_1^{(2)}(k, r_s) A_1 \sin \theta + B_1 \left[\rho b^2 k_1^2 H_1^{(2)}(k_1 r_0) \frac{2\rho b^2 k_1}{r_0} H_1^{(2)}(k_1 r_0) \right] \sin \theta + \\ & + \frac{2\rho b^2 k_1}{r_0} J_2(k_1 r_0) \sin \theta. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_n и B_n используем два условия контура полости, т.е.

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=r_0} = 0; \quad \sigma_{r\theta} \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (3.25)$$

Коэффициенты A_1 и B_1 определяются выражениями:

$$A_1 = \frac{\Delta A}{\Delta}; \quad B_1 = \frac{\Delta B}{\Delta}, \quad (3.26)$$

где,

$$\begin{aligned} \Delta A = & -\frac{2i}{r_0} \left[\alpha J_1(\alpha) H_1^{(2)}(m\alpha) + m \alpha J_1(\alpha) H_2^{(2)}(m\alpha) \right] \\ \Delta B = & -\frac{2i}{r_0} \alpha \left[J_1(\alpha) H_2^{(2)}(\alpha) - J_2(\alpha) H_1^{(2)}(\alpha) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

В дальнейших преобразованиях используются некоторые соотношения для функции Бесселя приводимые ниже:

$$J_\nu(\alpha)H_{\nu-1}^{(2)}(\alpha) - J_{\nu-1}(\alpha)H_\nu^{(2)}(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha};$$

$$J_\nu(\alpha)H_\nu^{(2)}(\alpha) - J'_\nu(\alpha)H_1^{(2)}(\alpha) = \frac{2i}{\pi\alpha}$$

$$\alpha J'_\nu(\alpha) = \nu J_\nu(\alpha) - \alpha J_{\nu+1}(\alpha); \quad (3.28)$$

$$\alpha H_\nu^{(2)'}(\alpha) = \nu H_\nu^{(2)}(\alpha) - \alpha H_{\nu+1}^{(2)}(\alpha).$$

Подставляя значения коэффициентов A_1 и B_1 , определенные по формулам (3.26), в выражение для смещения (3.23), используя при этом соотношения (3.28), получаем величину жесткого смещения полости:

$$U_1 = \frac{\Delta A}{\Delta} k_1 H_1^{(2)'}(\alpha) + \frac{\Delta B}{r_0 \Delta} H_1^{(2)}(m\alpha) + 2ik_1 J_1'(\alpha) = \frac{4}{\pi\alpha} \cdot \frac{H_2^{(2)}(m\alpha)}{H_2^{(2)}(\alpha)H_1^{(2)}(m\alpha) + mH_1^{(2)}(\alpha)H_2^{(2)}(m\alpha)} \quad (3.29)$$

Амплитуда жесткого смещения определяется формулой:

$$U = \sqrt{(\text{Re}U_1)^2 + (\text{Im}U_1)^2}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим общий случай $n \geq 2$. Действующее напряжение на контуре подкрепляющего кольца, можно выразить формулами:

$$\sigma_n = \sum_{n=2}^{\infty} A_n' \cos n\theta; \quad (3.31)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n' \sin n\theta.$$

В выражения для коэффициентов A_n и B_n входят как падающие так и отраженные волны которые выражаются через потенциалы перемещений $\varphi^{(s)}$, $\psi^{(s)}$. Уравнения для определения неизвестных коэффициентов получаются из условия равенства смещений упругого кольца и смещением среды.

Радиальное смещение кольца под действием нормальной к контуру нагрузки $g_n = A_n' d_n \cos n\theta$ определяется по формуле:

$$U_{rG} = A_n' d_n \cos n\theta, \quad (3.32)$$

где,

$$d_n = \frac{r_0^4}{(n^2 - 1)^2 E_k J_k} \left[1 + \frac{\ell^2 (an^2 - 1)}{r_0^2} \right]$$

r_0 — радиус кольца; E_k, J_k — его изгибная жесткость; ℓ — радиус инерции сечения кольца; $a = E_k / G$; G — числовой коэффициент зависящий от формы поперечного сечения кольца, для прямоугольного сечения $G = 1.5$.

Тангенциальное смещение под действием нагрузки определяется по формуле:

$$U_{gG} = -A_n' \frac{d_n}{n} \sin n\theta. \quad (3.33)$$

В следствии взаимности смещений радиальное смещение кольца при действии тангенциальной нагрузки вида $g_t = B_n' \sin n\theta$ выражается формулой:

$$U_{rt} = -B_n' \frac{d_n}{n} \cos n\theta. \quad (3.34)$$

Наконец, выражение для тангенциального смещения кольца при действии тангенциальной нагрузки $g_t = B_n' \sin n\theta$ имеет вид:

$$g_n = -B_n' t_n \sin n\theta, \quad (3.35)$$

где,

$$t_n = \frac{r_0^4}{n^2 (n^2 - 1) E_k J_k} \left[1 + \frac{\ell^2 n^2}{r_0^2} (an + n^2 - 2) \right]$$

В приведенных выше формулах, положительными считаются радиальная нагрузка и смещения — против часовой стрелки. Радиальное смещение кольца при совместном действии нормальной и тангенциальной нагрузок определяется формулой:

$$U_{rs} = \left[A_n' - \frac{B_n'}{n} \right] d_n \cos n\theta \quad (3.36)$$

Выражения для тангенциальных смещений кольца при совместном действии нормальной и тангенциальной нагрузок (3.35) имеет вид:

$$U_{\theta n} = - \left[\frac{A_n' d_n}{n} - B_n' t_n \right] \sin n\theta \quad (3.37)$$

Если не учитывать влияние поперечных и осевых усилий кольца на его деформацию, формулы (3.36) и (3.37) существенно упрощаются:

$$U_{rn} = \frac{r_0^4}{n(n^2-1)E_k J_k} \left[A_n - \frac{B_n}{n} \right] \cos n\theta; \quad (3.38)$$

$$U_{\theta n} = \frac{r_0^4}{n(n^2-1)E_k J_k} \left[A_n - \frac{B_n}{n} \right] \sin n\theta.$$

Величина $A_n' - \frac{B_n}{n}$ определяется в результате подстановки в (3.38) значений σ_r и $\sigma_{r\theta}$ из формулы (3.31); при этом соотношения упругих потенциалов $\varphi^{(r)}, \varphi^{(\theta)}, \psi^{(r)}$ - находятся из [104]:

$$A_n' - \frac{B_n}{n} = \frac{\rho \delta^2}{r_0^2} \left\{ A_n \left[a^2 m^2 - 2(n^2-1) \right] H_n^2(a) + B_n \frac{am}{n} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[am H_n^2(am) - 2(n^2-1) H_n^2(am) \right] + 2i^n \left[a^2 m^2 - 2(n^2-1) \right] J_n(a) \right\} \quad (3.39)$$

Приравняв смещения кольца (3.39) и среды граничных условий, получаем систему для определения коэффициентов A_n, B_n :

$$A_n \left\{ a H_n^2(a) + \frac{\gamma}{n^2-1} \left[\frac{a^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] H_n^2(a) \right\} + B_n \cdot \\ \cdot \left\{ n H_n^2(am) + \frac{aym}{(n^2-1)n} \left[\frac{am}{n^2-1} H_n^2(am) - 2 H_n^2(am) \right] \right\} = \\ = -2i^n \left\{ a J_n'(a) + \frac{\gamma}{n^2-1} \left[\frac{a^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] J_n(a) \right\}; \\ A_n \left\{ a H_n^2(a) + \frac{\gamma}{n^2-1} \left[\frac{a^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] H_n^2(a) \right\} + B_n \cdot \quad (3.40)$$

$$\bullet \left\{ nH_n^1(am) + \frac{\alpha\gamma m}{(n^2-1)n} \left[\frac{am}{n^2-1} H_n^2(ma) - 2H_n^1(ma) \right] \right\} =$$

$$= -2i^n \left\{ aJ_n'(a) + \frac{\gamma}{n^2-1} \left[\frac{a^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] J_n(a) \right\};$$

$$A_n \left\{ aH_n^2(a) + \frac{\gamma}{n^2-1} \left[\frac{a^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] H_n^2(a) \right\} + B_n \bullet$$

$$\bullet \left\{ naH_n^1(am) + \frac{\alpha\gamma m}{(n^2-1)n^2} \left[\frac{am}{n^2-1} H_n^2(ma) - 2H_n^1(ma) \right] \right\} =$$

$$= -2i^n \left\{ aJ_n(a) + \frac{\gamma}{n(n^2-1)} \left[\frac{a^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] J_n(a) \right\};$$

где,

$$\gamma = \frac{E_\varphi}{E_2 2(1+\nu)} \cdot 12 \left[\frac{h}{b} \right];$$

E_φ — модуль упругости окружающей кольцо упругой среды;

ν — коэффициент Пуассона для среды; h — толщина кольца.

Неизвестные коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам:

$$A_n = \frac{\Delta A}{\Delta}; \quad B_n = \frac{\Delta B}{\Delta}; \quad (3.41)$$

где,

$$\Delta = a_n H_n^{(1)}(\alpha) H_n^{(1)}(m\alpha) + b_n H_n^{(1)}(m\alpha) + c_n H_n^{(1)}(\alpha) H_n^{(1)}(m\alpha) +$$

$$+ d_n H_n^{(1)}(\alpha) H_n^{(1)}(m\alpha);$$

$$\Delta A = 2i^n a_n J_n(\alpha) H_n^{(1)}(m\alpha) + b_n J_n'(H_n^{(1)}(m\alpha)) + c_n J_n(\alpha) H_n^{(1)}(m\alpha) +$$

$$+ d_n J_n(\alpha) H_n^{(1)}(m\alpha);$$

$$\Delta B = \frac{4i^{n+1}}{\pi} \left[n + \frac{\gamma}{n(n^2+1)} \left[\frac{\alpha^2 m^2}{n^2-1} - 2 \right] \right];$$

$$a_n = -\frac{2\gamma m \alpha^2}{(n-1)^2} + \frac{2\gamma}{n^2-1} n^2$$

$$b_n = \frac{\gamma m^2 \alpha^2}{n^2(n^2 - 1)}; \quad c_n = \frac{\gamma m^3 \alpha^3}{(n^2 - 1)^2};$$

$$d_n = -m\alpha^2 \left[\frac{2\gamma}{n^2(n^2 - 1)} - 1 \right].$$

Для вычисления на ЭВМ, в формулах (3.41) необходимо разделить действительные и мнимые части для вычисления по отдельности $\operatorname{Re} A_n, \operatorname{Im} A_n, \operatorname{Re} B_n, \operatorname{Im} B_n$ пользуясь соотношением $H_{(0)}(z) = Z_n(z) + iY_n(z)$. Дифракция упругих волн относительно подкрепленной полости с учетом сил инерции, возникающих в подкрепляющем упругом кольце. Ранее предполагалось, что кольцо подкрепляющее полость, является безинерционным. Рассмотрим, как влияет инерция подкрепляющегося кольца на дифракционное поле. Предполагается, что кольцо находится под действием системы напряжений (3.41), приложенных к его контуру. Дифференциальное уравнение изгибных колебаний кольца можно записать следующим образом [88]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^4} + \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} + \frac{m_k r_0^4}{E_k J_k} \frac{\partial^4 U_n}{\partial \theta^4} \right] - \frac{m_k r_0^4}{E_k J_k} \frac{\partial^4 U_n}{\partial \theta^4} = \\ = \left[A_n - \frac{B_n}{n} \right] n \frac{r_0^4}{E_k J_k} \sin n\theta e^{i\omega t}; \\ N = \frac{E\pi C^4}{4\pi^3} \left[\frac{\partial^4 U_n}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

где,

m_k — погонная масса кольца.

В этой задаче, мы по сути дела, приходим к задаче о колебании системы с одной степенью свободы, поскольку рассматривается конкретное значение n . Этой системой является кольцо, совершающее колебания по n -ой форме, под действием нагрузки, приложенной к нему со стороны упругой среды. Сама нагрузка представляет n -ый член разложения в ряд напряжения на контуре полости.

Рассматриваемые чисто вынужденные колебания кольца, решение уравнения (3.42) пишем в виде:

$$U_\theta = w_n \cos(pt + \varepsilon)$$

$$w_n = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta), \quad (3.43)$$

где,

w_n — функция угла θ .

После подстановки решения (3.43) в (3.42) w_n определяется из уравнения:

$$w_n \left[-n^2 + 2n^4 - n^2 \left[1 - \frac{r_0^4 m_k \omega^2}{E_k J_k} \right] + \frac{r_0^4 m_k \omega^2}{E_k J_k} \right] = \frac{r_0^4}{E_k J_k} n \left[A_n' - \frac{B_n}{n} \right]$$

окончательно

$$w_n = \frac{n}{n^2 + 1} \frac{B_n - A_n'}{m_k (p_n^2 - \omega^2)} \sin n\theta, \quad n \geq 2, \quad (3.44)$$

где,

p_n — n -ая круговая частота собственных колебаний круглого кольца

$$p_n^2 = \frac{E_k J_k n^2 (n^2 - 1)^2}{m_k r_0^4 n^2 + 1}$$

Нормальное к контуру смещение кольца определяется по формуле:

$$U_n = \frac{\partial U_n}{\partial \theta} \quad (3.45)$$

Формула (3.45) приведена Лявом для случая когда влиянием продольных и поперечных сил на деформацию кольца можно пренебречь. Неизвестные коэффициенты A_n и B_n определяются из условий равенства смещений кольца и точек упругой среды на контуре полости. При этом следует положить:

$$a_n = \frac{2n^2 \gamma_1 \eta}{n^2 + 1} \left[\frac{n^2 - 1}{m^2 \alpha^2} - 1 \right] - n^2; \quad b_n = \frac{\alpha \gamma_1 \eta}{n^2 + 1}; \quad (3.46)$$

$$c_n = \frac{mn^2 \alpha \gamma_1 \eta}{n^2 + 1}; \quad d_n = m\alpha^2; \quad \gamma_1 = \frac{\rho_\infty r_0}{\rho_k h}; \quad \eta = \frac{1}{\left[\frac{\rho_\infty}{\omega} \right]^2 - 1}$$

где,

ρ_∞, ρ_k — плотности окружающей среды и кольца соответственно;

$$\Delta A_n = \frac{4i^{n+1}}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{m^2 \alpha^2} \frac{n}{n^2 + 1} [m^2 \alpha^2 - 2(n^2 - 1)] \right\} \eta \gamma_1.$$

Упругое колеблющееся кольцо представляет для сплошной среды с круговой полостью некую дополнительную связь. При совпадении частоты подающегося возмущения с частотой собственных колебаний свободного кольца эта связь отключается, поскольку упругие силы, возникающие в колебаниях, уравниваются силами инерции самого кольца. Поэтому, одним из условий для нахождения коэффициентов, в этом случае будет равенство нулю, действующей со стороны кольца на среду (и со стороны среды на кольцо) и в дифференциальном уравнении колебаний кольца (3.42) правую часть следует приравнять 0.

Второе условие совпадения с нерезонансным случаем есть результат подстановки в выражение (3.45) значения смещений упругой среды на контуре полости:

$$\begin{aligned} 2i^n \alpha_n J_n'(\alpha) + \alpha H_n^{(1)}(m\alpha) A_n + n H_n^{(2)}(m\alpha) B_n = \\ = n \left[2i^n n J_n'(\alpha) + n H_n^{(2)}(\alpha) A_n + \alpha H_n^{(2)}(m\alpha) B_n \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются из совместного решения уравнений (3.47). Для рассматриваемого $P_n = \omega$ значения коэффициентов A_n и B_n входящих в формулу (3.47) приведены ниже:

$$\begin{aligned} a_n &= 2n[(n^2 - 1) - m^2 \alpha^2] G_n = nm^3 \alpha^3; \\ b_n &= \frac{m^2 \alpha^3}{n}; \quad d_n = \frac{2m\alpha^2}{n}(n^2 - 1), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\Delta A_n = \frac{4i^{n+1}}{\pi} [m^2 \alpha^2 - 2(n^2 - 1)].$$

Смещение точек кольца, равные смещениям точек упругой среды на контуре полости, определяется по формулам (3.48). Напряжение на контуре полости, являющееся для кольца внешним давлением, определяется соотношениями (3.43).

Дифракции упругих волн относительно подкрепленной полости в упругой среде [19]. Подкрепление полости в упругой среде может быть выполнено в виде некоторой составной конструкции. Несколько моделей такого сложного подкрепления рассматриваются в этом параграфе.

В качестве одной из возможных моделей рассмотрим тонкое упругое кольцо, отделенной от упругой среды слоем толщины h .

Упругие свойства слоя моделируются пружинами с коэффициентом постели q , равномерно распределенными по контуру полости, т.е. для характеристики упругого слоя используется модуль Винклера. Дифракционное поле в упругой среде описывается скалярным или векторным потенциалами, введенными выше. Граничные условия ставятся на контуре, отделяющем упругую среду слоя, имеющий вид:

$$\sigma'_{\theta n} = \sigma_n^{\varphi} \Big|_{r=R_0}; \quad (3.49)$$

$$U'_m + U_m = U_m^{\varphi} \Big|_{r=R_0},$$

где,

R_0 - радиус полости в упругой среде; r_0 - радиус кольца;

$R_0 = r_0 + h$; U'_m ; U_m ; U_m^{φ} - нормальные к контуру смещения кольца слоя и среды соответственно.

Нормальное смещение кольца под действием системы нормальных напряжений вида: $\sigma_n = A_n' \cos n\theta$ (касательные напряжения на кольцо через систему пружин не передается) определяется по формуле:

$$U_m^k = A_n \cos n\theta,$$

где,

$$A_n' = \frac{\rho b^2}{R_0} \left\{ A_n \left[(2n^2 - m^2 \alpha^2) H_n^{(2)}(\alpha) - 2H_n^{(2)'}(\alpha) \right] + \right. \\ \left. + B_n \left[2nm\alpha H_n^{(2)'}(m\alpha) - 2H_n^{(2)}(m\alpha) \right] + \right. \\ \left. + 2i \left[(2n^2 - m^2 \alpha^2) J_n(\alpha) - 2J_n'(\alpha) \right] \right\}$$

Смещение упругого слоя под действием той же нагрузки определяется по формуле:

$$U_m^{\varphi} = \frac{1}{g} A_n \cos n\theta. \quad (3.50)$$

Наконец, смещение упругой среды вычисляется по формуле (3.50). Касательное напряжение определяется формулой (3.35) после подстановки в нее значений упругих потенциалов:

$$\eta_{\theta n} = \frac{\rho b^2}{R_0} \left\{ A_n \left[2n^2 H_n^{(2)}(\alpha) - 2n \alpha H_n^{(2)'}(\alpha) \right] + \right. \\ \left. + B_n \left[2n m \alpha H_n^{(2)}(m\alpha) - (2n^2 - m^2 \alpha^2) H_n^{(2)'}(m\alpha) \right] + \right. \\ \left. + 2i^* \left[2n J_n(\alpha) - 2n J_n'(\alpha) \right] \sin n\theta \right\};$$

Подставляя (3.50) в выражения для граничных условий получаем систему 2-х уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_n и B_n :

$$A_n 2n \left[H_n^{(2)}(\alpha) - \alpha H_n^{(2)'}(\alpha) \right] + B_n \left[2m \alpha H_n^{(2)}(m\alpha) - (2n^2 - m^2 \alpha^2) H_n^{(2)'}(m\alpha) \right] = \\ = -2i^* 2n \left[J_n(\alpha) - J_n'(\alpha) \right]; \\ B_n \left\{ \frac{\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) \left[m \alpha H_n^{(2)'}(m\alpha) - H_n^{(2)}(m\alpha) \right] 2n - n H_n^{(2)}(m\alpha) \right\} + \\ + A_n \left\{ \frac{\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) \left[(2n^2 - m^2 \alpha^2) H_n^{(2)}(\alpha) - 2\alpha H_n^{(2)'}(\alpha) \right] - \alpha H_n^{(2)'}(\alpha) \right\} = \\ = 2i^* \left\{ \frac{\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) \left[(2n^2 - m^2 \alpha^2) J_n(\alpha) - 2\alpha J_n'(\alpha) \right] - \alpha J_n'(\alpha) \right\}; \quad (3.51) \\ D_n = \frac{r_0^2}{(n^2 - 1) E_1 J_1} \left[1 + \frac{i^2}{r_0^2} (\alpha \cos - 2) \right].$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются аналогично (3.48), при этом коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n и ΔB_n принимают следующие значения:

$$a_n = \frac{\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) \left[(2n^2 - m^2 \alpha^2) - 4n^2 \right] - 2n^2; \\ b_n = m^2 \alpha^2 \left[\frac{2\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) \right]; \\ c_n = 2m^2 \gamma^2 \frac{\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right); \quad (3.52) \\ d_n = -2m\alpha^2 \left[\frac{2\rho b^2}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) (n^2 - 1) - 1 \right];$$

$$\Delta B_n = \frac{8i^{n+1}n}{\pi} \left[\frac{\rho b^3}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) (2 - 2n^2 + m^2 \alpha^2) + 1 \right];$$

Обозначим

$$\frac{\rho b^3}{R_0} \left(D_n + \frac{1}{g} \right) = f. \quad (3.53)$$

В том случае, когда кольцо, подкрепляющее полость можно рассматривать как жесткую вставку, а выражение (3.53) следует положить $D_n = 0$.

Упругий слой, описываемый моделью Винклера, является безинерционным.

Рассмотрим далее модель, позволяющую в известной степени учесть силы инерции, возникающие в упругом слое при колебаниях. С этой целью представим слой в виде системы весомих несвязанных между собой стержней. Каждый стержень представляет область кольцевого упругого слоя, ограниченного контурами кольца и упругой среды и двумя радиусами, угол между которыми равен d_n . В граничное условие (3.53) в место смещения (3.50) подставляется продольное смещение сечения стержня под действием нормальной к его торцу нагрузки

$$\sigma' = A_n \cos(n\theta) e^{im}.$$

Дифференциальное уравнение продольных установившихся колебаний стержня методом разделения переменных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно продольного смещения сечения стержня U_r :

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\rho_{cm} \omega^2}{E_{cm}} U_r = 0, \quad (3.54)$$

его решение запишем в виде: $U_r = C_1 J_0(\rho r) + C_2 Y_0(\rho r)$

где,

$$\rho^2 = \frac{\rho_{cm} \omega^2}{E_{cm}}; \rho_{cm}, E_{cm} - \text{плотность и модуль упругости материала стержня.}$$

Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 определяются из следующих граничных условий:

а) На месте контакта стержня с упругой средой напряжения на торце стержня равный нормальным напряжениям, действующим на контуре полости в упругой среде:

$$U_r = E_{cm} \frac{\partial U_r}{\partial r} = A_n \cos n\theta \Big|_{r=R_0}. \quad (3.55)$$

б) На месте контакта стержня с упругим кольцом продольные смещения стержня равны:

$$U_r = E_{cm} \frac{\partial U_r}{\partial r} \frac{n^2}{n^2 + 1} \frac{1}{m_k (\rho_n^2 - \omega^2)} \Big|_{r=R_0}, \quad (3.56)$$

обозначения величины, входящих в (3.114) приведены выше. Значения производных C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A_n(R_0) \cos n\theta}{E_{cm} P \Delta} \left[Y_0'(Pr_0) - h_n P E_{cm} Y_0'(Pr_0) \right], \\ C_2 &= \frac{A_n'(R_0) \cos n\theta}{E_{cm} P \Delta} \left[J_0'(Pr_0) - h_n P E_{cm} J_0'(Pr_0) \right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

где,

$$\Delta = Y_0'(Pr_0) \left[J_0'(Pr_0) - h_n P E_{cm} J_0'(Pr_0) \right] - J_0'(Pr_0) \left[Y_0'(Pr_0) - h_n P E_{cm} Y_0'(Pr_0) \right]$$

$$h_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \frac{1}{m (\rho_n^2 - \omega^2)} \cdot Y_0'(Pr_0) \left[J_0'(Pr_0) - h_n P E_{cm} J_0'(Pr_0) \right].$$

Радиальное смещение стержня на месте его контакта с упругой средой выражается следующим образом:

$$U_r = \frac{A_n(R) \cos n\theta}{E_{cm} P} \rho_1, \quad (3.58)$$

где,

$$\rho_1 = \frac{Y_0'(Pr_0) \left[J_0'(Pr_0) - h P E_{cm} J_0'(Pr_0) \right] - J_0'(Pr_0) \left[Y_0'(Pr_0) - h P E_{cm} Y_0'(Pr_0) \right]}{Y_0'(Pr_0) \left[J_0'(Pr_0) - h P E_{cm} J_0'(Pr_0) \right] - J_0'(Pr_0) \left[Y_0'(Pr_0) - h P E_{cm} Y_0'(Pr_0) \right]}.$$

для определения неизвестных коэффициентов C_1 и C_2 используем граничные условия (3.38).

3.4. ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЯХ, НАХОДЯЩИХСЯ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

В настоящем параграфе решаются задачи взаимодействия нестационарных волн в цилиндрических телах, находящихся в упругой среде.

Постановка задачи. Пусть в безграничной упругой среде расположен упругий N-слойный цилиндр, содержащий заполнитель [61]. На слоистый цилиндр падают нестационарные волны напряжения $\sigma_{xx}^{(j)}$ и $\sigma_{xy}^{(j)}$, фронт которых параллелен продольной оси цилиндра. Требуется определить динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра и окружающей его среды, вызванное падающим импульсом напряжения. Предположим, что время t отсчитывается с момента, когда падающий импульс коснется поверхности внешнего (N-1)-го цилиндра в точке $r = r_N$, $\theta = 0$. До этого момента сохраняется покой. В соответствии с изложенным, задача отыскания поля дифрагированных волн и напряженно-деформированного состояния, вызванного падающим импульсом [71]

$$\sigma_{xx}^{(j)} = \sigma_0 H(\xi), \quad \sigma_{xy}^{(j)} = \sigma_0 \frac{v_N}{1-v_N} H(\xi),$$

$$\xi = t - (x + r_N) / C_{PN}, \quad (3.59)$$

где, σ_0 — амплитуда падающих волн; $H(\xi)$ — единичная функция Хевисайда, сводится к решению дифференциальных уравнений (3.3). Граничные условия на контакте двух цилиндрических поверхностей приведены в первой главе. На бесконечности ($r \rightarrow \infty$) выполняются условие Земмерфельда [87]. Задача решается при следующих начальных условиях [127]:

$$\left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \right) \right|_{t=0} = 0; \quad (3.60)$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right) \right|_{t=0} = 0, \quad (3.61)$$

где, $j = 1, 2, \dots, N$; $N-j$ — число цилиндрических слоев; $j = N$ — окружающая среда.

Интегральное преобразование Фурье. Поле напряжений, вызванных усилиями (3.59), удовлетворяет волновому уравнению (3.2), т.е. ему удовлетворяет каждый цилиндрический слой. Для решения сформулированной выше задачи применим t -интегральное преобразование Фурье по времени.

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Omega) e^{-i\xi\Omega} d\Omega; \quad \varphi(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\xi\Omega} d\xi$$

Используя нулевые начальные условия, получим изображенную задачу

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_j^F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}_j^F}{\partial r} \left(\frac{\Omega^2}{C_j^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \bar{\varphi}_j^F = 0; \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_j^F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}_j^F}{\partial r} \left(\frac{\Omega^2}{C_j^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \bar{\psi}_j^F = 0, \quad (3.63)$$

где, Ω -параметр интегрального преобразования Фурье; $\bar{\varphi}_j^F, \bar{\psi}_j^F$ - изображение преобразования Фурье функций $\varphi_j(r)$ и $\psi_j(r)$ соответственно. Тогда решение уравнений (3.62) и (3.63) будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_j^F(r, \Omega) \\ \bar{\psi}_j^F(r, \Omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_j^F(r, \Omega) \\ \bar{\psi}_j^F(r, \Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

здесь,

$$\bar{\varphi}_j^F(r, \Omega) = \begin{cases} A_n H_n^{(1)}(\Omega r / C_{PN}) & \text{при } r \geq r_N, \\ A_n H_n^{(1)}(\Omega r / C_{Pj}) + B_n H_n^{(2)}(\Omega r / C_{Pj}) & \text{при} \\ r_0 \leq 2 \leq rN(j = 1, 2, \dots, N-1), \\ A_{n0} I_n(\Omega r / C_{SN}) & \text{при } 0 \leq r \leq r_0, \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\bar{\psi}_j^F(r, \Omega) = \begin{cases} C_n H_n^{(1)}(\Omega r / C_{Sj}) + L_n H_n^{(2)}(\Omega r / C_{Sj}) & \text{при } r_0 \leq r \leq r_N, \\ C_n H_n^{(1)}(\Omega r / C_{SN}) & \text{при } r \geq r_N, \\ C_{n0} I_n(\Omega r / C_{S0}) & \text{при } r_n \leq r \leq r. \end{cases} \quad (3.66)$$

Коэффициенты $A_{n0}, A_n, A_{nN}, B_n, C_n, C_{nN}$ - определяются из граничных условий (3.15), которые поставлены на контакте двух цилиндрических поверхностей. Граничные условия при $r = R$ с учетом падающих волн (3.59) примут вид

$$a) \sigma_{rN}^F + \sigma_{rN}^{(i)F} = \sigma_{r(N-1)}^F;$$

$$b) \sigma_{r\theta N}^F + \sigma_{r\theta N}^{(i)F} = \sigma_{r\theta(N-1)}^F;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } u_{rN}^F + u_{rN}^{(i)F} &= u_{r(N-1)}^F, \\ \text{г) } u_{\theta N}^F + u_{\theta N}^{(i)F} &= u_{\theta(N-1)}^F, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где,

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma_{rN}^{(i)F}(\Omega) &= \sigma_{01}^{(P)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n I_n(\Omega r / C_{PN}) \cos n\theta; \\ \text{б) } \sigma_{rN}^F(\Omega) &= \bar{\sigma}_{rN}^F (\cos^2 \theta + \epsilon_N \sin^2 \theta); \\ \text{в) } \sigma_{r\theta N}^F &= -\bar{\sigma}_{r\theta N}^F [(1 - E_N)/2] \sin 2\theta; \\ \text{г) } u_{rN}^F &= \bar{u}_{rN}^F \cos \theta; \\ \text{д) } u_{\theta N}^F &= \bar{u}_{\theta N}^F \sin \theta; \quad \sigma_{01}^{(P)} = \sigma_0 e^{-\text{KYC}_{PN}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Подставив (3.65) и (3.66) в граничные условия (3.67) и (3.68), получим систему комплексных алгебраических уравнений с $(4j+3)$ неизвестными в виде

$$[Z]\{g\} = \{P\}, \quad (3.69)$$

$$[Z] = \begin{pmatrix} [Z_1] & & & 0 \\ & [Z_2] & & \\ & & [Z_{N-1}] & \\ 0 & & & [Z_N] \end{pmatrix}$$

-блочная матрица; $[Z_j]$ - матрица размерности 4×4 , элементы которой суть функции Бесселя и Ханкеля n -го порядка первого и второго рода;

$\{g\}$ - вектор столбцы неизвестных коэффициентов;

$\{P\} = \{0, 0, \dots, 0, P_{1N}, P_{2N}, P_{3N}, P_{4N}\}^T$ - вектор столбцы, характеризующие падающие нагрузки, где $P_{1N}, P_{2N}, P_{3N}, P_{4N}$ соответствует

$\sigma_{rN}^{(i)F}, \sigma_{r\theta N}^{(i)F}, u_{rN}^{(i)F}, u_{\theta N}^{(i)F}$. Пусть ступенчатые волны взаимодействуют с цилиндрическим отверстием при $r = r_0$ и отверстием свободного от напряжения ($\sigma_{rr}|_{r=r_0} = \sigma_{r\theta}|_{r=r_0} = 0$). Единственным напряжением, которое не обращается в нуль при $r = r_0$, является кольцевое напряжение $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$. Применив преобразование Фурье к уравнению движения и граничным условиям [104], получим выражение для кольцевых напряжений при $\sigma_{rr} = \sigma_0 H(r) \cos n\theta$, $\sigma_{r\theta} = \tau_0 H(r) \sin \theta$:

$$\sigma_{\omega_n}^* = \frac{\sigma_{(n)/n}(r_{01}\theta, t)}{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1(r_{01}\Omega) e^{-i\Omega t}}{\Omega_1[\Delta_2\Delta_3 + \Delta_4\Delta_5]} d\Omega. \quad (3.70)$$

$$\Delta_1(r_{01}\Omega) = (\Delta_1 + r_{01}E) \{ 2\Omega H_{n-1}^{(1)}(\Omega) - ((2n^2 + 2n) + \Omega^2) H_n^{(1)}(\Omega) \} + \\ + [r_{01}\Delta_2 - \Delta_4 \left\{ 2n(n+1) H_n^{(1)}((C_{n1}/C_{n1})\Omega) + \frac{2C_{n1}n\Omega}{C_{n1}} H_{n-1}^{(1)}\left(\frac{C_r}{C_n}\Omega\right) \right\}].$$

Выражение Δ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) приведено в работе [61]. Несобственный интеграл (3.70) решается численно по разработанным алгоритмам [61]. Практически вычисление (3.70) на ЭВМ можно провести следующим образом. Поскольку численное интегрирование в бесконечных пределах немыслимо, то интеграл (3.70) заменяется на

$$\sigma_{\omega_n}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\Delta_1(r_{01}\Omega_1)}{\Omega_1[\Delta_2\Delta_3 + \Delta_4\Delta_5]} e^{-i\Omega_1 t} d\Omega. \quad (3.71)$$

Значения пределов интегрирования ω_a, ω_b подбираются в зависимости от вида падающего импульса. Численные значения спектральной плотности $\sigma_{\omega}^{1/F}(\Omega)$ из (3.69) конечного падающего импульса лишь в небольшом диапазоне частоты Ω существенно отличается от нуля. Пределы интегрирования ω_a, ω_b следует подбирать в соответствии с этим диапазоном и с учетом требуемой точности. При этом остается открытым вопрос о том, какую погрешность внесет пренебрежение вкладом интегралов типа (3.70) в пределах интегрирования от $-\infty$ до ω_a и от ω_b до ∞ . Численное суммирование бесконечной суммы (3.70), разумеется, также невозможно. Однако в [61] показано, что при достаточно больших n (n -порядок функций Бесселя и Ханкеля) можно построить асимптотическое представление общего члена этой суммы. В результате становятся возможными либо оценка погрешности перехода от бесконечной суммы к конечной, либо приближенное суммирование бесконечной суммы. Ввиду сказанного сохраним в (3.70) бесконечную сумму. Расчет по рассматриваемому методу сводится к построению двух алгоритмов вычисления: коэффициентов $Z_k(\Omega)$ ($k, e = 1, 2$) (3.71) и интеграла (3.70). Первый и второй алгоритмы не зависят от вида математической модели объекта.

Алгоритм вычисления. Величина $\sigma_{\omega_n}^F/\sigma_0$ из (3.71) вычисляется на ЭВМ следующим образом. Задаются все числовые параметры, необходимые для вычислений. Вводятся следующие обозначения: $x_1 = \Omega$, $x_2 = n_1\Omega$, где $n_1 = C_n/C_n$; $\Omega = \omega\alpha/C_n$. Для двух значений x_k ($k = 1, 2$) определяется функция Бесселя $I_n(\xi)$ и $N_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots, 10$). Указанные массивы рассчитываются по формуле

$$u_n(\xi) = \frac{2(n-1)}{\xi} u_{n-1}(\xi) - u_{n-2}(\xi), \quad u_n(\xi) = I_n(\xi) \cdot N_n(\xi) \quad (3.72)$$

Как показано в [61], абсолютное значение функции Бесселя быстро уменьшается с ростом индекса n , начиная с момента, когда индекс превышает аргумент. В этом случае, непосредственное использование формулы (3.72) не приводит к цели. Тем не менее расчет по (3.72) возможен, если по рекуррентной формуле

$$\bar{I}_n(\xi) = \frac{2(n-1)}{\xi} \bar{I}_{n+1}(\xi) - \bar{I}_{n+2}(\xi) \quad (3.73)$$

в направлении убывания индекса (от $n=N$ до $n=0$) рассчитывается вспомогательная функция $\bar{I}_n(\xi)$. Для расчета (3.73) задаются некоторые начальные значения

$$\bar{I}_{N+1}(\xi) = 0, \quad \bar{I}_N = \varepsilon \quad (3.74)$$

и начальный индекс $n = N$, определяемый из уравнения

$$\frac{(2\xi)^N \cdot N!}{(2N+1)} = \varepsilon, \quad (3.75)$$

здесь ε — погрешность расчета, соответствующая требуемой точности. Далее определяется значение функции Бесселя:

$$I_n(\xi) = \bar{I}_n(\xi) I_0(\xi) / \bar{I}_0(\xi), \quad (3.76)$$

причем для нахождения $I_0(\xi)$ можно использовать зависимость

$$I_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\xi \cos x) dx \quad (3.77)$$

С помощью функций Бесселя и Неймана решается уравнение (3.76).

$$\text{Функцию } \chi_i(r_0, \Omega) = (\Delta_i(r_0, \Omega) / \Omega (\Delta_i \Delta_0 + \Delta_i \Delta_1)) e^{i\varphi} \quad (3.78)$$

можно численно интегрировать, записав ее в виде

$$\chi_i(r_0, \Omega_i) = x_i(r_0, \Omega_i) - i x_i(r_0, \Omega_i) \quad (3.79)$$

Падающий импульс $\sigma_{\Sigma}^{(i)F}(\Omega)$ [104] описывается выражением

$$\sigma_{xx}^{(i)F}(\Omega) = f_1(\Omega) - i f_2(\Omega),$$

где, $f_1(\Omega)$, $f_2(\Omega)$ -- вещественные функции. Используя формулу Эйлера для $\exp(i\Omega t)$, разделив (3.78) на вещественную и мнимую (3.79) части, после некоторых преобразований получим

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\Omega) - ix_2(\Omega)] d\Omega \quad (3.80)$$

Разделив интеграл (3.80) на два слагаемых

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 [x_1(\Omega) - ix_2(\Omega)] d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [x_1(\Omega) - ix_2(\Omega)] d\Omega \quad (3.81)$$

и заменив в первом интеграле переменную Ω на $-\Omega$, будем иметь

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [x_1(\Omega_1) - x_1(-\Omega_1)] - i[x_2(\Omega_1) - x_2(-\Omega_1)] d\Omega_1. \quad (3.82)$$

Поскольку (3.82) представляет собой обратное преобразование Фурье и в левой части содержит вещественную величину [24], то справедливо соотношение

$$x_1(\Omega_1) = -x_1(-\Omega_1); x_2(\Omega_1) = -x_2(-\Omega_1) \quad (3.83)$$

Учитывая его, из (3.83) окончательно получаем

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x_1(\Omega) d\Omega, \quad (3.84)$$

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\Omega) d\Omega. \quad (3.85)$$

Величину интеграла (3.84) найдем численно с помощью метода Ромберга [87,108]. Основной алгоритм этого метода приведен в первой главе. При вычислении интеграла по методу Ромберга приходится многократно вычислять подынтегральную функцию. Обратное преобразование Фурье для некоторого изображения, оригинал которого заранее известен, показало, что при длине шага интегрирования 0,01 погрешность процедуры не превышает 0,3-0,5%.

Представлены численные результаты для кольцевого напряжения при $r = r_0$, вызванного набегающей плоской ударной волной со ступенчатым

распределением напряжения во времени. Получены численные результаты при $\nu = 0,25 \dots C_{31}/C_{p1} = 0,5$; $\theta = 0^\circ$ и 90° . Для определения интеграла (3.85) границы интеграла ω_* и ω_* выбрали $[10^{-4} - N]$, $N = 1, 2, \dots, 5$, а шаг $h = 0,1, 0,01, 0,001$. При $N = 5$ и $N = 6$ значение кольцевого напряжения отличается от предыдущего пятым знаком после запятой. Изменение $\sigma_{\theta\theta}^*$ в зависимости от τ при различных $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ показано на рис. 3.6, а, б и рис. 3.7. Результаты наших численных расчетов сравнивали с известными результатами [131]. Полученные значения отличаются приблизительно на 30% при $n=0, 1$: максимальное кольцевое напряжение при $h = 0,01$ и $\theta = 90$ составляет 2,962/3,0; а по работе [59,61] — 3,28/3,0 ($\tau \approx 4,71$).

Дифракции нестационарных волн на цилиндрическом теле. Пусть внутренняя граница ($r = r_0$) свободна от напряжения, а на контакте с окружающей средой выполняется условие равенства перемещений и напряжений (3.67) [59,61]. После преобразования Фурье получим цилиндрические уравнения Бесселя (3.62) и (3.63), решение которых имеет вид (3.65) и (3.66). В нашей задаче будет шесть произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий (3.67). Вот некоторые из них:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= 2\mu_1 r^{-2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} [C_{nk} \varepsilon_{2n}^{(k)} + D_{nk} \varepsilon_{2n}^{(k)}] e^{i\Omega \tau} d\Omega, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu_1 r^{-2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} [C_{nk} \varepsilon_{2n}^{(k)} + D_{nk} \varepsilon_{2n}^{(k)}] e^{i\Omega \tau} d\Omega, \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu_1 r^{-2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} [C_{nk} \varepsilon_{2n}^{(k)} + D_{nk} \varepsilon_{2n}^{(k)}] e^{i\Omega \tau} d\Omega, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu_1 r^{-2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} [A_n \delta_n^{(1)} + B_n \delta_n^{(2)}] e^{i\Omega \tau} d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

где, C_{nk}, D_{nk}, A_n, B_n — произвольные постоянные: $C_{nk} = \delta_{nk}^{(c)}/\Delta_n$, $D_{nk} = \delta_{nk}^{(d)}/\Delta_n$, $A_n = \delta_n^{(a)}/\Delta_n$, $B_n = \delta_n^{(b)}/\Delta_n$; $\delta_{nk}^{(c)}$ и Δ_n — квадратные комплексные матрицы (6x6). Остальные элементы тензора напряжений записываются аналогично (3.86).

$$\begin{aligned} C_{nk} &= \text{Re } C_{nk} + i \text{Im } C_{nk}, \quad D_{nk} = \text{Re } D_{nk} + i \text{Im } D_{nk}, \quad A_n = \text{Re } A_n + i \text{Im } A_n, \quad B_n = \text{Re } B_n + i \text{Im } B_n, \\ \delta_n^{(a)} &= \text{Re } \delta_n^{(a)} + i \text{Im } \delta_n^{(a)}, \quad e = 1, 2, \quad \varepsilon_{nm}^{(k)} = \text{Re } \varepsilon_{nm}^{(k)} + i \text{Im } \varepsilon_{nm}^{(k)}, \quad e^{i\Omega \tau} = \cos \Omega \tau + i \sin \Omega \tau, \quad m = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Подставив (3.87) в (3.86), после некоторых преобразований получим тензор напряжений

$$\sigma_{\theta} = \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_1} \int Re \sigma_{\theta}^* d\Omega. \quad (3.88)$$

Все указанные процедуры заложены в памяти машины. Разработан универсальный алгоритм вычисления интегралов типа (3.88). Результаты расчетов приведены на рис.3.8 при $\theta = 90^\circ$ ($\nu_1 = 0,2$; $\nu_2 = 0,25$; $r_0/r_1 = 0,5$; $E_1/E_2 = 0,1$; $\eta = 0,1$). Полученные данные сопоставлены с известными результатами [59,61]. При интегрировании предела $\omega_0 = 10^{-4}$, $\omega_1 = 4$, $h = 10^{-2}$ результаты моего расчета отличаются от данных на $\approx 20\%$. Аналогичные результаты получены для цилиндрических оболочек, находящихся в упругой среде. Уравнение движения цилиндрических оболочек имеет вид [31], а окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}^*$ в оболочке — (3.80), но здесь $C_{n2} = D_{n2} = 0$. Изменение окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}^*(\theta = 90^\circ, r = r_0)$ в зависимости от τ показано на рис.3.9, где 1-результаты [59], 2-мои при данных ($h/r = 0,04$; $h = (r_1 - r_0)/2$). Аналогичные результаты получены в [59], однако авторы считают, что $\epsilon_1 = h^2/12R^2 = 0$, т.е. они учитывают изгибающий момент. В случае упругих цилиндрических тел определение напряженно-деформированного состояния объекта и окружающей его среды при действии нестационарных волн основано на построении последовательности падающих импульсов из стационарных компонентов, где каждый импульс представляет собой изменение во времени неустановившегося напряжения в падающей волне. На рис.3.10 показано изменение окружного напряжения

$$\sigma_{\theta\theta}^*(\theta = 90^\circ, r = r_0, r = r_0 + (r_1 - r_0)/2, r = r_1)$$

в зависимости от τ . Различие между напряжениями на внешней и внутренней поверхностях достигает $\approx 15 \sim 20\%$, а различие между напряжениями на срединной и внутренней поверхностях $\approx 10\%$ ($r_0/r_1 = 0,5$). Расчеты показывают, что при $\tau = 12\alpha/C_R$ результаты данного исследования приближаются к точному статическому значению $\sigma_{\theta\theta}^* = 8,13$. Зависимость окружного напряжения от τ представлена на рис.3.11. Видно, что максимальное напряжение и перемещения существенно зависят от η и $\bar{E}$.

Дифракции упругих нестационарных волн в двухслойном цилиндрическом теле. Пусть на упругое двухслойное цилиндрическое тело при $t > 0$ падает нестационарная ступенчатая нагрузка (3.59). На границах контакта ставится условие жесткого контакта. Тензор напряжения в каждом слое записывается в виде

$$\sigma_{\theta}^{(k)}(r, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} \sigma_{\theta}^{(k)}(r, \theta, \Omega) d\Omega, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.89)$$

Тензор напряжения $\sigma_{\theta}^{(k)}$ представляет собой функции Бесселя и Ханкеля первого и второго рода n -го порядка. Интеграл (3.89) вычисляется по разработанному алгоритму первой главы. При решении ограничивались пятью членами ряда (3.89), так как удержание следующих членов ряда практически не влияет на результаты. Например, удержание десяти членов (3.89) изменяет значение напряжения менее, чем на 2-3%. В расчетах были использованы следующие параметры: $r_0/r_2 = 0,2$; $r_1/r_2 = 0,6$; $\nu_1 = 0,2$; $\nu_2 = 0,25$; $\nu_3 = 0,2$; $E_1/E_2 = 0,3$; $E_3/E_2 = 0,1$; $\rho_1/\rho_2 = 0,3$; $\rho_3/\rho_2 = 0,1$.

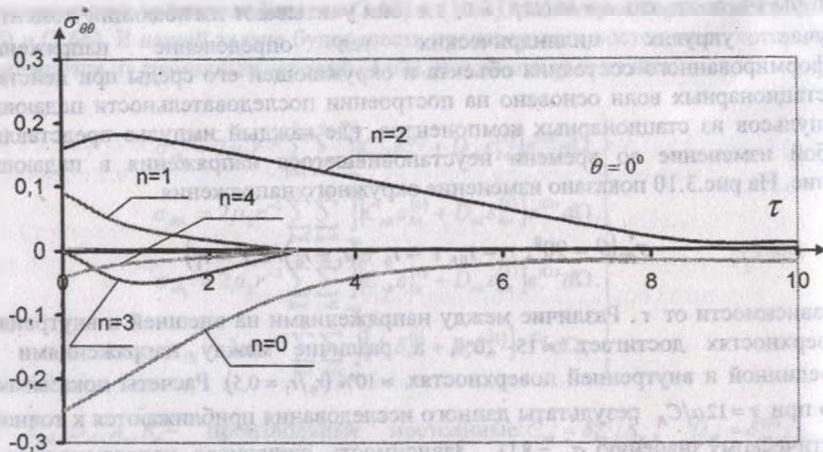


Рис. 3.6а. Зависимость кольцевых напряжений от времени, при различных n

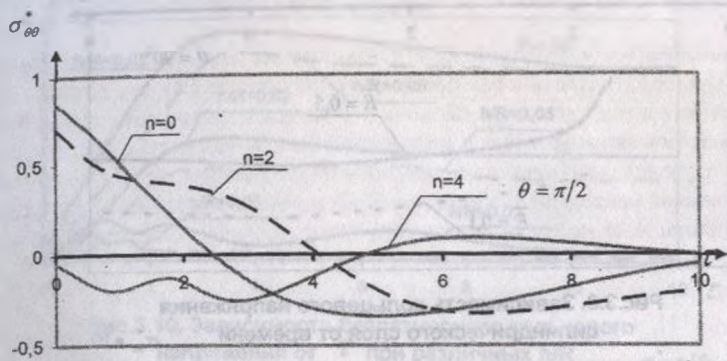


Рис.3.66. Зависимость кольцевых напряжений от времени, при различных n

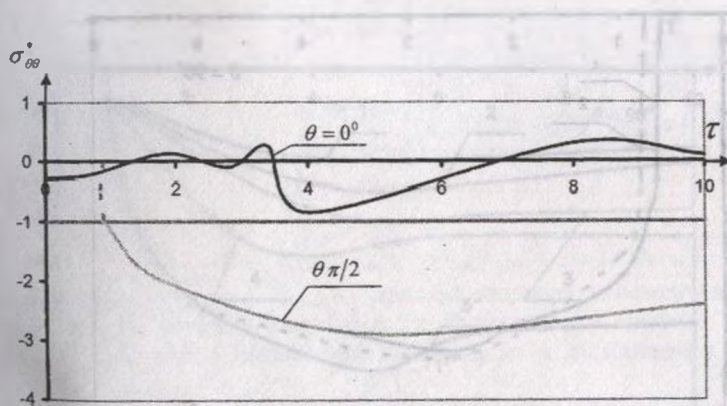


Рис.3.7. Зависимость кольцевого напряжения от времени. $\sigma_{\theta\theta}^* \cdot 10$

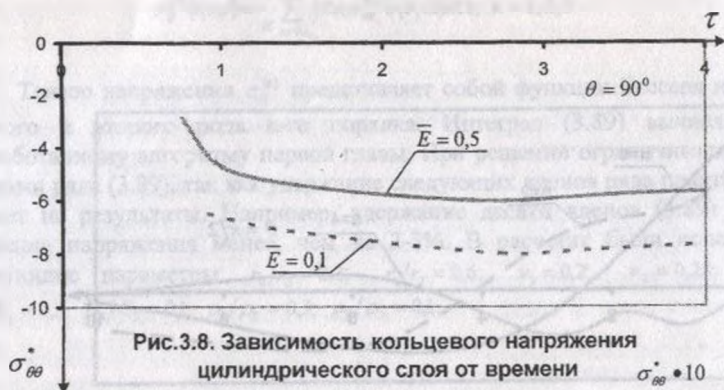


Рис.3.8. Зависимость кольцевого напряжения цилиндрического слоя от времени

$\sigma_{\theta\theta}^* \cdot 10$

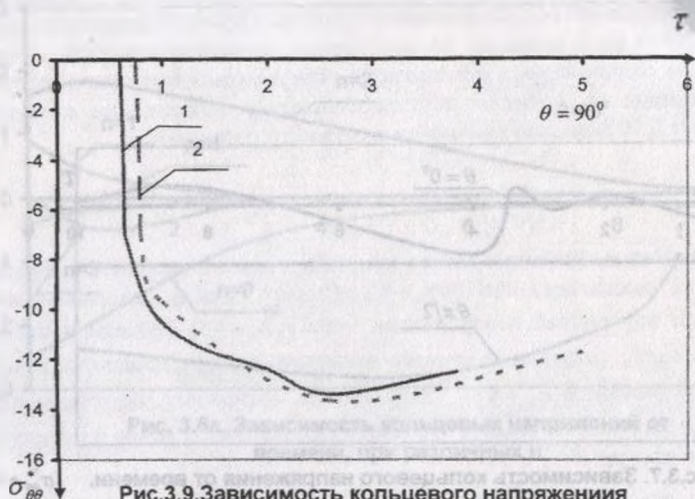


Рис.3.9. Зависимость кольцевого напряжения срединной поверхности слоя от времени

$\sigma_{\theta\theta}^* \cdot 10$

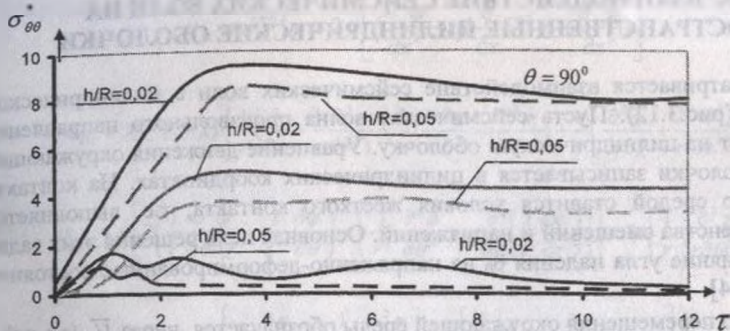


Рис.3.10. Зависимость безразмерного кольцевого напряжения от τ при различных h/R



Рис.3.11. Зависимость кольцевого напряжения внутренней поверхности цилиндрического слоя от времени:

1-гранит-бетон; 2-песчаник-бетон; 3-мягкий грунт-бетон; 4-бетон-гранит; 5-песчаник-сталь.

3.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается взаимодействие сейсмических волн с цилиндрической оболочкой (рис.3.12). Пусть сейсмическая волна произвольного направления воздействует на цилиндрическую оболочку. Уравнение движения окружающей среды и оболочки записывается в цилиндрических координатах. На контакте оболочек со средой ставится условия жесткого контакта, т.е. выполняется условие равенства смещений и напряжений. Основная цель решения этих задач показать влияние угла падения θ_0 на напряженно-деформированные состояние системы [134].

Вектор перемещения окружающей среды обозначается через $\bar{U}_1(r, e, x, t)$ с компонентами $\{U_{r1}, U_{\theta1}, U_{x1}\}$, и для цилиндрического слоя $\bar{U}_2(r, e, x, t) \{U_{r2}, U_{\theta2}, U_{x2}\}$, удовлетворяют уравнениям движения (3.1).

Здесь, также, задача решается применением уравнения движения в потенциалах φ , и ψ , $\{\psi, x\}$, они должны удовлетворять волновым уравнением (3.2). Решение уравнения (3.1) при $(i=1)$ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} A_{n1} & K_n & a_{1r} \\ B_{n1} & K_n & \delta_{1r} \\ C_{n1} & K_n & \delta_{1r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{ia(x-ct)} \quad (3.90)$$

где, $\gamma_1 = \sqrt{a^2 - K_{p1}^2}$, $\delta_1 = \sqrt{a^2 - K_{n1}^2}$, $K_{p1}^2 = \omega^2 / C_{p1}^2$, $K_{n1}^2 = \omega^2 / C_{n1}^2$;

K_n – модифицирование функции Бесселя; (A_{n1}, B_{n1}, C_{n1}) – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий. Теперь можно определить перемещение и напряжение окружающей среды по известным формулам

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + e \frac{e^2 \chi}{\partial r \partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta \partial r} \quad (3.91)$$

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\sigma_r = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + e \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial x} \right) \right];$$

$$\sigma_{xx} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - e \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \chi - \frac{\partial^3 \chi}{\partial x^3} \right) \right] ;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) + e \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \chi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial e^2 \partial \chi} \right) \right] ;$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \chi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) \right] + 2e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial \theta \partial \chi} \right) ;$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial r \partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial x} + e \left[\frac{\partial^3 \chi}{\partial \gamma \partial x} - \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \chi) \right] \right] ;$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \mu \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial x} + e \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial \theta \partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \chi) \right] \right] ; \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ;$$

f – произвольная функция времени.

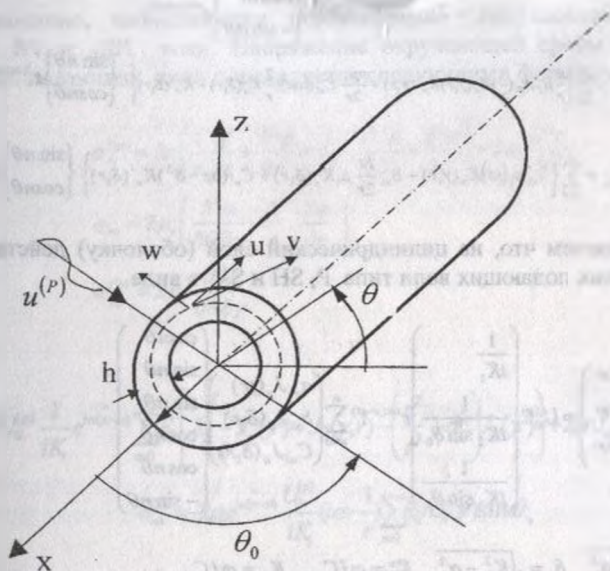


Рис.3.12. Действие упругих волн на цилиндрическую оболочку.

Перемещение и напряжение упругой среды с учетом (3.91) принимает следующий вид:

$$U_{r1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} K_n(\gamma_1 r) + B_{n1} \frac{n}{r} K_n(\delta_1 r) + e(i\alpha) C_{n1} K_n(\delta_1 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)}$$

$$U_{\theta 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{n}{r} A_{n1} K_n(\gamma_1 r) - B_{n1} K_n(\delta_1 r) - \frac{e}{r} i\alpha C_{n1} K_n(\delta_1 r) \right) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)} \quad (3.92)$$

$$U_{z1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} (i\alpha) K_n(\gamma_1 r) - C_{n1} e \left(\frac{1}{r} K_n(\delta_1 r) + K_n''(\delta r) - \frac{n^2}{r^2} K_n(\delta r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)};$$

$$\begin{aligned} \delta_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} (\lambda_r \left[\frac{1}{r} K_n(\gamma_1 r) + \frac{n^2}{r^2} K_n(\gamma_1 r) - \alpha^2 K_n(\gamma_1 r) \right] + 2\mu_r K_n''(\gamma r)) + \right. \\ \left. + B_{n1} (\lambda_r \frac{n}{r} (1 - \frac{1}{r}) K_n(\delta_1 r) + 2\mu_r \frac{n}{r} K_n'(\delta r) + C_{n1} (\lambda_r \left[(i\alpha e) K_n''(\delta_1 r) - i e (\frac{n^2}{r^2} \alpha + \delta_1^2) K_n(\delta_1 r) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu_r i\alpha e K_n'(\delta r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)}; \end{aligned}$$

$$\delta_{r\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n}{r} \mu_r A_{n1} \left(\frac{1}{r} K_n(\gamma_1 r) K_n'(\gamma_1 r) + \frac{n\mu_r}{2r} C_{n1} (i\alpha e) K_n^2(\delta_1 r) - K_n'(\delta_1 r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)};$$

$$\delta_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} \mu_1 (i\alpha) K_n(\gamma_1 r) + B_{n1} \frac{i\alpha}{2r} \mu_1 K_n(\delta_1 r) + C_{n1} i(\alpha e - \delta_1^2) K_n'(\delta_1 r) \right\} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)};$$

Предполагаем что, на цилиндрический слой (оболочку) действует одна из гармонических подающих волн типа P, SH и SV в виде

$$\begin{pmatrix} \phi^{(p)} \\ \psi^{(p)} \\ \chi^{(p)} \end{pmatrix} = U_0^{(p)} \begin{pmatrix} \frac{1}{iK_1} \\ 1 \\ \frac{1}{iK_2 \sin \theta_0} \\ \frac{1}{iK_2 \sin \theta_0} \end{pmatrix} e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{n1} J_n(\gamma r) \\ b_{n1} J_n(\delta r) \\ c_{n1} J_n(\delta_1 r) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (3.93)$$

где, $\gamma_1 = \sqrt{K_1^2 - \alpha^2}$ $\delta_1 = \sqrt{K_2^2 - \alpha^2}$ $K_1 = \omega / C_{p1}$ $K_2 = \omega / C_{n1}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n1} \\ b_{n1} \\ c_{n1} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2i^n, & n>0 \end{cases} = \alpha = \begin{cases} K_1 \cos \theta_0 & \text{при SS волне} \\ K_2 \cos \theta_0 & \text{при SS и SH волнах} \end{cases}$$

Если известна одна из компонентов падающей волны тогда по известным формулам и (3.93) можно найти перемещения окружающей среды: Например, при действии Р волны по формуле (3.93) вектор перемещения принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} U_r^{(p)} \\ U_\theta^{(p)} \\ U_x^{(p)} \end{pmatrix} = U_0^{(p)} \begin{bmatrix} 1, \\ -r^{-1} \\ i\alpha \end{bmatrix} \frac{1}{iK_1} e^{-\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n J^n \begin{bmatrix} J'_n(\delta_1 r) \\ nJ_n(\delta_1 r) \\ J_n(\delta_1 r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{bmatrix}$$

Аналогично, записываются перемещения окружающей среды при действии SV и SH волн. Напряжение окружающей среды при действии продольных падающих волн определяется следующими формулами:

$$\sigma_{rr}^{(p)} = \lambda r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + 2\mu_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu_r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \chi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial e} \right)$$

$$\sigma_{xx}^{(p)} = 2\mu_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \chi}$$

или

$$\sigma_{rr}^{(p)} = U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left[\lambda_2 \left(\frac{1}{r} J_n(r) + J_n(r, r) - \left(\frac{n^2}{r^2} + \alpha^2 \right) J_n(r) \right) + 2\mu_r J_n(r) \right] J \cos n\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(p)} = -2\mu_r e^{i\alpha(x-ct)} \frac{U_0^{(p)}}{iK_1} \left(i\alpha - \frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} E_n n J_n(r) \sin n\theta,$$

$$\sigma_{xx}^{(p)} = 2\mu_r \frac{U_0^{(p)}}{iK_1} \frac{1}{iK_1} (i\alpha) e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} n E_n J_n(r) \sin n\theta,$$

Введем следующие обозначения

Перемещение и напряжение упругой среды с учетом (3.91) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U_{r1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} K_n(\gamma_1 r) + B_{n1} \frac{n}{r} K_n(\delta_1 r) + e(i\alpha) C_{n1} K_n(\delta_1 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)} \\
 U_{\theta 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{n}{r} A_{n1} K_n(\gamma_1 r) - B_{n1} K_n(\delta_1 r) - \frac{e}{r} i\alpha C_{n1} K_n(\delta_1 r) \right) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)} \quad (3.92) \\
 U_{n1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} (i\alpha) K_n(\gamma_1 r) - C_{n1} e \left(\frac{1}{r} K_n(\delta_1 r) + K_n''(\delta r) - \frac{n^2}{r^2} K_n(\delta r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)}; \\
 \delta_{r1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} \left(\lambda_r \left[\frac{1}{r} K_n(\gamma_1 r) + \frac{n^2}{r^2} K_n(\gamma_1 r) - \alpha^2 K_n(\gamma_1 r) \right] + 2\mu_r K_n''(\gamma r) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + B_{n1} \left(\lambda_r \frac{n}{r} \left(1 - \frac{1}{r} \right) K_n(\delta_1 r) + 2\mu_r \frac{n}{r} K_n'(\delta r) + C_{n1} \left(\lambda_r \left[(i\alpha e) K_n''(\delta_1 r) - i e \left(\frac{n^2}{r^2} \alpha + \delta_1^2 K_n(\delta_1 r) \right] + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + 2\mu_r i\alpha e K_n'(\delta r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)}; \\
 \delta_{\theta 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{n}{r} \mu_r A_{n1} \left(\frac{1}{r} K_n(\gamma_1 r) K_n'(\gamma_1 r) + \frac{n\mu_r}{2r} C_{n1} (i\alpha e) \left(\frac{2}{r} K_n(\delta_1 r) - K_n'(\delta_1 r) \right) \right\} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)}; \\
 \delta_{\alpha 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{n1} \mu_1 (i\alpha) K_n(\gamma_1 r) + B_{n1} \frac{i\alpha}{2r} \mu_1 K_n(\delta_1 r) + C_{n1} i(\alpha e - \delta^2) K_n'(\delta_1 r) \right\} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)};
 \end{aligned}$$

Предполагаем что, на цилиндрический слой (оболочку) действует одна из гармонических подающих волн типа P, SH и SV в виде

$$\begin{pmatrix} \phi^{(p)} \\ \psi^{(p)} \\ \chi^{(p)} \end{pmatrix} = U_n^{(p)} \begin{pmatrix} \frac{1}{iK_1} \\ 1 \\ \frac{1}{iK_2 \sin \theta_0} \\ \frac{1}{iK_2 \sin \theta_0} \end{pmatrix} e^{i\alpha(x-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{n1} J_n(\gamma r) \\ b_{n1} J_n(\delta r) \\ c_{n1} J_n(\delta_1 r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

где, $\gamma_1 = \sqrt{K_1^2 - \alpha^2}$ $\delta_1 = \sqrt{K_2^2 - \alpha^2}$ $K_1 = \omega / C_{p1}$ $K_2 = \omega / C_{n1}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n1} \\ b_{n1} \\ c_{n1} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2i^n & n>0 \end{cases} = \alpha = \begin{cases} K_1 \cos \theta, & \text{при SS волне} \\ K_2 \cos \theta_0 & \text{при SS и SH волнах} \end{cases}$$

Если известна одна из компонентов падающей волны тогда по известным формулам и (3.93) можно найти перемещения окружающей среды: Например, при действии Р волны по формуле (3.93) вектор перемещения принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} U_r^{(p)} \\ U_\theta^{(p)} \\ U_z^{(p)} \end{pmatrix} = U_0^{(p)} \begin{bmatrix} 1 \\ -r^{-1} \\ i\alpha \end{bmatrix} \frac{1}{iK_1} e^{-i\alpha(r-c)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n J_n \begin{bmatrix} J_n'(\delta_1 r) \\ nJ_n(\delta_1 r) \\ J_n(\delta_1 r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{bmatrix}$$

Аналогично, записываются перемещения окружающей среды при действии SV и SH волн. Напряжение окружающей среды при действии продольных падающих волн определяется следующими формулами:

$$\sigma_{rr}^{(p)} = \lambda r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right) + 2\mu_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu_r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \chi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial e} \right)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(p)} = 2\mu_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial \chi}$$

или

$$\sigma_{rr}^{(p)} = U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} e^{i\alpha(r-c)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left[\lambda_2 \left(\frac{1}{r} J_n(r) + J_n(r) - \left(\frac{n^2}{r^2} + \alpha^2 \right) J_n(r) \right) + 2\mu_r J_n(r) \right] J \cos n\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(p)} = 2\mu_r e^{i\alpha(r-c)} \frac{U_0^{(p)}}{iK_1} \left(i\alpha - \frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} E_n n J_n(r) \sin n\theta,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(p)} = 2\mu_r U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} (i\alpha) e^{i\alpha(r-c)} \sum_{n=0}^{\infty} n E_n J_n(r) \sin n\theta,$$

Введем следующие обозначения

$$S_{1n} = U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} (i\alpha) e^{i\alpha(\bar{x}-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} n E_n J_n(\gamma r) + 2\mu_r^* J_n(\gamma r)$$

$$S_{2n} = 2\mu_r (i\alpha - \frac{1}{r}) E_n J_n(\gamma r);$$

$$S_{3n} = 2\mu_r (i\alpha) n E_n J_n(\gamma r);$$

после этих обозначений выше указанные напряжения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} e^{i\alpha(\bar{x}-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} S_{1n} \cos n\theta \\ \sigma_{r\theta}^{(p)} &= U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} e^{i\alpha(\bar{x}-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} \sin n\theta \\ \sigma_{rz}^{(p)} &= U_0^{(p)} \frac{1}{iK_1} e^{i\alpha(\bar{x}-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} S_{3n} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

Результирующее поле перемещения и напряжения состоит из двух перемещений при действии падающих и отраженных волн.

Решение для цилиндрического слоя ($i=2$) записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{n1} J_n(\gamma_2 r) + B_{n2} N_n(\gamma_2 r) \\ C_{n1} J_n(\delta_2 r) + D_{n2} N_n(\delta_2 r) \\ M_{n2} J_n(\delta_1 r) + K_{n2} N_n(\delta_2 r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\alpha(\bar{x}-ct)} \quad (3.95)$$

где, $\gamma_1 = \sqrt{K_{p1}^2 - \alpha^2}$, $\delta_1 = \sqrt{K_{s1}^2 - \alpha^2}$, $x_{p2}^2 = w^2 / C_{p2}^2$, $x_{s2} = \frac{w^2}{C_{s2}^2}$; J_n , N_n функция

Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно;

A_{n2} B_{n2} C_{n2} D_{n2} M_{n2} и K_{n2} произвольные постоянные которые определяются из условия на внутренней поверхности слоя и контакта в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{r2} &= 0; \\ r=r_0: \delta_{r\theta 2} &= 0; \\ \delta_{r2} &= 0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U_{r1} &= U_{r2} \\ U_{\theta 1} &= U_{\theta 2}; \\ U_{z1} &= U_{z2}; \\ \delta_{r1} &= \delta_{r2}; \\ \delta_{r1} &= \delta_{r2}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

После подстановки соответствующих перемещений и напряжений в (3.96) получаем неоднородную комплексную систему алгебраических уравнений с 9-ю неизвестными (A_{n1} B_{n1} C_{n1} A_{n2} B_{n2} C_{n2} D_{n2} M_{n2} и K_{n2}).

Если в место цилиндрического слоя рассматривается цилиндрическая оболочка, тогда получим следующее уравнение движения оболочки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1-\nu_0}{E_0 h_0} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P_1 &= 0 \\ \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h_0} \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + P_2 &= 0 \\ \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{2}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h_0} \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.97, a)$$

здесь, R – радиус срединной поверхности оболочки; h_0 – толщина оболочки; E_0 – модуль Юнга; ν_0 – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность материала оболочки; θ – угол, отсчитываемый от начальной образующей; χ – расстояние от координатной плоскости по образующей до рассматриваемой точки:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h_0} \begin{pmatrix} \delta_{rx} \\ \delta_{r\theta} \\ \delta_{rz} \end{pmatrix}$$

На границе контакта ставится условие непрерывности:

$$\left. \begin{aligned} U_{r1} &= W - U_r^{(p)} \\ U_{\theta 1} &= V - U_{\theta}^{(p)} \\ U_{\chi 1} &= U - U_{\chi}^{(p)} \end{aligned} \right\}$$

Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных принимает вид:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} U_n^{(1)} \\ V_n^{(1)} \\ W_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \\ \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} \quad (3.97,6)$$

где, $U_n^{(1)}$, $V_n^{(1)}$, $W_n^{(1)}$ — произвольные постоянные определяющиеся при совместном решении (3.96) и (3.97).

После подстановки (3.97,6) в (3.96) и (3.97,а) получим следующую систему алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} 1) & \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n K_n(\gamma R) + B_n \frac{n}{K} K_n(\delta R) + e(ia) C_n K_n(\delta R) \right] \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} + U_0^{(1)} \frac{1}{iK_1} e^{i\omega(x-\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n J_n'(\gamma R) \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{(1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} \\ 2) & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{n}{r} A_n K_n(\gamma R) + B_n K_n'(\delta R) - \frac{e}{r} (ia) C_n K_n'(\delta R) \right] \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} - \frac{1}{R} U_0^{(1)} \frac{1}{iK_1} e^{i\omega(x-\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} n E_n J_n'(\gamma R) \sin n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} \\ 3) & \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n (ia) K_n(\gamma R) - C_n e \left(\frac{1}{r} K_n'(\delta R) + K_n'(\delta R) - \frac{n^2}{r^2} K_n(\delta R) \right) \right] \cdot \\ & \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} \quad (3.98) \\ 4) & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-a^2 U_n^{(1)} - \frac{1-\nu_0}{2R^2} U_n^{(1)} + \frac{1-\nu_0}{2R} ia n K_n^{(1)} + \frac{\nu_0}{R} ia W_n + \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h} \rho_0 \omega^2 U_n^{(1)} \right] \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mu_n (ia) K_n(\gamma R) + B_n \frac{ia}{2R} \mu_n K_n(\delta R) + C_n \mu_n (ia - \delta^2) K_n'(\delta R) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega(x-\tau)} = \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h} U_0^{(1)} e^{i\omega(x-\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos n\theta \\ 5) & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1+\nu_0}{2R} ia n K_n^{(1)} + \left[\frac{1-\nu_0}{2} ia^2 \frac{n^2}{r^2} + \frac{1+\nu_0^2}{E_0 h} \rho_0 \omega^2 \right] U_n^{(1)} + \frac{a}{R^2} W_n^{(0)} + \right. \\ & + \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h} \left(\frac{n}{R} \mu_n \left(\frac{1}{r} K_n(\gamma R) - K_n'(\gamma R) \right) + \frac{\mu_n}{2} B_n \left(\frac{1}{R} K_n'(\delta R) - \frac{n^2}{r^2} K_n(\delta R) - K_n''(\delta R) \right) + \frac{n^2}{2R} C_n (ia) \left(\frac{2}{R} K_n(\delta R) - \right. \right. \\ & \left. \left. - K_n'(\delta R) \right) \right] \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} = \frac{1-\nu_0^2}{E_0 h} U_0^{(1)} \frac{1}{iK_0} e^{i\omega(x-\tau)} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \sin n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ i a \frac{v_0}{R} U_0^{(n)} + \frac{n}{R^2} U_n^{(0)} + \left(\frac{h^2}{R} \left(a^4 + \frac{2}{R^2} a^2 + \frac{n}{R^4} \right) \frac{1-v_0^2}{E_0 h} \rho_0 a^2 \right) U_n^{(0)} + \frac{1-v_0^2}{E_0 h} + \right. \\
& + \left(A_n \left(\lambda \left(\frac{1}{R} K_n'(R) + \frac{n^2}{R^2} K_n(R) - a^2 K_n'(R) \right) + 2\mu K_n''(R) \right) + B_n \left(\lambda \left(\frac{n}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \right) K_n(R) + 2\mu \frac{n}{R} K_n'(R) \right) + \right. \\
& + C_n \left(\lambda (i a h K_n''(R) - i e \left(\frac{n^2}{R^2} a + \delta^2 \right) K_n(R) \right) + 2\mu i e a K_n'(R) \right) \left. \left(\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right) e^{i(a x - c t)} = \right. \\
& = \frac{1-v_0^2}{E_0 h} U_0^{(p)} \frac{1}{i K_0} e^{i(a x - c t)} \sum_{n=0}^{\infty} S_n \sin n\theta
\end{aligned}$$

Основной целью данной работы является сравнение кольцевого и осевого усилия оболочки. Осевое и кольцевое усилия обозначим соответственно S_{xx} и $S_{\theta\theta}$

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \left[c i a U + \frac{c v_0}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} e^{i(a x - c t)} \\
S_{\theta\theta} &= \left[c i a v_0 U + \frac{c}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} e^{i(a x - c t)}
\end{aligned} \quad (3.99)$$

где,

$$c = E_0 h_0 / (1 - v_0^2)$$

Таким образом получим комплексную систему неоднородных алгебраических уравнений, которые решаются методом Гаусса. В следующем разделе приводятся полученные результаты.

Обсуждение численных результатов.

Система алгебраических уравнений (3.98) решается методом Гаусса с выделением главного элемента.

Составлен алгоритм и программа на ЭВМ для определения перемещения и напряжения оболочки и окружающей среды при действии Р, SV и SH волн.

Все результаты для σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$, получаются в результате падения продольной волны (напряжения), что нормализовано по отношению $\sigma_0^{(p)}$ ($t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}/h}{\sigma_0^{(p)}} &= \frac{E/\rho C_1}{1-v^2} \left[\frac{M^2 v^2 h}{24(M+Nm)} + \cos^2 \theta \frac{M(1-v) + N_1 m(1-v^2)}{M + N_1 \cdot m} - \right. \\
&\left. - \frac{v \cdot M \cdot r^2 \sin^2 \theta \cdot \cos 2 \cdot \theta}{M \cdot (r^2 - 1) + N_1 \cdot m(2 \cdot r^2 - 1)} \right]
\end{aligned} \quad (3.100, a)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}/h}{\sigma_0^{(p)}} = \frac{E/\rho C^2}{1-\nu^2} \left[\frac{M^2 \tau^2}{2 \cdot (M+N, m)} + \cos^2 \theta \frac{M(1-\nu)}{M-m \cdot N} - \frac{M \cdot \tau^2 \sin^2 \theta \cdot \cos 2\theta}{M \cdot (\tau^2 - 1) + N \cdot m(2 \cdot \tau^2 - 1)} \right] \quad (3.100,6)$$

где, $M = \mu/G$.

Из уравнений (3.100,а) и (3.100,б) видно, что максимальное напряжение возникает, когда $\theta = \pm \pi/2$.

Все результаты получены при следующих исходных данных

а) стальная оболочка в камне

$$\rho^* = 3,0, \tau = 0,25, \nu = 0,25 \mu = 0,3;$$

б) Бетонная оболочка в твердом грунте

$$\rho^* = 0,84, \tau = 0,25, M = 0,45, \nu = 0,2;$$

с) Бетонная оболочка в мягком грунте

$$\rho^* = 0,84, \tau = 0,45, M = 0,4, \nu = 0,2;$$

В настоящей работе μ/μ_0 изменяется в пределах $0,01 < M < 1$.

$M = h/R$ для всех случаях равно 0,05.

Численные результаты представленные ниже, показывают важность параметра M .

Полученные результаты показывают (рис.3.13,а,б), что безразмерное кольцевое напряжение увеличивается с увеличением θ_0 и в тоже время осевое напряжение уменьшается. В этом случае кольцевое напряжение больше, чем осевое напряжение в мягком грунте. Это видно из формулы (3.100,б), когда

$$\frac{M(1-\nu) + N \cdot m(1-\nu^2)}{M + N \cdot m} > \frac{M \cdot \tau^2 \cdot \nu}{M \cdot (\tau^2 - 1) + N \cdot m(2 \cdot \tau^2 - 1)} \quad (3.101)$$

тогда максимальное значение $\sigma_{\theta\theta}$ в $\theta_0 = 0$.

Практика подтверждает это утверждение. Из формулы (3.100,б) видно, что $\sigma_{\theta\theta}$ увеличивается с увеличением θ .

Если условие (3.101) выполнено, тогда $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{\theta\theta}$ для всех θ_0 при условии, если

$$\tau^2 > 4 + \frac{2 \cdot N \cdot m(1 \pm \nu)}{M} \quad (3.102)$$

Так как τ^2 является больше для мягкого грунта, это условие показывает, что окружное напряжение больше чем осевое напряжение для продольной падающей волны в мягком грунте.

Следующая задача состоит в исследовании SH волн. Перемещение окружающей среды в этом случае:

$$u_x^{(p)} = u_y^{(p)} = 0, u_z^{(p)} = u_0 \cdot e^{i k_2 (x - c_2 t)}. \quad (3.103)$$

где, $c = c_1 / \cos \theta_0$ скорость волны в оболочке. В нашем случае, $c_1 > c > c_2$ зависит от θ_0

$$\sigma_{xz}^{(p)} = -i \cdot u_0^{(p)} \mu \cdot K_2 \cdot e^{i k_2 (x - c_2 t)} \quad (3.104)$$

численные результаты для σ_{xz}^* и $\sigma_{\theta\theta}^*$ нормализовались к $\sigma_{xz}^{(p)}$.

В $n=2$ σ_{xz}^* и $\sigma_{\theta\theta}^*$ принимает следующий вид

$$\delta_{xz}^* = \frac{(E/\rho) \cdot c^2}{1-v^2} \cdot \frac{v \cdot M \cdot \tau^2 \cdot \sin \theta_0 \cdot \sin 2\theta_0}{M \cdot (\tau^2 - 1) + N \cdot m \cdot (2 \cdot \tau^2 - 1)}; \delta_{\theta\theta}^* = \frac{1}{v} \cdot \delta_{xz}^*. \quad (3.105)$$

На рис.3.14,а,б приведены результаты выше упомянутых трех случаев. В этом случае максимальная амплитуда появляется при $\Theta = \pm \pi/4; \pm 3\pi/4$. Из полученных результатов видно, что при действии SV волны преобладающим напряжением является кольцевое напряжение. Их значительно превышают остальные, если оболочка в мягком грунте.

Пусть в подземной оболочке падает SH волна, в которой потенциал падающих волн определяется уравнением (3.93)

$$\left. \begin{aligned} u_z^{(p)} &= -\sin \Theta_0 \cdot u_0^{(p)} \cdot e^{i k_2 (x - c_2 t)} \\ u_y^{(p)} &= i \cos \Theta_0 \cdot u_0^{(p)} \cdot e^{i k_2 (x - c_2 t)} \\ u_x^{(p)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.106)$$

Видно, что когда $\Theta_0 = \pi/2$ перемещения параллельны к оси X, а при $\Theta_0 = 0$ параллельны к оси y. Тангенциальное напряжение определяется следующим выражением

$$\tau_{xy}^{(p)} = -(\mu_0) \cdot u_0^{(p)} \cdot K_2 \quad (3.107)$$

Тогда нормализованные осевое и кольцевое напряжения принимают следующий вид:

$$\delta_{\theta\theta}^* = \frac{(E/\rho) \cdot C_2^2}{2 \cdot (1-v^2)} \cdot \sin 2 \cdot \Theta_0 \cdot \left[\frac{M \cdot (1-v) + N \cdot m(1-v^2)}{M + N \cdot m} + \frac{v \cdot m \cdot \tau^2}{M \cdot (\tau^2 - 1) + N \cdot m(2 \cdot \tau^2 - 1)} \right] \quad (3.108)$$

$$\delta_{\infty}^* = \frac{(E/\rho) \cdot C_2^2}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \sin \Theta_0 \cdot \left[\frac{M \cdot (1 - \nu^2)}{M + N} + \frac{m \cdot \tau^2}{M \cdot (\tau^2 - 1) + N \cdot m(2 \cdot \tau^2 - 1)} \right] \quad (3.109)$$

Из формулы (3.108) и (3.109) видно, что $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} принимает максимальное значение при $\Theta_0 = 45^\circ$. Также $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{xx}$ при условии, если

$$\frac{M \cdot \tau^2}{M(\tau^2 - 1) + N \cdot m(2 \cdot \tau^2 - 1)} > \frac{N \cdot m(1 + \nu)}{M + N \cdot m}$$

Значения $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{xx} для вариантов приведены в таблице. Рисунки 3.15a,b,c,d показывают зависимости σ_{xx}^* и $\sigma_{\theta\theta}^*$ от частоты Ω , когда $\Theta_0 = 5^\circ$ и 90° . Видно, что в третьем случае оба напряжения зависят от частоты немного больше, чем в первых двух случаях, особенно при маленьких углах падения. Во всех этих случаях они увеличиваются с увеличением частоты. На рис.3.16 показаны варианты зависимости напряжения от частоты. Из этих рисунков видно, что в первых двух случаях вызванные напряжения, кроме осевого, при маленьких углах падения почти не зависят от частоты. Сопоставление результатов для двух волн сдвига с продольными волнами показывает, что при маленьких углах падения на трубопровод (оболочку) продольные волны возникают большие напряжения, чем две волны сдвига. При углах падения $\Theta_0, 90^\circ$ SV волны вызывают больше напряжения чем продольный. С другой стороны самые большие осевые напряжения вызываются с помощью SH волн при $\Theta_0 = 45^\circ$. Фактически, максимальное напряжение, вызванное в бетонной оболочке, лежащее в мягком грунте, происходит из-за SH волны, что значительно больше чем P и SV волны вместе взятые. Напряженно-деформированное состояние окружающей среды вызванное с трех падающих типов волн, разное. Для SV волн окружное напряжение больше, чем осевое напряжение во всех трех случаях. Для продольных волн, с другой стороны, осевое напряжение больше, чем окружное напряжение в первых двух случаях и они зависят от угла падения в третьем случае несмотря на то, что окружное напряжение всегда больше чем осевое напряжение. Для SH падающей волны, окружное напряжение больше, чем в первых двух примерах, но оно меньше, чем в третьем примере (см. рис.3.17).

В этом параграфе мы дали трехмерный анализ глубоко заложенных цилиндрических оболочек (трубопроводов) при действии сейсмических волн. Здесь мы получили при низких частотах простые выражения, которые можно использовать для оценки амплитуды напряжений в глубоко заложенных трубопроводах при длине волны $\Omega = wR/C_2$. Показано, что вызванные максимальные напряжения управляются направлениями падающих волн и главным образом коэффициентом упругости почвы и оболочки. Настоящий анализ показывает, что важно учитывать пространственные факторы при

расчете подземных сооружений. Дополнительно к выше сказанному исследована амплитудно-частотная (кольцевых нагрузок A_0) характеристика оболочки (бетонная оболочка в мягком грунте $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta_0 = 90^\circ$) при действии продольных волн. Результаты расчетов представлены на рис.3.18. На рис. 3.19 приведена максимальная амплитуда напряжения в противовес частоты SH волны падающей на 45 градусе по отношению к оси.

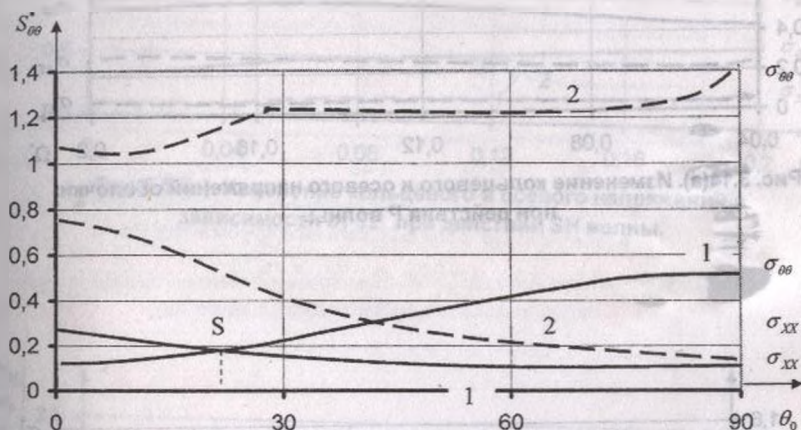


Рис.3.13(а). Зависимость усилия от угла: θ : 1 и 2 – 1 и 2 группа исходных данных.

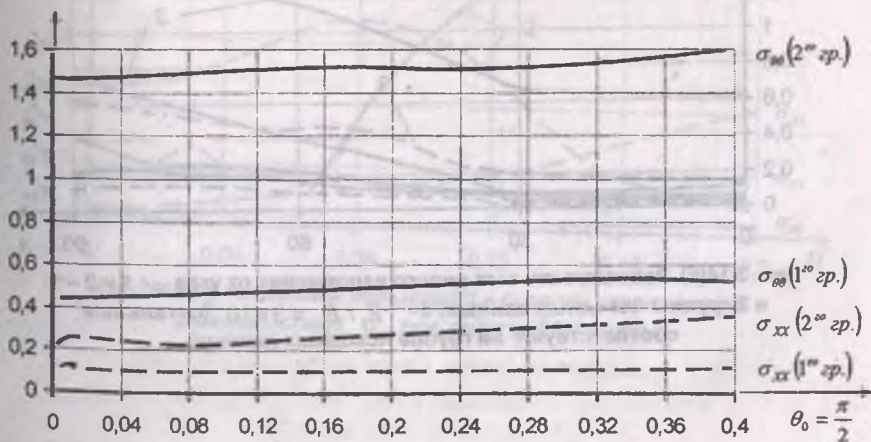


Рис. 3.13(б). Изменение кольцевого и осевого напряжения оболочек при действии Р-волны.

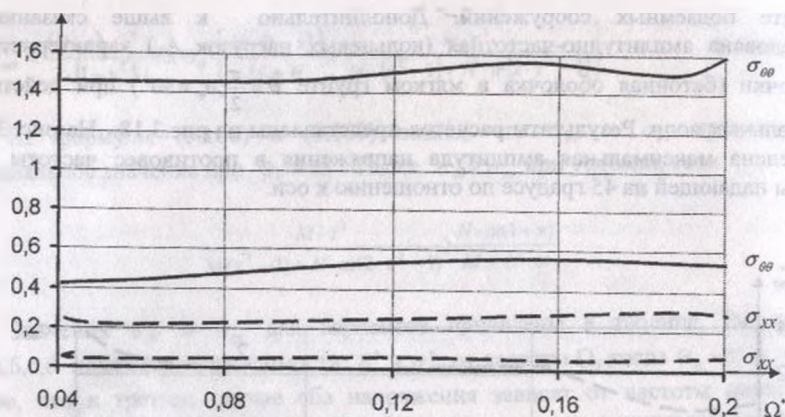


Рис. 3.14(а). Изменение кольцевого и осевого напряжений оболочки при действии Р волны.

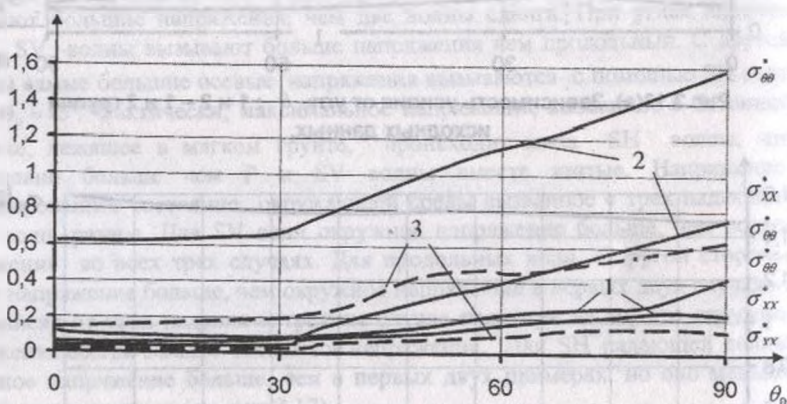


Рис. 3.14(б). Зависимость кольцевого напряжения от угла θ : 1 и 2 — 1 и 2 группы исходных данных; 3 — $E_1/E_2 = 3 \cdot 10^{-1}$ (остальные соответствуют 1-й группе исходных данных).

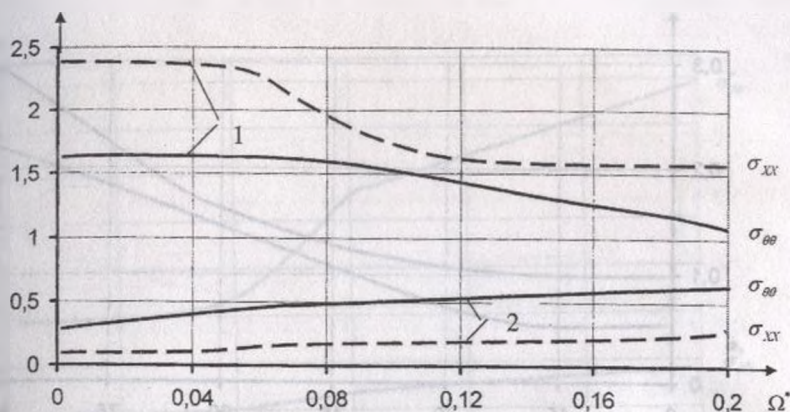


Рис.3.15(а). Изменение кольцевого и осевого напряжений в зависимости от Ω при действии SH волны.

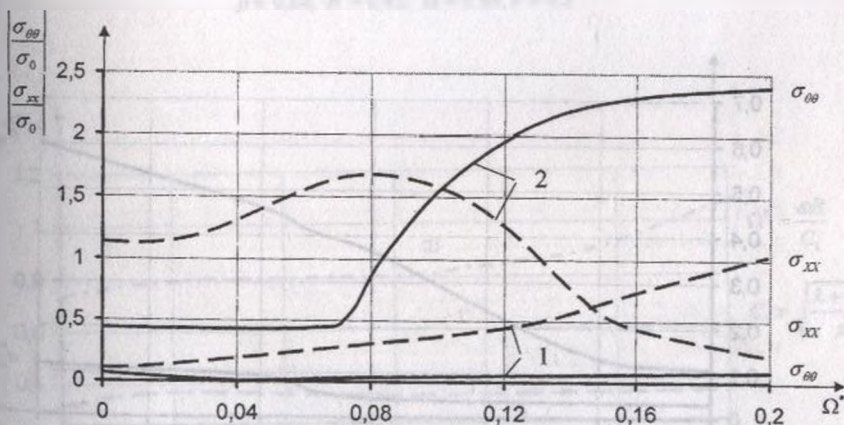


Рис. 3.15(б). Изменение кольцевого и осевого напряжений в зависимости от Ω при действии SV волны.

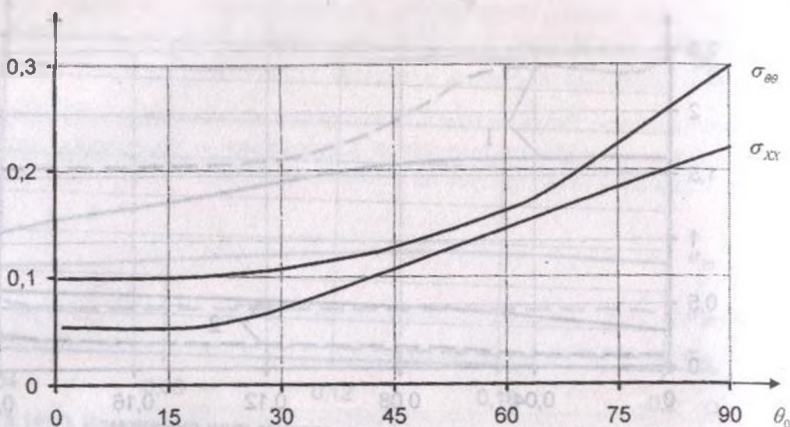


Рис. 3.15(с). Зависимость максимального напряжения от угла падения SV волны. Стальная труба в грунте.

$$\rho = 3,0; \sigma = 0,25; m = 0,8; \nu = 0,25$$

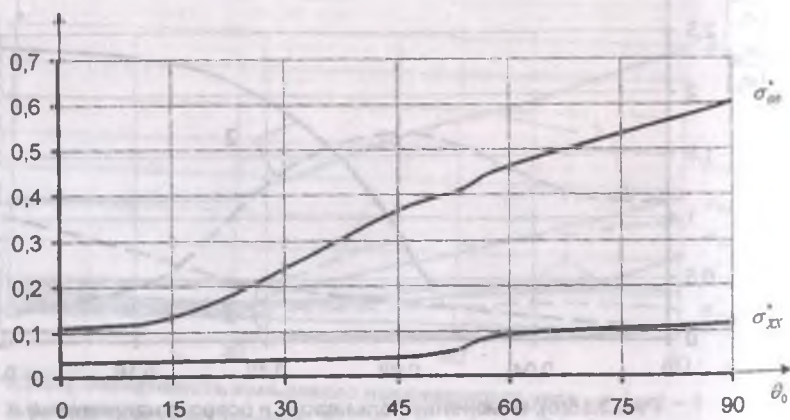


Рис. 3.15(д). Зависимость максимального напряжения от угла падения SV волны. Бетонная труба в твердом грунте.

$$\rho^* = 0,24; \sigma = 0,25; m = 0,25; \nu = 0,2$$

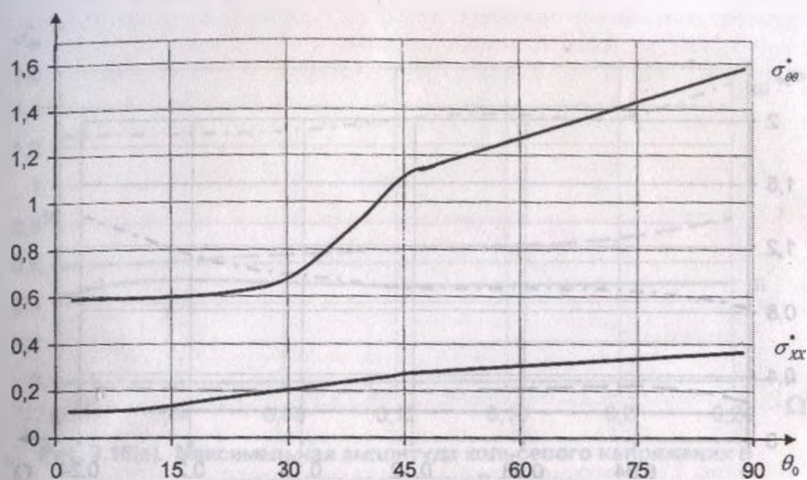


Рис. 3.16(а). Зависимость максимального напряжения от угла падения.
SV волны. Бетонная труба в мягком грунте.

$$\rho = 0,84; \sigma = 0,45; m = 0,04; \nu = 0,2$$

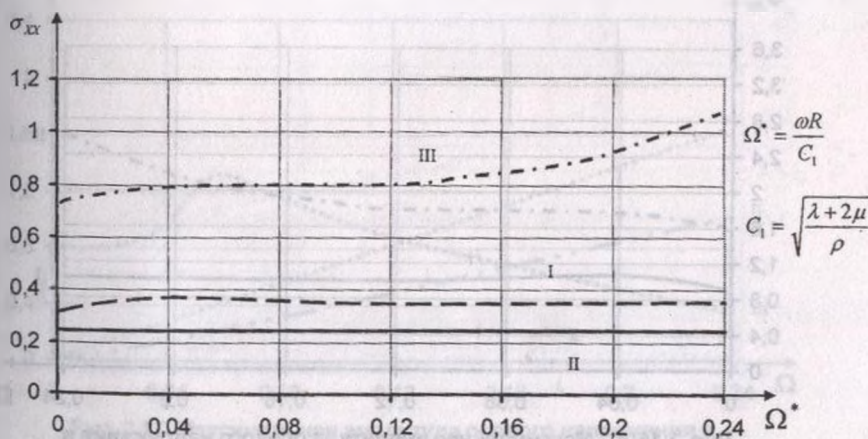


Рис. 3.16(б). Максимальная амплитуда осевого напряжения в зависимости от частоты Ω^* ($\theta_0 = 5^\circ$).

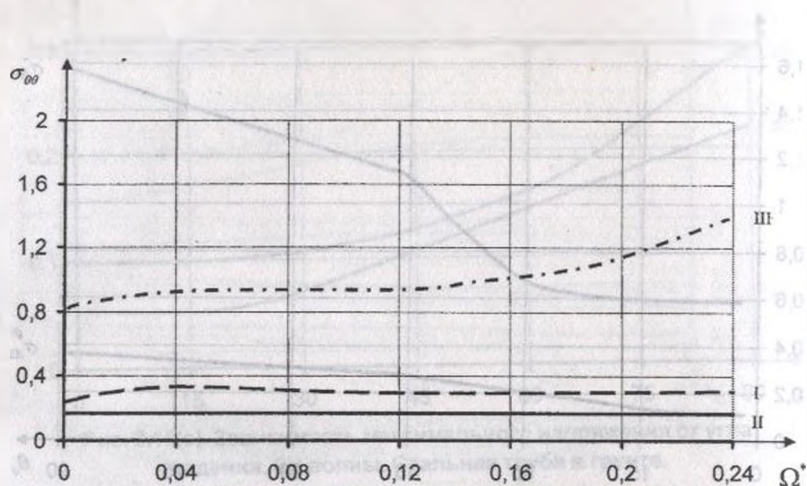


Рис. 3.16(с). Максимальная амплитуда кольцевого напряжения в зависимости от частоты Ω^* ($\theta_0 = 5^\circ$).

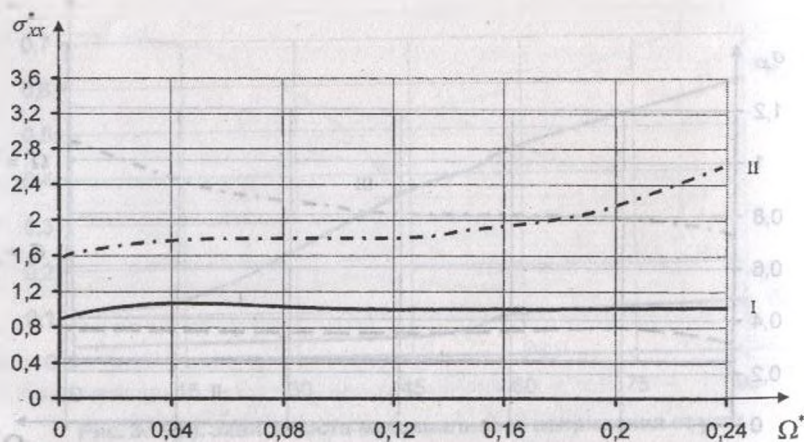


Рис. 3.16(д). Максимальная амплитуда осевого напряжения в зависимости от частоты Р волны ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$).

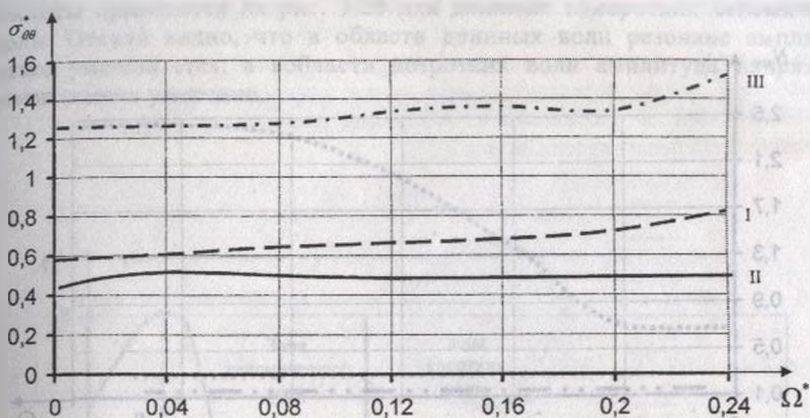


Рис. 3.16(е). Максимальная амплитуда кольцевого напряжения в зависимости от частоты Р волны ($\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$).

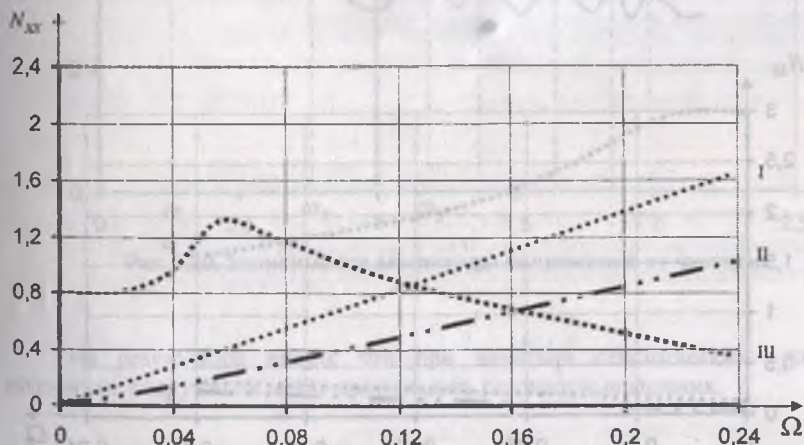


Рис. 3.17 Максимальная амплитуда осевого напряжения в противовес частоты SH волны падающей на 90 градусе по отношению к оси.

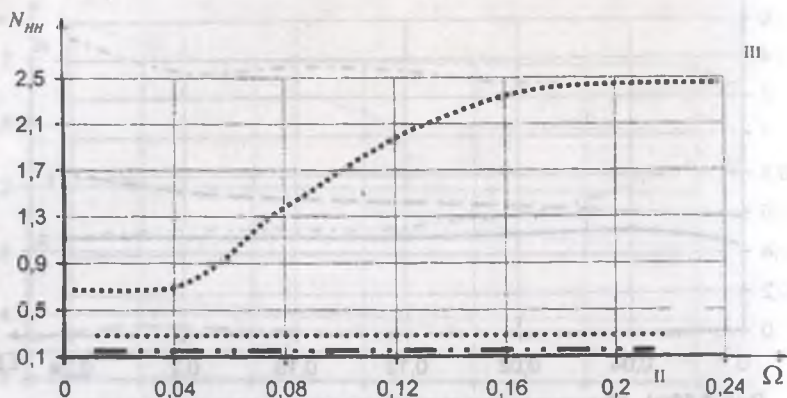


Рис. 3.18 Максимальная амплитуда окружного напряжения в зависимости от частоты SH волны падающей на 90 градусе по отношению к оси.

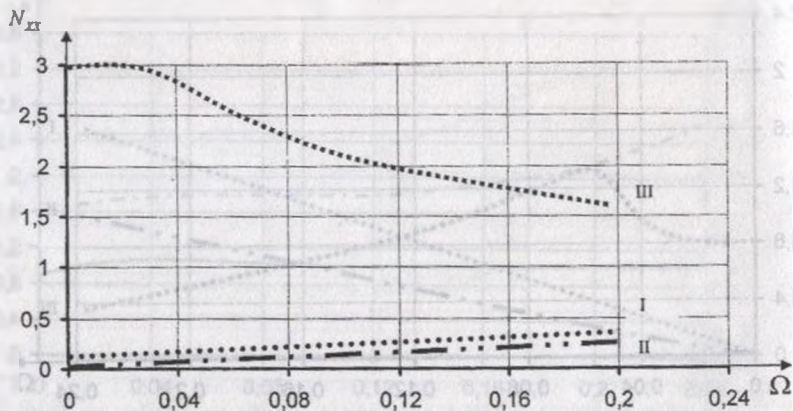


Рис. 3.19 Максимальная амплитуда напряжения в противовес частоты SH волны падающей на 45 градусе по отношению к оси.

Полученные результаты зависимости амплитуды напряжения от частоты приводятся на рис. 3.20 для длинных и коротких сейсмических волн. Отсюда видно, что в области длинных волн резонанс амплитуды резко уменьшается, а в области коротких волн амплитуда напряжения уменьшается умеренно.

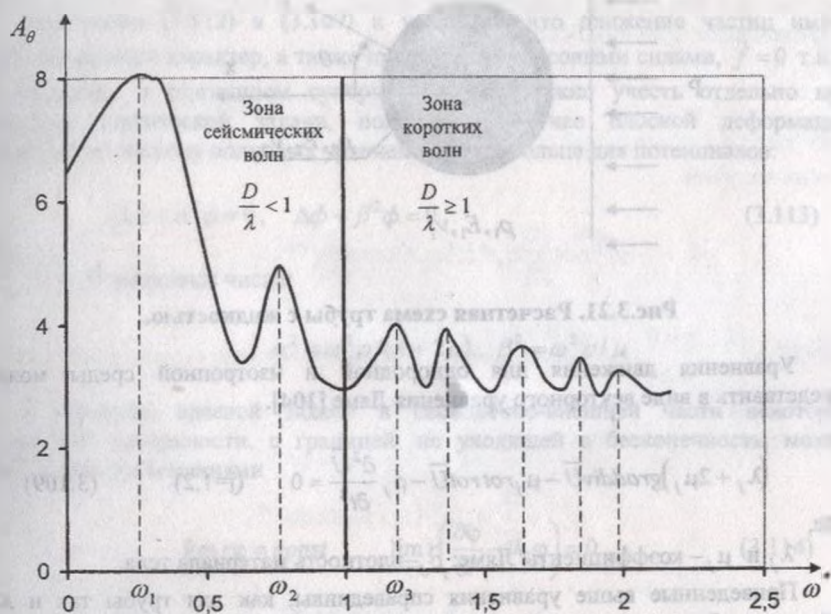


Рис.3.20. Зависимости амплитуды напряжения от частоты.

Из результатов видно, что при действии сейсмических волн на подземные сооружения могут происходить резонансные явления.

Учитывая полученные соотношения, выведем решение краевой задачи для случая падения на подземную трубу волны сжатия. Волновой потенциал такой волны имеет вид

$$\varphi_1^{(i)} = A e^{i(\alpha_1 x - \omega t)}; \quad (3.117)$$

где, A амплитуда падающей продольной волны; α_1 - волновое число; ω - частота внешних воздействий. Запишем (3.117) в полярных координатах, а затем разложим в ряд Фурье (комплексная Форма) и воспользуемся интегральным определением функции Бесселя

$$2\pi i^n I_n(Z) = \int_0^{2\pi} e^{iZ \cos \theta} \sin n\theta d\theta.$$

Тогда получим

$$\varphi_1^{(i)} = A \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n I_n(\alpha_2 r) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (3.118)$$

где, $E_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n \geq 1 \end{cases}$; I_n - цилиндрическая функция Бесселя первого рода.

Потенциалы волн, отраженных от трубы в грунт, имеют вид и удовлетворяют условиям излучения (3.114)

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) \cos n\theta e^{-i\omega t}; \\ \psi_1^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \sin n\theta e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

где, $H_n^{(1)}$ цилиндрическая функция Ханкеля первого рода [22].

Суммарные потенциалы в грунте равны

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(i)} + \varphi_1^{(r)}; \quad \psi_1 = \psi_1^{(r)}. \quad (3.120)$$

Преломленные в трубе волны в начале распространяются по направлению к центру трубы, а потом, отражаясь, идут в обратном направлении. Поэтому они должны удовлетворять как условиям излучения, так и поглощения [104]:

$$\varphi_1^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_1 r)]^* \cos n\theta e^{-i\omega t};$$

$$\psi_2^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r)]^* \sin n\theta e^{-i\omega t}, \quad (3.121)$$

где, $H_n^{(1),(2)}$ — цилиндрическая функция Ханкеля первого и второго рода.

Потенциал скоростей в сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\varphi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} [G_n I_n(\alpha_3 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

Перемещения и напряжения через потенциалы записываются в следующем виде:

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]; \quad (3.122)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right];$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left\{ 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \right\}.$$

Подставляя (3.122) в (3.111) с учетом (3.114), получим следующее выражение для перемещения и напряжения:

$$U_{r1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A E_n i^n I_n^1(\alpha_1 r) \alpha_1 + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r)^* \right] \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (3.123)$$

$$U_{r2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n H_n^1(\alpha_1 r) \alpha_2 + D_n H_n^{(2)}(\alpha_1 r) + \right. \\ \left. + n r^{-1} (E_n H_n^{(1)}(\beta_n r) + F_n H_n^{(2)}(\beta_n r)) \right] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$U_{r3} = -(i\omega)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_3 G_n I_n(\alpha_3 r) \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$U_{\theta 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-nr^{-1}(AE_n i^n J_n(\alpha_1 r) + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r))}{-B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \beta_1} \right] \sin n\theta e^{-i\omega t},$$

$$U_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-nr^{-1}(C_n H_n^{(1)}(\alpha_2 r) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_2 r))}{-E_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) \beta_2 - F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r) \beta_2} \right] \sin n\theta e^{-i\omega t},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\alpha_1 \alpha_2^2 (AE_n i^n I_n(\alpha_1 r) + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r)) - \right. \\ & - 2\mu_1 r^{-1} (AE_n i^n I_n(\alpha_1 r) \alpha_1 + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) \alpha_1) + \\ & + 2\mu_1 r^{-2} n^2 (AE_n i^n I_n(\alpha_1 r) \alpha_1 + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r)) - 2\mu_1 r^{-2} n B_n * \\ & * H_n^{(1)}(\beta_1 r) + 2\mu_1 r^{-1} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \beta_1 \left. \right] \cos n\theta e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n2} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[-d_1 \alpha_2^2 (C_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_1 r)) - \right. \\ & - 2\mu_2 r^{-1} C_n H_n^{(1)}(\alpha_2 r) \alpha_2 + 2\mu_2 r^{-2} n^2 (C_n H_n^{(1)}(\alpha_2 r) + \\ & + D_n H_n^{(1)}(\alpha_2 r)) - 2\mu_2 r^{-2} n (E_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) \alpha_1 + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r)) + \\ & + 2\mu_2 r^{-1} n (E_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) \beta_2 + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r) \beta_2) \left. \right] \cos n\theta e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta 1} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu_1 \beta_1^2 B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) + 2\mu_1 r^{-1} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \beta_1 - \right. \\ & - 2\mu_1 r^{-2} n (AE_n i^n I_n(\alpha_1 r) + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r)) - \\ & - 2\mu_1 r^{-1} n (AE_n i^n I_n(\alpha_1 r) \alpha_1 + A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) \alpha_1) \left. \right] \cos n\theta e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta 2} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu_2 \beta_2^2 (E_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r)) + 2\mu_2 r^{-1} (E_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) \beta_2 + \right. \\ & + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r) \beta_2) - 2\mu_2 r^{-1} (E_n H_n^{(1)}(\beta_2 r) + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r)) + \\ & + 2\mu_2 r^{-1} (C_n H_n^{(1)}(\alpha_2 r) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_2 r)) + 2\mu_2 r^{-1} (C_n H_n^{(1)}(\alpha_2 r) \alpha_2 + \\ & + D_n H_n^{(2)}(\alpha_2 r) \alpha_2) \left. \right] \sin n\theta e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Неопределенные коэффициенты $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений седьмого порядка

$$[C]\{q\} = [F] \quad (3.124)$$

где, $\{q\}$ —вектор столбец, содержащий произвольные постоянные; $\{F\}$ —вектор столбец внешних нагрузок; $[C]$ —квадратная матрица, коэффициент и свободный член первого уравнения системы определяется по формулам:

$$C_{11} = \alpha_1 H_n^{(1)}(\alpha_1 R); C_{12} = nR^{-1} H_n^{(1)}(\beta, R); C_{13} = -\alpha_2 H_n^{(1)}(\alpha_2 R);$$

$$C_{14} = -\alpha_2 H_n^{(2)}(\alpha_2 R); C_{15} = -nR^{-1} H_n^{(1)}(\beta_2, R); C_{16} = -nR^{-1} H_n^{(2)}(\beta_2, R);$$

$$F_n = -AE_n i^* \alpha_i \Gamma'_n(\alpha_i R)$$

Затем, что в случае проскальзывания грунта по поверхности трубы согласно (3.115)

$$C_{21} = a_2 = 0; \quad i = 1.6$$

$$C_{43} = C_{44} = C_{45} = C_{46} = 0$$

Кроме того, в случае отсутствия жидкости в трубе:

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Уравнение (3.124) решается методом Гаусса с выделением главного элемента [104]. Теперь рассмотрим случай падения плоской поперечной волны на подземную трубу с жидкостью перпендикулярно к оси трубы. Волновой потенциал такой волны по аналогии (3.4) имеет вид:

$$\psi_1^{(i)} = B \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n I_n(\beta_n r) \sin n\theta e^{-i\omega t},$$

где, B — амплитуда потенциала падающей поперечной волны.

Вид остальных потенциалов остается без изменений, а суммарные потенциалы в грунте имеют вид.

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(r)}, \quad \psi_1 = \psi_1^{(i)} + \psi_1^{(r)}.$$

Рассматривая формулы для динамической НДС (напряженно-деформированного состояния) искомой задачи:

$$U_{r1} = Br^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n I_n(\beta_1 r) \cos n\theta e^{-i\omega t},$$

$$\sigma_{rr1} = -\sigma_{\theta\theta1} = 2\beta_1\mu_1nr^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n \left[-r^{-1} I_n(\beta_1 r) + I_n(\beta_1 r) \beta_1 \right] \cos n\theta e^{-i\omega t},$$

$$U_\theta = -B \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n I_n(\beta_1 r) \beta_1 \sin n\theta e^{-i\omega t},$$

$$\tau_{r\theta1} = B \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n \mu_1 \left[\beta_1^{-1} I_n(\beta_1 r) - 2n^2 r^{-1} I_n(\beta_1 r) + 2r^{-1} I_n(\beta_1 r) \beta_1 \right] \sin n\theta e^{-i\omega t}.$$

Для получения неопределенных коэффициентов можно воспользоваться системой (3.124), в которой по сравнению со случаем для волны изменяются только правые части. Например, свободный член сравнения с формулой (3.124) запишется в виде:

$$a_1 = -nR^{-1} E_n i^n I_n(\beta_1 R) B.$$

Изменение тангенциального смещения от длины волны приведены на рис. 3.22,

при $\rho_f = 0.132$; ---, $\rho_f = 0.33$; —, $\rho_f = 0.66$. $h = R - R_0 = 0.05$; $\nu_1 = 0.30$; $\nu_2 = 0.20$,
 $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.1$; $\frac{E_1}{E_2} = 0.01$.

На рис. 3.23 приведены радиальные смещения в зависимости от длины волны. $\frac{\rho_1}{\rho} = 0.3$; $\frac{E_1}{E_2} = 0.1$; $\nu_1 = 0.30$; $\nu_2 = 0.20$.

Из рисунка видно, что радиальное смещение при малых значениях достигает максимального значения.

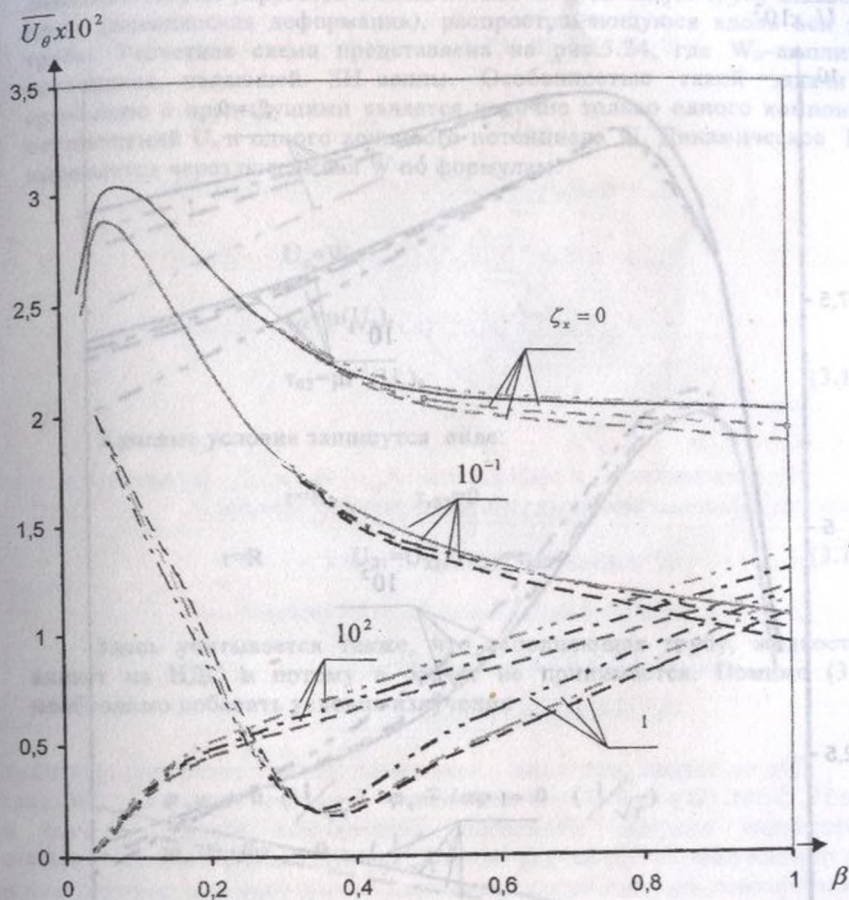


Рис.3.22. Зависимости тангенциального смещения от длины волны.

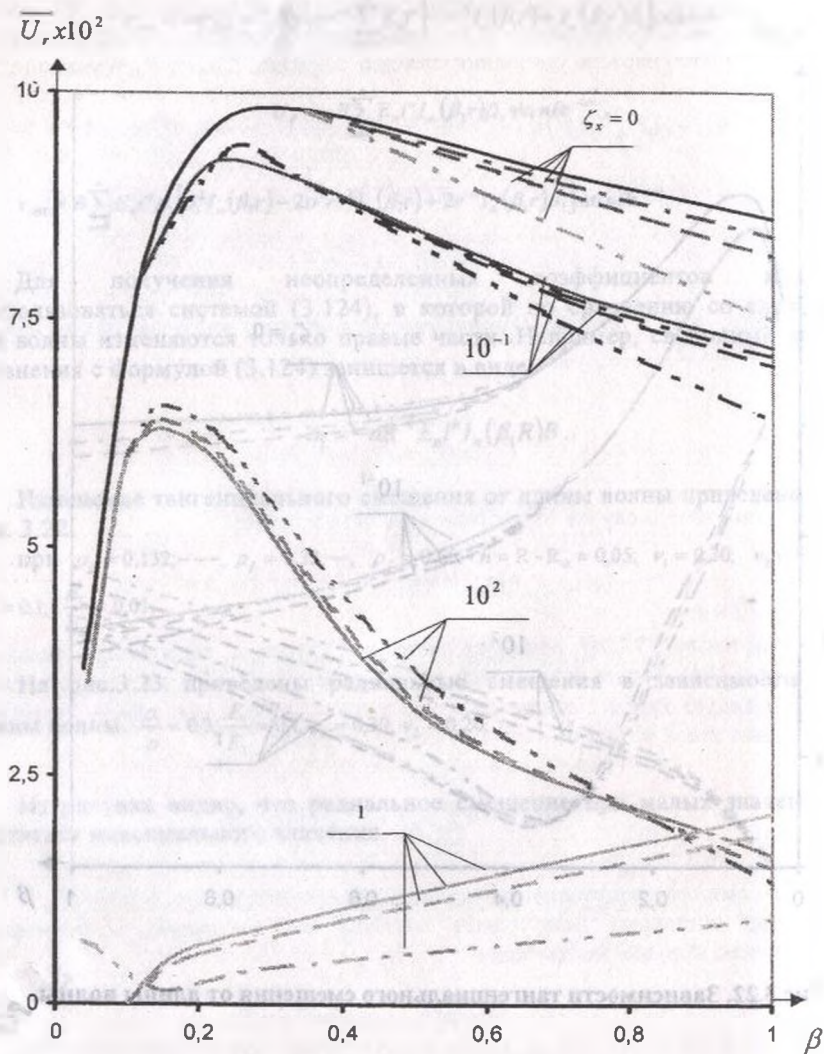


Рис.3.23. Зависимости радиального смещения от длины волны.

Воздействие SH-волны сдвига. Рассмотрим задачу динамической линейной теории упругости с воздействием на подземную трубу SH-волны сдвиг (антиплоская деформация), распространяющуюся вдоль оси этой трубы. Расчетная схема представлена на рис.3.24, где W_0 —амплитуда потенциала падающей SH-волны. Особенностью такой задачи по сравнению с предыдущими является наличие только одного компонента перемещений U_z и одного волнового потенциала W . Динамическое НДС выражается через потенциал W по формулам:

$$\begin{aligned} U_z &= W \\ \tau_{rz} &= \mu(U_z)_r \\ \tau_{\theta z} &= \mu r^{-1}(U_z)_\theta \end{aligned} \quad (3.125)$$

Краевые условия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} r=R \quad \tau_{r22} &= 0 \\ U_{21} &= U_{22}, \quad \tau_{r21} = \tau_{r22} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Здесь учитывается также, что заполняющая трубу, жидкость не влияет на НДС и потому в расчет не принимается. Помимо (3.126) необходимо добавить условия излучения

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &= 0 \quad (1/\sqrt{r}), \quad \varphi_r \mp i\alpha\varphi = 0 \quad (1/\sqrt{r}) \\ \psi_r \mp i\beta\psi &= 0 \quad (1/\sqrt{r}), \end{aligned}$$

Для потенциала падающей и отраженной волны верны соотношения (3.121)-(3.123).

Учитывая все это, получим следующее окончательное решение задачи для случая падения на подземную трубу SH-волны сдвига:

$$U_{z1} = W_0 \sum_{n=0}^{\infty} [E_n I_n^{(1)}(k_1 r) + A_n H_n^{(1)}(k_1 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$U_{z1} = -W_0 \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(k_2 r) + C_n H_n^{(2)}(k_2 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$\tau_{\alpha 21} = \mu_1 W_0 k_1 \sum_{n=0}^{\infty} [E_n I_n^{(1)}(k_1 r) + A_n H_n^{(1)}(k_1 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$\tau_{\alpha 1} = -\mu_2 W_0 k_2 \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(k_2 r) + C_n H_n^{(2)}(k_2 r)] \cos n\theta e^{-i\omega t}$$

$$\tau_{\theta 21} = -\mu_1 W_0 n r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n I_n^{(1)}(k_1 r) + C_n H_n^{(2)}(k_1 r)] \sin n\theta e^{-i\omega t}$$

$$\tau_{\theta 1} = \mu_2 W_0 n r^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(2)}(k_2 r) + C_n H_n^{(2)}(k_2 r)] \sin n\theta e^{-i\omega t}$$

где

$$k_j^2 = \omega^2 \rho_j / \mu_j$$

Неопределенные коэффициенты A_n , B_n и C_n определяются из следующей системы линейных уравнений третьего порядка:

$$H_n^{(1)}(k_1 R) A_n + H_n^{(1)}(k_2 R) B_n + H_n^{(2)}(k_2 R) C_n =$$

$$= E_n I_n^{(1)}(k_1 R) k_1 H_n^{(1)}(k_1 R) A_n + k_2 H_n^{(1)}(k_2 R) B_n +$$

$$+ k_2 H_n^{(2)}(k_2 R) C_n = k_1 E_n I_n^{(1)}(k_1 R)$$

$$H_n^{(1)}(k_2 R_0) B_n + H_n^{(2)}(k_2 R_0) C_n = 0$$

Для численной реализации полученных формул составлена программа для ПС ЭВМ. На рис. 3.25 приведена блок — схема этой программы. Вводимая информация содержит минимально необходимые данные: внешний и внутренний радиусы трубы, вид воздействия (P-SV-или SH-волна); дальность землетрясения; круговая частота падающей волны; упругие характеристики и плотность материала трубы, грунта, насыпи жидкости; координаты точек, в которых определяется напряженное состояние.

Вычисления значений цилиндрических функций и их производных производится по известным формулам. Решение систем линейных уравнений относительно коэффициентов $A_n, \dots, C_n$ осуществляется методом Гаусса с выделением главного члена.

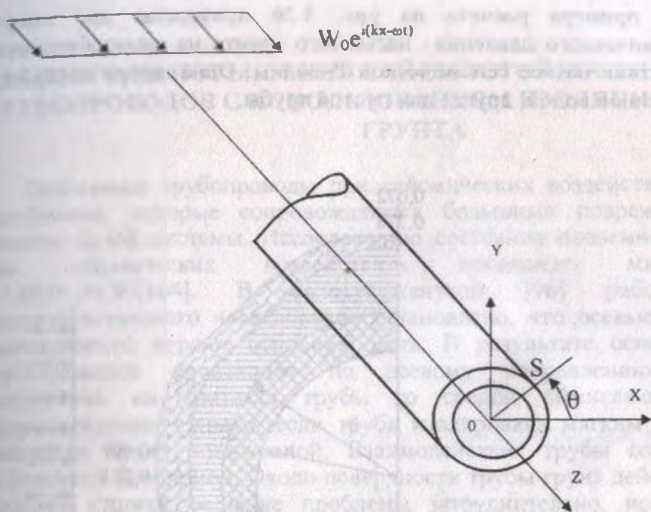


Рис. 3.24. Расчётная схема.

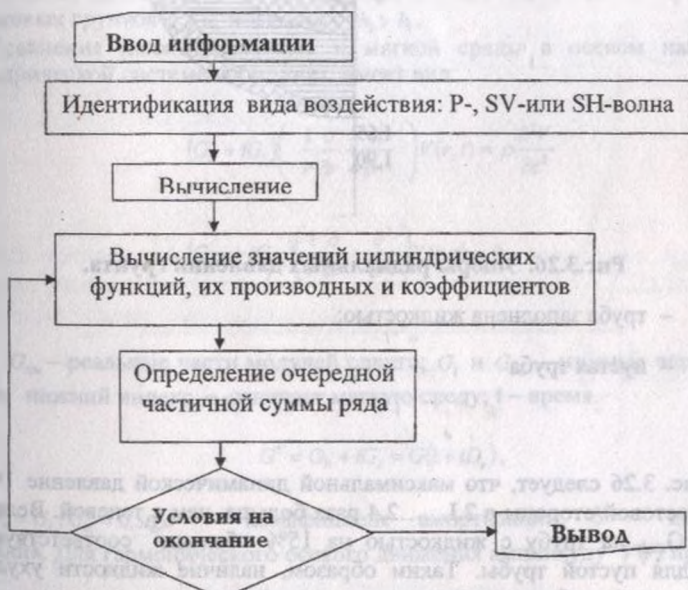


Рис. 3.25. Блок-схема программы.

В качестве примера расчета на рис. 3.26 приведены две эпюры радиального динамического давления насыпного грунта на железобетонную трубу при воздействии на нее сейсмической Р-волны. Одна эпюра построена для трубы, заполненной водой, другая для пустой трубы.

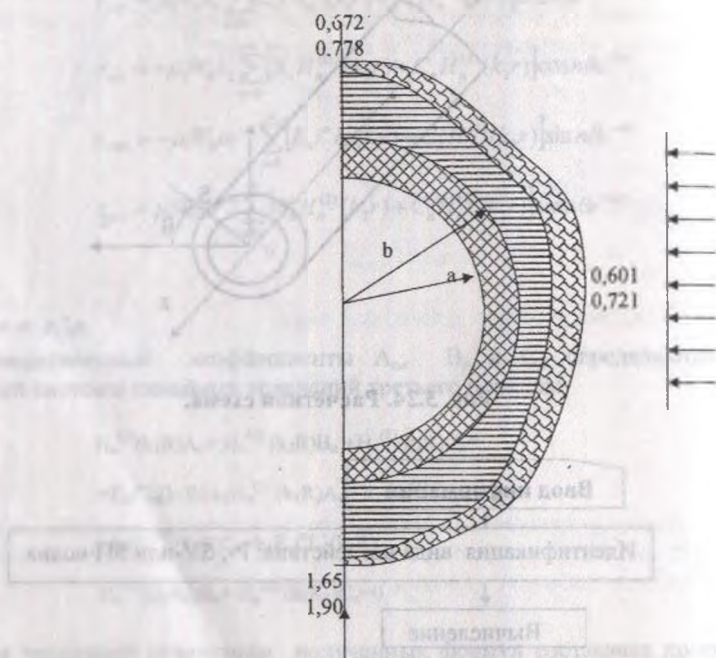


Рис.3.26. Эпюры радиальных давлений грунта.

-  – труба заполнена жидкостью;
-  – пустая труба

Из рис. 3.26 следует, что максимальной динамической давление $|G_{\max}|$ грунта со световой стороны в 2.1.....2.4 раза больше, чем с теневой. Величина давления $G_{\max}$ на трубу с жидкостью на 15% больше соответствующей величины для пустой трубы. Таким образом, наличие жидкости ухудшает работу подземной трубы при сейсмическом воздействии.

3.7. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИЗОЛЯЦИИ ИЗ МЯГКОГО ГРУНТА

Подземные трубопроводы при сейсмических воздействиях подвергаются колебаниям, которые сопровождаются большими повреждениями и даже отказом целой системы. Исследованию состояния подземных трубопроводов при сейсмических воздействиях посвящено множество работ [87,89,91,96,99,104]. В вышеупомянутой [96] работе на основе экспериментального исследования установлено, что осевые усилия в период землетрясений играют основную роль. В результате основное разрушение трубопроводов происходит по осевому направлению. Определяющие напряжение на контакте трубы со средой вычисляются по точному предположению. Однако, если труба изолирована мягким грунтом значение сцепления будет пониженной. Взаимодействие трубы со средой является нелинейной проблемой. Около поверхности трубы грунт действует не линейно. Поэтому строгое решение проблемы затруднительно, но приблизительное решение может быть сформулировано.

Предположим, что труба твердая, бесконечно длинная, глубоко заглубленная в грунт и окружена мягким слоем, которая имеет пониженную плотность. Обе среды вязкоупругие (рис. 3.27.а,б). При $h = h_1, u = u_1$, а при $h = h_2, u = u_2$, для одинаковых грунтов $u_2 > u_1$, поскольку $h_2 > h_1$.

Уравнения движения грунта и мягкой среды в осевом направлении цилиндрической системе координат имеет вид:

$$(G_R + iG_I) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) V(r, t) = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (3.127)$$

$$(G_{Rm} + iG_{Im}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) V(r, t) = 0,$$

где,

G_R и G_{Rm} — реальные части модулей сдвига; G_I и G_{Im} — мнимые части модулей сдвига; нижний индекс m означает мягкую среду; t — время.

$$G^* = G_R + iG_I = G(1 + iD_s),$$

$D_s = G_I / G_R = 0,5tg\delta$ — коэффициент амортизации, δ — коэффициент затухания. Для гармонического осевого движения амплитуду $V(r)$ представим в виде:

$$V(r, t) = V(r) e^{i\omega t} \quad (3.128)$$

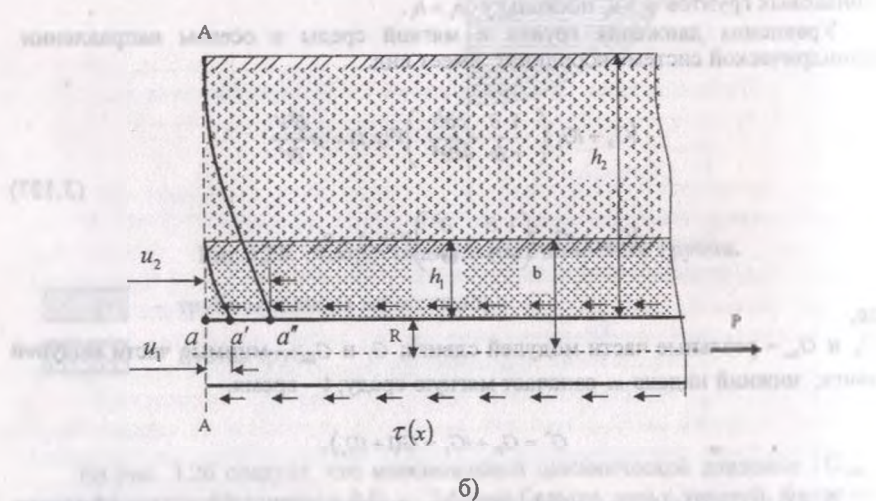
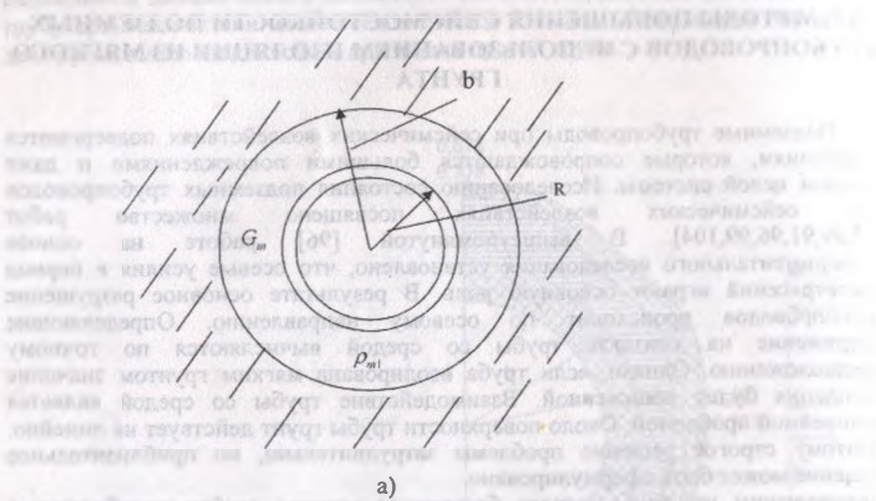


Рис. 3.27 а,б. Расчетная схема.

Подставляя (3.128) в (3.127) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения в виде:

$$\text{а) } \frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} - S^2 V(r) = 0 \quad r \geq b \quad (3.129)$$

$$\text{б) } \frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad b \geq r \geq R$$

где,

$$S = \frac{i\omega}{V_s \sqrt{1 + i\eta g \delta}}$$

Решение уравнения (3.129) выражается через специальные функции Бесселя:

$$V(r) = CK_0(Sr) + DI_0(Sr) \quad r \geq b \quad (3.130)$$

$$V_m(r) = A \ln(r) + B \quad b \geq r \geq R,$$

где,

K_0 и I_0 функции Бесселя первого и второго рода; A, B, C и D — произвольные постоянные. Для волн, движущихся от тела в бесконечность D должен быть равен нулю.

Касательное напряжение

$$\tau_{xy} = G \cdot \frac{dV}{dr} \quad (3.131)$$

На границе контакта между грунтом и мягким слоем выполняются условия равенства, смещения и соответствия напряжения. Для этого случая граничные условия записываются в виде:

$$B = CK_0(S') - A \ln(b)$$

$$C = G_{0m} \frac{1}{S'} \frac{1}{K_1(S')} A, \quad (3.132)$$

где,

$$S' = Sb; \quad G_{0m} = G_m^* / G^*.$$

После некоторых преобразований (3.132) примет вид:

$$B = -A \left[\ln(b) + \frac{G_m^*}{G^*} \frac{1}{S'} \frac{K_0(S')}{K_1(S')} \right] \quad (3.133)$$

Используя соотношения (3.132) амплитуду перемещения $V_m(r)$ можно записать в виде:

$$V_m(r) = -A \left[-im \left(\frac{r}{b} \right) + \frac{G_m^*}{G^*} \frac{1}{S'} \frac{K_0(S')}{K_1(S')} \right] \quad \text{при} \quad b \geq r \geq R \quad (3.134)$$

Реакция трубы на единицу длины

$$P_y = \int_0^{2\pi} \tau_{xy} |_{r=R} R d\theta \quad (3.135)$$

Амплитуда смещения на поверхности трубы

$$V_m(r)_{r=R} = -A \left[-im \left(\frac{R}{b} \right) + \frac{G_m^*}{G^*} \frac{1}{S'} \frac{K_0(S')}{K_1(S')} \right]$$

В работе введён коэффициент K_v , который определяет подвижность трубы при гармонической внешней нагрузке

$$K_v = \frac{P}{V_m(R)} = \frac{2\pi G_m^*}{\ln\left(\frac{b}{R}\right) + \frac{G_m^*}{G^*} \frac{1}{S'} \frac{K_0(S')}{K_1(S')}} \quad (3.136)$$

Коэффициент K_v можно представить в виде комплексных чисел

$$K_v = GT^* = G(S_{\alpha}^{**} + iS_{\beta}^{**}), \quad (3.136)$$

где,

$$T^* = \frac{2\pi(1+iD_{Sm})G_{om}^*}{\ln\left(\frac{b}{R}\right) + \frac{G_m^*}{g} \frac{(1+iD_{Sm})}{(1+iD_S)} \frac{1}{a^*} \frac{K_0(a^*)}{K_1(a^*)}}$$

Комплексный параметр T^* в общем случае представляется в виде

$$T^* = S_{\alpha R}^*(a_0, G_{om}, \frac{t_m}{R}, D_{Sm}, D_S) + iS_{\beta}^*(a_0, G_{om}, \frac{t_m}{R}, D_{Sm}, D_S)$$

где,

$$t_m = b - R$$

На рис. 3.28а,б приведена зависимость реальной и мнимой части $S_{,R}$ и $S_{,I}$ от частоты при различных $\bar{G} = \frac{G}{G}$, $\bar{t} = \frac{t}{R}$ и $\bar{D} = D_s D_{sm}$. Из рис. 3.28а,б видно, что при $G < 1$, реакция грунта в зависимости от частоты почти не изменяется. На рис. 3.29 приведена абсолютная векторная реакция грунта в зависимости от частоты.

При движении в осевом направлении мягкого слоя происходит смещение трубы. Предположим, что среда вокруг трубы движется по гармоническому закону

$$V_g(y, t) = A_g e^{i\Phi[(y/V_p)-t]}, \quad (3.137)$$

где,

A_g - амплитуда перемещения среды по осевому направлению,

V_p - скорость распространения продольных волн.

Тогда уравнение осевого движения трубы в распределенных координатах

$$\rho \frac{\partial^2 V(y, t)}{\partial t^2} - E_T S_1 \frac{\partial^2 V(y, t)}{\partial y^2} + G(S_{,R}^m + iS_{,I}^m)V(y, t) = G(S_{,R}^m + iS_{,I}^m)V_g(y, t), \quad (3.138)$$

где,

ρ - плотность материала трубы; $V(y, t)$ - смещение трубы;

E_T - модуль Юнга трубы; S_1 - площадь поперечного сечения трубы.

Абсолютное смещение трубы может быть записано как

$$V(y, t) = V_o e^{i\Phi[(y/V_p)-t]} \quad (3.139)$$

Подставляя (3.139) и (3.137) в (3.138) получим следующее соотношение:

$$\left[-\rho \omega^2 + E_T S_1 \frac{\omega^2}{V_p^2} + G(S_{,R}^m + iS_{,I}^m) \right] V_o = G(S_{,R}^m + iS_{,I}^m) V_g \quad (3.140)$$

Приведённое уравнение (3.140) позволяет определить соотношение между смещениями среды и трубы.

$$V_o = \varphi f_m(\Omega, D, \bar{G}, \bar{t}, D_m) V_g, \quad (3.141)$$

где,

$$f_m = \frac{\psi_1}{\psi_1 + \bar{\rho}\psi_2}, \quad \psi_1 = \frac{S_{11} + iS_{12}}{\pi\Omega^2}, \quad \psi_2 = \frac{S}{\pi R^2} \left(\frac{C_p}{V_p} \right)^2 - 1, \quad \bar{\rho} = \rho_m / \rho_p.$$

Осевое напряжение в трубе

$$\tau_m = E_m \frac{\partial V(y,t)}{\partial y} \quad \text{или} \quad \tau_m^* = E_m \frac{i\omega}{V_p} f_m V_s(y,t)$$

Осевое напряжение в трубе без мягкого слоя

$$\tau^* = E \frac{i\omega}{V_p} f V(y,t)$$

Для того, чтобы показать влияние осевого слоя на осевое напряжение введем параметр

$$n_m = 1 - \frac{f_m}{f}$$

Полное выражение эффективности мягкого слоя дается формулой

$$n_m = (\Omega, D_1, \bar{G}, \bar{f}, D_m) = 1 - \frac{1 + \bar{\rho}\psi_2 \frac{\pi}{\psi_1}}{\bar{\rho} \frac{\psi_2}{\psi_1}}$$

где,

$$\psi_2 = \frac{S_{11} + iS_{12}}{\pi\Omega^2}$$

Результаты расчетов эффективности мягкого слоя представлены на рис. 3.30а,б из рисунка видно, что с увеличением частоты A_s остается постоянным, т.е. не реагируют на увеличения частоты.

Из полученных результатов установлено, что изоляция трубопровода мягким грунтом является эффективной только для высоких частот.

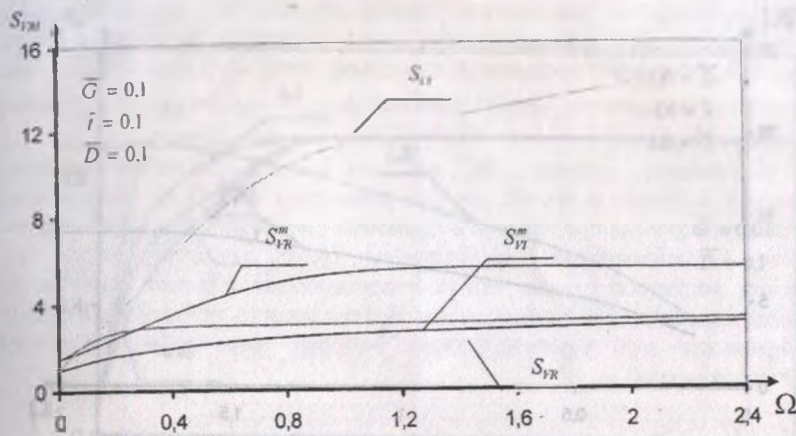


Рис.3.28а. Зависимость реакции грунта от частоты.

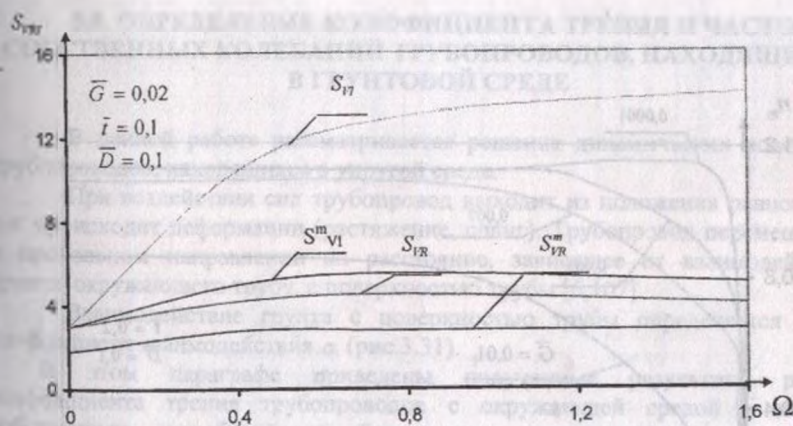


Рис.3.28б. Зависимость реакции грунта от частоты.

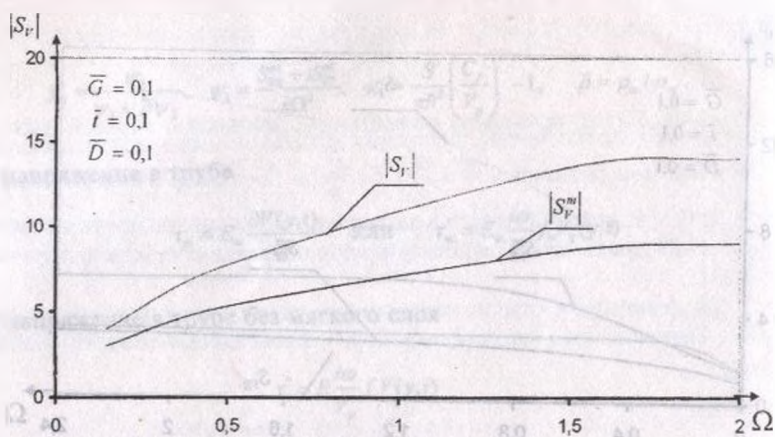


Рис.3.29. Зависимость реакции грунта от частоты.

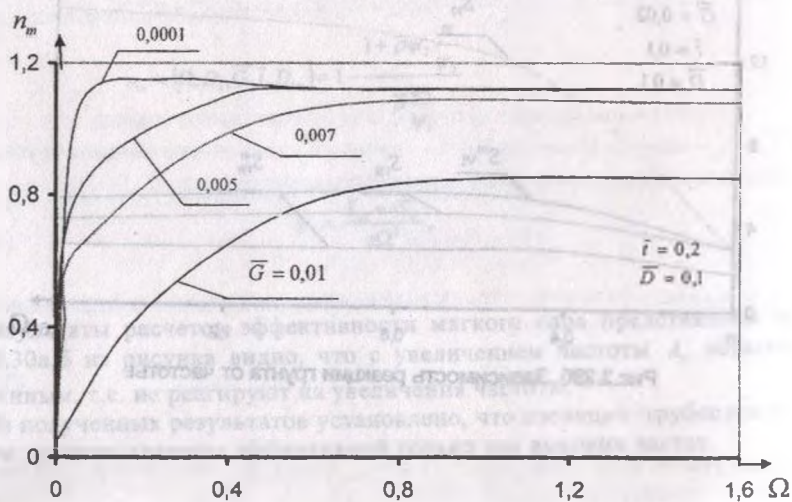


Рис.3.30а. Зависимость смещения грунта и трубы от частоты.

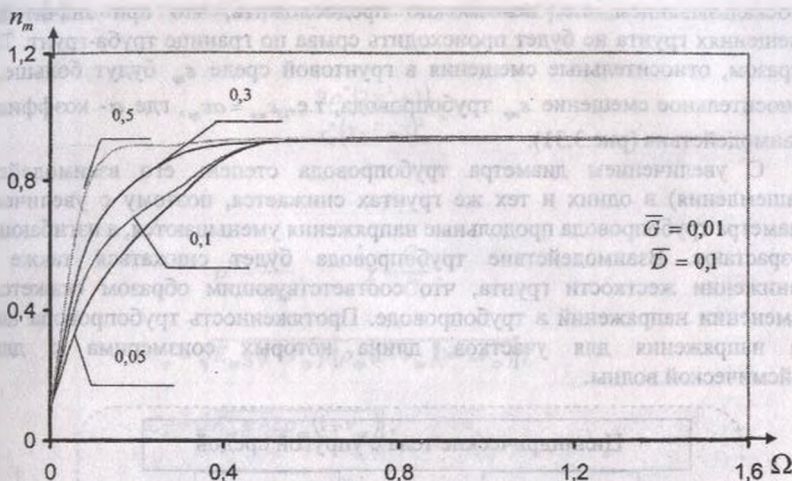


Рис.3.30б. Зависимость смещения грунта и трубы от частоты.

3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

В данной работе рассматривается решение динамических поведений трубопроводов, находящихся в упругой среде.

При действии сил трубопровод выходит из положения равновесия, т.е. происходит деформации (растяжение, сдвиг). Трубопровод перемещается в продольном направлении на расстояние, зависящее от взаимодействия грунта, окружающего трубу, с поверхностью трубы [6,107].

Взаимодействие грунта с поверхностью трубы определяется через коэффициент взаимодействия α (рис.3.31).

В этом параграфе приведены полученные результаты расчета коэффициента трения трубопроводов с окружающей средой и частоты собственных колебаний трубопроводов, используемые на стадии проектирования.

Предположим, что бесконечно длинный прямолинейный подземный трубопровод заземлен окружающим его грунтом, который обладает упругими свойствами. От очага землетрясения в грунте распространяется сейсмические волны. Трубопровод, связанный с грунтом, вовлекается в колебательный процесс. Однако грунт передает усилия трубопроводу с некоторым

проскальзыванием, т.е. невозможно предположить, что при значительных смещениях грунта не будет происходить срыва по границе труба-грунт. Таким образом, относительные смещения в грунтовой среде $\varepsilon_{\text{г}}$ будут больше, чем относительное смещение $\varepsilon_{\text{т}}$ трубопровода, т.е. $\varepsilon_{\text{г}} = \alpha \varepsilon_{\text{т}}$, где α - коэффициент взаимодействия (рис.3.31).

С увеличением диаметра трубопровода степень его взаимодействия (зашемления) в одних и тех же грунтах снижается, поэтому с увеличением диаметра трубопровода продольные напряжения уменьшаются, а изгибающие - возрастают. Взаимодействие трубопровода будет снижаться также при понижении жесткости грунта, что соответствующим образом скажется на изменении напряжений в трубопроводе. Протяженность трубопровода влияет на напряжения для участков, длина которых соизмерима с длиной сейсмической волны.

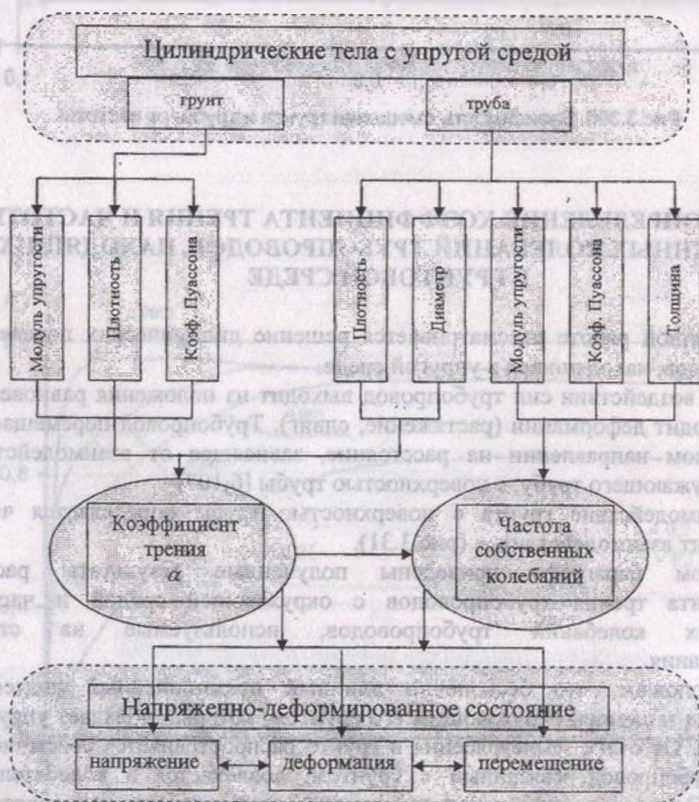


Рис.3.31. Исследование параметра собственных колебаний цилиндрических тел с упругой средой.

Коэффициент трения определяется следующим образом:

$$\alpha = \frac{9\rho^* (2\chi^2 + 1)}{\tau_0^* (2\chi^2 + 1)^2},$$

где,

$$\rho^* = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{гр}}}; \quad \chi = \frac{C_p}{C_s};$$

$$C_p = \sqrt{E_{\text{гр}} g (1 - \nu_{\text{гр}})} / [\rho_{\text{гр}} (1 + \nu_{\text{гр}}) (1 - 2\nu_{\text{гр}})];$$

$$C_s = \sqrt{E_{\text{гр}} g} / [2\rho_{\text{гр}} (1 + \nu_{\text{гр}})];$$

$$\tau_0^* = d\chi$$

$\rho_{\text{гр}}$ — плотность грунта;

$\rho_{\text{ст}}$ — плотность стали;

C_p — скорость продольных волн;

C_s — скорость поперечных волн;

$E_{\text{гр}}$ — модуль упругости грунта;

$\nu_{\text{гр}}$ — коэффициент Пуассона грунта;

g — ускорение свободного падения;

d — диаметр трубы.

Некоторые значения α полученные при определенных параметрах грунта и трубы приведены в таблице 3.2.

После определения коэффициента трения α , определяем частоты собственных колебаний труб.

$$\omega^2 = \frac{9\rho^*}{\tau_1 (2\chi^2 + 1)},$$

где,

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{d}{C_p}}.$$

Некоторые полученные результаты частот собственных колебаний труб при различных параметрах грунтов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.2.

Значения α при определенных параметрах грунта и трубы

Соотношения	ρ (10^3 Н/м^3)	E (10^{11} Н/м^2)	d (м)	ν	α
Песчаник	25	0,17		0,3	
Сталь	78		1,2		0,283
Глина	16	0,3		0,41	
Сталь	78		1,2		0,107
Бетон	18	0,2		0,17	
Сталь	78		1,2		0,269
Каучук	9	0,00008		0,47	
Сталь	78		1,2		0,023
Песчаник	25	0,17		0,3	
Сталь	78		0,7		0,484
Глина	16	0,3		0,41	
Сталь	78		0,7		0,183
Бетон	18	0,2		0,17	
Сталь	78		0,7		0,461
Каучук	9	0,00008		0,47	
Сталь	78		0,7		0,039
Песчаник	25	0,17		0,3	
Чугун	70		1,2		0,316
Бетон	18	0,2		0,17	
Чугун	70		1,2		0,302
Песчаник	25	0,17		0,3	
Асбест	25		1,2		0,886
Бетон	18	0,2		0,17	
Асбест	25		1,2		0,843
Песчаник	25	0,17		0,3	
Чугун	70		0,3		1,261
Бетон	18	0,2		0,17	
Чугун	70		0,3		1,204
Песчаник	25	0,17		0,3	
Асбест	25		0,3		3,531
Бетон	18	0,2		0,17	
Асбест	25		0,3		3,366

Таблица 3.3.

Результаты частот при собственных колебаниях

Среда			Труба (d=0.7)			ω_1 рад/сек
Песчаник			Сталь			4,8587
E (10^{11} Н/м ²)	ν	ρ (10^3 Н/м ³)	E (10^{11} Н/м ²)	ν	ρ (10^3 Н/м ³)	
0,17	0,3	2,5	2,1	0,25	7,8	
Глина			Сталь			3,6742
0,3	0,41	1,6	2,1	0,25	7,8	
Бетон			Сталь			4,9582
0,2	0,17	1,8	2,1	0,25	7,8	
Каучук			Сталь			0,7192
0,00008	0,47	0,9	2,1	0,25	7,8	
Песчаник			Чугун			5,1319
0,17	0,3	2,5	1,3	0,24	7,0	
Бетон			Чугун			5,2576
0,2	0,17	1,8	1,3	0,24	7,0	
Песчаник			Асбест			8,5890
0,17	0,3	2,5	0,3	0,17	2,5	
Бетон			Асбест			8,7831
0,2	0,17	1,8	0,3	0,17	2,5	

По найденным частотам можно определять перемещения, а также напряжения в трубопроводах возникающие от их собственных колебаний (рис.3.31).

Полученные результаты могут быть использованы для проектирования линейной части новых и реконструируемых трубопроводов и ответвлений от них.

ГЛАВА IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ТРУБОПРОВОДАМИ СОДЕРЖАЩИЕ ЖИДКОСТЬ НАХОДЯЩИЕСЯ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

4.1. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

В этом параграфе приведены некоторые основные уравнения теории упругости в криволинейных координатах. Известно из статической теории упругости уравнение Ламе в векторной форме имеет вид [14, 20, 23]:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \bar{u} - \mu \text{rot rot } \bar{u} + Q\bar{f} = 0, \quad (4.1a)$$

где, λ и μ – коэффициенты Ламе, определяемые по формулам:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

где, $\bar{u}$ – вектор перемещений, $Q\bar{f}$ – вектор массовых сил.

Операторы, входящие в уравнение [23], определяются для правой системы криволинейных ортогональных координат следующим образом

$$\text{grad } \phi = \frac{1}{\sqrt{q_{11}}} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_1} \bar{t}_1 + \frac{1}{\sqrt{q_{22}}} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_2} \bar{t}_2 + \frac{1}{\sqrt{q_{33}}} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_3} \bar{t}_3, \quad \text{rot } u = \frac{1}{\sqrt{q}} G$$

$$\text{div } u = \frac{1}{\sqrt{q}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(u_1 \sqrt{\frac{q}{q_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(u_2 \sqrt{\frac{q}{q_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(u_3 \sqrt{\frac{q}{q_{33}}} \right) \right]$$

$$G = \begin{vmatrix} \sqrt{q_{11}} \bar{t}_1 & \sqrt{q_{22}} \bar{t}_2 & \sqrt{q_{33}} \bar{t}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ u_1 \sqrt{\frac{q}{q_{11}}} & u_2 \sqrt{\frac{q}{q_{22}}} & u_3 \sqrt{\frac{q}{q_{33}}} \end{vmatrix}$$

где, α_i – криволинейные координаты ($i=1,3$), q_{ij} – компоненты метрического тензора, определяемым по формуле:

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j}$$

x_k -декартовы координаты ($k=1,3$), q -квадрат Якобиана преобразования декартовой системы координат и криволинейную. При этом для ортогональных криволинейных координат не равны нулю только диагональные члены матрицы тензора q_{ij} . В этом случае $q = \sqrt{\prod_{i=1}^3 q_{ii}}$, а основная дифференциальная квадратичная форма определяется по формуле:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 q_{ii} d^2 \alpha_i \quad (4.16)$$

Для определения напряженного состояния грунта и постановки смешанных граничных условий необходимо иметь формулы, выражающие напряжения через перемещения. Используем геометрические уравнения выведенные Новацким В.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{1}{2h_i^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h_i^2}{\partial \alpha_j} \frac{u_j}{h_j} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2h_i h_j} \left[h_i^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) + h_j^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) \right] \quad i \neq j, \quad j = \overline{1,3}$$

Кроме того, используем уравнение состояния (закон Гука) [30]

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.3)$$

Подставив (4.2) в (4.3), получим

$$\sigma_{ii} = \lambda \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{u_k}{h_k} + \frac{1}{2h_k^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h_k^2}{\partial \alpha_j} \frac{u_j}{h_j} \right] + 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{u_i}{h_i} + \frac{1}{2h_i^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h_i^2}{\partial \alpha_j} \frac{u_j}{h_j} \right] \quad (4.4,a)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{h_i h_j} \left[h_i^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{u_j}{h_j} + h_j^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{u_i}{h_i} \right], \quad i \neq j, \quad (4.4,b)$$

где, $h_i^2 = q_{ii}$

Теперь поставим задачу линейной теории упругости для расчетных схем (рис.4.1) в цилиндрических координатах r, θ и z . В качестве неизвестных используем компоненты вектора перемещений u_r , u_θ и u_z . Цилиндрическая система координат связана с декартовой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta; \\ y &= r \sin \theta; \end{aligned} \quad (4.5,a)$$

$$z=z.$$

Подставив (4.5a) в (4.1б) имеем:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (4.5,6)$$

Используя формулу (4.5б), получим

$$h_1^2 = h_2^2 = q_{11} = q_{33} = 1, \quad h_{22}^2 = q_{22} = r^2$$

В качестве координат α_i ($i=1,3$) применим:

$$\alpha_1=r, \alpha_2=\theta, \alpha_3=z \quad (4.6)$$

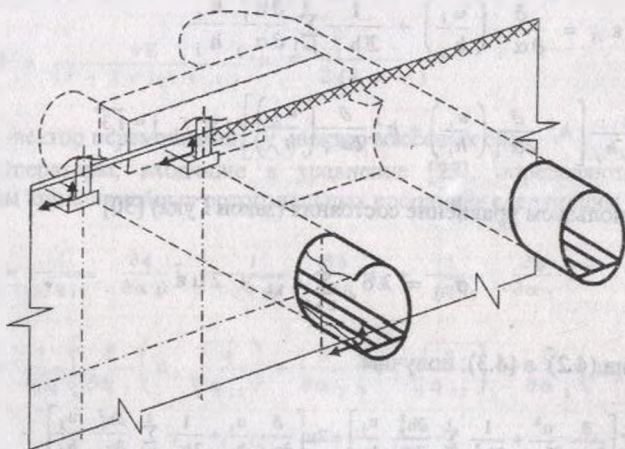


Рис. 4.1. Расчетная схема параллельных тоннелей.

Подставив (4.5) и (4.6) в (4.1a), а получившиеся выражение в формулу (4.4) и учитывая, получим следующую систему уравнений Ламе в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu)(u_r)_{rr} + \frac{\mu}{r}(u_r)_{\theta\theta} + \mu(u_z)_{zz} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_\theta)_{r\theta} + (\lambda + \mu)(u_z)_{rz} + \\
& + \frac{\lambda + 2\mu}{r}(u_r)_r - \frac{\lambda + 3\mu}{r^2}(u_\theta)_\theta - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2}u_r = 0, \\
& \mu(u_\theta)_{zz} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2}(u_\theta)_\theta + \mu(u_\theta)_{zz} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_r)_{r\theta} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_z)_{z\theta} + \\
& + \frac{\mu}{r^2}(u_r)_\theta - \frac{\mu}{r}u_\theta = 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
& \mu(u_z)_{rr} + \frac{\mu}{r^2}(u_\theta)_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu)(u_z)_{zz} + (\lambda + \mu)(u_r)_{rz} + \\
& + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_\theta)_{r\theta} + \frac{\lambda + \mu}{r}(u_r)_z = 0,
\end{aligned}$$

где, индексы r, θ и z, проставленные за скобками обозначает частные производные по соответствующим координатам.

Краевые условия на внешней поверхности трубы - условие идеального контакта с грунтом, внутренняя поверхность свободна:

$$\left. \begin{aligned}
r=R: u_r &= u_{r2}, u_\theta = u_{\theta2}, u_z = u_{z2}, \\
\sigma_{rr} &= \sigma_{r2}, \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta2}, \sigma_{rz} = \sigma_{rz2}, \\
r=R_0: \sigma_{rr} &= 0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0,
\end{aligned} \right\} \tag{4.8}$$

где,

индексы "1" и "2" обозначают соответственно материал окружающей среды и трубы. При взаимодействии упругих и заполнение сейсмических сред с тонкостенными оболочками граничными являются условия, обеспечивающие равенство нормальных составляющих скоростей жидкости и оболочки.

$$\left. \begin{aligned}
(\vec{v}_n, \vec{n}) \\
r = a
\end{aligned} \right\} = + \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{4.9}$$

где, $\vec{v}$ - скорости чисти и акустических сред; $\vec{n}$ - нормали при и к поверхности; w - радиальное перемещение оболочки.

Чтобы полностью замкнуть постановку задачи, необходимо к условиям (4.8) и (4.9) добавить условия на бесконечности $\rho \rightarrow 0$ при

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \tag{4.10}$$

заполненные некоторыми условиями на излучение.

Для нестационарных задач в качестве условий излучения требуется выполнение принципа причинности, а в среде должны отсутствовать перемещения вне области, ограниченной передним фронтом волн от источников колебаний.

Для установившихся гармонических колебаний $ue^{-i\omega t}$ уравнения относительно комплексной амплитуды $u(x, y, z)$ принимают вид

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u + F + \omega^2 u = 0 \quad (4.11)$$

Граничные условия на границе раздела (4.8) и (4.9) и на бесконечности (4.10) по форме остаются прежними, а в качестве условий излучения могут быть использованы следующие принципы:

1. Принцип Зоммерфельда: в решении удерживаются составляющие описывающие волны, уходящие от источника в бесконечность, и отбрасывается та, скорость которая направлена к источнику.

2. Принцип излучения энергии: поток энергии в среде должен быть направлен от источников в бесконечность.

3. Принцип предельного поглощения в качестве решения задачи идеальной упругой среды берется равномерный по всем параметрам предел решения соответствующей задачи для вязкоупругой среды (среды с поглощением) при стремлении вязкости к нулю.

4. Принцип предельной амплитуды: в качестве решения гармонической задачи берется предел при $t \rightarrow \infty$ нестационарной задачи с нулевыми начальными и гармоническими граничными условиями.

4.2. ДИФРАКЦИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим задачу динамической теории линейной упругости о воздействии сейсмических волн на трубы, уложенные в высокой насыпи в две нитки и заполненные идеальной сжимаемой жидкостью. При этом рассмотрим случай, когда волна падает перпендикулярно к оси соединяющей центры труб, и к продольной оси этих труб.

Расчетная схема представлена на рис.4.1.

Би цилиндрическая система координат связана с декартовой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= (a \sin \xi) / (ch \eta - \cos \xi) \\ y &= (a \sinh \eta) / (ch \eta + \cos \xi) \\ z &= z \end{aligned} \quad (4.12)$$

где,

a — половина расстояния между точками $\eta = -\infty$ и $\eta = \infty$.

Тогда, представив (4.12) в (4.16) с учетом (4.5,б), и (4.6), имеем:

$$ds^2 = a^2 (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^{-2} d\xi^2 + a^2 (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^{-2} d\eta^2 + dz^2 \quad (4.13)$$

Используя формулу (4.12), получим

$$\begin{aligned} h_1^2 &= h_2^2 = q_{11} = q_{22} = a^2 (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^{-2}, \\ h_3^2 &= q_{33} = 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Приняв, что: $\alpha_1 = \xi$, $\alpha_2 = \eta$, $\alpha_3 = z$ с помощью (4.13) и (4.14) к плоской постановке сводятся следующее уравнение Гельмгольца в биполярных координатах:

$$\left[a^{-2} (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2 \right] \left[(v)_{\xi\xi} + (v)_{\eta\eta} \right] + k^2 v = 0. \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.15) в аналитическом виде представляет значительные трудности, которые можно обойти путем нахождения асимптотического решения поставленной задачи для близкой поверхности трубы интересующей нас области. Для этого сначала разделим уравнение на коэффициент при производных. Затем в полученный таким образом коэффициент при "v" подставим первый член разложения в ряд:

$$\frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} = \begin{cases} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\eta} \sin n\xi & \eta > 0 \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\eta} \sin n\xi & \eta < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

т.е. учтем, что координаты η принимает большие значение вблизи поверхности труб. В результате проведенных преобразований получим следующий асимптотический вид уравнения (4.15):

$$(v)_{\xi\xi} + (v)_{\eta\eta} + (2kae^{\pm\eta})^2 v = 0 \quad (4.17)$$

Решение уравнения (4.15) ищем в виде ряда:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left[v_n^a(\eta) \cos n\xi + v_n^b(\eta) \sin n\xi \right] e^{-in\eta} \quad (4.18)$$

Подставив (4.18) в (4.17) и приравняв коэффициенты при соответствующих гармониках, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$v_n'' + [(2kae^{\pm\eta})^2 - n^2]v_n = 0 \quad (4.19)$$

Стандартный заменой

$$v_n(\eta) = z(t), t = \exp(\pm\eta)$$

сводим (4.19) к уравнению Бесселя вида

$$t^2 z'' + tz' + (4k^2 a^2 - n^2)z = 0 \quad (4.20)$$

которое имеет частное решение в виде цилиндрической функции, а решение уравнение Гельмгольца запишется как:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z_n(2ake^{\mp\eta}) \cos n\xi e^{-i\omega t}, \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n Z_n(2ake^{\mp\eta}) \sin n\xi e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Теперь поставим краевые условия. Для этого используем условия (4.21) и замену $\eta = \eta$ и $\theta = \xi$.

Учитывая полученные соотношения, выведем решение краевой задачи для случая падения на две подземные трубы Р - волны сжатия и s v-волны сдвига перпендикулярно к оси y. Волновой потенциальной волны имеет вид

$$\varphi^{(i)} = A e^{i\alpha x - i\omega t} \quad (4.22)$$

Для представления (4.22) в виде (4.21) запишем (4.22) с помощью (4.12) в биполярных координатах. Затем удержим член ряда (4.21) и подставив его в (4.22), получим:

$$\varphi_1^{(i)} = A e^{ik 2 a \exp(\mp\eta) \sin \xi e^{-i\omega t}} \quad (4.23)$$

Разложив второй сомножитель выражения (4.23) в ряд Фурье (комплексная форма) и после небольших преобразований получим окончательное выражение для потенциала падающей Р - волны:

$$\varphi_1^{(i)} = A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(\alpha_1 \tau) \cos n\xi e^{-i\omega t}, \quad (4.24)$$

где, $\tau = 2a \exp(\mp \eta)$ и для потенциала падающей sv-волны:

Остальные потенциалы (4.21) по аналогии с (4.24) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 \tau) \cos n \xi e^{-i \omega \tau} \\ \psi_1^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\beta_1 \tau) \sin n \xi e^{-i \omega \tau} \\ \varphi_2^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_n H_n^{(1)}(\alpha_2 \tau) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_2 \tau) \cos n \xi e^{-i \omega \tau}] \\ \psi_2^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} [E_n H_n^{(1)}(\beta_2 \tau) + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 \tau) \sin n \xi e^{-i \omega \tau}] \\ \varphi_3^{(r)} &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n J_n^{(1)}(\alpha_3 \tau) \cos n \xi e^{-i \omega \tau} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Динамическое НДС выражается через потенциалы φ_1 и ψ_2 :

$$\left. \begin{aligned} u_{\eta i} &= \delta[(\varphi_i)_\eta - (\psi_i)_\xi] \\ u_{\xi i} &= \delta[(\varphi_i)_\xi - (\psi_i)_\eta] \\ u_{\eta 3} &= -\delta(i\omega)^{-1} (\varphi_3)_\eta \\ \sigma_{\eta \eta i} &= -\sigma_{\xi \xi i} = 2\delta^2 \{d_i [0,5\varphi_{\eta \eta} - (\varphi_\xi + \varphi_\eta) \sin \xi] + 0,5\lambda_i \varphi_{\xi \xi} - \mu_i (\psi_{\xi \xi} - \varphi_\eta + \psi_\xi)\} \\ \tau_{\eta \eta 3} &= \sigma_{\xi \xi} = -i\omega_3 \rho_3 \varphi_3 \\ \tau_{\eta \xi i} &= 2\mu_i \delta^2 [\varphi_{\xi \eta} + 0,5\psi_{\eta \eta} - 0,5\psi_{\xi \xi} + \varphi_\xi + \psi_\eta + (\varphi_\xi - \psi_\xi) \sin \xi] \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

где, $i = 1, 2; \delta = e^{\pm \eta} / 2a$.

Подставив (4.25) и (4.26) в (4.8) получим окончательные решения задач о падении соответственно Р- и SV- волн на две подземные трубы. Произвольные постоянные A_n , B_n , C_n и др. определяются из системы алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$[C]\{q\} = \{\rho\},$$

где,

C – определитель (12×12) – порядка, элементы которой, являются функцией Бесселя и Ханкеля 1-го 2-го рода n -го порядка; q – вектор столбец неизвестных величин, ρ – вектор правой части.

Система алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами решается методом Гаусса с выделением главного элемента.

Динамическое НДС в случае падения SH -волны сдвига на две подземные трубы (рис.4.2) записывается также в биполярных координатах в асимптотическом виде:

$$u_z = w, \sigma_{\eta z} = \mu_1 \delta(u_z)_{\eta}, \sigma_{\xi z} = \mu_1 \delta(u_z)_{\xi} \quad (4.27)$$

В качестве краевых условий используем условия (4.8) и замену $r=p$

Окончательное решение задачи для случаев падения SH -волны на две трубы имеет вид:

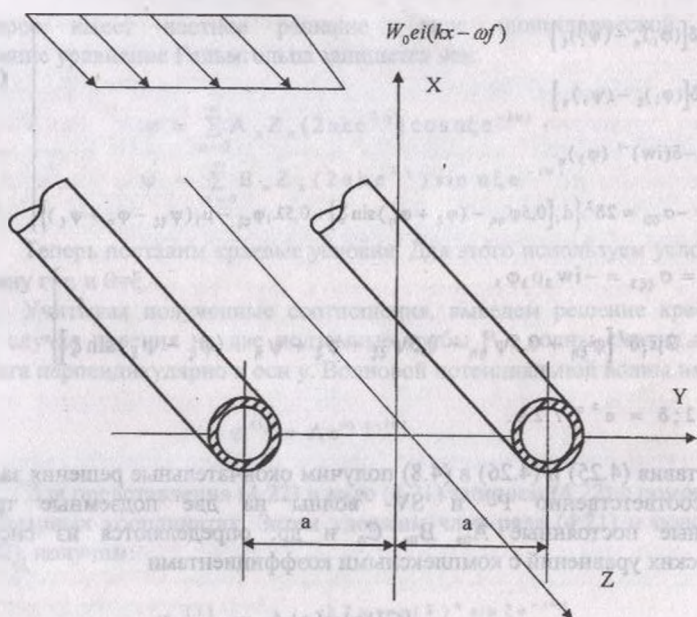


Рис. 4.2. Расчётная схема.

$$\begin{aligned}
u_{x1} &= w_0 \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n J_n(k_1 \tau) + A_n H_n^{(1)}(k_1 \tau)] \cos n \xi e^{-n \tau}; \\
u_{x2} &= -w_0 \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(k_2 \tau) + C_n H_n^{(2)}(k_2 \tau)] \cos n \xi e^{-n \tau}; \\
\sigma_{n1} &= \mu_1 w_0 k_1 \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n J_n(k_1 \tau) + A_n H_n^{(1)}(k_1 \tau)] \cos n \xi e^{-n \tau}; \\
\sigma_{n2} &= -\mu_2 w_0 k_2 \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(k_2 \tau) + C_n H_n^{(2)}(k_2 \tau)] \cos n \xi e^{-n \tau}; \\
\sigma_{\theta x1} &= -\mu_1 w_0 n \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n J_n(k_1 \tau) + A_n H_n^{(1)}(k_1 \tau)] \sin n \xi e^{-n \tau}; \\
\sigma_{\theta x2} &= \mu_2 w_0 n \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(k_2 \tau) + C_n H_n^{(2)}(k_2 \tau)] \sin n \xi e^{-n \tau};
\end{aligned} \quad (4.28)$$

Неопределенные коэффициенты A_n, B_n, C_n определяется из системы).

На рис.4.3. установлены графики зависимости $\sigma_{\theta\theta}$ от a при $E_1/E_2=0,2$, $E_3/E_2=1,0$, $R_1/R_2=1,0$, $R_2/R_2=1,0$, $S_1/S_2=0,6$, $S_3/S_2=1,0$, $v_1=0,20$, $v_2=0,25$, $v_3=0,25$. И волнового числа $\alpha_1 R=0,3$ и $3,0$, $\sigma_{\theta\theta}(\sigma_{\theta\theta 2}$ и $\sigma_{\theta\theta 3})$ является комплексной величиной и ее модель достигает максимум между $t=0$ и $t=T/4$, где T -период. Для случая двух цилиндрических слоев на коэффициент концентрации напряжения большое влияние оказывает a/R . При $\alpha_1 R=0,3$ и $a>R$ влияние одного слоя другое становится незначительным.

На рис.4.4 и $(\gamma=\pi/2)^i$ - падающих волн приведена изменение кольцевого напряжения в двух точках первого слоя. Кольцевое напряжение в боковой точке резко падает, а в световой точке зависимость от $\alpha_1 R$ заметно поднимается и приближается к асимптоме.

Также построены аналогичные зависимости, когда $\gamma=0$. Интересно отметить, что в рассматриваемой задаче, увеличение концентрации напряжений, обусловленное близостью другой области разрыва, много больше, когда волна падает с боку (т.е. $\gamma=0$), чем когда волна падает сверху (т.е. $\gamma=\pi/2$).

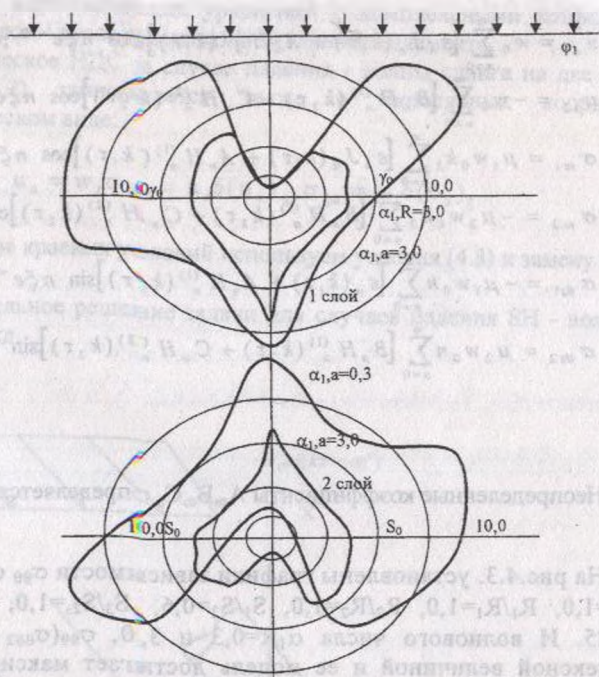


Рис.4.3. Распределение кольцевых напряжений внутри поверхности слоя.

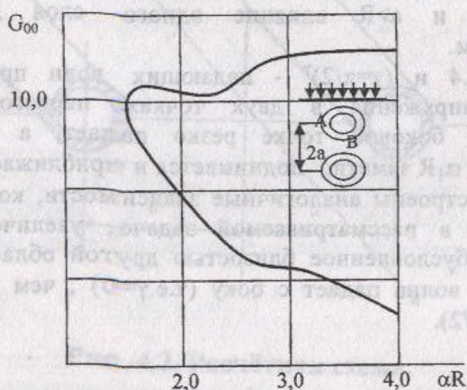


Рис.4.4. Изменение максимального напряжения в слое при $\alpha_1 R=0,3$; $\theta=\pi$ и $\theta=3\pi/2$.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Метод оснований на теореме сложения. Теоремы сложения для цилиндрических волновых функций выведены в работе [40, 69, 84].

Пусть имеются две различные полярные системы координат (r_g, θ_g) и (r_k, θ_k) (рис.4.5 и рис.4.6), у которых полярные оси одинаково направлены. Координата полюса θ_k в q системе будут R_{kq}, θ_{kq} , так что выполняется равенство

$$Z_g = R_{kg} e^{i\theta_{kg}} + Z_k \quad (4.29)$$

Тогда теорема сложения имеет вид:

$$b_n(\alpha r_q) e^{in\theta_q} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_{n-p}(\alpha R_{kq}) e^{i(n-p)\theta_{kq}} \text{Tr}(\alpha r_k) \exp(ip\theta_k),$$

$$r_k < R_{kq}; \quad (4.30)$$

$$b_n(\alpha r_q) e^{in\theta_q} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n-p}(\alpha R_{kq}) e^{i(n-p)\theta_{kq}} b_p(\alpha r_k) \exp(ip\theta_k),$$

$$r_k < R_{kq};$$

Формулы (4.29) дают возможность преобразовать решение волнового уравнения (4.1) из одной системы координат в другую.

Рассмотрим расчет протяженного подземного многониточного трубопровода на сейсмическое воздействие в рамках плоской задачи динамической теории упругости. При этом исследуем случай стационарной дифракции плоских волн на ряде периодически расположенных полостей, подкреплённых кольцами с идеальной сжимаемой жидкостью внутри.

Решение поставленной задачи осуществим методом потенциалов. Краевые условия имеют вид (4.8). Не изменится и вид падающего потенциала.

Потенциалы же отраженных от труб волн после применения теоремы сложения и, учитывая периодичность задачи, будут иметь вид:

$$\psi_1^{(r)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) + S_n J_n(\alpha_1 r)] e^{in(\theta-\gamma)},$$

$$\psi_1^{(r)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) + \sigma_n J_n(\beta_1 r)] e^{in(\theta-\gamma)},$$

$$S_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_p E_p [e^{im\xi} H_{n-p}^{(1)}(\alpha_1 m\delta) + e^{-im\xi} H_{n-p}^{(1)}(\alpha_1 m\delta)], \quad (4.31)$$

$$Q_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_p E_p [e^{im\xi} H_{n-p}^{(1)}(\beta_1 m\delta) + e^{-im\xi} H_{n-p}^{(1)}(\beta_1 m\delta)].$$

где, $\xi = k\delta \cos \gamma$, δ – расстояние между центрами труб.

Потенциалы преломленных волн в трубах запишутся в виде

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= e^{i(m\xi - \omega\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left[C_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r) + D_n H_n^{(2)}(\alpha_2 r) \right] e^{in(\theta - \gamma)}, \\ \psi_2 &= e^{i(m\xi - \omega\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left[E_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) + F_n H_n^{(2)}(\beta_2 r) \right] e^{in(\theta - \gamma)},\end{aligned}\quad (4.32)$$

а потенциал скоростей в идеальной форме сжимаемой жидкости

$$\varphi_3 = e^{i(m\xi - \omega\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} E_n G_n J_n(\alpha_1 r) e^{in(\theta - \gamma)}. \quad (4.34)$$

Неизвестные коэффициенты A_n - G_n определяются постановкой (4.30)-(4.34) в (4.8). В результате получается бесконечная система линейных уравнений, которая решается приближенным методом редукции, при условии, что не выполняется соотношение.

$$k\delta(1 \mp \cos \gamma) = 2\pi n \quad (4.35)$$

Общая характеристика программы предназначена для многониточных труб в насыпи для случая падения сейсмических волн перпендикулярно к оси, проходящей через центры труб.

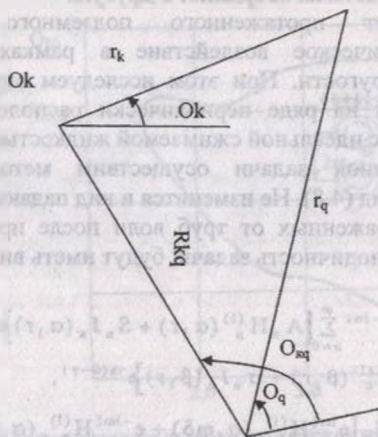


Рис. 4.5. Схема к теореме сложения.

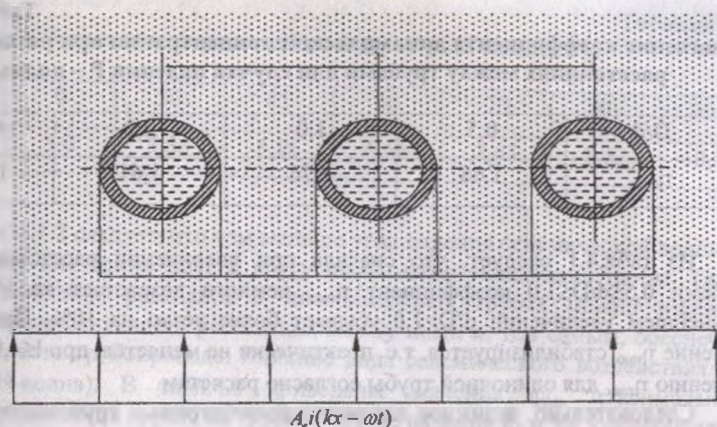


Рис.4.6. Расчётная схема.

Вводимая информация содержит минимально необходимые данные: упругие характеристики (E и ν) грунта насыпи и труб; плотность грунта, трубы и жидкости ее заполняющей; внутренний и внешний радиусы труб; преобладающий период колебаний частиц грунта; координаты точки, в которой ищется НДС; коэффициент сейсмичности. С помощью специальной метки можно рассчитывать как трубы, заполненные идеальной сжимаемой жидкостью, так и пустые.

Вычисление цилиндрических функций Бесселя и Ханкеля производится по известным формулам. Решение системы линейных уравнений осуществляется методом Гаусса с выделением главного члена.

Влияние расстояния между трубами. В табл. 4.1 приведены значения коэффициента $\eta_{\max} (\eta_{\max} = \sigma_{rr} / (\lambda + 2\mu) \alpha^2 A$ максимального радиального давления грунта на трубы при различном расстоянии в свету d между ними в случае падения P - волны. При этом принималось волновое число P - волны $\alpha_r = 1,0$; внутренний и наружный радиус труб $R_0 = 0,8$ м и $R = 1,0$ м; преобладающий период колебаний частиц грунта $T = 0,2$ сек. Характеристики грунта насыпи: постоянные Ламе $\lambda_1 = 8,9$ -МПа; $\mu_1 = 4,34$ МПа; плотность $\rho_1 = 1,74$ Кн сек²/м⁴. Характеристики материала трубы $\lambda_2 = 8690$ МПа; $\mu_2 = 12930$ МПа; $\rho_2 = 2,55$ Кн сек²/м⁴.

Таблица 4.1.

Значение коэффициента динамической концентрации при различных расстояниях между трубами для случая падения Р – волны

D/d	0,5	1,0	2,0	4,0
$\eta_{\max}$	1,68	1,76	1,61	1,60

Из табл.4.1 следует, что сначала при увеличении расстояния между трубами $0,5 \leq d/D \leq 1,0$ коэффициент $\eta_{\max}$ немного возрастает на 5%, а при дальнейшем увеличении $d/D > 1,0$ убывает более резко на 10%. При $d/D > 2,0$ значение $\eta_{\max}$ стабилизируется, т.е. практически не меняется, при $l \leq 4,0$ близко к значению $\eta_{\max}$ для одиночной трубы согласно расчетам.

Следовательно, взаимное влияние железобетонных труб многониточной укладки имеет место при расстоянии в свету между ними $d \leq 4,0D$ и приводит к увеличению максимального динамического давления грунта на них по сравнению с одиночной трубой. Этот эффект увеличения коэффициента $\eta_{\max}$ связан с наложением волн, отраженных несколькими поверхностями многониточных труб. При этом немонотонное возрастание коэффициента $\eta_{\max}$ с уменьшением расстояния между трубами d/D связано по нашему мнению с явлением интерференции наложенных после отражения волн.

Это явление чрезвычайно важно для практики проектирования сейсмических подземных многониточных трубопроводов, т.к. позволяет подобрать оптимальное расстояние между трубами, при котором динамическое давление при сейсмическом воздействии минимально. Например в табл.4.1 таким расстоянием является $d=0,5D$. Известно отметить для сравнения, что в случае статического воздействия наблюдается обратная картина: давление грунта на многониточные трубы меньше чем на одиночные.

Помимо вышесказанного, при анализе влияния расстояния между трубами на их НДС необходимо учитывать соотношение (4.28), (так называемые “точки скольжения”), при котором наблюдается значительное увеличение динамических напряжений в окрестности трубы - резонанс. Это явление известно из оптики под названием аномалия Вуда является особенностью многониточного трубопровода и не может возникнуть в трубопроводе, уложенном в одну нитку. С точки зрения практики проектирования необходимо знать на каком расстоянии можно укладывать трубы, чтобы опасное явление резонанс не возникало.

Ответ на этот вопрос дает соотношение (4.28). Проведем анализ этого соотношения для случая воздействия Р - и SV - сейсмических волн на подземный трубопровод. В табл.4.2 представлена зависимость максимального расстояния в свету между центрами труб $d_{\max}$, при котором не возникает резонанс, от угла падения сейсмических волн γ .

Таблица 4.2.

Зависимость расстояния $D_{\max}$ от угла падения γ .

γ , Град	0	30	45	60	70	80	90
$D_{\max}$, М	5,0	5,36	5,86	6,66	7,45	8,52	10,0

Из табл.4.2 следует, что чем меньше угол падения сейсмической волны на трубопровод, тем ближе друг к другу необходимо укладывать трубы. Таким образом, появление резонанса в многониточных трубах можно избежать выбором соответствующего расстояния между ними и, тем самым, обеспечить сейсмостойкость трубопровода. Влияние вида сейсмического воздействия (Р-, SV-или SH-волна). В табл.4.3 приведены значения $\eta_{\max}$ максимального радиального давления грунта на трубы в случае падения Р- и SV - сейсмической волны при различных расстояниях d в свету между трубами. При этом принималось $\beta_r=2$.

Анализ данных табл. 4.3 показывает, что при $d/D < 4,0$ значения коэффициента $\eta_{\max}$ для Р-и SV-волны находится как бы в противофазе, т.е. при $d/D=1,0$ максимальное сейсмическое воздействие Р-волны на 27% выше, чем у SV - волны, при $d/D=2,0$ на 7% ниже, а при $d/D=4,0$ опять выше, но уже всего лишь на 1%.

Таблица 4.3.

Значение коэффициента $\eta_{\max}$ при сейсмических воздействиях в виде Р- и SV - волн на различных расстояниях d между трубами

d/D	$\eta_{\max}$	
	Р – волна	SV – волна
1,0	1,76	1,29
2,0	1,61	1,72
4,0	1,60	1,51

При этом с увеличением расстояния между трубами разница в этих воздействиях уменьшается и при $d/D=4,0$ практически пропадает вовсе. Кроме того, заметим, что при воздействии SV - волны значения $\eta_{\max}$ при различных расстояниях между трубами имеет в 2,5 раза больший разброс (до 25%), чем

при воздействии Р - волны (до 10%). Таким образом явление “местного резонанса” проявляется более сильно для сейсмического воздействия в виде SV- волны.

Влияние жидкости, заполняющей трубы. В табл.4.4 приведен значения коэффициента $\eta_{\max}$ в случае падения Р - волны на пустые и заполненные водой трубы при различных расстояниях d в свету между трубами. Плотность жидкости принималась равной $\rho_3=0,102\text{Кн сек}^2/\text{м}^4$.

Таблица 4.4.

Значение коэффициента $\eta_{\max}$ для случая падения Р - волны на пустые и заполненные водой трубы

d/D	$\eta_{\max}$	
	Р - волна	SV - волна
1,0	1,76	1,89
2,0	1,61	1,78
4,0	1,60	1,90

Из табл.4.4 следует, что наличие воды в трубах увеличивает сейсмические воздействия на них по сравнению с пустыми трубами. Очевидно это связано с увеличением массы трубопровода. Максимальное динамическое давление грунта на трубы усиливается. Например: при $d/D=1,0$ разница в значениях коэффициента $d/D=2,0$ -10%, при $d/D=4,0$ -19%.

Кроме того заметим, что разброс значений коэффициента $\eta_{\max}$ при различных расстояниях d у труб, заполненных водой меньше (7%), чем у пустых труб (10%).

Влияние длины падающей сейсмической волны. В табл.4.5 представлены значения коэффициента $\eta_{\max}$ различных длин $l_0/l_0-2\pi/\alpha$, р - волны, падающей на пустые трубы, расположенные на расстоянии $l=1,0D$ друг от друга.

Таблица 4.5.

Значения коэффициента $\eta_{\max}$ для различных длин l_0 Р - волны.

l_0/D	3,0	5,0	10,0
$\eta_{\max}$	1,76	1,52	1,20

Из табл. 4.5 следует, что чем больше длина падающей сейсмической волны, т.е. чем плотнее грунт насыпи, тем меньше коэффициент $\eta_{\max}$. Для справки отметим, что соотношение $l_0/D=5,0$ - не насыпным песчаным, супесчаным и суглинистым грунтам; $l_0/D=10,0$ - глинистым грунтам.

Таким образом вид грунта, а особенно его плотность оказывает существенное влияние на его динамическое давление на трубы при сейсмическом воздействии.

Отсюда следует, что при возведении насыпи над трубами необходимо тщательно уплотнять насыпной грунт. Интересно отметить, что хорошее уплотнение грунта позволяет снизить и его статическое давление на трубы. Кроме этого, расчеты показывают, что при $l_0 > 10,0D$ динамическая задача сводится к квазистатической, что существенно упрощает ее решение. Отсюда следует важный вывод о том, что квазистатический подход неприменим к расчету на сейсмическое воздействие труб под насыпями.

Влияние толщины стенки трубы и класса бетона. В табл.4.6 приведены значения коэффициента $\eta_{\max}$ для различных толщин t стенки железобетонной трубы в случае падения Р - волны на пустые многониточные трубы, уложенные на расстоянии $d=0,5$.

Таблица 4.6.

Значение коэффициента $\eta_{\max}$ для различных толщин стенки трубы t

d/D	0,08	0,1	0,15	0,2
$\eta_{\max}$	1,60	1,66	1,66	1,68

Из табл. 4.6 следует, что диапазон толщины стенки, который имеют выпускаемые отечественной промышленностью железобетонные трубы, практически не влияет на динамическое давление грунта на эти трубы. Это, по всей видимости, связано с тем фактом, что сейсмическая волна не проходит внутрь железобетонной трубы в силу достаточной жесткости трубы.

Аналогичный вывод, имеющий те же причины можно получить из табл.4.7, в которой приведены значения $\eta_{\max}$ для различных классов бетона, применяемых для изготовления труб, при толщине стенки $t=0,1D$.

Таблица 4.7.

Значение коэффициента $\eta_{\max}$ для различных классов бетона

Класс бетона	B20	B30	B40	B50
$\eta_{\max}$	1,68	1,68	1,67	1,68

4.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ

В настоящем разделе рассматривается взаимодействие нестационарных волн с цилиндрическими телами. Рассмотрим две параллельно бесконечно длинные круговые цилиндрические оболочки, находящиеся в безгранично упругой среде (рис. 4.7).

Параметры падающей волны и оболочка вдоль образующей цилиндра постоянны, поэтому будем считать, что все функции, описывающие движение оболочки и грунта, зависят только от угловой координаты θ , радиальной координаты времени t .

Изменение нормального напряжения σ_0 времени применен по треугольному закону

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0(t) &= \varphi_0(1 - t/T) \text{ при } 0 \leq t \leq T \\ \sigma_0(t) &= 0 \text{ при } 0 > t > T \\ \sigma_0(t) &= \varphi_0 H(t - \frac{x+a}{c}) \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

где, φ_0 и T — соответственно амплитуда и длительность воздействия волн.

Математические формулировки задачи приводим к необходимости совместного решения системы уравнений движений среды

$$\Delta \varphi - \frac{1}{C_{p1}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \psi - \frac{1}{C_{s1}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.37)$$

и оболочки

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w_i}{\partial \theta} = \frac{(1 - v_{oj}^2)}{E_{oj}} \left[\frac{a_j \partial^2 v}{\partial t^2} \right] + z_1(\theta, t) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} + c_j^2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} - w = \frac{(1 - v_{oj}^2)^2}{E_{oj}^3} \left[\rho_{oj} h_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} \right] + z_2(\theta, t)$$

где,

φ, ψ — соответственно скалярный и векторный потенциалы продольных и поперечных волн; Δ — оператор Лапласа в полярных координатах; C_{p1}, C_{s1} —

скорости соответственно продольных и поперечных волн; v , w – тангенциальные перемещение точек средней поверхности оболочки; ρ_0 , ν , E – соответственно плотность, коэффициента Пуассона и модуль упругости материала оболочки; $c_2^2 = h^2 / 12a^2$, $z_j(\theta, t)$ – внешнее давление нагрузки.

Граничные условия на поверхности оболочки применены следующими: неразрывность радиальных и тангенциальных перемен частиц грунта и оболочки, т.е.

$$\left. \begin{aligned} w_j &= U, \\ r &= a_j, \end{aligned} \right\} r = a_j, \quad (4.39)$$

$$\left. \begin{aligned} v_j &= u_\theta \\ r &= a_j, \end{aligned} \right\} r = a_j,$$

Если цилиндрическая полость не подкреплена оболочкой, тогда граничные условия принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1r1}^{(p)} &= -\sigma_{r1r1}^{(s)} \\ \sigma_{r1r1}^{(p)} &= -\sigma_{r1r1}^{(s)} \\ \sigma_{r2r2}^{(p)} &= -\sigma_{r2r2}^{(s)} \\ \sigma_{r2r2}^{(p)} &= -\sigma_{r2r2}^{(s)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r &= a_1 \\ r &= a_2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1y1} &= \sigma_{y2y2} = 0 \\ \sigma_{x1y1} &= \sigma_{x2y2} = 0 \end{aligned} \right\} y_1 = y_2 = \pm h$$

Граничные условия на бесконечности $|r| \rightarrow \infty \varphi = \psi = 0$. Начальные условия нулевые. Сначала найдем решение для плоской ступени частной волны. Тензор напряжений в общем виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(p)} + \sigma_{ij}^{(s)},$$

где, $\sigma^{(p)}$ – напряжение при падающих волнах, $\sigma^{(s)}$ – напряжение ответных волн.

Для каждой цилиндрической оболочки будут свои координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , а в цилиндрической системе (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2) . Переход из декартовых координат к цилиндрическим следующий:

$$\begin{aligned}x_1 &= r_1 \cos \theta_1 & y_1 &= r_1 \sin \theta_1 \\x_2 &= b + r_2 \cos \theta_2 & y_2 &= b + r_2 \sin \theta_2 \\x_2 &= b + x_1 = r_2 \cos \theta_2 & y_2 &= y_1 = r_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

В полярной системе координат связанной с цилиндром, напряжения и смещения в падающей волне $r=a$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r^0 &= \sigma_0 [\varepsilon - 1(\varepsilon + 1) \cos 2\theta] H_0(z) / 2 \\ \sigma_{\theta\theta}^0 &= \sigma_0 (\varepsilon - 1) \sin 2\theta H_0(z) / 2; \\ \sigma_{\infty}^0 &= \sigma_0 [\varepsilon - 1(\varepsilon + 1) \cos 2\theta] H_0(z) / 2; \\ W^0 &= \sigma_0 / \rho_1 C_{\rho_1}^2 \cos 2\theta z H_0(z), \quad V^0 = \frac{\sigma_0}{\rho_1 C_{\rho_1}^2} \sin \theta z Y_0(z); \\ z &= C_{\rho_1} t - a + a \cos \theta, \quad \varepsilon = -\nu_0 / (1 - \nu_0),\end{aligned} \tag{4.41}$$

где, $H_0(z)$ – единичная функция Хевисайди; σ_0 – напряжения на фронте волны, распространяющейся в направлении; z, a – радиус оболочки; C_{ρ_1} – скорость волны расширения, ν_1 – коэффициент Пуассона; ρ_1 – плотность среды.

Применяя к уравнениям (4.37) и (4.38) интегральное преобразование Фурье по времени

$$\begin{aligned}\varphi^F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \exp(-i w \tau) d\tau, \\ \varphi(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^F(w) \exp(-i w \tau) dw,\end{aligned}$$

где, w – параметр преобразования Фурье по времени; $\varphi^F(w)$ – изображение функции $\varphi(t)$.

Волновое уравнение (4.37) после применения преобразования Фурье принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\partial^2 \varphi_i / \partial x_i^2 + \partial \varphi_i / \partial y_i^2 - (w / c_{\rho_1}^2) \varphi_i &= 0 \\ \partial^2 \psi_i / \partial x_i^2 + \partial \psi_i / \partial y_i^2 - (w / c_{\rho_1}^2) \psi_i &= 0\end{aligned} \tag{4.42}$$

для (r, θ) координатах (4.37) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \partial^2 \varphi_i^F / \partial r_i^2 + (1/r_i) \partial \varphi_i^F / \partial r_i + (1/y_i^2) r_i^2 \psi_i^F / \partial \theta_i^2 - (w/c_p)^2 \varphi_i^F &= 0; \\ \partial^2 \psi_i^F / \partial r_i^2 + (1/r_i) \partial \psi_i^F / \partial r_i + (1/y_i^2) r_i^2 \psi_i^F / \partial \theta_i^2 - (w/c_n)^2 \psi_i^F &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Если известны потенциалы приращений φ_i и ψ_i , тогда можно определить перемещение окружающей среды цилиндрического тела

$$u_i^F = \partial \varphi_i^F / \partial x_i + \partial \psi_i^F / \partial y_i, \quad (4.44)$$

$$v_i^F = -\partial \psi_i^F / \partial x_i + \partial \varphi_i^F / \partial y_i$$

Решение волнового уравнения (4.42) и (4.43) выражается через тригонометрические и специальные функции:

$$\begin{aligned} \varphi_i^F &= \int_{-\infty}^{\infty} B_1^{(n)}(\xi) \cos(\gamma_1 y_1) \exp(i\xi x_1) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(n)} k_{n-1}(w/c_p) \cos[(n-1)\theta_1] \\ \psi_i^F &= \int_{-\infty}^{\infty} B_2^{(n)}(\xi) \sin(\gamma_2 y_1) \exp(i\xi x_1) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(n)} k_n(kw/c_p) \sin[n\theta_1] \end{aligned} \quad (4.45)$$

здесь,

$$\gamma_1 = (\xi^2 + w^2/c_p^2)^{1/2}$$

$$\gamma_2 = (\xi^2 + k^2 \rho/c_p^2)^{1/2}$$

$$R^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$$

K_n — модифицированная функция Бесселя, n — порядок.

Произвольные постоянные B_1 , B_2 , C_n , φ_n определяется из граничных условий (4.40). Для этого необходимо определить напряжение

$$\sigma_{r_1 r_1} / (2\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)} f_n^c(r_1 \theta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} f_n^d(r_1 \theta_1);$$

$$\sigma_{\theta_1 \theta_1} / (2\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)} S_n^c(r_1 \theta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} S_n^d(r_1 \theta_1);$$

$$\sigma_{r_1 \theta_1} / (2\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)} h_n^c(r_1 \theta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} h_n^d(r_1 \theta_1);$$

$$\sigma_{r_2 r_2} / (2\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} f_n^c(r_2 \theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(2)} f_n^d(r_2 \theta_2);$$

$$\sigma_{\psi \psi} / (2\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} S_n^c(r_2 \theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(2)} S_n^d(r_2 \theta_2);$$

$$\sigma_{r_2 \psi} / (2\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)} h_n^c(r_2 \theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(2)} h_n^d(r_2 \theta_2),$$

здесь, $f_n^{c,D}, S_n^{c,D}, h_n^{c,D}$ выражается через модифицированные функции Бесселя n -го порядка.

Произвольные постоянные C_n, D_n и др. определяется из системы алгебраических уравнений.

Обратное преобразование осуществляется численно методом Ромберга. Потенциалы ϕ, ψ и радиальное и тангенциальное перемещения с оболочки w и v для падающей волны получен с помощью интеграла Дюаме [104].

$$u_i = \int_0^1 u(t - \tau) \sigma_n(\tau) d\tau$$

где,

$u(\tau)$ – решение для плоской ступенчатой волны.

Алгоритм решения задачи приведен на рис. 4.8.

Обсуждение числовых результатов. Несобственный интеграл (4.45) вычисляется методом Ромберга. Для этого несобственный интеграл заменяется интегралом [104].

$$I(\tau_1) = \int_{W_a}^{W_b} f(x, \tau) dx \quad (4.46)$$

конечные пределы, которые подобраны с учетом характера спектральной функции. Интеграл (4.46) вычисляется методом Ромберга, а нулевая ($n=0$) серия приближенных значений $T_0/K=0,1,2,3,K$ - интеграл по формуле Трапеций при делении отрезка от W_a, W_b на две равные части

$$T_0^{(k)} = \frac{W_a - W_b}{2^{k+1}} [f(\xi_0, \tau) + 2f(\xi_1, \tau) + \dots + f(\xi_k, \tau)],$$

$$\xi_i = x_a + i \frac{W_a - W_b}{2^{km}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2^k$$

С помощью $T_0^{(k)}$ вычисляются $n=1,2,\dots,K$. Серии приближенных значений интеграла $T(\tau_1)$:

$$T_n^{(k)} = (4^n T_{n-1}^{k+1} - T_{n-1}^{(k)}) / (4^n - 1) \quad k = 0, 1, \dots, k-n \quad (4.47)$$

Представленные схемы постоянные по данным вычислениям $f(\tau_1) = T_0^{(k)}$ с шагом $1_{\tau_1} = 0,02$. При каждом фиксированном значении вычисления $f(\tau_1)$ проводилось на интервале $\sigma \leq x \leq \sigma$ по формуле (4.47) с $k=11$. При некоторых больших значениях $f(\tau_1)$ повторные расчеты с повышенной точностью дали поправки менее 3%. Теперь посмотрим взаимодействие падающих волн (4.23) и (4.24) с цилиндрической оболочкой.

$$a_i = 1,0, v_i = 0,3, h_{oi} = 6 \cdot 10^{-2}, \rho_{oi} = 3,72 \cdot 10^{-7} \text{Едж}^{-1}, E_{oi} = 5,25 \cdot 10^6 \text{ а}^2 \text{Т},$$

$$(i = 1,2)$$

грунт $\rho = 0,953 \cdot 10^{-7} \text{ Е} \text{о} \text{а}^{-1}$, $C_{p1} = 1 \cdot 10^3 \text{ а} \cdot \text{с}^{-1}$, $c_{s1} = 4,4 \cdot 10^2 \text{ а} \cdot \text{с}^{-1}$, нагрузка $P_0 = 2,38 \cdot 10^{-5} \text{ Е} \text{о}$.

Результаты вычисления прогибов w/h для моментов времени $t=0,5a/C$ a/c_{01} , $2R/c_{01}$ приведена на рис. 4.9а,б. Максимальные прогибы в рассматриваемом интервале времени локализуется в основном в соответствующих углах $\theta=0^\circ 45^\circ$, максимальные тангенциальные смещения в значениях $\theta=90^\circ$ и 270° .

На рис.4.10 проведено сравнение статических и динамических радиальных напряжений окружающей среды в параллельных трубах.

Видно, что при действии сейсмических волн радиальное давление окружающей среды возрастает. Расчеты показывают, что при фиксированных значениях амплитуды и длительности действия падающей волны с увеличением акустической жесткости окружающей среды, прогибы в земле первой и второй оболочки увеличиваются. Увеличение жесткости оболочки или ее толщина приводит к снижению прогибов и увеличению усилий. Причем с увеличением толщины оболочки кольцевые усилия $S_{\theta\theta}$ растут быстрее, чем изгибающие моменты, а изгибающие моменты быстрее, чем поперечные силы.

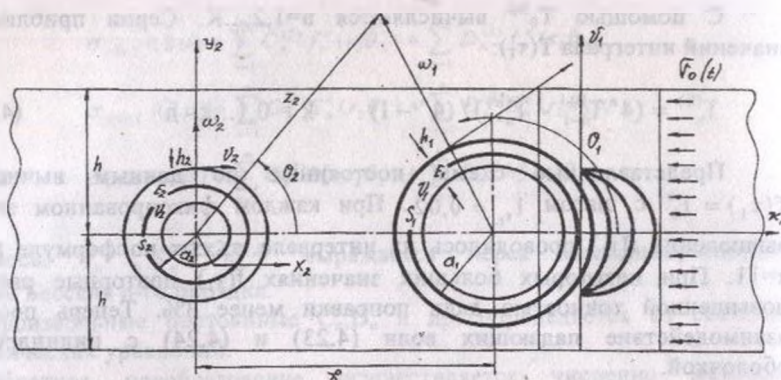


Рис.4.7. Расчетная схема.

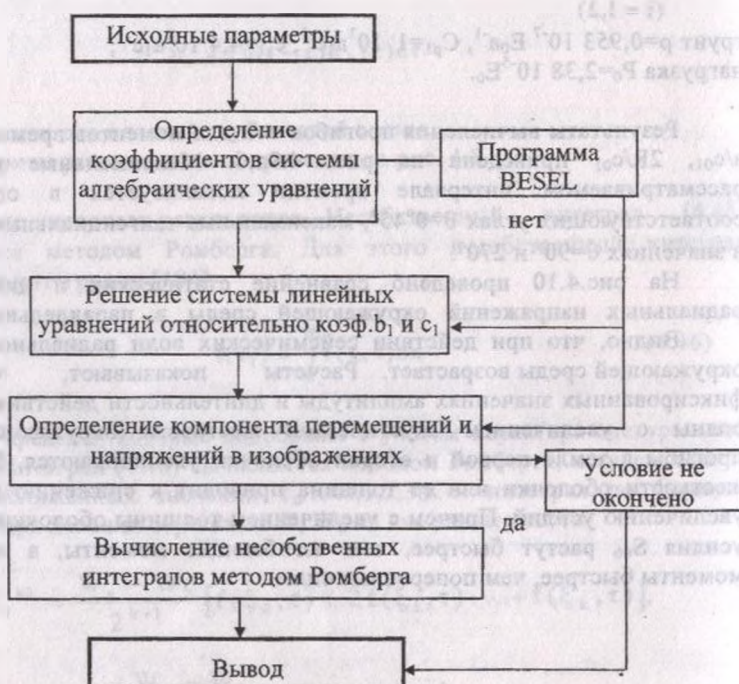


Рис. 4.8. Блок схема.

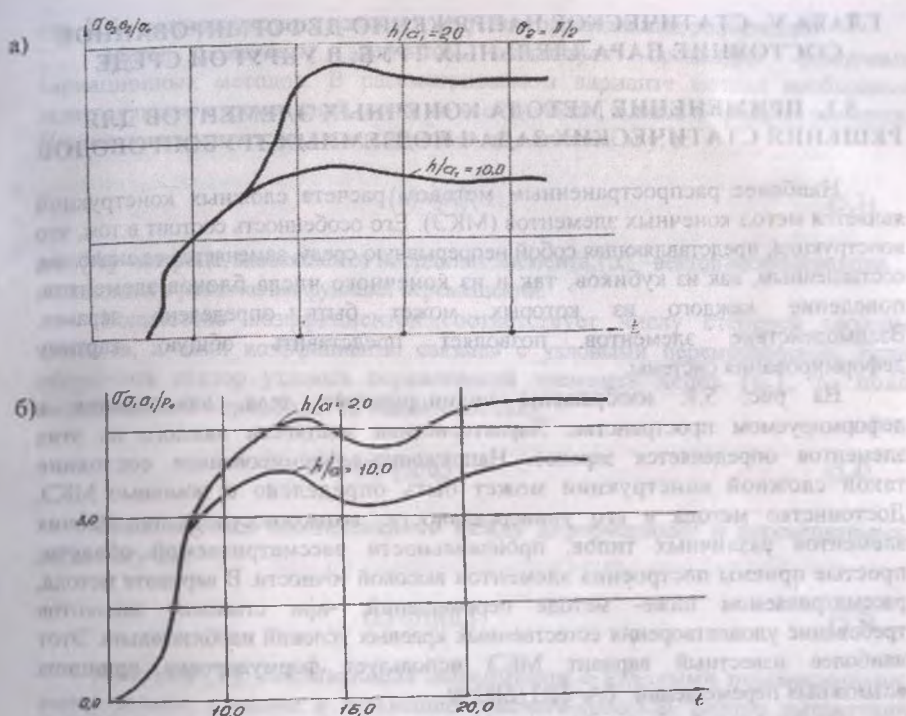


Рис.4.9а,б. Изменение кольцевого напряжения в зависимости от времени.

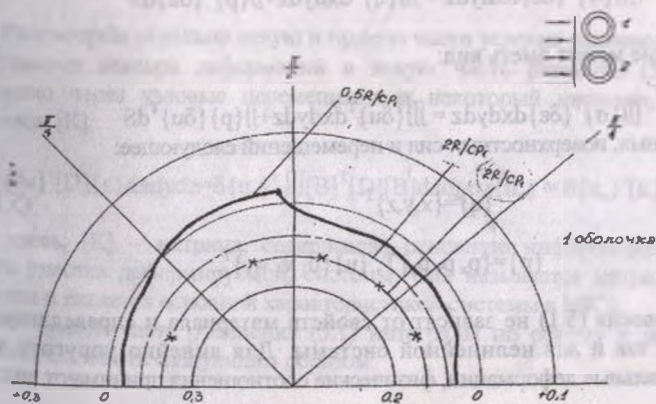


Рис.4.10. Расчетная схема.

ГЛАВА V. СТАТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРУБ, В УПРУГОЙ СРЕДЕ

5.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Наиболее распространенным методом расчета сложных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ). Его особенность состоит в том, что конструкция, представляющая собой непрерывную среду, заменяется ее аналогом, составленным, как из кубиков, так и из конечного числа блоков-элементов, поведение каждого из которых может быть определено заранее. Взаимодействие элементов позволяет представить общую картину деформирования системы.

На рис. 5.1. изображены цилиндрические тела, находящиеся в деформируемом пространстве. Характеристики жесткости каждого из этих элементов определяется заранее. Напряженно-деформированное состояние такой сложной конструкции может быть определено с помощью МКЭ. Достоинство метода в его универсальности: возможности использования элементов различных типов, произвольности рассматриваемой области, простые приемы построения элементов высокой точности. В варианте метода, рассматриваемом ниже- методе перемещений, -при стыковке элементов требование удовлетворения естественных краевых условий необязательно. Этот наиболее известный вариант МКЭ использует формулировку принципа возможных перемещений: $\delta A = \delta R_1 + \delta R_2 = 0$.

В матричной форме для трехмерного тела ее можно представить следующим образом:

$$\iiint \{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dx dy dz = \iiint \{q\}^T dx dy dz + \iint \{p\}^T \{\delta u\} dS$$

Это же состояние может иметь вид:

$$\iiint \{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dx dy dz = \iiint \{\delta u\}^T dx dy dz + \iint \{p\} \{\delta u\}^T dS$$

Векторы объемных, поверхностных сил и перемещений следующее:

$$\{q\} = \{x, y, z\}^T \quad (5.1)$$

$$\{p\} = \{p_x, p_y, p_z\}^T, \quad \{u\} = \{u_1, v_1, w_1\}^T$$

Условия равновесия (5.1) не зависят от свойств материала и справедливы как для линейной, так и для нелинейной системы. Для линейно упругого тела, имеющего начальные деформации, физические соотношения принимают вид:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} - [D]\{\epsilon_0\}, \quad (5.2)$$

где, $[D]$ – матрица упругих констант, $\{e_0\}$ – вектор начальных деформаций.

Метод конечных элементов использует процедуры различных вариационных методов. В рассматриваемом варианте метода необходимо задаться полем перемещений, но не по всей области, а лишь в пределах элемента. Перемещения задаются в виде полиномов по степеням x, y, z :

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}, \quad (5.3)$$

где, $[A]$ – матрица, зависящая от координат элемента, $\{\alpha\}$ – вектор коэффициентов полиномиального разложения функций перемещений.

Количество коэффициентов соответствует числу степеней свободы элемента, а сами коэффициенты связаны с узловыми перемещениями. Если обозначить вектор узловых перемещений элемента через $\{u_n\}$, то поле перемещений определяется зависимостью:

$$\{u\} = [\phi]\{u_n\} \quad (5.4)$$

Воспользуемся соотношениями между деформациями и перемещениями, тогда получим:

$$\{\epsilon\} = [B]\{u_n\} \quad (5.5)$$

Матрица $[B]$, связывающая деформации с узловыми перемещениями, имеет важное значение в дальнейшем расчете (рис.5.2). Вектор напряжений определяется уравнением (5.2), а с учетом (5.5) он будет иметь вид:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u_n\} - [D]\{e_0\} \quad (5.6)$$

Рассмотрим отдельно левую и правую части условия равновесия (5.1). После подстановки вектора деформаций в левую часть уравнения (5.1) оно будет выражено через узловые перемещения и некоторый интеграл, обозначенный символом $[K]$:

$$\iiint \{\delta\epsilon\}^T [D]\{\epsilon\} dx dy dz = \delta\{u_n\}^T \iiint [B]^T [D][B] dx dy dz \{u_n\} = \delta\{u_n\}^T [K]\{u_n\} \quad (5.7)$$

здесь, $[K]$ – матрица, содержащая основную информацию о поведении малого участка деформируемой системы. Она называется матрицей жесткости элемента и является основной характеристикой системы в МКЭ.

В правой части уравнения (5.1) интегралы по объему и по поверхности можно представить следующим образом:

$$\iiint ([\delta \epsilon]^T [D] \{\epsilon_0\} + \{\delta u\}^T \{q\}) dx dy dz + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dS = \\ = \delta \{u_n\}^T \iiint [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy dz + \delta \{u_n\}^T \iint [\phi]^T \{q\} dx dy dz + \delta \{u_n\}^T \iint [\phi]^T \{p\} dS \quad (5.8)$$

Этими соотношениями определяется вектор (P) внешних сил, приведенных к узлам внешних сил. Таким образом, считая известными матрицу [Ф], связывающую перемещения в любой точке элемента с узловыми перемещениями и матрицу [В], соответствующую соотношениям между деформациями и перемещениями узлов элемента по формуле (5.6), определяют матрицу жесткости [K] и вектор внешних узловых сил (F):

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \\ \{F\} = \iiint [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy dz + \iint [\phi]^T \{q\} dx dy dz + \iint [\phi]^T \{p\} dS \quad (5.9)$$

Для каждого элемента условия равновесия принимают вид:

$$[K] \{u_n\} = \{F\} \quad (5.10)$$

К такой же форме приводятся соотношения для всей

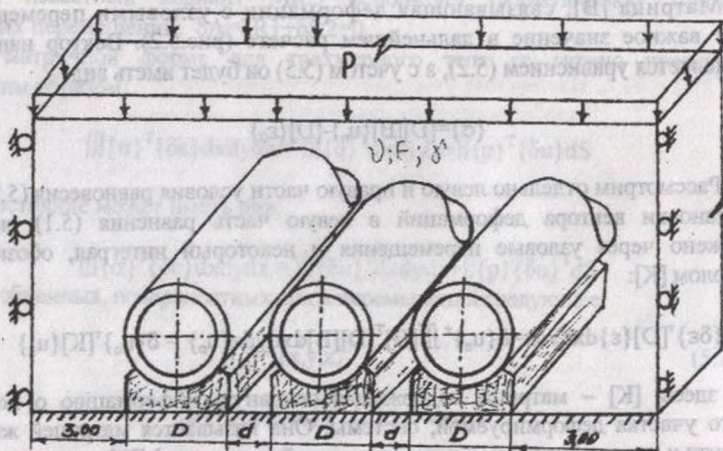


Рис. 5.1. Расчетная схема МКЭ.

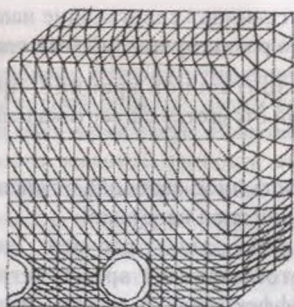


Рис. 5.2. Пример разбивки расчетной области на конечные элементы (трубы уложенные в три нитки на плоское основание).

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ГРУНТА НА ТРУБОПРОВОДЫ

При определении давления грунта на трубы необходимо учитывать такие факторы как: количество ниток, рельеф насыпи, условия опирания труб и другие факторы, встречающиеся в проектной практике.

Учет же других факторов в аналитических решениях либо чрезвычайно сложен; либо вообще невозможен в силу возникающих при этом трудностей математического характера. Разнообразные факторы, встречающиеся в проектной практике, могут быть учтены с помощью численных методов. В последнее время при решении различного рода прикладных задач широко применяется метод конечных элементов (МКЭ).

Известен ряд работ, в которых отечественные [120,80] и зарубежные авторы [42,43] с успехом применяют МКЭ для определения давления грунта на одиночно уложенную протяженную трубу, при различных условиях ее опирания с учетом неоднородности грунта, слагающего тело насыпи постоянной высоты (плоская деформация).

Методика расчета. В качестве расчетной модели по аналогии с работами [43,116] принимается весомая упругая среда (рис. 5.3) содержащая подкрепленные круговыми цилиндрами отверстия и другие включения (фундамент, неоднородности грунта и т.д.). При этом для труб согласно [115] принимаем, что цилиндр спаян со средой (отсутствие проскальзывание грунта по поверхности трубы).

На внешнем контуре среды краевые условия имеют следующий вид [115]:

- на вертикальных границах сдвигающие напряжения и горизонтальные перемещения либо равны нулю, либо эти границы свободны;
- на нижней горизонтальной границе, примыкающей к основанию насыпи отсутствуют вертикальные и горизонтальные перемещения;
- верхняя поверхность либо свободна от внешних воздействий, либо загружена поверхностной нагрузкой.

Размеры выбранной для расчета области должны быть оптимальными, ибо от этого зависит время, затрачиваемое на расчет по МКЭ и, следовательно, эффективность работы программы, составленной на его основе. Если грунт является изотропным материалом или рассматриваемая система трубы - грунт имеет ось симметрии (как по геометрии, так и по материалу), то возможно уменьшение расчетной области за счет принятия только симметричной ее половины.

Разбивку выбранной расчетной области проводим в виде тетраэдральных конечных элементов. При этом разбивочная сетка должна сгущаться по мере приближения к трубам, т.к. именно вокруг труб возникает наибольшая концентрация давления грунта рис 5.3.

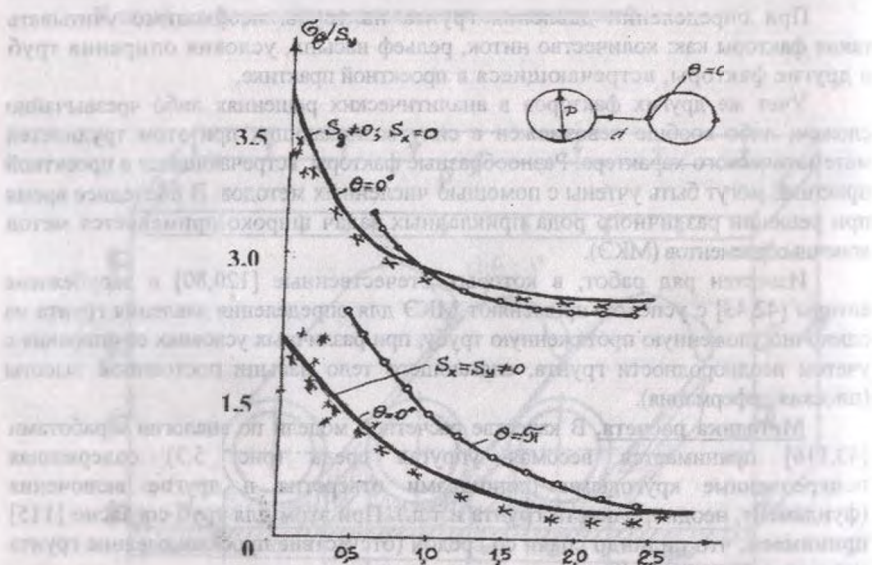


Рис. 5.3. Эффект влияния уменьшения расстояния между центрами отверстий.

----- Результаты Линг
 *** ooo — по нашей методике

Для оценки сходимости полученного приближенного решения, соответствующего данной разбивке, к точному решению необходимо производить более мелкую разбивку расчетной области. Затем следует провести сравнение решений, соответствующих обеим разбивкам. Если они отличаются друг от друга на величину, большую наперед заданной точности вычислений, то необходимо сделать еще более мелкую третью разбивку области и соответствующее ей решение сравнить с решением для второй разбивки и т.д.

Следует отметить, что при плотном расположении труб в местах их соприкосновения возникают "особые точки", в малой окрестности которых нельзя добиться необходимой точности вычислений ни при какой самой мелкой разбивке (в этих точках теория упругости неприменима). Такие же точки возникают в местах опирания труб на плоское основание. При определении давления грунта на жесткие круглые трубы, каковыми и являются в частности железобетонные трубы [112, 113, 128] эта трудность легко преодолевается следующим приемом: с помощью МКЭ определяется вертикальное и горизонтальное давление грунта во всех точках трубы, кроме особой; в особой точке прикладывается сосредоточенная сила, направленная вертикально в точке опирания труб или горизонтально в точке их соприкосновения, равная по величине площади эпюры соответственно вертикального и горизонтального давления грунта, действующего на трубы.

Собственный вес грунта насыпи распределяем согласно [130, 35] по узлам разбивки следующим образом: в каждом узле данного треугольного конечного элемента прикладываем направленную вниз сосредоточенную силу, равную по величине весу части грунта, ограниченной этим элементом, деленной на число узлов. Поверхностная нагрузка распределяется по узлам верхней границы в виде сосредоточенных сил. Если же нужно получить матрицы влияния (функцию Грина), то необходимо провести расчеты на единичную сосредоточенную силу, прикладывая ее последовательно в каждом узле верхней границы.

Моделирование материалов грунта, труб и других включений осуществляется с помощью соответствующих им значений упругих констант (E, ν) и удельного веса. Это позволяет учитывать условия опирания труб, неоднородность и многословность грунта насыпи и основания, многониточность укладки.

Для оценки достоверности получаемых результатов было произведено тестирование программы на задачах линейной теории упругости (плоская деформация), имеющих аналитическое решение:

- а) растяжение пластинки с одним подкрепленным отверстием [113];
- б) сжатие пластики, подкрепленной двумя круговыми отверстиями [132].

Расхождение результатов аналитических расчетов с результатами, полученными по МКЭ не превышает 1-2%...

Кроме того, производилось сравнение с экспериментальными данными, полученными другими авторами [133] для одиночной трубы. В этом случае расхождение составляет 20%. Сперва решена тестовая задача [66,67].

Структуры распределения напряжений, возникающие непосредственно от двух отверстий, которые расположены перпендикулярно линии, соединяющей центры отверстий, были рассмотрены Ховландом. На рис 5.3 и показана степень концентрации напряжения σ_0/S_v (S_v - напряжение, действующее в направлении от отверстия для точек, расположенных вблизи границы одного из круглых отверстий).

Существуют известные формулы для определения давления окружающей среды на одиночную трубу.

Вертикальное давление на подземное сооружение в насыпи может быть найдено по формуле [134,116,137,138]

$$G_b = K_v \gamma H \quad (5.11)$$

здесь $K_v > 1$ — коэффициент концентрации вертикального давления грунта.

Вертикальное давление грунта на подземное сооружение при укладке в траншее:

$$G = 1,2 \gamma H K_{тр} \frac{B}{D}, \quad (5.12)$$

где,

H — глубина заложения, $K < 1_{тр}$ — коэффициент, зависящий от отношения H/B и грунтовых условий.

Расчетное статическое вертикальное давление грунта на подземное сооружение определяется по формуле:

$$P = B \left[\frac{5}{3} - \frac{(5-C)^3}{75} \right] \quad (5.13)$$

Для многониточных трубопроводов таких формул не существует.

5.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПОДЗЕМНЫХ КРУГЛЫХ ТРУБ

С помощью программы на ЭВМ исследовалось влияние следующих факторов на распределение давления грунта насыпи вокруг круглых железобетонных подземных труб: количество ниток, расстояние между трубами, местоположение трубы (крайняя, средняя), коэффициент Пуассона грунта насыпи, тип опирания труб, изменение рельефа насыпи вдоль труб, длина труб.

Влияние количества ниток. На рис. 5.4, 5.5, 5.6 показаны зависимости максимального давления грунта на трубы от числа ниток и коэффициента Пуассона грунта. Из рисунков следует, что значения величины $\sigma_{\max}$ на трубы, уложенные в несколько ниток, на 10-30% меньше соответствующего значения для одиночно уложенной трубы, которое определено по КМК 2.05.03-97

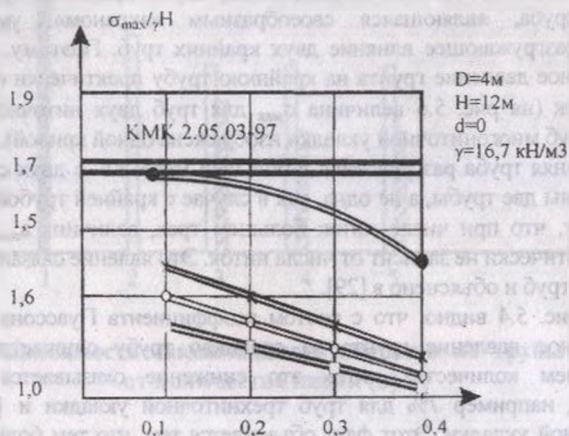


Рис. 5.4. График зависимости максимального давления грунта на трубы ($\sigma_{\max}$) от числа ниток и коэффициента Пуассона (ν).

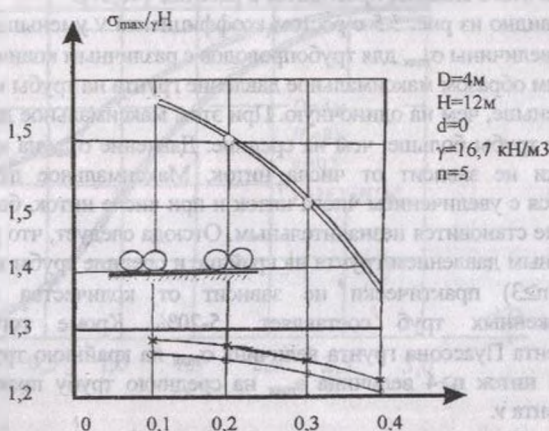


Рис. 5.5. Графики зависимости максимального давления грунта на трубы пяти ниточной укладки ($\sigma_{\max}$) от места положения трубы и коэффициента Пуассона (ν).

При этом максимальное давление грунта зависит от местоположения трубы, т.е. на среднюю трубу оно на 15-25% меньше, чем на крайнюю. Тот факт, что крайняя труба разгружается меньше объясняется тем, что существенное влияние на ее разгрузку оказывает только одна близлежащая средняя труба, а другая - крайняя труба, во-первых, далеко от нее расположена (на расстоянии 1.0DB), а во-вторых, между двумя крайними трубами лежит средняя труба, являющаяся своеобразным «экраном», уменьшающим взаимное разгружающее влияние двух крайних труб. Поэтому, в частности, максимальное давление грунта на крайнюю трубу практически не зависит от числа ниток (на рис. 5.6 величина $\sigma_{\max}$ для труб двух ниточной укладки и крайних труб многониточной укладки изображена одной кривой).

Средняя труба разгружается в большей мере, т.к. с двух сторон от нее расположены две трубы, а не одна, как в случае с крайней трубой. Из рис. 5.5, 5.6 следует, что при числе ниток больше трех, величина $a_{\max}$ на средних трубах практически не зависит от числа ниток. Это явление связано с понятием «периода» труб и объяснено в [29].

Из рис. 5.4 видно, что с ростом коэффициента Пуассона ($\nu=0,1...0,4$) максимальное давление грунта на среднюю трубу снижается, причем с уменьшением количества ниток это снижение оказывается сильнее и составляет, например 7% для труб трехниточной укладки и 1% для труб пятиниточной укладки. Этот факт объясняется тем, что тем больше значение коэффициента ν , тем больше распределительная способность грунтовой среды. Следовательно, можно считать, что при числе ниток четыре и более величина $\sigma_{\max}$ на среднюю практически не зависит от коэффициента ν . Объяснение этого явления проводится в работах [40,87].

Как видно из рис. 5.5 с ростом коэффициента ν уменьшается разница в значениях величины $\sigma_{\max}$ для трубопроводов с различным количеством ниток.

Таким образом максимальное давление грунта на трубы многониточной укладки меньше, чем на одиночную. При этом максимальное давление грунта на крайние трубы больше, чем на средние. Давление $\sigma_{\max}$ на крайнюю трубу практически не зависит от числа ниток. Максимальное давление грунта уменьшается с увеличением числа ниток и при числе ниток, больше трех, это уменьшение становится незначительным. Отсюда следует, что разница между максимальным давлением грунта на крайние и средние трубы многониточной укладки ($n \geq 3$) практически не зависит от количества ниток и для плотноуложенных труб составляет 15-20%. Кроме того, с ростом коэффициента Пуассона грунта величина $\sigma_{\max}$ на крайнюю трубу снижается. При числе ниток $n > 4$ величина $a_{\max}$ на среднюю трубу практически не от коэффициента ν .

Влияние расстояния между трубами. Результаты анализа максимального давления грунта на трубы двух и трехниточной укладки в свету (а) между ними представлены на рис. 5.6.

График на рис. 5.7 показывает, что с увеличением расстояния между трубами величина $\sigma_{\max}$ возрастает.

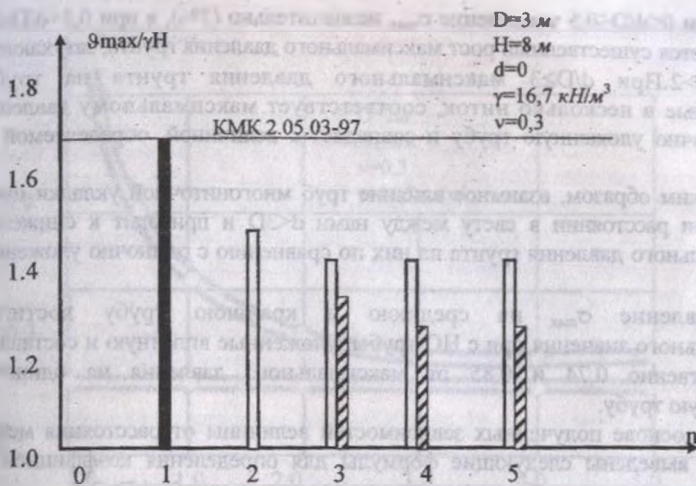


Рис. 5.6. Зависимость максимального давления на трубы ($\rho_{\max}$) от количества ниток (p).

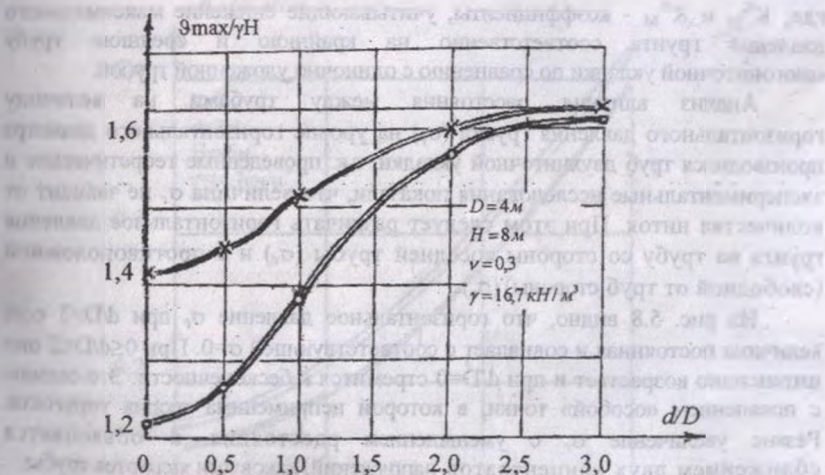


Рис. 5.7. Графики зависимости максимального давления грунта ($\rho_{\max}$) на трубы от расстояния в свету (d) между ними.

При $0 \leq d/D \leq 0,5$ увеличение $\sigma_{\max}$ незначительно (3%), а при $0,5 < d/D \leq 2,0$ наблюдается существенный рост максимального давления грунта, затухающий при $d/D > 2$. При $d/D \geq 3$ максимального давления грунта на трубы, уложенные в несколько ниток, соответствует максимальному давлению на одиночно уложенную трубу и совпадает с величиной, определяемой по [53].

Таким образом, взаимное влияние труб многониточной укладки имеет место при расстоянии в свету между ними $d < 3D$ и приводит к снижению максимального давления грунта на них по сравнению с одиночно уложенной трубой.

Давление $\sigma_{\max}$ на среднюю и крайнюю трубу достигает минимального значения при с НО трубы, уложенные вплотную и составляет соответственно 0,74 и 0,85 от максимального давления на одиночно уложенную трубу.

На основе полученных зависимостей величины от расстояния между трубами выведены следующие формулы для определения коэффициентов давления грунта на трубы многониточной укладки: при $0 < d/D \leq 2,5$

$$K_M^C = 0,1(d/D) + 0,75; \quad (5.14)$$

$$K_M^K = 0,01(d/D)^2 + 0,02(d/D) + 0,9,$$

где, K_M^C и K_M^K - коэффициенты, учитывающие снижение максимального давления грунта соответственно на крайнюю и среднюю трубу многониточной укладки по сравнению с одиночно уложенной трубой.

Анализ влияния расстояния между трубами на величину горизонтального давления грунта (σ_r) на уровне горизонтального диаметра производился труб двухниточной укладки, т.к. проведенные теоретические и экспериментальные исследования показали, что величина σ_r не зависит от количества ниток. При этом следует различать горизонтальное давление грунта на трубу со стороны соседней трубы (σ_r) и с противоположной (свободной от труб стороны) (σ_r).

Из рис. 5.8 видно, что горизонтальное давление σ_r при $d/D > 3$ есть величина постоянная и совпадает с соответствующей $\sigma = 0$. При $0 \leq d/D \leq 2$ оно интенсивно возрастает и при $d/D = 0$ стремится к бесконечности. Это связано с появлением «особой» точки, в которой неприменима теория упругости. Резкое увеличение σ_r с уменьшением расстояния d объясняется сближением двух концентраторов напряжений, каковыми являются трубы.

Влияние коэффициента Пуассона ν на горизонтальное давление грунта показано на рис. 5.9. Из графиков следует, что с ростом коэффициента ν величины σ_r и σ_r'' возрастает. Причем более интенсивно увеличивается горизонтальное давление со стороны соседней трубы. При увеличении коэффициента ν в 4 раза величина σ_r возрастает в 2,8 раза, а σ_r'' в 2,3 раза.

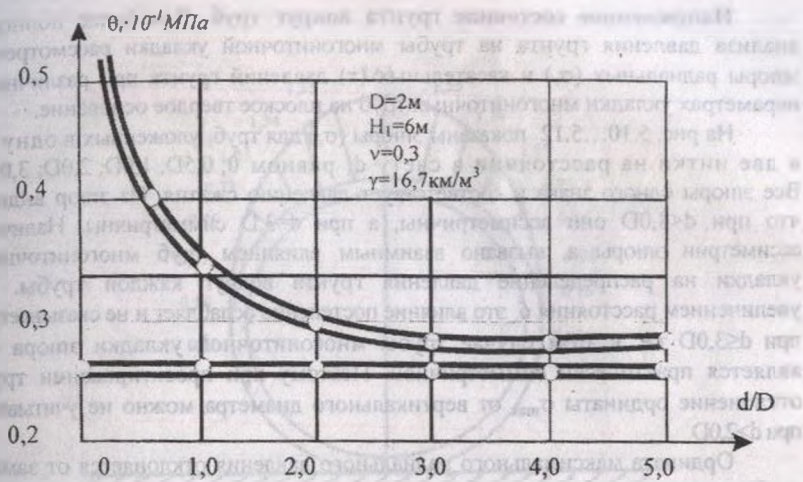


Рис. 5.8. Графики зависимости максимального давления грунта ($\sigma_{\max}$) на трубы от расстояния в свету (d) между нити.

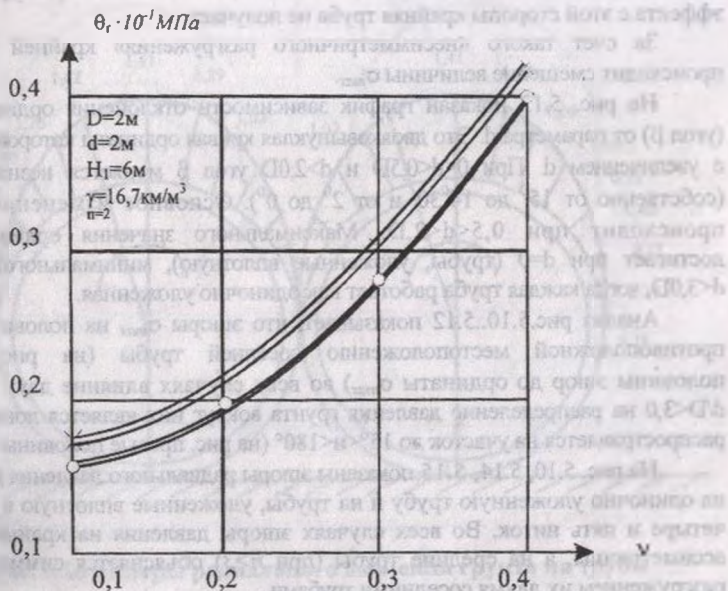


Рис. 5.9. Зависимость горизонтального давления (σ_r) от коэффициента Пуассона (ν).

Напряженное состояние грунта вокруг труб. Для более полного анализа давления грунта на трубы многониточной укладки рассмотрены эпюры радиальных (σ_r) и касательных (τ) давлений грунта при различных параметрах укладки многониточных труб на плоское твердое основание.

На рис. 5.10...5.12 показаны эпюры (σ_r) для труб, уложенных в одну и в две нитки на расстоянии в свету d , равном 0; 0,5D; 1,0D; 2,0D; 3,0D. Все эпюры одного знака и соответствует давлению сжатия. Из эпюр видно, что при $d < 3,0D$ они ассиметричны, а при $d = 3,0D$ симметричны. Наличие ассиметрии эпюры σ_r вызвано взаимным влиянием труб многониточной укладки на распределение давления грунта вокруг каждой трубы. С увеличением расстояния b это влияние постепенно ослабляет и не сказывается при $d \leq 3,0D$ т.е. в этом случае трубы многониточной укладки эпюра σ_r является практически симметричной. Поэтому при проектировании труб отклонение ординаты σ_{max} от вертикального диаметра можно не учитывать при $d \geq 2,0D$.

Ордината максимального радиального давления отклоняется от замка трубы в сторону противоположную местоположению соседней трубы. Анализ показывает, что этот эффект проявляется особенно многониточной укладки при $d < 2,0D$. Это связано тем, что с одной стороны от крайней трубы расположена соседняя с ней труба, которая разгружается первую. Противоположная же сторона свободна и никакого разгружающего эффекта с этой стороны крайняя труба не получает.

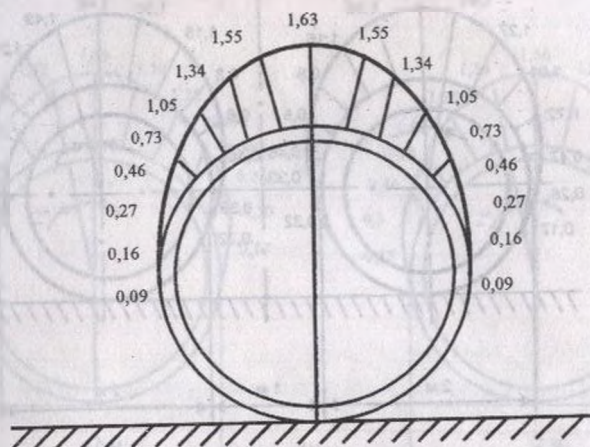
За счет такого «несимметричного разгружения» крайней трубы и происходит смещение величины σ_{max} .

На рис. 5.13 показан график зависимости отклонения ординаты σ_{max} (угол β) от параметра d . Это двояковыпуклая кривая ординаты которой убывают с увеличением d . При $0 < d < 0,5D$ и $d > 2,0D$ угол β меняется незначительно (собственно от 15° до $14^\circ 30'$ и от 2° до 0°). Основное изменение угла β происходит при $0,5 < d < 2,0D$. Максимального значения ординаты σ_{max} достигает при $d = 0$ (трубы, уложенные вплотную), минимального (0°) при $d < 3,0D$, когда каждая труба работает как одиночно уложенная.

Анализ рис. 5.10...5.12 показывает, что эпюры σ_{max} на половине трубы противоположной местоположению соседней трубы (на рис. Левые половины эпюр до ординаты σ_{max}) во всех случаях влияние двух труб при $d/D \leq 3,0$ на распределение давления грунта вокруг них является локальным и распространяется на участок до $15^\circ < i < 180^\circ$ (на рис. правые половины эпюр)

На рис. 5.10, 5.14, 5.15 показаны эпюры радиального давления грунта σ_r на одиночно уложенную трубу и на трубы, уложенные вплотную в две, три, четыре и пять ниток. Во всех случаях эпюры давления на крайние трубы ассиметричны, а на средние трубы (при $n > 3$) объясняется симметричным разгрузением их двумя соседними трубами.

а)



б)

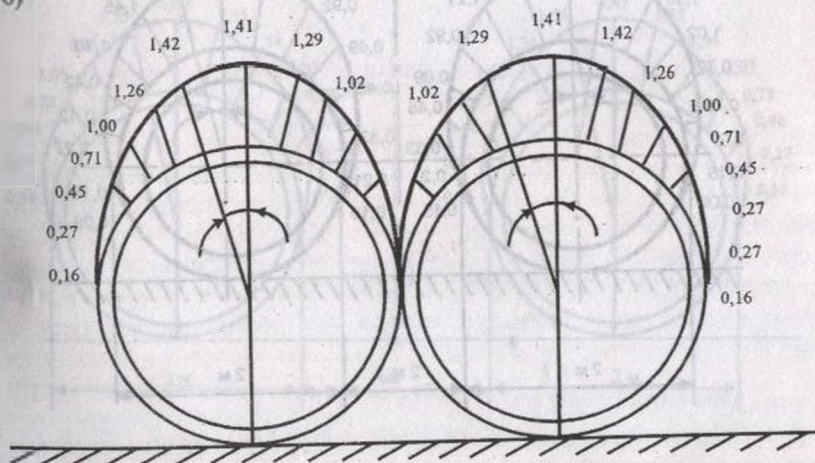
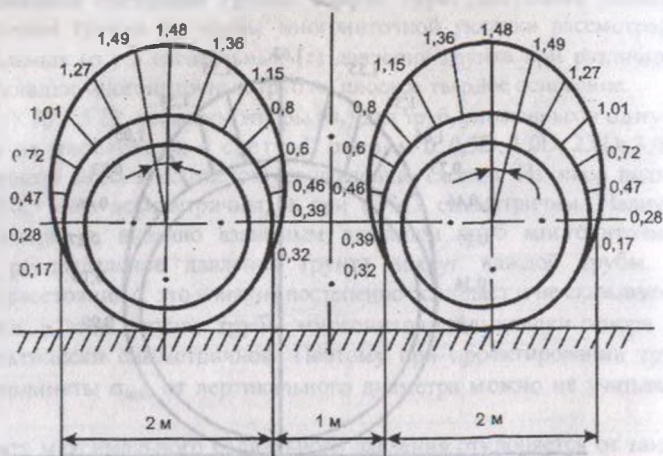


Рис. 5.10. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

a)



б)

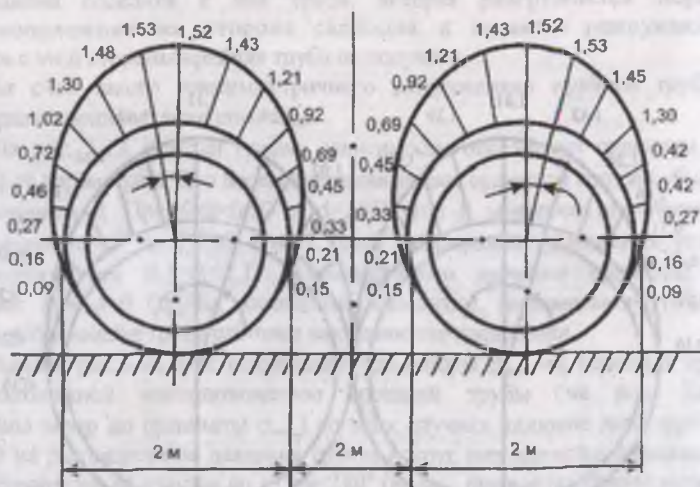
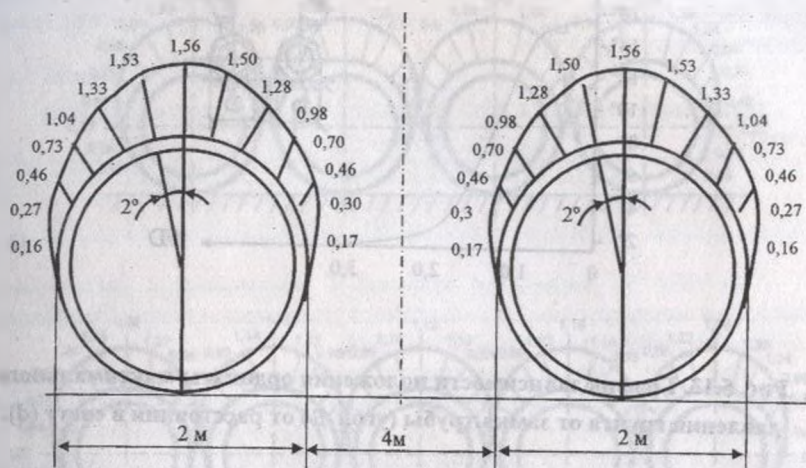


Рис. 5.11. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

а) расстояние в свету $d=2,0D$



б) расстояние в свету $d=3,0D$

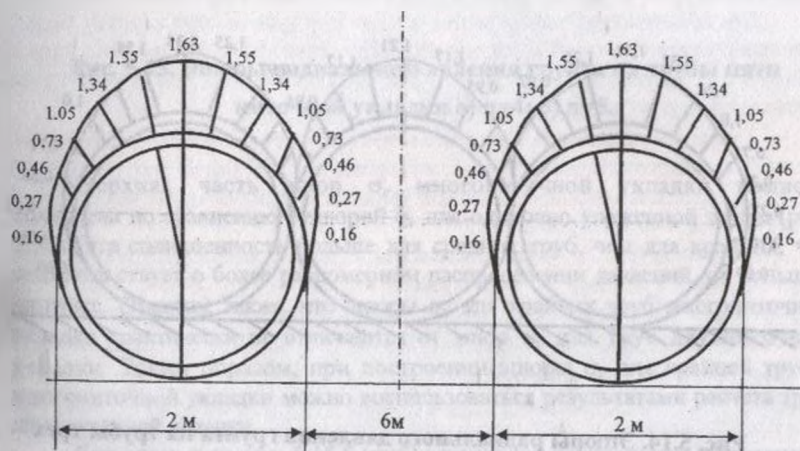


Рис. 5.12. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

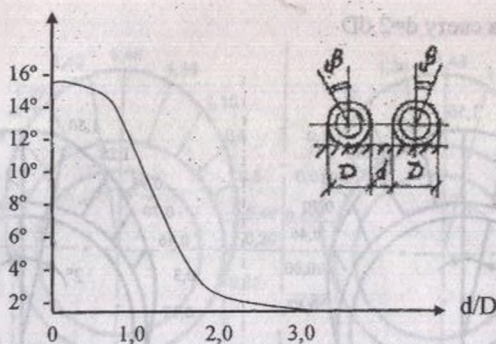


Рис. 5.13. График зависимости положения ординаты максимального давления грунта от замка трубы (угол β) от расстояния в свету (d).

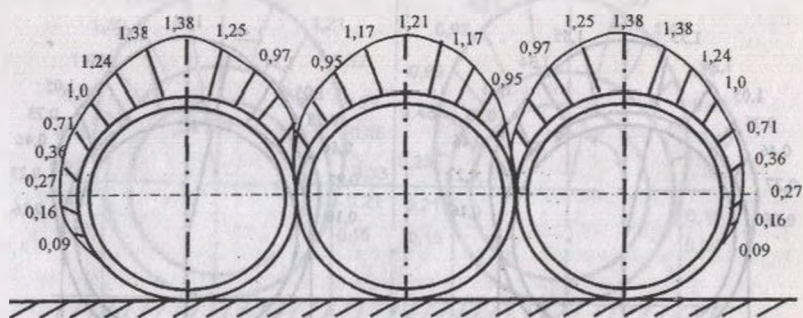


Рис. 5.14. Эпюры радиального давления грунта на трубы трех ниточной укладки ($D=4\text{м}$; $H=8\text{м}$; $V=0,3\text{м/сек}^2$; $\gamma=16,7\text{кН/м}^3$).

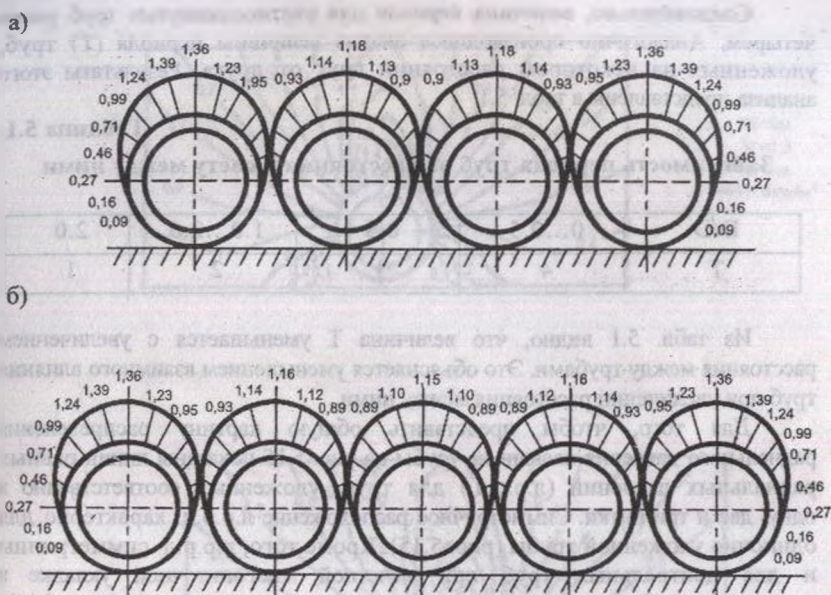


Рис. 5.15. Эпюры радиального авления грунта на трубы пяти ниточной укладки а) $n=4$; б) $n=5$.

Верхняя часть эпюр σ_r многониточной укладки немного сплюснута по сравнению с эпюрой σ_r для одиночно уложенной трубы (рис. 5.10). Эта сплюснутость больше для средних труб, чем для крайних, что свидетельствует о более равномерном распределении давлений, их большей нагрузке. Отметим также, что эпюры σ_r для крайних труб многониточной укладки практически не отличаются от эпюр σ_r для труб двухниточной укладки. Таким образом, при построении эпюры σ_r для крайней трубы многониточной укладки можно воспользоваться результатами расчета труб двухниточной укладки.

Как следует из рис. 5.15,б ($n=5$) эпюры для центральной и соседней с ней средней трубы практически совпадают. Эпюры σ_r для средних труб при $n=4$ (рис. 5.15,а) и при $n=5$ также мало от друга. Таким образом, при определении давления грунта на трубы труб четырехниточной укладки. Там же введено и понятие «периода труб». Под ним подразумевается минимальное количество труб, при котором добавление с краю еще одной трубы практически не оказывает никакого влияния на НДС грунта вокруг центральной трубы.

Следовательно, величина периода для счетносдвинутых труб равна четырем. Аналогично производился анализ величины периода (T) труб, уложенных на некотором расстоянии друг от друга. Результаты этого анализа представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1.

Зависимость периода труб от расстояния в свету между ними

D/D	0...0,5	0.5	1.0...2.0	2.0
T	4	3	2	1

Из табл. 5.1 видно, что величина T уменьшается с увеличением расстояния между трубами. Это объясняется уменьшением взаимного влияния труб при увеличении расстояния между ними.

Для того, чтобы представить общую картину распределения радиального давления насыпи на трубы на рис. 5.15 показаны линии равных радиальных давлений (л.р.д.) для труб, уложенных соответственно в одну, две и три нитки. Симметричное расположение л.р.д. характерно для одиночно уложенной трубы (рис. 5.15). Кроме того, л.р.д. симметричны и для центральных труб при нечетной многониточной укладке в окрестности 1,5В от центра трубы в обе стороны (например при $n=3$ рис.5.14).

Для крайних труб наблюдается ассиметрия и смещение вершин л.р.д. в противоположную сторону от соседних труб (рис. 5.14). Кроме того, л.р.д. при $n=2$ и $n=3$ имеют меньше ординаты и более сплюснены, чем для одиночно уложенной трубы ($n=1$).

Такая сплюсненность свидетельствует о более равномерном давлении грунта на многониточные трубы по сравнению с одиночно уложенной трубой л.р.д. для труб двухниточной укладки и крайних труб трехниточной укладки практически одинаковы.

На рис.5.16...5.19 показаны эпюры t для одиночной трубы и труб двухниточной укладки с расстоянием в свету $d=0...3,0D$. При этом характерно, что на половине трубы, свободной от влияния соседней (на рис. левая половина) t не зависит от параметра d и эпюра t такая же как и у одиночной трубы. Ординаты правой половины эпюры t при $0 < d < 3,0D$ меньше, чем у левой вызвано разгружающим влиянием соседней трубы. При $d > 3,0D$ влияния уже не сказывается и эпюра t аналогична эпюре для одиночной трубы.

Максимум касательных давлений для любой половины эпюры достигается при $\theta = 60^\circ$ от вертикальной оси в обе стороны. Наибольшая величина τ_{max} во всех случаях для крайних труб имеет место на левой половине трубы (свободной от влияния соседней) и превышает небольшие касательные давления на правой половине трубы в 2,2 раза $d=0$; в 1,55 раза при $d=0,5D$ и в 1,1 раза при $d=1,0D$

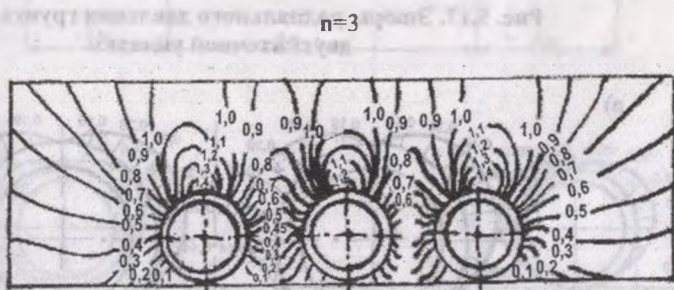
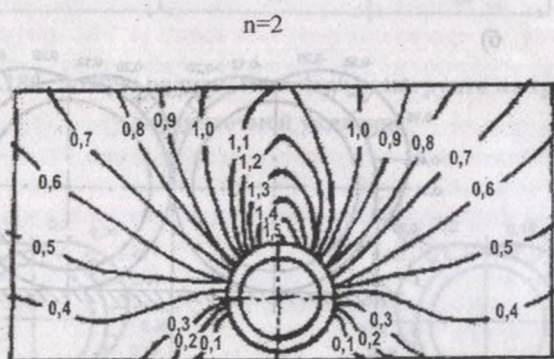
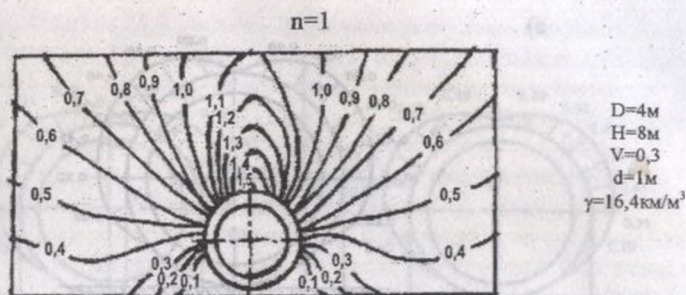
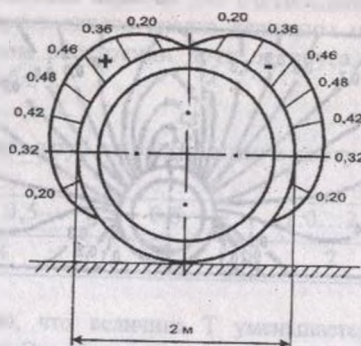


Рис. 5.16. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

а)



б)

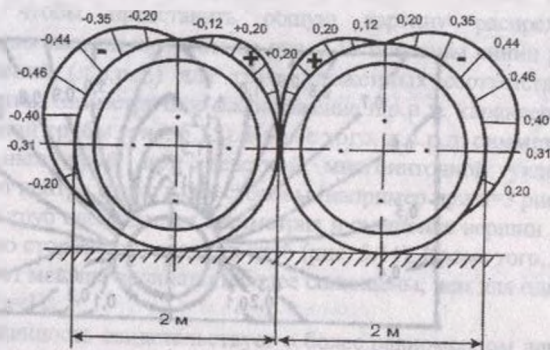


Рис. 5.17. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

а)

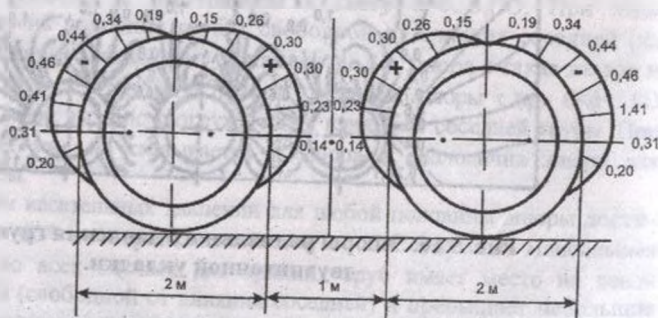


Рис. 5.18а. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

б)

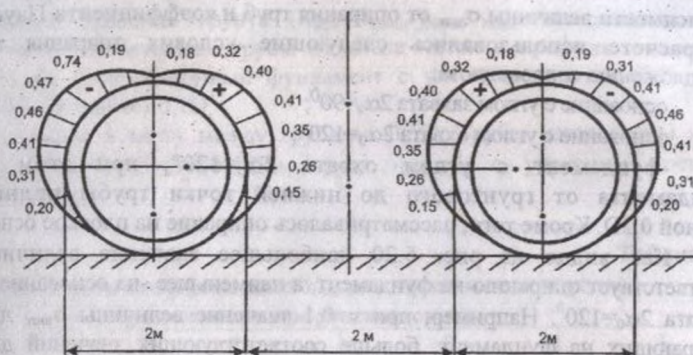
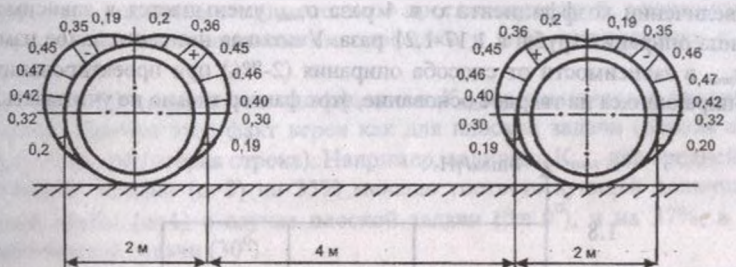


Рис. 5.186. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

а)



б)

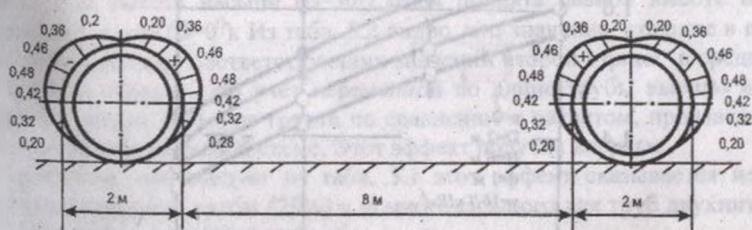


Рис. 5.19 а, б. Эпюры радиального давления грунта на трубы двухниточной укладки.

Влияние типа опирания труб. На рис. 5.13 представлены графики зависимости величины σ_{max} от опирания труб и коэффициента Пауссона ν . В расчете использовались следующие условия опирания труб по предложению гидроводхоза:

основание с углом захвата $2\alpha_0=90^\circ$;

основание с углом охвата $2\alpha_0=120^\circ$;

- фундамент с углом охвата $2\alpha_0=120^\circ$, при этом высота фундамента от грунтового до нижней точки трубы принималась равной $0,2D$. Кроме того, рассматривалось опирание на плоское основание.

Как видно из рис. 5.20 наибольшее значение величины σ_{max} соответствует опиранию на фундамент, а наименьшее - на основание с углом охвата $2\alpha_0=120^\circ$. Например, при $\nu=0,1$ значение величины σ_{max} для труб, опирающихся на фундамент, больше соответствующих значений для труб, опирающихся на: плоское твердое основание на 3%, твердое основание с углом охвата $2\alpha_0=90^\circ$ на 6%, основание с углом охвата $2\alpha_0=120^\circ$ на 8%. Это явление объясняется тем, что чем больше труба выступает над поверхностью основания (вместе с фундаментом), тем больше концентрируется давление грунта, действующего на эту трубу. Отметим также, что независимо от типа опирания величина σ_{max} убывает с ростом коэффициента ν (рис. 5.19). При увеличении коэффициента ν в 4 раза σ_{max} уменьшается в зависимости от типа опирания трубы в 1,17-1,21 раза. Учитывая незначительное изменение σ_{max} в зависимости от способа опирания (2-8%) при проектировании труб, опирающихся на твердое основание, этот фактор можно не учитывать.

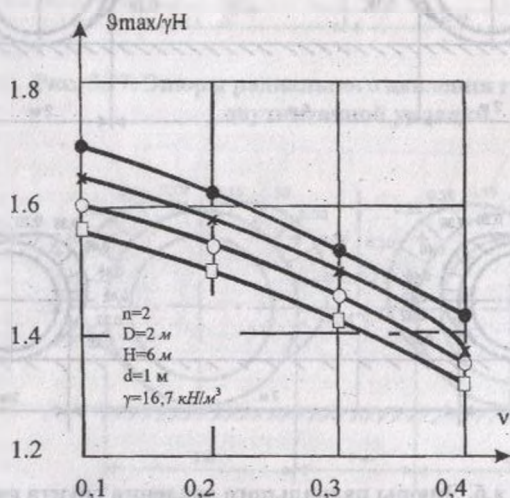


Рис. 5.20. Графики зависимости максимального давления грунта (σ_{max}) на трубы от расстояния в свету (d) между нити.

В табл. 5.2 приведена зависимость коэффициента максимального вертикального давления грунта ($K_{\text{плт}} = \sigma_{z\text{плт}} / \gamma h_{\text{max}}$ - максимальная высота насыпи) на железобетонные трубы от числа ниток и профиля насыпи. Трубы опираются на железобетонный фундамент с углом охвата до 120° . Толщина стенки труб составляет 0,1D

Расстояние в свету между трубами - 0,5D. Трубы изготовлены из бетона класса В 25/ $\nu=0,15$; $E=30000 \text{ МПа}$, грунт насыпи с упругими постоянными $\nu=0,3$; $E=30 \text{ МПа}$.

Таблица 5.2.

Зависимость коэффициента K_{max} от числа ниток и угла продольного профиля насыпи

n	1	2	3
β	1,75	1,36	1,13
$\beta=30^\circ$	1,24	0,92	0,79

В первой строке табл. 5.2 представлены результаты для протяженных труб, уложенных над насыпью постоянной высоты (плоская деформация). Во второй строке табл. 5.2 представлены результаты для протяженных труб, уложенных под насыпью с примененным протяжением труб, уложенных под насыпью с переменным продольным профилем в виде треугольника с углом откоса β до 30° .

Из табл. 5.2 следует, что коэффициент K_{max} уменьшается с увеличением числа ниток. Причем этот факт верен как для плоской задачи (первая строка), так и для объемной (вторая строка). Например, величина K_{max} для средней трубы трехниточной укладки ($n=3$) на 35% меньше соответствующей величины для одиночной трубы ($n=1$) в случае плоской задачи ($\beta=0^\circ$), и на 37%, в случае пространственной задачи (30°).

Для анализа влияния продольного рельефа насыпи на давление грунта на трубы и сравнение результатов плоской и пространственной задачи максимальная высота насыпи ($\beta=30^\circ$) была принята равной высоте насыпи постоянной высоты ($\beta=0^\circ$). Из табл. 5.2 видно, что значения, стоящие в первой строке отличаются от соответствующих значений второй строки в среднем на 30%. Отсюда следует, что учет переменной по длине трубы высоты насыпи снижает расчетное давление грунта по сравнению с расчетом, произведенным по плоскодеформированной схеме. Этот эффект получен впервые.

При этом, как следует из табл. 5.1 этот эффект сказывается немного слабее для одиночной трубы (29%) и немного сильнее для труб двухниточной (32%) и трехниточной (30%) укладки.

Влияние длины труб. В табл. 5.3 приведена зависимость коэффициента K_{max} для железобетонных труб двухниточной укладки от их длины l ($\beta=0^\circ$).

Таблица 5.3.

Зависимость коэффициента $K_{\max}$ от длины труб l

u_0	4,0	6,0	10,0	15,0
$K_{\max}$	0,64	0,85	1,36	1,37

Из табл. 5.3 следует, что с уменьшением длины труб коэффициент $K_{\max}$ убывает. При этом когда длина $l=10,0D$ ее влияние на $K_{\max}$ незначительно. Таким образом, длина $l=10,0D$ есть та граница применимости плоской теории упругости (плоская деформация) для протяженных трубопроводов при постоянной высоте насыпи. В работе Окито А.А. выводится понятие «активной зоны», которая в нашем случае равна $10,0B$, и является границей между «короткой» и «длинной» трубой, т.е. при $l=10,0B$ плоскодеформированная схема дает завышенные значения коэффициента $K_{\max}$ даже при постоянной высоте насыпи. Это завышение составляет 38% при $l=6,00$ и 55% при $l=4,00$.

Таким образом, учет длины труб снижает расчетное давление грунта по сравнению с расчетом по плоскодеформированной схеме, если $K_{10,0B}$.

ГЛАВА VI. О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ВОЛН С ЗАГЛУБЛЕННЫМИ СООРУЖЕНИЯМИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ МКЭ

В данной главе работы проводится общая математическая постановка задачи динамики заглубленных сооружений и методы ее решения. Рассматривается дифракция нестационарных волн на цилиндрическом круглом и прямоугольном теле, находящемся в упругой среде. Приведены некоторые основные соотношения волновой динамики.

6.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ЗАГЛУБЛЕННЫХ ТЕЛАХ

Рассмотрим область деформируемой среды S , которая является объединением $3x$ областей $S(S_0US_1US_{2n})$. Внешняя область S_n может быть безграничной, а внутренняя область S_0 сплошным телом (рис.6.1). Поверхности L_k ($k=0,1,2 \dots n$) контакта областей не пересекаются между собой. Занимающие области имеют различные характеристики. В случае изотропности и неоднородности среды S_e ее движение описывается уравнениями Ламе:

$$(\lambda_e + \mu_e) \text{grad} \text{div} \vec{u}_e + \mu_e \Delta \vec{u}_e + \vec{f}_e = \rho_e \partial^2 \vec{u}_e / \partial t^2 \quad (6.1)$$

где,

Δ – оператор Лапласа, индекс e указывает на принадлежность к e -му слою; $\vec{u}_e$ – вектор перемещения e -го тела; ρ_e – плотность e -го материала; $\vec{f}_e$ – массовые силы, которые действуют на e -тое тело, λ и μ – коэффициенты Ламе, определяемые по формулам:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

На внутренней поверхности первого тела (в случае, если полость) должны быть заданы граничные условия (напряжения или перемещения)

$$\sigma_{ij}^0 \nu_i |_{L_0} = T_i^0, \quad i=1,2 \quad \vec{u} |_{L_0} = \vec{u} \quad (6.2)$$

где, σ_{ij} – тензор напряжений, ν_i – вектор нормали к поверхности, T_i – вектор поверхностей нагрузки, $\vec{u}$ – вектор перемещений.

В качестве внешнего воздействия принимается плоская волна давления в форме функции Хевисайда.

$$\sigma = -\sigma_0 H(\bar{t}),$$

$$\text{где, } H(\bar{t}) = \begin{cases} 1, \bar{t} > 0 \\ 0, \bar{t} < 0 \end{cases} \quad \bar{t} = \left(x - \frac{H}{2}\right) / c_p + t \quad - \text{ функция Хевисайда} \quad (6.3)$$

На поверхности контакта двух сред L_{k-1} и L_k ставится условие непрерывности напряжений и перемещений (верхний индекс соответствует номеру среды):

$$\sigma_{(k-1)t_k}^y = \sigma_{(k)t_k}^y, \quad \bar{u}_{(k-1)t_k}^y = \bar{u}_{(k)t_k}^y \quad (6.4)$$

Возможны модификации этих условий. Например, свободное проскальзывание контактирующих сред (равенство нулю касательных напряжений).

Здесь приведены наиболее характерные и часто встречающиеся виды граничных условий. Возможны и другие условия, учитывающие варианты сцепления упругих тел.

Кроме того, решения уравнений движения (6.1) должны удовлетворять соответствующим начальным условиям. В частном случае $\bar{u}_0(x) = \bar{v}_0(x) = 0$, где, $\bar{u}_0(x)$, $\bar{v}_0(x)$ – заданные функции координат. Результаты для воздействия произвольного вида можно получить с помощью интеграла Дюамеля.

$$\sigma_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t P(T) \bar{\sigma}_k(t-T) dT \quad (6.5)$$

где, $P(t)$ – воздействие произвольного вида $\sigma_k(t-T)$ – решение, полученное от воздействия (6.3). Поставленная задача решается численно по разработанному алгоритму методом конечных элементов.

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что непрерывные величины (перемещения, напряжения, давления и т.д.) аппроксимируются дискретной моделью на конечной числе подобластей. С этой целью выделяется расчетная область, которая дискретизируется на конечное число элементов. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют исходную расчетную область. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе, через узловые значения с помощью интерполяционных полиномов. Интерполяционными полиномами аппроксимируются непрерывные функции в математических уравнениях, описывающих изучаемый физический процесс. Затем, построенная таким образом дискретная модель должна удовлетворять краевым (граничным и

начальным) условиям задачи. Удовлетворение этих условий осуществляется при помощи различных известных в МКЭ подходов. Дискретизация расчетной области S на элементы является первым шагом на пути решения задачи. Этот шаг очень важен, поскольку плохая или несовершенная дискретизация может приводить к ошибочным результатам. При выборе дискретизации основное внимание уделяется следующим правилам:

- более мелкую дискретизацию необходимо осуществлять в областях, где ожидаются большие градиенты величин, и в областях изменения границы расчетной области;

- для достижения рациональной нумерации элементов и узлов дискретизируемой области нужно использовать последовательную нумерацию узлов при движении в направлении наименьшего размера тела.

После того, как осуществлена дискретизация расчетной области, выбраны и введены в программу расчетные параметры, можно получить решение выбранного класса задач. Необходимо решение задачи тестировать на модельной задаче для данного класса задач. После того, как задача тестирована на модельной задаче, можно перейти к усложнению расчетной области, краевых условий и т.д. Чем меньше будут различия в модельной задаче и конкретной технической задаче, тем больше будет достоверность полученного решения. Поэтому потребность в строгих аналитических решениях будет всегда актуальна. Любой расчет должен дублироваться расчетом с более мелкой дискретизацией расчетной области. В зависимости от различия результатов таких сопоставительных расчетов при непрерывнозначных разбиениях можно судить о точности полученных результатов используемой расчетной схемы.

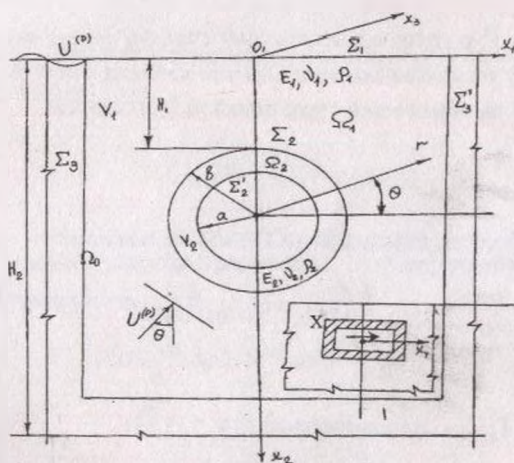


Рис. 6.1. Расчетная схема.

$$\bar{F}_{(2X_1)} = \bar{G}_{(2n \times 2n)} \bar{Q}_{(2n)} \quad (6.8)$$

где, $\bar{F} = \|u, v\|^T$ - вектор упругих перемещений точек КЭ;
 $\bar{G}$ - аппроксимирующая матрица КЭ порядка $(2n \times 2n)$; элементы $\bar{F}$ и $\bar{G}$ зависят от координат точек КЭ, $\bar{Q} = \|\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \dots, \bar{Q}_n\|^T$ - вектор независимых параметров, определяемых числом степеней свободы КЭ, где типовой подвектор $\bar{Q}_i = \|Q_{xi}, Q_{yi}\|^T$.

Параметры $\bar{Q}$ определяются из граничных условий для КЭ. Подставляя последовательно координаты узлов КЭ в $\bar{F}$ и $\bar{G}$, получим:

$$\bar{\Phi}_{(2nX_1)} = \bar{T}_{(2n \times 2n)} \bar{Q}_{(2nX_1)}, \quad (6.9)$$

где, $\bar{\Phi}^e = \|\bar{u}, \bar{v}\|^T$ - вектор узловых упругих перемещений e -го КЭ;

$$\bar{\Phi}^e = \begin{bmatrix} u_1(X_1, Y_1) \\ v_1(X_1, Y_1) \\ \dots \\ u_n(X_n, Y_n) \\ v_n(X_n, Y_n) \end{bmatrix}, \quad \bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{G}(X_1, Y_1) \\ \bar{G}(X_2, Y_2) \\ \bar{G}(X_3, Y_3) \\ \dots \\ \bar{G}(X_n, Y_n) \end{bmatrix}$$

Матрица $\bar{T}$ получается квадратной порядка $2n$, так как число параметров $\bar{Q}$ равно числу независимых компонентов узловых упругих перемещений КЭ. Решая систему алгебраических уравнений (6.9), получим

$$\bar{Q}_{(2nX_1)} = \bar{T}_{(2nX_1)}^{-1} \bar{\Phi}_{(2nX_1)}^e \quad (6.10)$$

Таким образом, подставляя (6.10) в (6.9), получим

$$\begin{aligned} \bar{F}_{(2X_1)} &= \bar{G}_{(2n \times 2n)} \bar{T}_{(2n \times 2n)}^{-1} \bar{\Phi}^e \\ \bar{F}_{(2X_1)} &= \bar{N}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2nX_1)}^e, \end{aligned} \quad (6.11)$$

или

где,

$\bar{N}_{2X2} = \bar{G}_{(2n \times 2n)} \bar{T}_{2n \times 2n}^{-1}$ - функция формы КЭ.

Для сходимости решений, полученных МКЭ, функции формы должны удовлетворять следующему условию: сумма значений функции формы должна равняться единице в каждой точке КЭ

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (6.12)$$

Теперь можно выразить деформации и напряжения в точках КЭ через его узловое перемещение.

Упругие деформации в КЭ находим при помощи уравнений Коши $\bar{\epsilon} = \bar{\Phi} \bar{F}$, которые примут вид

$$\bar{\epsilon}_{(3X1)} = \bar{\Phi}_{(3X2)} \bar{N}_{(2X2n)} \bar{\Phi}_{(2nX1)}^*, \text{ или } \bar{\epsilon}_{(3X1)} = B_{(3X2n)} \bar{\Phi}_{(2nX1)}^*, \quad (6.13)$$

где,

$$\bar{\epsilon} = \left\| \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \right\|^T = \text{вектор деформаций;}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Y}, & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix}_{(3X2)} \quad - \text{ матрица дифференцирования Коши}$$

$\bar{B}_{(3X2)} = \bar{\Phi}_{(3X2)} \bar{N}_{(2X2n)}$ - матрица малых деформаций. Упругие напряжения в КЭ находим, используя закон Гука.

$$\bar{\sigma}_{(3X1)} = \bar{D}_{(3X1)} \bar{\epsilon}_{(3X1)}, \quad (6.14)$$

где,

$\bar{\sigma} = \left\| \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \right\|^T$ - вектор упругих напряжений; $\bar{D}$ - матрица упругих констант для полоской деформации

$$\bar{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1, & \nu, & 0 \\ \nu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{e \in (i,j)} \bar{K}_{ij}^e; \quad H = \sum_{i=1}^m \sum_{e \in i} \bar{H}_i^e \bar{R} = \sum_{i=1}^m \sum \bar{R}_i^e \quad (6.24)$$

Принимая во внимание обозначения МЖ, МИ и ВУС для тела Г, значение уравнения движения динамической теории упругости в матричном виде

$$\bar{H}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} + \bar{K}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} = \bar{R}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} = \bar{R}_{(2n \times 1)} \quad (6.25)$$

При начальных условия

$$\bar{\Phi}_{y=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \bar{\Phi}'_{y=0} = \Phi, \quad (6.26)$$

где,

$\bar{H}_{i,j} = \bar{H}_i$ – диагональная МИ. С отношениями (6.24) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями (6.26). при учете стандартной вязкой границы расчетной области для длительных динамических воздействий уравнение движения (6.25) примет следующий вид

$$\bar{H}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} + \bar{C}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} + \bar{K}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} = \bar{R}_{(2n \times 1)}$$

Таким образом, с помощью МКЭ в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (6.6)–(6.7) привели к линейной задаче Коши (6.25)–(6.26) относительно искомых неизвестных – узловых перемещений и узловых скоростей перемещений. Зная последние, можно определить по формулам (6.21), (6.22), (6.23) $\bar{u}$, $\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ в любой точке КЭ.

Задание различных физических свойств для каждого КЭ позволяет с помощью МКЭ в перемещениях решать плоские динамические задачи теории упругости для кусочно-неоднородной изотропной среды, подчиняющейся закону Гука при различных начальных и граничных условиях, и областей различной формы.

Функции формы линейного КЭ с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругого перемещения.

Применяя линейную лагранжевую интерполяцию [111], получим функцию формы линейной аппроксимацией упругого перемещения

$$N_i = M_i(X),$$

где,
$$M_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X}{a}\right); \quad M_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{X}{a}\right). \quad (6.27)$$

Для линейного КЭ с двумя узловыми точками интегрирование подынтегральных выражений осуществляется следующим образом

$$\int_{-a}^a X^m dX = \begin{cases} \frac{2}{(m+1)} a^{m+1} & (m = 0, 2, 4, \dots), \\ 0 & (m = 1, 3, 5, \dots). \end{cases} \quad (6.28)$$

Линейный КЭ с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругого перемещения в линейной динамической задаче теории упругости. Функцию упругого перемещения линейного КЭ с двумя узловыми точками запишем в виде линейного полинома.

$$U = Q_1 + Q_2 X$$

Применяя соотношения (6.7), (6.19) и (6.28), получим функцию упругого перемещения линейного КЭ с двумя узловыми точками

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i u_i \quad (6.29)$$

Используя выражения (6.13) и (6.29) определим упругую деформацию в линейном КЭ с двумя узловыми точками

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^2 \bar{E}_i u_i, \quad (6.30)$$

где, $\bar{E}_i = [1, -1]^T$.

Используя выражения (6.18)–(6.21), (6.22)–(6.23), и (6.30), определяем МЖ и ВИ линейного КЭ с двумя узловыми точками

$$\bar{K} = \frac{Ec}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{H} = \rho a c \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (6.31)$$

где,

c — площадь поперечного сечения линейного КЭ.

Функции формы треугольного КЭ с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

Для упрощения интегрирования подынтегральных выражений по площади треугольного КЭ с тремя узловыми точками применяем L-координаты

[11]. Введем систему координат L_1, L_2 и L_3 для треугольника с узлами 1, 2, и 3 (рис. 6.3а.), связанную с прямоугольной декартовой системой координат следующими линейными соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

L — координаты точки треугольного КЭ с тремя узловыми точками определяем следующим образом

$$L_1 = \frac{\Delta_{p23}}{\Delta_{123}}; \quad L_2 = \frac{\Delta_{p13}}{\Delta_{123}}; \quad L_3 = \frac{\Delta_{p12}}{\Delta_{123}}, \quad (6.33)$$

где, Δ_{ijk} — площадь треугольника с узлами ijk . Разрешения соотношения (6.1), получим функции формы $N_i (i=1,2,3)$

$$N_1 = L_1 = \frac{1}{2\Delta_{123}}(a_1 + b_1x + c_1y); \quad N_2 = L_2 = \frac{1}{2\Delta_{123}}(a_2 + b_2x + c_2y); \quad (6.34)$$

$$N_3 = L_3 = \frac{1}{2\Delta_{123}}(a_3 + b_3x + c_3y),$$

где,

$$\Delta_{123} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \text{определитель.}$$

Если узел 1(x_1, y_1) находится в начале координат, то $a_1=x_2y_3-y_2x_3$; $b_1=y_2-y_3$; $c_1=x_3-x_2$; $a_2=0$; $b_2=y_3$; $c_2=-x_3$; $a_3=0$; $b_3=-y_2$; $c_3=x_2$

Для треугольного КЭ с тремя узловыми точками дифференцирование и интегрирование подынтегральных выражений осуществляется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L_i}{\partial X} \frac{\partial}{\partial L_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L_i}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial L_i},$$

$$\iint_{\Delta_{123}} L_1^l L_2^m L_3^n dx dy = \frac{\partial^l m! n!}{(l+m+n+2)!} 2\Delta_{123}$$

Функции формы треугольного КЭ с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений определяется следующим образом

$$N_i = L_i$$

Треугольный КЭ с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений в плоской динамической задаче теории упругости. Функцию упругих перемещений треугольного КЭ с тремя узловыми точками запишем в виде линейного полинома

$$\begin{aligned} u &= Q_1 + Q_2 x + Q_3 y, \\ v &= Q_4 + Q_5 x + Q_6 y \end{aligned} \quad (6.35)$$

применяя соотношения (6.35), получим функцию упругих перемещений треугольного КЭ с тремя узловыми точками

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, v = \sum_{i=1}^3 N_i v_i$$

Используя выражения (6.12), (6.31) и (6.35), определяем упругие деформации в треугольном КЭ с тремя узловыми точками

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\Delta_{123}} \sum_{i=1}^3 b_i u_i, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2\Delta_{123}} \sum_{i=1}^3 c_i v_i, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\Delta_{123}} \sum_{i=1}^3 (c_i u_i + b_i v_i). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Используя выражения (6.9.)-(6.13), (6.22)-(6.23), (6.34) и (6.36), определяем МЖ, ВИ и упругие напряжения в центре тяжести треугольного КЭ с тремя узловыми точками

$$\bar{K} = \frac{Eh}{4\Delta_{123}(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} K_{1i,j}, & K_{2i,j} \\ K_{3i,j}, & K_{4i,j} \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

$$H = \frac{\rho\Delta_{123}h}{3} \|1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\|^T; \quad (6.38)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{2\Delta_{123}(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^3 (b_i u_i + \nu c_i v_i),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{2\Delta_{123}(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^3 (\nu b_i u_i + c_i v_i),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{4\Delta_{123}(1+\nu)} \sum_{i=1}^3 (c_i u_i + b_i v_i),$$

где,

$$K_{1i,j} = b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j; K_{2i,j} = \nu b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_j c_i;$$

$$K_{3i,j} = \nu b_j b_i + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j; K_{4i,j} = \frac{1-\nu}{2} b_i b_j + c_i c_j;$$

h — толщина треугольного КЭ.

Определение упругого контурного напряжения на границе области, свободной от нагрузок. Рассмотрим прямоугольный КЭ с тремя узловыми точками (рис.6.3б) на границе области, свободной от нагрузок (узлы 1 и 2). На этой упругое напряжение σ_x определяется из следующего выражения:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (6.39)$$

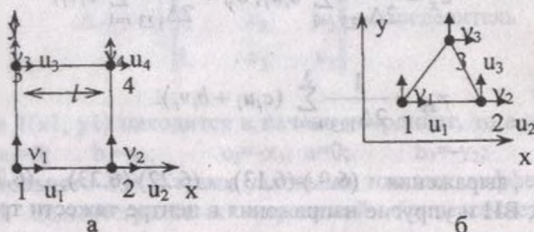


Рис. 6.3 а,б. Прямоугольный и треугольный конечный элемент.

Используя выражения (6.39), определим упругое напряжение в центре тяжести прямоугольного КЭ с четырьмя узловыми точками

$$\sigma_x = (E / (4ab(1-\nu^2))) (b(u_1 - u_2 - u_3 + u_4) + \nu a(v_1 + v_2 - v_3 - v_4))$$

С помощью вырождения прямоугольного КЭ с четырьмя узловыми точками в контурный КЭ с двумя узловыми точками (рис. 6.4) путем освещения узлов 2 и 3, 1 и 4, получим

$$\sigma_x = (E/(4ab(1-\nu^2)))(b(u_1 - u_2 - u_3 - u_4) + \nu a(v_1 + v_2 - v_3 - v_4))$$

или
$$\sigma_x = (E/(2a(1-\nu^2)))(u_1 - u_2) \quad (6.40)$$

при повороте оси X на угол α , получим упругое контурное напряжение σ_α в центре тяжести контурного КЭ с двумя узловыми точками.



Рис. 6.4. Методы прямого интегрирования методом центральных разностей.

Интегрирование системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Для интегрирования уравнения (6.30) конечно элементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H}_{(2n \times 2n)} \frac{d}{dt} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} + \bar{K}_{(2n \times 2n)} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} = \bar{R}_{(2n \times 1)},$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\Phi}_{(2n \times 1)} = \bar{\dot{\Phi}}_{(2n \times 1)}$$

Разбивая временную область на линейные элементы, будем искать решение системы (6.7) в виде $\bar{\Phi} = \sum \bar{\phi}_n N_n$.

Рассмотрим линейные конечные элементы во временной области с интервалом времени $t_n \leq t \leq t_n + 1$, обозначим при $t = t_n$ начальные значения перемещения и скорости в узле (i, j) пространственной координатной сетки

$$\begin{aligned}
v_{i+1,j-1,n} &= v_{i,j,n} + \Delta X \frac{\partial v_{i,j,n}}{\partial X} - \Delta Y \frac{\partial v_{i,j,n}}{\partial Y} + \frac{\Delta X^2}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial X^2} + \\
&+ \frac{\Delta Y^2}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial Y^2} - \Delta X \Delta Y \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial X \partial Y} + O(\Delta X^3, \Delta Y^3), \\
u_{i-1,j+1,n} &= u_{i,j,n} + \Delta X \frac{\partial u_{i,j,n}}{\partial X} - \Delta Y \frac{\partial u_{i,j,n}}{\partial Y} + \frac{\Delta X^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,n}}{\partial X^2} + \\
&+ \frac{\Delta Y^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,n}}{\partial Y^2} - \Delta X \Delta Y \frac{\partial^2 u_{i,j,n}}{\partial X \partial Y} + O(\Delta X^3, \Delta Y^3), \\
v_{i+1,j-1,n} &= v_{i,j,n} + \Delta X \frac{\partial v_{i,j,n}}{\partial X} - \Delta Y \frac{\partial v_{i,j,n}}{\partial Y} + \frac{\Delta X^2}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial X^2} + \\
&+ \frac{\Delta Y^2}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial Y^2} - \Delta X \Delta Y \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial X \partial Y} + O(\Delta X^3, \Delta Y^3),
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Разложим в ряд Тейлора по временной координате упругие перемещения узловых точек $(i, j, n-1)$ через упругие перемещения узловой точки (i, j, n) (рис.6.36)

$$\begin{aligned}
u_{i,j,n+1} &= u_{i,j,n} + \Delta t \frac{\partial u_{i,j,n}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,n}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3), \\
v_{i,j,n+1} &= v_{i,j,n} + \Delta t \frac{\partial v_{i,j,n}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3), \\
u_{i,j,n-1} &= u_{i,j,n} - \Delta t \frac{\partial u_{i,j,n}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,n}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3), \\
v_{i,j,n-1} &= v_{i,j,n} - \Delta t \frac{\partial v_{i,j,n}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j,n}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3),
\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение динамического равновесия (6.41) для узловой точки (i, j, n) через элементы МЖ (6.37) и МИ (6.38) треугольного КЭ с тремя узловыми точками

$$v_{i,j,n+1} = v_{i,j,n} + \Delta t \dot{v}_{i,j,n+1} \quad (6.48)$$

Поставляя (6.44) и (6.45) в (6.46) получаем систему однородных уравнений, определитель которой равен.

$$\bar{\eta} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta t^2}{\Delta t^2}(-p+2-p^{-1})-c_1 & -c_2 \\ -c_2 & \frac{\Delta t^2}{\Delta t^2}(-p+2-p^{-1})-c_1 \end{vmatrix} \quad (6.49)$$

Раскрывая определитель матрицы $|\bar{\eta}|$ и приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение

$$(s-c_1)(s-c_1)=c_2^2, \quad s = \frac{\Delta t^2}{\Delta t^2}(-p+2-p^{-1}),$$

Из уравнения (6.49) получим

$$p^2 - 2(1 - 2\frac{c_p^2 \Delta t^2}{\Delta t^2})p + 1 = 0$$

Необходимое условие устойчивости Неймана состоит в том, что корни уравнения (6.49) по модулю не должны превышать единицы. Поэтому устойчивость явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних точек на равномерной треугольной сетке будет иметь место, если шаг по временной координате подчинить условию

$$\Delta t \leq h \frac{\Delta t}{c_p},$$

где, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$, для численной реализации изложенного алгоритма

используется пакет программ с представлением чисел с двойной точностью.

Используемая программа входит в пакет прикладных конечноэлементных программ предназначенный для определения напряженно-деформированного состояния разнородных грунтовых массивов, в том числе и при взаимодействии с подземной конструкцией. Рассматривается плоско деформированное состояние при линейных соотношениях теории упругости. Прилагаемые воздействия (задаваемые в виде ускорений или напряжений) могут быть динамическими и сейсмическими. При численной реализации в

случае сейсмических воздействий для условной границы расчетной области в алгоритме программы реализована стандартная вязкая граница, позволяющая пропускать воздействие без искажения. Задание стандартной вязкой границы осуществляется путем замены реакции не принимаемой во внимание в полуплоскости распределенными нагрузками σ и τ , вычисляемыми по формулам:

$$\sigma = \alpha \rho c_p \dot{y}; \quad \tau = b \rho c_s \dot{v},$$

где,

$\dot{y}$ и $\dot{v}$ — скорости движения точек на границе тела соответственно по координате x_1, x_2 ; a, b — безразмерные параметры; ρ — плотность материала; c_p, c_s — скорости соответственно продольных и поперечных волн.

Для интегрирования уравнений движения системы конечных элементов используется метод взвешенных невязок [111]. Исходные данные для решения задачи с использованием программы содержат следующую информацию: прилагаемое воздействие в виде ускорений (акселерограмма) или напряжений (мгновенное, импульсное или зависящее от времени); упругие и динамические характеристики сооружения и окружающей среды; специальным образом представленные параметры, характеризующие дискретизацию выбранной расчетной области. В результате решения поставленной задачи с использованием программы содержат следующую информацию: прилагаемое воздействие в виде ускорений (акселерограмма) или напряжений (мгновенное, импульсное или зависящее от времени); упругие и динамические характеристики сооружения и окружающей среды; специальным образом представленные параметры, характеризующие дискретизацию выбранной расчетной области. В результате решения поставленной задачи с использованием указанных программ получаем вертикальные и горизонтальные ускорения, скорости и перемещения, компоненты тензора напряжений и деформаций для элементов конечно-элементной сетки расчетной области. Конечно-элементная дискретизация расчетной области осуществляется треугольными элементами.

РЕКОМЕНДАЦИИ К ОБЕСПЕЧЕНИЮ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ХАРАКТЕРИСТИК ОКРУЖАЮЩЕЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ

1. Аварии подземных сооружений во время землетрясений указывают на необходимость более тщательного учета сейсмических нагрузок при проектировании.
2. Разработанные и применяемые в настоящее время методы учета сейсмических нагрузок на подземные сооружения по статической теории сейсмостойкости не учитывают ряда важных факторов и могут дать заниженные значения напряжений. При расчетах систем выработок, когда интерференционные явления, применение статической теории может приводить к значительным ошибкам.
3. Совершенно не изучен вопрос о влиянии свободной поверхности и рельефа местности на сейсмонапряженное состояние подземных сооружений. В этом случае также должен быть существенным вклад волн, отраженных от свободной поверхности.
4. Спектральные методы теории сейсмостойкости не нашли широкого применения в расчете подземных гидротехнических сооружений в виду отсутствия обоснованных спектров ускорений, а также отсутствия методик определения частот и форм собственных колебаний таких сооружений.
5. Методы волновой динамики позволили решить ряд плоских задач о концентрациях напряжений в линейно-упругой постановке. Полученные результаты показывают, что при воздействии сейсмических волн на сооружения возникает сложное поле, которое принципиально не может быть изучено другими методами.
6. Не учет вязкоупругих свойств грунтов при расчетах подземных сооружений на сейсмические воздействия в ряде случаев может привести к значительным ошибкам.
7. Методы, используемые в настоящее время для обеспечения сохранности подземных сооружений при сейсмовзрывных воздействиях, основаны на эмпирических формулах, полученных в результате натурных наблюдений, нуждаются в корректировании и обосновании.
8. При решении вопросов прочности сооружений в условиях землетрясений следует использовать деформативно-прочностные характеристики материалов, определенные в условиях, соответствующих частотам натурных воздействий. В связи с этим должны быть разработаны стандартные методики.
9. Получены аналитические решения плоских дифракционных задач динамической теории упругости о воздействии сейсмических волн на двух ниточные трубы, заполненные и незаполненные жидкостью.
10. Зависимость $\sigma_{\max} = \sigma_{\max}(d)$ не является монотонной, а поэтому возможно отыскание оптимального расстояния d для близко расположенных труб.
11. Наличие жидкости в трубах как правило увеличивает давление $\sigma_{\max}$ на 20% для одиночной трубы и на 5-10% для двух ниточных труб. Исключение составляет плотно уложенные трубы $d=0$, для которых давление $\sigma_{\max}$ уменьшается на 4%.

12. Полученные аналитические решения не учитывают укладку труб в три и более ниток. Учет этих факторов возможен только при использовании численных методов.
13. При сейсмическом воздействии взаимное влияние железобетонных труб многониточной укладки имеет место при расстоянии в свету между ними $d > 4,0D$ и приводит к увеличению максимального динамического давления грунта на них по сравнению с одиночной трубой (явление местного резонанса) на 5-10%.
14. Появление резонанса в многониточных трубах можно избежать, если выбирать расстояние между ними не кратным длине падающей сейсмической волны. Это явление резонанса является особенностью многониточного трубопровода и не может возникнуть в трубопроводе, уложенном в одну нитку.
15. Явление местного резонанса проявляется более сильно для сейсмического воздействия в виде SV - волны, чем Р - волны.
16. При изоляции трубопровода мягким грунтом установлено, что изоляция является эффективной только для высоких частот.
17. Чем плотнее грунт насыпи, тем меньше сейсмическое воздействие на подземные трубы. При $l > 10D$ динамическая задача сводится к квазистатической.
18. На основе исследования дифракции гармонических упругих волн относительно подкрепленной полости в сплошной упругой среде установлено, что в области низких и средних частот $1/2 \leq k_a \leq 2+3$, среда оказывает максимально как инерциальное, так и демпфирующее влияние на движение цилиндрической системы.
19. Максимальное статическое давление грунта ($\sigma_{\max}$) на трубы, уложенные в несколько ниток на расстоянии в свету $d, 3,0D$ друг от друга, меньше, чем на одиночную трубу в среднем на 10% для крайней трубы и на 20% для средней. При этом величина с $\sigma_{\max}$ возрастает с ростом параметра d , имея минимум при $d=0$ (трубы, уложенные вплотную) и максимум при $d=3,0B$, совпадающий с соответствующим значением для одиночной трубы.
20. Максимальное динамическое давление грунта $\sigma_{\max}$ на трубы, уложенные в две нитки на расстоянии в свету $d < 3,0D$ друг от друга, больше, чем на одиночную трубу. Это превышение достигает 15%.
21. Давление $\sigma_{\max}$ убывает с ростом коэффициента Пуассона ν грунта. Наибольшее значение величины $\sigma_{\max}$ соответствует опиранию на фундамент, наименьшее - на спрофилированное основание с большим углом охвата. Давление $\sigma_{\max}$ на крайнюю трубу и на среднюю трубу практически не зависит от числа ниток.
22. Горизонтальное статическое давление (σ_r) грунта, расположенного между трубами, уменьшается с ростом параметра d , достигая минимума при $d=3,0D$, равного соответствующему значению для одиночной трубы. Горизонтальное давление грунта (σ_r) на крайнюю трубу со стороны противоположной местоположению соседней трубы равно горизонтальному давлению на одиночную трубу и от параметра d не зависит. При расстоянии между трубами $0,5D < d < 3,0D$ значение величины σ_r в среднем на 28% превышает σ_r . Величины σ_r' и σ_r'' возрастает прямо пропорционально

высоте насыпи и убывают при уменьшении коэффициента Пуассона грунта.

23. Эпюры радиального и касательного статического давления грунта для крайних труб многониточной укладки ($n > 3$) и труб двухниточной укладки практически совпадают. Эпюры радиального давления грунта ассиметричны для крайних труб практически симметричны для средних. При этом ордината максимального радиального давления грунта на крайние трубы и трубы двухниточной укладки при $\angle 1 < 3$, (ТО отклоняется от замка трубы в сторону противоположную местоположению соседней трубы. Угол этого отклонения зависит от параметра d и при $0 \leq d \leq 3,0D$ меняется соответственно от 15° до 0° .
24. Значения максимального радиального и горизонтального давления грунта на одиночную трубу, полученные по КМК и по МКЭ для протяженной насыпи, имеющей постоянную высоту, (плоская деформация) имеют хорошее совпадение. Это дает основание использовать МКЭ для расчета многониточных труб в проектной практике.
25. Учет переменной по длине трубы высоты насыпи снижает расчетное давление грунта по сравнению с расчетом, произведенным по плоскодеформированной схеме. Этот эффект сказывается сильнее для многониточных труб и слабее для одиночной трубы.
26. Учет длины труб снижает расчетное давление грунта по сравнению с расчетом по плоскодеформированной схеме, если их длина $l < 10,0D$.
27. При решении плоской динамической задачи теории упругости за основные неизвестные в узле КЭ приняты: два упругих перемещения и две скорости упругих перемещений. Основные соотношения МКЭ в перемещениях получены с помощью принципа возможных помешений, при этом аппроксимация по координатам осуществлялась применением треугольных КЭ с тремя узловыми точками и с линейной аппроксимацией упругих перемещений. Для аппроксимации по временной координате применяются линейные КЭ с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. Для определения упругого контурного напряжения на границе области, свободной от нагрузок, предложен контурный КЭ с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдукадиров С.А. Дифракция продольной волны сжатия на жестком неподвижном цилиндре. // Сейсмостойкость зданий и сооружений. - Ташкент, 1986. с.120-126.
2. Абдукадиров С.А., Пинчукова И.И., Степанко М.В. Об одном способе численного решения уравнений динамики упругих сред и конструкций. // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. - Новосибирск, 1984. № 6, с.34-41.
3. Авлиякулов Н.Н. Методы расчета подземных сооружений. // Илмий - техника журнали. - Ферган. ПИ 2001 № 4. с. 45-48.
4. Авлиякулов Н.Н. Плоские установившиеся колебания механической системы, находящейся в упругой среде под воздействием сейсмических волн. // Илмий - техника журнали. - Ферган. ПИ 2002, № 1. с. 65-71.
5. Авлиякулов Н.Н. Воздействие продольных и поперечных волн на трубу с жидкостью. // Илмий ахборотлари. - Бух. ГУ. 2001, № 4. с. 57-62.
6. Авлиякулов Н.Н. Расчет параметров напряженно-деформированного состояния трубопроводов в сейсмических районах. // Узбекский журнал нефти и газа. - 2004, № 4. с. 24-25.
7. Авлиякулов Н.Н. Повышение долговечности подземных пластмассовых трубопроводов. // Проблемы архитектуры и строительства. - Сам. ГАСИ 2005. № 3. с. 38-41.
8. Авлиякулов Н.Н. Влияние грунтов вод Туранской низменности на сейсмичность подземных сооружений. // Узбекский журнал нефти и газа. - 2006, № 2. с. 16-18.
9. Авлиякулов Н.Н. Управление качеством производственных работ при сооружении подземного магистрального трубопровода. // Узбекский журнал нефти и газа. - 2006, № 4. с. 35-37.
10. Авлиякулов Н.Н. Обеспечение прочности трубопроводов с учетом напряженно-деформированного состояния труб при монтаже. // Узбекский журнал нефти и газа. - 2007, № 1. с. 33-35.
11. А. С. Алешин, И. И. Бархатов, В. В. Севастьянов и др. М.: Тектонические разрывы на участках сейсмического микрорайонирования /Наука, 1982.
12. Аптикеев Ф.Ф. Сейсмические колебания при землетрясениях и взрывах. - М.: Наука, 1969. с. 104.
13. Аки К., Ричарде П. Количественная сейсмология: Теория и методы: в 2-х т.т. I М.: МИР, 1983, с 519.
14. Бабаков И.М. Теория колебаний. М., «Наука», 1965, с. 559.
15. Баженов В.А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде. - Киев: Высшая школа, 1975. с. 186.
16. Барон Метьюз. Дифракция волны давления относительно цилиндрической полости в упругой среде. // Прикладная механика. № 11, 1961. с.229-237.
17. Борисовец В.А., Козел А.М. Напряженно-деформированное состояние пород вблизи горных выработок горных выработок, сооружаемых буровзрывными способами.- Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1973, №1, с.13 - 20.

18. Бозоров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. - Новосибирск, 1996. с. 187.
19. Бурнев Т. Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций. - Ташкент: Фан. 1986. с. 224.
20. Бидерман В.Л. теория механических колебаний. М., Высшая школа, т.24, с.331-366
21. Вайнштейн Н.Я., Харькова Л.М. Сейсмическое горное давление на туннели. - Труды координационных совещаний по гидротехнике: Сейсмостойкость больших плотин /ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, 1973, доп. Материалы, с.78-82 .
22. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций Ч.1-М., 1949. с. 798.
23. Вибрации в технике.-Справочник в 6 томах. Т 1. М. /Машиностроение, 1978, с.352.
24. Галиев Ш.У. Динамика взаимодействия элементов конструкций с волной давления в жидкости. - Киев: Наука-думка. 1977. с. 172.
25. Гольденблат И.И., Карцивадзе Г.Н., Напетваридзе Ш.Г., Николаенко Н.А. Проектирование сейсмостойких гидротехнических, транспортных и других сооружений.- М.: Стройиздат, 1971. с. 280.
26. Горшков А.Г. Динамическое взаимодействие оболочек и пластин с окружающей средой. - М.: Изд. АН. Механика твердого тела., № 2, 1976. с.165-178.
27. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек и жидкости. Киев. Наук.думка 1964, с. 103.
28. Грузь А.Н.Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью. Прикл.мех. 1984. т.20. с. 1,21. 26.
29. Григолюк Э.И. Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью. В кн. Труды 7-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.Наука. 1970. с. 755-778.
30. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наука-думка, 1981. с. 284.
31. Гринченко В.Т. Комиссаров Г.Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью. Прикл. мех. 1980. Т.16. с. 10-20.
32. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. - Киев: Наука-думка, 1972. с. 254.
33. Дашевский М.А. Расчет напорного тоннеля на действие стационарных упругих волн типа сейсмических.: Гидротехническое строительство. № 2, 1969. с.43-44.
34. Дашевский М.А. Дифракция упругих волн на плоскости, подкрепленной кольцом жесткости. Строительная механика и расчет сооружений. № 2, 1967. с.33-36.
35. Дашевский М.А. Дифракция нестационарной плоской волны на отверстия в сплошной упругой среде (плоская задача): Труды ЦНИИСК, вып.34, 1974. с.792-101.
36. Дмоховский А.В., Алпаидзе З.Г. Концентрация динамических напряжений в моделях круговых туннелей с обделкой при воздействии продольных волн. - В кн.: Фотоупругость. Развитие методики. Инженерные приложения. М., 1975, с.178-181.

37. Донченко П.Д. Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода. ИздАН СССР МТТ. 1984. с. 104-112.
38. Донченко П.Д. Об исследовании линейных параметрических и вынужденно параметрических колебаний трубопроводов. В кн. Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Харьков. ХАИ. 1976. вып. 1, с.56-65.
39. Ержанов Ж.О., Алексеева Л.А., Жанбырбаев Н.В. Нестационарная дифракция продольной волны на выработке сводчатого профиля. // Механика подземных сооружений. - Тула, 1986. с.115-121.
40. Ержанов Н.С., Айталиев Ж.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном массиве. - Алма-Ата: Наука. 1980. с. 211.
41. Завриев К.С., Назаров А.Г., Айзенберг Я.М. и др. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений. - М.: Стройиздат, 1970. - с. 224.
42. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Пер. с англ. М.Мир, 1986. с. 318.
43. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. М.Мир, 1975. с. 555.
44. Исроилов М.Ш. Дифракция произвольной упругой волны на клине. // - М. ДАН. Т. 253, № 1, 1980г., с.57-61.
45. Ишмаматов М.Р. Статический и динамический расчеты подземных параллельных труб, взаимодействующих с грунтовой средой.: Автореферат дис... канд. техн. наук, - Самарканд, 1999. с. 23.
46. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. - М. 1977. с. 332.
47. Ильяшин А.А., Рашидов Т.Р. и др. Действие сейсмической волны на подземные трубопроводы. // Материалы международной научной конференции. "Трение, износ и смазочные материалы", Т.3, Ч.2. - Ташкент, 1985. с.128-132.
48. Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости. - Ташкент: Фан. 1968. с. 394.
49. Камбаров М.А., Авлиякулов Н.Н., Раззаков Ш.И., Алимов А.А. Повышение эффективности технологической подготовки монтажных работ в нефтегазовой отрасли на базе ЭВМ. // Узбекский журнал нефти и газа. - 2006, № 4. с. 46-47.
50. Кантарович Л.В. Крылов Л.Н. Приближенные методы высшего анализа Л.Физматгиз. 1962. с. 708.
51. Кац А.З. Сейсмическое районирование с учетом изменения параметров колебаний и напряжений с глубиной.- В кн. Сейсмическое движение грунта. Вопросы инженерной сейсмологии. м., 1970, вып.13, с.16-30.
52. КМК 2.05.06-97. Магистральные трубопроводы.
53. КМК 2.05.03-97. Мосты и трубы.
54. КМК 2.01.03-96 Строительство в сейсмических районах.
55. Костин И.Х., Фрейшист Н.А., Затеев В.Б. Двалишвили В.В. Взаимодействия взрывных волн с выработками сложного очертания. - В кн. Фотоупругость. Развитие методики. Инженерные приложения. М., 1975. с.174 - 177.

56. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука. 1984. с. 831.
57. Кофф Г. Л., Лобацкая Р. М. Изучение разломов при инженерно-геологических исследованиях в сейсмоактивных областях. Варшава: ПГИ, 1991.
58. Крузе-паскаль Д., Гернет Т., Пифко Д. Влияние вязкоупругости окружающей среды на неустановившуюся реакцию круглых цилиндров произвольной толщины при действии плоских волн. // Прикладная механика; перевод с английского, т.34, сер. Е, № 2, 1967. с.120-128.
59. Кубенко В.Д. Динамическая концентрация напряжений около отверстия при установившихся волновых движениях. // Прикладная механика т.2, № 12, 1966. с.67-75
60. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. - Киев: Наука-думка, 1979. с. 183.
61. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. - М., 1963. с. 472.
62. Кубенко В.Д. О распространении плоской гармонической волны сдвига в пластине с квадратным отверстием. - Прикладная механика, 1968, т.4, № 2, с.129-133.
63. Костовецкий Д.Л. Прочность трубопроводных систем энергетических установок. Л.Энергия. 1973. с. 264.
64. Крауклис П.В. Молотков Л.А. К теории сейсмического каротажа обсаженных скважинах. Изв. АН СССР. Физика земли. 1968. № 9. с.39-46.
65. Крауклис П.В. Продольные и поперечные волны в скважине. Зап. науч.сем. ЛОМИ. т.42. Л.Наука. 1974. с.174-180.
66. Крауклис П.В. Крауклис Л.А. Волновое поле точечного источника в скважине. В кн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. вып. 16. Л.Наука. 1976. с.41-53.
67. Крауклис П.В. Крауклис Л.А. О спектре продольной волны в скважине с зацементированной обсадной колонной. Там же. 1977. вып.17. с.156-164.
68. Круглякова В.И. Численный метод определения напряженно деформированного состояния криволинейной трубы при чистом изгибе. Вопр.мех.процессов упр. 1984. № 6. с.49-59.
69. Ландау Л.Д. Лившиц Е.М. Механика сплошных сред. М. Гостехиздат. 1954. с. 795.
70. Левшин А.Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М. Наука. 1973. с. 176.
71. Ляхов Г.М., Покровский Г.И. Взрывные волны в грунтах. - М.: Гостехиздат. 1962. с. 191.
72. Мавлянов Т. Исследование колебаний вязкоупругих ортотропных оболочек в различных средах.: Автореферат дис.... канд. техн. наук, - М. 1974. с. 18.
73. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука. 1977. с. 456.
74. Мау Менте. Динамические напряжения и смещение вблизи цилиндрической поверхности разрыва от плоской гармонической волны сдвига. // Прикладная механика, перевод с английского, т.30, сер Е, № 3, 1963. с.117-126.

75. Майборода В.П. Трояновский И.Е. и др. О затухании волн в двухслойной среде. // Динамические системы. Вып.4. - Киев: Высшая школа. 1985. с.57-62.
76. Маткаримов А.Х., Омельяненко В.А., Маткаримов А. Точные решения уравнений движения подземных сооружений с учетом вязкоупругих свойств сооружений и контакта их с грунтом. - В кн. : Совершенствование методов расчета и конструирования зданий и сооружений, возводимых в сейсмических районах. Ташкент, 1976, с.48-55.
77. Медведев С.В., Карапетян Б.К., Быховский В.А. Сейсмическое воздействия на здания и сооружения. - М.: Стройиздат, 1968. с. 192.
78. Методические рекомендации по учету сейсмических условий при проектировании горных транспортных туннелей. - М.:ЦНИИС Минтрансстрой, 1975. с 29.
79. Мирсаидов М.М., Трояновский И.Е. Динамика неоднородных систем. Ташкент. Фан, 1990. с 107.
80. Мирсаидов М.М., Маткаримов П.Ж. "Алгоритм решения некоторых задач гидроупругости с учетом упругопластических свойств и влажности грунтов". // Современные проблемы алгоритмизации и программирования: Доклады и тез. Респб. Науч. Конф. Инст. Кибернетики. - Ташкент, 5-7 сентября 2001г. с.119-120.
81. Миронов П.С. Взрывы и сейсmobезопасность сооружений. - М.: Недра, 1973. с. 168.
82. Монахенко Д.В. Физическое моделирование сейсмостойкости сооружений. - Л.: Энергия, 1975. - с. 41.
83. Мохначев М.П., Громова Н.В. Усталость горных пород при растяжении. - Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1975, № 3, с.49-53.
84. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. / Ил.т.2., 1969г.
85. Мубораков Я.Н., Сафаров И.И. и др. Об основных методах изучения напряженно-деформированного состояния подземных цилиндрических сооружений при взаимодействии с упругими волнами. Сб.: Прочность инженерных сооружений при сейсмических и импульсных воздействиях. - Ташкент: Фан. 1990.
86. Мубораков Я.Н., Сафаров И.И. Оценка сейсмонапряженного состояния подземных сооружений методом волновой динамики. // Сейсmodинамика зданий и сооружений. - Ташкент: Фан. 1988. с.114-122.
87. Мубораков Я.Н. Сейсмостойкость подземных сооружений типа оболочек. - Ташкент: Изв. АН. сер.техн.наук.-1974. № 2. с.35-39.
88. Мубораков Я.Н., Сафаров И.И., Саидмуратов А. О действии упругой волны на цилиндрические оболочки. - Ташкент: Изв. АН. сер. техн. наук.-1987. № 3. с.34-40.
89. Мубораков Я.Н. Сейсmodинамика подземных сооружений типа оболочек. - Ташкент: Фан. 1987. с. 192.
90. Напетваридзе Ш.Г. Сейсмостойкость гидротехнических сооружений. - М.: Стройиздат, 1959. с. 216.
91. Окомото Ш. Сейсмостойкость инженерных сооружений. - М.: Стройиздат. 1980. с. 342.

92. Островерх Б.Н. Задачи расчета туннелей при сейсмическом воздействии. // В кн. Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений. Т.2. - Ташкент, 1977. с.98-103.
93. Отпущеников Е.Н., Ловков С.Я., Костин И.Х. Экспериментальное исследование концентрации напряжений около круглого отверстия при воздействии плоской волны сжатия. - В кн. Концентрация напряжений. Киев, 1971, вып. 3, с.106-112.
94. Пеньковский В.Г. Взаимодействие обделки малой жесткости с окружающим грунтом в подземных сооружениях при динамических воздействиях от землетрясений – В кн. Волны в грунтах и вопросы виброметрии. Материалы III Всесоюзной конференции по динамике оснований, фундаментов и подземных сооружений. Ташкент, 1975, с.67-71.
95. Пономарев С.Д. Видерман В.Л. Лихачев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. т. 1. М.Машгиз. 1956. с. 884.
96. Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. - Ташкент: Фан. 1973. с. 182.
97. Рашидов Т.Р., Дорман И.Я., Ишанходжаев А.А. Сейсмостойкость тоннельных конструкций метрополитенов – М.: Транспорт. 1975. с. 120.
98. Рашидов Т.Р., Абдуллаев Т.К. и др. Исследование колебаний круговых тоннельных обделок с антисейсмическими мероприятиями при поперечном действии сейсмических волн. // В кн. Совершенствование методов расчета и конструирования зданий и сооружений, возводимых в сейсмических районах. - Ташкент, 1976. с. 3-8.
99. Рашидов Т.Р., Хожиматов Г.Х., Мардонов Б.М. Колебания сооружений взаимодействующих с грунтом. - Ташкент: Фан. 1975. с. 174.
100. Рашидов Т.Р., Сагдиев Х. и др. О двух основных методах изучения сеймонапряженного состояния подземных сооружений при действии сейсмических волн. - Ташкент: ДАН. № 6, 1989. с.13-17.
101. Рашидов И.Т. Новые задачи дифракции упругих волн на неподвижных и подвижных телах конической формы: Автореферат дисс.... канд. Ф-м. наук. - М. 1985. с. 18.
102. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. - Киев: Наука-думка. 1968. с. 887.
103. Сагдиев Х. Сейсmodинамика подземных тоннельных конструкций и сооружений типа оболочек, взаимодействующих с вязкоупругим грунтом.: Автореф. дис... канд. техн. наук. – Т., 1982. с. 18.
104. Сафаров И.И. Колебания и волны в диссипативно неоднородных средах и конструкциях. - Ташкент: Фан. 1992. с. 250.
105. Сафаров И.И., Авлиякулов Н.Н. Методы повышения сейсмостойкости подземных пластмассовых трубопроводов. // Узбекский журнал нефти и газа, 2005, № 4. с. 42-44.
106. Сафаров И.И., Авлиякулов Н.Н. О действии подвижной нагрузки на двухслойную цилиндрическую оболочку. // Илмий ахборотлари. – Бух. ГУ. 2003, № 2. с. 62-67.
107. Сафаров И.И., Авлиякулов Н.Н. Определение собственных частот колебаний цилиндрической оболочки, находящейся в упругой среде. // Проблемы архитектуры и строительства. - Сам. ГАСИ 2003. № 1. с. 21-23.

CONTENTS

FOREWORD	5
CHAPTER I. A condition of underground pipelines at influence of seismic waves	
1.1 Necessary requirements at account of underground pipelines	6
1.2 The characteristics of the surrounding ground environment used in account of pipelines	8
1.3 Some natural supervision and antiseismic actions	14
1.4 Seismic and seismic explored influences on underground constructions	16
1.5 Methods of estimation of seismic stability of underground constructions	20
1.6 An estimation of seismic intensive conditions of underground constructions by the methods of wave dynamics	29
1.7 Mechanical characteristics of system of pipeline - ground using at seismic influences	41
1.8 About static accounts of underground parallel pipes	44
CHAPTER II. Interaction of cylindrical underground constructions with environment and methods of its decision	
2.1. Statement and methods of the decision of tasks of oscillation of cylindrical bodies cooperating with environment	50
2.2. Algorithm of function evaluation of Hankel of the first and second sort of any order. Algorithm of calculation not own Integrals	58
2.3. Oscillations of cylindrical bodies with external friction	68
2.4. About free antiflat oscillations cylindrical constructions with external friction	78
2.5. About free flat oscillation of a cylindrical construction taking place in ground environment	88
2.6. The compelled established oscillations of a cylindrical body	103
2.7. Circuit oscillations of a cylindrical environment in elastic environment	109
2.8. Protection of underground constructions in the elastic environment from flat seismic waves	117
CHAPTER III. Diffraction of harmonious, seismic and non-stationary waves on cylindrical bodies	
3.1. Influence of seismic waves on underground pipelines with a liquid	126
3.2. Dynamic pressure near to a surface of cylindrical form from a flat wave	135
3.3. Diffraction of seismic waves concerning supported cavities in elastic environment	147
3.4. Pulse waves in elastic cylindrical constructions, taking place in ground environment	162

3.5. Interaction of seismic waves on spatial cylindrical cover	174
3.6. Influence of longitudinal and cross-section seismic waves on pipe with a liquid	194
3.7. Methods of increase of seismic stability of underground pipelines with use of isolation from a soft ground	207
3.8. Definition of factor of friction and frequency free oscillations of the pipelines which are taking place in ground environment.....	215

CHAPTER IV. Interaction of seismic waves with parallel pipelines
containing a liquid taking place in ground environment..... 220

4.1. Some basic parities of dynamic sums of building mechanics of underground constructions	220
4.2. Diffraction of seismic waves on parallel pipelines with liquid	224
4.3. Definition of dynamic intense - deformed conditions of parallel pipelines on the influence of seismic waves	231
4.4. Interaction of non-stationary waves with parallel cylindrical covers....	238

CHAPTER V. Static intense - deformed condition of parallel pipes
in elastic environment..... 246

5.1. Application of method of final elements for the decision static sums of underground pipelines	246
5.2. Definition of static pressure of ground on pipelines	249
5.3. The parametrical analysis of tensely - deformed conditions of reinforced - concrete underground round pipes	252

CHAPTER VI. About interaction of elastic waves with underground
constructions and algorithm of its decision by MFE 271

6.1. Mathematical statement of sum of diffraction non-stationary waves on underground bodies.	271
6.2. Algorithm of the decision of flat dynamic sum of the theory elasticity of MFE	274

RECOMMENDATIONS to maintenance of seismic stability of underground
constructions in view of characteristics of surrounding ground
environment 293

LITERATURE 296

Н.Н. АВЛИЯКУЛОВ, И.И. САФАРОВ

СОВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Ташкент-«Fan va texnologiya» – 2007

Редактор:	М.Миркамилов
Тех. редактор:	А.Мойдинов
Корректор:	К.Авезбоев
Комп. верска:	Г.Арифходжаева

Разрешено в печать 20.11.07. Формат 60x84 ¹/₁₆.

Гарнитура «Times New Roman». Печать офсетная. Усл.печ.л. 19,25.

Издат.печ.л. 19,0. Тираж 500.

Заказ № 151.

Отпечатано в типографии «Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi».
700003, г.Ташкент, ул. Алмазар, 171.

