Р. ХУДОЙБЕРДИЕВ, Р. САЙДАЛИЕВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

Ўзбекистон Халқ таълими вазирлиги техника олий ўқув юртларининг машинасозликдан бошқа ихтисос оладиган студентлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган.

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1992

Ушбу қўлланма машинасозликдан бошқа ихтисос оладиган студентл[...] га мўлжаллаб чиқарилган программага мувофиқ ёзилган. Қўлланмада ўқ[...] материали назарий жиҳатдан баён этилгандан сўнг унга тегишли маса[...] ҳар бирини кўрсатилган, ҳар бобнинг охирида машқ қилиш учун бир н[...] масалалар берилган.

Қўлланмадан фанни мустақил ўрганувчилар ёки билимларини чуқ[...] лаштирмоқчи бўлган кишилар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Рецензентлар — *Ўзбекистон ФА академиги* $\boxed{\textit{Х. А. Рахматуллин}}$
проф. А. Г. Азизов

Х $\dfrac{1603020000-72}{353(04)-90}$ 192—90

ISBN 5—645—00741—7

СЎЗ БОШИ

Ушбу қўлланма назарий механиканинг бошланғич бўлими ҳисобланган статикага бағишланган. Китобни ёзишда муаллифлар Абу Райҳон Беруний номидаги Тошкент политехника институти студентларига кўп йиллар мобайнида назарий механика курсидан ўқиган лекциялари асос қилиб олинган. Қўлланмада статиканинг асосий, муҳим масалалари бобларга ажратиб ёритилган. Студентлар ўтилган материални пухта ўзлаштиришлари учун ҳар қайси бобнинг охирида айрим темаларга оид масалалар берилган. Статикани пухта ўрганишнинг «Материаллар қаршилиги», «Машина ва механизмлар назарияси» курсларини ўзлаштиришда жуда муҳим аҳамияти бор. Муаллифлар қўлланмани ёзишда ана шуларни ҳам эътиборга олиб, студентларнинг физовий тасаввурларини ривожлантирадиган масалаларнинг ечилиш йўлларини кўрсатиб бердилар. Қўлланма олий мактаб проблемаларини ҳал этиш йўлида олга қўйилган бир қадам бўлади деган умиддамиз.

Қўлёзмани Ўзбекистон Фанлар академиясининг ҳақиқий аъзоси профессор Х. Рахматуллин, физика-математика фанлари доктори профессор А. Азизов, профессор М. Юнусов ва институт назарий механика кафедрасининг катта ўқитувчиси Р. Додилова ўқиб чиқиб, ўзларининг фойдали фикр ва мулоҳазаларини бердилар. Бу ўртоқларга муаллифлар самимий миннатдорчилик билдирадилар.

Муаллифлар

МУҚАДДИМА

Механикада ҳаракат деганда механик ҳаракат тушунил
ди. Механик ҳаракат эса материя ҳаракатининг энг оддий т
ри бўлиб, моддий жисмларнинг фазодаги вазиятларининг ва
ўтиши билан бир-бирига нисбатан ўзгаришини билдиради. Н
зарий механика фани мана шу механик ҳаракатни ва бу ҳ
ракатнинг хусусий ҳоли бўлмиш мувозанат вазиятни ўргана
Механик ҳаракат табиатда ҳам, техникада ҳам кўп содир б
лади, шунинг учун назарий механика фани табиийтда
ҳозирги замон техникасида катта аҳамият касб этади. Наз
рий механикадан олинадиган маълумотлар замонавий техн
канинг илмий асоси ҳисобланади. Ҳозирги вақтда назар
механикани яхши билмай туриб маълумотли инженер бўли
қийин.

Таҳлил қилинадиган масалаларнинг турига қараб назари
механика уч қисмга бўлинади: статика, кинематика ва дин
мика. Статика бўлимида қаттиқ жисмга қўйилган кучлар си
темасини унга эквивалент бўлган системага алмаштириш усу
лари ва кучларнинг мувозанат шартлари ўрганилади. Кин
матикада жисмларнинг ҳаракати фақат геометрик томонда
ўрганилади. Ниҳоят, динамикада моддий жисмларнинг ҳар
кати уларга таъсир этаётган кучлар билан биргаликда ўрга
нилади. Назарий механиканинг умумий курсида моддий ну
та ва қаттиқ жисм механикаси ҳамда моддий нуқталар сист
маси ҳаракатининг умумий қонунлари ўрганилади.

Назарий механика кузатиш, кундалик тажриба ва инсон
нинг ишлаб чиқариш фаолиятига асосланади. Механикад
тадқиқот олиб боришни енгиллаштириш мақсадида кўпинч
реал жисмларнинг унча муҳим аҳамиятга эга бўлмаган баъз
хоссаларидан воз кечиб, соддалаштирилган схемалар (содда
лаштирилган моделлар) яратилади. Масалан, назарий меха
никада абстракция методи катта роль ўйнайди, абсолют қат
тиқ жисм, моддий нуқта ва инерциал саноқ системаси каби
тушунчалар шулар жумласидандир. Тадқиқотнинг оддийдан
мураккабга ўтишдек бу йўли назарий механикада кўп қўлла
нилади. Чунончи, абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат қонун
лари ўрганиб олингандан сўнг деформацияланадиган жисм
ларнинг мувозанати масаласига ўтилади.

Энди механика тараққиётининг қисқача тарихини баён қи
либ ўтамиз.

Механика фани жуда қадим замонларда пайдо бўлган. У
даврда катта-катта иншоотлар, масалан, Миср эҳромларини
қуришда усталар механика қонунларига асосланиб, оғир юк
ларни кўтариш ва кўчиришда энг оддий механик мосламалар
бўлмиш ричаг, блок ва қия текисликдан фойдаланганлар.
Деҳқончилик, қурилиш ишлари, савдонинг юксалиши механи
канинг ривожланишига туртки берди. Дастлаб механиканинг
асосан статика қисми ривож топди. Статикани аниқ фан си
фатида асослаган олим Архимед (эрамиздан олдинги 287—
212 йиллар) деб ҳисоблаш лозим. Архимед ўзининг механи
кага оид асарларида қадимги дунё олимларининг статика со
ҳасидаги билимларига якун ясаб, статикага илмий асос сол
ди. Архимед ричагнинг мувозанати тўғрисидаги масалани тў
па-тўкис ечиб, оғирлик маркази ҳақида таълимот яратди.

Ўрта асрларда араб мамлакатларида ва Ўрта Осиёда яша
ган Абу Райҳон Беруний, Ибн Рушд, Ибн Бажжи, Ал-Хораз
мий, Ибн Қурра ва Улуғбек каби машҳур олимлар асосан ма
тематика, астрономия ва қисман механика соҳасида тадқи
қотлар олиб борганлар.

XV асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб Юксалиш даврида
савдо, ҳунармандчилик, денгизда сузиш ривожланиши билан
бир қаторда механика ҳам тез суръатлар билан тараққий эта
бошлади. Бу даврда яшаган олимлардан Леонардо да Винчи
механика масалаларини ечишда математикани татбиқ қилиш
га ва тажрибага катта аҳамият берди. У жисмнинг қия текис
лик бўйлаб қиладиган ҳаракатини ва сирпаниб ишқаланиши
ни тадқиқ этган. Кучнинг моменти тушунчасини биринчи бў
либ Леонардо да Винчи фанга киритди.

Улуғ итальян олими Галилейнинг (1564—1642) ишлари
механика тарихида янги давр очди. Динамиканинг моддий
жисмлар ҳаракати ҳақидаги бўлимининг асосчиси Галилей
дир. Тўғри чизиқ бўйлаб нотекис илгарилама ҳаракат қилаёт
ган жисмнинг тезлиги ва тезланиши тушунчасини биринчи бў
либ Галилей айтган. Динамиканинг асосий қонунларидан би
ри ҳисобланган инерция қонунини Галилей кашф этган.

Машҳур Голланд олими Христиан Гюйгенс (1629—1695)
Галилейнинг динамика соҳасидаги тадқиқотларини давом
эттириб, физик маятник назариясини яратди. Ундан ташқари,
Гюйгенс олдин Галилей киритган тезланиш тушунчасини нуқ
танинг эгри чизиқли ҳаракати учун умумлаштирди. Гюйгенс
қаттиқ жисмлар зарбининг назариясига оид бир қатор илмий
ишлар ҳам қилган.

Динамиканинг асосий қонунларини ўрганиш соҳасида Га
лилей бошлаб берган илмий ишни улуғ инглиз олими Исаак
Ньютон (1643—1727) ниҳоясига етказди. Ньютон динамикани
ривожлантираётган бир даврда француз олими Вариньон
(1654—1722) статика соҳасида тадқиқотлар олиб бориб, тенг

таъсир этувчининг моменти тўғрисидаги теоремани исбот қилади.

XVII асрни механика тарихида динамика асослари яратилган давр деб ҳисоблаш мумкин.

XVIII асрда механиканинг умумий принциплари ишлаб чиқилиб, қаттиқ жисм механикаси, гидромеханика ва осмон механикаси соҳасида муҳим тадқиқотлар ўтказилди. Бу даврда механика чексиз кичик миқдорларни анализ қилишнинг И. Ньютон ва Лейбниц асос солган қудратли методлари ёрдамида аналитик методлар яратиш йўлидан боради. И. Бернулли, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Даламбер ва Лагранжлар XVIII асрда яшаган энг йирик механик олимлардир. XIX асрга келиб аналитик механика яна камол топади; илмий ишлар асосан икки йўналишда олиб борилган: 1) механиканинг вариацион принциплари деб аталадиган принципларни барпо этиш ҳамда; 2) механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллашни такомиллаштириш ва янги методлар яратиш.

Механика тарихида XX аср А. Эйнштейннинг релятивистик механика кашф этиши билан алоҳида ўрин эгаллайди. Нисбийлик назарияси деб аталадиган релятивистик механика табиатнинг ҳақиқий ҳодисаларини тўлароқ тавсифлагани ҳолда ёруғлик тезлигига қараганда жуда кичик тезликлар билан ҳаракатланадиган жисмлар ҳаракати ўрганиладиган классик механика олдида, яъни Галилей-Ньютон механикаси олдида олға қараб қўйилган йирик қадам ҳисобланади. Бироқ назарий механика курси айни ўша ёруғлик тезлигидан анча кичик тезликлар билан ҳаракатланадиган жисмлар ҳаракати ва мувозанатини ўрганади.

Ҳозирги замон механикасини яратишда рус ва Совет олимлари катта ҳисса қўшдилар. М. В. Остроградский, Н. Е. Жуковский, С. В. Ковалевская, С. А. Чаплигин, И. В. Мешчерский, К. Э. Циолковский, А. Н. Крилов, Х. А. Рахматуллин ва бошқа машҳур олимларимиз ўзларининг оламшумул аҳамиятга эга бўлган тадқиқат ва кашфиётлари билан механикани янада бойитдилар. Ватанимиз фани намояндаларининг шонли анъаналарини давом эттириб, ҳозирги кунда А. Ю. Ишлинский, Л. И. Седов, А. А. Илюшин каби олимлар жуда самарали илмий ишлар олиб бормоқдалар.

I БОБ. СТАТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧА ВА АКСИОМАЛАРИ

1- §. Асосий тушунчалар

Жисмга куч қўйилганда, яъни жисмга бошқа бир жисм таъсир этганда, унинг шакли ўзгаради, буни физикада *жисмнинг деформацияланиши* дейилади. Деформациялар анча катта бўлиши мумкин, масалан, резина шнур, пружинанинг чўзилиши; буларни бевосита кўриб пайқаса бўлади. Бироқ деформациялар кўз илғамайдиган даражада кичик бўлиши ҳам мумкин, чунончи, узун темир йўл рельси ўз учларига таъсир қилаётган кучлар воситасида узаяди; бу ҳолда деформацияни махсус асбоблар воситасидагина ўлчаб аниқлаш мумкин, холос. Назарий механиканинг статика бўлимида эса деформациялар эътиборга олинмайди, демак, реал жисмлар ўрнида абсолют қаттиқ жисм деб аталадиган жисм билан иш кўрилади. Ихтиёрий икки нуқта орасидаги масофа кучлар таъсирида (ёки бутун ҳаракат давомида) ўзгармайдиган жисм *абсолют қаттиқ жисм* дейилади. Бундай жисм табиатда йўқ, лекин деформация кичкина бўлганлиги туфайли уни эътиборга олмаслик тадқиқот ўтказишда кўп қулайлик яратади. Деформацияни эътиборга олмаслик мумкин бўлмаган ҳолларда назарий механикада олинган натижалар механиканинг материаллар қаршилиги ёки эластиклик назарияси деб аталадиган бўлимларида қўлланиладиган методлар воситасида янада мукаммаллаштирилади ва тўлдирилади. Масалан, ракетанинг учишини таҳлил қилганда унинг айрим қисмларининг кичик-кичик тебранишларини эътиборга олмаслигимиз мумкин, чунки бу тебранишларнинг ракета учишининг параметрларига кўрсатадиган таъсири жуда заиф бўлади. Бироқ ракетанинг мустаҳкамлигини ҳисоблаган вақтда бундай тебранишларни албатта эътиборга олиш зарур, чунки бу тебранишлар ракетанинг корпусини емириши мумкин.

Абсолют қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг мувозанат шартлари кучларнинг деформацияланадиган жисмга кўрсатадиган таъсирини ўрганишда қўлланилади.

Назарий механикада яна бир тушунча билан иш кўрилади. У ҳам бўлса моддий нуқта тушунчасидир. Ҳаракат ёки мувозанат қонунлари ўрганилаётганда ўлчамларининг катта-кичиклиги аҳамиятга эга бўлмаса, бундай жисм *моддий нуқта* дейилади. Моддий нуқтанинг геометрик нуқтадан фарқи шундаки, чекли массаси бор деб ҳисоблаймиз. Моддий нуқтанинг жи[см] каби инертлик хоссаси ҳам бор. Ундан ташқари, моддий нуқ[та] жисмга ўхшаб бошқа моддий жисмлар билан ўзаро таъ[сир]лаша олади. Масалан, сайёраларнинг Қуёш атрофида қили[б]ган ҳаракатини ўрганган вақтда биз уларни моддий ну[қта] деб ҳисоблай оламиз, чунки сайёраларнинг ўлчамлари Қу[ёш]гача бўлган масофаларга нисбатан жуда ҳам кичик бўл[ади]. Бироқ ўша сайёралардан бирининг ўз ўқи атрофида қил[а]ган ҳаракатини ўрганганда эса, унга моддий нуқта деб эм[ас], балки моддий жисм деб қараймиз. Одатда, механикада жи[см] абсолют қаттиқ жисм деб эмас, балки қисқагина қилиб б[ир] сўз билан жисм деб юритилади.

Абсолют қаттиқ жисм ва моддий нуқта тушунчалари аб[ст]ракт тушунчалар бўлиб, назарий механикада абстракция [ме]тоди катта аҳамият касб этади.

Агар бир неча моддий нуқта бир-бирига нисбатан шунд[ай] муносабатда бўлсаки, булардан бирортаси ҳам бошқаларид[ан] мустақил равишда ҳаракат қила олмаса, бундай тўплам мо[д]дий нуқталарнинг механик системаси деб, баъзан қисқа қил[иб] *система* деб юритилади.

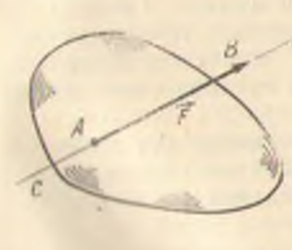
Энди механикада қўлланиладиган асосий тушунчалард[ан] бири бўлган куч тушунчаси билан танишиб чиқамиз. Бир жис[м]га бошқа бир жисм таъсир кўрсатар экан, бу таъсирнинг ка[т]талиги механикада куч деган тушунча билан ифодаланад[и]. Кучлар хилма-хил бўлади. Буларга оғирлик кучи, одам му[с]кулларининг кучи, Қуёш билан сайёралар орасидаги ўзар[о] тортишиш кучи, электровознинг тортиш кучи, цилиндр ичид[а]ги буғ ёки газнинг, шамолнинг босим кучи, атмосфера босим[и] ва бир-бирига ишқаланувчи сиртларнинг ишқаланишга кўрс[а]тадиган қаршилик кучи мисол бўлади. Кучга ҳаммага маълу[м] бўлган оғирлик кучи энг оддий мисол бўла олади. Куч векто[р] бўлиб, унинг жисмга кўрсатадиган таъсири жисмга қўйилга[н] нуқтаси, йўналиши ва катталиги (модули) билан белгиланад[и]. Жисмга қўйилган кучнинг модули бирлик деб қабул қилинга[н] куч билан таққослаш орқали аниқланади. СИ системасида куч[]нинг асосий бирлиги 1 ньютон (1 Н). Кучлар динамометр би[]лан ўлчанади. Кучнинг йўналиши ва қўйилиш нуқтаси жисм[]лар ўзаро таъсирининг характерига ва уларнинг бир-бириг[а] нисбатан тутган вазиятига боғлиқ. Масалан, бирор жисмг[а] таъсир этаётган оғирлик кучи вертикал тарзда пастга қара[б] йўналган. Бир-бирига сиқиб қўйилган иккита силлиқ шарнин[г] босим кучлари шарларнинг уриниш нуқтасида уларнинг сирт[]ларига ўтказилган нормал бўйлаб йўналган. Жисмга таъсир этаётган кучнинг қўйилиш нуқтаси деб жисмнинг шу куч таъ[]сири тўпланган нуқтасига айтилади. Ҳақиқатда кучни бир нуқтага қўйиб бўлмайди. Ҳар бир куч одатда бирор юза ёки ҳажм бўйлаб тақсимланган бўлади. Масалан, ипга осиб қўйил[]ган шарчанинг унга кўрсатадиган оғирлик кучи ҳақиқатда ип[]нинг бирор кўндаланг кесими бўйлаб тарқалган бўлади. Шар[]чага Ер томонидан таъсир этадиган оғирлик кучи эса шарча-

[ёки] бутун ҳажми бўйлаб тақсимланган. Лекин оддийлик учун бундай ёйилган кучларга бир нуқтага қўйилган кучлар деб қараш керак. Фақат шуни эсда тутиш зарурки, бундай соддалаштириш натижасида жисмнинг мувозанат шартлари бузилмаслиги керак.

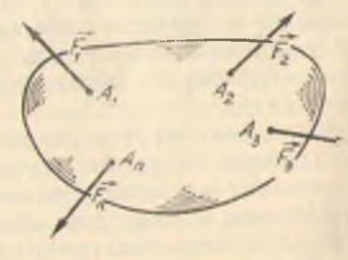
График равишда куч ҳар қандай вектор каби стрелкали кесма билан тасвирланади (1-расм). Бу AB кесманинг узунлиги танлаб олинган масштабда кучнинг модулини (катталигини) ифодалайди, кесманинг йўналиши эса кучнинг йўналишини кўрсатади. Кесманинг A боши куч қўйилган нуқтани билдиради. Баъзи ҳолларда эса стрелканинг учи куч қўйилган нуқтани билдиради (5-расм, *a* га қаранг). Кучнинг йўналишини кўрсатиб турган CD тўғри чизиқ *кучнинг таъсир чизиғи* деб аталади. Куч йўғон ҳарф ёки устига чизиқча қўйилган қўш ҳарф билан белгиланади, масалан, 1-расмдаги куч F ёки $\overline{AB}$ билан белгиланган. Кучнинг модули $|F|$ символ билан ёки оч ҳарф билан белгиланади. Доскага ёки дафтарга формула ёзишда векторлар оч ҳарфлар билан тасвирланиб, булар устига чизиқча қўйилади.

Жисмнинг ҳар хил нуқталарига қўйилган кучлар тўплами *кучлар системаси* деб аталади. Системанинг кучлари тайинли бир жисмга бошқа жисмлар томонидан бериладиган таъсирларни ифодалайди. Аниқ бир жисмга қўйилган кучлар системаси ($F_1, F_2, \ldots, F_n$) кўринишда белгиланади (2-расм). Кучлар системасининг турлари ҳар хил бўлади: масалан, кесишувчи кучлар системаси, бунинг ўзи ҳам икки хил бўлади— текисликда жойлашган кесишувчи кучлар, фазода жойлашган кесишувчи кучлар; параллел кучлар системаси, бу ҳам икки хил бўлади — текисликда жойлашган параллел кучлар, фазода жойлашган параллел кучлар; фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси ва текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси, ниҳоят, жуфт кучлар системаси. Бу системалар билан бирма-бир танишиб борамиз.

Агар жисм фазода исталган йўналишда ҳаракат қила олса, бундай жисм *эркин жисм* деб аталади. Агар эркин жисмга таъсир этаётган кучлар системаси ўрнига бошқа кучлар системаси қўйилганда бу жисмнинг тинчлик ёки ҳаракат ҳолати ўзгарма-



1-расм.



2-расм.

са, бундай кучлар системалари бир-бирига *эквивалент сис*... *малар* дейилади. Куч системаларининг эквивалент эканлиги

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

символ билан ифодаланади.

Агар кучлар системаси тинч турган жисмга таъсир этган[да] унинг тинчлик ҳолати ўзгармаса, бундай кучлар системаси м... возанатланган система ёки *нолга эквивалент система* деб ат... лади ва

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow 0.$$

шаклида ифодаланади. Нолга эквивалент система ҳарак... қилаётган жисмга қўйилганда ҳам жисмнинг ҳаракати хара... терини ўзгартирмайди.

Бирор куч системасига эквивалент бўлган битта куч бу си... теманинг *тенг таъсир этувчиси* дейилади ва

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow R,$$

шаклида ифодаланади. Демак, жисмга қўйилган кучлар систе... масининг ўрнини якка ўзи боса оладиган битта куч шу кучла... системасининг тенг таъсир этувчиси экан. Бироқ шуни били... қўйиш керакки, кучларнинг ҳар қандай системаси ҳам тен... таъсир этувчига эга бўлавермайди. Масалан, жисмга икки уч... рашмас тўғри чизиқ бўйлаб таъсир этадиган икки кучдан ибо... рат системанинг тенг таъсир этувчиси йўқ.

$(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ кучлар системасининг мувозанатлов... чиси шундай кучки, бу кучни ўша системага қўшганда нолга эквивалент бўлган янги система ҳосил бўлади. Мувозанатлов- чи куч Q билан белгиланса,

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n, Q) \Longleftrightarrow 0$$

тарзида ёзилади. Тенг таъсир этувчига эга бўлган системанинг- гина мувозанатловчиси бўлади; мувознатловчи куч тенг таъсир этувчи кучнинг векторига қарама-қарши йўналган вектор билан тасвирланади, яъни $Q = -R$.

Абсолют қаттиқ жисмга таъсир этадиган кучларни ички ва ташқи кучлар деб икки гуруҳга ажратиш мумкин. Тайинли бир жисмнинг зарраларига бошқа моддий жисмлар томонидан таъсир этадиган кучлар *ташқи кучлар* деб, ўша жисм заррачаларининг бир-бирига кўрсатадиган таъсир кучлари *ички кучлар* деб аталади.

Жисмнинг битта нуқтасига таъсир этадиган куч *якка куч* деб аталади. Жисмнинг маълум бир ҳажмидаги ёки сиртининг маълум бир қисмидаги ҳамма нуқталарга таъсир этувчи кучлар *ёйилган кучлар* деб аталади.

Назарий механикада ишлатиладиган кўп миқдорлар векторлар билан тасвирланганни туфайли векторларга тегишли бази маълумотлар қуйида баён этилади.

2-§. Векторлар

Векторлар билан тасвирланадиган физик миқдорларнинг ...хоссаларига қараб улар уч хил бўлади: 1) эркин вектор, 2) сир...панувчи вектор, 3) кўзғалмас вектор.

Эркин вектор ўзининг бошланғич физик маъносини ...қолган ҳолда фазонинг ихтиёрий нуқтасида бир хил бўлган ...нинг миқдорини тасвирлайди. Бу ҳолда бир-бирига тенг бўл...ган икки вектор айни бир физик миқдорни тасвирлай олади. Масалан, илгарилама ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги эр...кин вектор ҳисобланади, чунки бу тезлик жисмнинг ҳамма нуқталари учун бир хил бўлади. Жуфт моментининг вектори ҳам эркин вектор эканлиги 28-§ да батафсил баён этилади. Эркин вектор уч сон билан (ўзининг проекциялари билан) аниқланади.

Сирпанувчи вектор ўзининг бошланғич физик маъ...носини йўқотмаган ҳолда ўзи йўналган тўғри чизиқдаги ҳар қандай нуқтада бир хил бўлган физик миқдорни тасвирлайди. Бу ҳолда бир-бирига тенг бўлган ва айни бир тўғри чизиқ бўй...лаб йўналган векторларгина айни бир физик миқдорни тасвир...лай олади; векторнинг ўзи ётган тўғри чизиқ ***векторнинг таъ...сир чизиғи*** деб аталади. Абсолют қаттиқ жисмга қўйилган куч ёки жисмнинг бурчак тезлиги сирпанувчи векторга мисол бўлади. Сирпанувчи вектор беш сон (ўзининг учта проекция...си ва ўзи йўналган тўғри чизиқ билан текислик кесишган нуқтанинг икки координатаси) билан аниқланади.

Кўзғалмас вектор фазонинг аниқ бир нуқтасига қўйилган деб олинганда маънога эга бўлиб, фазонинг ҳар қандай бошқа нуқтасига қўйилган деб олинганда эса ўзининг бошланғич физик маъносини йўқоталиган миқдорни тасвирлайди. Масалан, ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги нуқтанинг ўзига боғланган кўзғалмас вектордир. Кўзғалмас вектор олти сон (векторнинг уч проекцияси ва қўйилиш нуқтасининг уч координатаси) билан аниқланади. Қўшиш, кўпайтириш ва дифференциаллаш амаллари бажарилган вақтда сирпанувчи ва кўзғалмас векторлар ***эркин векторлар*** деб ҳисобланади.

3-§. Статика аксиомалари

Статиканинг ҳамма теорема ва тенгламалари аксиомалар деб аталадиган бир неча қоидага асосланиб чиқарилади. Статика аксиомалари жисмларнинг мувозанати ва ҳаракати устида ўтказилган кўпдан-кўп кузатиш ва тажрибаларни умумлаштириш натижаси бўлиб, исботсиз қабул қилинади. Бу аксиомалар инсоният практикасида кўп марта тасдиқланган.

Биринчи аксиома. Эркин жисмга қўйилган икки куч модули жиҳатидан бир-бирига тенг бўлиб, умумий таъсир чизиғи бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган ҳолда ва фақат шу ҳолда жисм мувозанатда бўлади. Бундай икки куч ўзаро мувозанатлашади. 3-расмда $F_2 = F_1$, $F_2 = -F_1$ ва $(F_1, F_2) \Longleftrightarrow 0$.

Иккинчи аксиома. Жисмга қўйилган кучлар системас мувозанатлашган кучлар қўшилса ёки ундан олиб ташлан системанинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди. аксиоманинг маъноси қуйидагича. Жисмга кучларнинг маъл бир ($F_1, F_2, \ldots, F_n$) системаси таъсир қилаётган бўлсин А жисмга мувозанатлашган яна иккита F ва F' куч қўйсак, б да пайдо бўлган $n+2$ та кучдан иборат ($F_1, F_2, \ldots, F_n,$ F') система ($F_1, F_2, \ldots, F_n$) га эквивалент бўлади, яъни

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n, F, F') \Longleftrightarrow (F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

Худди шунга ўхшаш, агар берилган ($F_1, F_2, \ldots, F_n$) ку лар системасида мувозанатлашган F_1 ва F_2 кучлар бўлса, икки куч олиб ташлангандан сўнг қолган система аввал (берилган) системага эквивалент бўлади: ($F_1, F_2, \ldots, F_n$)$\Longleftrightarrow$($F_3, F_4, \ldots, F_n$).

Демак, бир-биридан мувозанатлашган кучлар системаси фарқ қиладиган икки система бир-бирига эквивалентдир.

Энди биринчи ва иккинчи аксиомадан келиб чиқадиг натижалар билан танишилади.

1-натижа. Кучнинг қўйилиш нуқтасини унинг таъсир ч зиғи бўйлаб кўчириш мумкин, бунда кучнинг жисмга кўрсат диган таъсири ўзгармайди.

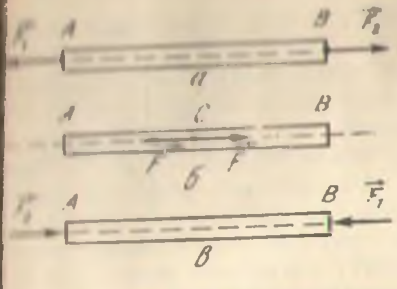
Исботи. Абсолют қаттиқ жисмнинг A нуқтасига F ку қўйилган бўлсин. Мувозанатлашган F_1 ва F_2 кучлар олинад булар F кучнинг таъсир чизиғи бўйлаб йўналган бўлиб, м дули F нинг модулига тенг. Бу иккала куч F кучнинг таъси чизиғида ётган B нуқтага қўйилади (4-расм). У ҳолда

$$F \Longleftrightarrow \{F, (F_1, F_2)\} \text{ ва } F_2 = -F = -F_1.$$

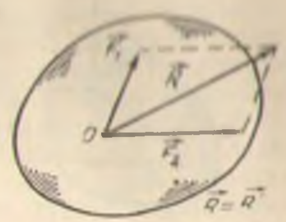
Бироқ биринчи аксиомага биноан, F ва F_2 кучлар мувозанат лашган система ҳисобланади, яъни $(F, F_2) \Longleftrightarrow 0$, иккинч аксиомага асосан эса буларни чиқариб ташлаш мумкин. Қолга F_1 куч F кучга тенг, лекин у B нуқтага қўйилган. Кучнин бу хоссаси кўпинча бундай таърифланади. Қаттиқ жисмга қўйилган куч сирпанувчи вектордир. Бу хулоса фақат абсолют қаттиқ жисмга таъсир этадиган кучлар учунгина ўринли Инженерлик ҳисобларида бирор конструкциянинг мувозанат шартлари аниқланиб, конструкциянинг айрим қисмларида пай до бўладиган ички зўриқишлар изланмайдиган ҳоллардагина бу хулосадан фойдаланиш мумкин. Бу ҳол мисолда тушунти

3-расм.

4-расм.



5-расм.



6-расм.

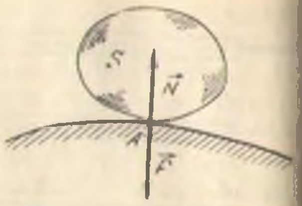
лади. $F_1 = F_2$ бўлганда 5-расмда кўрсатилган AB стержень мувозанатда туради. Иккала кучнинг қўйилиш нуқтаси стер жнинг бирор C нуқтасига кўчирилганда (5-расм, *б*) ёки F_1 кучнинг қўйилиш нуқтаси A нуқтага, F_2 кучнинг қўйилиш нуқтаси B нуқтага кўчирилганда (5-расм, *а*) мувозанат бузилмайди. Бироқ бу ҳолларнинг ҳар барида ички зўриқиш кучлари ҳар хил бўлади. Биринчи ҳолда стержень қўйилган кучлар таъсирида чўзилади, иккинчи ҳолда стержень зўриқмайди (ни ички зўриқиш кучлари пайдо бўлмайди), учинчи ҳолда стержень сиқилади.

2-натижа. Тенг таъсир этувчиси бор кучлар системасигина мувозанатловчи кучга эга бўлади. Унда мувозанатловчи куч тенг таъсир этувчига модул жиҳатидан тенг бўлиб, умумий таъсир чизиғи бўйлаб унга қарама-қарши йўналади.

Учинчи аксиома. Қаттиқ жисмнинг бир нуқтасига қўйилган икки куч ҳамиша тенг таъсир этувчига эга бўлади. Бу тенг таъсир этувчи куч берилган икки кучнинг геометрик йиғиндисига тенг, яъни $R = R' = F_1 + F_2$; тенг таъсир этувчи кучнинг таъсир чизиғи бу кучлар қўйилган нуқтадан ўтади (6-расм), бу ерда R' — геометрик йиғинди. Бу аксиомадан унга тескари даъво ҳам келиб чиқади: кучни унинг таъсир чизиғида жойлашган ихтиёрий нуқтага қўйилган икки кучга истаганча кўп усул билан ажратиш мумкиң. Кучни иккига ажратганда ҳосил бўлган ташкил этувчи кучлар ажралаётган кучнинг таъсир этиш чизиғидан ўтадиган ихтиёрий битта текисликда ётади. Бундаң буён кучларнинг геометрик йиғиндиси билан тенг таъсир этувчисини бир-биридан фарқ қилиш керак. Бу мисолда тушунтириб ўтиладн. Жисмга A ва B нуқталарда қўйилган F_1 ва F_2 кучларни (7-расм) кўриб чиқамиз. Бу икки куч ўзаро перпендикуляр бўлиб, учрашмас тўғри чизиқлар бўйлаб йўналган. 7-расмда кўрсатилган R' куч F_1 ва F_2 кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бироқ R' куч бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўла олмайди, чунки R' кучнинг бир ўзи F_1 ва F_2 кучларнинг жисмга кўрсатадиган таъсирининг ўрнини боса олмайди. Бунинг устига, бу икки куч умуман тенг таъсир этувчига эга эмас (40-§, 5-бандга қаранг).

Тўртинчи аксиома. Ҳар қандай таъсирга жавобан унга тенг

7- расм.



8- расм.

ва қарама-қарши йўналган акс таъсир юзага келади. Бу акс ома икки жисмнинг ўзаро таъсир кучлари модул жиҳатид тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонлар йўналганлигини билдиради.

S жисм A нуқтада бошқа бир жисмга $\boldsymbol{P}$ куч билан бося ти, деб фараз қилайлик (8- расм). Ўз навбатида пастда жисм ҳам A нуқтада S жисмга N куч билан таъсир кўрсат ди. Бу кучларнинг сон қиймати тенг, йўналишлари қарам қарши, бироқ улар бошқа-бошқа жисмларга қўйилган. Бит геометрик A нуқтада икки моддий нуқта устма-уст тушганде бўлиб туюлади: аслида эса бу нуқталардан бири жисмларда бирига, иккинчиси бошқасига тегишли. Шунинг учун таъси кучи билан акс таъсир кучи нолга эквивалент бўлган систем бўла олмайди. Бу кучларга статиканинг биринчи аксиомасин қўллаб бўлмайди, чунки улар бошқа-бошқа жисмларга қўйил ган.

Бешинчи аксиома. Қаттиқ бўлмаган (деформацияланади ган) жисм кучлар таъсирида мувозанатда бўлса, қотганда кейин ҳам мувозанатда қолаверади.

Бу аксиома абсолют қаттиқ жисмга қўйилган кучларнин мувозанат шартлари деформацияланадиган жисмлар учун ҳам бажарилишини кўрсатади. Бироқ кучлар деформацияланадиган жисмга қўйилган ҳолда бу шартлар зарурий бўлиб, амм етарли эмас. Масалан, 5- расмда кўрсатилган қаттиқ стержен нинг учларига қўйилган икки куч мувозанатда бўлиши учун бу кучлар модул жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналиши керак. Агар AB стержень ўрнида AB ип олинса, ипга қўйилган бу икки куч ҳам ўша мувозанат шартини қаноатлантиради, яъни кучлар модул жи-ҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томон-ларга йўналган ва бундай бўлиши учун яна бир қўшимча шарт бажарилиши керак: кучлар ипни сиқадиган эмас, балки чўзадиган бўлиши керак.

4- §. Боғланишлар ва боғланиш реакциялари

Бошқа жисмлар билан бирикмаган ва фазода ҳар қандай йўналиш бўйлаб ўз вазиятидан четга чиқа оладиган жисм *эркин жисм* дейилади. Ўзига боғланган ёки ўзига тегиб тур-

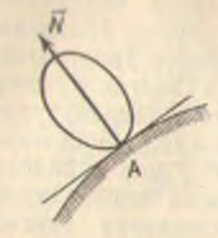
ги бошқа жисмлар фазода қиладиган ҳаракатини чеклайди-ган жисм *эркин бўлмаган жисм* дейилади. Эркин бўлмаган жисмларга стол устида ётган юк, ошиқ-мошиққа ўрнатилган эшик ва шу кабилар мисол бўлади. Жисмга қўйилган кучлар ҳар қандай бўлганида ҳам жисмнинг кўчишини чеклаб тура-диган бошқа жисмлар механикада *боғланишлар* дейилади. Жисмга қўйилган боғланишлар жисмни унинг ўзига қўйилган кучлар таъсири остида қилиши мумкин бўлган ҳаракатидан чеклаштиради. Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсир кучи *боғланиш реакцияси* (тўлароқ қилиб айтганда, реакция кучи) дейилади. Жисмга таъсир этувчи ҳамма кучларни икки гуруҳга: актив кучлар (булар оғирлик кучи, сиқилган ёки чўзилган пружинанинг эластиклик кучи ва ҳоказо) ва боғла-нишлар реакция кучларига ажратиш мумкин. Боғланишлар реакция кучларидан бошқа ҳамма кучларни актив кучлар деб аталиши керак. Актив куч, масалан, оғирлик кучи эркин жисмни ҳаракатга келтира олади. Ҳар бир актив кучнинг мо-дули ва йўналиши олдиндан маълум бўлади. Актив кучлар жисмга қўйилган бошқа кучларга, бу жисмнинг ҳаракатига ва унга қўйилган боғланишларнинг қандай эканига бевосита боғлиқ бўлмайди. Боғланишлар реакциялари эса жисмга қў-йилган актив кучларнинг таъсирига, бу жисмнинг ҳаракатига ва унга қўйилган боғланишларнинг қандай эканига боғлиқ.

Боғланишдаги жисм актив кучлар таъсири остида бу боғ-ланишларга босим кўрсатган вақтдагина реакция кучлари пайдо бўлади. Жисм боғланишлардан бўшатилган ҳамона боғ-ланишлар реакциялари жисмга таъсир қилмай қўяди.

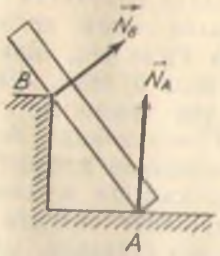
Боғланиш жисмни қайси томонга кўчишга йўл қўймаса, реакция кучи ўша томонга қарама-қарши йўналади. Статика-дан масала ечишда боғланиш реакциясининг йўналишини тўғри топиш катта аҳамиятга эга. Шу сабабли боғланишлар асосий турларининг реакция кучлари қандай йўналганлигини батаф-сил кўриб чиқамиз.

1. **Қўзғалмас силлиқ текислик (сирт) ёки таянч.** Ишқала-ниш эътиборга олинмайдиган даражада силлиқ бўлган сирт одатда силлиқ сирт ҳисобланади. Жисм қўзғалмас силлиқ сиртга A нуқтада таяниб турган бўлсин (9-расм); у ҳолда таянч сиртнинг реакцияси жисмга A нуқтада қўйилган бў-либ, у таянч сиртга шу нуқтада ўтказилган ички нормал бўйлаб йўналади, чунки бу сирт жисмнинг фақат ўша нормал бўйлаб кўчишига йўл қўймайди. Бу реакция кучи *нормал реакция* деб аталади ва одатда у N ҳарфи билан белгилана-ди. Бир-бирига тегиб турувчи сиртлардан бири нуқта бўлган-да (10-расм) реакция кучи иккинчи сиртга ўтказилган нормал бўйлаб йўналади.

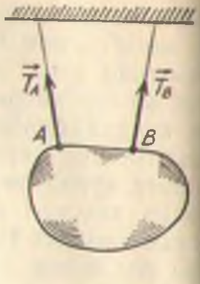
2. **Эгилувчан ип.** Бу боғланиш реакцияси жисмга унинг ипга боғланган нуқтасида қўйилган бўлиб, ип бўйлаб йўнала-ди (11-расм). Шунинг учун таранглашган ипнинг T_A ёки T_B реакцияси ип бўйлаб осилиш нуқтасига қараб йўналади.



9- расм.



10- расм.

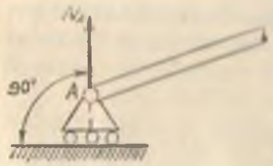


11- расм.

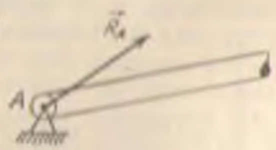
3. Қўзғалувчи шарнир. Бу боғланиш (12- расм) балканинг таянч юзасига перпендикуляр йўналишда пастга кўчишига йўл қўймайди, катокларнинг таянч юзасига ишқаланиши эътиборга олинмаса, қўзғалувчи шарнирнинг N_A реакцияси таянч юзасига перпендикуляр бўлиб, шарнирнинг марказидан ўтади.

4. Қўзғалмас цилиндрик шарнир. Цилиндрик шарнир — бирор заминга қўзғалмайдиган қилиб ўрнатилган болтга кийдирилган втулка (13- расм); эшикнинг ошиқ-мошиғи бунга энг яхши мисол бўла олади. Цилиндрик шарнир жисмларни бир-бирига бириктириб, уларнинг бир-бирига нисбатан айланишига имкон берадиган қурилмадир. Болтнинг сирти билан втулканинг ички юзаси орасида ишқаланиш йўқ деб ҳисобланса, бу шарнир идеал қўзғалмас цилиндрик шарнир ҳисобланади. Актив кучлар ҳар қандай бўлганда ҳам қўзғалмас цилиндрик шарнирнинг реакция кучи шарнирнинг ўқига (бу ўқ расм текислигига тик) перпендикуляр бўлган текисликда ётиб, шу ўқдан ўтади, лекин унинг йўналиши олдиндан маълум бўлмайди. Подпятник деб аталадиган боғланиш цилиндрик шарнирнинг худди ўзи бўлиб, жисмнинг цилиндр ўқи бўйлаб фақат бир томонга ҳаракатланишига имкон бериб, бунга тескари йўналишда ҳаракатланишига йўл қўймайди. Шунинг учун подпятник реакциясининг йўналиши ҳам олдиндан маълум эмас.

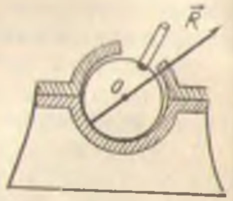
5. Сферик шарнир. Сферик шарнир деган бир-бирига бир нуқтасидан бириктирилган жисмларнинг фазода бир-бирига нисбатан ҳаракатланишига имкон берадиган қурилмадир. Сферик шарнир бир жисмдаги сферик [illegible] ўқурча билан иккинчи жисмдаги [illegible] ўшандай диаметрли сферик [illegible] иборат (14- расм).



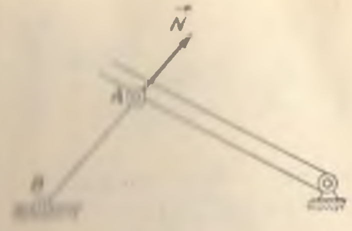
12- расм.



13- расм.



14- расм.



15- расм.

Бундай шарнирда ҳам [illegible] сиртлар орасида ишқаланиш йўқ деб ҳисобланади. [illegible] стерженнинг асосга қўйилганда [illegible] шарнирлар бунга яхши мисол бўла олади. Сферик шарнирда [illegible] кучлар ўзгаришида таянч реакцияси ўзгериб бир текис[illegible] фазода ҳар қандай йўналиш олиши мумкин. Бундай жисм шарнирнинг O марказида қимирламай [illegible], шунга қараб сферик шарнирнинг реакцияси [illegible] қўзғалмас O нуқтадан ўтадиган ҳар қандай тўғри чизиқ бўйлаб йўналади. Демак, сферик шарнир реакциясининг йўналиши, худди цилиндрик шарнирники каби, олдиндан маълум эмас.

6. Стержень. Боғланиш ўрнида ишлатилган ингичка тўғри [illegible] стерженнинг (15- расм) учларида идеал шарнирлар [illegible] бўлиб, кучлар ҳам стерженнинг фақат учларига қўйилса, N реакция кучи стержень бўйлаб йўналади. Буни мисолда кўриб чиқамиз. Стерженнинг оғирлиги унга тушаётган кучларга нисбатан эътиборга олинмайди. Унда AB стерженга A ва B шарнирларга қўйилган фақат икки куч таъсир қилади. Умуман [illegible], бу икки куч ихтиёрий йўналган бўлиши мумкин. Маълумки, AB стержень мувозанатда турар экан, A ва B нуқталарга қўйилган икки куч 1- аксиомага асосан, бир тўғри чизиқ бўйлаб, яъни стерженнинг ўқи бўйлаб (15- расм) йўналиши керак. Демак, бу стержень фақат сиқилади ёки чўзилади, шунинг учун унинг N реакцияси стерженнинг ўқи бўйлаб йўналади.

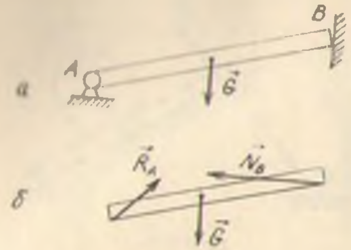
Боғланишнинг бу тури фермаларда таянч стержени сифатида кўп учрайди.

Боғланишларнинг бошқа турлари ҳам бор. Бу ҳақда кейин тўхталиб ўтамиз (37- §, 38- §).

5- §. Боғланишлар аксиомаси

Эркин бўлмаган жисмларнинг мувозанати статикада шу аксиома асосида ўрганилади. Агар эркин бўлмаган жисм боғланишлардан бўшатилиб, боғланишлар таъсири улар реакцияси билан алмаштирилса, уни эркин жисм деб ҳисоблаш мумкин. Бу қоида боғланишлар аксиомаси ёки боғланишдан бўшатиш принципи деб аталади. Масалан, оғирлиги G бўлган AB тўсиннинг бир учи қўзғалмас цилиндрик A шарнирга бириктирилиб, иккинчи учи силлиқ вертикал деворга тираб қўйилган (16- расм, a). Бу тўсинни берилган G куч ва боғла-

2—2170



16- расм.

нишларининг R_A ва N_B реакц кучлари таъсирида мувозанат турган эркин жисм (16- расм, *б*) д ҳисоблаш мумкин.

Боғланиш реакцияси ҳисобл топилганда тўртинчи аксиомага ас сан, боғланишга кўрсатиладиган б сим кучини, яъни иншоот бир қисмининг мустаҳкамлигини ҳисо лаш учун зарур маълумотга э бўламиз.

2-боб. КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

6-§. Тенг таъсир этувчини аниқлашнинг геометрик усули

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучлар *кеси шувчи кучлар системаси* дейилади. Бу системанинг фазод ва бир текисликда жойлашган хили бўлади. Кучларнинг бу дай системасида статиканинг биринчи масаласи ечилади, яъ кучлар системаси содда ҳолга келтирилади. Кучнинг қўйили нуқтасини унинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчириш мумкин бў гани учун (1- ва 2- аксиомадан келиб чиқадиган 1- натижа асосан) кесишувчи кучларни бир нуқтага, яъни кучларни таъсир чизиқлари кесишадиган нуқтага қўйилган кучлар сис темасига алмаштириш мумкин.

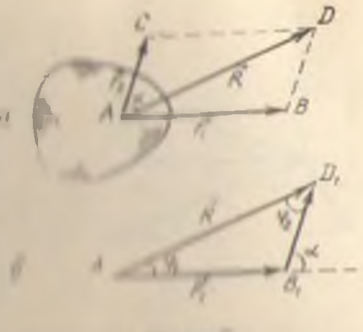
Икки ёки бир неча кучни қўшиш деганда бу кучларн уларга эквивалент бўлган битта куч билан алмаштириш, бош қача айтганда, бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топи тушунилади.

Ишни аввало икки кучни қўшишдан бошлаймиз. Қатти жисмнинг бир нуқтасига қўйилган икки кучни қўшиш маса ласи статиканинг учинчи аксиомасига асосланиб ҳал қилина ди. Бир-бири билан бирор бурчак ҳосил қилиб йўналган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси мана шу кучлардан тузилга параллелограммнинг диагоналига модул жиҳатдан тенг бўлиб ўша диагональ бўйлаб йўналади. Тенг таъсир этувчи ку ҳам қўшилувчи кучлар қўйилган нуқтага қўйилади. Бирор векторлар ҳисобидан маълум бўлишича, икки кучни учбурчак қоидасига асосланиб қўшиш ҳам мумкин. Бунинг учун қўши лувчи кучлардан бирининг охирига иккинчи кучнинг боши қўйилади; биринчи кучнинг бошини иккинчи кучнинг охири билан туташтирувчи куч бу икки кучнинг тенг таъсир этув чиси бўлади.

Жисмнинг A нуқтасига қўйилган F_1 ва F_2 кучлар орасида ги бурчак α билан белгиланади.

Берилган F_1 ва F_2 кучларнинг тенг таъсир этувчисини

аниқлаш учун уларни параллелограмм асосида (17- расм, *а*) ёки кучлар учбурчаги қоидасига биноан қўшилади. Бунинг учун ихтиёрий A_1 нуқтага F_1 кучни қўйиб (17- расм, *б*), унинг охирига F_2 кучнинг бошини қўйилади. F_1 кучнинг бошини F_2 кучнинг охири билан туташтириб турган куч тенг таъсир этувчи бўлади, R билан белгиланган. Бу учбурчак куч учбурчаги деб аталади. R куч билан бу кучлар орасида ҳосил бўлган бурчаклар мос равишда φ_1 ва φ_2 билан белгиланади.



17- расм.

Тенг таъсир этувчининг модули $A_1B_1D_1$ учбурчакнинг A_1D_1 томонини косинуслар теоремасидан аниқланади:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - \alpha) \text{ ёки}$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha,$$

бундан

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}, \qquad (1)$$

бу формулада учинчи ҳад олдида + ишора туришига $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ тенглик таъсир қилган. Тенг таъсир этувчининг йўналишини, яъни у билан F_1 ва F_2 кучлар орасида ҳосил бўлган φ_1 ва φ_2 бурчакларни топиш учун ўша учбурчакка синуслар теоремаси татбиқ этилади, яъни F_1 томоннинг ўша томон қаршисидаги φ_2 бурчак синусига нисбати, F_2 томоннинг ўша томон қаршисидаги φ_1 бурчак синусига нисбати, шунингдек R томоннинг ўша томон қаршисидаги $180^\circ - \alpha$ бурчак синусига нисбати бир-бирига тенг:

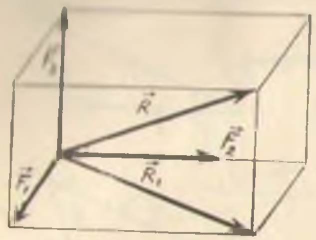
$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} \text{ ёки } \frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin\alpha};$$

бу ерда $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ формуласи ҳисобга олинди, юқоридаги икки тенгламадан φ_1 ва φ_2 бурчаклар аниқланади.

$$\sin\varphi_1 = \frac{F_2\sin\alpha}{R}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{F_1\sin\alpha}{R}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) формулалар ўзаро α бурчак ҳосил қилган F_1 ва F_2 кучлар тенг таъсир этувчисининг модули ҳамда йўналишини топишга имкон беради.

Жисмнинг бир нуқтасига қўйилган бўлиб, лекин бир текисликда ётмайдиган учта F_1, F_2, F_3 кучни қўшиш билан танишиб чиқамиз (18- расм). Параллелограмм ёки учбурчак қоидасига асосан F_1 куч билан F_2 кучни қўшиб, уларнинг R_1 тенг таъсир этувчиси аниқланади. Сўнгра R_1 куч билан F_3



18- расм.

кучни яна ўша қоидага асосан [...] шиб, берилган учта F_1, F_2, F_3 к[...] нинг тенг таъсир этувчиси аниқ[...] нади. 18- расмдан кўринишича, [...] нуқтага қўйилган ва бир текис[...] да ётмайдиган учта кучнинг т[...] таъсир этувчиси ўша учта куч[...] ясалган параллелепипеднинг диа[...] налига модули ва йўналиши жи[...] тидан тенг (параллелепипед қ[...] даси).

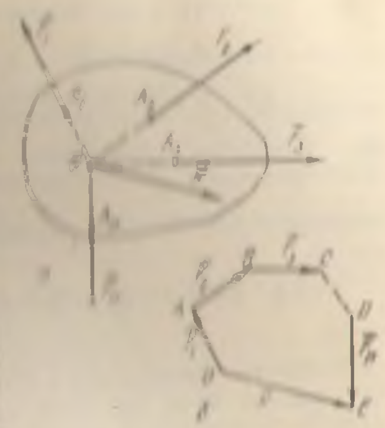
Энди абсолют қаттиқ жисмга фазода жойлашган кесиш[...] чи кучларнинг (F_1, F_2, . . . , F_n) системаси қўйилган ҳол бил[...] танишиб чиқамиз (19- расм, *а*).

Бу кучларга параллелограмм қоидаси ёки учбурчак қо[...] дасини кетма-кет татбиқ этиб, уларнинг тенг таъсир этувчи[...] аниқланади. Учбурчак қоидаси қулайроқ. Бунинг учун танл[...] олинган масштабда F_1 кучни тасвирлайдиган $\overrightarrow{OA}$ вектор (1[...] расм, *б*) ихтиёрий O' нуқтага қўйилади. A нуқтага эса [...] кучни тасвирлайдиган $\overrightarrow{AB}$ вектор қўйилади ва ҳоказо. Ку[...] ларни шу тариқа бирин-кетин қўйиб бориб, энг охирги [...] кучни тасвирлайдиган $\overrightarrow{DE}$ вектор D нуқтага қўйилади, шун[...] O' нуқта билан E нуқтани туташтирувчи $\overrightarrow{O'E}$ вектор кучл[...] системасининг тенг таъсир этувчисини тасвирлайди. Дема[...] кесишувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси фаз[...] вий $O'ABCDE$ синиқ чизиқнинг бошланғич ва охирги нукт[...] ларини туташтирувчи $\overrightarrow{O'E}$ вектор билан, бошқача қилиб айт[...] ганда, бу фазовий синиқ чизиқнинг ёпувчи томони бил[...] тасвирланади. Тенг таъсир этувчининг модули ва йўналишин[...] аниқлайдиган бу қоида *куч кўпбурчак қоидаси* деб, фазови[...] $O'ABCDE$ синиқ чизиқ *куч кўпбурчаги* деб аталади. Кучлар[...] ни куч кўпбурчаги қоидаси билан қўшиш *геометрик қўшиш* деб аталади. Демак, кесишувчи кучлар системасининг R тен[...] таъсир этувчиси модул ва йўналиш жиҳатидан кучларнин[...] геометрик йиғиндисига тенг бўлиб,

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \qquad R = \sum_{k=1}^{n} F_k \qquad (3)$$

шаклида ёзилади, бу ерда $\sum_{k=1}^{n}$ белги ундан ўнг томонда тур[...] ган ва $k = 1$ дан $k = n$ гача бўлган барча натурал сонлар билан белгиланган кучларнинг йиғиндисини билдиради. Бундан буён осон бўлиши учун йиғинди олиш чегараларини кўрсатмасдан бу белги кўринишида ёзилади. Кучларнинг геометрик йиғиндиси *бош вектор* деб аталади. Шунга қараб кесишувчи

[illegible] системасининг тенг таъ[...] этувчиси бу кучлар[...] бош [...]торига тенг ва кучларнинг [...]нинг нуқтасига қўйилган деб [...] олиш мумкин (19- расм, *а*). [illegible] кесишувчи кучлар систе[...] [illegible] тенг таъ[...] этувчининг таъсир чизиғи [...] бу кучларнинг таъсир ча[...] [...]лари ётган текисликда ёти[...] [...] эса тутиш керак. Кучлар [...] жойлашган ҳолда [...]ч кўпбурчаги ўша текисликда [...] ва кучлар маълум бир [...] олиб чизилади. Тенг [...]сир этувчи бевосита чизмадан [...] топилади. Бу усул *график* [...]ул деб аталади.



19- расм.

[...] куч кўпбурчаги қоидасини айни бир тўғри чизиқ бўйлаб [...] нечта кучларга татбиқ этиб, тенг таъсир этув[...] [...] модули кучларнинг алгебраик йиғиндисининг моду[...] [...] тенг экани аниқланади: бунда бир томонга йўналган [...] *мусбат кучлар*, унга тескари томонга йўналган куч[...] *манфий кучлар* деб аталади. Алгебраик йиғиндининг [...] тенг таъсир этувчи кучнинг бу тўғри чизиқда қайси [...] қараб йўналганини кўрсатади. Модуллари тенг ва [...] тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган, [...] мувозанатланган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси [...] тенг.

Кесишувчи кучларни қўшиш қоидасини татбиқ этишга бир[...] [...] мисол келтирамиз.

1- масала. Бири 3 Н, иккинчиси 4 Н бўлган икки кучнинг [...] таъсир этувчисининг сон қиймати 5 Н бўлса, бу кучлар [...] орасидаги φ бурчак нимага тенг?

Ечиш. Кучларни белгилаб оламиз: $F_1 = 3$Н, $F_2 = 4$Н, тенг таъсир этувчи $R = 5$ Н. Тенг таъсир этувчининг модулини ифодалайдиган $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$ формулага [...] маълум миқдорларни қўямиз: $5 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos\varphi}$, бу тенгламадан $\cos\varphi$ ни топамиз, бунинг учун тенгламанинг икки томонини квадратга кўтарамиз: $25 = 9 + 16 + 24\cos\varphi$ ёки $\cos\varphi = 0$, бундан $\varphi = 90°$ эканини топамиз.

2- масала. Икки куч орасидаги бурчак 135° бўлиб, тенг таъсир этувчи куч бу кучларнинг кичигига тенг. Шу кучларнинг нисбати аниқлансин.

Ечиш. $F_1 < F_2$ деб оламиз. $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$ формулада R ўрнига F_1 ни қўямиз, $F_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2}$

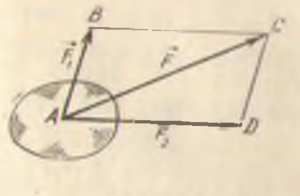
... тенглама ҳосил бўлади, бунинг иккала томонини ...ратга кўтариб, $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ эканини ҳис... ...сак, $F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади, ...ган номаълум кучларнинг изланаётган нисбати аниқла... тенгламанинг $F_2 = 0$ биринчи илдизи масала шартини қа... ...ондирмайди. Иккинчи илдизи $F_2 = F_1\sqrt{2}$. Бундан $\frac{F_1}{F_2} = ...$

7-§. Кучни бир нуқтада кесишувчи тузувчиларга ажратиш

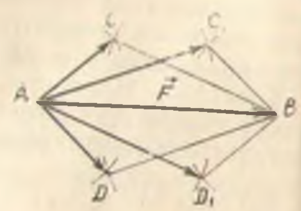
Олдинги параграфда кўриб ўтилган масалага тескари ...ган масала аниқ бир кучни икки ёки бир неча кесишу... тузувчига ажратишдир. Кучни кесишувчи тузувчиларга аж... тиш (баъзан компонентларга ажратиш) деганда бу к... эквивалент бўлган икки ёки бир неча кесишувчи кучдан ...рат системани топиш тушунилади. Бу масала ноаниқ бў... чексиз кўп ечимга эга; у чинакам ягона ечимга эга бўл... учун қўшимча шарт берилган бўлиши керак. Бу масалан... ечилиш турлари кўп бўлса-да, лекин унинг уч турини кў... чиқамиз:

1) берилган F кучни у билан бир текисликда ётади... аниқ икки йўналиш бўйлаб йўналган тузувчиларга ажрат... Бунинг учун F кучнинг охиридан берилган йўналишла... яъни AB ва AD тўғри чизиқларга параллел чизиқлар ўтка... миз (20-расм). Бунда ҳосил бўлган параллелограммнинг том... ларини тасвирловчи F_1 ва F_2 кучлар изланаётган тузувчил... бўлади, чунки $F_1 + F_2 = F$;

2) берилган F кучни у билан бир текисликда ётадиган сон қийматлари маълум бўлган икки тузувчига ажратиш. ... кучнинг A боши ва B охирини марказ қилиб (21-расм), ... диуслари F_1 ва F_2 нинг берилган қийматларига маълум мас... табда тенг бўлган икки ёй ўтказилади. Бу ёйлар C ва ... нуқталарда кесишади. ACB ва ADB учбурчакларни парал... лограмм қилиб тўлдирамиз, буларда F куч диагонал бўлад... $\vec{AC}$ ва $\vec{AE}$ ёки $\vec{AD}$ ва $\vec{AK}$ векторлар кучнинг изланаётган т... зувчилари бўлади. Демак, айлана ёйларининг икки кесиши...



20-расм.



21-расм.

...ларга (C ва D га) мос равишда масала икки ечимга эга;

...) берилган F кучни бир текисликда ётмайдиган тайинли... йўналиш бўйлаб (масалан, ўзаро перпендикуляр бўлган ... уқ бўйлаб) йўналган кесишувчи тузувчиларга ажратиш. ...нинг учун диагонали берилган кучни тасвирлайдиган, қир... ...ри эса шу ... йўналишларда ётган параллелепипед ... кифоя. Бунда параллелепипеднинг қирралари изланаёт... тузувчилар масштабда тасвирланган бўлар эди. Пировар... ...а кучни тасвирлаб ўтиш керакки, берилган кучни у билан ... текисликда ётмайдиган икки тузувчига ажратиб бўлмай...

Берилган кучни тузувчиларга ажратишга ва статика масалаларини ечишда бу усулни қўллашга бир неча мисол келтирамиз.

...-масала. R кучни орасидаги бурчак 120° га тенг бўлган ... P ва Q кучларга ажратиш керакки, уларнинг сон қийматлари йиғиндиси S га тенг бўлсин.

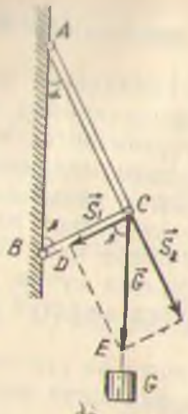
Ечиш. Бу масалада изланаётган P ва Q тузувчиларнинг йўналиши кўрсатилган ва улар орасидаги бурчак берилган. ...дан ташқари, компонентларнинг сон қийматлари истаганча ...май, балки улар ҳам маълум бир шартга бўйсунади. Масаланинг шартида $P + Q = R$ ва $P + Q = S$ шартлардан фойдаланамиз. Берилган R куч тузувчиларнинг тенг таъсир этувчиси бўлгани учун унинг модулини (1) формулага асосан $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 120^\circ}$ кўринишда ёки, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0{,}5$ эканини ҳисобга олиб, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - PQ}$ кўринишда ёзамиз. Бу тенгламага $P + Q = S$ шартни қўшиб, ...кала тенгламани ечамиз. Тенгламалар системасининг ечими

$$P = \frac{1}{6}\left(3S + \sqrt{12R^2 - 3S^2}\right), \quad Q = \frac{1}{6}\left(3S - \sqrt{12R^2 - 3S^2}\right).$$

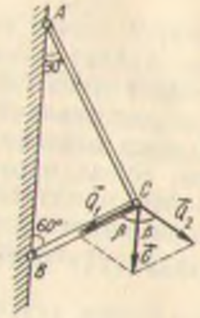
...у ечим изланаётган тузувчиларнинг сон қийматлари бўлади. ...у масала иккинчи ҳолга тўғри келади.

4-масала. AC ва BC стерженлар бир-бирига ва вертикал ...ворга идеал шарнирлар билан бириктирилган (22-расм). C ...арнирга оғирлиги G бўлган юк осилган. Расмда кўрсатилган ... ва β бурчаклар мос равишда 30° ва 60° га тенг. Стерженларнинг оғирлиги эътиборга олинмайди. BC стерженни сиқув... ...и куч топилсин.

Ечиш. G куч иккала стерженга таъсир кўрсатади. Стерженларнинг оғирлиги ҳисобга олинмаган ва куч уларнинг ...фақат учига қўйилган бўлгани учун старженларнинг реакция... ...ри стерженлар бўйлаб йўналади. Шу сабабли изланаётган ...кучни топиш учун юкнинг оғирлик марказига қўйилган G ...кучни 1- ва 2-аксиомадан келиб чиқадиган натижага кўра C ...нуқтага кўчириб, уни AC ва CB йўналишлар бўйлаб тузувчи... ...ларга ажратамиз. CB бўйлаб йўналган S_1 тузувчи изланаётган



22- расм.



23- расм.

24- расм.

куч бўлади. CDE учбурчак $s_1 = G\cos\beta = \cos 60° = 0{,}5G$ з нини топамиз. Расмдан кўри турганидек, бу йўналишлар о сидаги бурчак $90°$ га тенг, ч ки $\angle ACB = 90°$.

Пировардида бундай маса ларни ечишда берилган ку нима сабабдан албатта боғланиш реакциялари бўйлаб йўна тириш керак эканлиги кўрсатилади. Бунинг учун C нукта қўйилган G куч (23- расм) BC стержень бўйлаб ва у бил $120°$ бурчак ҳосил қиладиган йўналиш бўйлаб тузувчилар ажратилади. 23- расмдаги параллелограммнинг ҳар бир ярм синуслар теоремасини татбиқ этиб, Q_1 ва Q_2 тузувчилар ани ланади: $Q_1 = Q_2 = G$.

G куч тузувчиларга тўғри ажратилди, бироқ Q_1 куч B стерженни сиқаётган кучни тулиқ ифодаламайди, чунки кучнинг таъсирини AC стержень ўзига тулиқ олмайди. Ш нинг учун Q_2 куч иккала стерженга таъсир қилиб, BC сте женга Q_1 кучдан ташқари қўшимча босим беради.

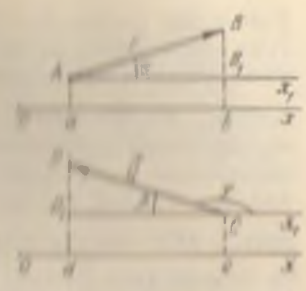
Мисолдан маълумки, агар куч боғланиш реакцияларини йўналишидан бошқа йўналишлар бўйлаб ажратилса, масал нинг ечими хато бўлади.

7- §. га доир масалалар. Оғирлиги $G = 10$ кН бўлган жис қия текислик устида ётибди. Қия текислик горизонт била $\alpha = 30°$ бурчак ҳосил қилган. Оғирлик кучини қия текисли бўйлаб йўналган ва унга тик йўналган икки тузувчига ажра синг. Жавоб: 5 кН; 8,66 кН.

24- расмда кўрсатилган вазиятда турган AB шатун криво шипнинг A нуқтадаги болтга $F = 200$ кН куч билан таъси қилади. Бу кучни A нуқтада горизонтал ва вертикал йўна ган икки тузувчига ажратинг. Жавоб: 187,2 кН; 70,8 кН.

Олдинги масалада тилга олинган $F = 200$ кН кучни меха

[illegible] вазиятда кривошип [illegible] йўналган ва унга тик йўнал[illegible] икки тузувчига ажратинг. Жавоб: [illegible] кН; 182,4 кН.



25- расм.

8- §. Кучнинг ўқдаги проекцияси

Жисмга қўйилган F куч $\overline{AB}$ [illegible] (25- расм, a), [illegible] мусбат йўналиши x қар[illegible] томонга қараб олинган, [illegible] учларига стрелка қўйилмайди. [illegible] бир текисликда ётади. F кучнинг A боши ва B [illegible] x ўққа Aa ва Bb перпендикулярлар ўтказилади. [illegible] ҳосил бўлган ab кесма F кучнинг x ўқдаги проек[illegible] деб аталади. Кучнинг ўқдаги проекцияси скаляр миқ[illegible] бўлиб, у кучнинг боши ва охирининг ўқдаги проек[illegible] орасида плюс ёки минус ишора билан олинган кес[illegible] тенг. Кучнинг ўқдаги проекцияси куч белгиланган ўша [illegible] билан белгиланиб, пастки қисмига ўқнинг номини бил[illegible] индекс қўйилади, масалан, F_x. Агар куч ўқнинг [illegible] томонига қараб йўналган бўлса (25- расм, a), проекция [illegible] бўлади: $F_x = ab$.

[illegible] жисмга D нуқтада таъсир этадиган Q кучнинг проек[illegible] кўриб чиқамиз (25- расм, $б$). Q кучнинг боши ва [illegible] x ўққа Cc ва Dd перпендикулярлар ўтказилади. Бу [illegible] x ўқда ҳосил бўлган cd кесма Q кучнинг проекцияси [illegible], унинг ишораси манфий қилиб олинади; $Q_x = -cd$. [illegible] бир кучнинг бир хил йўналган параллел ўқлардаги [illegible] проекцияси тенг бўлади. F ва Q кучларнинг проекцияси ус[illegible] айтилган гапларни формула шаклида ёзамиз:

$$F_x = ab = AB_1 = AB\cos\alpha \quad \text{ва} \quad Q_x = -cd = -CD_1 = -CD\cos\beta$$

[illegible]ларда AB кесма F кучнинг модулини, CD кесма Q кучнинг модулини билдиради. Шунинг учун проекциялар бундай ёзи[illegible]:

$$F_x = F\cos\alpha \quad \text{ва} \quad Q_x = -Q\cos\beta = Q\cos\varphi. \qquad (4)$$

β бурчак φ бурчакни $180°$ га тўлдирувчи бурчак бўлгани учун охирги формулада $\cos\beta$ ўрнига унга тенг бўлган $-\cos\varphi$ қўйилди. Кучларнинг ўқдаги проекцияларининг ифодасига қараб, кучнинг ўқдаги проекцияси кучнинг модули билан куч ва ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг деган хулосага келинади. Куч ўққа тик йўналган бўлса, проекцияси нолга тенг, чунки $\cos 90° = 0$.

9- §. Кучнинг текисликдаги проекцияси

Қўлланиладиган координата системалари ўнг система (26- расм) дейилади. Бу системадаги z ўқи учидан қаралганда x

Ғқини иш қисқа йўл билан y ўқи устига тушириш учу соат стрелкаси ҳаракатига тескари буриш керак. Ку текисликдаги проекцияси унинг ўқдаги проекциясидан ф

Ұлароқ, вектор бўлиб, текисликда маълум йўналишга эг вектор билан тасвирланган F кучни текисликка, масалан, текисликка проекциялаш учун кучнинг A боши ва B о лан текисликка Aa ва Bb перпендикулярлар туширилади расм). xOy текисликда ётган $\vec{ab}$ вектор кучнинг текисли ги проекцияси бўлиб, у $F_{xy}=\vec{ab}$ шаклида ёзилади. Бу пр циянинг модули куч модули билан куч ва текислик орв ги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг: $F_{xy}=F\cos\alpha$. кучнинг ўқлардаги проекциясини ҳисоблаш керак бўлса вало бу куч текисликка проекцияланади, сўнгра текисли ги проекция ўша текисликда ётган ўқларга проекциялан 16-расмда xOy текисликдаги проекция x ва y ўқла проекцияланган: F_{xy} проекциянинг x ўқи билан ҳосил қи бурчаги φ бўлгани учун F_x проекция F_{xy} билан $\cos\varphi$ кўпайтмасига, худди шунга ўхшаш, F_y проекция, F_{xy} б $\cos(90^\circ-\varphi)$ нинг кўпайтмасига тенг:

$$F_x=F_{xy}\cos\varphi,$$
$$F_y=F_{xy}\cos(90^\circ-\varphi).$$

F_{xy} ўрнига унинг $F\cos\alpha$ қиймати қўйилади ва $\cos(90 -\varphi)=\sin\varphi$ экани ҳисобга олинади:

$$F_x=F\cos\alpha\cos\varphi,$$
$$F_y=F\cos\alpha\sin\varphi.$$

10-§. Кучларни ифодалашнинг аналитик усули

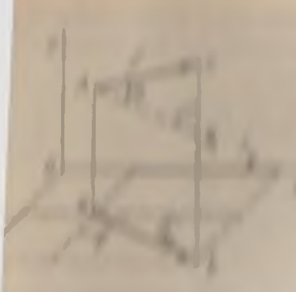
Кучнинг F модули ва координата ўқлари билан ҳосил қил α, β, γ бурчаклари маълум бўлса, F куч векторини чизма тасвирлаш мумкин. Куч қўйилган A нуқта, яъни унинг ко динаталари қўшимча равишда берилган бўлиши керак.

Статикада масала ечишда кучни проекциялари орқа ифодалаш қулай. Энди кучнинг тўғри бурчакли Декарт коо дината ўқларидаги проекциялари маълум бўлганда F к тасвири билан танишамиз. Бунинг учун 7-§ даги (4) форм лалардан фойдаланилади:

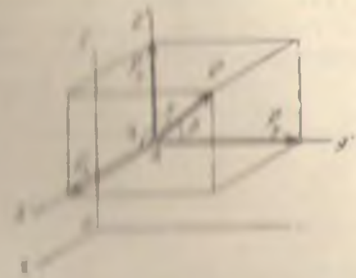
$$F_x=F\cos\alpha,\quad F_y=F\cos\beta,\quad F_z=F\cos\gamma.$$

Бу тенгликлар ҳадма-ҳад квадратга кўтарилиб, кейин қўш лади: $F_x^2+F_y^2+F_z^2=F^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$. Бу ерда қа ичидаги йиғинди 1 га тенг. Натижада кучнинг F модули йўналтирувчи косинуслар аниқланади:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2},\quad \cos\alpha=\frac{F_x}{F},$$
$$\cos\beta=\frac{F_y}{F},\quad \cos\gamma=\frac{F_z}{F}. \qquad (6$$



26-расм.



27-расм.

формулалар кучнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали кучнинг модули ва ўқлар билан ҳосил қилган бурчакларини аниқлашга, яъни кучни аниқлашга имкон беради. Формуладаги илдиз олдида ҳамиша плюс ишора олинади, чунки у формула кучнинг модулини ифодалайди. (6) формулалардан учта йўналтирувчи косинусдан иккитасигина мустақил, шунинг учун кучнинг координата ўқлари билан ҳосил қиладиган учала бурчагига ихтиёрий қиймат бериш мумкин эмас.

Агар F куч координата ўқларига параллел бўлган учта Ox, Oy, Oz ўқ бўйлаб тузувчиларга ажратилса, (27-расм), ҳосил бўлган F_x, F_y, F_z тузувчиларнинг сон қийматлари кучнинг шу ўқлардаги проекцияларига тенг бўлади. Демак, кучнинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, куч векторини параллелепипед қоидасидан фойдаланиб геометрик равишда ясаш мумкин. Бунинг учун куч қўйилган нуқтада кучнинг ўқлардаги проекцияларини томон деб олиб параллелепипед ясалади, параллелепипеднинг диагонали изланаётган кучни тасвирлайди.

7-§. Тенг таъсир этувчини топишнинг аналитик усули

Фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини аналитик усулда аниқлашда тенг таъсир этувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг экани ва у 6-§ даги (3) формула билан ифодаланиши ҳисобга олинади. Куч векторлари орасидаги муносабатдан уларнинг проекциялари орасидаги муносабатга ўтишда геометрияда исбот этилган қуйидаги теоремадан фойдаланилади: векторлар йиғиндисининг бирор ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг ўша ўқдаги проекцияларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг (F_1, F_2, . . . , F_n) системаси берилган бўлсин. Боши ихтиёрий O нуқтада бўлган $Oxyz$ координаталар системасидан фойдаланамиз. F_1 кучнинг x ўқидаги проекцияси F_{1x} билан, y ўқидаги проекцияси F_{1y} билан, z ўқидаги проекцияси F_{1z} билан белгиланади; F_2

кучнинг ўша ўқлардаги проекциялари ҳам индексида[illegible] ми турган ўша ҳарфлар билан белгиланади ва ҳ[illegible] ҳозиргина тилга олинган теоремани

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

муносабатга қўлланилганда:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}$$
$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz}$$

тенгликлар ёзилади, бу ерда R_x, R_y, R_z лар тенг таъсир[illegible] чининг координата ўқларидаги проекцияларини бил[illegible] Бу тенгликлар ихчамлаштирилиб қуйидагича ёзилади[illegible]

$$R_x = \sum F_{kx},$$
$$R_y = \sum F_{ky},$$
$$R_z = \sum F_{kz}.$$

Тенг таъсир этувчининг R_x, R_y, R_z проекциялари м[illegible] бўлгани учун 10-§ даги (6) формулага асосланиб, тенг [illegible] этувчининг модули ва йўналиши (йўналтирувчи косину[illegible] аниқланади:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}.$$

(8) формулалар фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг[illegible] таъсир этувчисини аналитик усулда аниқлаш масаласин[illegible] лиқ ҳал қилади. Агар кесишувчи кучлар системаси ф[illegible] эмас, бир текисликда, масалан, xOy текисликда ётган б[illegible] у ҳолда (8) формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}.$$

Кучлар баъзан координата ўқларидаги проекциялар орқ[illegible] ифодаланади. Лекин кўпинча кучлар модули ва коорди[illegible] ўқлари ҳосил қилган бурчаклар орқали берилади; бу ҳо[illegible] кучларни қўшишнинг аналитик усулини татбиқ этишда ав[illegible] бу кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳис[illegible] лаб чиқариш керак.

12-§. Фазода жойлашган кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шарти

Фазода жойлашган кесишувчи кучлар системаси ҳами[illegible] тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади, бундан $R = 0$ б[illegible] ган ҳолгина мустаснодир. $R = 0$ бўлган ҳол статикада алоҳ[illegible]

[illegible] учун бу ҳақда батафсил тўхта-
[illegible] тенг таъсир этувчиси нолга
[illegible] эквивалент бўлса,
[illegible] деб аталган эди.
[illegible] таъсир этувчиси нолга
[illegible] турган. Равшанки,
[illegible] агар кесишувчи кучлар
[illegible] тенг таъсир этув-
[illegible] шу
[illegible] кучлар
[illegible] эмас, балки „инер-
[illegible] Жисмнинг тўғри чизиқ
[illegible] қараганда инерция билан
[illegible] Бундан жуда муҳим икки
[illegible] тинч турган жисмга
[illegible] инерцияси билан ҳаракат
[illegible] кучлар системаси ҳам муво-
[illegible] Иккинчидан, эркин қаттиқ жисм-
[illegible] жисм тинч (му-
[illegible] шарти эмас, балки фақат
[illegible] мувозанатланган кучлар
[illegible] турган бўлса, кучлар қўйилган-
[illegible] Шунга кўра кучлар системаси
[illegible] ўша кучлар таъсиридаги жисм-
[illegible] тушунмоқ керак.
[illegible] кесишувчи кучлар системаси
[illegible] бу кучларнинг тенг таъсир этувчи-
[illegible] зарур ва етарли. Мувозанат шартлари
[illegible] геометрик шарт ва аналитик шарт.

[illegible] жойлашган кесишувчи кучлар [illegible] геометрик шарти

[illegible] фазода жойлашган кесишувчи куч-
[illegible] F_n) системаси қўйилган бўлсин. Кесишувчи
[illegible] этувчиси бу кучлардан тузилган куч
[illegible] томони билан тасвирланади (6-§ га
[illegible] Шунинг учун кўпбурчакдаги охирги кучнинг охири
[illegible] келиб текканда ва фақат шу ҳолда
[illegible] куч нолга тенг бўлади. Бу ҳолдаги кўп-
[illegible] *кўпбурчаги* дейилади.
[illegible] кучлар системаси мувозанатда бўлиши
[illegible] тузилган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши
[illegible] кесишувчи кучлар мувозанатининг
[illegible] ном билан машҳурдир.

14-§. Фазода жойлашган кесишувчи кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

12-§ дан маълумки, фазода жойлашган кесишувчи к[...] системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг тен[...] сир этувчиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир ([...] Энди бу шарт аналитик равишда ифодаланади.

Фазода жойлашган кесишувчи кучлар системасинин[...] таъсир этувчисининг модули

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

формуласи билан ифодаланади [11-§, (8)] $R = 0$ бўлса, [...] бўлади. Демак, илдиз ҳам нолга тенг. Бироқ илдиз т[...] бирор сон квадратларининг йиғиндиси турибди. Илдиз та[...] ги ифода нолга тенг бўлиши учун ундаги ҳар бир ҳа[...] ҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши, яъни $R_x = 0$, $R_y = 0$, R[...] бўлиши керак. Бу ҳолда 11-§ даги (7) формулага а[...] жисмга таъсир этаётган кучлар қуйидаги тенгликларни қ[...] атлантириши керак:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0. \quad (10)$$

(10) тенгликлар фазода жойлашган кесишувчи кучлар [...] возанатининг аналитик шартларини ифодалайди. Демак, фа[...] да жойлашган кесишувчи кучлар системаси мувозанатда [...] лиши учун бу кучларнинг учала координата ўқидаги про[...] цияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етар[...] Жисмга қўйилган кесишувчи кучларнинг ҳаммаси бир теки[...] ликда ётса, у ҳолда бу кучларнинг мувозанат шартлари фа[...] иккита бўлади:

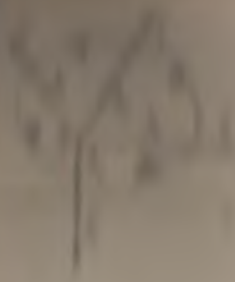
$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \quad (11)$$

Демак, текисликда жойлашган кесишувчи кучлар систем[...] си мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг x ва y коорд[...] ната ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг б[...] лиши зарур ва етарли. (10) ва (11) тенгликлар мана ш[...] кучлар таъсиридаги эркин қаттиқ жисм мувозанатининг зар[...] рий шарти ҳамдир. Эркин бўлмаган қаттиқ жисмнинг мувоз[...] нат шартларида боғланиш реакциялари қатнашади.

15-§. Уч куч теоремаси

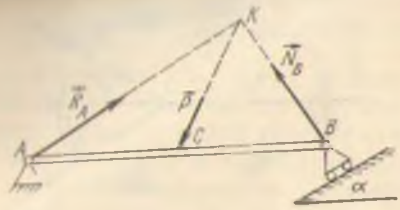
Агар эркин жисм бир текисликда ётувчи параллел бўлмага[...] уч куч таъсири остида мувозанатда бўлса, бу кучларни[...] таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.

Исботи. Эркин жисмнинг бирор A_1, A_2, A_3 нуқталарига F_1, F_2, F_3 кучлар қўйилган бўлсин (29-расм). Бу кучлар те[...] кисликда ётиб, уларнинг таъсир чизиқлари бир-бирига парал[...]



[illegible] расм

[illegible] мувозанатда бўлса, уларнинг [illegible] параллел [illegible] кесишган учун бу чизиқлар бўй- [illegible] жисмнинг бирор O нуқ- [illegible] ўша O нуқтага кўчириб [illegible] тасир этувчи битта R куч билан [illegible] F_1, F_2, F_3 [illegible] иборат мувозанатлаш- [illegible] R ва F_3 кучдан иборат системага (бу сис- [illegible] алмаштирилади. Эркин жисм му- [illegible] биринчи аксиомага асосан, икки куч [illegible] йўналади, демак, F_3 кучнинг [illegible] O нуқтадан ўтади. Шу билан теорема ис- [illegible] учала куч бир текисликда ётади [illegible] ортиқча бўлиб, у исботни осонлаштириш [illegible] чунки мувозанатлашган уч кучнинг бир текис- [illegible] мумкин эмас. Агар кучни уч кучнинг таъсир [illegible] бир нуқтада кесишса, бундан эркин жисм бу куч- [illegible] остида албатта мувозанатда бўлади деган фикр [illegible] Кесишувчи уч куч таъсирида эркин жисм мувоза- [illegible] ҳам мумкин. Демак, бу теорема эркин [illegible] уч куч таъсири остида мувозанатда бўлишининг [illegible] шартини эмас, балки зарурий шартини ифодалайди. [illegible] бўлмаган уч куч мувозанатининг зарурий шар- [illegible] учун бир мисол устида тўхталамиз. Самолёт [illegible] ҳаракат қилиши, яъни ўша учиб кетаётганидан па- [illegible] тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат қилиши учун само- [illegible] таъсир этаётган ҳамма кучлар системаси мувозанатлаш- [illegible] бўлиши зарур. Самолётга уч куч: унинг оғирлик кучи, [illegible] тортиш кучи ва ҳавонинг қаршилик кучи таъсир [illegible] деб ҳисоблаймиз. Бу уч куч мувозанатда бўлиши [illegible] уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши за- [illegible] Оғирлик кучи самолётнинг оғирлик марказидан ўтадиган [illegible] чизиқ бўйлаб йўналади, двигателнинг тортиш кучи [illegible] паррак ўқи бўйлаб йўналади. Бундан самолётсозликнинг [illegible] қоидаси деган ном билан машҳур бўлган қоида келиб



30- расм.

чиқади: ҳавонинг қар
кучи парракнинг ўқини
лётнинг оғирлик марка
чиққан вертикал чизиқ
ўтадиган нуқтада кеси
ши керак.

Қўзғалмас цилиндрик
нир реакциясининг йўна
ни (модулини эмас) то
бу теоремадан фойдалан
Бунга битта мисол келти

Мисол. *A* нуқтада цилиндрик шарнирга бириктирил
B нуқтада қўзғалувчи шарнирга (катокка) таянган *AB* б
га *C* нуқтада $\boldsymbol{P}$ куч қўйилган (30- расм). Агар боғланиш
олиб ташлаб, уларнинг таъсири реакция кучлари била
маштирилса, унда *AB* балкани эркин жисм деб ҳисо
мумкин. У ҳолда *AB* балка берилган $\boldsymbol{P}$ куч, *B* като
N_B реакцияси, шарнирнинг $\boldsymbol{R}_A$ реакцияси таъсири остид
возанатда туради. Ҳозиргина исбот этилган теоремага ас
бу уч кучнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиш
рак. Бироқ $\boldsymbol{P}$ ва N_B кучларнинг таъсир чизиқлари ма
улар *K* нуқтада кесишади. Демак, цилиндрик шарнирни
нуқтада балкага қўйилган $\boldsymbol{R}_A$ реакцияси ҳам *K* нуқтадан
ши, яъни *AK* тўғри чизиқ бўйлаб йўналиши керак. Уч
тўғрисидаги тео ема бу ҳолда *A* шарнир реакциясининг
диндан маълум бўлмаган йўналишини аниқлашга ёрдам
ди. Шарнир реакциясининг модулини эмас, балки фақат
налиши аниқланди, энди модули мувозанат шартларидан ф
даланиб аниқланади.

16- §. Масала ечиш

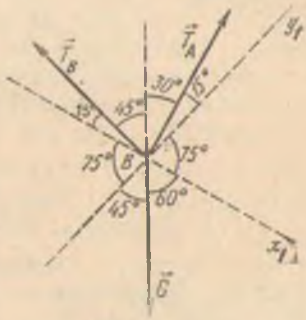
Ҳар қандай масалани ечишга киришишдан олдин ун
шартини диққат билан ўқиб чиқиш, нима берилган ва ним
топиш кераклигини албатта билиб олиш, масалани чизм
тасвирлаш, уни қандай йўл билан ечишни аниқлаш ва ун
кейингина ҳисоблашга ўтиш керак. Статикадан масала ечи
да энг аввал ўртага ташланадиган биринчи савол „Излан
ган миқдорларни аниқлаш учун қайси жисмнинг (ёки нуқ
нинг) мувозанати кўриб чиқилади?" деган саволдир.

Баъзан масалалар берилган кучларни номаълум реак
кучларининг йўналишлари бўйлаб тузувчиларга ажратиш
ли билан ечилади (7- §, 2- масалага қаранг), бироқ кўп ҳ
ларда масала ечиш жараёни қуйидаги босқичлардан ибо
Бу босқичлар 5- масалани ечиб кўрсатиш жараёнида бирма-б
баён этилади.

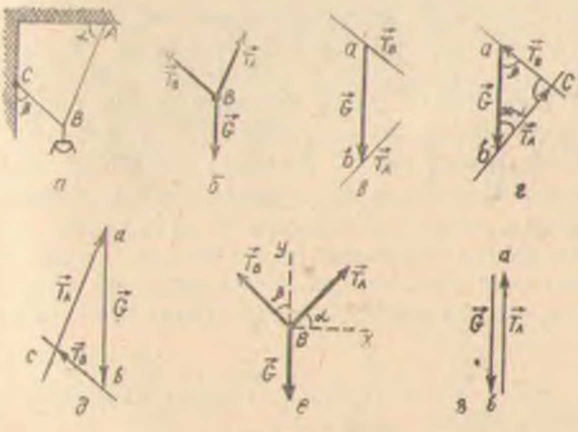
5- масала. Оғирлиги 20 кН бўлган электр лампа ши
шнурда осилган бўлиб, кейин *BC* ип билан деворга тор

ган (31-расм, *а*). Расмдаги α бурчак 60° га, β бурчак
тенг. *AB* шнурнинг ва *BC* ипнинг тортилиш кучларини
Шнур ва ипнинг массасини ҳисобга олманг.

нинш. Юқорида айтиб ўтилганидек, масала ечишнинг би-
босқичида қайси жисмнинг мувозанати кўриб чиқилади
саволга жавоб берилади. Бу саволга жавоб бериш ҳам-
ҳам осон бўлавермайди. Бу масалада шнурнинг изла-
тортилиш кучи шнурга қўйилган, ипнинг тортилиш
ипга қўйилган. Демак, изланаётган кучнинг иккови икки
қўйилган. Шнурнинг тортилиш кучини текшириш ўр-
унга тенг ва қарама-қарши йўналган реакцияси текши-
у T_B билан белгиланади. T_B реакция лампа осилган
қўйилган. Ипнинг тортилиш кучи ўрнига унга тенг
қарама-қарши йўналган реакция кучи текширилади, у T_B
белгиланади, T_B реакция ҳам лампа осилган *B* тугунга
Лампанинг оғирлик марказига қўйилган *G* оғирлик
биринчи ва иккинчи аксиомалардан келиб чиқадиган на-
асосан *B* нуқтага кўчирилади. Берилган ва изланаёт-
кучлар *B* нуқтага қўйилган. Де-
биринчи саволга *B* нуқтадаги
мувозанати кўриб чиқила-
деб жавоб берилади.



Масала ечишнинг иккинчи босқи-
жисмга таъсир этувчи берилган
чизмада кўрсатилади, жисм
ланишлардан бўшатилиб, олинган
ланишларнинг реакция кучлари
кўрсатилади. Боғланиш сифати-
ишлаётган шнурнинг T_A реакция-
шнур бўйлаб йўналган, боғланиш
рида ишлаётган ипнинг T_B реак-



31-расм.

ипи ҳам ипнинг ўзи бўйлаб йўналган. Лампанинг оғ
кучи оғирлик марказига қўйилган бўлиб, вертикал б
пастга йўналган. T_A, T_B ва G кучларнинг таъсир чиз
бир нуқтада, яъни B тугунда кесишади (31-расм, *б*).
расмда алоҳида тасвирланиб, унга таъсир этаётган кучла
сатилади. (Кейинчалик масала ечишни ўрганиб олгач му
нати текшириладиган жисмни расмда алоҳида тасвирл
ҳам бўлади, унга қўйилган кучларни масала шартини и
ловчи расмнинг ўзида тасвирлаб қўяқолиш мумкин. Б
рига боғланган бир неча жисмдан иборат конструкцияни
ширишда эса ҳар бир жисмни алоҳида чизиб, уларга т
этувчи актив кучларни ва реакция кучларини расмда
кўрсатиш керак).
Масала ечишнинг учинчи босқичида мувозанат шарт
зилади. Жисмга қўйилган кучлар системасининг турига
салани геометрик ёки аналитик усулда ечишга қараб, му
нат шарти ҳар хил бўлади. Бу масалада жисмга бир нуқ
кесишувчи кучлар таъсир қиляпти. Масала геометрик ус
ечилади. Лампа T_A, T_B ва G кучлар таъсирида мувозан
турибди, демак, бу кучлардан тузилган куч учбурчаги
Энди куч учбурчаги ясаймиз. Куч учбурчаги берилган ку
бошлаб чизилади. Олдин ихтиёрий a нуқтада G куч ма
масштабда чизилади (31-расм, *в*) G кучнинг бошидан
охиридан T_A кучга ёки T_B кучга параллел чизиқлар ўтк
лади. Бу ерда G кучнинг охиридан T_A га параллел чизиқ
казилади. Эндиги чизиқни хоҳлаган жойдан ўтказиб бўл
ди, T_B га параллел чизиқ G кучнинг бошидан ўтказил
Ўтказилган тўғри чизиқлар бирор нуқтада кесишади (31-р
г), бу нуқта c билан белгиланади. Ўша c нуқта ёпиқ куч
бурчагининг учинчи учи бўлади. Куч учбурчагининг bc т
ни T_A реакцияга параллел ва танлаб олинган масштабда у
тенг, ac томони эса T_B реакцияга параллел ва танлаб олин
масштабда унга тенг. Кучларнинг йўналиши стрелкалар к
даси билан аниқланади: куч учбурчаги ёпиқ бўлгани у
унинг ҳар бир учида битта кучнинг боши бошқа кучн
охири бўлиши керак, яъни учбурчакдаги кучлар кетма-
келиши керак. G куч пастга вертикал йўналгани учун T
T_B реакциялар 31-расм, *г* да кўрсатилгандек йўналади. Д
қат-эътиборни куч учбурчагини ясашга яна қаратмоқчим
Агар T_A реакцияга параллел қилиб ўтказиладиган чизиқ
валгидек кучнинг охиридан эмас, бошидан ўтказилса, у ҳ
да куч учбурчаги 31-расм, *д* дагича бўлади. Иккала куч учб
чаги бир хилдир.
Охирги тўртинчи босқичда номаълум миқдорлар аниқлан
ди, масаланинг тўғри ечилгани текшириб кўрилади ва топи
ган натижалар анализ қилинади
Энди номаълум T_A ва T_B реакция кучларининг моду

куч учбурчагини ечиб топилади. Бунинг учун учбурчак-нинг ички бурчаклари аниқланади. G куч билан T_A реакция орасидаги бурчак $(90° - \alpha)$ га тенг, G куч билан T_B реакция орасидаги бурчак β га тенг. Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $180°$ бўлгани учун куч учбурчагининг T_A томони билан T_B томони орасидаги учинчи бурчаги $(90° + \alpha + \beta)$ бўлади. Куч учбурчаги синуслар теоремасидан фойдаланиб унинг ҳар бир томонининг ўша томон қаршисидаги бурчак синусига нисбати бир-бирига тенг, яъни

$$\frac{T_A}{\sin\beta} = \frac{T_B}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{G}{\sin[90° + (\alpha - \beta)]}.$$

Бу икки тенгламадан изланаётган T_A ва T_B реакциялар аниқланади.

T_A ни $\frac{T_A}{\sin\beta} = \frac{G}{\cos(\alpha - \beta)}$ тенгламадан қуйидагича аниқлаймиз: $T_A = \frac{G\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)}$, T_B ни $\frac{T_B}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{G}{\sin[90° + (\alpha + \beta)]}$ тенгламадан топамиз, бу ерда келтириш формулаларига асосан $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ ва $\sin[90° + (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha - \beta)$ экани ҳисобга олинади: $T_B = \frac{G\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$.

Масалани ечганда алгебраик кўринишда ҳисоблаш керак. Бунда изланаётган миқдорлар формулалар билан ифодаланади. Бу эса топилган натижаларни анализ қилишга имкон беради. Масала шартида берилган миқдорларнинг сон қийматлари энг охирги натижага қўйилади. T_A ва T_B нинг ифодаларига $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $G = 20$ Н қийматлар қўйилса, $T_A = 14{,}6$ Н, $T_B = 10{,}4$ Н бўлиб чиқади. Аниқланган T_A ва T_B реакциялар AB шнур ва BC ипнинг тортилиш кучларига модул жиҳатидан тенг ва қарама-қарши йўналган.

Энди масаланинг тўғри ечилгани текшириб кўрилади. Агар масала „Масалалар тўпламидан" берилган бўлса, унинг тўғри ечилганини билиш учун китобдаги жавобига қараш керак. Масаланинг жавоби берилмаган ҳолларда берилган куч (ёки бир нечта куч) топилган реакцияларнинг йиғиндисига (арифметик йиғиндисига эмас, геометрик йиғиндисига) тенг бўлиши керак. Куч учбурчагидаги ac томон косинуслар теоремасига асосан қолган икки томоннинг йиғиндисига (геометрик йиғиндисига) тенг бўлиши керак. T_A ва T_B реакцияларнинг топилган қийматларини $G = \sqrt{T_A^2 + T_B^2 - 2T_AT_B\cos(\alpha + \beta)}$ формулага қўйсак, ҳақиқатан ҳам $G = 20$ Н бўлиб чиқади.

Ечимни анализ қилишда ҳам куч учбурчагидан фойдаланилади. Агар β бурчакни ўзгартирмай туриб, α бурчак кичрайтирилса, яъни шнур деворга кўпроқ тортилса, куч учбурчаги-

нинг b учидаги $90°-\alpha$ бурчак катталашади, шунга яраш
реакция ортади. Энди α бурчакни ўзгартирмай туриб, β
чак катталаштирилса, куч учбурчагининг a учидаги бур
катталашади, унинг қаршисида турган T_A реакция ортади.
$=90°$ ва $\beta=90°$ бўлган ҳолда куч учбурчагининг b учи
бурчаги кичрайиб, нолга тенглашади, T_A реакцияни тасвир
лиган bc томони ab томон устига тушади, учинчи ca то
йўқолиб, нуқтага айланиб қолади, учбурчак бу ҳолда
ёпиқ бўлиши лозимлиги туфайли, T_A реакция G га тенг
лади, ca томон билан тасвирланиши лозим бўлган T_B реа
нолга тенг. Бу шакл *иккибурчак* деб аталади (31-расм
шнурнинг изланаётган T_A реакцияси G оғирлик кучига м
жиҳатдан тенг бўлиб, иккови бир-бирига қарама-қарши
налган.

Бу масалада номаълумлар (T_A ва T_B) ҳам, топилад
тенгламалар ҳам иккиталиги маълум. Бундай масалалар
тик жиҳатдан *аниқ масалалар* деб, буларда тилга оли
жисм (ёки жисмлар системаси) статик жиҳатдан *аниқ си*
малар деб аталади. Назарий механикада ҳамиша статик
ҳатдан аниқ масалалар ечилади. Борди-ю номаълумлар кўп
бўлиб, улар қатнашган тенгламалар сони камроқ бўлса,
дай масалалар статик жиҳатдан *ноаниқ масалалар* деб,
ларда тилга олинган жисм (ёки жисмлар системаси) ст
жиҳатдан *ноаниқ системалар* деб аталади. Статик жиҳат
ноаниқ масалалар механиканинг материаллар қаршилиги ва
шоотлар статикаси деб аталадиган курсларида ҳал қилина

Энди қуйидаги масала аналитик усулда ечилади. Мас
ечишнинг биринчи босқичи авваллагидек бўлади. Энди ту
мувозанати кўриб чиқилади. Иккинчи босқич ҳам ўшандай
гича қолади. Учинчи босқичга келганда эса иш бошқача
лади, чунки дастлабки мувозанат шарти кучлар система
нинг турига ва масалани ечиш усулига қараб ҳар хилл
маълум эди. B тугунга қўйилган кучлар текисликда жойла
гани учун икки координата ўқлари: x ўқи горизонтал y
вертикал ўтказилади. G, T_A, T_B кучларнинг ўқлардаги про
циялари ҳисоблаб чиқилади. Аввал G кучнинг x ўқидаги
y ўқидаги проекцияси, сўнг T_A нинг проекциялари, ун
кейин T_B нинг проекциялари аниқланади:

$$G_x = 0, \quad G_y = -G;$$

$$T_{Ax} = T_A\cos\alpha, \quad T_{Ay} = T_A\cos(90° - \alpha) = T_A\sin\alpha;$$

$$T_{Bx} = -T_B\cos(90° - \beta) = -T_B\sin\beta, \qquad T_{By} = T_B\cos\beta.$$

Изоҳ. G куч x ўқига перпендикуляр бўлгани учун ун
x ўқидаги проекцияси нолга тенг бўлди, T_B куч x ўқига т
қари томонга йўналгани учун унинг x ўқидаги проекция
манфий бўлди.

(II) мувозанат шартларидан фойдаланиб, тенгламалар тузамиз:

$$\sum F_{kx}=0; \quad T_A\cos\alpha - T_B\sin\beta=0,$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad T_A\sin\alpha + T_B\cos\beta - G=0.$$

Тенгламаларнинг биринчисини $\cos\beta$ га, иккинчисини $\sin\beta$ кўпайтириб,

$$T_A(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=G\sin\beta$$

тенгламага эга бўламиз. Чап томонда қавслар ичида турган ифода икки бурчак айирмасининг косинуси ифодасини билдиради: $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$. У ҳолда юқоридаги тенгламадан T_A ни аниқлаймиз:

$$T_A=\frac{G\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

T_A нинг бу ифодасига $G=20$ Н, $\beta=45°$ ва $\alpha=60°$ қийматларини қўйсак, $T_A=14{,}6$ Н бўлади, бу натижа геометрик йўл билан аниқланган натижа билан бир хил экани кўриниб турибди. Мувозанат тенгламаларидан T_B топилади, бунинг учун T_A нинг топилган қиймати мувозанат тенгламаларининг биринчисига қўйилади, у ҳолда

$$T_B=\frac{T_A\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{G\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{22\cdot 0{,}5}{0{,}96}=10{,}4\ \text{Н}.$$

Жавобини текшириб кўриш ва анализ қилиш масала геометрик усул билан ишланганда гапириб ўтилган эди, шунинг учун бу ерда улар ҳақида тўхталиб ўтилмайди.

Текисликда координата ўқларидан бири иложи борича номаълум кучлардан бирига (ёки кучлар кўпроқ бўлган ҳолда — бир нечтасига) перпендикуляр қилиб олинса, мувозанат тенгламалари осон ечилади. Ундан ташқари, кучлар ўзаро мувозанатда бўлгани сабабли уларни албатта ўзаро перпендикуляр бўлган ўқларга проекциялаш шарт эмас. Шу масаланинг ўзини кучларни ўзаро перпендикуляр бўлмаган x_1, y_1 ўқларига проекциялаш йўли билан ҳам ечиб кўрсатамиз. x_1 ўқини T_A га перпендикуляр қилиб, y_1 ўқини T_B га перпендикуляр қилиб ўтказамиз (31-расм, *ж*). Бу ҳолда мувозанат тенгламалари соддароқ бўлади:

$$\sum F_{kx_1}=0; \quad -T_B\cos 15°+G\cos 60°=0,$$

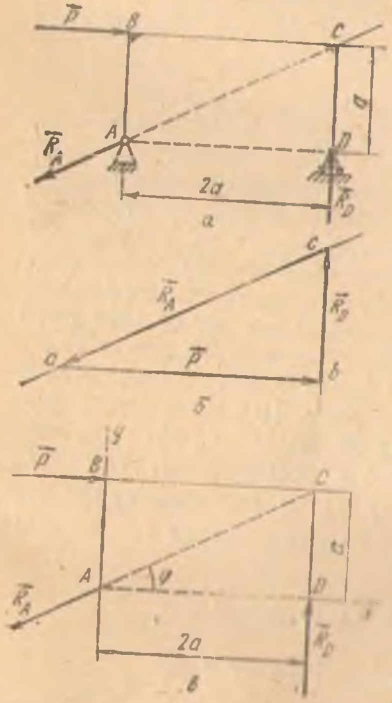
$$\sum F_{ky_1}=0; \quad T_A\cos 15°-G\cos 45°=0.$$

x_1, y_1 ўқлари ана шундай ўтказилгани учун мувозанат тенгламаларининг ҳар бирида фақат биттадан номаълум қатнашди:

биринчи тенгламада фақат T_A иккинчи тенгламада эса ф T_B қатнашяпти. Бунда бир оз қийинчилик вужудга кел расмда T_A, T_B, G кучларнинг x_1, y_1 ўқлари билан ҳосил қ ган бурчакларининг қийматини кўрсатиш кўп вақтни олад

6-масала. $ABCD$ рама таянчга A нуқтада цилиндрик ш нир билан бириктирилган бўлиб, D нуқтада шарнир уст қўйилган (32-расм, a). Ўлчамлар расмда кўрсатилган. Рам B нуқтада горизонтал йўналган P куч таъсир этганда тая ларда пайдо бўладиган реакцияларни топинг. Раманинг оғ лиги ҳисобга олинмайди.

Ечиш. Таянчларнинг реакциялари ва P куч рамага қў илган. Шунинг учун рама мувозанати кўриб чиқилади. Сўн ра рамани боғланишлардан (яъни A шарнирдан ва D катокд бўшатиб, боғланишларнинг ўрнига уларнинг реакциялари қў илади. Чизмани оддийлаштириш учун раманинг ўзи эрк жисм сифатида алоҳида чизилмайди, бироқ таъсир этувчи к ларни тасвирлаганда уни эркин жисм деб (32-расм, a) тас вур этиш лозим. Рамага уч куч: горизонтал P, D катокни юқорига вертикал йўналган R_D реакцияси, A шарнирнинг ра текислигида ётган R_A реакцияси таъсир қилади. R_A реакци нинг йўналиши маълум эмас. R реакцияни расмда кўрсатам Бироқ рама мана шу уч куч та сири остида мувозанатда турга лиги учун уч куч тўғрисида теоремага асосан, унинг таъс чизиқлари бир нуқтада кесиш ди. Масала геометрик усул ечилади. Берилган P куч била R_D реакция кучларининг йўн лиши маълум эканлигидан фой даланиб, уларнинг кесишиш нуқ таси топилади. Бу нуқта C нуқ танинг устига тушади. Шарнир нинг R_A реакцияси ҳам ўша нуқтадан ўтади, яъни реакция A тўғри чизиқ бўйлаб йўналади бироқ R_A реакция AC тўғри чи зиқда қайққа қараб йўналган маълум эмас. Бунинг учун ку уч бурчаги ясалади. Куч учбур чаги берилган кучдан бошла чизилади. Олдинги масалада бе рилган куч вертикал йўналга эди, бу масалада эса берилга P куч горизонтал йўналган бўл ганлиги учун ихтиёрий бир a



32-расм.

P куч масштабда горизонтал қилиб чизилади (32-расм, $б$). Энди P кучнинг бошидан ёки охиридан R_D реак- ёки AC чизиқ бўйлаб йўналган R_A реакцияга параллел чизиқлар ўтказилади. Қайси чизиқни олдин ўтказиш мутлақо ихтиёрий. R_D реакцияга параллел бўлган вертикал P кучнинг охиридан, R_A реакцияга параллел бўлган чизиқ P кучнинг бошидан ўтказилади. Бу икки чизиқ кесишган нуқта c билан белгиланади. Бу куч учбурчак ёпиқ бўлиши лозим эканлигидан R_D реакция вертикал бўйлаб юқори, R_A реакция ac чизиқ бўйлаб пастга томон йўналгани аниқланади. Расм масштабда чизилгани учун R_D ва R_A реакциялар қиймати учун куч учбурчагининг томонларига ўша масштабда тенг бўлади. Бу ерда куч учбурчагини ечиш учун унинг ички бурчакларини аниқлаш шарт эмас. Масала шартида берилган ACD учбурчак acb учбурчакка ўхшашдир. Шунинг ўхшашлигидан, яъни мос томонлар нисбати тенглигидан фойдаланамиз:

$$\frac{R_D}{DC}=\frac{R_A}{AC}=\frac{P}{AD},$$

Бошқача айтганда, бу тенгликлар R_D томоннинг DC томонга нисбати, R_A томоннинг AC томонга нисбати ва P томоннинг AD томонга нисбати бир-бирига тенг деб ўқилади. $AD=2a$, $DC=a$ эканлиги шартда берилган. AC томон ACD учбурчакнинг гипотенузаси бўлгани учун $AC=a\sqrt{5}$ бўлади. $\frac{R_D}{a}=\frac{P}{2a}$ тенгламадан $R_D=\frac{P}{2}$ жавобни, $\frac{R_A}{a\sqrt{5}}=\frac{P}{2a}$ тенгламадан $R_A=\frac{P\sqrt{5}}{2}$ жавобни топамиз.

Энди масала аналитик усулда ечилади. x ўқини (номаълум реакцияга тик қилиб) горизонтал, y ўқини вертикал қилиб олиб, координаталар бошини A нуқтада оламиз (32-расм, $в$). R_A реакциянинг x ўқига оғиш бурчаги маълум эмас, уни φ билан белгилаб, қиймати аниқланади. ACD учбурчакдан $\operatorname{tg}\varphi=\frac{DC}{AD}=\frac{a}{2a}=0{,}5$. Энди кучлар x, y ўқларига проекцияланади:

$$R_{Ax}=-R_A\cos\varphi,\qquad R_{Ay}=-R_A\sin\varphi,$$
$$R_{Dx}=0,\qquad R_{Dy}=R_D,$$
$$P_x=P\qquad P_y=0.$$

Улардан мувозанат тенгламалари тузилади:

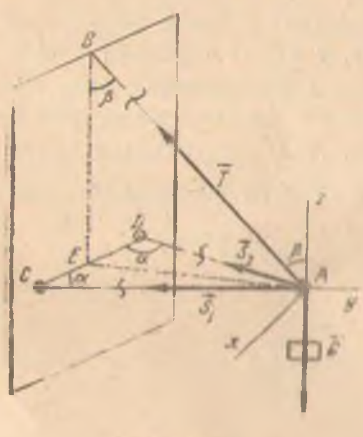
$$\sum F_{kx}=0;\quad -R_A\cos\varphi+P=0,$$
$$\sum F_{ky}=0;\quad -R_A\sin\varphi+R_D=0.$$

Координата ўқлари қулай қилиб ўтказилганлиги у... шининг тенгламаларининг биринчисида биттагина ном... қатнашяпти, ўша тенгламадан $R_A = \frac{P}{\cos\varphi}$ ечим топилал... кин $\cos\varphi$ ўрнига унинг 9-синфда „Алгебра ва элементар ... циялар" курсида ўтиладиган $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ ифодасин... миз. Ниҳоят, $R_A = P\sqrt{1,25}$ ечимни топамиз. R_A нинг г... рик усулда топилган қиймати аналитик усулда топилг... қиймати билан бир хил экани кўриниб турибди. Иккинчи ... ламадан $R_D = R_A \sin\varphi$ ечимни ёки унга $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+...}}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$ қийматни қўйиб, $R_D = P\sqrt{1,25}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{P}{2}$ ечимни ... миз. R_A реакция қийматининг ишораси мусбат бўлиб чи... унинг x ўқига тескари томонга йўналганини, яъни унин... учбурчаги кўрсатиб турган йўналиши тўғри эканини б... ради. Жавобни текшириб кўриш ва анализ қилиш студен... га ҳавола қилинади.

7-масала. Оғирлиги $G = 180$ Н бўлган юк A илмоққа о... ган бўлиб, бу илмоқни AC ҳамда AD стержень ва AB а... тутиб туради (33-расм). Стерженлар бир-бирига ва дев... шарнирлар билан бириктирилган. Стерженларнинг оғир... ҳисобга олинмайди. ACD учбурчак текислиги горизонтал... $CE = ED$ ва $\angle ECA = \angle PDA = \alpha$, AB арқон EB вертикал... лан β бурчак ҳосил қилади. AC ва AD стерженларнинг, ... нингдек, AB арқоннинг реакция кучларини аниқланг.

Ечиш. Изланаётган кучлар юк осилган илмоққа қўйил... шунинг учун ўша A илмоқнинг мувозанати кўриб чиқил... A илмоқ икки стержень ва арқондан иборат бирикмалар... бўшатилиб, уларнинг таъсири ... акциялари билан алмаштир... ди. G юкнинг оғирлик кучи ... A нуқтадан ўтадиган қилиб ... зилади. A нуқтага AC стерж... нинг ўзи бўйлаб йўналган s_1 ... акцияси, AD стерженнинг ... бўйлаб йўналган s_2 реакци... AB арқоннинг ўзи бўйлаб йўн... ган T реакцияси ва, ниҳо... юкнинг G оғирлик кучи таъ... қилади. Стерженларни чўзил... деб ҳисоблаб, уларнинг реакц... си A тугундан стерженлар б... лаб C ва D нуқталар том... йўналтирилади. Масала ечиб б... лингач бирор реакциянинг иш...



33-расм.

... кола, бу ишора ўша стерженнинг сиқилаёт... Бу кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар ... бир текисликда ётмайди. Номаълум кучларни куч кўп... йўли билан топиш мумкин эди, лекин у фазовий ... бўлгани учун ундан номаълум кучларни аниқлаш анча ... Шу сабабли бу масалани фақат аналитик усулда ечамиз. ...лар боши A нуқтада олинади. x ўқи CD тўғри чи... параллел қилиб олинади, y ўқи тенг ёнли ACD учбур... BA баландлиги бўйлаб йўналтирилади, z ўқи эса вер... бўйлаб юқорига йўналтирилади. Икки стерженнинг s_1 ... реакциялари горизонтал xy текисликда ётади, уларнинг ... ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари расмдан кўриниб ... T реакция кучи вертикал yz текисликда ётгани учун ... ўқига перпендикуляр бўлиб, унинг бу ўқдаги про... нолга тенг. G куч вертикал бўйлаб пастга йўналгани ... ўқига ҳам, y ўқига ҳам проекция бермайди. Бу ма... ҳар бир кучнинг координата ўқларидаги проек... алоҳида ёзиб ўтирмай, тўппа-тўғри мувозанат тенг... тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad s_1 \cos\alpha - s_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -s_1 \sin\alpha - s_2 \sin\alpha - T \sin\beta = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad T\cos\beta - G = 0.$$

...нинг x ўқидаги проекциялари йиғиндисининг нолга тенг ... шу кучлар таъсири остида турган жисмнинг x ўқи ... силжимаслигини билдиради. Шу кучлар таъсири ости... турган жисм, y, z ўқлари бўйлаб ҳам силжимай турган ..., демак, бу жисм мувозанатда турган бўлади. Бу мувоза... тенгламаларининг механик маъноси ана шу. Мувозанат ...ламаларининг учинчисидан T аниқланади: $T = \frac{G}{\cos\beta}$. Би... тенглама $\cos\alpha$ га қисқартирилса, $s_1 = s_2$ эканлиги келиб ...ади. Иккинчи тенгламада s_2 нинг ўрнига s_1 қўйилади, ун... тенглама $2s_1 \sin\alpha = -T\sin\beta$ кўринишга эга бўлади, бу тенг...дан s_1 ни топиб, ундаги T нинг ўрнига $\frac{G}{\cos\beta}$ ифода ёзи...: $s_1 = s_2 = -\frac{T\sin\beta}{2\sin\alpha} = -\frac{G}{2}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$.

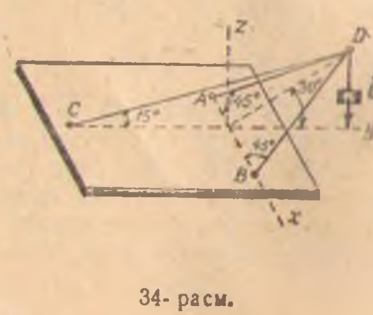
... ва β бурчаклар ўткир бурчаклар бўлгани учун $\operatorname{tg}\beta$ ва ...ларнинг қиймати касрнинг ишорасига таъсир қилмайди, ..., стерженлар сиқилар экан. Дастлаб AB арқоннинг ре...циясини кўрсатишда уни чўзилади деб фараз қилган эдик. ... реакциянинг ишораси мусбат бўлиб чиқиши унинг йўнали... тўғри эканини, яъни AB арқоннинг ҳақиқатан ҳам чўзи...ини билдиради.

Энди кучни олдин текисликка, кейин ўққа проекция... тўғри келадиган бир масалани кўриб чиқамиз.

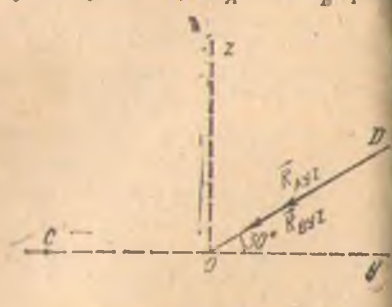
8-масала. Бир-бирига D нуқтада шарнир билан би... рилган AD ва BD стерженларни CD сим тортиб туради... расм). Стерженлар тагликка ҳам A ва B нуқталарда ша... лар билан бириктирилган. D шарнирга оғирлиги $G=$ ... бўлган юк осилган. Бурчаклар расмда кўрсатилган. Боғл... ларнинг реакцияси аниқлансин.

Ечиш. Бу масаланинг ечилиши 7-масаланикидан кўп... қилмайди. Бунда ҳам AD, BD стерженларнинг реакци... ўша стерженлар бўйлаб йўналган, лекин уларни ўққа б... та проекциялаб бўлмайди. Координаталар системаси р... кўрсатилганидек қилиб ўтказилади. AD ва BD стерже... нинг R_A ва R_B реакцияларини, C симнинг R_D реакци... расмда кўрсатамиз. Барча реакциялар ва юкнинг оғирли... чи мувозанати текшириладиган D нуқтага қўйилган. Авв... дек кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари те... малари тузилади.

R_A ва R_B реакциялар x ўқи билан 45° бурчак ҳосил ... ган; уларнинг x ўқидаги проекциялари мос равишда $R_{A...}$ $= -R_A \cos 45°$ ва $R_{Bx} = R_B \cos 45°$. Лекин бу реакцияларн... ва z ўқларига бевосита проекциялаб бўлмайди, чунки у... нинг y ва z ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари маъ... эмас. Шунинг учун бу реакциялар олдин yz текисликка п... екцияланади, бу проекциялар ABD учбурчак текислиги би... вертикал yz текислик кесишган OD тўғри чизиқ устига ... шади. R_A ва R_B реакциялар OD кесма билан бир хил 45° б... чак ҳосил қилади: $R_{Ayz} = R_A \cos 45°$, $R_{Byz} = R_B \cos 45°$. R_A ... R_B реакцияларнинг текисликдаги проекциялари 35-рас... алоҳида чизиб кўрсатилди. Энди текисликдаги R_{Ayz} ва R... проекциялар y ўқига проекцияланади: бу проекциялар би... y ўқи орасидаги бурчак 30° бўлгани учун $R_{Ay} = -R_{Ayz} \cos$... ва $R_{By} = -R_{Byz} \cos 30°$ бўлади, бу ерга R_{Ay}, ва R_{Byz} ларни... ифодалари қўйилади: $R_{Ay} = -R_A \cos 45° \cos 30°$ ва R_{By}... $= -R_B \cos 45° \cos 30°$. Худди шунга ўхшаш, R_A ва R_B реа...



34- расм.



35-расм.

...ларнинг z ўқидаги проекциялари ҳам R_{Ayz} ва R_{Byz} ни про... ...топилади: $R_{Az} = -R_{Ayz}\cos 60°$ ва $R_{Bz} = -R_{Byz}\cos 60°$, ...рга R_{Ayz} ва R_{Byz} проекцияларнинг ифодаларини қўйиб, $= -R_A\cos 45°\cos 60°$ ва $R_{Bz} = -R_B\cos 45°\cos 60°$ экани ...лади. Ишнинг энг қийини ана шу эди.

...нинг R_c реакциянинг проекциялари тўғрисида икки оғиз ... R_c реакция вертикал текисликда DC кесма бўйлаб йўнал... ...ганлиги сабабли x ўқига проекция бермайди: $R_{cx} = 0$. Бу R_c ре...нинг y ва z ўқлардаги проекциялари мос равишда $R_{cy} = -R_c\cos 15°$. $R_{cz} = -R_c\cos 75°$. Кесишувчи кучларнинг му...нинг тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad -R_A\cos 45° + R_B\cos 45° = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -R_A\cos 45°\cos 30° - R_B\cos 45°\cos 30° -$$
$$-R_c\cos 15° = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad -R_A\cos 45°\cos 60° - R_B\, 45°\cos 60° -$$
$$-R_c\cos 75° - G = 0.$$

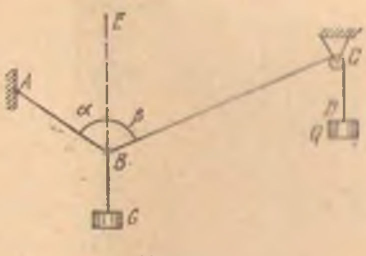
Уч номаълумли учта чизиқли тенгламалардан иборат бўл... бу системанинг ечимлари $R_A = R_B = 264$ кН, $R_c = 335$ кН. ...нинг R_B га тенг бўлиши биринчи тенгламадан кўриниб ...рибди.

Масалалар

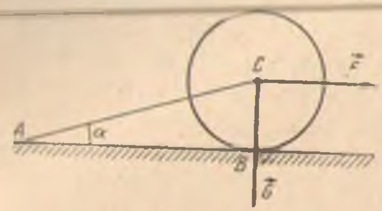
1. Бир-бирига тик бўлган иккита силлиқ AB ва BC қия те...сликларда оғирлиги 6 кН бўлган бир жинсли O шар туриб... (36-расм). BC текислик билан горизонтал текислик ораси...ги бурчак 60°. Шарнинг ҳар қайси текисликка кўрсатадиган ...сим кучи аниқлансин. Жавоб: $N_D = 5{,}2$ кН; $N_E = 3$ кН.

2. Бир учи A нуқтага боғланган AB арқоннинг B учига G ...ли блокдан ўтказилган BCD арқон боғланган (37-расм). ...рқоннинг D учига оғирлиги $Q = 10$ кН бўлган юк осилган. ...увозанат вазиятда арқонлар BE вертикал чизиқ билан $\alpha =$

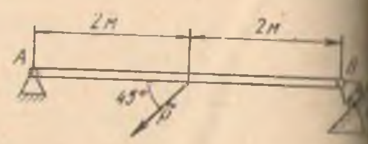
36-расм.



37-расм.



38-расм.



39-расм.

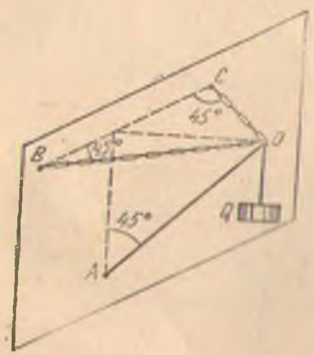
$=45°$, $\beta = 60°$ бурчак ҳосил қилади. Блокда ишқаланиш деб ҳисоблансин. AB арқоннинг T тортилиш кучи ва G нинг оғирлиги аниқлансин. Жавоб: $T = 12{,}2$ кН; $G = 13{,}7$

3. Горизонтал силлиқ текисликда ётган бир жинсли линдрга C нуқтада горизонтал йўналган F куч таъсир қи ди (38-расм). Цилиндрнинг оғирлиги G. Уни қиялик бурч α бўлган AC стержень силжитмай туради. Стерженни чўзу N кучни ва текисликнинг B нуқтадаги вертикал R_B реакци аниқлансин. Жавоб: $N = G\cos^{-1}\alpha$; $R_B = G + F\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

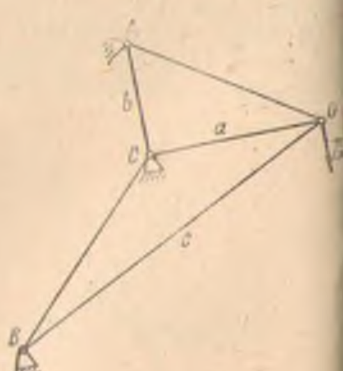
4. AB балка A таянчга шарнир билан бириктирилган, уш B учи қўзғалувчи шарнирга қўйилган (39-расм). Балкан ўртасига $P = 2$ кН куч расмда кўрсатилганча таъсир қил Балканинг оғирлигини ҳисобга олмасдан таянч реакциял аниқлансин. Жавоб: $R_A = 2{,}24$ кН; $R_B = 1$ кН.

5. $Q = 100$ кН юкни CA стержень ва горизонтал ётган ва CO занжирлар тутиб туради (40-расм). OA стержень нуқтага шарнир ёрдамида бириктирилган бўлиб, горизон билан 45° бурчак ҳосил қилади. $\angle CBO = \angle BCO = 45°$. Ст женнинг R реакцияси ва занжирларнинг T тортилиш ку топилсин. Жавоб: $R = 141$ кН; $T = 71$ кН.

6. Учта OA, OB, OC стержень бирга қўшилган O нуқта юк осилган (41-расм). OB ва OC стерженлар горизонтал



40-расм.



41-расм.

... ва OA стерженлар вертикал текисликда туради. ... $OC = a$, $AC = b$ кесмаларни берилган деб ҳисоблаб, ... пайдо бўлган зўриқишлар аниқлансин. Жавоб: $T_A = G\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ (чўзилади), $T_B = 0$, $T_C = -G\frac{a}{b}$ (сиқилади).

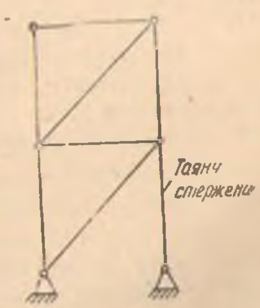
7. Радиуси r бўлган силлиқ ярим сфера ичига томони a га тенг бўлган мунтазам учбурчак шаклида ишланган бир жинсли пластинка қўйилган. Пластинканинг оғирлиги G. Бу пластинка сфера ичида горизонтал вазиятда мувозанатда турганда унинг учлари сферага қандай босим беради? Жавоб:

$$N = \frac{Gr\sqrt{3}}{3\sqrt{3r^2 - a^2}}.$$

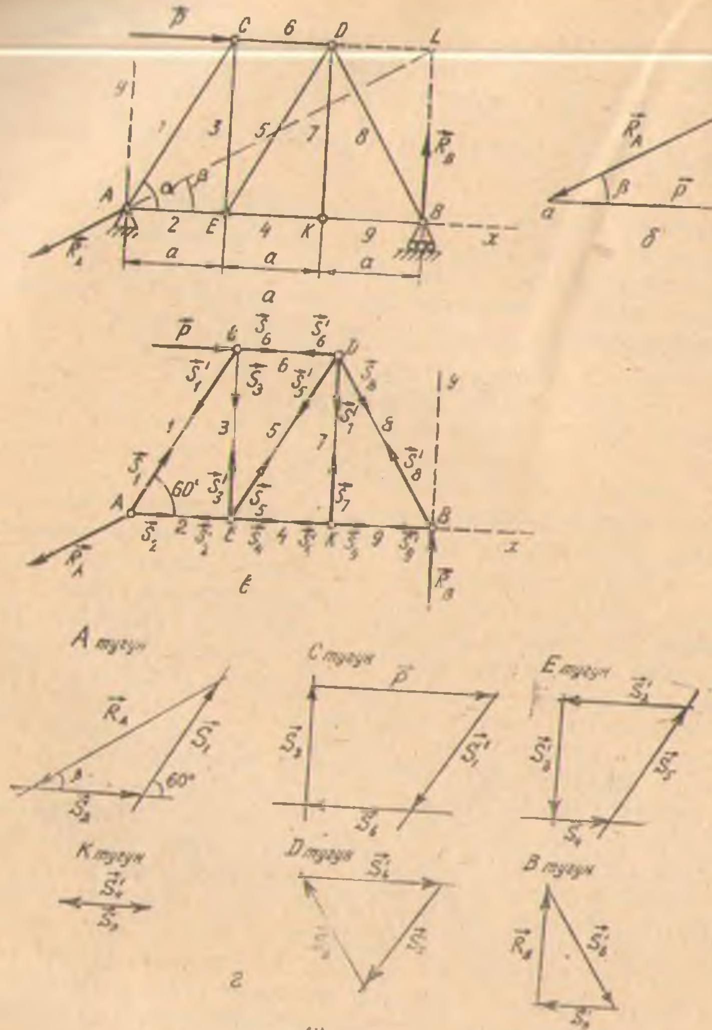
17-§ Фермалар

Кўприк, бино, самолёт ва бошқа иншоотларда *ферма* деб аталадиган конструкция ишлатилади. Ферма тўғри стерженлардан ясалган конструкция, стерженлар бир-бирига идеал шарнирлар ёрдамида бириктирилади. Энди стерженларнинг ҳаммаси бир текисликда бириктирилади. Энди стерженларнинг ҳаммаси бир текисликда ётадиган, ташқи кучлар ҳам ўша текисликда таъсир этадиган ҳоллар текширилади. Стерженлар бириктирилган жойлар *ферманинг тугунлари* дейилади. Стерженларнинг оғирлиги фермага таъсир этаётган кучларга қараганда кичик бўлганидан стерженларнинг оғирлиги эътиборга олинмайди. Ҳақиқатда ишлатиладиган фермаларда шарнирлар идеал бўлмайди, ҳатто стерженлар бир-бирига шарнирлар билан эмас, балки парчин михлар билан маҳкам бириктириб қўйилади. ... стерженлар сони одатда тоқ бўлади; топшириқлардаги фермаларда стерженлар сони тоқ бўлади ... бериладиган баъзи фермаларда стерженлар сони тоқ бўлади. Ташқи кучлар, битта стержень (42-расм) таянч стержени бўлади. Ташқи кучлар фермага фақат тугунларда қўйилади. Шунинг учун фермaнинг стерженлари ё сиқилади, ё чўзилади. Мисол тариқасида битта фермани ҳисоблаб чиқамиз (43-расм); фермани ҳисоблаш дегани ферманинг таянч реакцияларини ва стерженларида пайдо бўладиган зўриқиш кучларини аниқлашни билдиради. 43-расм, a да кўрсатилган фермага C нуқтада горизонтал йўналган $P = 20$ кН куч қўйилган. $\alpha = 60°$. A ва B нуқталардаги таянч реакцияларини ва стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучларини топинг.

Ечиш. 1. Таянч реакцияларини аниқлаш. Фермага қўйилган ташқи кучларни кўриб чиқамиз: улар берилган P куч, таянчларнинг R_A ва R_B реакциялари. Дастлаб ферманинг тугунларидаги шарнирларни йўқ деб, фермани яхлит бир



42-расм.



43-расм.

жисм деб фараз қиламиз. Ферма боғланишлардан бўшатилади. B нуқтада қўзғалувчи шарнир турибди, унинг реакцияси таянч юзасига, яъни горизонтал текисликка тик йўналади, у расмда B нуқтага қўйиб кўрсатилади. A нуқтада турган цилиндрик шарнир R_A реакциясининг йўналиши маълум эмас. R_A реакциясининг йўналиши параллел бўлмаган уч куч тўғрисидаги теоремадан фойдаланиб аниқланади, чунки ферма бир текисликда ётган уч P, R_A, R_B куч таъсирида мувозанатда турибди, демак, бу уч кучнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши шарт. Берилган P куч билан R_B реакция қа-

... кесишса, R_A реакция ҳам ўша ердан ўтиши керак. P ... билан R_B реакция кесишган нуқта L билан белгиланади, ... R_A реакция AL тўғри чизиқ бўйлаб йўналади, лекин бу ... чизиқдан қаёққа қараб йўналгани номаълум. Уни куч ... кўрсатади. Энди ёпиқ куч учбурчагини ясаймиз. ..., куч учбурчаги берилган кучдан, яъни P кучдан ... чизилади. P куч бирор a нуқтага қўйилиб маълум ... горизонтал қилиб чизилади (43-расм, $б$). P куч... ...дан реакциялардан бирига, масалан, R_B га параллел ... ўтказилади (48-расм, $б$). Сўнгра R_A реакцияга параллел чизиқ чизиб, бу чизиқлар кесиштирилса, изланаётган ёпиқ ... учбурчаги ҳосил бўлади. abc куч учбурчаги 43-расм, a ... ABL учбурчакка ўхшаш. R_A реакция ўша AL тўғри чизиқ бўйлаб дастлаб кўрсатилган йўналишда эмас, балки унга ... йўналган экан. Номаълум реакциялар учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб аниқланади:

$$\frac{R_A}{AL}=\frac{R_B}{BL}=\frac{P}{AB}.$$

Бу икки тенгламадан R_A ва R_B реакциялар аниқланади, бунинг учун AL ва BL кесмаларнинг узунлиги аниқланиши керак. Масала шартида $AE=a$ деб берилгани учун $EC=BL=AE\,\mathrm{tg}\,\alpha=a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Бу ҳолда AL гипотенуза $AL=\sqrt{AB^2+BL^2}=\sqrt{9a^2+3a^2}=2\sqrt{3}a=3{,}46a$. R_A ни $\frac{R_A}{AL}=\frac{P}{AB}$ тенгламадан, R_B ни $\frac{R_B}{BL}=\frac{P}{AB}$ тенгламадан топамиз: $R_A\approx 20{,}4$ кН; $R_B=3{,}85$ кН.

Энди R_A ва R_B реакциялар аналитик усулда аниқланади. Бунинг учун координата ўқлари ўтказилади. Координаталар бошини A нуқтада олиб, x ўқи ўнг томонга горизонтал y ўқи юқорига тик йўналтирилади. R_A реакциянинг x ўқи билан ҳосил қилган бурчаги β билан белгиланади, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{BL}{AB}=0{,}578$; бундан $\beta=30°$ эканлиги келиб чиқади. Кучлар текисликда жойлашган кесишувчи кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат тенгламалари:

$$\sum F_{kx}=0;\quad P-R_A\cos\beta=0,$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad -R_A\sin\beta+R_B=0.$$

Тенгламаларнинг биринчисидан $R_A=23{,}06$ кН эканi, иккинчисидан $R_B=11{,}53$ кН экани топилади.

2. Стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучларини аниқлаш. Бунинг учун тугунни кесиш деб аталадиган усул қўлланади. Берилган кучлар ва боғла-

нишларнинг реакция кучлари таъсири остида ферма му- козанатда булгани учун унинг ҳаёлан кесиб олинган ҳар бир тугуни ҳам мувозанатда туриши керак. Кесиб олинган тугунларга кесиб юборилган стерженларнинг реакциялари, шунингдек баъзи ҳолларда берилган кучлар ва таянч реакциялари таъсир қилади. Стерженларнинг реакциялари стерженларда пайдо буладиган зуриқиш кучларига модул жиҳатдан тенг булиб, уларга тескари йуналади. Стерженларнинг реакциялари s ва s' билан белгиланади, $s = s'$. Ҳисоблашга энлигина киришилган вақтда ҳали ферманинг қайси стержени сиқилган, қайси стержени чузилган экани маълум булмайди. Шунинг учун шартли равишда ҳамма стерженлар чузилган деб, яъни стерженларнинг реакциялари тугундан стерженнинг уртасига томон йуналган деб фараз қиламиз. Агар ҳисоблаш натижасида бирор реакциянинг қиймати минус ишорали булиб чиқса, тегишли стержень сиқилаётган булади. Энг олдин A тугун кесилади, чунки бу тугунда реакцияси аниқланмаган икки стержень (1 ва 2-стержень) бор. Бу масалада энг олдин B тугунни кесиш ҳам мумкин эди, чунки унда ҳам реакцияси аниқланмаган икки (*8*, *9*) стержень бор. Буларга қараб олдин таянчлардаги тугунларни кесиш керак деган фикр чиқмаслиги лозим. C тугунни кесиш мумкин эди, лекин унда реакцияси ҳали аниқланмаган учта (*1*, *3*, *6*) стержень учрашади, текисликда жойлашган кесишувчи кучларнинг иккита мувозанат тенгламасидан учта номаълум реакцияни топиб булмайди, шунинг учун иш реакцияси аниқланмаган икки стержень учрашадиган A тугунни кесишдан бошланди, A тугунга A шарнирнинг R_A реакцияси ва кесилган 1- ва 2-стерженнинг s_1 ва s_2 реакциялари қуйилган (43-расм, *в*). Координата уқлари аввалгича олинади. A тугунга қуйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad s_2 + s_1 \cos\alpha - R_A \cos\beta = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad s_1 \sin\alpha - R_A \sin\beta = 0.$$

Бу тенгламаларга $\sin\beta$ ва $\cos\beta$ нинг таянч реакцияларини аниқлашда топилган қийматларини қуйиб, $s_1 = 13{,}31$ кН, $s_2 = 13{,}32$ кН экани топилади. Иккала реакциянинг ишораси мусбат булиб чиқди, демак, 1- ва 2-стерженлар чузилади. Расмда s_1 реакция C тугунга, s_2 реакция E тугунга қуйилади. Энди реакцияларнинг тугри топилганини куч учбурчагини ясаб текшириб курилади, бу учбурчак ёпиқ булиши керак (43-расм, *г*).

Энди қайси тугунга утамиз деган савол туғилади. Кесиладиган тугунда бошқалардан ташқари реакцияси ҳали аниқланмаган икки стержень учрашадиган булиши керак, бу C тугундир. C тугун кесилади, унга берилган P куч, 1-стерженнинг ҳозиргина аниқланган $s_1 = s_1$ реакцияси, кесилган 3- ва

...нинг s_3 ва s_6 реакциялари қўйилган (43-расм, *в*). *C* ... қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари ...:

$$\sum F_{kx}=0;\quad P-s_1'\cos\alpha+s_6=0,$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad -s_2'\sin\alpha-s_3=0.$$

...ларнинг ечими $s_3=11{,}53$ кН, $s_6=13{,}35$ кН. 3- ва ...нинг реакцияси манфий бўлиб чиқди, демак бу ... қисилади. Энди *C* тугунга қўйилган кучларнинг ... мувозанатини ҳисобга олиб, куч кўпбурчаги (тўртбурчак)ини ясаймиз (43-расм, *г*): у ёпиқ бўлиши керак. Бу ерда ...ларга эътибор бериш керак. Текисликда жойлашган ... кучларнинг мувозанатига тегишли олдин ечиб кўр... масалаларда берилган кучлар битта бўлиб, куч кўп... ясашда аввал айни ўша берилган куч чизилар эди. ... *C* тугундаги кучлар учун куч кўпбурчаги ясаш... кучлар битта эмас, балки иккита: берилган ***P*** куч ... аниқланган s_1' реакция кучи. Шунинг учун куч ... ясашда ***P*** куч билан s_1' реакцияни йўналишларига ... бирин-кетин қўйиб чизиш, сўнгра эса изланаётган s_3 ва ...ларга параллел бўлган тўғри чизиқларнинг бирини ...нинг бошидан, иккинчисини s_1' реакциянинг охиридан ... лозим.

Расмда s_3 реакция *E* тугунга, s_6' реакция *D* тугунга қўйи...

Энди *E* тугун кесилади, унга ҳаммаси бўлиб тўрт куч: s_2' ..., s_3' реакция ва кесилган 4 ва 5-стерженнинг s_4 ва s_5 ...лари қўйилган. Бу кучларнинг мувозанат тенгламалари ...лади:

$$\sum F_{kx}=0;\quad s_4+s_5\cos\alpha-s_2'=0,$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad s_5\sin\alpha+s_3'=0.$$

... учун кучларнинг *z* ўқидаги проекциялари тенгламаси ...? Бу ердаги иккинчи тенглама жуда содда бўлиб .... Нима учун s_4 ва s_2' реакцияларнинг проекцияси бу ...га кирмай қолди? Чунки икки тенгламанинг ечими $=13{,}32$ кН, $s_4=6{,}66$ кН. *E* тугунга қўйилган кучларнинг ҳа... йўналишини ҳисобга олиб куч кўпбурчаги (тўртбурчак) ...лади, у ёпиқ бўлиши керак (43-расм, *г*). Расмда s_4' реак... *K* тугунга, s_5' реакция *D* тугунга қўйилади. Энди хоҳла... *D* тугунни, хоҳласак *K* тугунни кесамиз, чунки бу тугун...нинг ҳар бирида ҳали реакцияси аниқланмаган икки стер...нинг учрашади. *K* тугунни кесишга қарор қилдик.

K тугунга ҳозиргина аниқланган s_4' реакция ва ...
7 ва 9-стерженларнинг номаълум s_7 ва s_9 реакциялари ...
ган. K тугунга қўйилган s_4', s_7 ва s_9 кучларнинг му...
тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad s_9 - s_4' = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad s_7 = 0.$$

Кўриниб турибдики, y ўқига фақат s_7 реакция пр... беради, лекин мувозанат тенгламасидан $s_7=0$ экани ... чиқади. Шундай бўлишини тенглама тузмасдан олди... фермалар ҳақидаги леммага асосланиб айтиш мумкин... Ҳақиқатан ҳам, $s_7=0$ бўлиб чиқди. Бу ҳол масаланинг ... ечилаётганини билдиради. $s_7=0$ бўлганига қараб, 7-стер... олиб ташласа бўлар экан, деган фикр чиқмаслиги керак, ... 7-стержень олиб ташланса, ферма қаттиқ конструкция б... қолади. Биринчи тенгламадан $s_9 = s_4' = +6{,}66$ кН экани ... лади. Кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб куч ... бурчаги (бу ҳолда иккибурчак) ясалади, у ҳақиқатан ... ёпиқ бўлади, яъни бу тугундаги икки куч модул жиҳат... тенг бўлиб, қарама-қарши йўналган (43-расм, *г*). Расм... реакция B тугунга қўйилади: гарчи s_7 реакция нолга ... бўлса ҳам умумийликка зарар келтирмаслик учун s_7' ре... D тугунга қўйилади. Энди D тугун кесилади, унга о... аниқланган s_6', s_5', s_7' реакциялар ва кесилган 8-стержен... s_8 реакцияси қўйилган. Бу кучлар учун ҳам иккита мувоз... тенгламаси тузиш мумкин, лекин аниқланиши керак бў... фақат битта реакция (s_8 реакция) қолди. Шунинг учун s_8 ... акция қатнашган фақат битта тенглама тузилади. Бу тенг... кучларнинг x ўқидаги проекциялари йиғиндиси бўлиши ҳа... ўқидаги проекциялари йиғиндиси бўлиши ҳам мумкин. Би... кучларнинг y ўқидаги проекциялари тенгламасини ту... маъқул:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -s_8 \sin\alpha - s_5' \sin\alpha = 0,$$

чунки s_7 реакциянинг ўзи нолга тенг. Бу тенгламани $\sin\alpha$... қисқартириб, $s_8 = -s_5' = -13{,}32$ кН экани топилади. 8-ст... жень сиқилади. Бу тугунга қўйилган кучлар учун куч учб... чаги (диққат қилинг: тўртбурчак эмас — учбурчак) ясала... чунки $s_7=0$. Бу учбурчак ёпиқ куч учбурчаги бўлади (... расм, *г*). s_8' реакция B тугунга қўйилади. Изланган ҳамма р... акциялар аниқланди. Кесилмаган фақат битта тугун қолди, ... ҳам бўлса, B тугундир. B тугунда учрашадиган 8 ва 9-ст... женларнинг реакциялари ҳам аниқланди. Шунга қарамасд... B тугун ҳам кесиб кўрилади, ундан номаълумларни аниқл... мақсадида эмас, балки топилган реакцияларни текшириб к...

...ғанда фойдаланилади. B тугунга уч куч қўйилган: ... реакциялар. B тугун мувозанатда тургани учун ... x ва y ўқларидаги проекциялари йиғиндиси ало-... нолга тенг бўлиши керак ёки шу уч кучдан ... куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Аввал мувозанат ... тузиб, улардаги реакциялар ўрнига қийматла-... айнинг ҳосил бўлиши керак:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -s_8' \cos\alpha - s_9' = -(-13{,}32) \cdot 0{,}5 - 6{,}66 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad s_8' \sin\alpha + R_B = -13{,}32 \cdot 0{,}866 + 11{,}53 = 0.$$

...нинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб тузилган куч ... ҳам ҳақиқатда ёпиқ бўлиб чиқди (43- расм, *г* да ...).

...нинг натижаларига қараб стерженларда ҳосил бўлган ... кучларига тегишли жадвал тузилади.

...нинг ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9
... кучи ...	+	+	—	+	+	—		—	+
... кучи,	13,31	13,32	11,53	6,66	13,32	13,35	0	13,32	6,66

18- §. Фермалар ҳақида леммалар

...лемма. Агар ферманинг ташқи куч қўйилмаган тугунида ... стержень учрашса, бу стерженларнинг реакцияси нолга ... (44- расм).

...боти. A нуқтада кесишувчи s_1 ва s_2 кучларнинг муво-... тенгламалари тузилади:

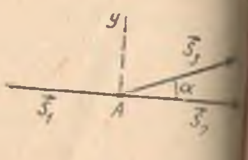
$$\sum F_{kx} = 0; \quad s_2 + s_1 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad s_1 \sin\alpha = 0.$$

...нчи тенгламада $\sin\alpha$ нолдан фарқ қилгани учун $s_1 = 0$ ... топилади. $s_1 = 0$ қийматни биринчи тенгламага қўйиб, ... экани аниқланади. Шу билан лемма исбот этилди.

...лемма. Агар ферманинг ташқи куч қўйилмаган тугунида ... стержень учрашиб, улардан иккитаси бир тўғри чизиқда ... бўлса, учинчи стерженнинг реакцияси нолга тенг бў-... ва олдинги иккитасининг реакциялари бир-бирига тенг ...ди (45- расм).

44-расм.



45-расм.

Исботи. A нуқтада кесишувчи s_1, s_2, s_3 кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad s_2+s_3\cos\alpha-s_1=0,$$
$$\sum F_{ky}=0; \quad s_3\sin\alpha=0.$$

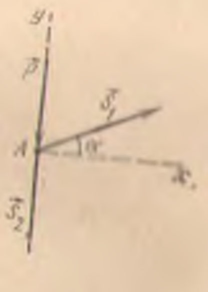
Иккинчи тенгламадан $s_3=0$ эканлиги кўриниб турибди. s_3 нинг қиймати биринчи тенгламага қўйилса, $R_2=s_1$ бўлиб чиқади. Шу билан лемма исбот бўлди. Бунга 17-§ ла... қилинган ферманинг K тугуни мисол бўлади: $s_7=0$, $s_{...}$

3-лемма. Агар ферманинг икки стержень учрашган тугунига стерженлардан бирининг ўқи бўйлаб йўналган ташқи куч қўйилган бўлса, бу стержендаги зўриқиш кучи шу ташқи кучга модули жиҳатидан тенг бўлиб, иккинчи стерженнинг зўриқиш кучи нолга тенг (46-расм).

Исботи. A тугунда кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади,

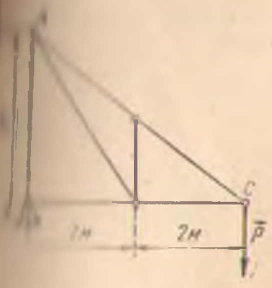
$$\sum F_{kx}=0; \quad s_1\cos\alpha=0,$$
$$\sum F_{ky}=0; \quad s_1\sin\alpha-p-s_2=0.$$

Биринчи тенгламадан $s_1=0$ эканлиги кўриниб турибди. s_1 нинг нолга тенг қиймати иккинчи тенгламага қўйилса, $s_2=-p$ бўлиб чиқади. Шу билан лемма исбот бўлди.

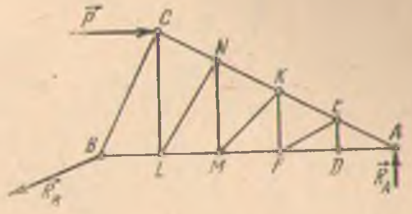


46-расм.

47-расм.



48-расм.



49-расм.

... 18-§ ларга доир масалалар

... Кўтариш крани 47-расмда кўрсатилган ферма шаклида ... бўлиб, $G=20$ кН юк кўтариб турибди. Ўлчамлар ... кўрсатилган. Краннинг таянч реакцияларини ва стер... пайдо бўлган зўриқиш кучларини топинг. Жавоб: ... кН; $R_B=28,3$ кН.

... Ферманинг C тугунига вертикал йўналган $P=5$ кН куч ... (48-расм). Ўлчамлар расмда кўрсатилган. Ферманинг ... реакцияларини ва стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучларини топинг. Жавоб: $R_A=6,66$ кН, $R_B=8,33$ кН.

... Олдинги масалада тилга олинган фермада P куч йўна... ўзгартирмасдан C тугунга эмас, A тугунга қўйилса, ... реакциялари ва стерженларидаги зўриқиш кучлари ни... тенг бўлади?

... Таянч реакциялари олдин аниқлаб қўйилган ферманинг ... лари нолга тенг бўлган стерженларини фермалар ... леммалардан фойдаланиб аниқланг (49-расм). Ишни ... тириш учун D, E, F, K, M, N тугунларни мана шу ... бирин-кетин кўриб чиқинг. Стерженларга номер ...инг.

3-БОБ КУЧНИНГ МАРКАЗГА ВА ЎҚҚА НИСБАТАН МОМЕНТЛАРИ

19-§. Кучнинг марказга нисбатан моменти

Тажрибанинг кўрсатишича, жисмга куч таъсир қилганда ... илгарилама ҳаракатга келтиришдан ташқари баъзан би... марказ атрофида айлантиради ҳам.

Чизма текислигига тик бўлган қўзғалмас ўқ атрофида ай... оладиган қаттиқ жисмнинг A нуқтасига ўша текисликда ... F куч қўйилган деб фараз қиламиз (50-расм). Жисм ...илган қўзғалмас ўқ чизма текислигини O нуқтада кесиб ... O марказдан F кучнинг таъсир чизиғига тик қилиб

50-расм.

51-расм.

туширилган h кесма кучнинг O марказга нисбатан
деб аталади. O нуқта *момент маркази* дейилади. К
қўйилиш нуқтасини таъсир чизиғи бўйлаб кўчириш
бўлгани сабабли кучнинг жисмни айлантириш таъсири
сага: 1) кучнинг F модули ва h елка узунлигига, 2)
каздан ва F кучдан ўтадиган OAB бурилиш текисли
вазиятига, ниҳоят, 3) бу текисликда бурилиш йўнал
боғлиқ. Кучнинг жисмга курсатадиган айлантириш т
миқдор жиҳатдан кучнинг марказга нисбатан моменти
тушунча орқали ифодаланади. *Кучнинг марказга нис*
моменти деб куч модули билан кучнинг ўша нуқтага н
тан елкасининг плюс ёки минус ишора билан олинган кў
масига айтилади. Бу момент *алгебраик момент* дейила
кучнинг O марказга нисбатан олинган алгебраик мо
$m_0(F)$ символ билан белгиланади. Таърифга биноан,

$$m_0(F) = \pm Fh.$$

Агар F куч жисмни O марказ атрофида соат стрелкаси
нишига тескари айлантирмоқчи бўлса, моментнинг ишор
мусбат қилиб, акс ҳолда манфий қилиб олинади. Куч
марказга нисбатан моментининг ўлчов бирлиги куч бирл
нинг узунлик бирлигига кўпайтмасига тенг. Куч Ньютон
собида, узунлик метр ҳисобида ўлчанса, моментнинг ў
бирлиги 1 Н · м бўлади. Кучнинг марказга нисбатан момен
нинг таърифидан кучни ўз таъсир чизиғи бўйлаб кўчирга
ўзгармас момент келиб чиқади. Агар кучнинг таъсир чиз
момент марказидан ўтса (яъни $h=0$ бўлса), кучнинг
марказга нисбатан моменти нолга тенг бўлади, Марказга н
батан моментнинг сон қиймати OAB учбурчак юзининг ик
ланганига тенг (50-расмга қаранг). Бу учбурчакда AB то
куч бирликларида ифодаланганини учун OAB учбурчакнинг ю
юз бирликларида эмас, куч моменти бирликларида ифода
нади.

... тенг таъсир этувчининг моменти тўғрисида Вариньон теоремаси

... текисликда жойлашган кесишувчи кучлар тенг ... нинг бирор марказга нисбатан олинган момен... кучларнинг ўша марказга нисбатан олинган ...нинг алгебраик йиғиндисига тенг.

... исбот этиш учун текисликда A нуқтада ке... $F_1, F_2, \ldots, F_n$) кучлар системаси кўриб чиқилади ... Ихтиёрий O марказ олиб, у орқали OA кесмага ... Ox ўқи ўтказилади: ўқнинг мусбат йўналиши шун... кучларнинг ҳар бирининг O марказга нисбатан моменти... кучнинг ўқдаги проекциясининг ишораси билан ... бўлади. Энди $m_0(F_1)$, $m_0(F_2)$, ..., $m_0(F_n)$ момент... ифодаси аниқланади. (12) формулага асосан $m_0(F_1)=$ ... OAB_1 юзи. OAB_1 учбурчакнинг юзи асоси билан ба... кўпайтмасининг ярмига тенг. Бу ерда асоси деб OA ... олинса, баландлик Ob_1 бўлади: $2\Delta\, OAB_1$ юзи $OA \cdot Ob_1$, ... Ob_1 кесма F_1 кучнинг Ox ўқидаги проекциясини бил..., $Ob_1 = F_{1x}$. Шунинг учун

$$m_0(F_1) = OA \cdot F_{1x}. \tag{13}$$

... кучларнинг моменти ҳам шу каби ҳисобланади. F куч ... ўқдан пастда ётганда ҳам (13) формула тўғри бўла..., бунда кучнинг проекцияси манфий бўлганлиги учун ...нинг ишораси ҳам манфий бўлади.

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси R билан ...нилди, $R=\sum F_k$. Энди 10-§ да тилга олинган теорема... фойдаланиб, тенг таъсир этувчининг бирор ўқдаги (маса... ўқидаги) проекцияси қўшилувчи кучларнинг ўша ўқ... проекцияларининг йиғиндисига тенг экани, яъни $R_x = \sum F_{kx}$ экани аниқланади. Бу тенгликнинг иккала томони ... га кўпайтирилади.

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx}).$$

... тенгликнинг чап томонида OA билан тенг таъсир этувчи... x ўқидаги R_x проекцияси кўпайтмаси турибди. (13) фор...га асосан бу кўпайтма $m_0(R)$ га, яъни тенг таъсир этув...нинг O марказга нисбатан моментига тенг. Ўнг томондаги ...ма ичидаги кўпайтма эса ҳар бир кучнинг O га нисбатан ...ментини билдиради. Демак, юқоридаги тенглик

$$m_0(R) = \sum m_0(F_k). \tag{14}$$

...шида ёзилади. Теорема шу билан исбот этилди. (14) фор...маси Вариньон теоремасининг математик ифодасидир.

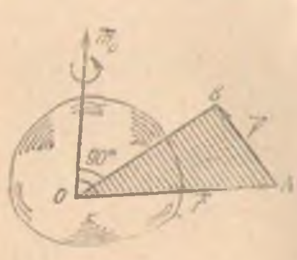
21-§. Кучнинг марказга нисбатан моментининг ве...

Қаттиқ жисмга қўйилган фазовий кучлар система... ганишда кучнинг марказга нисбатан моменти тушун... бирмунча кенгроқ баён этган маъқул.

F кучнинг жисмни айлантириш таъсири сифатидаги ... ти уч нарсага боғлиқ эканини, яъни 1) моментнинг мо... 2) F кучнинг таъсир чизиғи ва O марказдан ўтадиган ... бурилиш текислигининг вазиятига ҳамда 3) ўша текис... бурилиш йўналишига боғлиқ эканлиги айтиб ўтилга... Ҳамма кучлар ва O марказ бир текисликда жойлашган ... OAB бурилиш текислигининг вазиятини доим таърифлаб ... беришга эҳтиёж қолмайди, шунинг учун кучнинг O га ... тан моментини $\pm Fh$ га тенг бўлган алгебраик скаляр ... деб таърифлаш мумкин. Бу ердаги ишора бурилиш й... шини кўрсатади.

Бироқ кучлар фазода ихтиёрий равишда жойлашга... да ҳар хил кучларнинг бурилиш текислиги турлича ва... бўлиб, улар қўшимча равишда тавсифлаб берилиши ... Маълумки, текисликнинг фазодаги вазияти бу текислик... бўлган кесма (вектор) орқали ифодаланади. Агар бу ве... нинг модули куч моментининг модулига тенг бўлади... бу векторнинг йўналиши кучнинг бурищ йўналишини к... тадиган қилиб олинса, у ҳолда бу вектор кучнинг мар... нисбатан моментининг учала характеристикасини тўлиқ ... лайди. Бу вектор $m_0(F)$ символ билан белгиланади.

Шунинг учун умумий ҳолда F кучнинг O марказга ни... тан олинган $m_0(F)$ моменти O марказга қўйилган m_0 ве... билан белгиланади, унинг модули маълум масштабда F ... нинг модули билан h елка кўпайтмасига тенг бўлиб, ўз... O марказдан ва F кучдан ўтадиган OAB текисликка ти... лади (52-расм). m_0 векторни шундай томонга йўналти... керакки, унинг учидан туриб қаралганда куч OAB текисл... соат стрелкасининг ҳаракатига тескари айлантиралиган ... син. Демак, m_0 вектор уч нарсани, яъни моментнинг моду... ни, ҳар хил кучлар учун ҳар хил бўлган бурилиш теки... гининг вазиятини, ўша текисли... бурилиш йўналишини билдиради. ... векторнинг қўйилиш нуқтаси мом... олинадиган марказнинг ўрнини к... сатади. Кучнинг марказга нисба... моменти қанча момент бирли... (Н · м. га) тенг булса, бу момен... тасвирлайдиган m_0 векторнинг узу... лиги масштабга мос келадиган шу... узунлик бирлигига тенг бўлади. Ку... нинг марказга нисбатан моментини... вектори сирпанувчи вектордир.



52-расм.

Кучнинг марказга нисбатан моментини вектор кўпайтма орқали ифодалаш

...нарсани эслатиб ўтиш керак: a ва b векторларнинг вектор кўпайтмаси шундай бир c вектордирки, бу c вектор ... ётган текисликка тик бўлиб, шундай томонга йўналганки, унинг учидан туриб қаралганда a ни b нинг устига ... йўл билан тушириш учун уни соат стрелкаси ҳаракатига тескари буриш керак. c векторнинг модули маълум ... OA ва F векторлардан ясалган параллелограммнинг ... OA ва F векторларнинг $\overrightarrow{OA} \times F$ вектор кўпайтмаси (52-расм) кўриб чиқишда вектор кўпайтманинг таърифидан фойдаланилади. $\overrightarrow{OA}$ ва F векторлардан ясалган параллелограмнинг юзи иккита OAB учбурчакнинг юзига тенг. Таърифга асосан, вектор кўпайтманинг модули

$$\left|\overrightarrow{OA} \times F\right| = 2\,\Delta OAB \text{ юзи.}$$

... m_0 векторнинг модули ҳам $2\,\Delta OAB$ юзига тенг, шунинг учун

$$\left|\overrightarrow{OA} \times F\right| = m_0.$$

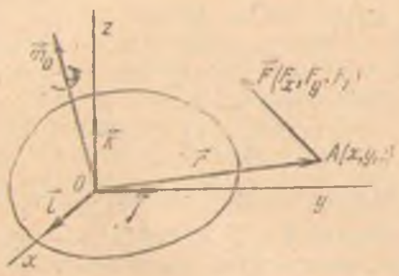
$\overrightarrow{OA} \times F$ вектор OAB текисликка тик бўлиб, шундай томонга йўналганки, унинг учидан туриб қаралганда OA ни F нинг устига энг қисқа йўл билан тушириш учун соат стрелкаси ҳаракатига тескари буриш керак. $\overrightarrow{OA} \times F$ вектор m_0 вектор билан бир хил йўналган. Демак, $OA \times F$ вектор билан ... векторнинг модули тенг, йўналиши бир хил. Ундан ташқари, бу икки вектор ўлчов бирлиги жиҳатидан айни бир ... ифодалайди. Шунинг учун

$$m_0 = \overrightarrow{OA} \times F \text{ ёки } m_0 = r \times F \tag{15}$$

... ёзилади, бу ерда $\overrightarrow{OA} = r$ вектор A нуқтанинг O марказга нисбатан *радиус-вектори* деб аталади. Куч моментининг (15) ифодасидан баъзи теоремаларни исбот этишда фойдаланилади.

F кучнинг O марказга нисбатан олинган моменти O марказни куч қўйилган A нуқтага туташтирувчи r радиус-вектор билан кучнинг вектор кўпайтмасига тенг.

(15) формула m_0 моментни аналитик равишда ҳисоблаб ... ҳам имкон беради. O марказ орқали $Oxyz$ координата ўқлари ўтказилади (53-расм). Бу ўқларда F кучнинг F_x, F_y, F_z проекциялари ва куч қўйилган A нуқтанинг x, y, z координаталари берилган бўлсин, деб фараз қиламиз. У ... икки векторнинг кўпайтмасини детерминант билан ифо-



53-расм.

54-расм.

далаш формуласига асосан, m_0 вектор қуйидагича иф
нали:

$$m_0 = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

бу ердаги i, j, k — координата ўқларининг бирлик вектор x, y, z — r радиус-векторнинг ўқлардаги проекциялари, A нуқтанинг координаталари. Ҳар қандай вектор ка векторни ҳам бирлик векторлар орқали $m_0 = m_{0x} i + m_{0y} j$ $+ m_{0z} k$ шаклида ёйиш мумкин. Демак, (15) детерминант ринчи йўл элементлари бўйича ёйилса, m_0 векторнинг к дината ўқларидаги проекциялари

$$m_{0x} = yF_{xz} - F_y, \quad m_{0y} = zF_x - xF_z, \quad m_{0z} = xF_y - yF_x$$

тенгликлар билан ифодаланади. Бу проекциялардан фойд ниб m_0 векторнинг модулини ва йўналишини (йўналтиру косинусларини) аниқлаш мумкин:

$$m_0 = \sqrt{m_{0x}^2 + m_{0y}^2 + m_{0z}^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{m_{0x}}{m_0}, \quad \cos\beta = \frac{m_{0y}}{m_0}, \quad \cos\gamma = \frac{m_{0z}}{m_0}.$$

23-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти

Кучлар фазода ихтиёрий жойлаштирилганда статика ма лаларини ечишда кучнинг ўққа нисбатан моменти тушун сидан фойдаланилади. Кучнинг ўққа нисбатан моменти кучни жисмни аниқ бир ўқ атрофида айлантириш кучини билди ди.

Бирор z ўқи атрофида айлана оладиган қаттиқ жисм кўриб чиқамиз (54-расм). Бу жисмнинг A нуқтасига F к

... Бу куч z ўқи билан бир текисликда ётмайди. Ўқда... O нуқтадан z ўқига тик қилиб xy текисликни ўтки... ... икки тузувчига ажратилади. Бу тузувчилардан ... ўқига, иккинчиси xy текисликка параллел қилиб ... Биринчи тузувчи F_z, иккинчи тузувчи F_{xy} билан ... (F_{xy} тузувчи берилган F кучнинг xy текислик... ...проекцияси бўлади.) F_z куч z ўқига параллел бўлиб ... учун жисмни бу ўқ атрофида айлантира олмайди, ... жисмни ўқ бўйлаб суришга интилади. Демак, F куч... ... айлантириш таъсири F_{xy} тузувчи ҳосил қилаётган ... билан бир хил бўлади. Шунинг учун F кучнинг z ... нисбатан моментини $m_z(F)$ билан белгилаб,

$$m_z(F) = m_z(F_{xy})$$

... $m_z(F_{xy})$ символ эса F_{xy} кучнинг z ўқига нисбатан ... билдиради. z ўқига тик бўлган текисликда ётган ... кучнинг (тўғриси, кучнинг текисликдаги проекциясининг) ... таъсири F_{xy} кучнинг модули билан кучдан ўққа... ... h масофа кўпайтмаси орқали ифодаланади. Бироқ ... кучнинг z ўқи билан xy текислик кесишган O нуқтага ... моменти ҳам ўша $F_{xy}h$ кўпайтма орқали ифодалана... Шунга қараб $m_z(F_{xy}) = m_0(F_{xy})$ ёки юқоридаги тенглик... ...,

$$m_z(F) = m_0(F_{xy}) = \pm F_{xy}h \tag{16}$$

... ни оламиз. Бу ифода эса кучнинг ўққа нисбатан мо... ...нинг таърифидир: кучнинг ўққа нисбатан моменти алге... ... миқдор бўлиб, кучнинг ўққа тик бўлган текисликдаги ... ...кесилган ўқ билан текислик кесишган нуқтага нисбатан ... моментга тенг.

... нисбатан моментнинг ишораси қуйидагича аниқлана... ... z ўқининг мусбат учидан туриб қаралганда F_{xy} про... ... жисмни O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига ... айлантиришга интилса, моментнинг ишораси мусбат ... олинади, соат стрелкаси ҳаракати бўйича айлантиришга ..., ишора манфий қилиб олинади.

...нинг ўққа нисбатан моментини унинг F_{xy} проекцияси ... марказидан тузилган Oab учбурчакнинг иккиланган ... орқали ифодалаш ҳам мумкин:

$$m_z(F) = \pm 2\,\Delta Oab \text{ юзи.}$$

...нинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш босқичларини ... кўрамиз. F кучнинг бирор z ўқига нисбатан моментини ... учун: 1) z ўқига тик қилиб xy текислик ўтказила... ... текисликни z ўқининг ҳар қандай нуқтасидан ўтказиш ...; 2) F кучни ўша текисликка проекциялаб, F_{xy} про... ...нинг модули аниқланади; 3) z ўқи билан xy текислик ... O нуқтадан F_{xy} проекциянинг таъсир чизиғига тик

кесма ўтказиб, унинг h узунлиги аниқланади; 4) F_{xy} ...
ма ҳисоблаб аниқланади, 5) моментнинг ишораси ан...

F кучнинг z ўқига нисбатан моменти таърифидан ... нинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. F кучни ўзининг таъсир чизиғи бўйлаб бошқа ... қўйганда кучнинг ўққа нисбатан моменти ўзгармайди ... бу ҳолда F кучнинг xy текисликдаги F_{xy} проекцияси ... елкаси ҳам ўзгармайди.

2. Агар куч ўқни кесиб ўтса, кучнинг ўққа нисбатан ... менти нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда h елка нол...

3. Агар куч ўққа параллел бўлса, кучнинг ўққа ... моменти нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда кучни... тик бўлган текисликдаги проекцияси нолга тенг.

2 ва 3-хоссаларни бирлаштириб, куч билан ўқ бир... ликда ётса, кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга ... оламиз, чунки куч билан ўқ бир текисликда ётганда к... кесиб ўтиши ёки ўққа параллел бўлиши мумкин.

4. Агар куч ўққа тик бўлса, кучнинг шу ўққа ... моменти куч модули билан кучдан ўққача бўлган ма... кўпайтмасига тенг.

24-§. Кучнинг ўққа нисбатан моментининг аналитик ифодалари

$Oxyz$ координата системасида жисмга $A(x, y, z)$ ... F куч қўйилган (55-расм). Бу кучнинг z ўқига нисб... менти аналитик равишда аниқланади. Бунинг учун ... ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш босқичлари т... куч ўққа тик бўлган текисликка проекцияланади ва т... асосан,

$$m_z(F) = m_0(F_{xy})$$

тарзида ёзилади. xy текисликдаги F_{xy} проекция x ва ... ри бўйлаб йўналган икки F_x ва F_y тузувчига ажр... $F_{xy} = F_x + F_y$. Текисликда жойлашган кесишувчи куч... тенг таъсир этувчисининг моменти тўғрисидаги Вари... оремасидан фойдаланиб,

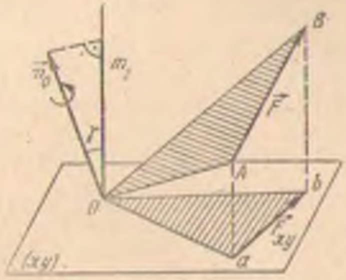
$$m_0(F_{xy}) = m_0(F_x) + m_0(F_y)$$

тенглик ёзилади. F_x кучнинг O нуқтага нисбатан ел... кесма, F_y кучнинг елкаси эса x кесмадир. Шунинг учун... да $m_0(F_x) = -yF_x$, $m_0(F_y) = xF_y$ экани кўринади (F... жисмни O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракати ... бурганi учун унинг моменти манфий). Моментлари... ифодаларини юқоридаги формулага қўямиз. Демак,

$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

Қолган икки ўққа нисбатан моментлар ҳам шу тарик... ланади. Ҳар гал куч момент олиниши керак бўлган ўқ...

55-расм.



56-расм.

...проекцияланади, кучнинг проекцияси икки ўқ ...тилган тузувчиларга ажратилади, Вариньон теоре...маси ...тилади ва ҳоказо. Ниҳоят,

$$m_x(F) = yF_z - zF_y,$$
$$m_y(F) = zF_x - xF_z, \qquad (17)$$
$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

...лар ҳосил бўлади. Булар кучнинг координата ўқла...рига нисбатан олинган моментининг аналитик ифодаларидир. ...нинг координата ўқларидаги проекциялари ва қўйилиш ...нинг координаталари маълум бўлган ҳолда моментни ...мулалардан фойдаланиб ҳисоблаб чиқариш мумкин.

... Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан марказга нисбатан моменти орасидаги муносабат

...тиқ жисмга бирор A нуқтада F куч қўйилган бўлсин ... Бирор z ўқи ўтказиб, унда ихтиёрий бир O нуқта ... Унда F кучдан O марказга нисбатан олинган момент... вектори O нуқтага қўйилган бўлиб, OAB текисликка ... ва модули ΔOAB юзининг иккиланганига тенг ...:

$$m_0 = 2\Delta OAB \text{ нинг юзи},$$

... z ўқига тик қилиб xy текислик ўтказамиз. F куч... z ўқига нисбатан $m_z(F)$ моментини аниқлаш учун кучни ... проекциялаб, F_{xy} проекциянинг ўқ билан те...кесишган O нуқтага нисбатан моментини аниқлаймиз. ...нинг сон қиймати Oab учбурчак юзининг иккилан...ига тенг:

$$m_z(F) = 2\Delta Oab \text{ юзаси}.$$

... Oab учбурчак OAB учбурчакнинг xy текисликдаги ...дир. Геометриядан маълумки, текис шакл проек-

шиненинг юзи проекцияланаётган шаклнинг юзи бил
на проекция ётган текисликлар орасидаги икки ёқли
косинусининг кўпайтмасига тенг. Текисликлар орасида
ёқли бурчак эса бу текисликларга ўтказилган тик ч
(нормаллар) орасидаги бурчакка тенг. OAB учбурчак
лигига ўтказилган тик чизиқ m_0 вектор, Oab учбурчак
лигига ўтказилган тик чизиқ z ўқидир. m_0 вектор
ўқи орасидаги бурчакни γ билан белгилаб,

$$\Delta Oab \text{ юзи} = \Delta OAB \text{ юзи} \cos\gamma.$$

тарзида ёза оламиз. Бу тенгликнинг иккала томони
кўпайтириб, OAB ва Oab учбурчак юзларининг икки
мос равишда m_0 ва $m_z(F)$ га тенг эканини ҳисобга ол

$$m_z(F) = m_0 \cos\gamma$$

тарзида ёза оламиз. $m_0 \cos\gamma$ кўпайтма $m_0 = m_0(F)$ век
z ўқидаги проекциясини ифодалагани учун (18) тен
яна

$$m_z(F) = m_{0z} \text{ ёки } m_z(F) = [m_0(F)]_z$$

шаклида ёзиш мумкин. Охирги тенгликнинг ўнг томо
ифода кучнинг O марказга нисбатан олинган моменти
ўқидаги проекциясини билдиради. Агар z ўқида O нуқ
ўрни ўзгартирилса, у ҳолда m_0 векторнинг сон қийм
йўналиши ўзгаради, чунки ҳар гал OAB учбурчак ўзг
бироқ m_0 векторнинг z ўқидаги проекцияси Oab учбурча
иккиланган юзига тенг бўлгани ҳолда ўзгармай қолав
Натижада қуйидаги теорема исбот қилинди; F кучнинг
га нисбатан моменти шу кучнинг z ўқидаги ихтиёрий м
га нисбатан олинган моментини тасвирловчи векторнин
ўқдаги проекциясига тенг.

Шу теореманинг татбиқи сифатида кучнинг ўққа ни
моментининг аналитик ифодаларини унинг марказга ни
моменти векторининг учинчи тартибли детерминант
ёзилган (15′) ифодасидан келтириб чиқарамиз. m_0 векто
қандай вектор каби бирлик векторлар орқали $m_0 = m$
$+ m_{0y} j + m_{0z} k$ шаклида ёзилади, бу ердаги m_{0x}, m_{0y}, m
$- m_0$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялар
зиргина исбот этилган теоремага асосан, бу проекциялар
нинг тегишли координата ўқига нисбатан олинган моме
тенг. m_0 векторнинг m_{0x}, m_{0y}, m_{0z} проекциялари (15″) ф
лада (22-§ га қаранг) ифодаланган эди. Шунинг учун

$$m_x(F) = yF_z - zF_y,$$
$$m_y(F) = zF_x - xF_z,$$
$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

Бу формулалар 21-§ да чиқарилган (17) формулалар
бир хил.

26-§. Жуфт куч. Жуфт куч моменти

...ктаб физика курсидан маълумки, йўналишлари ...лган иккита F_1 ва F_2 параллел кучнинг (57-расм, *а*) ...сир этувчи R кучи қўшилувчи кучлар билан бир хил ...н бўлиб, унинг модули қўшилувчи кучлар модуллари...индисига тенг: $R = F_1 + F_2$. Тенг таъсир этувчи R ...йилган C нуқта кучлар қўйилган A ва B нуқталар ора... кесмани кучларнинг модулларига таскари пропорцио...лган бўлакларга бўлади, яъни

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{19}$$

...рциянинг хоссаларига асосан, бу тенгликдан

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AC + BC}{F_1 + F_2}$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R} \tag{20}$$

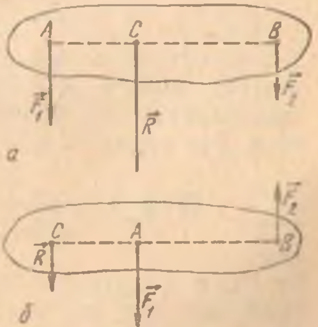
...ликларни келтириб чиқариш мумкин.

...налишлари қарама-қарши бўлган иккита F_1 ва F_2 парал...кучларнинг (57-расм, *б*) тенг таъсир этувчи R кучи кат... билан бир хил йўналган бўлиб, унинг модули бу куч...дулларининг айирмасига тенг $R = F_1 - F_2$. Тенг таъсир ...и R куч қўйилган C нуқта AB кесманинг давомида ... куч қўйилган нуқтадан нарида A ва B нуқталардан ...ри тескари пропорционал бўлган масофаларда туради:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}; \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}. \tag{21}$$

...лари параллел, модуллари тенг ва қарама-қарши йўнал... иккита F ва F' кучдан иборат система (58-расм) *жуфт*

57 расм.



58 расм.

куч ёки қисқача, *жуфт* дейилади. Жуфт куч (F, F') билан белгиланади. Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси бўлмайди, бироқ жуфтнинг бир чизиқда ётмайдиган параллел кучлари (кучлари) мувозанатланмайди, ўзлари қўйилган жисмни айлантиришга интилади. Тенг таъсир этувчиси бўлмаганн учун жуфт кучни бир куч билан мувозанатлаш мумкин бўлмайди. Жуфт ҳосил қилиб турган кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги масофа *жуфтнинг елкаси* дейилади. Жуфт кучнинг таъсир чизиқлари орқали ўтадиган текислик *жуфтнинг таъсир текислиги* дейилади. Жисмга жуфт айлантириш таъсирини кўрсатади, бу таъсир уч нарсага: 1) жуфт кучнинг F модули ва h елка узунлигига, 2) жуфт таъсир текислигининг вазиятига ва ниҳоят, 3) бу текисликда бурилиш йўналишига боғлиқ. Айлантириш таъсири жуфт моменти деган тушунча билан тавсифланади. Бу тушунча қуйидагича таърифланади: *жуфт моменти* деб жуфт кучдан бирининг модули билан жуфт елкасининг тегишли ишора билан олинган кўпайтмасига айтилади. Жуфт моменти m ҳарфи билан белгиланади. Таърифга асосан,

$$m = \pm Fh.$$

Жуфт куч жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари бурганда жуфт моментини мусбат, соат стрелкаси ҳаракати бўйича бурганда момент манфий ҳисобланади. Кучнинг марказга нисбатан олинган алгебраик моментида ҳам ишора қоидаси ана шундай эди. Жуфт моменти билан кучнинг марказга нисбатан моментининг белгисида бир нарсага эътибор қилиш: жуфт моментида m ҳарфининг ёнида ҳеч қандай индекс йўқ, кучнинг марказга нисбатан моментини кўрсатувчи m ҳарфининг ёнида эса момент марказини кўрсатувчи ҳарф (масалан, O ёки A индекс) бор. Жуфт моменти худди куч моменти ўлчанадиган бирликлар билан ифодаланади. 58-расмдан жуфт моменти жуфт тузувчи кучлардан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтага нисбатан олинган моментига тенг экани кўриниб турибди, яъни

$$m = m_B(F) = m_A(F').$$

Жуфт кучлар назарияси статиканинг асосий масаласини, яъни қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системасининг мувозанат шартларини энг умумий ҳолда аниқлаш масаласини анча осон ҳал қилишга имкон беради.

27-§. Бир текисликда жойлашган эквивалент жуфтлар тўғрисида теорема

Икки жуфтнинг бир-бирига эквивалент бўлиш шартини аниқлаш учун теорема исбот қиламиз: жуфтнинг жисмга кўрсатадиган механик таъсирини ўзгартирмасдан жуфтни бошқа жуфт билан алмаштириш мумкин, бу жуфт ўша текисл

... унинг моменти берилган жуфт моментига тенг бў... ...

... елкаси h бўлган (F, F') жуфт таъсир қилаётган ... (59-расм). Бу жуфт моменти $m = Fh$. Статиканинг ... аксиомасига биноан, (F, F') жуфтга мувозанатлашган ... кучлар A ва B нуқталарда қўшилади: $(Q, Q') \Longleftrightarrow 0$. ... куч икки тузувчига ажратилади, улардан бири Q ... иккинчиси P билан белгиланади; F' куч ҳам Q' ва ... ажратилади. Бу ерда $P = -P'$, $Q = -Q'$. Лекин ... кучлар нолга эквивалент бўлгани учун, уларни ик... аксиомага асосан ташлаб юбориш мумкин. Натижада ... жуфт ўша текисликда ётган (P, P') жуфт билан ал... бироқ бу жуфтнинг елкаси ҳам, кучлари ҳам ... бошқача, P ва P' кучларни ўзларининг таъ... чизиқларида C ва D нуқталарга кўчириш мумкин.

... P') жуфтнинг елкаси, яъни AC ва BD тўғри чизиқлар ... масофа d билан белгиланади.

... (F, F') ва (P, P') жуфтларнинг алгебраик ... тенг эканлиги кўриб чиқилади. F куч Q ва P куч... тенг таъсир этувчиси бўлгани, яъни $F = Q + P$ бўл... сабабли унга Вариньон теоремаси татбиқ этилади:

$$m_B(F) = m_B(Q) + m_B(P).$$

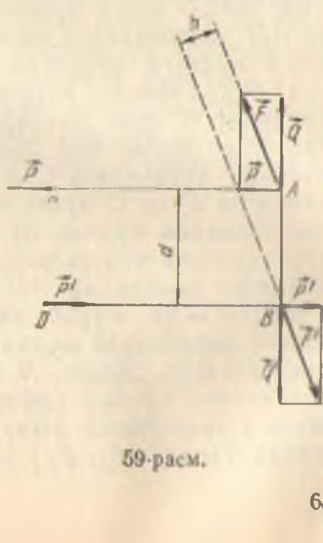
... $m_B(F) = Fh$, $m_B(Q) = 0$ (чунки Q нинг таъсир чизиғи ... ўтади), $m_B(P) = Pd$; бинобарин $Fh = Pd$, яъни ... ва (P, P') жуфтларнинг моментлари тенг. Шу билан ... исбот бўлди.

... теоремадан жуфт кучнинг хоссалари келиб чиқади.

... Жуфтни ўзининг таъсир текислигида ҳар қандай вазият... кўчириш мумкин, бунда жуфтнинг жисмга кўрсатадиган ... ўзгармайди.

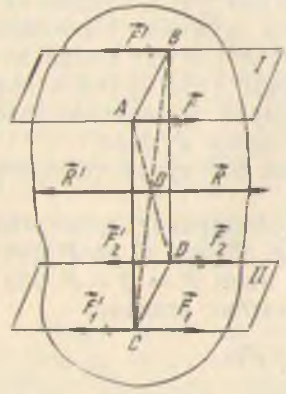
... Жуфт куч модули ва елка... узунлигини моменти ўзгар... қилиб ўзгартириш мум..., бунда жуфтнинг жисмга кўр... таъсири ўзгармайди.

... этилган теорема ва ундан ... чиққан хоссаларга асосланиб ... бир текисликда ётган ва мо... бир хил бўлган икки ... бир-бирига эквивалент бўла... хулосага келамиз (экви... шарти), чунки бу жуфт... таъсир текислигида кўчириш ва ... ўзгартириш йўли билан ... бир-бирига айлантириш мум... Шунинг учун жуфт куч кў... айланиш йўналишини кўрса...



59-расм.

60-расм.



61-расм.

тадиган айланма стрелка бил
вирланади, бунда жуфтнинг
ри чизилмайди, масалан, 60-
жисмга моментлари m_1 ва m_2
иккита жуфт таъсир этяпти; бу
лар жисмнинг қайси нуқталари
йилгани, уларнинг кучлари
калари нимага тенг эканлиги м
аҳамиятга эга эмас, чунки ж
тавсифлаб бериш учун унинг мо
ни билиш етарли.

28-§. Жуфтни ўз текислиги параллел бўлган бошқа текисликка кўчириш тўғриси теорема

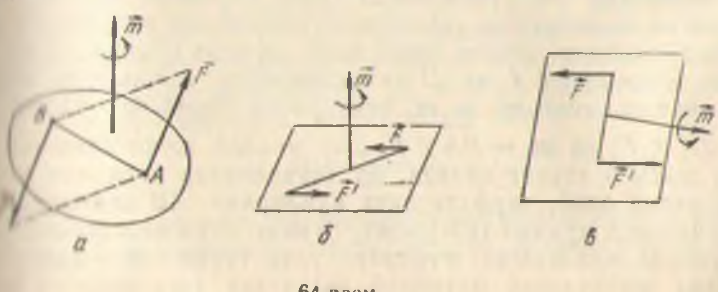
I. текисликда ётган (F, F') к
ни кўриб чиқамиз (61-расм.) Бу
нинг моменти $m = F \cdot AB$ бўл
жисмни соат стрелкаси ҳар
тескари бурсин. I текисликка п
лел қилиб жисмда II текислик
замиз, унда AB кесмага тенг
раллел CD кесма оламиз. C ва D
таларга ўзаро мувозанатлашган
куч қўямиз, бу кучларнинг модули бир-бирига ва бер
жуфт куч модулига тенг: $(F, F') \Longleftrightarrow 0$, $(F_2, F_2' \Longleftrightarrow 0$
$= F_1' = F_2 = F_2' = F' = F$. Жисмга ва нуқталарда қўй
кучлар, иккинчи аксиомага асосан, берилган жуфтнинг ж
га курсатадиган таъсирини ўзгартирмайди.

Энди бу олти куч иложи борича соддалаштирилади.
даги $ABCD$ шакл параллелограмм бўлгани учун, унин
ва AD диагоналлари кесишган O нуқтада тенг иккига бў
ли. B нуқтага қўйилган F' куч ва C нуқтага қўйилга
куч бир томонга йўналган параллел кучлар бўлгани
уларнинг R' тенг таъсир этувчиси ҳам уларга паралле
либ, улар билан бир томонга йўналган бўлади ва BC д
налнинг ўртасидаги O нуқтадан ўтади; $R' = 2F \cdot A$ ну
қўйилган F ва D нуқтага қўйилган F_2 куч бир томонга й
ган параллел кучлар бўлгани учун уларнинг R тенг та
этувчиси ҳам уларга параллел бўлиб, улар билан бир том
йўналган бўлади ва AD диагоналнинг ўртасидаги O нуқт
ўтади; $R = 2F$. Кўриб чиқилган тўртта кучнинг R ва R'
таъсир этувчилари модул жиҳатидан тенг бўлиб, қарама-
ши йўналган. Демак, R ва R' тенг таъсир этувчиларни
эквивалент кучлар сифатида ташлаб юбориш мумкин. Н
жада I текисликда ётган (F, F') жуфт II текисликда ё
худди ўзидай (F_1, F_2') жуфт билан алмаштирилади, чунки

...нинг кучлари модули тенг ва елкалари бир хил ... қилиб, қуйидаги теорема исбот этилди: агар жуфт ... таъсир текислигига параллел бўлган бошқа текис... кўчирилса, унинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгар...

29- §. Жуфт моментининг вектори

... айтиб ўтилганидек, жуфтнинг жисмга кўрсатадиган ...ирини таъсири: 1) жуфт моменти m модулига, 2) таъсир ...нинг вазиятига ва 3) бу текисликда буриш йўнали... боғлиқ. Агар бир текисликда ётмайдиган жуфтлар билан ...рошига тўғри келса, ҳар бир жуфтни тавсифлаш учун ... айтиб ўтилган учала характеристикани таъкидлаш ... бўлади. Шунинг учун жуфт моменти фазода тайинли ...нига эга бўлади, демак, жуфт моменти вектор экан. ...нинг таъсир текислигининг фазодаги вазияти ўша текис... тик қилиб ўтказилган чизиқнинг йўналиши билан аниқ... сабабли, жуфт моментини тасвирловчи вектор жуфт... таъсир текислигига тик қилиб йўналтирилади. Бу век...нинг узунлиги маълум масштабда жуфт моментининг сон ...тига (модулига) тенг қилиб олинади. Аниқроқ қилиб ... жуфт моменти қанча бирлик (қанча Н · м) бўлса, бу ...ининг узунлиги тегишли масштабда шунча узунлик ...ига тенг бўлади. Жуфт моменти m вектори жуфт те...ига тик қилиб шундай томонга йўналтириладики, унинг ... туриб жуфтга қаралганда жуфт жисмни соат стрелка...тига тескари айлантирмоқчи бўлади (62- расм). 62- ... a даги жуфт горизонтал текисликда таъсир этяпти, ... моментини тасвирловчи m вектор вертикал йўналган; ...м, $б$ даги жуфт вертикал текисликда таъсир этяпти, ... моментини тасвирловчи m вектор горизонтал йўналган. ...ктор қаерга қўйилишини айтиб ўтиш керак. 27 ва 28- § ... исбот этилган теоремалардан жуфтни ўз текислигида ...гин вазиятга кўчириш ва ўша текисликка параллел бўл... бошқа текисликка кўчириш мумкин деган хулоса чиқа...ган эди. Шунга қараб, жуфт моментини тасвирловчи m ...орни жисмнинг ҳар қандай нуқтасига қўямиз. фақат у



64-расм.

жуфтнинг таъсир текислигига тик бўлиши керак. Ж...
ментининг m вектори эркин вектордир (62-расм, a га ...

Дарҳақиқат, m вектор тайинли бир жуфтни тўли...
лайди, чунки m маълум бўлган ҳолда m га тик қили...
лик ўтказилса, бу текислик жуфтнинг таъсир текисли...
ди; m векторнинг узунлигини ўлчаб, жуфт мом...
модули аниқланади; m векторнинг йўналишига қа...
жуфтнинг жисмни қаёққа айлантириши аниқланади.

Маълумки, жуфт моментининг модули унинг куч...
бирининг иккинчи куч қўйилган нуқтага нисбатан ...
моментига тенг (26-§, (23) формулага қаранг), яъни ...
(F). Лекин бу моментларнинг векторлари бир хил й...
Шунинг учун

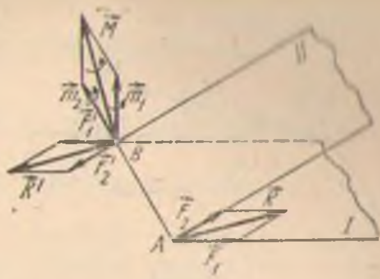
$$m = m_B(F) = m_A(F') \text{ ёки } m = \overrightarrow{BA} \times F = \overrightarrow{AB} \times F'$$

шаклида ёзилади.

Жуфтнинг жисмга кўрсатадиган таъсири m вектор...
аниқланишига асосланиб жуфтларнинг бир-бирига экв...
бўлиш шарти (27-§ га қаранг) умумийроқ кўринишда ...
ланади: агар икки жуфтнинг моментлари вектори тенг ...
бу жуфтлар бир-бирига эквивалент бўлади. Дарҳақи...
жуфтлар моменти векторлари m_1 ва m_2 билан белг...
уларнинг параллеллигидан бу жуфтларнинг параллел ...
ликларда ётиши келиб чиқади, 28-§ даги теоремага ...
жуфтлардан бирини иккинчи жуфт ётган текисликка к...
мумкин; ундан ташқари m_1 ва m_2 векторлар модулла...
тенг эканлигидан бу жуфтлар моментларининг сон қий...
ри тенг эканлиги келиб чиқади; m_1 ва m_2 векторлар б...
монга йўналганлигидан бу жуфтлар жисмни бир т...
айлантиради деган хулоса чиқади. Модомики, икки жуф...
текисликда ётиб, моментларининг сон қийматлари т...
жисмни бир томонга айлантирса, 27-§ даги теоремага ...
бу жуфтлар эквивалент бўлади.

30-§. Фазодаги жуфт кучларни қўшиш

Жуфтлар бир текисликда (ёки параллел текислик...
ётмаган, яъни фазода кесишувчи текисликлар жойлашган ...
кўриб чиқамиз. Лекин ишни икки жуфтни қўшишдан бо...
миз. Кесишувчи I ва II текисликларда жойлашган жу...
моментларининг m_1 ва m_2 векторлари берилган бўлсин: ...
$= \overrightarrow{BA} \times F_1$ ва $m_2 = \overrightarrow{BA} \times F_2$. Бу иккала жуфт айни бир...
тиқ жисмга таъсир қилади. Бу текисликлар кесишган чи...
AB кесма олиб, жуфтларнинг кучларини AB кесманинг ...
B учларига қўямиз (63-расм). Бунинг учун кесишувчи т...
ликларда жойлашган жуфтлар, улар тўғрисидаги теоре...
(27-§) фойдаланиб ихтиёрий вазиятдан ўша вазиятга к...



63-расм.

... вақтда жуфт-
... кучи на елкалари мо-
... ўзгармайдиган қилиб
...
... A нуқтага қўйилган
... F_1 кучлар, B нуқтага
... F_1' ва F_2' кучлар па-
...лелограмм қоидасига асос-
... қўшилади, уларнинг
... таъсир этувчилари R ва
...ган: $R = F_1 + F_2$, $R' =$
... F_2'; R куч билан R' куч
...ҳосил қилади, чунки улар ҳар хил (A ва B) нуқталарга
... бўлиб, жуфт куч ҳосил қилувчи тенг ва қарама-қарши
... кучларнинг тенг таъсир этувчиларидир. Натижада
(F_1, F_1') ва (F_2, F_2') жуфтлар битта (R, R') жуфт билан ал-
маштирилади, бу жуфт моменти вектори M билан белгиланса,
... вектор жуфт кучларидан бирининг иккинчиси қўйилган
нуқтага нисбатан олинган моменти векторига тенг бўлгани
... § даги (24) формулага асосан

$$M = \overrightarrow{BA} \times R$$

...ишида ёзилади. Бу вектор кўпайтмага R нинг $F_1 + F_2$
...трик йиғиндига тенг бўлган ифодасини қўйиб, кўпайт-
...ни очиб чиқамиз:

$$M = \overrightarrow{BA} \times (F_1 + F_2) = \overrightarrow{BA} \times F_1 + \overrightarrow{BA} \times F_2.$$

... ўнг томонда турган ҳадлар берилган жуфтлар момент-
...нинг m_1 ва m_2 векторларини билдиради, шунинг учун

$$M = m_1 + m_2 \qquad (25)$$

... ҳосил оламиз, яъни кесишувчи текисликларда жойлашган
... жуфт битта жуфтга эквивалент бўлиб, эквивалент жуфт-
... моменти вектори берилган жуфтлар моментлари вектор-
...нинг йиғиндисига тенг.

Демак, кесишувчи текисликларда жойлашган икки жуфтни
... учун улар моментларининг векторларини жисмнинг
... масалан, B нуқтасида параллелограмм қоидасига асосан
... керак. Жуфтларнинг ҳар иккитасига параллелограмм
...дасини кетма-кет татбиқ этиб, фазода жойлашган ҳар қан-
... жуфтни битта эквивалент жуфтга алмаштириш мумкин, бу
...валент жуфт моментининг M вектори берилган жуфт мо-
...ментлари векторларининг йиғиндисига тенг:

$$M = \sum m_k. \qquad (26)$$

... формула абсолют қаттиқ жисмга таъсир этувчи ҳар қан-
... жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, бу

62-расм.

жуфт моментининг векто...
шилувчи жуфтлар мом...
векторларининг йиғиндиси...
деган теоремани ифодалай...

Агар бордию жуфтлар... ҳаммаси айни бир теки... (ёки параллел текислик...) жойлашган бўлса, жуфт мо... лари векторларининг барчаси... раллел бўлади, бироқ жуфт... ментининг вектори эркин ... бўлгани учун уларнинг ҳа... сини бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналадиган қилиш ва ве... лар йиғиндиси [(26)] формула ўрнига алгебраик йиғинди... мумкин:

$$M = \sum m_k. \quad (\ldots)$$

Демак, қаттиқ жисмга бир текисликда ётиб таъсир этаё... жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, экв... лент жуфт моменти қўшилувчи жуфтлар моментларининг ... гебраик йиғиндисига тенг.

(26) формуладаги m_k векторлар бир текисликда ётма... ган ҳолда ҳисобни аналитик равишда олиб бориш қу... Координата ўқлари ўтказиб (64-расм) ва векторлар йиғи... сининг проекцияси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, (... формуладан M векторнинг координата ўқларидаги проекц... лари аниқланади:

$$M_x = \sum m_{kx}, \quad M_y = \sum m_{ky}, \quad M_z = \sum m_{kz}. \quad (\ldots)$$

Бу проекциялардан фойдаланиб, вектор ясаш мумкин. Ун... модули

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

формуладан аниқланади.

Мисол. Айни бир қаттиқ жисмга моментларининг с... қиймати $m_1 = 40$ Нм ва $m_2 = 30$ Нм бўлган икки жуфт таъс... этяпти. Бу жуфтлар орасидаги икки ёқли бурчаги 60° га те... бўлган кесишувчи текисликларда жойлашган. Мана шу ик... жуфтга эквивалент бўлган жуфт моменти векторининг с... қиймати аниқлансин.

Ечиш. Берилган жуфтлар моментларининг векторлари... параллелограмм қоидаси билан қўшиб, эквивалент жуфт м... менти векторининг M сон қийматини косинуслар теоремаси... биноан,

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_1 m_2 \cos(\widehat{m_1, m_2})}$$

формуладан аниқлаймиз. m_1 ва m_2 векторлар орасидаги бу... чак жуфтлар ётган текисликлар орасидаги 60° ли бурчак...

Шунинг учун берилган маълумотларни юқоридаги формулага қўйиб, ҳисоб қиламиз:

$$M = \sqrt{1600 + 900 + 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0{,}5} = \sqrt{3700} \approx 61 \text{ Нм}.$$

31-§. Жуфт кучларнинг мувозанат шарти

Агар қаттиқ жисмга фазода ихтиёрий жойлашган (кесишувчи текисликларда жойлашган) жуфтлар таъсир этса, уларни моментининг *M* вектори берилган жуфтлар моментлари векторларининг йиғиндисига тенг бўлган битта эквивалент жуфт билан алмаштириш мумкин. *M* вектор берилган жуфтлар моментларининг векторларидан тузилган кўпбурчакнинг ёпувчи томони билан тасвирланади, яъни

$$M = \sum m_k.$$

Қаттиқ жисмга таъсир этувчи жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу системага эквивалент бўлган жуфт моментининг вектори нолга тенг бўлиши ёки, бошқача айтганда, берилган жуфтлар моментларининг векторларидан тузилган кўпбурчак ёпиқ бўлиши зарур ва етарли. Демак, $M = 0$. Момент вектори нолга тенг бўлиши учун унинг координата ўқларидаги проекциялари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя. *M* векторнинг 30-§ даги (27) формулалар билан ифодаланган проекциялари нолга тенг:

$$\begin{aligned} M_x &= 0, & \qquad & \sum m_{kx} = 0, \\ M_y &= 0, & \text{ёки} \qquad & \sum m_{ky} = 0, \\ M_z &= 0, & \qquad & \sum m_{kz} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Демак, қаттиқ жисмга қўйилган жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун жуфт моментлари векторларининг ҳар бир координата ўқидаги проекцияларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.

Умумий ҳолда жуфт кучларни фақат битта жуфт билан мувозанатлаш мумкин, лекин битта куч билан ёки жуфтдан фарқ қиладиган бошқа система билан мувозанатлаб бўлмайди.

6-БОБ. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ РАВИШДА ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

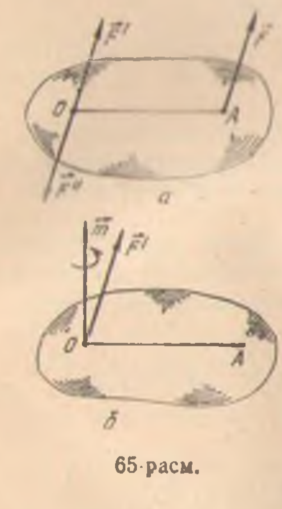
Системага қарашли кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишмаса ва бир-бирига параллел бўлмаса, бундай кучлар фазода ихтиёрий равишда жойлашган *кучлар системаси* дейилади. Лекин бу системада баъзи кучларнинг таъсир чизиқлари бир-бири билан кесишиши ёки параллел бўлиши ҳам мумкин.

32-§. Кучни ўзига параллел кўчириш тўғрисида теорема

Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар систем кучларни содда ҳолга келтириш, яъни статиканинг бир масаласини ечиш учун кучни ўзига параллел кўчириш ласини кўриб чиқамиз. Бу масалага бағишланган қуй теоремани исбот этамиз: жисмнинг бир нуқтасига қўй куч модули ва йўналиши худди ўшаникидек бўлган, бошқа нуқтага қўйилган куч ва жуфтга эквивалент бў

Жисмнинг A нуқтасига F куч қўйилган бўлсин (65- Уни бошқа O нуқтага кўчириш керак. Бунинг учун O нуқ бир-бирига модули тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қар қарши йўналган F' ва F'' куч қўйилади. Нолга экви бўлган бу кучларни берилган F кучга параллел бўлган т чизиқ бўйлаб йўналтириб, уларнинг модуллари берилга модулига тенг бўладиган қилиб олинади: $F' = F'' = F$. сиомага асосан уч кучдан иборат (F, F', F'') система бе ган F кучга эквиваленг. Демак, берилган F кучни ихти O нуқтага қўйилган $F' = F''$ куч ва (F, F'') жуфт билан маштириш мумкин. Шу билан теорема исбот этилди.

Бу теорема берилган кучни ўзига параллел қилиб жи нинг ҳар қандай бошқа нуқтасига кўчириш учун унга те ли жуфт қўшиш керак эканлигини кўрсатади. Шунинг у F кучни A нуқтадан O нуқтага кўчиришда ҳосил бўлади (F, F'') жуфт *қўшилма жуфт* деб, O нуқта *келтириш м* *кази* деб аталади. Равшанки, (F, F'') қўшилма жуфт мом тининг вектори



65-расм.

$$m = m_0(F)$$

бўлади, яъни қўшилма жуфт моме вектори берилган кучнинг келтир марказига нисбатан олинган моментин векторига тенг. Қўшилма жуфт моме вектори (F, F'') жуфтнинг таъсир теки лигига тик бўлиб йўналади, модул маълум масштабда жуфт моменти мод лига тенг ва шундай томонга йўна ганки, унинг учидан туриб жуфтга қ ралганда жуфт жисмни соат стрелк ҳаракатига тескари буради (29-§ га қ ранг). 65-расм, *а* даги кучларни б расм, *б* даги кўринишда тасвирлаш ҳ мумкин.

... Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучларни бир марказга келтириш

... параграфда статиканинг асосий теоремаси деб аталади... теорема исбот қилинади: фазода ихтиёрий равишда жой... ... кучлар системаси умумий ҳолда жисмнинг ихтиёрий ... нуқтасига қўйилган битта куч ва битта жуфтга эквивалент ...

... Ҳақиқатан, қаттиқ жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталари... ... чизиқлари фазода ихтиёрий равишда жойлашган ... $F_2, \ldots, F_n$) кучлар системаси қўйилган бўлсин (66-расм). ... O нуқтани келтириш маркази қилиб олинади-да, барча ... учун O марказга кўчирилади. Бунда кучни ўзига па... ... кўчириш тўғрисидаги теоремага асосан, жисмга O нуқ-...

$$F_1' = F_1, \quad F_2' = F_2, \; \ldots, \; F_n' = F_n \tag{30}$$

...енувчи кучлар системаси ва моментларининг векторлари ... формулага асосан

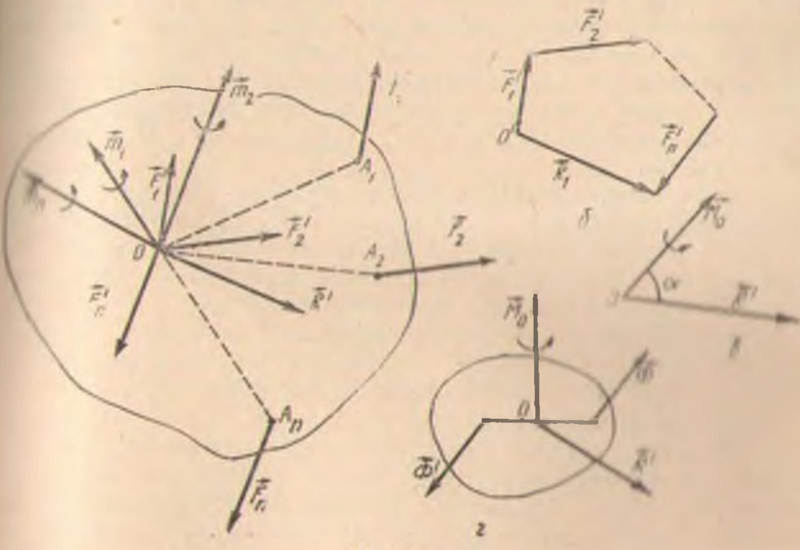
$$m_1 = m_0(F_1), \quad m_2 = m_0(F_2), \; \ldots, \; m_k = m_0(F_n) \tag{31}$$

... (F_1, F_1''), (F_2, F_2''), ..., (F_n, F_n'') қўшилма жуфтлар сис-...темаси таъсир қилади. 5-§ да кўрилганидек, O нуқтага қў-...йилган кучлар битта R' куч билан алмаштирилади, R' куч ... O нуқтага қўйилади:

$$R' = F_1' + F_2' + \ldots + F_n'$$

... (30) тенгликлар эътиборга олинса,

$$R' = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \quad \text{ёки} \quad R' = \sum F_k \tag{32}$$



66-расм.

бўлади. Бу формуладаги R' вектор ихтиёрий равишда жой-
лашган (F_1, F_2, ... ,F_n) кучлар системасининг геометрик й
ғиндиси, яъни куч кўпбурчагининг ёпувчи томони бўлиб,
бош вектор дейилади ва O нуқтага қўйилади (66- расм,
Бу R' куч фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлари
бош вектори бўл·ани учун (F_1, F_2, ... ,F_n) кучларнинг жи
га кўрсатадиган таъсирининг ўрнини боса олмайди, яъни
системага эквивалент бўла олмайди.

Ҳосил бўлган барча қўшилма жуфтларни қўшиш учун ул
нинг моментлари векторларини қўшиш керак. Натижада қ
шилма жуфтлар системаси битта (Φ, Φ') жуфтга алмашти
лади, унинг моментининг M_0 вектори

$$M_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

йиғиндига тенг. (31) тенгликлар эътиборга олинса, куч
системасининг O марказга нисбатан бош моменти деб атал
диган M_0 вектор

$$M_0 = m_0(F_1) + m_0(F_2) + \ldots + m_0(F_n) \text{ ёки } M_0 = \sum m_0(F_k) \quad (3$$

шаклида ёзилади ва кучлар системасининг O марказга нисб
тан олинган моментлари векторларининг йиғиндисига тенг б
лади (бу ерда M_0 векторга O индекс кучларнинг моменти
нуқтага нисбатан олинганлигини англатиш учун қўйилган
Шу билан теорема исбот этилди.

Энди параграфнинг бошида келтирилган теорема қуйид
гича таърифланади: фазода ихтиёрий равишда жойлашган куч
лар системаси бирор марказга келтирилганда умумий ҳол
шу кучларнинг бош векторига тенг бўлиб, ўша келтириш мар
казига қўйилган битта кучга ва моментининг вектори бу куч
лар системасининг ўша келтириш марказига нисбатан олинган
бош моментига тенг бўлган битта жуфтга эквивалент бўлади
Бу теоремани қисқача (F_1, F_2, ... , F_n) $\Longleftrightarrow$ (R', M_0) шаклид
ёзиш мумкин.

Бу системанинг кучлари фазода мутлақо ихтиёрий равиш
да жойлашганлиги учун бош моментнинг M_0 вектори R' бош
вектор билан ҳар қандай бурчак ҳосил қилиши мумкин (66
расм, *в*). Бош момент бирор текисликда ётган Φ, Φ') жуфт
нинг жисмга кўрсатадиган таъсирини билдиради (66-расм, *г*).

Одатда R' ва M_0 векторлар аналитик равишда, яъни улар
нинг координата ўқларидаги проекциялари орқали аниқланади
Координаталар бошини келтириш марказида оламиз.

Бош векторнинг координата ўқларидаги R'_x, R'_y, R'_z проек
цияларининг ифодалари билан олдин танишиб чиққанмиз (11-
га қаранг). M_0 векторнинг координата ўқларидаги проекция
ларини M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} билан белгилаймиз. Векторлар йиғин
дисининг ўқдаги проекцияси ҳақидаги теоремага асосан, $M_{ox} =$
$= \sum [m_o(F_k)]_x$ шаклида ёзамиз. Бироқ кучнинг ўққа нисбатан

... билан ўша ўқда ётган марказга нисбатан моменти ... теоремага асосан [25-§, (18) формулага қаранг], ... $= \sum m_x(F_k)$ тарзида ёзамиз. M_{oy} ва M_{oz} проекциялар ҳам ... аниқланади.

... R' бош вектор ва M_0 бош момент проекциялари ... аниқланадиган формулалар қуйидагича бўлади:

$$R'_x = \sum F_{kx}, \quad R'_y = \sum F_{ky}, \quad R'_z = \sum F_{kz}, \tag{34}$$

$$M_{ox} = \sum m_x(F_k), \quad M_{oy} = \sum m_y(F_k), \quad M_{oz} = \sum m_z(F_k). \tag{35}$$

Бу проекциялар маълум бўлган ҳолда R' ва M_0 вектор... модули ва йўналишини аниқлаш қийин эмас.

... §. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг аналитик шартлари мувозанат тенгламалари

... асосий теоремасига асосан (33-§), фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси битта R' кучга ... моментининг вектори M_0 га тенг бўлган жуфтга эквивалент. ... жисмга қўйилган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун

$$R' = 0 \text{ ва } M_0 = 0 \tag{36}$$

...лар бажарилиши зарур; лекин бу зарурий шартлар айни ... етарли шарт ҳам бўлади, чунки булар бажарилганда ... марказига кўчирилган барча берилган кучлар ва қў... жуфтлар мувозанатлашади.

Демак, қаттиқ жисмга қўйилган ихтиёрий кучлар система... (67-расм) мувозанатда бўлиши учун умумий ҳолда бу сис... бош вектори ва ихтиёрий келтириш марказига нис... олинган бош моменти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Аниқланган мувозанат шартларини аналитик равишда ифо... R' ва M_0 векторларнинг координата ўқларидаги ҳам... (34) ва (35) проекциялари нолга айланганда ва фақат шу ... R' ҳамда M_0 векторлар баравариге нолга тенг бўлади ... (34) ва (35) формулаларнинг ўзини ёзсак, бу шартлар

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum {}_{ky} = 0, \quad \sum {}_{kz} = 0,$$
$$\sum m_x(F_k) = 0, \quad \sum m_y(F_k) = 0,$$
$$\sum m_z(F_k) = 0 \tag{37}$$

67-расм.

...ўринишда ёзилади. Демак, фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси (яъни шу кучлар таъсири остида турган эркин жисм) мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг учала коорди-

ната ўқларидаги проекцияларининг йиғиндилари ва ўша ў-
ларга нисбатан олинган моментларининг йиғиндилари но
тенг бўлиши зарур ва кифоя.

35-§. Фазода жойлашган параллел кучлар мувозанатинин аналитик шартлари

Қаттиқ жисмга бир текисликда ётмайдиган параллел ку-
лар таъсир қилаётган бўлсин (68-расм). z ўқи кучларга п
раллел қилиб йўналтирилади: унда ҳар бир кучнинг z ўқи
нисбатан олинган моменти нолга тенг бўлади. x ва y ўқл
жисмга қўйилган кучларга тик бўлгани учун, ҳар бир кучни
x ва y ўқларидаги проекциялари ҳам нолга тенг бўлади. Н
тижада (37) формулалардан учта мувозанат шарти келиб ч
қади:

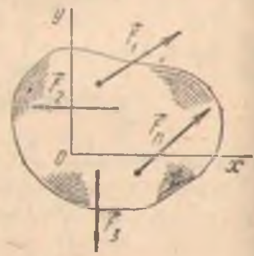
$$\sum F_{kz}=0, \quad \sum m_x(F_k)=0, \quad \sum m_y(F_k)=0. \qquad (\ldots$$

Қолган учта тенглик бу ҳолда $0=0$ кўринишдаги айния
айланиб қолади. Демак, фазода параллел жойлашган куч
мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг уларга параллел бў
ган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва қолган икки ко
дината ўқига нисбатан олинган моментларининг йиғиндил
нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.

36-§. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

Жисмга бир текисликда ихтиёрий равишда жойлашган (F
F_2, ..., F_n) кучлар системаси қўйилган бўлсин. Бу текислик
Oxy координата текислиги деб олиб, координата ўқлари ў
казамиз (69-расм). Кучларнинг ҳар бири z ўқига тик бўлга
учун уларнинг z ўқидаги проекциялари нуқта бўлади, я
нолга тенг бўлади. Бундан ташқари, ҳар бир куч x ва y ў
лари билан бир текисликда ётгани учун уларнинг x ва y ў
ларига нисбатан олинган моментлари нолга тенг бўлади. Шу
дай қилиб, бу кучлар ҳар қандай бўлганда ҳам (37) форм
лалардаги учинчи, тўртинчи ва бешинчи тенгликлар $0=0$ к

68-расм.



69-расм.

...нинидаги айниятга айланиб қолиб, текисликда ихтиёрий ...нида жойлашган кучларнинг мувозанат шартлари учта бў... чиқади:

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_z(F_k)=0.$$

Бироқ бу ҳолда ҳар бир куч xy текисликда ётгани учун ...нинг чизма текислигига тик бўлган z ўқига нисбатан олин... моменти [28-§ даги (16) таърифга асосан] унинг коорди...талар бошига (O нуқтага) нисбатан олинган алгебраик мо...нтининг қиймати билан бир хил бўлади. Шунинг учун юқо...ги учта тенгликнинг учинчиси ўрнига $\sum m_0(F_k)=0$ тенг...ни ёзамиз. Натижада бу кучларнинг мувозанат шартлари ...ндагича ёзилади:

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_0(F_k)=0. \tag{39}$$

Демак, текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар ...темаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг икки коор...ната ўқларидаги проекцияларининг йиғиндилари ва ихтиёрий ...р марказга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси ...лга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Бу шартлардан дастлабки иккитаси жисмнинг координата ...лари бўйлаб силжимаслигини, учинчиси эса xy текисликда ...мнинг айланмаслигини билдиради. Энди текисликда ихтиё...й равишда жойлашган кучлар мувозанати шартларининг ...нқача кўринишларини исботламай ёзамиз. Бу шартлар ма...ла ишлашда баъзан қулай бўлади.

Мувозанат шартларининг иккинчи шакли: текисликда их...тиёрий равишда жойлашган кучлар системаси мувозанатда ...лиши учун бу кучларнинг ихтиёрий икки A ва B марказга ...батан олинган моментларининг йиғиндиси ва мана шу икки ...қтадан ўтадиган AB тўғри чизиққа тик бўлмаган координа...та ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши ...рур ва етарли:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0, \quad \sum F_{kx}=0. \tag{39'}$$

Мувозанат шартларининг учинчи шакли: текисликда ихтиё...рий равишда жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўли...ши учун бу кучларнинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиё...рий учта A, B ва C марказга нисбатан олинган моментлари...нинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0, \quad \sum m_C(F_k)=0. \tag{39''}$$

Кўриб чиқилган учала ҳолда ҳам мувозанат шартлари асо...сий шартлар деб ҳисобланади.

Агар жисмга текисликда жойлашган (F_1, F_2, ..., F_n) куч...лардан ташқари ўша текисликда моментлари m_1, m_2, ..., m_k

бўлган жуфтлар таъсир қилса, мувозанат шартлари ту... проекциялар тенгламасига жуфтлар кирмайди, чунки жуф... зувчи кучларнинг ҳар қандай ўқдаги проекциялари йиғин... нолга тенг. Моментлар тенгламасида кучларнинг марказга ... батан моменти билан жуфтларнинг моментлари алгебраи... ришда қўшилади.

37- §. Текисликда параллел жойлашган кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

Жисмга таъсир этаётган (F_1, F_2, ... , F_n) кучларнинг ... маси бир текисликда бир-бирига параллел бўлса, x ўқи ... ларга тик қилиб, y ўқи эса кучларга параллел қилиб йў... тирилади (70- расм). Бу ҳолда ҳар бир кучнинг x ўқи... проекцияси нолга тенг бўлиб, (39) формулалардаги бири... шарт $0=0$ кўринишидаги айниятга айланиб қолади. Натиж... (39) формуладан текисликдаги параллел кучлар учун ... мувозанат шарти қолади:

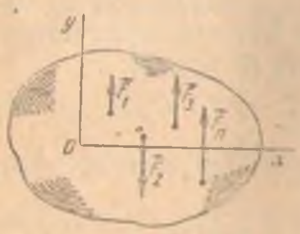
$$\sum F_{ky}=0, \quad \sum m_0(F_k)=0. \qquad (4$$

Демак, текисликда параллел жойлашган кучлар систем... мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг уларга параллел ... даги проекцияларининг йиғиндиси ва бирор марказга нисба... олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зар... ва етарли.

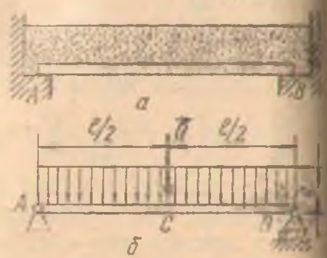
Текисликда параллел жойлашган кучлар мувозанатини... яна бир бошқа шакли бор, уни текисликда ихтиёрий жойла... ган кучларнинг (39′) шартларидан (36- § қаранг) алоҳида ке... тириб чиқарамиз. Ҳар бир куч x ўқига тик бўлгани учу... уларнинг x ўқидаги проекциялари нолга тенг бўлади. На... жала (39) формулалардаги биринчи тенглик $0=0$ кўрини... даги айниятга айланиб, қуйидаги икки шарт чиқади:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0. \qquad (40)$$

Шу ергача кўриб чиқилган барча кучларнинг мувоза... шартлари таърифланди, таърифланмаган фақат (40) шарт... қолди. Буни ўзингиз мустақил таърифланг.



70-расм.



71-расм.

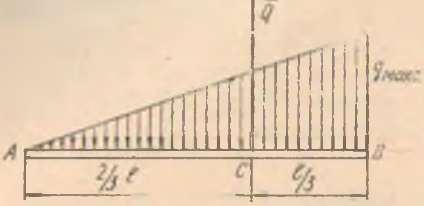
...и фазода ва текисликда жойлашган кучларнинг мувоз... шартларини ишлатиб масала ечишда керак бўладиган ...и тушунчаларни, жумладан, ҳар хил қонунлар бўйича ...ган кучларни тенг таъсир этувчи билан алмаштиришни, ...и боғланишларнинг реакцияларини янгича баён этишни, ...нг. 4- § да тилга олинмай қолган баъзи боғланишларни ...ларнинг реакцияларини кўриб чиқамиз.

38- §. Ёйилган кучлар

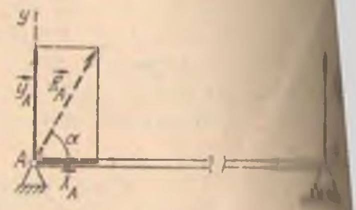
1. Статикада қаттиқ жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган ...лар билан иш кўрилади. Ҳақиқатда эса кучлар жисм ҳаж...нинг, юзининг бирор қисмига, баъзан эса узунлигининг бир ...мига қўйилади. Статиканинг ҳамма аксиома ва теоремалари ... нуқтага қўйилган кучларга мослаб таърифлангани учун ...ган кучларни кўпроқ учрайдиган оддий ҳолларда бир ...тага қўйилган кучлар билан алмаштириш усулларини кў... чиқамиз.

Ёйилган кучлар интенсивлик деган тушунча билан тавсиф...ади. Интенсивлик дегани ҳажм бирлигига, сирт юзининг ...рлигига ёки чизиқ узунлигининг бирлигига тўғри келган ...нинг миқдорини билдиради ва q ҳарфи билан белгиланади. ...чов бирлиги 1Н/м бўлади. Ёйилган кучлар асосан параллел ...члар ёки кесишувчи кучлар бўлади. Жисм зарраларининг ...ирлик кучи ҳажм бўйича ёйилган кесишувчи кучларга ми... бўлади, лекин жисмнинг ўлчамлари Ер марказигача бўл... масофага қараганда жуда кичик бўлганини ҳисобга олиб, ...ирлик кучларини параллел кучлар деб ҳисоблаймиз. Тўғон ...уриб кўтарилган сувнинг тўғон сиртига берадиган босим кучи ...он сиртига ёйилган параллел кучларга, энсиз тўсин устига ...ис қилиб сепилган қумнинг (71- расм, *а*) тўсинга берадиган ...сим кучи чизиқ бўйлаб ёйилган параллел кучларга мисол ...лади (71- расм, *б*).

Энди чизиқнинг узунлиги бўйлаб ёйилган кучларни бир нуқтага қўйилган куч билан алмаштиришни, яъни уларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз. Осон бўлиши учун куч...ар ёйилган чизиқ тўғри чизиқ кесмаси бўлган, бу кучларнинг интенсивлиги бир хил (ўзгармас) бўлган ёки чизиқли қонун ...или ўзгарадиган ҳолларни кўриб чиқамиз. Тўғри чизиқнинг узунлиги l бўлган AB қисмига q интенсивлиги ўзгармас бўл...ган параллел кучлар ёйилган бўлса (71- расм, *б*) буларнинг ...нг таъсир этувчи Q кучи ҳам ўша кучларга параллел бўлиб, AB кесманинг қоқ ўртасидаги нуқтага қўйилади ва модули $Q = ql$ бўлади. Интенсивлиги чизиқли қонун бўйича ўзгаради...ган параллел ёйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси (72- расм) модул жиҳатидан $Q = q_{макс} \cdot \frac{l}{2}$ кўпайтмага тенг бўлиб, ...нинг қўйилиш нуқтаси (яъни C нуқта) A нуқтадан бошлаб



72-расм.

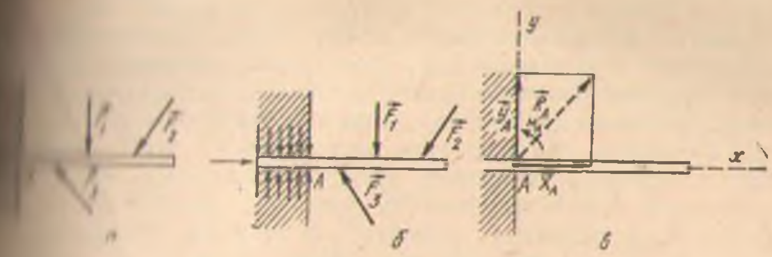


73-расм.

қўйилган $AC = \frac{2}{3}\,l$ масофада туради, бу ердаги $g_{макс}$ ...
кучнинг энг катта интенсивлигидир (72-расмга қаранг).

2. Қўзғалмас цилиндрик шарнирнинг реакциясини кўриб чиқамиз. Боғланишнинг бу турининг реакцияси 4-§ да ... этилган эди. Унда қўзғалмас цилиндрик шарнирнинг реакция кучи шарнирнинг ўқига тик бўлган текисликда ётиб, ўша ... дан ўтади ва йўналиши олдиндан маълум бўлмайди леки... эди. Энди йўналиши маълум бўлмаган ўша R_A реакция кучини координата ўқлари бўйлаб йўналтирилган иккита номаълум X_A ва $У_A$ тузувчиларга ажратамиз (73-расм). Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучларнинг мувозанатига доир масалаларда шарнир реакциясининг X_A ва $У_A$ тузувчиларини мувозанат тенгламаларидан аниқлаб, R_A реакциянинг ... $R_A = X_A + У_A$ вектор тенгликдан, модулини $R_A = \sqrt{X_A^2 + ...}$ формуладан аниқлаймиз. R_A нинг бирор ўқ билан, масалан, ... ўқи билан ҳосил қилган α бурчаги $\operatorname{tg}\alpha = \frac{У_A}{X_A}$ тенгликдан ани... ланади.

3. Қўзғалмас қистирма деб аталадиган боғланишнинг реакциясини кўриб чиқамиз (74-расм, *а*). Бу ҳолда балканинг би... учи девор ичига ёки конструкциянинг бирор мустаҳкам қисмига қистириб юборилади. Бир учи шундай қилиб қистирилган балка *консоль* деб аталади. Консолга текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсир қилганда консолнинг деворга қистирилган учига ён томондаги текисликлардан ёйилган реакция кучлари таъсир қилади (74-расм, *б*). Бу кучларни битта R тенг таъсир этувчи билан алмаштириш мумкин, лекин бу тенг таъсир этувчининг на модули, на йўналиши, на қўйилиш нуқтаси маълум эмас. Бу R кучни ўзига параллел қилиб балка билан деворнинг олдинги текислиги кесишган A нуқтага кўчирамиз, бунда R куч A нуқтага қўйилган $R_A = R$ кучга ва M_A моменти номаълум бўлган қўшилиш жуфтга эквивалент бўлади (74-расм, *в*). Бу жуфтнинг M_A моменти *реактив момент* деб аталади. R_A реакция кучини ...



74- расм.

...юқори бўйлаб йўналган X_A ва Y_A тузувчилар орқали тас-... M_A реактив жуфт айланма стрелка билан кўрсатила-... Демак, қўзғалмас қистирма боғланишнинг реакциясини ... учун учта X_A, Y_A ва M_A номаълум миқдорни аниқ-... керак.

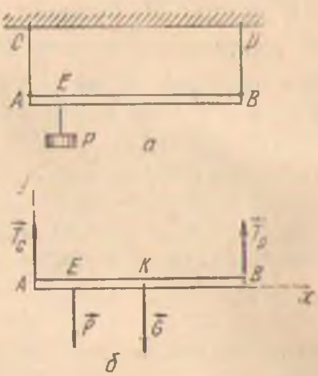
39-§. Масала ечиш

Бу параграфда текисликда ихтиёрий равишда ва параллел ...ган кучларнинг мувозанатига доир масалаларни ечамиз. ... ҳам масала ечиш тартиби 16-§ да келтирилгандек ... Лекин ҳар бир босқичда қилинадиган ишлар олдин-... бирмунча фарқ қилиши мумкин.

Агар масалада бир-бирига шарнир, ип ва шу каби ички ...лар билан боғланган қўшалоқ жисмларнинг мувоза-... кўриб чиқиладиган бўлса, бу жисмлар системаси алоҳи-... жисмларга ажратилиб, ҳар бир айрим жисмга таъ-... этувчи кучларнинг мувозанат шартлари тузилади.

...масала. Оғирлиги 20 Н бўлган бир жинсли AB стержень ... қилиб туширилган AC ва BD арқонларга горизон-... турадиган қилиб осилган (75-расм, *а*). Унинг A учидан ... узунлигининг чорагича масо-... E нуқтага $p = 120$ Н юк осил-... Арқонларнинг тортилиш кучи ...

Ечиш. Изланаётган миқдорларни ... учун стерженнинг мувоза-... кўриб чиқилади. Стержень боғ-...лардан бўшатилади, яъни AC ва BD арқонларни фикран кесиб, ...нинг таъсири ўрнига реакция куч-... қўйилади. AC арқоннинг реак-... шу арқон бўйлаб юқорига йўна-..., у T_c билан белгиланади (75-расм, *б*); BD арқоннинг реакцияси ҳам арқон бўйлаб юқорига йўналади, у T_D билан белгиланади (арқонларнинг



75-расм.

масала шартида сўралган тортилиш кучларини эмас, реакция кучларини топа оламиз, чунки арқонларнинг тортилиш кучи стерженга қўйилган эмас, стерженга арқонларнинг реакция кучи қўйилган. Реакция кучи аниқланса, тортилиш кучи аниқланган бўлади, чунки тортилиш кучлари реакция кучларига сон жиҳатдан тенг бўлиб, уларга қарши йўналади). Стерженга қўйилган кучларни чизмада тасвирла... Стерженга унинг ўзининг G оғирлиги, юкнинг P оғирлиги, T_C ва T_D реакциялар қўйилган; G оғирлик стерженнинг ўртасига қўйилади. Бу кучлар бир текисликда жойлашган параллел кучлар. Бу кучлар (яъни бу кучлар таъсири остида тур... ган эркин стержень) мувозанатда бўлгани учун $\sum F_{ky} = 0$, $\sum m_A(F_k) = 0$ мувозанат шартлари тузилади [(40) формулага қаранг]. Бунинг учун y ўқи кучларга параллел равишда юқорига йўналтирилади, x ўқи ўтказишга эҳтиёж йўқ, чунки мувозанат шартларида кучларни уларнинг ўзига параллел бўлган ўққа проекциялаш талаб қилинади. Кучларнинг моментларини ўша текисликда ётган бирор нуқтага (масалан, A нуқтага) нисбатан олиш керак. Мувозанат тенгламалари:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad T_C - P - G + T_D = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad -P \cdot AE - G \cdot AK + T_D \cdot AB = 0.$$

Бу тенгламаларнинг қандай тузилганини изоҳлаб берамиз. T_C ва T_D реакциялар y ўқига параллел бўлиб, y билан бир томонга йўналгани учун проекциялари ўзига тенг ва плюс ишора билан олинди; берилган P ва G кучлар ўққа параллел бўлиб, унга тескари йўналгани учун проекциялари ўзига тенг ва минус ишора билан олинди. Моментлар тенгламасига T_C реакция кирмай қолди, чунки унинг A нуқтага нисбатан елкаси йўқ бўлгани учун моменти ҳам нолга тенг бўлди. P кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси AE кесма, G кучнинг елкаси AK кесма, T_D кучнинг елкаси AB кесма бўлади, чунки тик... га олинган учала кесма P, G, T_D кучларнинг таъсир чизиғига тик турибди. P ва G кучлар AB стерженни A нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракати бўйича буради, шунинг учун моментининг ишораси манфий қилиб олинди. T_D куч эса стерженни A нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари буради, унинг моменти мусбат қилиб олинди. Масала шартида AE ёки AK кесманинг қанча метр эканлиги айтилган эмас, лекин диққат қилинса, AE кесма бутун стержень узунлигининг чорак қисмига тенг экани, яъни $AE = \frac{1}{4} AB$ экани тушуниб олинади: худди шунга ўхшаш, $AK = \frac{1}{2} AB$ деб оламиз. Бутун стерженнинг узунлиги неча метр эканлиги айтилмагани учун

... бирлик деб олиб, AE ва AK қисмларнинг узунлигини AB ... ифодалаймиз, натижада иккинчи тенгламада битта умумий кўпайтувчи пайдо бўлади, уни кейин қисқартириб юборамиз. Буларни эътиборга олиб иккинчи тенгламани ўзгартирамиз:

$$-P\cdot\frac{1}{4}AB-G\cdot\frac{1}{2}AB+T_D\cdot AB=0.$$

Тенгламани AB миқдорга қисқартирамиз:

$$-\frac{P}{4}-\frac{G}{2}+T_D=0,\text{ бундан } T_D=40\text{Н}.$$

T_D реакциянинг аниқланган қийматини (а) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб, ундан T_C ни топамиз: $T_C=100$ Н.

Масала ечимининг тўғрилигини текшириб кўриш учун бошқа нуқтага, масалан, B нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum m_B(F_k)=0,\quad -T_C\cdot AB+P\cdot\frac{3}{4}AB+G\cdot\frac{1}{2}AB=0,$$

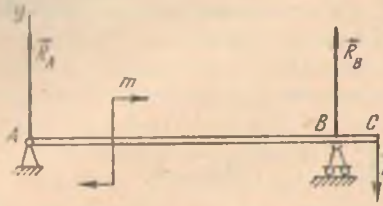
Тенгламани AB га қисқартириб, кучларнинг берилган ва топилган қийматлари қўйилса, тенглама айниятга айланади. Демак, масала тўғри ечилган бўлади. Арқонларнинг масалада изланган тортилиш кучларининг сон қийматлари 100 Н ва 40 Н бўлиб, лекин пастга қараб йўналган.

Шу масаланинг ўзини текисликдаги параллел кучлар мувозанатининг бошқа шартларидан [қ. (40′) га қаранг] фойдаланиб ечамиз. Бу ҳолда A ва B марказларга (75-расм, *б*) нисбатан олинган моментлар тенгламалари тузилади:

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(F_k)=0;\quad -P\cdot AE-G\cdot AK+T_D\cdot AB=0,\\&\sum m_B(F_k)=0;\quad G\cdot BK+P\cdot BE-T_C\cdot AB=0.\end{aligned}\right\}\quad(б)$$

Бу ерда ҳам $AE=\frac{1}{4}AB$, $AK=BK=\frac{1}{2}AB$, $BE=\frac{3}{4}AB$ эканлигини ҳисобга олиб, уларни тенгламаларга қўямиз. Натижада (б) системанинг ечимлари $T_C=100$ Н, $T_D=40$ Н эканлигини аниқлаймиз. Бу ерда иккала усулда ҳам жавоб бир хил эканлиги кўриниб турибди. Агар (б) тенгламалар системасига диққат қилинса, унинг ҳар бир тенгламасида биттадан номаълум қатнашади. Бир номаълумли тенгламани ечиш икки номаълумли тенгламани [(а) системанинг биринчи тенгламасини] ечишдан осон.

Масалани ечишда йўл қўйиладиган бир хато тўғрисида икки оғиз сўз. Кўпчилик масалаларда мувозанати текшириладиган балканинг (ёки бошқа жисмнинг) оғирлиги қанчага тенг эканлиги айтилади, лекин бу оғирлик китобдаги расмда чизиб кўрсатилмайди. Шунинг учун масала ечишда баъзан реакция куч-



76-расм.

лари балка устига қў...
бошқа юкларнинг ...
кучлари қўлда чизилга...
да кўрсатилади-да, балка...
оғирлигини кўрсатиш ...
ларди. Оқибатда ҳамма ...
занат тенгламалари тўғри...
шаб кўринса-да, жавоби ...
масди. Бундай хато пара...
кучларнинг мувозанатига ...
ир масалаларни ечгандагина эмас, бошқа тур масалаларда ...
учрайди.

10-масала. Горизонтал ётган AC балкага (76-расм) моменти $m = 6$кНм бўлган жуфт вертикал текисликда таъсир қила... ди, C нуқтада вертикал йўналган $P = 2$кН куч қўйилган. AB $= 4$ м, $BC = 0{,}5$ м. A нуқтада балка қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктирилган бўлиб, B нуқтада қўзғалувчи шарнир устига қўйилган. Балканинг оғирлиги ҳисобга олинмайди. Таянч реакциялари аниқлансин.

Е ч и ш. Номаълум реакцияларни аниқлаш учун AC балканинг мувозанатини кўриб чиқамиз.

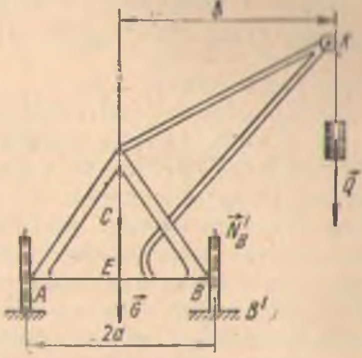
Қўзғалувчи шарнирнинг R_B реакцияси юқорига вертикал йўналган. A қўзғалмас шарнирнинг реакцияси 38-§ да ... X_A ва Y_A тузувчига ажратилган эди. Лекин реакция кучлари актив кучларга боғлиқ бўлгани учун бу масалада R_A реакция юқорига вертикал йўналади, чунки берилган P куч билан ... ток R_B реакциясининг геометрик йиғиндиси вертикал йўналган: моменти m бўлган жуфт эса кучларнинг ўқдаги проекциялари тенгламасига кирмайди, чунки жуфтни ўз текислигида кучлари ўқлардан бирига параллел (демак, иккинчисига тик) бўладиган қилиб буриш мумкин. y ўқини юқорига вертикал йўналтирамиз. AC балкага параллел кучлар таъсир қиляпти, параллел кучларнинг мувозанат шартлари $\sum F_{ky} = 0$, $\sum m_B(F_k) = 0$ бўлади. Олдинги масалада айтиб ўтилганидек, моментлар марказини хоҳласак A нуқтада, хоҳласак B нуқтада оламиз: бизга B нуқта маъқул бўлди:

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_{ky} = 0; \quad R_A + R_B - P = 0, \\ &\sum m_B(F_k) = 0; \quad -R_A \cdot AB - P \cdot BC - m = 0 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

m жуфт расмда кўрсатилган вазиятида y ўқига проекция бермайди; жуфтнинг ҳар бир кучи горизонтал йўналган, улар вертикал y ўқига проекциялаганда нуқта бўлиб тушади. Жуфт куч бу расмда кўрсатилганидан бошқача вазиятда турибди, деб фараз қилайлик. У ҳолда жуфт тузувчи кучлардан бирининг y ўқидаги проекцияси плюс ишора билан олинса, иккин-

...нинг проекцияси минус ишораси олинади, иккала проекциянинг сон қийматлари тенг бўлгани учун улар ейишиб кетади.

Моменти m бўлган жуфт моментлар тенгламасига ўзининг йўналишига қараб плюс ёки минус ишора билан киради. Лекин эътиборга олиш керакки, жуфт моменти моментлар марказининг қаерда олинганига боғлиқ бўлмайди. Бу масаладаги жуфт моменти тенгламага минус ишора билан кирди. Балкага қўйилган жуфтни бир-бирига антипараллел йўналган иккита тенг куч шаклида чизмасдан айланма стрелка шаклида чизиш ҳам мумкин (27-§, 60-расмга қаранг). Бундан кейинги масалаларда жуфт айланма стрелка билан тасвирланади.



77-расм.

Энди (а) тенгламалар системасини ечамиз. Иккинчи тенгламадан R_A ни аниқлаймиз: $R_A = -2$ кН. R_A реакция ишорасининг манфий бўлиб чиқиши унинг ҳақиқатда юқорига эмас, балки пастга вертикал йўналганини кўрсатади. R_A нинг қийматини биринчи тенгламага қўйиб, $R_B = P - R_A = 2 - (-2) = 4$ кН экани аниқланади. Масаланинг тўғри ечилганини текшириб кўриш учун B дан бошқа нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз. Агар бу тенглама айниятга айланса, масала тўғри ечилган бўлади.

11-масала. 77-расмда схематик равишда тасвирланган кўтариш кранининг оғирлиги $G = 40$ кН. Краннинг оғирлик маркази DE чизиқда ётади, краннинг қулочи $b = 3,5$ м, $AB = 2a = 3$ м. Кран қанча юк кўтара олади?

Ечиш. Кран мувозанатда турганда унинг иккала ғилдираги томонидан рельсларга маълум куч билан босим тушади. Агар кран кўтариб турган юк оз-оздан орттира борилса, кран A дан ғилдиракка босим тушмай қўйиб, у юк томонга оға бошлайди. Агар юк янада орттирилса, унда кран B ғилдирак рельсга тегиб турган B' нуқта атрофида агдарилиб кетади. Демак, кран A ғилдиракка босим туширмай қўйган ҳолда B ғилдиракнинг рельсга тегиб турган B' нуқтаси атрофида агдарилиб кетмаслиги учун ҳамма кучларнинг ўша B' нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Бирор нуқтага нисбатан олинган моментлар йиғиндисининг нолга тенг бўлиши жисмнинг ўша нуқта атрофида айланмаслигини билдиради. Мана шу шароитда Q юк энг катта юк бўлади. A ғилдиракнинг рельсга узатадиган босим кучи (ёки рельснинг ғилдиракка қўйилган реакцияси) нолга тенг бўлади. $\sum m_B \times$

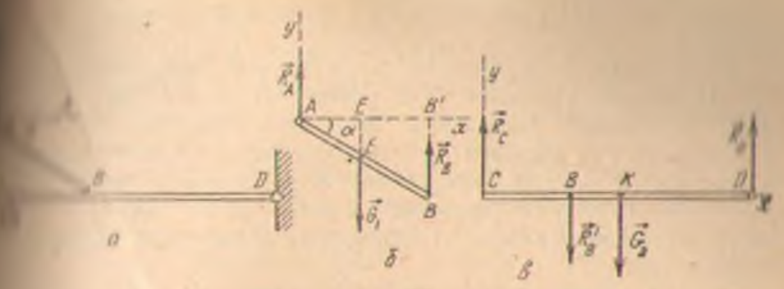
$\Sigma(F_k)=0$ шартдан энг катта Q аниқланади: $Ga-Q(b-a)=0$, бундан $Q=\frac{a}{b-a}G=30$ кН. Демак, кран кўпи билан [illegible] юк кўтара олади.

Агар диққат қилган бўлсангиз, 9-масалада номаълумлар сони иккита, уларни топиш учун тузилган тенгламалар [illegible] иккита эди. 10-масалада ҳам худди шундай: икки номаълум, икки тенглама мавжуд. 11-масалада икки тенглама тузиш мумкин бўлса-да (чунки параллел кучларнинг мувозанат шартлари иккита), масаланинг шартига қараб битта номаълумни топиш учун битта тенглама туздик. Бу масалалар *статик [illegible] масалалар* деб аталади. Статик аниқ ва статик жиҳатдан [illegible] аниқ масалалар тўғрисида китобнинг 15-§ ида гап юритилган эди. Энди параллел кучлар таъсир этаётган қўшалоқ [illegible]ларнинг мувозанатига оид масалани ечамиз.

12-масала. A ўқи (цилиндрик шарнир атрофида [illegible] оладиган AB балканинг оғирлиги 5 кН, узунлиги 5 м; бу [illegible]ка горизонтал ётган CD балкага B нуқтада эркин т[illegible]. Балканинг оғирлиги 10 кН, узунлиги 6 м. CD балка D у[illegible] девордаги қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктилган [illegible] C нуқтада таянч устига қўйилган $\alpha=30°$, $CB=2$ м. Т[illegible] реакциялари ва балкаларнинг бир-бирига узатадиган бо[illegible] аниқлансин.

Ечиш. Бу ерда икки балканинг мувозанати текширил[illegible]. Масалани ечишнинг икки йўли бор: 1) иккала балка B нуқтада бир-бирига маҳкам бириктирилган деб фараз қилиб, ул[illegible] учун мувозанат шартлари тузилади, кейин балкалардан би[illegible]сини олиб, унинг мувозанат шартлари тузилади, бу ҳол[illegible] ташланган балканинг мувозанати текшириладиган балкага к[illegible]сатадиган босими (реакцияси) ҳисобга олинади, 2) ҳар б[illegible] балканинг мувозанати алоҳида-алоҳида кўриб чиқилади, ул[illegible]га тегишли мувозанат шартлари тузилади.

Бу масала иккинчи йўл билан ечилади. AB балкага уни[illegible] G_1 оғирлиги, B нуқтадаги таянчнинг юқорига вертикал йўна[illegible]ган R_B реакцияси ва A шарнирнинг R_A реакцияси қўйилга[illegible]. Шарнирнинг реакцияси бу ҳолда вертикал бўйлаб юқори[illegible] йўналтирилади, чунки AB балкага қўйилган уч кучдан ик[illegible]таси вертикал йўналган. CD балкага унинг G_2 оғирлиги, C таянчнинг вертикал бўйлаб юқорига йўналган R_C реакцияси, таъсир ва акс таъсир қонунига асосан $R_B=R'_B$ бўлган реакция кучи, D шарнирнинг R_D реакцияси қўйилган. Бу ерда ҳам шарнирнинг реакцияси фақат вертикал бўйлаб йўналади, чунки CD балкага таъсир этувчи бошқа кучларнинг бош вектори (геометрик йиғиндиси) вертикал бўйлаб йўналган. (38-§ да шарнирнинг реакцияси икки тузувчига ажралади дейилган эди, лекин бу масалада балкага таъсир этувчи кучлар фақат параллел кучлар бўлгани учун шарнир реакциясининг бу кучларга тик бўлган тузувчиси нолга айланиб қолди, шунинг



78-расм.

... A ва D шарнирларнинг реакцияси вертикал бўйлаб йў... битта куч билан кўрсатилди.) Балкаларни уларга қў... кучлар билан бирга алоҳида-алоҳида чизиб кўрсатиб ... расм, *б* ва 78-расм, *в*), уларга тегишли мувозанат шарт... тузамиз. Иккала балкага параллел кучлар таъсир этяп... Кучларга параллел ўқ y билан белгиланади. AB балканинг ... тенгламалари:

$$\begin{aligned} &\sum F_{ky} = 0; \quad R_A - G_1 + R_B = 0, \\ &\sum m_A(F_k) = 0 \quad -G_1 \cdot 2{,}5\cos 30^\circ + R_B \cdot 5\cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

... балканинг мувозанат тенгламалари:

$$\begin{aligned} &\sum F_{ky} = 0; \quad R_C - R'_B - G_2 + R_D = 0, \\ &\sum m_D(F_k) = 0; \quad -R_C \cdot 6 + R'_B \cdot 5 + G_2 \cdot 3 = 0. \end{aligned} \qquad \text{(б)}$$

AB балканинг мувозанат тенгламаларида G_1 ва R_B кучлар... моментини ҳисоблашда уларнинг A нуқтага нисбатан ел... нуқтадан G_1 ва R_B кучларнинг таъсир чизиқларига (вертикалга) тик қилиб ўтказилган $AE' = 2{,}5\cos 30^\circ$ ва $AB' = 5\cos 30^\circ$ кесмаларга тенг бўлганига эътибор беринг. (а) тенг... ларнинг ечимлари $R_B = R'_B = 2{,}5$ кН; $R_A = 2{,}5$ кН; (б) тенгламаларнинг ечимлари $R_C = 6$ кН, $R_D = 6{,}5$ кН. Масала... тўғри ечилганини текшириб кўриш осон. Кучлар парал... бўлгани учун AB балканинг 5 кН оғирлиги A ва B таянч... 2,5 кН дан иккига ажралган. C ва D таянчлар реак...ларининг йиғиндиси ҳам CD балкага тушаётган актив кучга тенг бўлиши керак: $R_C + R_D = 12.5$ кН бўлиб, бу ерда CD балканинг оғирлигидан ортиб кетди. Ўша ортиқ деб ҳисобланган 2,5 кН миқдор юқоридаги балкадан пастдаги балкага тушиб турган босим кучидир. Демак, масала жуда тўғри ечилган.

Масалани биринчи йўл билан ўзингиз ечиб кўринг.

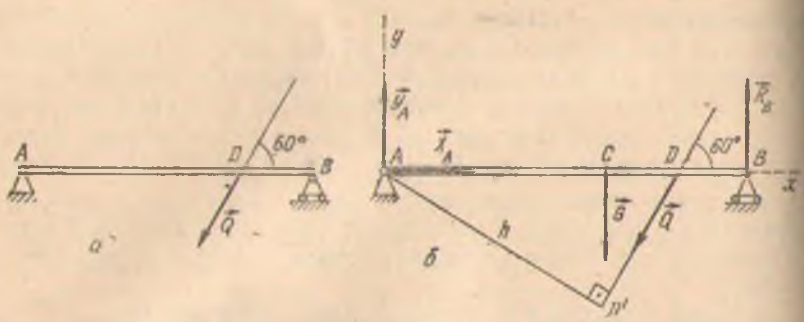
Энди текисликда ихтиёрий равишда жойлашган куч лар таъсир этаётган жисмларнинг мувозанатига оид масал ечамиз

13 масала. Бир жинсли ингичка AB балканинг оғир 15 кН бўлиб, узунлиги 4 м (79-расм). Балканинг A учи лаги қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктирилган бў иккинчи B учи горизонтал текислик устида турган қўзғал шарнирга қўйилган. Балканинг A учидан 3 м масофа нуқтасига горизонт билан 60° бурчак ҳосил қилувчи Q кН куч таъсир қилади. A шарнир ва B катокнинг реакция аниқлансин.

Ечиш. Изланаётган миқдорларни топиш учун AB ба нинг мувозанати кўриб чиқилади. Боғланишларни ташлаб риб, балка эркин жисм деб ҳисобланса, унга ўртасига қў ган G оғирлик кучи, боғланишларнинг R_A ва R_B реакция лари таъсир қилади. Координата ўқлари расмда кўрсатил дек ўтказилади. Шарнирнинг реакциясини, 38-§ да айтилган горизонтал ва вертикал йўналган икки x_A ва y_A тузувчи ажратамиз. Балкага таъсир этувчи кучлар бир текисликда и тиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларни (39) мувозанат шартларини тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - Q\cos 60^\circ = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - G - Q\cos 30^\circ + R_B = 0, \quad (\ldots$$
$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad -G\cdot AC - Q\cdot AD\sin 60^\circ + R_B\cdot AB = 0.$$

Моментлар маркази нима учун A нуқтада олинганини ту шунтириб ўтамиз. 9-масалани ечганда моментлар марказин номаълум куч қўйилган нуқтада олиш керак, дейилган эди. Энди эса бу фикрни кенгайтириб, моментлар марказини но маълум кучлар кўпроқ бўлган нуқтада олиш керак, деб ай тамиз. Моментлар маркази номаълум кучлар кўпроқ бўлган нуқтада олинса, ўша номаълум кучларнинг ўша марказг нисбатан моментлари нолга айланиб кетиб, моментлар тен ламасида номаълум кучлар камроқ қатнашади; тенгламал



79-расм.

номаълумлар кам бўлса, уни ечиш осон бўлади. Шунинг учун моментлар маркази деб икки номаълум X_A ва Y_A реакциялар кесишган A нуқтани олдик. Дарҳақиқат, моментлар тенгламасида фақат битта номаълум R_B реакция турибди. G кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси AC кесма ҳисобланади, чунки AC кесма G кучнинг таъсир чизиғига тикдир. Q кучнинг A нуқтага нисбатан елкасини топиш учун A нуқтадан бу кучнинг таъсир чизиғига тик кесма ўтказилди. У расмда h билан белгиланган. Тўғри бурчакли ADD' учбурчакдан $AD' = h = AD \sin 60°$ эканини топиб, уни учинчи тенгламага ёзиб қўйдик. Q кучнинг моментини Вариньон теоремасидан фойдаланиш йўли билан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун Q куч AB балкага тик бўлган ва AB балка бўйлаб йўналган икки тузувчига ажратилади (79-расм, *б*). Q кучнинг балкага тик бўлган тузувчисини топиш учун у вертикалга проекцияланади: $Q_y = -Q \sin 60°$. Q_y нинг A га нисбатан елкаси AD кесма бўлади, чунки $AD \perp Q_y$. Q кучнинг балка бўйлаб йўналган тузувчисини аниқлаш учун у горизонталга проекцияланади: $Q_x = Q\cos 60°$. Лекин бу тузувчининг A га нисбатан елкаси нолга тенг, чунки унинг таъсир чизиғи A нуқтадан ўтади. Натижада Q кучнинг балка бўйлаб йўналган тузувчиси A нуқтага нисбатан момент ҳосил қилмайди. Q кучнинг A нуқтага нисбатан моменти $-Q \sin 60° \cdot AD$ ифодага тенг бўлди. (а) системанинг учинчи тенгламасида ҳам Q кучнинг A нуқтага нисбатан моментини худди ўша $-Q \sin 60° \cdot AD$ ифодага тенг қилиб ёзган эдик.

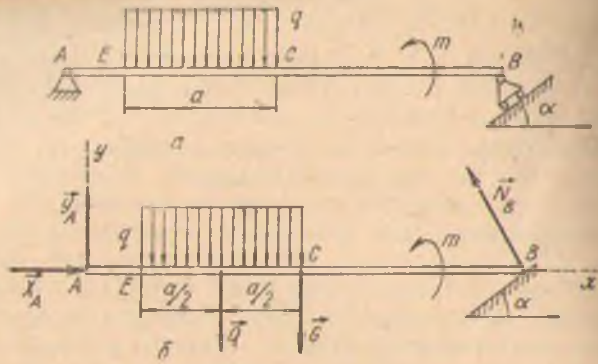
(а) тенгламалар системасини ечиб, номаълум миқдорлар аниқланади. Тайёр жавоб:

$$X_A = 5 \text{ кН}; \quad Y_A \approx 9{,}66 \text{ кН}; \quad R_B \approx 14 \text{ кН}.$$

Хоҳласангиз (а) системани ўзингиз ечиб кўришингиз мумкин.

Масалани ечишда моментлар маркази деб A нуқтани олган эдик, чунки у нуқтада ҳақиқатан ҳам икки номаълум куч бор. Бироқ моментлар маркази деб B нуқтани олиш ҳам мумкин, чунки B нуқтанинг ўзида битта номаълум R_B куч турган бўлишига қарамай, у нуқтадан яна бир номаълум X_A кучнинг таъсир чизиғи ўтади. R_B ва X_A реакцияларнинг B нуқтага нисбатан олинган моментлари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлади.

Энди берилган масала текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг (39′) шартлари ёрдамида ечилади. Кучларни x ўқига проекциялаймиз, моментларни A ва B нуқталарга нисбатан оламиз. Бу ҳолда кучларни y ўқига проекциялаш тўғри бўлмайди, чунки унда кучлар проекцияланадиган ўқ A ва B нуқталардан ўтадиган тўғри чизиққа тик бўлиб қолган бўлур эди. Бу эса (39) шартларнинг иловасига зид келади. Тенгламаларни туздик, ҳақиқатда буларнинг дастлабки



80-расм.

иккитаси олдин тузиб қўйилган эди, (а) системага қаранг:

$$\sum F_{kx}=0;\quad X_A-Q\cos 60^\circ=0,$$
$$\sum m_A(F_k)=0;\quad -G\cdot AC-Q\cdot AD\sin 60^\circ+R_B\cdot AB=0,$$
$$\sum m_B(F_k)=0;\quad -Y_A\cdot AB+G\cdot CB+Q\cdot BD\sin 60^\circ=0.$$

Q кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси $AD'=AD\sin 60^\circ$ эканлиги олдин айтилган эди, Q кучнинг B нуқтага нисбатан елкаси эса B нуқтадан Q кучнинг таъсир чизиғига ўтказилган тик кесма бўлиб, у $BD\sin 60^\circ$ ифодага тенг. (б) системанинг ечимлари (а) системанинг ечимлари билан бир хил:

$$X_A=5\ \text{кН};\quad Y_A\approx 9{,}66\ \text{кН};\quad R_B\approx 14\ \text{кН}.$$

14-масала. Схемаси 80-расмда кўрсатилган балканинг таянч реакциялари аниқлансин. Берилган маълумотлар:

$$G=15\ \text{кН},\ AC=CB=2\ \text{м},\ m=8\ \text{кНм},\ q=2\ \text{кН/м},$$
$$a=1{,}5\ \text{м},\quad \alpha=45^\circ,$$

A—қўзғалмас шарнир, B—каток.

Ечиш. x ўқини горизонтал йўналишда ўнг томонга, y ўқини вертикал йўналишда юқорига қаратиб, координаталар бошини A нуқтада оламиз. AB балканинг мувозанатини текширар эканмиз, A шарнирнинг X_A ва Y_A реакцияларини, катокнинг қия текисликка тик йўналган N_B реакциясини, G оғирлик кучини, моменти m бўлган жуфтни ва интенсивлиги q бўлган текис ёйилган кучлар ўрнига уларнинг $Q=aq$ teng таъсир этувчисини (38-§ га қаранг) расмда кўрсатамиз. Q куч балкадаги EC қисмнинг ўртасига қўйилади. Балкага қўйилган кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар эка-

...билган ҳолда (39) шартлар тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - N_B \cos 45° = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q - G + N_B \cos 45° = 0, \qquad (a)$$

$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad m + G \cdot BC + Q \cdot BK - Y_A \cdot AB = 0.$$

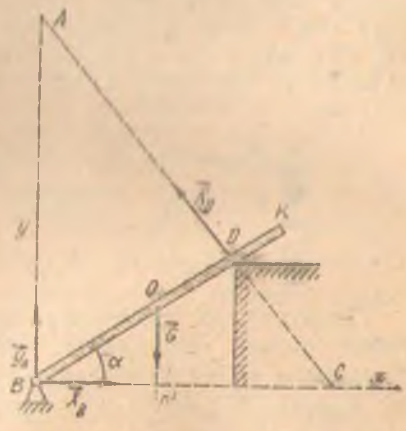
...нчи тенгламани изоҳлаймиз. Жуфтнинг ўз текислигида ...қандай нуқтага нисбатан моменти m га тенг, ишораси ...бат бўлади, чунки жуфт балкани соат стрелкаси ҳаракати... тескари буришга интилади, Q кучнинг BK елкаси BC ма...фа билан a кесма ярмининг йиғиндисига, яъни 2,75 м га ...ги. X_A кучнинг ўзи B нуқтага қўйилган бўлмаса ҳам, таъ...сир чизиғи B нуқтадан ўтади, шунинг учун X_A нинг B нуқ...тага нисбатан моменти нолга айланиб, ўзи моментлар тенгла...масига кирмади. Текис ёйилган кучларнинг Q тенг таъсир ...этувчиси пунктир билан чизилди, туташ чизиқ билан чизилса, ...ки балкага текис ёйилган кучлар ҳам, уларнинг тенг таъсир ...этувчисини тасвирлайдиган Q куч ҳам таъсир қилар экан де...ган фикр чиқиб қолади. Энди навбатдаги мақсад (а) системани ...ечишдир. Бу тенгламалар 13-масаладаги мувозанат тенглама...ларидан мураккаб экани кўриниб турибди. Масаланинг жаво...би:

$$X_A = 6{,}45 \text{ кН}; \quad Y_A = 11{,}55 \text{ кН}; \quad N_B \approx 9{,}2 \text{ кН}.$$

Бу масала схематик масалаларни ўқий олишга ҳам ўргатади.

15-масала. Узунлиги $4l$ ва оғирлиги G бўлган бир жинсли BK стержень B нуқтада қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктирилган бўлиб, D нуқтада вертикал деворнинг қиррасига таяниб қўйилган (81-расм). Стерженнинг горизонтга қиялик бурчаги $\alpha \cdot BD = 3l$. Таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Реакцияларни топиш учун стерженнинг мувозанатини кўриб чиқамиз. Координата ўқлари чизмада кўрсатилгандек қилиб ўтказилади. Стержень ўзининг ўртасига қўйилган G оғирлик кучи, B шарнирнинг ўзаро тик йўналган X_B ва Y_B реакциялари, деворнинг D нуқтада стерженга тик бўлиб йўналган R_D реакцияси таъсирида мувозанатда турибди. Таъсир этаётган кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган. Бу масала



81-расм.

(39') шартлардан фойдаланиб ечилади. Моментлар марка... ҳар икки номаълум куч кесишган A, B ва C нуқталарда ... миз. Бу куч нуқта бир тўғри чизиқда ётмаслиги расмдан ... риниб турибди. Бу нуқталар *Риттер нуқталари* деб ата...

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad X_B \frac{3l}{\sin\alpha} - G\,2l\cos\alpha = 0,$$
$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad -G2l\cos\alpha + R_D 3l = 0,$$
$$\sum m_C(F_k) = 0; \quad -Y_B \frac{3l}{\cos\alpha} + G\left(\frac{3l}{\cos\alpha} - 2l\cos\alpha\right) = 0.$$

Ҳар бир марказда иккитадан номаълум реакция кучининг та... сир чизиқлари кесишгани учун, ҳар бир тенгламада битта но... маълум куч қатнашади. Буларнинг ечимлари:

$$X_B = \frac{G}{3}\sin 2\alpha; \quad Y_B = \frac{G}{3}(3 - 2\cos^2\alpha); \quad R_D = \frac{2G}{3}\cos\alpha.$$

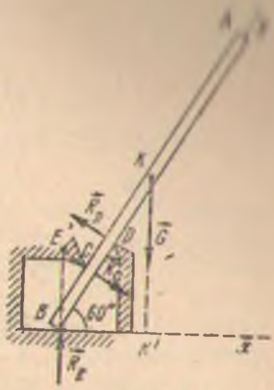
16-масала. Оғирлиги 200 Н бўлган бир жинсли AB бал... горизонтал силлиқ полга B нуқтасида 60° бурчак остида т... ралиб туради, бундан ташқари, уни иккита C ва D таянч... тутиб туради (82-расм) $AB = 3$ м, $BC = 0.5$ м, $BD = 1$ м. B, C ва D нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Берилган ва изланаётган кучларнинг ҳаммаси AB балкага таъсир қилади, шунинг учун балканинг мувозана... кўриб чиқилади. Балкага унинг G оғирлик кучи ва учта таянч... даги учта R_B, R_C, R_D реакция кучи қўйилган, балка эса те... кисликда ихтиёрий равишда жойлашган мана шу тўрт ку... таъсирида мувозанатда турибди. B таянчнинг (горизонтал по... нинг) реакцияси полга тик бўлиб, вертикал равишда юқори... йўналган. C ва D нуқталардаги таянч реакциялари балка... тик йўналган. Шу чоққача ҳамиша координата ўқлари би... бирига тик қилиб олиб келинган эди. Лекин ўзи нолга тенг бўлган бош векторнинг ҳар қандай ўқлардаги (демак, бир-би... рига тик бўлмаган ўқлардаги) проекциялари нолга тенг бўла... ди. Шунинг учун x ўқини горизонтал йўналишда олиб, y ўқи... балканинг узунлиги бўйлаб йўналтирилади. (39) шартлари... тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_C\cos 30^\circ - R_D\cos 30^\circ = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_B\cos 30^\circ - G\cos 30^\circ = 0. \qquad (a)$$
$$\sum m_E(F_k) = 0; \quad R_B \cdot CD - G\cdot\frac{AB}{2}\cos 60^\circ = 0.$$

Проекциялар тенгламаси бунчалик содда бўлишига нима сабаб бўлди? Координата ўқларини уларга кўп кучлар тик бўладиган қилиб ўтказдик, масалан, x ўқини R_B ва G кучларга, y ўқини R_C ва R_D кучларга тик қилиб ўтказдик. Ана шунинг учун проекциялар тенгламаси содда бўлди. Моментлар

...ни икки номаълум реакция кучи (R_B ва R_C) кесишган E нуқтада олинди, ...нинг моментлари нолга айланиб ке..., R_B ва R_C кучлар моментлар тенг...сига кирмай қолди, натижасида мо...лар тенгламасида битта номаълум R_D реакция қатнашмоқда. R_D реакция R_C реакцияга параллел бўлгани сабабли, R_D реакциянинг E нуқтага нисбатан ...ган елкаси CD кесманинг узунли...га тенг; G кучнинг E нуқтага нисба...н елкасини аниқлаш учун E нуқтадан G кучнинг таъсир чизиғига тик кесма ...илади, бу кесма горизонтал ўқда ...ган BK' кесмага тенг: $BK' = \frac{AD}{2}\cos 60°$.



82-расм.

(в) системанинг биринчи тенгламасини cos 30° га бўлиб, $R_C = R_D$ эканини, иккинчи тенгламасини ҳам cos 30° га бўлиб, $R_B = G = 200$ Н экани аниқланади. Учинчи тенгламадан $R_D = 300$ Н. $R_C = R_D = 300$ Н.

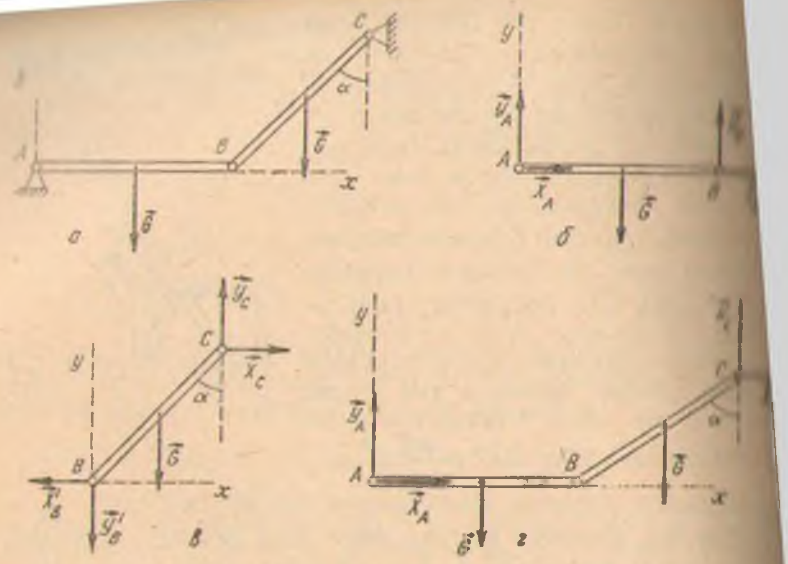
Энди текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсири остида мувозанатда турган қўшалоқ жисмларга оид бир масалани ечамиз.

17-масала. Ҳар бирининг оғирлиги G бўлган иккови бир хил бир жинсли AB ва BC балка бир-бирига шарнир билан уланган бўлиб, қўзғалмас таянчларга A ва C шарнирлар воситасида шундай бириктирилганки, бунда AB балка горизонтал ҳолатда, BC балка вертикал билан α бурчак ҳосил қилиб қия туради (83-расм). Шарнирларнинг реакцияси аниқлансин.

Е ч и ш. Масалани ечиш учун ҳар бир балканинг мувозанатини алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз. AB балкага унинг G оғирлик кучи, A шарнирнинг чизмада кўрсатилгандек қилиб йўналтирилган x ва y ўқлари бўйлаб йўналган X_A ва $У_A$ реакциялари, B шарнирнинг X_B ва $У_B$ реакциялари қўйилган. BC балкага ҳам унинг G оғирлик кучи, C шарнирнинг X_C ва $У_C$ реакциялари, B шарнирнинг X'_B ва $У'_B$ реакциялари қўйилган. Таъсир ва акс таъсир қонуни деб аталадиган тўртинчи аксиомага асосан, B шарнирнинг BC балкага қўйилган X'_B ва $У'_B$ реакциялари унинг AB балкага қўйилган X_B ва $У_B$ реакциялари унинг AB балкага қўйилган X_B ва $У_B$ реакцияларига қарама-қарши йўналган бўлиб, модуллари тенг бўлиши керак:

$$X'_B = X_B, \quad У'_B = У_B. \tag{a}$$

Энди AB балкага (83-расм, *б*) қўйилган кучларнинг мувозанат шартлари (39′) шаклда тузилади (балкаларнинг узунли-



83-расм.

ги $2a$ деб белгиланади):

$$\sum m_A(F_k)=0;\quad -Ga+y_B 2a=0,$$

$$\sum m_B(F_k)=0;\quad -y_A 2a+Ga=0,$$

$$\sum F_{kx}=0;\quad X_A+X_B=0.$$

BC балкага (83-расм, *в*) қўйилган кучларнинг мувозан шартлари (39) шаклида тузилади:

$$\sum F_{kx}=0;\quad -x'_B+x_C=0,$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad -y'_B-G+y_C=0,$$

$$\sum m_C(F_k)=0;\quad Ga\sin\alpha+y'_B 2a\sin\alpha-x'_B 2a\cos\alpha=0,$$

AB балканинг мувозанат шартларини тузишда кучларни у ўқига проекциялаш тўғри бўлмайди, чунки (39′) шартлар „Моментлар маркази сифатида олинган *A* ва *B* нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқ ўққа (кучлар проекцияланадиган ўққа) тик бўлмаслиги керак" деган шарт бор: масаладаги *A* ва *B* нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқ у ўққа тик. Бир нарсага диққат қилинг. (б) ва (в) системаларда моментлар маркази сифатида олинган *A* ва *B* нуқталарда бир эмас, икки эмас, балки уч кучнинг таъсир чизиқлари кесишади, шунинг учун моментлар тенгламасида фақат биттадан номаълум куч қатнашяпти.

...ликлар ҳисобга олинса, (б) ва (в) системалар олти ... олтита тенглама системасига айланади, ечимлари

$$X_A = X_B = X_C = G\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad Y_A = Y_B = \frac{G}{2}, \quad Y_C = \frac{3}{2}G.$$

X'_B ва X_C реакциялар расмда кўрсатилганидагига тес... йўналган.

...ни бошқа усул билан ҳам ечиш мумкин, бунинг ... бутун системанинг (иккала балкани биргаликда) ... (83-расм, *a*). кейин эса бир бўлагининг (AB ёки ...нинг) мувозанатини текшириш керак. Бутун системанинг мувозанатини кўриб чиқишда балкаларни бир-бирига ... турган B шарнирнинг X_B, Y_B ва X'_B, Y'_B реакциялари ...ларга асосан ўзаро ейишиб кетиб, гўё B нуқтада шар... йўқдек тасаввур этилади. Бутун система (83-расм, *г*) эса ... G оғирлик кучлари ва икки четдаги икки шарнирнинг ... Y_A ва X_C, Y_C реакциялари таъсирида мувозанатда ту...

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_C - 2G = 0, \qquad (г)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad -Ga - G(2a + a\sin\alpha) - X_C 2a\cos\alpha + Y_C(2a + 2a\sin\alpha) = 0.$$

...даги учта тенгламада тўртта номаълум бор. Шунга кўра ...ни ечиш учун балкалардан бирининг (фақат бирининг) ...гини қўшимча равишда кўриб чиқиш керак. Масалан, ... балканинг мувозанатини кўриб чиқамиз, унинг шартлари ... системада берилган. Демак, (б) ва (г) системаларни бир... ечиб, изланаётган номаълумлар аниқланади. Бу ерда ...нган натижалар олдинги натижалар билан бир хил бў...

Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувоза... доир масала ечишни ўрганиб олдик, энди фермаларга ... масалаларни бирмунча кенгроқ қилиб баён этмоқчимиз. Шунга кўра фермаларнинг таянч реакцияларини ва ферма стерженларида пайдо бўладиган зўриқишларни (39), (39′) ва ...) шартлар ёрдамида қандай аниқлашни кўриб чиқамиз. ... фермага қўйилган актив ва реакция кучлари бир нуқ... кесишадиган кучлар бўлиши шарт эмас, бу кучлар те...ликда жойлашган бўлса бас. Бунинг устига, ферманинг ... реакцияларини аниқлашда ферма яхлит жисм деб, унинг стерженларидаги зўриқиш кучларини аниқлашда ферма жисм... системаси (стерженлар системаси) деб ҳисобланади. Таянч ...цияларининг ёки стерженлардаги зўриқиш кучларининг ...нги усулда аниқланган қийматларини янги усулда аниқ...ган қийматларига таққослаш мумкин бўлиши учун ўша

17-§ да ишлаб кўрсатилган фермани яна ҳисоблаймиз. Сте... женларни кесишнинг бу усули *Риттер усули* деб аталади.

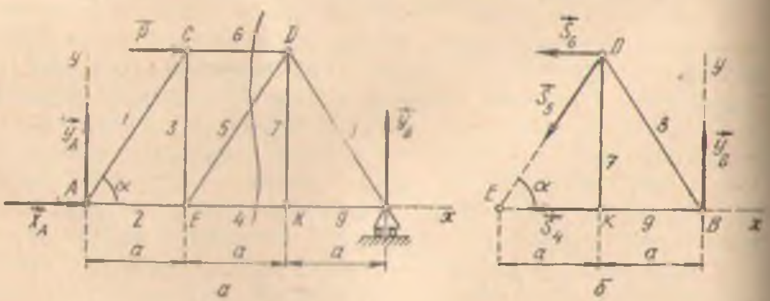
18-масала. Фермага C нуқтада горизонтал йўналган $P=$ $=20$ кН куч қўйилган (84-расм, a), $\alpha=60°$. A таянч ... дирик шарнир, B таянч қўзғалувчи шарнир. Таянч реакциялари ва стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучлари аниқлансин.

Ечиш. Аввало таянч реакциялари аниқланади. Бу ҳолда тугунларни йўқ деб, бутун фермани яхлит жисм деб ҳисоблаймиз. Фермага берилган горизонтал P куч, A шарнирнинг X_A ва Y_A реакциялари, B катокнинг Y_B реакцияси қўйилади. Бу кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат шарти (39′) шаклида бўлади:

$$
\begin{aligned}
&\sum m_A(F_k)=0; \quad -P\cdot a\sqrt{3}+Y_B\cdot 3a=0,\\
&\sum m_B(F_k)=0; \quad -P\cdot a\sqrt{3}-Y_A\cdot 3a=0, \qquad (a)\\
&\sum F_{kx}=0; \quad X_A+P=0.
\end{aligned}
$$

(а) системанинг ечимлари $X_A=-P=-20$ кН, $Y_A=$ $-11{,}53$ кН, $Y_B=11{,}53$ кН бўлиб, 17-§ да ечилган ферманинг таянч реакциялари билан бир хил бўлди, чунки $R_A=$ $=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}\approx 23{,}06$ кН. Агар диққат қилинган бўлса, таянч реакцияларини аниқлашда уч куч тўғрисидаги теорема ишлатилмади, чунки бу ердаги кучлар текисликда жойлашган кесишувчи кучлар эмас, балки текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлардир.

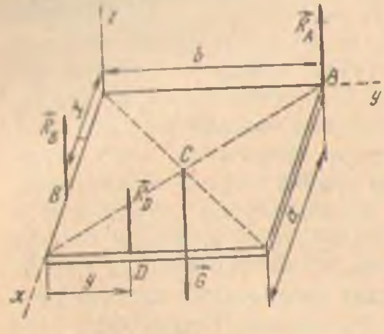
17-§ да ферма ҳисоблангандa, масалан, 4-стержендаги зўриқиш кучини (ёки ўша стерженнинг реакциясини) аниқлаш учун ҳамма тугунлари A дан бошлаб бирин-кетин кесилган эди; 4-стерженнинг реакцияси E тугунни кесганда аниқланган эди, унгача эса A ва C тугунлар кесилиб, бир қанча мувозанат тенгламалари тузилган ва ечилган эди. Риттер усулининг афзал томони шундаки, бу усул билан ишлаганда исталган



85 расм.

стерженнинг зўриқиш кучи фақат битта тенглама тузиб аниқланади, қўшни стерженларнинг зўриқиш кучлари аниқланган ёки аниқланмаганига боғлиқ бўлмайди. Бу усул қўлланилганида ферма уч стерженидан кесилади (тўрт стерженидан кесиш тўғри эмас). Фермани, масалан, 4-, 5-, 6-стерженлари; 4-, 7-, 8-стерженлари; 1-, 3-, 6-стерженларидан кесиш мумкин, бироқ 5-, 6-, 7-, 9-стерженларидан кесиш тўғри эмас. Учта стерженидан кесилганда ферманинг бир қисми ташлаб юборилади, бу қисмнинг олиб қолган қисмига кўрсатадиган таъсири ўша кесилган учта стерженнинг номаълум зўриқиш кучлари орқали ифодаланади. Учта номаълум бўлган ҳолда текисликда ихтиёрий жойлашган кучларнинг мувозанат тенгламасидан ўша учта номаълумни топа оламиз, тўрт стерженидан кесилганда ўша бўлагининг тўртта номаълум реакциясини учта мувозанат тенгламасидан аниқлай олмай қоламиз.

Энди стерженларни аниқ кесиб кўрсатамиз, масалан, 4-стерженнинг зўриқишини топиш керак бўлсин. Юқорида айтиб ўтилганидек, 4-стерженни 5-, 6-стерженлар ёки 7-, 8-стерженлар билан биргаликда кесиш мумкин. 4-, 5-, 6-стерженларни кесамиз-да (84-расм, *б*), ферманинг чап томонини ташлаб юборамиз, ташланган қисмининг ўнг қисмига берадиган таъсирини s_4, s_5, s_6 зўриқиш кучлари билан алмаштирамиз (84-расм, *б*). Ферманинг ўнг томондаги қисми s_4, s_5, s_6 ва Y_B кучлар таъсири остида мувозанатда турибди, s_4 зўриқиш кучини аниқлаш керак, шунинг учун иккита номаълум куч кесишган D нуқтага (Риттер нуқтасига) нисбатан моментлар тенгламаси тузилади: $\sum m_D(F_k)=0, \ -s_4\cdot a\sqrt{3}+Y_B\cdot a=0,$ мана шу бир тенгламадан фақат s_4 номаълум аниқланади: $s_4=\dfrac{Y_B}{\sqrt{3}}=6{,}66$ кН, бу жавоб s_4 нинг 17-§ да тузилган жадвалдаги қийматига жуда тўғри келди, ҳатто ишораси ҳам бир хил бўлди. Масалан, s_4 ни эмас, s_6 ни аниқлаш керак бўлсин, унда ҳам фермани 84-расм, *б* дагича қилиб кесиб, икки номаълум куч кесишадиган E нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилади: $\sum m_E(F_k)=0, \ s_6\cdot a\sqrt{3}+Y_B\cdot 2a=0,$ бундан $s_6=-13{,}35$ кН жавоб чиқади, бу ҳам ўша жадвалдаги қийматга ҳатто ишораси билан ҳам тўғри келади. Бирор стерженнинг зўриқиш кучини аниқлаш учун фақат битта тенглама тузиб, у ечилмоқда. Бу жуда қулай усул. Энди бу ерда бир оз эҳтиёт бўлиш керак. 84-расм, *б* га қаралса, D ва E нуқтадан бошқа иккита номаълум куч кесишадиган нуқта йўқ. Борди-ю, K нуқтага ёки B нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилса, буларда номаълумлар битта эмас, балки иккита (s_6 ва s_5) бўлади. Шунинг учун моментлар тенгламаси эмас, кучларнинг проекциялари тенгламаси тузилади. Кучларни шундай ўққа проекциялаш кераки, бунда ҳам тенгламада фақат битта номаълум қатнашадиган бўлсин. Бундай ўқ сифа-



86-расм.

тида вертикал ўқ олами... расм, *б* даги кучлар ... ўққа проекцияланади: $\sum F_{ky}$ ... $- s_5 \cos 30° + Y_B = 0$, бундан ... $= 13{,}32$ кН, бу жавоб ҳам ... жадвалдаги қийматига ҳам ... мондан тўғри келди.

Энди фазода параллел ... лашган кучларнинг мувозанат... га оид бир масалани ечиб кў... сатамиз. Фазодаги кучларга ои... масалалар ҳам текислик... кучлар таъсири остида турга... жисмларнинг мувозанатига ои... масалалар каби ечилади. Қайси жисмнинг мувозанатини те... шириш керак эканлиги аниқлангандан сўнг жисм богланиш... лардан бўшатилади, ташланган богланишларнинг таъсири улар... нинг реакциялари билан алмаштирилади, жисм эркин жис... деб ҳисобланиб, унинг мувозанат шартлари тузилади. Бу ма... салаларда мувозанат шартлари тузишда учрайдиган янги нарс... кучларнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблашдир.

19 масала. Эни *a*, бўйи *b* бўлган тўғри тўртбурчак шакли... да ишланган бир жинсли плитани кўтаришда уч нафар ишчи... дан бири плитанинг *A* учидан ушлаб туради (85-расм). Учча... ла ишчига плитадан тушадиган куч бир хил бўлиши учун қолган икки киши плитани қаеридан ушлаши, яъни улар уш... лаб турадиган *B* ва *D* нуқталарнинг координаталари нимага тенг бўлиши керак? Плитанинг оғирлиги *G*.

Ечиш. Плитанинг мувозанати кўриб чиқилади. Плитани кўтариб турган ишчилар қўлининг реакцияси R_A, R_B ва R_D билан белгиланса, плита вертикал йўналган тўртта куч таъси... рида горизонтал вазиятда мувозанатда туради, бу ерда тўр... тинчи *G* куч — плитанинг оғирлик кучи. Координата ўқлари расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказилади. Плита фазода па... раллел жойлашган кучлар таъсирида мувозанатда тургани учун (38) шартлар тузилади:

$$\sum F_{kz} = 0: \quad R_A + R_B + R_D - G = 0,$$

$$\sum m_x(F_k) = 0; \quad R_D y - G\frac{b}{2} + R_A b = 0,$$

$$\sum m_y(F_k) = 0; \quad G\frac{a}{2} - R_B x - R_A a = 0.$$

R_D куч *x* ўқини кесиб ўтгани учун унинг *x* ўқига нисба... тан моменти нолга тенг. R_A куч *y* ўқини кесиб ўтгани учун унинг *y* ўқига нисбатан моменти нолга тенг. Ҳамма кучлар... нинг ўққа нисбатан моментлари кучнинг ўққа тик бўлган те...

...даги проекциясидан ўқ билан ўша текислик кесишган ...га нисбатан олинган момент сифатида ҳисоблаб чиқари...

Масала шартида плитадан ҳар бир ишчига тушадиган куч ... бўлиши керак деб айтилган, яъни $R_A = R_B = R_D = R$. ... биринчи тенгламадан $3R = G$ тенглик келиб чиқади, ... охирги икки тенгламага қўйиб, тенглама R га қисқар... $b + y = \frac{3}{2} b$, $a + x = \frac{3}{2} a$. Булардан $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ ... аниқланади. Иккинчи ва учинчи ишчи плитани четининг ...ридан ушлашлари керак экан. Шу чоққача ишлаб кўр... ...ган масалаларнинг ҳаммасида номаълум миқдорлар реак... кучи бўлар эди. Бу масалада номаълум миқдорлар масо... (нуқталарнинг координатаси) бўлди.

...гар ўша плитани тўрт киши кўтарса, номаълум реакция... тўртга, бу реакциялар қатнашадиган тенгламалар учтали... қолаверади; демак, масала статик жиҳатдан ноаниқ бўлиб ...ади.

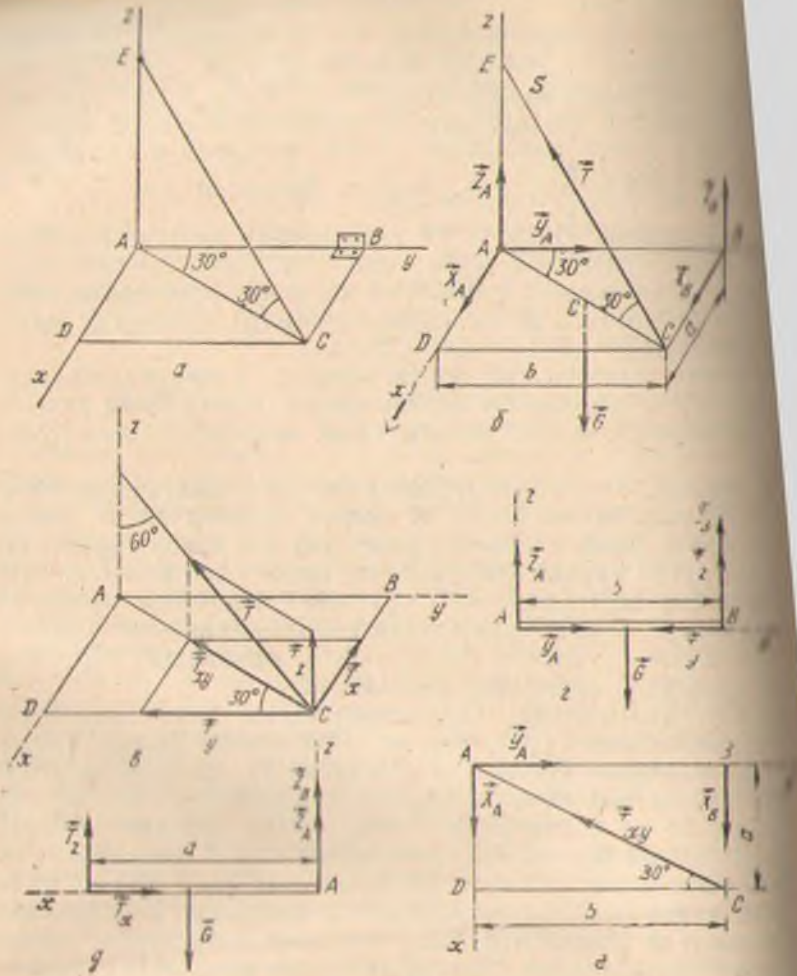
80-масала. Тўғри тўртбурчак шаклида ишланган бир жинс... $ABCD$ пластинка деворга A сферик шарнир ва B ошиқ-...шиқ билан бириктирилган бўлиб, уни CE арқон горизонтал ...иятда тутиб туради (86-расм, *а*); арқон деворнинг A нуқ... билан бир вертикалдаги E нуқтасига қоқилган михга ва ...ластинканинг C нуқтасига боғланган. Пластинканинг оғирли... $G = 200$ Н, $\angle ECA = \angle BAC = 30°$. Арқоннинг тортилиш ...чи ва таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Изланаётган миқдорларни топиш учун пластинка...инг мувозанатини кўриб чиқамиз. Координата ўқлари чизма... кўрсатилгандек ўтказилади (86-расм, *б*). Масала шартида ...ластинканинг эни ва бўйи қанча экани берилмагани учун эни ..., бўйи b билан белгиланади. Пластинкага вертикал бўйлаб ...стга йўналган G оғирлик кучи, арқоннинг T реакцияси ва ...кала шарнирнинг реакциялари қўйилган. G оғирлик кучи ...ластинканинг O марказига қўйилган; арқоннинг T реакцияси ...рқоннинг ўзи бўйлаб йўналган; A сферик шарнирнинг реак...цияси фазода ихтиёрий йўналишда таъсир қилади, у коорди...ната ўқлари бўйлаб йўналган учта X_A, Y_A, Z_A тузувчи тар...зда тасвирланади; B ошиқ-мошиқ (цилиндрик шарнир) нинг реакцияси унинг y ўқига тик бўлган xz текисликда ҳар қан...дай йўналишда таъсир қилади, у иккита X_B ва Z_B тузувчига ...жратиб тасвирланади. Пластинкага таъсир этаётган кучлар фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг олтита мувозанат шартини [34-§, (36), (37) га қа...ранг] тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - T \cos 30° \cos 60° = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - T \cos 30° \cos 30° = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B + T \cos 60° - G = 0, \qquad (a)$$



87-расм.

$$\sum m_x(F_k)=0;\quad -G\frac{b}{2}+z_B b+T\cos 60^\circ\, b=0,$$

$$\sum m_y(F_k)=0;\quad G\frac{a}{2}-T\cos 60^\circ\, a=0,$$

$$\sum m_z(F_k)=0;\quad -X_B b=0.$$

Координата ўқлари бўйлаб йўналган реакция кучларининг ўқлардаги проекцияларини аниқлаш осон. Бироқ, баъзи кучларнинг, масалан, T реакциянинг x ёки y ўқидаги проекциясини бевосита ҳисоблаб бўлмайди, чунки T нинг x ва y ўқ... билан ҳосил қилган бурчаклари маълум эмас. Шунинг учун $\bar{T}$

... (86-расм, *в*) олдин *xy* текисликка проекцияланади. $T\cos 30°$, кейин эса ўша T_{xy} проекция *x* ва *y* ўқларига ...ияланади: $T_x = T_{xy}\cos 60°$, $T_y = T_{xy}\cos 30°$, бироқ бу ер... T_{xy} нинг ўзи $T\cos 30°$ ифодага тенг. T_{xy} нинг бу ифода... ...га қўйилса, $T_x = T\cos 30°\cos 60°$, $T_y = T\cos 30°\cos 30°$ ... [(а) системанинг биринчи, иккинчи тенгламасига қа... T кучнинг *z* ўқидаги проекцияси бевосита аниқланади, ... T куч билан *z* ўқи орасидаги бурчак 60° га тенг: $T_z = T\cos 60°$.

...ларнинг мувозанат шартларига кирадиган ўққа нисба... моментлари, одатда кучнинг тегишли ўққа тик бўлган те...лигидаги проекциясидан ўқ билан бу текислик кесишган ...га нисбатан олинган момент сифатида ҳисобланади. Ма... G оғирлик кучининг *x* ўқига нисбатан моментини ҳи...лаш учун Gzy текисликка проекцияланади, бу проекция G ...нинг ўзига тенг, елкаси эса $\frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$ га тенг, ишораси манфий. X_A куч *x* ўқига нисбатан момент бермайди, чунки ўқнинг ўзи... ...тибди: X_B куч *x* ўқига параллел, шунинг учун у *x* ўқи... нисбатан момент бермайди; Z_A, Y_A кучлар *x* ўқини кесиб ...ади, шунинг учун улар ҳам *x* ўқига нисбатан момент бер...ади. *y* ва *z* ўқларига нисбатан моментлар ҳам шунга ўх...аш ҳисобланади. Кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментларини ҳисоблашга қулай бўлиши учун жисм унга таъ...ир этаётган кучлар билан биргаликда учала координата те...кислигига проекциялаб кўрсатилади (86-расм *г*, *д*, *е*). Энди T ...кучнинг *x*, *y*, *z* ўқларига нисбатан моментларини ҳисоб...лаш тўғрисида бир оз тўхталиб ўтамиз. T кучнинг учта ту...зувчига ажратилганлиги (86-расм, *в*) юқорида гапириб ўтил...ди. T кучнинг бирор ўққа, масалан, *x* ўқига нисбатан момен...ти унинг учала тузувчисининг ўша ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг бўлади (Вариньон теоремаси, 42-§ га қаранг): T кучнинг T_x, T_y тузувчилари *x* ўқи билан бир текисликда ётгани учун уларнинг *x* ўқига нисбатан моменти нолга тенг, T_z тузувчисининг моментини аниқлаш учун *yz* текисликка проекцияланади, проекцияси T_z нинг ўзига тенг, бу проекциянинг *x* ўқи билан *yz* текислик кесишган *A* нуқтага нисбатан елкаси *b* га тенг. $m_x(T) = T_z b = T\cos 60° b$. Кучларнинг *z* ўқига нисбатан тузилган моментлар тенгламаси қуйидагича бўлди: Z_A куч *z* ўқида ётгани учун момент бермади, X_A, Y_A ва T кучлар *z* ўқини кесиб ўтгани учун момент бермади, G, Z_B кучлар *z* ўқига параллел бўлгани учун момент бермади, фақат X_B куч *z* ўқига нисбатан момент берди, ўшанинг моментини олтинчи тенглама қилиб ёзиб қўйдик. (а) системани ечишда ишни энг охирги, олтинчи тенгламадан бошлаймиз: $X_B = 0$ бўлади, ундан сўнг пастдан юқорига томон тенгламаларни бирин-кетин ечиб бориб, $T = G = 200$ Н, $z_B = 0$

$z_A = 100$ Н, $Y_A = 150$ Н, $X_A = 86{,}6$ Н экани аниқланади. Масалада арқоннинг тортилиш кучини аниқлаш талаб қилинган эди, лекин бу ерда арқоннинг T реакцияси аниқланади. Арқоннинг T реакцияси унинг тортилиш кучига сон жиҳатдан тенг экани бундан олдин ишланган кўп масалаларда кўриб чиқилган эди. Агар B нуқтада ҳам сферик шарнир бўлганда эди, у ҳолда қўшимча Y_B реакция пайдо бўлиб, мувозанат шартларининг иккинчиси

$$Y_A + Y_B - T\cos 30^\circ \cos 30^\circ = 0 \qquad (a)$$

тенглама шаклида ёзилган бўлар эди. Лекин бошқа тенгламалар ўзгармай қолиб, X_A, Y_A, Z_A, Z_B, T номаълумларнинг қиймати ҳам аввалгича қолган бўлар эди. Аммо Y_A, Y_B номаълумларни битта (а) тенгламадан аниқлаш масаласи статик жиҳатдан ноаниқ масала бўлиб қолар эди, чунки B шарнирни сферик шарнир қилиш билан жисмга ортиқча боғланиш қўйилди. Битта сферик A шарнирнинг ўзиёқ жисмни y ўқи бўйлаб сирпанишга йўл қўймайди.

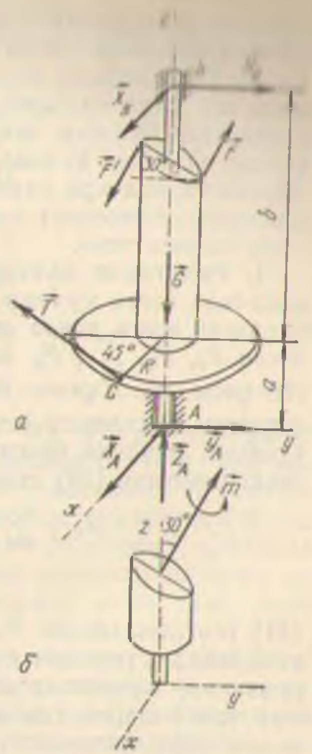
Энди жисмга фазовий кучлардан ташқари жуфт ҳам таъсир этаётган ҳолда битта масала ечамиз.

21-масала. Схемаси 87-расмда берилган диск ва втулкадан иборат яхлит деталнинг оғирлиги $G = 12$ кН бўлиб, дискка C нуқтада горизонтал текисликда ётадиган T куч қўйилган. Ва втулканинг горизонтга 30° қия бўлган юзасига ўша текисликда ётадиган ва моменти $m = 150$ кН см бўлган (F, F') жуфт таъсир қилади. $F \parallel Ax$, $a = 10$ см, $b = 30$ см, $R = 15$ см. A подпятник ва B подшипникнинг реакциялари ҳамда T куч аниқлансин.

Ечиш. Номаълум миқдорларни аниқлаш учун деталнинг мувозанатини кўриб чиқамиз. Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказамиз. A подпятникнинг реакциялари X_A, Y_A, Z_A, B подшипникнинг реакциялари X_B, Y_B бўлади. (F, F') жуфтни унинг моментининг m вектори орқали тасвирлаймиз (87-расм, *б*). Фазода ихтиёрий равишда жойлашган бу кучларнинг мувозанат шартларини тузамиз:

$$\begin{aligned}
&\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - T\cos 45^\circ = 0,\\
&\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - T\cos 45^\circ = 0,\\
&\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A - G = 0, \qquad (a)\\
&\sum m_x(F_k) = 0; \quad T\cos 45^\circ a - Y_B(a+b) = 0,\\
&\sum m_y(F_k) = 0; \quad -T\cos 45^\circ a + X_B(a+b) + m\cos 60^\circ = 0,\\
&\sum m_z(F_k) = 0, \quad -TR + m\cos 30^\circ = 0.
\end{aligned}$$

(F, F') жуфтнинг x ўқига нисба... моменти нолга тенг, чунки, би... ...дан, масала шартида жуфтнинг ...чилари Ax ўқига параллел бўл..., иккинчидан, жуфт моментининг ...ктори x ўқига тик бўлган yz те...лиқда ётиб, x ўқига проекция бер... Жуфтнинг y ва z ўқига нис... моментлари m векторнинг y ва ...даги проекцияларига тенг. Уму..., жуфт моментининг вектори қай... ўққа проекция берса, жуфт жисм... ўша ўқ атрофида айлантиришга ...илади, момент векторининг проек... мусбат бўлса, соат стрелкаси ...ракатига тескари айлантиришга ин...



7- расм.

(а) системанинг ечимлари: $X_A \approx$ ...6,4 кН, $Y_A \approx 4{,}6$ кН, $Z_A = 12$ кН, $X_B = -0{,}35$ кН, $Y_B \approx 1{,}5$ кН, $T \approx$ ...8,7 кН.

Фазода ихтиёрий равишда жой...шган кучлар мувозанатининг (36), (37) шартлари *асосий шартлар* деб ...лади. Фазода ихтиёрий равишда ...йлашган кучлар мувозанатда бў...иши учун ҳамма кучларнинг учбур...кли бирор пирамиданинг қиррала... бўйлаб йўналган олти ўққа нис...тан ёки учбурчакли призманинг ён қирралари ва асосининг ...рралари бўйлаб йўналган олти ўққа нисбатан моментлари...нг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя, деган ...оремани исбот қилиш мумкин.

40-§. Эркин бўлмаган жисмнинг мувозанат шартлари

Эркин бўлмаган ҳар қандай жисмни эркин деб ҳисоблаш учун боғланишларни ташлаб, улар таъсирини реакцияси билан алмаштириш керак (5-§ га қаранг). Жисмга қўйилган актив кучларни бир-бирига боғлайдиган тенгламалар жисмнинг *мувозанат шартлари* деб аталади. Бироқ бу тенгламаларда номаълум реакция кучлари қатнашмайди.

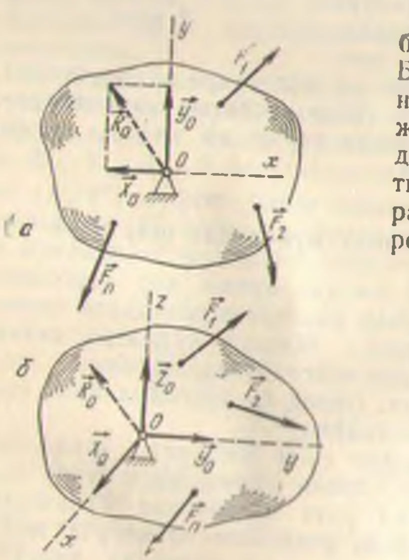
Жисмнинг мустақил кўчишлари сони жисмнинг *эркинлик даражалари сони* деб аталади. Эркин қаттиқ жисм учта координата ўқига параллел бўлган учта илгарилама кўчишдан ташқари, яна ўша ўқлар атрофида учта айланма ҳаракат қила олади. Демак, эркин қаттиқ жисм олтига мустақил ҳаракат қила олади. Жисм бирор ўққа параллел равишда илгарилама ҳаракат қилмаслиги учун ҳамма кучларнинг мана шу ўққа проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур. Жисм бирор ўқ атрофида айланмаслиги учун эса ҳамма кучларнинг мана шу ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши шарт. Жисм мувозанатда турганида унга таъсир этаётган кучлар жисмни боғланишлар йўл қўйилган ҳаракатга келтира олмайдиган бўлиши керак; шунинг учун жисмнинг мувозанат шартлари сони унинг эркинлик даражалари сонига тенг.

1. Ричагнинг мувозанати. Қўзғалмас ўққа тик бўлган текисликда ётган кучлар таъсирида ўша ўқ атрофида айлана оладиган жисм *ричаг* деб аталади. Ричакка ўша текисликда ётган $F_1, F_2, \ldots, F_n$ актив кучлар таъсир этаётган бўлсин (88-расм, *а*). Ўқнинг R_O реакцияси ҳам ўша текисликда ётади ва исталган йўналишга эга бўлади. x ва y координата ўқларини ўтказиб, ричакка таъсир этаётган бу кучлар учун учта мувозанат шартини (39) шаклида тузамиз.

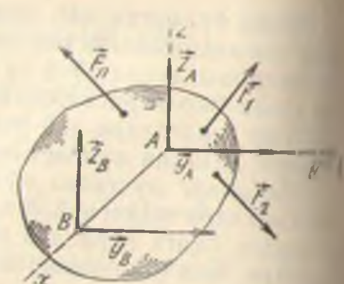
$$X_0+\sum F_{kx}=0,\quad Y_0+\sum F_{ky}=0, \tag{41}$$

$$\sum m_0(F_k)=0. \tag{42}$$

(41) тенгламалардан R_0 реакция (унинг X_0, Y_0 тузувчилари) аниқланади, реакция кучлари қатнашмаган (42) тенглик эса ричагнинг мувозанат шартини ифодалайди. Демак, ричагнинг мувозанат шарти ҳамма кучларнинг айланиш ўқига нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг бўлишини талаб қилади.


88-расм.

2. Битта қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмнинг мувозанати. Битта нуқтасидан сферик шарнир билан маҳкамлаб қўйилган жисмга фазода ихтиёрий равишда йўналган $F_1, F_2, \ldots, F_n$ актив кучлар қўйилган бўлсин (88-расм, *б*). Сферик шарнирнинг R_0 реакцияси O нуқтага қўйилган бўлиб, фазода ихтиёрий равишда йўналади. Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказиб, жисмга таъсир этаётган кучларнинг мувозанат шартларини (36), (37) шаклида тузамиз:


89-расм.

$$X_0+\sum F_{kx}=0,\quad Y_0+\sum F_{ky}=0,\quad Z_0+\sum F_{kz}=0, \tag{43}$$

$$\sum m_x(F_k)=0,\quad \sum m_y(F_k)=0,\quad \sum m_z(F_k)=0. \tag{44}$$

(43) тенгликлардан R_0 реакция (унинг X_0, Y_0, Z_0 тузувчилари) аниқланади, реакция кучлари қатнашмаган (44) тенгликлар эса қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг мувозанат шартларини ифодалайди. Демак, қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг мувозанат шартлари ҳамма кучларнинг қўзғалмас нуқтадан ўтадиган учта ўзаро тик ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлишини талаб қилади.

3. Айланиш ўқи бор жисмнинг мувозанати. Жисмнинг айланиш ўқи бўлсин, жисм мана шу ўқда силжий олсин, яъни жисмга A ва B нуқталарда иккита цилиндрик шарнир (подшипник) қўйилган (89-расм) бўлсин. Бу жисмга фазода ихтиёрий равишда жойлашган $F_1, F_2, \ldots, F_n$ актив кучлар қўйилган. У ҳолда шарнирлардаги реакция кучлари ўқларга тик бўлган бўлиб, айланиш ўқи расмда кўрсатилгандек йўналганда реакциялар Y_A, Z_A ва Y_B, Z_B тузувчиларга ажралади. Жисмга қўйилган фазовий кучларнинг олтита (36), (37) мувозанат шарти тузилса, улардан фақат иккитасида, яъни

$$\sum F_{kx}=0,\quad \sum m_x(F_k)=0 \tag{45}$$

тенгликларда реакция кучлари қатнашмаган экани кўринади. Шунинг учун (45) тенгликлар айланиш ўқига эга бўлган жисмнинг мувозанат шартларини ифодалайди. Демак, айланиш ўқига эга бўлган жисмнинг мувозанат шартлари ҳамма кучларнинг айланиш ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси ва уларнинг айланиш ўқига нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлишини талаб қилади.

4. Айланиш ўқи қўзғалмайдиган жисмнинг мувозанати. Агар 89-расмда кўрсатилган A ёки B шарнирлардан бири ўрнига сферик шарнир қўйилса, айланиш ўқи қўзғалмайдиган бўлиб қолади; бу ҳолда сферик шарнирнинг x ўқи бўйлаб йўналган яна битта реакцияси пайдо бўлади. Демак, бу ҳол-

... (...) тенгликларнинг фақат биттасида, тўғриси

$$\sum m_x(F_k) = 0$$

тенгликда реакция кучи қатнашмайди, шунинг учун бу тенглик жисмнинг мувозанат шарти бўлади. Демак, айланиш ўқи қўзғалмайдиган жисмнинг мувозанат шарти ҳамма кучларнинг мана шу ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлишини талаб қилади. Жисмга таъсир этувчи кучларнинг ҳаммаси AB айланиш ўқига тик бўлган текисликда ётган хусусий ҳолда бу жисм ричаг бўлади.

41-§. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасини содда кўринишга келтириш

Таъсир чизиқлари айни бир текисликда жойлашган кучлар системаси, яъни текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси фазовий кучлар системасининг хусусий ҳоли ҳисобланади. Статиканинг асосий теоремаси ҳар қандай кучлар системаси учун ҳам тўғри. Жумладан, бу теорема текисликдаги кучлар системаси учун ҳам тўғри: текисликда ихтиёрий равишда жойлашган ҳар қандай кучлар системаси умумий ҳолда битта кучга ва битта жуфтга эквивалент бўлади.

Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси ўша текисликда ётган нуқтага келтирилганда R' бош вектор кучлар таъсир этаётган текисликда ётади. Қўшилма жуфтларнинг ҳаммаси ҳам ўша текисликда ётади, демак, бу жуфтлар моментларининг векторлари бу текисликка тик бўлиб, узаро параллел йўналади. Қўшилма жуфтларга эквивалент бўлган жуфт моменти векторига тенг бўлган M_0 бош момент бу ҳолда бош векторга тик бўлади. Бунда бош моментнинг қиймати кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасида бош моментнинг вектори ўрнида алгебраик бош момент тушунчаси ишлатилади. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасининг кучлар билан бир текисликда ётган келтириш марказига нисбатан олинган *алгебраик бош моменти* деб бу кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган алгебраик моментларининг йиғиндисига айтилади.

Юқорида айтилган фикрларни ҳисобга олиб, статиканинг асосий теоремасини текисликдаги кучлар учун $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow (R', M_0)$ символ шаклида ёзамиз, бу ерда $R' = \sum F_k$, $M_0 = \sum m_0(F_k)$. Хусусий ҳолларда кучлар системасининг нимага эквивалент бўлиши бу системанинг R' бош вектори ва M_0 бош моменти нимага тенг бўлишига боғлиқ. Хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Агар бу системада $R' = 0$ ва $M_0 = 0$ бўлса, система му-

...атда бўлади. Бу ҳолга ...шли (39), (39′), (39″) му...нинг шартлари олдин кў...чиқилган ва уларга доир ...ли ишланган эди.

90-расм.

2. Агар бу системада $R' =$ 0 бўлиб, $M_0 \neq 0$ бўлса, у ...да кучлар системаси мо...ти $M_0 = \sum m_0(F_k)$ бўлган ...ита жуфтга эквивалент бў...ди. Бу ҳолда M_0 нинг қиймати O марказнинг қаерда олин...шига боғлиқ бўлмайди, чунки акс ҳолда айни бир кучлар ...темаси бир-бирига эквивалент бўлмаган бошқа-бошқа жуфт...р билан алмаштирилган бўлар эди, бундай бўлиши мумкин ...с. Демак, M_0 нинг қиймати O марказнинг қаерда олинга...ги боғлиқ эмас.

3. Агар бу системада $R' \neq 0$ бўлса, кучлар системаси бит...а тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. Бунда икки ҳол ...лиши мумкин.

а) $R' \neq 0$, $M_0 = 0$. Бу ҳолда кучлар системаси O марказ...н ўтадиган битта тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. ...ш момент бўлмагани учун бош вектор тенг таъсир этувчи...а тенг бўлиб қолади: $R = R'$, яъни тенг таъсир этувчининг ...одули бош векторнинг модулига тенг, йўналиши бош вектор ...ўналиши билан бир хил.

б) $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ (90-расм, *а*). Бу ҳолда моменти M_0 бўл...н жуфт модули $R' = R'' = R$ бўлган икки куч шаклида чи...лади (90-расм, *б*). Агар $OC = d$ кесма жуфтнинг елкаси ...ўлса,

$$Rd = |M_0| \tag{47}$$

...ўлиши керак. Бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўнал...ган тенг R' ва R'' кучларни бир-бири билан ейиштирилса, куч...р системаси C нуқтадан ўтадиган битта R тенг таъсир этув...ига эквивалент бўлади. C нуқтанинг ўрни қуйидаги икки ...шартдан аниқланади: 1) $OC = a$ масофа (47) тенгликни қано...атлантиради ($OC \perp R$), 2) R кучнинг O марказга нисбатан олин...ган моментининг ишораси M_0 моментнинг ишораси билан бир ...ил бўлиши керак.

Текисликдаги кучлар мувозанатда бўлмаса ё битта тенг ...аъсир этувчига эквивалент бўлади ($R' \neq 0$ ҳолда), ёки битта ...жуфтга эквивалент бўлади ($R' = 0$ бўлган ҳолда).

42-§. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасини содда кўринишга келтириш

32-§ да исбот этилган теорема аниқ бир фазовий кучлар системасини содда кўринишга келтиришга имкон беради. Бунинг учун системанинг бош векторини ва ихтиёрий бир O мар-кага нисбатан бош моментини аниқлаш керак. Бош ве... билан бош момент 32- § даги (34) ва (35) проекциялари ор... ли аналитик равишда аниқланади. Қуйидаги ҳоллар бўли... мумкин.

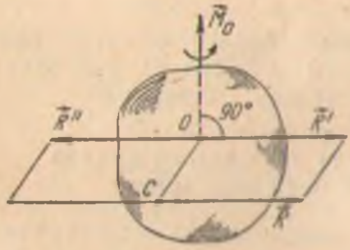
1. Агар фазовий кучлар системасида $R' = 0$, $M_O = 0$ бўл... са, кучлар мувозанатда бўлади Бу ҳол 33- § да батафсил ба... ён этилган эди.

2. Агар фазовий кучлар системасида $R' = 0$ бўлиб, $M_0 \neq$... бўлса, кучлар системаси жуфтга эквивалент бўлади, бу жуф... нинг моменти (35) проекциялари орқали ҳисоблаб аниқлана... ди. Бу ҳолда, текисликдаги кучларда бўлгани каби [40- §, ... ҳолга қаранг], M_O нинг қиймати O марказнинг қаерда оли... ганига боғлиқ эмас. Эркин жисм бундай кучлар таъсирида айланма ҳаракат қилади (лекин ҳамма вақт ҳам шундай бў... лавермайди).

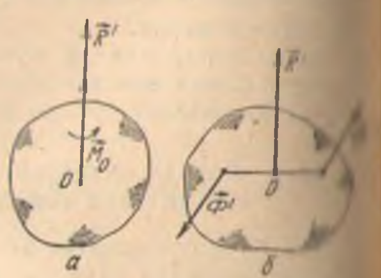
3. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$ бўлиб, $M_0 = 0$ бўлса, бу система O марказдан ўтадиган тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. Тенг таъсир этувчининг қиймати (34) проекциялари орқали аналитик равишда ҳисоблаб аниқланади. Эркин жисм бундай кучлар таъсирида илгарилама ҳаракат қилади (бунда тенг таъсир этувчи куч жисмнинг оғирлик марказига қўйилган бўлиши керак).

4. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлиб, бироқ $M_0 \perp R'$ бўлса, кучлар системаси O марказдан бошқа жойдан ўтадиган тенг таъсир этувчи R кучга эквивалент бўлади. Шун... дай эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, $M_0 \perp R'$ бўлган ҳолда M_0 вектор орқали тасвирланадиган жуфт ҳам, R' ... ҳам айни бир текисликда ётади (91- расм). Бу ҳолда жуфтни... R, R'' кучларини модуль жиҳатдан R' бош векторга тенг бўла... диган қилиб, 91- расмда кўрсатилганча чизилса, R' ва R'' куч... лар ўзаро ейишиб кетади, кучлар системаси эса $R = R'$ тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади, лекин бу тенг таъсир этувчи C нуқталан ўтади, бунда C нуқта $OC = \frac{|M_0|}{R}$ шартдан аниқланади ($OC \perp R$).

5. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлиб, бироқ M_0 вектор R' га параллел бўлса (92- расм, a), кучлар системаси...



91-расм.



92-расм.

R' куч билан ўша кучга тик бўлган текисликда ётган (F, F') жуфтга эквивалент бўлади (92-расм, б). Куч билан жуфтнинг бундай тўплами *динамик винт* деб ёки *динама* деб аталади. R' вектор ётган тўғри чизиқ кучлар системасининг *марказий ўқи* деб ёки *динаманинг ўқи* деб аталади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси йўқ. Бу системани бундан ортиқ соддалаштириб бўлмайди. Эркин жисм бундай кучлар таъсирида фақат мураккаб ҳаракат қилади, бундай ҳаракат *винтавий ҳаракат* деб аталади.

6. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлиб, улар бирбирига параллел ҳам, тик ҳам бўлмаса [66-расм, *в* га қаранг], бу система ҳам динамага эквивалент бўлади, бироқ унинг марказий ўқи O марказдан ўтмайди. Шундай эканига исботсиз ишонса бўлади.

43-§. Тенг таъсир этувчининг ўққа нисбатан моменти тўғрисида Вариньон теоремаси

Қаттиқ жисмга фазода ихтиёрий равишда жойлашган (F_1, F_2, ..., F_n) кучлар системаси таъсир этаётган бўлсин (93-расм). Бу кучлар R тенг таъсир этувчига эга бўлиб, унинг таъсир чизиғи бирор C нуқтадан ўтсин. Бу нуқтада жисмга мувозанагловчи Q куч қўйилади: $Q = -R$. У ҳолда (F_1, F_2, ..., F_n, Q) система мувозанат ҳолатга келади. Шунинг учун мувозанатловчи кучни ҳам ўз ичига олган система (36) ва (37) мувозанат шартларини қаноатлантиради, жумладан. x ўқига нисбатан олинган моментлар йиғиндиси нолга тенг бўлади:

$$\sum m_x(F_k) + m_x(Q) = 0.$$

Бироқ $Q = -R$ бўлиб, иккаласи айни бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналгани сабабли $m_x(Q) = -m_x(R)$ бўлади, $m_x(Q)$ нинг бу ифодасини олдинги тенгликка қўямиз:

$$\sum m_x(F_k) - m_x(R) = 0,$$

бундан

$$m_x(R) = \sum m_x(F_k). \qquad (48)$$

Демак, кучлар системаси тенг таъсир этувчига эга бўлса, бу тенг таъсир этувчининг ҳар қандай ўққа нисбатан олинган моменти қўшилувчи кучларнинг ўша ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг. Исбот этилган бу теорема Вариньон теоремасидир.

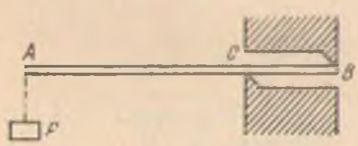
93-расм.

87-§ га доир масалалар

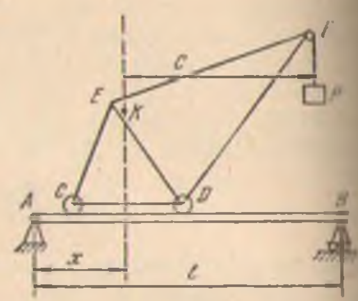
1. Узунлиги 2 м, оғирлиги 5 кН бўлган бир жинсли горизонтал AB балка қалинлиги 0,5 м бўлган деворга C ва B нуқталарда тиралиб турадиган қилиб ўрнатилган (94-расм). Балканинг A учига оғирлиги 10 кН бўлган юк осилган. Ишқаланиши йўқ деб ҳисоблаб, C ва B нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $R_C = 50$ кН, $R_B = 35$ кН.

2. Горизонтал AB балка устида $CDEF$ кран ҳаракатлана олади (95-расм). Краннинг оғирлиги 50 кН бўлиб, K нуқтага қўйилган. Кран F нуқтасида $P = 10$ кН юк кўтариб турибди. Ҳамма кучлар битта вертикал текисликда таъсир қилади, деб ҳисоблаб, балканинг оғирлигини эътиборга олманг. Краннинг расмда кўрсатилган вазиятида балканинг A ва B нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин. $l = 10$ м, $x = 3$ м, $c = 4$ м. Жавоб: $R_A = 38$ кН, $R_B = 22$ кН.

3. Оғирлиги 1 Н бўлган горизонтал AB стержень цилиндрик A шарнирда айлана олади (96-расм). Стерженнинг B учига ип боғланиб, бу ип кўчмас блокдан ўтказилиб, учига оғирлиги 1,5 Н бўлган P юк боғланган. Стерженнинг B учидан 20 см нарида турган нуқтасига оғирлиги 5 Н бўлган Q юк осилган. Стержень мувозанатда турибди, унинг узунлиги аниқлансин. Жавоб: 25 см.

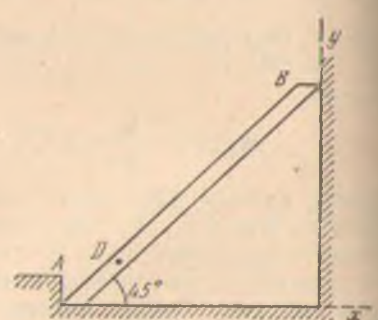


94-расм.



95-расм.

96-расм.



97-расм.

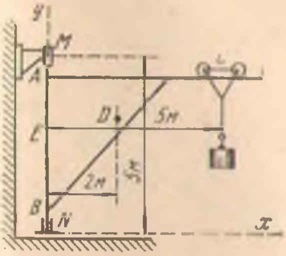
36-§ га доир масалалар

1. Силлиқ деворга горизонт билан 45° бурчак ҳосил қилиб вазиятда бир жинсли AB тўсин тираб қўйилган (97-расм). Тўсиннинг пастки учидан ҳисоблаганда бутун узунлигининг учдан бир қисмидаги D нуқтага оғирлиги $P=600$ Н бўлган юк осилган. Тўсиннинг оғирлиги 200 Н. A ва B нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_A = -300$ Н, $Y_A = 800$ Н, $X_B = -300$ Н.

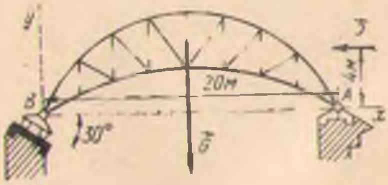
2. Эриган металл қуядиган ABC кран вертикал MN ўқи атрофида айлана олади (98-расм). Кранниңг оғирлиги 20 кН бўлиб, D оғирлик маркази айланиш ўқидан 2 м масофада туради. Кран кўтариб турган Q юкнинг оғирлиги 30 кН. Ўлчамлар расмда кўрсатилган. M подшипник ва N подпятникнинг реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_M = -38$ кН, $X_N = 38$ кН, $Y_N = 50$ кН.

3. Пештоқ шаклида ишланган ферманинг A нуқтаси қўзғалмас цилиндрик шарнирли таянчда ва B нуқтаси горизонт билан 30° бурчак ҳосил қилган силлиқ қия текисликдаги қўзғалувчи шарнирли (катокли) таянчда турали (99-расм). Ферманинг оғирлиги $G = 100$ кН, узунлиги $AB = 20$ м. Шамол босимининг тенг таъсир этувчиси $P = 20$ кН бўлиб, AB га параллел равишда ундан 4 м масофада фермага таъсир қилади. Таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_A = -11{,}2$ кН, $Y_A = 46$ кН, $R_B = 62{,}4$ кН.

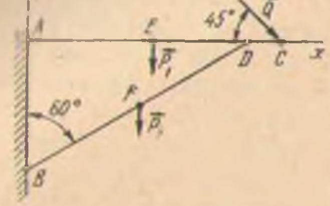
4. Узунлиги бир хил бўлган иккита AC ва BD стержень бир-бирига D нуқтада шарнир билан, вертикал деворнинг A ва B нуқталарига ҳам шарнир билан маҳкамланган (100-расм). AC стержень горизонтал вазиятда, BD стержень эса вертикал деворга 60° қия туради. AC стерженга унинг ўртасидаги E нуқтада вертикал йўналган $P_1 = 40$ Н куч, C нуқтада горизонтга 45° қия йўналган $Q = 100$ Н куч қўйилган. BD стерженга унинг ўртасидаги K нуқтада вертикал йўналган $P_2 = 40$ Н куч қўйилган. A ва B шарнирларнинг реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_A = -287$ Н, $Y_A = 6$ Н, $X_B = 216$ Н, $Y_B = 145$ Н.



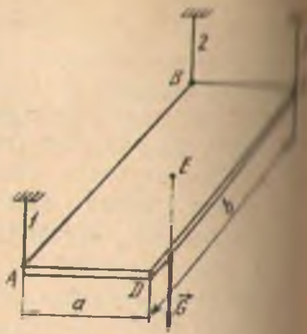
98-расм.



99-расм.



100-расм.



101-расм.

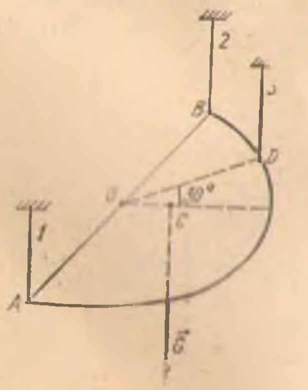
35-§ га доир масалалар

1. Вертикал қилиб туширилган учта ипга тўғри тўртбурчак шаклида ишланган бир жинсли $ABCD$ плита горизонтал вазиятда осиб қўйилган (101-расм). Плитанинг оғирлиги G. Ипларнинг тортилиш кучлари аниқлансин. Жавоб: $N_1 = N_3 = \frac{G}{2}$, $N_2 = 0$.

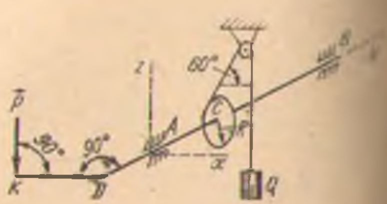
2. Ярим доира шаклида ишланган бир жинсли плита учта вертикал ипга горизонтал вазиятда турадиган қилиб осиб қўйилган (102-расм). Плитанинг оғирлиги G. Бу ипларнинг реакцияси аниқлансин. Жавоб: $N_1 = 0{,}38G$, $N_2 = 0{,}13G$, $N_3 = 0{,}49G$. Кўрсатма. Ярим доиранинг C оғирлик маркази диаметрга тик қилиб ўтказилган радиусда доира марказидан радиуснинг 0,43 қисмида туради.

34-§ га доир масалалар

1. Схемаси 103-расмда кўрсатилган чиғириқда оғирлиги $Q = 1000$ Н юк бир текис кўтарилади. Барабаннинг радиуси $R = 0{,}05$ м, KD дастанинг узунлиги 0,4 м, $DA = 0{,}3$ м, $AC = 0{,}4$, $CB = 0{,}6$ м. Арқон барабандан уринма бўйлаб горизонт билан 60° ҳосил қилиб тушади. KD даста горизонтал вазиятда турганда унга тушадиган вертикал P куч, A ва B подшипникларнинг реакциялари аниқлансин. Жавоб: $P = 125$ Н, $X_A = -300$ Н, $Z_A = -357$ Н, $X_B = -200$ Н, $Z_B = -384$ Н.



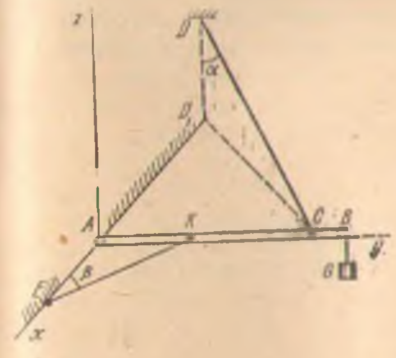
102-расм.



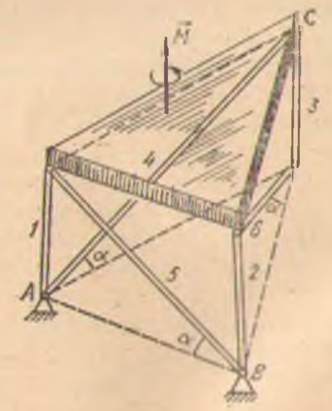
103-расм.

2. Горизонтал турган AB стержень деворга сферик A шарнир билан бириктирилган; KE ва CD симлар (тортқилар) уни деворга тик вазиятда тутиб туради (104-расм). Стерженнинг B учига оғирлиги $G = 360$ Н бўлган юк осилган. $AB = a = 0{,}8$ м; $AC = AD_1 = b = 0{,}6$ м; $AK = \frac{a}{2}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. Стерженнинг оғирлигини ҳисобга олманг. A шарнирнинг ва тортқиларнинг реакцияси аниқлансин. Жавоб: $X_A \approx -98$ Н; $Y_A \approx 705$ Н; $Z_A = -120$ Н; $T_C \approx 554$ Н; $T_K = 588$ Н. (Кўрсатма. Тортқининг T_C реакциясини горизонтал ва вертикал йўналган икки тузувчига ажратинг. T_C нинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблашда Вариньон теоремасидан (43-§) фойдаланинг.

3. Томони a бўлган мунтазам учбурчак шаклида ишланган ABC плитани расмда кўрсатилгандек бириктирилган олтита стержень горизонтал вазиятда тутиб туради (105-расм). Стерженларнинг учтаси вертикал, қолган учта қия стерженнинг ҳар бири горизонтал текислик билан $\alpha = 30°$ бурчак ҳосил қилади. Плитанинг текислигига моменти M бўлган жуфт таъсир қилади. Плитанинг оғирлигини эътиборга олманг. Стерженларнинг реакцияси аниқлансин. Жавоб: $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{2}{3}\frac{M}{a}$, $s_4 = s_5 = s_6 = -\frac{4}{3}\frac{M}{a}$. (Кўрсатма. Бу масалани 39-§ нинг энг охирги абзацида тилга олинган теорема ёрдамида олтита ўққа нисбатан моментлар тенгламаси тузиш йўли билан ечинг.



104-расм.



105-расм.

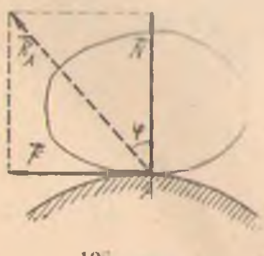
Учта ўқни вертикал турган уч стержень бўйлаб йўналтиринг, қолган учтасини расмдаги учбурчакли призма асосининг томонлари бўйлаб йўналтиринг).

6- БОБ. ИШҚАЛАНИШ

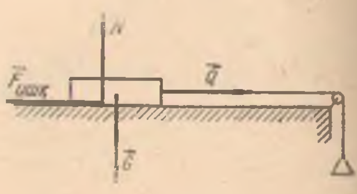
44- §. Сирпаниб ишқаланиш

Бир моддий жисм бошқа жисм сиртида сирпанганда пайдо бўладиган қаршилик *сирпаниб ишқаланиш кучи* дейилади. Жисмларнинг ишқаланиши фақат механикага алоқадор бўлмай, жисмларнинг электр, термик хоссаларига ва молекулалар ўртасида юз берадиган жараёнларга ҳам алоқадордир. Бу масала шунча физикада кенг ўрганилади.

Шу чоққача кўриб келган масалаларда таянч сиртларнинг жисмга кўрсатадиган реакцияларини аниқлашда сиртларни ниҳоят даражада силлиқ (абсолют силлиқ) ва қаттиқ деб ҳисоблаб келдик. Унда сиртлар жисмга фақат нормал бўйлаб йўналган реакция кучлари билан таъсир қилади. Тажриба бу фаразнинг ҳақиқатга тўғри келмаслигини кўрсатади. Ҳақиқатда эса жисмларнинг сирти озми-кўпми ғадир-будур бўлади. Ҳамма жисмлар деформацияланади. Шунинг учун ғадир-будур қўзғалмас сиртнинг мувозанатда турган жисмга кўрсатадиган R_A реакция кучининг модули ҳам, йўналиши ҳам актив кучларга боғлиқ. Қўзғалмас сиртнинг R_A реакцияси бу сиртга ўтказилган нормал (тик чизиқ) билан бирор α бурчак ҳосил қилади (106- расм). Бу R_A реакция кучини икки тузувчига ажратиш мумкин (106- расм): 1) улардан бири N куч бўлиб, у таянч сиртига ўтказилган нормал бўйлаб йўналади ва *нормал реакция* деб аталади; 2) иккинчиси эса F куч бўлиб, у таянч сиртига ўтказилган уринма текисликда ётади ва жисмнинг бу сиртда сирпанишига қаршилик қилади. Бу F куч сирпаниб ишқаланиш кучи деб аталади. Баъзан бир-бирига ишқаланувчи сиртлар ўртасида пайдо бўладиган ишқаланиш кучлари жисмнинг мувозанатини аниқлашда асосий омил ҳисобланади. Шунинг учун бундай ҳолларда ишқаланишни эътиборга олмаслик мумкин эмас.



106- расм



107- расм.

Одатда, ишқаланиш деганда бир-бирига тегиб турган тоза қуруқ сиртлар орасидаги қуруқ ишқаланиш назарда тутилади. Қуруқ ишқаланишда тинчликдаги (ёки мувозанатдаги) сирпаниб ишқаланиш ва бир жисм бошқа жисм сиртида бирор нисбий тезлик билан ҳаракат қилган ҳолдаги сирпаниб ишқаланиш билан иш кўрилади.

Ишқаланиш табиатда энг кўп учрайдиган ҳодиса бўлишига ва механиканинг деярли ҳамма масалаларида қатнашишига қарамай, унинг аниқ қонунлари шу чоққача кашф этилган эмас, чунки ишқаланиш кучи пайдо бўлишининг тўлиқ физик манзарасини тавсифлаш ва бу куч боғлиқ бўлган барча омилларни миқдор жиҳатдан аниқлаш жуда мураккаб. Шунинг учун амалда ишқаланиш кучларини ҳисобга олишда сифат характерига эга бўлган тақрибий қонунлар қўлланилади. Бу қонунлар ишқаланиш соҳасида Амонтон ўтказган (1699 й.) биринчи тажрибалар ва Кулон ўтказган (1781 й.) тадқиқотлар натижасида аниқланган.

Схемаси 107-расмда тасвирланган асбобда Кулон қонунини текшириб кўриш мумкин. Силлиқ бўлмаган горизонтал текисликда ётган тўғри бурчакли жисмга кўчмас блокдан ўтказилган ип боғланган; ипнинг иккинчи учига тарози палласини боғлаб, паллага тарози тоши қўйилган. Текислик билан жисм ишқаланиш коэффициенти аниқланадиган материалдан ясалади.

Жисмга унинг G оғирлик кучи, текисликнинг N реакцияси, ипнинг Q таранглик кучи (бу куч паллага қўйилган тошнинг оғирлигига тенг), ипнинг таранглик кучига тескари йўналган $F_{\text{ишқ}}$ ишқаланиш кучи таъсир қилади. Паллага яна тош қўйиб, ипнинг таранглик кучи оширилади. Ипнинг таранглик кучи маълум бир миқдорга етганда жисм ҳаракатга келади. Ипнинг таранглик кучи бу миқдордан кичик бўлиб қолаверар экан, у ишқаланиш кучи билан мувозанатлашиб, жисм тинч тураверади. Шунга қараб, бундай хулосага келамиз: жисм тинч турганда уни ҳаракатга келтирмоқчи бўлган куч ортганда ишқаланиш кучи нолга тенг бўлган қийматдан маълум бир $F_{\text{макс}}$ қийматгача ортади; ишқаланиш кучи $F_{\text{макс}}$ қийматдан катта бўла олмайди. Ишқаланиш кучининг бу қиймати *тинчликдаги сирпаниб ишқаланиш кучи* деб аталади. Нормал босим кучи ҳосил қилувчи G оғирликни ўзгартириб, бу ҳолда ишқаланиш кучининг энг катта $F_{\text{макс}}$ қиймати қандай ўзгаришини текшириб кўриш мумкин. Нормал босим кучини ўзгартирмаган ҳолда ишқаланиш кучининг энг катта қийматига жисмларнинг бир-бирига ишқаланиш сирти катталиги қандай таъсир қилишини, шунингдек жисмлар материалининг, сиртларга ишлов бериш даражаси ва бошқа омилларнинг қандай таъсир қилишини тадқиқ этиш мумкин. Шу тадқиқотларга асосланиб туриб қуйида баён этиладиган Кулон қонунлари тўғри эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Кулон қонунлари. 1. Сирпаниб ишқаланиш кучи жисмларнинг бир-бирига ишқаланиш сиртларига ўтказилган умумий уриниш текисликда ётади ва ишқаланиш бўлмаганда жисмни актив кучлар таъсирида сирпаниши мумкин бўлган томонга қарши йўналади. Ишқаланиш кучининг қиймати актив кучларга боғлиқ бўлиб, ноль билан ўзининг энг катта $F_{макс}$ қиймати орасида бўлади:

$$0 \leqslant F_{ишқ} \leqslant F_{макс}.$$

2. Сирпаниб ишқаланишнинг энг катта қиймати бир-бирига ишқаланувчи сиртлар юзасининг катталигига боғлиқ эмас.

3. Сирпаниб ишқаланишнинг энг катта қиймати нормал босим кучига (нормал реакцияга) пропорционал, яъни

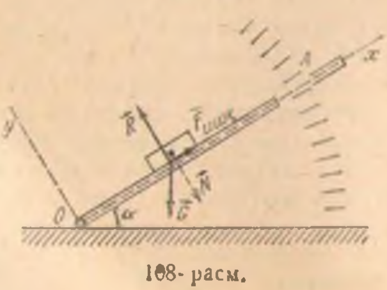
$$F_{макс} = fN.$$

Бу тенгликдаги f коэффициент *тенгликдаги сирпаниб ишқаланиш коэффициента* деб аталади. Бу коэффициентнинг ўлчов бирлиги йўқ. Сирпаниб ишқаланиш f коэффициенти нормал босим кучига боғлиқ бўлмай, балки ишқаланувчи сиртларнинг материалига ва физик ҳолатига боғлиқ. Абсолют силлиқ жисмлар учун f коэффициент нолга тенг. Реал жисмлар учун $f > 0$. Ҳаракат бошлангандан кейин сирпаниб ишқаланиш коэффициенти бирмунча камаяди ва ҳаракатдаги сирпаниб ишқаланишнинг $f_{дин}$ қийматига эга бўлади:

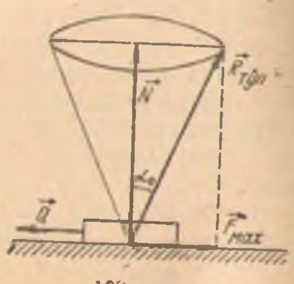
$$f > f_{дин}.$$

Ишқаланиш коэффициентининг ҳар хил шароитдаги қиймати тажрибада аниқланади. Тинчликдаги ва ҳаракатдаги сирпаниб ишқаланишнинг сон қийматлари техник справочникларда берилади.

Ишқаланиш бурчаги, ишқаланиш бурчагининг тангенси, ишқаланиш конуси деган тушунчалар билан танишамиз. Ишқаланиш коэффициентини тажрибада аниқлаймиз. Жисм ғадир-будир OA қия текислик устида ётибди (108-расм). Қия текисликнинг қиялик бурчагини истаганча ўзгартириш мумкин. Жисмга учта куч қўйилган: G оғирлик кучи, жисмнинг қия текисликка уриниш текислиги бўйлаб йўналган $F_{ишқ}$ ишқаланиш кучи, қия текисликнинг R реакцияси; R реакция қия те-



108- расм.



109 расм.

...тик бўлиб, унинг сон қиймати N нормал босим куч... тенг.

...текисликнинг қиялик бурчагини жисм текислик бўйлаб ... қараб ҳаракатланмагунча орттириб борамиз. Текисликнинг жисм сирпана бошлагандаги қиялик бурчаги *ишқаланиш бурчаги* дейилади. Ишқаланиш бурчаги бир-бирига ишқаланувчи бир жуфт материалга тегишли бўлади. Масалан, жисм ...дан, қия текислик пўлатдан ясалган бўлса, α бурчак ...нинг пўлат устида ишқаланиш бурчаги бўлади. Координата ўқларини 108-расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказиб, кесувчи кучлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F_{\text{макс}} - G\sin\alpha_0 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R - G\cos\alpha_0 = 0. \qquad \text{(a)}$$

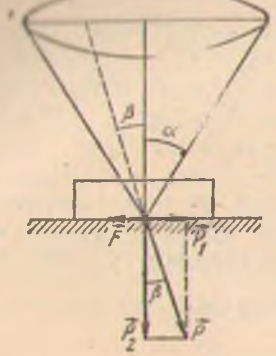
Бу тенгламаларда расмдаги $F_{\text{ишқ}}$ ўрнида ишқаланиш кучининг энг катта қиймати, яъни жисм сирпана бошлагандаги қиймати олинган, қия текисликнинг қиялик бурчаги ўрнида эса ишқаланиш бурчаги олинган. R нинг сон қиймати N нормал босим кучига тенг. (а) системани ечиб,

$$F_{\text{макс}} = \operatorname{tg}\alpha_0 \cdot R \text{ ёки } F_{\text{макс}} = \operatorname{tg}\alpha_0 \cdot N$$

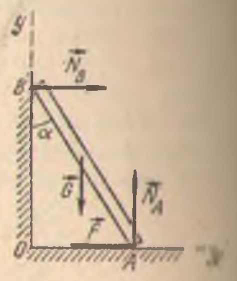
тенгликни топамиз. Бу (50) тенгликка солиштирилса, тинчликдаги сирпаниб ишқаланиш коэффициенти ишқаланиш бурчагининг тангенсига тенг эканини аниқланади. Таянч сиртига тик бўлган реакция ***идеал реакция*** ҳам дейилади (109-расм); таянч сиртининг жисмга кўрсатадиган тўлиқ реакцияси идеал реакция билан ишқаланиш кучининг геометрик йиғиндисига тенг. Демак, ишқаланиш кучи тўлиқ реакциянинг уринма йўналишдаги тузувчиси, идел реакция эса тўлиқ реакциянинг нормал йўналишидаги тузувчиси, ишқаланиш бурчаги эса тўлиқ реакциянинг сиртга ўтказилган нормалдан (яъни идеал реакциядан) энг кўп оғиш бурчаги.

Агар актив Q куч ўша нормал атрофида бурилса, ишқаланиш кучи ҳам, тўлиқ реакция ҳам бурилади. Бу ҳолда тўлиқ реакция конус чизади, бу конуснинг ўқи жисмларнинг уриниш сиртига тик бўлиб, учидаги текис бурчаги ишқаланиш бурчагидан икки марта катта бўлади. Ишқаланиш конуси деб аталадиган бу конус тўлиқ реакциянинг мумкин бўлган барча йўналишларининг геометрик ўрнидир. Ишқаланиш бурчаги, ишқаланиш конуси деган тушунчалар ғадир-будур сирт устидаги жисмларнинг мувозанатига доир масалаларни ечишда ишлатилади.

Силлиқ бўлмаган сирт устида ётган жисмга бирор актив P куч таъсир қилсин (110-расм), ўша куч сиртга ўтказилган нормал бирор β бурчак ҳосил қилсин. Агар β бурчак α_0 бурчакдан, яъни ишқаланиш бурчагидан кичик бўлса, P куч бу жисмни ҳаракатга келтира олмаслигини кўрсатамиз. P кучни



110- расм.



111- расм.

икки тузувчига ажратамиз: $P_1 = P\sin\beta$, $P_2 = P\cos\beta$. P_1 тузувчи жисмни ҳаракатга келтиришга интилади, P_2 тузувчи эса сиртни босади, бунинг оқибатида $\boldsymbol{P}_1$ га қарши йўналган $F_{ишқ}$ ишқаланиш кучи пайдо бўлади. $\boldsymbol{P}_1$ тузувчи ишқаланиш кучининг энг катта қийматидан ортиқ бўлган ҳолдагина жисм P куч таъсирида ҳаракатга келади: $P_1 > F_{макс} = fP_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_0 P_2$, бу ерга P_1 ва P_2 нинг ифодаларини қўямиз:

$$P\sin\beta > \mathrm{tg}\,\alpha_0\, P\cos\beta.$$

Бу тенгсизликнинг иккала томонини $P\cos\beta$ га бўлсак, жисм ҳаракатланишининг зарурий шартини топамиз:

$$\mathrm{tg}\,\beta > \mathrm{tg}\,\alpha_0 \text{ ёки } \beta > \alpha_0.$$

Демак, жисм $\boldsymbol{P}$ куч таъсирида ҳаракатланиши учун кучнинг сиртга ўтказилган нормал билан ҳосил қилган β бурчаги ишқаланиш бурчагидан катта бўлиши керак, яъни бу кучнинг таъсир чизиғи ишқаланиш конусидан ташқарида ётиши керак. Текширилаётган $\boldsymbol{P}$ куч эса ишқаланиш конусининг ичидан ўтади, шунинг учун бу куч ҳар қанча катта бўлмасин, жисмни қўзғата олмайди.

22- масала. *Узунлиги l ва оғирлиги G бўлган бир жинсли AB балка силлиқ вертикал деворга ва ғадир-будур горизонтал полга тиралиб туради (111- расм). Балканинг полга ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Мувозанат вазиятида балка билан девор орасидаги α бурчак, шунингдек A ва B нуқталарда таянчларнинг реакцияси аниқлансин.*

Ечиш. Ишқаланишга доир масала ечишда шу нарсани эсда тутиш керакки, ишқаланиш кучлари қатнашадиган мувозанат шартлари тенглама тарзида эмас, балки тенгсизлик тарзида ифодаланади. Шунинг учун аввало ишқаланиш кучлари қатнашмайдиган шартларни тузиш керак. Масала ечиш босқичларида олдин айтиб ўтилганлардан ҳеч қанақа ўзгаришлар

...найди. Реакция кучларини тасвирлашга ўтилганда A нуқ... $F_{ишқ}$ кучи кўрсатилади. Агар ишқаланиш бўлмаса, балка ... томонга сирпаниб кетган бўлар эди, шунинг учун ишқа... ...ниш кучи чап томонга йўналтирилган бўлиши керак. $F_{ишқ}$ ...ни (49) ва (50) тенгликларга асосан $F_{ишқ} \leqslant fN_A$ тенгсизлик ...или ифодаланади. B нуқтада ишқаланиш кучи йўқ, чунки ...аланинг шартида вертикал девор силлиқ деб айтилган. Бал... ...га текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсир ...лишти. Уларнинг мувозанат шартларини тузамиз. Ишқала... ...ниш кучлари қатнашмайдиган мувозанат тенгламалари ва иш... ...аланиш кучи қатнашадиган шарт қуйидагича ёзилади.

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N_A - G = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) = 0, \quad G\frac{l}{2}\sin\alpha - N_B l\cos\alpha = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad N_B - F_{ишқ} = 0.$$

(a) системанинг иккинчи тенгламасидан $N_B = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$ экани, биринчисидан $N_A = G$ экани аниқланади. Учинчи тенгламанинг $N_B = F_{ишк} \leqslant fN_A$ ечимида N_B ўрнига $\frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$, N_A ўрнига G қўйилади:

$$\frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqslant fG,$$

бундан $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2f$. Демак, α бурчакнинг мана шу тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳамма қийматларида балка мувозанатда туради.

45-§. Думалаб ишқаланиш

Бир жинсли оғир цилиндрни горизонтал текислик юзасида думалатиш учун цилиндрнинг ўқига горизонтал йўналган бирор Q куч билан таъсир этиш керак. Бу Q куч цилиндр думалаганда пайдо бўладиган қаршиликни енгади. Бу қаршилик *думаланиб ишқаланиш* деб аталади.

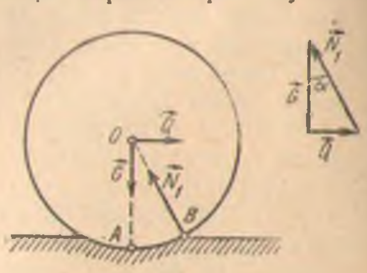
Думалаётган жисмнинг (цилиндрнинг) сирти ва жисм думалаётган текислик абсолют қаттиқ бўлмай, балки жисмнинг текисликка босим туширишни оқибатида бир оз деформацияланганы туфайли думаланишда ишқаланиш пайдо бўлади.

Дастлаб цилиндр шаклидаги жисм ва унинг тагидаги текисликни абсолют қаттиқ деб ва улар бир-бирига A нуқтада тегиб туради деб фараз қиламиз. Цилиндр сирпаниб кетмасдан думалаши учун цилиндрнинг сирти ҳам, текисликнинг юзаси ҳам ғадир-будур бўлиши керак. Цилиндрнинг ўқига горизонтал йўналган Q куч қўйилган ва бу кучнинг модули $F_{макс}$ дан

(44- § га қаранг) кичик бўлсин (112- расм). У ҳолда цилиндрнинг A тегиш нуқтаси текислик юзасида сирпанмай ... Бу ҳолда цилиндрга ўзаро мувозанатлашадиган G оғирлик кучи ва A нуқтага қўйилган N нормал реакция таъсир ... бундан ташқари, цилиндрга бир-бири билан мувозанатлаша олмайдиган Q куч ва A нуқтанинг сирпанишига қаршилик қиладиган F куч таъсир қилади. Q куч ҳар қанча кичик бўлганда ҳам цилиндр ана шу кучлар таъсири остида думалай бошлаган бўлар эди.

Ҳақиқатда эса аҳвол бутунлай бошқача бўлади. Жисмнинг ва тагидаги текисликнинг деформацияланиши оқибатида G ва N кучлар таъсирида жисм (цилиндр) текисликка бир A нуқтада эмас, балки бирор юза бўйлаб тегади (113- расм). Цилиндр ўқига қўйилган Q куч ўнг томонга йўналган ҳолда тегиш юзасининг чап томонида босим камайиб, унга қарши томонида босим ортади. Бу ҳолда N нормал реакция ўнг томонга бирор B нуқтага кўчади, у билан F сирпаниб ишқаланиш кучининг N_1 тенг таъсир этувчиси цилиндрнинг O ўқидан ўтади ҳамда G ва Q кучларни мувозанатлайди. Модомики, N_1 куч G ва Q кучларни мувозанатлар экан, бу уч кучдан тузилган куч учбурчаги ёпиқ бўлади. Бу куч учбурчагидан кўринишича, Q куч ортганда бу системани мувозанатлаш учун N_1 куч вертикал чизиқ билан тобора каттароқ α бурчак ҳосил қилиши, яъни N реакция қўйилган B нуқта ўнг томонга тобора кўпроқ силжиши керак. Бироқ бу силжишнинг уринаётган жисмлар материалининг хоссаларига боғлиқ бўлган чегараси бор. Силжишнинг энг катта қиймати k билан белгиланади. Мувозанат ҳали бузилмай турадиган вазиятда Q куч энг катта $Q_{\text{макс}}$ қийматга эга бўлса, $AB = k$ бўлади. $Q_{\text{макс}}$ нинг қийматини куч учбурчаги билан $\triangle OAB$ нинг ўхшашлик шартидан аниқлаш мумкин. $OA = r$ деб белгиланса (бу ерда r — цилиндрнинг радиуси), $\frac{Q_{\text{макс}}}{G} = \frac{k}{r}$ ёки $Q_{\text{макс}} = \frac{k}{r} G$. Агар $Q < Q_{\text{макс}}$ бўлса, цилиндр тинч туради. $Q > Q_{\text{макс}}$ бўлганда цилиндр думалай бошлайди. $Q_{\text{макс}}$ нинг ифодасидаги k коэффициент *думалаб ишқаланиш коэффициенти* дейилади. k коэффициент одатда сантиметр ҳисобида ўлчанади ва тажрибадан аниқланади. Масалан, вагон ғилдираги рельсларда думалаган-

112- расм.



113- расм.

... (тилдираганда) $h = 0{,}005$ см, шарикли подшипниклар учун $h = 0{,}001$ см.

Кўпчилик материаллар учун $\frac{h}{r}$ нисбат f сирпаниб ишқаланиш коэффициентига қараганда анча кичик. Шунинг учун техникада имкон бўлган жойларда сирпаниб ишқаланиш думалаб ишқаланиш билан алмаштирилади.

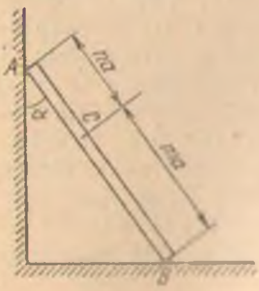
44-§ га доир масалалар

1. Ўз текислигида суриб очиладиган эшик пастки йўналтирувчида ишқаланиб сурилади. Йўналтирувчининг материали билан эшик орасидаги f ишқаланиш коэффициенти 0,5 дан ортиқ эмас. Эшикни сурганда вертикал текисликда агдариб кетмайдиган қилиш учун унинг дастасини қупи билан қандай h баландликка қоқиш керак? Эшикнинг эни $l = 0{,}8$ м, оғирлик маркази унинг вертикал симметрия ўқида ётади. Жавоб: $h = \frac{l}{2f} = 0{,}8$ м.

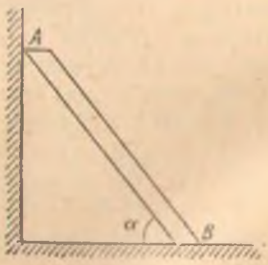
2. Пастки учи горизонтал юзада турган AB нарвон вертикал деворга тираб қўйилган (114-расм). Нарвон билан девор орасидаги ишқаланиш коэффициенти f_1, нарвон билан пол орасидаги ишқаланиш коэффициенти f_2. Нарвоннинг устида турган одам билан биргаликдаги оғирлиги p бўлиб, бу оғирлик нарвоннинг узунлигини $m:n$ нисбатда бўладиган C нуқтага қўйилган. Нарвон мувозанатда турганда у билан девор орасида ҳосил бўладиган энг катта α бурчак, шунингдек α нинг ўша қийматида A ва B нуқталардаги реакцияларнинг N_A ва N_B нормал тузувчилари аниқлансин. Жавоб:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(m+n)f_2}{m - nf_1 f_2}; \quad N_A = \frac{Pf_2}{1 + f_1 f_2}; \quad N_B = \frac{P}{1 + f_1 f_2}.$$

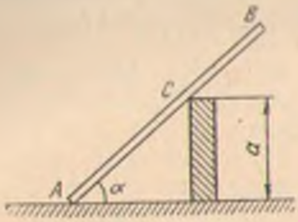
3. Пастки учи ғадир-будур горизонтал полда турган AB нарвон вертикал силлиқ деворга тираб қўйилган (115-расм). Нарвоннинг оғирлиги G. Нарвоннинг полга ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Оғирлиги p га тенг бўлган киши нарвон-



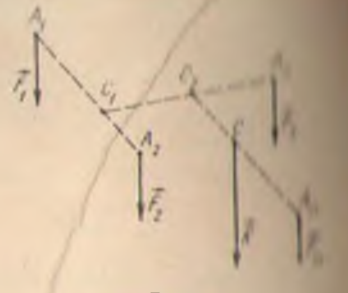
114-расм.



115-расм.



116-расм.



117-расм

нинг бошига чиқа олиши учун нарвонни полга нисбатан қандай α бурчак ҳосил қилиб қўйиш керак? Жавоб:

$$\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{G+2P}{2f(G+P)}.$$

4. Узунлиги l бўлган оғир AB балка A учида горизонтал текисликка қўйилган бўлиб, C нуқтада баландлиги $a=\frac{l}{2}$ бўлган силлиқ вертикал таянчга тиралиб туради (116-расм). Шу балка горизонтга 60° қиялатиб қўйилган ҳолда мувозанатда туриши учун балка билан текислик орасидаги ишқаланиш коэффициенти энг камида қанча бўлиши керак? Жавоб: $f \geqslant 0{,}48$. Кўрсатма. Масалани ечишда балканинг оғирлигини G деб оласиз, лекин оғирликнинг қанча бўлиши жавобга таъсир қилмайди.

7-БОБ. ОҒИРЛИК МАРКАЗИ

46-§. Параллел кучлар марказининг координаталари

Параллел кучлар маркази тушунчаси механиканинг баъзи масалаларини ечишда, жумладан, жисмларнинг оғирлик марказини аниқлашда қўлланилади. Қаттиқ жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарига қўйилган $F_1, F_2, \ldots, F_n$ параллел кучларнинг ҳаммаси бир томонга йўналган бўлса (117-расм), бу кучлар системаси тенг таъсир этувчига эга бўлади. Бу кучлар бир текисликда ётмайди, бироқ булардан ҳар иккитаси бир текисликда ётади, чунки ҳар қандай икки тўғри чизиқ (кучларнинг таъсир чизиқлари) орқали ҳамиша текислик ўтказиш мумкин. Бир томонга йўналган параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси кетма-кет қўшиш усулидан фойдаланиб аниқланади. Бунинг учун A_1 ва A_2 нуқталарга қўйилган F_1 ва F_2 кучни икки параллел кучни қўшишнинг 26 § да қисқача айтиб ўтилган қоидаси билан қўшамиз. Буларнинг тенг таъсир этувчиси $R_1 = F_1 + F_2$ бўлиб, у

$$F_1 \cdot A_1C_1 = F_2 \cdot A_2C_1 \qquad (51)$$

[illegible]ликни қаноатлантирадиган C_1 нуқтага қўйилган [illegible] [illegible] тенг таъсир этувчи кўрсатилмаган). Кейин шу [illegible] [illegible] R_1 тенг таъсир этувчисига A_3 нуқтага қўйилган F_3 куч [illegible]шилса, учта F_1, F_2, F_3 кучнинг тенг таъсир этувчиси, [illegible] [illegible]лага асосан, C_1A_3 тўғри чизиқда ётадиган C_2 нуқтага қўйи[illegible]лади. Кучларни кетма-кет қўшишнинг бу йўли охиригача [illegible] [illegible] эттирилса, бутун системанинг

$$R = \sum F_k \qquad ([illegible])$$

[illegible]нг таъсир этувчиси ва тенг таъсир этувчи қўйилган C нуқ[illegible] аниқланади.

Параллел кучларнинг ҳаммасини бирор томонга маълум бурчакка бурдик деб фараз қилайлик. У ҳолда дастлабки икки кучнинг тенг таъсир этувчиси ҳам ўша томонга ва ўша бурчакка бурилади, чунки параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўшилувчи кучларга параллел бўлади. Дастлабки икки кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган C_1 нуқта жойидан қўзғалмайди, чунки F_1 ва F_2 кучларнинг модули ва қўйилиш нуқталари ўзгармади, демак, (51) тенглик ҳам, тенг таъсир этувчининг модули ҳам ўзгармайди, чунки бу модуль қўшилувчи кучлар модулларининг йиғиндисига тенг. Модомики, R_1 кучнинг модули ва қўйилиш нуқтаси ўзгармаган, бунинг устига R_1 куч бурилиб F_3 кучга параллеллигича қолган экан, уч кучнинг таъсир этувчиси қўйилган C_2 нуқта ҳам жойидан қўзғалмайди. Бундан кейин ҳам шу тариқа C нуқта аввалги жойида қолаверишига, тенг таъсир этувчи R кучнинг таъсир чизиғи мана шу нуқта атрофида бурилиб, система кучларининг таъсир чизиқларига параллеллигича қолаверишига ишонч ҳосил қилинади.

Параллел кучларнинг маркази деб параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғида ётган шундай C нуқтага айтиладики, ҳамма параллел кучлар ўзи қўйилган нуқталар атрофида бурилиб бир бирига параллеллигича қолганда тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи ўша нуқта атрофида бурилади.

Энди параллел кучлар марказининг координаталарини аниқлаймиз. C нуқтанинг A_1, A_2, . . ., A_n нуқталарга нисбатан, яъни жисмга нисбатан эгаллаган вазияти ўзгармайди ва координаталар системасига боғлиқ бўлмайди. Шунинг учун ихтиёрий $Oxyz$ координата ўқлари олиб (118-расм), бу ўқларда нуқталарнинг координаталарини $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, . . ., $A_n(x_n, y_n, z_n)$, $C(x_c, y_c, z_c)$ орқали белгилаймиз.

118- расм.

C нуқтанинг вазияти кучларнинг йўналишига боғлиқ бўлмаганлигидан фойдаланиб, кучларнинг ҳаммасини қўйилиш нуқталари атрофида z ўқига параллел бўладиган қилиб бурамиз. Бурилган F'_1, F'_2, ..., F'_n кучларга Вариньон теоремасини (43-§) татбиқ этамиз. Бурилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси R' бўлгани учун ундан y ўқига нисбатан момент олиб,

$$m_y(R') = \sum m_y(F'_k) \tag{53}$$

тенгликни ёзамиз. Расмдан $m_y(R') = R'x_c = Rx_c$, чунки $R' = R$, худди шунга ўхшаш, ҳар бир кучнинг y ўқига нисбатан моменти $m_y(F_1) = F'_1 x_1 = F_1 x_1$ бўлади, чунки $F'_1 = F_1$ ва ҳоказо. Бу миқдорларнинг ҳаммаси (53) тенгликка қўйилса, $Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n$ бўлади. Бундан x_c, яъни параллел кучлар марказининг абсциссаси аниқланади:

$$x_c = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum F_kx_k}{R}.$$

y_c координатани аниқлаш учун кучлардан x ўқига нисбатан моментлар оламиз. z_c координатани аниқлаш учун ҳамма кучларни y ўқига параллел қилиб йўналтириб, улардан x ўқига нисбатан моментлар оламиз.

Ниҳоят, параллел кучлар марказининг координаталари қуйидагича ифодаланади:

$$x_c = \frac{\sum F_kx_k}{R}, \quad y_c = \frac{\sum F_ky_k}{R}, \quad z_c = \frac{\sum F_kz_k}{R}, \tag{54}$$

бу ерда R тенг таъсир этувчи (52) тенгликдан аниқланади.

47-§. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази ва унинг координаталари

Жисмни Ерга тортадиган куч билан жисмнинг Ер билан бирга айланиши оқибатида пайдо буладиган марказдан қочма кучнинг тенг таъсир этувчиси *оғирлик кучи* дейилади. Бу кучнинг сон қиймати жисмнинг оғирлигига тенг. Оғирлик кучи бир учи қимирламайдиган қилиб боғланган, иккинчи учига огир юк боғланган ип бўйлаб йўналади. Бу йўналиш *шовуннинг йўналиши* ёки *вертикал йўналиш* деб аталади.

Агар жисм майда зарраларга бўлинган деб фараз қилинса, бу зарраларнинг ҳар бирига таъсир этувчи оғирлик кучи шу зарранинг ўзи билан бир хил бўлган нуқтага қўйилади. Ҳар бир зарранинг оғирлик кучи Ер марказига томон йўналгани учун зарраларнинг оғирлик кучлари кесишувчи кучлар бўлади. Бироқ оғирлик маркази аниқланадиган жисмнинг ўлчамлари Ернинг ўлчамларига қараганда ниҳоят даражада кичик бўлгани туфайли айни бир жисм зарраларининг оғирлик кучларини кесишувчи кучлар эмас, балки параллел кучлар деб,

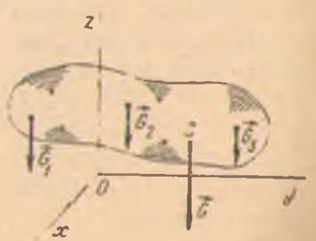
...блаш мумкин. Масалан, узунлиги 300 м келадиган катта ...нинг тумшуғида ва кетида турган икки зарранинг оғирлик кучлари орасидаги бурчак атиги ўн секунд бўлар экан; ... бурчак шу қадар кичикки, уни китобдаги чизмада чизиб ...атиш амри маҳол. Айни бир жисмнинг ҳар хил зарраларининг оғирлик кучларини бир-бирига параллел деб олиб, жисмнинг оғирлигини бу параллел оғирлик кучларининг марказига қўйилган деб ҳисоблаш мумкин. Бу марказ *жисмнинг оғирлик маркази* дейилади. Фазода жисмнинг вазияти ўзгартирилса, жисм зарраларининг оғирлик кучлари вертикал ва бир-бирига параллел бўлиб қолаверади. Жисмга нисбатан эса бу кучлар узларининг қўйилиш нуқталари атрофида бурилиб, параллеллигича қолаверади. Бу ҳолда параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғи айни бир нуқтадан, яъни жисмнинг оғирлик марказидан ўтади. Демак, фазода жисмнинг вазияти ўзгарганда оғирлик марказининг жисмга нисбатан эгаллаган вазияти ўзгармайди. Оғирлик марказининг вазияти жисмнинг шаклига ва унда моддий зарралар тақсимотига боғлиқ.

Бирор жисмнинг оғирлик марказини жисм зарраларининг оғирлик кучларини кетма-кет қўшиш йўли билан аниқлаш анча мушкул бўлганидан бу усул қўлланилмайди.

Жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш учун у оғирлик маркази осон аниқланадиган қисмларга ажратилади, ҳар бир бундай қисм тасвирловчи нуқта деб аталадиган нуқта билан алмаштирилади. Тасвирловчи нуқта ўша қисмнинг оғирлик марказига қўйилиб, унинг оғирлиги ўша қисмнинг оғирлигига тенг бўлади. Тасвирловчи нуқта ўзининг оғирлиги ва жисмдаги ўрни билан тавсифланади. Шу тариқа бутун жисм тасвирловчи нуқталар системаси билан алмаштирилади. Тасвирловчи нуқталарнинг оғирликлари G_1, G_2, ..., G_n билан белгиланади (119-расм). Жисмга боғланган координаталар системаси ўтказамиз, z ўқини юқорига тик йўналтирамиз. Тасвирловчи нуқталарнинг координаталарини (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... деб белгилаймиз. Тасвирловчи нуқталар системасидаги барча оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси бутун жисмнинг G оғирлигига тенг бўлиб, жисмнинг $C(x_c, y_c, z_c)$ оғирлик марказига қўйилган. C оғирлик марказининг координаталарини параллел кучлар маркази координаталарининг (54) ифодаларидан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$x_c = \frac{\sum G_k x_k}{G}, \quad y_c = \frac{\sum G_k y_k}{G},$$

$$z_c = \frac{\sum G_k z_k}{G}. \qquad (55)$$



119-расм.

Бу ифодалар (54) ифодаларда F_k кучлар ўрнига тасвирловчи нуқталарнинг

G_k оғирлик кучларини қўйиш натижасида ҳосил бўлади. (55) формулалар оғирлик марказининг вазиятини аниқлайди. ... лар билан улар қўйилган нуқталар координаталари кўпайтмаларининг йиғиндиси *статик момент* деб аталади. ... дида шуни таъкидлаш керакки, таърифга кўра жисмнинг оғирлик маркази геометрик нуқтадир; бу нуқта жисмнинг ... ташқарида бўлиши ҳам мумкин. Масалан, симдан ясалган ҳалқанинг оғирлик маркази ҳалқанинг ўзида бўлмай, балки унинг геометрик марказида ётади.

48-§. Чизиқ, текис шакл ва жисмнинг оғирлик маркази

Агар жисм бир жинсли бўлса, унинг ҳар қандай қисмининг G_k оғирлигини v_k ҳажми билан ҳажм бирлигининг γ оғирлиги кўпайтмаси орқали $G_k = \gamma v_k$ тенглик билан, бутун жисмнинг G оғирлигини $G = \gamma V$ тенглик билан ифодалаймиз. Бу ифодаларни (55) формулаларга қўйиб, суратдаги γ умумий кўпайтувчини қавсдан чиқариб, махраждаги γ билан қисқартирсак,

$$x_c = \frac{\sum \gamma v_k x_k}{\gamma V} = \frac{\sum v_k x_k}{V},$$
$$y_c = \frac{\sum \gamma v_k y_k}{\gamma V} = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \qquad (56)$$
$$z_c = \frac{\sum \gamma v_k z_k}{\gamma V} = \frac{\sum v_k z_k}{V}$$

формулалар келиб чиқади. Бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази жисмнинг фақат шаклига боғлиқ бўлиб, γ нинг қийматига боғлиқ эмас. Координаталари (56) формулалар билан аниқланадиган C нуқта *ҳажмнинг оғирлик маркази* деб аталади.

Агар жисм бир жинсли юпқа текис пластинка бўлса, шу каби йўллар билан унинг оғирлик маркази координаталари

$$x_c = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \quad y_c = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \quad z_c = \frac{\sum s_k z_k}{S} \qquad (57)$$

формулалар билан ифодаланишини аниқлаш осон, бу ерда S — бутун пластинканинг юзаси, s_k — унинг қисмларининг юзаси. Координаталари (57) формулалар билан аниқланадиган C нуқта *юзасининг оғирлик маркази* деб аталади.

Чизиқнинг оғирлик маркази координаталарининг ифодалари ҳам худди шу йўл билан чиқарилади:

$$x_c = \frac{\sum l_k x_k}{z}, \quad y_c = \frac{\sum l_k y_k}{z}, \quad z_c = \frac{\sum l_k z_k}{z}, \qquad (58)$$

бу ерда z — бутун чизиқнинг узунлиги, l_k — унинг қисмларининг узунлиги.

Агар жисм бир жинсли бўлмасдан, моддий симметрия текислигига эга бўлса, яъни жисмнинг мана шу текисликдан томонда турган ҳар бир заррасига бу текисликдан иккинчи томонда оғирлиги худди аввалги зарраникига тенг бўлган симметрик жойлашган зарра мос келса, у ҳолда жисмнинг оғирлик маркази симметрия текислигида ётади. Текисликдан бир томонда турган ҳар бир заррага текисликдан иккинчи томонда оғирлиги худди шундай симметрик жойлашган зарра мос келса, бу икки зарра оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси симметрия текислигида ётган нуқтага қўйилади. Шу усулда жуфт-жуфти билан олинган бошқа симметрик зарралар оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчилари қўйиладиган нуқталар ҳам симметрия текислигида ётади. Бу тенг таъсир этувчиларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчисини топамиз, бу куч эса ўша текисликда жисмнинг оғирлик марказига қўйилади. Жисм симметрия ўқига ёки симметрия марказига эга бўлган ҳол учун ҳам шунга ўхшаш теоремани исбот қилиш мумкин. Бу теоремалардан қуйидаги натижаларни келтириб чиқариш мумкин:

1) бир жинсли тўғри стерженнинг (ёки тўғри чизиқ кесмасининг) оғирлик маркази унинг ўртасида ётади;

2) параллелограммнинг (параллелограмм шаклида ишланган бир жинсли юпқа пластинканинг) оғирлик маркази унинг диагоналларининг кесишиш нуқтасида, яъни параллелограммнинг симметрия марказида ётади;

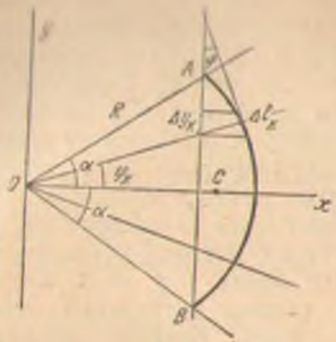
3) бир жинсли мунтазам кўпбурчак, доира, эллипс ва шарнинг оғирлик маркази уларнинг геометрик марказида ётади.

Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлашнинг бу усули *симметрия усули* дейилади. Жисмнинг оғирлик маркази жисмнинг оғирлик маркази осон топиладиган қисмларга ажратиш йўли билан ҳам аниқланади. Бу ҳолда жисмнинг ҳар бир қисми ўша қисмнинг оғирлик марказига қўйилган тасвирловчи нуқта билан алмаштирилади. Кейин (56), (57), (58) формулаларнинг биридан фойдаланиб бутун жисмнинг оғирлик маркази аниқланади. Агар жисмда ковак жойлар ёки тешиклар бўлса, ковакларнинг ҳажми ва тешикларнинг юзи манфий деб олиниб, оғирлик маркази олдин айтиб ўтилган усул ва формулалар билан аниқланади. Бу усул баъзан *манфий массалар усули* ёки *тўлдириш усули* деб аталади. Баъзан жисмларнинг оғирлик маркази ўрта мактабдан маълум бўлган экспериментал усул билан ҳам аниқланади.

Айлана ёйининг ва учбурчак юзасининг оғирлик марказини аниқлашни мисол тариқасида кўрсатиб ўтамиз.

Айлана ёйининг оғирлик маркази. R радиусли айлананинг марказий бурчаги 2α бўлган AB ёйини кўриб чиқамиз (120-расм). Координата ўқларини расмда кўрсатилганча ўтказамиз. x ўқи бу ёйнинг симметрия ўқи. Бу ёйнинг оғирлик маркази симметрия ўқида, яъни x ўқида ётади, шунинг учун $y_c = 0$. x_c координатасини (58) формуладан топамиз:

$$x_c = \frac{\sum \Delta l_k x_k}{l}$$



120- расм.

121- расм.

Бунинг учун AB ёйни Δl_k элементар бўлакларга бўлиб, ҳар бир бўлакни тўғри чизиқ кесмаси деб фараз қиламиз. Агар Δl_k бўлакнинг ўртасига ўтказилган радиус x ўқи билан φ_k бурчак ҳосил қилса, расмдан

$$\cos \varphi_k = \frac{x_k}{R} = \frac{\Delta y_k}{\Delta l_k} \qquad (a)$$

эканлиги кўринади. Бу ерда $x_k - \Delta l_k$ бўлакнинг юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида олинган абсциссаси (а) тенгликдан $x_k \Delta l_k = R\Delta y_k$ тенглик келиб чиқади. Ҳамма бўлаклар учун мана шундай ифодалар тузиб, уларни жамлаймиз:

$$\sum \Delta l_k x_k = \sum R\Delta y_k = R \sum \Delta y_k = Rh,$$

бу ерда h – барча бўлакларнинг вертикал ўққа туширилган проекцияларининг йиғиндиси бўлиб, AB ватарнинг узунлигига тенг. Топилган ифодани (58) формулага қўйиб, ёйнинг x_c оғирлик маркази аниқланади:

$$x_c = \frac{Rh}{l}.$$

$h = 2R \sin \alpha$ ва $l = 2\alpha R$ эканини ҳисобга олиб, x_c ни қуйидагича ёзамиз:

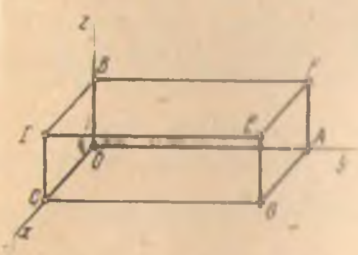
$$x_c = R\,\frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Учбурчак юзасининг оғирлик маркази. ABD учбурчакнинг юзасини бир томонига параллел бўлган тўғри чизиқлар билан жуда кўп энсиз тилимларга бўламиз (121-расм). Булар шу қадар энсизки, уларни тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблаш мумкин. Ҳар бир бундай кесманинг оғирлик маркази унинг ўртасида ётади, шунинг учун учбурчак юзасининг оғирлик маркази учбурчакнинг бир учини ўша учи қаршисидаги томоннинг ўртаси билан туташтирувчи медиананинг бир жойида ётади. Учбурчакнинг юзасини бошқа бир томонига параллел бўлган [illegible]ри чизиқлар билан [illegible] [illegible]нинг оғирлик маркази бошқа медианада ҳам [illegible] [illegible]ни хулосага келамиз. Демак, учбурчак [illegible] [illegible]ркази медианалар кесишган нуқтада ётади. [illegible] [illegible]ълумки, учбурчакнинг медианалари асосдан [illegible] [illegible]ишли медиананинг учдан бир қисмида, учидан [illegible] учдан икки қисмида кесишади.

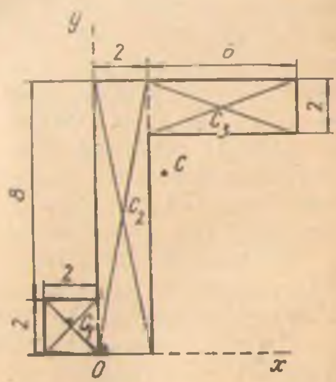
Шакли мураккаб жисмнинг оғирлик маркази координата[illegible]ларини аниқлашда, аввал 47-§ да айтиб ўтилганидек, [illegible] оғирлик маркази осон аниқланадиган қисмларга ажратамиз, [illegible]ларни эса тасвирловчи нуқталар билан алмаштирамиз. Бундай жисмнинг оғирлик маркази координаталарини топиш учун қисм[illegible] тасвирловчи нуқталарининг оғирлик марказини қисмларининг материали ҳар хил бўлганда (55) формулалардан, ҳамма қисмларининг материали бир хил бўлганда эса (56), (57) ёки (58) формулалардан фойдаланиб топамиз. Бироқ. амалда бу ҳисоблар анча машаққатли бўлади. Масалан, пароход, самолёт ёки автомобиль каби жисмларни баъзан бир неча минг тасвирловчи нуқта билан алмаштиришга тўғри келади. Бундай ҳолларда қуйидаги масаланинг ечимида кўрсатиладиган жадвал бўйича ҳисоб қилиш анча қулай.

23-масала. Тўғри бурчакли параллелепипед (122-расм) контурининг оғирлик маркази координаталари аниқлансин. Параллелепипеднинг қирралари бир жинсли стерженлар бўлиб, лекин узунлиги бир хил бўлган баъзиларининг оғирлиги тенг эмаслиги шартида ёзиб кўрсатилган: $OA = 8$ дм, $OB = 4$ дм, $OC = 6$ дм; оғирликлари тегишли қирра ёнига Ньютон ҳисобида ёзиб қўйилган: OA ники 250, OB, OC, CD ларники 75, CG ники 200, AF ники 125, AG ва GE ларники 50, BD, BF, DE ва EF ларники 25.

Е ч и ш. Стерженларни тасвирловчи нуқталар билан алмаштирамиз. Улардан ҳар бирининг координаталари ўзи тасвирлаётган стержень ўртасининг координатасига, ҳар бирининг оғирлиги эса ўша стерженнинг оғирлигига тенг. Координата



122-расм.



123-расм.

Ўқларини расмда кўрсатилганча қилиб ўтказамиз. Жадвал ... ямиз:

Тартиб сони	Стерженнинг номи	G_k	x_k	y_k	z_k	$G_k x_k$	$G_k y_k$	$G_k z_k$
1	*OB*	75	0	0	2	0	0	[illegible]
2	*OC*	75	3	0	0	225	0	[illegible]
3	*CD*	75	6	0	2	450	0	[illegible]
4	*BD*	25	3	0	4	75	0	[illegible]
5	*BF*	25	0	4	4	0	100	[illegible]
6	*OA*	250	0	4	0	0	1000	[illegible]
7	*CG*	200	6	4	0	1200	800	[illegible]
8	*DE*	25	6	4	4	150	100	[illegible]
9	*AG*	50	3	8	0	150	400	[illegible]
10	*AF*	125	0	8	2	0	1000	[illegible]
11	*EG*	50	6	8	2	300	400	[illegible]
12	*EF*	25	3	8	4	25	200	[illegible]
	$\sum$	1000				2625	4000	1050

Ечилиши янада тушунарли бўлиши учун бир-икки стерженни тасвирловчи нуқталар билан алмаштирганда жадвалнинг устунлари қандай тўлдирилганини изоҳлаб ўтамиз. Масалан, *OB* стержень ўзининг ўртасига қўйилган тасвирловчи нуқта билан алмаштирилди, унинг координаталари $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ва $z_1 = 2$, чунки бу тасвирловчи нуқта z ўқда *OB* стерженнинг ўртасида ётибди; $x_1 = 0$ ва $y_1 = 0$ бўлгани учун $G_1 x_1 = 75 \cdot 0 = 0$ ва $G_1 y_1 = 75 \cdot 0 = 0$, $G_1 z_1$ эса $75 \cdot 2 = 150$ бўлди. *CG* стерженни алмаштиргандаги тасвирловчи нуқта ўша стерженнинг ўртасига қўйилади, бу стержень xy текисликда ётгани учун унинг z_6 координатаси $z_6 = 0$ бўлади, x_6 ва y_6 координаталари эса $x_6 = 6$, $y_6 = 4$. Ўша сатрдаги 1200, 800 ва 0 рақамлари тасвирловчи нуқтанинг оғирлигини тегишли координатага кўпайтириб топилган.

Учинчи устундаги сонларни қўшиб чиқиб бутун конструкциянинг оғирлигини аниқлаймиз, охирги учта устундаги сонларни қўшиб чиқиб статик моментлар аниқланади; кейин статик моментни конструкциянинг бутун оғирлигига бўлиб, оғирлик марказининг координаталари аниқланади: $x_c = 2{,}625$ дм; $y_c = 4{,}000$ дм; $z_c = 1{,}050$ дм.

Масала шартида ҳамма жойида материали бир хил бўлган жисмлар берилган ҳолларни кўриб чиқамиз. Бунда олдин айтиб ўтилганидек, (55) формула эмас, балки (56), (57), (58) лардан бири ишлатилади.

24-масала. Шакли 123-расмда кўрсатилган бир жинсли пластинканинг оғирлик маркази координаталари аниқлансин. Ўлчамлари сантиметр ҳисобида берилган.

Ечиш. Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказиб, пластинкани уч қисмга — учта тўғри тўртбурчакка бўламиз. Бўлиш чизиқлари пунктир билан кўрсатилган. Ҳар

... тўғри тўртбурчак оғирлик марказининг координаталарини ... ларининг юзаларини ҳисоблаб чиқарамиз (жадвалга қаранг).

Қисмлар	x_k	y_k	s_k
1	−1	1	4
2	1	5	20
3	5	9	12

... пластинканинг юзаси $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36$ см^2.
... облаб топилган миқдорларни юзанинг оғирлик марказини ... сатадиган (57) формулага қўямиз:

$$x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ см};$$

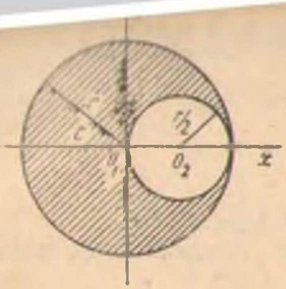
$$y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ см};$$

... оғирлик марказининг топилган вазияти расмда кўрсатилган. ... нуқта пластинкадан ташқарида турар экан. Бу мисол оғирлик марказининг геометрик нуқта эканлигини ва бу нуқта ... исмдан ташқарида туриши мумкин эканлигини яна бир марта кўрсатади.

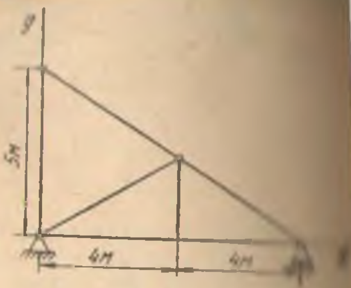
Тўлдириш усули (ёки манфий массалар усули) деб аталаган усулга оид бир масалани ечамиз.

25-масала. Радиуси r бўлган бир жинсли дискдан радиуси ... бўлган доира кесиб олинган. Диск қолган қисмининг оғирлик маркази аниқлансин (124-расм).

Ечиш. Координата ўқлари расмда кўрсатилгандек ўтказилса, координаталар боши дискнинг марказига тўғри келади. Диск қолган қисмининг симметрия ўқи бор, симметрия ўқини ... ўқи деб оламиз. Изланаётган оғирлик маркази ўша симметрия ўқида ётади, шунинг учун $y_c = 0$. Оғирлик марказининг абсциссасини топамиз. Масалани тўлдириш усулидан фойдаланиб ечамиз. Дискнинг қолган қисмини икки тасвирловчи нуқта билан кўрсатамиз. Тасвирловчи нуқталарнинг биринчисини дискнинг марказида оламиз, бу нуқтанинг массаси тўлиқ дискнинг массасига тенг деб ҳисоблаймиз. Диск бир жинсли бўлгани сабабли массаси ўрнида унинг юзасини олиш мумкин. Демак, $s_1 = \pi r^2$, $x_1 = y_1 = 0$. Тасвирловчи нуқтанинг иккинчиси кесиб олинган тўгаракнинг марказида ётади, массаси эса кесиб олинган доиранинг массасига тенг бўлиб, ишораси тескари деб фараз қилинади. Кесиб олинган доиранинг массаси ўрнида унинг юзаси олинади. Доиранинг юзаси $s_2 = -\frac{\pi r^2}{4}$, $x_2 = \frac{r}{2}$, $y_2 = 0$. Бу манфий юзани биринчи дискнинг юзасига қўшганда 124-расмда тасвирланган шакл ҳосил бўлади. Диск қолган қисмининг оғирлик маркази абсциссасини $x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{s_1 + s_2}$



124- расм.



125- расм.

формуладан топамиз:

$$x_c = \frac{\pi r^2 \cdot 0 - \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{r}{2}}{\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4}} = -\frac{r}{6}.$$

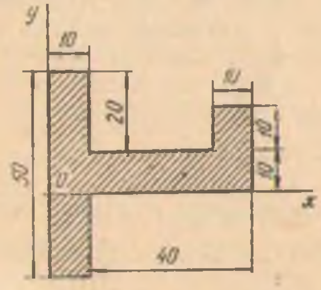
C оғирлик маркази катта дискнинг O марказидан чапда ҳақиқатан ҳам x ўқида жойлашган.

48- § га доир масалалар

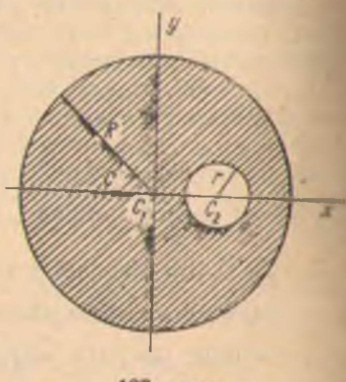
1. Текис ферманинг оғирлик маркази координаталари аниқлансин (125- расм); ҳамма стерженларнинг узунлик бирлигининг оғирлиги бир хил деб ҳисобланг. Жавоб: $x_c = 2{,}94$ м; $y_c = 1{,}875$ м.

2. 126- расмда кўрсатилган бир жинсли юпқа пластинканинг оғирлик маркази координаталари x ва y ўқларига нисбатан аниқлансин. Ўлчамлар сантиметр ҳисобида берилган. Жавоб: $x_c = 1{,}9$ см; $y_c = 0{,}6$ см.

3. Радиуси R бўлган доиравий пластинкадан радиуси r бўлган доира кесиб олинган (127- расм). $C_1C_2 = a$. Ўша пластинканинг оғирлик маркази координаталари x ва y ўқларига нисбатан аниқлансин.



126- расм.



127- расм.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

РАХМАТ ХУДАЙБЕРДИЕВ
РАШИД САИДАЛИЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов немашиностроительных ВУЗов

Тошкент „Ўқитувчи" 1992

Муҳаррир *Ж. Пирмуҳамедов, Ф. Орипова*
Бадиий муҳаррир *Ф. Неъматбоев*
Техник муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳлар *М. Минахмедова, А. Иброҳимов*

ИБ№ 4996

Теришга берилди 28. 08. 91. Босишга рухсат этилди. 15. 01. 92. Формати $60\times90^{1}/_{16}$. Литературная гарнитура. Қоғоз [illegible]. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л 8,5. Шартли кр.-отт. [illegible]. Нашр. л. 8,48. Тиражи 5000. Зак. № 6170. Баҳоси 11 с. 90 т.

„Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 11—134—89.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриёти. Самарқанд ш. У. Турсунов кўчаси, 82. 1992.

Объединённое издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. г. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

Х 87

Худойбердиев Р., Сайдалиев Р.

Назарий механика: Олий ўқув юрт. машинасозликдан бошқа ихтисос оладиган студентлари учун ўқув қўлл. — Т.: Ўқитувчи, 199. —136 б.

I. Автордош.

Худайбердиев Р., Сайдалиев Р. Статика: Для студентов втузов.

ББК 22.21я73