

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ҚУРИЛИШ ВАЗИРЛИГИ
ТОШКЕНТ АРХИТЕКТУРА ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ

С.А. Саидий

Қ У Р И Л И Ш
М Е Х А Н И К А С И

Тошкент – 2018

Қурилиш механикаси: Олий ўқув юртларининг архитектура ва қурилиш таълим йўналиши талабалари учун дарслик.

Аннотация

Ушбу дарсликда статик аниқ ва статик ноаниқ системаларни ҳисоблаш усуллари баён этилган. Айрим бобларда зўриқиш ва кўчишларни аниқлаш тенгламаларида матрица усулидан фойдаланилган ва ҳисоблашга доир мисоллар келтирилган.

Олий ўқув юртларининг қурилиш йўналиши бўйича таҳсил олаётган талабаларига мўлжалланган. Бино ва иншоотларни ҳисоблаш ва лойиҳалаш билан шуғулланувчи мутахассислар ҳам фойдаланиши мумкин.

Аннотация

В настоящем учебнике изложены методы расчета статически определимых и неопределимых систем. В отдельных главах использована матричная форма решения уравнения для определения усилий и перемещений, приведены примеры расчета.

Предназначается для студентов строительных специальностей вузов. Может быть полезен специалистам, работающим в области проектирования и расчета зданий и сооружений.

Annotation

Comparing with previous edition in this manual are made changes and addition methods of calculations of determinable and interminable are given. In separate chapters is used matrix forms of solution equations for to determinate efforts and movement, and is given calculations.

The book is consigned for students of building specialties. May be it useful for specialties who work in franch of design and calculation of engineering calculation.

Масъул муҳаррир: т.ф.д., проф. Абдурашидов Қ. С.

Такризчилар:

1. проф. Мирсаидов М. М.
2. проф. Абдурашидов Қ.С.

СЎЗ БОШИ

Умуммуҳандислик фанлари орасида назарий механика, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси фанлари муҳим ўрин тутади. Қурилиш муҳандисларининг малакасини белгилашда бу фанларнинг аҳамияти бениҳоя каттадир.

Қурилиш механикаси фани қурилиш мутахасислиги бўйича ўқийдиган бакалавр ва магистрлар учун асосий фанлардан биридир.

Мазкур дарслик олий техника ўқув юртларининг қурилиш мутахасисликлари йўналишлари: 5580100 – Архитектура; 5580200 – Бинолар ва саноат иншоотлари қурилиши; 5580400 – Инженерлик тармоқлари қурилиши; 5580500 – Қурилиш ишлаб чиқариш технологияси; 5580600 – Шаҳар қурилиши ва хўжалиги бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан тасдиқланган намунавий дастур асосида ёзилди.

Дарслик бўйича билдирилган танқидий фикр–мулоҳазалар муаллиф томонидан мамнуният билан қабул қилинади.

К И Р И Ш

1.1. Қурилиш механикаси фани ва унинг вазифалари

Қурилиш механикаси иншоотларнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги ҳақидаги фандир.

Иншоотларнинг **мустаҳкамлиги** деганда уларнинг юк кўтариш қобилияти тушунилади, чунки мустаҳкам иншоот ўзига кўйилган, юкларни бемалол кўтариб тура олиши лозим, акс ҳолда, унинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлмайди.

Иншоотларнинг **устуворлиги** деганда ташқи юклар таъсирида иншоот ўзининг дастлабки мувозанат ҳолатини сақлаб қолиши тушунилади.

Эксплуатация жараёнида иншоотда меъёридан ортиқча кўчиш, салқилик ва оғишлар рўй бермаслиги учун уларнинг **бикирлиги** ҳисоблаш йўли билан текширилади.

Маълумки, мустаккамлик, устуворлик ва бикирлик масалалари билан материаллар қаршилиги фани ҳам шуғулланади. Қурилиш механикаси билан материаллар қаршилиги фани ўртасидаги фарқ шундаки, материаллар қаршилиги фани иншоотни ташкил этувчи алоҳида элементлар (балка, стержень ва х.к.) нинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлигини ўрганади. Қурилиш механикасида эса алоҳида элементлардан ташкил топган бутун иншоотнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги билан шуғулланади. Аниқроқ қилиб айтганда, яхлит иншоотлар мустаҳкамлигини, устуворлигини ва бикирлигини таъминлайдиган қонун-қоидалар ва усуллар билан танишиб ўтилади. Қурилиш механикаси фани материаллар қаршилиги фани билан ўзвий боғланган фандир. Бундан ташқари, қурилиш механикаси фани назарий механика, физика ва математика фанларига ҳам боғлиқдир. Ўз навбатида қурилиш механикаси фанининг ҳисоблаш усуллари қурилиш конструкциялари фанлари (темирбетон ва ғишт-тош конструкциялари, металл, ёғоч ва пластмасса конструкциялари) да фойдаланилади.

Конструкция элементларининг узунликлари ҳамда кўндаланг кесим ўлчамлари элементларга таъсир этувчи кучлар ва элементнинг материалига боғлиқ ҳолда ҳисоблаш йўли билан аниқланади.

Қурилиш механикаси фанининг асосий вазифаларидан бири ташқи кучлар (юклар) таъсирида конструкция элементларида ҳосил бўладиган ички кучларни (зўриқишларни) аниқлашдан иборатдир. Конструкция элементларининг кўндаланг кесим ўлчамлари аниқланган зўриқишларнинг миқдорига қараб белгиланади.

Ташқи кучлар таъсирида иншоот ва унинг элементларида ҳосил бўладиган салқилик, кўчиш ва тебраниш амплитудаларини аниқлаш каби масалалар ҳам қурилиш механикаси фани доирасидаги масалалардан ҳисобланади.

Назарий жиҳатдан баён этилган усулларнинг амалий тадбиқи мисол ва масалаларда ўз аксини топган.

Қурилиш механикасида яратилган ҳар қандай назарий усуллар тажрибада синаб кўрилади. Шунга кўра қурилиш механикаси фани назарий ва тажрибавий фан саналади.

Қурилиш механикаси фанида ишлаб чиқилган ҳисоблаш усуллари лойиҳалаш жараёнида кенг қўлланилади. Бундан қурилиш механикаси ўз вазифаларини тўлиқ бажариб бўлди, деган маъно чиқмайди, албатта. Қурилиш механикаси ҳам бошқа фанлар сингари ўсиб бораётган қурилиш саноатининг талабларига мос равишда муттасил ривожланиб, такомиллашиб боради.

1.2. Қурилиш механикаси фанининг ривожланиши

Қурилиш механикаси ривожланиш жараёнининг дастлабки босқичларида мустақил фан бўлмай, умумий механиканинг таркибий қисмларидан бири бўлган. Бинобарин умумий механиканинг ибтидоий даврлардан бошлаб ҳозирги давргача бўлган тарихи қурилиш механикасига ҳам бевосита алоқадордир.

Механиканинг назарий асослари дастлаб қадимги Юнонистон ва Мисрда пайдо бўлган.

Механикага доир илк ёзма асар Юнонистоннинг машҳур файласуфи Аристотелга тегишлидир. Аристотель «механика» сўзини илмий атама сифатида фанга биринчи бўлиб олиб кирган. Механиканинг хилма-хил масала ва муаммоларини ҳал этишда қадимги замон олимлари Архимед, Герон, Платон, Аполлоний, Гиппарх, Птолемей, Никомед, Архит ва бошқаларнинг хизматлари бениҳоя каттадир.

Шарқ мамлакатларида механика фани IX-XII асрларда тараккий эта бошлади. Бу даврга келиб шарқнинг машҳур олимлари Абу Райҳон Беруний, Абу Абдулло ал-Хоразмий, Абу Али ибн Сино, Умар Хайём, ал-Форобий, Ахмад ал-Фарғоний ва бошқалар табиий фанлар, жумладан, механика фанининг ривожланишига катта ҳисса қўшдилар.

VII – VIII асрлардан бошлаб Ислом дини кенг ёйилган мамлакатларда. масжид, мадраса, мақбара сингари Маҳобатли бинолар қурилиши авж олади. Шарқ мамлакатлари, жумладан, Ўрта Осиёда бунёд этилган қадимий меъморчилик ёдгорликларида гумбаз, минора, айланма зина, пештоқ, равоқ, муқарнас каби мураккаб қурилмалар қўлланилган. Табиийки, бундай биноларни қуриш учун муҳандис, меъмор ва усталардан катта билим ва маҳорат талаб этилган. Қадимий биноларнинг шакл ва ўлчамлари асрлар мобайнида такомиллашиб борди. Қадимий меъморчилик обидаларининг асрлар оша бизгача етиб келиши бобокалон меъморлар ва уста бинокорларнинг амалий қурилиш механикасидан чуқур ҳабардор эканликларидан далолат беради.

Механиканинг кейинги ривожини Уйғониш даврида Европага кўчди. Бу давр механикаси буюк олимлар Леонардо да Винчи, Стевин, Коперник, Кеплер, Галилей ва Ньютонларнинг оламшумул асарлари ва ихтиролари билан бойиди, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикасига доир биринчи китоб ўша даврда яратилди. Китобнинг номи «Икки янги фан ҳақида суҳбатлар ва математик исботлар» деб аталиб, муаллифи Галилео

Галилей эди. 1678 йилда Роберт Гук ўзининг машхур қонунини кашф этди, яъни чўзилиш қанақа бўлса, куч ҳам шунақа бўлади, деб таърифлади. Бошқача айтганда, деформация кучга тўғри пропорционалдир. Қурилиш механикасининг деярли барча назария ва усуллари ана шу оддий қонунга асосланади.

XVIII асрда саноатнинг кенг ривожланиши илм-фан олдида янги-янги вазифалар қўйди.

XIX асрда темир йўлларнинг пайдо бўлиши, кўприklar ва йирик саноат биноларининг қад кўтариши қурилиш механикасини янада ривожланишига туртки бўлди. Бу ва бундан кейинги даврларда қурилиш механикасининг ривожланишига чет эллик олимлардан Даламбер, Лагранж, Кулон, Ламс, СенВенан, Эйлер, Максвелл, Мор, Мюллер-Бреслау ва бошқалар, рус олимларидан Д. И. Журавский, Ф. С. Ясинский, Н. А. Белелюбский, В. Г., Шухов, В. Л. Кирпичев, Л. Р. Проскуряков, А. Н. Крылов, И. Г. Бубнов, Б. Г. Галеркин, кейинчалик И.М. Рабинович, В. З. Власов, К. С. Завриев, А. Ф. Смирнов, Н. И. Безухов, В. В. Болотин, А. В. Дарков ва бошқалар катта ҳисса қўшдилар.

Қурилиш механикасининг ривожланишида юртимиз олимларининг ҳиссаси катта.

Назарий механика ва материаллар қаршилиги курсларидан ўзбек тилида биринчи дарсликни академик М. Т. Ўрозбоев яратди. Ўзбекистонда кибернетиканинг тараққиёти академик В. К. Қобуловнинг номи билан боғлиқдир. Зилзилалар тез-тез содир бўлиб турадиган республикамызда зилзилабардош конструкциялар устида олиб борилаётган ишларнинг аҳамияти нақадар катта ҳисобланади. Бу соҳада академик Т.Р. Рашидовнинг ер ости иншоотлари сейсмик мустаҳкамлиги назариясига қўшган ҳиссаси беҳаддир. Академик Т. Ш. Ширинқуловнинг замин ва пойдеворлар соҳасида олиб борган илмий тадқиқотлари натижалари катта аҳамиятга эга бўлди.

Ҳозирги пайтда конструкцияларнинг ҳисоби асосан компьютерларда бажарилмоқда. Шу боисдан эндиликда қурилиш механикасида

компьютерлардан фойдаланиш имконини берадиган аналитик усулларнинг роли ортиб бормокда.

Ҳисоблаш техникасидан кенг фойдаланиш имконини берадиган усуллардан бири матрица усулидир. Матрица усулининг афзалликларидан бири шундан иборатки, бунда бир хил матрица амалидан фойдаланиб, турли хил системаларни ҳисоблаш мумкин.

Истиқболли усуллардан яна бири *чекли элементлар* усулидир (ЧЭУ). Бу усулга кўра яхлит жисм алоҳида чекли элементларга бўлиб чиқилади; бу элементларнинг ўзаро боғланиши алоҳида нукталардаги зўриқишларнинг ўзаро таъсири орқали уч ва тўрт бурчакларга, фазовий масалаларда эса - параллелепипед ёки тетраэдрларга тақсимлаб чиқилади.

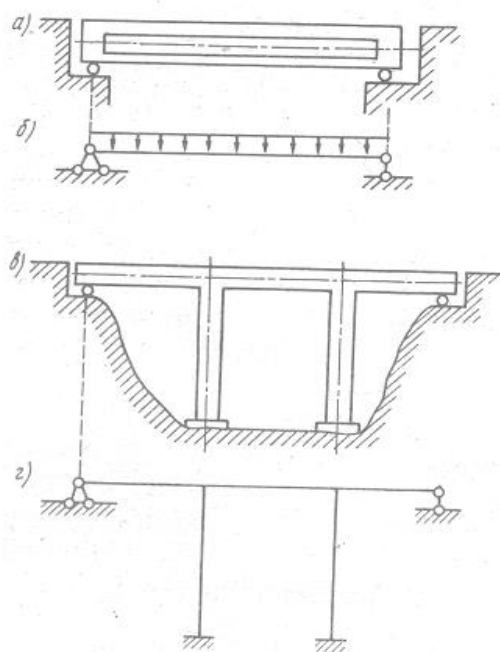
1.3. Иншоотлар ва уларнинг ҳисоблаш схемалари

Муҳандислик иншоотлари одатда стержень, балка, пластина, қобик ва хажмий жисмлар сингари турли конструктив элементларни тегишли равишда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинади. Демак, яхлит иншоот алоҳида элементлардан ташкил топган мураккаб система ҳисобланади.

Иншоотларни ҳисоблаганда, айрим элементларнинг ўлчам ва шакллари, улар орасидаги боғланишни аниқ ҳисобга олиш назарий жиҳатдан ё имкони йўқ, ё ўта мураккаб ишдир. Шунинг учун қурилиш механикасида бошқа фанлардаги сингари илмий абстракция усулидан фойдаланиб, мавжуд иншоот ҳисоблаш схема билан алмаштирилади.

Ҳисоблаш с х е м а с и — иншоотнинг соддалаштирилган тасвири бўлиб, унда юк таъсиридаги иншоотнинг асосий кўрсаткичлари мужассамлашган бўлади. Ҳисоблаш схемаларида стерженлар — ўқлар билан, пластиналар — ўрта сиртлар билан, кўндаланг кесимлар — юза ва инерция моментларининг сон қийматлари билан, реал таянчлар идеал таянчлар билан алмаштирилади; юклар ўқларга қўйилган деб фараз этилади

ва ҳ.к. Иншоотлар ҳисоби ана шундай ҳисоблаш схемалари орқали амалга оширилади.



1.1. расм

1.1.- расмда бир ораликли кўприк (а) ҳамда балка деб аталувчи унинг ҳисоблаш схема (б) тасвирланган. 1.1- расм, в-да уч ораликли кўприк ҳамда рама деб аталувчи унинг ҳисоблаш схемаси (г) берилган. Йўл копламасининг вазни ҳамда кўприкнинг хусусий оғирлиги балкага текис ёйиқ куч сифатида таъсир этади. Балкада ташки кучлар ва ҳарорат таъсирида бўйлама кучлар ҳосил бўлмаслиги учун унинг таянчларидан бири қўзғалувчан, иккинчиси қўзғалмас қилиб ишланади.

Иншоотнинг ҳисоблаш схемасини танлаш мураккаб, айти пайтда, муҳим масалалардан биридир. Ҳисобнинг сифати, яъни унинг аниқлиги кўп жиҳатдан, ҳисоблаш схемасининг қандай танланишига боғлиқ.

Агар ҳисоб нотўғри танланган ҳисоблаш схемаси бўйича бажарилган бўлса, у ўта аниқ усуллар билан ҳисобланган тақдирда ҳам тўғри натижа бермайди.

Маълумки, стержень ва пластиналар иншоотнинг асосий элементлари ҳисобланади. Кўндаланг кесим ўлчамлари узунликка нисбатан анча кичик бўлган элемент *стержень* деб аталади. Бир ўлчами (қалинлиги) қолган икки ўлчами (узунлиги ва эни)га нисбатан анча кичик бўлса, *пластина* деб аталади. Эгри ўқли пластина *қобиқ* (оболочка) деб аталади. Бўлардан ташқари ҳисоблаш схемалари ичида *хажмий жисмлар* деб аталувчи катта массага эга бўлган элементлар ҳам учрайди. Бундай элементларнинг уч ўлчами бир-бирига яқин бўлади. Бунга пойдевор блоклар, тиргак деворлар мисол бўла олади.

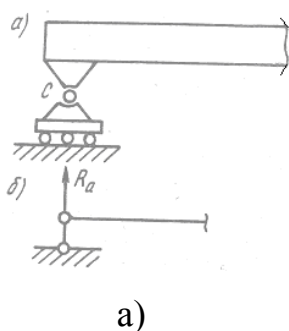
Алоҳида элементларнинг жойлашув тартибига қараб иншоотлар ясси ва фазовий системаларга бўлинади. Барча стерженлар бир текисликда жойлашган бўлса, бундай иншоот *ясси система* деб аталади. Акс ҳолда система фазовий бўлади. Ясси иншоотлар мустақил кўринишда ҳамдан-кам учрайди. Кўпинча улар ҳисобни соддалаштириш мақсадида фазовий системалардан ажратиб олинади. Ясси системани фазовий системадан ажратиб олиниши ҳисоб аниқлигини пасайтиради. Бироқ муҳандислик амалиётида баъзан шундай қилишга тўғри келади.

1.4. Таянчлар ва юклар

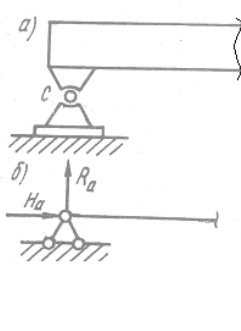
Иншоотнинг пойдевор ёки замин билан бириккан қисми таянч деб аталади. Таянчлар уч хил бўлади: шарнирли қўзғалувчи таянч, шарнирли қўзғалмас таянч, шарнирсиз қўзғалмас таянч.

1.2- расмда шарнирли қўзғалувчи таянчнинг конструкцияси (а) ва унинг содда тасвири (б) берилган, бунда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, горизонтал йўналишда қўзғала олади; биргина вертикал реакция вужудга келади.

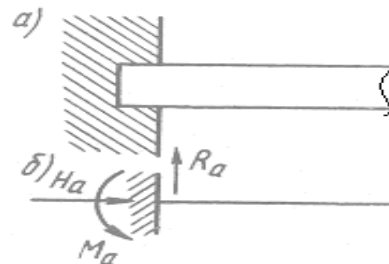
1.3- расмда шарнирли қўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва содда тасвири (б) берилган; бу ерда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, бироқ горизонтал йўналишда қўзғалмасдир. Бундай таянчда ҳам горизонтал, ҳам вертикал реакциялар вужудга келади.



1.2- расм



1.3- расм



1.4- расм

1.4- расмда шарнирсиз қўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва содда тасвири (б) берилган бўлиб, бунда стержень учи таянчга мустаҳкам бириктирилган; стержень горизонтал йўналишда қўзғалиш ёки таянч кесими атрофида айланиш имконига эга эмас. Бундай таянчда учта реакция (R_a , H_a , M_a) вужудга келади.

Иншоотга таъсир этадиган ташиқ кучлар ю к л а р деб аталади. Юклар таъсир этиш муддати, таъсир этиш усули, вазифаси ва бошқа белгиларга қараб бир неча турга бўлинади.

Юклар иншоотга қўйилиш вақти (муддати)га қараб статик ва динамик юкларга бўлинади. С т а т и к юклар иншоотга зарбсиз аста-секин қўйилади; юкнинг қиймати нолдан бошлаб охириги қийматига қадар бир текисда ортиб боради. Д и н а м и к юклар иншоотга бирданига қўйилади ёки вақт ўтиши билан қиймат ва йўналишини ўзгартириб туради.

Қўйилиш усулига кўра ёйиқ ва йиғиқ (тўпланган) юклар бўлади.

Ёйиқ юк иншоот сирти ёки узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Узунлик бўйлаб ёйилган юк интенсивлик билан ўлчанади. Интенсивлик деганда узунлик бирлигига тўғри келадиган юк миқдори тушунилади ва u кН/м билан ўлчанади. Агар юк сирт бўйлаб ёйилган бўлса, кН/м² билан ўлчанади.

Йиғиқ юк деганда бир нуқтага тўпланган куч тушунилади. Аслида бундай юклар реал ҳолда камдан-кам учрайди. Ҳисоб ишларини соддалаштириш учун кўпинча ёйиқ юклар йиғиқ куч ҳолига келтириб олинади, яъни маълум бир нуқтага тўпланади. Ҳозирда амалда бўлган ҳалқаро ўлчам birlikлари тизими (СИ) бўйича кучнинг ўлчам birlikи ньютон (Н) дир. Эслатиб ўтамир: $1 \text{ кгк} \approx 9,81 \text{ Н}$.

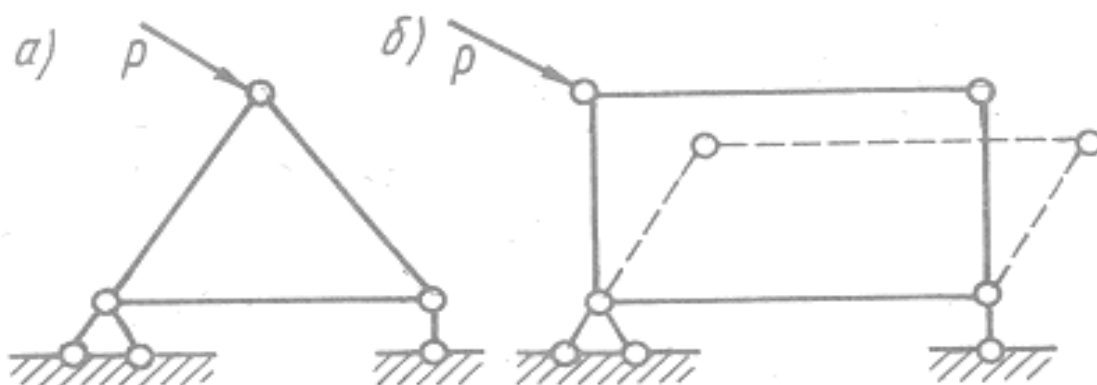
Вазифасига кўра юклар доимий, муваққат ва қўзғалувчан бўлади. Иншоотга доим таъсир этиб турувчи юк (масалан, ҳусусий оғирлик) доимий юк ҳисобланади. Муваққат юк иншоотга маълум даврларда таъсир этади (масалан, шамол ва қор таъсири, турли ускуна ва жиҳозлар ва ҳ. к.). Қўзғалувчан юкларга транспорт воситалари мисол бўла олади.

1.5. Стерженли системаларнинг геометрик

ўзгармаслик шартлари

Курилиш конструкцияларининг аксарияти ҳисоблаш чизмаларида стерженлардан ташкил топади (балка, ферма, рама ва х. к.). Алоҳида стерженларнинг тугунларда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинган қурилмалар *стерженли системалар* деб аталади.

Ҳар қандай иншоот, яъни стерженли система геометрик ўзгармас бўлиши лозим. Бунинг маъноси шуки, ҳар қандай бино ва иншоот бунёд этилгандан кейин ўзининг дастлабки геометрик шаклини ҳеч оғишмай сақлаб туриши керак. Бинокорликда геометрик ўзгарувчан системалар қўлланилмайди, чунки бундай системалар деформацияланмаган ҳолда ўз шаклини кескин ўзгартиради. Геометрик ўзгармас системалар эса ўз шаклини стерженларнинг деформацияланиши эвазига ўзгартиради.



1.5- расм

1.5- расмда учбурчакли (а) ва тўртбурчакли (б) иккита стерженли система тасвирланган бўлиб, улардан бири геометрик ўзгармас, иккинчиси ўзгарувчандир.

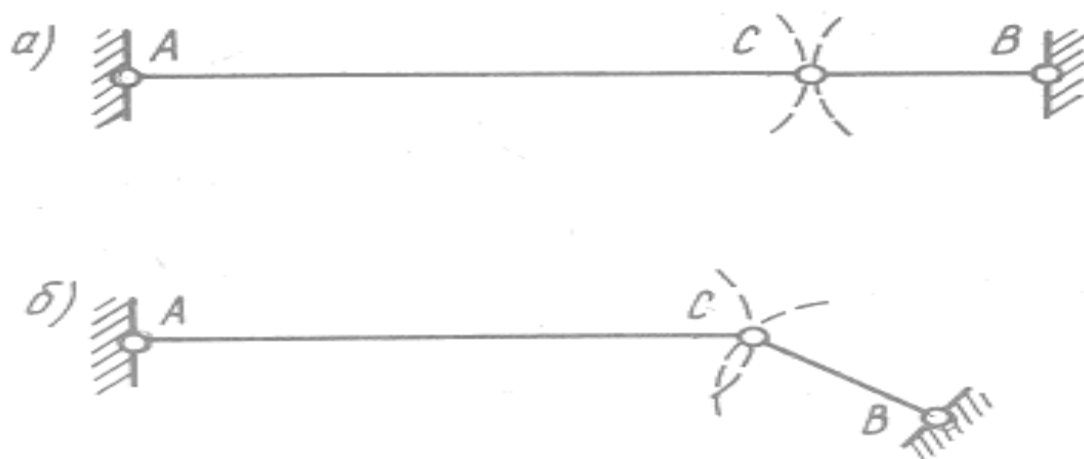
Учбурчакли системанинг шакли стерженлар деформация бергандагина ўзгаради, акс ҳолда ўзгаришсиз тураверади. Шунинг учун у геометрик ўзгармас система саналади. Тўртбурчакли система эса ўз шаклини осонгина ўзгартиради, бунда стерженлар дастлабки узунлигини сақлаб қолади, яъни деформацияланмайди. Демак, бу геометрик ўзгарувчан системадир.

Хулоса қилиб айтганда, ўзининг геометрик шаклини алоҳида стерженларнинг деформацияланиши ҳисобига ўзгартирадиган системалар геометрик ўзгармас системалар деб аталади.

Учбурчакли система энг оддий геометрик ўзгармас система ҳисобланади. Хўш, мураккаб шаклга эга бўлган, геометрик ўзгармас системалар қандай ҳосил қилинади? деган савол туғилади. Бу саволга жавоб беришга уриниб кўрамиз.

Бунинг учун аввал оний ўзгарувчан система билан танишиб чиқамиз.

Бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган система билан танишиб чиқайлик (1.6- расм, а).



1.6- расм

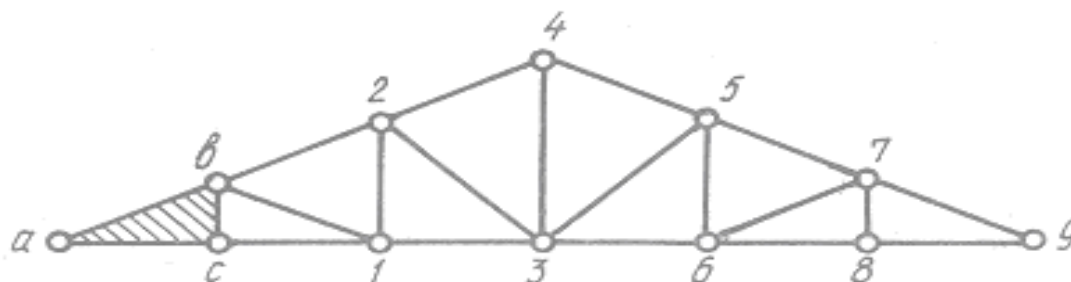
Агар икки стерженни бир-бирига уловчи шарнир С ни йўқ деб фарз қилсак, АС ва ВС стерженлари шаклда кўрсатилган ёйлар бўйича қўзғалиши мумкин. Бунда ҳар иккала ёй С нуқтасида умумий ўринмага эга бўлади. Бинобарин, стерженлардан бирига тегишли бўлган С нуқтаси АВ нуқтаси тик йўналишида жуда қисқа масофага кўча, иккинчи стержень бунга қаршилик кўрсата олмайди. Демак, бу система геометрик ўзгарувчан экан, чунки системанинг шакл ўзгариши стерженларнинг деформациясиз амалга ошаяпти. Бироқ бу системанинг геометрик ўзгарувчанлиги бир онликдир, чунки С нуқтаси жуда қисқа масофага кўча олади. С нуқтасининг кўчишини катталаштириш учун, яъни икки стерженли системанинг шакл

Ўзгартиришини янада давом эттириш учун стерженларни деформацияланишга мажбур этиш лозим бўлади. Ўз шаклини бу йўсинда ўзгартирадиган система геометрик ўзгармас бўлади. Шунинг учун ҳам бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган системалар оний ўзгарувчан системалар деб аталади.

Агар икки стержень ва уч шарнир бир ўқ устида ётмаса, у ҳолда ёйлар умумий уринмага эга бўлмайдилар (1.6- расм,б). С нуктаси бу системада кичик бир масофага кўчиши учун стерженлар деформацияланиши лозим бўлади. Бундай системанинг геометрик ўзгармас бўлишини юқорида кўриб ўтдик.

Демак, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун янги қўшиладиган тугун ва уни дастлабки система билан боғловчи икки стержень бир ўқ устида ётмаслиги лозим экан. Геометрик ўзгармас система ҳосил қилишнинг асосий қоидаси ана шундан ибарат.

Шу қоида асосида геометрик ўзгармас стерженли система - ферма ҳосил қилиш тартибини кўриб чиқайлик (1.7- расм).



1.7- расм

Дастлабки геометрик ўзгармас система - асос сифатида энг оддий система abc учбурчагини қабул қиламиз. Бу учбурчакка бирин-кетин икки стержень орқали янги тугунларни қўшиб борамиз. Тугунларни қўшиш тартиби чизмада рақамлар билан кўрсатилган. Эътибор беринг: ҳар бир янги тугун ва икки стержень бир ўқ устида ётмайди. Шу тартибда ҳосил қилинган ферма ўзгармас бўлади.

Текшириш учун тугунларни ва уларга туташган икки стерженни тескари тартибда бирин-кетин ташлаб юборамиз. Агар ташлашлар охирида

учбурчакли система қолса, у ҳолда берилган система геометрик ўзгармас бўлади. Бизнинг мисолда айнан шундай: тугунларни 9- тугундан бошлаб бирин-кетин ташлаб юборсак, охирида abc учбурчаги қолади. Демак яхлит ферма геометрик ўзгармас система экан.

Энди стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартларини формула орқали ифода этишга уриниб кўрамиз.

Геометрик ўзгармас оддий ферма стерженлари сонини S , тугунлари сонини K деб белгиласак, стерженлар сони билан тугунлар сони орасидаги боғланишни қуйидаги тартибда ифодаласа бўлади: асосий учбурчак учта тугун ва учта стерженга эга: бунга келиб қўшилувчи ҳар бир янги тугун сон жихатдан $(K-3)$ га тенг бўлиб, ҳар бир тугунга иккитадан стержень туташган бўлади. Натижада ферма стерженларининг умумий сони қуйидагича бўлади:

$$S=3+2(K-3)$$

ёки

$$S=2K-3.$$

1.1

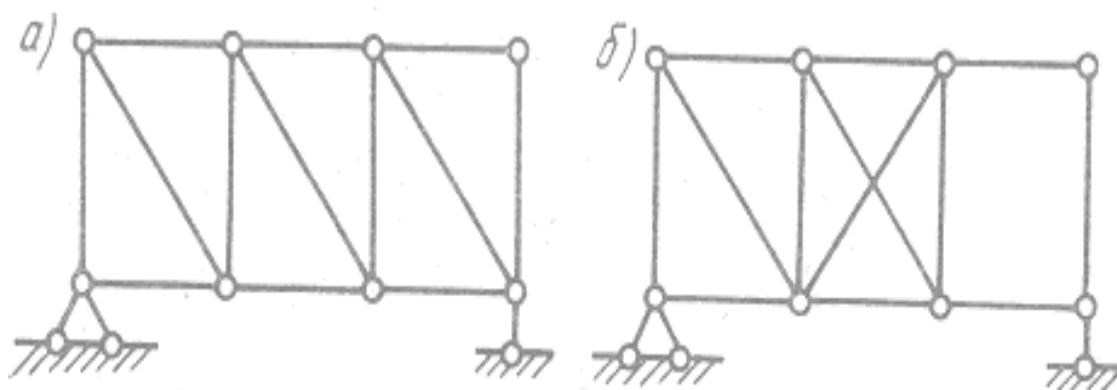
Бу ерда қуйидаги уч ҳол учраши мумкин:

1) $S < 2K-3$, бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади; чунки стерженлар сони талаб этилган сондан кам;

2) $S = 2K-3$, бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади; системадаги стерженлар сони талаб даражасида, ортиқ ҳам эмас, кам ҳам эмас;

3) $S > 2K-3$, бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ бўлади; чунки стерженлар сони керагидан ортиқча.

Кўриб ўтилган уч ҳолдан биринчиси бинокорлик учун ярамайди, ҳолган икки ҳол қурилиш конструкцияларини каноатлантиради. Чунки иншоотлар статик аниқ ёки ноаниқлигидан қатъи назар геометрик ўзгармас бўлиши даркор.



1.8- расм

Бироқ стерженли системанинг формулани қаноатлантириши масаланинг бир томони ҳолос. Масаланинг иккинчи томони ҳам бор: системанинг геометрик ўзгармаслигини таъминлашда унинг тузилиши ҳам катта роль ўйнайди. Масалан, 1.8-расмда стерженлари сони формулани қаноатлантирадиган иккита ферма тасвирланган. Формулага кўра ҳар иккалови ҳам геометрик ўзгармас система, бироқ ферманинг тузилишига кўра улардан бири (а) геометрик ўзгармас, иккинчиси (б) геометрик ўзгарувчандир. Иккинчи ферманинг оҳирги панели геометрик ўзгарувчан тўртбурчакли системадан ташкил топганлиги сабабли у геометрик ўзгарувчандир.

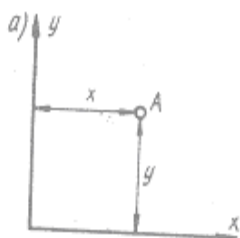
1.6. Стерженли системаларнинг эркинлик даражалари

Нукта ёки системанинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрлар сони *эркинлик даражаси* деб аталади.

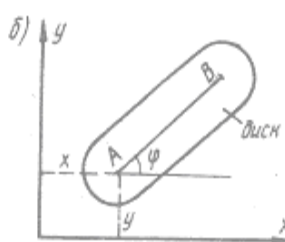
А нуктасининг ҳолатини x ва y параметрлари белгилайди (1.9- расм, а). Демак нуктанинг эркинлик даражаси иккига тенг.

Ясси диск (масалан, фанер парчаси)нинг эркинлик даражасини кўриб чиқамиз (1.9-расм, б) Дискнинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрларни белгилаш учун диск сиртида АВ кесмасини ўтказамиз. Бу кесманинг ҳолатини x , y , φ параметрлари орқали билишимиз мумкин.

Демак, АВ кесмасининг эркинлик даражаси учга тенг. АВ кесмасининг ҳолатини белгиловчи параметрлар (x, y, φ) дискнинг ҳолатини ҳам белгилайди, чунки кесма диск сиртида ётибди. Бундан дискнинг эркинлик даражаси ҳам учга тенг бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Бунинг маъноси шуки, диск уч йўналишда эркин ҳаракат қилади: вертикал ва горизонтал йўналишларда кўчиши ҳамда бирор нуктага, масалан, А нуктасига нисбатан айланиши мумкин.



1.9- расм



1.10- расм

Диск ёки стерженнинг эркинлик даражасига чек қўядиган ҳар қандай қурилма боғлагич деб аталади. Шарнирлар ва таянч стерженлари боғлагич ҳисобланади. Ҳар бир шарнир иккита, ҳар бир таянч стержени эса битта эркинлик даражасига чек қўяди.

Яхлит бир диск олайлик. Агар унга ҳеч қандай боғлагич қўймасак, унинг эркинлик даражаси учга тенг бўлишини юқорида кўриб ўтдик. Энди дискка А шарнирини қўямиз (1.10- расм) (стол устида ётган фанера парчасига бир дона мих қоқамиз, дегандай гап). Бу билан дискнинг иккита эркинлик даражасига чек қўйилади (фанера икки йўналишда ҳаракат қилиш имкониятидан маҳрум бўлади, дегандай гап). Бироқ диск А шарнири атрофида айлана олади. Агар дискка яна бир боғлагич – таянч стержени В ни қўйсак, диск, айланиш имкониятидан ҳам маҳрум бўлади.

Мана шу мулоҳазалар асосида стерженли системаларнинг эркинлик даражасини аниқлашга доир формулани ёза оламиз. Агар системанинг эркинлик даражасини W , дисклар сонини D , шарнирлар сонини $Ш$ ва таянч

стерженлари сонини C , деб олсак, стерженли системанинг эркинлик даражасини аниқлайдиган формула қуйидагича ифодаланади:

$$W = 3D - 2III - C \quad (1.2)$$

Бу формуланинг замирида юқоридаги мулоҳаза ётибди, яъни ҳар бир диск учта эркинлик даражасига эга, ҳар бир шарнир иккита эркинлик даражасига ва ҳар бир таянч стержени битта эркинлик даражасига чек қўяди.

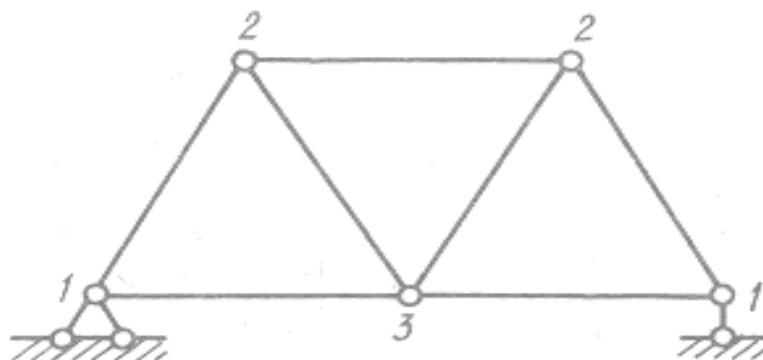
Шарнирлар сонини ҳисоблашда, улар иккига — оддий ва мураккаб шарнирларга ажратилади. Икки дискни бирлаштирувчи шарнир оддий, иккидан ортиқ дискни бирлаштирувчи, шарнир эса — м у р а к к а б шарнир деб аталади. Шарнирлар сони дисклар сонидан битта кам бўлади, яъни

$$III = D - 1$$

Стерженли системаларнинг эркинлик даражаларини аниқлашда ҳам қуйидаги учта ҳол учрайди:

- 1) $W=0$; бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади.
- 2) $W>0$; бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади;
- 3) $W<0$; бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ, ортиқча боғланишларга эга бўлади.

1- мисол: Ясси ферманинг эркинлик даражасини аниқлаш керак (1.11- расм).



1.11. расм

Дисклар, яъни стерженлар сони $D=7$;

Шарнирлар сони, $Ш=9$ (шаклда шарнирлар сони рақамлар билан кўрсатилган);

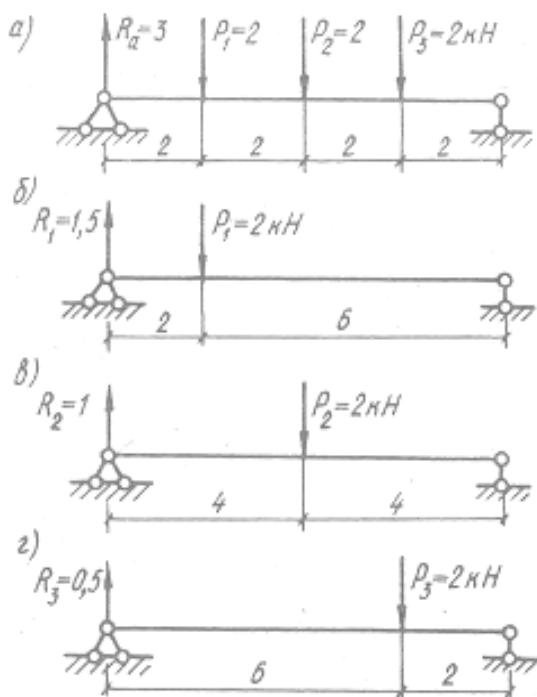
Таянч стерженлари сони $C_T=3$; эркинлик даражаси $W=3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 - 3 = 0$;

Демак, ферма геометрик ўзгармас, статик аниқ экан.

1.7. Кучлар таъсирининг мустақиллик принципи ва умумлашма эпюралар

Курилиш механикасида катта аҳамиятга эга бўлган бу қоида қуйидагича таърифланади:

Агар иншоотга бир неча кучлар қўйилган бўлса, уларнинг биргаликдаги таъсиридан ҳосил бўлган натижа, ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан ҳосил бўлган натижалар йиғиндисига тенг бўлади.



1.12-расм

Бу қоиданинг моҳиятини ойдинлаштириш учун оддий бир мисол келтирайлик. Балканинг чап таянч реакциясини (1.12- расм, а) икки хил йўл билан аниқлаймиз. Биринчи усул бўйича R_a , таянч реакцияси учала куч (P_1 , P_2 , P_3) таъсирида бир йўла аниқланади: $R_a=3$ кН чиқади. Иккинчи усулга кўра кучлар навбатма-навбат қўйилади ва ҳар бир кучга мос равишда реакциялар аниқланади. Топилган реакцияларнинг қиймати чизмаларда берилган (1.12- расм, б, в, г).

Реакциянинг тўлиқ қиймати алоҳида топилган реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг бўлади: $R_a= R_1+ R_2 +R_3 = 1,5 + 1 + 0,5 = 3$ кН.

Шундай қилиб, балкага кучлар бир йўла қўйилгандаги реакциянинг қиймати кучлар алоҳида-алоҳида қўйилган ҳолдаги, реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг чиқди. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қондаси деган иборанинг маъноси ана шундан иборат.

Кучлар таъсирининг мустақиллиги қондаси эластиклик чегарасида қўлланилади. Реакция ва ички кучларни аниқлашда иншоот деформацияланмаган деб фараз этилади. Қўлланиладиган тенгламалар чизиксиз бўлса, мазкур усулдан фойдаланиб бўлмайди.

Умумлашма эпюралар. Маълумки, қурилиш конструкцияларига турли хил юклар таъсир этади. Ҳар бир юкнинг ўзига яраша эпюралари бўлади. Шундай ҳоллар бўладикки, маълум бир кесимда энг катта момент бир хил юкдан ҳосил бўлса, бошқа кесимда бошқа юкдан ҳосил бўлади. Муҳандисни эса максимал зўриқишлар қизиқтиради. Максимал ёки минимал зўриқишларни аниқлаш мақсадида умумлаштирилган эпюралар қурилади.

Кўпинча иншоотга доимий ва муваққат юклар таъсир этади. Доимий юклар иншоотга муттасил равишда таъсир этиб, муваққат юкларнинг таъсир этиш вақти, қиймати ва ўрни ўзгариб туради. Бу эса ўз навбатида иншоот кесимларидаги зўриқишларнинг ўзгаришига олиб келади. Бундай ҳолларда зўриқишларнинг максимал ёки минимал қийматларини аниқлаш учун доимий ҳамда муваққат юкларнинг турли вариантлари учун алоҳида эпюралар қурилади. Доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш билан муваққат юкдан ҳосил бўлган мусбат зўриқишларнинг йиғиндисини $S_{\max}$ ни, яъни тўлиқ максимал зўриқишни, манфий зўриқишлар йиғиндисини эса $S_{\min}$ ни, яъни тўлиқ минимал зўриқишни беради;

$$\begin{aligned} S_{\max} &= S_{\text{доим}} + \sum (+S_{\text{мув}}) \\ S_{\min} &= S_{\text{доим}} + \sum (-S_{\text{мув}}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Бу ерда $S_{\text{доим}}$ — доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш; $\sum (+S_{\text{мув}})$, $\sum (-S_{\text{мув}})$ — муваққат юклардан ҳосил бўлган мусбат ва манфий зўриқишлар.

Зўриқишларнинг аниқланган қийматларини ягона масштабда бир ўк устига жойлаштирилади ва туташ чизик билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график *умумлашма эпюра*¹ деб аталади. Мазкур эпюрага доир мисол статик ноаниқ узлуксиз балкалар ҳисобида берилган.

¹ Русчада бу атама «огибающая» ёки «объемлющая» деб юритилади. Бу сўзларнинг ўзбек тилига айнан таржимаси атама маъносига унча тўғри келмаганлиги сабабли асли маъносига яқинроқ термин қабул қилдик.

Қурилиш конструкцияларини ҳисоблашда (масалан, арматуранинг кесимини танлашда) эпюрадан мутлақ қиймати катта бўлган момент танлаб олинади; конструкциянинг мустаҳкамлиги ана шу момент бўйича текширилади.

2- БОБ

ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ НАЗАРИЯСИ

2.1. Таъсир чизиклари ҳақида тушунча

Замонавий иншоотларнинг кўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлаш катта аҳамиятга эгадир.

Маълумки, кўприк, эстакада, кран ости балкалари сингари катор муҳандислик иншоотларини ҳисоблашда биз кўзғалувчан юкларга дуч келамиз.

Иншоотларнинг кўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлашда, асосан, қуйидаги икки масала ҳал этилади:

1. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган зўриқишлар, иншоотнинг таянч реакциялари, эгувчи моментлари, кўндаланг ва бўйлама кучлари, ферма стерженларидаги зўриқишлар ва ҳ. к. аниқланади.

2. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган энг катта зўриқишлар аниқланади, яъни ҳаракатланувчи юклар системасининг иншоотда энг нобоб жойлашуви масаласи ҳал этилади.

Иншоот бўйлаб бирлик куч ($P=1$) ҳаракатланганда, иншоот қисмларидаги куч омилларининг ўзгаришини ифодаловчи график **таъсир чизиклари** деб аталади. Куч омиллари деганда ҳосил бўладиган ички кучлар (M, Q, N) ва таянч реакциялари тушунилади.

Иншоот бўйлаб ҳаракатланувчи бирлик кучнинг ҳолатини белгиловчи абциссани x билан, иншоотдаги зўриқишни S билан белгиласак, у ҳолда зўриқишнинг таъсир чизик тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$S = f(x)$$

Таъсир чизикларини чизишнинг с т а т и к ва к и н е м а т и к усуллари мавжуд.

Статик усул ҳаракатланувчи бирлик куч ($P=1$) нинг ихтиёрий ҳолати учун мувозанат тенгламаларини тузиб, улардан изланаётган зўриқишнинг аналитик ифодасини тузишга асосланган.

Бу аналитик ифода ёрдамида зўриқиш S нинг ўзгариш графиги чизилади.

Кинематик усул ёрдамида таъсир чизиқларини қуриш мумкин бўлган кўчишлар қондасига асосланади.

2.2. Оддий балкаларда зўриқишларнинг таъсир чизиқлари

Агар иншоотга қўзғалувчи кучлар тизими қўйилган бўлса, уларни аввало ҳаракатланувчи бирлик куч ($P=1$) таъсирига ҳисобланади.

Оддий балкаларга куч омилининг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик кучни балканинг тегишли нуқталарига жойлаштириб, бизни қизиқтираётган миқдорнинг ўзгариш қонунини ифодаловчи тенглама тузилади ва унинг графиги чизилади.

Оддий балкаларда таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари

Бирлик куч балка бўйлаб ҳаракатланганда, таянч реакцияларининг қай тарзда ўзгаришини кўриб чиқамиз. Бирлик кучни шаклда кўрсатилганидек жойлаштирамиз (2.1- расм).

R_a таянч реакциясини аниқлаш учун B таянчига нисбатан статиканинг мувозанат тенгламасини тузамиз

$$R_a \cdot l - P(l - x) = 0; \quad \text{бундан} \quad R_a = \frac{P(l - x)}{l} = \frac{l - x}{l}. \quad (2.1)$$

Демак, бирлик куч ($P=1$) балка бўйлаб ҳаракатланса, R_a таянч реакциясининг ўзгариши тўғри чизик бўйлаб содир бўлади. Шаклга кўра x нолдан l гача ўзгаради. Тўғри чизикни ўтказиш учун x га қийматлар берамиз:

$$x = 0 \quad \text{бўлса} \quad R_a = 1;$$

$$x = l \quad \text{бўлса} \quad R_a = 0 \quad \text{бўлади.}$$

Шу икки нукта координаталари ёрдамида R_a таянч реакциясининг таъсир чизиғи қурилади (2.1- расм, б).

А таянчига нисбатан тузилган статиканинг мувозанат тенгламасидан R_b реакцияси топилади:

$$\sum M_A = 0, \quad P \cdot x - R_b \cdot l = 0,$$

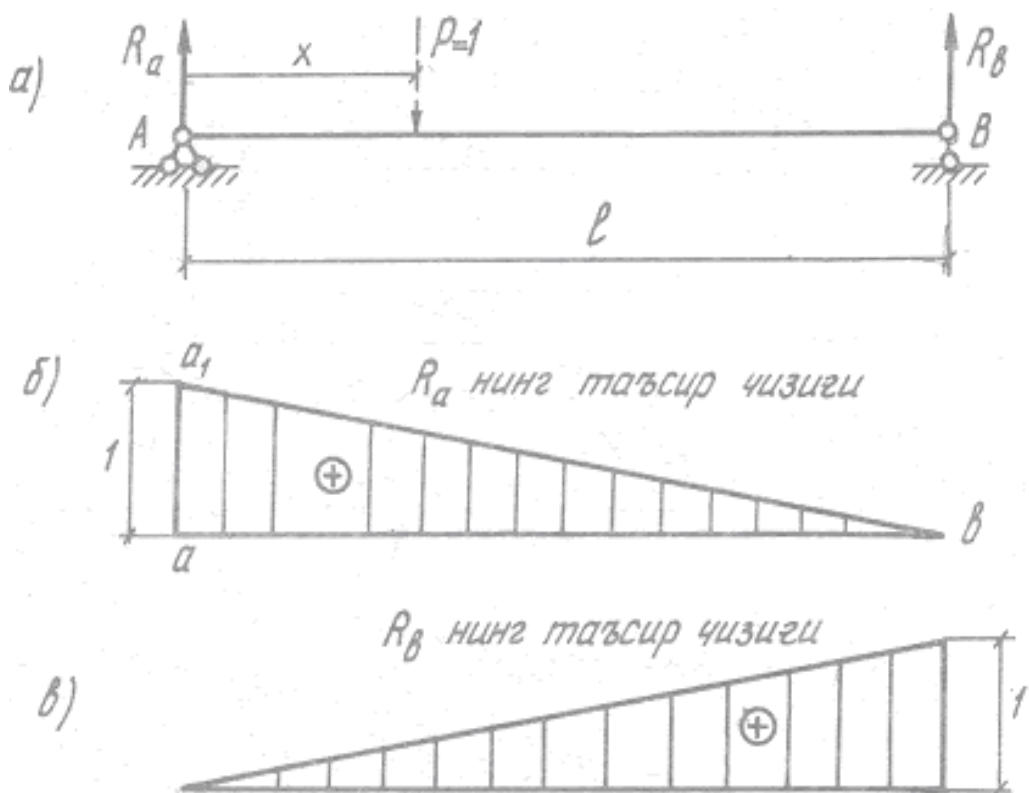
$$R_b = \frac{P \cdot x}{l} = \frac{x}{l}. \quad (2.2)$$

Бу ерда $0 \leq x \leq l$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$x = 0, \quad R_b = 0;$$

$$x = l, \quad R_b = 1 \text{ бўлади.}$$

Демак R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам тўғри чизик тенгламаси орқали қурилар экан (2.1- расм, в).



2.1 – расм

R_a ва R_b таянч реакцияларининг таъсир чизиклари мусбат ишорали бўлиб, ординаталари ўлчамсиз миқдордан иборатдир.

Икки консолли балка учун таянч реакциясининг таъсир чизиқлари

Икки консолли балка учун (2.2- расм) таянч реакцияларининг таъсир чизиқларини куриш оддий балка учун амалга оширилган усуллар ёрдамида бажарилади.

Масалан, балканинг чап таянч реакцияси R_a нинг таъсир чизиғини куриш учун мувозанат тенгламасидан фойдаланиб $R_a = \frac{l-x}{l}$ ни топамиз.

Бу ерда x масофа қуйидаги тарзда ўзгаради:

$$-a \leq x \leq l+b$$

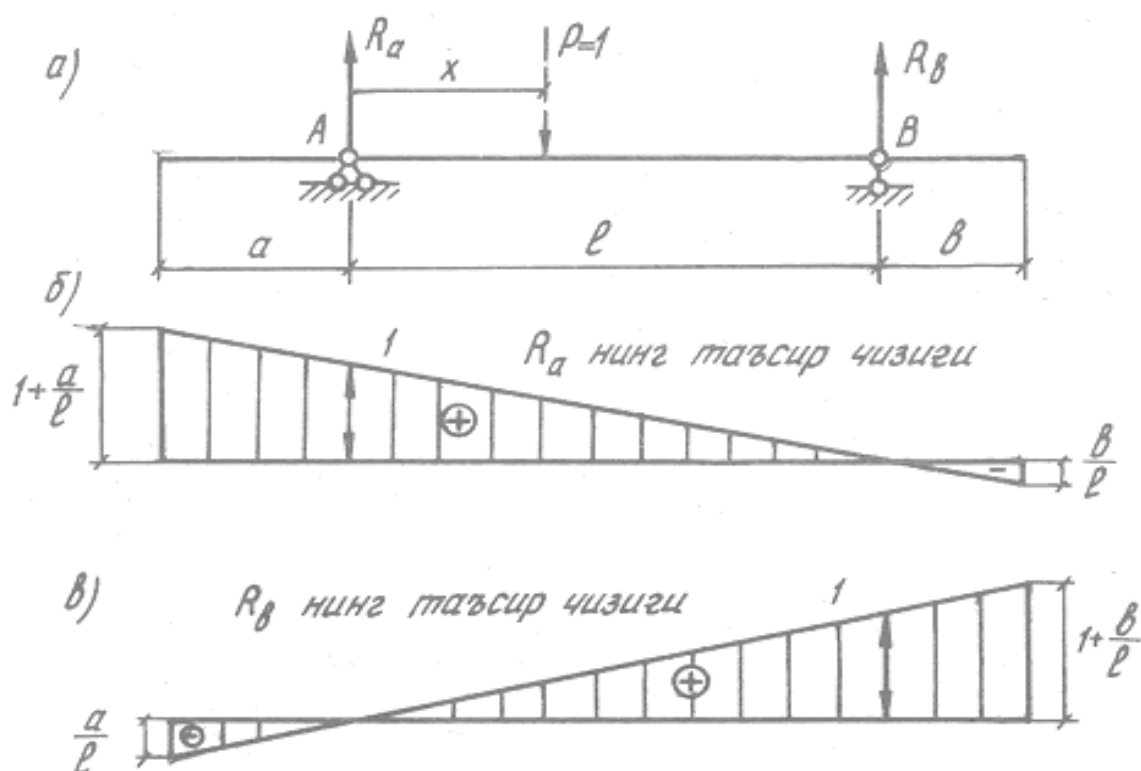
x га қийматлар берамиз:

$$x = -a, R_a = 1 + \frac{a}{l};$$

$$x = a, R_a = 1;$$

$$x = l, R_a = 0;$$

$$x = l+b, R_a = -\frac{b}{l};$$



2.2 – расм

Бу ординаталар ёрдамида қурилган R_a нинг таъсир чизиғи 2.2- расм, б, да ифодаланган. R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам шу тарзда чизилади (2.2, в- расм).

Демак, консолли балка таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари оддий балка таянч реакцияларининг таъсир чизиғига асосланган бўлиб, асосий тўғри чизиқ консол учига давом эттирилар экан.

Оддий ва консол балкаларда эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизиқлари

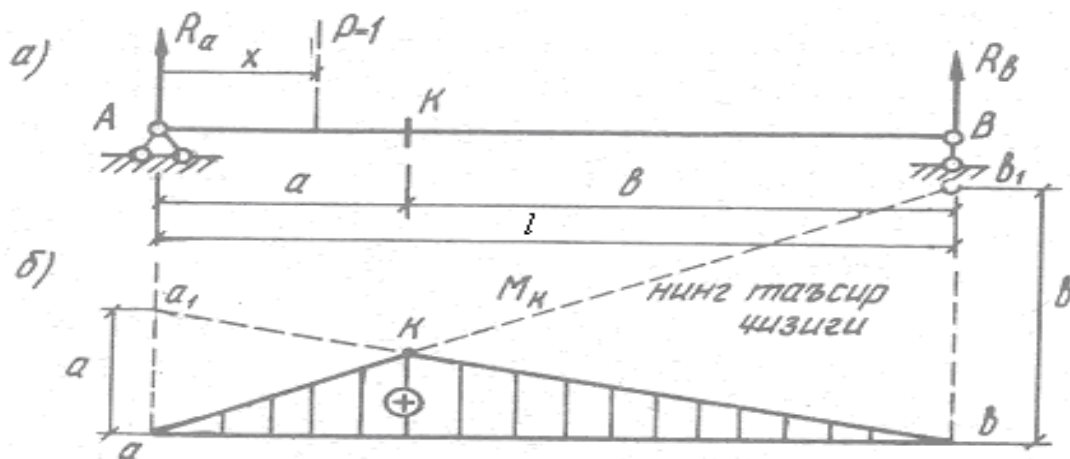
Аввало эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизиқлари оддий балка учун қуриб олинади, кейин консолга давом эттирилади. Одатда, M ва Q нинг таъсир чизиғи бирор кесим учун қурилади. K кесимдаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини қурайлик. Кесимгача бўлган масофалар, 2.3, а- расмда ифодаланган.

Таъсир чизиғини қуришда мусбат ишорали ординаталар ўқдан юқорига, манфий ординаталар эса ўқдан пастга жойлаштирилади.

Бирлик куч K кесимидан ўнгга ҳаракатланса, чап қисм учун мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_k = R_a \cdot a = \frac{l-x}{l} \cdot a, \quad (2.3)$$

Демак, эгувчи моментнинг таъсир чизиғи R_a реакциясига боғлиқ экан, яъни R_a нинг ординаталарини a га кўпайтурсак, M_k нинг таъсир чизиғи келиб чиқар экан.



2.3 – расм

Таъсир чизиғини қуриш учун A таянч йўналиши бўйича абсцисса ўқиға перпендикуляр ҳолатда a масофаси жойлаштирилади, топилган нуқта ўнг таянч остидаги нуқта билан туташтирилади ва шу тўғри чизиққа K кесим проекцияланади. Бу ерда kb масофа эгувчи момент таъсир чизиғининг ўнг чизиғи дейилади (2.3, в – расм).

Агар бирлик куч K кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда кесимнинг ўнг қисми учун мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$M_k = R_b \cdot b = \frac{x}{l} \cdot b \quad (2.4)$$

Бу ерда ҳам эгувчи моментнинг таъсир чизиғи таянч реакцияси R_b га боғлиқдир, яъни R_b нинг ординаталарини « b » га кўпайтурсак, M_k нинг таъсир чизиғи келиб чиқади.

Ҳосил бўлган қийматлар бўйича M_k нинг таъсир чизиғини курамиз (2.3-расм). Бунинг учун R_b таянч реакцияси йўналиши бўйича абсцисса ўқиға перпендикуляр « b » масофа ўлчаб қўйилади, ҳосил бўлган нуқта b чап таянч билан туташтирилади ва шу тўғри чизиққа K кесим проекцияланади. Ҳосил бўлган ak узунлик, эгувчи момент таъсир чизиғининг чап чизиғи дейилади.

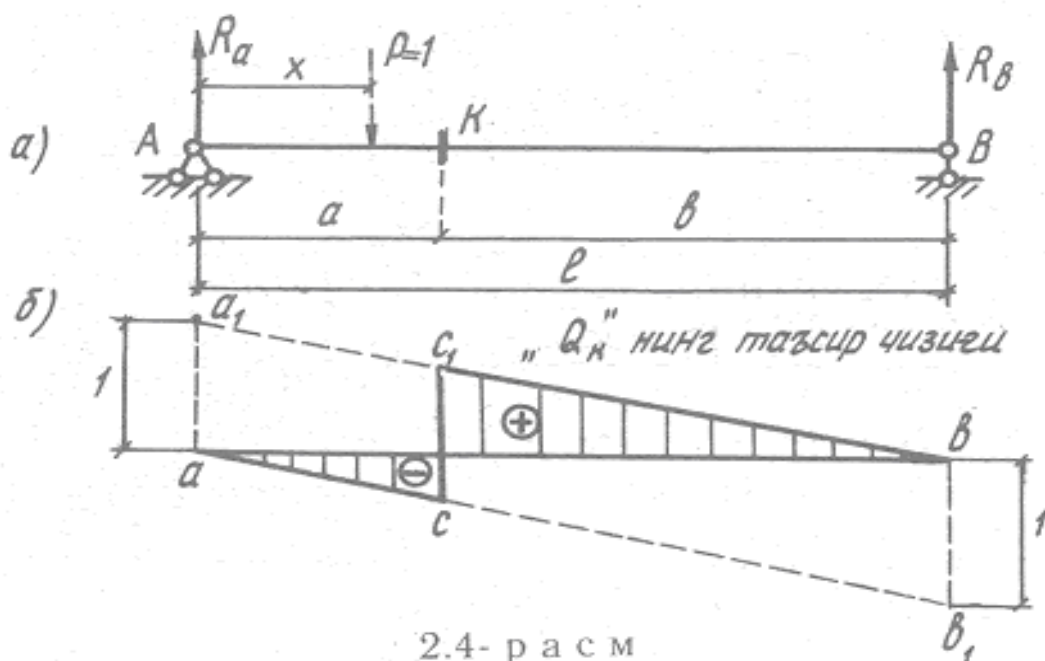
Ҳар икки ўнг ва чап тўғри чизиқлар K кесим остида кесишади, чунки $x = a$ бўлганда, $M_k^{чан} = M_k^{ўнг}$ бўлади.

Шундай қилиб, akb синиқ чизиғи, K кесимидаги эгувчи моментнинг таъсир чизиғи бўлади.

Эгувчи момент таъсир чизиғининг ординаталари узунлик ўлчамида, яъни м (см) да ўлчанади. Эгувчи момент таъсир чизиғининг ташқи кўриниши эгувчи момент эпюраси билан маълум ўхшашликка эга, лекин шунга қарамай булар орасида кескин фарқ бор. Эгувчи момент эпюрасидан фойдаланиб, ташқи кучлар таъсирида истаган кесимда ҳосил бўлган эгувчи моментни топа оламиз. Эгувчи моментнинг таъсир чизиғи орқали эса маълум бир кесимдаги эгувчи моментнинг қийматини топа оламиз, ҳолос.

Энди кўндаланг кучларнинг таъсир чизиғини қуришга ўтамиз.

Балканинг К кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик куч ($P=1$) нинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз (2.4. а – расм).



2.4- р а с м

Биринчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг чап қисмида ҳаракатланади, деб фараз этайлик, у ҳолда ўнг қисм мувозанат тенграмаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum Y = 0, \quad Q_k^{chap} = -R_b = -\frac{x}{l}. \quad (2.5)$$

Иккинчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланмоқда, деб қабул қилинади, у ҳолда чап қисм учун тузилган мувозанат тенграмаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Q_k^{ong} = R_a = \frac{l-x}{l}, \quad (2.6)$$

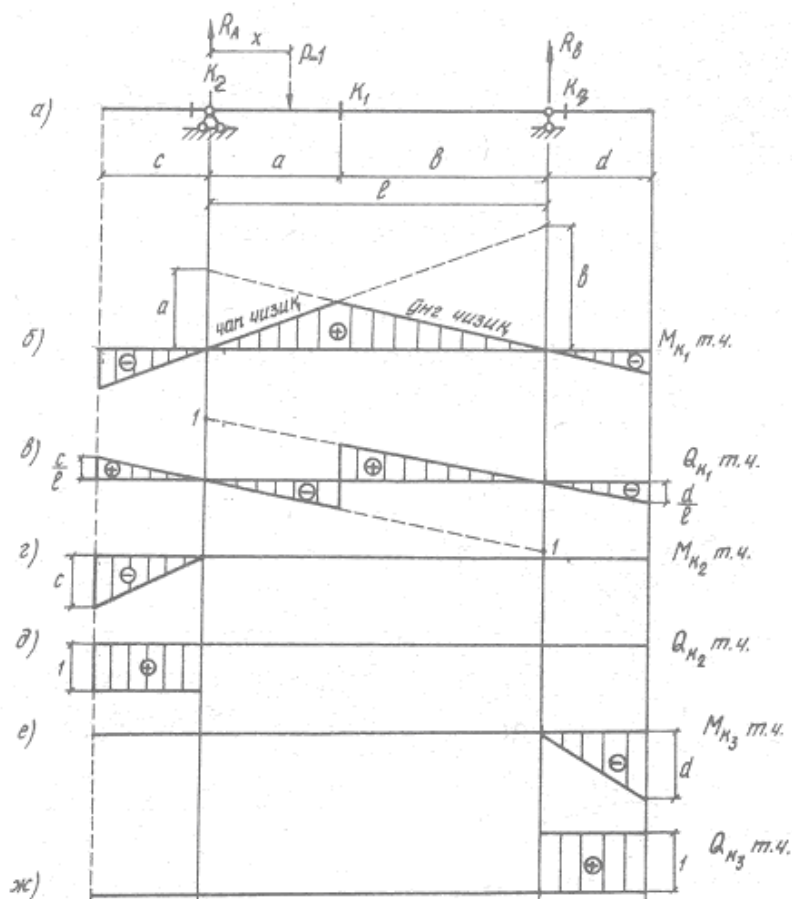
Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун чап таянч остига бирор масштабда мусбат бирлик ординатани жойлаштириб, уни ўнг таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз, сўнгра ўнг таянч остига манфий бирлик ординатани жойлаштириб, уни чап таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз.

Шу тарзда бир-бирига параллел бўлган чап ва ўнг тўғри чизикларга эга бўлдиқ. Чап тўғри чизик чап таянчдан K кесимгача, ўнг тўғри чизик эса K кесимидан ўнг таянчгача бўлган ораликларда Q_k нинг ўзгаришини ифодалайди (2.4- расм, б).

Штрихланган юза Q_k нинг *таъсири чизиги* деб аталади.

Кўндаланг кучнинг таъсир чизиклари таянч реакцияларининг таъсир чизиклари каби ўлчамсиз бўлади.

Консол балканинг K кесими учун ички кучлар (M_k ва Q_k нинг) таъсир чизиклари қурилиши талаб қилинса, у ҳолда иш оддий балкадагига ўхшаш амалга оширилади. Бунинг учун балканинг таянч оралиғига M_k ва Q_k нинг таъсир чизиги қурилади, сўнгра чап тўғри чизик чап консол учигача, ўнг тўғри чизик эса ўнг консол учигача давом эттирилади (2.5- расм, а, б).



2.5-расм

Агар кесим балканинг консол қисмида берилса, у ҳолда эғувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизиклари қуйидаги тартибда қурилади:

K_2 кесими балканинг чап консолида жойлашган бўлсин (2.5- расм, а). M_{K_2} нинг таъсир чизигини қуриш учун бирлик юкнинг икки ҳолатини қараб чиқамиз.

1. Бирлик куч ($P=1$) кесимнинг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда

$$\begin{aligned} M_{K_2}^{chap} &= -P(c - x_1) = -(c - x_1), \\ x_1 &= 0, \quad M_{K_2}^{chap} = -c, \\ x_1 &= c, \quad M_{K_2}^{chap} = 0 \text{ бўлади.} \end{aligned}$$

Чап тўғри чизикни ўтказиш учун $x_1=0$ нуқтасига c ординатасини маълум масштабда жойлаштирамиз, сўнгра уни $x_1=c$ кесимидаги ноль нуқта билан бирлаштирамиз (2.5- расм, г).

Бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, $M_{K_2}^{yuk} = 0$ бўлади. Демак, ўнг тўғри чизик нолга тенг бўлиб, балка ўқининг устида ётади. M_{K_2} нинг чап ва ўнг тўғри чизиклари K_2 кесими остида кесишади.

Q_{K_2} нинг таъсир чизигини қуриш учун ҳам бирлик юкнинг икки ҳолатини текширамиз. Бирлик куч K_2 кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда консол қисмининг мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$Q_{K_2}^{chap} = -P = -1,$$

Q_{K_2} нинг чап тўғри чизиги консол учидан балканинг абсцисса ўқига параллел бўлади (2.5- расм, д).

Қўзғалувчан бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, у ҳолда чап қисмининг мувозанат тенгламаси $Q_{K_2}^{yuk} = 0$ бўлади.

Демак, ўнг тўғри чизик нолга тенг бўлиб, балканинг ўқи устида ётади (2.5-расм, д). Балканинг ўнг консол қисмида жойлашган K_3 кесими учун M_{K_3} ва Q_{K_3} ларнинг таъсир чизиклари юқорида баён этилган тартибда амалга оширилади (2.5- расм, ж).

2.3. Зўриқишлар қийматини таъсир чизиклари ёрдамида аниқлаш

Шу бобнинг бошланғич қисмида таъсир чизикларини қуриш тартиби билан танишиб ўтдик. Энди шу таъсир чизиклари ёрдамида зўриқишларнинг

(яъни эгувчи момент, кўндаланг куч ва таянч реакцияларининг) қийматини аниқлаш масаласига тўхталамиз.

Кўзгалмас юкларнинг иншоотга йиғиқ, ёйиқ ва жуфт куч тариқасида қўйилиши бизга маълум. Кучларнинг ҳар қайси турини алоҳида равишда кўриб чиқамиз.

Иншоотга йиғиқ кучлар тизими қўйилган ҳол

Балкага P_1 кучи таъсир этади, дейлик. Бу ҳолда исталган зўриқиш S нинг қиймати мазкур куч билан шу куч йўналишида таъсир чизиғидан олинган ординатанинг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни зўриқишнинг қиймати $P_1 \cdot y_1$ бўлади.

Агар иншоотга кучлар тизими қўйилган бўлса (2.6- расм, а) кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасига кўра тўлиқ зўриқишнинг қиймати қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

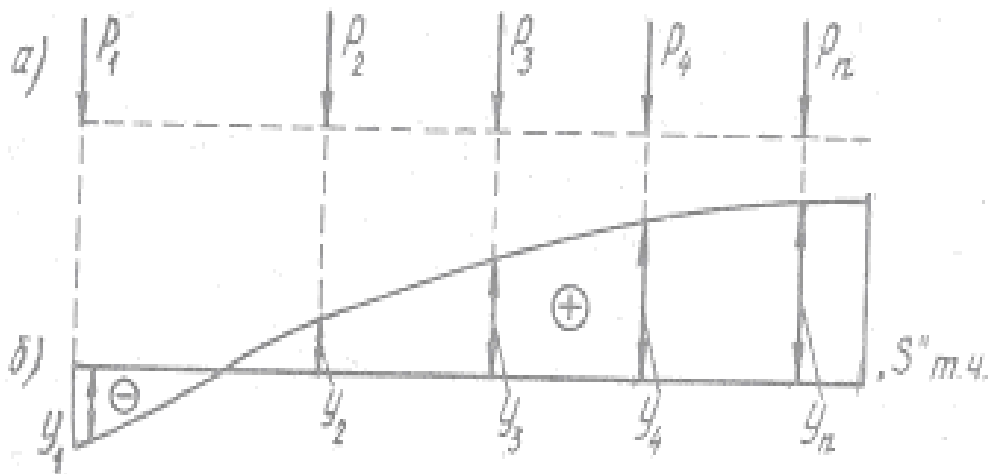
$$S = -P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + P_4 \cdot y_4 + \dots + P_n \cdot y_n,$$

$$\text{ёки } S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i \quad (2.7)$$

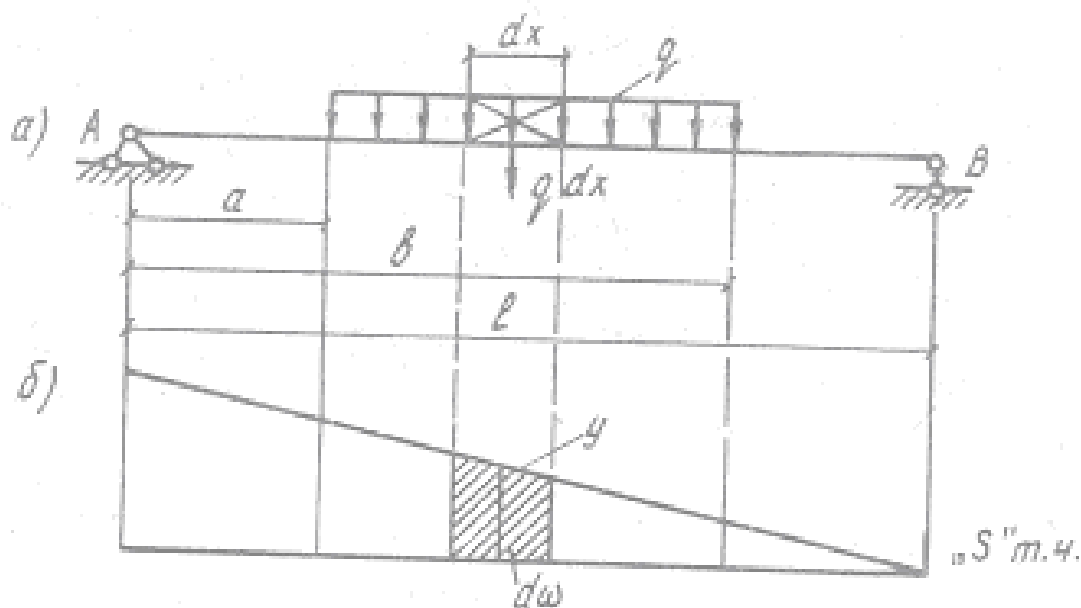
Бу ерда y_i — таъсир чизиғида P_i куч йўналишидаги ордината.

Иншоотга ёйиқ юк қўйилган ҳол

Иншоотга қўйилган ёйиқ юкдан узунлиги dx бўлган кичкина бўлакча ажратамиз ва бунга мос келган ёйиқ юкни элементар йиғиқ куч $q(x)dx$ орқали ифодалаймиз (2.7- расм).



2.6 - расм



2.7 - расм

Элементар кучдан ҳосил бўлган элементар зўриқиш (2.7) формулага асосан қуйидагича аниқланади:

$$dS = q \cdot dx \cdot y \quad (a)$$

Зўриқишнинг тўлиқ қийматини аниқлаш учун (a) тенгликни интеграллаймиз

$$S = \int_a^b q \cdot dx \cdot y = q \cdot \omega \quad (б)$$

Бу ерда q ёйиқ юк интенсивлиги;

ω — таъсир чизиғида ёйиқ юк қўйилган ораликка мос келувчи юза.

Иншоотга жуфт кучлар қўйилган ҳол

Моментдан ҳосил бўлган зўриқишни аниқлаш учун момент икки жуфт йиғиқ кучларга ажратилади (2.8- расм):

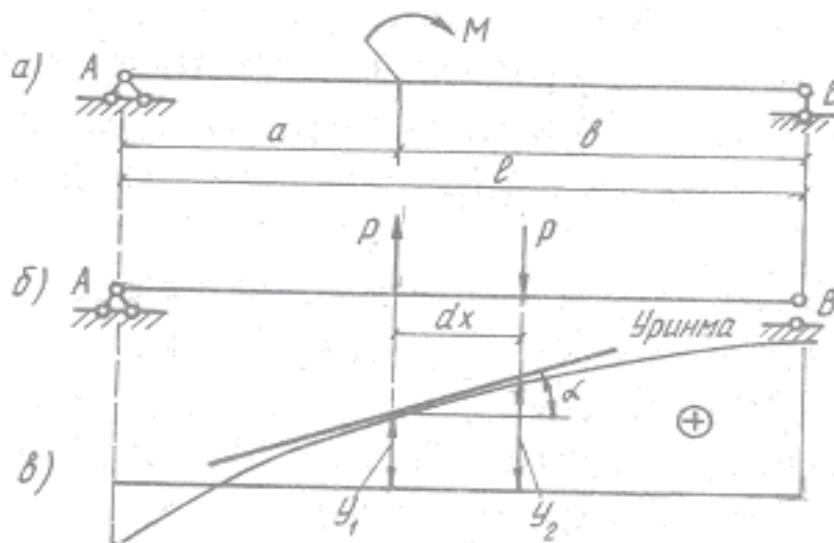
$$M = P \cdot dx.$$

Йиғиқ кучлар таъсирида вужудга келадиган зўриқиш (2.7) формулага асосан аниқланади:

$$S = P \cdot y_2 - P \cdot y_1 = P(y_2 - y_1) = P \cdot d \times t g \alpha = M \cdot t g \alpha,$$

$$S = M \cdot t g \alpha.$$

Бу ерда α — момент қўйилган нуқтада таъсир чизиғига ўтказилган уринма билан абсцисса ўқи орасидаги бурчак.



2.8- расм

Агар иншоотга бир йўла йиғиқ куч, ёйиқ куч ва жуфт кучлар қўйилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган зўриқишлар миқдори таъсир чизиғи ёрдамида умумий ҳолда қуйидагича аниқланади:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot tq \alpha_i \quad (2.8).$$

Бу формуладан фойдаланишда қуйидаги ишора қоида­сига амал қилинади:

1. Юклар юқоридан пастга йўналган бўлса, улар мусбат деб қабул қилинади.
2. Момент соат стрелкаси бўйича йўналса, мусбат олинади.
3. Таъсир чизиғидан олинган ордината y_i ва юза ω_i ўз ишораси бўйича олинади.
4. Агар α бурчак соат стрелкасига тескари йўналишда ортиб борса, мусбат бўлади.

2.4. Юк тугунлар орқали узатилганда таъсир чизиқларини чизиш

Бинокорликда шундай иншоотлар учрайдики, ташқи юклар асосий балкага бевосита қўйилмай, балки бошқа ёрдамчи балкалар орқали таъсир этади (2.9- расм).

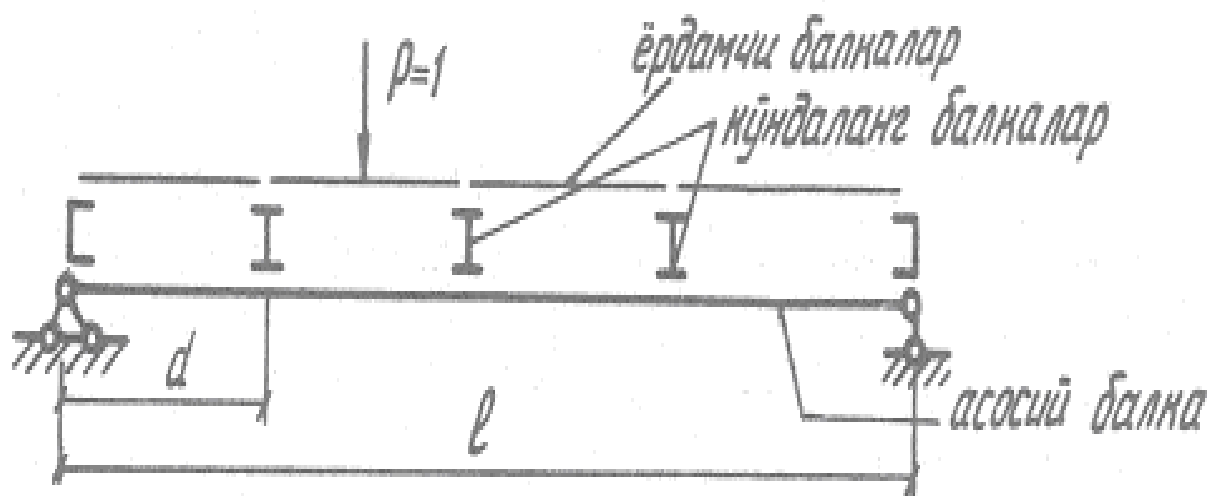
Шаклдан кўриниб турибдики, ташқи юклар ёрдамчи бўйлама балкачалар бўйлаб ҳаракатланмоқда. Бундай системаларда ташқи юклар асосий балкага тугунлар орқали узатилади.

Кўндаланг балканинг асосий балкага таянган жойи тугун, икки қўшни тугун оралиғи панел узунлиги деб аталади ва d ҳарфи билан белгиланади (2.9- расм).

Энди ташқи юк ёрдамчи балка бўйлаб ҳаракатланиб, асосий балкага тугунлар орқали таъсир этишини кўриб ўтамиз (2.10- расм).

Ҳаракатланувчи бирлик куч 2 — ва 3 — тугунлар орасида жойлашган дейлик: агар куч 2 — таянчдан x масофада ва 3 — таянчдан $d - x$ масофада жойлашган бўлса, у ҳолда унинг иккинчи ва учинчи тугунлардаги ташкил этувчи қийматлари қуйидаги формула билан ифодаланади (2.10- расм):

$$P_2 = 1 \cdot \frac{d - x}{d} \text{ ва } P_3 = 1 \cdot \frac{x}{d}.$$



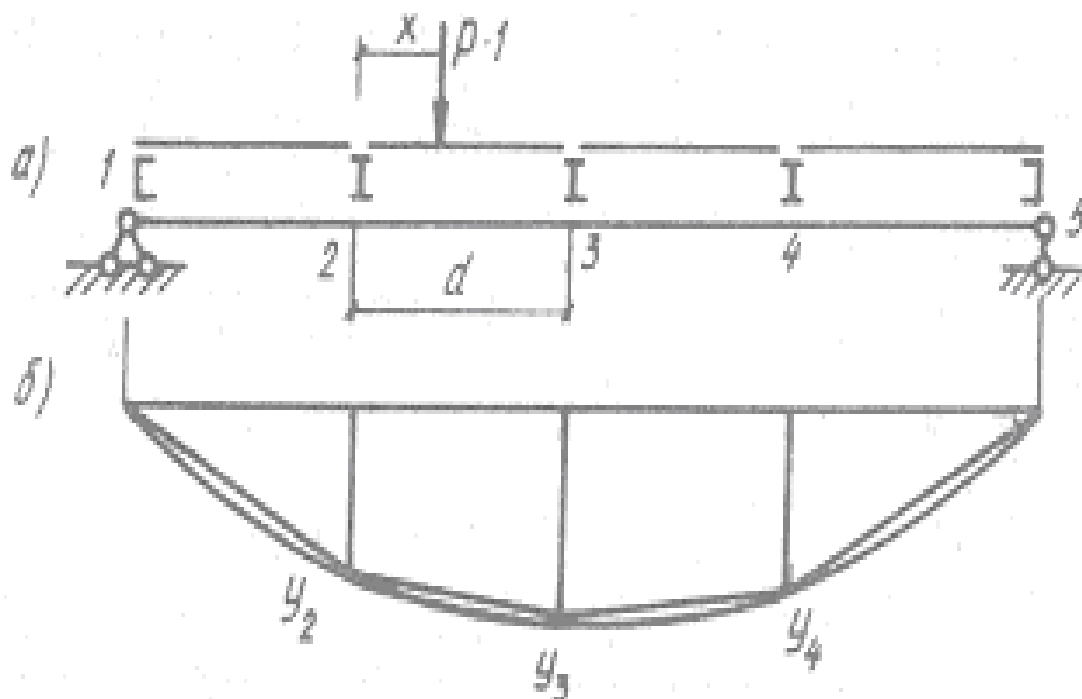
2.9 - расм

2.10- расм, б да ифодаланган эгрилик бирлик кучнинг асосий балка бўйлаб ҳаракатланишидан ҳосил бўлган таъсир чизиғи десак, у ҳолда

$$S = P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 = \frac{d-x}{d} \cdot y_2 + \frac{x}{d} \cdot y_3 \quad (2.9)$$

бўлади.

Зўриқиш S нинг қийматини аниқлаш учун тузилган бу тенглик тўғри чизик тенгламасини ифодалайди, шу сабабли y_2 билан y_3 ўзаро тўғри чизик ёрдамида туташтирилади (2.10- расм, б).

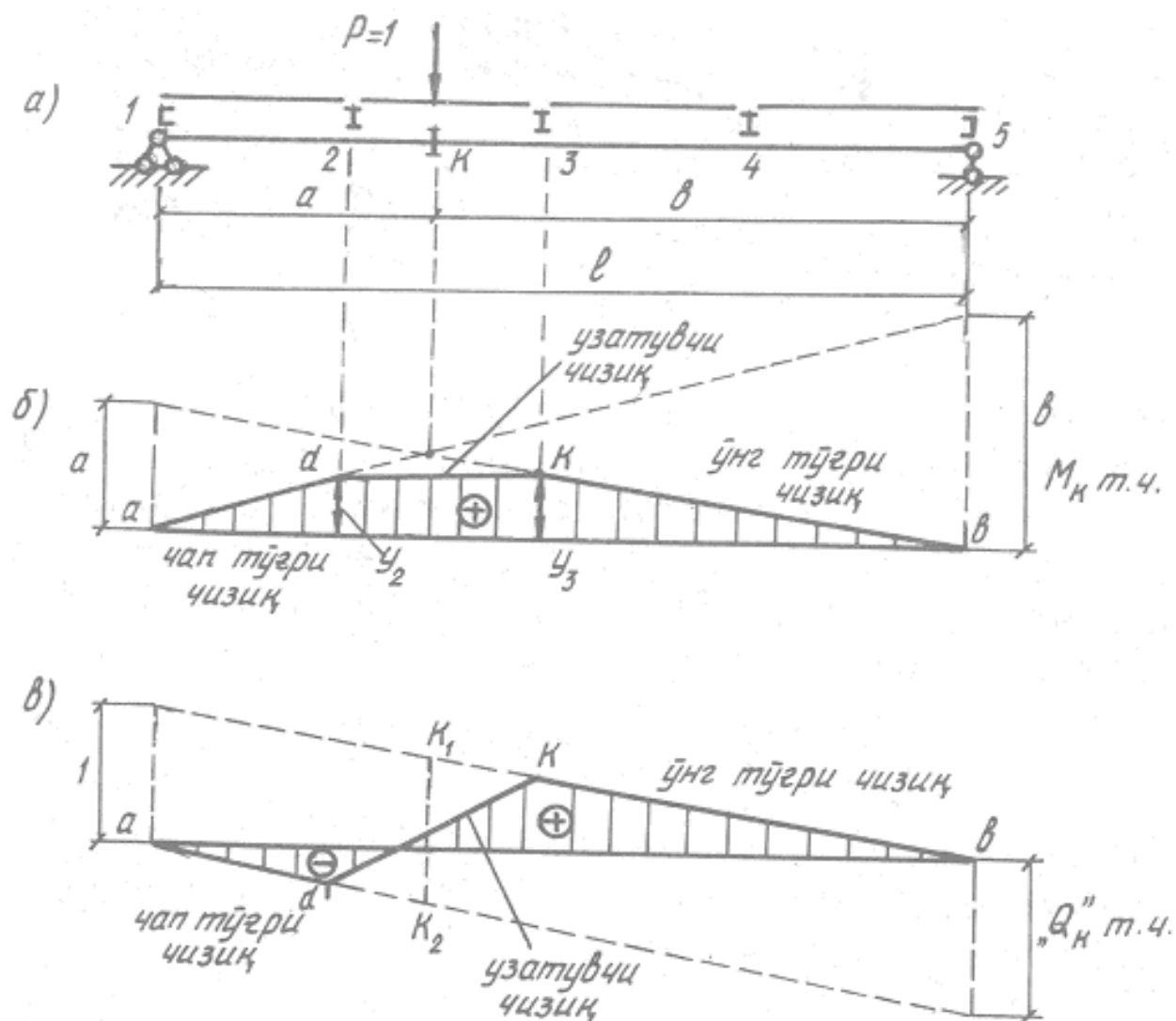


2.10 – расм

Демак, юк асосий балкага тугунлар: орқали таъсир этганда, бирор кесимнинг таъсир чизиғини куриш учун, аввало, ёрдамчи балкаларни эътиборга олмасдан, балки оддий балканинг шу кесими учун тегишли таъсир чизиклари курилади. Кейин чап ва ўнг тугунлар тегишли тўғри чизикларга проекцияланади. Топилган нукталар тўғри чизик ёрдамида туташтирилади (2.11- расм, а, б, в).

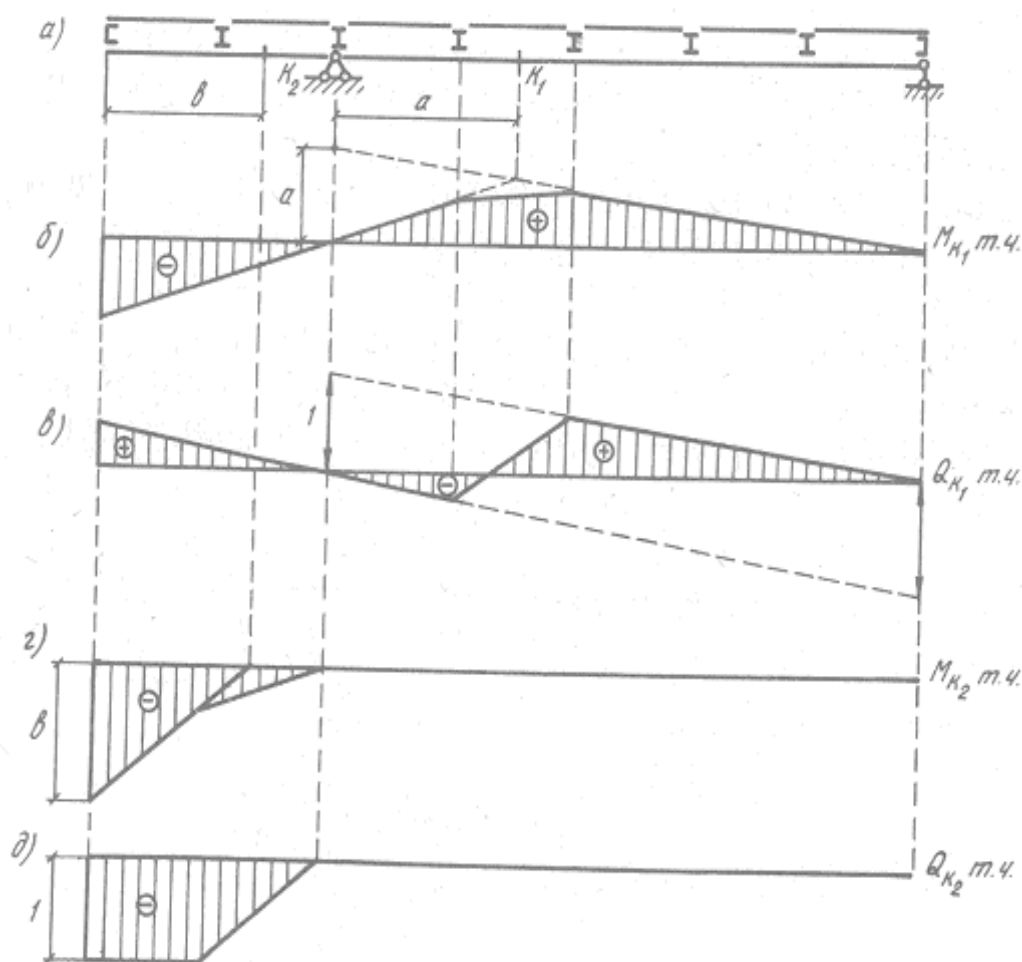
Бу расмда akb асосий балканинг K кесими учун қурилган эгувчи момент таъсир чизиғи; $adkb$ юк тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун эгувчи момент таъсир чизиғи (2.11- расм, б); ak_2k_1b — оддий балканинг K кесими учун қурилган қирқувчи кучнинг таъсир чизиғи (2.11- расм, в); $adkb$ — юк

асосий балкага тугунлар орқали таъсир этганда ҳосил бўлган қирқувчи кучнинг таъсир чизиғи (2.11- расм, в).



2.11 - расм

2.12- расмда консолли балкага ташқи юк тугунлар орқали таъсир этган хол учун M ва Q нинг таъсир чизиқлари тасвирланган. 2.12- расм, a да берилган балка акс этган; b ва v да K_1 кесим учун, z ва d да эса K_2 кесим учун M ва Q нинг таъсир чизиқлари чизилган.



2.12 - расм

Шундай қилиб, юк асосий балкага тугунлар орқали узатилганда, зўриқишларнинг таъсир чизиклари қуйидаги тартибда қурилади:

1. Зўриқишларнинг таъсир чизиғи, аввало, юк тугунлар орқали узатилишини эътиборга олмаган ҳолда асосий балка учун қурилади.

2. Кесимнинг чап ва ўнг қисмида жойлашган қўшни тугунлар тегишли чизикларга проекцияланади ва нуқталар ўзаро туташтирилади.

Ҳосил бўлган график юклар асосий балкага тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун қурилган таъсир чизиғи бўлади.

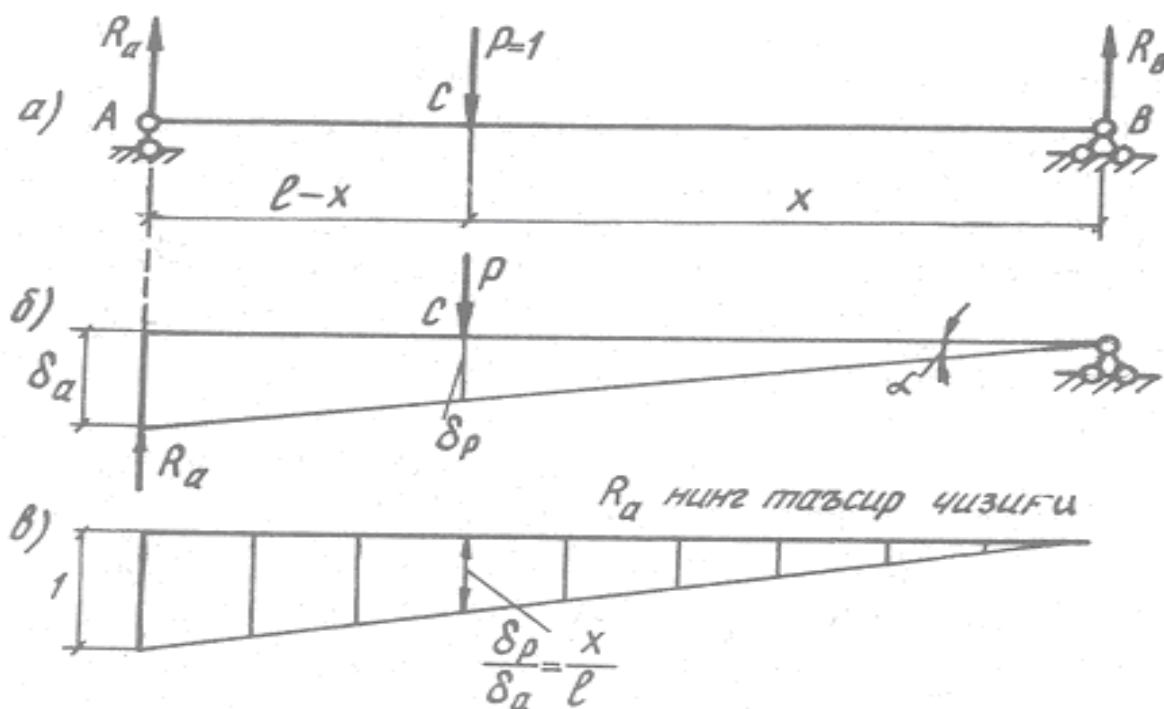
2.5. Таъсир чизиклари чизишнинг кинематик усули

Таъсир чизикларини кинематик усулда қуришда қўчишлар эпюрасидан фойдаланилади. Бунинг учун асосий системада зўриқиши изланаётган

боғланиш ташлаб юборилади ҳамда мумкин бўлган (жоиз) кўчишлар коидасидан фойдаланилади. Бу койдага кўра, агар система мувозанат ҳолатда бўлса, ҳар қандай кичик жоиз кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарадиган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

Мисол тариқасида оддий балканинг R_a реакцияси учун кинематик усулда таъсир чизиғи курамиз (2.13- расм, а). А таянчини ташлаб юбориб, ўрнига R_a реакция кучини қўямиз. AB балка чексиз кичик бурчак α га кўчди дейлик. Бурчак кичик бўлганлиги сабабли балка ўқи кўчишларини вертикал деб қабул қилса бўлади. P кучи қўйилган нуқтанинг кўчишини δ_p , R_a кучи қўйилган нуқтанинг кўчишини δ_a деб белгилаймиз. Жоиз кўчишлар коидасига мувофиқ балкага таъсир этувчи кучлар бажарган иш қуйидагича бўлади: (куч йўналиши билан кўчиш йўналиши қарама-қарши бўлганлиги сабабли R_a кучи бажарган ишнинг ишораси манфий олинган):

$$P \cdot \delta_p - R_a \cdot \delta_a = 0.$$



2.13. расм

$P=1$ эканлигини эътиборга олсак, (а) дан

$$R_a = 1 \cdot \frac{\delta_p}{\delta_a} \quad (б)$$

келиб чиқади. Бирлик куч қўзғалувчан бўлганлиги учун δ_p кўчиш ҳам ўзгарувчан бўлади. δ_a эса ўзгармас миқдордир.

Бинобарин, R_a реакциясининг таъсир чизиғи δ_p кўчишнинг эпюраси тарихида ҳосил қилиниши мумкин. Бунда таъсир чизиғининг ординаталари кўчиш ординаталаридан δ_a мартаба кичик бўлади (2.13- расм, в).

Кинематик усулда қурилган таъсир чизиғининг статик усулдаги шакли билан бир хил эканлиги қуйидаги ифодадан куришиб турибди (2.13- расм. б):

$$\delta_p = x \cdot tq\alpha; \delta_a = l \cdot tq\alpha.$$

Буларни (б)га қўйсак, $R_a = \frac{x}{l}$ — келиб чиқади.

Навбатдаги мисолда (2.14- расм, а) балканинг K кесимидаги эгувчи момент таъсир чизиғини кинематик усулда қурамиз. Балканинг K кесимида шарнир киритамиз, натижада балканинг битта боғланиши йўқолади. Йўқолган боғланишни момент M_k билан алмаштирамиз (2.14- расм, б).

K шарнири чексиз кичик масофа δ_k га кўчди дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида M_k ва P кучлари қуйидаги ишни бажаради:

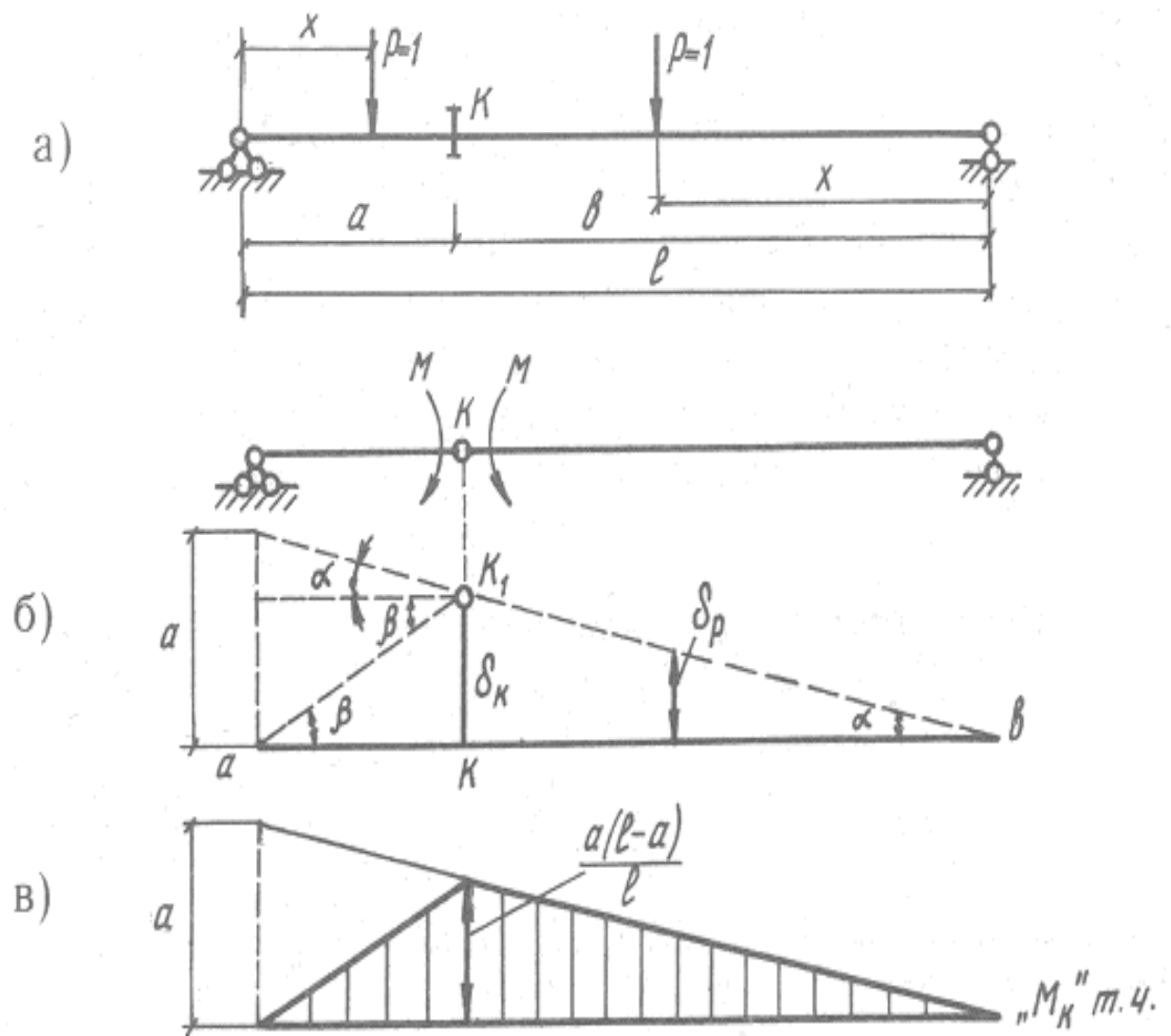
$$P \cdot \delta_p - M_k \alpha - M_k \cdot \beta = 0 \quad (в)$$

M_k нинг йўналиши бурилиш бурчаклари α ва β нинг йўналишига қарама-қарши бўлганлиги сабабли ишораси манфий олинди. (в) ифодасидан

$$M_k = \frac{P \cdot \delta_p}{\alpha + \beta} = \frac{1 \cdot \delta_p}{\delta_{xx}} \quad (г)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\begin{aligned} \delta_p &= \frac{\delta_k}{l-a} \cdot x \\ \delta_{xx} &= \frac{\delta_k}{l-a} + \frac{\delta_k}{a} \end{aligned} \quad (д)$$



2.14- расм

(г) ифодасидан кўринадики, M_K нинг таъсир чизиғи ҳам вертикал кўчишлар δ_P эпюраси каби бўлиб, қийматига кўра δ_{xx} маротаба кам бўлар экан (2.14-расм, в).

(д) ифодани (г) га қўйсак,

$$M_K = \frac{ax}{l}$$

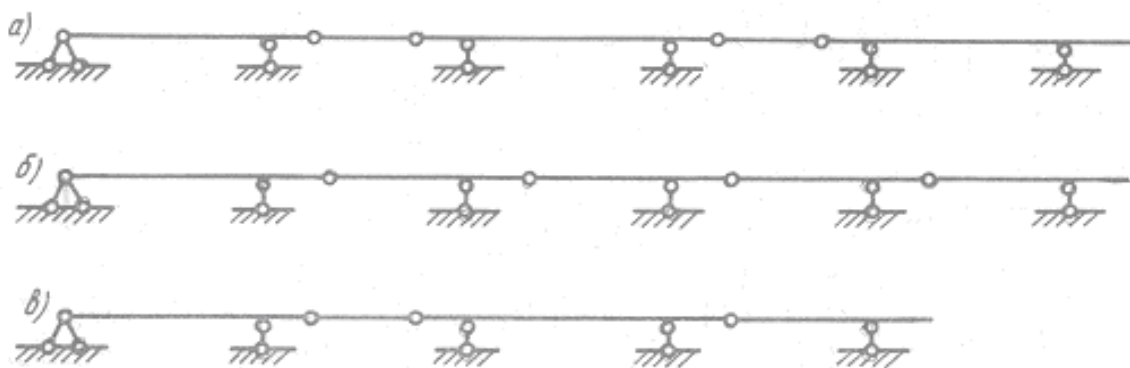
келиб чиқади. Бу эса статик усулдаги ўнг тўғри чизикнинг тенгламасидир.

3- БОБ

КЎП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР

3.1. Умумий маълумотлар

Кўп оралиқли статик аниқ балкалар бир оралиқли консолли балкаларни шарнирлар воситасида бириктириш йўли билан ҳосил қилинади (3.1- расм). Кўп оралиқли шарнирли балкалар ёндош оралиқларни ёпишда қўлланилади. Бундай оралиқларни ёпишда кетма-кет жойлашган бир оралиқли балкалардан фойдаланса бўлмайдами, деган савол туғилиши табиий. Тўғри, назарий ва амалий жиҳатдан фойдаланса бўлади. Аммо иқтисодий жиҳатдан мақсадга мувофиқ эмас. Чунки бир хил юк таъсирида бир оралиқли балкаларда кўп оралиқли балкаларга нисбатан кўпроқ зўриқиш ҳосил бўлади, демак кўпроқ материал сарф бўлади, конструкция вазминлашади. Кўп оралиқли шарнирли балкалар статик аниқ бўлганликлари сабабли ҳароратнинг ўзгариши ёки таянчларнинг чўкиши натижасида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлмайди. Бу эса унинг афзаллик томонлари ҳисобланади.



3.1 – расм

Кўп оралиқли балкаларда шарнирлар бўлмаса, система статик ноаниқ узлуксиз балкаларга айланиб қолади. Уларни бир-биридан фарқлаб турадиган элемент шарнирдир. Узлуксиз балкалар ҳақида дарсликнинг 8-бобида муфассал маълумотлар берамиз. Бу бобда эса кўп оралиқли шарнирли балкалар билан танишиб чиқамиз. Шарнирли балкани узлуксиз балкага

қиёслаб, уни узлукли балка деб атаса ҳам бўлади. Сабаби шуки, узлуксиз балкалар бутун яхлит конструкциядан иборат, шарнирли балкалар шарнир қўйилган ерда узилади. Шарнирнинг схематик тасвири 3.2 - расмда берилган.



3.2- расм

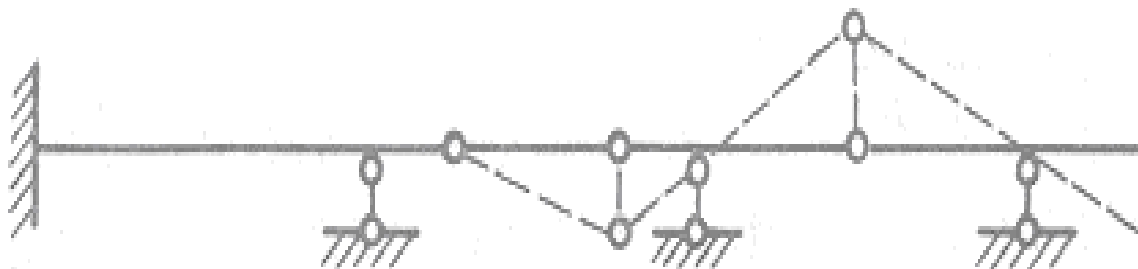
Кўп ораликли балкани статик аниқ системага айлантириб берадиган элемент ҳам шарнирдир. Демак, шарнирлар сонини шундай аниқлаш керакки, ҳосил бўлган система статик аниқ, геометрик ўзгармас бўлсин. Қуйидаги формула ёрдамида аниқланган шарнирлар сони юқоридаги талабларни қондиради:

$$\boxed{III = C_T - 3} \quad (3.1)$$

Бу ерда C_T — таянч стерженлари сони;

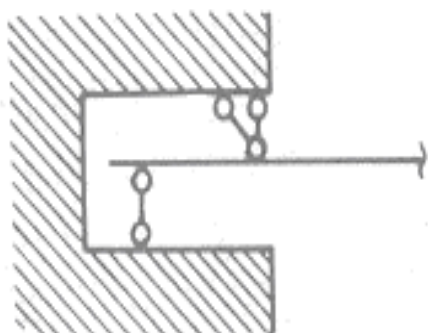
3 — статика тенгламалари сони.

Шарнирлар сонини ушбу формула билан аниқланиши зарурий, аммо етарли шарт эмас. Статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун шарнирларни балка бўйлаб тўғри жойлаштириш талаб этилади. 3.3 – расмда тасвирланган система шарнирларнинг нотўғри жойлаштирилишига мисолдир.



3.3- расм

Бу балкадаги шарнирлар сони талаб даражасидадир, яъни система геометрик ўзгармас бўлиши учун $\Pi = 6 - 3 = 3$ донга шарнир қўйилиши талаб этилади. Бироқ ана шу учта шарнир балкада нотўғри жойлаштирилган. Шунинг учун у геометрик ўзгарувчан система бўлиб қолган. Агар иккинчи ораликдаги икки шарнирдан бири биринчи ораликқа кўчирилса, система геометрик ўзгармас ҳолга келади. Шунини ҳам эслатиб ўтиш керакки, стерженлар сонини аниқлашда шарнирсиз қўзғалмас таянчнинг стерженлари сони $C_T = 3$ деб қабул қилинган (3.4- расм).



3.4- расм

Битта ораликка учта шарнир жойлаштириш ҳам нотўғридир, чунки бунда оний ўзгарувчан система ҳосил бўлади. Шарнирларни тўғри жойлаштиришнинг уч хил усули бор:

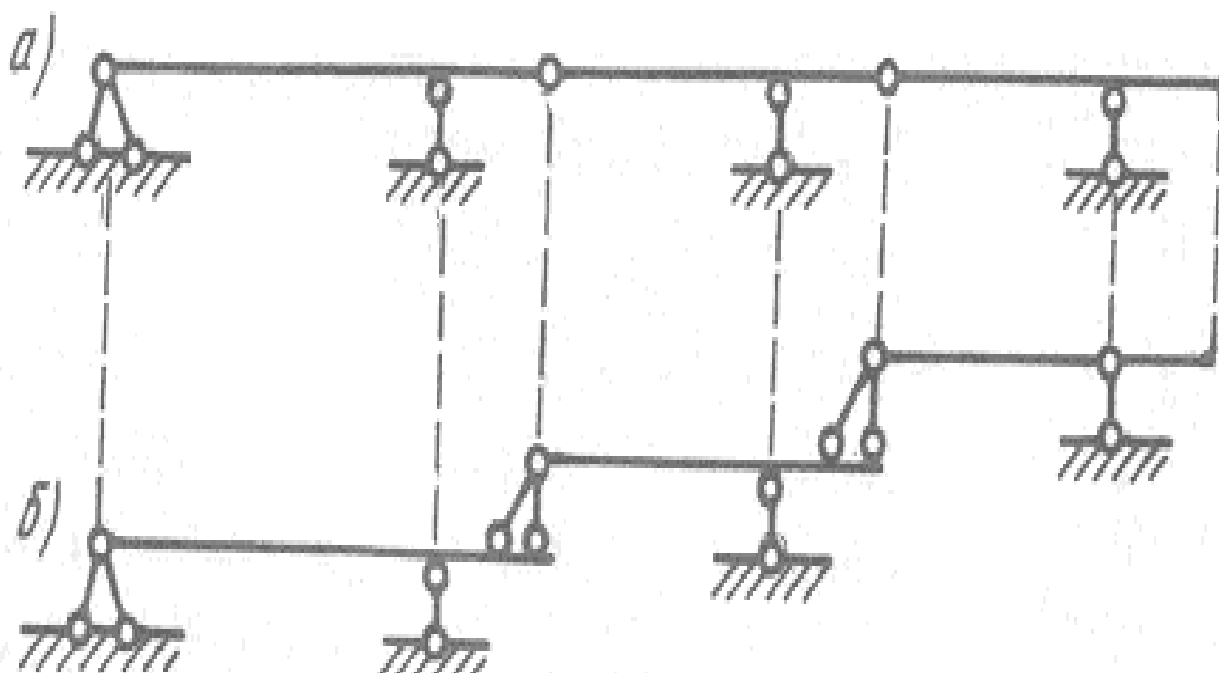
- а) шарнирларни иккинчи ораликдан бошлаб жуфт жойлаштириш (3.1- расм, а);
- б) шарнирларни (иккинчи ораликдан бошлаб) якка тартибда жойлаштириш (3.1-расм, б);
- в) юқоридаги икки усулга асосланган аралаш усул (3.1- расм, в), яъни шарнирларни жуфт ва якка тартибда жойлаштириш.

Жуфт шарнирлар иккинчи ораликдан бошлаб оралик оша қўйилади. Якка шарнирлар бирорта ораликдан бошқа ҳар бир ораликка биттадан қўйиб чиқилади. Жуфт шарнирнинг икки ёни шарнирсиз оралик бўлиши лозим, акс ҳолда система геометрик ўзгарувчан бўлиб қолади.

Кўп оралиқли балканинг геометрик ўзгармаслиги тўғрисида тўлароқ тасаввурга эга бўлиш мақсадида қаватлар схемаси қурилади. Қаватлар схемаси балканинг алоҳида элементлари орасидаги боғланишни ўзида акс эттиради.

3.5 - расмда тасвирланган балканинг геометрик ўзгармаслигини унинг қаватлар схемаси (3.5- расм, б) орқали таҳлил этайлик. Қаватлар схемасида шарнирлар балкаларни туташтирувчи шарнирли қўзғалмас таянчлар билан

алмаштирилади. Кўп оралиқли балка учта бир оралиқли консолли балкаларнинг йиғиндисидан ташкил топганлиги қаватлар схемасидан кўриниб турибди. Ҳар қайси оддий балка — геометрик ўзгармасдир.



3.5- расм

Геометрик ўзгармас оддий балкалар бир-бири билан шарнирлар ёрдамида уланган. Шарнирлар балкаларнинг горизонтал йўналишда кўзғалишига йўл бермайди. Балкаларнинг вертикал йўналишдаги кўзғалмаслиги таянч стерженлари орқали таъминланади. Шуларга асосланиб, берилган кўп оралиқли балка геометрик ўзгармас система экан, деган хулосага келамиз.

Қаватлар схемаси икки хил балкалардан ташкил топади: асосий ва иккинчи даражали балкалар.

Асосий балкалар ўзига қўйилган юклардан ташқари иккинчи даражали балкаларга қўйилган юкларни ҳам (тўлалигича ёки қисман) қабул қилади. Асосий балкаларга таяниб турувчи балкалар иккинчи даражали (осма) балкалар дейилади. Иккинчи даражали балка синса, асосий балканинг ишига путур етмайди. Асосий балка синса, осма балка ҳам қулаб тушади.

Қаватлар схемасида асосий балка биринчи қаватда жойлашади (3.5-расм, б да чапдан биринчи балка). Осма балкалар асосий балканинг устига жойлашади (3.5- расм, б да чапдан иккинчи ва учинчи балкалар). Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш лозимки, ўртадаги балка чапдаги балкага нисбатан иккинчи даражали, ўнгдаги балкага нисбатан асосий балка ҳисобланади.

3.2. Кўп ораликли статик аниқ шарнирли балкаларни аналитик усулда ҳисоблаш

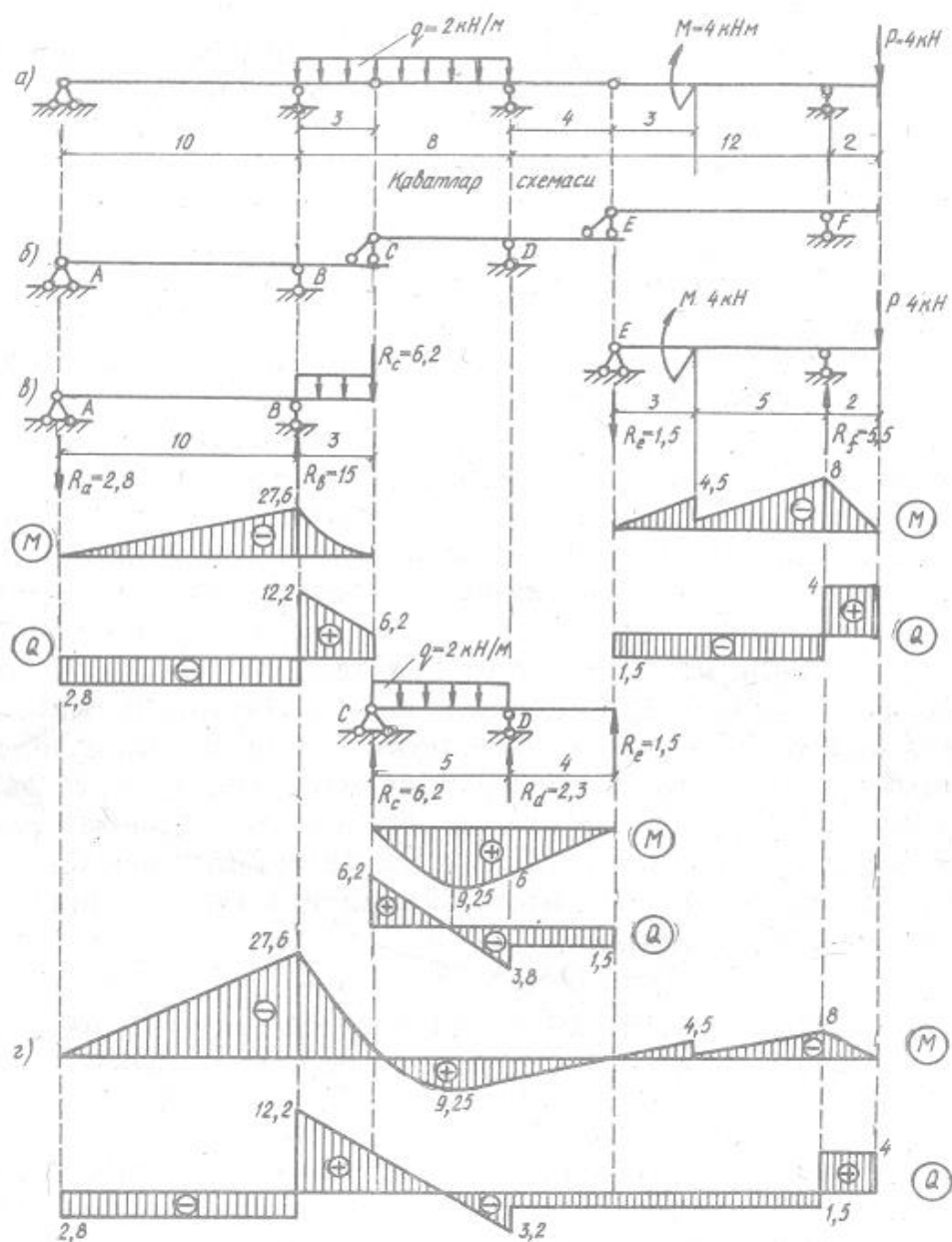
Кўп ораликли шарнирли балкаларнинг ҳисоби уларнинг эгувчи моментлар ва кўндаланг кучлар эпюраларини қуришдан иборатдир.

Бизга материаллар қаршилиги курсидан эпюраларни қуришдан мақсад балканинг кўндаланг кесим ўлчамларини аниқлашдан иборат эканлиги маълум. Эпюраларни қуриш ҳам материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида бажарилади.

Кўп ораликли балкаларнинг ҳисоби қаватлар схемасини қуришдан бошланади. Мустақил равишда аввал иккинчи даражали (осма) балкалар, кейин асосий балка ҳисобланади. Осма балкалар бир нечта бўлса, ҳисоб энг устки қаватдаги балкадан бошланади. Бунинг сабаби шуки, устки қаватдаги юкнинг таъсири пастки қаватдаги, балкаларга ҳам таъсир этади. Буни ҳисобга олиш учун устки балканинг таянч реакциясини пастки балкага тесқари йўналишда қўйилади ва пастки балкани ҳисоблашда уни ташқи кучлардан бири деб қаралади.

Ҳисоб охирида алоҳида қурилган эпюралар бир ўк устида жойлаштирилади.

Мисол. Кўп ораликли статик аниқ балканинг M ва Q эпюраси қурилсин (3.6- расм, а).



3.6- расм

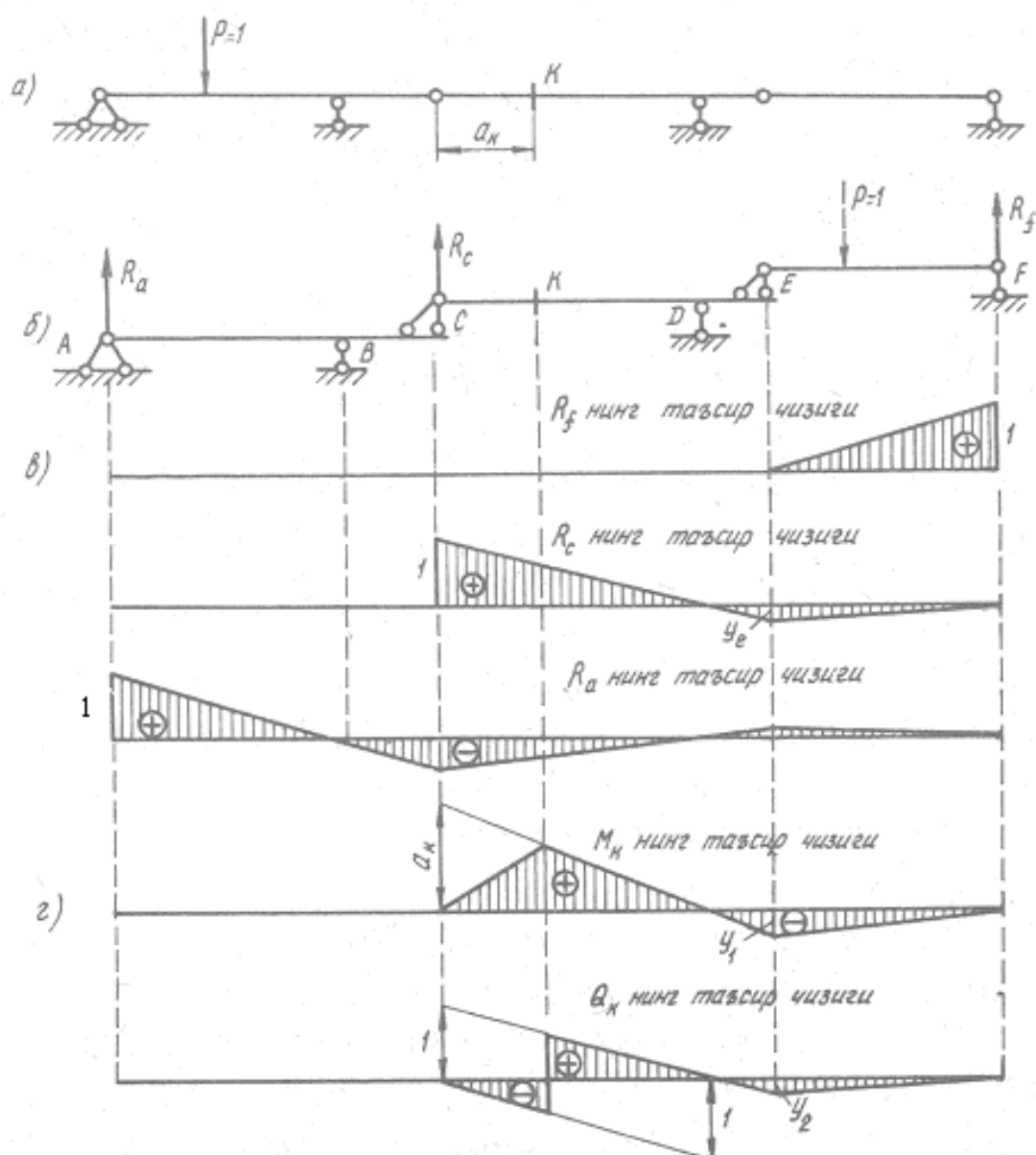
Ечиш. Берилган балканинг қаватлар схемасини қурамиз (3.6- расм, б) ва ҳисоблаш тартибини белгилаймиз.

Ҳисоб ишлари EF балкасидан бошланади. Уни асосий балкадан ажратиб олиб, M ва Q эпюралари қурилади. Шундан сўнг CD балкаси ҳисобланади. EF балкасига қўйилган юкларнинг CD балкасига бўлган таъсири R_e реакцияси орқали ҳисобга олинади. Ўз навбатида CD ва EF балкаларига қўйилган юкларнинг AB балкасига бўлган таъсири R_c реакцияси орқали ҳисобга олинади (3.6- расм, в). Иккинчи даражали

балкалар ҳисоби тугагач, асосий балка АВ ҳисобланади. Ҳисоб охирида алоҳида ҳисобланган эпюралар умумий ўқ устига жойлаштирилади (3.6-расм, г).

3.3. Кўп оралиқли статик аниқ балкаларда таъсир чизиқлари

Кўп оралиқли балкаларнинг таъсир чизиқларини чизиш балканинг қаватлар схемасини қуришдан бошланади (3.7- расм, а, б). Таъсир чизиқларини чизишда балкага фақат ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ таъсир этади, деб фараз этилади.



3.7- расм

Таъсир чизиклари чизиб бўлингандан кейин зўриқишларнинг қийматини аниқлаш жараёнида балкага қўйилган доимий юклардан фойдаланилади.

Осма (иккинчи даражали) балкаларда зўриқиш уларга куч қўйилган тақдирдагина пайдо бўлади. Асосий балкаларга қўйилган куч осма балкаларда зўриқиш уйғотмайди.

Асосий балкаларда шароит бутунлай бошқача: осма балкаларга қўйилган кучлар асосий балкада ҳам зўриқиш уйғотади. Шу қоидадан келиб чиқиб, кўп ораликли балканинг таъсир чизикларини кураммиз.

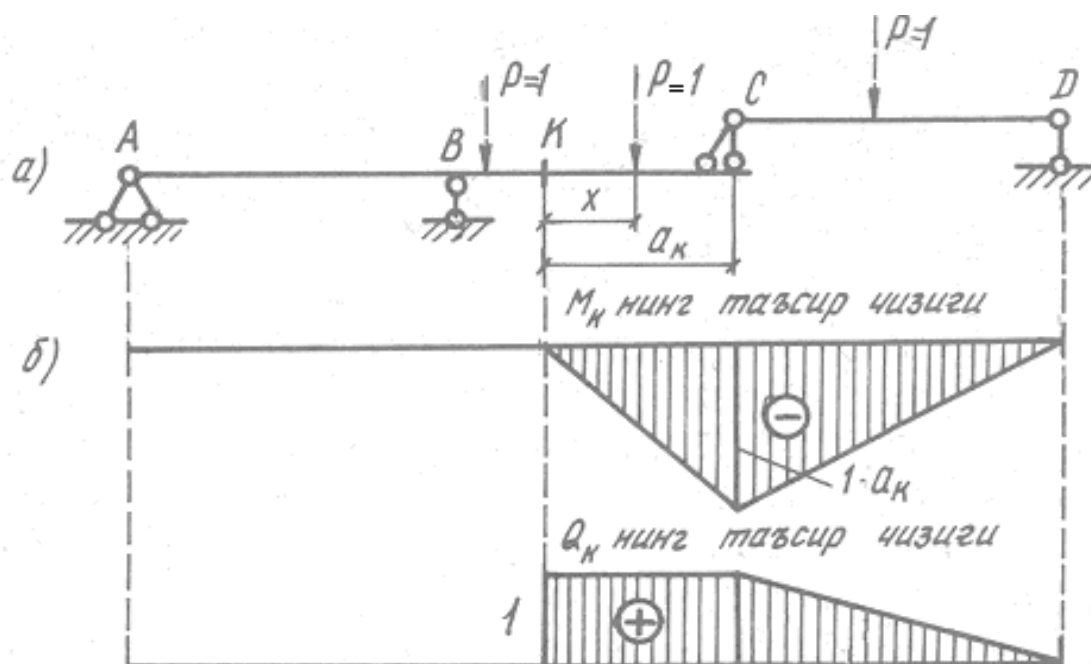
Осма балкага тегишли R_f таянч реакциясининг таъсир чизиги оддий балкаларникидан фарқ қилмайди (3.7- расм, в).

R_c реакциясининг таъсир чизигини куришда СД консолли балкасининг ўзи берилган (унга туташган АВ ва ЕF балкалари йўқ) деб фараз қиламиз ва шу балканинг ўзи учун таъсир чизиги кураммиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ С нуқтага келганда, R_c реакциянинг қиймати бирга тенг бўлади ($R_c = 1$). Куч Е нуқтасига келганда, $R_c = y_e$ бўлади. Энди бирлик куч АВ ва ЕF балкалари бўйлаб ҳаракат қилганда, R_c реакциясининг қай тариқа ўзгаришини кўриб ўтаммиз. Куч АВ балкасида юрганида R_c га таъсир этмайди, яъни $R_c = 0$ бўлади. Куч ЕF балкасида юрганида, R_c га таъсир этади. Куч Е нуқтасида бўлганида, R_c нинг қиймати y_e га тенг эканлигини биламмиз. Бирлик куч F таянчга яқинлашган сари унинг R_c га бўлган таъсири камая боради. $P=1$ кучи F нуқтасига келганда, $R_c = 0$ бўлади, чунки кучнинг таъсирини F таянчи тўлиқ ўзига қабул қилиб олади. Шунинг учун, y_e ординатаси F таянчи остидаги ноль нуқта билан туташтирилади (3.7- расм, в).

R_a реакциясининг таъсир чизиги АВ балкасидан бошланади. Таъсир чизигининг дастлабки қисмини оддий балкага чизгандек кураммиз. Осма балкалар остидаги қисми эса юқоридаги каби мулоҳаза юритиш йўли билан курилади (3.7 - расм, в).

Энди эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизикларини кураммиз. Балканинг «K» кесими учун M_k ва Q_k нинг таъсир чизикларини куриш талаб этилади, дейлик (3.7- расм, а). «K» кесими СД балкасига

карашли СД балкаси АВга нисбатан иккинчи даражали, EF га нисбатан эса асосий балка ҳисобланади. Бу шуни англатадики, $P=1$ кучи АВ балкаси бўйлаб ҳаракатланганда



3.8- расм

«К» кесимида M ҳам, Q ҳам ҳосил бўлмайди. Консолли СД балкаси учун таъсир чизиқлари оддий балкадаги сингари қурилади. Куч EF балкасида Ҳаракатланганида, СД балкасининг «К» кесимидаги ички кучларга таъсир этади. Куч E нуқтасида турганида $Q_k = y_2$; $M_k = y_1$ бўлади. Куч F нуқтасига етганида, $M_k = 0$; $Q_k = 0$ бўлади. Шунга кўра y_1 ҳам, y_2 ҳам ноль билан туташтирилди. Ҳосил бўлган график M_k ва Q_k нинг таъсир чизиқлари деб аталади (3.7- расм, г).

Баъзан «К» кесими балканинг консол қисмида берилиши мумкин (3.8- расм, а). У ҳолда M_k ва Q_k нинг таъсир чизиғи кесимнинг консолда ётганлигини ҳисобга олган ҳолда қурилади. Бирлик куч кесимдан чапда ҳаракатланса, «К» кесимида ҳеч қандай зўриқиш ҳосил бўлмайди. Куч КС оралиғида бўлса, $M_k = -I \cdot x$ ва $Q_k = 1$ бўлади. Куч СД балкаси устида ҳаракатланса, M_k ва Q_k учбурчак қонун бўйича ўзгаради (3.8- расм, б).

4- БОБ

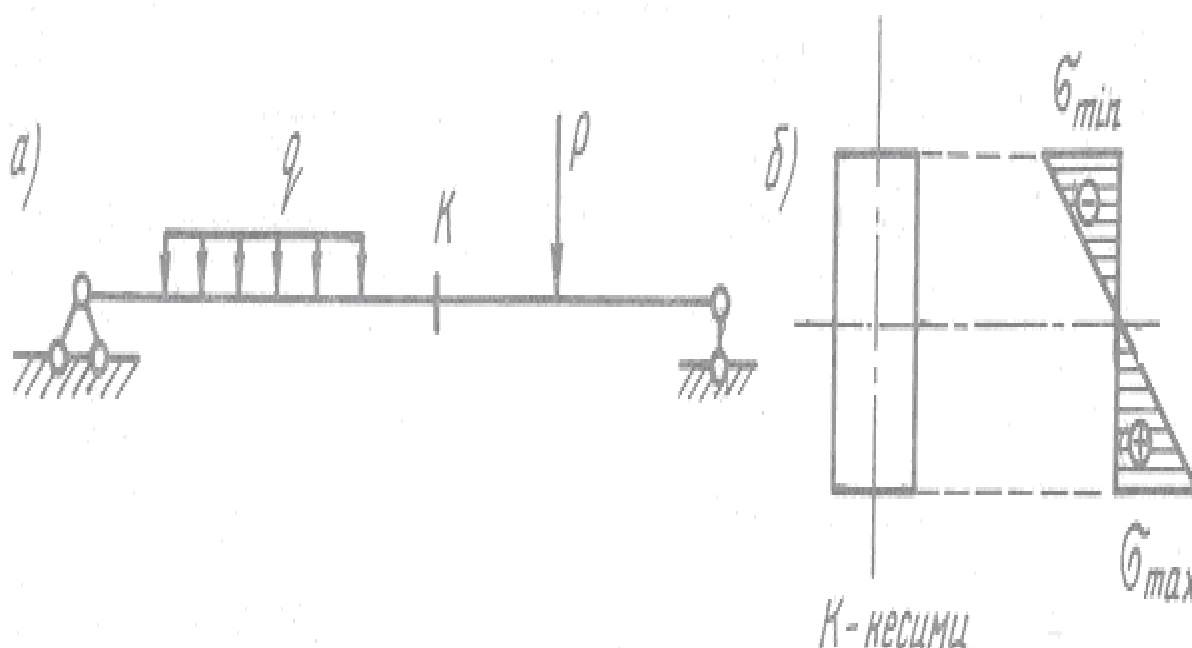
СТАТИК АНИҚ ФЕРМАЛАР

4.1. Фермалар тўғрисида тушунча ва уларнинг турлари

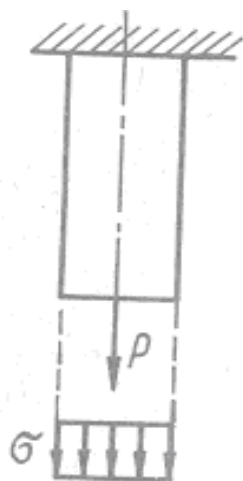
Бикир тугунларни шарнирлар билан алмаштирганда, ўзининг геометрик ўзгармаслигини сақлаб қолувчи стерженли системалар *ферма* деб аталади (4.1-расм).

Фермалар балкаларнинг такомиллашган бир кўриниши бўлиб, балкалар ўтайдиган вазифани бажаради: балкалар кичик оралиқларни ёпишда қўллansa , фермалар катта оралиқларни ёпишда қўлланилади .

Балкадан фермага ўтиш фояси унинг ишлаш шароитини таҳлил қилиш оқибатида пайдо бўлган. Маълумки, балка эгилишга ишлайди (4.1- расм, а). Балканинг ихтиёрий кесими учун қурилган нормал кучланишлар эпюрасидан кўриниб турибдики, балканинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилмайди. Нормал кучланиш нейтрал ўқда ноль, ўқдан узоқлашган сари унинг қиймати ортиб боради. Энг кўп ишни ўқдан узоқда жойлашган толалар бажаради, нейтрал катлам ва унинг атрофи деярли ишламайди. Ҳаттоки прокат профиллар (қўштавр, швеллер ва бурчакликлар)да ҳам ашёларнинг атиги 60 — 70 фоизидан фойдаланилади, ҳолос.



4.1- расм



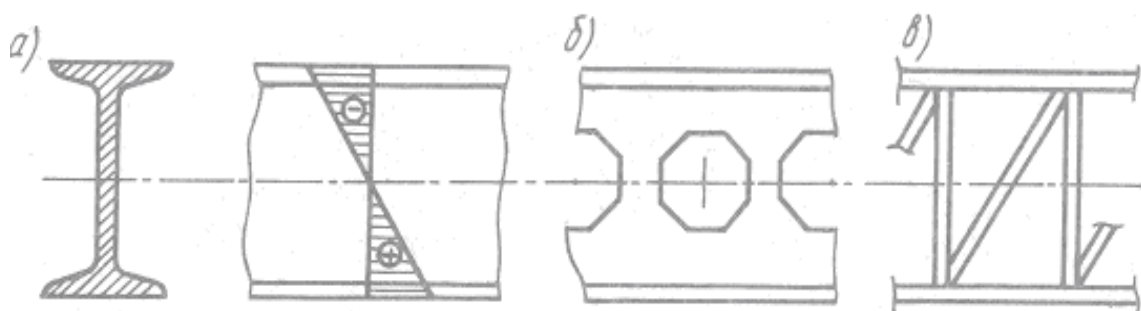
4.2- расм

Агар элемент сиқилиш ёки чўзилишга ишласа, у ҳолда унинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилади (4.2- расм). Нормал кучланишлар эпюрасидан кўринадики, элементнинг ҳар бир нуқтаси ишлайди.

Ҳар иккала эпюрани солиштиришдан қуйидаги мулоҳаза пайдо бўлади. Шундай конструкция яратиш керакки, унда қўлланилган ашёдан тўлиқ фойдаланилсин, агар имкон бўлса, элемент фақат сиқилиш ва чўзилишга ишласин.

Бу вазифа босқичма-босқич амалга оширилди. Дастлаб тўғри тўртбурчакли яхлит кесим ўрнига қўштавр пайдо бўлди (4.3- расм, а), кейинчалик қўштавр деворлари ўйиқлар ҳисобига енгиллаштирилади (4.3- расм, б) ва ниҳоят, бу изланишларнинг мантиқий давоми сифатида ферма конструкцияси яратилди (4.3- расм, в). Оддий статик аниқ ферманинг ҳисоблаш схемаси 4.4-расмда тасвирланган.

Одатда ташқи кучлар ферма тугунларига қўйилади. Ферма стерженлари ташқи кучлар таъсирида асосан сиқилиш ва чўзилишга ишлайди. Бу ҳол ферма материалдан самарали фойдаланиш имконини беради, чунки ҳар бир стержень кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган нормал кучланишлар эпюраси тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлади.

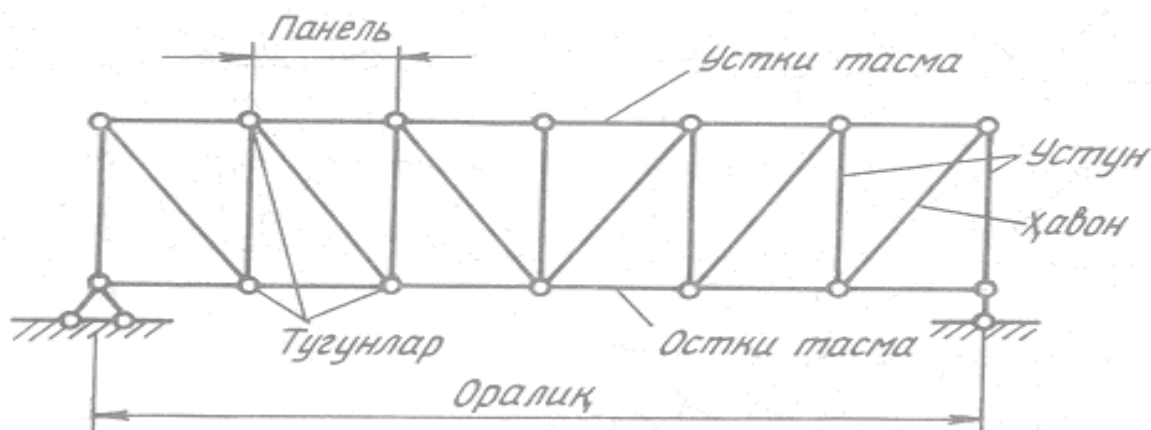


4.3- расм

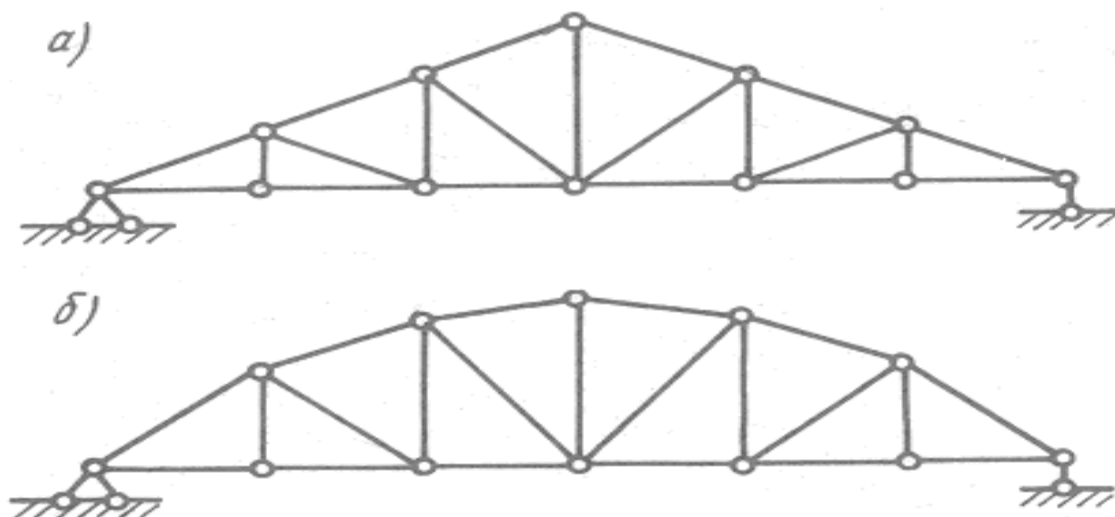
Ферманинг барча стерженлари ёки уларнинг ўқлари бир текисликда жойлашса, текис ёки ясси фермалар деб, бир текисликда жойлашмаса

фазовий фермалар деб аталади. Фазовий фермалар кўпинча алоҳида ясси фермаларга ажратилган ҳолда ҳисобланади.

Икки таянч орасидаги масофа оралик (пролёт) деб аталади; ферманинг ташқи чегарасида жойлашган стерженлар *тасмалар* деб аталиб, улар орасида жойлашган стерженлар ферма панжараларини ташкил этади. Панжаранинг тик элементлари устун, оғма элементлари – ҳавон деб юритилади. Ферма тугунлари орасидаги горизонтал масофа панел дейилади.



4.4- расм



4.5- расм

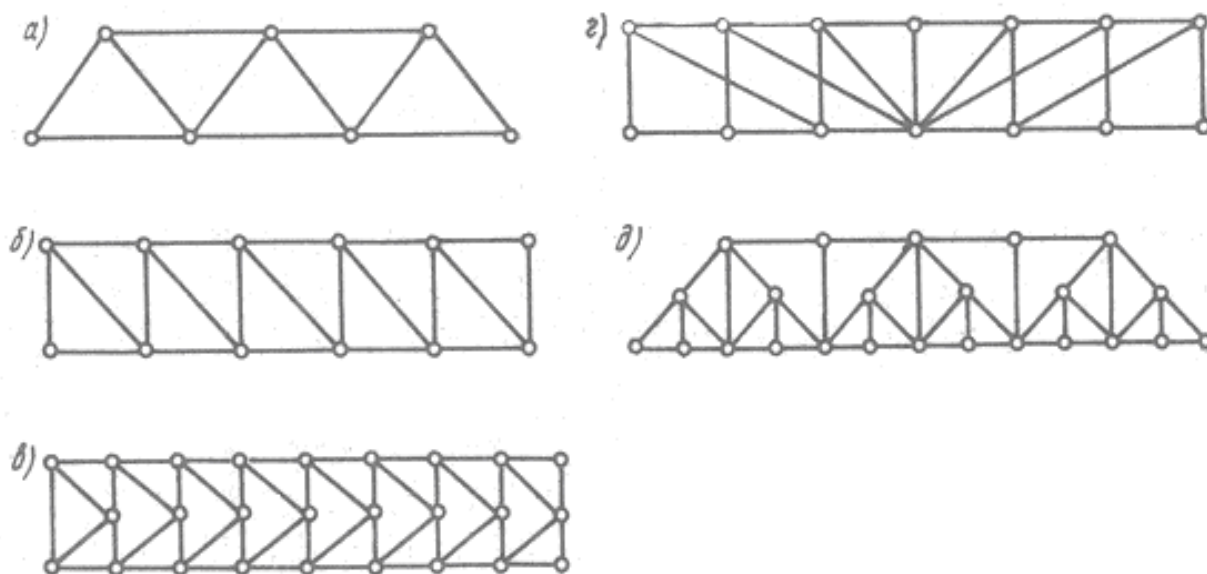
Фермалар ташқи кўриниши, панжара шакли, таянч хиллари ва ўтайдиган вазифасига қараб бир неча турга бўлинади:

а) ферма ташқи контўрининг шаклига кўра параллел тасмали фермалар (4.4- расм), учбурчак шаклли фермалар (4.5- расм, а), полигонал тасмали фермалар (4.5- расм, б);

б) панжарасининг тузилишига кўра учбурчак панжарали фермалар (4.6- расм, а), хавон панжарали фермалар (4.6- расм, б), ярим хавон панжарали фермалар (4.6- расм, в), кўшхавон панжарали фермалар (4.6- расм, г), кўш панжарали (шпренгелли) фермалар (4.6- расм, д);

в) таянч хилларига қараб балкасимон ёки консол фермалар;

г) ўтайдиган вазифасига кўра том, кўприк ва кран фермалари;



4.6-расм

д) кўприк фермаларида юкнинг ҳаракатланиш сатҳига қараб юк устки ёки пастки тасмадан юрадиган фермалар бўлади.

4.2. Фермаларни аналитик усулда ҳисоблаш

Статик аниқ ясси фермаларни ҳисоблаш деганда ҳар бир стержендаги зўриқишларни аниқлаш тушунилади.

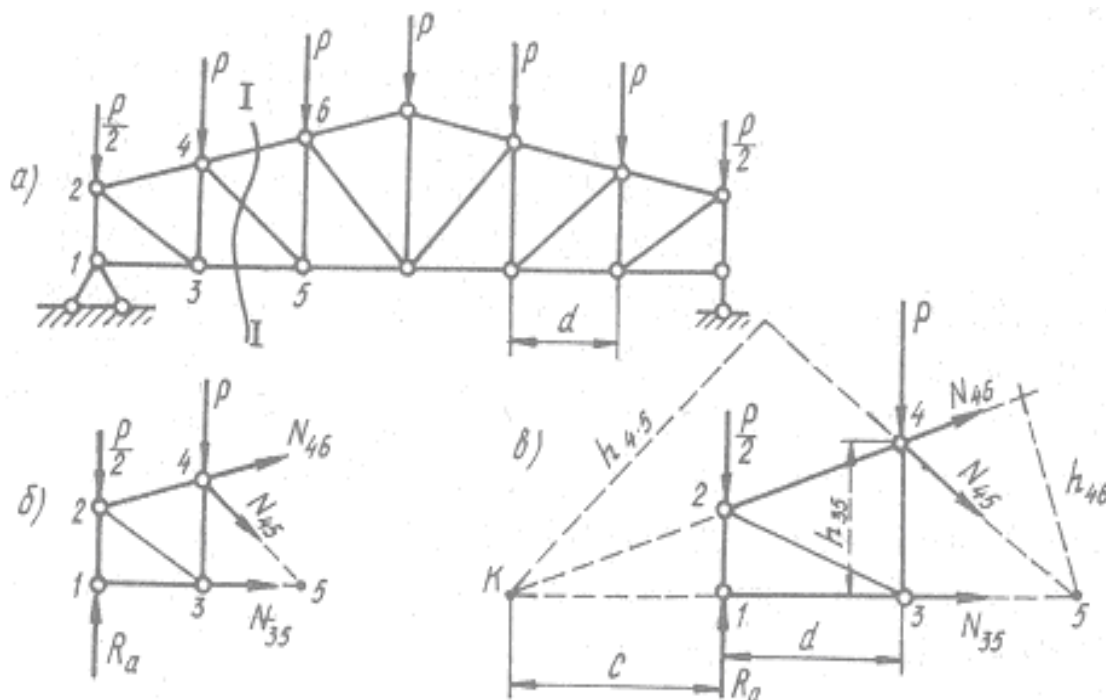
Зўриқишларни аниқлашнинг аналитик, график ва таъсир чизиқлари усули мавжуд. Мазкур параграфда аналитик усул билан танишиб чиқамиз.

Аналитик усулнинг ўзи бир-бирини тўлдирувчи учта усулга бўлинади: момент нуқтаси ёки Риттер усули, проекциялаш усули ҳамда тугунларни кесиб олиш усули.

Усулларнинг ичида энг қулайи Риттер усулидир, бироқ ундан ҳамма вақт ҳам фойдалана олмаймиз. Момент нуқтаси усулидан фойдаланиш имкони бўлмаган ҳолларда проекциялаш ёки тугунларни кесиб олиш усулларидан фойдаланилади. Ҳар учала усулни бирма-бир танишиб ўтамиз.

Момент нуқтаси усули. Ферманинг ҳисоби таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади (бошқа усулларда ҳам худди шундай қилинади). Ферма реакциялари оддий балка реакциялари сингари аниқланади, яхлит ферма учун статиканинг мувозанат тенгламалари тузилади ва шу тенгламалардан таянч реакциялари аниқланади ҳамда текширилади.

Стерженлардаги зўриқишларни аниқлаш учун ферма ҳаёлан қирқилади (4.7- расм, а), ҳисоблаш учун қирқилган ферманинг бир қисми ажратиб олинади (4.7- расм, б) ва ажратилган бўлак учун мувозанат тенгламаси тузилади. Мувозанат тенгламаси таркибига ташқи кучлар ва таянч реакцияларидан ташқари номаълум зўриқишлар киради.



4.7-расм

Момент нуқтаси усулида кесим шундай ўтказиладики, бунда кесимга кирган стерженларнинг сони, учтадан ортмаслиги ва учала стержень бир нуқтада кесишмаслиги керак. Кесимга кирган стерженлар жуфт-жуфт бўлиб, бир нуқтада кесишади (4.7- расм, б). Ҳар бир стержень ўзининг момент нуқтасига эга. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стерженнинг кесишув нуқтаси *момент нуқтаси* деб аталади. Мувозанат тенгламалари ана шу момент нуқталарига нисбатан тузилади. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, тузиладиган тенгламалар ҳар сафар бир номаълумли бўлади. Бир номаълумли оддий тенгламадан изланаётган зўриқишининг қиймати аниқланади.

Тенглама тузаётганда, номаълум зўриқишларнинг йўналишини ферманинг кесилган томонига йўналтирилади, яъни стержень чўзилувчан деб қаралади. Ҳисоб натижасида зўриқиш мусбат ишорада чиқса, стерженнинг чўзилишга ишлаши тасдиқланади. Манфий чиқса стержень сиқилувчан бўлади.

Ферма стерженларидаги зўриқишлар аслида ички кучлар бўлганлиги сабабли уларни N ҳарфи билан белгилаймиз ва қайси тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билиш мақсадида остига икки рақамдан иборат белги қўямиз. Масалан, N_{46} — тўртинчи ва олтинчи тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билдиради.

Энди бевосита зўриқишларни аниқлашга киришамиз. N_{35} , N_{45} ва Y_{46} зўриқишларни аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бунинг учун фермани 1 — 1 кесими бўйича қирқамиз (4.7-расм, а). Ферманинг бир қисмини (масалан, кучлар кўп бўлганлиги учун ўнг қисмини) ташлаб юборамиз, ҳисоблаш учун эса чап қисмини олиб қоламиз (4.7- расм, в).

Ферманинг чап қисми ташқи кучлар (R_a ; $0,5 P$; P) ҳамда ички кучлар (N_{35} , N_{45} ва Y_{46}) таъсирида мувозанат ҳолатида бўлиши лозим. Номаълум ички кучлар ферманинг ташлаб юборилган ўнг қисмининг таъсирини ўзида акс эттиради.

4- тугун 3 — 5 стержени учун момент нуқтаси ҳисобланади. Номалум зўриқиш N_{35} ни аниқлаш учун шу нуқтага нисбатан барча кучларнинг моментлари йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum M_4 = R_a \cdot d - \frac{P}{2} \cdot d - N_{35} \cdot h_{35} = 0,$$

бу ердан
$$N_{35} = \frac{R_a \cdot d - 0,5P \cdot d}{h_{35}} = \frac{M_4^0}{h_{35}}.$$

Бу ерда d ва h - елкалар; M_4^0 - тўртинчи тугунга нисбатан ферманинг чап бўлагида ётган кучларнинг моментлари йиғиндисини.

Бу момент миқдор жиҳатидан оддий балканинг, ферма момент нуқтасига мос кесимидаги моментга тенг бўлади.

Зўриқишнинг мусбат ишораси 3 - 5 стерженнинг чўзилувчан эканлигини англатади.

Энди 4-6 - тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши N_{46} ни аниқлаймиз. Кесимга кирган икки стерженнинг кесишув нуқтаси (5) N_{46} учун момент нуқтаси бўлади. Шу нуқтага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum M_5 = R_a \cdot 2d - \frac{P}{2} \cdot 2d - P \cdot d + N_{46} \cdot h_{46} = 0;$$

бу ердан
$$N_{46} = -\frac{2d(P - R_a)}{h_{46}} = -\frac{M_5^0}{h_{46}}.$$

Зўриқиш ишорасининг манфий чиқишини 4 — 6 стерженининг сиқилувчан эканлигини билдиради. Умуман фермага қўйилган ташқи кучлар пастга йўналган бўлса, ферманинг устки тасмаси сиқилишга, остки тасмаси чўзилишга ишлайди.

Эндиги навбат, N_{45} га. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стержень «К» нуқтасида кесишади. Ана шу нуқта N_{45} учун момент нуқтаси ҳисобланади. Шу нуқтага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum M_k = -R_a \cdot c + \frac{P}{2} \cdot c + P(c + d) + N_{45} \cdot h_{45} = 0;$$

бу ердан
$$N_{45} = \frac{R_a \cdot c - 0,5P \cdot c - P(c + d)}{h_{45}} = \frac{M_k^0}{h_{45}}.$$

Шундай қилиб, момент нуқтаси усулида исталган стержендаги зўриқиш қуйидаги формула асосида топилаётган:

$$N = \frac{M}{h}.$$

Бу ерда M — кесилган ферманинг бир қисмида ётган кучларнинг момент нуқтасига нисбатан олинган моментлари йиғиндиси;

h — изланаётган зўриқишнинг шу нуқтага нисбатан елкаси.

Проекциялаш усули. Баъзан шундай фермалар учрайдики, уларда момент нуқтаси усулини қўллаб бўлмайди.

Бундай ҳолларда бошқа усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Параллель тасмали ферма бунга мисол бўла олади (4.8- расм, а). Ферманинг ҳавон ва устунлари момент нуқтасига эга эмас, чунки тасмалар параллел бўлганлиги сабабли ўзаро кесишмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усули жуда қўл келади.

5 — 6 тугунлар орасидаги устуннинг зўриқишини аниқламоқчимиз, дейлик. Бунинг учун энг аввал 1 — 1 кесим билан фермани икки қисмга ажратамиз; кучлар кўп бўлгани учун ўнг томонини ташлаб юборамиз (4.8- расм, б). Кесимга кирган уч стерженнинг иккитаси ўзаро параллел, демак N_{56} нинг момент нуқтаси йўқ. Шунинг учун мувозанат тенгламасини тузишда кучлар проекцияларининг йиғиндисидан фойдаланамиз:

$$\sum Y = R_a - \frac{P}{2} - P + N_{56} = 0;$$

бу ердан

$$N_{56} = -(R_a - 1,5P) = -Q.$$

Бу ерда N_{56} — оддий балкадаги кўндаланг куч.

N_{67} зўриқишни аниқлаш учун фермани II — II кесим бўйлаб қирқамиз ва унинг чап қисми учун қуйидаги проекциялар тенгламасини ёзамиз (4.8- расм,

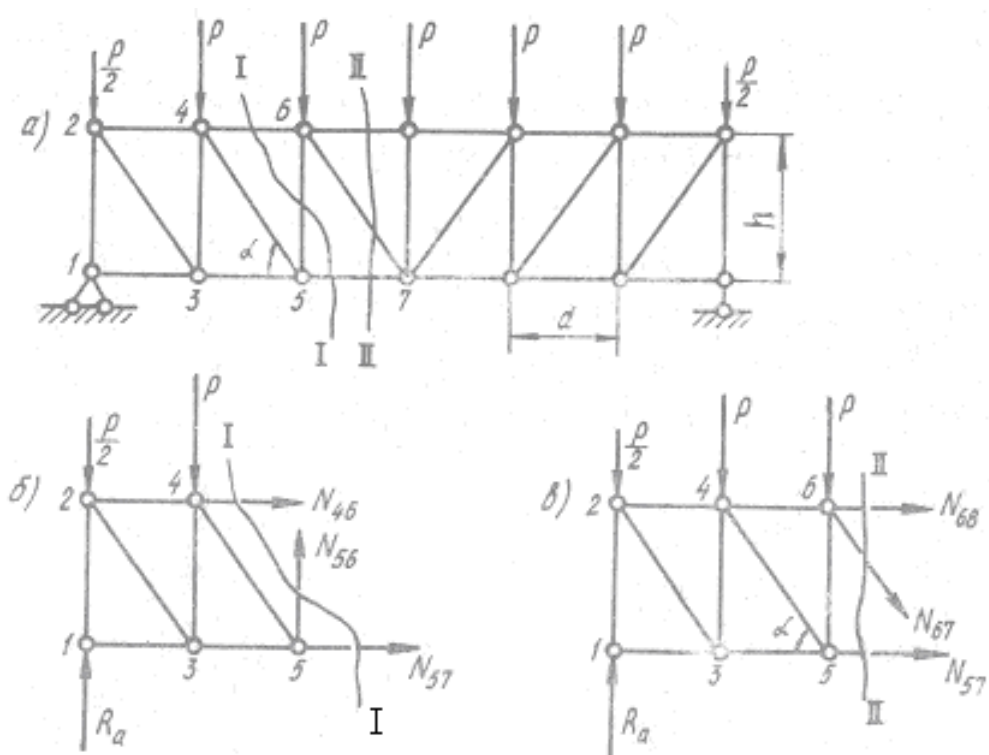
в):

$$\sum Y = R_a - \frac{P}{2} - P - P - N_{67} \cdot \sin \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{67} = \frac{R_a - 2,5P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Бу ерда ҳам Q оддий балканинг қирқувчи кучи.



4.8-расм

Тугунларни кесиб олиш усули. Бу усулни проекциялаш усулининг хусусий ҳоли деса ҳам бўлади. Чунки бунда ҳам проекция тенгламаларидан фойдаланилади. Фарқи шуки, аввалги усулда яхлит фермани қирқиб, унинг бир қисми ажратиб олинган бўлса, бу сафар битта тугун кесиб олинади ва шу тугун учун мувозанат тенгламалари тузилади (4.9- расм, а, б).

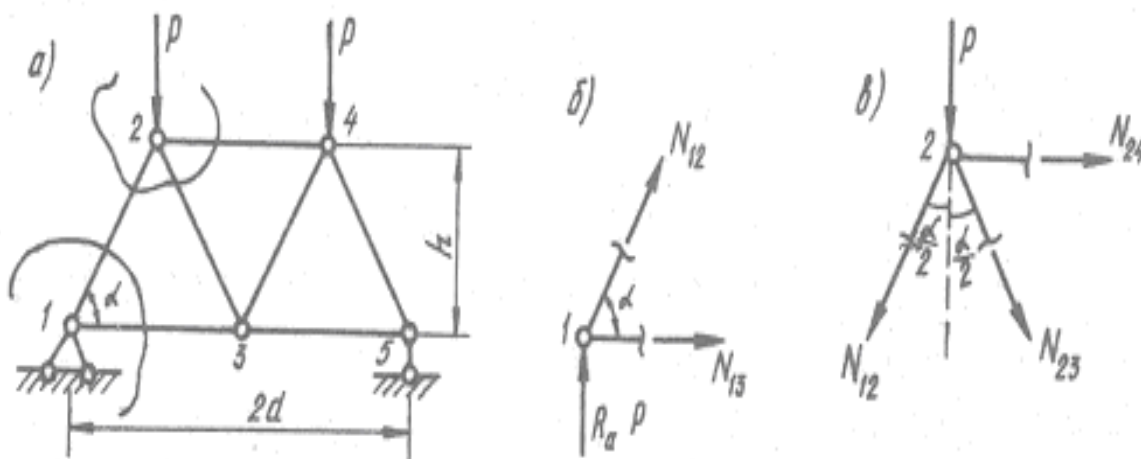
Ҳисоб ишлари икки стерженли тугундан бошланади.

Нега деганда тугун мувозанатини текшириш учун ихтиёримизда фақат иккита тенглама бор: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$.

Шунга мувофиқ яхлит фермадан 1 тугунни кесиб оламиз ва ундаги N_{12} ҳамда N_{13} номаълум зўриқишларни аниқлаймиз. Кучларнинг Y ўқига бўлган проекциялари йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum Y = R_a + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0;$$

бу ердан
$$N_{12} = -\frac{R_a}{\sin \alpha} = -\frac{P}{\sin \alpha};$$



4.9-расм

N_{13} ни аниқлаш учун кучларни X ўқиға проекциялаймиз:

$$\sum X = N_{13} + N_{12} \cdot \cos \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{13} = -N_{12} \cdot \cos \alpha = \frac{P}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Энди 2- тугунга ўтилади; бу ердаги учта зўриқишдан биттаси маълум (N_{12}), ҳолган иккитаси номаълум. N_{23} ни аниқлаш учун кучларни Y ўқиға проекциялаймиз (4.9- расм, в).

$$\sum Y = -P - N_{12} \cos \frac{\alpha}{2} - N_{23} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

бу ердан

$$N_{23} = -P \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha}\right) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

N_{24} ни аниқлаш учун кучларни X ўқиға проекциялаймиз (4,9- расм, в)

$$\sum X = N_{24} - N_{12} \sin \frac{\alpha}{2} + N_{23} \frac{\alpha}{2} = 0,$$

бу ердан

$$N_{24} = P \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - P \sin \frac{\alpha}{2} / \sin \alpha.$$

Юқоридагилардан кўриниб турибдики, тугунларни кесиб олиш усулида навбатдаги стержень зўриқиши ўзидан олдинги стерженлар зўриқишларига боғлиқ ҳолда топилади. Олдинги зўриқишни аниқлашда йўл қўйилган хато табиийки кейинги зўриқишларда ҳам такрорланади.

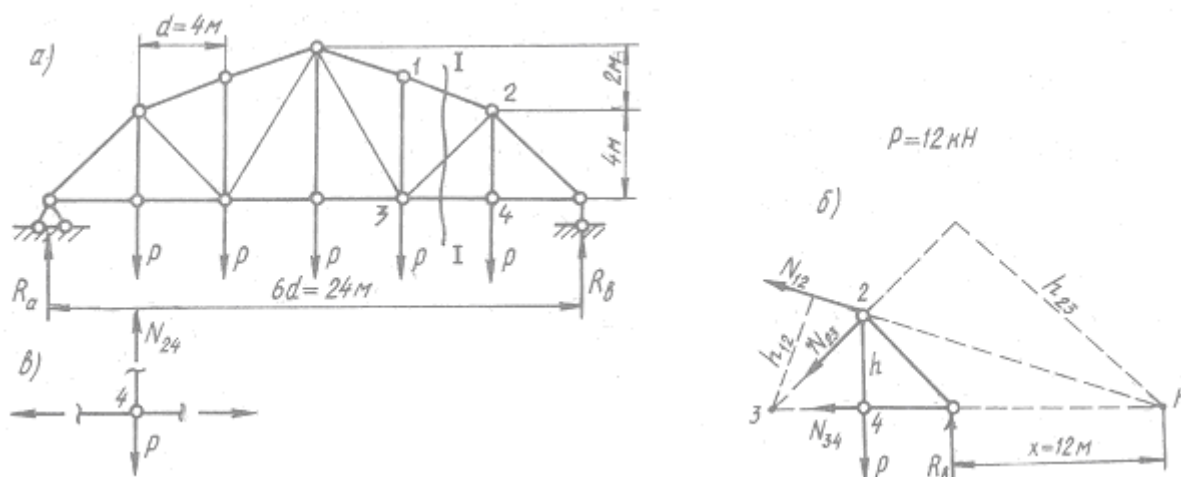
Бу мазкур усулнинг камчиликларидан ҳисобланади. Усулнинг яна бир камчилиги шундан иборатки, унинг тенгламаларида кўплаб тригонометрик функциялар учрайди, бу эса ҳисобни мураккаблаштиради.

Ана шуларни ҳисобга олиб, фермаларни ҳисоблаганда кўриб ўтилган усуллардан қайси бири қўл келса, ўша усулдан фойдаланилади. Масалан, ферманинг баъзи зўриқишлари момент нуқтаси усулида, баъзилари проекциялаш ёки тугунларни кесиб олиш усулида аниқланиши мумкин.

4.1 - мисол. 4.10- расм, а-да тасвирланган ферманинг бешинчи панели стерженларидаги зўриқишлар аналитик усулда аниқлансин.

Ечиш. Ҳисоб таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади:

$$R_a = R_b = \frac{5P}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ kN}$$



4.10- расм

Ферманинг 5- панелини 1 — 1 кесим билан кесиб, чап қисмини ташлаб юборамиз ва ўнг томони учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини тузишда кесилган стерженлар чўзилишга ишлайди деб фараз этилади ва зўриқишлар тугундан ташқи томонга йўналтирилади.

N_{12} зўриқишини аниқлашда 2 — 3 ва 3 — 4 стерженларнинг кесишув нуқтаси (3) момент нуқтаси деб қабул қилинади. Шу нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилади.

$$\sum M_3 = -R_b \cdot 2d + P \cdot d - N_{12} \cdot h_{12} = 0.$$

Тригонометрик йўллар билан $x=12$ м ва $h_{12}=4,9$ м ни аниқлаймиз. У ҳолда $N_{12} = -39,6$ кН бўлади.

N_{34} зўриқишнинг момент нуқтаси 2- тугунга тўғри келади. Моментлар тенгламасини шу нуқтага нисбатан тузамиз:

$$\sum M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0;$$

бундан $N_{34}=30$ кН.

N_{23} зўриқишини ҳам аввалги зўриқишлар сингари момент нуқтаси усулида аниқлаймиз. Бироқ бу зўриқишнинг момент нуқтаси, яъни 1 — 2 ва 3 — 4 стерженлардан ўтган ўқнинг кесишув нуқтаси (К) фермадан ташқарида ётади. Мувозанат тенгламаси ана шу нуқтага нисбатан тузилади:

$$\sum M_K = R_b \cdot x - P(d + x) - N_{23} \cdot h_{23} = 0.$$

Тригонометриядан $h_{23} = 14,14$ м. Тенгламадан $N_{23} = 11,9$ кН.

N_{24} зўриқиши тугунларни кесиб олиш усулида аниқланади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб олиб (4.10- расм, в), мувозанат тенгламаси тузилади:

$$\sum Y = N_{24} - P = 0;$$

бундан

$$N_{24}=12 \text{ кН.}$$

4.3. Ферма стерженларидаги зўриқишларнинг таъсир чизиқлари

Баъзан фермаларга доимий юклардан ташқари қўзғалувчан юклар кам таъсир этади. Қўзғалувчан юклар таъсирида ферма стерженларидаги зўриқишларнинг қиймати ўзгариб боради. Зўриқишларнинг қандай ўзгаришини билиш учун таъсир чизиқлари деб аталган график чизилади.

Таъсир чизиқларининг тенгламалари аналитик усулдаги сингари момент нуқтаси, проекциялаш ва тугунларни кесиб олиш усулларида тузилади. 4.11- расм, а да тасвир-ланган ферма стерженларидаги айрим зўриқишларнинг таъсир чизиқларини қурамиз.

Ферманинг иккинчи панелидаги N_{35} , N_{46} , N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизиқлари момент нуқтаси усулида, учинчи панелдаги N_{67} зўриқиш проекциялаш усулида ҳамда N_{87} зўриқишнинг таъсир чизиғи тугунни кесиб олиш усулида курилади.

Ишни N_{35} зўриқишининг таъсир чизиғини куришдан бошлаймиз. Бунинг учун фермани 1 — 1 кесим билан хаёлан қирқамиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч кесимнинг ўнг томонида деб фараз этамиз ва шу томонни ташлаб юборамиз. Қирқимга тушган учта стержендаги зўриқишларнинг йўналиши ташлаб юборилган томонга қаратилади.

Кесимнинг чап томони учун момент нуқтаси усулини қўллаб, мувозанат тенгламасини тузамиз. 3 — 5 стержени учун 4 нуқта момент нуқтаси ҳисобланади. Шу нуқтага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = R_a \cdot d - N_{35} \cdot h_1 = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_a \cdot \frac{d}{h_1}.$$

Демак, N_{35} зўриқишнинг таъсир чизиғи бирлик куч кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, R_a таянч реакциясининг таъсир чизиғи сингари бўлиб, ординаталари d/h_1 миқдорга фарқ қилади. Шунга кўра А таянч остида ўқдан юқорига d/h_1 масофани ўлчаб қўямиз ҳамда В таянч остидаги ноль нуқта билан туташтирамиз.

Ўтказилган чизиқ ўнг чизиқ деб аталади (4.11- расм, б).

Чап чизиқни ўтказиш мақсадида кесимнинг ўнг томони учун моментлар тенгламасини ёзамиз:

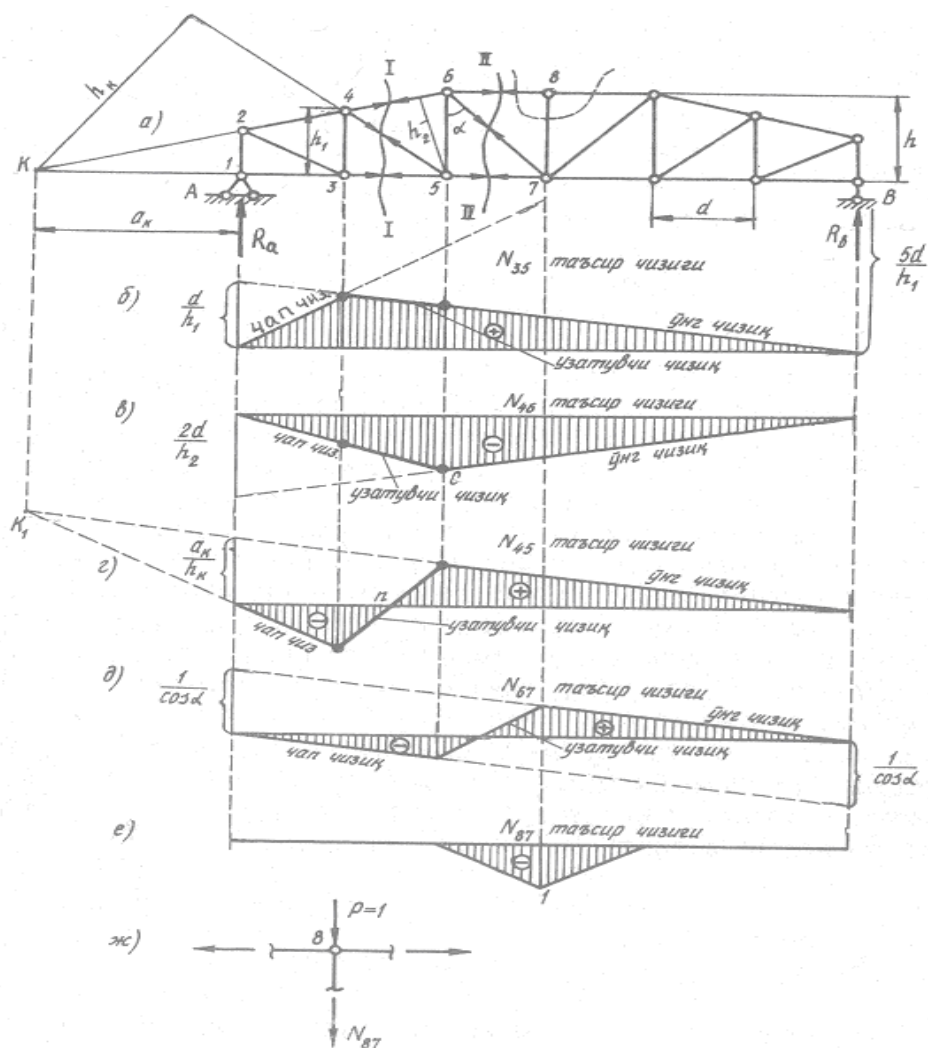
$$\Sigma M_4 = N_{35} \cdot h_1 - R_b \cdot 5d = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_b \cdot \frac{5d}{h_1}$$

Демак, N_{35} зўриқишнинг таъсир чизиғи бирлик куч кесимдан чапда бўлганда, тузилиши жиҳатидан худди R_b , реакциясининг таъсир чизиғига ўхшаш бўлиб, миқдор жиҳатдан ундан $5d/h_1$ маротаба кўп бўлади. Бунга асосан В таянч остида $5d/h_1$ масофани ўқдан юқорига ўлчаб қўямиз ва уни А таянч остидаги ноль нуқта билан туташтирамиз. Бу чизиқ ч а п ч и з и қ деб

аталади. Чап ва ўнг чизиклар момент нуқтаси (4) остида кесишади (4.11-расм, б). Штрихланган учбурчак N_{35} зўриқишининг таъсир чизиғи ҳисобланади. Мусбат ишора 3 — 5 стержени чўзилишга ишлашини билдиради. 3- ва 5- тугунларни ўнг чизикка туширилган проекцияларини туташтирувчи чизик — узатувчи чизик деб аталади.



4.11- расм

N_{35} га тааллуқли узатувчи чизик бизнинг ҳолда ўнг чизик билан устма-уст тушган. Баъзи ҳолларда узатувчи чизик чап ёки ўнг чизик билан устма-уст тушмайди.

Ўнг ва чап чизикларнинг момент нуқтаси остида кесишувини эътиборга олиб, таъсир чизикларини чизишни бир мунча енгиллаштириш мумкин.

Бунинг учун биргина ўнг ёки чап чизик чизилса кифоя. Иккинчиси момент нуқтасининг проекцияси орқали ўтказилади.

Шу йўл билан N_{46} ва N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизиғини кураимиз.

1 - 1 кесим ўз -кучини сақлайди. 5- нуқта N_{46} нинг момент нуқтаси бўлади. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнг томонда ҳаракатланади, деб чап томон учун қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\sum M_5 = R_a \cdot 5d + N_{46} \cdot h_2 = 0,$$

бундан
$$N_{46} = -R_a \frac{2d}{h_2}$$

N_{46} нинг таъсир чизиғини чизиш учун А таянчи йўналишида ўқдан пастга (манфий бўлганлиги учун) $2d/h_2$ масофани ўлчаб қўямиз ва В таянчи йўналишидаги ноль билан бирлаштирамиз (4.11- расм, в). Бу ўнг чизик бўлади. Чап чизикни ўтказиш учун момент нуқтаси 5 ни ўнг чизикка проекциялаймиз. Топилган нуқта С ни А таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Бу чизик чап чизик бўлади. Штрихланган юза N_{46} зўриқишининг таъсир чизиғи ҳисобланади. Манфий ишора 4 - 6 стерженининг сиқилишга ишлашини билдиради.

Энди ҳавондаги зўриқиш N_{45} нинг таъсир чизиғини чизамиз. 1 — 1 кесим бу стерженни ҳам кесиб ўтган. Кесимнинг ўнг томонини ташлаб юборамиз. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз. Ферманинг кесимдан чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз. Бунинг учун аввал момент нуқтасини белгилаб оламиз; N_{45} зўриқишининг момент нуқтаси 3 - 5 ва 4 - 6 стерженларидан ўтган ўқнинг кесишув нуқтаси К да ётади. Моментлар йиғиндисини шу нуқтага нисбатан тузамиз:

$$\sum M_k = -R_a \cdot a_k + N_{45} \cdot h_k = 0,$$

бундан
$$N_{45} = R_a \frac{a_k}{h_k}$$

Демак, куч ($P=1$) кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, N_{45} зўриқишнинг қиймати R_a реакциясидан a_k/h_k мартаба катта бўлар экан. Бунга асосланиб, ўқдан юқорига a_k/h_k масофани ўлчаб қўямиз; уни В таянчи йўналишидаги

ноль билан туташтирамыз (4.11- расм, г), ҳосил бўлган чизик ўнг чизик бўлади. Чап чизикни ўтказиш учун ўнг чизикни чапга давом эттирамыз. Момент нуқтаси — К ни унинг давомига проекциялаймиз. Улар K_1 нуқтасида кесишади. K_i нуқтаси билан А таянчи остидаги ноль нуқтани бирлаштирамыз ва ўнгга давом эттирамыз. Бу чап чизик бўлади. Узатувчи чизикни ўтказиш учун 4- тугунни чап, 5- тугунни ўнг чизикка проекциялаймиз. Топилган нуқталарни бирлаштирувчи чизик узатувчи чизик ҳисобланади. Штрихланган юза эса N_{45} нинг таъсир чизиғидир. Бу ерда юза икки хил ишорага эга. n нуқтада ордината нолга тенг. Бунинг маъноси шуки, бирлик куч n нуқтасидан чапда ҳаракатланса, 4 - 5 стержень сиқилишга, ўнгда ҳаракатланса чўзилишга ишлайди.

Энди ферма стерженларидаги зўриқишларнинг таъсир чизикларини куришда проекциялаш усулини қўллаб кўрамыз.

4.11- расм, а да тасвирланган ферманинг учинчи ва тўртинчи панелидаги устки ва остки тасмалар ўзаро параллел. Шу боисдан мазкур панеллардаги ҳавонларга момент нуқтаси усулини қўллаб бўлмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усулига мурожаат этилади.

Учинчи панел ҳавонидаги зўриқиш N_{67} нинг таъсир чизиғини қурайлик. Бунинг учун II — II кесими бўйлаб фермани қирқамиз. Ўнг томонини ташлаб, чап томони учун тенглама тузамиз; бунда бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз:

$$\sum Y = R_a - N_{67} \cdot \cos \alpha = 0$$

бундан
$$N_{67} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R_a.$$

Бирлик куч кесимдан чапда деб фараз этиб, ўнг томон учун проекциялар тенгламасини ёзамиз:

$$\sum Y = R_b + N_{67} \cdot \cos \alpha = 0,$$

бундан
$$N_{67} = -R_b \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

N_{67} зўриқишнинг таъсир чизиғи ҳам таянч реакциялари R_a ва R_b нинг таъсир чизиғи каби бўлар, миқдори эса $1/\cos \alpha$ га фарқ қилар экан. Шунга кўра реакциялар йўналишида ўқдан юқорига ва пастга $1/\cos \alpha$ ни ўлчаб кўямиз, топилган нуқталарни таянчлар остидаги ноль нуқталар билан бирлаштирамиз. Юқорида ўнг, пастда чап чизик ҳосил бўлади (4.11- расм, д). 6- тугунни чап, 7- тугунни ўнг чизикка проекциялаймиз ва топилган нуқталарни туташтирсак, узатувчи чизик ҳосил бўлади.

Штрихланган юза 6 — 7 ҳавондаги зўриқишнинг таъсир чизиғи бўлади.

Тугунларни кесиб олиш усулини N_{87} зўриқиши мисолида кўриб ўтамиз.

7 — 8- устуннинг зўриқишини аниқлашда ферма қирқимиға учдан ортик (бизнинг ҳолда 4 та) стержень тўғри келади. Шунинг учун 8- тугунни шаклда кўрсатилгандек кесиб, ажратиб оламиз (4.11- расм, а ва ж).

Бирлик куч 8- тугундан бошқа тугунлар бўйлаб ҳаракатланса, устундаги зўриқиш ноль бўлади: $\sum Y = N_{81} = 0$.

Бирлик куч 8- тугунда бўлса,

$$\sum Y = -N_{87} - P = 0$$

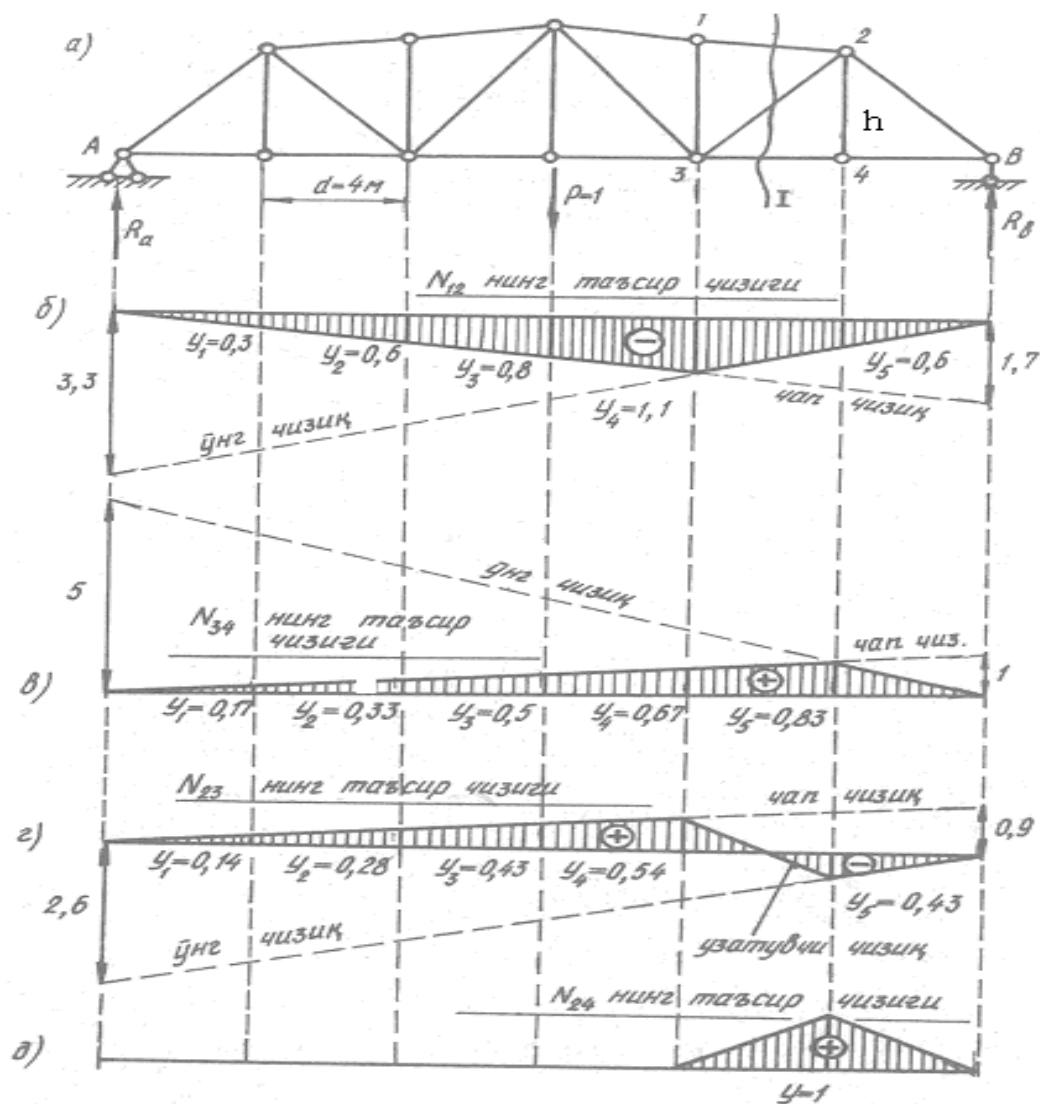
бундан

$$N_{87} = -P = -1.$$

Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиғи 4.11- расм, е да тасвирланган.

Мисол. 4.12-расм, а да тасвирланган ферманинг бешинчи панелидаги зўриқишлар учун таъсир чизиклари чизилсин ҳамда чизилган таъсир чизикларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қиймати аниқлансин.

Ечиш. Момент нуқтаси усулидан фойдаланиб N_{12} зўриқишининг таъсир чизиғини чизамиз. Бунинг учун фермани 1 — 1 кесим билан қирқамиз. Навбатма-навбат ферманинг чап ва ўнг қисмлари учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. Ферманинг чап қисми учун тенглама тузганда, бирлик куч $P=1$ ферманинг ўнг томонида ҳаракатланади деб фараз этамиз ва аксинча.



4.12- расм

3 - тугун N_{12} учун момент нуктаси бўлади. Шу нуктага нисбатан моментлар тенгласини тузамиз (4.10- расм, б).

а) ферманинг ўнг томони тенгласини

$$\sum M_3 = -R_b \cdot 2d - N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан

$$N_{12} = -\frac{2 \cdot 4}{4,9} \cdot R_b = -1,7 R_b.$$

Бу ифодага кўра А таянчи остига ноль, В таянчи остига — 1,7 га тенг бўлган ординаталарни ўлчаб қўямиз ва уларни бирлаштириб, чап тўғри чизиқни ҳосил қиламиз (4.12- расм, б);

б) бу ишларни ферманинг чап томони учун такрорлаймиз

$$\sum M_3 = R_a \cdot 4d + N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан

$$N_{12} = -3,3 R_a.$$

Бу ифодага кўра ўнг тўғри чизик ўтказилади. Штрихланган юза N_{12} зўриқишнинг таъсир чизиғидир (4.12- расм, б).

N_{34} зўриқишнинг момент нуқтаси 2- тугун билан устма-уст ётади. Ферманинг чап ва ўнг қисмлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз ва уларнинг N_{34} га тегишли ординаталарини аниқлаймиз (4.10- расм, б):

а) ферманинг чап қисми учун

$$\sum M_2 = R_a \cdot 5d - N_{34} \cdot h = 0,$$

бундан

$$N_{34} = 5 R_a.$$

б) ферманинг ўнг қисми учун

$$\sum M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0, \quad N_{34} = R_b.$$

Штрихланган юза N_{34} нинг таъсир чизиғидир (4.12- расм, в).

N_{23} зўриқишнинг момент нуқтаси (К) фермадан ташқарида ётади (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини шу нуқтага нисбатан тузамиз:

а) ферманинг чап қисми учун $\sum M_k = R_a(6d + x) + N_{23}h_{23} = 0$ бундан $N_{23} = -2,6 R_a$,

бунга кўра ўнг (тўғри) чизик ўтказилади;

б) ферманинг ўнг қисми тенграмаси $\sum M_k = R_b \cdot x - N_{23} \cdot h_{23} = 0, \quad N_{23} = 0,9 R_b$

Бунга асосан чап (тўғри) чизик ўтказилади.

Чап ва ўнг чизиклар узатувчи чизик ёрдамида туташтирилади. Бунинг учун 3- тугун чап ва 2- тугун ўнг чизикқа проекцияланади ҳамда топилган нуқталар бирлаштирилади. Штрихланган юза N_{23} нинг таъсир чизиғидир (4.12- расм, з).

N_{24} зўриқишнинг таъсир чизиғи тугунларни кесиб олиш усулида курилади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб оламиз ва унинг икки ҳолатини текширамыз (4.10- расм, в).

Биринчи ҳолатда бирлик куч 3 — 4 ва 4 — В панеллардан ташқарида ҳаракатланади, деб фараз этамиз.

Бу ҳолда мувозанат тенгламаси $\sum Y = 0$ дан $N_{24} = 0$ келиб чиқади.

Иккинчи ҳолатда бирлик куч 4- тугунга қўйилган деб фараз этамиз. Бу ҳол учун мувозанат тенгламаси $\sum Y = N_{24} - P = 0$ бўлади, бундан $N_{24} = 1$ келиб чиқади.

Бирлик куч бошқа тугунларда бўлганда, N_{24} зўриқиш нолга тенг бўлади. Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиғи 4.12- расм, д да тасвирланган.

Энди масаланинг иккинчи қисмини ҳал этишга киришамиз, яъни тайёр таъсир чизиқларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қийматини аниқлаймиз. Фермага фақат йиғиқ кучлар қўйилган бўлганлиги учун зўриқишлар қуйидаги формула билан аниқланади:

$$N = P \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Бу формуладан фойдаланишда йиғиқ кучлар пастга йўналганлиги учун (4.10- расм, а) мусбат ишорада, Y_i ординатасининг ишоралари эса таъсир чизиқлари ишораси бўйича олинади.

N_{12} зўриқишининг қийматини аниқлайлик. Ферма тугунларига қўйилган кўзгалмас кучларнинг қиймати $P = 12$ кН. Номалум ординаталар (Y) нинг қиймати N_{12} зўриқишининг таъсир чизиқларидан топилади. Бунинг учун учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланилади.

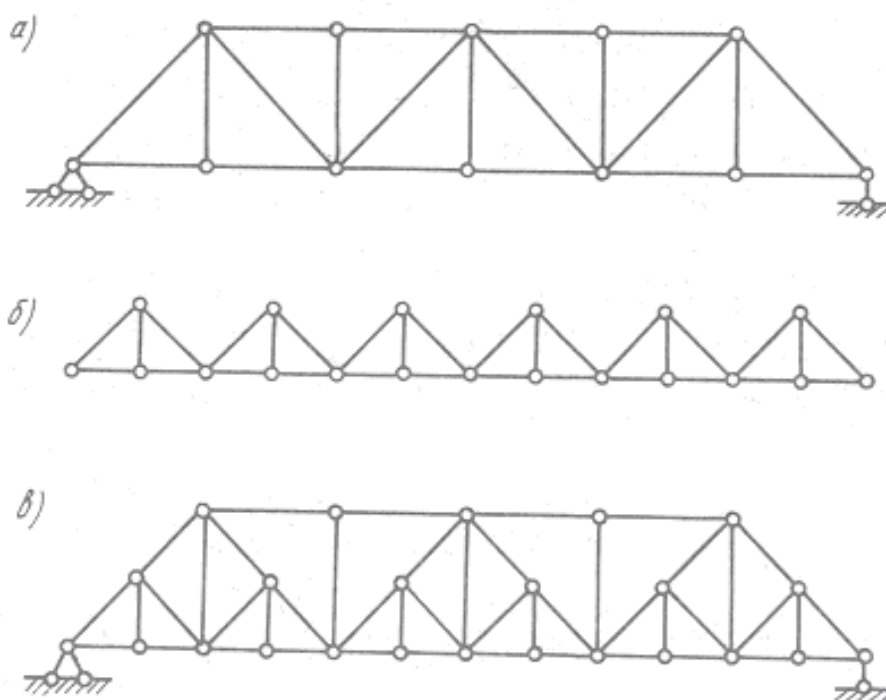
Топилган ординаталарнинг қиймати шаклда кўрсатилган (4.12- расм, б). Изланаётган зўриқишнинг қиймати

$$\begin{aligned} N_{12} &= P(-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5) = \\ &= -12(0,3 + 0,6 + 0,8 + 1,1 + 0,6) = -39,6 \text{ кН} \end{aligned}$$

Бу қиймат аналитик усулда топилган қиймат билан бир хилдир. Қолган зўриқишларнинг қийматлари ҳам шу йўсинда аниқланади.

4.4. Шпренгелли фермалар

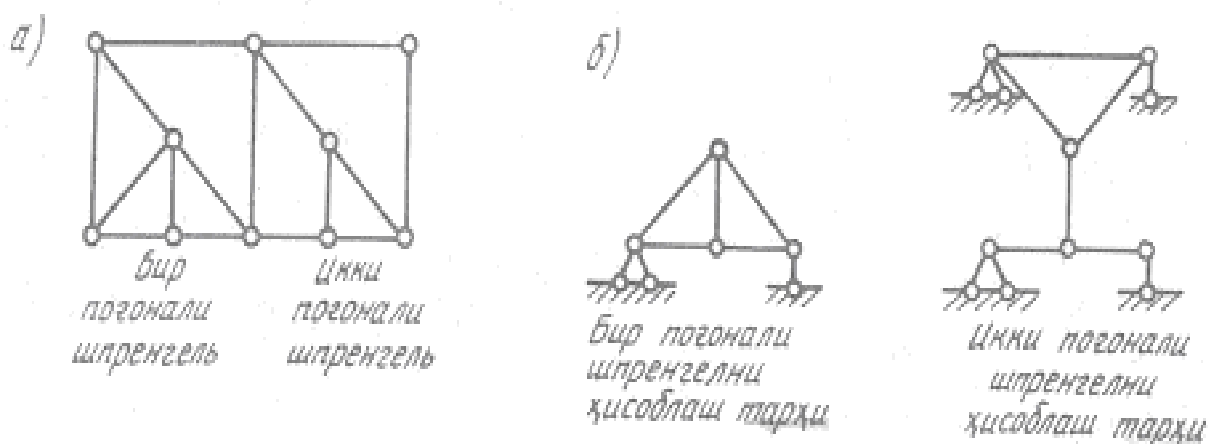
Катта узунликка эга бўлган ферманинг тугунлари орасидаги масофа (панел) ҳам катта бўлади. Бунинг оқибатида тугунларга таянувчи кўндаланг балкалар устига қўйиладиган бўйлама балкаларнинг вазни ортиб кетади. Бу ҳол иктисодий жиҳатдан самарасиздир; Панел узунлигини сақлаган ҳолда бўйлама балканинг узунлигини қисқартириш учун асосий фермага (4.13-расм, а) қўшимча элементлар — шпренгеллар киритилади (4.13-расм, б). Натижада ҳосил бўлган ферма ш п р е н г е л л и ф е р м а деб аталади (4.13-расм, в).



4.13- расм

Асосий ферма барча юкни ўзига қабул қилади, шпренгеллар эса фақат ўзига қўйилган юкни қабул қилади.

Шпренгеллар бир ва икки поғонали бўлиши мумкин (4.14- расм, а). Бир ва икки поғонали шпренгелларнинг ҳисоблаш схемалари 4.14- расм, б- да тасвирланган.



4.14- расм

Шпренгелли фермаларнинг элементлари тўрт тоифага бўлинади:

1) фақат асосий фермага тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар асосий ферма ҳисобидан топилади; ферма таркибига шпренгелларнинг қўшилиши мазкур элементлардаги зўриқишларга таъсир этмайди;

2) фақат шпренгелларга, яъни қўшимча фермачаларга тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар шпренгелларнинг алоҳида ҳисобидан топилади;

3) бир вақтнинг ўзида ҳам асосий фермага, ҳам шпренгелга тегишли бўлган элементлар. Бундай элементдаги зўриқиш икки хил зўриқишнинг йиғиндиси сифатида аниқланади; булардан бири асосий ферма элементининг зўриқиши; иккинчиси эса шпренгел элементининг зўриқишидир;

4) асосий ферманинг шундай элементларидирки, қўзғалувчан юкнинг ҳаракат сатҳига кўра, яъни юкнинг остки ёки устки тасмадан ҳаракатланишига қараб элементдаги зўриқишнинг таъсир чизиқлари турлича бўлади.

1- мисол. 3 — 4, 3 — 4' ва 5 — 4' стерженлардаги зўриқишларнинг таъсир чизиқлари қурилсин (4.15- расм).

Ишни 3 — 4 стерженидаги зўриқишнинг таъсир чизиғини чизишдан бошлайлик. Аввалам бор бу стержень биринчи тоифага кирадиган, яъни

фақат асосий фермага оид бўлган стержендир. Шунинг учун бу масалани ҳал этишда шпренгелларни олиб ташлаб, асосий ферманинг ўзини қолдирамиз (4.15- расм, б) ва ундан 3- тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз, натижада 4.15- расм, в да тасвирланган таъсир нуқтаси эга бўламиз.

3 — 4' стержень иккинчи тоифага оид стержень эканлигини эътиборга олиб, шпренгелни асосий фермадан ажратиб оламиз ҳамда унга мустақил ферма сифатида ёндашамиз (4.15- расм, г). Ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ 3' — тугунга қўйилган деб фараз этиб, 3- тугун учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum Y = \frac{1}{2} + N_{34'} \sin \alpha = 0;$$

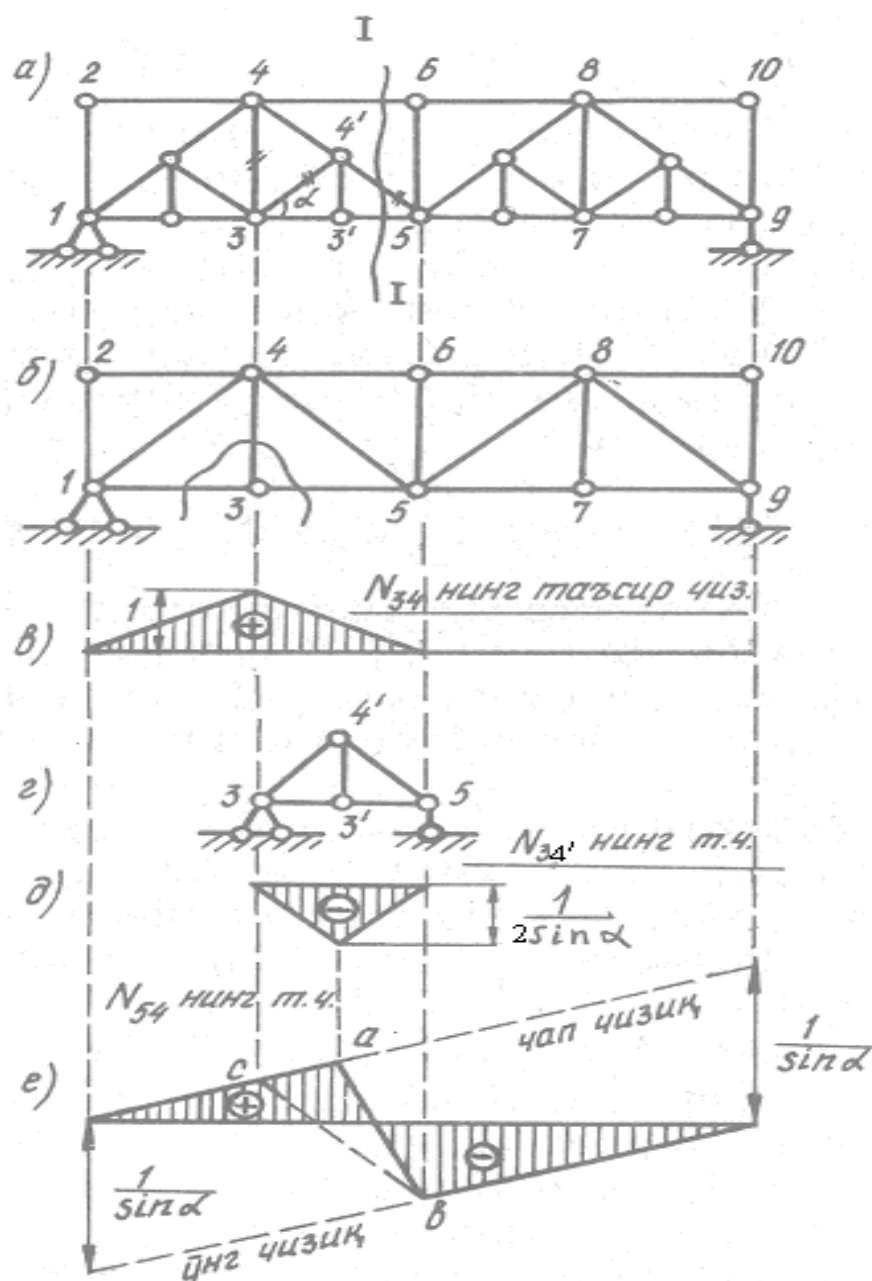
бундан

$$N_{34'} = -\frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Бирлик куч таянчларга қўйилса, 3 — 4' стерженидаги зўриқиш нолга тенг бўлади. Буларга асосан 3 — 4' стерженидаги зўриқиш учун 4.15- расм, д да тасвирланган таъсир чизиғига эга бўламиз.

Учинчи тоифага оид бўлган 5 — 4' стерженидаги зўриқишни аниқлаш учун фермани 1— 1 кесим бўйлаб қирқамиз ва унинг чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

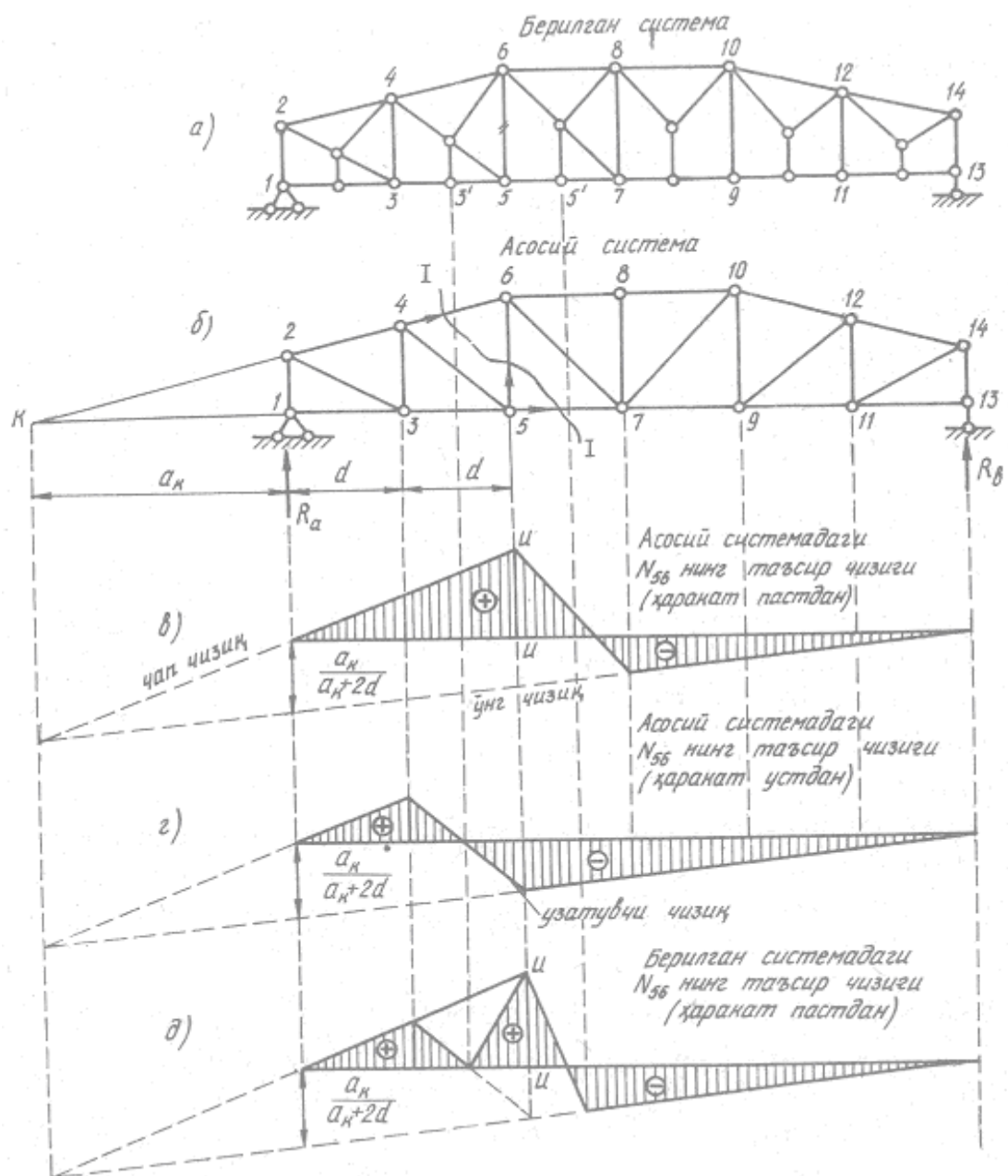
$$\sum Y = R_a + N_{54} \sin \alpha = 0; \text{ бундан } N_{54} = -\frac{R_a}{\sin \alpha}$$



4.15- расм

Бу қийматдан фойдаланиб, ўнг тўғри чизикни ўтказамиз (4.15- расм, е). N_{34} нинг момент нуқтаси чексизликда бўлганлиги сабабли чап тўғри чизикни ўнг тўғри чизикка параллел қилиб ўтказамиз. Узатувчи чизик ab ни ўтказиш учун 5 ва 4' — тугунларини ўнг ва чап чизикларга проекциялаймиз. Агар шпренгел бўлмаганида, узатувчи чизик BC бўйича ўтар эди. Бу ерда abc учбурчак шпренгелнинг асосий элементга таъсирини ифодалайди.

2-мисол. Таркибида икки поғонали шпренгеллар мавжуд бўлган ферманинг 5 — 6 устуни учун таъсир чизиклари қурилсин (4.16- расм, а).



4.16-расм

Ферманинг бу устуни стерженларнинг тўртинчи тоифасига киради, яъни устун асосий фермага тегишли элемент бўлиб, унинг таъсир чизиқлари бирлик куч қайси тасмадан ҳаракатланишига қараб турлича бўлади.

Берилган системадаги шпренгелларни ташлаб юбориш йўли билан асосий системани ҳосил қиламиз (4.16- расм, б). Асосий системанинг 5 — 6 стержени учун таъсир чизиқларини чизамиз. Бунда юкнинг устки ва остки тасмалар бўйича ҳаракати кўриб чиқилади.

Фермани 1 — 1 кесим бўйлаб қирқамиз, бирлик куч кесимдан ўнг томонда ҳаракат қилади, деб фараз этиб, чап қисм учун К нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_k = -R_a a_k - N_{56} \cdot (a_k + 2d) = 0 ,$$

бундан

$$N_{56} = -\frac{R_a \cdot a_k}{a_k + 2d} .$$

Бу қийматга асосан ўнг тўғри чизикни ўтказамиз. Момент нуқтасидан фойдаланиб, чап тўғри чизик ўтказилади. Бирлик куч пастки тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизикни ўтказиш учун чап ва ўнг тўғри чизикларга 5 ва 7 тугунлар проекцияланади (4.16- расм, в). Юк юқори тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизикни ўтказиш учун 4 ва 6 тугунлар проекцияланади (4.16- расм, з).

Ҳар иккала таъсир чизигидан кўриниб турибдики, юк учинчи тугундан чапда ва еттинчи тугундан ўнгда ҳаракатланса, зўриқишнинг қиймати ҳаракат сатҳига боғлиқ бўлмайди.

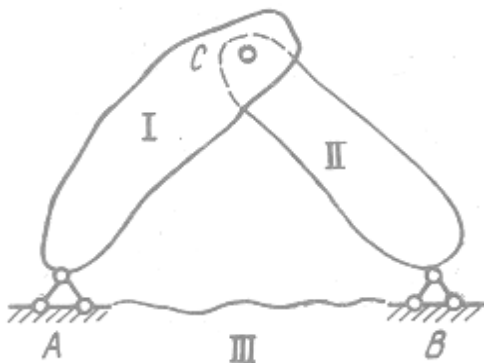
Юк 3' ва 5' тугунларга қўйилса (4.16- расм, а), унинг таъсири икки поғонали шпренгеллар орқали юқори тугунларга узатилади; гўёки ҳаракат устки тасма бўйлаб содир бўлгандек туюлади. Шу сабабга кўра, бундай ҳолда N_{56} нинг ординаталари 4.15- расм, г дан олинади. Унинг изланаётган таъсир чизигини қуриш учун аниқланган ординаталар етарли. Мазкур таъсир чизиги 4.16- расм, д да ўз аксини топган.

5- БОБ. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАР ВА РАМАЛАР

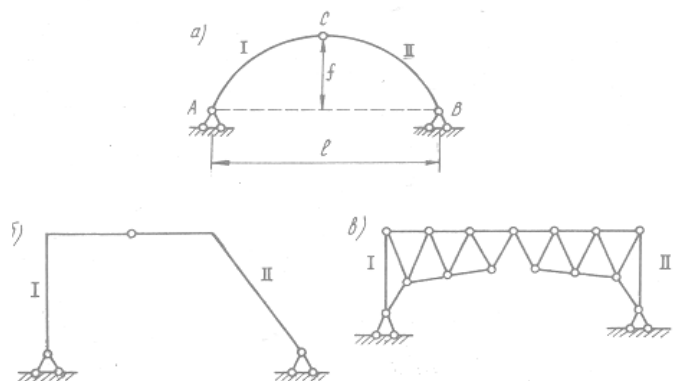
5.1. Уч шарнирли системалар

Уч дискни уч шарнир ёрдамида бириктириш туфайли ҳосил бўлган система уч шарнирли система деб аталади (5.1- расм). Бунда учинчи диск сифатида ер қабул қилинади. Уч диск бир ўқ устида ётмаган уч шарнир (А, В, С) ёрдамида бирикса геометрик ўзгармас система ҳосил бўлиши бизга аввалдан маълум.

Агар I ва II дисклар эгри чизикли стерженлардан иборат бўлса, бундай система уч шарнирли арка деб аталади (5.2- расм, а), агар I ва II диск синик тўғри чизикли стерженлардан ташкил топган бўлса, *уч шарнирли рама* деб аталади (5.2- расм, б); агар I ва II диск ферма бўлса, у ҳолда система *уч шарнирли аркасимон ферма* деб аталади (5.2- расм, в).



5.1- расм



5.2- расм

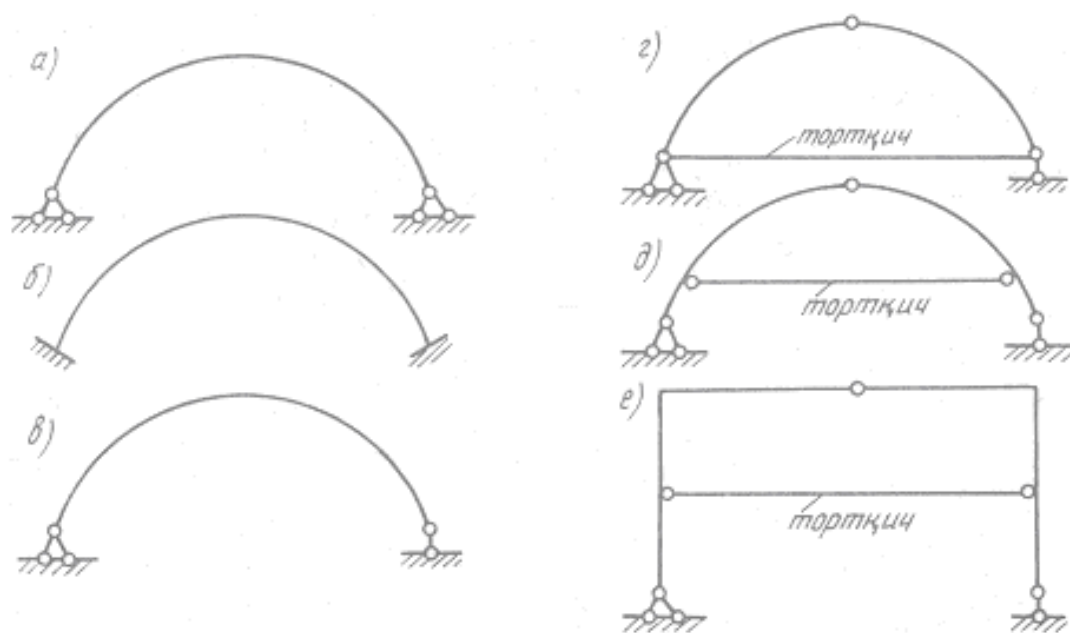
Уч шарнирли системалар вертикал ўққа нисбатан симметрик ёки носимметрик бўлиши мумкин. Симметрик системада С шарнири симметрия ўқи устида жойлашади, А ва В таянч шарнирлари бир сатҳда ётади. Носимметрик системаларда таянчлар турли сатҳда жойлашиши мумкин.

Уч шарнирли система таянчларида вужуда келадиган горизонтал босим ва унга қарши реакция керки (распор) номи билан юритилади; системанинг ўзи эса *керкили система* деб аталади. Аркалар керки кучининг мавжудлиги билан балкалардан фарқ қилади.

Арканинг гумбаздан фарқи шундаки, арканинг кўндаланг кесими анча кичик бўлади, шунинг учун ҳам у стерженли системалар гуруҳига киради. Гумбаз эса қобиклар гуруҳига қўшилади. Қурилишда уч шарнирли, икки шарнирли (5.3- расм, а) ва шарнирсиз (5.3- расм, б) аркалар қўлланилади. Аркаларда керки кучининг мавжудлиги сабабли уларнинг таянчлари шарнирли ёки шарнирсиз қўзғалмас таянч кўринишида ишланади.

Таянчлардан бири шарнирли қўзғалувчан бўлса, у арка эмас, *эгри ўқли балка* деб аталади (5.3- расм, в). Бинокорликда баъзан уч шарнирли аркаларнинг, бошқача хили—тортқичли аркалар ҳам учраб туради (5.3-расм, г).

Тортқичлар шароитга қараб таянчлардан юқорироқ ўрнатилиши ҳам мумкин (5.3- расм, д). Қурилишда тортқичли рамалар ҳам кенг тарқалган (5.3- расм, е). Амалда аркаларнинг қайси туридан фойдаланиш иншоотнинг конкрет иш шароитига қараб ҳал этилади.



5.3- расм

Уч шарнирли ҳамда тортқичли аркалар ва рамалар статик аниқ, икки шарнирли ва шарнирсиз аркалар статик ноаниқ системаларга киради. Бу бобда статик аниқ аркалар ва рамалар кўриб ўтилади. Статик ноаниқ аркалар билан 8- бобда танишамиз.

Аркаларнинг асосий белгилари уларнинг оралик узунлиги l ва арка баландлиги f дир. Ўртадаги С шарнири қулф деб аталади.

Шарнирсиз аркалар Ўрта Осиё бинокорлигида қадим замонлардан буён қўлланилиб келинади. Масжид, мадрасалар, хашаматли сарой ва макбаралар, хаммом, сардоба ва кўприкларда равоқ ва гумбаз кўринишида арка элементларини кўплаб учратамиз. 1502 йили Шайбонийхон томонидан Зарафшон дарёсига қурилган сув айирғич кўпригининг айрим равоқлари ҳозирга қадар сақланиб қолган.

5.2. Уч шарнирли аркаларнинг таянч реакцияларини аниқлаш

Ихтиёрий кучлар қўйилган уч шарнирли арканинг (5.4- расм) таянч реакцияларини аниқлаш талаб этилади.

Маълумки, уч шарнирли аркалар статик аниқ бўлади. Шу боисдан уларнинг таянч реакцияларини аниқлашда статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя этади. Уч шарнирли аркаларда ташқи кучлар таъсирида иккита горизонтал (H_a , H_b) ва иккита вертикал (V_a , V_b) реакция кучлари вужудга келади. Бу номаълум таянч реакциялари қуйидаги тенгламалардан аниқланиши мумкин:

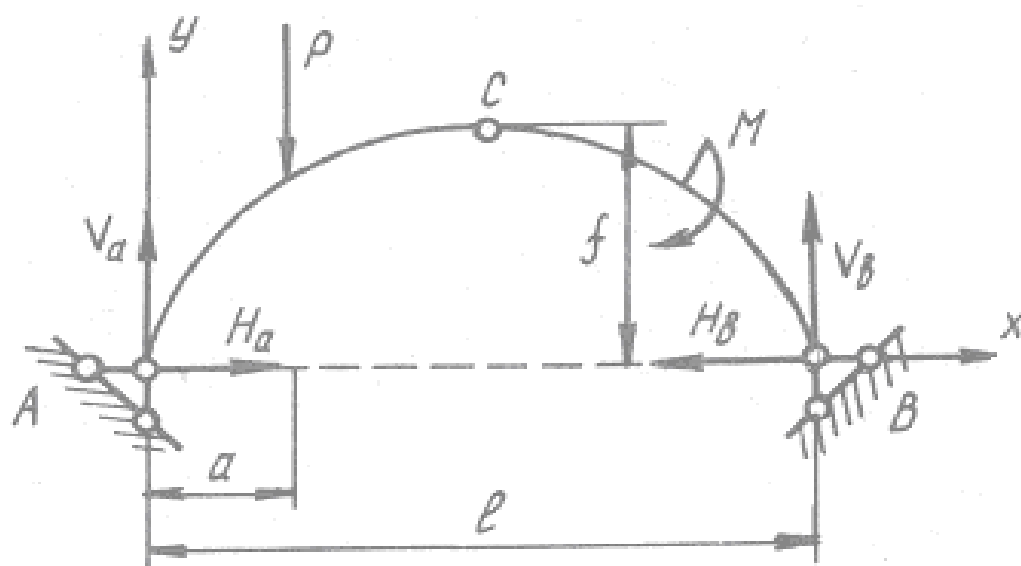
$$\sum M_a = 0; \sum M_b = 0; \sum M_c^{(чан)} = 0; \sum X = 0.$$

В таянчидаги вертикал реакция кучи V_b ни аниқлаш учун А шарнирига нисбатан моментлар йиғиндисини тузамиз.

$$\sum M_a = P \cdot a + M - V_b l = 0.$$

Бундан

$$V_b = \frac{P a + M}{l}.$$



5.4-расм

Мазкур формуланинг сурати А нуктасига нисбатан барча ташқи кучлар моментлари йиғиндиси $\sum M_A^{таш}$ ни ифодалайди. Шунга кўра юқоридаги формулани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$V_b = \frac{\sum M_a^{таш}}{l}$$

А таянчидаги реакциянинг вертикал ташкил этувчисини ҳам шу йўсинда топа оламиз:

$$V_a = \frac{\sum M_b^{таш}}{l}$$

Горизонтал реакция кучи H_b ни аниқлаш учун С шарнирига нисбатан ўнг томонда ётган кучлардан момент оламиз:

$$\sum M_c^{o'ng} = M - V_b \frac{l}{2} + H_b f = 0,$$

бундан

$$H_b = \frac{V_b \frac{l}{2} - M}{f} \quad \text{ёки} \quad H_b = \frac{\sum M_c^{o'ng}}{f}.$$

Бу ерда ноль индекси узунлиги ва юкланиши арка билан бир хил бўлган оддий балкадаги момент эканлигини билдиради.

А таянчидаги горизонтал реакция куч H_a икки тенгламанинг биридан, яъни $\sum M_c^{chap} = 0$ ёки $\sum X = 0$ тенгламаларидан аниқланиши мумкин. Проекция тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum X = H_a - H_b = 0; \text{ бундан } H_a = H_b = H.$$

Охириги ифода шуни кўрсатадики, агар аркага вертикал кучлар қўйилган бўлса, горизонтал реакциялар ўзаро тенг бўлар экан. Уч шарнирли аркалар учун баён этилган қоидалар тўлалигича уч шарнирли рамалар учун ҳам тааллуқлидир.

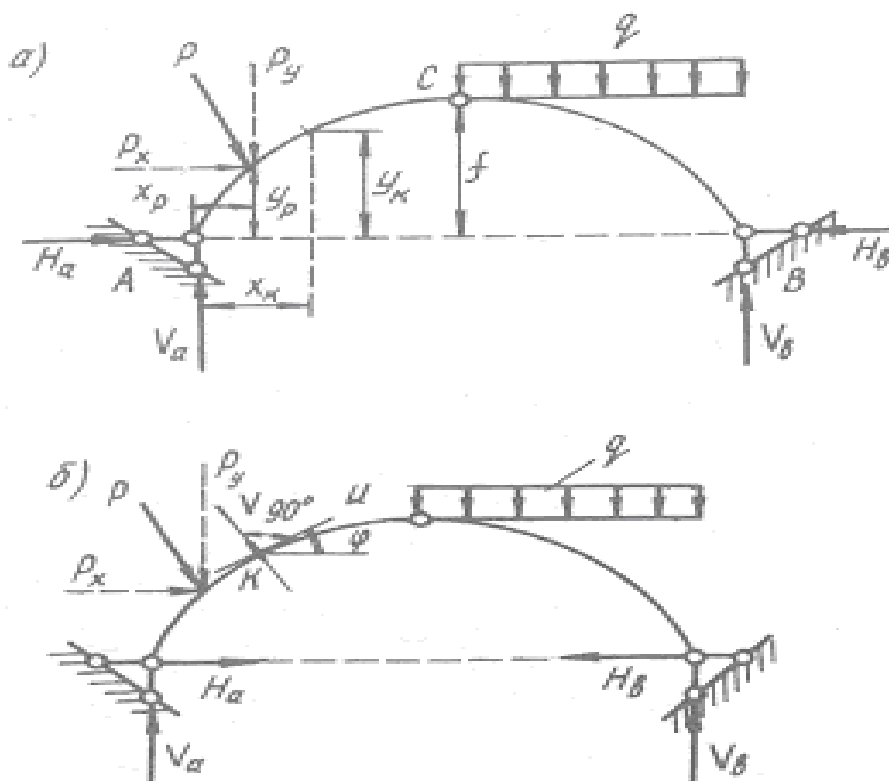
5.3. Уч шарнирли аркаларни аналитик усулда ҳисоблаш

Ҳисоблашдан мақсад бу ерда ҳам бошқа конструкциялардаги сингари ички кучларни аниқлашдан иборатдир. Ички кучлар деганда, арканинг кўндаланг кесимларида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўладиган эгувчи момент M , кўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

Ички кучларни аниқлашда ишора қоидаси балкадаги қоидага ўхшашдир, яъни куч арканинг эгрилигини оширса — ишора манфий, эгрилигини камайтирса — мусбат, кесимга нисбатан куч соат стрелкаси бўйича айланса — мусбат, тескари йўналишда — манфий олинади.

Бўйлама кучлар ишораси бошқача: куч стерженни сикса — мусбат, чўзса — манфий олинади.

Уч шарнирли арканинг ихтиёрий K кесимида вужудга келадиган эгувчи момент M_k ни аниқлаймиз (5.5- расм, *а*). Бунинг учун аркани шу кесим бўйича ҳаёлан қирқамиз ва кесимнинг чап ёки ўнг томони учун моментлар йиғиндисини ёзамиз:



5.5- расм

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - P_y (x_k - x_p) - P_x (y_k - y_p). \quad (5.1)$$

Бу ерда x_k ва y_k — арканинг K кесими координаталари;

P_x ва P_y — ташқи куч P нинг горизонтал ва вертикал проекциялари;

x_p ва y_p — куч қўйилган нуқтанинг координаталари.

Агар аркага қўйилган куч оғма эмас, тик бўлса, у ҳолда P кучининг горизонтал проекцияси ноль, $P_y = P$ ва $H_a = H_b = H$ бўлади.

(5.1)- ифода эса қуйидаги кўринишни олади:

$$M_k = V_a x_k - P(x_k - x_p) - H y_k \quad (5.2)$$

Бу формуладаги $V_a x_k - P(x_k - x_p)$ ифода, узунлиги ва юкланиши жиҳатидан шу арка билан бир хил бўлган оддий балканинг эгувчи моменти, M_k^0 ни англатади. Бунни эътиборга олсак, (5.2) формула қуйидаги содда кўринишга келади:

$$\boxed{M_k = M_k^0 - H y_k} \quad (5.3)$$

Кўндаланг ва бўйлама кучларни аниқлаш учун арканинг К кесимида ўринма (u) ва шу ўринмага тик бўлган чизик (v) ўтказамиз (5.5- расм, б). Кўндаланг кучларни аниқлаш учун u ўқида, бўйлама кучларни аниқлаш учун v ўқида нисбатан кучлар проекцияларининг йиғиндисини оламиз:

$$Q_k = V_a \cos \varphi - H_a \sin \varphi - P_y \cos \varphi - P_x \sin \varphi;$$

$$N_k = V_a \sin \varphi + H_a \cos \varphi - P_y \sin \varphi + P_x \cos \varphi. \quad (5.4)$$

Бу ерда φ — ўринма билан горизонтал чизик орасидаги бурчак. Агар аркага қўйилган кучлар тик бўлса, у ҳолда (5.4) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$Q_k = (V_a - P) \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

$$N_k = (V_a - P) \sin \varphi + H \cos \varphi. \quad (5.5)$$

Бу ерда $|V_a - P|$ аркага тенг кучли бўлган оддий балкадаги кўндаланг куч Q_k^0 дир. Буни эътиборга олсак, (5.5) ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N_k = Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi. \end{cases} \quad (5.6)$$

(5.3) ва (5.6) формулалардан фойдаланиб, арканинг бир қанча кесимлари учун эгувчи момент, кўндаланг ва бўйлама кучлар аниқланади ҳамда M , Q ва N эпюралар қурилади.

Арка моменти балка моментларидан кичик бўлиши (5.3) формуладан яққол кўриниб турибди.

5.4. Уч шарнирли арканинг мақбул ўқи

Агар аркага вертикал йўналишда ёйиқ куч қўйилган бўлса, арканинг ўқини шундай олиш мумкинки, бунда арканинг барча кесимларида эгувчи момент нолга тенг бўлади. Эгувчи моментлари нолга тенг бўлган арка ў қ и

мақбул (рационал) ўқ деб аталади. Арканинг ўзи эса мақбул ўқли арка деб юритилади (5.6- расм).

Арканинг мақбул ўқи тенгламасини тузиш учун (5.3) формуладан фойдаланамиз. Ушбу формуладаги арка моментини нолга тенглаймиз:

$$M_x^0 - H y = 0. \quad (a)$$

Шаклдан

$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l - x).$$

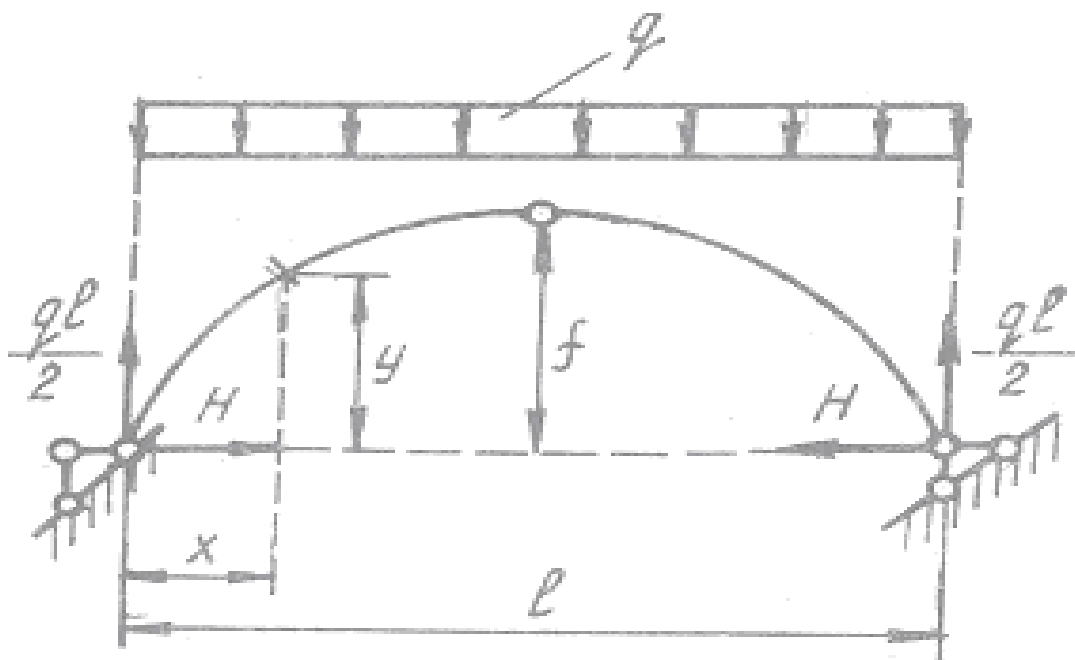
$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{ql}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}. \quad (a')$$

Ифода (a) дан

$$y = M_x^0 / H \quad (a'')$$

келиб чиқади. (б) да аниқланган қийматларни (в) га қўямиз:

$$y = \frac{(qx/2)(l-x) \cdot 8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2} \cdot (l-x)x.$$



5.6- расм

Шу тенглама ёрдамида чизилган парабола арканинг мақбул ўқи бўлади, мақбул ўқли аркада эгувчи момент нолга тенгдир.

5.5. Уч шарнирли аркаларни қўзғалувчи юк таъсирига ҳисоблаш

Балка ва фермалар ҳисобида кўриб ўтганимиздек, иншоотларни қўзғалувчи юклар таъсирига ҳисоблаш учун таъсир чизиқлари деб аталувчи график чизиб олинади. Таъсир чизиқлари ҳар бир таянч реакцияси ва ҳар бир ички куч (M , Q , N) учун алоҳида равишда қурилади.

Таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари

Чап ва ўнг таянч шарнирларига нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (5.7-расм,а):

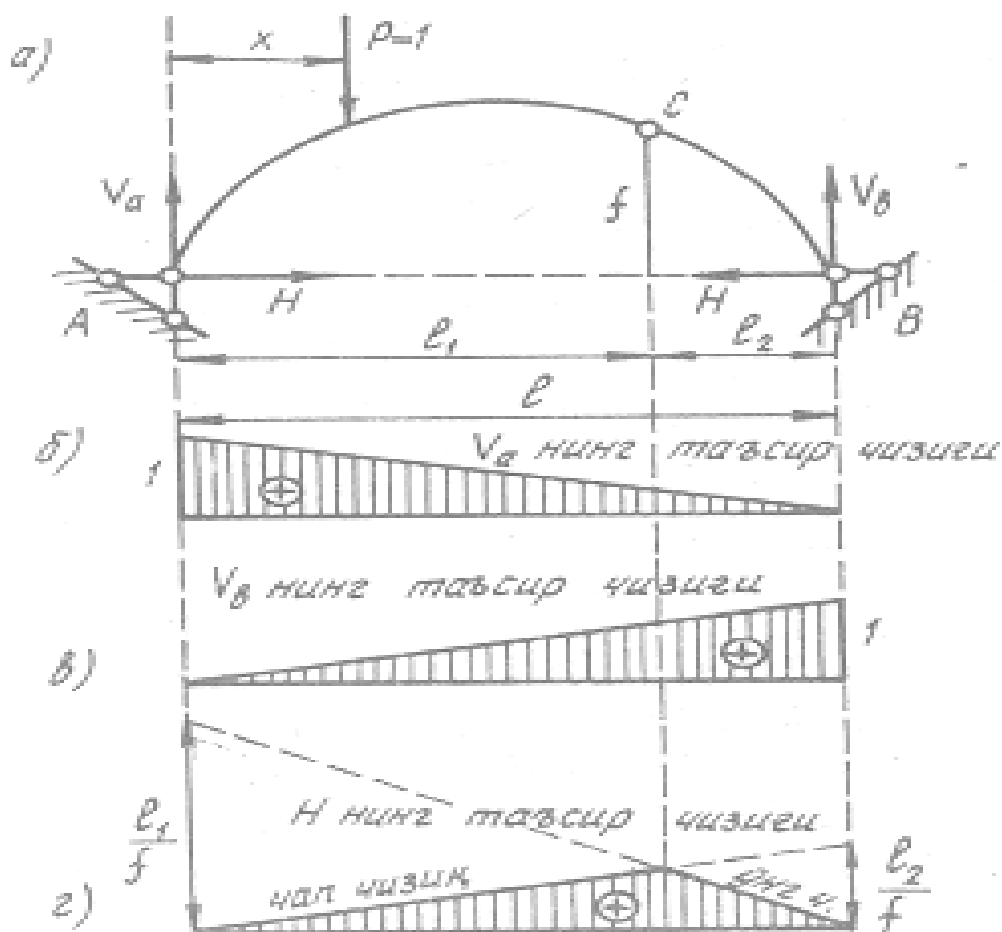
$$\sum M_b = V_a \cdot l - P(l - x) = 0;$$

$$\sum M_a = -V_b l + P \cdot x = 0.$$

Бу тенгламалардан V_a ва V_b топилади.

Тузилган ифодалар балка таянч реакцияларининг тенгламасидан фарқ қилмайди. Демак, арка реакцияларининг таъсир чизиқлари ҳам балканинг таъсир чизиқларидан фарқ қилмаслиги керак (5.7- расм, б, в).

Маълумки, керки кучи $H = M_c^0 / f$ тенгламаси ёрдамида аниқланади. Бундан H нинг таъсир чизиғи балка моменти M_c^0 нинг таъсир чизиғидан $1/f$ маротаба кичик эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун H нинг таъсир чизиғини қуришда A таянчи остига l_1 нинг ўрнига l_1/f ни ўлчаб қўямиз. Бу миқдорни B таянч остидаги ноль билан туташтирсак, ўнг тўғри чизиқ келиб чиқади. Чап тўғри чизиқни ўтказиш учун C шарнирни ўнг тўғри чизиққа проекциялаймиз, топилган нуқтани A таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Штрихланган юза керки кучи — горизонтал реакция H нинг, таъсир чизиғидир (5.7- расм, з). Агар $l_1 = l_2 = l/2$ бўлса, C шарнири остидаги ордината $l/4f$ бўлади.



5.7- расм

Эгувчи момент M нинг таъсир чизиғи

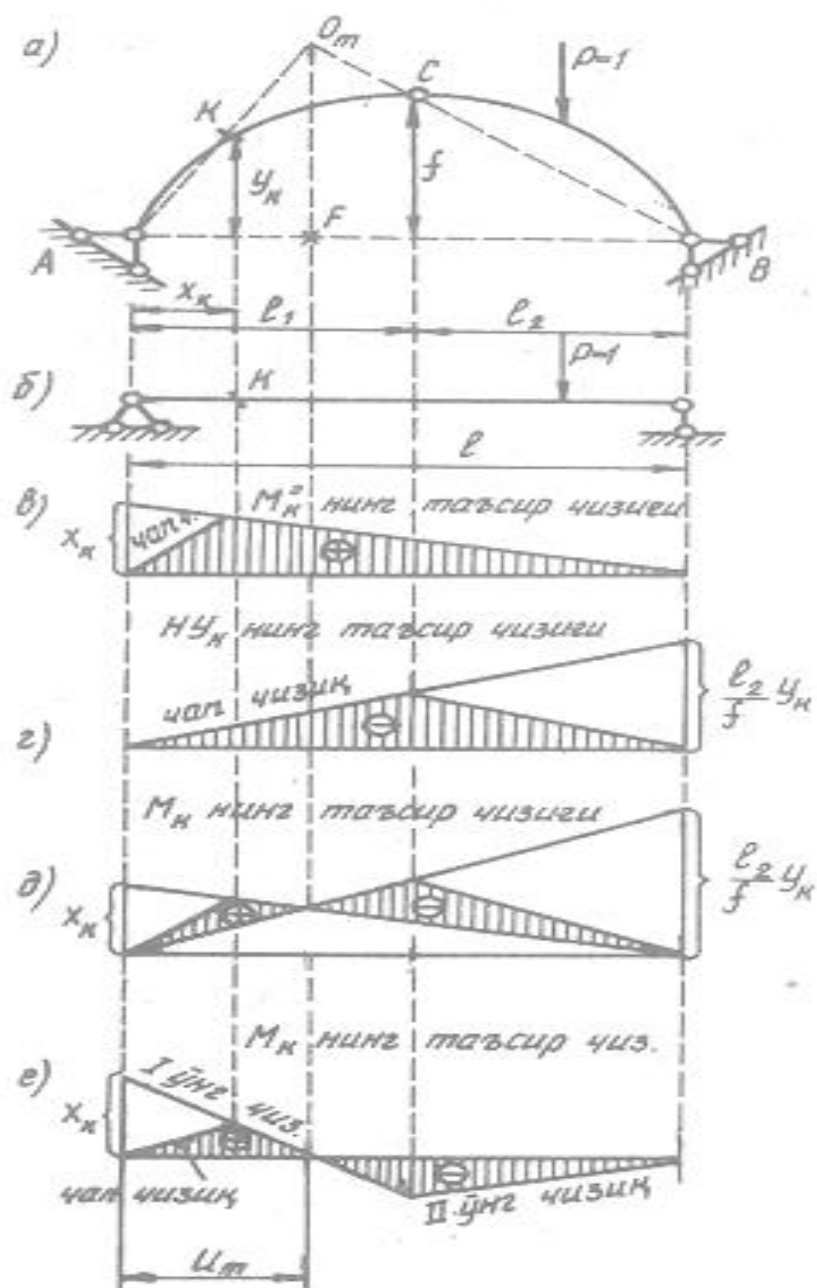
Аркининг исталган кесимидаги эгувчи момент $M_k = M_k^0 - H y_k$ формуласи ёрдамида аниқланишини юқорида кўриб ўтдик. Аркининг ихтиёрий K кесимидаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини куришда ҳам шу формуладан фойдаланамиз (5.8- расм, а).

Формулага қараганда, аркининг таъсир чизиғи оддий балканинг (5.8- расм, б) K кесимидаги эгувчи момент M_k^0 нинг таъсир чизиғи билан y_k марта катталаштирилган керки кучи H нинг таъсир чизиклари орасидаги фаркка тенг бўлади. M_k^0 ва $H y_k$ нинг таъсир чизиклари 5.8- расм, в,г — да тасвирланган. Ҳар иккала шаклни устма-уст жойлаштириш йўли билан

изланаётган таъсир чизиғини ҳосил қиламиз (5.8- расм, ∂). Ҳосил бўлган таъсир чизиғини тўғри ўққа жойлаштира ҳам бўлади (5.8-, расм, e).

5.8- расм, ∂ — да тасвирланган M_k нинг таъсир чизиғида M_k нинг ўнг чизиғи билан H_{y_k} нинг чап чизиғи ноль нуқтасида кесишади. Ушбу нуқтанинг ҳолатини график усулда аниқласа бўлади. Бунинг учун ВС ва АК чизикларининг кесишув нуқтаси 0 ни аниқлаймиз (5.8- расм, a). Таъсир чизиғининг 0 нуқтаси ана шу нуқта остида ётади.

M_k нинг таъсир чизиғини бевосита ноль нуқтаси орқали курса ҳам бўлади. Бунинг учун ихтиёрий ўққа X_k масофаси ўлчаб қўйилади (5.8- расм, e). O_m нуқтасини ўққа проекциялаб, ноль (O) нуқтаси аниқланади. X_k нинг учи 0 билан бирлаштирилади ва C шарнирининг проекцияси билан учрашгунча давом эттирилади. Ўтказилган чизик I ўнг чизик деб аталади. II ўнг чизик шаклда кўрсатилгандек ўтказилади. Чап чизик одатдагидек ўтказилади, яъни K кесимининг проекцияси билан A таянчи остидаги ноль нуқта бирлаштирилади. Штрихланган юза M_k нинг таъсир чизиғи бўлади.



5.8- расм

Ноль нуқтасининг абсциссаси u_m AFO_m ва BFO_m учбурчакларидан топилади:

$$FO_m = \frac{y_k}{x_k} u_m = \frac{f}{l_2} (l - u);$$

бундан $u_m = \frac{f l x_k}{y_k l_2 + f x_k}$ келиб чиқади.

Кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғи

Уч шарнирли арканинг К кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини куришда қуйидаги формуладан фойдаланамиз (5.9- расм, а):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k ;$$

бу ерда Q_k^0 оддий балканинг К кесимидаги кўндаланг куч (5.9- расм, б); φ_k — К кесимига ўтказилган уринма билан горизонтал ўқ орасидаги бурчак.

Арка бўйлаб бирлик куч ҳаракат қилганда, Q_k^0 билан H ўзгариб боради, $\cos \varphi_k$ билан $\sin \varphi_k$ эса ўзгаришсиз қолади. Бунга кўра Q_k нинг таъсир чизиғи $Q_k^0 \cos \varphi_k$ билан $H \sin \varphi_k$ нинг таъсир чизиқлари алгебраик йиғиндиси сифатида курса бўлади. Ана шу йиғинди 5.9- расм, в-да тасвирланган, яъни икки хил таъсир чизиғи устма-уст жойлаштирилган. Микдорлари тенг, ишораси карама-қарши бўлган ординаталар қисқариб кетган, қолганлари штрихланган. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиғидир.

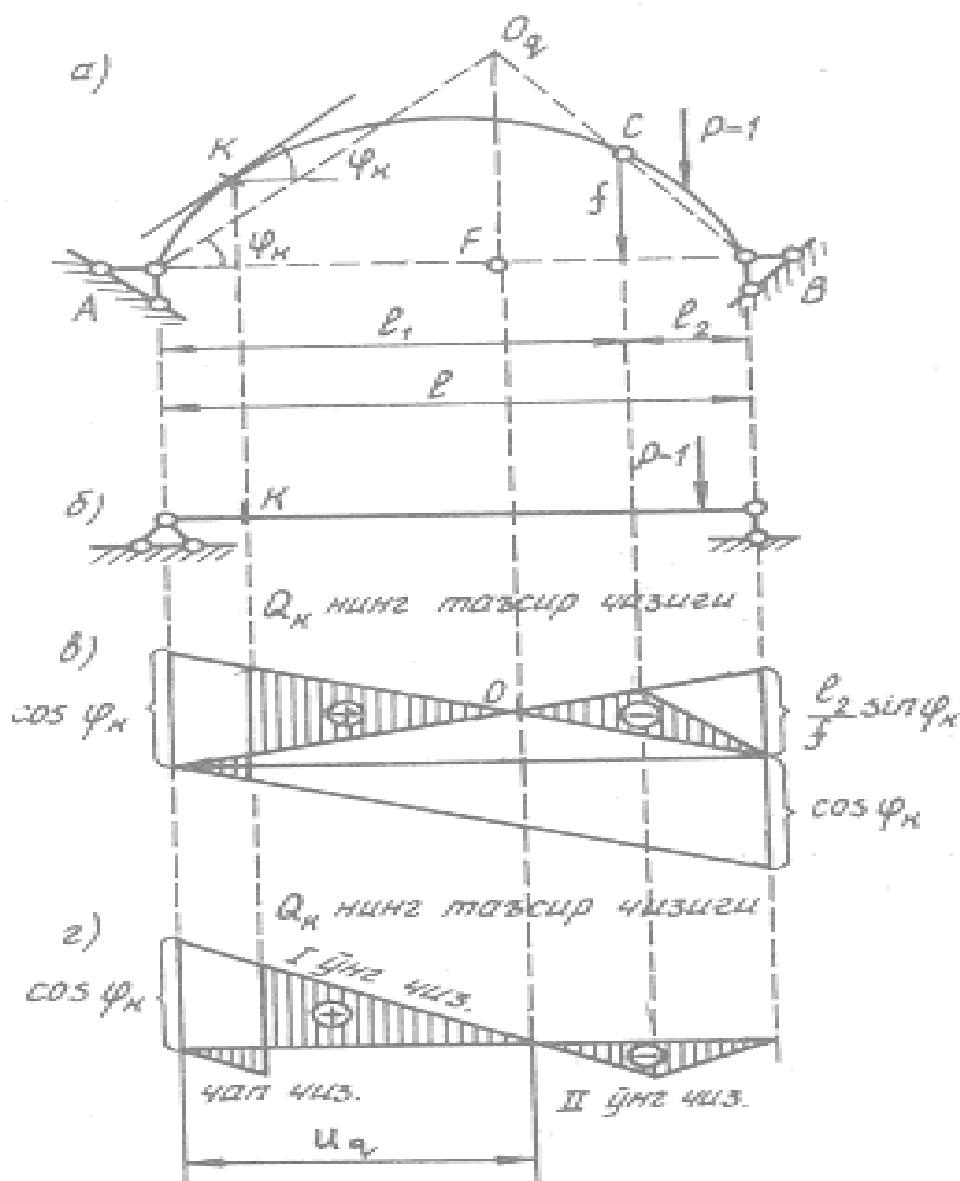
Агар ҳосил бўлган шаклни горизонтал ўқ устига жойлаштирсак, Q_k нинг таъсир чизиғи 5.9- расм, г да тасвирланган кўринишни олади.

Мазкур таъсир чизиғини ноль нуқтаси усулида, яъни график усулда курса ҳам бўлади. Бунинг учун аввал ноль нуқтанинг ҳолати аниқлаб олинади, изланаётган нуқта (O_q) икки чизиқнинг кесишув нуқтаси тариқасида топилади. Улардан бири ВС чизиғи, иккинчиси К кесимидан ўтган уринмага А шарниридан ўтказилган параллел чизиқдир (5.9- расм, а). Шу нуқтанинг горизонтал ўққа проекцияси (0) ноль нуқта ҳисобланади.

Ихтиёрий горизонтал ўққа $\cos \varphi_k$ масофани ўлчаб қўямиз (5.9- расм, г). Масофанинг учини ноль нуқта билан туташтирамиз ва уни С шарнири проекцияси билан учрашгунча давом эттирамиз. Ўтказилган кесма I ўнг чизиқ бўлади. II ўнг чизиқ шаклда кўрсатилгандек ўтказилади. Чап чизиқ ўнг I чизиққа параллел равишда ўтказилиб, К кесимининг проекциясига қадар давом этади. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиғи ҳисобланади.

Ноль нуктанинг абсиссаси AFO_q ва BFO_q учбурчаклари орқали

$U_q = \frac{fl}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_k}$ формуладан топилади.



5.9- расм

Бўйлама куч N нинг таъсир чизиғи

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги бўйлама куч N_k нинг таъсир чизиғини куришда $N_k = Q_k \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k$ формуласидан фойдаланамиз (5.10 - расм, а).

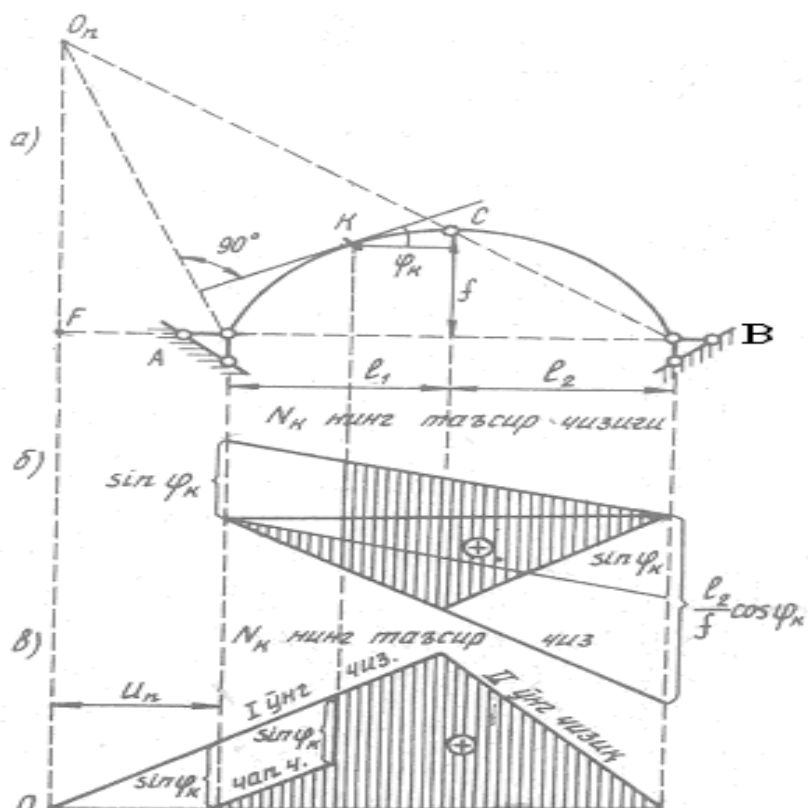
Формулага қараганда N_k нинг таъсир чизиғини $Q_k^o \sin \varphi_k$ билан $H \cos \varphi_k$ таъсир чизиқларининг йиғиндиси сифатида курса бўлади. Бу ишни амалга

ошириш учун аввал $Q_k^0 \sin \varphi_k$ нинг таъсир чизиғини курамиз. Сўнгра бунинг устига $H \cos \varphi_k$ нинг таъсир чизиғини тескари равишда жойлаймиз (5.10-расм, б). Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизиғи бўлади.

Илгари кўриб ўтганимиздек, N_k нинг таъсир чизиғини ҳам ноль нуқтаси усулида куриш мумкин. Бунинг учун аввал O_n нуқтаси топиб олинади (5.10-расм, а). Бу нуқта ҳам иккита чизиқнинг кесишув нуқтасида ётади: чизиқлардан бири ВС кесмаси, иккинчиси эса К кесимидан ўтказилган уринмага тик бўлган AO_n чизиғидир. Топилган O_n нуқтасини горизонтал ўққа проекциялаб, ноль (0) нуқтасини аниқлаймиз (5.10-расм, в). А таянч остига $\sin \varphi_k$ кесмасини ўлчаб қўямиз. Кесманинг юқори учини ноль нуқта билан бирлаштириб, С шарнирининг проекциясигача давом эттирамиз. Бу I ўнг чизиқ бўлади. Чап тўғри чизиқ I ўнг чизиққа параллел равишда ўтказилади. Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизиғидир.

Ноль нуқтасининг абсциссаси AFO_n ва BFO_n учбурчаклари орқали куйидаги формуладан топилади:

$$u_n = \frac{f l}{l_2 \operatorname{ctg} \varphi_k - f}.$$

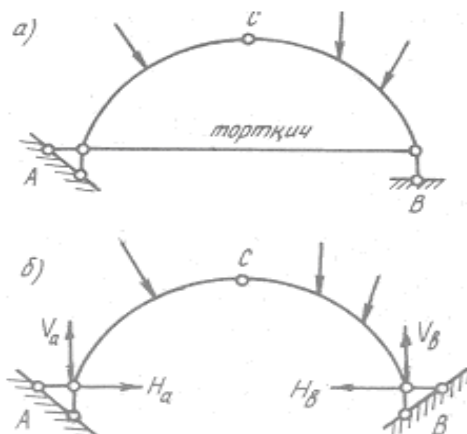


5.6. Уч шарнирли тортқичли арка ва рамаларни ҳисоблаш.

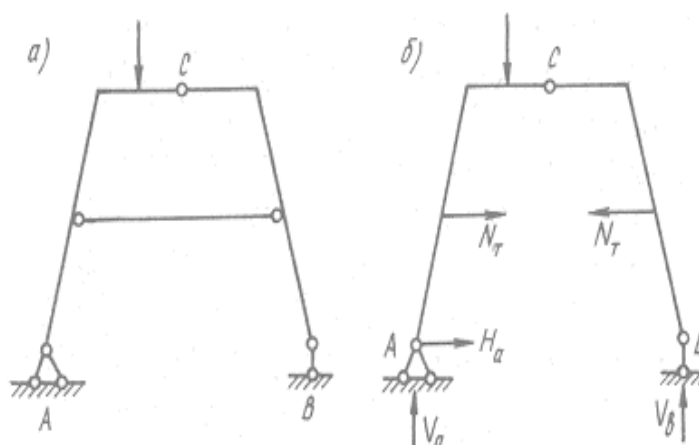
Ядро моментлари

Уч шарнирли тортқичли арка ва рамаларнинг ҳисоби тортқичсиз системалар ҳисобидан бироз фарқ қилади. Бу тафовутни 5.11- расм, *а* — да тасвирланган арка мисолида кўриб ўтамиз.

Аркининг *В* таянчи шарнирли қўзғалувчидир. Ўртадаги *С* шарнирнинг мавжудлигини инобатга олсак, бу системага тортқичнинг зарурийлиги ўз-ўзидан аён бўлади. Чунки бу системанинг геометрик ўзгармаслигини айнан шу тортқич таъминлайди. Бошқача қилиб айтганда, *В* таянчи горизонтал йўналишда тортқич туфайли қўзғалмасдир. Демак, тортқични *В* таянчининг горизонтал стержени сифатида талқин этса ҳам бўлади. Бу эса ҳисоб жараёнида тортқичсиз арка (5.11- расм, *б*) учун берилган формулалардан бемалол фойдаланиш имконини беради. Тортқичдаги зўриқиш горизонтал таянч реакцияси H_b га тенг бўлганлиги сабабли тортқичли арка кўндаланг кесимларидаги зўриқишлар тортқичсиз арка кўндаланг кесимларидаги зўриқишларга тенг бўлади. Шунингдек, тортқичли ва тортқичсиз аркаларнинг таъсир чизиқларида ҳам ҳеч қандай тафовут бўлмайди.



5.11- расм



5.12- расм

Баъзан уч шарнирли арка ва рамаларда тортқич таянчдан юқориорққа ўрнатилади (5.12- расм, *а*). Тортқични ташлаб юбориб, ўрнига қарама-қарши

йўналган кучлар N_T қўямиз (5.12- расм, б). Кучларнинг қиймати тортқичдаги зўриқишга тенг бўлади. Бу ерда асосий масала ана шу зўриқишни аниқлашдан иборатдир. Раманинг таянч реакциялари статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилади.

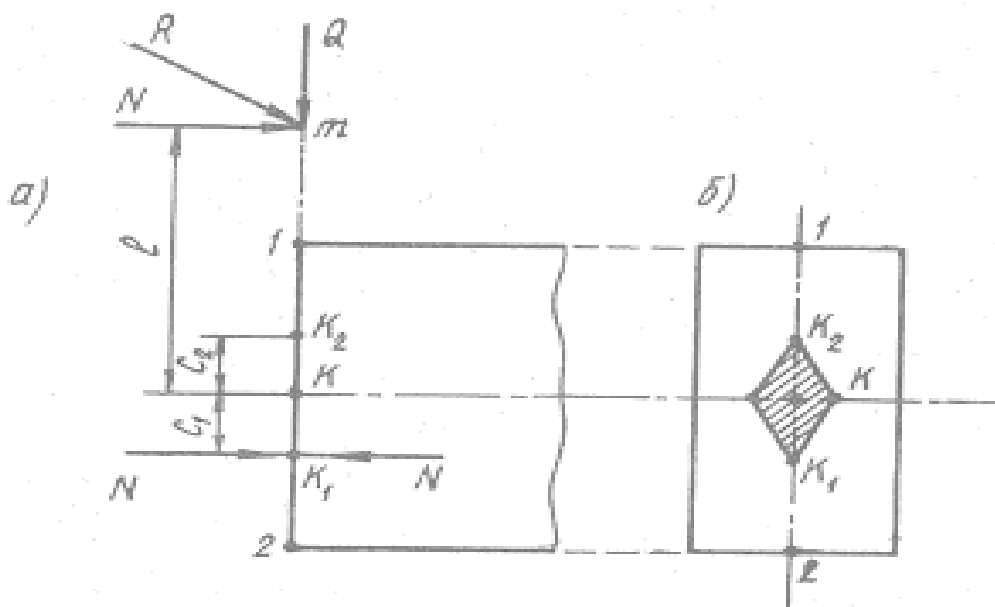
N_T нинг қиймати С шарнирига нисбатан чап ёки ўнг томонда жойлашган кучларнинг моментлари йиғиндисини ифодаловчи тенгламалар $\sum_{chap} M_c = 0$ ёки

$\sum_{o'ng} M_c = 0$ дан топилади.

N_T аниқлангач, арка ёки раманинг исталган кесимидаги ички кучлар тортқичсиз система учун берилган формулалардан фойдаланиб топилади.

Ядро моментлари ва нормал кучланишлар. Материаллар қаршилиги фанидан маълумки, номарказий сиқилишда кесимнинг четки нуқталарида ҳосил бўладиган энг катта ва энг кичик нормал кучланишлар қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$



5.13 –расм

Бу ерда F — элементнинг кўндаланг кесим юзаси; W — кўндаланг кесимнинг қаршилиқ momenti; N ва M — кесимга таъсир этувчи бўйлама куч ва эгувчи момент.

Арка кесимининг четки нуқталаридаги номаълум кучланишларни аниқлашда ядро моментларидан фойдалансак, масала анча осонлашади.

Арка кесимининг энг четки нуқталари 1 ва 2 да ҳосил бўладиган нормал кучланишларни аниқлайлик (5.13- расм, *a*). Арканинг чап қисмини ўнг қисмига бўлган таъсирини m нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи R орқали белгилайлик. Тенг таъсир этувчи куч R ни бўйлама N ва кўндаланг Q ташкил этувчиларга ажратамиз.

1- нуқтадаги нормал кучланишни кесим ядроси орқали аниқлаймиз (5.13- расм, *b*). Маълумки, бўйлама сиқувчи куч — ядронинг хошиясига қўйилса, кесим қирғоқларида нормал кучланиш нолга тенг бўлади. Бинобарин, бўйлама куч кесим ядросининг K_1 нуқтасига қўйилса, 1- нуқтадаги нормал кучланиш ноль бўлади.

Кесим ядросининг K_1 нуқтасига ўзаро тенг, аммо қарама-қарши йўналган N кучини қўямиз. Бу кучлардан бири m нуқтасига қўйилган N кучи билан жуфт куч, яъни момент ҳосил қилади:

$$M_{k1} = N(l + C_1)$$

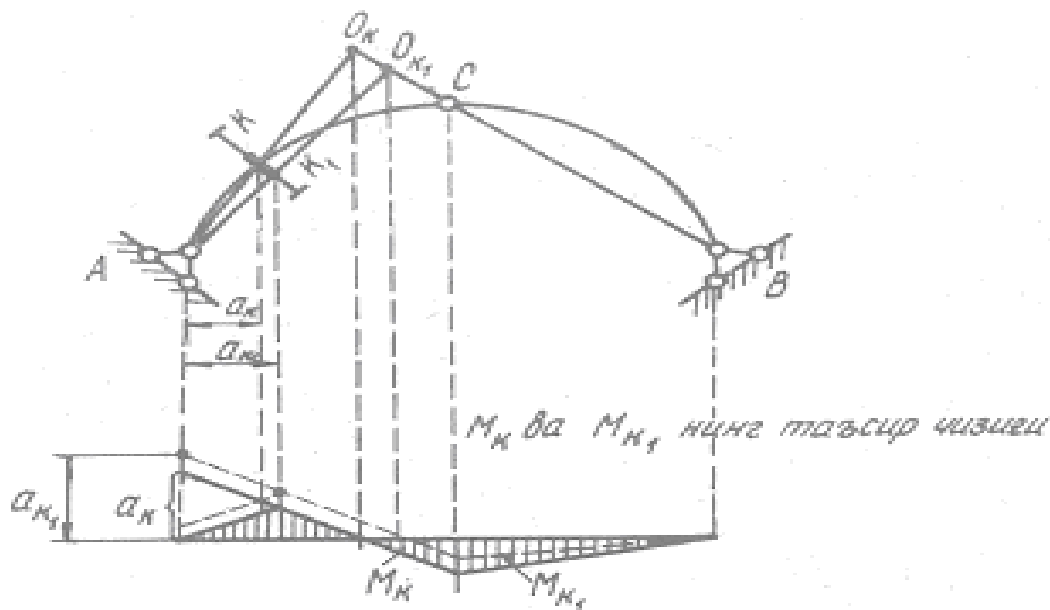
иккинчиси эса 1 — нуқтада нолга тенг бўлган кучланиш ҳосил қилади. Натижада 1- нуқтадаги кучланиш: σ фақат эгувчи момент M_{k1} орқали ифодаланади: $\sigma_1 = \frac{M_{k1}}{W}$; бу ердаги M_{k1} — я д р о м о м е н т и деб аталади.

2- нуқтадаги кучланишни ҳам ядро momenti орқали топса бўлади:

$$\sigma_2 = \frac{M_{k2}}{W} \quad \text{бу ерда} \quad M_{k2} = N(l + C_2).$$

5.14- расмда K кесимидаги эгувчи momenti M_k ва ядро momenti M_{k1} нинг таъсир чизиқлари берилган. Ҳар иккала таъсир чизиғи ноль нуқтаси усулида қурилган. Графикни яшаш тартиби ҳар иккала момент учун бир хил. Асосий фарқ O_{k1} нуқтасини аниқлашда намоён бўлади. Агар O_k нуқтасини топишда АК нуқталари бирлаштирилса, O_{k1} нуқтасини топишда AK_1 нуқталари туташтирилади. Шунинг эвазига ноль нуқталар орасида озгина фарқ бўлади.

Бу фарқ ўз навбатида таъсир чизиклари ординатлари орасидаги тафовутга олиб келади.



5.14- расм

5.7. Уч шарнирли аркасимон фермаларни ҳисоблаш

Аркасимон фермалар тузилиш жиҳатидан фермаларни, ишлаш жараёни жиҳатидан аркаларни эслатади. Шунинг учун ҳам уларни ҳисоблашда баъзан аркага, баъзан фермага хос бўлган қоидалардан фойдаланилади. Муҳими шундаки, уч шарнирли аркасимон фермалар керкили (распорли) системаларга киради, яъни буларда ҳам вертикал кучлар таъсирида горизонтал реакция кучлари пайдо бўлади (5.15- расм, а). Керки кучларини шарнирли кўзгалмас таянчлар қабул қилади. Аркасимон ферманинг икки диски қулф шарнири С воситасида бириктирилади. Расмдан кўриниб турибдики, дисклар яхлит эмас панжародор қилиб ферма шаклида ишланган.

5.15- расм, а — да берилган уч шарнирли аркасимон ферманинг ҳисоби билан танишиб чиқамиз.

Берилган системанинг вертикал ва горизонтал реакциялари яхлит арканинг реакциялари каби аниқланади. Масалан, чап таянчдан x масофада

бирлик куч $P = I$ қўйилган бўлса, V_a ва V_b реакциялари қуйидагича топилади:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

Керки кучи H қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$H = \frac{M_c^0}{f};$$

бу ерда M_c^0 — аркага тенг узунликка эга бўлган оддий балканинг C кесимидаги момент.

V_a , V_b ва H нинг таъсир чизиқлари 5.15- расм, *б*, *в*, *г* - да тасвирланган.

Уч шарнирли аркасимон ферманинг 1 — 2 стерженидаги зўриқишнинг таъсир чизигини курамиз (5.15- расм, *а*). Фермани 1 — 1 кесими бўйлаб қирқамиз. Зўриқиши изланаётган стержень (1 — 2) учун K нуқта момент нуқтаси ҳисобланади. $N_{1,2}$ ни аниқлаш учун K нуқтага нисбатан чап томонда ётган кучлардан моментлар йиғиндисини ёзамиз (бунда бирлик куч кесимдан ўнгга деб фараз этамиз):

$$\sum M_k = V_a a_k - H y_k - N_{12} h = 0;$$

бу ердан

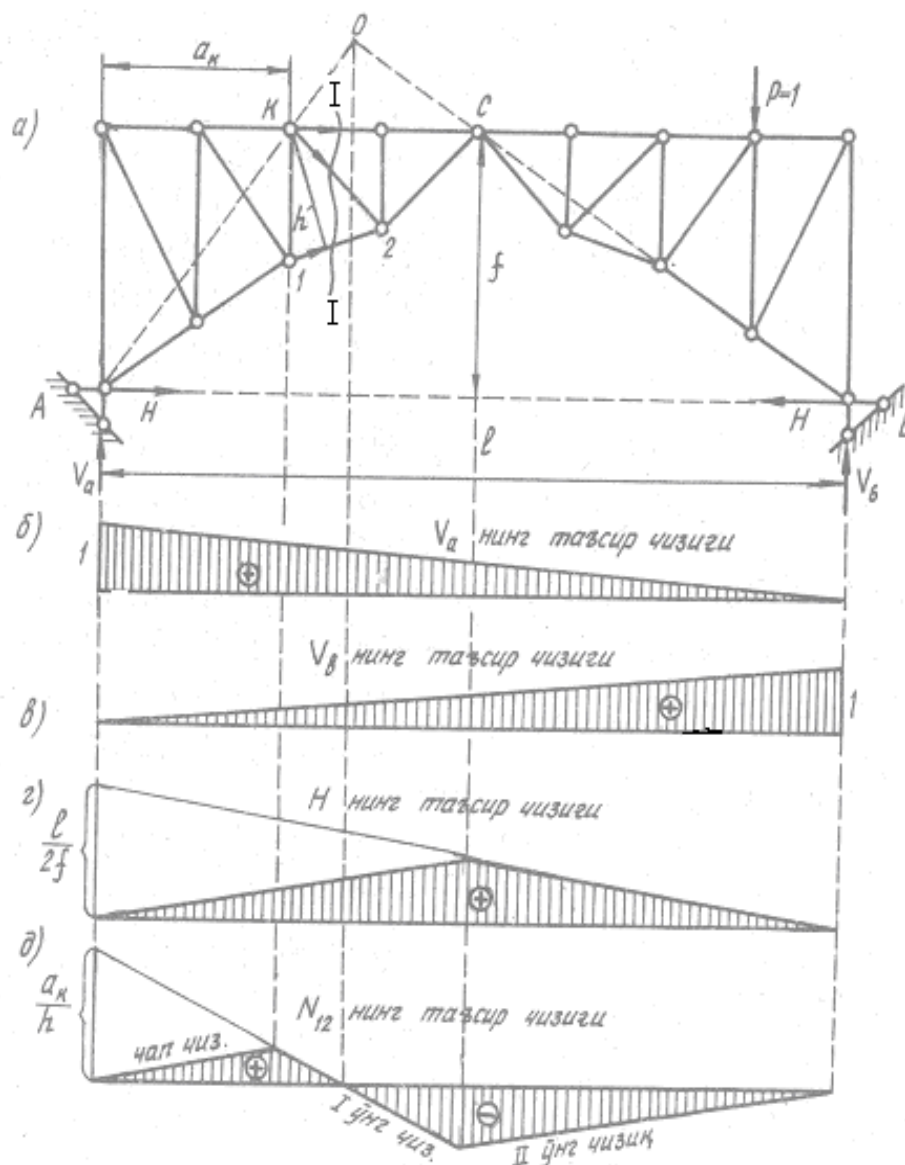
$$N_{12} = \frac{V_a a_k - H y_k}{h}.$$

Агар момент нуқтаси K ни арканинг K кесими деб фараз этсак ҳамда a_k ва y_k ларни шу кесимнинг координаталари деб олсак, касрнинг сурати аркавий момент M_k^{ar} бўлади. У ҳолда зўриқиш

$$N_{12} = \frac{M_k^{ar}}{h}$$

ифодаси билан аниқланади.

Демак, ферма стерженидаги зўриқиш N_{12} нинг таъсир чизиғини аркавий момент M_k^{ar} оркали курса бўлади. Бунинг учун арка моменти таъсир чизиқларини h га қисқартирилса кифоя.

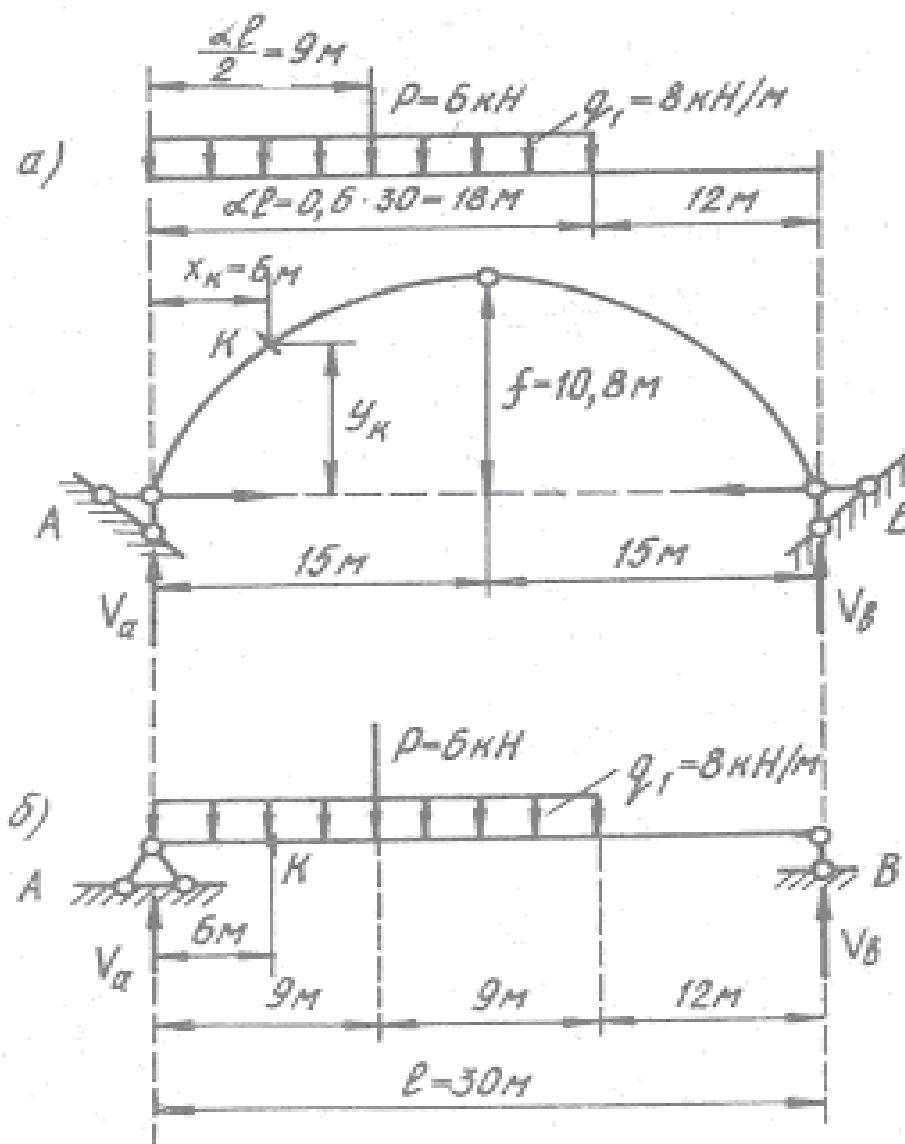


5.15- расм

Аркининг K кесими учун моментнинг таъсир чизиғини қуришда A таянчи остига a_k масофани ўлчаб қўйилар эди. Бу сафар шу масофани h маротаба кичрайтириб қўямиз (5.15- расм, д). Қолган ишлар уч шарнирли аркадаги ишлар билан айнан бир ҳилдир.

Мисол. Уч шарнирли арканинг K кесимидаги эгувчи момент, кўндаланг ва бўйлама кучлар аналитик усулда ҳисоблансин. Айни шу миқдорлар таъсир

чизиклари орқали ҳам аниқлансин. Арка ўқи парабола бўлиб, куч ва ўлчамлар шаклда берилган (5.16- расм, а).



5.16- расм

Ечиш. Ҳисобни таянч реакцияларини аниқлашдан бошлаймиз:

$$\sum M_A = -V_B \cdot 30 + q_1 \cdot 18 \cdot 9 + P \cdot 9 = 0;$$

бундан $V_B = 45\text{ kN};$

$$\sum M_B = V_A \cdot 30 - P \cdot 21 - q_1 \cdot 18 \cdot 21 = 0;$$

бундан $V_A = 105\text{ kN};$

$$\sum M_c^{chap} = V_A \cdot 15 - P \cdot 6 - q_1 \cdot 15 \cdot 7,5 - H_A f = 0$$

бундан $H_A = 59,167\text{ kN}.$

Кучлар вертикал бўлганлиги учун $H_A = H_B = H = 59,167 \text{ kN}$.

Текшириш. $\sum Y = V_A - P - q_1 \cdot 18 + V_B = 105 - 6 - 8 \cdot 18 + 45 = 0$.

Аналитик усулда K кесимидаги ички кучлар (M_k, Q_k, N_k) ни аниқлаймиз.

Эгувчи момент қуйидаги формуладан (5.3) топилади:

$$M_k = M_k^0 - H y_k.$$

Аркининг ўқи парабола бўлганлиги учун y_k ординатаси қуйидаги тенгламадан топилади:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x_k (l - x_k) = \frac{4 \cdot 10,8}{30^2} \cdot 6(30 - 6) = 6,912 \text{ m}.$$

Оддий балканинг (5.16- расм, б) K кесимидаги момент

$$M_k^0 = V_A \cdot 6 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 = 105 \cdot 6 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 486 \text{ k N m}.$$

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги момент

$$M_k = 486 - 59,167 \cdot 6,912 = 77,04 \text{ k N m}$$

Кўндаланг кучни аниқлаш формуласи (5.6):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k.$$

Арка ўқининг тенгламасидан фойдаланиб, φ_k бурчакни аниқлаймиз (5.16- расм, а):

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{dy_k}{dx_k} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_k) = \frac{4 \cdot 10 \cdot 8}{30^2} (30 - 2 \cdot 6) = 0,864,$$

бундан $\varphi_k = 40^\circ 50'$; $\sin \varphi_k = 0,6538$; $\cos \varphi_k = 0,7566$.

Оддий балканинг (5.16- расм, б) K кесимидаги кўндаланг куч

$$Q_k^0 = V_A - q_1 \cdot 6 = 105 - 8 \cdot 6 = 57 \text{ kN}$$

Аркининг K кесимидаги кўндаланг куч:

$$Q_k = 57 \cdot 0,7566 - 59,167 \cdot 0,6538 = 4,443 \text{ kN}.$$

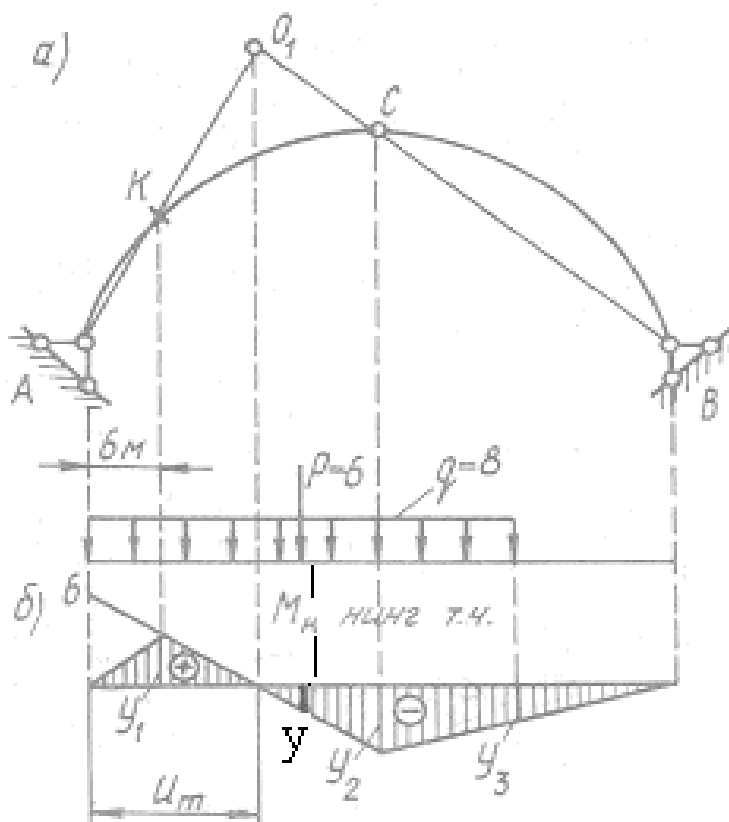
Аркининг K кесимидаги бўйлама кучни аниқлаймиз (5.6):

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k = 57 \cdot 0,6538 + 59,167 \cdot 0,7566 = 82,033 \text{ kN}.$$

Шундай қилиб, уч шарнирли арканинг K кесимидаги ички кучларни аналитик усулда аниқладик. Энди шу миқдорларни таъсир чизиқлари ёрдамида аниқлаймиз.

M_k нинг таъсир чизиқларини қуриш

Таъсир чизигини ноль нуқтаси усулида курамиз. Бунинг учун A таянч билан K кесим тўғри чизиқ ёрдамида туташтирилади. B таянч C шарнир билан туташтирилади. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси (O_1) эгувчи моментнинг ноль нуқтаси бўлади, чунки $P=1$ куч шу нуқтада бўлганда K кесимдаги эгувчи момент нолга тенг бўлади (5.17- расм, а).



5.17- расм

Координата ўқининг A таянч остидаги нуқтасидан K кесимигача бўлган масофа (6м) ни ўқдан юқорига масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани координата ўқидаги O_1 нуқтанинг проекцияси билан туташтириб, C шарнир проекциясигача давом эттирамиз. Бу тўғри чизикқа K кесимининг проекциясини туширамиз ва уни A таянч остидаги координата ўқининг ноль нуқтаси билан туташтирамиз. C шарнир остидаги ординатани B таянч остидаги координата ўқининг ноль нуқтаси билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график M_k нинг таъсир чизиғи деб аталади (5.17- расм, б). A таянчдан O_1 нуқтагача бўлган масофани u_m билан белгилаб, уни қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$u_m = \frac{2fl}{l \cdot \frac{y_e}{x_k} + 2f} = \frac{2 \cdot 10,8 \cdot 30}{30 \cdot \frac{6 \cdot 912}{6} + 2 \cdot 10,8} = \frac{648}{56,16} = 11,538 \text{ м}$$

Таъсир чизиклари ёрдамида зўриқишларнинг қиймати қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$M = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i.$$

Бизнинг мисол учун формула қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_k = q(\omega - \omega_1 - \omega_2) - P \cdot y.$$

Бу ерда P, q — аркага қўйилган қўзғалмас юклар;

y — таъсир чизигида P кучи остидаги ордината;

ω — шу таъсир чизигида ёйилган куч остидаги қисмнинг юзаси.

Ташқи кучлар остидаги ординаталар, учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб аниқланади. Масалан,

$$\frac{6}{11,538} = \frac{y_1}{5,538}; \frac{6}{11,538} = \frac{y}{2,538}; \frac{6}{11,538} = \frac{y_2}{3,462}; \frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12};$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 11,538}{2} = 16,615; \quad \omega_1 = \frac{y_2 \cdot 3,462}{2} = 3,116;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 4,860.$$

Шундай қилиб, K кесимдаги эгувчи момент:

$$M_k = 8(16,615 - 3,116 - 4,860) - 6 \cdot 1,320 = 69,12 - 7,92 = 77,04 \text{ kNm}$$

(Аввалгиси билан таққосланг).

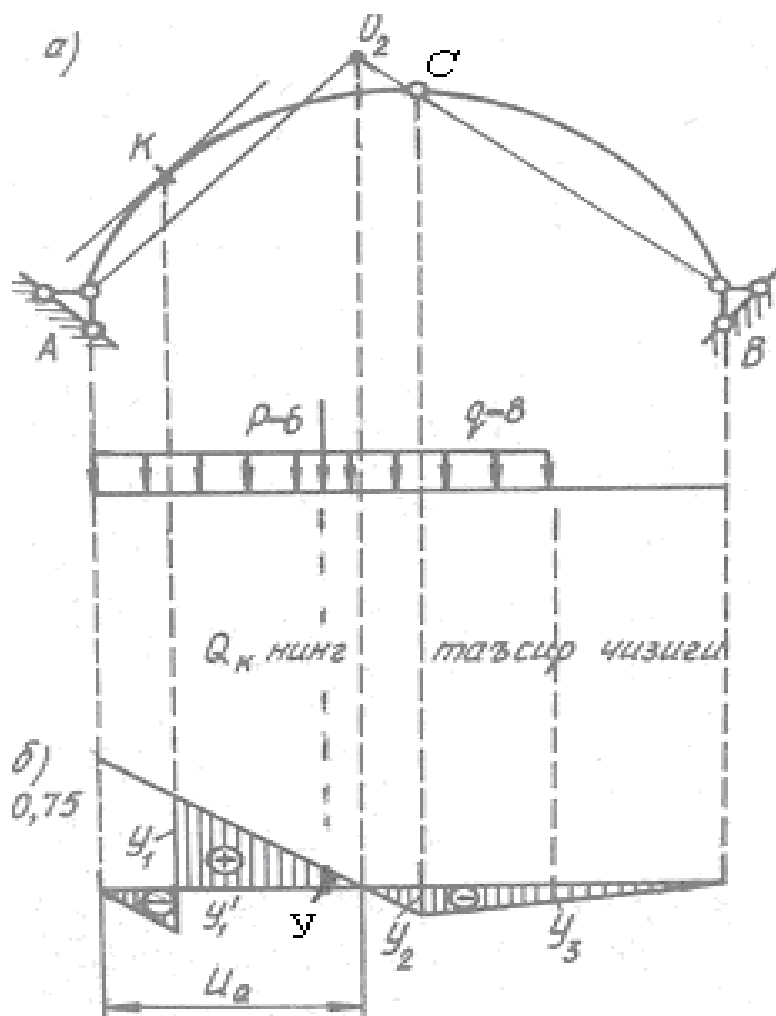
Q_k нинг таъсир чизигини қуриш (5.18- расм, а)

Кўндаланг куч учун ноль нуқтаси ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун K кесимга уринма ўтказамиз. Бу уринмага параллел қилиб A таянчдан тўғри

чизик ўтказамиз ва бу тўғри чизикни B таянч билан C шарнирни туташтирувчи чизиккача давом эттирамиз. Кесишиш нуқтаси O_2 кўндаланг кучнинг ноль нуқтаси бўлади, чунки $P=I$ бирлик куч шу нуқтада турганда K кесимдаги кўндаланг куч нолга айланади.

Кўндаланг куч таъсир чизиғини қуриш учун ихтиёрий масофада координата ўқи олинади ва бу ўққа A , B таянчлари, C шарнири ва O_2 нуқтасининг проекциялари туширилади. A таянчи остига $\cos \varphi_k = 0,7566$ ни масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани ноль нуқта билан тўғри чизик ёрдамида туташтирамиз. Координата ўқининг A таянчи остида бу тўғри чизикка параллел тўғри чизик ўтказамиз ва уни K кесимгача давом эттирамиз. Сўнгра бу икки параллел тўғри чизикка K кесимининг проекцияси туширилади. C шарнир остидаги ордината B таянчининг ноль ординатаси билан туташтирилади. Кейин шаклда кўрсатилгандек штрихланади, ҳосил бўлган график Q_k нинг таъсир чизиғи бўлади (5.18- расм, б). Кўндаланг кучнинг ноль нуқтасигача бўлган масофа u_Q қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$u_Q = \frac{2 f l}{2 f + l \cdot \operatorname{tg} \varphi_k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 30}{2 \cdot 10,8 + 30 \cdot 0,864} = \frac{648}{47,52} = 13,636 m.$$



5.18- расм

Кўндаланг кучнинг қийматини қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$Q_k = +q(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + P \cdot y.$$

Зарур ординаталарни учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{0,7566}{13,636} = \frac{y_1}{7,636}; \quad y_1 = 0,424; \quad y'_1 = 0,7566 - y_1 = 0,3326;$$

$$\frac{0,7566}{13,636} = \frac{y}{4,636}; \quad y = 0,257; \quad \frac{0,7566}{13,636} = \frac{y_2}{1,364}; \quad y_2 = 0,076;$$

$$\frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12}; \quad y_3 = 0,8 \cdot y_2 = 0,061$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 7,636}{2} = 1,619; \quad \omega_1 = \frac{y_1 \cdot 6}{2} = 0,938;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 \cdot 1,364}{2} = 0,052; \quad \omega_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 0,206$$

Кўндаланг куч қиймати

$$Q_k = 8 (1,619 - 0,998 - 0,052 - 0,206) + 6 \cdot 0,257 = 4,446 \text{ kH}.$$

N_k нинг таъсир чизиғини қуриш (5.19- расм, а).

Бўйлама кучнинг ноль нуқтасини аниқлаш учун A таянчидан K кесимиға ўтказилган уринмага тик чизик ўтказамиз ва уни B таянчи билан C шарнирни туташтирувчи тўғри чизик билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишув нуқтаси бўйлама кучнинг ноль нуқтаси (O_3) бўлади.

Ихтиёрий масофада координата ўқи олиниб, унга A , B таянчлари, C шарнири ва O_3 нуқтасининг проекциялари (a , b , c ва d) туширилади. « a » нуқтадан $\sin \varphi_k = 0,6538$ масофа (aa_1) ўлчанади ва бу масофа « d » нуқтаси билан туташтирилади. « a_1d » чизиғини « c_1 » нуқтасигача давом эттириб, бу ординатани « b » нуқтаси билан бирлаштирилади. « a » нуқтасидан « dc_1 » чизиғига параллел чизик ўтқазиб, « ak » тўғри чизиғини ҳосил қиламиз. K кесим остида бўйлама куч $\sin \varphi_k = 0,6538$ га тенг миқдорда сакрайди. Штрихланган шакл N_k нинг таъсир чизиғи бўлади (5.19- расм, б).

Бўйлама кучнинг ноль нуқтасигача бўлган масофа

$$u_N = \frac{l}{\frac{l}{2f} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k - 1} = \frac{30}{\frac{30}{2 \cdot 10,8} \cdot \frac{0,7566}{0,6538} - 1} = \frac{30}{0,6072} = 49,407 \text{ m}$$

га тенг бўлади.

Таъсир чизиғи ёрдамида бўйлама кучнинг қийматини аниқлаймиз.

$$N_k = q_1 (\omega + \omega_1 + \omega_2) + P \cdot y$$

Керакли ординаталарни аниқлаймиз. Учбурчаклар ўхшашлигидан:

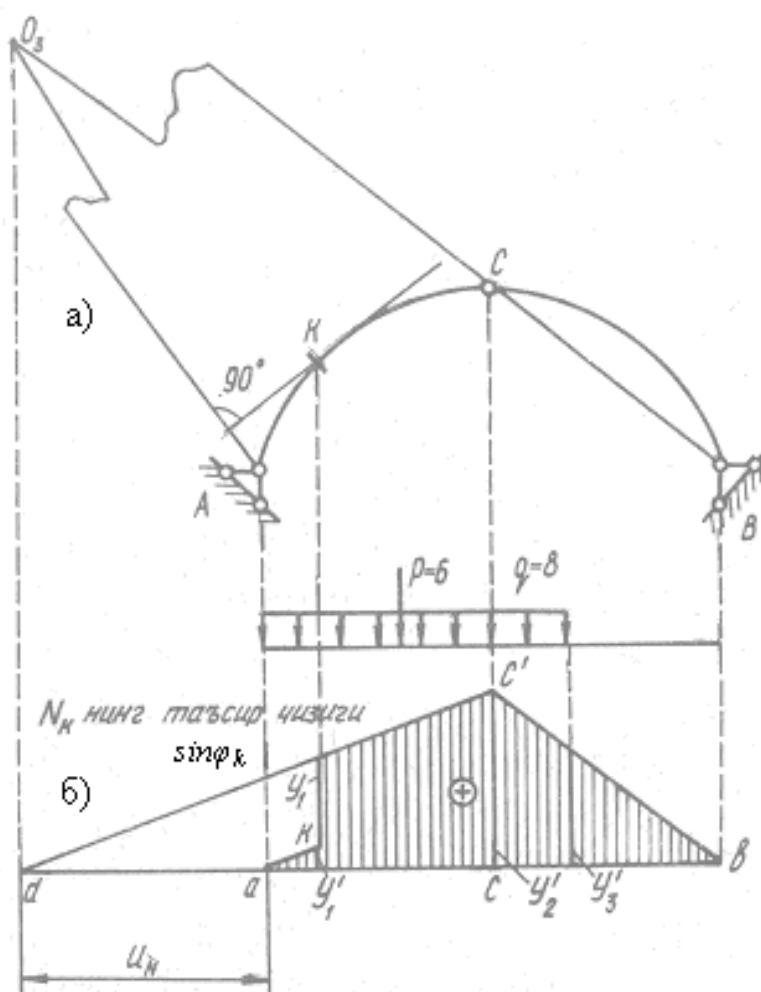
$$\frac{0,6538}{49,407} = \frac{y_2}{64,407}; \frac{0,6538}{49,407} = \frac{y_1}{55,407}; \frac{0,6538}{49,407} = \frac{y}{58,407};$$

$$y_2 = 0,852; y_1 = 0,733; y = 0,773;$$

$$y'_1 = y_1 - 0,6538 = 0,0792; y_3 = 0,8 \cdot y_2 = 0,682.$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 6}{2} = 0,238; \omega_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot 9 = 7,133; \omega_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 2,301.$$



5.19- расм

Бўйлама кучнинг қиймати

$$N_k = 8 (0,238 - 7,133 - 2,301) + 6 \cdot 0,773 = 77,376 - 4,638 = 82,104 \text{ kN}.$$

Шундай қилиб, таъсир чизиклари ёрдамида ички кучларнинг қуйидаги қийматларини аниқладик:

$$M_k = 77,740 \text{ kNm}; Q_k = 4,446 \text{ kN}; N_k = 82,014 \text{ kN}.$$

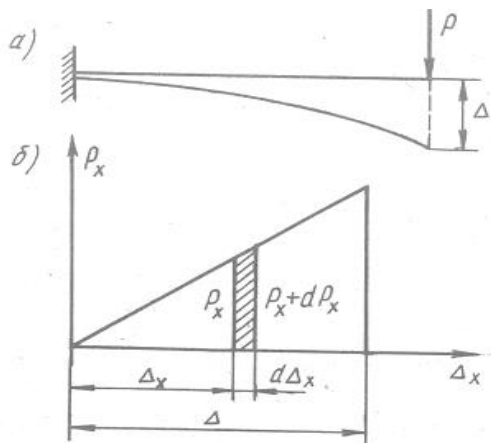
Ички кучларнинг бу қийматлари аналитик усулда аниқланган қийматлар билан бир хилдир.

6- БОБ

КЎЧИШЛАР НАЗАРИЯСИ

6.1. Кўчишлар ва ишлар ҳақида тушунча

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашда мувозанат тенгламаларидан ташқари кўчишлар тенгламаларини тузишга ва ечишга тўғри келади. Бундай тенгламаларни тузиш учун аввало иншоотларнинг деформацияларини аниқлашни билиш зарур. Кўчишларни аниқлаш масаласи фақат статик ноаниқ системаларгагина тааллуқли бўлиб қолмай, балки статик аниқ системаларга ҳам алоқадордир. Статик аниқ системалардан ташкил топган қурилиш конструкцияларининг деформацияси меъёридан ортиб кетмаслиги зарур. Бу масала ҳам кўчишлар орқали ҳал этилади. Шундай қилиб, кўчишларни аниқлаш масаласи қурилиш механикасининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.



6.1- расм

Бирор нуқтанинг *кўчиши* деганда, иншоотнинг деформацияси жараёнида унинг (нуқтанинг) координаталарининг ўзгариши тушунилади. Кўчишларни биз Гук қонуни чегарасида аниқлаймиз, яъни кўчиши аниқланаётган кесимнинг кучланишлари пропорционаллик чегарасида ётади, деб фараз этамиз.

Кўчишларни аниқлашда кучлар таъсирининг мустақиллиги қондаси амал қилади. Бу қондага кўра бир неча кучларнинг бир йўла қўйилгандаги натижаси ҳар бир кучни алоҳида қўйилгандаги натижалар йиғиндисига тенг бўлади.

Ташқи кучлар иши. Кўчишларни аниқлашнинг умумий усули ташқи кучлар иши назариясига асосланади, яъни ишлар орқали кўчишларни аниқласа бўлади.

Эластик системага аста-секин (статик равишда) қўйилган ташқи куч P нинг бажарган ишини аниқлаймиз (6.1- расм, a). Деформациянинг кичик миқдорларида эластик системага кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасини қўллаш мумкин, бинобарин, алоҳида нуқталарнинг кўчишлари уларни вужудга келтирувчи кучларга тўғри пропорционал бўлади. Гук қонунига кўра бу боғланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta = \alpha P.$$

Бу ерда Δ — таъсир этувчи куч P йўналишидаги кўчиш;

α — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, иншоотнинг материали, схемаси ва ўлчамларига боғлиқ миқдордир.

P кучининг оралиқ қийматини P_x , унга мос бўлган кўчишни Δ_x деб белгилаймиз, (6.1- расм, b).

P кучини чексиз кичик миқдор dP_x га орттирамиз. Натижада кўчиш ҳам $d\Delta_x$ масофага ортади. Бунда ташқи куч қуйидаги элементар ишни бажаради:

$$dA = (P_x + dP_x) d\Delta_x = P_x d\Delta_x.$$

Ташқи куч бажарган тўлиқ иш бу ифодани интеграллаш йўли билан аниқланади.

$$A = \int_0^P P_x d\Delta_x.$$

Гук қонунига биноан $d\Delta_x = \alpha dP_x$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$A = \int_0^P \alpha P_x dP_x = \frac{\alpha P^2}{2} = \frac{1}{2} P \Delta$$

келиб чиқади.

Демак, ташқи кучлар (P) бажарган ҳақиқий иш куч билан шу куч вужудга келтирган кўчишнинг кўпайтмасини ярмига тенг экан. Бу *Клапейрон теоремаси* деб аталади. Агар иншоотга бир неча кучлар $P_1, P_2 \dots P$ қўйилган бўлса, ташқи кучлар бажарган тўлиқ иш қуйидагича бўлади:

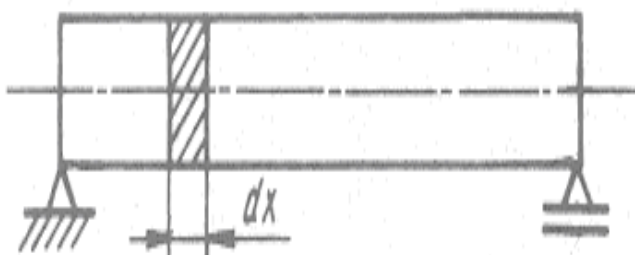
$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i.$$

Ташқи кучларнинг бу иши иншоотда потенциал энергия тарзида тўпланади.

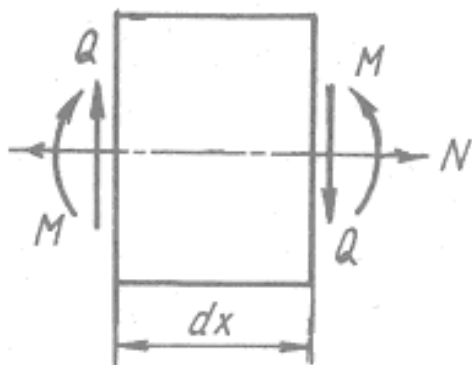
Гарчи Клапейрон теоремаси биргина куч мисолида берилган бўлса-да, аслида унинг қўлланиш чегараси жуда кенг. Ташқи куч деганда биргина йиғиқ куч эмас, балки турли кучлар системаси тушунилади. Кўчишлар ҳам фақат чизикли эмас, балки бурчакли бўлиши ҳам мумкин. Хулоса қилиб айтганда, куч деганда эластик системага таъсир этувчи ҳар қандай кучлар мажмуаси тушунилади ва «*умумлашган куч*» деб аталади. Бу куч таъсирида вужудга келган кўчиш «*умумлашган кўчиш*» деб юритилади.

Ички кучлар иши. Кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этса ҳам бўлади. Ички кучлар деганда конструкция элементларида вужудга келадиган эгувчи момент M , кўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

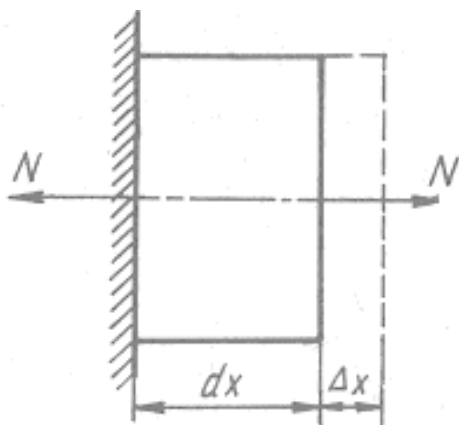
Балкадан (6.2- расм) чексиз кичик dx элементини ажратиб оламиз (6.3- расм). Ажратилган элементга M , Q ва N кучлари таъсир этади. Бу кучлар бутун стерженга нисбатан ички куч, ажратилган элеменга нисбатан эса ташқи куч деб қаралади. Буларнинг ҳар бирини dx элементига бўлган таъсирини алоҳида равишда кўриб ўтамиз.



6.2- расм



6.3- расм



6.4- расм

Энг аввал ажратилган элементга бўйлама куч N нинг таъсири билан танишамиз (6.4- расм). Элементнинг чап томондаги кесими қўзғалмас деб фараз этсак, бўйлама куч таъсирида элементнинг ўнг томондаги кесими

$$\Delta x = N dx / EF$$

масофага кўчади. Ушбу

кўчишни вужудга келишида бўй-лама куч қуйидаги ишни бажаради.

$$dA_N = \frac{1}{2} N \Delta x = N \frac{N dx}{2EF}$$

Бу ерда EF — стержень кўндаланг кесимининг сиқилиш ёки чўзилиш-даги бикирлигидир.

Δ_ϕ бурчакли кўчишнинг вужудга келишида аста ортиб борувчи эгувчи момент қуйидаги миқдорда иш бажаради (6.5- расм):

$$dA_M = \frac{1}{2} M \Delta_\phi = M \frac{M dx}{2EJ};$$

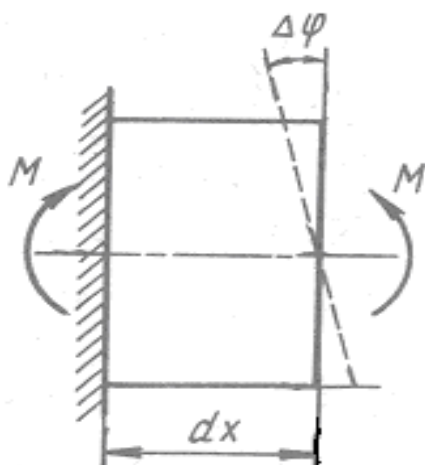
$$\Delta_\phi = \frac{M dx}{EJ}.$$

Ниҳоят ажратилган эле-ментга кўндаланг куч Q нинг таъсирини кўриб ўтамиз (6.6- расм). Агар элементнинг чап кесимини маҳкам-ланган деб карасак, кўндаланг куч таъсирида унинг ўнг томондаги кесими

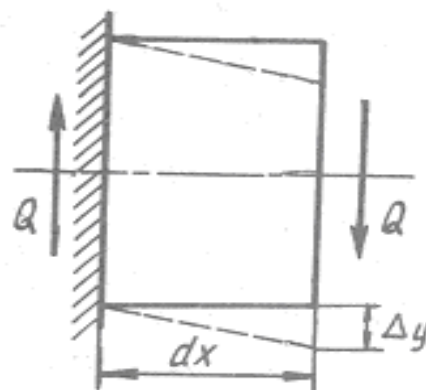
$$\Delta_y = \eta Q dx / GF$$

масофага силжийди. Бу ерда GF — кесимнинг силжишдаги бикирлиги. Δ_y силжишнинг вужудга келишида аста ортиб борувчи кўндаланг куч қуйидаги миқдорда иш бажаради

$$d A_Q = \frac{1}{2} Q \Delta_y = Q \frac{Q dx}{2GF} \eta .$$



6.5- расм



6.6- расм

Бу ерда η — стерженнинг кўндаланг кесими шаклига боғлиқ коэффициент бўлиб, қуйидаги формуладан топилади:

$$\eta = \frac{F}{J^2} \int \frac{S^2}{b^2} dF .$$

Тўғри тўртбурчакли кесим учун $\eta = 1,2$. Айлана учун $\eta = 10/9$.

Ажратилган dx элементга учала куч (N , M , Q) бир вақтнинг ўзида таъсир этса, тўлиқ иш қуйидагича топилади:

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2} \left(N \frac{N dx}{EF} + M \frac{M dx}{EJ} + Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right).$$

Стерженларнинг барча участкалари бўйича бажарилган тўлиқ ишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаймиз:

$$A = \frac{1}{2} \left(\sum \int_0^l M \frac{M dx}{EJ} + \sum \int_0^l N \frac{N dx}{EF} + \sum \int_0^l Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right) \quad (6.1)$$

ёки

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta \quad (6.2)$$

Шундай қилиб, кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этдик.

Эластик системаларда ташқи кучлар бажарган иш деформациянинг потенциал энергияси сифатида тўпланади. Ҳар қандай эластик жисм ташқи кучлар вужудга келтирган энергияни ўзида жамлаш хусусиятига эга. Жисмни юкдан бўшатиш жараёнида потенциал энергия иш бажаради, Мана шу ишни жисмдаги ички кучлар (M, Q, N) бажаради. Энергиянинг сакланиш қонунига биноан ташқи кучлар бажарган иш система деформациясининг потенциал энергиясига (демак, ички кучлар бажарган ишга) тенг бўлади.

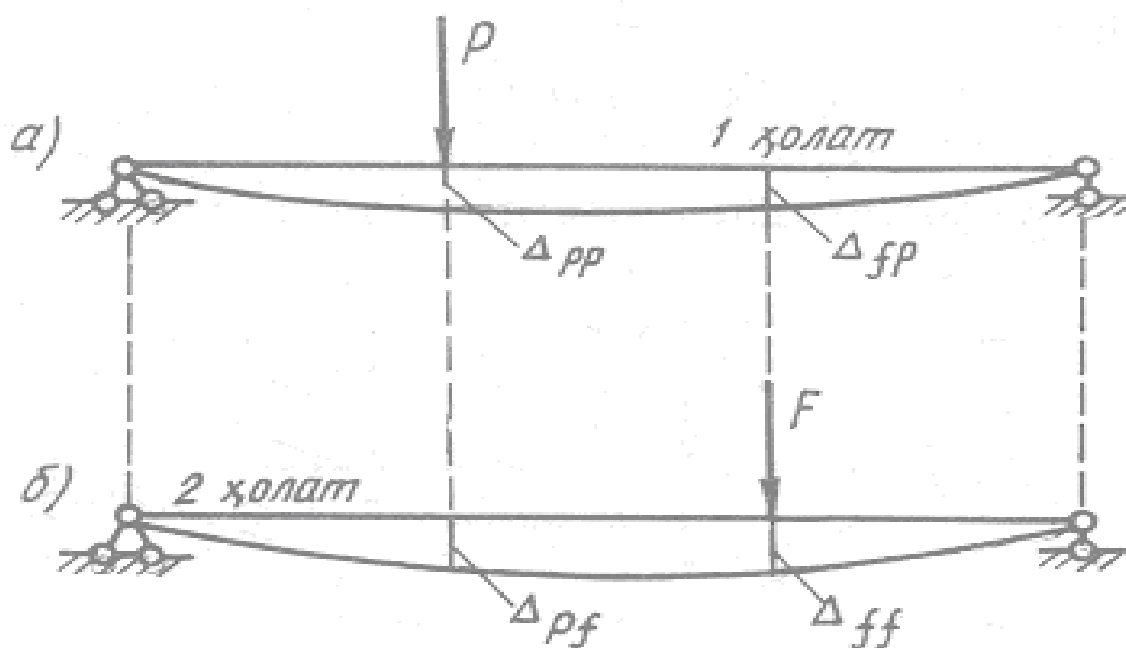
6.2. Ишлар ва кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теоремалар

Икки хил куч таъсирида мувозанатда бўлган эластик системанинг икки ҳолатини кўриб ўтамыз. Биринчи ҳолатда системага P кучи, иккинчи ҳолатда F кучи таъсир этади дейлик (6.7- расм).

Системанинг кўчишларини Δ_{pf} тарзида белгилаймиз. Бунда биринчи индекс кўчаётган нуқта ва унинг йўналишини, иккинчи индекс эса кўчишни вужудга келтираётган сабабни англатади. Ўқилиши бундай: P кучи қўйилган нуқтанинг шу куч (яъни P кучи) йўналишида F кучи таъсирида вужудга келган кўчиш.

Δ_{pp} — P кучи йўналишида шу куч таъсирида вужудга келган кучиш дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида P кучи бажарган иш A_{pp} бўлсин. Ҳудди шунингдек, Δ_{ff} кўчишнинг вужудга келишида F кучи бажарган ишни A_{ff} деб белгилайлик. Агар ҳар иккала куч балкага статик таъсир этса, бу кучлар бажарган ишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$A_{pp} = \frac{1}{2} P \Delta_{pp} \text{ ва } A_{ff} = \frac{1}{2} F \Delta_{ff}$$



6.7- расм

Ҳар иккала ишни ички кучлар орқали ифодаси қуйидаги кўринишга эга:

$$A_{pp} = \sum \int_0^l \frac{M_p^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_p^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_p^2 dx}{2GF} \eta;$$

$$A_{ff} = \sum \int_0^l \frac{M_f^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_f^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_f^2 dx}{2GF} \eta.$$

Энди ўша (6.7- расм) системага P ва F кучларининг олдинма-кейин қўйилиш жараёнини кўриб ўтайлик.

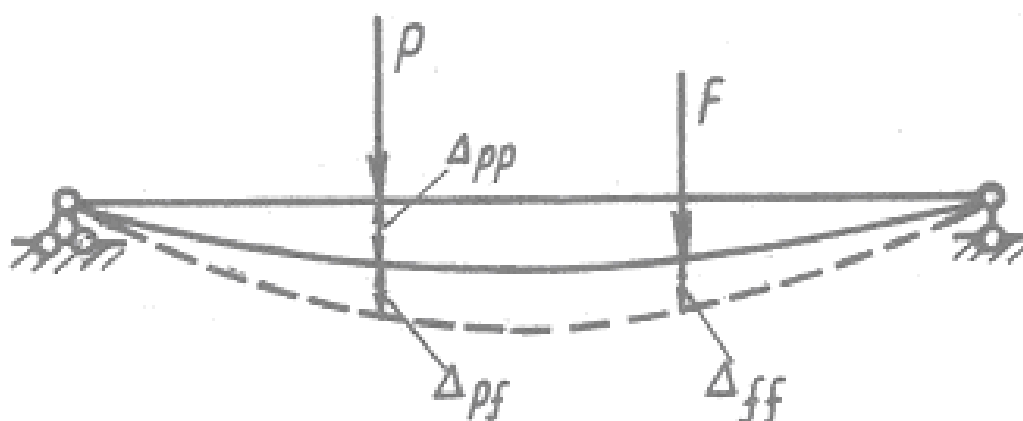
Аввал системага статик ортиб боровчи P кучи қўйилади, дейлик (6.8- расм). P кучи ўзининг тугал қийматига эришганда, системада 6.7- расм, a — да кўрсатилгандек вазият вужудга келади, яъни P кучи остида Δ_{pp} кўчиш ҳосил бўлади. Бу кўчишнинг вужудга келишида P кучи $A_{pp} = P\Delta_{pp}/2$ га тенг бўлган иш бажаради. Шундан сўнг солқи системага F кучи қўйилади. Бу куч таъсирида система эгилишда давом этиб, 6.7- расм, $б.$ — да кўрсатилган вазият вужудга келади. Бунда P кучи остида Δ_{pf} га тенг бўлган қўшимча солқилик ҳосил бўлади. F кучининг қиймати нолдан ўзининг тугал

кийматига қадар ортиб борганда, P кучининг киймати ўзгармасдан, $A_{pf} = P\Delta_{pf}$ га тенг бўлган қўшимча иш бажаради. F кучининг ўзи эса $A_{ff} = F\Delta_{ff}/2$ миқдорида иш бажаради. Шундай қилиб, системага кетма-кет равишда P ва F кучлари қўйилса, уларнинг бажарган тўлиқ иши

$$A = A_{pp} + A_{pf} + A_{ff} = \frac{1}{2}P\Delta_{pp} + P\Delta_{pf} + \frac{1}{2}F\Delta_{ff} \quad (a)$$

га тенг бўлади.

Агар кучларнинг қўйилиш тартибини ўзгартирсак, яъни аввал F ва сўнгра P кучларини қўйсак, у ҳолда тўлиқ иш қуйидаги кўринишда ифодаланади:



6.8- расм

$$A = \frac{1}{2}F\Delta_{ff} + F\Delta_{fp} + \frac{1}{2}P\Delta_{pp}. \quad (b)$$

Бироқ кучларнинг қўйилиш тартиби ўзгариши билан бажарилган тўлиқ ишнинг миқдори ўзгармайди. Шунга кўра (а) ва (б) ифодаларни тенглаштириб, қуйидаги ҳулосага эга бўламиз:

$$P\Delta_{pf} = F\Delta_{fp}.$$

Бу ерда $P\Delta_{pf}$ биринчи ҳолатдаги P кучининг шу йўналишда, иккинчи ҳолатдаги F кучидан ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир. $F\Delta_{fp}$ эса иккинчи ҳолатдаги F кучининг шу куч йўналишида,

биринчи ҳолатдаги P кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир (6.7- расм).

Шундай қилиб, биринчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида иккинчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган иши иккинчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида биринчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган ишига тенгдир.

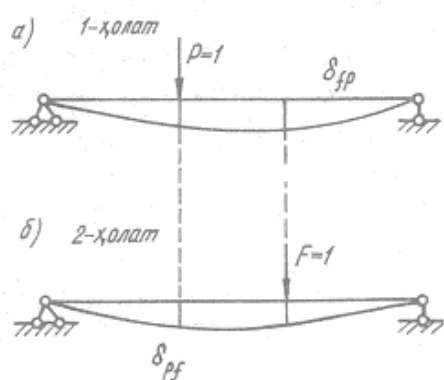
Бу хулоса ишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки унинг муаллифи Италия олими Энрико Бетти (1823 — 1892) теоремаси номи билан машҳурдир.

Энди кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема билан танишиб чиқамиз.

Бунинг учун яна балканинг икки ҳолатини кўриб ўтамыз. Биринчи ҳолатда балкага $P=1$ кучи, иккинчи ҳолатда эса $F=1$ кучи қўйилган (6.9-расм).

Балкага қўйилган кучларнинг қиймати бирга тенг бўлганлиги сабабли балканинг ҳолатини **б и р л и к х о л а т** деб айтамыз.

Бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар δ билан, бирдан фарқли кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар эса Δ ҳарфи билан белгиланади. Шунга биноан биринчи ҳолатдаги кўчишни δ_{fp} , иккинчи ҳолатдаги кўчишни эса δ_{pf} тарзида белгиладик. Ҳар иккаласи ҳам бирлик кучлардан ҳосил бўлган **бирлик кучишлардир**.



6.9-расм

Бу икки ҳолат учун Бетти теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$P\delta_{pf} = F\delta_{fp}$$

Агар $P=F=1$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\delta_{fp} = \delta_{pf} \text{ келиб чиқади. } (6.5)$$

боғланиши ҳақидаги теорема ёки Максвелл теоремаси деб аталади.

Мазкур, тенглик $P = F \neq 1$, бўлганда ҳам ўз кучини сақлайди ва қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta_{fp} = \Delta_{pf} \quad (6.6)$$

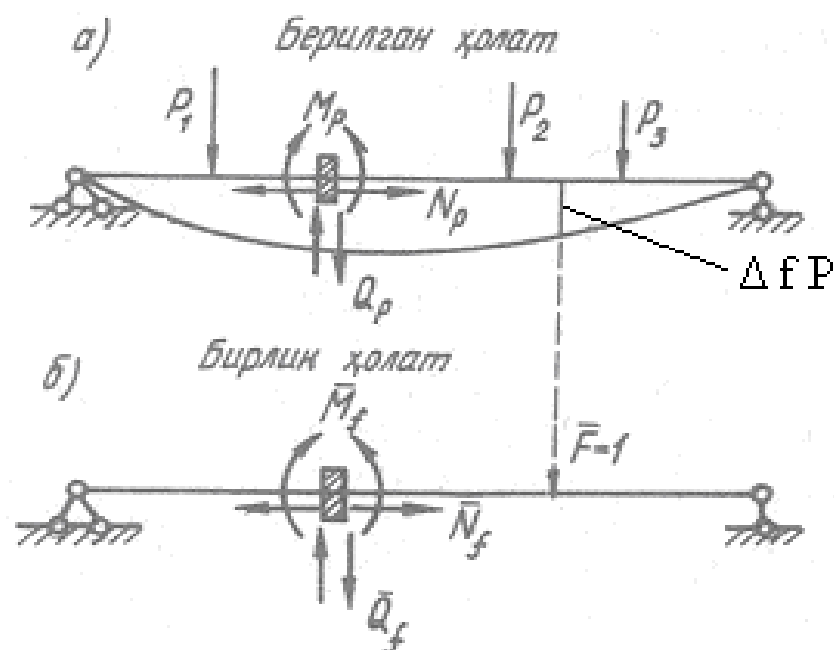
6.3. Кўчишларни аниқлаш учун Мор формуласи ва Верешчагин усули

Кўчишларни аниқлайдиган формулани келтириб чиқаришда бевосита ишлар учун чиқарилган формулалардан фойдаланамиз.

Бирор эластик системанинг, масалан, балканинг икки ҳолатини кўриб чиқамиз. Биринчи, яъни берилган ҳолатда балкага исталганча кучлар қўйилиши мумкин (6.10- расм, а). Иккинчи ҳолатда балкага бирлик куч $\bar{F} = 1$ қўйилади (6.10- расм, б).

Берилган кучлар таъсирида ҳосил бўлган Δ_{pf} кўчишнинг вужудга келишида иккинчи ҳолатдаги $\bar{F} = 1$ кучи қуйидаги ишни бажаради:

$$A_{fp} = \bar{F} \Delta_{fp} = 1 \Delta_{fp} = \Delta_{fp}.$$



6.10- расм

A_{fp} ни ички кучлар орқали ифода этсак,

$$\Delta_{fp} = A_{fp} = \sum \int_0^l \bar{M}_f \frac{M_p dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_f \frac{N_p dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_f \frac{Q_p dx}{GF} \eta \quad (6.7)$$

кўринишдаги кўчишларни аниқлаш формуласига, яъни *Мор формуласига* эга бўламиз.

Бу ерда M_p , N_p ва Q_p — берилган кучлардан ҳосил бўлган, $\bar{M}_f$, $\bar{N}_f$ ва $\bar{Q}_f$ бирлик кучдан ҳосил бўлган ички кучлардир.

Бирлик куч одатда кўчиши аниқланаётган нуктага қўйилади. Агар чизикли кўчиш (масалан, бирор нуктанинг солқилиги) аниқланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғиқ куч қабул қилинади, агар бурчакли кўчиш (масалан, бирор кесимнинг оғиш бурчаги) аниқланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғиқ момент қабул қилинади. Ҳар иккала ҳолда ҳам бирлик куч кўчиши изланаётган нуктага қўйилади.

Балка ва рамаларнинг кўчишларини аниқлашда бўйлама ва кўндаланг кучлар таъсирини эътиборга олмаса ҳам бўлади:

$$\Delta_{fp} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_f M_p}{EJ} dx. \quad (6.8)$$

Оддий аркаларнинг кўчишларини аниқлашда эгувчи момент билан бўйлама кучнинг таъсири эътиборга олинса кифоя

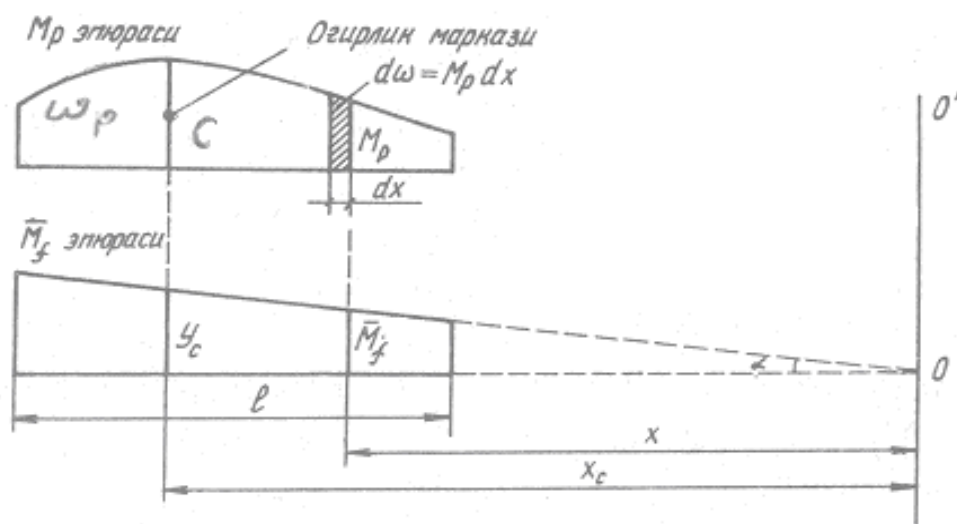
$$\Delta_{fp} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_f M_p}{EJ} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{N} \cdot N_p}{EF} dx. \quad (6.9)$$

Фермаларнинг кўчишларини аниқлашда бўйлама кучларнинг таъсири эътиборга олинади, ҳолос

$$\Delta_{fp} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_f N_p}{EF} dx. \quad (6.10)$$

Верещагин усули. Маълумки, балка ва рамаларнинг кўчишларини аниқлашда Мор формуласининг биринчи ҳадидан фойдаланилади (6.8):

$$\Delta_{fp} = \int_0^l \frac{\bar{M}_f M_p}{EJ} dx. \quad (a)$$



6.11- расм

Интеграл чегарасида кесим ўзгармас бўлса, эгилишдаги бикирликни интегралдан ташқарига чиқариш мумкин

$$\Delta_{fp} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_f M_p dx. \quad (б)$$

Бу ерда M_p ва $\bar{M}_f$ — берилган ва бирлик кучлардан ҳосил бўлган эгувчи моментлар (6.11- расм). Кўпинча икки эюранинг бири тўғри чизиқли

бўлади. Бундай ҳолларда $\int_0^l \bar{M}_f M_p dx$ интегрални осонгина ечилади; аниқроғи мазкур интегрални интегралсиз ифода билан алмаштириш имкони туғилади.

Шаклдан (6.11- расм):

$$\bar{M}_f = x \operatorname{tg} \alpha \text{ ва } d\omega = M_p dx$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l \bar{M}_f M_p dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l x M_p dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l x d\omega$$

келиб чиқади.

Бу ерда $\int_0^l x d\omega$ интегрални M_p эпюрасининг юзаси ω_p дан 0—0' ўкига

нисбатан олинган статик моментдир, яъни

$$\int_0^l x d\omega = \omega_p \cdot x_c.$$

Ўрнига қўямиз

$$\int_0^l \bar{M}_f M_p dx = x_c \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega_p$$

Бироқ $x_c \operatorname{tg} \alpha = y_c$ эканлигини назарда тутсак,

$$\int_0^l \bar{M}_f M_p dx = \omega_p y_c \quad (6)$$

келиб чиқади, натижада интеграл функция интегралсиз ифода билан алмашади.

(в) ифодасини (б) га қўйсак, қуйидаги формула келиб чиқади:

$$\Delta_{fp} = \frac{1}{EJ} \sum \omega_p y_c \quad (2)$$

Бу ерда ар ω_p — эгувчи моментлар эпюрасининг юзаси;

y_c — биринчи эпюранинг оғирлик марказига мос келган иккинчи эпюрадаги ордината.

Кўчишларни аниқлашнинг бу усулини 1925 йилда Москва темирйўллар транспорти муҳандислари институтининг толиби А. Н. Верещагин таклиф этган.

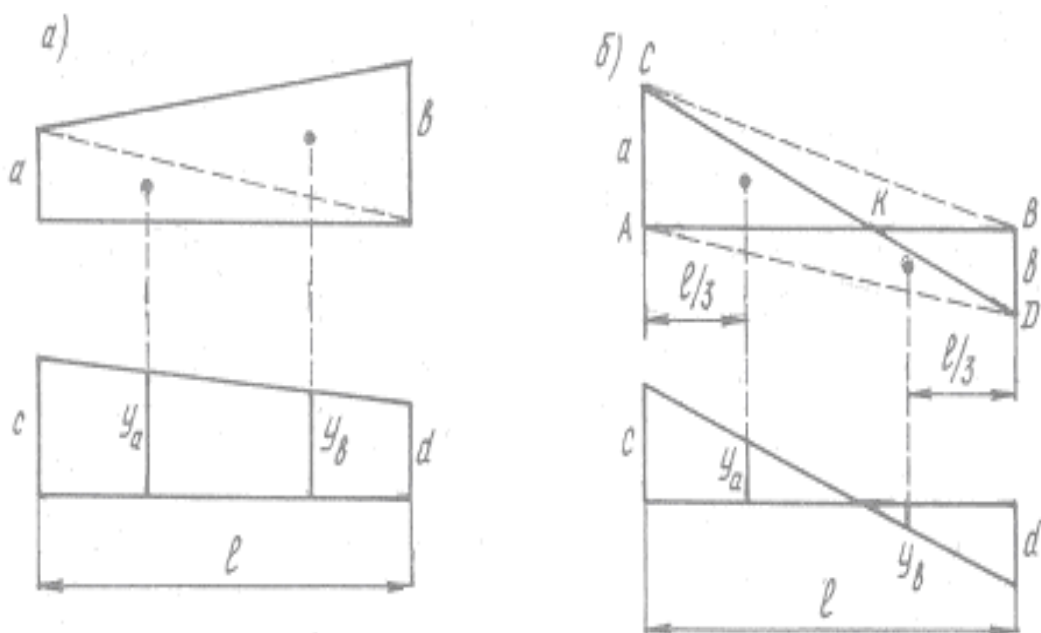
(г) дан кўринадик, ҳар иккала эпюра ўқнинг бир томонида жойлашса, кўчишнинг ишораси мусбат, ўқнинг турли томонларида жойлашса, ишора манфий бўлади. Шунинг ҳам қайд этиш лозимки, y_c ординатаси албатта тўғри чизиқли эпюрадан олинган зарур. Агар ҳар иккала эпюра тўғри чизиқли бўлса, y ҳолда ординатани қайси эпюрадан олинганлигининг фарқи йўқ.

Трапеция шаклли икки эпюра кўпайтириладиган бўлса, улардан бирининг оғирлик марказини топиш ўрнига трапециялардан бирини иккита учбурчакка ажратган қулай. Бунда ажратилган учбурчаклардан юза олинган трапециядан шу учбурчакларнинг оғирлик марказларига мос бўлган ординаталар олинади (6.12- расм, а). Бу ҳол учун тайёр формула бор:

$$\frac{al}{2} y_a + \frac{bl}{2} y_b = \frac{l}{6} (2ax + 2bd + ad + bc).$$

Формуланинг чап томонида юза ва ординаталар кўпаймаси, ўнг томонида эса шу кўпайтманинг жавоби берилган.

Қавс ичида қуйидаги миқдорларнинг йиғиндиси берилган: эпюралар чап ординаталари кўпайтмасининг иккилангани, ўнг ординаталар кўпайтмасининг иккилангани, биринчи эпюра чап ординатасини иккинчи эпюра ўнг ординатасига кўпайтмаси, шунингдек биринчи эпюра ўнг ординатасини иккинчи эпюра чап ординатасига кўпайтмаси.



6.12- расм

Кўпайтириладиган эпюралардан бири ёки ҳар иккаласи турли ишорали учбурчаклардан ташкил топса, яна юқоридаги усулдан фойдаланилса бўлади (6.12- расм, б). Бунинг учун эпюралардан бирини ABC ва ABD учбурчакларига тўлдирамиз. Ҳосил бўлган СВК ва АКД учбурчакларининг ординаталари тенг ва ишоралари қарама-қарши бўлганлиги учун ҳисоб натижаларига таъсир этмайди.

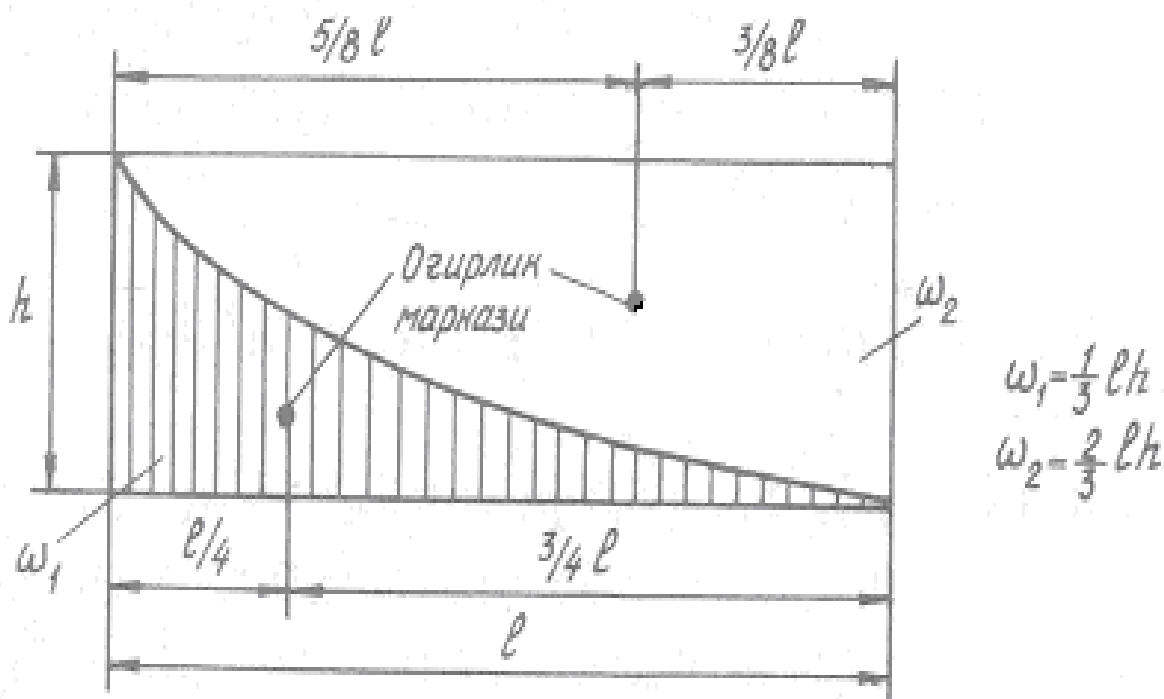
Эпюралар кўпайтмаси (6.12- расм, б) қуйидаги формуладан топилади:

$$\frac{al}{2} y_a + \left(-\frac{bl}{2} \right) (-y_b) = \frac{al}{2} y_a + \frac{bl}{2} y_b.$$

Кўчишларни Верешчагин усулида аниқлаганда, турли шаклларнинг юзалари ва оғирлик марказларини топишга тўғри келади.

Оддий геометрик шаклларнинг юза ва оғирлик марказларини аниқлаш ўқувчига ўрта мактабдан маълум.

6.13- расмда параболик эпюранинг юзаси ва оғирлик марказлари берилган.



6.13- расм

Верешчагин усулини бикирлиги ўзгармас бўлган балка ва рамаларда қўллаш мақсадга мувофиқдир. Агар бикирлик элементнинг узунлиги бўйлаб ўзгарувчан бўлса, у ҳолда EI ни интегралдан ташқарига чиқариб бўлмайди, шу сабабли Верешчагин формуласидан фойдаланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда кўчишлар Мор интегралини бевосита ечиш йўли билан аниқланади.

6.4. Ҳароратнинг ўзгаришидан ва таянчларнинг қўчишидан ҳосил бўладиган кўчишлар

Статик аниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши стерженда кўчишлар пайдо бўлишига олиб келади. Масалан, ҳарорат таъсирида стержень ўзайиши, қисқариши ва қийшайиши мумкин. Ҳароратнинг ўзгариши статик аниқ системаларда қўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди.

Юқорида кўриб ўтилган Мор формуласини (6.7) ҳарорат таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни аниқлаш масаласига татбиқ этамиз.

Ҳарорат таъсирида бўлган иншоотдан бирор dx бўлакчани ажратиб олайлик. Бўлакчанинг устки толаларининг ҳарорати t_1 пастки толаларининг

харорати эса t_2 бўлсин. Ҳарорат бўлакчанинг кўндаланг кесимида бир текисда тўғри чизик қонуни бўйича тарқалган дейлик (6.14- расм, а).

Ҳарорат таъсиридаги чизикли кенгайиш коэффиценти α бўлса, бўлакчанинг устки толаси $\alpha t_1 dx$ га, пастки толаси эса $\alpha t_2 dx$ масофага узаяди (6.14- расм, б).

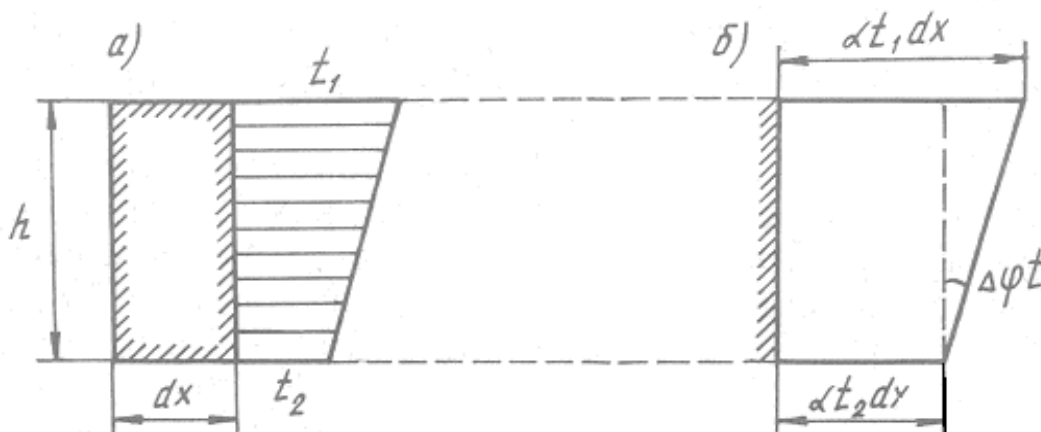
Агар кесим горизонтал ўққа нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда бўлакчанинг ҳарорат таъсирида ўртача ўзайиши

$$\Delta_{xt} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{2} dx \quad \text{бўлади.}$$

Бўлакчанинг кўндаланг кесимлари бир-бирига нисбатан

$$\Delta_{\varphi} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx$$

бурчакка оғади.



6.14- расм

Ҳарорат таъсирида силжиш деформацияси рўй бермайди.

Буларни эътиборга олсак, Мор формуласи (6.7) қуйидаги кўринишга келади:

$$\Delta_{pt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_p dx + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \bar{N}_p dx \quad (6.11)$$

Агар стерженларнинг кўндаланг кесимлари ўзгармас бўлса, интеграллар бирлик эпюраларининг юзалари сифатида ҳисоблаб топилиши мумкин, у ҳолда ҳарорат таъсирида вужудга келган кўчишларни аниқлаш формуласи куидаги содда кўринишни олади:

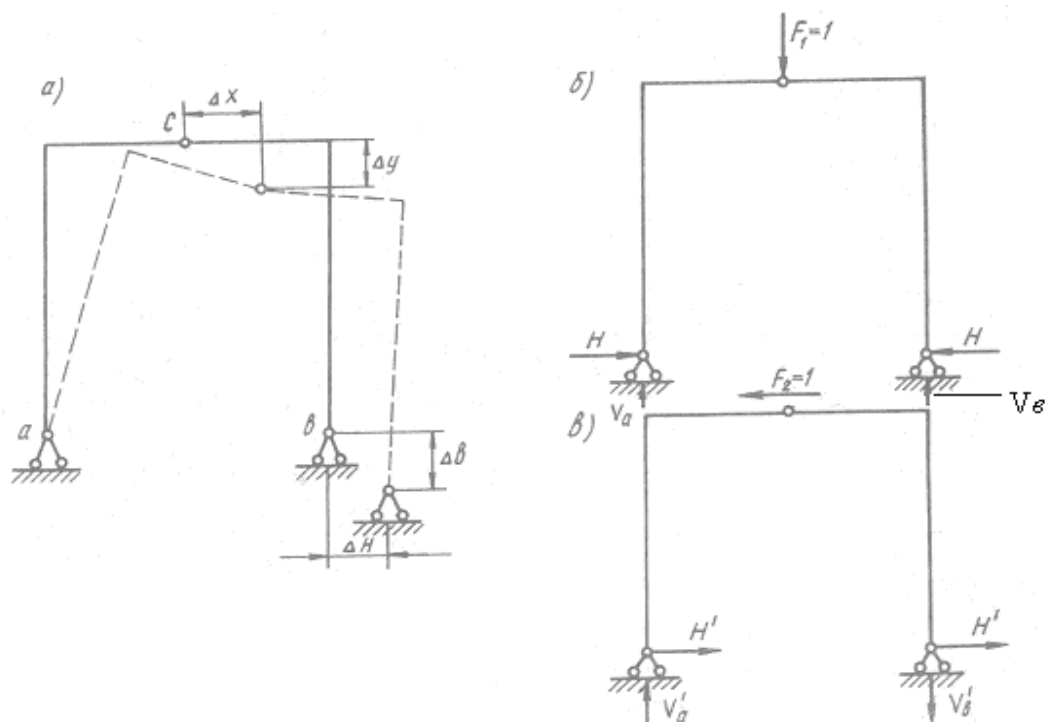
$$\Delta_{pt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{\bar{N}} \quad (6.12)$$

Бу ерда $\omega_{\bar{M}}$ ва $\omega_{\bar{N}}$ — бирлик эпюралар $\bar{M}$ ва $\bar{N}$ нинг юзалари.

(6.12) формула таркибидаги ҳадларнинг ишораси деформациянинг йўналишига боғлиқ: агар ҳарорат таъсирида вужудга келган кўчишнинг йўналиши бирлик куч таъсирида вужудга келган кўчиш йўналиши билан бир хил бўлса, ишора мусбат, акс ҳолда манфий олинади.

Таянчларнинг чўкишидан ҳосил бўладиган кўчишлар. Статик аниқ системаларда таянчларнинг чўкиши иншоотда қўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди. Таянчларнинг кўчиши эса тупроқнинг ўтириши, сув босиши ёки силжиши сингари турли сабаблар таъсирида рўй бериши мумкин.

Мисол тариқасида 6.15- расмда тасвирланган уч шарнирли рамани кўриб ўтамиз. Раманинг B таянчи чўқди деб фараз этайлик. Чўкишнинг вертикал Δ_b ва горизонтал Δ_n ташкил этувчилари маълум деб қарайлик. Ўртадаги C шарнирининг ҳолатини аниқлаш талаб этилади (6.15- расм, а). Шарнирнинг вертикал кўчишини Мор формуласи бўйича аниқлаш учун C нуктасига вертикал йўналишда бирлик куч $F_1=1$ ни қўямиз (6.15- расм, б).



6.15- расм

Бирлик ҳолат кучларининг ҳақиқий ҳолат кўчишларини вужудга келишида бажариши мумкин бўлган ишлари йиғиндиси қуйидагича ифодаланади:

$$1\Delta_y - V_b\Delta_b - H\Delta_H = 0.$$

Бу тенгламадан изланаётган кўчиш аниқланади

$$\Delta_y = V_b\Delta_b + H\Delta_H$$

Демак, мазкур кўчиш таянчларнинг чўкишига бевосита боғлиқ экан.

Горизонтал кўчиш Δ_x ни аниқлаш учун C шарнирига $F_2=1$ кучини қўямиз (6.15- расм, в). Мор теоремаси асосида қуйидаги ишлар тенгламасини тузамиз:

$$1\Delta_x + V'_b \cdot \Delta_b + H' \Delta_H = 0 ,$$

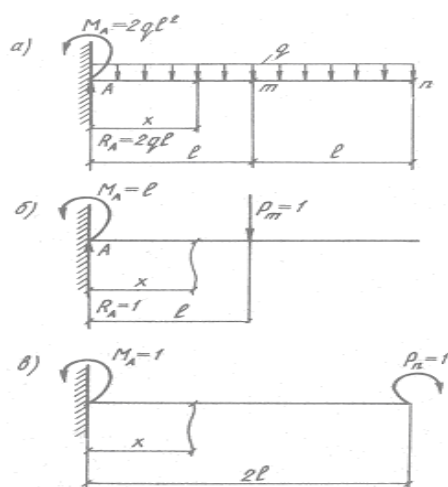
бу ердан

$$\Delta_x = -V'_b \Delta_b - H' \Delta_H$$

келиб чиқади.

Қуйида кўчишларни аниқлашга доир мисоллар кўриб ўтамиз.

1- мисол. 6.16 – расм, *a* да берилган балканинг *B* кесими учун бурилиш бурчаги (угол поворота) φ_B аниқлансин. Балканинг бикрлиги EJ ўзгармас.



6.16- расм

Ечиш. Балканинг 1-ҳолати (ҳақиқий ҳолат) 6.16- расм, *a* да тасвирланган. Иккинчи ҳолатда балкани берилган кучларсиз тасвирлаймиз (6.16- расм, *b*) ва бурилиш бурчагини аниқлаш талаб этилган кесимга $M = 1$ моментини қўямиз (агар кўчишни аниқлаш талаб этилганида шу нуқтага бирлик куч қўйган бўлар эдик). 6.16- расм, *в* да бурилиш бурчаги φ_B кўрсатилган.

Маълумки, эгилган ўққа ўтказилган уринма билан балканинг горизонтал ўқи орасидаги бурчак бурилиш бурчаги, деб аталади. Шу уринмага тик бўлган чизик билан вертикал ўқ орасидаги бурчак ҳам бурилиш бурчаги бўлади.

Балканинг 1-ҳолатидаги ихтиёрий кесимда ҳосил бўлган эгувчи момент

$$M_1 = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Иккинчи ҳолатда

$$\bar{M}_2 = -M = -1$$

Буларни Мор формуласининг биринчи ҳадига қўйиб, бурилиш бурчагини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \Delta_{21} = \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \int_0^l M_1 \bar{M}_2 dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (-1) \cdot \left(-\frac{qx^2}{2}\right) dx = \frac{q}{2EJ} \int_0^l x^2 dx = \\ &= \frac{q}{2EI} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \frac{ql^3}{6EI} = \frac{20 \cdot 5^3}{6EI} = \frac{417}{EI}. \end{aligned}$$

2-мисол. 6.17- расм, *a* да берилган балканинг *B* учи солқилиги аниқлансин.

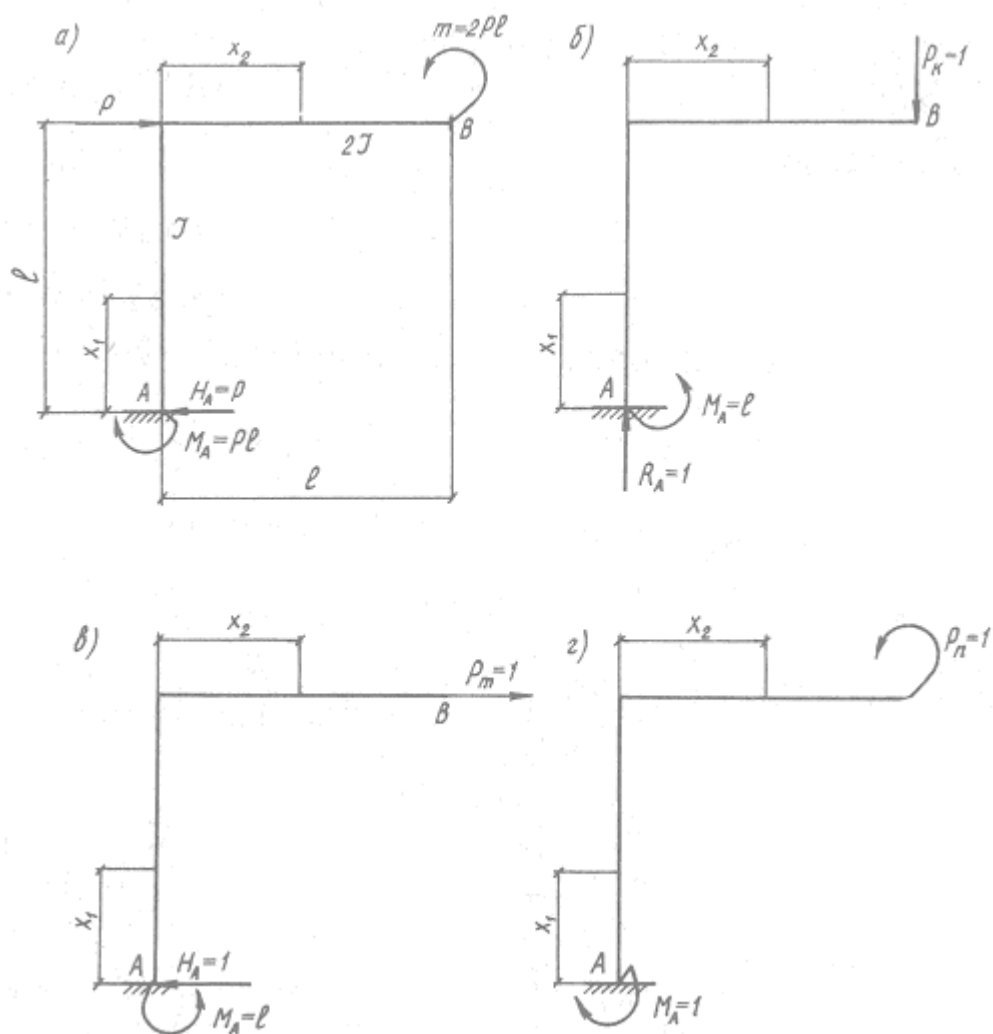
Ечиш. Балканинг 1 – ҳолатида ташқи кучлар, 2 – ҳолатида эса солқилиги (прогиб) аниқланаётган нуқтага бирлик куч ($P=I$) қўйилган.

Ҳақиқий ҳолатда балка иккита участкага эга. CB участкаси учун $M_1 = -Px$, AC участкаси учун $M_1 = -Px = P(x-b) = -2Px + Pb$.

Иккинчи ҳолатда ҳар иккала участка учун $\bar{M}_2 = -1 \cdot x = -x$.

Изланаётган кўчиш (солқилик)

$$\begin{aligned} \Delta_{21} = y_B = f &= \frac{1}{EI} \left[b \int_0^l -x(-Px)dx + \int_0^l -x(-2Px + Pb)dx \right] = \frac{1}{EI} \\ &\left(P \int_0^b x^2 \cdot dx + 2P \int_0^l x^2 \cdot dx - Pb \int_0^b x dx \right) = \frac{1}{EI} \left(P \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^b + 2P \left| \frac{x^3}{3} \right|_b^l - Pb \right. \\ &\left. \left| \frac{x^2}{2} \right|_b^l \right) = \frac{P}{6EI} (2b^3 + 4l^3 - 4b^3 - 3bl^2 + 3b^3) = \frac{P}{6EI} (b^3 + 4l^3 - 3bl^2) = \\ &= \frac{20}{6EI} (2^3 + 4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5^2) = \frac{1193,3}{EI}. \end{aligned}$$



6.17- расм

3- мисол. 6.18- расм, *a* да берилган ферманинг «*K*» тугунидаги вертикал ва горизонтал кўчишлар аниқлансин. Стерженлар бикирлиги ўзаро тенг деб қабул қилинсин.

Ечиш. Мор формуласи

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{N_i^0 \cdot \bar{N}_i^k l_i}{E J}$$

га кўра қуйидаги амалларни бажаришимиз зарур:

1. Ташқи кучдан ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлаймиз. Таянч реакциялари $R_A = P$; $R_B = P$; ва $H_A = 3P$ қийматларига эга. Ҳисоблаш учун зарур бўладиган ферманинг геометрик параметрлари:

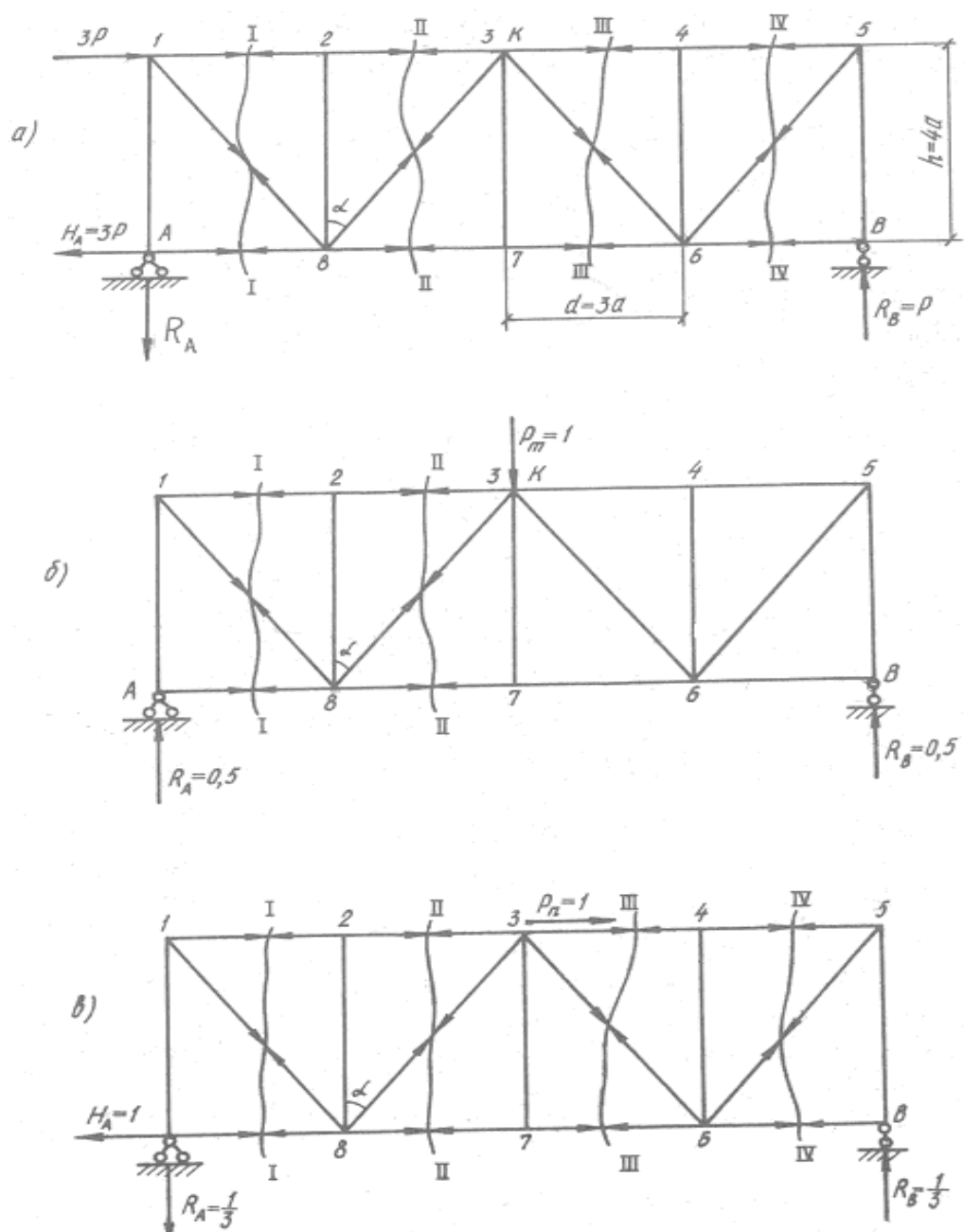
$$l_{18} = l_{38} = l_{36} = l_{56} = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a;$$

$$\cos \alpha = \frac{l_{28}}{l_{38}} = \frac{4a}{5a} = 0,8.$$

A, 2, 7, 4 ва B тугунларнинг мувозанат шартларидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар топилади:

$$N_{1A}=P; N_{8A}=3P; N_{5B}= -P; N_{28}=0; N_{37}=0;$$

$$N_{46}=0; N_{6B}=0; N_{12}=N_{23}; N_{78}=N_{6-7}; N_{34}=N_{45}.$$



6.18- расм

I – I кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum Y = 0; N_{18} \cdot \cos \alpha + P = 0; N_{18} = -\frac{P}{\cos \alpha} = -\frac{P}{0,8} = -1,25P;$$

$$\sum m_8 = 0; -N_{12} \cdot h - R_b \cdot 3d = 0; N_{12} = \frac{-R_b \cdot 3d}{h} = -\frac{3 \cdot 3a}{4a} P = 2,25P;$$

$$N_{23} = -2,25P.$$

II – II кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\begin{aligned}\sum \acute{o} &= 0; N_{38} \cdot \cos \alpha - P = 0; N_{38} = -\frac{P}{\cos \alpha} = 1,25P; \\ \sum m_3 &= 0; N_{78} \cdot h - P \cdot 2d = 0; N_{78} = \frac{2Pd}{h} = \frac{2P \cdot 3a}{4a} = 1,5P; \\ N_{78} &= 1,5P; N_{67} = 1,5P.\end{aligned}$$

III – III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\begin{aligned}\sum y &= 0; N_{36} \cdot \cos \alpha + P = 0; N_{36} = -\frac{P}{\cos \alpha} = -1,25P; \\ \sum m_6 &= 0; N_{34}h + P \cdot d = 0; N_{34} = -\frac{Pd}{h} = -\frac{P \cdot 3a}{4a} = -0,75P; \\ N_{45} &= -0,75P.\end{aligned}$$

IV – IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{56} \cdot \cos \alpha - P = 0; N_{56} = \frac{P}{\cos \alpha} = 1,25P.$$

2. Ферманинг K тугунига вертикал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18-рasm, б).

Таянч реакциялари $R_A = R_B = \frac{1}{2} = 0,5$; $H_A = 0$ бўлади. Бу ерда ферма ва юкнинг симметриклиги эътиборга олинади. А, 2, 7, 4 тугунлар мувозанатидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар аниқланади:

$$\begin{aligned}N_{1A} = N_{5B} &= -0,5; N_{8A} = N_{6B} = 0; N_{28} = 0; N_{37} = 0; N_{46} = 0; \\ N_{12} = N_{23} = N_{34} &= N_{45}; N_{78} = N_{67}; N_{18} = N_{56}; N_{38} = N_{36}.\end{aligned}$$

I – I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{18} \cdot \cos \alpha - 0,5 = 0; N_{18} = \frac{0,5}{\cos \alpha} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625.$$

$$\sum m_8 = 0; N_{12} \cdot h + 0,5 \cdot d = 0; N_{12} = \frac{0,5d}{h} = -\frac{0,53a}{4a} = -0,375;$$

$$N_{23} = N_{34} = N_{45} = N_{12} = -0,375.$$

II – II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{38} \cdot \cos \alpha + 0,5 = 0; N_{38} = -\frac{0,5}{\cos \alpha} = -0,625; N_{38} = -0,625;$$

$$\sum m_3 = 0; N_{7-8} \cdot h - 0,5 \cdot 2d = 0; N_{78} \frac{0,5 \cdot 2 \cdot 3a}{4a} = 0,75; N_{76} = 0,75.$$

3. Ферманинг K тугунига горизонтал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18, в).

Таянч реакциялари:

$$\sum x = 0; H_A - 1 = 0; H_A = 1,$$

$$\sum m_A = 0; R_B \cdot 4d - P_1 \cdot h = 0; R_B = \frac{P_1 h}{4d} = \frac{P_1 4a}{4 \cdot 3a} = \frac{P_1}{3} = \frac{1}{3};$$

$$\sum y = 0; R_A - R_B = 0; R_A = R_B = \frac{1}{3}.$$

A, 2, 7, 4, B тугунлар мувозанатидан фойдаланиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$N_{1-A} = R_A = \frac{1}{3}; N_{5-B} = -R_B = -\frac{1}{3}; N_{8-A} = H_A = 1; N_{6-B} = 0.$$

$$N_{28} = 0; N_{3-7} = 0; N_{46} = 0; N_{12} = N_{23}; N_{34} = N_{45}; N_{7-8} = N_{6-7}.$$

I – I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{18} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{3} = 0; N_{18} = -\frac{1}{3 \cos \alpha} = -\frac{1}{3 \cdot 0,8} = -\frac{1,25}{3} = -0,417;$$

$$\sum m_8 = 0; N_{12} \cdot h - \frac{1}{3}d = 0; N_{12} = \frac{d}{3h} = \frac{3a}{3 \cdot 4a} = 0,25; N_{23} = 0,25.$$

II – II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{38} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{3} = 0; N_{38} = \frac{1}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3 \cdot 0,8} = \frac{1,25}{3} = 0,417.$$

III – III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{36} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{3} = 0; N_{36} = -\frac{1}{3 \cos \alpha} = -\frac{1}{3 \cdot 0,8} = -0,417;$$

$$\sum m_6 = 0; N_{34} \cdot h + \frac{1}{3}d = 0; N_{34} = -\frac{d}{3h} = -\frac{3a}{3 \cdot 4a} = -0,25; N_{45} = -0,25;$$

$$\sum m_3 = 0; N_{67} \cdot h - \frac{1}{3}2d = 0; N_{67} = \frac{2d}{3h} = \frac{2 \cdot 3a}{3 \cdot 4a} = 0,5; N_{78} = 0,5.$$

IV – IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0; N_{56} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{3} = 0; N_{56} = \frac{1}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3 \cdot 0,8} = 0,417;$$

4. Ҳисобнинг давоми 6.1 – жадвалда келтирилган:

6.1 – жадвал

	N_{Pi}	l_i	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_n$	$N_{ip}N_{im}l_i$	$N_{ip}N_{in}l_i$
N_{12}	- 2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53 Pa	-1,69 Pa
N_{23}	- 2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53 Па	-1,69 Pa
N_{34}	- 0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84 Pa	0,56 Pa
N_{45}	- 0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84 Pa	0,56 Pa
N_{8A}	3P	3a	0	1	0	9 Pa
N_{78}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375 Pa	2,25 Pa
N_{67}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375 Pa	2,25 Pa
N_{6B}	O	3a	0	0	0	0
N_{1A}	P	4a	-0,5	1/3	-2 Pa	1,33 Pa
N_{28}	O	4a	0	0	0	0
N_{37}	O	4a	0	0	0	0
N_{46}	O	4a	0	0	0	0
N_{5B}	-P	4a	0,5	-1/3	2 Pa	1,33 Pa
N_{18}	-1,25P	5a	0,625	-0,417	-3,9 Pa	2,6 Pa
N_{38}	-1,25P	5a	-0,625	0,417	-3,9 Pa	2,6 Pa
N_{36}	-1,25P	5a	-0,625	-0,417	3,9 Pa	1,6 Pa
N_{56}	1,25P	5a	0,625	0,417	3,9 Pa	2,6 Pa

					13,49 Pa	24,3 Pa
--	--	--	--	--	----------	---------

Ферма “К” тугунининг вертикал кўчиши

$$\Delta_{mp} = \sum \frac{N_{pi} N_{mi} l_i}{EF} = \frac{13,49 Pa}{EF}$$

горизонтал кўчиши

$$\Delta_{np} = \sum \frac{N_{pi} N_{ni} b_i}{EF} = \frac{24,3 Pa}{EF} \quad \text{бўлади.}$$

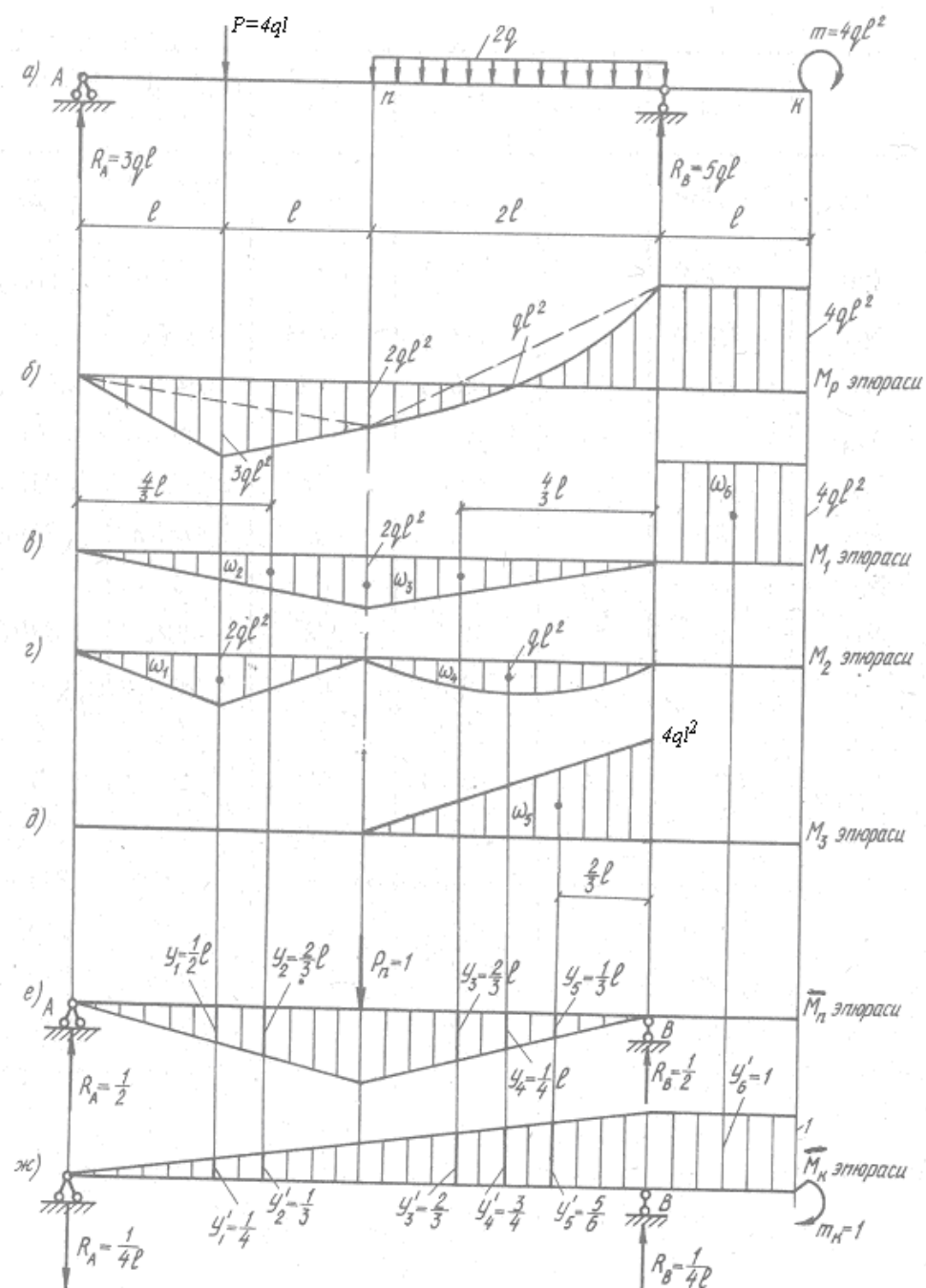
4- мисол. Берилган юклар таъсирида балканинг n кесимини вертикал кўчиши ва K кесимини бурчакли кўчиши Верешчагин усулида аниқлансин. Балканинг биқирлиги унинг бутун узунлиги бўйича ўзгармас (6.19- расм, а).

Ечиш. 1. Берилган юклар таъсирида балканинг эгувчи моментлар эпюрасини, оғирлик маркази аниқ ва юзаларини ҳисоблаш осон бўлган, оддий эпюралар (M_1, M_2, M_3) га ажратамиз (6.19- расм, в, г, д).

2. Юкланмаган балкаларнинг бирига вертикал йўналишда бирлик куч ($P_n = 1$), иккинчисига бирлик момент ($m_k = 1$) қўямиз ҳамда $\bar{M}_n$ ва $\bar{M}_k$ эпюраларини курамиз. $\bar{M}_n$ ва $\bar{M}_k$ эпюраларидан, юқоридаги оддий юзларнинг оғирлик марказларига мос келадиган ($y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ ҳақда $y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6$) ординаталарни аниқлаймиз (6.19- расм е, ж).

3. Верешчагин қондасига (6.11) амал қилиб, кўчишларни топамиз. Балканинг n кесимидаги вертикал кўчиш

$$\begin{aligned} \Delta_{np} &= \sum \int \frac{M_p \cdot \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l \right) + \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{q}{3} l + \\ &+ \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} ql^2 2l \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{ql^4}{EJ} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{3ql^4}{EJ}; \end{aligned}$$



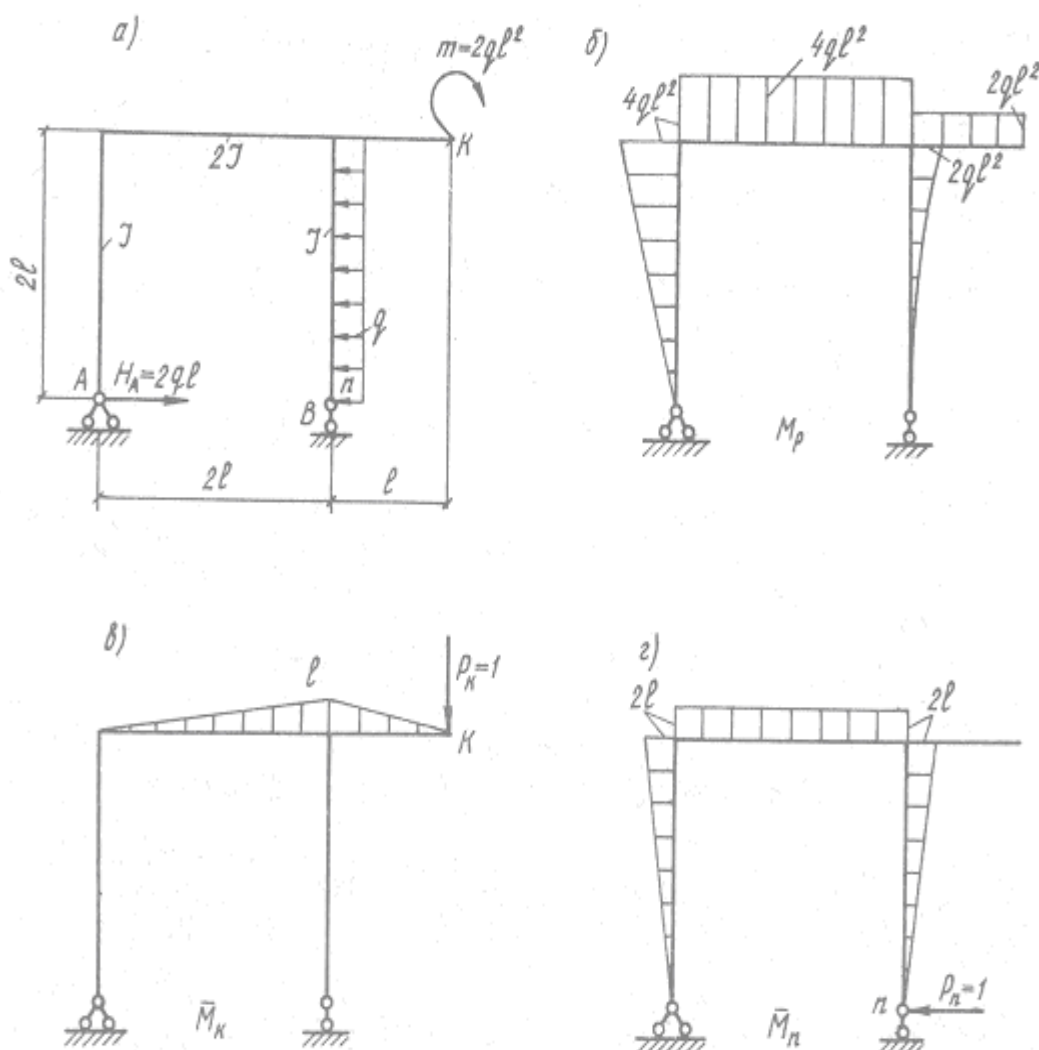
6.19- расм

Балканинг K кесимидаги бурчакли кўчиш

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{M_p \cdot \bar{M}_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_{\bar{M}_k} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \frac{1}{4} - \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \frac{2}{3} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} ql^2 \cdot 2l \frac{3}{4} + \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \frac{5}{6} + 4ql^2 \cdot l \cdot 1 \right) = \frac{ql^3}{EJ} \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3} + 4 \right) = \frac{23}{6} \frac{ql^3}{EJ}.$$

5- мисол. Раманинг K нуктасининг вертикал кўчиши ва n нуктасининг горизонтал кўчиши Верещлагин усулида аниқлансин (6.20- расм, а).

Ечиш. Берилган юклардан эгувчи моментлар эпюраси M_p ни курамиз (6.20- расм, б). Изланаётган йўналишда бирлик кучлар (P_k, P_n) қўйиб, бирлик эгувчи момент эпюралари $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ ни курамиз (6.20- расм, в, г).



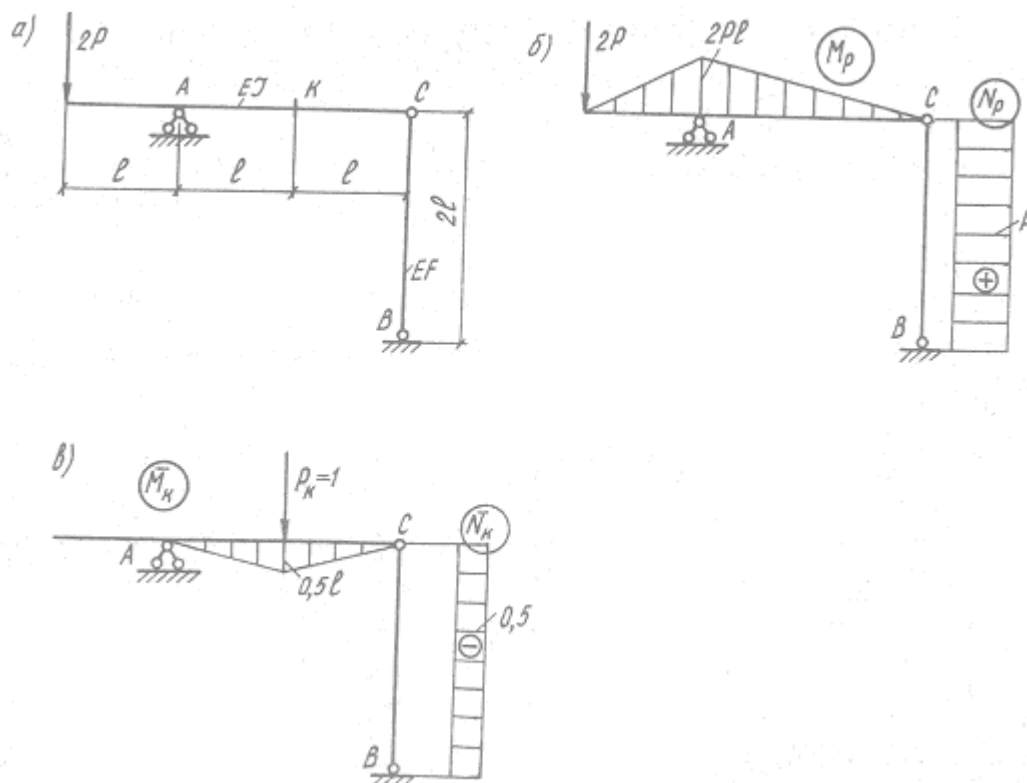
6.20- расм

M_p эюрасини алоҳида равишда $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ эюраларига кўпайтириб, изланаётган кўчишларни аниқлаймиз. Вертикал кўчиш:

$$\Delta_{pk} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{2EJ} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}l + \frac{1}{2EJ} 2ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2}l = \frac{2ql^4}{EJ} + \frac{ql^4}{2EJ} = \frac{5}{2} \frac{ql^4}{EJ}$$

Горизонтал кўчиш:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l + \frac{1}{2EJ} 4ql^2 \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} 2l = \frac{16}{3} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{8ql^4}{EJ} + \frac{4ql^4}{EJ} = \frac{52}{3} \frac{ql^4}{EJ}$$



6.21- расм

6- мисол. «K» нуқтасининг вертикал кўчиши аниқлансин. Балка А нуқтада шарнирли қўзғалмас таянч ва С нуқтада ВС стержень (тортқич) ёрдамида маҳкамланган. Балканинг бикирлиги EI, стерженнинг бикирлиги EF (6.21- расм, а).

Ечиш. Балка эгилишга, стержень эса чўзилишга ишлайди. Кўчишни аниқлашда Мор формуласининг икки ҳадидан фойдаланамиз:

$$\Delta_{kp} = \int_0^{2l} \frac{M_p \bar{M}_k dx}{EJ} + \int_0^l \frac{N_p \bar{N}_k dx}{EF}$$

Берилган кучдан эгувчи момент (M_p) ва бўйлама кучлар (N_p) эпюраларини кўрамиз (6.21- расм, б, в).

Изланаётган кўчиш йўналишида балкага бирлик куч ($P_k = 1$) қўйиб бирлик эгувчи моментлар ($\bar{M}_k$) ва бирлик бўйлама кучлар ($\bar{N}_k$) эпюраларини курамиз: (6.21- расм, в).

Кўчишни Верешчагин қоидаси ёрдамида аниқлаймиз:

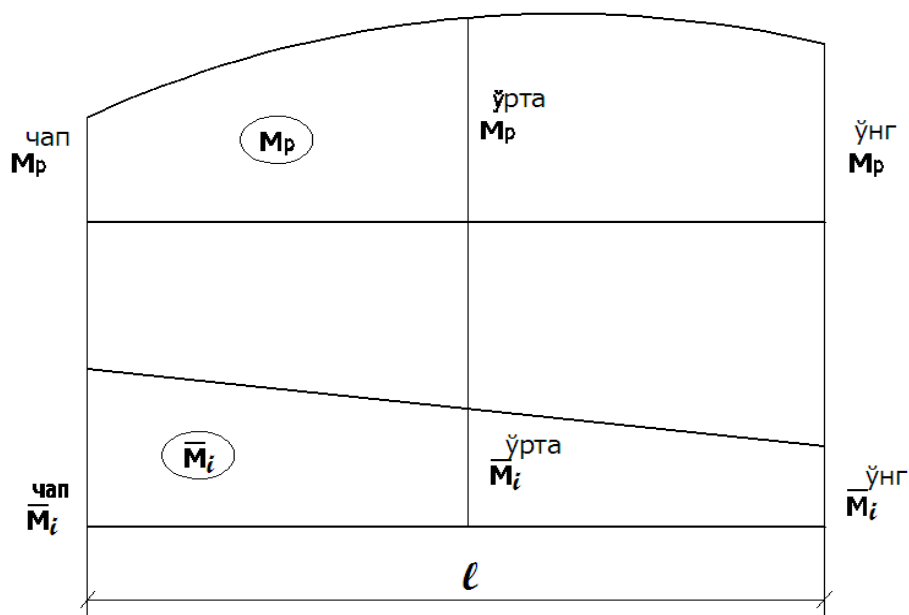
$$\Delta_{kp} = \frac{-1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} 2Pl - \frac{1}{EF} P \cdot l \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{Pl^3}{EJ} - \frac{1}{2} \frac{Pl}{EF} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Pl^3}{EJ} + \frac{Pl}{EF} \right)$$

Демак, K кесимининг кўчиши икки хил деформациянинг йиғиндисидан ташкил топар экан. Буларнинг биринчиси ригелнинг эгилиши (қавсдаги биринчи ҳад), иккинчиси эса устуннинг чўзилиши (қавсдаги иккинчи ҳад).

6.5. Кўчишларни Симпсон усулида аниқлаш

Кўчишларни аниқлашнинг ушбу усули ҳам, Верешчагин усулига ўхшаб, икки хил эпюрани ўзаро кўпайтиришга асосланган. Эпюраларнинг бири-ташқи кучлардан қурилган M_p эпюраси, иккинчиси-бирлик кучдан қурилган $\bar{M}_k$ эпюраси. Аммо Симпсон усулини ўзига хос қулайликлари бор. Масалан, эпюраларни кўпайтириш жараёнида, Верешчагин усулида талаб этилганидек, юзаларни ва оғирлик марказларини албатта эгри чизиқли эпюрадан олиш шарт эмас. Эпюранинг эгри ёки тўғри чизиқлилиги, шунингдек, уларнинг шакли, ҳеч қандай роль ўйнамайди. Изланаётган кўчишнинг қиймати

эпюраларнинг чап ва ўнг чеккаларидаги ҳамда ўрта кесимдаги моментлар қийматига боғлиқ (6.22-расм).



6.22-расм

Кўчишларни аниқлаш учун Симпсон формуласи қуйидаги кўринишга эга:

$$\Delta_{ip} = \frac{\ell}{6EJ} \left(M_p^{чан} \cdot \bar{M}_i^{чан} + 4M_p^{ўрта} \cdot \bar{M}_i^{ўрта} + M_p^{ўнг} \cdot \bar{M}_i^{ўнг} \right) \quad (6.13)$$

Бу ерда ℓ - кўрилатган оралиқ узунлиги;

$M_p^{чан}$ - M_p – эпюрасида чап кесимдаги эгувчи момент;

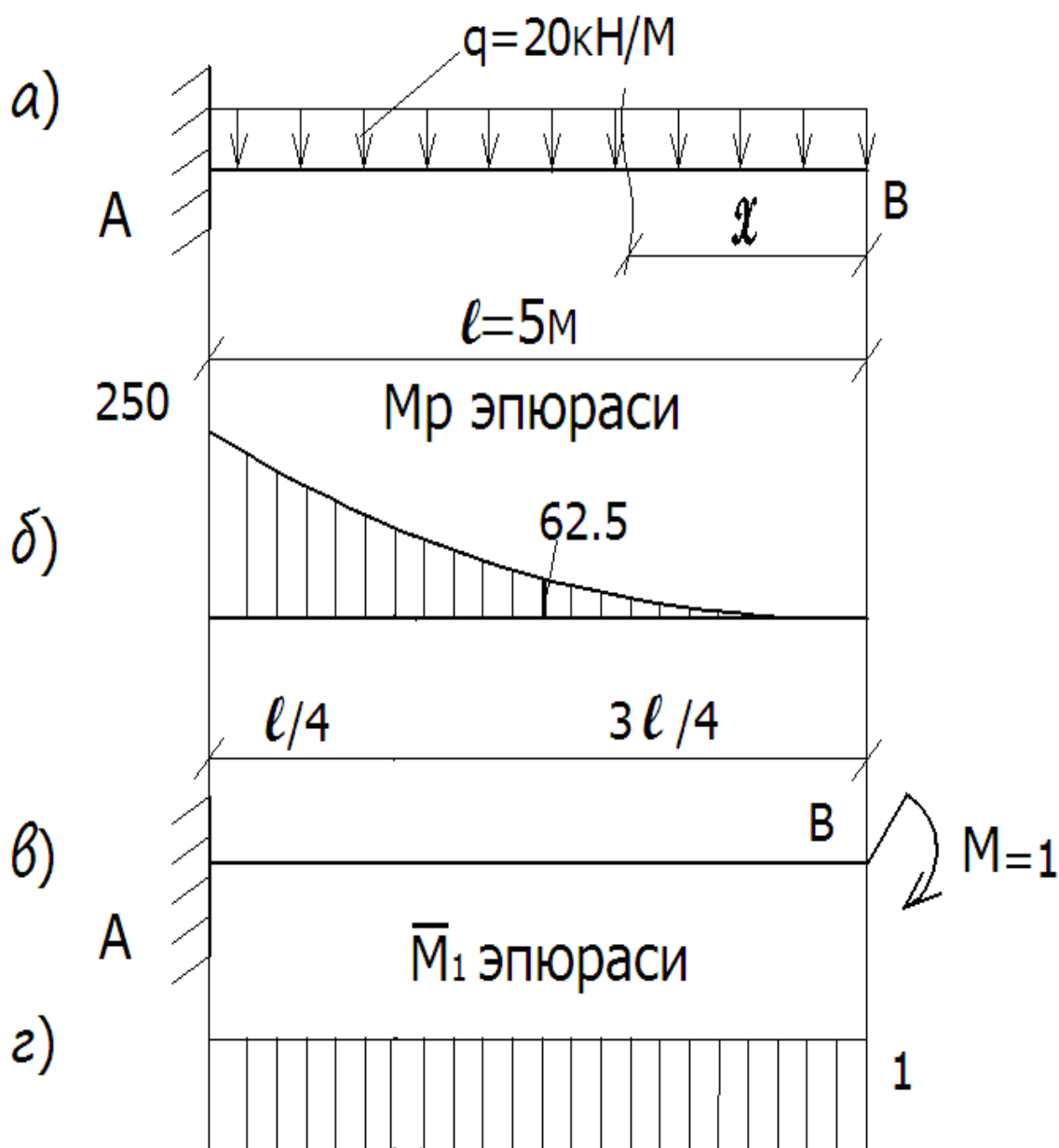
$M_p^{ўнг}$ - M_p - эпюрасида ўнг кесимдаги эгувчи момент;

$M_p^{ўрта}$ - M_p - эпюрасида ўрта кесимдаги эгувчи момент;

$\bar{M}_i^{чан}$, $\bar{M}_i^{ўнг}$, $\bar{M}_i^{ўрта}$ - бирлик эпюранинг чап, ўнг ва ўрта кесимларидаги эгувчи моментлар.

7-мисол. 6.23 – расмда берилган балканинг B учигаги бурилиш бурчаги φ_B аниқлансин. Балканинг бикрлиги ўзгармас.

Ечиш. Ташки кучдан курилган M_p ва бирлик кучдан курилган $\bar{M}_1$ эпюралари 6.23-расм, б ва з да берилган.

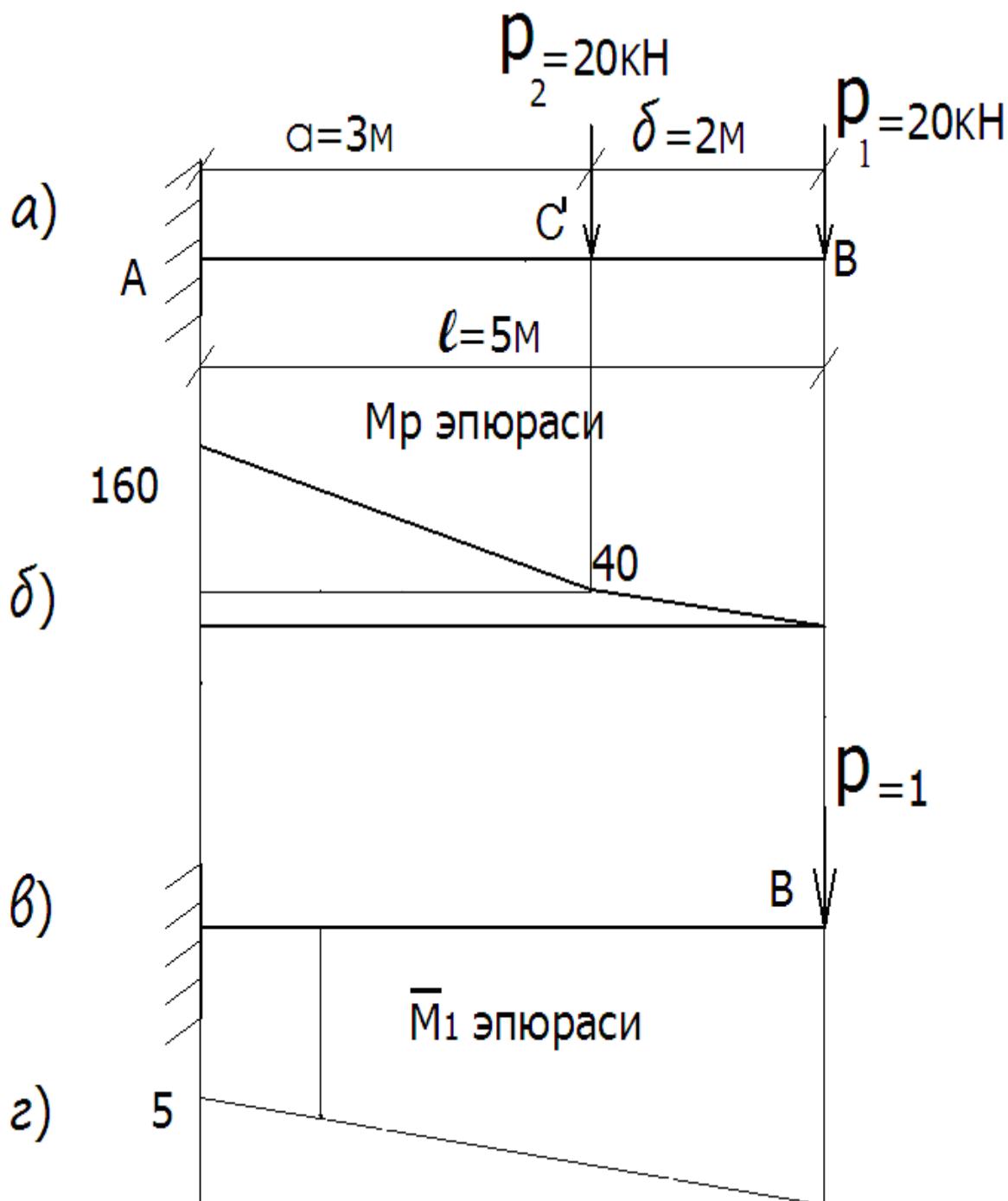


6.23- расм

(6.13) формуладан фойдаланиб, изланаётган бурчакли кўчишни аниқлаймиз:

$$\Delta_{ip} = \varphi_B = \frac{5}{6EJ} (250 \cdot 1 + 4 \cdot 62,5 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \frac{416,67}{EJ}.$$

8-мисол. 6.24-расм, *a* да берилган балканинг эркин учи солқилиги аниқлансин. Балканинг бикирлиги ўзгармас.



6.24 – расм

Ечиш. Балканинг M_p ва $\bar{M}_1$ эпюралари 6.24-расм б ва г да тасвирланган. Берилган балка икки участкадан иборат. Симпсон формуласини ҳар бир участкага алоҳида равишда қўллаймиз. M_p ва $\bar{M}_1$ эпюраларидаги чекка

моментлар маълум. Бироқ ўрта кесимлардаги моментлар номаълум.

Шуларни топамиз: M_p – эпюраси бўйича

$$I - \text{участка учун: } M_p^{\text{ўрта}} = - P_1 \cdot 1 = - 20 \text{ кНм};$$

$$II - \text{участка учун: } M_p^{\text{ўрта}} = - P_1 \cdot 3,5 - P_2 \cdot 1,5 = - 100 \text{ кНм};$$

$\bar{M}_1$ эпюраси бўйича

$$I - \text{участка учун: } \bar{M}_i^{\text{ўрта}} = - P \cdot 1 = - 1 \text{ м};$$

$$II - \text{участка учун: } \bar{M}_i^{\text{ўрта}} = - P \cdot 3,5 = - 3,5 \text{ м};$$

(6.13) формуладан фойдаланиб, изланаётган кўчишни аниқлаймиз:

$$\Delta_{\text{пр}} = \frac{2}{6EJ} (40 \cdot 2 + 4 \cdot 20 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + \frac{3}{6EJ} (160 \cdot 5 + 4 \cdot 100 \cdot 3,5 + 40 \cdot 2) = \frac{53,33}{EJ} + \frac{1140}{EJ} = \frac{1193}{EJ}.$$

7- БОБ

СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

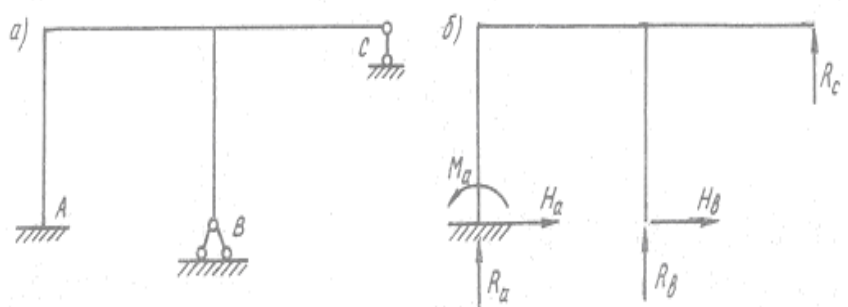
7.1. Статик ноаниқ системалар ҳақида тушунча

Бинокорликда шундай конструкциялар учрайдики, уларни ҳисоблаш учун, яъни ички кучларини аниқлаш учун статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя қилмайди. Чунки уларда ортиқча боғланишлар мавжуд бўлиб, ҳар бир боғланишда номаълум реакциялар вужудга келади. Номаълумлар, сонини тенгламалар сонига, тенглаштириш учун қўшимча тенгламалар тузиш талаб этилади. Ана шундай системалар *статик ноаниқ системалар* деб аталади.

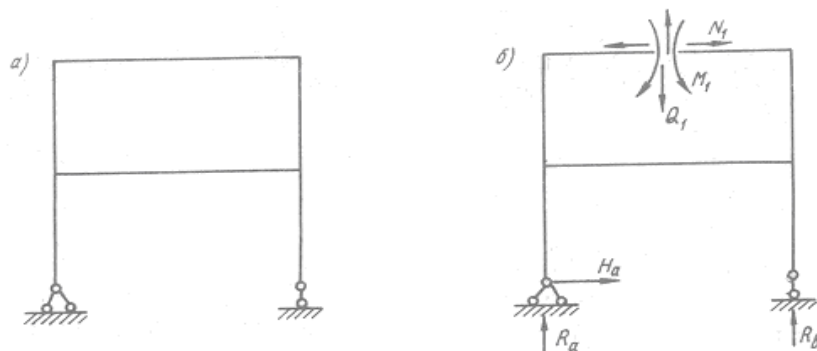
Боғланиш деганда нуқталар ва кесимларнинг ўзаро кўзғалишига қаршилик кўрсатувчи ҳар қандай тўсиқ тушунилади. «Ортиқча» боғланиш атамаси боғланишнинг «кераксизлигини» эмас, балки «керагидан ортиқча»

эканлигини англатади. Агар статик ноаниқ системадаги ортиқча боғланишлар ташлаб юборилса, у ҳолда статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил бўлади. Демак, ортиқча боғланишлар сони системанинг *статик ноаниқлик даражасини* белгилар экан.

Системалар шартли равишда ташқи ва ички статик ноаниқ системаларга ажратилади. 7.1- расмда ташқи, 7.2- расмда ички статик ноаниқ рама тасвирланган. Буларнинг фарқига етиш учун ҳар иккала раманинг номаълум реакцияларини таҳлил этамиз. 7.1- расм, б-да олти номаълум таянч реакциялари кўрсатилган. Шулардан учтаси статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилса, ҳолган учтаси статика учун «ортиқча» бўлиб қолади. Раманинг B ва C таянчларини ортиқча боғланиш деб қабул қилиб, уларни ташлаб юборилиши раманинг геометрик ўзгармаслигига путур етказмайди, аини пайтда статик аниқ система ҳосил бўлади. Ортиқча боғланишлар ўрнига реакция кучлари (H_b , R_b , R_c) ни қўямиз. Бу номаълум реакция кучларини аниқлаш учун қўшимча тенгламалар тузиш тақозо этилади. Хуллас бу раманинг статик ноаниқлиги ташқаридан кўзга ташланиб турибди.



7.1- расм



7.2- расм

7.2- расмдаги раманинг статик ноаниқлиги кўзга яққол ташланмайди. Бир карашда статик аниқ рамадай туюлади. Аслида бу рама ҳам статик ноаниқдир.

Геометрик ўзгармас, статик аниқ система ҳосил қилиш учун берилган раманинг бирор еридан қирқамиз (яъни ортиқча боғланишларни ташлаб юборамиз). Қирқимга тушган кесимнинг қўзғалмаслигини таъминлаш учун шу кесимда Ҳосил бўладиган ички кучларни ташқи реакция кучлари кўринишида тасвирлаймиз (7.2- расм, б). Бу учала куч (M_1 , Q_1 , N_1) ҳам номаълум. Номаълум таянч реакциялари (H_a , R_a , R_a) статика тенгламаларидан топилса, номаълум ички кучлар қўшимча тенгламалардан топилади. Демак, шарнирларга эга бўлмаган ҳар бир ёпик контур уч марта статик ноаниқ бўлар экан.

Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формуладан аниқланади:

$$C_H = 3K - III$$

бунда K — ёпик контурлар сони;

III — оддий шарнирлар сони.

Оддий шарнирлар сони дисklar, яъни стерженлар сонидан битта кам бўлади. Қуйида рамаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашга доир бир неча мисол кўриб ўтамыз.

1- мисол. 7.1- расм, а-да берилган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Контурлар сонини белгилашда A , B , C таянчлари ҳаёлан туташтирилади. У ҳолда $K=2$ бўлади.

Шарнирлар сонини белгилашда шарнирли қўзғалмас таянчда $III=1$ деб, қўзғалувчи таянчда эса, $III=2$ деб олинади:

$$C_H = 3 \cdot 2 - 3 = 3.$$

Демак, мазкур рама уч марта статик ноаниқ экан.

2- мисол. 7.2- расм, *a*-да тасвирланган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ёпиқ контурлар сони $K=2$; оддий шарнирлар сони $III= 2+1 =3$; $C_H=3\cdot 2-3=3$.

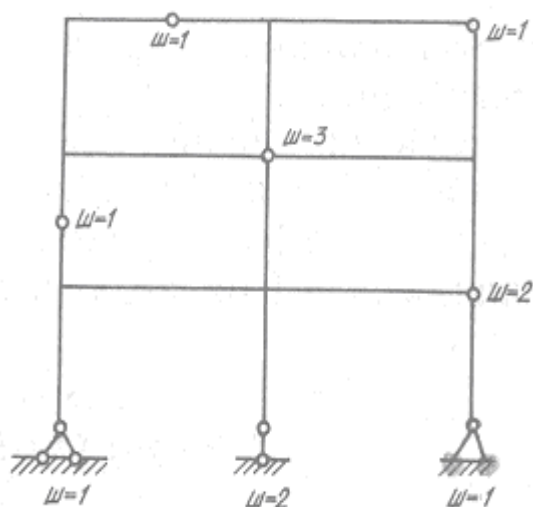
Демак, бу рама ҳам уч марта статик ноаниқ экан.

3- мисол. 7.3- расмда кўрсатилган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ёпиқ контурлар сони $K= 6$, оддий шарнирлар сони (шаклда кўрсатилган) $III=12$;

$$C_H = 3 \cdot 6 - 12 = 6.$$

Демак, рама олти марта статик ноаниқ экан.



7.3- расм

Статик ноаниқ системалар қуйидаги хоссаларга эгадир:

1. Статик ноаниқ системалар таркибида ортиқча боғланишларнинг мавжудлиги туфайли ўзига мос статик аниқ системага нисбатан бикирлиги юқорироқ бўлади.

2. Статик ноаниқ системалар ўзига мос статик аниқ системаларга нисбатан тежамлироқ бўлади.

3. Статик ноаниқ системаларда бирор ортиқча боғланишнинг шикастланиши иншоотнинг бутунлай ишдан чиқишига олиб келмайди. Статик аниқ системаларда бирорта боғланиш бу-зилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади.

4. Статик ноаниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши ва таянчларнинг чўкиши натижасида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлади. Система

элементларининг узунлигидаги фарқлари, элементларни йиғишда йўл қўйилган баъзи ноаниқликлар ҳам системада қўшимча зўриқишлар уйғотади.

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашни кучлар усулидан бошлаймиз.

Бу усул қадимий ва пухта ишланган усуллардан бири бўлиб, қамровининг кенглиги, ўзлашувининг осонлиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради.

7. 2. Кучлар усулининг асосий системасини танлаш

Ҳар қандай статик ноаниқ системанинг ҳисоби унинг ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади. Шундан сўнг асосий система танланади. Берилган системанинг асосий системалари бир нечта бўлиши мумкин.

Ҳисоблаш учун шуларнинг ичидан энг қулайи танлаб олинади. Кейинги ҳисоблар ана шу танланган система устида олиб борилади.

Хўш, асосий системанинг ўзи нима ва у қандай ҳосил қилинади?

Асосий система статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўлиб, у берилган системадаги ортиқча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинади.

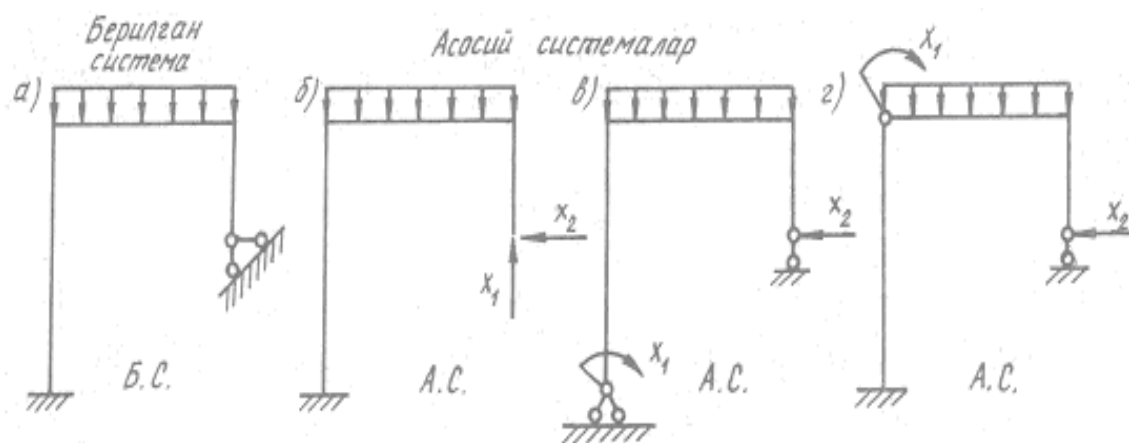
Асосий система ҳосил қилишнинг уч хил йўли бор:

а) ортиқча деб қабул қилинган таянчлар.ёки таянч стерженлари ташлаб юборилади;

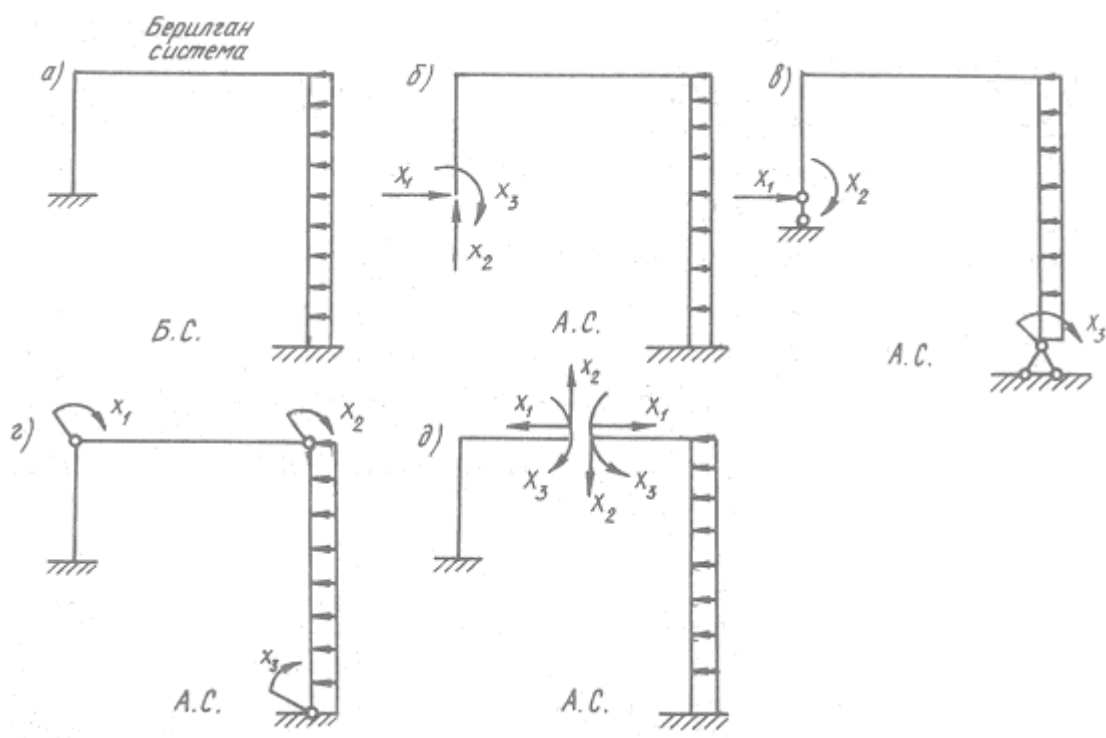
б) берилган системага шарнирлар киритилади;

в) берилган системанинг бирор кесими қирқилади.

Ҳар учала ҳолда ҳам амалда ортиқча боғланишлар ташлаб юборилган деб ҳисобланади. Шундан сўнг, берилган системанинг дастлабки мувозанат ҳолатини тиклаш мақсадида йўқотилган боғланишлар ўрнига уларнинг вазифасини бажарувчи номаълум кучлар (X_1 , X_2 , X_3 ва х.к.) қўйилади. 7.4-расмда икки номаълумли, 7.5-расмда уч номаълумли. раманинг турли, асосий системалари акс эттирилган.



7.4-расм



7.5-расм

Расмларга изох берамиз. 7.4- расм, б, в, г-да 7.4- расм, а-да берилган раманинг уч хил асосий системаси тасвирланган. Расм б - да шарнирли кўзғалмас таянч ташлаб юборилиб, унинг ўрнига таянч реакциялари X_1 ва X_2 қўйилган. Расм в-да чапдаги шарнирсиз таянч шарнирли кўзғалмас таянч билан, ўнгдагиси эса шарнирли кўзғалувчи таянч билан алмаштирилган. Инкор этилган боғланишлар ўрнига реакция кучлари тасвирланган. Расм г-да раманинг чапки бикир тугунига шарнир киритилган ва шарнир тугуни

йўқотилган боғланиш ўрнига момент X_1 қўйилган. Раманинг ўнг таянчидаги горизонтал стержень ташлаб юборилиб, ўрнига реакция кучи X_2 қўйилган.

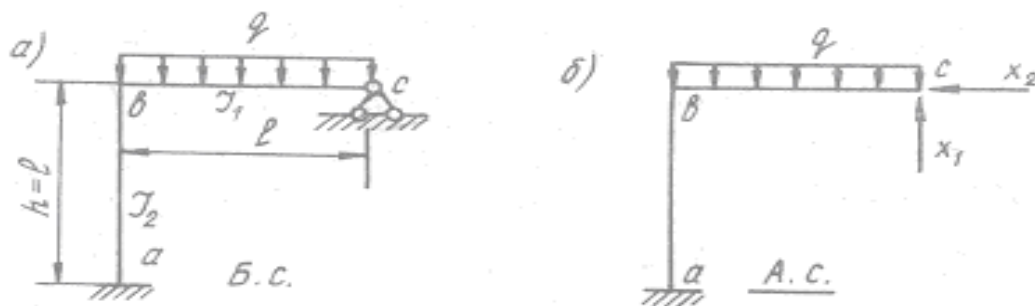
Учала асосий система ҳам геометрик ўзгармас, статик аниқдир. Ҳисоб ишлари учун улар ичидан исталган системани танлаб олиш мумкин. Учала ҳолда ҳам ҳисоб натижалари бир хил чиқаверади. Бироқ, 7.4- расм, б - да тасвирланган асосий система бўлар ичида энг мақбулдир. Чунки бундай системанинг M эпюраларини куриш ва кўчишларини аниқлаш бошқаларига нисбатан бирмунча қулай.

7.5- расмда уч номаълумли раманинг тўрт хил асосий системаси тасвирланган. Буларнинг дастлабки учтаси (7.5- расм, б, в, г) аввалги раманикига ўхшаш. Охиргиси (7.5- расм, д) қирқиш усулида ҳосил қилинган. Қирқилган кесимга ташқи кучлар таъсирида шу кесимда ҳосил бўладиган ички кучлар — бўйлама куч X_1 , кўндаланг куч X_2 ва эгувчи момент X_3 лар қўйилган. Бу тўрт асосий системанинг биринчиси ва - охиргиси ҳисоблаш учун қулайдир.

7.3. Кучлар усулининг каноник тенгламалари

Асосий системаларда ортиқча боғланишлар номаълум кучлар билан алмаштирилишини олдинги параграфда кўриб ўтдик. Эндиги вазифа ана шу номаълум кучларни аниқлашдан иборат. Бунинг учун статика тенгламаларига қўшимча равишда *каноник*¹ деб аталувчи тенгламалар тузамиз. Каноник тенгламаларни тузиш тартибини икки номаълумли рама мисолида кўриб ўтамыз. Берилган раманинг (7.6- расм, а) асосий системасини синиқ консол кўринишида (7.6- расм, б) танлаймиз.

Ташлаб юборилган таянч ўрнига номаълум кучлар қўямиз, сўнгра куч усулининг каноник тенгламаларини тузамиз.



7.6-расм

Берилган рамада шарнирли қўзғалмас таянчнинг маркази С вертикал ва горизонтал йўналишларда қўзғалмасдир, яъни унинг шу йўналишлардаги кўчишлари нолга тенгдир.

¹ Канон — қонун, қоида, каноник тенглама — маълум қонуният асосида тузилган тенглама.

Бундай шарт асосий системада, ҳам сақланиб қолиши лозим, яъни С нуқтасининг вертикал ва горизонтал кўчишлари нолга тенг бўлиши зарур. Бу шартни қисқа кўринишда қуйидагича ифодалаш, мумкин:

$$\Delta_{x_1} = 0; \Delta_{x_2} = 0; \quad (7.1)$$

бу ерда Δ_{x_1} -стержень учи С нинг X_1 куч йўналишидаги кўчиши;

Δ_{x_2} -шу нуқтанинг X_2 кучи йўналишидаги кўчиши.

Хар иккала кўчиш x_1 ва x_2 кучлари ҳамда ташқи юклар таъсирида вужудга келади. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қонунидан фойдаланиб, (7.1)ни алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида ифодалаймиз.

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1 x_1} + \Delta_{x_1 x_2} + \Delta_{x_1 P} &= 0; \\ \Delta_{x_2 x_1} + \Delta_{x_2 x_2} + \Delta_{x_2 P} &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Бу ерда кўчишларга қўйилган биринчи индекслар кўчишнинг йўналишини, иккинчи индекслар эса шу кўчишни юзага келтирувчи сабабни билдиради.

Энди x_1 ва x_2 кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни Гук қонунига асосан бирлик кўчишлар орқали ифода этамиз.

$$\Delta_{x_1 x_1} = x_1 \delta_{11}; \Delta_{x_1 x_2} = x_2 \delta_{12}; \Delta_{x_2 x_1} = x_1 \delta_{21}; \Delta_{x_2 x_2} = x_2 \delta_{22}$$

Буларни (7.2) тенгламага қўйсак, икки номаълумли система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари келиб чиқади;

$$\begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + \Delta_{1P} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0; \end{aligned} \quad (7.3)$$

Бу ерда $\delta_{11} - x_1$ кучи қўйилган нуктанинг шу куч йўналишида $x_1=1$ кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

$\delta_{12} - x_1$ кучи қўйилган нуктанинг шу куч йўналишида $x_1=1$ кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

$\Delta_{1P} - x_1$ кучи йўналишида, $\Delta_{2P} - x_2$ кучи йўналишида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Агар (7.3) да ифодаланган каноник тенгламаларнинг тузилишига жиддий эътибор берсак, унинг ёзилишида маълум қонуният борлигини пайқаш қийин эмас. Шу қонуниятдан фойдаланиб системанинг статик ноаниқлик даражасига қараб, каноник тенгламаларни керагича туза оламиз. Бинобарин, система (масалан, рама) неча номаълумли бўлса, тенгламалар сони ўшанча бўлади. Масалан, уч номаълумли рама учун каноник тенгламалар қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1P} &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2P} &= 0 \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} &= 0 \text{ ва җ.к.} \end{aligned} \quad (7.4)$$

(7.3) ва (7.4) да ифодаланган каноник тенгламаларда номаълум сифатида кучлар ($X_1, X_2, X_3 \dots$) турибди. Мазкур усулнинг «кучлар» усули деб

аталишининг сабаби ҳам айнан ана шунда. Ушбу тенгламалардаги бирлик кўчишлар (δ_{ik}) — коэффициент, ташқи кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар (Δ_{ip}) эса озод хад вазифасини ўтайди. Кўчишларнинг ўзаро муносабати ҳақидаги Максвелл теоремасига биноан $\delta_{ik}=\delta_{ki}$ бўлади.

Бир хил индексли бирлик кўчишлар (δ_{11}, δ_{22}) нинг ишоралари ҳамиша мусбат бўлади. Шу сабабли улар ҳеч қачон нолга айланмайди ва ҳамма вақт тенглама таркибида иштирок этади. Шу сабабли улар *бош кўчишлар* деб аталади.

Турли индексли кўчишлар ($\delta_{12}, \delta_{13}, \dots$) эса мусбат ва манфий ишораларга эга бўлиши ва демак, ноль бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун булар *иккинчи даражали* кўчишлар деб аталади.

7.4. Каноник тенглама коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлаш

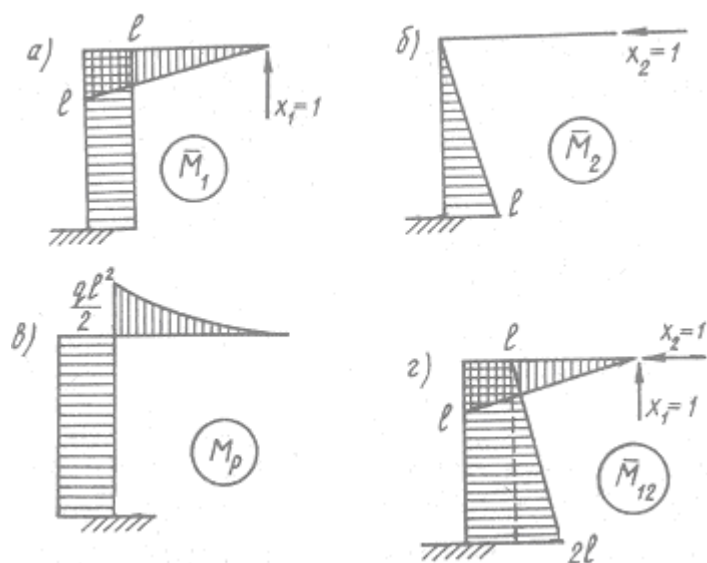
Кучлар усулининг каноник тенгламаларини ечиш учун, яъни улардаги номаълум кучлар ва моментларни аниқлаш учун аввал тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлари топилади.

Маълумки, каноник тенгламаларнинг коэффициент ва озод ҳадлари кўчишлардир. Шунинг учун уларни аниқлашда 6-бобда баён этилган кўчишлар назариясидан фойдаланамиз.

7.6- расмдаги раманинг кўчишларини аниқлаймиз. Бунинг учун бирлик кучлар таъсирида эгувчи моментларнинг бирлик эпюраларини (7.7- расм, *а*, *б*) қуриб оламиз. Ташқи кучлар таъсиридаги M_p эпюраси 7.7- расм, *в*-да акс эттирилган.

Бирлик кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} dx; & \delta_{12} = \delta_{21} &= \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EJ} dx; \\ \delta_{22} &= \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} dx. \end{aligned} \tag{7.5}$$



7.7- расм

Бу ерда $\bar{M}_1$ — асосий системанинг исталган кесимда бирлик куч $x_1 = 1$ дан ҳосил бўлган момент; $\bar{M}_2$ — ўша кесимда $x_2 = 1$ кучидан ҳосил бўлган момент; n — рама стерженлари сони.

Ташқи юклардан ҳосил бўлган кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\Delta_{1P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx; \quad \Delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx; \quad (7.6)$$

Верешчагин формуласидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюраларидан (7.7- расм, а, б) қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \frac{l^3}{2EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{5ql^4}{8EJ}; \quad \Delta_{2P} = -\frac{ql^4}{4EJ}.$$

Бу ерда $J_1 = J_2 = J$ деб олинган.

Тўғри ечимга эга бўлиш учун кўчишлар тўғри топилган бўлиши керак. Буларнинг тўғри ёки нотўғри топилганлигини текшириб кўрса бўлади. Икки хил текшириш бор: каторма-катор текшириш ва ялпн текшириш.

Текшириш учун бирлик эпюраларни қўшиб, йиғинди эпюра ($\bar{M}_{12}$) курилади (7.7- расм, г). *Каторма-катор текшириш* қуйидаги формула асосида амалга оширилади:

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{12}}{EJ} dx; \quad (7.7)$$

яъни каноник тенгламанинг биринчи катордаги коэффициентлар йиғиндиси $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг чикса, у ҳолда бу кўчишлар тўғри топилган бўлади.

Худди шунингдек, тенгламанинг иккинчи қатори қуйидагича текширилади:

$$(\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_{12}}{EJ} dx \quad (7.8)$$

яъни кўчишлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси $\bar{M}_2$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг бўлади.

Ялпн текширишда барча коэффициентлар йиғиндиси, $\bar{M}_{12} \cdot \bar{M}_{12}$ кўпайтмасига тенг бўлиши зарур, яъни

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) + (\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12}^2}{EJ} dx \quad (7.9)$$

Топилган коэффициентларни тўлиқ текшираимиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12}^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l + l^3 \frac{3}{2} \frac{1}{2} l + \frac{l^2}{2} \frac{5}{3} l \right) = \frac{8l^3}{3EJ}.$$

Бирлик кўчишлар йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{4}{3} l^3 + \frac{1}{3} l^3 + l^3 \right) = \frac{8l^3}{3EJ}.$$

Кўпайтма йиғиндига тенг чикди. Демак, кўчишлар тўғри топилган.

Энди биринчи қатор коэффициентларини текширамыз:

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{11l^3}{6EJ}$$

$\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасини ҳисоблаймыз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{12}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{3l^2}{2} l \right) = \frac{11l^3}{6EJ}.$$

Бу ерда ҳам йиғинди кўпайтмага тенг чикди. Шундай бўлиши ҳам керак эди.

Ниҳоят озод хадларни текширамыз:

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_{12}}{EJ} dx; \quad (7.10)$$

яъни озод хадлар йиғиндиси $\bar{M}_{12}$ эпюраси билан M_P эпюрасининг кўпайтмасига тенг бўлиши керак. Бу шартнинг бажарилиши озод хадларнинг тўғри топилганлигини англатади.

Кўчишлар, яъни коэффициент ва озод хадлар тўғри топилганига ишонч ҳосил килинган, уларни каноник тенгламаларга қўямиз. Тенгламаларни биргаликда ечиб, номаълум кучларни аниқлаймыз:

$$X_1 \cdot \frac{4l^3}{3} + X_2 \frac{l^3}{2} - \frac{5ql^4}{8} = 0;$$

$$X_1 \cdot \frac{l^3}{2} + X_2 \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{4} = 0.$$

Бу ердан

$$X_1 = \frac{3ql}{7} \quad \text{va} \quad X_2 = \frac{3ql}{28}$$

келиб чиқади.

7.5. Статик ноаниқ рамаларнинг M , Q ва N эпюраларини қуриш

Каноник тенгламалардан ортиқча номаълумлар ($X_1, X_2, \dots$) аниқлангач, раманинг натижавий, яъни тугал M эпюраси қурилади. Исталган кесимдаги моментнинг қиймати қўшиш усулида аниқланади:

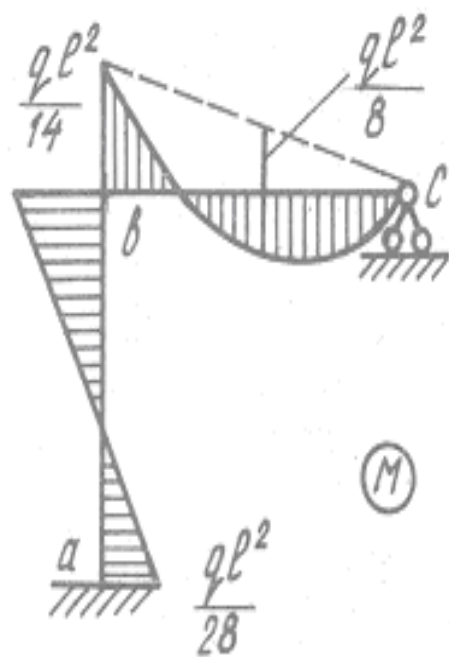
$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n \quad (7.11)$$

Бу ерда M_P — статик аниқ асосий системада ташқи юклардан ҳосил бўлган момент; $\bar{M}_1$ — асосий системада $X_1=1$ кучидан ҳосил бўлган момент.

X_1 кучининг ҳақиққий қиймати таъсирида ҳосил бўлган моментни топиш учун $\bar{M}_1$ моментини X_1 га кўпайтирамиз, яъни X_1 таъсиридаги ҳақиққий момент $X_1 \bar{M}_1$ бўлади. Бу қоида бошқа номаълумлар ($X_2, X_3, \dots, X_n$) га ҳам тегишлидир,

7.6- расмда берилган икки номаълумли раманинг мазкур усулда қурилган M эпюраси 7.8- расмда акс этган. Расмда ригелнинг ўртасидаги момент ҳам кўрсатилган. Раманинг эгувчи моментлар эпюраси ҳамма вақт стерженнинг толалари чўзилган томонга чизилишини эслатиб ўтамыз.

Статик ноаниқ раманинг якунловчи M эпюрасини қуриб бўлдик. Бу билан ҳисобнинг энг муҳим ва мураккаб қисми тугади. Энди кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраларини қуришга киришсак бўлади.

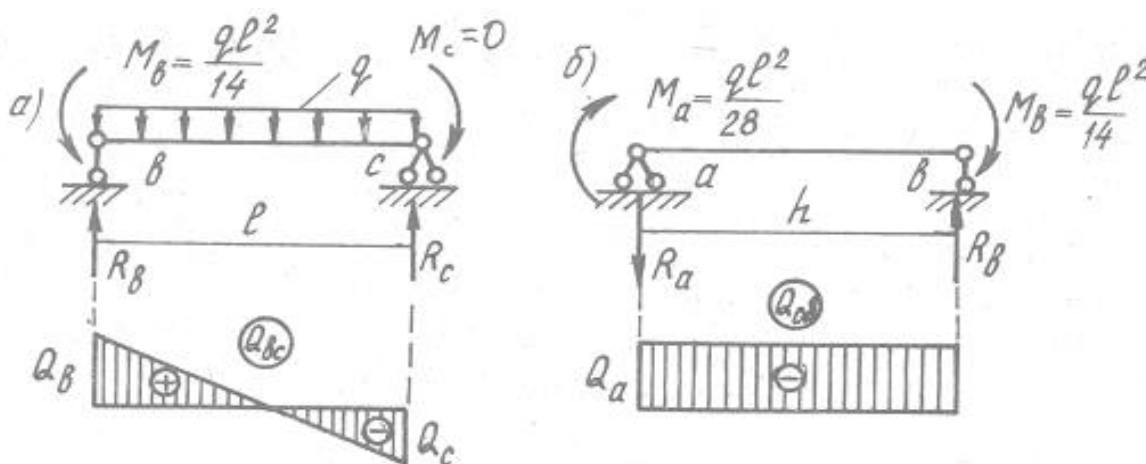


7.8-расм

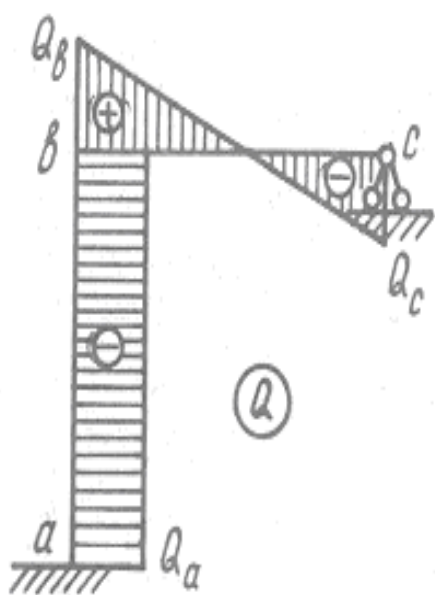
Нега деганда M эпюраси асосида Q эпюраси, Q эпюраси асосида N эпюраси қурилади.

Q эпюрасини қуриш учун раманинг стерженларини алоҳида бўлакларга ажратамиз ва уларни бир ораликли статик аниқ балкалар сифатида

ҳисоблаймиз. Бунда балкаларга ташқи кучлардан ташқари раманинг M эпюрасидан олинган тугун моментлари ҳам қўйилади. 7.9- расмда 7.6- расм, a -да берилган раманинг алоҳида балкаларга ажратилиши ва тегишли эпюралари тасвирланган. 7.9- расм, a -да bc ригели, 7.9- расм, b -да ab устунни балка кўринишида акс эттирилган ҳамда ташқи куч ва тугун моментлари кўрсатилган.



7.9-расм



7.10- расм

Оддий балканинг Q эпюраси материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида қурилади. Ишнинг охирида алоҳида балкалар учун қурилган Q эпюраси рама ўқига тўпланади (7.10- расм).

Энди Q эпюраси асосида N эпюрасини курамиз. Бунда ригелга қўйилган кўндаланг кучлар устун учун бўйлама куч, устунга қўйилган кўндаланг кучлар эса ригел учун бўйлама куч бўлади деган қоидага асосланамиз.

Бўйлама куч стерженни чўзса — мусбат, сиқса — манфий ишора олинади.

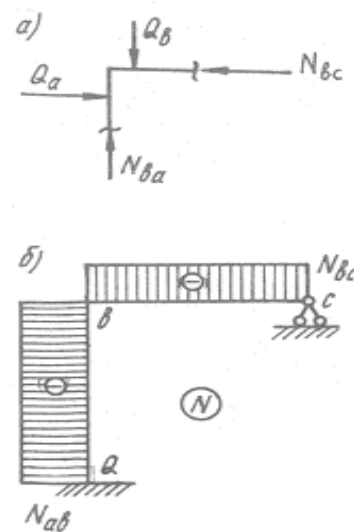
Биз текшираётган раманинг (7.6- расм) бўйлама кучлар эпюрасини куриш учун унинг Q эпюрасидан b тугунни қирқиб оламиз (7.11- расм, а) ва мувозанат шартларини ёзамиз:

$$\sum X = Q_a - N_{bc} = 0; \text{ бу ердан } N_{bc} = Q_a;$$

$$\sum Y = N_{ba} - Q_b = 0; \text{ бу ердан } N_{ba} = Q_b.$$

Аниқланган қийматлар бўйича раманинг N эпюраси курилади (7.11- расм, б)

Текшириш. Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси ортган сари ҳисоблаш ишлари мураккаблашиб бораверади. Бундай ҳолларда ҳисоб натижаларини текшириш муҳим аҳамият касб этади. Олдинги параграфда каноник тенглама коэффициентлари ва озод ҳадларини текширишни ўрганган эдик. Бу сафар тугал M , Q ва N эпюраларини текширишни ўрганамиз. M , Q , N эпюраларини текширишнинг икки усули бор: статик текшириш ва деформацион текшириш.



7.11-расм

Эпюраларни *статик* текширганда, яхлит рама ёки унинг айрим қисмлари ва тугунлари учун мувозанат шартлари тузилади. Бунда раманинг барча таянч реакцияларини вертикал ўққа бўлган проекциялари йиғиндиси ташқи юкларнинг вертикал проекциялари билан мувозанатда бўлиши лозим.

Бирор нуқтага нисбатан таянч реакцияларидан олинган моментлар йиғиндиси шу нуқтага нисбатан ташқи кучлардан олинган моментлар йиғиндисига тенг бўлиши зарур.

Раманинг ҳар бир тугуни эгувчи моментлар таъсирида мувозанатда ётиши керак, бунинг учун бир тугунга туташган ригель ва устундаги ординаталар ўзаро тенг, бўлиши лозим. Тугунлардаги кўндаланг ва бўйлама кучлар алоҳида қаралганда, мувозанатда бўлмайди, бироқ биргаликда қаралганда тугун мувозанатда ётиши зарур. M , Q ва N эпюраларини статик текшириш уларнинг тўғри қурилганига кафолат бўлаолмайди, чунки статик

мувозанат шартлари номаълумлар хато топилган тақдирда ҳам бажарилаверади. Бунинг сабаби шундаки, раманинг тугал M эпюраси статик аниқ асосий система учун қурилган. Агар ташқи юк ва аниқланган номаълумлар таъсирида эпюра тўғри қурилса, у ҳолда номаълумларнинг исталган қийматида рама статик мувозанат ҳолатида бўлаверади. Натижада номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хато очилмай қолаверади.

Деформацион текшириш ортиқча номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хатоларни пайқаш имконини беради. Ҳисоб натижаларини деформацион текширишда асосий системаларга қурилган бирлик эпюралар ($\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$) раманинг тугал M эпюраси билан навбатма-навбат кўпайтирилади. Агар ортиқча номаълумлар тўғри аниқланиб, эпюралар тўғри қурилган бўлса, бундай кўпайтма нолга тенг чиқади.

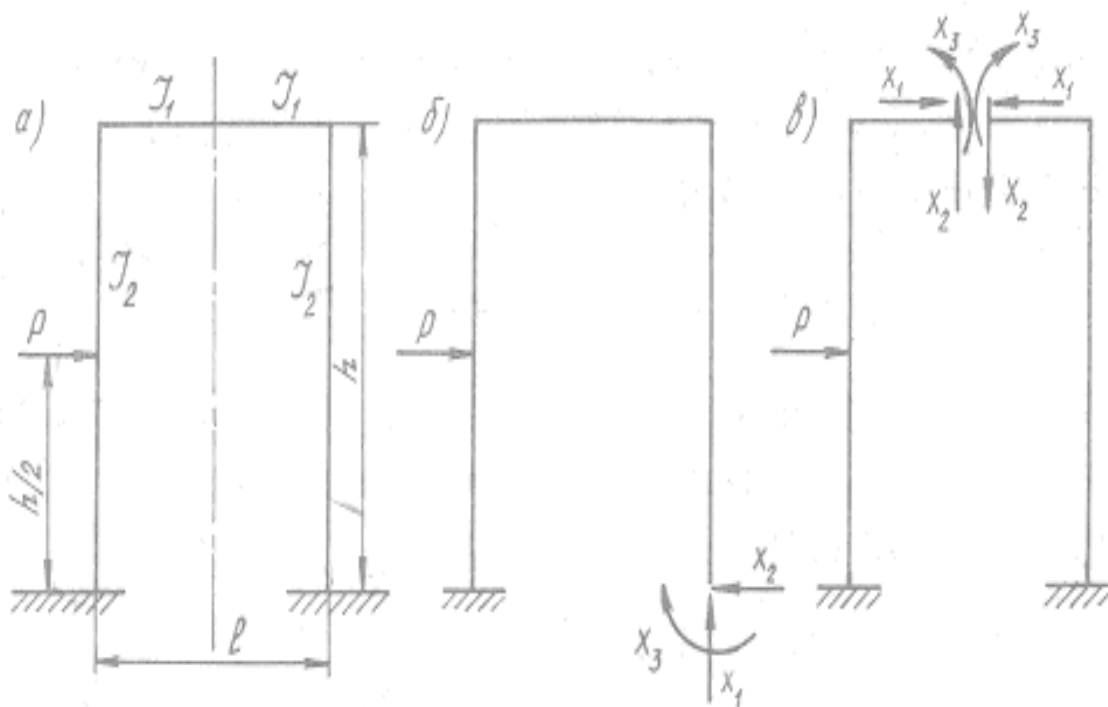
7.6. Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда соддалаштириш усуллари

Каноник тенгламалар сони системадаги ортиқча номаълумлар сонига тенг бўлишини илгари айтиб ўтган эдик. Демак, системанинг статик ноаниқлик даражаси ортгани сари каноник тенгламалар ҳам ортиб боради, уларни биргаликда ечиш учун тобора кўпроқ вақт ва меҳнат талаб этилади. Аниқ усулларда берилган системадаги номаълумлар сонини камайтириб бўлмайди, бироқ ҳисоблаш ишларини бирмунча осонлаштириш имконини берадиган соддалаштириш усуллари мавжуддир. Қуйида ана шу усулларнинг баъзилари билан танишиб чиқамиз.

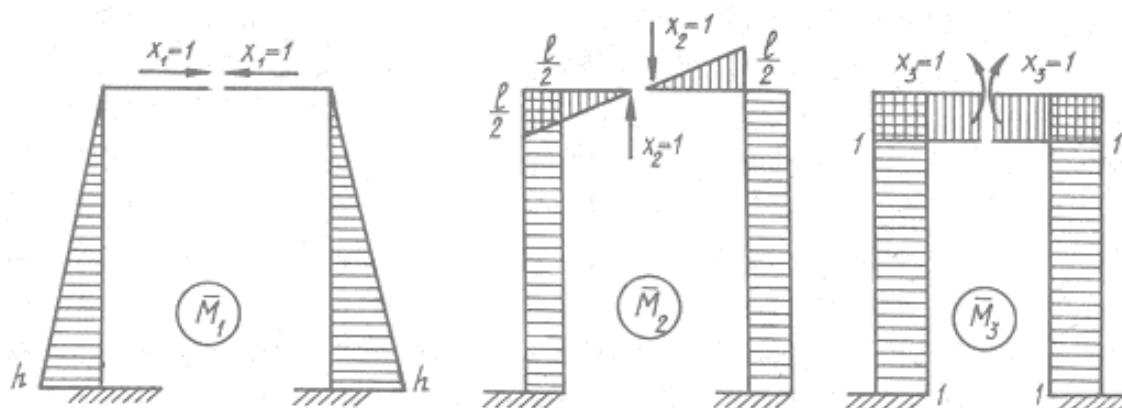
Системаларнинг симметриклигидан фойдаланиш

Симметрик рамалар фақат геометрик шаклига кўра эмас, балки таянчлари ва бикирликлари бўйича ҳам симметрик бўлиши лозим. Шунда уларнинг симметриклигидан фойдаланиб баъзи соддалаштиришларга эришиш мумкин. 7.12- расм, a -да симметрик статик ноаниқ рама тасвирланган. Рама битта вертикал симметрия ўқига эга. Раманинг чап ва ўнг

таянчлари бир хил. Раманинг ҳар иккала устуни, шунингдек ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бир хил инерция моментига эга, бу ҳар иккала устун бир хил биқирликка эга, ригелнинг чап ва ўнг қисмлари биқирликлари ўзаро тенг демакдир.



7.12-расм



7.13-расм

Агар раманинг асосий системасини 7.12- расм, б-да кўрсатилгандек олсак, ҳисоб жараёнида ҳеч қандай соддалашувга эришмаймиз, уч номаълумли учта каноник тенгламалар системаси ўзгаришсиз қолаверади:

$$X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0;$$

$$\begin{aligned}X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}+\Delta_{2P}&=0; \\X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}&=0.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Агар раманинг асосий системасини 7.12- расм, в-даги кўринишда олсак, каноник тенгламалар системаси анча ихчамлашади. Раманинг асосий системасини ҳосил қилишда уни симметрия ўқи ўтган кесимдан қирқдик. Бу асосий системанинг бирлик эпюраларини курсак, симметрик ($\bar{M}_1, \bar{M}_3$) ва тескари симметрик ($\bar{M}_2$), эпюралар ҳосил бўлади (7.13-расм).

Тўғри ва тескари симметрик эпюраларнинг кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Бу қоида каноник тенглама коэффицентларини аниқлашда жуда қўл келади. Чунончи, δ_{12} коэффицентини аниқлашда $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюралар Верещагин формуласи бўйича ўзаро кўпайтирилиши керак. Бироқ эпюраларнинг бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлгани учун кўпайтма ноль чиқишинини олдиндан биламиз. Шундай қилиб,

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0.$$

$\bar{M}_2$ ва $\bar{M}_3$ эпюраларининг кўпайтмасидан $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ келиб чиқади. Бунинг оқибатида каноник тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга келади:

$$X_1\delta_{11}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0;$$

$$X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0;$$

$$X_1\delta_{31}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}=0;$$

яъни яхлит тенгламалар системаси (7.12) иккита мустақил тенгламалар системасига ажралиб кетди:

булардан бири

$$X_1\delta_{11}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0;$$

$$X_1\delta_{31}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}=0; \quad (7.13)$$

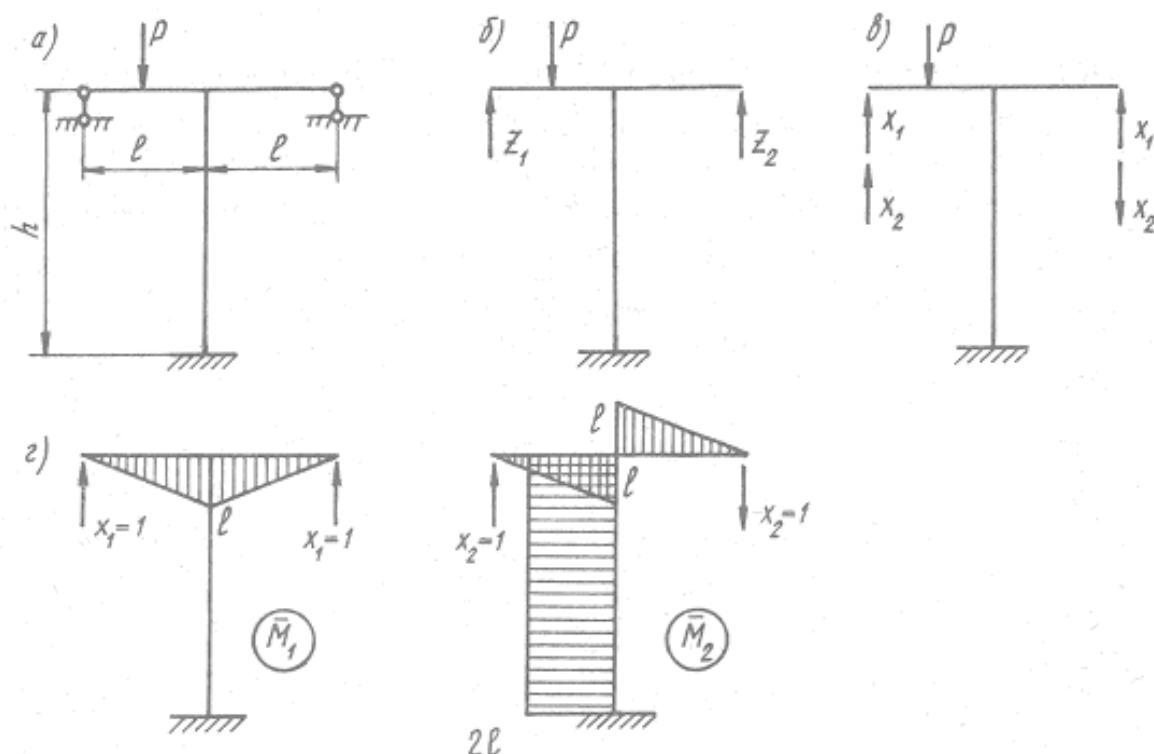
иккинчиси

$$X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0. \quad (7.14)$$

Шундай қилиб, асосий система танлаш жараёнида раманинг симметриклик хусусиятларидан фойдаланиб, уч номаълумли яхлит тенгламалар системасини иккита мустақил тенгламалар системасига ажратдик, буларнинг бири икки номаълумли иккита тенглама, иккинчиси бир номаълумли битта тенглама. Натижада ҳисоб ишларини анча қисқартириш имкониятига эга бўлдик.

Номаълумларни гуруҳлаш

Кўп оралиқли симметрик рамаларни ҳисоблашда тўғри ва тескари симметрик бўлган эпюралар ҳосил қилиш учун номаълумлар сифатида алоҳида кучлар эмас, балки кучлар гуруҳи қабул қилинади. Икки номаълумли рама мисолида усулнинг моҳиятини баён этамиз (7.14- расм, а).



7.14- расм

Берилган рама икки оралиқли бўлиб, шарнирли қўзғалувчан таянчлар устунга нисбатан симметрик жойлашган. Раманинг асосий системасини таянчларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қиламиз. Йўқотилган боғланишлар ўрнига номаълум реакция кучларини қўямиз (7.14- расм, б). Бироқ асосий системани бундай олиниши ҳисоб ишларини соддалаштиришга олиб келмайди, каноник тенгламалар системаси яхлитлигича қолаверади:

$$Z_1\delta_{11}+Z_2\delta_{12}+\Delta_{1P}=0;$$

$$Z_1\delta_{21}+Z_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0;$$

Ҳисоб жараёнида маълум даражада соддалашувга эришиш мақсадида Z_1 реакциясини X_1 ва X_2 номаълумларининг йиғиндиси билан, Z_2 реакция кучини эса X_1 ва X_2 номаълумларининг айирмаси билан алмаштирамиз (7.14- расм, в). Натижада якка кучлар кучлар гуруҳи билан алмашади. Бунинг оқибатида тўғри $\bar{M}_1$ ва тескари $\bar{M}_2$ симметрик эпюраларга эга бўламиз (7.14- расм, г). Маълумки, бундай эпюралар кўпайтмаси нолга тенг бўлади, Шунга кўра $\delta_{12}=0$. Каноник тенгламалар системаси эса алоҳида иккита мустақил тенгламаларга ажралиб кетади:

$$X_1\delta_{11}+\Delta_{1P}=0; \quad X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0.$$

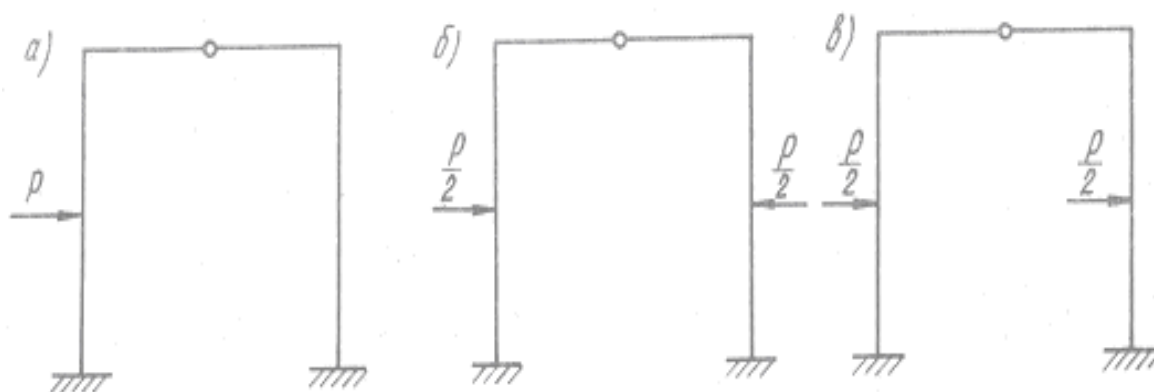
Мазкур тенгламалардан X_1 ва X_2 номаълумлари аниқланади, сўнгра яқунловчи M эпюраси қурилади.

$$M = M_P + X_1\bar{M}_1 + X_2\bar{M}_2.$$

Носимметрик юкларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш

Агар статик ноаниқ симметрик рамаларга қўйилган юклар носимметрик бўлса, уларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли билан ҳисоб ишларини бир мунча соддалаштирса бўлади.

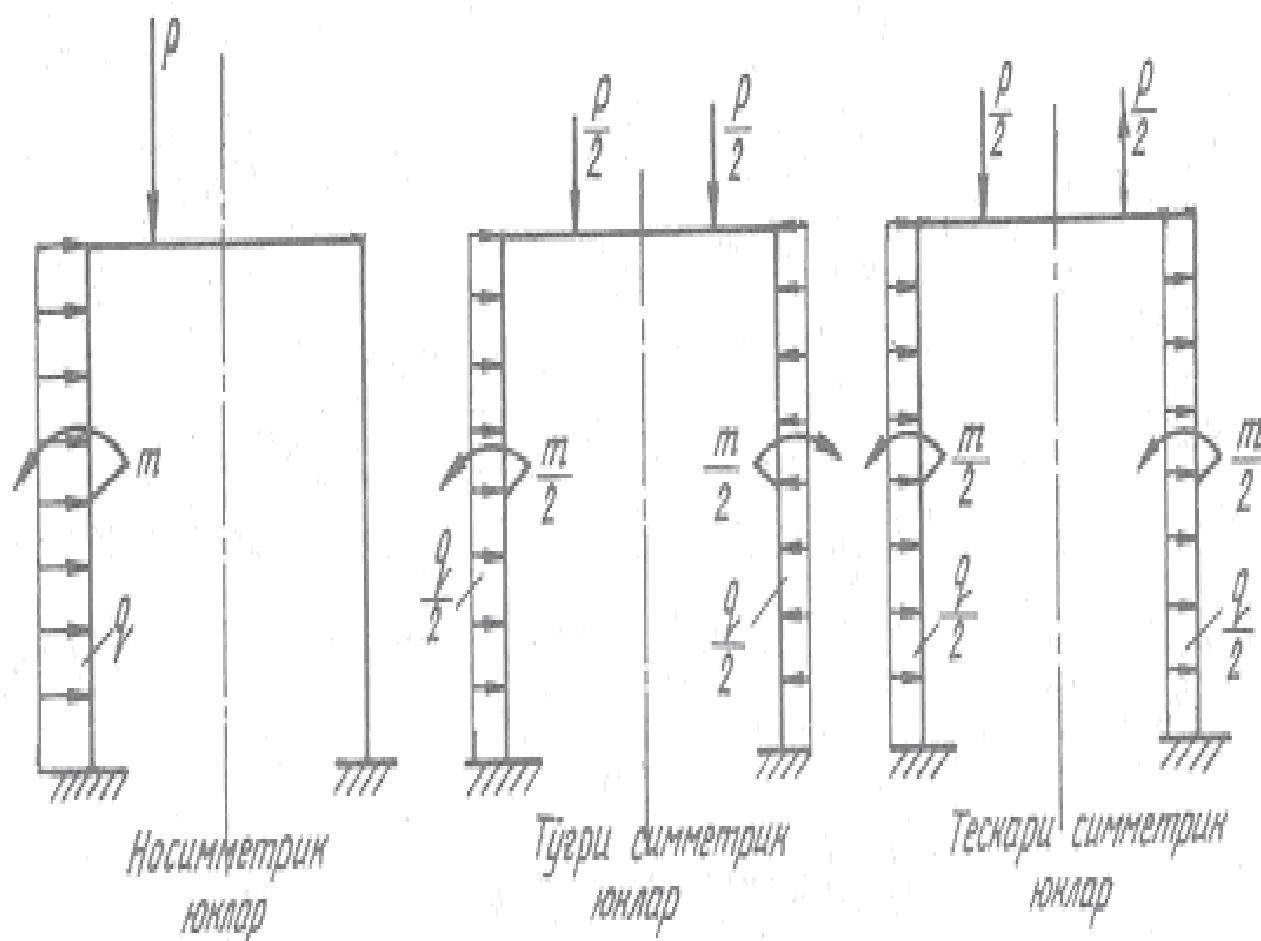
Симметрик рамага носимметрик P кучи қўйилган бўлсин (7.15- расм, *а*). Шу кучни иккига бўлиб, тўғри ва тескари симметрик кучларга ажратамиз (7.15- расм, *б*, *в*). Кучлар шундай ажратилиши керакки, уларни қайтадан қўшганда, дастлабки куч ҳолати келиб чиксин. Масалан, раманинг чап устунига (расм, *б*, *в*) бир йўналишда миқдори $P/2$ бўлган иккита куч қўйилган, буларнинг йиғиндиси P га тенг бўлади. Раманинг ўнг устунига эса ўша кучлар қарама-қарши йўналишда қўйилган, бу кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади, натижада дастлабки куч ҳолати келиб чиқади.



7.15- расм

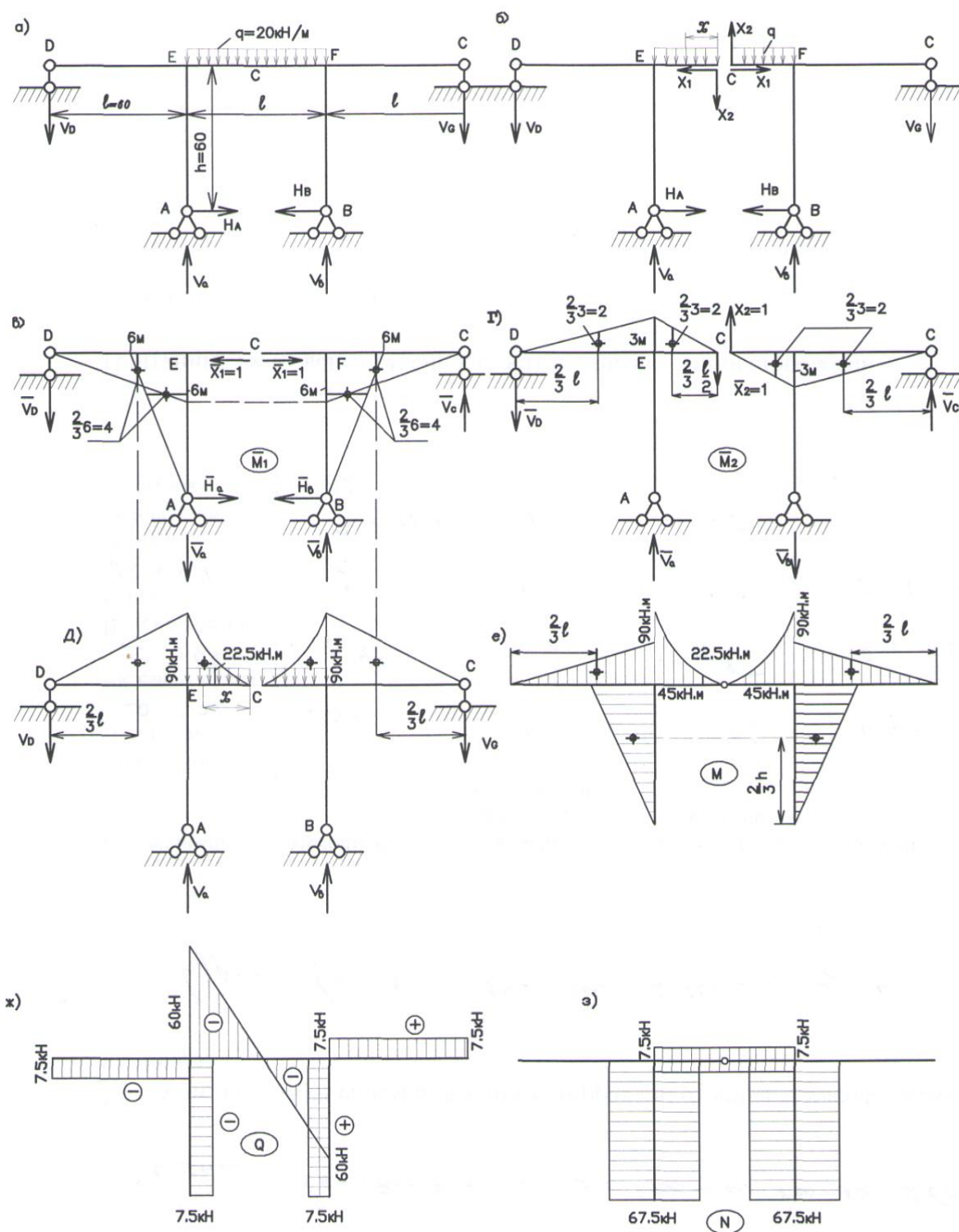
Шундай қилиб, тўғри ва тескари симметрик кучлар қўйилган иккита рамага эга бўлдик (7.15- расм, *б*, *в*). Энди бу рамалар алоҳида равишда ҳисобланади, тўғри симметрик кучлардан $M_{тўғ}$ эпюраси, тескари симметрик кучлардан $M_{тес}$ эпюраси қурилади. Раманинг берилган кучдан ҳосил бўладиган ҳақиққий M эпюраси тўғри ва тескари симметрик эпюралар йиғиндисидан иборат бўлади.

Носимметрик равишда жойлашган турли хил ташқи кучларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли 7.16- расмда кўрсатилган.



7.16- расм

7.1 - мисол. 7.17 -расм, a да берилган рама учун M , Q , ва N эпюралари курилсин. Якуний эгувчи моментлар эпюрасининг тўғрилиги текширилсин. Раманинг барча элементлари бикирлиги ўзгармас.



7.17- расм

Ечиш.

Раманинг статик ноаниқлик даражасини аниқлаймиз.

$$C_n = 3K - \text{III} = 3 \cdot 3 - 7 = 2,$$

демак, рама икки марта статик ноаниқ.

Раманинг асосий системасини ҳосил қилиш учун ўртадаги C шарнирини олиб ташлаймиз ва ўрнига номаълум ички кучлар X_1 ва X_2 ни қўямиз (7.17-рasm, б). Асосий системани мана шундай танлаш йўли билан ҳисобда айрим енгилликларга эришамиз. Масалан, δ_{12} , δ_{21} ва Δ_{2p} кўчишлар нолга айланади.

Шарнир олиб ташлангач, ёндош кесимларда вертикал ва горизантал йўналишларда ўзаро кўчиш имконияти пайдо бўлади. Аслида берилган системада шарнир туфайли ҳеч қандай кўчиш вужудга келмайди. Ана шу ҳолатни таъминлаш учун кесим учларига қарама-қарши йўналишларда иккитадан номаълум кучлар (X_1 ва X_2) қўямиз. Бу кучлар ёндош кесимларнинг ўзаро силжишига чек қўяди.

X_1 ва X_2 номаълум кучлар каноник тенгламалардан топилади:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

$\bar{M}_1$ эпюрасини қуриш учун асосий системадаги барча кучлар олиб ташланиб, иккита қара-қарши йўналган горизантал куч $\bar{X}_1 = 1$ қўйилади (7.17- рasm, в), кейин чап томондаги кесимлар учун эгувчи моментлар аниқланади. Аввал таянч реакцияларини аниқлаймиз:

$$\sum M_A = \bar{V}_d \ell - \bar{X}_1 h = 0, \quad \text{бундан} \quad \bar{V}_d = \frac{\bar{X}_1 h}{\ell} = \frac{1 \cdot 6}{6} = 1;$$

$$\sum Y = \bar{V}_d - \bar{V}_a = 0, \quad \text{бундан} \quad \bar{V}_a = \bar{V}_d = 1;$$

$$\sum X = \bar{H}_a - \bar{X}_1 = 0, \quad \text{бундан} \quad \bar{H}_a = \bar{X}_1 = 1.$$

ДС элементининг характерли кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$\bar{M}_D = 0; \quad \bar{M}_E^{\text{чап}} = \bar{V}_d \ell = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м};$$

$$\bar{M}_E^{\text{ўнг}} = \bar{M}_E^{\text{чап}} - \bar{H}_a h = 6 - 1 \cdot 6 = 0; \quad \bar{M}_C = 0.$$

АЕ элементи кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$\bar{M}_A = 0; \quad \bar{M}_E = -\bar{H}_a h = -1 \cdot 6 = -6 \text{ м}.$$

$\bar{M}_2$ эпюрасини куриш учун асосий системага фақат иккита вертикал куч $\bar{X}_2 = 1$ кўямиз (7.17- расм, з) ва керакли кесимлардаги эгувчи моментларни ҳисоблаймиз. Таянч реакцияларини аниқлаймиз:

$$\sum M_A = -\bar{V}_d \ell + \bar{X}_2 \frac{\ell}{2} = 0, \quad \text{бундан} \quad \bar{V}_d = \frac{\bar{X}_2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$\sum Y = -\bar{V}_d + \bar{V}_a - \bar{X}_2 = 0, \quad \text{бундан} \quad \bar{V}_a = \bar{V}_d + \bar{X}_2 = 0,5 + 1 = 1,5.$$

Горизантал кучлар бўлмаганлиги сабабли $\bar{H}_a = 0$.

ДС элементининг характерли кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$\bar{M}_D = 0;$$

$$\bar{M}_E^{\text{чап}} = \bar{M}_E^{\text{ўнг}} = -\bar{V}_d \ell = -0,5 \cdot 6 = -3 \text{ м};$$

$$\left(\text{ёки} \quad -\bar{X}_2 \cdot \frac{\ell}{2} = -1 \cdot \frac{6}{2} = -3 \text{ м} \right); \quad \bar{M}_C = 0.$$

АЕ элементининг кесимларидаги эгувчи моментлар нолга тенг, чунки бу элементга таъсир этувчи ягона куч $\bar{V}_a$ элементнинг оғирлик марказидан ўтиб, момент ҳосил қилмайди.

Энди рама асосий системасининг чап ярмига фақат берилган кучлар таъсирини кўриб ўтамыз (7.17- расм, д). Таянч реакцияларини аниқлаймиз.

$$\sum M_A = -V_d \ell + q \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} = 0, \quad \text{бундан} \quad V_d = \frac{q\ell}{8} = \frac{20 \cdot 6}{8} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -V_d + V_a - q \frac{\ell}{2} = 0,$$

$$\text{бундан } V_a = V_d + q \frac{\ell}{2} = 15 + \frac{20 \cdot 6}{2} = 75 \text{ кН};$$

горизантал реакция $H_a = 0$.

ДС элементининг кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$M_D = 0; \quad M_E^{\text{чап}} = M_E^{\text{ўнг}} = -V_d \ell = -15 \cdot 6 = -90 \text{ кНм};$$

$$M_{x=1,5 \text{ м}} = -q \frac{x^2}{2} = -20 \cdot \frac{1,5^2}{2} = -22,5 \text{ кНм}; \quad M_C = 0.$$

АЕ элементининг кесимларидаги эгувчи моментлар нолга тенг.

Топилган қийматлар асосида асосий системанинг чап қисми учун $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ ва M_p эпюраларини курамиз (7.17- расм, в, г, д).

Асосий системанинг ўнг ва чап қисмлари, шунингдек $\bar{X}_1 = 1$ кучлари, вертикал ўққа нисбатан симметрик бўлганлиги сабабли, $\bar{M}_1$ эпюрасининг ўнг қисми ҳам чап қисмига симметрик бўлади (7.17- расм, в). Шунга ўхшаб, M_p эпюраси ҳам вертикал ўққа нисбатан симметрик. Симметрик асосий системага қўйилган $\bar{X}_2 = 1$ кучлари тескари кўринишга эга, шу боисдан $\bar{M}_2$ эпюраси тескари симметрик эпюра бўлади. Ушбу мулоҳазалар асосида $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ ва M_p эпюраларини тўлдирамиз, яъни асосий системанинг ўнг қисмини (ҳисобсиз равишда) чизиб қўямиз.

Юқорида берилган каноник тенгламалар тартибига кирувчи кўчишларни аниқлашга ўтамиз.

δ_{11} кўчишни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ эпюрасини $\bar{M}_1$ эпюрага кўпайтирамиз, яъни юза ω ни ҳам, ордината y ни ҳам шу эпюранинг ўзидан оламиз:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{6 \cdot 6}{2} 4 + \frac{6 \cdot 6}{2} 4 \right) = \frac{288}{EI}.$$

δ_{12} кўчишни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ эпюрани $\bar{M}_2$ эпюрага кўпайтирилади. Уларнинг биринчиси вертикал ўққа нисбатан симметрик, иккинчиси ригелнинг $ДС$ қисмида тескари симметрик, AE ва BF элементларида эпюра умуман йўқ. Бироқ кўпайтириладиган эпюраларнинг бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлса, изланаётган кўчиш нолга тенг бўлади, чунки эпюраларнинг чап қисмини кўпайтирганда маълум миқдорли бир сон чиқади, ўнг қисмини кўпайтирганда ўша сон тескари ишора билан чиқади. Натижада, $\delta_{12} = 0$ бўлади.

Δ_{1p} кўчишни аниқлашда M_p эпюраси $\bar{M}_1$ эпюрага кўпайтирилади:

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{6 \cdot 90}{2} 4 + \frac{6 \cdot 90}{2} 4 \right) = -\frac{2}{EI} \left(\frac{6 \cdot 90}{2} 4 \right) = -\frac{2160}{EI}.$$

Максвел теоремасига кўра $\delta_{12} = \delta_{21}$. Бироқ $\delta_{12} = 0$ бўлганлиги сабабли $\delta_{21} = 0$.

δ_{22} кўчишни аниқлаш учун $\bar{M}_2$ эпюрани ўзини ўзига кўпайтирамиз:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{6 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} 2 + \frac{6 \cdot 3}{2} 2 \right) = \frac{2}{EI} \left(\frac{6 \cdot 3}{2} 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} 2 \right) = \frac{54}{EI}.$$

Δ_{2p} ни аниқлаш учун $\bar{M}_2$ ва M_p эпюралари кўпайтирилади. Бироқ булардан бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлганлиги сабабли, изланаётган кўчиш $\Delta_{2p} = 0$ бўлади. Шундай қилиб асосий системанинг симметриклиги δ_{12} , δ_{12} ва Δ_{2p} кўчишларни нолга тенглаштириш имконини берди.

Кўчишларнинг аниқланган қийматларини каноник тенгламаларга кўямиз:

$$288X_1 + 0 \cdot X_2 - 2160 = 0;$$

$$0 \cdot X_1 + 54X_2 + 0 = 0.$$

Бир бирига боғлиқ бўлмаган икки тенгламага эга бўлдиқ.

Уларнинг биридан X_1 ни топамиз:

$$X_1 = \frac{2160}{288} = 7,5 \text{ кН}.$$

Иккинчи тенгламадан $X_2 = 0$ эканлиги маълум бўлади.

Демак, симметрик системаларга симметрик юклар қўйилган бўлса, тескари симметрик ноъмалумлар нолга тенг бўлар экан.

Эндиги навбатда характерли кесимлардаги якуний (йиғинди) эгувчи моментларнинг қийматдарини аниқлаймиз. Бунинг учун M_p эпюраси ординаталари билан $\bar{M}_1$ эпюраси ординаталарнинг $X_1 = 7,5 \text{ кН}$ га кўпайтирилган ординаталари алгебраик йиғиндисини оламиз. Қўшилаётган эпюралар симметрик бўлганлиги сабабли, йиғинди эпюра ҳам симметрик бўлади. Шу боисдан раманинг фақат чап қисмини ҳисоблаймиз:

АЕ элементи

$$M_A = 0; \quad M_E = 0 - 6 \cdot 7,5 = -45 \text{ кНм}.$$

ДС элементи

$$M_D = 0; \quad M_E^{\text{чап}} = -90 + 6 \cdot 7,5 = -45 \text{ кНм}; \quad M_C = 0;$$

$$M_E^{\text{ўнг}} = -90 + 0 = -90 \text{ кНм}; \quad M_{x=1,5 \text{ м}} = -22,5 + 0 = -22,5 \text{ кНм}.$$

Топилган қийматлар бўйича эгувчи моментлар эпюрасининг чап қисмини курамиз, кейин шунга симметрик равишда ўнг қисмини чизамиз. (7.17- расм, *e*).

M эпюраси тўғри қурилганлигини текшириш учун C шарнири қўйилган нуқтанинг горизантал ва вертикал кўчишларини аниқлаймиз. Бунинг учун M эпюрасини навбатма навбат $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюралари билан кўпайтирамиз. Агар кўпайтма натижалари ноль чиқса, M эпюраси тўғри қурилган бўлади.

M ва $\bar{M}_1$ эпюраларини кўпайтирамиз:

$$\Delta_{\text{гор}} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{6 \cdot 45}{2} 4 + \frac{6 \cdot 45}{2} 4 - \frac{6 \cdot 45}{2} 4 + \frac{6 \cdot 45}{2} 4 \right) = 0.$$

Симметрик ва тескари симметрик эпюралар кўпайтмасы ҳамма вақт ноль бўлишини биламиз. Бизнинг ҳолда M симметрик, $\bar{M}_2$ эса тескари симметрик эпюра, шу сабабга кўра $\Delta_{\text{сепм}} = 0$.

Раманинг Q ва N эпюраларини қуриш учун унинг таянч реакцияларини аниқлаймиз.

Асосий системанинг чап қисмидаги таянч реакцияларини аниқлаймиз (7.17- расм, б):

$$\sum M_A = -V_d \ell + q \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} - X_1 h = 0,$$

$$\text{бундан } V_d = \frac{\frac{q\ell^2}{8} - X_1 h}{\ell} = \frac{\frac{20 \cdot 6^2}{8} - 7,5 \cdot 6}{6} = 7,5 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -V_d + V_a - q \frac{\ell}{2} = 0,$$

$$\text{бундан } V_a = V_d + q \frac{\ell}{2} = 7,5 + 20 \cdot \frac{6}{2} = 67,5 \text{ кН};$$

$$\sum X = H_a - X_1 = 0, \text{ бундан } H_a = X_1 = 7,5 \text{ кН}.$$

$X_2 = 0$ бўлганлиги сабабли юқоридаги тенгламалар таркибига киритилмади.

Асосий системанинг чап ва ўнг қисмлари юқлар билан бирга симметрик бўлганлиги сабабли, ўнг қисм таянч реакциялари қуйидагича бўлади:

$$V_g = V_d = 7,5 \text{ кН}; V_b = V_a = 67,5 \text{ кН}; H_b = H_a = 7,5 \text{ кН}.$$

Асосий система учун топилган реакциялар берилган система учун ҳам реакция ҳисобланади. Бу реакцияларни берилган системага кўчириб, характерли кесимлар учун кўндаланг кучларни ҳисоблаймиз:

ДГ элементи

$$Q_D = -V_d = -7,5 \text{ кН}; \quad Q_E^{\text{чап}} = Q_d = -7,5 \text{ кН};$$

$$Q_E^{\text{ўнг}} = Q_E^{\text{чап}} + V_a = -7,5 + 67,5 = 60 \text{ кН};$$

$$Q_F^{\text{чап}} = Q_E^{\text{ўнг}} - q\ell = 60 - 20 \cdot 6 = -60 \text{ кН};$$

$$Q_G = Q_F^{\text{ўнг}} = 7,5 \text{ кН}.$$

АЕ элементи

$$Q_A = -H_a = -7,5 \text{ кН}; \quad Q_E = Q_A = -7,5 \text{ кН}.$$

ВF элементи

$$Q_B = H_a = 7,5 \text{ кН}; \quad Q_F = Q_B = 7,5 \text{ кН}.$$

Q эпюраси 7.17- расм, *ж* да келтирилган.

Бўйлама кучларни ҳисоблаймиз ва N эпюрасини курамиз (7.17- расм, *з*):

$$N_{DE} = 0; \quad N_{EF} = -H_a \text{ (ёки } -H_b) = -7,5 \text{ кН}; \quad N_{FG} = 0;$$

$$N_{AE} = -V_a = -67,5 \text{ кН}; \quad N_{BF} = -V_b = -67,5.$$

8- БОБ

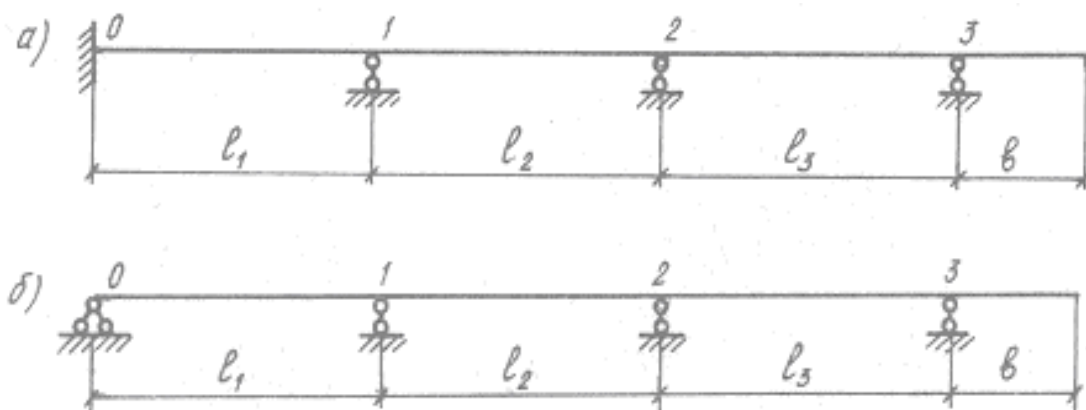
КУЧЛАР УСУЛИНИ СТАТИК НОАНИҚ БАЛКА, ФЕРМА ВА АРКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

8.1. Узлуксиз балкаларни ҳисоблаш

Бир неча оралиқлардан ташкил топган ва чекка таянчлардан бири шарнирли қўзғалмас ёки бикир бўлган балка — *узлуксиз балка* деб аталади (8.1- расм.)

Мазкур параграфда узлуксиз балкалар ҳисобига кучлар усулининг тадбиқини кўриб ўтамыз. Иш узлуксиз балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади:

$$n=2\Pi +C_T-3D$$



8.1-расм

Бу ерда Π — дискларни туташтирувчи оддий шарнирлар сони;

C_T — таянч стерженлари сони.

Узлуксиз балка яхлит балкадан ташкил топганлиги сабабли $D=1$; $\Pi=0$ бўлади. У ҳолда юқоридаги формула қуйидаги кўринишга келади

$$\boxed{n=C_T-3} \quad (8.1)$$

8.1- расмда кўрсатилган балкалар статик аниқмасдир, чунки уларнинг ҳар бири учун номаълум таянч реакцияларининг сони статиканинг мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ.

Расмдаги балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини (8.1) формула ёрдамида аниқлаймиз:

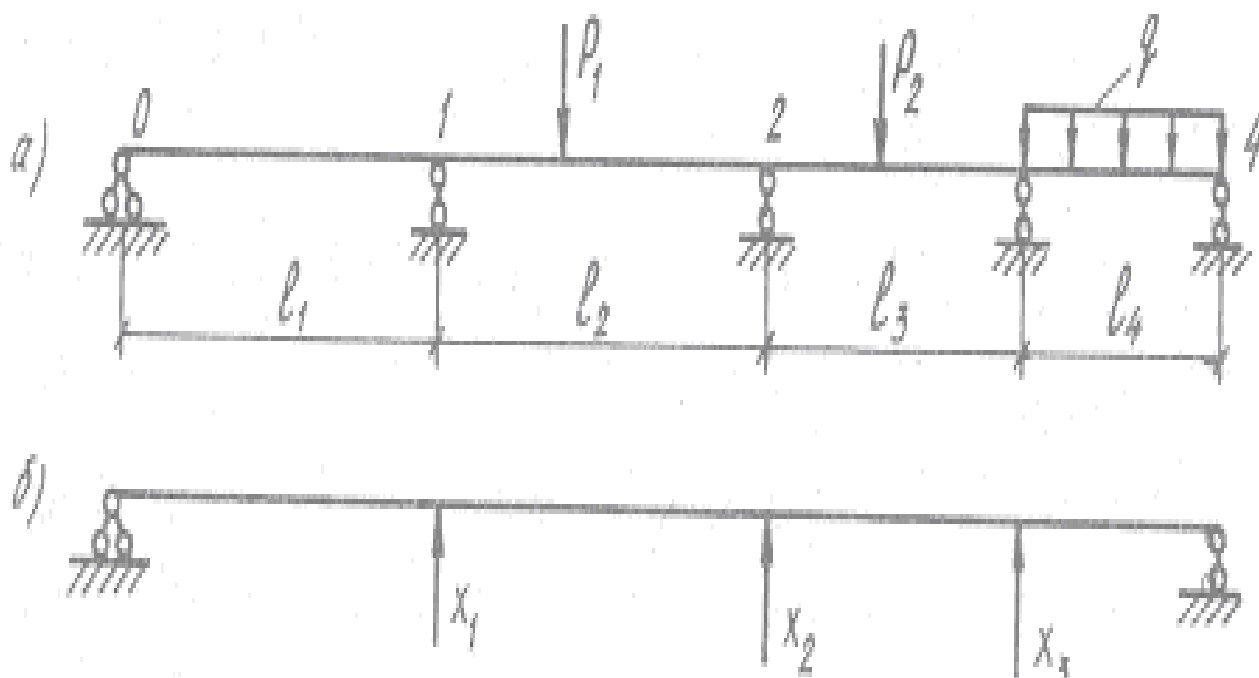
$$n = 6 - 3 = 3, \quad n = 5 - 3 = 2$$

Демак, а- расмдаги балка уч марта, б- расмдагиси эса икки марта статик ноаниқ экан.

Узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражаси аниқланганидан сўнг унинг асосий системаси танланади.

8.2- расм, б-да тавсия этилган асосий система ташки таянчларига кўра, 8.2- расм, в-да тавсия этилган асосий система эса ички боғланишларга кўра ҳосил қилинган.

Ҳар иккала асосий система талабга тўлиқ жавоб беради, чунки ҳар иккаласи ҳам геометрик ўзгармас ва статик аниқдир.



8.2- расм

Узлуксиз балкаларни ҳар иккала асосий система бўйича ҳисобласа бўлади.

Умуман асосий системани шундай танлаш керакки, каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга айлансин ва танланган асосий система ҳар томонлама қулай бўлсин. Чунки асосий система ҳар томонлама қулай танланса, кейинги ҳисоб ишлари анча соддалашади. Шу нуқтаи назардан юқоридаги икки асосий системани таҳлил қилиб кўрайлик.

Биринчи вариантда ифодаланган асосий системада номаълумларнинг йўналиши бўйича мавжуд бўладиган чизикли кўчишлар нолга тенг бўлмайди, шу сабабли каноник тенгламанинг коэффициент ва озод хадлари ҳам нолга айланмайди.

Иккинчи вариант асосида танланган асосий система мустақил оддий статик аниқ балкалардан иборат бўлиб, айрим бурчакли кўчишлар нолга тенг бўлиши туфайли каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга тенг бўлишига олиб келади.

Таҳлиллар узлуксиз балкаларни ҳисоблашда иккинчи вариант мақсадга мувофиқ эканлигини кўрсатади.

Уч моментлар тенгламаси

Узлуксиз балканинг асосий системасини оддий бир ораликли балкаларнинг йиғиндиси сифатида қабул қиламиз (8.3- расм, а).

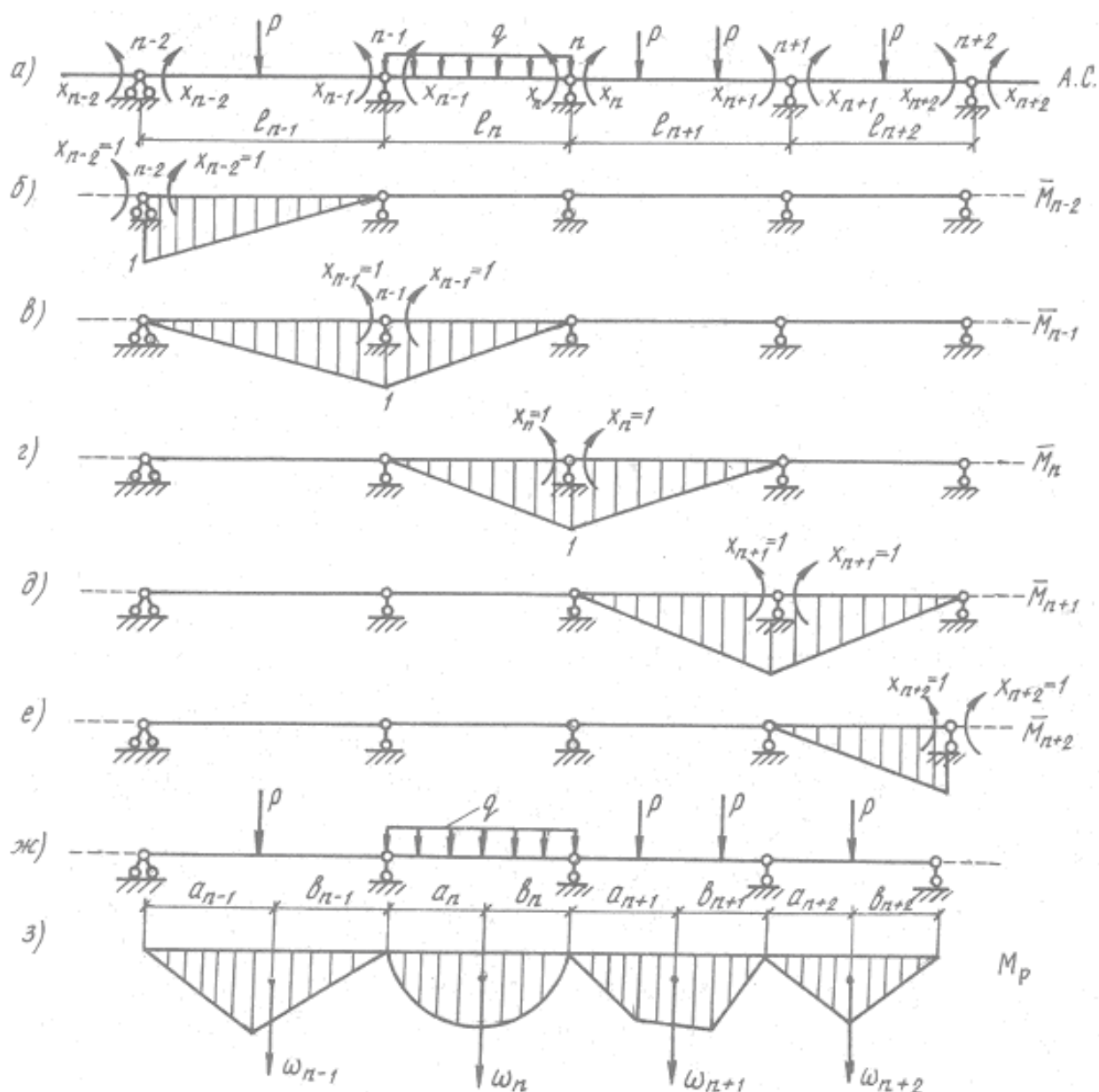
Бу асосий системада номаълумлар сифатида таянч кесимларида вужудга келадиган эгувчи моментлар $(X_{n-2}, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$ қабул қилинади. Номаълумларнинг йўналишини олдиндан айтиш қийин. Шу сабабли уларни пастки толачаларни чўзади деб шартли равишда қабул қиламиз. Номаълумларнинг ҳақиққий йўналиши тенгламанинг ечими натижасида ҳал этилади.

Каноник тенглама системасидан бирор қаторини ёзамиз:

$$\dots + \delta_{n,n-2} \cdot X_{n-2} + \delta_{n,n-1} \cdot X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \delta_{n,n+2} X_{n+2} + \dots + \Delta_{np} = 0.$$

Бу ерда $\delta_{n,n}X_n$ — таянч кесимининг бурчакли кўчиши.

Каноник тенгламанинг коэффициент ва озод хадларини аниқлаш учун асосий системани бирлик ва ташки кучлар билан юклаймиз. Бирлик ва ташки кучлар таъсирида эгувчи момент эюпралари курилади (8.3- расм, б, в, г, д, е, ж, з).



8.3- расм

Эюпралардан фойдаланиб, каноник тенгламанинг айрим коэффициентлари (масалан, $\delta_{n, n-2}, \delta_{n, n+2}$) нолга тенг эканлигини билиб оламиз.

У ҳолда n — таянч учун каноник тенглама куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{n,n-1} X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \Delta_{np} = 0.$$

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод хадларини Мор интегралли, Верешчагин ёки Симпсон усулида аниқлаймиз.

$$\begin{aligned}\delta_{n,n-1} &= \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n-1}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} l_n \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{l_n}{6EJ} \\ \delta_{n,n} &= \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} l_n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{2l_n}{6} + \frac{2l_{n+1}}{6} \right] = \frac{2}{6EJ} [l_n + l_{n+1}]; \\ \delta_{n,n+1} &= \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n+1}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_{n+1}}{6EJ}; \\ \Delta_{ip} &= \sum \int \frac{\bar{M}_p \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} [\omega_n \cdot y_c + \omega_{n+1} \cdot y_c] = \frac{1}{EJ} \\ &\quad \left[\omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} \right].\end{aligned}$$

Топилган озод ҳад ва коэффициентларни тенгламага қўйиб ихчамлаштирсак, у куйидаги кўринишга келади:

$$X_{n-1} \cdot l_n + 2X_n (l_n + l_{n+1}) + X_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Агар $X_{n-1}=M_{n-1}$, $X_n=M_n$, $X_{n+1}=M_{n+1}$ билан алмаштирилса, куйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right). \quad (8.2)$$

(8.2) ифода *уч моментлар тенгламаси* деб аталиб, ҳар бир оралик таянчи учун алоҳида равишда тузилади. Тузиладиган тенгламалар сони узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражасига тенг бўлади.

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n^\Phi \quad (8.3)$$

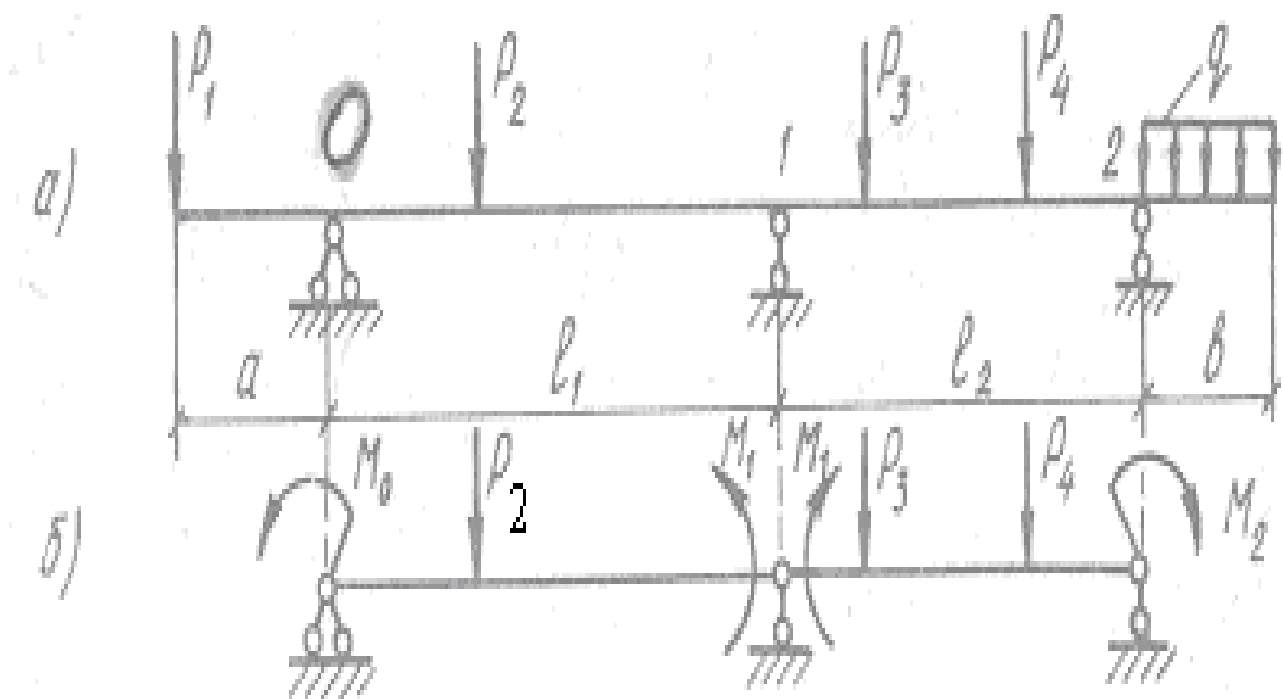
Бу ерда $R_n^\Phi = A_n^\Phi + B_n^\Phi$,

$$A_n^\Phi = \frac{\omega_n a_n}{l_n}, \quad B_n^\Phi = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}};$$

деб олинган.

Хусусий ҳоллар

1. Агар берилган узлуксиз балканинг консол қисми бўлса, у ҳолда консол таянч моментлари билан алмаштирилади.



8.4- расм

Масалан, 8.4- расм, а- да берилган бир номаълумли узлуксиз балка учун уч моментлар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6R_1 \hat{O}.$$

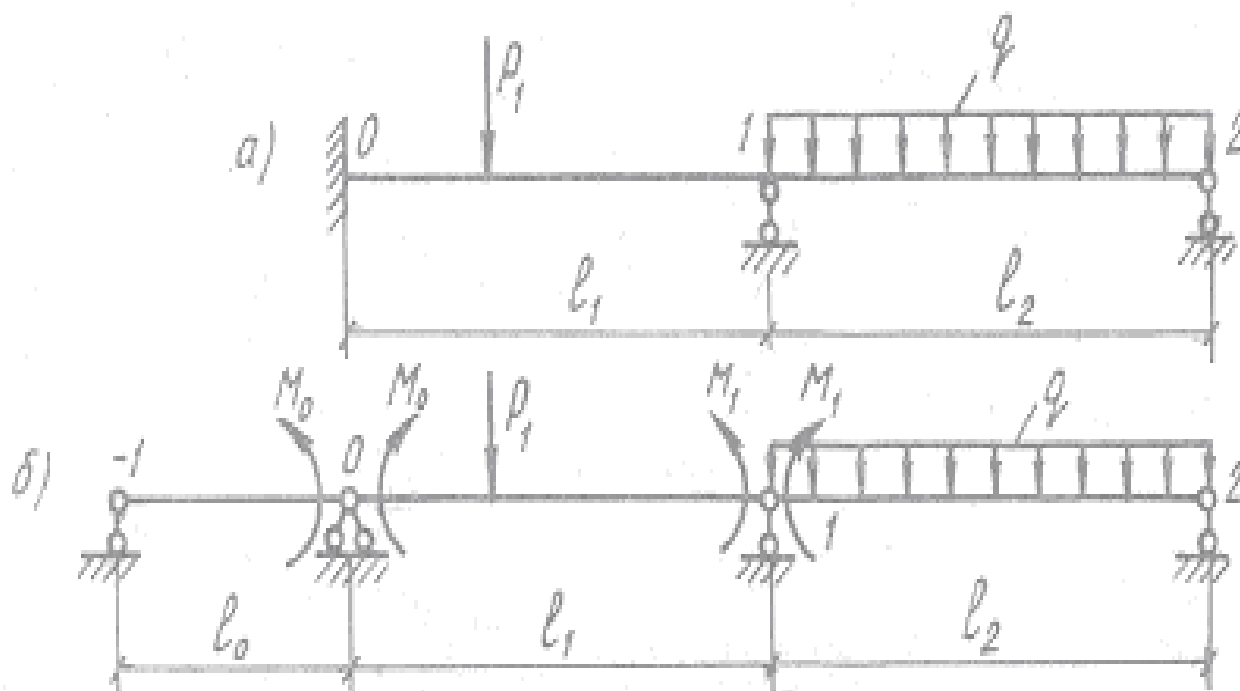
Шаклдан: $M_0 = -P_1 \cdot a$;

$$M_2 = -\frac{qb^2}{2}$$

эканлиги кўриниб турибди.

Узлуксиз балканинг асосий системаси 8.4- расм, б-да тасвирланган.

2. Агар берилган балканинг чекка таянчларидан бири шарнирсиз бикир бўлса, (8.5- расм, а), у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча сохта оралик қўшилади. Бу оралиқнинг узунлиги нолга тенг ва бикирлиги чексиз деб қабул қилинади (8.5- расм, б).



8.5- расм

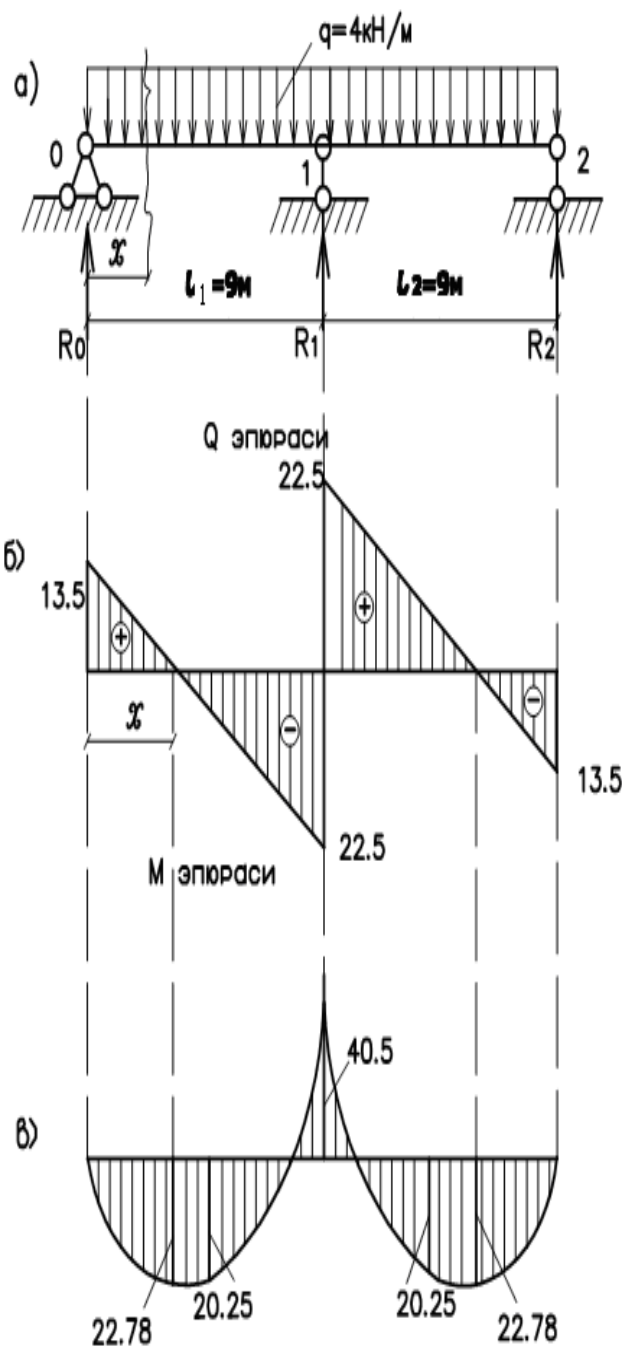
Уч моментлар тенгламасидан номаълум таянч моментлари аниқлангандан сўнг берилган балканинг эгувчи момент ва қирқувчи куч эпюралари қурилади.

Эпюраларни қуриш учун асосий системадан ҳар бир оддий балка ажратиб олинади, ажратилган балкалар ташқи куч ва аниқланган таянч

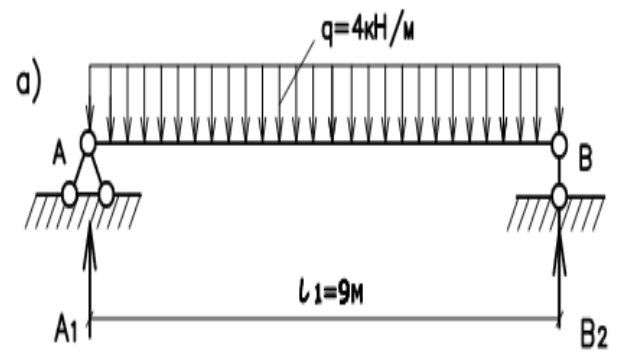
моментлари билан юкланади, сўнгра эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюралари қурилади.

Алоҳида қурилган эпюралар ягона ўқ устига жойлаштирилади. Натижада узлуксиз балканинг эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюралари ҳосил бўлади.

8.1 – мисол. 8.6 – расм, а да берилган узлуксиз балканинг Q ва M эпюралари қурилсин.



8.6 - расм



8.7 - расм

Ечиш.

1. Статик ноаниклик даражасини аниқлаймиз:

$$n = C_T - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Балка бир марта статик ноаниқ, шу боисдан уч моментлар тенгламаси фақат битта тузилади.

2. Балканинг ҳар бир оралиғини мустақил балка сифатида ажратиб олиб, ҳар бири учун ҳақиқий (A^0 ва B^0) ҳамда фаразий (A^Φ ва B^Φ) таянч реакцияларини аниқлаймиз.

1-оралиқ (8.7 – расм)

$$A_1^0 = B_1^0 = \frac{q\ell_1}{2} = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18 \text{ кН}$$

Фаразий таянч реакциялари

$$A_1^\Phi = B_1^\Phi = \frac{q\ell_1^3}{24} = \frac{4 \cdot 9^3}{24} = 121,5 \text{ кН.м}^2$$

2 – оралиқ

Ушбу оралиқ биринчи оралиқ билан бир хил бўлганлиги сабабли, тегишли таянч реакциялари ҳам бир хил бўлади, яъни:

$$A_2^0 = B_2^0 = 18 \text{ кН}; \quad A_2^\Phi = B_2^\Phi = 121,5 \text{ кН.м}^2.$$

3. Ўртадаги таянч учун уч моментлар тенгламасини тузамиз:

$$M_0\ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2\ell_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi)$$

Шаклга кўра $M_0 = 0$ ва $M_2 = 0$ бўлгани учун тенглама қуйидаги тусни олади:

$$2M_1(\ell_1 + \ell_2) = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi).$$

2 га қисқартириб, маълум қийматларни ўз ўрнига қўямиз:

$$M_1(9+9) = -3(121,5+121,5);$$

$$18M_1 = -729 ,$$

бундан

$$M_1 = -\frac{729}{18} = -40,5 \text{ кН.м}$$

4. Бизга маълум формуладан фойдаланиб узлуксиз балканинг таянч реакцияларини аниқлаймиз:

$$R_0 = A_1^0 - \frac{M_0 - M_1}{\ell_1} = 18 - \frac{0 - (-40,5)}{9} = 13,5 \text{ кН};$$

$$R_1 = B_1^0 + A_2^0 - \frac{M_1 - M_0}{\ell_1} - \frac{M_1 - M_2}{\ell_2} = 18 + 18 - 40,5 - 0,9 - \frac{-40,5 - 0}{9} = 45 \text{ кН};$$

$$R_2 = B_2^0 - \frac{M_2 - M_1}{\ell_2} = 18 - \frac{0 - (-40,5)}{9} = 13,5 \text{ кН}.$$

Текшириш:

$$\sum Y = R_0 - q(\ell_1 + \ell_2) + R_1 + R_2 = 13,5 - 4(9+9) + 45 + 13,5 = 0.$$

5. Характерли кесимлардаги кўндаланг кучларни аниқлаймиз ва Q эпюрасини курамиз (8.6 – расм, б):

$$Q_0 = R_0 = 13,5 \text{ кН}; \quad Q^{\text{чап}}_1 = Q_0 - q \ell_1 = 13,5 - 4 \cdot 9 = 22,5 \text{ кН};$$

$$Q^{\text{ўнг}}_1 = Q^{\text{чап}}_1 + R_1 = -22,5 + 45 = 22,5 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q^{\text{ўнг}}_1 - q \ell_2 = 22,5 - 4 \cdot 9 = -13,5 \text{ кН};$$

6. Эгувчи моментларни ҳисоблаймиз.

0 – таянчдан x масофада ётган кесим учун эгувчи момент ифодаси:

$$M_x = R_0 x - \frac{qx^2}{2} = 13,5x - \frac{4x^2}{2} = 13,5x - 2x^2.$$

Бу ерда $x = 0 \div \ell_1$ оралиғида ўзгаради:

$x = 0$ бўлганда $M_0 = 0$;

$$x = \frac{\ell_1}{2} = 4,5 \text{ м бўлганда } M_x = 13,5 \cdot 4,5 - 2 \cdot 4,5^2 = 20,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$x = \ell_1 = 9 \text{ м бўлганда } M_1 = 13,5 \cdot 9 - 2 \cdot 9^2 = -40,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Кўндаланг кучнинг қиймати ноль бўлган абцисса x_0 ни топамиз:

$$Q_x = R_0 - qx_0 = 0, \text{ бундан } x_0 = \frac{R_0}{q} = \frac{13,5}{4} = 3,375 \text{ м}.$$

Ушбу кесимда эгувчи момент максимал қийматга эга бўлади:

$$M_{\max} = 13,5 \cdot 3,375 - 2 \cdot 3,375^2 = 22,78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

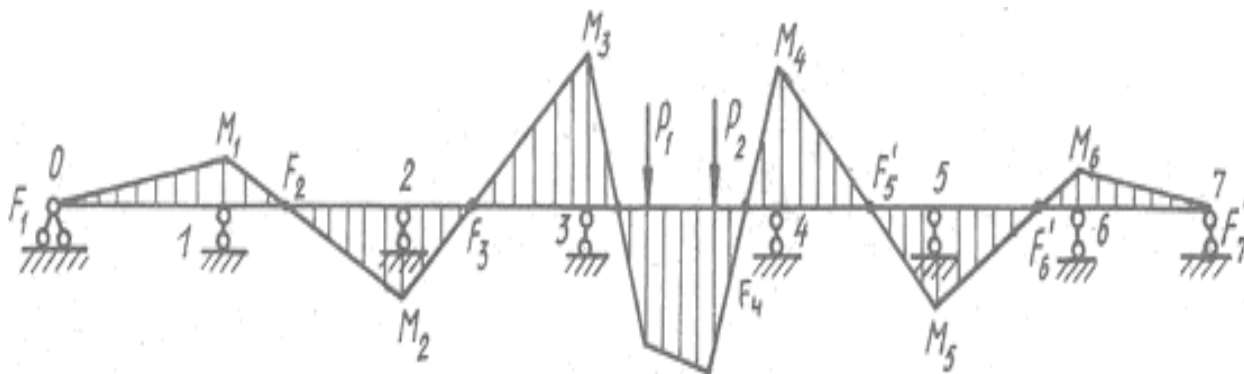
Эгувчи моментларнинг аниқланган қийматлари асосида биринчи оралик учун М эпюрасини кўрамиз (8.6 – расм, в).

Балка ва унга қўйилган юк симметрик бўлганлиги сабабли М эпюраси ҳам симметрик бўлади. Шу боисдан иккинчи оралик учун эгувчи моментларни ҳисоблашнинг ҳожати йўқ.

8.2. Узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш

Ораликлари сони уч ва ундан ортиқ бўлиб, айрим ораликлари ташқи кучлар билан юкланган бўлса, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш анча қулай бўлади.

Бу усулнинг моҳиятини англаш учун уч моментлар тенгламасидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюрасини кўрамиз (8.8- расм).



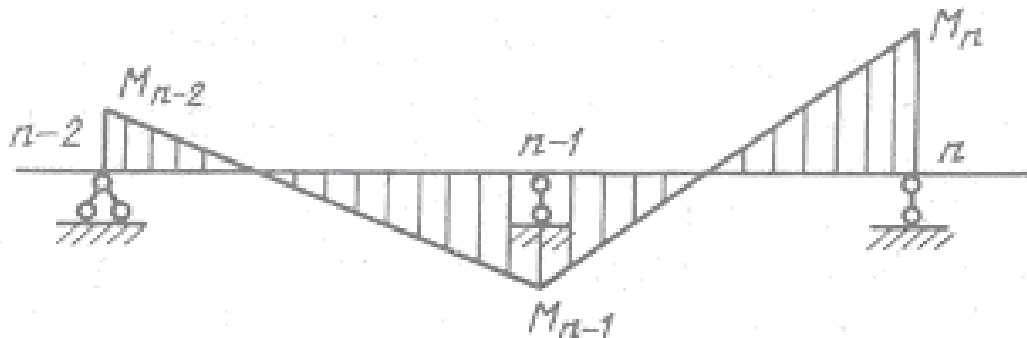
8.8- расм

Бу эпюра таҳлили асосида қуйидаги хулосага келиш мумкин: юк қўйилмаган ораликларда эгувчи момент оғма чизиклардан иборат бўлиб, балканинг ўқини кесиб ўтади ва ноль нуқталар ҳосил қилади. Бу нуқталар *момент фокуслари* деб аталади.

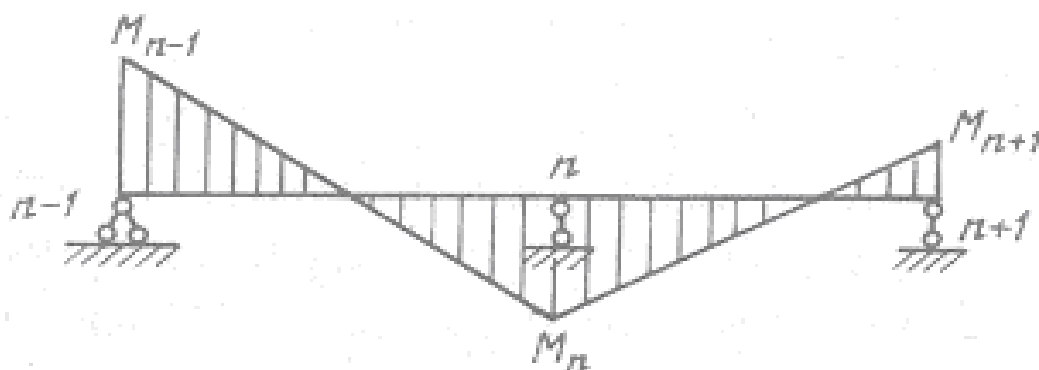
Агар ноль нуқталар юк қўйилган ораликқа нисбатан чап томонда жойлашган бўлса — *чап момент фокуси* деб аталади ва $F_1, F_2, F_3... F_n$ деб белгиланади.

Агар ноль нуқталар юк қўйилган ораликнинг ўнг томонида жойлашган бўлса — *ўнг момент фокуси* деб аталади ва $F_1^1, F_2^1, F_3^1 \dots F_n^1$ билан белгиланади.

Узлуксиз балканинг юкланмаган оралиғидаги таянч моментларининг абсолют қийматлари нисбати — *фокуслар нисбати* деб аталади.



8.9- расм



8.10- расм

Юк қўйилган ораликларда фокусларнинг ҳолати фокуслар нисбатлари орқали аниқланади. Фокус нисбатлари ўз навбатида чап ва ўнг нисбатларга бўлинади.

Масалан, 8.8- расмда тасвирланган эгувчи момент эпюрасидан чап ва ўнг фокус нисбатлари қуйидагича аниқланади:

Чап фокус нисбатлари,

$$\frac{M_1}{M_0} = -K_1, \quad \frac{M_2}{M_1} = -K_2, \quad \frac{M_3}{M_2} = -K_3 \quad \text{бўлади.}$$

Ўнг фокус нисбатлари:

$$\frac{M_4}{M_5} = -K_5^1, \quad \frac{M_5}{M_6} = -K_6^1, \quad \frac{M_6}{M_7} = -K_7^1 \quad \text{бўлади.}$$

Таянч моментлари ҳар хил ишорали бўлгани учун фокус нисбатлари манфий ишорага эга.

Шунга ўхшаш узлуксиз балканинг юкланмаган n - оралиғи учун *чап фокус нисбати* қуйидагича аниқланади (8.9- расм):

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = -K_n \quad (8.4)$$

Агар узлуксиз балканинг юкланмаган « n » оралиғи юк қўйилган ораликқа нисбатан ўнг томонда бўлса, у ҳолда шу оралик учун *ўнг фокус нисбати* қуйидагича ифодаланади (8.10- расм):

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -K_n^1 \quad (8.5)$$

Агар юкланмаган оралик юк қўйилган n — оралиқнинг чап томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи чап фокусдан ўтади: юкланмаган оралиқнинг таянч моментлари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$M_{n-1} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}}. \quad (8.6)$$

Агар юкланмаган оралик юк қўйилган оралиқнинг ўнг томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи ўнг фокусдан ўтади ва номаълум таянч моментлари қуйидаги ифодадан аниқланади:

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}}. \quad (8.7)$$

Демак, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш учун биринчи навбатда, фокус нисбатлари ва юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари аниқланган бўлиши керак.

Чап фокус нисбатларини аниқлаш учун юк қўйилган ораликдан чап томонда жойлашган ораликлар учун уч моментлар тенгламасини тузамиз. Узлуксиз балканинг биринчи таянчи учун уч моментлар тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0$$

Шаклдан $M_0=0$ ва тенгламанинг ўнг қисми ноль эканлиги кўриниб турибди. У ҳолда:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)$$

(8.4) формулага асосан $\frac{M_2}{M_1} = -K_2$ деб белгиласак,

$$K_2 = 2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \quad (8.8) \text{ келиб чиқади.}$$

Энди иккинчи таянч учун ($n=2$) уч моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0$$

Тенгламанинг барча хадларини M_2 га бўлсак,

$$\frac{M_1}{M_2} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) + \frac{M_3}{M_2} \cdot l_3 = 0$$

келиб чиқади.

Бу тенгламадаги таянч моменти нисбатларини (8.6) формулага асосан чап фокус нисбатлари орқали ифодалаймиз:

$$-\frac{1}{K_1} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) - K_2 l_3 = 0$$

Бу тенгламадан иккинчи оралик учун чап фокус нисбати аниқланади:

$$K_2 = 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K_1} \right) \quad (8.9)$$

Буларни умумлаштириб, n — нчи оралик учун чап фокуслар нисбати K_n ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$K_n = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \quad (8.10)$$

Шу тартибда ўнг фокуслар нисбатлари аниқланади:

$$K_n^1 = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^1} \right) \quad (8.11)$$

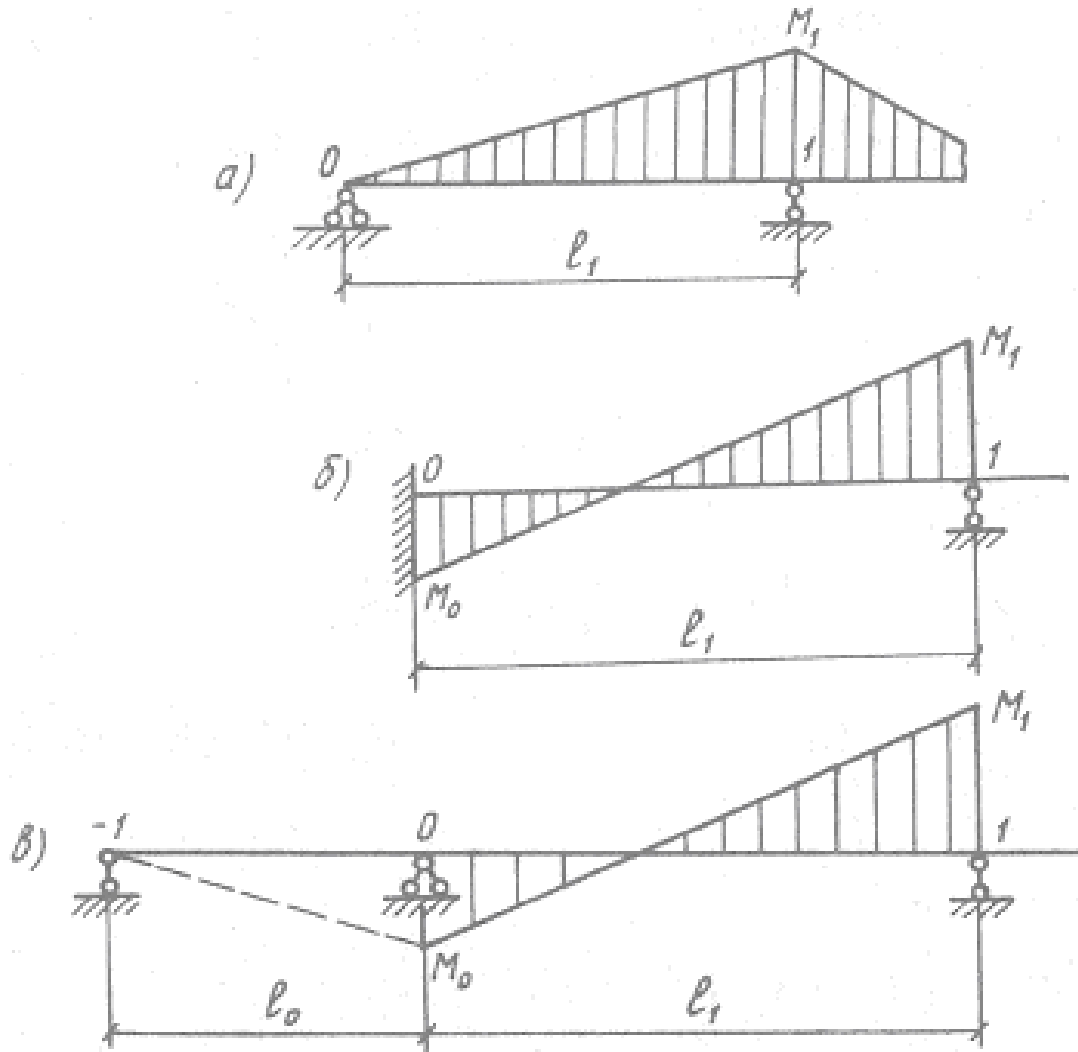
Чап фокус нисбатларини аниқлаш узлуксиз балканинг биринчи оралиғидан, ўнг фокус нисбатларини ҳисоблаш эса охириги оралиғидан бошланади.

Биринчи ва сўнги оралиқларнинг фокус нисбатлари таянчлар хилига боғлиқ ҳолда аниқланади.

Агар балканинг биринчи таянчи шарнирли бўлса, у ҳолда биринчи оралик учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишга эга бўлади (8.11-расм, а):

$$K_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

Шаклдан $M_0=0$ эканлиги кўриниб турибди.



8.11- расм

Агар берилган балканинг биринчи таянчи шарнирсиз бикир бўлса, (8.11- расм, б) у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча сохта оралик қўшилади (8.11- расм, в) ва шу оралик учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$K_0 = -\frac{M_0}{M_1} = -\frac{M_0}{0} = \infty$$

(8.10) формулага кўра биринчи оралиқ учун фокуслар нисбати $K_1 = 2 + l_0 / l_1 \left(2 - \frac{1}{K_0} \right)$ бўлгани учун $K_1 = 2$ бўлади. Бу ерда $l_0 = 0$ ва $K_0 = \infty$.

Демак, балканинг биринчи таянчи шарнирли қўзғалмас бўлса, биринчи оралиқ учун чап фокуслар нисбати $K_1 = \infty$, шарнирсиз бикир бўлса, $K_1 = 2$ га тенг бўлади.

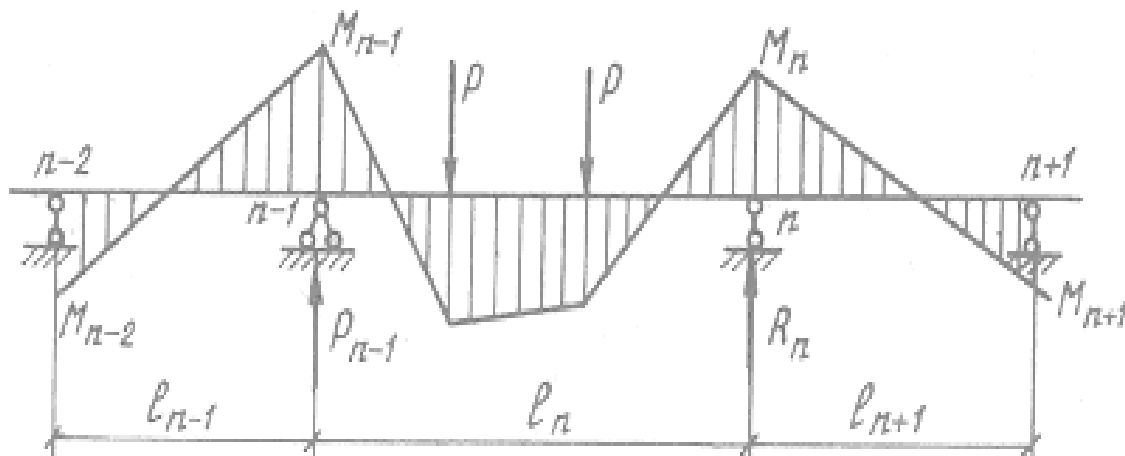
Узлуксиз балканинг чап ва ўнг фокус нисбатлари аниқлангандан сўнг юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари аниқланади.

Узлуксиз балканинг « n » оралиғига ташқи кучлар қўйилган деб фараз қиламиз (8.12- расм).

Юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари M_{n-1} , M_n ларни аниқлаш учун балканинг $n - 1$ ва n — нчи таянчларига тегишли уч моментлар тенгламасини ёзамиз (8.12- расм):

$$M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6R_{n-1};$$

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n. \quad (8.12).$$



8.12- расм

Тузилган тенгламалар қаторида тўртта таянч моментлари M_{n-2} , M_{n-1} , M_n , M_{n+1} мавжуддир. Булардан икkitаси (M_{n-1} , M_n) изланаётган моментлар, қолган икkitаси (M_{n-2} , M_{n+1}) фокуслар нисбати орқали аниқланадиган таянч моментларидир.

$$(8.6) \text{ формулага асосан } M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}};$$

$$(8.7) \text{ формулага асосан } M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}^1}.$$

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмидаги сохта таянч реакциялари қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$R_{n-1}^f = A_n^f, R_n^f = B_n^f$$

Чунки бу ерда 8.12- расмга асосан $B_{n-1}^f = 0, A_{n+1}^f = 0$ тенгдир. M_{n-2}, M_{n+1} ва R_{n-1}, R_n ларнинг қийматларини (8.12) тенгламага қўямиз:

$$-\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}} \cdot l_{l-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6A_n^f.$$

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) - \frac{M_n}{K_{n+1}^1} \cdot l_n = -6B_n^f.$$

Бу тенгламаларнинг барча ҳадларини l_n га бўлиб юборсак,

$$M_{n-1} = \left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \right] + M_n = -\frac{6A_n^f}{l_n};$$

$$M_{n-1} + M_n \left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^1} \right) \right] + M_n = -\frac{6B_n^f}{l_n};$$

келиб чиқади.

(8.10) ва (8.11) формулаларга асосан тенгламалар қуйидаги кўринишга келади:

$$M_{n-1} \cdot K_n + M_n = -\frac{6A_n^f}{l_n};$$

$$M_n + M_{n+1} K_n^1 = -\frac{6B_n^f}{l_n}.$$

Бу тенгламалардан, юк қўйилган ораликдаги таянч моментларини аниқлайдиган формула келиб чиқади:

$$M_{n-1} = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{(A_n^f \cdot K_n^l - B_n^f)}{(K_n K_n^1 - 1)};$$

$$M_n = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{(B_n^f \cdot K_n - A_n^f)}{(K_n K_n^1 - 1)}. \quad (8.13)$$

Шундай қилиб, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Ҳар бир оралиқ учун чап ва ўнг фокус нисбатлари (8.10) ва (8.11) формулаларга асосан топилади.

2. Юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари (8.13) формула бўйича аниқланади.

3. Юк қўйилмаган оралиқлардаги таянч моментлари (8.6) ва (8.7) формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар узлуксиз балканинг бир неча оралиғи ташқи юклар таъсирида бўлса, у ҳолда ҳар бир юк қўйилган оралиқ учун балка алоҳида равишда ҳисобланади, сўнгра таянч моментларининг алгебраик йиғиндилари бўйича умумий эпюра курилади.

8.2- мисол. 8.13– расмда тасвирланган беш оралиқли узлуксиз балка учун М эпюраси момент фокуслари усулида курилсан. Берилган: $J=\text{const}$; $\ell_1 = \ell_2 = 5\text{м}$; $\ell_3 = \ell_4 = \ell_5 = 4\text{м}$; $q=15\text{кН/м}$.

Ечиш. Фокус нисбатларини аниқлаймиз.

Чап фокус нисбатлари:

$$K_1 = 2; \quad K_2 = 2 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3,5; \quad K_3 = 2 + \frac{\ell_2}{\ell_3} \left(2 - \frac{1}{3,5} \right) = 4,14;$$

$$K_4 = 2 + \frac{\ell_3}{\ell_4} \left(2 + \frac{1}{4,14} \right) = 3,76; \quad K_5 = 2 + \frac{\ell_4}{\ell_5} \left(2 - \frac{1}{3,76} \right) = 3,73.$$

Ўнг фокус нисбатлари:

$$K'_5 = \infty; \quad K'_4 = 2 + \frac{\ell_5}{\ell_4} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 4; \quad K'_3 = 2 + \frac{\ell_4}{\ell_3} \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 3,75;$$

$$K'_2 = 2 + \frac{\ell_3}{\ell_2} \left(2 - \frac{1}{3,75} \right) = 3,39; \quad K'_1 = 2 + \frac{\ell_2}{\ell_1} \left(2 - \frac{1}{3,39} \right) = 3,70.$$

Куч қўйилган оралиқдаги таянч моментларини (8.15) формуладан аниқлаймиз:

$$M_2 = -\frac{K_3^B K_3' - K_3^A}{K_3 K_3' - 1} = \frac{60 \cdot 3,75 - 60}{4,14 \cdot 3,75 - 1} = -\frac{165}{14,525} = -11,4 \text{ кН.м};$$

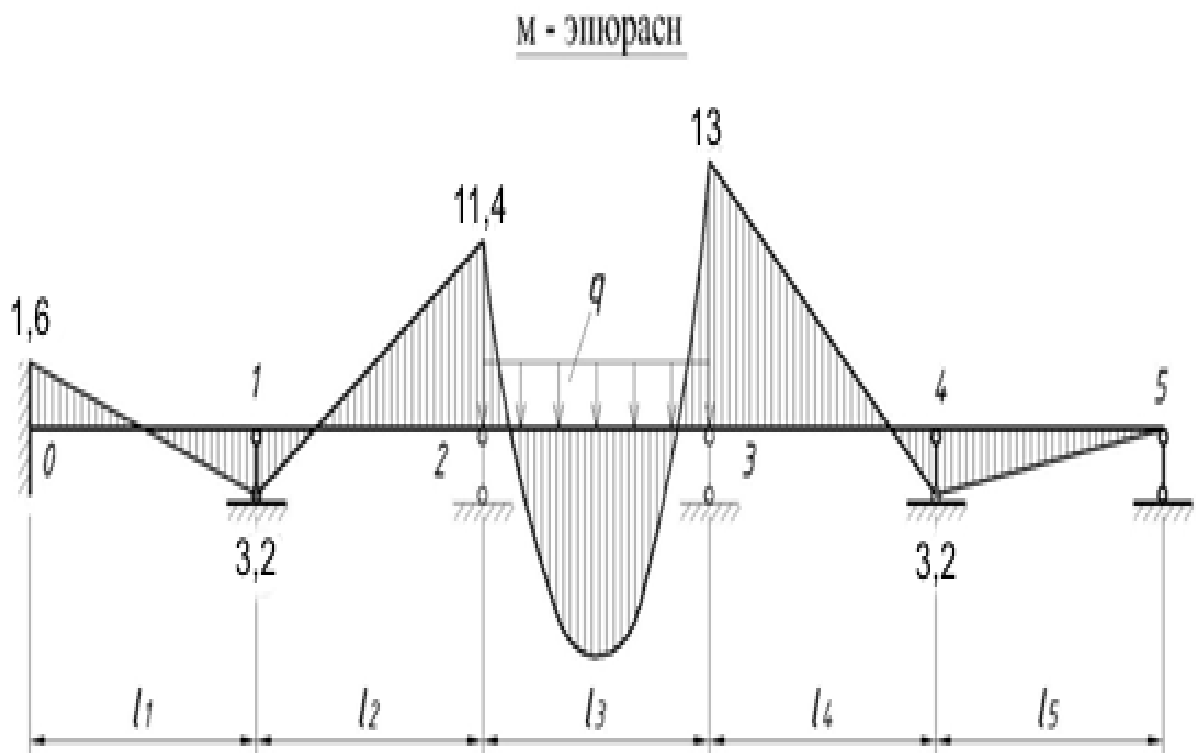
бу ерда $K_3^B = \frac{60 \cdot 4}{4} = 60$; $K_3^A = \frac{60 \cdot 4}{4} = 60$.

$$M_3 = -\frac{K_3^A K_3 - K_3^B}{K_3 K_3' - 1} = -\frac{60 \cdot 4,14 - 60}{4,14 \cdot 3,75 - 1} = -\frac{18,84}{14,525} = -13,0 \text{ кН.м};$$

Куч қўйилмаган ораликлардаги таянч моментлари:

$$M_1 = -\frac{M_2}{3,5} = 3,2 \text{ кН.м}; \quad M_0 = -\frac{M_1}{2} = -1,6 \text{ кН.м}; \quad M_4 = -\frac{M_3}{4} = 3,25 \text{ кН.м}.$$

Аниқланган қийматлар бўйича қурилган М эпюраси 8.13– расмда тасвирланган.



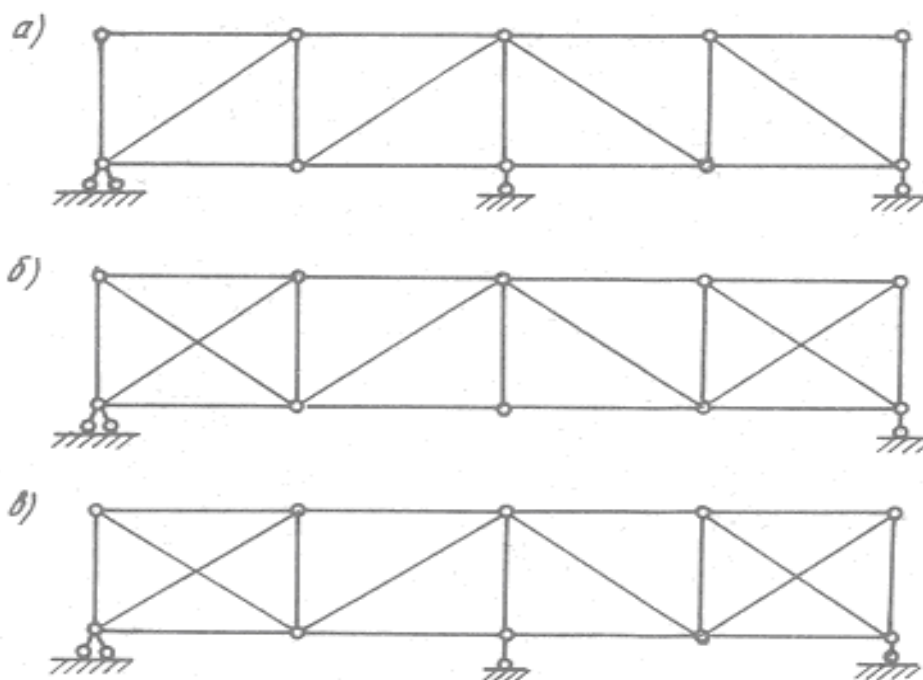
8.13 – расм

Агар $\frac{6A_n^\phi}{\ell_n} = K_n^B$ ва $\frac{6B_n^\phi}{\ell_n} = K_n^A$ деб олсак, (8.13) формула янада ихчамлашади:

$$M_{n-1} = -\frac{K_n^B K_n' - K_n^A}{K_n K_n' - 1}; \quad M_n = -\frac{K_n^A K_n - K_n^B}{K_n K_n' - 1}. \quad (8.14)$$

8.3. Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш

Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблашда ҳам статик аниқ фермаларни ҳисоблашда қабул қилинган айрим чекланишлардан фойдаланилади. Масалан, қўзғалмас юклар ферма тугунларига қўйилган, стерженлар фақат сиқилиш ёки чўзилишга ишлайди, деб қаралади.



8.14- расм

Статик ноаниқ фермаларни асосан уч гуруҳга ажратиш мумкин:

1. Таянч реакциялари сонига кўра статик ноаниқ фермалар (8.14- расм, а).
2. Ферма стерженларидаги зўриқишларга кўра статик ноаниқ фермалар (8.14-расм,б).
3. Таянч реакциялари сони ва стерженлардаги зўриқишларга кўра статик ноаниқ фермалар (8.14- расм, в).

Фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$n = C + C_0 - 2Y. \quad (8.16)$$

Бу ерда n — ферманинг статик ноаниқлик даражаси;

C — ферми ташкил этувчи стерженлар сони;

C_0 — таянч стерженлари сони;

Y — тугунлар сони.

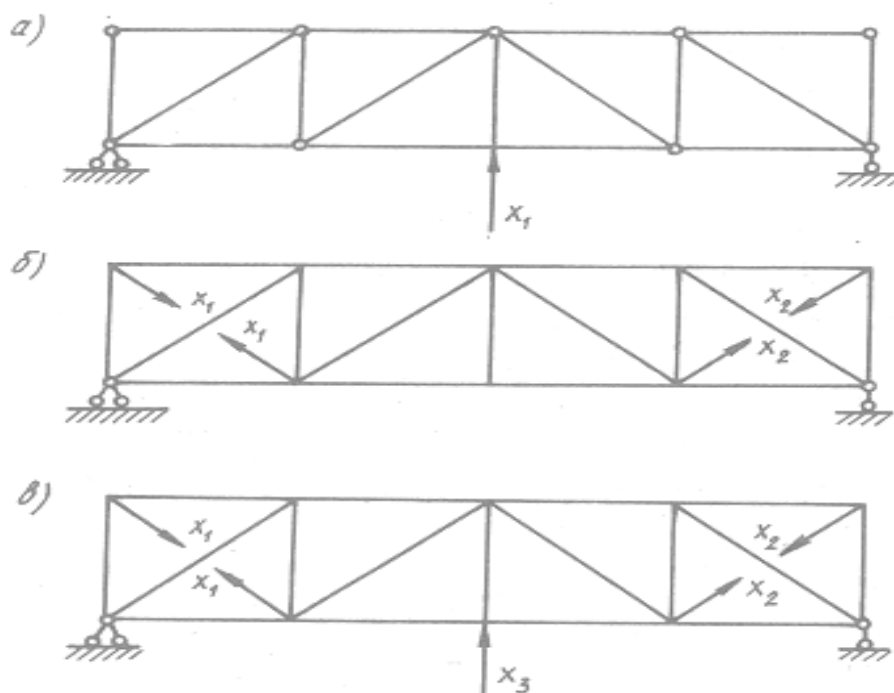
Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш тартиби статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашдан кам фарқ қилади. Бу ерда ҳам биринчи навбатда, (8.14- расм) фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси аниқланади ва ундан сўнг асосий система қабул қилинади. Бунинг учун ортиқча боғланишлар ташлаб юборилади. Ташлаб юборилган ортиқча боғланишлар номаълум зўриқишлар билан алмаштирилади (8.15- расм, *а*, *б*, *в*). Сўнгра каноник тенгламалар тузилади. Каноник тенгламалар сони берилган ферманинг статик ноаниқлик даражаси сонига тенг бўлади. 8.15- расм, *а*-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламаси қуйидагича ёзилади

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

8.15- расм, *б*-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари иккита тузилади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0;$$



8.15- расм

8.15- расм, в-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} &= 0.\end{aligned}$$

Тенгламаларнинг ҳар бири ўз навбатида, асосий системада ташқи юк ва номаълум зўриқишлар таъсирида ҳосил бўладиган кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлишини ифодалайди.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари куйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\begin{aligned}\delta_{ki} &= \sum \frac{\bar{N}_k \bar{N}_i}{EF} \cdot S = \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}_k \bar{N}_i}{F} S; \\ \delta_{kk} &= \sum \frac{\bar{N}_k^2}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}_k^2}{F} S; \\ \delta_{kp} &= \sum \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}_k N_p}{F} S.\end{aligned}\tag{8.17}$$

Бу ерда:

$\bar{N}_i$ — ферма стерженларида $X_i=1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар;

$\bar{N}_k$ — ферма стерженларида $X_k=1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар;

N_p — ташқи кучлар таъсирида асосий системада ҳосил бўладиган зўриқишлар;

S — ферма стерженининг узунлиги;

E — ферма материалынинг эластиклик модули;

F — ферма стерженининг кўндаланг кесим юзаси.

Зўриқишлар $N_p, \bar{N}_k$ ва $\bar{N}_i$ ларнинг қийматлари аналитик ёки график усуллар орқали аниқланади.

Каноник тенгламанинг коэффиценти ва озод ҳадларини жадвал ёрдамида аниқлаш тавсия этилади.

Номаълумлар (X_1, X_2, X_3) топилгандан кейин ферма стерженларидаги зўриқишларнинг якунловчи қийматлари, осонлик билан топилади:

$$N = N_p + \bar{N}_1 \cdot X_1 + \bar{N}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n \cdot X_n$$

Бу ерда N_p — ташқи кучлар таъсирида ферма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқиш:

$\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$ — бирлик кучларнинг таъсирида ($X_1=1; X_2=1; \dots X_n=1$) шу элементларда мавжуд бўладиган зўриқишлар.

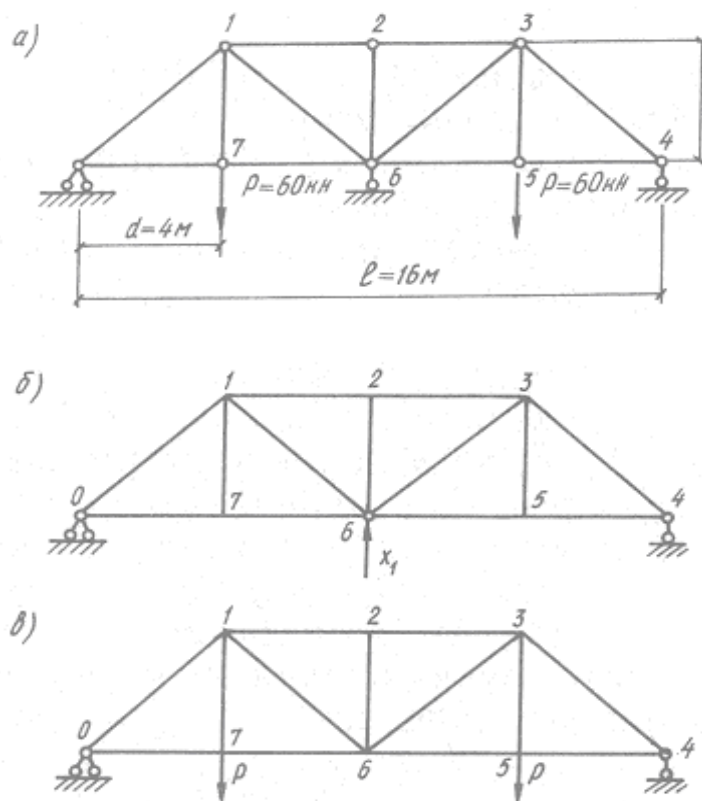
8.3-мисол. 8.16- расмда берилган статик ноаниқ ферманинг стерженларидаги зўриқишлар аниқлансин. Ферма стерженларининг биқирлиги EF ўзгармас.

Ечиш. Ферманинг статик ноаниқлик даражасини (8.17) формулага асосан белгилаб оламиз. У бир марта статик ноаниқ бўлиб, битта ортиқча таянч боғланишига эга.

Ферманинг ўртадаги таянчини ташлаб юбориб, асосий системани танлаймиз (8.16- расм, б). Номаълум таянч реакциясини аниқлаш учун кучлар усулининг каноник тенгламасини тузамиз.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Бу тенгламадаги δ_{11} ва Δ_{1p} кўчишлар (8.17) формула ёрдамида аниқланади. Ферма стерженларида бирлик куч $X_1=1$ ва ташқи юклар таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар 4- бобда баён этилган усуллардан фойдаланиб аниқланади (8.16- расм, в).



8.16- расм

Ферма ва унга қўйилган юклар симметрик бўлганлиги сабабли ферманинг ярмини ҳисоблаш кифоя, чунки, 0 — 7 стержендаги зўриқиш 5 — 4 стержендаги зўриқишга тенг ($N_{70}=N_{45}$), шунга ўхшаш, $N_{12}=N_{23}$, $N_{10}=N_{34}$, $N_{76}=N_{65}$, $N_{16}=N_{63}$ бўлади. Фермани ҳисоблаш натижалари 8.1- жадвалда келтирилган.

8. 1- жадвал

Стерженлар	Стержень узуниги $l_K (см)$	Зўриқиш	$\frac{N_1^2 l}{EF}$	N_P $кн$	$\frac{N_1 N_P l}{EF}$	N $кн$	$\frac{N_1 N l}{EF}$ текшириш
1	2	3	4	5	6	7	8
01	500	0,825	1,74	-100	-208	-39,8	-82,3
1 – 2	400	1,333	3,56	-80	-213	16,2	43
0 – 7	400	-0,667	0,89	80	-107	31,8	-42,5
7 – 6	400	-0,667	0,89	80	-107	31,8	-42,5
1 – 6	500	-0,825	1,74	0	0	-60,1	124
1 – 7	300	0,00	0	60	60	60	0
		$\delta_{11} = 8,82$		$\Delta_{1P} = -635$		$167 - 167,3 = 0$	

Топилган кўчишларни каноник тенгламаларга қўйиб, номаълум реакция кучи X_1 ни аниқлаймиз:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{635}{8,82} = 72,2 \text{ kN}$$

Ташқи юк ва аниқланган таянч реакцияси X_1 таъсирида статик ноаник ферманинг стерженларида ҳосил бўлган зўриқишлар (8.4) формула ёрдамида ҳисобланади.

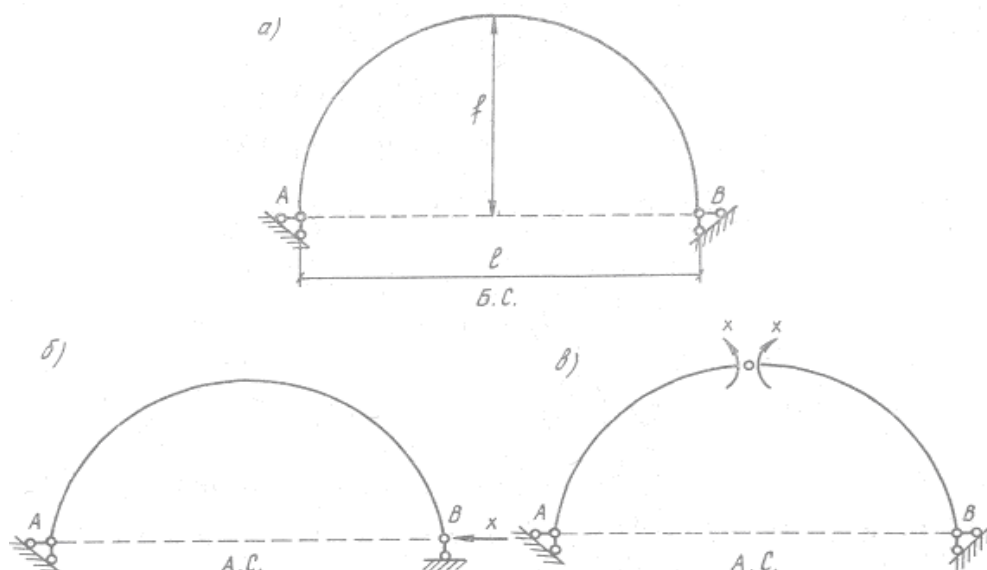
$$N_{01} = N_P + \bar{N}_{01} \cdot X_1 = -100 + 0,825 \cdot 72,2 = -40,44 \text{ kN};$$

$$N_{12} = N_P + \bar{N}_{12} \cdot X_1 = -80 + 1,33 \cdot 72,2 = 16,24 \text{ kN}.$$

8.4. Икки шарнирли аркаларни ҳисоблаш

Икки шарнирли аркалар асосан кўприк конструкцияларида ва иморатлар томини ёпишда ишлатилади.

Икки шарнирли арка (8.17- расм, а) бир марта статик ноаникдир. Асосий система танлашда унинг битта ортиқча боғланиши ташлаб юборилади. 8.17- расм, б, в-да асосий система икки хил нусхада тавсия этилган. Асосий системанинг бирида В таянчининг горизонтал стержени номаълум реакция кучи X билан алмаштирилган. Иккинчи асосий система эса қўшимча шарнир киритиш йўли билан ҳосил қилинган.



8.17- расм

Номаълум X_1 ни аниқлаш учун куч усулининг каноник тенгламасини тузамиз

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0; X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

Бу ерда δ_{11} — бирлик куч йўналиши бўйича ва шу бирлик куч ($P=1$) таъсиридан ҳосил бўлган бирлик кўчиш;

Δ_{1P} — асосий системага қўйилган ташқи юклардан ҳосил бўладиган горизонтал кўчиш.

Кўчишлар қуйидаги формулалардан фойдаланиб топилади:

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} ds + \int \frac{\bar{N}_1 N_P}{EF} ds + \int \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P}{GF} ds;$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{EF} ds + \int \eta \frac{\bar{Q}_1^2}{GF} ds.$$

Қиёсий ҳисоблар қуйидаги хулосага келиш имконини беради: а) агар $f < \frac{1}{3} l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг кучни, Δ_{1P} ни аниқлашда эса бўйлама ва кўндаланг кучларни инобатга олмаса бўлади, яъни

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} ds;$$

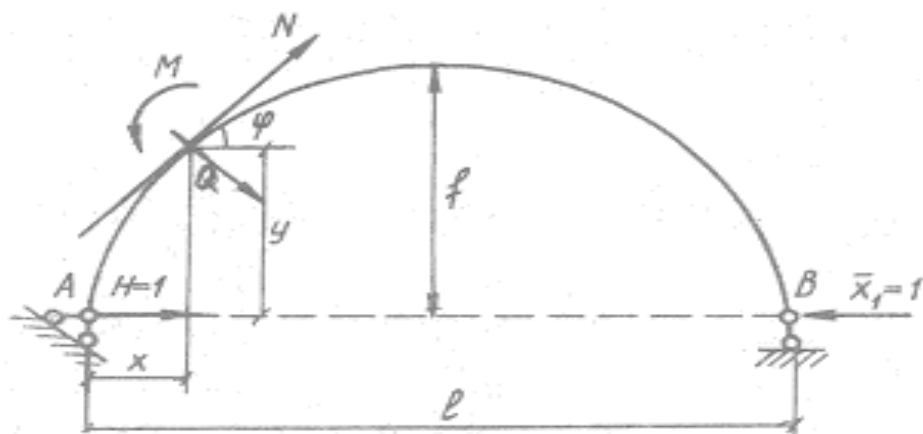
$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{EF} ds.$$

8.18- расмдан

$$\bar{M} = -Y, \quad \bar{N}_1 = -\cos \varphi.$$

Буларни кўчишлар формуласига қўямиз:

$$\Delta_{1P} = -\int_A^B \frac{Y M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ_0} \int_A^B Y \cdot M_P \cdot \frac{J_0}{J} ds.$$



8.18- расм

Бу ерда J_0 — кўндаланг кесимнинг энг кичик инерция моменти:

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_A^B \frac{\cos^2 \varphi}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_0} \left[\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds \right];$$

$$X_1 = \frac{\int_A^B Y \cdot M_P \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds};$$

б) агар $\frac{1}{3}l > f > \frac{1}{5}l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг ва бўйлама кучлар инобатга олинмайди:

$$X_1 = \frac{\int_A^B Y \cdot M_P \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds}.$$

Горизонтал реакция кучи X_1 аниқлангандан сўнг арканинг ихтиёрий К кесимидаги зўриқишлар қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K;$$

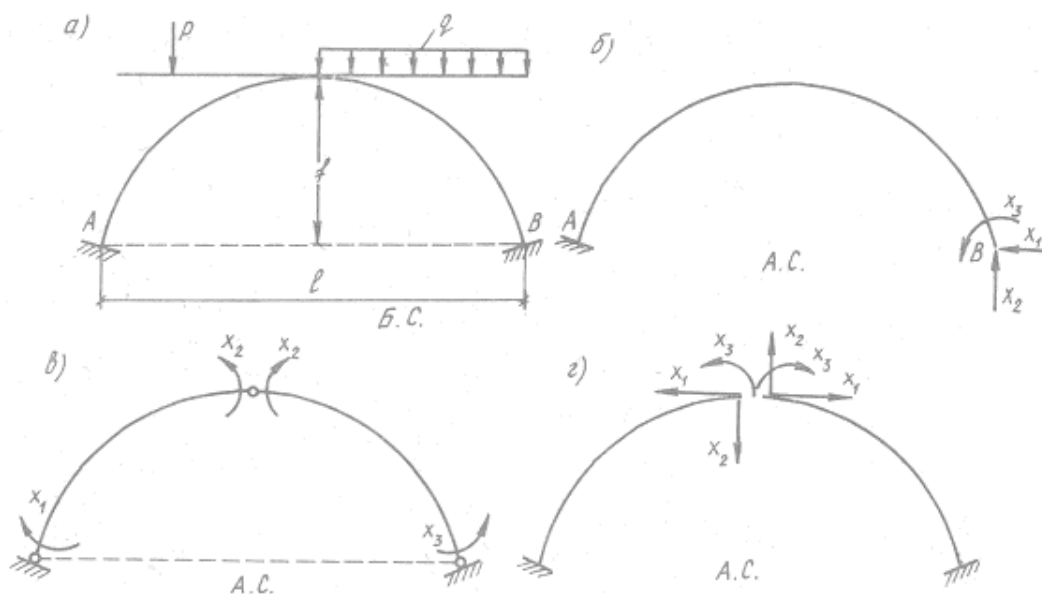
$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi;$$

$$N_K = Q_K^0 \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi.$$

Бу формулаларда H — керки кучи бўлиб, унинг қиймати горизонтал реакция кучи X_1 га тенгдир.

8.5. Шарнирсиз аркаларни ҳисоблаш

Шарнирсиз аркалар асосан кўприк конструкциялари ҳамда бинокорликда катта ораликларни ёпишда ишлатилади. Шарнирсиз аркалар (8.19-расм) уч марта статик ноаниқ бўлади. Асосий система ҳосил қилиш учун аркадан учта ортикча боғланиш олиб ташланади. Асосий системанинг бир неча нусхаси



8.19- расм

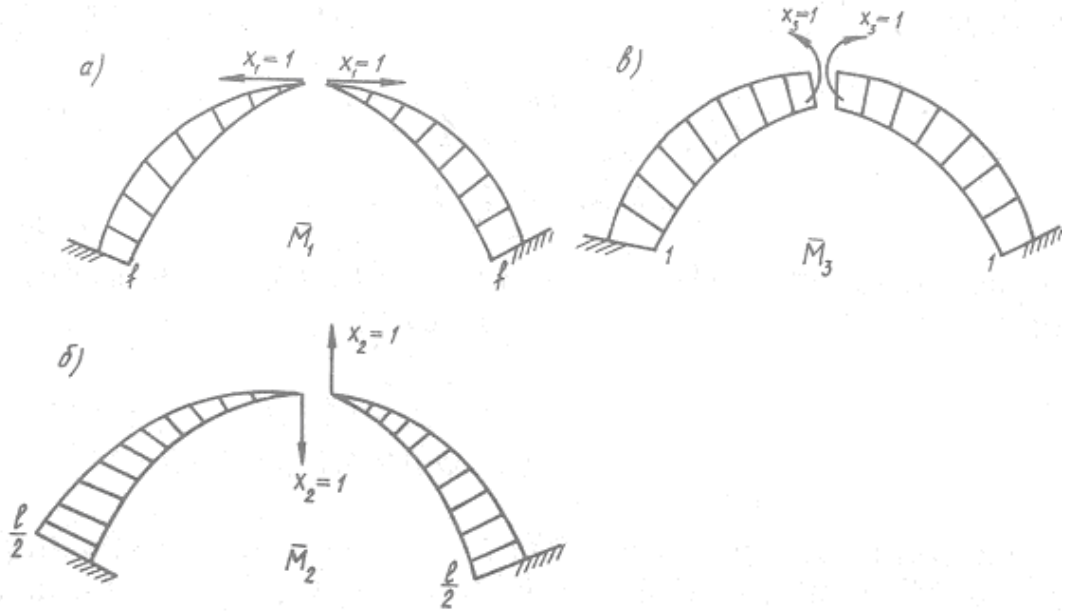
8.19- расм, б, в, г - да тасвирланган. Аркани ҳисоблаш учун тавсия этилган нусхалардан бири танлаб олинади. Маълумки, асосий система қулай танланса, каноник тенгламанинг баъзи ёрдамчи коэффициентлари нолга айланади. 8.19- расм, г - да тавсия этилган асосий система бу талабга тўлиқ жавоб беради, чунки бу асосий система айрим коэффициентларнинг нолга тенг бўлишини таъминлайди.

Асосий системадаги номаълум ички кучлар (X_1 , X_2 , X_3) куч усулининг каноник тенгламаларидан топилади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$



8.20- расм

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадларини аниқлаш учун бирлик кучлардан эгувчи момент эпюралари қурилади (8.20- расм).

Бу ерда $\bar{M}_1$, $\bar{M}_3$ симметрик, $\bar{M}_2$ эса тескари симметрик эпюралар (8.20- расм, а, б, в), Шунинг учун $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ва $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ бўлади. У ҳолда кучлар усулининг каноник тенгламалари икки мустақил тизимга ажралиб, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Каноник тенгламаларнинг биринчи гуруҳида симметрик номаълумлар (X_1 , X_3), иккинчи гуруҳида эса тескари симметрик номаълум (X_2) иштирок этади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари Мор формуласи ёрдамида аниқланади:

$$\delta_{kn} = \sum \int \frac{M_K M_n}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K N_n}{EF} ds + \sum \int \frac{Q_K Q_n}{GF} ds.$$

Коэффициент ва озоd ҳадлар топилгач, каноник тенгламалар ечилади ва номаълум ички кучлар (X_1, X_2, X_3) аниқланади.

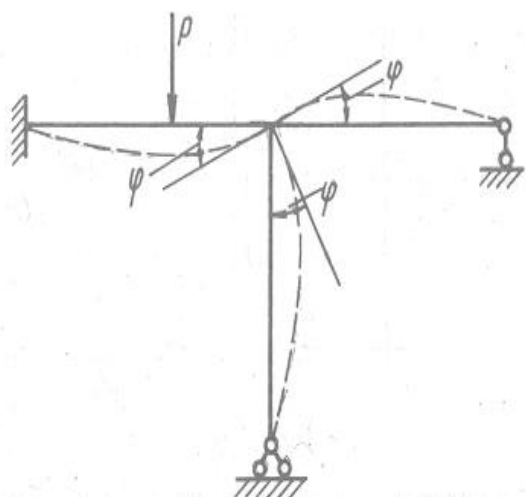
9- БОБ

СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

9.1. Усулнинг моҳияти

Маълумки, статик ноаниқ рамаларни кучлар усулида ҳисоблаганда, номаълумлар сифатида ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари қабул қилинган эди.

Ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари аниқлангандан сўнг ички кучларнинг қийматлари (M, Q, N) ва кўчишлар осонлик билан аниқланади.



9.1- расм

Статик ноаниқ рамаларни куч усулида ҳисоблашда аввал зўриқиш кучлари аниқланади, ундан сўнг кўчишлар аниқланади.

Бу масалани бошқа йўл билан ҳам ечиш мумкин. Бунда аввал статик ноаниқ рамалардаги кўчишлар топилади, ундан сўнг ихтиёрий кесимдаги ички кучлар аниқланади.

Статик ноаниқ рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда, айнан шундай қилинади.

Бу усулга кўра номаълумлар сифатида рама тугунларидаги чизиқли ва бурчакли эластик кўчишлар қабул қилинади.

Кўчиш усули қуйидаги фаразларга асосланади:

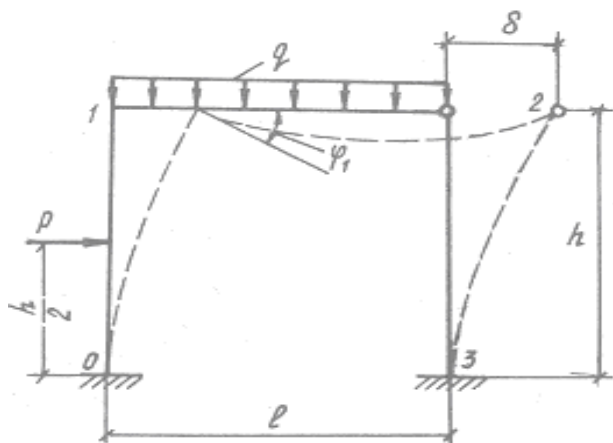
1. Икки ва ундан ортиқ стерженлар келиб туташган раманинг бикир тугуни бир хил бурчакка бурилади (9.1- расм).

2. Рама деформацияларини ҳисоблашда Q ва N нинг таъсири ҳисобга олинмайди.

3. Деформация натижасида тугунлар орасидаги масофа ўзгаришсиз қолади.

4. Бурчак кичик бўлганлиги сабабли унинг тангенсини бурчакнинг ўзига тенг деб оламиз, яъни

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi.$$



9.2- расм

9.2- расмда тасвирланган рама ташқи кучлар таъсирида деформацияланиб, унинг тугунлари бурчакли ва чизикли кўчишлар олади.

Раманинг 1 тугуни φ бурчакка бурилади ва горизонтал йўналишда δ масофага кўчади.

Кўчишлар усулида номаълум сифатида рама тугунларининг чизикли (δ) ва бурчакли (φ_1) эластик кўчишлари қабул қилинади.

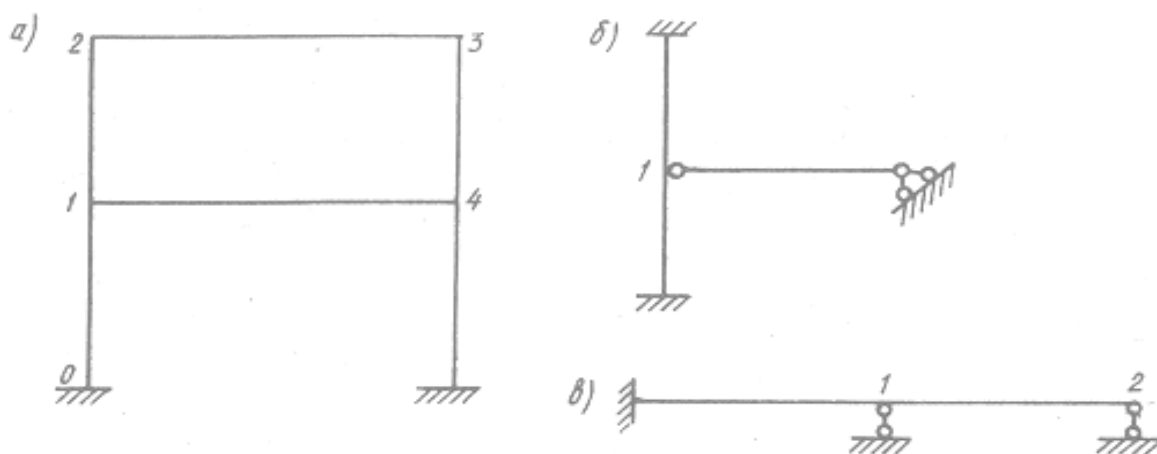
Кўчишлар усулида рамаларнинг кинематик ноаниқлик даражаси куйидаги формуладан топилади:

$$n = n_b + n_{ch}$$

Бу ерда:

n_b — бикир тугунлар сони ёки бикир тугунларнинг бурчакли кўчишлари сони;

n_{ch} — рама тугунларининг чизикли кўчишлари сони.



9.3- расм

Номаълум деб қабул қилинган бурчакли кўчишлар сони « n_b », раманинг таркибидаги бикир тугунлар сонига тенг деб қабул қилинади. Икки ва ундан ортиқ стерженларнинг мустаҳкам туташган жойи *бикир тугун* деб аталади.

Мисол: 9.3- расм, а — да 1, 2, 3, 4 — тугунлар, 9.3- расм, б — да 1- тугун, 9.3- расм, в — да 1 — тугунлар бикир тугунлар саналади.

Чизиқли кўчишлар сонини аниқлаш учун берилган раманинг бикир тугунларига ва таянчларига шарнирлар киритиб, геометрик ўзгарувчан система ҳосил қилинади. Бу ҳосил бўлган шарнирли системанинг эркинлик даражаси — раманинг чизиқли кўчишлари сонига тенг бўлади.

Шарнирли системани геометрик ўзгармас системага айланиши учун керакли бўлган кинематик боғланишлар сони раманинг чизиқли кўчишлар сонини ифодалайди.

Чизиқли кўчишлар сони қуйидаги формулалар ёрдамида ҳам аниқланади:

$$n_{ch} = 2Ш — C — C_T;$$

ёки

$$n_{ch} = 2T — C.$$

Бу ерда:

$Ш$ — шарнирлар сони;

C — рама стерженлари сони;

C_T — таянч стерженлари сони;

T — тугунлар сони.

Мисол. 9.4- расм, a — да ифодаланган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ечиш. Раманинг бурчакли кўчишлар сони $n_b=2$. Рама тугунларининг чизикли кўчишлари сонини аниқлаш учун унинг бикир тугунларига шарнир киритиб, геометрик ўзгарувчан шарнирли системага келтирилади (9.4- расм, б) ва шу схеманинг эркинлик даражаси аниқланади. Бу схеманинг эркинлик даражаси $n_{ch}=1$, чунки унинг геометрик ўзгармас бўлиши учун унга битта кўшимча стержень — боғловчи киритилса кифоя (9.4- расм, в).

Берилган раманинг жами номаълумлари сони

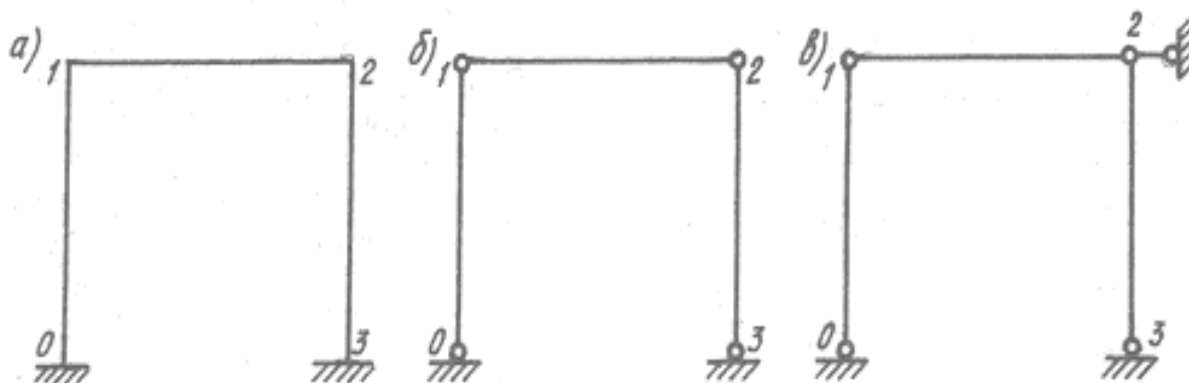
$$n = n_b + n_{ch} = 2 + 1 = 3.$$

Демак, раманинг кинематик ноаниқлик даражаси учга тенг экан.

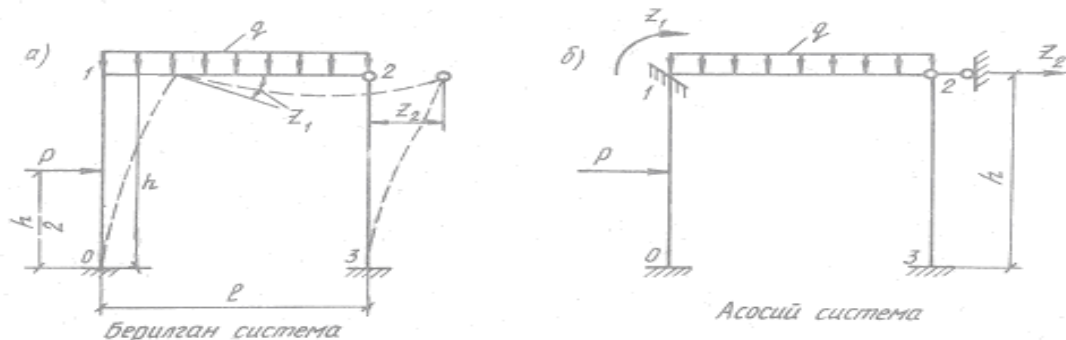
9.2. Кўчишлар усулининг асосий системаси ва каноник тенгламалари

Куч усулининг асосий системаси берилган системадаги ортиқча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинар эди. Асосий система — статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўларди.

Кўчишлар усулида асосий система, аксинча, рамага кўшимча боғланишлар киритиш йўли билан ҳосил қилинади. Кўшимча боғланишлар икки хил (бурчакли ва чизикли) бўлади.



9. 4 - расм



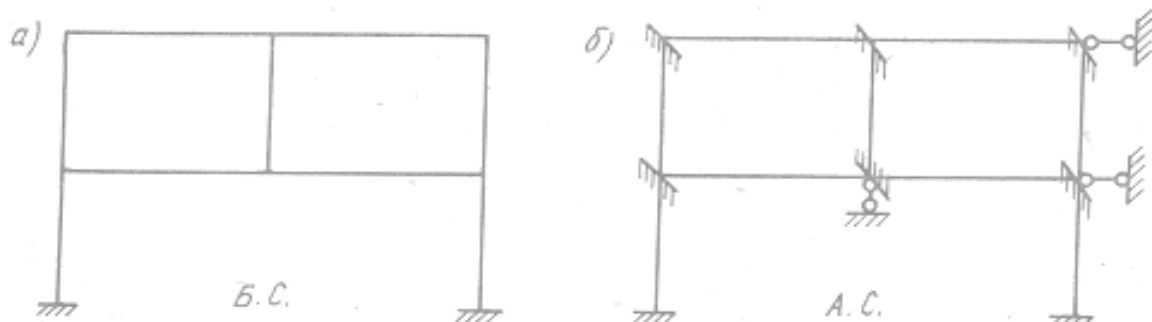
9.5 - расм

Рама тугунларининг бурчакли кўчишларига қаршилик кўрсатувчи боғланишлар — *бурчакли* боғланишлар деб аталади. Рама тугунларини чизикли кўчишларига қаршилик кўрсатувчи боғланишлар — *чизикли* боғланишлар деб аталади.

Рамага қўшимча боғланишлар киритилиши натижасида рама алоҳида бир оралиқли статик ноаниқ балкаларнинг йиғиндисига айланиб қолади.

9.5- расм, *а* — да тасвирланган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси 2 га тенг. У битта бурчакли (Z_1), битта чизикли (Z_2) кўчишга эга. Бу кўчишларга чек қўйиш учун рамага битта бурчакли боғланиш (биринчи тугун) ҳамда битта чизикли боғланиш (иккинчи тугун) киритилади. Бу раманинг асосий системаси 9.5- расм, *б* — да берилган. 9 марта кинематик ноаниқ раманинг (9.6- расм, *а*) асосий системаси 9.6- расм, *б* да тасвирланган. Раманинг бурчакли кўчишлари сони олтига тенг ($n_b=6$), чизикли кўчишлари сони эса учга тенг ($n_{ch}=3$).

Кўчишлар усулининг каноник тенгламалари. Каноник тенгламалар тизимини тузиш қонидаси берилган система билан асосий система орасидаги фарқни йўқотишга асосланган.



9.6- расм

Асосий системалар берилган системадан қўшимча боғланишлари борлиги билан фарқ қилади. Маълумки, бурчакли боғланишларда реактив момент, чизикли боғланишларда эса реактив кучлар ҳосил бўлади.

Реактив момент ва кучларни нолга тенглаш мумкин. Бунинг учун қўшимча боғланишларга берилган системада вужудга келадиган миқдорда чизикли ва бурчакли кўчишлар берамиз.

Бурчакли ва чизикли боғланишлардаги реактив момент ва кучларни инкор этиш кўчиш усули каноник тенгламасининг асосини ташкил этади.

Умумий кўринишда кўчиш усулининг каноник тенгламалари қуйидагича ёзилади (9.7- расм);

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0$$

Бу ерда R_1 ва R_2 — қўшимча боғланишларда ташқи кучлар ҳамда боғланишларнинг бурчакли ва чизикли кўчишлари натижасида ҳосил бўладиган реактив момент ва реактив кучларнинг алгебраик йиғиндисидир.

Тузиладиган тенгламалар сони берилган раманинг кинематик ноаниқлик даражасига тенг бўлади.

Каноник тенгламалар системасини тузиш тартибини 9.7- расмда тасвирланган рама мисолида кўриб ўтамиз.

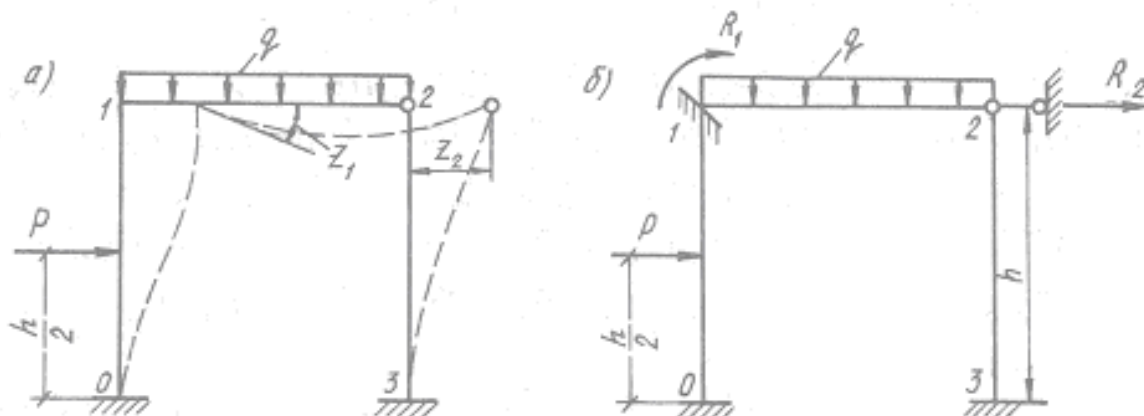
Биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда вужудга келадиган тўлиқ момент R_1 қуйидаги ҳадлардан ташкил топади:

$$R_1 = R_{lp} + R_{11} + R_{12}.$$

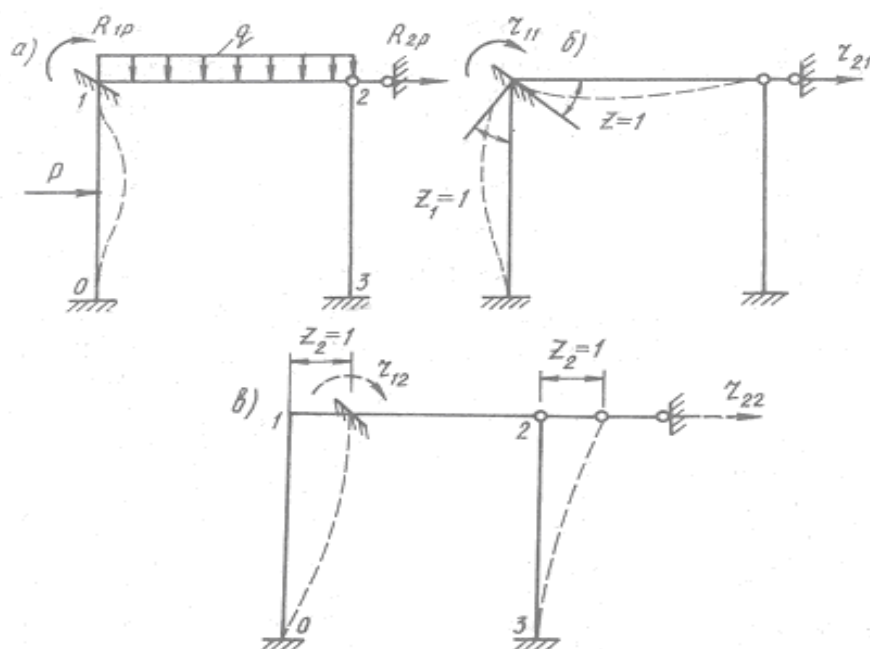
Бу ерда R_{lp} — қўшимча боғланишда ташқи юклар таъсирида вужудга келадиган реактив момент (9.8- расм, a);

R_{11} — биринчи боғланишни Z_1 бурчакка бурилиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент;

R_{12} — раманинг 1,2 — тугунларини Z_2 масофага кўчиши натижасида биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент.



9.7- расм



9.8- расм

R_{11} ва R_{12} реактив моментларни бирлик кўчиш натижасида вужудга келадиган реактив моментлар орқали ифодалаймиз:

$$R_{11} = r_{11} \cdot Z_1 \text{ ва } R_{12} = r_{12} \cdot Z_2.$$

Бу ерда: r_{11} — биринчи боғланишни бир бирликка ($Z_1 = 1$) бурганимизда шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8- расм, б); r_{12} —

иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага силжитганимизда биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8- расм, в);

У ҳолда дастлабки тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0. \quad (9.4)$$

Шу тарзда иккинчи тенгламани ҳам тузса бўлади:

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0. \quad (9.4)$$

Бу ерда r_{21} — биринчи боғланишни $Z_1 = 1$ бурчакка бирилиши натижасида иккинчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8- расм, б);

r_{22} — иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага кўчиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8- расм, в);

R_{2p} — ташқи кучлар таъсирида иккинчи боғланишда вужудга келадиган реактив куч (9.8- расм, а).

Шундай қилиб, биринчи тенглама биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда реактив моментнинг нолга тенглигини, иккинчи тенглама эса иккинчи боғланишдаги реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Ҳар икки тенглама кўчиш усулининг *каноник тенгламаси* деб аталади.

Агар система тўрт маротаба кинематик ноаниқ бўлса, у ҳолда юқорида баён этилган тартиб асосида тўртта каноник тенглама тузилади ва у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + r_{14} \cdot Z_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + r_{24} \cdot Z_4 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + r_{34} \cdot Z_4 + R_{3p} = 0;$$

$$r_{41} \cdot Z_1 + r_{42} \cdot Z_2 + r_{43} \cdot Z_3 + r_{44} \cdot Z_4 + R_{4p} = 0.$$

Бош диагонал бўйича жойлашган коэффициентлар ($r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{44}$) бош коэффициентлар, қолганлари ёрдамчи коэффициентлар деб аталади; озод ҳадлар $R_{1p}, R_{2p}, R_{3p}, R_{4p}$ — юк реакциялари деб аталади.

Бу тенгламаларда ҳам куч усулидаги сингари бош диагоналга нисбатан симметрик равишда жойлашган коэффициентлар ўзаро тенг бўлади, яъни $r_{12} = r_{21}, r_{13} = r_{31}$.

Бош коэффициентлар ҳамма вақт нолдан катта бўлади $r_{nn} > 0$.

Ёрдамчи коэффициентлар эса $r_{ki} \geq 0$ бўлиши мумкин.

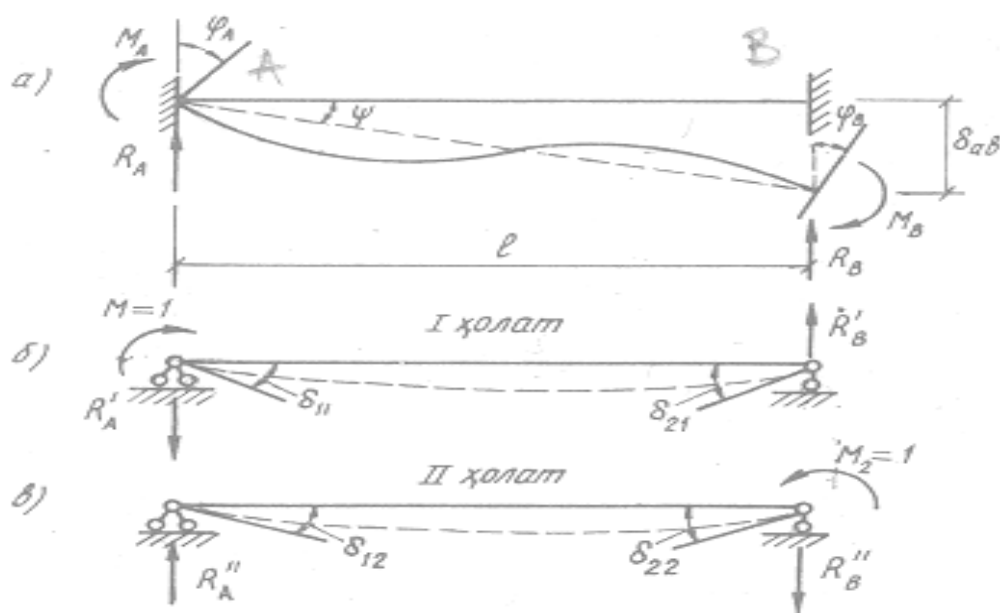
Куч усулининг каноник тенгламалари кўчишларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Кўчиш усулининг каноник тенгламалари эса рама тугунларига киритилган қўшимча боғланишлардаги реактив момент ва реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди.

9.3. Реакциялар ва кўчишлар орасидаги боғланиш ҳақида теорема

Тўғри стерженлардан ташкил топган рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблашда киритилган қўшимча боғланишлардаги реакциялар бир ораликли статик ноаниқ балкалар учун берилган формулалардан фойдаланиб аниқланади.

Бир ораликли бикир таянчли статик ноаниқ балкани мисол тариқасида кўриб чиқамиз (9.9- расм).

Фараз қиламиз, чекка кесимлар φ_A ва φ_B бурчакларга бурилган бўлсин. АВ тўғри чизик ψ бурчакка бурилган дейлик.



9.9- расм

9.9- расм, а — да кўрсатилган M_A , M_B , φ_A , φ_B , R_A , R_B ларнинг йўналишлари мусбат ишорага мос келади деб қабул килайлик. M_A ва M_B таянч моментларини аниқлаш учун куч усули бўйича асосий системалар қурилади (9.9- расм, б, в), сўнгра ишлар ҳақидаги Бетти теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} M_A \cdot \delta_{11} - X_2 \delta_{21} &= 1 \cdot \varphi_A - \frac{1}{l} \delta_{ab} \\ M_B \cdot \delta_{12} - X_2 \delta_{22} &= -1 \cdot \varphi_B + \frac{1}{l} \delta_{ab} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Берилган система ва ҳар икки бирлик ҳолат бўйича аниқланган кўчиш ва зўриқишларнинг қийматлари 9.1- жадвалда ифодаланган.

9.1- жадвал

Ҳолат	Моментлар	Кучлар	Кўчишлар	
			Бурилиш бурчаклари	Оғиш бурчаги
Берилган	M_A, M_B	R_A, R_B	φ_A, φ_B	0; δ
I ҳолат	$M_1 = 1, M_2 = 0$	$R_A^1 = \frac{1}{l}, R_B^1 = \frac{1}{l}$	$\delta_{11}, -\delta_{21}$	0; 0
II ҳолат	$M_1 = 0, M_2 = 1$	$R_A^1 = \frac{1}{l}, R_B^1 = \frac{1}{l}$	$\delta_{12}, -\delta_{22}$	0; 0

Бирлик кўчишларни аниқлаймиз

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{M_1 \cdot l}{6EJ} = \frac{l}{6EJ}; \quad (9.5.)$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{M_2 \cdot l}{3EJ} = \frac{l}{3EJ}; \quad (9.6.)$$

Бу қийматларни (9.4) га қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} M_A \cdot \frac{l}{3EJ} - M_1 \cdot \frac{l}{6EJ} &= \varphi_A - \psi; \\ M_A \cdot \frac{l}{6EJ} - \frac{l}{3EJ} &= -\varphi_B + \psi. \end{aligned} \quad (9.7.)$$

Бундан

$$\begin{aligned} M_A &= 2 \cdot \frac{EJ}{l} (2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi); \\ M_B &= 2 \cdot \frac{EJ}{l} (\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Агар $\frac{EJ}{l} = i$ деб белгиласак, у ҳолда

$$\begin{aligned} M_A &= 2i(2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi); \\ M_B &= 2i(\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi). \end{aligned} \quad (9.10)$$

бўлади. Бу ерда i — стерженнинг нисбий бирлиги.

Хусусий ҳоллар:

Агар $\varphi_A + \varphi_B = 0$ бўлса, (9.10) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_B = M_A = -6i\psi \quad (9.11)$$

Агар $\varphi_A = \psi = 0$ бўлса,

$$M_A = 2i\varphi_A;$$

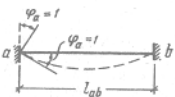
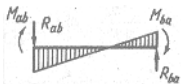
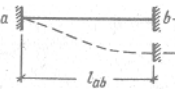
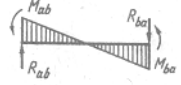
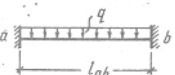
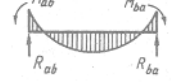
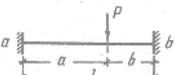
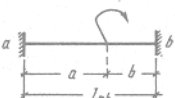
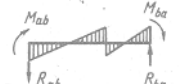
$$M_B = 4i \cdot \varphi_B \quad \text{бўлади.} \quad (9.12)$$

Агар $\varphi_B = \psi = 0$ бўлса, у ҳолда формула куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_A = 4i\varphi_A, \quad M_B = 2i\varphi_B. \quad (9.13)$$

Турли хил таъсирлар остида бўлган стерженларнинг чекка кесимларидаги таянч моментлари ва реакцияларини аниқлаш формулалари 9.2- жадвалда берилган.

9.2-жадвал

Балка ва унга таъсир қилувчи омил	Эгувчи момент эпюраси	Таянч реактив моментлари	Таянч реакциялари
		$M_{ab} = 4i_{ab}$ $M_{ba} = 2i_{ba}$	$R_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l}$ $M_{ba} = -\frac{3i_{ba}}{l}$	$R_{ab} = \frac{12i_{ab}}{l}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{ba} = \frac{ql^2}{12}$	$R_{ab} = \frac{ql}{2}$ $R_{ba} = \frac{ql}{2}$
		$M_{ab} = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_{ba} = \frac{Pa^2b}{l^2}$	$R_{ab} = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ $R_{ba} = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right)$
		$M_{ab} = \frac{M_b}{l^2} (2l-3b)$ $M_{ba} = \frac{M_a}{l^2} (2l-3a)$	$R_{ab} = -\frac{6ab}{l^3} \cdot M$ $R_{ba} = \frac{6ab}{l^3} \cdot M$

		$M_{ab} = 3i_{ab}$	$R_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}$ $R_{ba} = \frac{3i_{ab}}{l_{ab}}$
		$M_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l}$	$R_{ab} = -R_{ba} =$ $= \frac{3i_{ab}}{l^2}$
		$M_{ab} = -\frac{ql^2}{8}$	$R_{ab} = \frac{5}{8}ql$ $R_{ba} = \frac{3}{8}ql$
		$M_{ab} = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2}$	$R_{ab} = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3}$ $R_{ba} = \frac{Pa^2(3l - a)}{2l^3}$
		$M_{ab} = \frac{M(l^2 - 3b^2)}{2l^2}$	$R_{ab} = -\frac{3M(l^2 - b^2)}{2l^3}$ $R_{ba} = \frac{3M(l^2 - b^2)}{2l^3}$

9.4. Каноник тенглама коэффициентлари

ва озод ҳадларини аниқлаш.

Статик усул

Каноник тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системада бирлик кўчишлар ва ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган момент эпюралари курилади.

Эгувчи момент эпюраларини куриш ва каноник тенгламаларнинг коэффициентларини аниқлаш тартибини 9.10- расмда тасвирланган рама мисолида кўриб ўтаемиз.

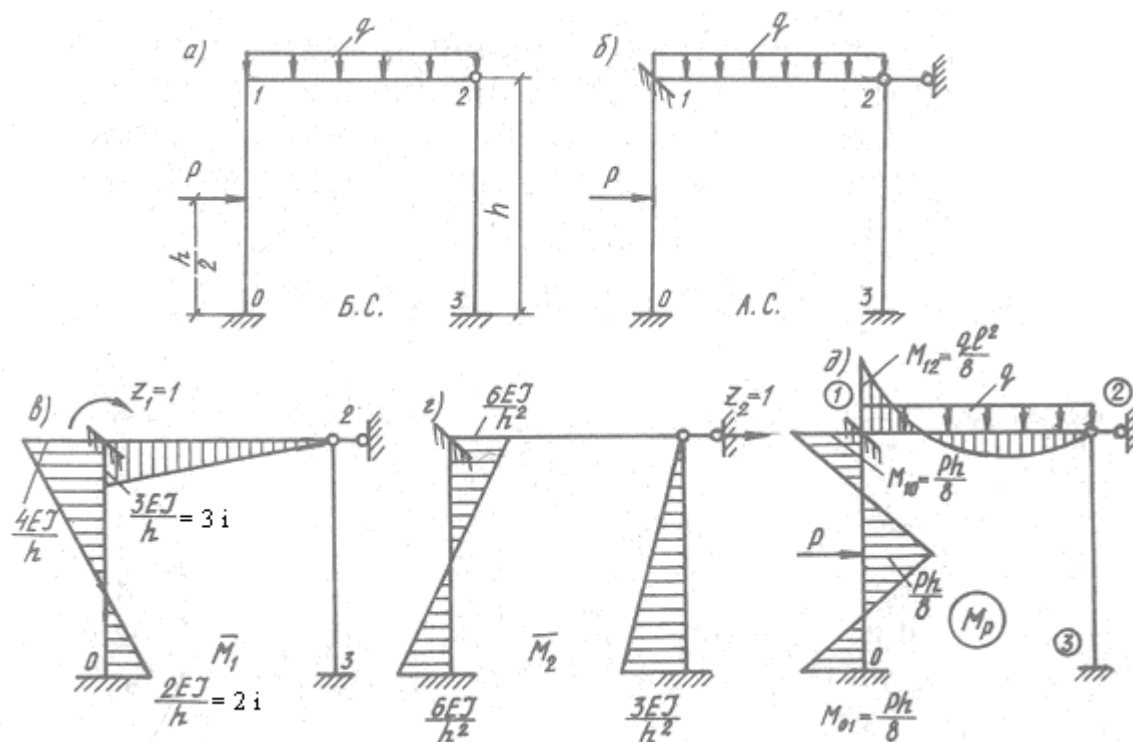
Берилган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси $n=2$ бўлгани учун иккита каноник тенглама тузилади:

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} &= 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} &= 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Каноник тенгламани ечиш учун аввал унинг коэффициентлари ва озод ҳадларини топиб олишимиз керак.

$\bar{M}_1$ эпюрасини ҳосил қилиш учун биринчи тугунга киритилган боғланишни $Z_1=1$ бурчакка бурамиз (9.10- расм, в). Шаклда келтирилган моментларнинг қиймати 9.2-жадвалдан олинади.

$\bar{M}_2$ эпюраси иккинчи боғланишни $Z_2=1$ масофага қўчишидан ҳосил бўлган (9.10- расм, г). Бу ерда ҳам стержень учларидаги моментларнинг қиймати 9.2- жадвалдан олинган.



9.10- расм

M_p эпюраси ташқи кучлардан қурилган (9.10- расм, д). Табиийки, бу эпюрада ҳам моментларнинг қийматлари ўша жадвалдан олинган.

Эгувчи момент эпюралари қурилгандан сўнг каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлашга ўтилади.

Каноник тенгламаларнинг коэффициент ва озод ҳадлари иккита гуруҳга бўлинади:

- 1) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив моментлар;
- 2) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив кучлар.

Аниқланаётган коэффициент ёки озод ҳад реактив момент бўлса, у ҳолда асосий системадан тегишли қўшимча боғланиш кесиб олинади ҳамда мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\Sigma M = 0.$$

Агар аниқланаётган коэффициент ва озод ҳадлар реактив куч бўлса, у ҳолда асосий системанинг устунлари ва иккинчи боғланиш орқали кесим ўтказилади. Шундан сўнг проэкциялар тенгламаси тузилади:

$$\Sigma T = 0.$$

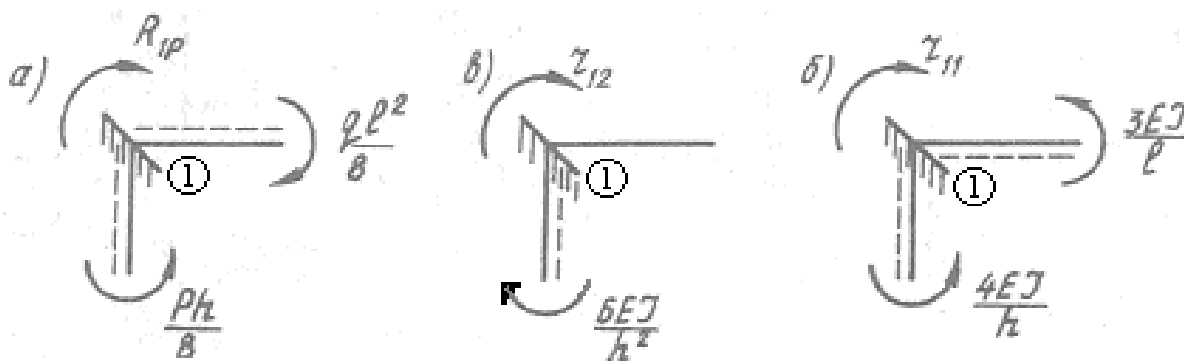
T — ўқнинг йўналиши тенгламалар тузишга қулай ҳолатда ўтказилади.

Каноник тенгламанинг биринчи катордаги озод ҳад ва коэффициентларни аниқлайлик.

R_{1p} нинг қийматини аниқлаш учун « M_p » эпюрасидан биринчи тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламасини ёзамиз (9.11- расм, а):

$$\Sigma M_1 = R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - \frac{ph}{8} = 0.$$

Бундан $R_{1p} = \frac{ph}{8} - \frac{ql^2}{8}.$



9.11-расм

r_{11} , r_{12} ларни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ бирлик эгувчи момент эпюраларидан 1- тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаси ёзилади (9.11- расм, в, б):

$$\sum M_1 = r_{11} - \frac{3EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0; \quad \sum M_1 = r_{12} - \frac{6EJ}{l} - \frac{4EJ}{h^2} = 0;$$

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}; \quad r_{12} = \frac{6EJ}{h^2}.$$

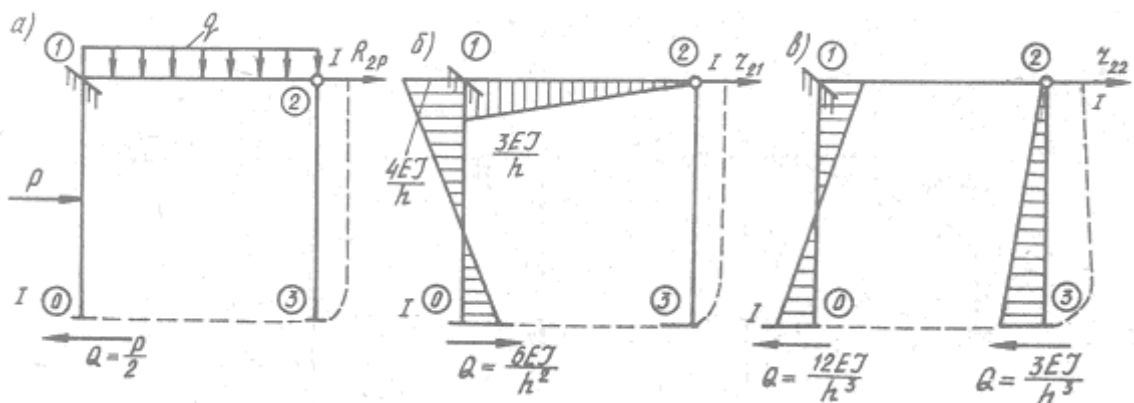
Каноник тенгламанинг иккинчи қатордаги r_{21} , r_{22} , R_{2p} лар реактив кучлардан иборатдир.

Иккинчи боғланишдаги реактив куч. R_{2p} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1 — 1 кесим бўйича кесиб, ригель ва иккинчи боғланиш ажратиб олинади (9.12- расм, а). Бу ажратилган бўлак учун статиканинг мувозанат тенгламасини ёзамиз:

$$\sum X = P + P_{2p} - \frac{P}{2} = 0,$$

бундан

$$R_{2p} = -\frac{P}{2}.$$



9.12-расм

r_{21} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1 — 1 кесим бўйича кесиб, ригелни ва иккинчи боғланишни ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текширамиз (9.12- расм, б):

$$\sum X = \frac{6EJ}{h^2} + r_{21} = 0;$$

бундан

$$r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}$$

r_{22} ни аниқлаш учун ҳам асосий системанинг устунларини 1 — 1 кесим бўйича кесиб, ригел ва иккинчи боғланишни ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текширамыз (9.12- расм, в);

$$\sum X = r_{22} - \frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} = 0;$$

бундан

$$r_{22} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

Эпюраларни кўпайтириш усули

Агар берилган раманинг устунлари ўзаро параллел бўлмаса, у ҳолда статик усул анча мураккаб тус олади. Чунки оғма устунли раманинг асосий системаси учун мувозанат тенгламаси тузилганда, унинг горизонтал ўқиға кўндаланг кучлар билан биргаликда бўйлама кучлар ҳам проекцияланади.

Бу усул билан коэффициентлар ва озод ҳадларни ҳисоблаш мураккаблашади. Бундай ҳолларда эпюраларни кўпайтириш усулидан фойдаланилади. Бу усул ташқи ва ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган ишлар ҳақидаги Бетти теоремасига асосланади:

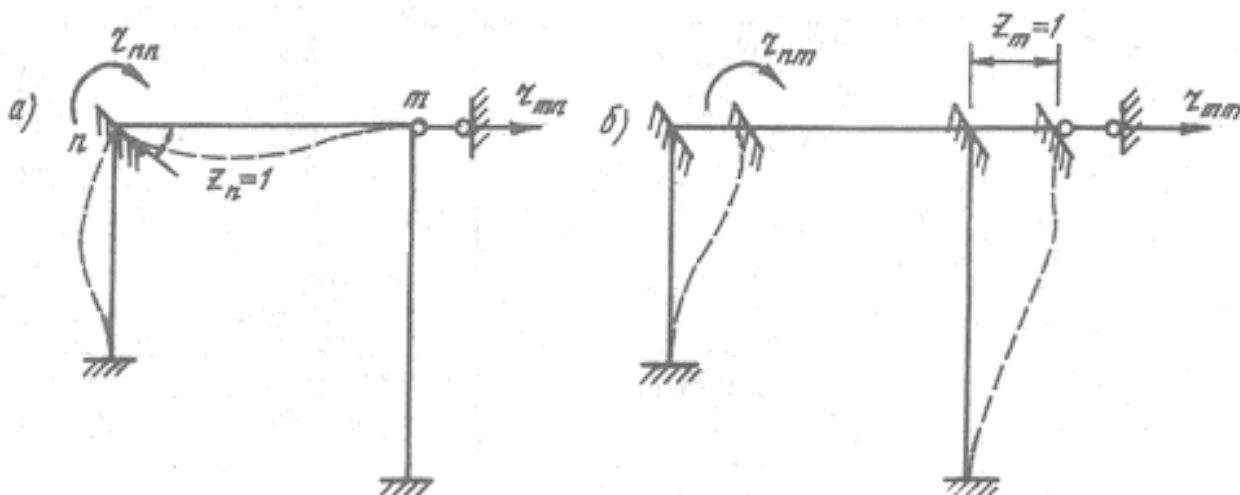
$$T_{nm} = U_{mn}. \quad (a)$$

T_{nm} , « m » ҳолатдаги ташқи кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши;

U_{nm} « n » ҳолатдаги ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши.

Статик ноаниқ рамани икки ҳолатда тасвирлаймиз: биринчи ҳолатда « n » тугунни $Z_n=1$ бурчакка бурамыз (9.13- расм, а) иккинчи ҳолатда « m » тугунни $z_m=1$ масофаға кўчирамыз (9.13- расм, б). Шакллардан фойдаланиб, ташқи кучлар бажариши мумкин бўлган иш ифодасини ёзамиз:

$$T_{nm} = r_{mn} \cdot l. \quad (б)$$



9.13- расм

Маълумки, ички кучлар бажариши мумкин бўлган иш қуйидаги формуладан аниқланади:

$$r_{mn} = \sum \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n}{EJ} dx, \quad (\text{в})$$

(а) ифодага кўра

$$r_{mn} = \sum \int \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n}{EJ} dx. \quad (\text{г})$$

Демак, кўчиш усули каноник тенгламаларининг коэффициентларини аниқлаш учун куч усулидаги сингари иккита бирлик эпюрани бир-бирига кўпайтирилса кифоя экан.

Кўчиш усули каноник тенгламаларининг озод ҳадларини ҳам эпюраларни кўпайтириш усулида топса бўлади. Бунинг учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$R_{np} = - \sum \int \frac{\bar{M}_n M'_p}{EJ} dx.$$

Бу ерда $\bar{M}_n$ — бирлик эгувчи момент эпюраси;

M'_p — статик аниқ системада ташқи кучлардан ҳосил бўлган M эпюраси.

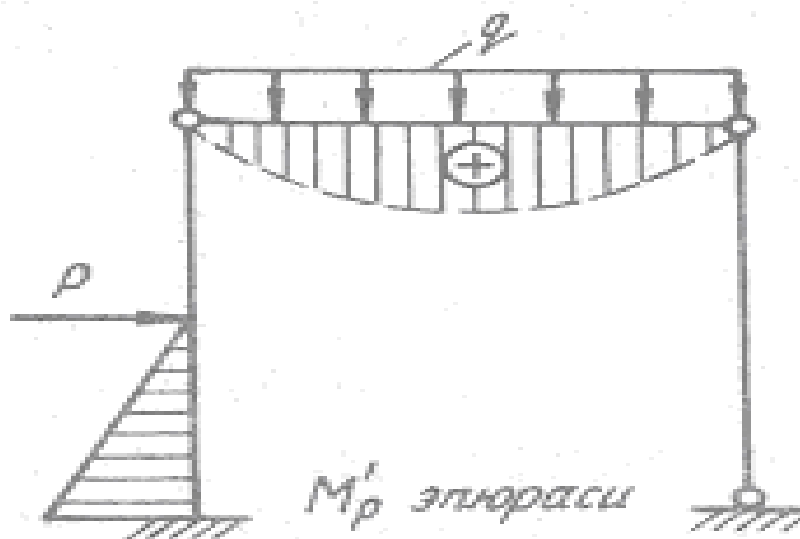
Масалан, 9.10- расм, а—да берилган статик ноаниқ рама учун M'_p эпюраси 9.14- расмда кўрсатилгандек бўлади. $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ бирлик эпюралари

ўзгаришсиз қолади (9.10- расм, в, г). R_{1p} ни аниқлаш учун M'_p билан $\bar{M}_1$ эпюраси, R_{2p} ни аниқлаш учун эса M'_p билан $\bar{M}_2$ эпюралари кўпайтирилади. Кўпайтириш ишлари Верешчагин қондаси бўйича амалга оширилади.

Кўчиш усули каноник тенгламалари системасининг коэффицентлари ва озод хадлари куч усулидаги каби текширилади.

Бунинг учун аввал $\bar{M}_s$ йиғинди эпюраси чизиб олинади:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n,$$



9.14- расм

Бу эпюра билан истаган бирлик эпюранинг кўпайтмаси, куч усулидаги сингари, тегишли қатор коэффицентларининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$r_{1s} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EJ} dx = \sum \int \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) dx}{EJ} =$$

$$\sum \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n dx}{EJ} = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}.$$

Каноник тенгламанинг озод хадлари қуйидагича текширилади:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_s M_p}{EJ} dx = - \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) M_p}{EJ} dx =$$

$$\left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 M'_p dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2 M'_p dx}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n M'_p dx}{EJ} \right) = R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}.$$

Демак, озод ҳадлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси икки эпюранинг ($\bar{M}_s \hat{=} M_p^1$ эпюраларининг) кўпайтмасига тенг бўлади.

9.5. Раманинг M , Q ва N эпюраларини қуриш

Каноник тенглама коэффициентлари тўғри топилганига ишонч ҳосил қилганимиздан сўнг коэффициентларни тенгламага қўйиб, ундаги номаълумлар ($z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$) ни аниқлаймиз ва ундан сўнг « M » эпюрасини қуришга ўтамиз. Эпюра қуйидаги қоида асосида қурилади:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n ,$$

бу ерда M — статик ноаниқ раманинг исталган кесимидаги эгувчи момент;

M_p — асосий системада ташқи кучдан қурилган M эпюрасининг ординатаси;

$\bar{M}_1, \bar{M}_2$ — бирлик эпюраларнинг ординаталари;

Z_1, Z_2 — каноник тенгламалардан топилган бурчакли ёки чизиқли кўчишлар.

Яқунловчи M эпюраси қурилгандан сўнг шу эпюра асосида « Q » ва « N » эпюралари қурилади.

9.6. Кўчишлар усулида соддалаштиришлар

Симметрик рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда ҳам куч усулидаги сингари номаълумларни гурухлаш йўлидан фойдаланса бўлади.

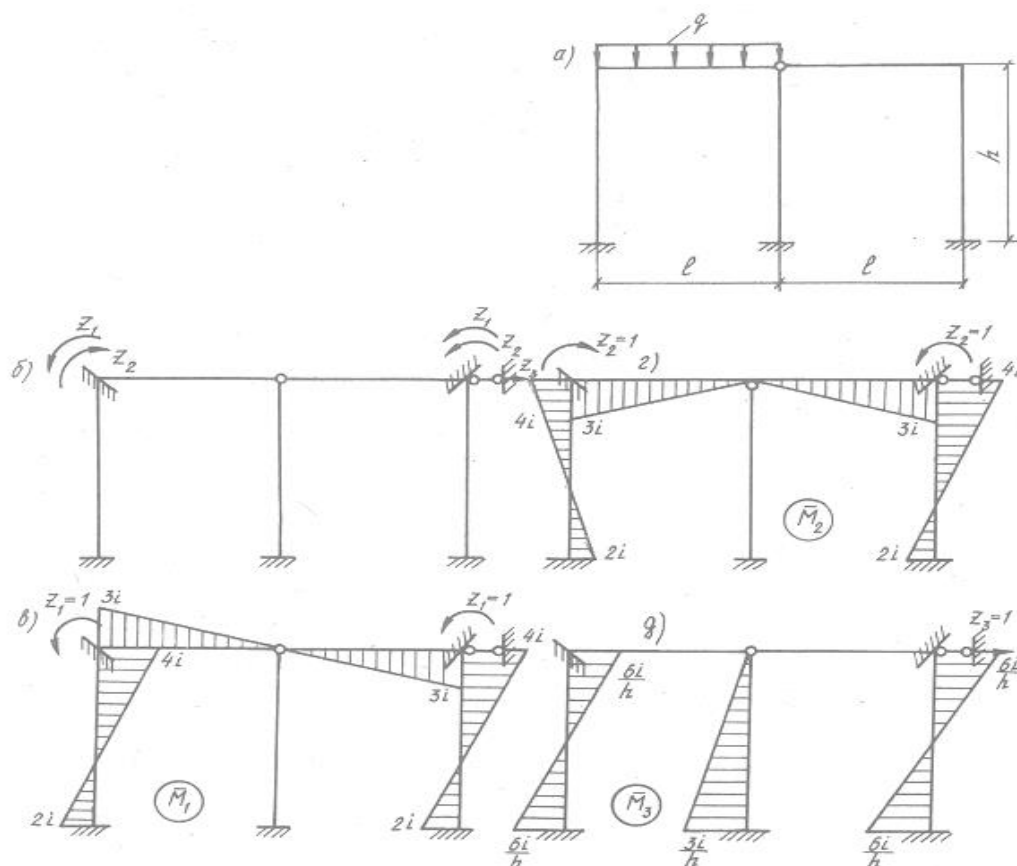
Мисол тариқасида 9.15- расм, a — да таевирланган рамани кўриб ўтамиз. Рама иккита бурчакли ва битта чизиқли кўчишга эга, яъни унинг кинематик ноаниқлик даражаси $n=3$. Раманинг тўлиқ каноник тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0;$$

Берилган рама симметрия ўқиға эға бўлганлиғи сабабли номаълумларни гурухлаш йўли билан каноник тенгламанинг айрим коэффициентларини нолға тенглаштириш мумкин.



9.15- расм

Номаълумларни гурухлаш натижасида икки хил: тўғри симметрик ва тескари симметрик эпюралар ҳосил бўлади. Маълумки, бундай эпюралар кўпайтмаси 0 га тенг бўлади. Натижада каноник тенглама иккита системага ажралиб кетади. Бу эса ҳисоблаш ишларини анча енгиллаштиради.

Номаълумларни гурухлаш 9.15- расм, б — да кўрсатилган шаклда амалга оширилади. Бирлик M эпюралари 9.15- расм, в, г, д — да тасвирланган. Бу ерда $\bar{M}_1$ тескари, $\bar{M}_2$ эса тўғри симметрик эпюра бўлиб, буларнинг кўпайтмасидан топиладиган $r_{12}=r_{21}=0$ бўлади, Шунингдек $r_{23}=r_{32}$ ҳам нолға тенгдир. У ҳолда юқоридаги каноник тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{13} + Z_3 + R_{1q} \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{33} + Z_3 + R_{3q} \end{aligned} \right\} \text{тескари симметрик тенглама}$$

$$r_{22} \cdot Z_2 + R_{2q} = 0 \text{ симметрик тенглама}$$

9.7. Статик ноаниқ рамаларни аралаш ва комбинация усулларида ҳисоблаш

Бинокорликда шундай рамалар учрайдики, уларни ҳар қанча соддалаштирганда ҳам умумий ечими мураккаблигича қолаверади. Бундай рамаларнинг ечилишини соддалаштириш мақсадида куч ва кўчиш усулларида бир йўла фойдаланиш тавсия этилади. Бунда раманинг бир қисми кучлар усулида, иккинчи қисми эса кўчишлар усулида ҳисобланади. Бундай ҳисоблаш усули *аралаш усул* деб аталади. Аралаш усулга доир мисол кўриб ўтамыз (9.16- расм);

Қаватлар	Статик ноаниқлик даражаси	Кинематик ноаниқлик даражаси
Биринчи	9	2
Иккинчи	2	12
Жами	11	14

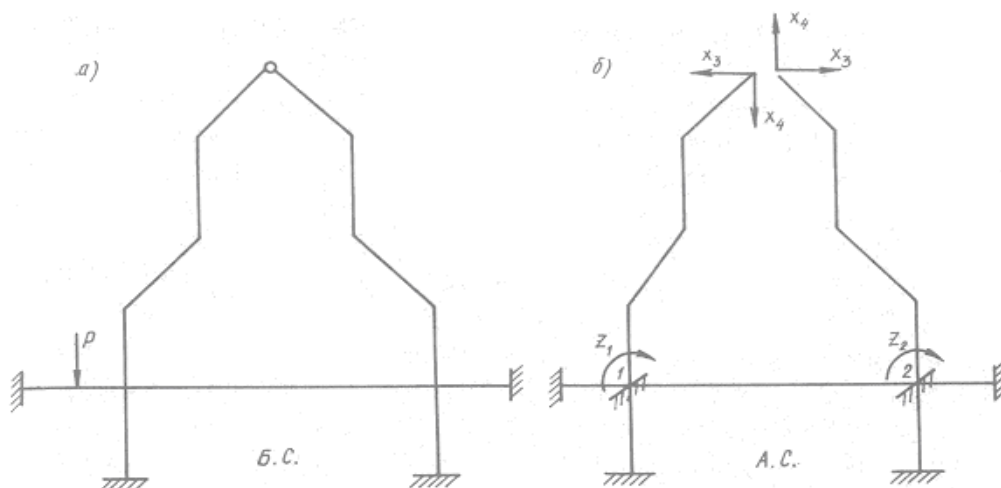
Берилган раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражалари қуйидаги жадвалда берилган:

Жадвалдан кўринадики, агар рамани куч усулида ишласак, у 11 номаълумли, кўчиш усулида эса 14 номаълумли бўлади. 11 ёки 14 номаълумли тенглама-

ларни ечиш осон масала эмаслиги ҳаммага аён.

Агар раманинг биринчи қаватини кўчиш, иккинчи қаватини кучлар усулида ечилса, ҳисоб анча енгиллашади. Демак, рамани аралаш усулда ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир. Бу усулга кўра номаълумлар сони 4 га тенг бўлади.

Аралаш усулнинг асосий системаси 9.16- расм, б — да тасвирланган.



9.16- расм

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot X_3 + r_{14} \cdot X_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot X_3 + r_{24} \cdot X_4 + R_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot Z_1 + \delta_{32} \cdot Z_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{41} \cdot Z_1 + \delta_{42} \cdot Z_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0.$$

Каноник тенгламалар системасининг 1—2 қаторлари асосий системанинг биринчи ва иккинчи қўшимча боғланишларида ташқи юк ва номаълумлардан ҳосил бўлган реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди. 3 — 4 тенгламалар эса асосий системада ташқи юк ва номаълумлардан X_3 ва X_4 йўналишлари бўйича кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди.

Шундай қилиб, аралаш усул каноник тенгламаларининг бир қисми кўчишлар усулига, иккинчи қисми эса кучлар усулига тегишли шартларни ифодалайди.

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари системасидаги коэффициентлар тўрт гуруҳга бўлинади:

1. Асосий системада бирлик кўчишлар ($Z_1=1$, $Z_2=1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар $r_{11} \cdot r_{12}$, $r_{21} \cdot r_{22}$.

2. Асосий системанинг қўшимча боғланишларида бирлик кучлар ($X_3=1$, $X_4=1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар r_{21} , r_{22} , r_{23} , r_{24} .

3. Асосий системада номаълум зўриқишлар йўналишида бирлик кўчишлардан ҳосил бўлган кўчишларни ифодаловчи коэффициентлар $\delta_{31}, \delta_{32}, \delta_{33}, \delta_{34}$.

4. Асосий системада номаълум куч (X_3 ва X_4) лар йўналишларида бирлик кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар: $\delta_{41}, \delta_{42}, \delta_{43}, \delta_{44}$.

Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлари куч ва кўчиш усулларида баён этилган қоидалар асосида топилади.

Аралаш усулда ҳам қуйидаги теоремалар амал қилади:

$$r_{mn} = r_{nm}$$

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

$$r_{mp} = -\delta_{np}$$

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари биргаликда ечилади ва z_1, z_2, x_3 ва x_4 номаълумлар аниқланади. Эгувчи моментлар эпюрасини қуриш учун қуйидаги формулалардан фойдаланамиз:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot X_3 + \bar{M}_4 \cdot X_4$$

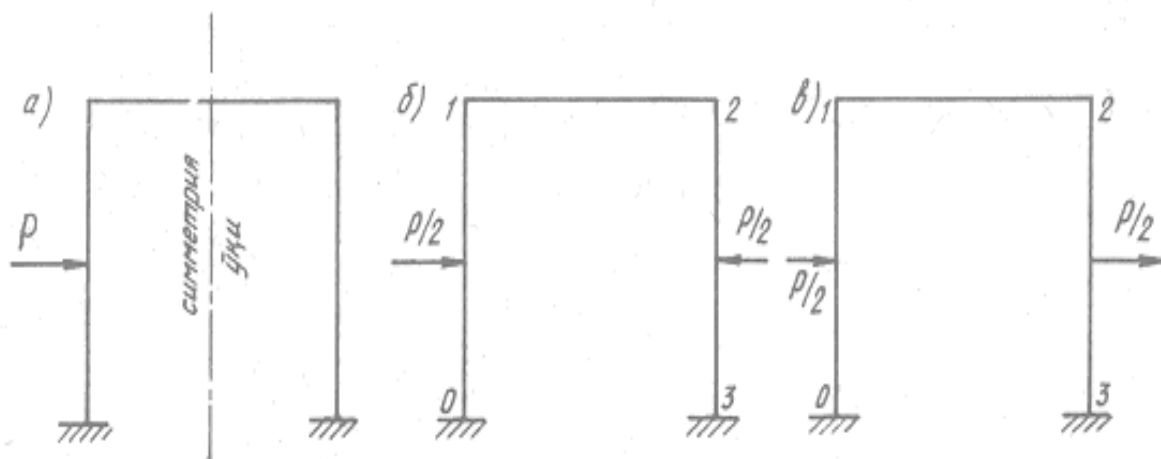
Статик ноаниқ рамаларни *комбинация* усулида ҳисоблаш ҳам симметрик рамалар ҳисобини осонлаштириш мақсадини кўзда тутати. Бу усулга кўра рамага қўйилган юклар тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратилади.

Симметрик юкланган рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки бунда симметрик тугунларнинг бурилиш бурчаклари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескари бўлади, уларнинг чизикли кўчишлари эса нолга тенг бўлади.

Тескари симметрик юкланган рамаларни куч усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки куч усулининг асосий системасида симметрик номаълумлар нолга тенг бўлади. Симметрик рамаларни ҳисоблашда уларга қўйилган ташқи юкларни симметрик ва тескари симметрик юкларга ажратилади (9.17- расм, б, в). 9.18- расмда симметрик юкланган раманинг кўчиш (а) ва куч (б) усули бўйича танланган асосий системалари тасвирланган. 9.19- расмда худди шунинг ўзи тескари симметрик юкланган рама учун бажарилган.

Ҳар иккала ҳол учун раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражаси, яъни номаълумлар сони аниқланиб, у 9.2 а — жадвалда акс эттирилган. Шу жадвалнинг охириги устунида қабул қилинган усул кўрсатилган.

Жадвалга кўра симметрик юкланган рама — кўчиш, тескари симметрик юкланган рама — куч усулида ишланиши мақсадга мувофиқ экан.



9.17- расм

9.2 а — жадвал

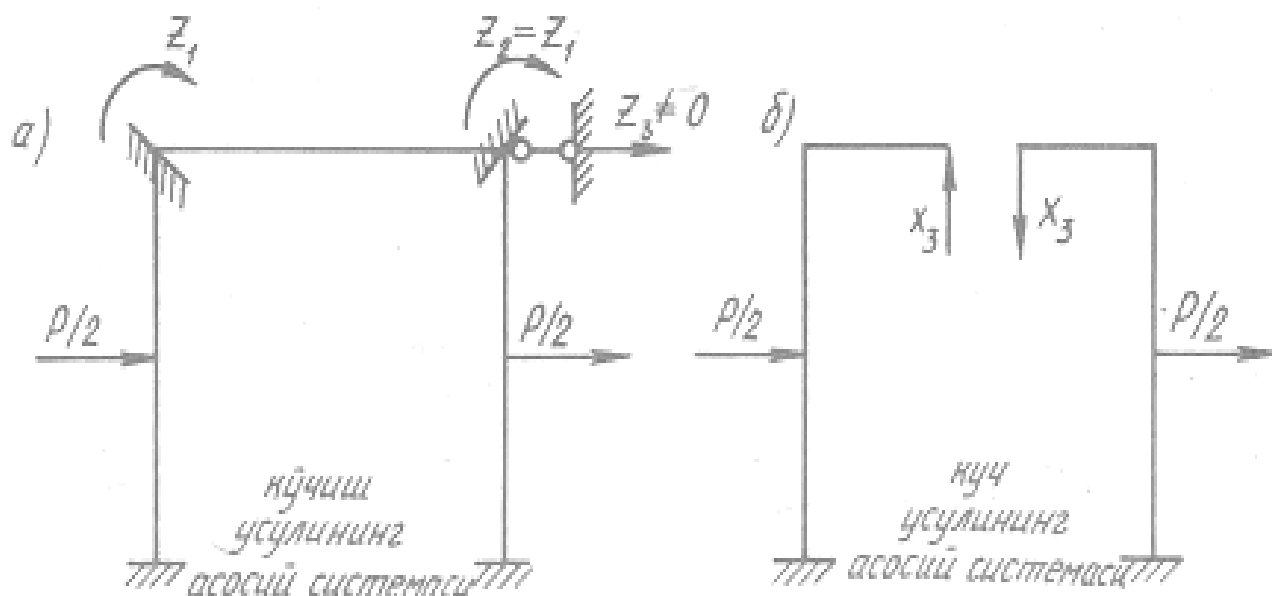
Юкланиш тартиби	Номаълумлар сони		Қабул қилинадиган усул
	Куч усули	Кўчиш усули	
Симметрик	2	1	Кўчиш усули
Носимметрик	1	2	Куч усули

Рамаларни ҳисоблашнинг бу йўли *комбинация усули* деб ном олган.

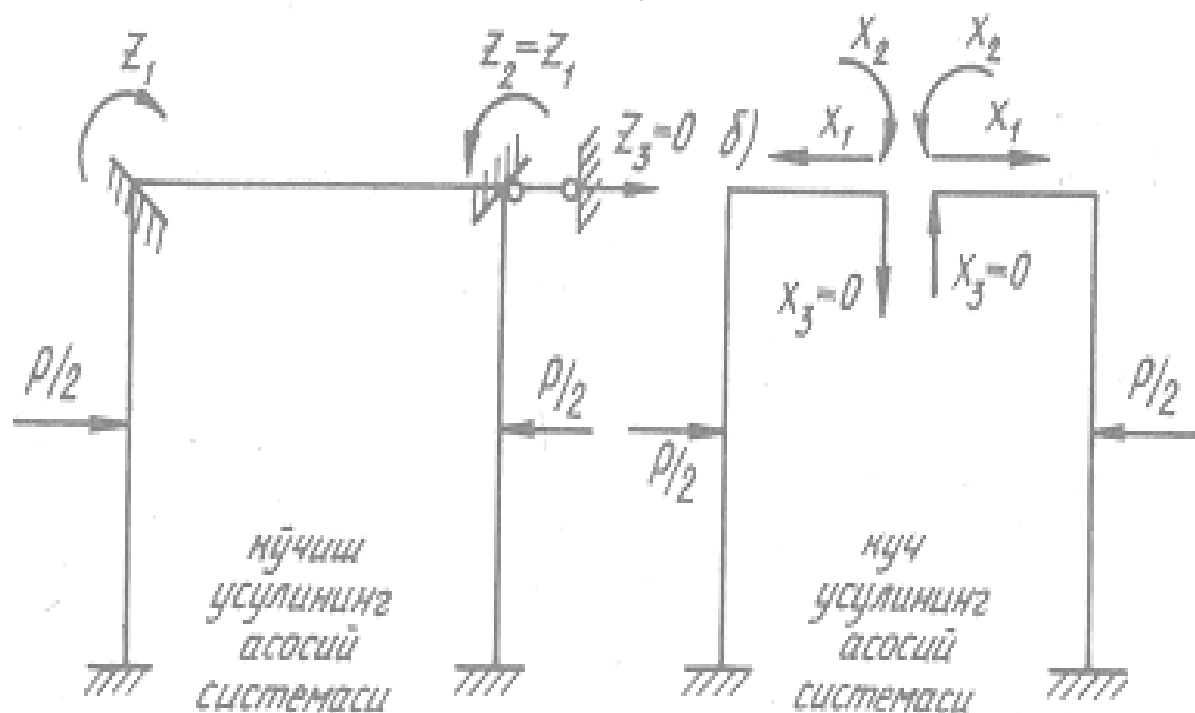
Мисол.

Энди статик ноаниқ рамани кўчиш усулида ҳисоблашга доир бир мисол ечамиз. Раманинг юкланиши ва ўлчамлари 9.20- расм, а — да кўрсатилган.

Рама қуйидаги тартибда ҳисобланади:



9.18- расм



9.19- расм

1. Раманинг кинематик ноаниқлик даражаси аниқланади:

$$n = n_6 + n_ч;$$

n_6 — рама тугунларининг бурчакли кўчишлари сони;

$n_ч$ — рама тугунларининг чизикли кўчишлари сони; (бу сон бикир тугунларни шарнир билан алмаштирилганда раманинг эркинлик даражасига тенг бўлади);

$$n_q = 1$$

Раманинг кинематик ноаниқлик даражаси

$$n = 1 + 1 = 2,$$

2. Асосий система тузилади (9.20- расм, б) ва рама элементларининг нисбий бикирликлари аниқланади:

$$i_{13} = \frac{EJ}{2l} = 0,5 \frac{EJ}{l} = 0,5i; \quad \frac{EJ}{l} = i;$$

$$i_{34} = \frac{EJ}{l} = i;$$

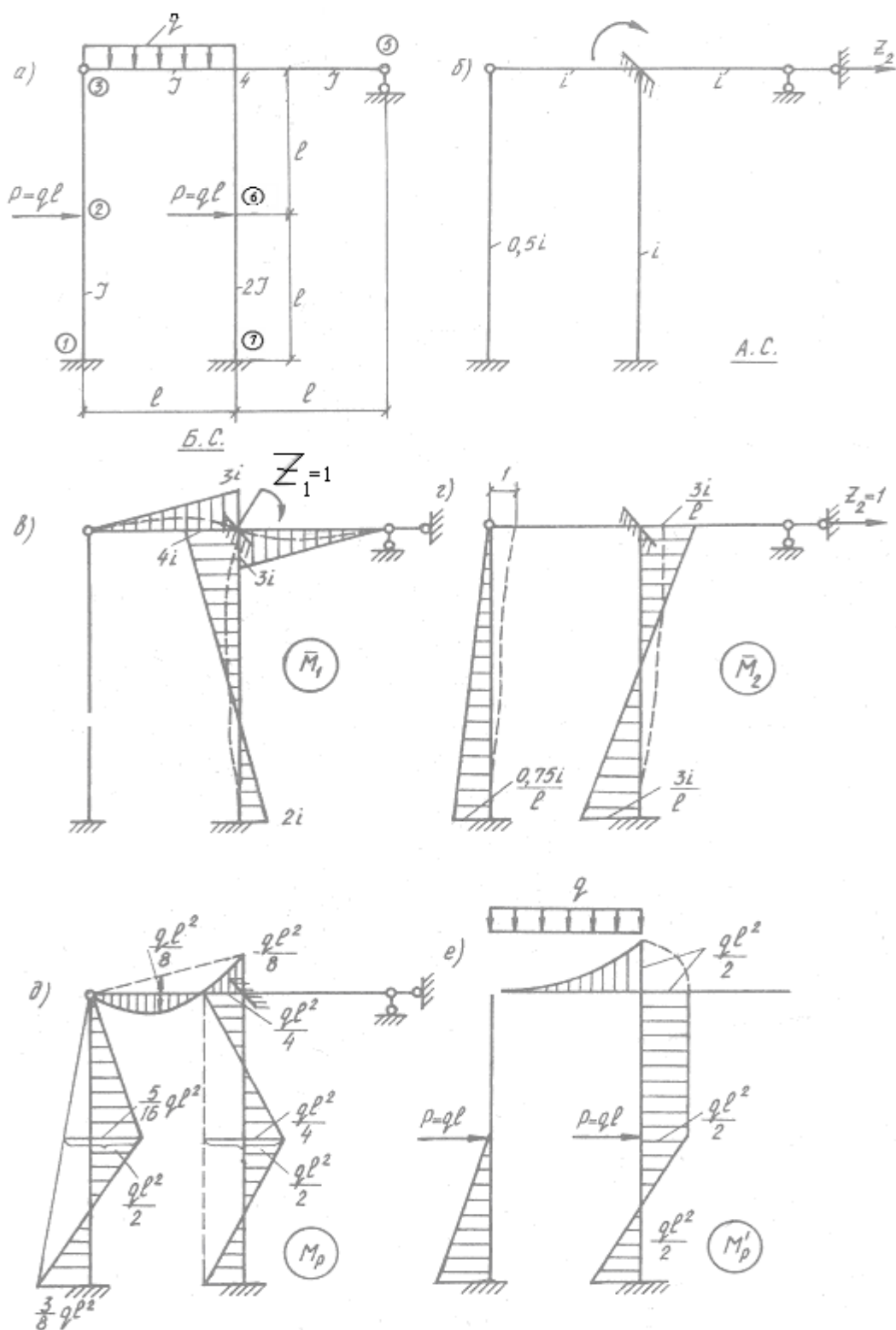
$$i_{47} = \frac{2EJ}{2l} = i.$$

3. Каноник тенгламалар системаси тузилади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0.$$

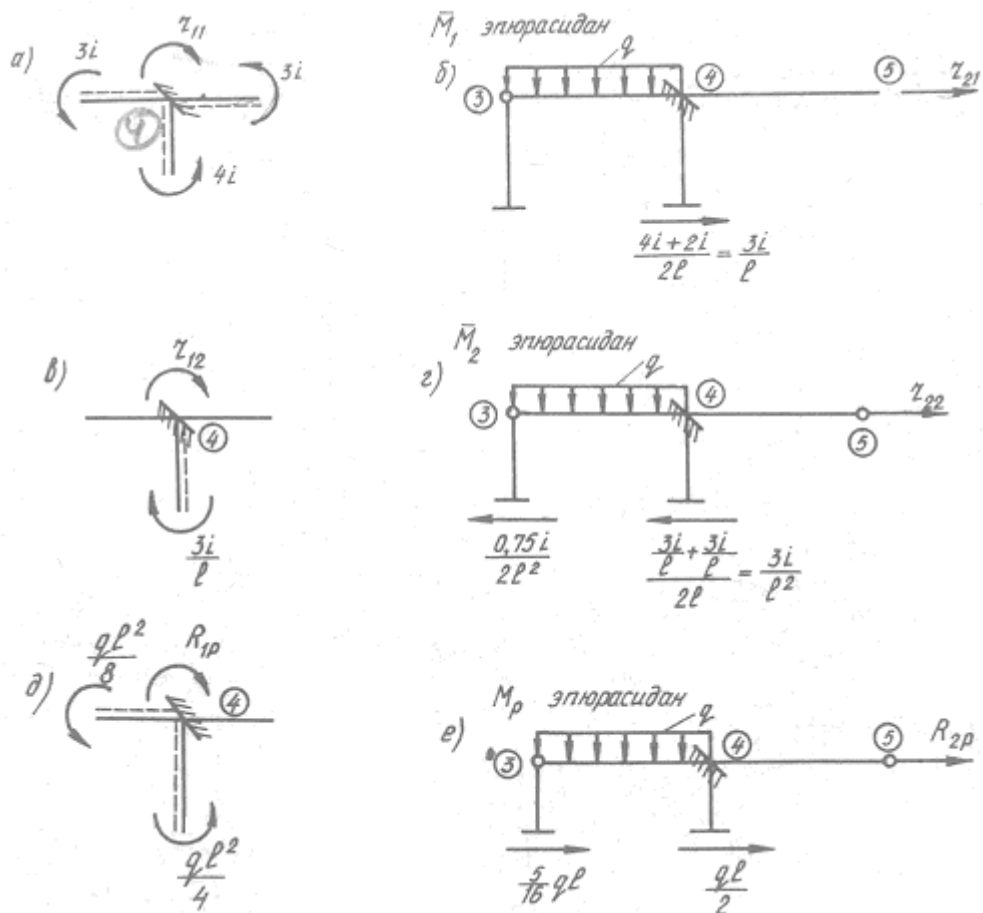
4. Асосий системада ташқи кучлардан ва бирлик кўчишлардан алоҳида-алоҳида эгувчи моментлар эпюралари қурилади (9.20- расм, в, г, д).



9.20- расм

Эпюраларни куришда махсус жадвалдан фойдаланилади (9.2- жадвал).

5. Каноник тенгламалар тизими коэффицентлари ва озод хадлари аниқланади.



9.21- расм

Статик усул

а) 4 — тугун мувозанатидан куйидагилар топилади: (9.21- расм).

$\bar{M}_1$ эпюрасидан (9.21- расм, а): $r_{11} - 2(3i) - 4i = 0$; $r_{11} = 10i$. $r_{11} = 10i$.

$\bar{M}_2$ эпюрасидан (9.21- расм, в): $r_{12} + \frac{3i}{l} = 0$; $r = -\frac{3i}{l}$;

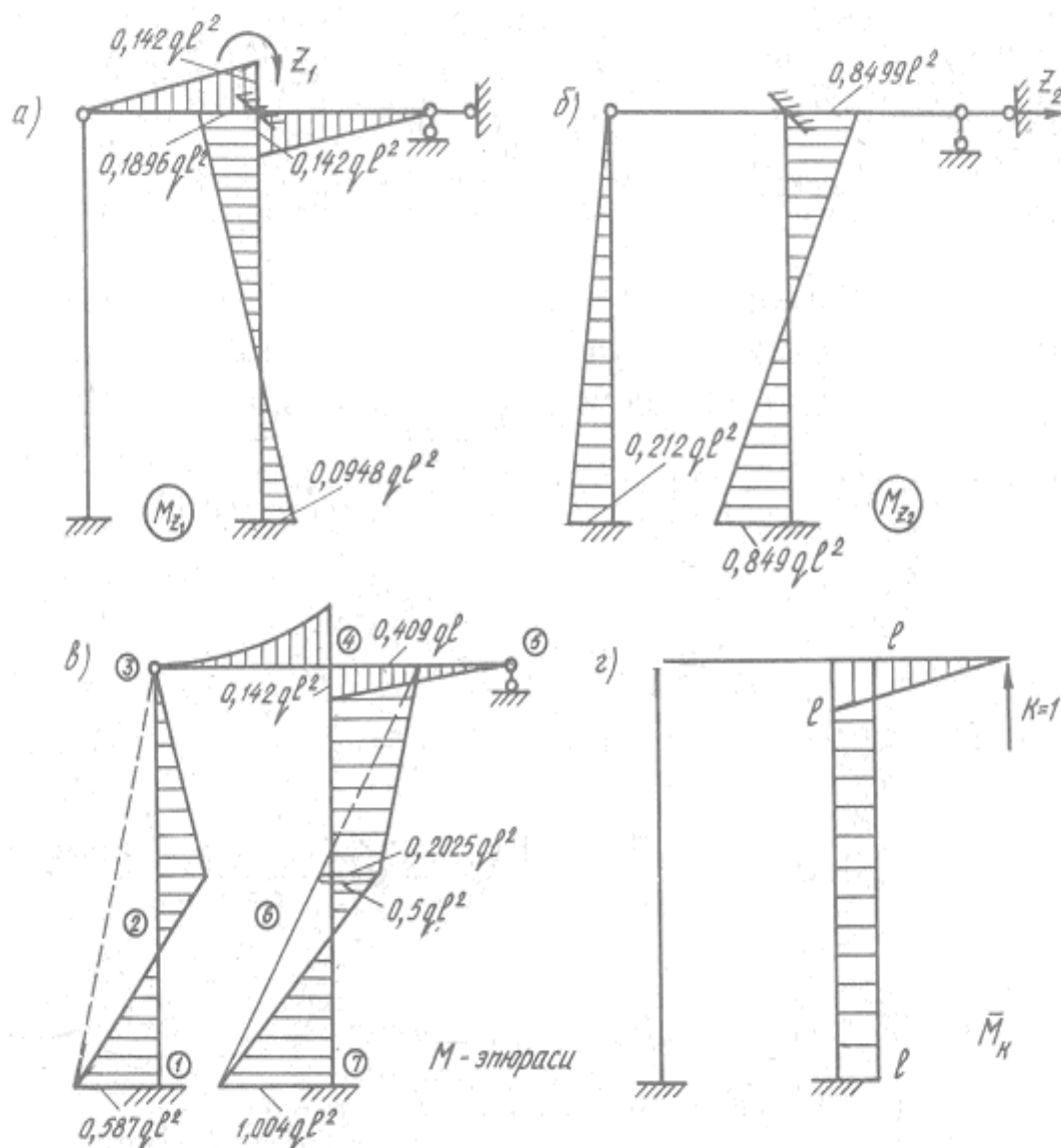
M_p эпюрасидан (9.21- расм, д): $R_{1p} - \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = 0$; $R_{1p} = 0,375ql^2$.

б) раманинг юкори қисми мувозанатидан куйидагилар топилади:

$\bar{M}_1$ эпюрасидан (9.21- расм, б) $r_{21} + \frac{3i}{l} = 0$; $r_{21} = -\frac{3i}{l}$;

$\bar{M}_2$ эпюрасидан (9.21- расм, г) $r_{22} - \frac{0,75i}{2l^2} - \frac{3i}{l^2} = 0$; $r_{22} = \frac{3,375i}{l^2}$;

M_p эпюрасидан (9.21- расм, е) $R_{2p} + \frac{5}{16}ql + \frac{ql}{2} = 0$; $R_{2p} = -\frac{13ql}{16} = -0,81ql$.



9.22- расм

Эпюраларини кўпайтириш усули

Статик усулда топилган коэффициент ва озод хадларни эпюраларни кўпайтириш усулида топса ҳам бўлади. Кўпайтириш амаллари Верещлагин усулида (9.22- расм) амалга оширилади:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= (\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3i \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 3i \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l \left(\frac{2}{3} \cdot 4i \cdot \frac{1}{3} \cdot 2i \right) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \left(\frac{2}{3} \cdot 2i - \frac{1}{3} \cdot 4i \right) = \\
&= \frac{l \cdot l^2}{EJ} (6 + 2 + 2) = 10i ; \\
r_{22} &= (\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,75i}{l} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{0,75i}{l} + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3i}{l} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 = \frac{i^2}{EJ \cdot l} (0,375 + 3) = \\
&= \frac{3,375i^2}{i \cdot EJ} = \frac{3,375i \cdot EJ}{l \cdot EJ} = \frac{3,375i}{l^2} ; \\
r_{21} &= r_{12} = \overline{M}_1 \overline{M}_2 = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3i}{l} - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3i}{l} = -\frac{3i^2}{EJ} = -\frac{3i \cdot EJ}{EJ \cdot l} = -\frac{3i}{l} ;
\end{aligned}$$

Озод ҳадларни аниқлаш учун берилган системадан статик аниқ система ҳосил қилинади ва ташқи кучлардан эгувчи моментлар эпюраси курилади (9.20- расм, е):

$$\begin{aligned}
R_{ip} &= -[M'_p \overline{M}_1] = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot 3i + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \\
&+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} (4i - 2i) = \frac{ql^2}{EJ} \cdot i \left[-0,375 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0,25 \right] = 0,375 \cdot \frac{ql^3}{EJ} \cdot i = 0,375ql^2 . \\
R_{2p} &= -[M'_p \cdot \overline{M}_2] = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{0,75i}{l} i - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 + \\
&+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 2l \cdot 0 = -\frac{ql^2}{EJ} \cdot i \left[\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \right] = -\frac{13}{16} ql = -0,8125ql .
\end{aligned}$$

Ҳар иккала усулда топилган коэффицент ва озод ҳадлар мос равишда бир- бирига тенг чиқди.

6. Номаълумлар аниқланади. Бунинг учун топилган коэффицент ва озод ҳадлар каноник тенгламага қўйилади:

$$\begin{aligned}
10i \cdot Z_1 - \frac{3i}{l} \cdot Z_2 + 0,375ql^2 &= 0 \\
-\frac{3i}{l} \cdot Z_1 + \frac{3,375i}{l^2} \cdot Z_2 - 0,8125ql &= 0
\end{aligned}$$

Тенгламалар биргаликда ечилиб, номаълум бурчакли ва чизиқли кўчишлар аниқланади:

$$Z_1 = 0,0474 \frac{ql^2}{i} ; \quad Z_2 = 0,283 \cdot \frac{ql^3}{i} ;$$

7. Қуйидаги формула асосида тузатилган эпюралар курилади (9.22- расм, а, б):

$$M_{z_1} = \bar{M}_1 \cdot Z_1; M_{z_2} = \bar{M}_2 \cdot Z_2$$

8. Натижавий эгувчи моментлар эпюраси қуйидаги формула асосида курилади (9.22- расм, в):

$$M = M_p + M_{z_1} + M_{z_2}$$

9. Натижавий M эпюраси текширилади. Бунинг учун статик аниқ системага бирлик кучдан $\bar{M}_k$ эпюраси курилади (9.22- расм, г) ва шу эпюра натижавий M эпюраси билан кўпайтирилади:

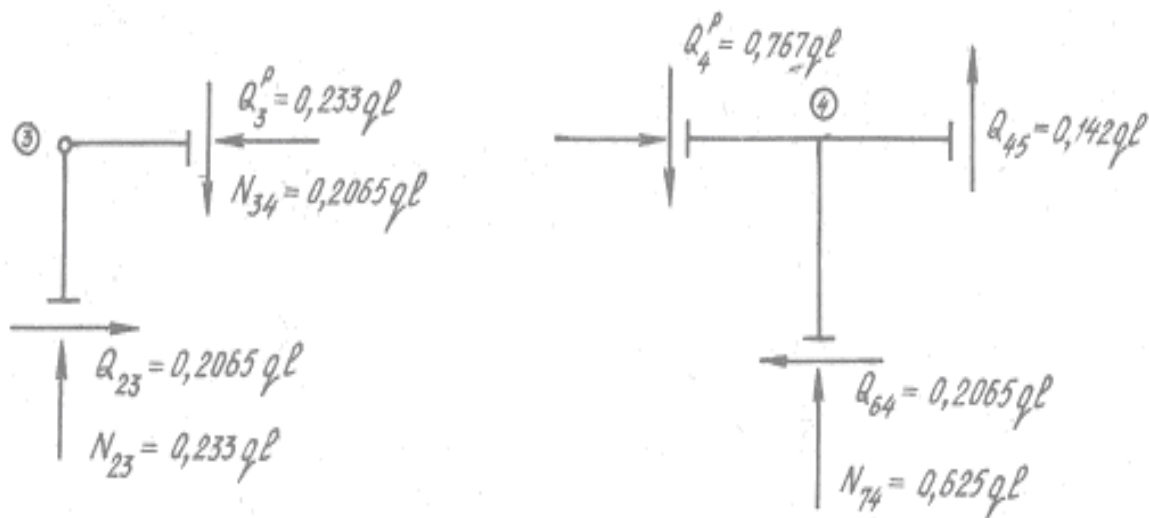
$$\begin{aligned} \Delta_{kp} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,142ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,409ql^2 \cdot 2l \cdot l + \\ &+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5ql^2 \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,004ql^2 \cdot 2l \cdot l = \\ &= \frac{ql^4}{EJ} [0,0473 + 0,2045 + 0,25 - 0,502] = \frac{ql^4}{EJ} [0,5018 - 0,502] = -\frac{0,0002}{EJ} ql^4 \end{aligned}$$

$$\text{Хатоси } \delta\% = \frac{0,0002 \cdot 100}{0,502} = 0,04\% < 1\%$$

Рухсат этилган чегарада.

10. Кўндаланг кучлар эпюраси Q курилади. Бунинг учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_x^0 + \frac{M_{o'ng} - M_{chap}}{l}; \\ Q_{12} &= \frac{0,2065ql^2 - (+0,582ql^2)}{l} = 0,7935ql; \\ Q_3 &= \frac{ql}{2} + \frac{-0,267ql^2 - 0}{l} = 0,233ql; \\ Q_4 &= -\frac{ql}{2} + \frac{-0,267ql^2 - 0}{l} = -0,767ql; \\ Q_{45} &= \frac{0 - 0,142ql^2}{l} = -0,142ql; \\ Q_{64} &= \frac{0,409ql^2 - 0,2025ql^2}{l} = 0,2065ql; \\ Q_{76} &= \frac{0,2025ql^2 - (-1,004ql^2)}{l} = 1,2065ql. \end{aligned}$$



9.23 - расм

11. Бўйлама кучлар эпюраси N курилади. Бунинг учун раманинг 3 ва 4 тугунлари мувозанати кўриб чиқилади (9.23- расм). 3 тугун мувозанатидан:

$$\Sigma_x = 0; \quad N_{34} - Q_{23} = 0; \quad N_{13} = Q_{23} = 0,2065$$

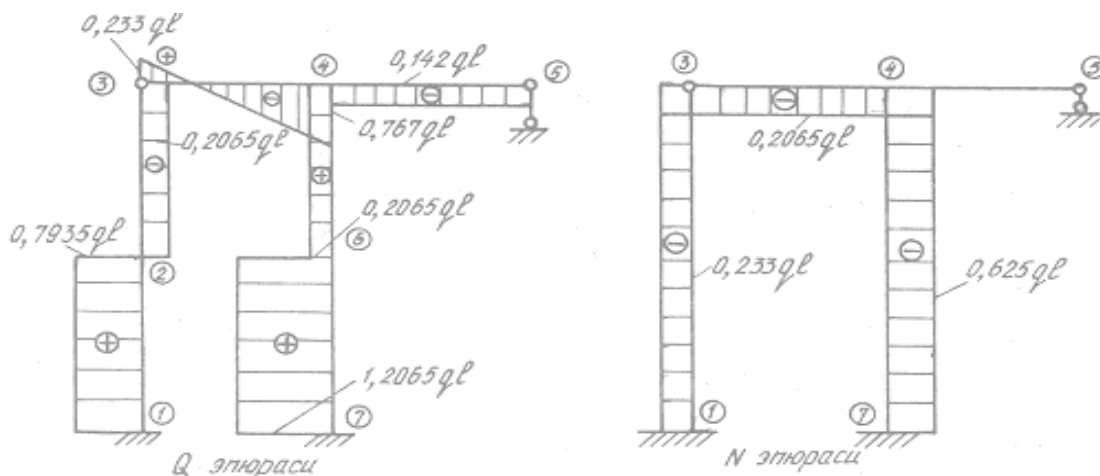
$$\Sigma_y = 0; \quad N_{13} - Q_{31}^p = 0; \quad N_{13} = Q_3^p = 0,233ql.$$

4 тугун мувозанатидан:

$$\Sigma_y = 0; \quad N_{74} - Q_4^p + Q_{45} = 0;$$

$$N_{74} = Q_4^p - Q_{45} = 0,767ql - 0,142ql = 0,625ql.$$

Топилган ординаталар бўйича кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраси курилади (9.24- расм).



9.24- расм

10-БОБ

СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

10.1. Тақрибий усуллар ҳақида тушунча

Ҳисоблаш усуллари аниқ ва тақрибий усулларга бўлишнинг ўзи шартлидир. Негаки, «аниқ» усулларда ҳам айрим фаразларга. йўл қўйилади. Масалан, материални идеал эластик ва бир жинсли деб қаралади, бунда раманинг фазовой иши ҳамда таянчларининг қайишқоқлиги эътиборга олинмайди ва х.к. Тақрибий усулларда эса ҳисобни енгиллаштирадиган фараз ва соддалаштиришга кўпроқ ўрин берилади.

Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда тақрибий усуллар кенг қўлланилади. Маълумки, қурилиш конструкцияларининг ҳисоби уларнинг кўндаланг кесимини дастлабки танловдан бошланади. Бу ишларни тез ва соз амалга оширишда муҳандисга тақрибий усуллар жуда қўл келади.

Тақрибий усулларнинг қўшимча фаразлари иншоотнинг ҳисоблаш схемасини янада соддалаштиришга, ички кучлар тақсимотиға, берилган юкларни соддароқ юклар билан алмаштиришга ва шунинг сингари қатор амалларга асосланади.

Бу борада ҳисоблаш схемасини янада соддалаштириш асосий йўллардан бири ҳисобланади. Агар ҳисоблаш схемаси кўпол фаразларга асосланса, у ҳолда ҳисоб натижалари биринчи яқинлашув учун туғри деб қабул қилинади, танланган кесим эса дастлабки нусха сифатида қаралади, зарурат туғилса, кейинчалик аниқроқ схема бўйича қайта ҳисобланади.

Масалан, рама ригелининг кўндаланг кесими ўлчамларини дастлабки танлашда уни оддий балка кўринишида олиш мумкин: бунда ригель моменти балка моменти M_o нинг $0,6—0,7$ улушини ташкил этади:

$$M = (0,6 — 0,7) M_o$$

Рама устунларининг кесимини танлашда ригеллар устунга шарнирли бириккан деб фараз этилади ва шу асосда устунга таъсир этувчи бўйлама

кучлар аниқланади. Буни ҳисобга олиб, ҳисобий қаршиликлар 20 — 50 фоизга камайтиради.

Аниқроқ ҳисоблаш схемалари бўйича бажарилган ҳисоб дастлабки танланган кесимни ойдинлаштириш имконини беради. Баъзан қайта аниқланган кесим кейинги аниқ ҳисобларга асос қилиб олинади.

Амалий ишларда тақрибий усулларнинг аҳамияти бениҳоя каттадир.

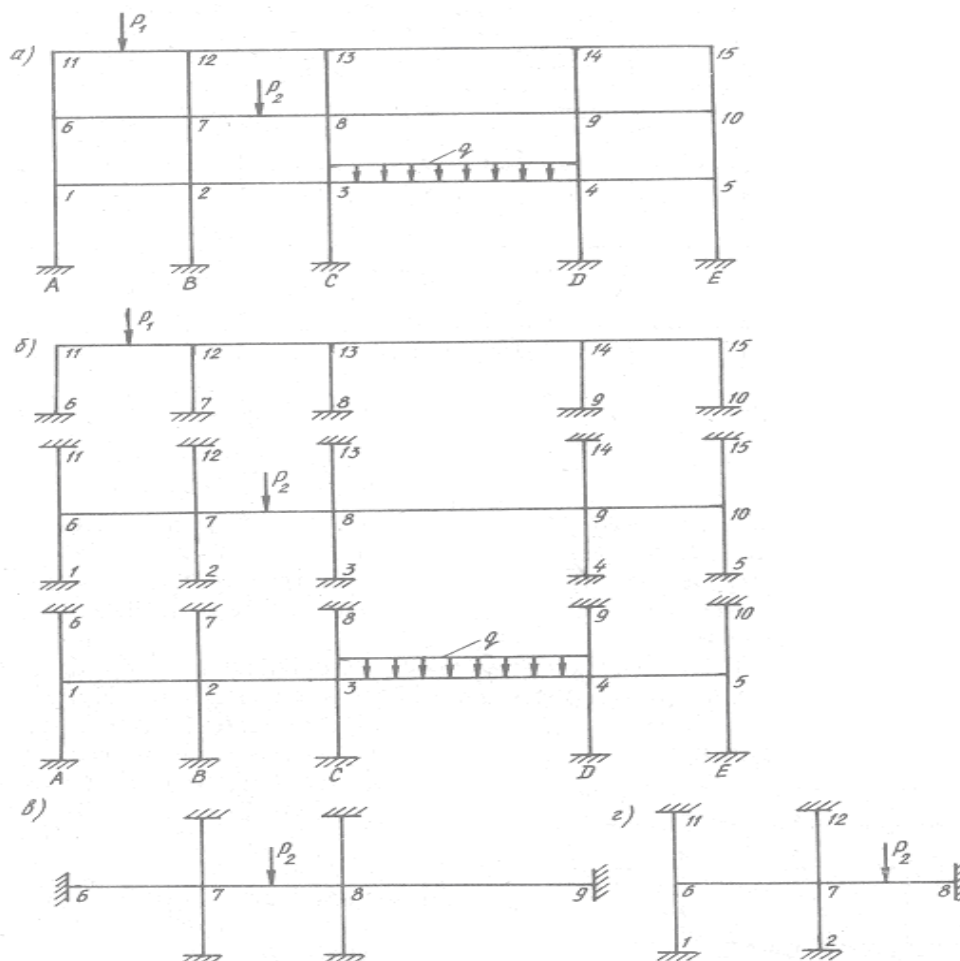
10.2. Рамаларни вертикал юклар таъсирига тақрибий ҳисоблаш

Аниқ ҳисобларнинг далолат беришича, бирор қаватнинг ригелига қўйилган юк бошқа қават ригелларида вужудга келадиган эгувчи моментларга айтарли таъсир этмайди. Бу ҳол 10.1- расм, *а* — да берилган рамани 10.1- расм, *б* — да кўрсатилган тарзда алоҳида рамаларга ажратиш имконини беради. Раманинг ҳар бир қисми мустақил рама сифатида қўрилади. Алоҳида эпюралар раманинг дастлабки схемасига устма-уст жойлаштирилади, сўнгра кўндаланг ва бўйлама кучлар ҳисобланади. Ҳисоб тақрибий бўлганлиги сабабли рама тугунлари тўлиқ мувозанатга эга бўлмайди.

Ҳисобни бундан ҳам соддалаштирса бўлади. Бунинг учун раманинг уч ригелдан иборат бўлган бўлаги ажратиб олинади (10.1- расм, *в*) ва мустақил равишда ҳисобланади. Раманинг чекка қисми 10.1- расм, *г* — да кўрсатилган тарзда ажратилади.

Бинокорликда оралиқлари тенг ҳамда бир хил юкланган кўп қаватли рамалар кўп учрайди. Бундай рамаларни вертикал юклар таъсирига ҳисоблаганда янада соддароқ схемалар танлаш мумкин. Масалан, 10.2- расм, *а* — да тасвирланган кўп қаватли кўп оралиқли рамалар ҳисоби, 10.2- расм, *б* — да кўрсатилганидек учта уч оралиқли рамалар ҳисобига келтирилиши мумкин, яъни берилган раманинг ички кучлари ҳақида тақрибий маълумотга эга булиш учун юқори, ўрта ва биринчи қават рамалари ҳисобланса кифоя. Рама устунчасининг баландлиги қават баландлигининг ярмига тенг бўлиб,

учлари шарнирли деб қабул қилинади. Бунга сабаб шуки, горизонтал кўчишлар йўқ деб фараз этилса, бир ўқ устида жойлашган тугунлар деярли бир хил бурчакка бурилади. Бинобарин, устунларнинг тугундаги моментлари ҳам ўзаро тенг бўлади, натижада ноль нукталар устуннинг ўрталарида ҳосил бўлади.

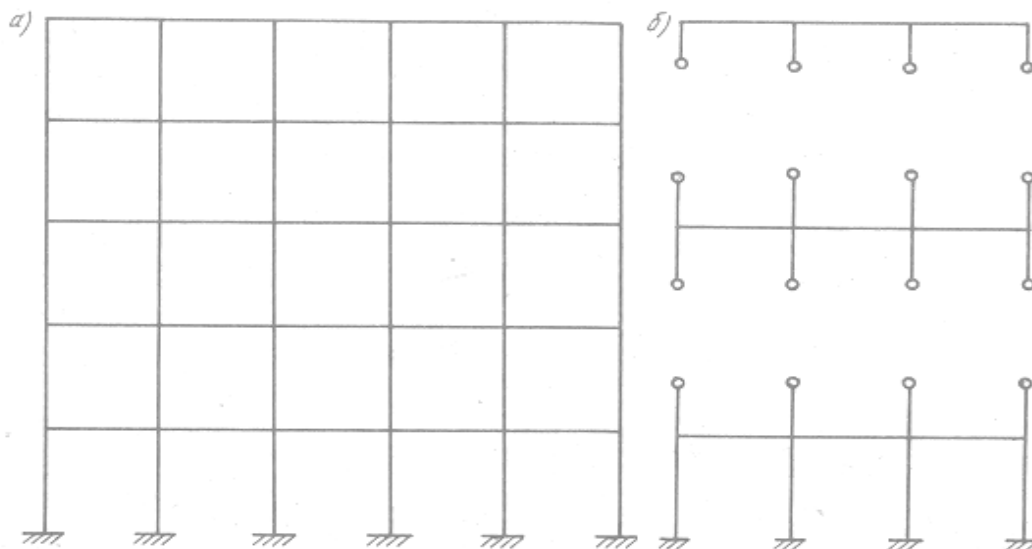


10.1- расм

10.3. Рамаларни горизонтал юклар таъсирига тақрибий ҳисоблаш

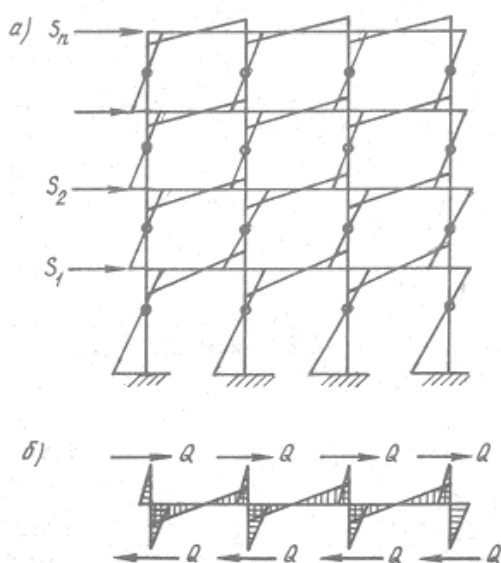
Рамаларни горизонтал юклар (шамол ва сейсмик кучлар) таъсирига тақрибий ҳисоблаганда, юклар йиғиқ куч сифатида тугунларга қўйилган деб қаралади. Аниқ ҳисобларнинг кўрсатишича, юклар тугунларга қўйилса, эгувчи моментларнинг ноль қийматлари устуннинг ўрта қисмида, биринчи қаватда эса устун баландлигининг тахминан учдан икки қисмида жойлашади

(10.3- расм, а). Шунга кўра, ноль нуқталарга шарнирлар киритиш воситасида раманинг статик ноаниқлик даражасини пасайтирса бўлади.



10.2- расм

Қават учун аниқланган умумий кўндаланг куч Q рама устунларига маълум тартибда тақсимланади. Ҳар бир устунга таъсир этувчи кўндаланг куч топилгач, эгувчи моментларни аниқлаш ва M эпюрасини куриш учун рамадан бир бўлаги ажратиб олинади (10.3- расм, б). Устун учларига Q кучларини қўйиб, устун учун M эпюраси курилади. Тугундаги мувозанатлашмаган момент ригелдаги момент билан мувозанатлаштирилади. M эпюраси асосида Q ва N эпюралари курилади.



10.3- расм

Қаватлар кўндаланг кучлари қуйидаги тартибда аниқланади: биринчи қават учун

$$Q_1 = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

иккинчи қават учун

$$Q_2 = S_2 + S_3 + \dots + S_n \quad (10.1)$$

Маълум қават чегарасида устунларнинг кўндаланг кесимлари бир хил бўлса, у ҳолда кўндаланг куч устунларга қуйидаги тартибда тақсимланади:

қаватнинг ўртадаги устунлари учун

$$Q_{o'r} = \frac{Q}{m-2(1-\beta)}; \quad (10.2)$$

каватнинг четки устунлари учун

$$Q_{chet} = \beta Q_{o'r} \quad (10.3)$$

бу ерда m — битта қаватдаги устунлар сони;

β — четки устунлар бикирлигини камайтириш коэффиценти;

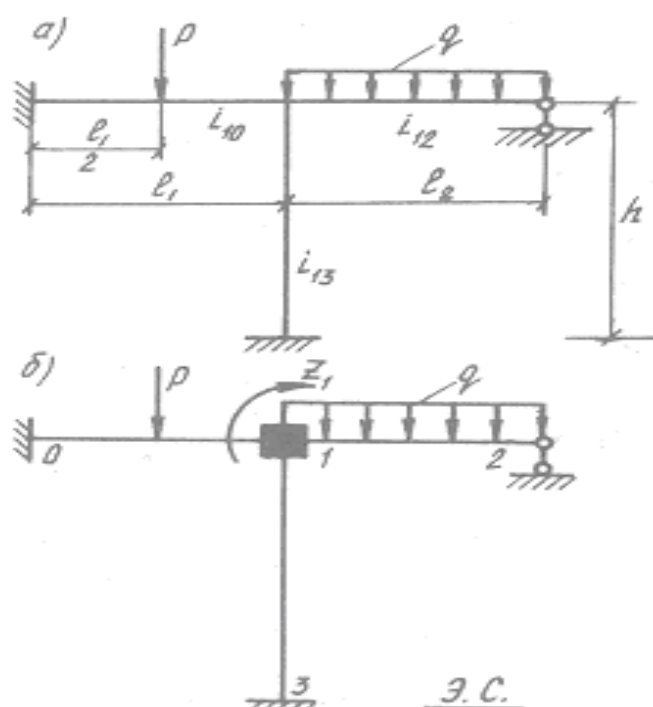
биринчи қават учун $\beta = 0,9$; қолган қаватлар учун $\beta = 0,54 \dots 0,79$.

10.4. Тугунларни мувозанатлаш усули

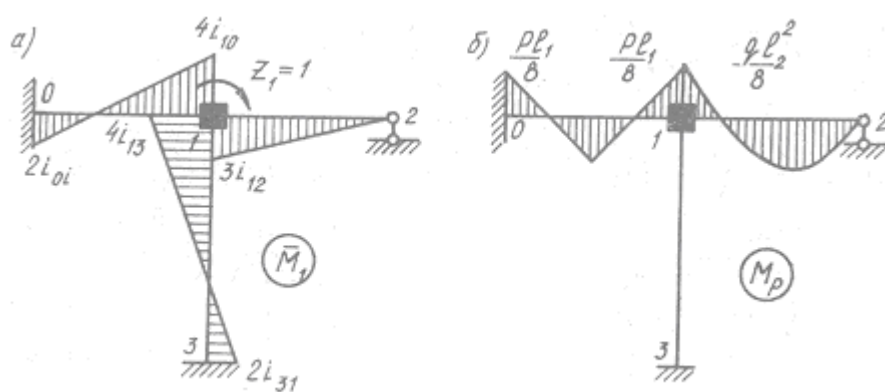
Мазкур усулнинг замирида кўчиш усули ётади. Бироқ бунда каноник тенгламалар тузилмай, оддий арифметик ҳисоблар амалга оширилади. Усул тақрибий бўлишига қарамай, ҳисоб ишлари керакли аниқликкача олиб борилиши мумкин. Мазкур усулни айрим муаллифлар моментларни тақсимлаш усули ёки кетма-кет яқинлаштириш усули деб атайдилар.

Тугунларни мувозанатлаш усули 1929 йилда Тошкентлик муҳандис Н. М. Бернадский томонидан ишлаб чиқилган. Шунга ўхшаш усулни 1930 йилда америка олими Ҳарди Кросс ҳам таклиф этган.

Тугунларни мувозанатлаш усулида рамалар озод ва озодмас рамаларга ажратилади. Чизиқли кўчиш имкониятига эга бўлган рамалар озод, эга бўлмаганлари озодмас рамалар деб аталади.



10.4- расм



10.5- расм

Усулнинг моҳияти билан 10.4- расм, *a* — да тасвирланган озодмас рама мисолида танишиб ўтамиз. Берилган рамага эквивалент бўлган система кўчиш усулида 10.4- расм, *б* — да кўрсатилган. Кўчиш усулининг каноник тенгламаси эса қуйидаги кўринишга эга:

$$Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0 \quad (10.4)$$

Бу тенгламадан номаълум бурчакли кўчиш Z_1 аниқланади:

$$Z_1 = - R_{1p} : r_{11} \quad (10.5)$$

Раманинг биринчи тугунида ҳосил бўладиган реактив моментлар r_{11} ва R_{1p} бирлик кўчиш ва ташқи кучлардан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюралари $\bar{M}_1$ ва M_p дан топилади (10.5-расм, а, б):

$$r_{11} = 4 \left(i_{10} + i_{13} + \frac{3}{4} i_{12} \right); \quad i_{12}^1 = \frac{3}{4} i_{12} \quad \text{деб олсак};$$

$$r_{11} = 4(i_{10} + i_{13} + i'_{12}); \quad (10.6)$$

$$R_{1p} = \frac{pl}{8} - \frac{pl^3}{8} \quad \text{бўлади.} \quad (10.7)$$

Бу ерда R_{1p} раманинг биринчи тугунига киритилган кўшимча боғланишдаги мувозанатлашмаган момент бўлиб, уни $M_1^{\text{неур}}$ деб белгилаймиз, яъни $R_{1p} = M^{\text{неур}}$ («неур» — неуровновешанный — мувозанатлашмаган сўзидан олинган). Буни инобатга олсак, (10.5) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$Z_1 = -\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \quad (10.8)$$

Бурчакли кўчиш Z_1 аниқлангач, қуйидаги формуладан фойдаланиб, стержень учларидаги моментлар аниқланади:

$$M_{ki} = M_{ki}^p + \bar{M}_{ki} Z_1 \quad (10.9)$$

Раманинг 0 — 1 стерженини чап учидаги момент

$$M_{01} = -\frac{Pl_1}{8} + 2i_{01} \left(-\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \right) = \frac{pl_1}{8} - \frac{2i_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}}{4(i_1 + i_{13} + i_{12})} = \frac{pl_1}{8} - \frac{1}{2} K_{01} \cdot M_1^{\text{неур}}$$

бўлади. Шу стерженнинг ўнг учидаги момент қуйидагича ифодаланади:

$$M_{10} = \frac{Pl_1}{8} + 4i_{10} \left(-\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \right) = \frac{pl_1}{8} - \frac{4i_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}}{4(i_{10} + i_{13} + i_{12})} = \frac{pl_1}{8} K_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}$$

Бу ерда қуйидаги белгилаш қабул қилинган:

$$K_a = K_{10} = \frac{i_{10}}{(i_1 + i_{13} + i_{12})}$$

ва унга тақсимлаш коэффициентлари деб ном берилган. Тақсимлаш коэффициентлари умумий кўринишда

$$K_{ki} = \frac{i_{ki}}{\sum_{i=1}^n i_{ki}} \quad (10.10)$$

тарзида ифодаланади.

Қолган стерженлардаги моментлар ҳам шу тариқа аниқланади:

$$M_{12} = -\frac{ql_2^2}{8} - K_{12} - M_1^{неур} ;$$

$$M_{13} = 0 - K_{13} \cdot M_1^{неур} ;$$

$$M_{31} = 0 - \frac{1}{2} K_{13} \cdot M_1^{неур} ; \quad M_{21} = 0.$$

Бир тугунда учрашувчи стерженларнинг тақсимлаш коэффициентлари йиғиндиси бирга тенг бўлади.

$$K_{10} + K_{12} + K_{13} = 1. \quad (10.11)$$

Биринчи тугуннинг мувозанатини текшираемиз. Бунинг учун шу тугундаги моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - K_{01} M_1^{неур} \right) + \left(-\frac{ql_2^2}{8} - K_{01} M_1^{неур} \right) + (-K_{13} M_1^{неур}).$$

Қавсларни очиб, гуруҳлаймиз

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - \frac{ql_2^2}{8} \right) - (K_{10} + K_{12} + K_{13}) M_1^{неур}. \quad (10.12)$$

Биринчи қавсдаги ифода $M_1^{неур}$ га, иккинчи қавс эса бирга тенг эканлигини ҳисобга олсак, тугуннинг мувозанатини белгиловчи тенгламага эга бўламиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = 0. \quad (10.13)$$

(10.12) тенгламадаги биринчи қавснинг ўрнига $M^{неур}$ ни қўйиб иккинчи қавсни очиб ёзамиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = M_1^{неур} + (-K_{12} M^{неур}) = M_1^{неур} + M_{10}^{yp} + M_{12}^{yp} + M_{13}^{yp} = 0.$$

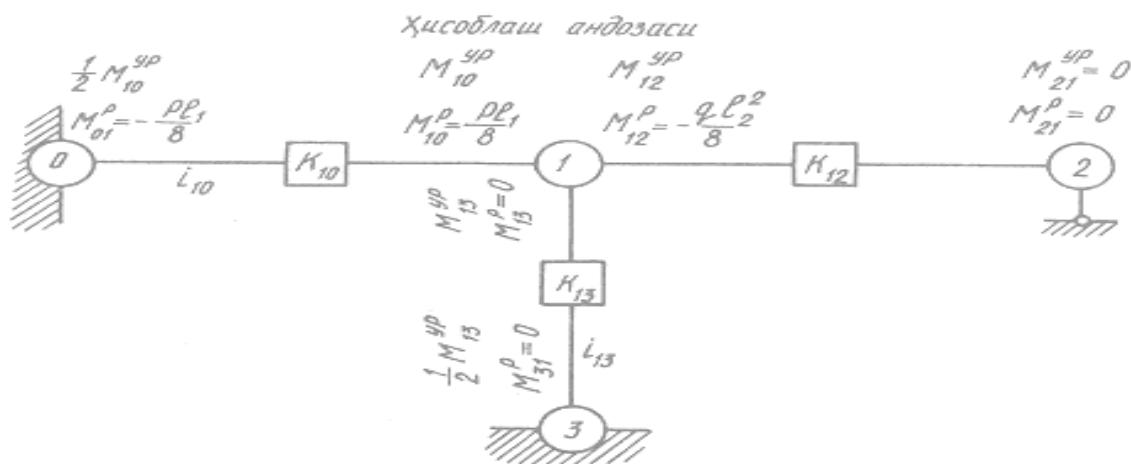
Бу ерда қуйидаги белгилаш қабул қилинди:

$$M_{ki}^{yp} = -K_{ki} \cdot M_1^{неур} \quad (10.14)$$

$M_{ki}^{yp} - ki$ стерженнинг «К» учигаги мувозанатлашган момент («ур» — урновешанный сўзидан олинган).

(10.14) формуланинг маъноси: бикир тугунга киритилган қўшимча боғланиш олиб танланса, яъни тугун бўшатиб, у Z_1 бурчакка бурилади. Натижада тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_1^{неур}$ шу тугунга келиб туташган стерженларга уларнинг тақсимлаш коэффициентларига пропорционал равишда тақсимланиб кетади. Манфий ишора мувозанатлашган момент билан мувозанатлашмаган моментнинг йўналиши карама-қарши эканлигини билдиради.

(10.14) формула ёрдамида топилган мувозанатлашган моментларнинг қийматини берилган рама шаклида чизилган ҳисоблаш андозасига жойлаштирамиз (10.6- расм). Ҳар қайси стержен учигаги натижавий моментнинг қиймати ҳисоблаш андозасига ёзилган тегишли моментларнинг йиғиндисига тенг бўлади.

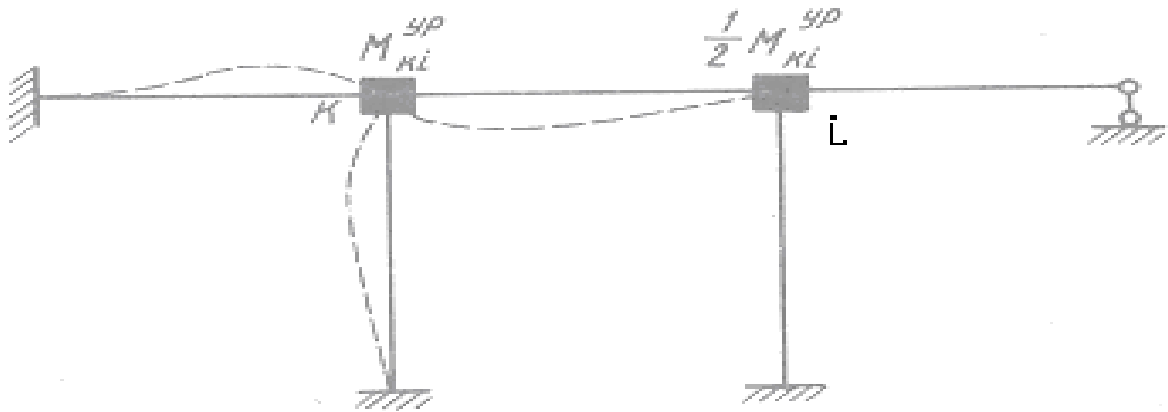


10.6- расм

Мазкур мисолда бикир тугуни битта бўлган рама, яъни бир номаълумли рама кўриб ўтилди. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент стерженларга тўла тўқис ва қолдиқсиз тақсимланиб кетди. Шу сабабли ҳисоб аниқ бўлди. Агар бикир тугунлар сони бирдан ортиқ бўлса, у ҳолда ечим тақрибий бўлади.

Раманинг бикир тугуни бирдан ортиқ бўлган ҳол

Юқорида раманинг бикир тугуни битта бўлган ҳолни кўриб ўтдик. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг тўла ва аниқ тақсимланганининг гувоҳи бўлдик. Агар раманинг бикир тугунлари иккита ва ундан ортиқ бўлса, у ҳолда вазият бироз бошқача бўлади.



10.7- расм

Мисол тариқасида бикир тугуни иккита бўлган статик ноаниқ рамани (10.7- расм) кўриб ўтайлик. Раманинг « K » ва « i » тугунлари қўшимча боғланиш билан маҳкамланган. Ҳисобни исталган тугундан бошлаш мумкин. Раманинг « K » тугунидаги мувозанатлашмаган момент $M_K^{неур}$ ни аниқладик, дейлик. Энди « K » тугунини бўшатамиз. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_K^{неур}$ шу тугунга туташган стерженларга тақсимланиб кетади. Тақсимот натижасида $k - i$ стерженининг « K » учига M_{ki}^{yp} моменти тегади, « i » учига эса шу моментнинг ярми, яъни $1/2 M_{ki}^{yp}$ тегади. Шу билан битта жараён тугайди. Шундан кейин « K » тугунини қайта маҳкамлаб, « i » тугунини бўшатамиз. Бунда стерженнинг « i » учига M_K^{yp} моменти, « K » учига эса шунинг ярми, яъни $1/2 M_K^{yp}$ тегади. Шу йўсинда « K » тугунига бошқа қарама-қарши тугунлардан ҳам (агар мавжуд бўлса) яримталиқ моментлар келиб қўшилади, натижада « K », тугунининг дастлабки мувозанати бузилади. Бироқ энди бу сафар « K » тугунидаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати аввалгисидан кичикроқ бўлади. Ҳисобнинг навбатдаги жараёнида бу моментни яна қайта тақсимлаймиз. Қайта тақсимлаш амали бир неча марта

такрорланганда, тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати тобора нолга яқинлашиб боради. Қайта тақсимлаш амали тугагач, стержень учигаги моментлар йиғиндиси топилади. Ана шу йиғинди момент натижавий момент ҳисобланади.

Тугунларни барин-кетин мувозанатлаш усулининг моҳияти ана шундан иборат.

11 – БОБ

ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИГА МАТРИЦАЛАР НАЗАРИЯСИНING ТАДБИҚИ

Матрицалар ҳақида тушунча

Тўғри бурчакли жадвал кўринишида жойлаштирилган сонлар системаси *матрица* деб аталади ва A ҳарфи билан белгиланиб қуйидаги тартибда ёзилади:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Матрицани ташкил этувчи a_{ik} сонлари унинг *элементлари* деб аталади. Матрица элементларининг горизонтал қаторлари *сатрлар*, вертикал қаторлари *устунлар* деб аталади. Юқорида жадвал кўринишида ифодаланган A матрицаси m та сатр ва n та устундан иборат. Демак m ва n миқдорлар матрицанинг тартибини ифода этади. Агар матрица сатрлари сони m , устунлар сони n га тенг бўлса ($m=n$), A матрица n – тартибли *квадрат матрица* дейилади.

Квадрат матрицада бош диагональ бўйлаб жойлашган $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлар бош элементлар деб, бошқа элементлари ёрдамчи элементлар деб аталади.

Агар A матрицанинг устунлари сони $n=1$ бўлса, у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{vmatrix}$$

ҳамда бир устунли матрица ёки *вектор – устун* дейилади.

Агар матрица фақат бир сатрдан ($m=1$) иборат бўлса, у қуйидаги кўринишда ёзилади ва бир сатрли матрица ёки *вектор – сатр* дейилади:

$$A = |a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n|.$$

Агар матрицанинг ҳамма элементлари нолдан иборат бўлса, *ноль матрица* дейилади.

Агар матрицанинг бош диагоналидаги элементлари нолдан фарқ қилиб, бошқа ёрдамчи элементлари нолга тенг бўлса, бундай матрица *диагонал матрица* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Агар диагонал матрицада диагонал элементлар бирга тенг бўлса, у бирлик матрица деб аталади ва E ҳарфи билан белгиланади:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Агар бош диагоналга нисбатан симметрик жойлашган ёрдамчи элементлар ўзаро тенг бўлса, бундай матрица *симметрик матрица* дейилади.

Сатр ва устунлари сони бир хил бўлган матрицалар номдош матрицалар дейилади. Агар иккита номдош A ва B матрицаларнинг симметрик жойлашган ҳар бир элементи ўзаро тенг бўлса, яъни

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} = B,$$

у ҳолда бу матрицалар *тенгдош матрицалар* деб аталади.

Агар A матрицанинг сатрларини устунга, устунларини эса сатрга айлантириб ёзсак, у ҳолда A матрицага нисбатан транспонирланган матрица ҳосил бўлади ва A^T деб белгиланади:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Сатр матрица устун матрица A нинг транспонирланган кўринишида бўлади:

$$A^T = |a_1 \ a_2 \ \dots a_m|.$$

Юқори тартибли тенгламаларни ЭХМ да ечишни осонлаштириш мақсадида блоксимон ва квази матрицалардан фойдаланилади. Блоксимон матрица ҳосил қилиш учун A матрицасида горизонтал ва вертикал пунктир чизиклар ўтказиб, уни бир неча блокларга ажратамиз:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{37} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

Ажратилган блокларни мустақил матрицалар кўринишида алоҳида кўчириб ёзамиз ва $A_{11}, A_{12}, \dots$ харфлари билан белгилаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{vmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{64} \end{vmatrix} \quad A_{23} = \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

У ҳолда A матрицанинг элементларини қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Бундай матрица *блоксимон матрица* деб аталади.

Агар блоксимон матрицанинг ёрдамчи элементлари ноль бўлса, бундай матрицалар *квазидиагонал*:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{12} & & & \\ & & A_{13} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & A_{nn} \end{vmatrix}$$

баъзилари ноль бўлса,

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & & \\ & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & & A_{nn} \end{vmatrix}$$

квазилентасимон матрица деб юритилади.

11.2. Матрица амаллари

Матрицаларни қўшиш ва айириш.

A ва B матрицаларни қўшиш ёки айириш амалларини фақат уларнинг тартиблари бир хил, яъни сатр ва устунлари сони тенг бўлгандагина бажариш мумкин. Бунда натижавий янги C матрицаси қўшилувчи ёки айрилувчи матрицалар билан номдош бўлади:

$$C = A \pm B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

бу ерда $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}; \quad i=1, \dots, n; \quad j=1, \dots, m$

Матрицаларни қўшиш ва айириш амалларида қуйидаги алгебраик қоидалар ўз кучига эга:

$$A + B = B + A; \quad (A + B) + C = A + (B + C); \quad A + 0 = A.$$

Матрицаларни кўпайтириш.

A матрицасини B матрицасига кўпайтириш учун A матрицасининг устунлар сони B матрицасининг сатрлар сониغا тенг бўлиши шарт. Буларнинг кўпайтмасидан ҳосил бўлган $C=A \cdot B$ матрица элементлари қуйидаги кўпайтмалар йиғиндисига тенгдир:

$$C_y = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

Яна шунга эътибор бериш керакки, A ва B матрицалар ўзаро мос бўлгандангина, яъни уларнинг тартиблари бир хил бўлгандангина кўпайтириш мумкин.

Масалан:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{ва} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{vmatrix} \quad \text{бўлади,}$$

бу ерда $C_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$ ва ҳоказо.

Агарда A ва B матрицаларининг тегишли тартиблари тенг бўлмаса, уларни кўпайтириб бўлмайди ва бундай матрицалар *мос бўлмаган матрицалар* дейилади.

Масалан, юқоридаги B ва A матрицалар ўзаро мос эмас, шунинг учун уларни $B \cdot A$ тарзида кўпайтириб бўлмайди. Чунки матрицаларни кўпайтиришда коммутативлик (ўрин алмаштириш) қоидалари ишламайди, яъни $A \cdot B \neq B \cdot A$. Бу тенгсизлик икки матрица квадрат ва тенг тартибли (мос матрицалар) бўлганда ҳам сақланади.

A матрицасини α миқдорга кўпайтириш қуйидагича бажарилади:

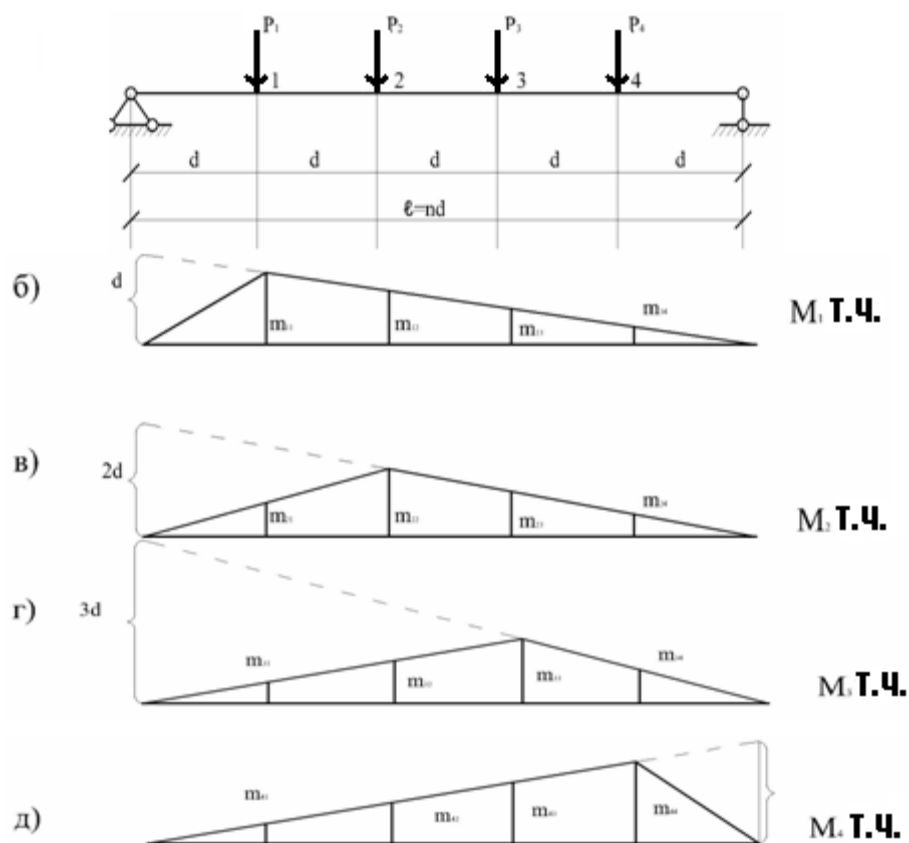
$$C = \alpha A = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{vmatrix}$$

Умуман матрицаларни кўпайтиришда қуйидаги алгебраик боғланишлар амал қилади:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A; & \alpha(AB) &= (\alpha A)B = (\alpha B)A; \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B; & (A + B)C &= AC + BC; \\ (\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A); & C(A + B) &= CA + CB; \\ (AB)C &= A(BC); & AE &= A. \end{aligned}$$

11.3. Статик аниқ балкаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш

11.1 – расм, a да берилган статик аниқ балканинг 1, 2, 3 ва 4 – кесимларидаги эгувчи моментлар ва кўндаланг кучларни матрица усулида аниқлаш талаб этилади, дейлик.



11.1 – расм

Балканинг тўртта 1, 2, 3 ва 4 кесими учун эгувчи моментларнинг таъсир чизиқларини чизамиз (11.1 – расм, б, в, г, д). Таъсир чизиқларида тегишли кесимлар остидаги ординаталарни m_{ik} деб белгилаймиз, бинобарин, m_{ik} к кесимида қўйилган бирлик куч $P=1$ дан i кесимида ҳосил бўладиган эгувчи моментдир. m_{ik} нинг қийматларини таъсир чизиқларидан ёки бирлик кучлардан қўрилган эгувчи моментлар эпюрасидан топса бўлади.

Агар 1, 2, 3, 4 нуқталарга $P_1; P_2; P_3; P_4$ кучлар қўйилган бўлса, тегишли кесимлардаги эгувчи моментлар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$M_1 = P_1 m_{11} + P_2 m_{12} + P_3 m_{13} + P_4 m_{14};$$

$$M_2 = P_1 m_{21} + P_2 m_{22} + P_3 m_{23} + P_4 m_{24};$$

$$M_3 = P_1 m_{31} + P_2 m_{32} + P_3 m_{33} + P_4 m_{34};$$

$$M_4 = P_1 m_{41} + P_2 m_{42} + P_3 m_{43} + P_4 m_{44}.$$

бу тенгламаларнинг матрица шакли қуйидаги кўринишга эга:

$$\vec{M} = L_m \cdot \vec{P}. \quad (a)$$

Бу ерда $\vec{M}$ – эгувчи моментларнинг матрица – устуни (вектор);

$\vec{P}$ – таъсир этувчи кучларнинг матрица – устуни (вектор);

L_m – эгувчи моментларнинг таъсир матрицаси, m_{ik} микдорларнинг матрицаси.

(a) формула тўлиқ шаклда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \quad (б)$$

Агар балка тенг бўлакларга бўлинса, таъсир матрицаси L_m нинг элементлари қуйидаги формулалардан топилиши мумкин:

$$m_{ik} = \frac{d}{n} i(n-k) \quad i \leq k \quad \text{бўлганда};$$

$$m_{ik} = \frac{d}{n} k(n-i) \quad i \geq k \quad \text{бўлганда}.$$

Биз кўраётган балка учун:

$$L_m = \begin{pmatrix} \frac{4d}{3d} & \frac{3d}{6d} & \frac{2d}{4d} & \frac{d}{2d} \\ \frac{n}{2d} & \frac{n}{4d} & \frac{n}{6d} & \frac{n}{3d} \\ \frac{n}{d} & \frac{n}{2d} & \frac{n}{3d} & \frac{n}{4d} \\ \frac{n}{n} & \frac{n}{n} & \frac{n}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix} = \frac{d}{n} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (в)$$

Моментлар таъсир матрицаси (в)нинг таҳлили қуйидаги хулосаларга олиб келади:

а) моментлар таъсир матрицаси ($\frac{d}{n}$) кўпайтувчига эга.

Бу ерда: d – кесимлар оралиғи, n – кесимлар сони;

б) таъсир матрицасининг биринчи сатри (қатори) ва биринчи устуни сонлар қатори $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, 1 дан, масалан, 4, 3, 2, 1 сонлардан ташкил топади;

в) охирги сатр ва охирги устун ҳам ўша сонлардан, бироқ тескари тартибда, ташкил топади;

г) бош диагоналдан қуйида (ёки ўзида) жойлашган элементни аниқлаш учун, керакли сатрнинг биринчи элементини тегишли устуннинг охирги элементига кўпайтириш зарур, яъни

$$a_{ik} = a_{i1} \cdot a_{(n-1)k};$$

д) бош диагоналдан юқорида (ёки ўзида) жойлашган элементни аниқлаш учун, керакли устуннинг биринчи элементини тегишли сатрнинг охирги элементига кўпайтириш зарур, яъни

$$a_{ik} = a_{1k} \cdot a_{i(n-1)},$$

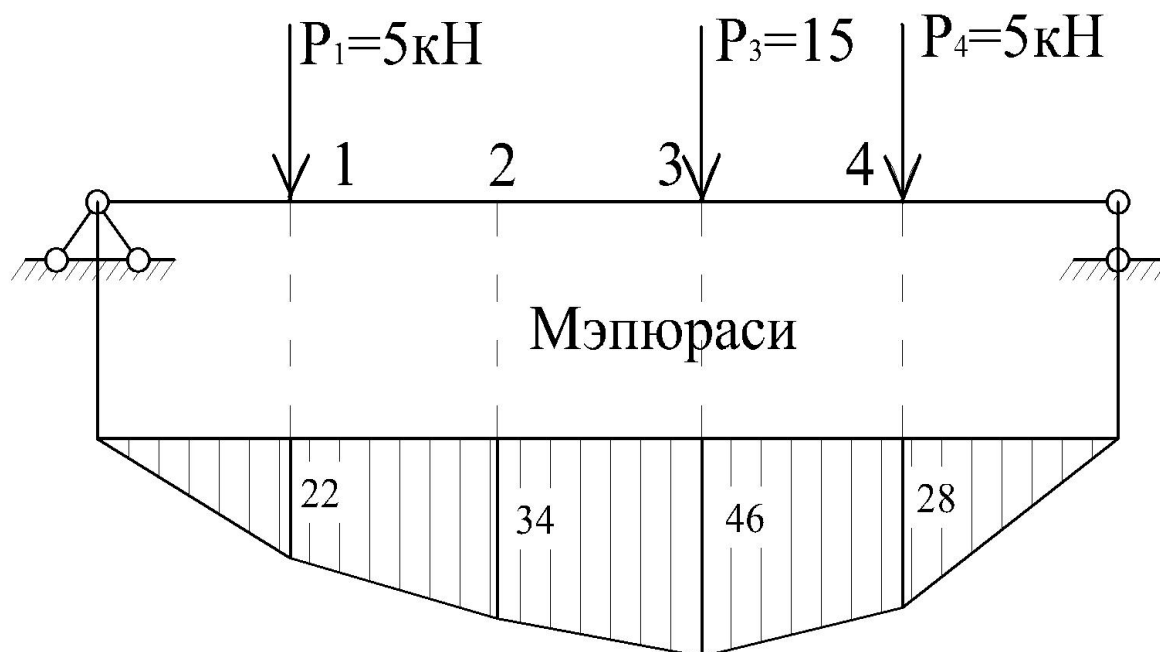
ёки матрицанинг симметриклигидан фойдаланилади. Баён этилган қоидаларни схема кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$L_m = \frac{d}{n} \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & 3 & 1 \\ n-2 & & & & 3 \cdot 2 & 2 \\ n-3 & \text{-----} \rightarrow & (n-3) \cdot 3 & \leftarrow \text{----} & \text{-----} & 3 \\ n-4 & (n-4) \cdot 2 & \uparrow & & & 4 \\ \vdots & \uparrow & \uparrow & & & \vdots \\ 4 & \uparrow & \uparrow & & & n-4 \\ 3 & \uparrow & \uparrow & & & n-3 \\ 2 & \text{----} \uparrow \text{----} & \text{----} \uparrow \text{----} & \text{----} \rightarrow & 2 \cdot (n-3) & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & n-3(n-2) & n-1 \end{vmatrix}$$

Мисол. 11.2 – расмда берилган балканинг M эпюраси моментларнинг таъсир матрицалари орқали қурилсин. Балкага $P_1 = P_4 = 5\text{кН}$; $P_2 = 0$; $P_3 = 15\text{кН}$ кучлар қўйилган. $d=2\text{м}$, $n=5$.

$$\vec{M} = L_m \cdot \vec{P} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \\ 5 \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \begin{vmatrix} 55 \\ 85 \\ 115 \\ 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ 34 \\ 46 \\ 28 \end{vmatrix}$$

Шундай қилиб, 1,2,3,4 кесимларда вужудга келадиган эгувчи моментлар $M_1=22кН·м$; $M_2=34кН·м$; $M_3=46кН·м$; $M_4=28кН·м$ аниқланди. Балканинг M эпюраси 11.2 – расмда тасвирланган.



11.2 – расм

11.4. Статик аниқ фермаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш

Ихтиёрий n – та стержен ва q – та тугундан ташкил топган статик аниқ ясси ферма берилган бўлсин. Ферманинг юқори ёки пастки тасмасидаги тугунларга ташқи кучлар P_i қўйилган дейлик. Шу кучлар таъсирида ферма стерженларида вужудга келадиган зўриқишларни аниқлаш талаб этилади. Мазкур дарсликнинг 4 – бобида шу масалани аналитик усулда ечишни ўрганган эдик. Энди шу масалани матрица усулида ечишни ўрганамиз.

Ферма стерженларидаги зўриқишларни матрица усулида аниқлашда қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$\vec{N} = L_N \cdot \vec{P},$$

бу ерда: $\vec{N}$ – ферма элементларида изланаётган зўриқишлардан тузилган бир устунли матрица – вектор;

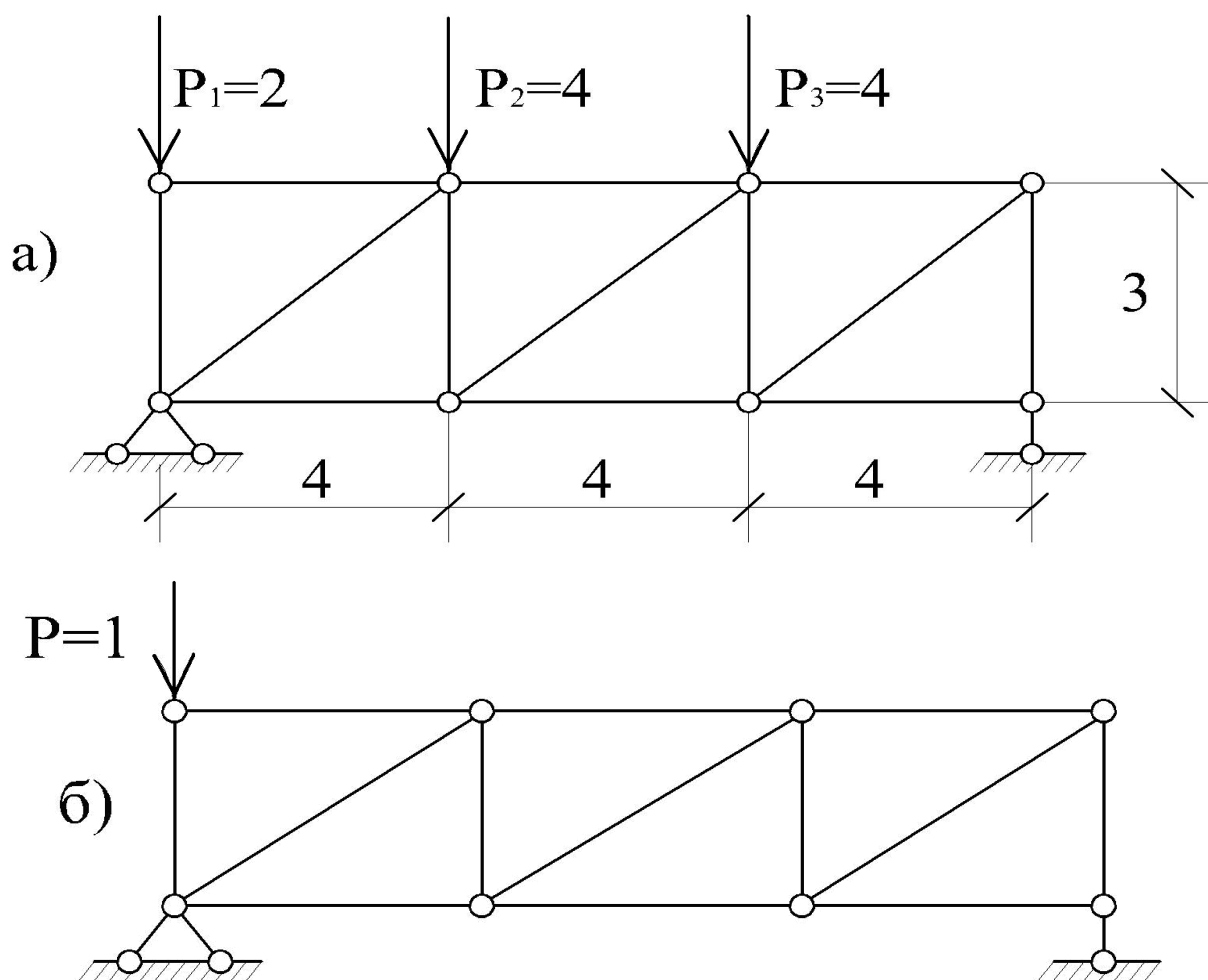
L_N – бирлик зўриқишларнинг таъсир матрицаси;

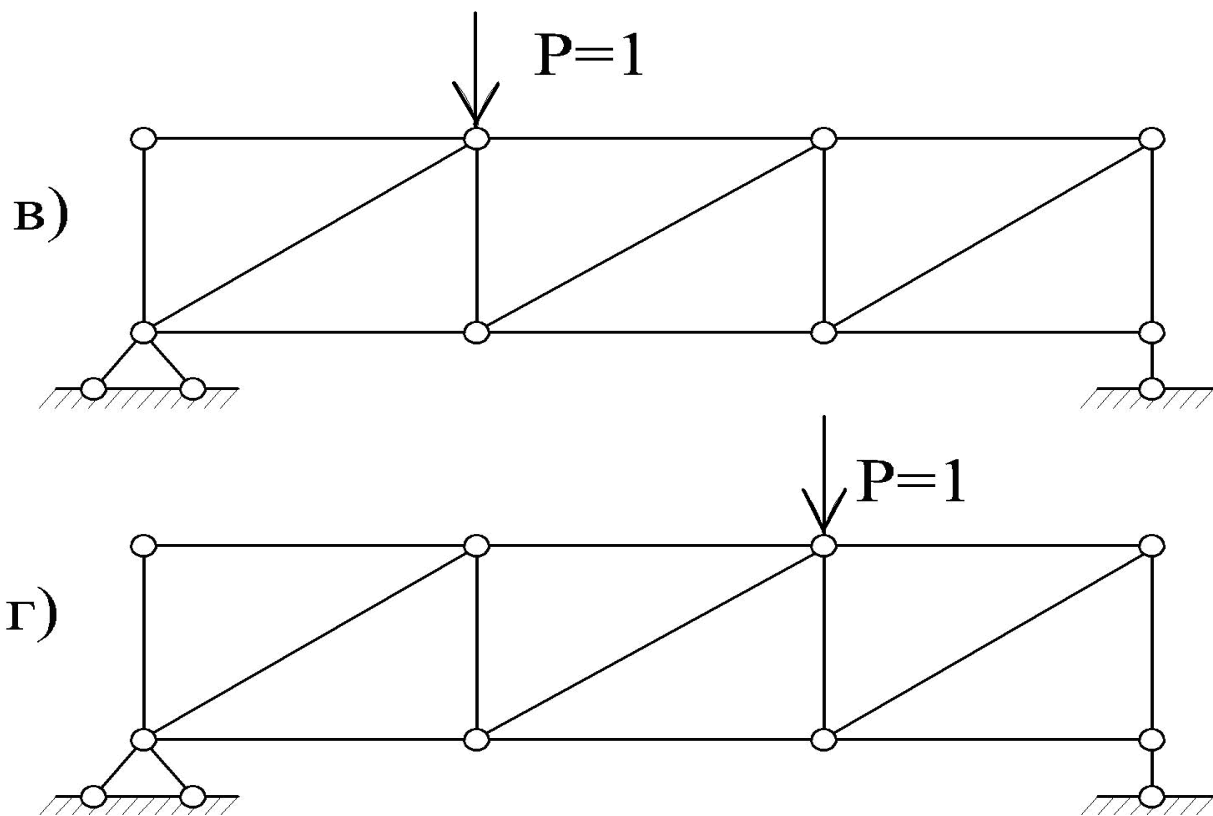
$\bar{P}$ – ферма тугунларига қўйилган ташқи кучлар матрица устуни;

Бирлик зўриқишларнинг таъсир матричасини тузиш учун ферманинг ташқи юк қўйилган тугунларига навбатма – навбат бирлик кучлар қўйилади ва ферма стерженларидаги зўриқишлар аниқланади.

11.3 – расм, *a* да берилган ферма, *б*, *в*, *г* – да ферманинг бирлик кучлар қўйилган ҳолати тасвирланган.

Ҳар бир бирлик ҳолат учун ферманинг барча элементларидаги зўриқишларни аниқлаймиз ва шулар асосида бирлик зўриқишларнинг таъсир матричасини тузамиз:





11.3 – расм

$$L_N = \begin{vmatrix} -2,0 & 0 & 0 \\ -2,0 & -1,0 & 0 \\ -2,0 & -1,33 & -0,67 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 1,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,41 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1,2 \end{vmatrix}.$$

Ташки кучлар устун матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$P = \begin{vmatrix} 2,0 \\ 4,0 \\ 4,0 \end{vmatrix}.$$

Бирлик зўриқишлар таъсир матрицаси ва ташқи кучлар вектор матрицаси аниқлангач, ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлаш имконияти туғилади:

$$N = \begin{vmatrix} -2,0 & 0 & 0 \\ -2,0 & -1,0 & 0 \\ -2,0 & -1,33 & -0,67 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 1,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,41 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1,2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2,0 \\ 4,0 \\ 4,0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4,0 \\ -8,0 \\ -12,0 \\ 4,48 \\ 4,48 \\ 8,96 \\ 0 \\ 5,64 \\ -2,0 \\ 7,20 \end{vmatrix}.$$

11.5. Кўчишларни аниқлашнинг матрица усули

Эластик системаларнинг кўчишларини Мор – Верешчагин усулида аниқлаш тартибини 6 – бобда кўриб ўтган эдик. Ўшанда кўчишларни аниқлаш учун Морнинг интеграллик формуласи

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\vec{M}_k M_p}{EJ} dx \quad \text{ни}$$

Верешчагиннинг интегралсиз ифодаси

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EJ} \sum \omega_p y_c$$

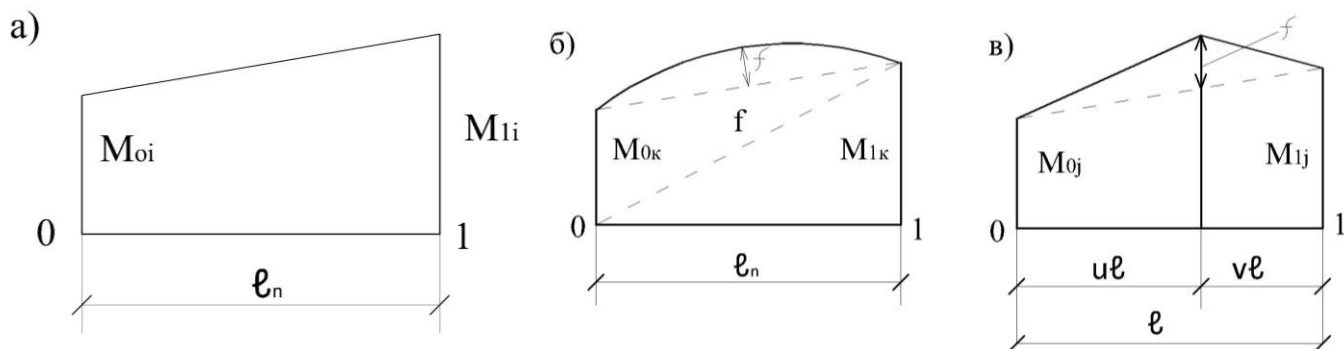
билан алмаштирган эдик.

Бу ерда: ω_p – ташқи кучлардан қурилган M_p эпюрасининг юзаси;

y_c – M_p эпюрасидаги юзанинг оғирлик марказига мос бўлган $\vec{M}_k$ эпюрасидаги ордината.

Кўчишларни Верешчагин усулида аниқлашда икки эпюра ўзаро кўпайтирилади. Бундай “кўпайтирувни” матрица шаклида ҳам амалга оширса бўлади.

Мисол тариқасида икки эпюра M_i ва M_k ни оламиз (11.4 – расм, а, б).



11.4 – расм

M_k эпюрасини пунктир чизиклар билан уч қисмга бўламиз ва Верещагин усули бўйича “кўпайтирамиз”.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx &= \frac{1}{EJ_n} \cdot \frac{1}{2} M_{ok} \ell_n \left[M_{oi} + \frac{1}{3} (M_{li} - M_{oi}) \right] + \frac{1}{EJ_n} - \frac{2}{3} f \ell_n \frac{M_{oi} + M_{li}}{2} + \\ &+ \frac{1}{EJ_n} \cdot \frac{1}{2} M_{1k} \ell_n \cdot \left[M_{oi} + \frac{2}{3} (M_{li} - M_{oi}) \right] = \left(\frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{oi} + \frac{\ell_n}{6EJ_n} M_{li} \right) M_{ok} + \\ &+ \left(\frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{oi} + \frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{li} \right) f + \left(\frac{\ell_n}{6EJ_n} M_{oi} + \frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{li} \right) M_{1k}. \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган ифодани сатр матрицаси билан устун матрицасининг кўпайтмаси кўринишида ёзса бўлади:

$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \left(\frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{oi} + \frac{\ell_n}{6EJ_n} M_{li} \right) \left(\frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{oi} + \frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{li} \right) \left(\frac{\ell_n}{6EJ_n} M_{oi} + \frac{2\ell_n}{6EJ_n} M_{li} \right) \cdot \begin{vmatrix} M_{ok} \\ f \\ M_{1k} \end{vmatrix}.$$

Сатр матрицаси $\frac{\ell_n}{6EJ_n}$ ва $\frac{2\ell_n}{6EJ_n}$ коэффициентлари билан бирга M_{oi} ва M_{li}

моментларининг йиғиндисидан иборат. Агар M_{oi} ва M_{li} сатр матрицаларини коэффициентлардан ташкил топган матрицалар билан кўпайтирсак, уларнинг биринчи устуни

$$\begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix}; \text{ иккинчи устуни } \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix}; \text{ учинчи устуни } \begin{vmatrix} \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади.

Бунда масаланинг тўлиқ матрицаси қуйидаги кўринишда ифодаланилади:

$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \begin{vmatrix} M_{oi} & M_{1i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{0k} \\ f \\ M_{1k} \end{vmatrix} = \vec{M}_i^1 \cdot D_{gn} \cdot \vec{M}_k. \quad (11.1)$$

Бу ерда: $\vec{M}_i^1$ – M_i эпюрасидаги моментларнинг транспонирланган устун матрицаси;

D_{gn} – қаралаётган участканинг бикирлик матрицаси;

$\vec{M}_k$ – M_k эпюрасидаги моментларнинг устун матрицаси;

f – M_k эпюрасининг параболик сигментидаги қўшимча қиймат.

Агар $f=0$ бўлса, яъни M_k эпюраси тўғри чизиқли бўлса, бикирлик матрицасининг ўрта устуни чиқариб ташланади. У ҳолда матрица қуйидаги содда кўринишга келади:

$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \begin{vmatrix} M_{oi} & M_{1i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{0k} \\ M_{1k} \end{vmatrix} \quad (11.2)$$

Агар тўғри чизиқли эпюрада f қўшимчаси парабола эмас, учбурчакда ҳосил бўлса, у ҳолда M_i ва M_j эпюраларнинг “кўпайтмаси” матрица кўринишида қуйидагича ифодаланилади (11.4 – расм, в):

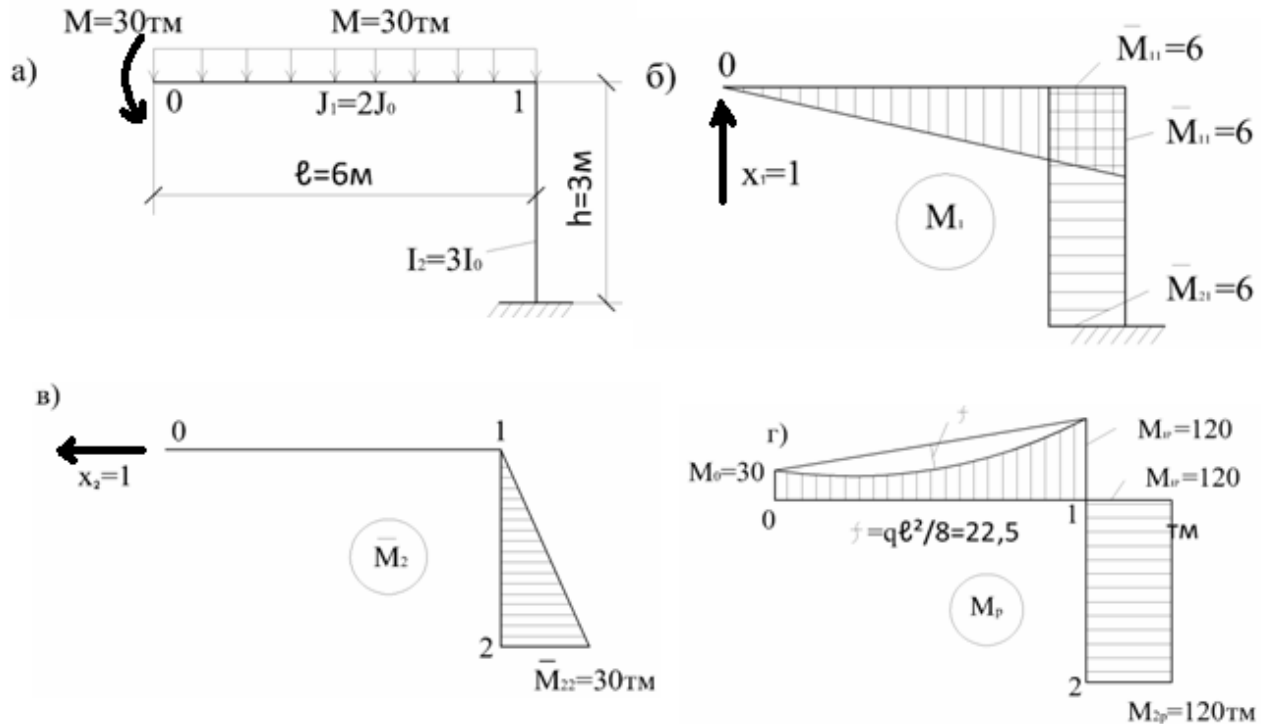
$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \begin{vmatrix} M_{0i} & M_{1i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & (1+\nu)\frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} & (1+u)\frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{0j} \\ f \\ M_{1j} \end{vmatrix}. \quad (11.3)$$

Мисол. Силиқ балка кўринишидаги раманинг 0 нуқтасини вертикал ва горизонтал кўчиши аниқлансин (11.5 – расм, а).

Вертикал кўчишни аниқлаш учун 0 нуқтасига вертикал йўналишда $X_I=1$ кучини қўямиз ва шу кучдан бирлик $\vec{M}_1$ эпюрасини курамиз (11.5 – расм, б). Ташқи кучдан қурилган эпюра 11.5 – расм, в да берилган.

$\vec{M}_1$ ва M_p эпюраларнинг биринчи участкаларини (ригелларни) “кўпайтирамиз”:

$$\Delta'_{1p} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 2EJ_0} & \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 2EJ_0} & \frac{6}{6 \cdot 2EJ_0} \\ \frac{6}{6 \cdot 2EJ_0} & \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 2EJ_0} & \frac{2 \cdot 6}{6 \cdot 2EJ_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 30 \\ -22,5 \\ 120 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_0} \begin{vmatrix} 67,5 \\ 112,5 \end{vmatrix} = -\frac{675}{EJ_0}.$$



11.5 – расм

Бу ерда ригелнинг устки ва устуннинг ўнг томони толаларини чўзувчи моментлар мусбат, f эса манфий ишора билан олинган, чунки у ригелдаги моментни оширмайди, аксинча камайтиради.

$\bar{M}_1$ ва M_p эпюраларнинг иккинчи участкаларини (устунларни) “кўпайтирамиз”.

$$\Delta''_{1p} = \begin{vmatrix} -6 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 3EJ_0} & \frac{3}{6 \cdot 3EJ_0} \\ \frac{3}{6 \cdot 3EJ_0} & \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 3EJ_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 120 \\ 120 \end{vmatrix} = -\frac{720}{EJ_0},$$

$$\Delta_{1p} = \Delta'_{1p} + \Delta''_{1p} = -\frac{1395}{EJ_0}.$$

Энди $x_2 = 1$ йўналишидаги горизонтал кўчишни аниқлаймиз (11.5–расм, в):

$$\Delta_{2P} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{EJ_0} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 30 \\ -22,5 \\ 120 \\ 120 \end{vmatrix} = \frac{180}{EJ_0}.$$

12 – БОБ

ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

12.1. Усулнинг ғояси

Чекли элементлар усули ўтган асрнинг ўрталарида шаклланди ва ҳозирги пайтда физика ва механиканинг турли масалаларини ечишда самарали воситалардан бирига айланди. Дастлабки кезларда чекли элементлар усули пластиналар, қобиклар, аркалар, гидротехника иншоотлари сингари эластик системалар соҳасида қўлланилган бўлса, кейинги пайитларда мазкур усул динамика, иссиқлик ўтказувчанлик, чизиқсиз диффузия, гидродинамика сингари соҳаларда ҳам кенг қўлланила бошланди.

Бу усулнинг номи маълум маънода унинг моҳиятини англатади, яъни бу усулга кўра яхлит конструкция алоҳида оддий элементларга бўлиб чиқилади, кейин унинг кучланиш-деформацияланиш ҳолати тадқиқ етилади. Элементларни бириктириш масаласи мувозанат шартларини қаноатлантириш ёки қўчишларнинг узлуксизлигини таъминлаш орқали амалга оширилади.

ЧЭУ нинг асосий афзалликларидан бири унинг кенг миқёслилигидир. Агар ҳар хил қурилиш конструкцияларини ЭҲМда ҳисоблаш учун ҳар қайсисига алоҳида дастурлар тузилган бўлса (масалан, ферма учун алоҳида, балка учун алоҳида) ЧЭУ деярли ҳамма қурилиш конструкцияларини ЭҲМда ягона ҳисоблаш алгортми ва дастури асосида ҳисоблаш имконини беради. Бу лойиҳачи – муҳандиснинг ишини анча енгиллаштиради. Ягона ҳисоблаш алгоритми ва дастури ҳисоблаш вақтини тежайди, ҳисобнинг аниқлик даражасини оширади. Бу усулнинг афзаллиги ҳам шунда.

Умуман конструкцияларни ЭХМда ҳисоблашда ўта аниқлик ва универсал усуллардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Олдинги усуллар ҳамма вақт ҳам бу талабларга жавоб бермайди. Шунинг учун ҳам машинабоп усуллар яратилишига эҳтиёж туғилди. Айниқса, ҳисоблашдаги бир неча хил мураккабликларни, яъни конструкцияларнинг чизиқли ва чизиқсиз ишлаш хусусиятларини, ерга эластик таяниши, устуворлик ва бошқа шартларни бир йўла ҳисобга оладиган усул керак эди. Чекли элементлар усули (ЧЭУ) шундай самарали усуллардан бири сифатида юзага келди.

ЧЭУ ғояси берилган системани, масалан, рамани чекли элемент деб аталувчи алоҳида содда элементларга ажратишдан иборатдир. Чекли элементлар аниқ геометрик, физик ва механик ўлчамларга эга бўлиши шарт.

Пластина ва қобик конструкцияларини ҳисоблашда чекли элемент сифатида учбурчак, кўпбурчак ва тўғри бурчакли пластиналар қабул қилиниши мумкин, массив конструкциялардан кичик хажмий бўлак тетраэдр ва х.к. чекли элемент деб қабул қилинади.

Стерженлар системасида чекли элемент сифатида доимий бикирликка эга бўлган стержень қабул қилинади.

Шундай қилиб ЧЭУ берилган конструкцияларни содда, чекли элементларга бўлиб, қурилиш механикаси қоидалари асосида ҳисоблайди.

Содда кўринишга эга бўлган чекли элементнинг ташқи таъсирларга қаршилиқ кўрсатиш имкониятлари олдиндан аниқланади. ЧЭУ куч усули ёки кўчиш усулларига асосланиши мумкин. Чекли элементлар усулида ҳам асосий система танланиб, тенгламалар тизими тузилади. Асосий система — берилган раманинг энг содда чекли элементлари йиғиндисидир. Тенгламалар тизими чекли элементларнинг узлуксизлигини таъминловчи шартни ифодалайди.

Демак, системани содда бўлакларга бўлиш ғояси, мураккаб конструкцияни содда «чекли» элементлар оркали ифодалаш имконини беради. Киритилувчи узлуксизлик ва бошқа статик шартлар эса чекли элементларнинг берилган система каби ишлашини таъминлайди. Рамаларни

ЧЭУ ёрдамида ҳисоблашда номаълум сифатида куч ёки кўчиш усулларидагидек ички кучлар ёки кўчишлар қабул қилинади.

Ҳисоб куч усули асосида бажарилса, чекли элементларнинг уланиш жойида номаълум сифатида куч қабул қилинади, агарда кўчиш усули асосида олиб борилса, у ҳолда номаълум сифатида тугунларнинг кўчиши қабул қилинади. Умумий ҳолда аралаш усулдан фойдаланса ҳам бўлади. ЧЭУ бўйича ҳисоблашда асосий ролни *мойиллик матрицаси* ёки *бикирлик матрицаси* ўйнайди. Агар ҳисоб куч усулида бажарилса мойиллик матрицасидан, кўчиш усулида бажарилганда эса бикирлик матрицасидан фойдаланилади.

Куч усулида номаълум кучлар чекли элементларнинг уланиш жойидаги кўчишларнинг тенглигини ифодаласа, кўчиш усулидаги номаълум кўчишлар — тугунларнинг мувозанатини ифодалайди.

Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблаганда бир вақтнинг ўзида ҳар бир элементнинг икки учига ички кучлар M , Q , N ларни аниқлаш мумкин. ЧЭУ ни матрица кўринишда ифодалаш мақсадга мувофиқ бўлиб, ҳисоб охирида кўчишлар ҳамда ички кучлар ҳам матрица кўринишида аниқланади.

Чекли элементнинг кўчиш усулига асосланган умумлаштирилган тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\bar{R} \cdot Z + R_p = 0 \quad (12.1)$$

бу ерда $\bar{R}$ — конструкциянинг, хусусан, раманинг бикирлик матрицаси;

R_p — юк матрицаси.

Бу тенглама асосий системага киритилган ҳар бир қўшимча боғланишда бирлик буралиш, силжиш ва чўзилиш, шунингдек, ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўлган тугунлардаги реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенг эканлигини ифодалайди.

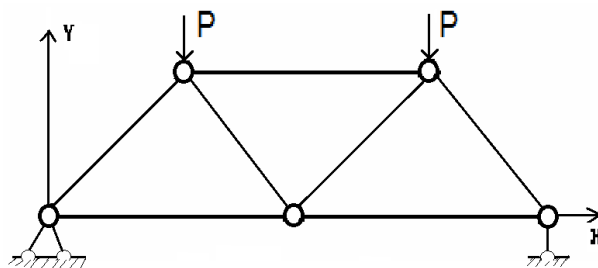
Чекли элементлар усулининг кўчиш усулидан асосий фарқи шундан иборатки, бу усулда деформацияларнинг барча тури инобатга олинади ва ҳар

бир тугунда умумлаштирилган кўчишлар аниқланади. Шунинг учун ҳам бу фарқлар бикирлик матрицаларида яққол кўзга ташланади.

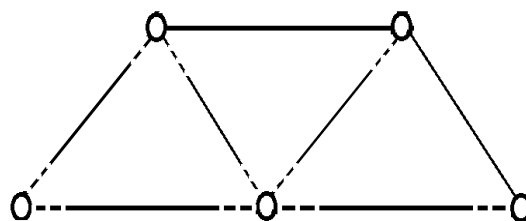
12.2. Стерженли системаларни чекли

элементлар усулида ҳисоблаш

Ясси ёки фазовий фермалар стерженли системаларнинг энг кенг тарқалган туридир. Статик аниқ ясси кфермани чекли элементлар усулида ҳисоблаш тартиби билан танишамиз. Ферманинг тугунларига ташқи кучлар қўйилган (12.1-расм). Кўп ҳолларда ферма стерженларидаги зўриқишлар ва ферма тугунларининг кўчишларини аниқлаш талаб этилади.



12.1-расм



12.2-расм

Ушбу фермани алоҳида элемент ва тугунлар йиғиндисидан ташкил топган система деб талқин этсак бўлади (12.2-расм).

Ферма стерженларидаги зўриқишлар қуйидаги мувозанат тенгламаларидан топилади:

$$\sum_k N_k \cos \alpha_k + x_j = 0; \quad \sum_k N_k \sin \alpha_k + y_j = 0;$$

$$(j=1, 2, \dots, m).$$

Узлуксизлик шарти j тугунга келиб туташувчи элементларнинг учларини кўчиши, айти чоғда, шу кўчишларнинг координат ўқларига бўлган проекциялари ўзаро тенг бўлишини талаб этади, яъни

$$u_{js_1} = u_{js_2} = \dots = u_{js_k} = \dots u_j; \quad v_{js_1} = v_{js_2} = \dots = v_{js_k} = \dots v_j,$$

Бу ерда u_j ва v_j - j – тугун кўчишларининг проекциялари;

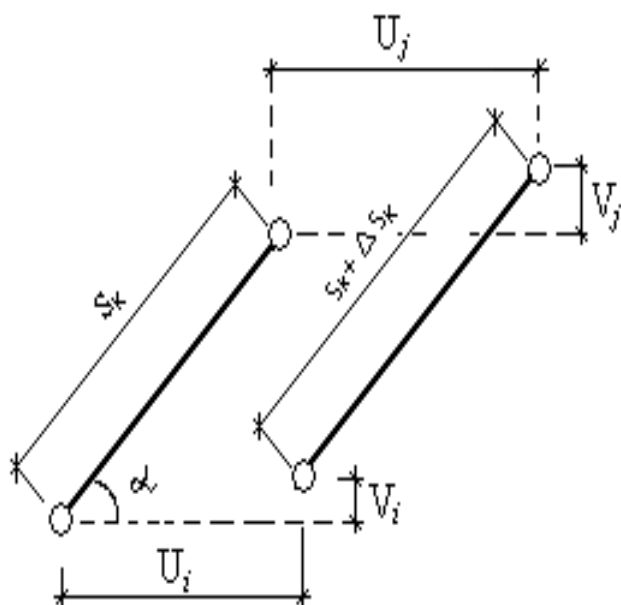
u_{js_k} ва v_{js_k} - k стержень учлари кўчишининг координат ўқларига проекцияси.

Элементларнинг узайиши билан улар учларининг кўчиши орасидаги боғланиш қуйидаги геометрик тенгламада ўз аксини топган (12.3-расм):

$$\Delta_{s_k} = (u_j - u_i) \cos \alpha_k + (v_j - v_i) \sin \alpha_k.$$

Стерженьлар узайишини бўйлама кучлар билан боғлиқлигини ифодаловчи физик тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$\Delta_{s_k} N_k S_k / (EF_k).$$



12.3-расм

Узайишлар вектори

Мувоzanат тенгламаларини матрица кўринишида ифодалаймиз:

$$(\bar{S}_c \bar{\alpha}) \bar{N} + \bar{P} = 0,$$

бу ерда

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_s \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_m \end{bmatrix},$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & & & \\ & \bar{\alpha}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\alpha}_s \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\Delta} = -\bar{\alpha}^* \bar{S}_c^* \bar{u}, \quad \text{бу ерда} \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Физик тенгламалар

$$\vec{\Delta} = \vec{G} \vec{N}, \quad \text{бу ерда } G = \begin{vmatrix} \frac{\ell_1}{EF_1} & & & \\ & \frac{\ell_2}{EF_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\ell_s}{EF_s} \end{vmatrix},$$

бундан $\vec{G} \vec{N} = -\vec{\alpha}^* \vec{S}_c^* \vec{u}$ келиб чиқади.

Охирги тенгламадан зўриқишлар билан кўчишлар орасидаги боғланишни аниқлаш мумкин:

$$\vec{N} = -\vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^* \vec{S}_c^* \vec{u}.$$

Кўчишлар орқали ифодаланган тенгламани мувозанат тенгламасига кўямиз:

$$\vec{S}_o \vec{S}_c \vec{\alpha} \vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^* \vec{S}_c^* \vec{S}_o^* \vec{v} = \vec{Q},$$

бу ердаги $\vec{V}$ кўчишлар тенграмаси $\vec{U}$ дан нолга тенг бўлган кўчишларни чиқариб ташлаш йўли билан аниқланади. $\vec{U}$ нинг ўзи қуйидаги формуладан топилади:

$$\vec{u} = \vec{S}_o^* \vec{v}.$$

Шундай қилиб, берилган кучлар маълум бўлса, ферма стерженларидаги зўриқишлар

$$\vec{N} = \vec{T} \vec{Q} \tag{a}$$

ифодадан аниқланиши мумкин,

бу ерда

$$\vec{T} = -\vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^* \vec{S}_c^* \vec{S}_o^* (\vec{S}_o \vec{S}_c \vec{\alpha} \vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^* \vec{S}_c^* \vec{S}_o^*)^{-1},$$

кўчишлар эса қуйидаги ифодадан топилади:

$$\vec{V} = \vec{L} \vec{Q}, \tag{a'}$$

бу ерда

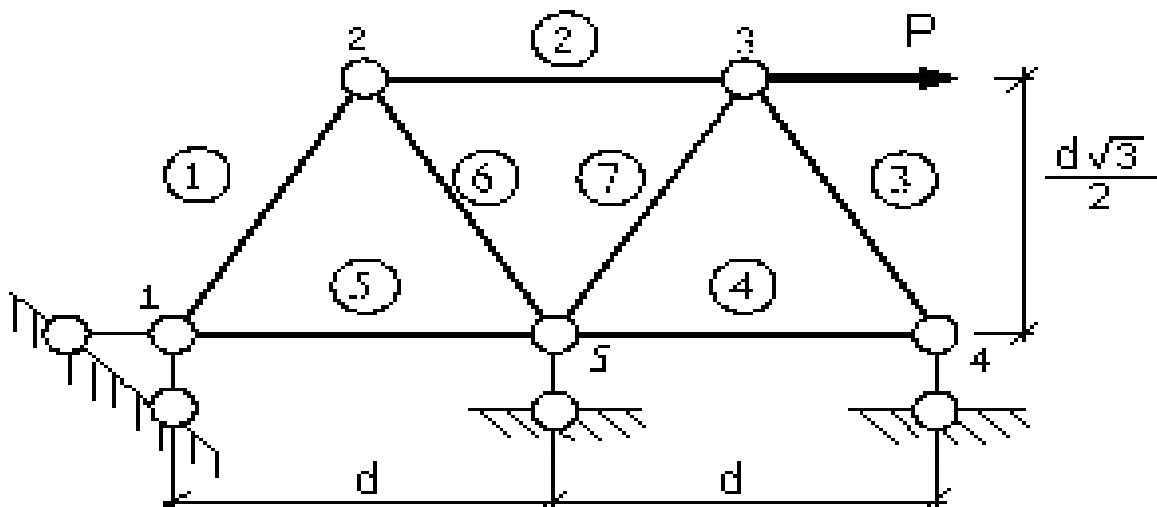
$$\vec{L} = (\vec{S}_o \vec{S}_c \vec{\alpha} \vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^* \vec{S}_c^* \vec{S}_o^*)^{-1}.$$

$\vec{L}$ – системанинг мойиллик матрицаси деб аталиб, унинг ҳар бир элементи кўчиши изланаётган нуктага қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўладиган солқиликни аниқлайди.

Мойиллик матричасининг тескараси *бикирлик матрицаси* дейилади. Бу матрица орқали зўриқишлар аниқланади.

Қўйилган масала (а) ва (б) ифодалар бўйича ҳал этиладиган бўлса, бирор асосий системани танлашга эҳтиёж қолмайди, чунки бунда масала бирорта классик усул доирасида эмас, балки умумийроқ тарзда ечилади; кучлар усули ва кўчишлар усули умумлашган усулнинг хусусий ҳоли бўлиб қолади. Масалани ечишда бундай ёндашувнинг афзаллиги шундан иборатки, бунда статик аниқ ёки статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш учун ягона алгоритмдан фойдаланилади. Бу усул ЭХМ ни қўллашда янада самаралироқ саналади.

Мисол. 12.4-расмда берилган ферманинг стерженларидаги зўриқишлар ва тугунларининг кўчишлари аниқлансин. Барча стерженларнинг кўндаланг кесимлари бир хил деб қабул қилинсин. Стержень ва тугунларнинг тартиб рақамлари расмда қайд этилган. $\bar{S}_c$, $\bar{S}_o$ ва $\bar{\alpha}$ матрицаларини ёзиб оламиз:



12.4 – расм

$$\bar{S}_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \bar{S}_o = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,866 \end{vmatrix} & & & & & & & & & \\ & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} & & & & & & & & \\ & & \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,866 \end{vmatrix} & & & & & & & \\ & & & \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} & & & & & & \\ & & & & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} & & & & & \\ & & & & & \begin{vmatrix} 0,5 \\ -0,866 \end{vmatrix} & & & \\ & & & & & & \begin{vmatrix} -0,5 \\ -0,866 \end{vmatrix} & & \end{vmatrix}$$

$\bar{G}$ матрицаси

$$\bar{G} = \frac{d}{EF} \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Матрицаларни кўпайтириб, қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\bar{S}_o \bar{S}_c \bar{\alpha} = \begin{vmatrix} -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 5 \\ -0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,866 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,866 & 0 & 0 & 0 & -0,866 \\ 0 & 0 & 0,5 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Бикирлик матрицасини тузамиз:

$$\bar{S}_o \bar{S}_c \bar{\alpha} G^{-1} (\bar{S}_o \bar{S}_c \bar{\alpha})^* = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,433 \\ -1 & 0 & 1,5 & 0 & 0,25 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & -0,433 & -0,433 \\ 0 & 0 & 0,25 & -0,433 & 1,25 & 1 \\ -0,25 & 0,433 & -0,25 & -0,433 & 1 & 2,5 \end{vmatrix}$$

Мойиллик матричасини тузамиз:

$$\bar{L} = \begin{vmatrix} 1,693 & -0,190 & 1,375 & -0,0459 & -0,818 & 0,659 \\ -0,190 & 0,726 & -0,216 & -0,00379 & 0,262 & -0,276 \\ 1,375 & -0,216 & 1,875 & -0,0722 & -1,00 & 0,750 \\ -0,0459 & -0,00379 & -0,0722 & 0,746 & 0,262 & 0,0131 \\ -0,818 & 0,262 & -1,00 & 0,262 & 1,818 & -0,909 \\ 0,659 & -0,276 & 0,750 & 0,0131 & -0,909 & 0,955 \end{vmatrix}$$

Кўчишларни аниқлаш учун (б) формуласидан фойдаланамиз:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,375 \\ -0,216 \\ 1,875 \\ -0,0722 \\ -1,00 \\ 0 \\ 0,750 \\ 0 \end{vmatrix} P.$$

Зўриқишлар (а) формуласидан аниқланади:

$$\vec{N} = -\bar{G}^{-1} (\bar{S}_o \bar{S}_c \bar{\alpha})^* \bar{Z} = \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 1,75 \\ 0,75 \\ -0,5 \\ -1,65 \end{vmatrix}$$

12.3. Ясси рамаларни ҳисоблаш

Ҳар қандай ясси рама системасини алоҳида элементлар ва тугунлар мажмуаси деб қабул қилиш мумкин. Энг аввал системанинг кучланиш – деформацияланиш ҳолатини белгиловчи матрицаларни: зўриқишлар (ички кучлар) вектори $\vec{Y}$, стержень учлари кўчиши $\vec{u}$ ва тугунлар кўчиши $\vec{\delta}$ ларни аниқлаб оламиз:

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} \vec{Y}_1 \\ \vec{Y}_2 \\ \vdots \\ \vec{Y}_s \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_s \end{bmatrix}, \quad \vec{\delta} = \begin{bmatrix} \vec{\delta}_1 \\ \vec{\delta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\delta}_m \end{bmatrix},$$

бу ерда s – система элементларининг сони;

m – системадаги тугунлар сони;

$\vec{\delta}_i - i$ тугунининг уч хил кўчиши: горизонтал ва вертикал кўчиш ҳамда оғиш ($i = 1, 2 \dots m$).

Кейин системанинг кучланиш-деформацияланиш ҳолатини ифодаловчи асосий тенгламаларни тузатамиз.

Тугунларнинг мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\bar{S}_p \bar{S}_1 \vec{Y} = \vec{P}.$$

Бундай тенгламалар сони $3m - C_o$ га тенг бўлади.

Бу ерда $\vec{P}$ - ташки кучлар вектори бўлиб, унинг элементлари сони $3m - C_o$ га тенг (C_o - таянч стерженлари сони). Ноъмалум таянч реакциялари $\vec{R}$ вектори орқали аниқланади. $\vec{C}$ - таянч стерженлари кўчишлари.

Стерженларнинг мувозанат тенгламалари:

$$\bar{S}_2 \vec{Y} = 0.$$

Буларнинг сони $3s$ га тенг.

Оралиқ шарнирларда зўриқишларнинг нолга тенглиги шarti:

$$\bar{S}_t \vec{Y} = 0.$$

Бундай тенгламаларнинг сони t га тенг бўлади.

Физик тенгламалар

$$\bar{S}_y \vec{Y} - \bar{S}_\phi \vec{u} = 0.$$

Бундай тенгламалар сони 3_s га тенг.

Тугунлардаги кўчишларнинг узлуксизлиги шarti

$$-\bar{S}_T \vec{u} + \bar{S}_\delta \vec{\delta} = 0.$$

Бундай тенгламаларнинг сони $6_s - t$ га тенг.

Чегаравий шартлар

$$\bar{S}_R \vec{\delta} = \vec{C}.$$

Бундай тенгламалар сони C_o га тенг.

Тенгламаларнинг умумий сони $3m + 12s$ га тенг.

Системанинг таянч реакциялари қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\vec{R} = \bar{S}_R \bar{S}_1 \vec{Y}.$$

Юқорида келтирилган тенгламаларни умумлаштирсак, қуйидаги тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\begin{vmatrix} \bar{S}_p & \bar{S}_1 & 0 & 0 \\ \bar{S}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{S}_t & 0 & 0 & 0 \\ \bar{S}_y & -\bar{S}_\phi & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{S}_T & \bar{S}_\delta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_R & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{Y} \\ \vec{u} \\ \vec{\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{P} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{C} \end{vmatrix}$$

Мазкур тенгламалар системаси ясси раманинг кучланиш — деформацияланиш ҳолатини тўлиқ аниқлаш имкониятини беради.

МУНДАРИЖА

Кириш	7
I – БОБ.	
1.1. Қурилиш механикаси фани ва унинг вазифалари.....	7
1.2. Қурилиш механикасининг ривожланишига оид маълумотлар.....	9
1.3. Иншоотлар ва уларнинг ҳисоблаш схемалари.....	15
1.4. Таянчлар ва юклар.....	17
1.5. Стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартлари.....	18
1.6. Стерженли системаларнинг эркинлик даражалари	23
1.7. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қондаси ва умумлашган эпюралар	26
II – БОБ. ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ НАЗАРИЯСИ	
2.1. Таъсир чизиклари ҳақида тушунча	28
2.2. Оддий балкаларда зўриқишларнинг таъсир чизиклари.....	29
2.3. Зўриқишлар қийматини таъсир чизиклари ёрдамида аниқлаш.....	37
2.4. Юк тугунлар орқали узатилганда таъсир чизикларни қуриш.....	40
2.5. Таъсир чизиклари қуришнинг кинематик усули.....	44
III – БОБ. КЎП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР	
3.1. Умумий маълумотлар.....	47
3.2. Кўп ораликли статик аниқ шарнирли балкаларни аналитик усулда ҳисоблаш.....	51
3.3. Кўп ораликли статик аниқ балкаларда таъсир чизиклари.....	53
IV – БОБ. СТАТИК АНИҚ ФЕРМАЛАР	
4.1. Фермалар тўғрисида тушунча ва уларнинг турлари.....	56
4.2. Фермаларни аналитик усулда ҳисоблаш.....	59
4.3. Ферма стерженлардаги зўриқишларнинг таъсир чизиклари.....	68
4.4. Шпренгелли фермалар.....	76
V – БОБ. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАР ВА РАМАЛАР	
5.1. Уч шарнирли системалар.....	81
5.2. Уч шарнирли аркаларнинг таянч реакцияларини аниқлаш.....	84

5.3. Уч шарнирли аркаларни аналитик усулда ҳисоблаш.....	86
5.4. Уч шарнирли арканинг макбул ўқи.....	88
5.5. Уч шарнирли аркаларни қўзғалувчи юк таъсирига ҳисоблаш.....	89
5.6. Уч шарнирли тортқичли арка ва рамаларни ҳисоблаш. Ядро моментлари.....	96
5.7. Уч шарнирли аркасимон фермаларни ҳисоблаш.....	99

VI – БОБ. КЎЧИШЛАР НАЗАРИЯСИ

6.1 Кўчишлар ва ишлар ҳақида тушунча.....	110
6.2. Ишлар ва кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теоремалар.....	115
6.3. Кўчишларни аниқлаш учун Мор формуласи ва Верешчагин усули....	119
6.4. Ҳароратнинг ўзгаришидан ва таянчларнинг чўкишидан ҳосил бўладиган кўчишлар.....	124
6.5. Кўчишларни Симпсон усулида аниқлаш.....	139

VII - БОБ СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

7.1. Статик ноаниқ системалар ҳақида тушунча.....	143
7.2. Кучлар усулининг асосий системасини танлаш.....	146
7.3. Кучлар усулининг каноник тенгламалари	149
7.4. Каноник тенглама коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлаш.....	152
7.5. Статик ноаниқ рамаларнинг M , Q ва N эпюраларини қуриш.....	155
7.6. Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда соддалаштириш усуллари.....	158

VIII – КУЧЛАР УСУЛИНИ СТАТИК НОАНИҚ БАЛКА, ФЕРМА ВА АРКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

8.1. Узлуксиз балкаларни ҳисоблаш.....	172
8.2. Узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш.....	183
8.3. Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш.....	192

8.4. Икки шарнирли аркаларни ҳисоблаш.....	197
8.5. Шарнирсиз аркаларни ҳисоблаш.....	200

IX – БОБ. СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

9.1. Усулнинг моҳияти	202
9.2. Кўчишлар усулининг асосий системаси ва каноник тенгламалари.....	205
9.3. Реакциялар ва кўчишлар орасидаги боғланиш ҳақида теорема.....	210
9.4. Каноник тенглама коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлаш.....	214
9.5. Раманинг M , Q , ва N эпюраларини қуриш	220
9.6. Кўчишлар усулида соддалаштириш	221
9.7. Статик ноаниқ рамаларни аралаш ва комбинация усулларида ҳисоблаш.....	222

X – БОБ СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

10.1. Тақрибий усуллар ҳақида тушунча	234
10.2. Рамаларни вертикал юklar таъсирига тақрибий ҳисоблаш.....	235
10.3. Рамаларни горизантал юklar таъсирига тақрибий ҳисоблаш.....	236
10.4. Тугунларни мувозанатлаш усули.....	238

XI– БОБ. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИГА МАТРИЦАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ТАТБИҚИ

11.1. Матрицалар ҳақида тушунча	243
11.2. Матрица амаллари.....	247
11.3. Статик аниқ балкаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш.....	249
11.4. Статик аниқ фермаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш.....	252
11.5. Кўчишларни аниқлашнинг матрица усули	255

XII – БОБ. ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

12.1. Усулнинг ғояси	259
12.2. Стерженли системаларни чекли элементлар усулида ҳисоблаш.....	262
12.3. Ясси рамаларни ҳисоблаш	267

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Введение	7
1.1 Предмет строительной механики и её задачи	7
1.2 Пути развития строительной механики	9
1.3 Сооружения и их расчетные схемы	15
1.4 Опоры и нагрузки	17
1.5 Условия геометрической неизменяемости стержневых систем.....	18
1.6 Степени свободы стержневых систем	23
1.7 Принцип независимости действия сил и огибающие эпюры	26
Глава II. Теория линий влияния	28
2.1 Понятия о линиях влияния	28
2.2 Линии влияния усилий по линиям влияния	29
2.3 Определение усилий по линиям влияния	37
2.4 Построение линий влияния при узловой передаче нагрузок	40
2.5 Кинематический способ построения линий влияния.....	44
Глава III. Многопролетные статически определимые балки	47
3.1 Общие сведения	47
3.2 Аналитический расчет многопролетных шарнирных балок	51
3.3 Линии влияния в многопролетных балках	53
Глава IV. Статически определимые фермы	56
4.1 Сведения о фермах и их классификация	56
4.2 Аналитический расчет ферм	59
4.3 Линии влияния усилий в фермах	68
4.4 Шпренгельные фермы	76
Глава V. Трехшарнирные арки и рамы	81
5.1 Трехшарнирные системы	81
5.2 Определение опорных реакций трехшарнирных арок	84
5.3 Аналитический расчет трехшарнирных арок	86
5.4 Рациональный ось трехшарнирной арок	88

5.5 Расчет трехшарнирных арок на действие подвижных нагрузок	89
5.6 Расчет трехшарнирных арок и рам с затяжкой	96
5.7 Расчет трехшарнирных арочных ферм	99
Глава VI. Теория перемещений	110
6.1 Понятия о перемещениях и работах	110
6.2 Теоремы о взаимности работ и перемещений	115
6.3 Формула Мора для определения перемещений и правило Верещагина.....	119
6.4 Перемещения возникающие в следствии изменения температур и осадка опор	124
6.5 Определение перемещений по способу Симпсона.....	139
Глава VII. Расчет статически неопределимых рам методом сил	143
7.1 Понятие о статически не определимых системах	143
7.2 Выбор основной системы метода сил	146
7.3 Канонические уравнения метода сил	149
7.4 Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	152
7.5 Построение эпюр M, Q и N для статически неопределимых рам.....	155
7.6 Способы упрощения при расчетах статически неопределимых рам.....	158
Глава VIII. Применение метода сил при расчетах статически неопределимых балок, ферм и акор	172
8.1 Расчет неразрезных балок.....	172
8.2 Расчет неразрезных балок методом моментных фокусов.....	183
8.3 Расчет статически неопределимых ферм.....	192
8.4 Расчет двухшарных арок	197
8.5 Расчет безшарнирных арок.....	200
Глава IX. Расчет статически неопределимых рам методом переменных.	
9.1 Сущность метода	202
9.2 Основная система метода перемещений и канонические уравнения.....	205

9.3 Теорема о взаимности реакций и перемещений.....	210
9.4 Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.....	214
9.5 Построение эпюр M,Q и N статические неопределимых рам.....	220
9.6 Упрощения в методе перемещений	221
9.7 Расчет статические неопределимых рам смешанным и комбинированным методами.....	222
Глава X. Приближенные способы расчета статически неопределимых рам.	
10.1 Понятия о приближенных способах	234
10.2 Приближенный расчет рам на действие вертикальных сил.....	235
10.3 Приближенный расчет рам на действие горизонтальных сил.....	236
10.4 Способ уравнивания узлов.....	238
Глава XI. Применение теории матриц в задачах строительной механики.	
11.1 Понятия о матрицах.....	243
11.2 Матричное исчисление.....	247
11.3 Расчет статически определимых балок матричным способом.....	249
11.4 Расчет статически определимых ферм матричным способом	252
11.5 Определение перемещений матричным способом	255
Глава XII. Метод конечных элементов.....	259
12.1 Идея метода.....	259
12.2 Расчет стержневых систем методом конечных элементов	262
12.3 Расчет плоских рам.....	267

CONTENTS

Chapter 1. Kinematic analyses of constructions.....	7
1.1 Buildings and their calculating scheme.....	7
1.2 Supports and loads.....	9
1.3 Terms of geometrical invariable fars system.....	15
1.4 Degrees of freedom of fars systems.....	17
1.5 Principles of independent force action.....	18
1.6 Degree of the liberty of the pivotal systems.....	23
1.7 Principle to independence of the action of power and bending around эпюры.....	26
Chapter 2. Theory of lines of influences.....	28
2.1 Concepts of influence lines.....	28
2.2 Line Influence of simple beams.....	29
2.3 Deficition of force by influence lines.....	37
2.4 Construction of line Influence transferring of loads.....	40
2.5 Kinematicheskiiy way of the influence line building.....	44
Chapter 3. Calculation of multy spam statistic determinable beams.....	47
3.1 General information	47
3.2 Calculation of multy spam statistic determinable beams.....	51
3.3 Line influence in multy spam statistic determinable beams.....	53
Chapter 4. Statistical definite frames.....	56
4.1 General concepts.....	56
4.2 Analytical calculation of frames for moving loads.....	59
4.3 Influence lines of efforts in far frames.....	68
4.4 Truss frames.....	76
Chapter 5. Three hingled arches and frames.....	81
5.1 Three hingled arches systems.....	81
5.2 Determinate of support reaction of Three hingled arches.....	84
5.3 Analytical calculation of three hingled arches.....	86

5.4	Pational arches of Three hinged arches.....	88
5.5	Calculation of Three hinged arches for action of moving loads.....	89
5.6	Calculation of three hingle and frame with frightening.....	96
5.7	Calculation of three hingle and frames.....	99
Chapter 6.	Theary of movement	110
6.1	Conseption about movement and work.....	110
6.2	Theary about reciprocity of work and movement.....	115
6.3	Formula of work for Determinate movement and rules of vereshagina.....	119
6.4	Movement occur changing of temperature and seeting of bearing.....	124
6.5	Determinate of movement by Simpson.....	139
Chapter 7.	Calculation of statistic undefined system by force.....	143
7.1	Conception of statistic indeterminable frame by methods of force.....	143
7.2	Choice of main system force method.....	146
7.3	Comical eqnation of force method.....	149
7.4	Determinate of coefficient and free members of conocical equation	152
7.5	Construction curve of M,Q and N for statistic indeterminable frame.....	155
7.6	Methods of simplication on calculation indeterminable frame.....	158
Chapter 8.	Application of force methods Calculation of statistic indeterminable beams, frames and arches	172
8.1	Calculation of continuous beams.....	172
8.2	Calculation of continuous beams by methods of moment focuses.....	189
8.3	Calculation of statistic indeterminable Frames.....	192
8.4	Calculation of twocirrlled arches	197
8.5	Calculation of cireled arches.....	200
Chapter 9.	Calculation of indeterminable frames by changing methods.....	202
9.1	Essence of methods.....	202
9.2	Main system of methods of movement and canonical equation.....	205
9.3	Theary about reciprocity of work and movement.....	210
9.4	Determinate of coefficient and free members of conocical equation	214
9.5	Construction curve of M,Q and N for statistic indeterminable frame.....	220

9.6 Simplefication in methods of movement.....	221
9.7 Calculation of statistic indeterminable frames mixed and complex methods.....	222
Chapter 10. Approching methods of Calculation of statistic indeterminable frames.....	234
10.1 Conception Approching methods.....	234
10.2 Approching Calculation of frames to action.....	235
10.3 Approched Calculation of frame to action of corizontal force	236
10.4 Methods of balancing knot.....	238
Chapter 11. Application of theory matrix in tasks of constructional mechanics.....	243
11.1 Conception of matrix.....	243
11.2 Matrix calculus.....	247
11.3 Calculation of statistical determinable beams by Matrix methods.....	249
11.4 Calculation of statistical determinable frames by Matrix methods.....	252
11.5 Determinatee movement by matrix methods.....	255
Chapter 12. Methods of final elements.....	259
12.1 Method idea	259
12.2 Calculation of bar system by methods of final element.....	262
12.3 Calculation of flat frame.....	267