

Н. И. ЛЕВИТСКИЙ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

2-Е ИЗДАНИЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве учебного пособия
для студентов университетов
и высших технических учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 34.41
Л36
УДК 531.8

Левитский Н. И. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 592 с.— ISBN 5-02-014188-7.

Излагаются методы исследования и проектирования современных машин и приборов в объеме, предусмотренном программой курса «Теория механизмов и машин» для механико-математических факультетов университетов. Основные разделы книги: исследование пространственных механизмов, колебания в машинах, проектирование схем механизмов, включая гидравлические и пневматические механизмы, теория манипуляторов и промышленных роботов, основы построения систем управления машин-автоматов.

Во втором издании более подробно рассмотрены колебания в машинах, устройства для защиты от вибраций, манипуляторы и промышленные роботы, алгоритмы вычислений на ЭВМ.

Для студентов университетов, преподавателей и аспирантов вузов; может быть использована конструкторами при расчете новых механизмов и машин. Табл. 15. Ил. 230.

Рецензент доктор технических наук *Е. П. Солдаткин*

Учебное издание

ЛЕВИТСКИЙ Николай Иванович

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*
Редактор *Н. П. Рябенская*
Художественный редактор *Т. Я. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *Н. В. Румянцева, Л. С. Сомова*

ИБ М 32671

Сдано в набор 13.01.89. Подписано к печати 11.05.90. Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 37. Усл. кр.-отт. 37. Уч.-изд. л. 38,13. Тираж 29 600 экз. Заказ № 558. Цена 1 р. 60 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск-77, Станиславского, 25

Л $\frac{2702000000-059}{053(02)-90}$ 77-90

ISBN 5-02-014188-7

© Издательство «Наука»,
Главная редакция
физико-математической литературы, 1980;
с изменениями, 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	8
Предисловие к первому изданию	10
Введение	11

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СТРУКТУРА И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Глава 1. Структура механизмов	18
§ 1. Основные понятия теории механизмов и машин	18
§ 2. Основные виды механизмов	26
§ 3. Число степеней свободы механизма	34
§ 4. Структурный синтез механизмов	38
§ 5. Неголономные связи в механизмах	44
Глава 2. Кинематический анализ плоских механизмов с низшими парами	50
§ 6. Определение положений звеньев плоских механизмов, образованных из незамкнутых кинематических цепей	50
§ 7. Определение положений звеньев плоских механизмов с замкнутыми контурами	54
§ 8. Определение скоростей и ускорений в плоских механизмах с низшими парами аналитическими методами	64
§ 9. Планы скоростей механизмов с группами второго класса	66
§ 10. Планы ускорений механизмов с группами второго класса	73
§ 11. Применение точек Ассура при построении планов скоростей и ускорений	76
§ 12. Метод ложных положений при построении планов скоростей и ускорений	78
Глава 3. Кинематический анализ пространственных механизмов с низшими парами	80
§ 13. Матрицы кинематических пар	80
§ 14. Матрицы кинематических соединений	85
§ 15. Определение положений звеньев пространственной незамкнутой кинематической цепи	89
§ 16. Определение положений звеньев пространственных механизмов с замкнутыми контурами	92
§ 17. Определение скоростей и ускорений в пространственных механизмах с низшими парами	96
Глава 4. Кинематический анализ механизмов с высшими парами	99
§ 18. Определение положений звеньев плоских механизмов с высшими парами	99
§ 19. Определение скоростей и ускорений в плоских механизмах с высшими парами	102

§ 20. Определение передаточных отношений в плоских фрикционных и зубчатых механизмах	105
§ 21. Определение скоростей и ускорений в пространственных механизмах с высшими парами	111

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

Глава 5. Трение в кинематических парах	114
§ 22. Общие сведения о силах трения	114
§ 23. Жидкостное трение	116
§ 24. Силы трения в кинематических парах	120
Глава 6. Силовой анализ механизмов	124
§ 25. Определение реакций в кинематических парах	124
§ 26. Силовой анализ с учетом трения	132
§ 27. Коэффициент полезного действия механизма	134
Глава 7. Уравнения движения механизмов с голономными связями	137
§ 28. Уравнения движения механизма с одной степенью свободы	137
§ 29. Уравнения движения механизма с несколькими степенями свободы	146
§ 30. Уравнения движения механизма с учетом трения	152
Глава 8. Уравнения движения механизмов с неголономными связями	155
§ 31. Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями	155
§ 32. Уравнения Аппеля	159
§ 33. Уравнение кинетической энергии и общее уравнение динамики	161
§ 34. Кинестатический принцип составления уравнений движения механизмов	162
Глава 9. Общие методы решения линейных уравнений движения	163
§ 35. Типовые линейные уравнения движения с постоянными коэффициентами	163
§ 36. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	166
§ 37. Решение однородных уравнений движения аperiodического типа	169
§ 38. Решение линейных уравнений движения при свободных колебаниях	173
§ 39. Решение линейных уравнений движения при вынужденных колебаниях	179
§ 40. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	184
Глава 10. Динамические характеристики механизмов	187
§ 41. Передаточные функции	187
§ 42. Частотные характеристики	190
§ 43. Устойчивость движения в механизмах	196
Глава 11. Общие методы решения нелинейных уравнений движения	202
§ 44. Методы линеаризации при решении уравнений движения	202
§ 45. Метод гармонического баланса и метод Галеркина	205
§ 46. Метод малого параметра	209
§ 47. Метод медленно меняющихся параметров	214
§ 48. Метод точечных преобразований	215
§ 49. Численные и графоаналитические методы	218

Глава 12. Решение уравнений движения при случайных воздействиях	228
§ 50. Вероятностные характеристики случайных величин	228
§ 51. Вероятностные характеристики случайных функций	232
§ 52. Основные виды случайных процессов	235
§ 53. Определение вероятностных характеристик обобщенных координат механизма по заданным вероятностным характеристикам внешних сил	237
Глава 13. Динамика механизмов с гидроприводом	243
§ 54. Типовая схема объемного гидропривода	243
§ 55. Уравнение движения объемного гидропривода	245
§ 56. Безразмерное уравнение движения объемного гидропривода	249
Глава 14. Динамика механизмов с пневмоприводом	251
§ 57. Уравнение расхода газа	251
§ 58. Динамика односторонних пневматических приводов	255
§ 59. Динамика двусторонних пневматических приводов	259
§ 60. Безразмерные уравнения движения механизмов с пневмоприводом	260
Глава 15. Динамика механизмов с электроприводом	262
§ 61. Уравнения Лагранжа — Максвелла	262
§ 62. Характеристики электродвигателей	266
§ 63. Динамика механизмов с двигателем ограниченной мощности	273
Глава 16. Динамика механизмов с переменными массами	279
§ 64. Уравнение движения точки переменной массы	279
§ 65. Уравнение Лагранжа второго рода для систем с переменными массами	282
§ 66. Уравнение движения плоского механизма с переменными массами звеньев	284

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

Глава 17. Фрикционные колебания в механизмах	289
§ 67. Колебания, вызываемые скачком силы трения	289
§ 68. Колебания при силах трения, зависящих от скорости скольжения	293
Глава 18. Колебания в механизмах с упругими муфтами и валами	297
§ 69. Колебания в механизмах с упругой муфтой	297
§ 70. Колебания в механизмах с упругими валами	304
Глава 19. Колебания в рычажных механизмах	311
§ 71. Колебания в шарнирном четырехзвеннике с упругими звеньями	311
§ 72. Малые колебания в рычажных механизмах приборов	314
Глава 20. Колебания в механизмах регуляторов скорости	318
§ 73. Схемы регулирования угловой скорости звена механизма	318
§ 74. Колебания в механизме регулятора скорости с тахогенератором	322
§ 75. Колебания в механизме центробежного регулятора	325
Глава 21. Колебания в кулачковых механизмах	328
§ 76. Уравнения движения кулачкового механизма с упругим толкателем	328
§ 77. Типовые законы движения выходного звена в кулачковых механизмах	329

§ 78. Колебания в кулачковом механизме при косинусоидальном законе изменения ускорения толкателя	332
Глава 22. Вибрационные транспортеры	333
§ 79. Безударные вибрационные транспортеры	333
§ 80. Вибрационные транспортеры с подбрасыванием груза	338
Глава 23. Уравновешивание масс в механизмах и машинах	341
§ 81. Уравновешивание роторов	341
§ 82. Уравновешивание масс механизма	349
Глава 24. Уравновешивание сил в механизмах	355
§ 83. Уравновешивание сил на входном звене	355
§ 84. Уравновешивание сил на выходном звене	360
Глава 25. Виброизоляция	364
§ 85. Одноосный виброизолятор	364
§ 86. Виброизоляция при случайном воздействии	372
§ 87. Управляемые системы виброизоляции	376
Глава 26. Динамическое гашение колебаний	383
§ 88. Пружинный динамический гаситель колебаний	383
§ 89. Ударные гасители колебаний	385
ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ	
СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ	
Глава 27. Общие методы синтеза механизмов	391
§ 90. Синтез механизмов по методам оптимизации с применением ЭВМ	391
§ 91. Синтез механизмов по методу приближения функций	400
Глава 28. Синтез механизмов с низшими парами	408
§ 92. Синтез передаточных механизмов	408
§ 93. Синтез механизмов по положениям звеньев	418
§ 94. Синтез направляющих механизмов	425
Глава 29. Синтез механизмов прерывистого движения	430
§ 95. Синтез шарнирных механизмов с выстоями	430
§ 96. Мальтийские механизмы	432
§ 97. Синтез зубчато-рычажных механизмов	435
Глава 30. Синтез зубчатых зацеплений	437
§ 98. Основы синтеза зацеплений	437
§ 99. Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача	452
§ 100. Другие виды цилиндрических зубчатых передач	473
§ 101. Конические зубчатые передачи	479
§ 102. Зубчатые передачи со скрещивающимися осями вращения звеньев	485
Глава 31. Синтез зубчатых и фрикционных механизмов	490
§ 103. Синтез планетарных механизмов	490
§ 104. Синтез бесступенчатых фрикционных передач с замкнутым дифференциалом	501
Глава 32. Синтез кулачковых механизмов	504
§ 105. Определение основных размеров кулачковых механизмов	504
§ 106. Определение профиля кулачка	512

Глава 33. Синтез гидравлических механизмов	519
§ 107. Синтез тормозного устройства по Чебышеву	519
§ 108. Синтез тормозного устройства по методу квадратического при- ближения	523

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАШИН-АВТОМАТОВ

Глава 34. Системы управления машин-автоматов	527
§ 109. Управление от копиров и числовое программное управление	527
§ 110. Системы управления по времени и по пути	532

Глава 35. Логический синтез систем управления машин-автоматов	536
§ 111. Логические элементы машин-автоматов	536
§ 112. Основные законы алгебры логики	541
§ 113. Синтез систем управления по пути	546
§ 114. Синтез избирательных систем управления машин-автоматов	557

Глава 36. Манипуляторы и промышленные роботы	562
§ 115. Виды манипуляторов и промышленных роботов	562
§ 116. Технические показатели манипуляторов	566
§ 117. Кинематика и динамика манипуляторов	568
§ 118. Системы управления манипуляторов	575

Приложение. Основные термины теории механизмов	583

Именной указатель	587

Предметный указатель	587

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание книги переработано и дополнено в соответствии с изменениями, внесенными в программы курса «Теория механизмов и машин» для студентов университетов и высших технических учебных заведений. Эти изменения связаны с развитием робототехники и повышением требований к защите от вредных колебаний машин, инструментов и сооружений.

Полной переработке подверглась глава «Манипуляторы и промышленные роботы», и соответственно дополнена глава «Кинематический анализ пространственных механизмов с низшими параметрами». Во второй части «Динамический анализ механизмов» расширены сведения по решению линейных уравнений движения и по определению динамических характеристик. Добавлена новая глава «Решение уравнений движения при случайных воздействиях». Все сведения по колебаниям механизмов выделены в отдельную часть, в которой более подробно рассмотрены колебания в кулачковых механизмах, изложены основы теории вибрационных транспортеров, значительно расширены сведения по виброизоляции (включая управляемые виброзащитные системы), по динамическому гашению колебаний и по уравновешиванию сил.

В целях широкого применения вычислительной техники все основные задачи анализа и синтеза механизмов решаются аналитическими методами с построением алгоритмов вычислений на ЭВМ. Графические и графоаналитические методы служат лишь для лучшего понимания физического смысла предлагаемых алгоритмов, на основании которых строятся программы вычислений применительно к конкретным типам ЭВМ.

Наибольший эффект дает применение ЭВМ для решения многопараметрических и многокритериальных задач синтеза механизмов. Поэтому задачи синтеза механизмов, требующие обязательного применения ЭВМ, выделены в отдельный параграф «Синтез механизмов по методам оптимизации с применением ЭВМ», где изла-

гаются особенности построения алгоритмов для нахождения оптимальных сочетаний параметров механизма (выбор целевых функций и ограничений, определение локальных и глобальных экстремумов, применение штрафных функций и т. п.).

Все примеры по кинематике и динамике манипуляторов принадлежат Д. Н. Левитскому.

Термины и буквенные обозначения даны по рекомендациям Комитета научно-технической терминологии АН СССР (Теории механизмов и машин. Терминология. Буквенные обозначения величин.— М.: Наука, 1984, вып. 99; Механические колебания. Терминология. Буквенные обозначения величин.— М.: Наука, 1987, вып. 102).

Автор выражает глубокую признательность Е. И. Солдаткину за ценные замечания по рукописи книги.

Н. И. Левитский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга написана по программе учебного курса, читаемого для студентов механико-математического факультета тех университетов, в которых ведется подготовка специалистов по теории механизмов и машин. Она может быть полезна также для преподавателей технических вузов, аспирантов, научных работников и инженеров, интересующихся проблемами расчета и проектирования механизмов и машин.

Основу книги составляют сведения, изложенные в учебнике автора «Курс теории механизмов и машин» (М.: Высшая школа, 1978 г.), написанном совместно с О. Н. Левитской, для студентов технических вузов. Однако более высокая физико-математическая подготовка большей части предполагаемых читателей позволила изложить все проблемы теории механизмов и машин с привлечением математического аппарата теории функций, аналитической механики, теории колебаний и автоматического управления.

Расчетные формулы, справочные данные и примеры приведены только там, где они необходимы для понимания сущности общих методов теории механизмов и машин. Термины и условные обозначения даны в соответствии с Государственными стандартами СССР и рекомендациями Международной организации по стандартизации.

Н. И. Левитский

ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов и машин — научная основа создания новых механизмов и машин. Ведущей отраслью современной техники является машиностроение. По уровню развития машиностроения судят о развитии производительных сил в целом. Прогресс машиностроения в свою очередь определяется созданием новых высокопроизводительных и надежных машин. Решение этой важнейшей проблемы основывается на комплексном использовании результатов многих научных дисциплин и, в первую очередь, *теории механизмов и машин*, под которой понимается *наука об общих методах исследования свойств механизмов и машин и проектирования их схем*.

Наиболее развита к настоящему времени та ее часть, которая называется *теорией механизмов*. *Механизм* можно кратко определить как *устройство для преобразования механического движения твердых тел*. В теории механизмов изучаются такие методы исследования свойств механизмов и проектирования их схем, которые являются общими для всех (или для определенных групп) механизмов независимо от конкретного назначения машин, прибора или аппарата. Например, один и тот же механизм для преобразования вращательного движения, выполненный в виде зубчатых колес, может применяться в автомобилях, часах и станках.

Другую часть теории механизмов и машин составляет *теория машин*, в которой, как и в теории механизмов, рассматриваются общие методы проектирования схем машин. Обе части теории механизмов и машин неразрывно связаны между собой, так как механизмы составляют основу почти любой машины.

Качество создаваемых машин и механизмов в значительной мере определяется полнотой разработки и использования методов теории механизмов и машин. Чем более полно будут учтены при построении механизмов и машин критерии производительности, надежности, точности и экономичности, тем совершеннее будут получаемые конструкции.

Примеры механизмов современной техники. Механизмы как устройства для преобразования движения применялись уже в глубокой древности. Достаточно указать на ловушки для зверей в каменном веке. Ко времени Леонардо Да Винчи (1452—1519) в

принципе уже были известны почти все основные типы механизмов. Дальнейшее развитие техники происходило преимущественно не путем создания новых схем, а путем придания им новых качеств. Отметим три примера.

1. *Механизмы манипуляторов*, т. е. устройств, воспроизводящих движения рук человека. В атомной технике они позволяют выполнять различные манипуляции с радиоактивными материалами, причем оператор, управляющий движением манипулятора, находится в безопасной зоне. Автоматически управляемые манипуляторы применяются также для подводных работ на большой глубине и для работ в космосе. В последние годы по типу манипуляторов стали создаваться *промышленные роботы*, заменяющие человека при работе во вредных условиях, при выполнении утомляющих операций на быстродействующих конвейерах и т. п. Роботы отличаются от обычных машин-автоматов и автоматических вспомогательных устройств (загрузочных, контрольных, упаковочных и т. п.) тем, что их можно быстро перенастраивать на выполнение различных операций. Рабочие органы манипуляторов и роботов совершают, как правило, сложные пространственные движения. В некоторых случаях рабочие органы должны «ощущать» соприкосновение с перемещаемым или обрабатываемым предметом, что достигается соответствующим построением системы управления.

2. *Самонастраивающиеся механизмы*, в которых законы движения рабочих органов автоматически изменяются при изменении рабочего процесса так, что условия его выполнения оказываются оптимальными. В простейшем случае эти требования удовлетворяются, если при изменении рабочего процесса соответственно изменяется скорость движения рабочего органа. Тогда можно воспользоваться известным механизмом бесступенчатого изменения скорости, построив систему связи между механизмом и рабочим процессом так, чтобы каждому возможному состоянию рабочего процесса соответствовало оптимальное значение скорости рабочего органа механизма. В более сложных случаях для того чтобы рабочий процесс протекал в наилучших условиях, надо изменять не только скорость, но и весь закон движения рабочего органа, включая и траектории движения отдельных точек. В самонастраивающихся механизмах эти требования удовлетворяются автоматическим изменением одного или нескольких размеров, определяющих схему механизма.

3. *Механизмы медицинских аппаратов*, заменяющих физиологические функции органов человека. Такие аппараты, как искусственные легкие, массажер сердца, применяющийся при «оживлении» человека, аппарат искусственного кровообращения и многие другие, насыщены различными механизмами, главной особенностью которых является возможность регулирования движения рабочего органа «на ходу», т. е. без остановки его движения. Разно-

образцы также механизмы современных протезов. Механические руки, послужившие образцом для создания манипуляторов, могут приводиться в движение от биотоков (биопротезы) и ощущать силу зажатия взятого предмета. Протезы для ног представляют теперь механизмы, которые приводятся в движение миниатюрными электродвигателями и полностью имитируют движение ног при ходьбе.

Перечислить все механизмы современной техники, конечно, невозможно, но уже из приведенных примеров видно, что решение новых задач современной техники связано не столько с созданием новых механизмов, сколько с приданием им новых качеств. Отсюда следует практическая важность изучения свойств механизмов и методов проектирования их схем.

Основные проблемы теории механизмов и машин. Задачи теории механизмов и машин очень разнообразны, но важнейшие из них можно сгруппировать по трем разделам (проблемам): анализ механизмов, синтез механизмов и теория машин-автоматов.

Анализ механизма состоит в исследовании кинематических и динамических свойств механизма по заданной его схеме, а *синтез механизма* — в проектировании схемы механизма по заданным его свойствам. Следовательно, всякая задача синтеза механизма является обратной по отношению к задаче анализа. Разделение теории механизмов на анализ и синтез носит условный характер, так как выбор схемы механизма и определение его параметров часто выполняются путем сравнительного анализа различных механизмов для воспроизведения одних и тех же движений. Этот сравнительный анализ возможных вариантов механизма составляет теперь основу методов синтеза с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ). Кроме того, в процессе синтеза механизма приходится выполнять проверочные расчеты, используя методы анализа. Тем не менее методически удобно различать задачи анализа и синтеза механизмов, так как это разделение позволяет объединять задачи теории механизмов в однородные группы по признаку общности методов.

Иногда теорию механизмов подразделяют на *кинематику механизмов* и *динамику механизмов* по аналогии с делением курса теоретической механики. С развитием методов синтеза механизмов это деление утрачивает свое значение, так как для многих механизмов проектирование их схем выполняется с одновременным учетом как кинематических, так и динамических условий.

Появление теории механизмов как науки, имеющей характерные для нее методы исследования и проектирования механизмов, относится ко второй половине восемнадцатого столетия. Сперва развивались методы анализа механизмов, как более простые. Лишь с середины девятнадцатого столетия стали развиваться также методы синтеза механизмов. Особенно плодотворным оказался общий метод аналитического синтеза механизмов, предложенный

П. Л. Чебышевым *). Постановка задачи синтеза по Чебышеву в сочетании с возможностями, которые предоставляют современные ЭВМ, обеспечивает практически решение любой задачи синтеза механизмов по заданным кинематическим свойствам. Значительно сложнее решать задачи синтеза механизмов по заданным динамическим свойствам. Необходимость их учета вызывается непрерывным ростом нагруженности и быстроходности механизмов, а также общим повышением требований к качеству выполняемого рабочего процесса. Учет динамических свойств потребовал рассмотрений влияния на движение механизма упругости его частей, переменности их масс, зазоров в подвижных соединениях и т. п. В связи с появлением механизмов, в которых для преобразования движения используются жидкости и газы, динамика механизмов стала основываться не только на законах механики твердого тела, но и на законах течения жидкости и газов. Неудивительно поэтому, что, несмотря на большое число публикуемых работ по динамике механизмов, проблема синтеза механизмов по их динамическим свойствам еще далека от завершения.

Развитие теории машин-автоматов связано главным образом с совершенствованием методов построения схемы системы управления, определяющей согласованность движения исполнительных органов. Особую ценность имеет создание методов построения самонастраивающихся схем управления, в которых программа управления автоматически корректируется с изменением рабочего процесса. К теории машин-автоматов относится также разработка методов проектирования промышленных роботов, которые начинают применяться во многих отраслях техники.

По всем трем указанным разделам теории механизмов и машин ведется интенсивная работа во многих странах мира. Для организации и проведения международных совещаний и конгрессов, а также для обмена опытом и совместных работ (в первую очередь по терминологии, стандартизации, теории манипуляторов и по проблемам высшего образования) в 1969 г. создана *Международная организация по теории механизмов и машин (ИФТОММ)*.

Значение курса теории механизмов и машин для университетского образования. Курс теории механизмов и машин в советской высшей школе занимает особое место. Он является связующим звеном между циклом общенаучных дисциплин и циклом специальных дисциплин, в которых изучаются машины и приборы отдельных отраслей техники. В основе курса лежат фундаментальные положения математики и механики. Эти положения развиваются и дополняются применительно к конкретным техническим задачам, которые возникают при проектировании машин.

*) Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) — знаменитый русский математик и механик, автор работ по теории приближения функций, теории чисел и теории вероятностей. Написал 15 работ по теории механизмов.

Существенно, что в курсе теории механизмов и машин не только используются известные положения общей механики, но и дается решение таких задач, которые не излагаются в предшествующем курсе теоретической механики. К таким задачам в первую очередь надо отнести все задачи синтеза механизмов как динамического, так и кинематического.

При решении задач синтеза механизмов широко используется современный математический аппарат теории функций и вычислительной техники. Математические методы пронизывают также изложение разделов анализа механизмов и построения систем управления механизмами машин-автоматов. Поэтому курс теории механизмов и машин по праву относится к механико-математическим дисциплинам.

В то же время объекты изучения — механизмы, машины и системы машин — определяют инженерную направленность курса, и в связи с этим при рассмотрении любой задачи теории механизмов и машин особое значение имеет правильный выбор допускаемых упрощений и основных критериев, по которым оценивается качество исследуемых и проектируемых объектов.

Следовательно, курс теории механизмов и машин относится не только к механико-математическим, но и к общепромышленным дисциплинам. Он читается как в университетах, так и во вузах.

Если обратиться к программам курсов, читаемых в университетах и во вузах, то можно заметить, что при всей общности их содержания они значительно отличаются по объему и глубине изложения даже основных разделов курса. Однако эти различия программ вполне оправдываются различиями в профиле специалистов, выпускаемых вузами и университетами.

Во вузах полный курс теории механизмов и машин обычно читается для тех специальностей, по которым ведется подготовка конструкторов. Им достаточно знать алгоритмы решения типовых задач теории механизмов и машин, допущения, принятые при их построении, и рекомендуемые области применения.

Более высокие требования предъявляются к выпускникам университетов, которые, как правило, идут в научно-исследовательские институты и на кафедры вузов. Поэтому программы университетских курсов предусматривают глубокое рассмотрение механико-математических методов теории механизмов и машин с одновременным изучением связи этих методов с техническими требованиями, предъявляемыми к конкретным машинам и приборам.

Программа курса теории механизмов и машин для вузов в какой-то мере представляется сокращенным изложением университетских программ. Значительное развитие теории механизмов и машин как научной дисциплины за последние десятилетия естественно нашло свое отражение как во вузовских, так и в университетских программах.

Эти программы представляют основу преподавания курса теории механизмов и машин в советской высшей школе. Все остальные средства преподавания, как-то: учебники, лаборатории, курсовые проекты и календарные планы занятий — являются производными от программ курса.

Анализ тех изменений и дополнений, которые внесены в программы университетских и вузовских курсов, показывает, что, несмотря на жесткие рамки объема учебных занятий, за последние годы удалось приблизить содержание учебного курса к уровню развития теории механизмов и машин как научной дисциплины.

В первую очередь надо отметить, что впервые в программу курса и в учебники внесены вопросы построения систем управления механизмами. Эти дополнения важны в двух отношениях. Во-первых, нельзя говорить о полноте изложения теории механизмов, если изучается только их кинематика и динамика. Выбор определенного типа механизма и установление требований, предъявляемых к проектированию его схемы, можно обосновать лишь с учетом свойств той системы, которая будет управлять согласованным движением всех механизмов конкретной машины.

Во-вторых, построение системы управления механизмами является важнейшей составной частью общей теории машин-автоматов, и с расширением этого раздела можно уже обоснованно говорить, что в курсе теории механизмов и машин изучаются общие методы исследования и проектирования не только механизмов, но и машин. Это утверждение основывается на том, что теория построения систем управления механизмами машин-автоматов содержит решение таких задач, которые являются общими для всех машин-автоматов независимо от конкретной области их применения. Другими словами, в теории машин, как и в теории механизмов, изучаются общие методы исследования и проектирования систем управления, и этим курс теории механизмов и машин отличается от специальных дисциплин, изучающих конкретные виды машин.

Важным дополнением к разделу «Основы теории машин-автоматов» является изложение теории промышленных роботов и манипуляторов, получивших в настоящее время уже довольно широкое распространение как в обрабатывающей промышленности, так и в специальных технических устройствах для работы в космосе, под водой и в агрессивных средах. Изучение промышленных роботов и манипуляторов потребовало изменений и в разделах анализа и синтеза механизмов, так как кинематические схемы механизмов манипуляторов и роботов представляются пространственными системами со многими степенями свободы. Расширение этих разделов было выполнено, с одной стороны, путем полного рассмотрения аналитической кинематики пространственных механизмов, а с другой стороны — путем включения в курс дополнительных сведений по динамическому анализу систем со многими степенями свободы.

Необходимость расширения раздела, в котором изучается динамика механизмов, и, в частности, колебательные процессы в машинах, вызывается не только появлением роботов и манипуляторов, но и возросшими требованиями к анализу и синтезу тяжелонагруженных и быстроходных современных машин. Однако во втузовских курсах дать достаточно полное изложение теории колебаний пока не представляется возможным из-за недостаточного объема учебных занятий. Только в университетских курсах удастся дать решения задач динамического исследования механизмов с учетом колебательных процессов, так как эти курсы могут опираться на те сведения по теории колебаний, которые сообщаются в расширенном курсе общей механики, а иногда и в специальном курсе теории колебаний.

На формирование современной программы курса теории механизмов и машин значительное влияние оказало также развитие вычислительной техники. Если раньше считалось, что раздел синтеза механизмов представляет собой собрание частных задач, в которых графическим или аналитическим путем удается довести решение до числовых значений искомых параметров, то теперь уже созданы программы вычислений на аналоговых и цифровых машинах почти всех типовых задач синтеза механизмов. Однако рациональное использование этих программ требует умения правильно выбирать критерии качества механизма, по которым производится оптимизация, так как в большинстве случаев задачи синтеза механизмов являются задачами многокритериальными.

Поэтому новые программы курсов теории механизмов и машин как для втузов, так и для университетов предусматривают знакомство с методами оптимизационного синтеза с применением ЭВМ, причем основной целью изложения этих методов является не обучение программированию на ЭВМ, а выявление тех особенностей в постановке различных задач синтеза механизмов, которые присущи только этим задачам. К особенностям решения задач синтеза механизмов на ЭВМ относятся: выбор целевых функций в соответствии с заданными критериями качества, поиск компромиссных решений для многоцелевой задачи, выбор ограничений по условиям существования особых точек функции положения, по допустимым углам давления, по условиям непересекаемости звеньев и т. п.

Из приведенного далеко не полного перечня изменений в программах видно, что преподавание курса теории механизмов и машин последние годы строится с учетом достижений теории механизмов и машин как научной дисциплины. Однако эти достижения в полной мере удастся отразить только в университетских курсах.

ГЛАВА I

СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

§ 1. Основные понятия теории механизмов и машин

Машина. По мере развития машин содержание термина «машина» изменялось. Для современных машин дадим следующее определение. *Машина есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека.* В этом определении под материалами понимаются обрабатываемые предметы, перемещаемые грузы и другие объекты труда. В зависимости от основного назначения (какой вид преобразования преобладает) различают энергетические, технологические, транспортные и информационные машины.

Энергетические машины предназначены для преобразования любого вида энергии в механическую (и наоборот). К ним принадлежат, например, электродвигатели, турбины, двигатели внутреннего сгорания, паровые машины, электрогенераторы.

Машины для преобразования материалов подразделяются на *технологические* и *транспортные*. В технологических машинах под материалом подразумевается обрабатываемый предмет, который может быть в твердом, жидком и газообразном виде. Преобразование материала в этих машинах состоит в изменении его размеров, формы, свойств или состояния. Примеры технологических машин: металлообрабатывающие станки, прокатные станы, ткацкие станки, упаковочные машины. В транспортных машинах под материалом понимается перемещаемый предмет. Примеры транспортных машин: автомобили, тепловозы, самолеты, вертолеты, подъемники, краны, транспортеры. В тех случаях, когда транспортная машина предназначена для перемещения людей, под материалом, конечно, понимаются: кабина лифта, вагон, шасси автомобиля и т. п.

Машины, предназначенные для получения и преобразования информации, называются *информационными*. Если информация представлена в виде чисел, то информационная машина называется *счетной* или *вычислительной*. Примеры счетных машин: арифмометры, механические интеграторы, бухгалтерские машины. Электронная вычислительная машина, строго говоря, не является машиной, так как в ней механические движения служат лишь для выполнения вспомогательных операций. Название машины сохра-

нено за ней в порядке исторической преемственности от счетных машин типа арифмометра.

Итак, основным признаком, отличающим машину от других устройств, является выполнение механических движений *). Отсюда происходит термин «машина» (от греческого μηχανή, латинского machine). Если отказаться от этого признака, то не только теряется связь с происхождением термина, но и под определение машины попадают устройства, которые никогда машинами не назывались (усилители голоса человека, диктофоны, магнитофоны и т. п.).

Однако из всех устройств, имеющих движущиеся части, только те могут быть названы машинами, в которых механические движения предназначены для преобразования энергии, материалов и информации.

Машина, в которой все преобразования энергии, материалов и информации выполняются без непосредственного участия человека, называется *машиной-автоматом*. Применение машин-автоматов, однако, предполагает присутствие человека (оператора), наблюдающего за их работой и изменяющего в необходимых случаях программу действия. Совокупность машин-автоматов, соединенных между собой автоматическими транспортными устройствами и предназначенных для выполнения определенного технологического процесса, образует *автоматическую линию*. Машина, особенно машина-автомат, при правильном ее использовании облегчает труд человека, увеличивает производительность труда, обеспечивает высокое качество выполнения рабочего процесса.

Механизм. Определение термина «механизм» неоднократно менялось по мере того, как появлялись новые механизмы. Еще сравнительно недавно считали, что механизм может состоять только из твердых тел. Современное определение этого термина предусматривает уже, что в преобразовании движения могут участвовать также жидкости и газы. *Механизм есть система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких твердых тел в требуемые движения других твердых тел.* Если в преобразовании движения, кроме твердых тел, участвуют жидкие или газообразные тела, то механизм называется соответственно *гидравлическим* или *пневматическим*.

Основным признаком механизма является преобразование механического движения. Отсюда следует, что нельзя называть механизмом устройство, в котором нет этого преобразования. Например, ротор электродвигателя и подшипники, в которых он вращается, не образуют механизма, так как в этом случае взаимодействие магнитного поля и проводника с током непосредственно дает тре-

*) В машинах могут быть и другие виды движения, например, тепловые, но они не служат определяющим признаком, т. е. их наличие или отсутствие не влияет на определение термина.

буемое движение без какого-либо промежуточного преобразования механического движения. Механизм в электродвигателе появляется только тогда, когда требуется уменьшить угловую скорость выходного вала по сравнению с угловой скоростью ротора (высокомощный электродвигатель с встроенным редуктором). Это положение не исключает целесообразности изучения движения роторов как составной части многих машин и механизмов.

Механизмы входят в состав многих машин, так как выполнение механических движений для преобразования энергии, материалов и информации требует обычно преобразования движения, получаемого от двигателя. Однако нельзя отождествлять понятия «машина» и «механизм». Во-первых, кроме механизмов, в машине всегда имеются дополнительные устройства, связанные с управлением механизмами (пуск в ход, блокировки, контроль и т. п.). Особенно развиты эти устройства в машинах-автоматах, где они образуют систему автоматического управления и выполняются обычно на электромагнитных или пневматических элементах. Во-вторых, есть машины, в которых нет механизмов. Например, в последние годы появились технологические машины, в которых каждый исполнительный орган приводится в движение от индивидуального электродвигателя или гидродвигателя.

Несмотря на указанную тенденцию к сокращению числа механизмов в машине, все же они составляют важнейшую, хотя и не единственную часть большинства машин. Кроме того, механизмы применяются в приборах, аппаратах и других технологических устройствах.

Звено механизма. Механизм состоит из многих деталей, т. е. отдельно изготавливаемых частей. Например, колесо автомобиля состоит из нескольких деталей: обода, втулки, крышки, нескольких болтов, гаек и т. п. По вся эта совокупность деталей соединена между собой так, что их взаимное расположение не меняется при движении автомобиля. Поэтому, изучая движение механизма, в состав которого входит колесо автомобиля, мы можем рассматривать совокупность деталей, образующих колесо, как одно твердое тело. Одним твердым телом в механизме считается также любая совокупность деталей, не имеющих между собой относительного движения (например, детали, лежащие на ленте конвейера). Твердое тело, входящее в состав механизма, называется *звеном механизма*. Под твердыми телами в теории механизмов и машин понимают как абсолютно твердые, так и деформируемые и гибкие тела. Жидкости и газы входят в состав гидравлических и пневматических механизмов, но не считаются звеньями (твердыми телами).

Входные и выходные звенья механизма. В каждом механизме имеется *стойка*, т. е. неподвижное звено или звено, принимаемое за неподвижное (если механизм установлен на движущемся основании). Из подвижных звеньев выделяют входные и выходные звенья. *Входным звеном* (сокращенно *входом*) называется звено,

которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев. *Выходным звеном* (сокращенно *выходом*) называется звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Остальные подвижные звенья называются соединительными или промежуточными.

Обычно в механизме имеется один вход и один выход. Вход получает движение от двигателя, а выход соединяется с рабочим органом машины или указателем прибора. Но могут быть механизмы с несколькими входами и выходами. Например, в механизме для сложения чисел имеется два входа, перемещения которых пропорциональны слагаемым, и один выход, перемещение которого пропорционально искомой сумме. В автомобильном дифференциале, наоборот, имеется один вход, получающий движение от двигателя, и два выхода, соединенных с задними колесами.

Ведущие и ведомые звенья. Термины «входное звено» и «выходное звено» введены в структуру механизмов сравнительно недавно. Раньше эти звенья назывались соответственно ведущими и ведомыми звеньями, что приводило к многозначности термина, так как в динамике механизмов разделение звеньев на ведущие и ведомые производится по другому признаку, а именно по знаку элементарной работы действующих на звено сил. *Ведущим* (иначе — *движущим*) *звеном* называется звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является положительной *). *Ведомым звеном* называется звено, для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю. Одно и то же выходное звено на отдельных участках движения может быть то ведомым, то ведущим. Аналогично входное звено, которое по признаку действия сил обычно является ведущим, на некоторых участках движения может быть ведомым. Например, электродвигатель, соединенный с входным звеном, может в зависимости от соотношения сил, действующих на звенья механизма, работать как в двигательном, так и в генераторном режиме.

Кинематическая пара. Звенья соединяются между собой подвижно. В общем случае звено может образовывать подвижные соединения с несколькими звеньями, но для удобства изучения кинематических свойств этих соединений принято рассматривать соединения двух соприкасающихся звеньев. Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется *кинематической парой*. Кинематическую пару можно определить так же как соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. В этом определении подчеркивается, что подвижность соединения звеньев состоит в возможности их относительного движения.

*) В этом определении внешними силами считаются силы, приложенные со стороны материальных тел, не входящих в состав механизма.

Классификация кинематических пар по числу степеней свободы и числу связей. Числом степеней свободы механической системы называется число возможных перемещений системы. Для твердого тела, свободно движущегося в пространстве, число степеней свободы равно шести: три возможных перемещения вдоль неподвижных координатных осей и три — вокруг этих осей. Для звеньев, входящих в кинематическую пару, число степеней свободы в их относительном движении всегда меньше шести, так как условия постоянного соприкосновения звеньев кинематической пары уменьшают число возможных перемещений. По предложению В. В. Добровольского *) все кинематические пары подразделены по числу степеней свободы на *одно-, двух-, трех-, четырех-, и пятиподвижные*. В табл. 1 даны примеры кинематических пар с их условными обозначениями, рекомендованными Международной организацией по стандартам (ИСО)**). Наиболее распространенными являются одноподвижные пары, которые представлены в трех вариантах. В поступательной паре относительное движение ее звеньев прямолинейно-поступательное, во вращательной паре — вращательное и в винтовой — винтовое, т. е. движение, при котором перемещения вдоль и вокруг какой-либо оси связаны между собой определенной зависимостью.

Двухподвижные кинематические пары представлены в двух вариантах: цилиндрическая пара и сферическая пара с пальцем, который перемещается в кольцевом пазу. Возможными перемещениями в двухподвижной сферической паре соответствуют поворот вокруг оси пальца и поворот относительно оси, перпендикулярной плоскости кольцевого паза и проходящей через центр сферы.

Трехподвижные кинематические пары также представлены в двух вариантах: сферическая пара (шаровой шарнир) и плоскостная пара. Четырех- и пятиподвижные пары представлены вариантами: «цилиндр — плоскость» и «шар — плоскость». В более общем случае соприкосновения ***) двух поверхностей четырехподвижная пара получается при линейном касании, а пятиподвижная — при точечном.

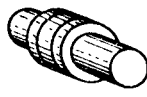
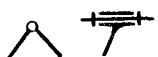
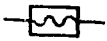
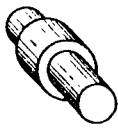
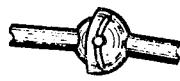
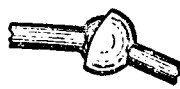
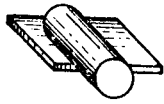
Кроме числа степеней свободы в относительном движении звеньев в табл. 1 указано также число уравнений связей в предположении, что все связи — геометрические, т. е. налагают ограничения только на положения (координаты) точек звеньев. Сумма

*) Владимир Владимирович Добровольский (1880—1957) — автор многих работ по анализу и синтезу механизмов — предложил единую систему механизмов, в которой механизмы объединяются в однородные группы по структурным и кинематическим признакам.

**) Рекомендации ИСО ТК/10 ПК 4 «Условные обозначения кинематических схем механизмов». Международный стандарт ИСО 3952/1—1981 (А/Ф/Р).

***) Соприкасание — многократное действие по глаголу соприкасаться. В кинематических парах соприкосновение элементов может быть или касанием поверхностей, или многократным соприкосновением в точках.

Таблица 1

Число степеней свободы	Число уравнений геометрических связей	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
1	5	Поступательная		
1	5	Вращательная		
1	5	Витовая		
2	4	Цилиндрическая		
2	4	Сферическая с пальцем		
3	3	Сферическая		
3	3	Плоскостная		
4	2	Цилиндр — плоскость		
5	1	Шар — плоскость		

числа степеней свободы и числа уравнений связей всегда равна 6, т. е. равна числу степеней свободы твердого тела, свободно движущегося в пространстве. Число уравнений связей принимается за *номер класса пары*. Например, пятиподвижная кинематическая пара «шар — плоскость» относится к парам первого класса (одно уравнение связи, выражающее невозможность относительного перемещения по нормали к плоскости).

Низшие и высшие пары. Совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называется *элементом кинематической пары*. Из определения следует, что кинематическую пару можно рассматривать как совокупность двух элементов, каждый из которых принадлежит одному звену. Для уменьшения износа элементов кинематической пары желательно, чтобы они соприкасались по поверхности. Кинематическая пара, в которой требуемое относительное движение звеньев может быть получено постоянным соприкосновением ее элементов по поверхности, называется *низшей парой*. К низшим парам принадлежат: вращательная, поступательная, винтовая, цилиндрическая, сферическая и плоскостная (см. табл. 1). Все остальные пары называются *высшими*. Их имеется бесчисленное множество и применяются они в тех случаях, когда требуемое относительное движение звеньев не может быть воспроизведено ни одной из указанных шести низших пар.

Следует обратить внимание на то, что элементами низшей пары могут быть линии и точки. Например, в некоторых приборах элементы вращательной пары соприкасаются по отдельным линиям, и тем не менее ее нельзя назвать высшей парой, так как то же самое относительное движение звеньев (вращательное) может быть получено соприкосновением элементов по поверхности. Поэтому *высшая пара* определяется как кинематическая пара, в которой требуемое относительное движение звеньев может быть получено только соприкосновением ее элементов по линиям и в точках.

Кинематические цепи. *Кинематической цепью* называется система звеньев, образующих между собой кинематические пары. Все кинематические цепи подразделяются на *плоские* и *пространственные*. В плоской кинематической цепи при закреплении одного из звеньев все другие совершают плоское движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости. На рис. 1 с применением условных обозначений табл. 1 показаны кинематические цепи, в которых плоское движение получается при параллельности осей всех вращательных пар. Кинематические цепи делятся на *простые* и *сложные*. Простой кинематической цепью называется цепь, в которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1, а, в), а сложной — в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары (рис. 1, б, г, д). Кроме того, различают *незамкнутые* и *замкнутые кинемати-*

ческие цепи. Незамкнутой называют такую кинематическую цепь, в которой есть звенья, входящие в одну кинематическую пару (см. рис. 1, а, б, в), а замкнутой — в которой каждое звено входит по крайней мере в две кинематические пары (см. рис. 1, г, д).

Кинематическая цепь входит в состав каждого механизма, составленного только из твердых тел. Однако нельзя утверждать, что

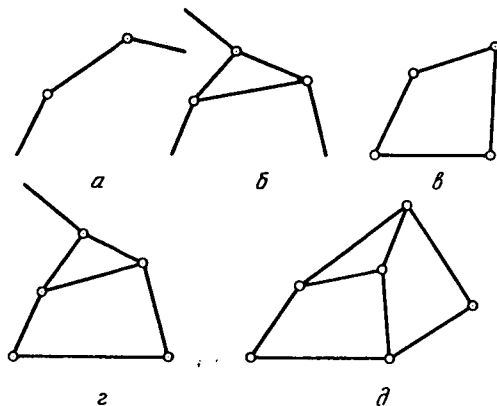


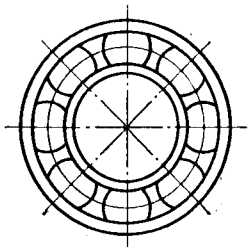
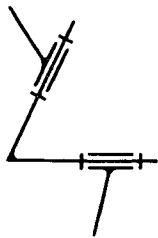
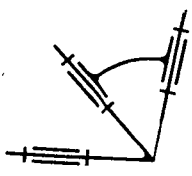
Рис. 1

механизм всегда образуется из кинематической цепи, так как есть механизмы (например, гидравлические), в которых кинематических цепей может и не быть.

Кинематические соединения. Кинематическую пару можно рассматривать как двухзвенную незамкнутую кинематическую цепь, предназначенную для воспроизведения требуемого относительного движения звеньев. Иногда для воспроизведения этого движения конструктивно более удобная (например, более компактная) кинематическая цепь получается при числе звеньев более двух. Кинематическая цепь, конструктивно заменяющая в механизме кинематическую пару, называется *кинематическим соединением*. В табл. 2 даны три примера кинематических соединений с указанием, каким кинематическим парам они эквивалентны. Шарикоподшипник представлен как пример кинематического соединения, которое по сравнению с эквивалентной вращательной парой дает уменьшение трения. Аналогично выполняются роликовые направляющие, заменяющие поступательную пару, и винтовые пары с промежуточными шариками. *Карданный шарнир* *) представляет собой последовательное соединение двух вращательных пар, оси которых пересекаются. Это соединение проще в изготовлении и надежнее, чем

*) Джеролио Кардан (G. Cardano, 1501—1576), миланский врач и математик, изучал механизмы часов и мельниц.

Таблица 2

Число степеней свободы	Название соединения	Схема	Эквивалентная кинематическая пара
1	Шарикоподшипник		Вращательная пара
2	Карданный шарнир (двухподвижное сферическое соединение)		Сферическая пара с пальцем
3	Трехподвижное сферическое соединение		Сферическая пара

сферическая пара с пальцем. Последовательное соединение трех вращательных пар с пересекающимися осями заменяет сферическую пару.

§ 2. Основные виды механизмов

Механизмы с низшими парами, которые иногда называют *рычажными*, разделяются на *плоские* и *пространственные*. Плоским механизмом называют механизм, все подвижные звенья которого совершают движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости. Из плоских механизмов наибольшее распространение имеют *шарнирные механизмы*, звенья которых соединены только

вращательными парами. На рис. 2 показан механизм шарнирного четырехзвенника $ABCD$. В этом механизме четыре звена: стойка O , звенья 1, 2 и 3. Звено 2, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями, называется *шатун*ом. Звено 1, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси, называется *кривошипом*, а звено 3, совершающее качательное движение, — *коромыслом*. В зависимости от наличия или отсутствия кривошипа шарнирный четырехзвенник может быть трех видов: *кривошипно-коромысловый* (показан на рис. 2); *двухкривошипный* (оба звена 1 и 3 совершают полный оборот); *двухкоромысловый* (оба звена 1 и 3 — качающиеся).

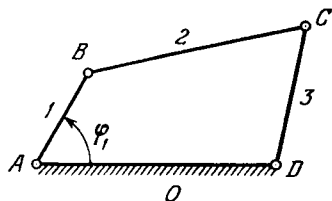


Рис. 2

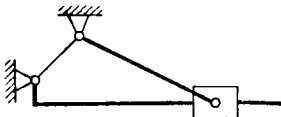
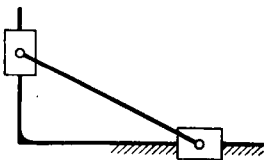
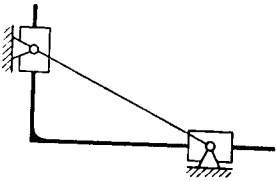
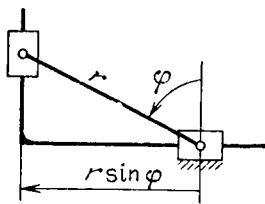
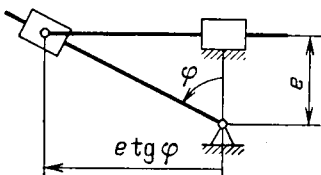
Заменяя в шарнирном четырехзвеннике одну или две вращательные пары на поступательные, получаем механизмы, показанные в табл. 3. С одной поступательной парой можно получить механизмы двух видов. Если стойкой сделать звено, входящее в поступательную пару, то в механизме будет *ползун*, т. е. звено, которое входит только в нижние кинематические пары и совершает прямолинейно-поступательное движение, а вращающееся звено в зависимости от соотношения длин звеньев будет кривошипом или коромыслом. Соответственно механизм будет называться или *кривошипно-ползунным*, или *коромыслово-ползунным*. Если стойкой сделать звено, входящее в две вращательные пары, то в механизме будет *кулиса*, т. е. звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару. Соответственно механизм называется *кулисным*.

Из четырехзвенной кинематической цепи с двумя смежными поступательными парами можно получить механизмы трех видов: *механизм эллипсографа*, в котором траектории точек шатуна — эллипсы (окружность и прямая линия считаются частными случаями эллипса), *двухкулисный механизм* и *синусный механизм*. В синусном механизме ползун перемещается пропорционально синусу угла поворота кривошипа, если угол между осями поступательных пар равен 90° .

Из четырехзвенной кинематической цепи с двумя несмежными поступательными парами получается только один вид механизма — *тангенсный механизм*, названный так потому, что перемещение ползуна пропорционально тангенсу угла поворота кулисы, если ее направляющая проходит через центры вращательных пар.

Конструктивное оформление рассмотренных механизмов очень разнообразно. К одной из разновидностей кулисного механизма относится *мальтийский механизм* (рис. 3), который предназначен для преобразования непрерывного вращения звена 1 во вращение звена 2 с остановками, во время которых звено 2 предохраняется

Таблица 3

Название кинематической цепи	Название механизма	Схема
Четырехзвенная кинематическая цепь с одной поступательной парой	Кривошипно-ползунный (или коромыслово-ползунный) механизм	
	Кулисный механизм	
Четырехзвенная кинематическая цепь с двумя смежными поступательными парами	Механизм эллипсографа	
	Двухкулисный механизм	
	Синусный механизм	
Четырехзвенная кинематическая цепь с двумя несмежными поступательными парами	Тангенсный механизм	

от самопроизвольного поворота соприкосновением цилиндрических поверхностей звеньев 1 и 2. Число остановок равно числу пазов на звене 2, в которые последовательно входит ролик (цевка) звена 1. Во время движения звена 2 механизм по структуре и кинематическим свойствам тождествен кулисному механизму. Число пазов в мальтийских механизмах обычно лежит в пределах от 4 до 20. Свое название механизм получил от сходства его с крестом мальтийского ордена при числе пазов, равном 4.

Пространственные механизмы с низшими парами. Если в четырехзвенном механизме, звенья которого образуют только вращательные пары, оси всех пар пересекаются в одной точке, то траектории точек звеньев лежат на концентрических сферах и механизм называется *сферическим*. На рис. 4, а показана схема четырехзвенного сферического механизма для частного случая, когда оси вращательных пар трех подвижных звеньев пересекаются под углами 90° , а оси, принадлежащие стойке, пересекаются под произвольным углом α . Этот механизм, известный под названием *карданной передачи*, служит для передачи вращения между валами, оси которых пересекаются. При равномерном вращении одного вала другой вал вращается неравномерно. Указанный недостаток устранен в *двойной карданной передаче* (рис. 4, б).

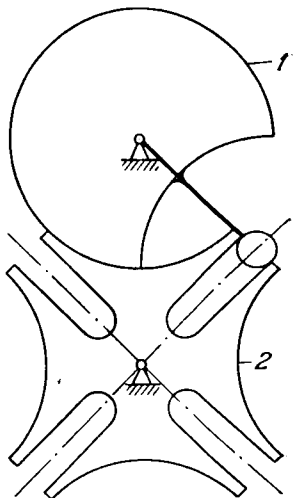


Рис. 3

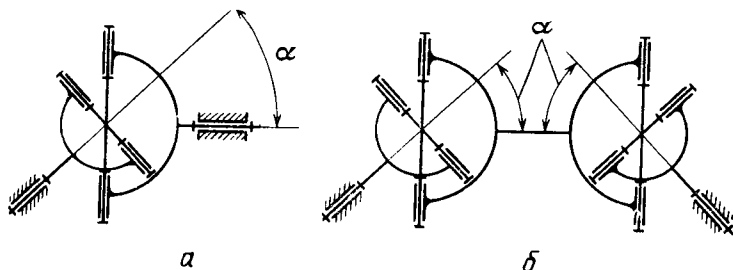


Рис. 4

ные механизмы с одними поступательными парами. Звенья в этих механизмах часто выполняют в виде клиньев, и тогда механизмы называются *клиновыми*.

Кулачковые механизмы. *Кулачком* называется звено, которому принадлежит элемент высшей пары, выполненный в виде поверхности переменной кривизны. Механизм, в состав которого входит кулачок, называется *кулачковым механизмом*. На рис. 5, а показана схема плоского кулачкового механизма. Кулачок 1, напоминающий по форме сжатый кулак, имеет поверхность переменной кривизны, которая соприкасается с роликом 2, образуя высшую пару.

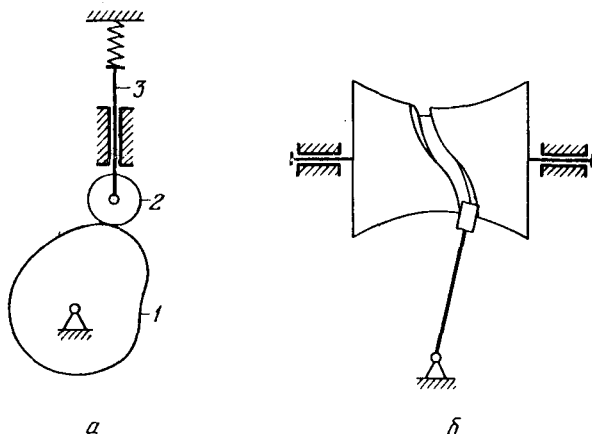


Рис. 5

Постоянное соприкасание элементов высшей пары обеспечивается пружиной, помещенной между стойкой и выходным звеном 3.

Кулачковые механизмы могут быть не только плоскими, но и пространственными (рис. 5, б). Разнообразие форм, которые можно придать кулачку, определяет разнообразие возможных преобразований движения, выполняемых кулачковыми механизмами.

Зубчатые механизмы. *Зубчатым механизмом* называется механизм, в состав которого входят зубчатые звенья. По ГОСТу 16530—83 *зубчатое звено* определяется как звено, имеющее выступы (зубья) для передачи движения посредством взаимодействия с выступами другого звена (тоже зубчатого). Каждый зуб может рассматриваться как кулачок, а весь зубчатый механизм — как многократно повторенный кулачковый механизм.

Вращающееся зубчатое звено называется *зубчатым колесом*. На схеме механизма цилиндрические зубчатые колеса изображаются окружностями, которые перекатываются без скольжения. Например, на рис. 6, а показан *зубчатый планетарный механизм*, в котором колесо 2 (*спутник*) вращается вокруг своей оси и одновременно движется вместе со звеном 3 вокруг оси центрального (солнечного) колеса 1, т. е. совершает движение, подобное движению планеты (отсюда название механизма),

полнено в виде тонкостенного стакана, герметично соединенного со стенкой, разделяющей пространства *А* и *Б*. При вращении генератора 1 стакан, деформируясь под действием роликов, принимает форму овала и вызывает перемещение зубьев как колеса 2, так и колеса 3 (жесткого колеса).

Таким образом, колесо 3, находясь в пространстве *А*, получает вращение от зубьев колеса 2, расположенных на внешней стенке стакана, в то время как генератор 1, вызывающий это движение зубьев, вращается внутри стакана. Передача называется волновой потому, что звено 2 в целом остается неподвижным, но при вращении генератора по нему перемещается волна деформации, вызывающая небольшие перемещения зубьев.

Гидравлические и пневматические механизмы. *Гидравлическим* называется механизм, в котором преобразование движения происходит посредством твердых и жидких тел. На рис. 10 показана

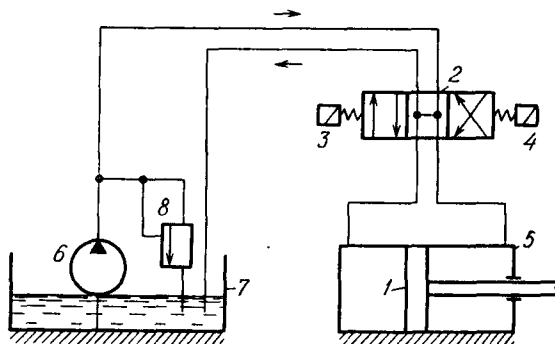


Рис. 10

схема гидравлического механизма с применением стандартных условных обозначений. Механизм предназначен для привода в движение поршня 1 и потому называется *гидроприводом*. Поршень 1 движется направо или налево в зависимости от положения подвижного элемента распределителя 2. Этот элемент поочередно получает движение от электромагнитов 3 и 4. Если оба электромагнита выключены, то подвижный элемент распределителя 2 занимает среднее положение, показанное на схеме. В этом положении перекрыты обе линии, по которым жидкость может поступать в цилиндр 5. При включении электромагнита 3 его сердечник перемещает подвижный элемент распределителя вправо. Чтобы представить себе действие распределителя в новом положении, надо мысленно передвинуть на место исходной (средней) позиции квадрат, расположенный слева, оставляя линии связи на месте. Тогда правая полость цилиндра 5 соединяется с насосом 6, а левая — с баком 7, и поршень под действием давления жидкости перемещается влево.

При включении электромагнита 4 подвижный элемент распределителя перемещается влево, а поршень — вправо. В схеме предусмотрен переливной клапан 8 для перелива жидкости в бак при повышении ее давления.

Схема пневматического механизма имеет аналогичный вид, только насос 6 заменяется источником сжатого воздуха, а вместо соединения с баком выполняется соединение с атмосферой.

§ 3. Число степеней свободы механизма

Обобщенные координаты механизма. Положение твердого тела, свободно движущегося в пространстве, полностью определяется шестью независимыми координатами, за которые можно принять три координаты начала подвижной системы координат, связанной с телом, и три угла Эйлера, определяющие расположение осей подвижной системы координат относительно неподвижной. Их принято называть *обобщенными*, так как они определяют положение всего твердого тела. Аналогично *обобщенными координатами механизма* называют независимые между собой координаты, определяющие положения всех звеньев механизма относительно стойки.

Например, в механизме шарнирного четырехзвенника (см. рис. 2) за обобщенную координату можно принять угол поворота кривошипа φ_1 , так как положение звена 1, определяемое этим углом, определяет также положения всех других подвижных звеньев механизма. Большинство механизмов имеет одну обобщенную координату, но могут быть случаи, когда число обобщенных координат механизма достаточно велико. Оно может быть даже более шести, т. е. более числа обобщенных координат свободного твердого тела.

Начальные звенья. За обобщенные координаты механизма можно взять любые переменные координаты, определяющие положения одного или нескольких звеньев механизма. Звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат механизма, называется *начальным звеном*. Происхождение этого термина связано с тем, что определение положений всех звеньев механизма начинается с определения положений начальных звеньев.

В механизме с одной обобщенной координатой — одно начальное звено, и за обобщенную координату обычно принимается или угловая координата вращающегося звена, или линейная координата прямолинейно движущегося звена. Начальное звено не обязательно совпадает с входным звеном. Можно за начальное звено взять выходное звено или даже промежуточное, если при этом упрощается анализ механизма. В механизме с двумя обобщенными координатами могут быть или два начальных звена, если за обобщенные координаты приняты координаты двух различных звеньев, или одно начальное звено, если оно образует со стойкой двухподвижную пару.

Число степеней свободы механизма с голономными связями *). В механизмах с голономными связями число степеней свободы механизма, т. е. число независимых возможных перемещений, совпадает с числом обобщенных координат. Это утверждение следует из того, что в механизмах с голономными связями уравнения связей содержат только координаты звеньев.

Для определения числа степеней свободы механизма с голономными связями достаточно найти общее число координат, определяющих положения всех звеньев механизма, и число уравнений, связывающих эти координаты. Разность между этими числами дает число независимых координат, если все уравнения связи независимы, т. е. ни одно из них не может быть получено как следствие других.

Общее число координат, определяющих положение n подвижных звеньев механизма, равно $6n$. Каждая одноподвижная кинематическая пара дает 5 уравнений связи, в которые входят координаты звеньев; каждая двухподвижная — 4 уравнения; трехподвижная — 3 уравнения и т. д. Общее число этих уравнений равно

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5,$$

где p_1 — число одноподвижных пар, p_2 — число двухподвижных пар и т. д.

Если все уравнения связи независимы, т. е. ни одно из них не может быть получено как следствие других, то разность между общим числом координат и числом уравнений, связывающих эти координаты, дает число независимых координат (число степеней свободы механизма):

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5. \quad (1.1)$$

Для плоского механизма, т. е. механизма, все подвижные звенья которого совершают плоское движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости, формула (1.1) в общем случае принимает вид

$$W = 3n - 2p_1 - p_2, \quad (1.2)$$

так как в плоском движении положение твердого тела определяется тремя координатами, и, следовательно, кинематические пары могут быть только одноподвижными и двухподвижными. Заметим, что в плоских механизмах подвижность пары, т. е. число степеней свободы в относительном движении ее звеньев, не связана однозначно с ее классом. Например, сферическая пара в плоском механизме кинематически всегда эквивалентна вращательной паре, цилиндрическая пара эквивалентна вращательной паре, если ось цилиндра перпендикулярна плоскости движения, и поступательной, если ось цилиндра параллельна плоскости движения. Кроме

*) К голономным связям принадлежат все геометрические связи и те дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы.

того, в плоских механизмах одноподвижные пары обычно являются низшими, а двухподвижные — высшими. Расположение кинематических пар должно обеспечивать всем звеньям плоское движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости. Например, в механизме с одними вращательными парами, который называется *шарнирным*, оси всех пар должны быть параллельны между собой.

Механизмы с избыточными связями. При выводе формулы (1.1) предполагалось, что все уравнения связи независимы, т. е. ни одно из них не может быть получено как следствие других. В некоторых механизмах это условие не выполняется. Обозначим через q число повторяющихся (или зависимых) уравнений связи. Тогда число независимых уравнений связи равно

$$5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - q$$

и число степеней свободы механизма

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 + q. \quad (1.3)$$

В дальнейшем повторяющиеся связи будем называть *избыточными* или *пассивными*, так как их можно удалить, сохранив при этом заданное число степеней свободы механизма. Уравнение (1.3) содержит две неизвестные величины (W и q), так как число избыточных связей в общем случае можно определить лишь путем анализа уравнений связи. Однако в некоторых простейших случаях величина W может быть получена из непосредственного решения задачи о положениях звеньев механизма. Тогда из уравнения (1.3) находим число избыточных связей

$$q = W - 6n + 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5. \quad (1.4)$$

Избыточные связи получаются обычно при конструировании плоских механизмов. Например, в плоском шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 2) $W = 1$, и по формуле (1.4) получаем

$$q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3,$$

т. е. в этом механизме есть три избыточные связи. Устранение избыточных связей выполняется изменением подвижностей отдельных кинематических пар, причем для одного и того же механизма с избыточными связями можно найти несколько вариантов механизма без избыточных связей. Например, в шарнирном четырехзвеннике можно любые две вращательные пары заменить: одну на сферическую, а другую на сферическую с пальцем (первый вариант), или одну на сферическую, а другую на цилиндрическую (второй вариант). Легко проверить по формуле (1.4), что в обоих вариантах механизма отсутствуют избыточные связи.

Возможны и другие варианты устранения избыточных связей в шарнирном четырехзвеннике. Следовательно, в этом механизме, как в любом другом механизме с избыточными связями, нельзя указать, какая именно связь является избыточной. Можно лишь

определить число этих связей и затем в зависимости от конструктивных условий соответственно уменьшить общее число связей.

Наличие избыточных связей в механизмах ответственного назначения требует повышенной точности изготовления элементов кинематических пар во избежание дополнительных нагрузок на звенья механизма из-за их деформации. Например, если в шарнирном четырехзвеннике непараллельность осей вращательных пар не может быть компенсирована зазорами между элементами этих пар, то его надо рассматривать как пространственный механизм с произвольным расположением осей вращательных пар. Число степеней свободы определяется в этом случае по (1.1):

$$W = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2,$$

т. е. получается не механизм, а ферма (дважды статически неопределимая), и его звенья могут двигаться только за счет деформаций. Эти деформации вызывают дополнительные нагрузки на звенья и увеличение сил трения в кинематических парах. Если же устранить избыточные связи, то можно снизить точность изготовления при одновременном уменьшении дополнительных нагрузок на звенья механизма*). Необходимо только проверить жесткость всей конструкции, с тем чтобы не возникли дополнительные нагрузки от вредных колебаний.

Иногда избыточные связи умышленно вводят в состав механизма для повышения его жесткости или для устранения неопределенности движения звеньев в некоторых положениях. Эти избыточные связи существуют при выполнении определенных геометрических соотношений в механизме. Например, в механизме двойного параллелограмма (рис. 11) имеются соотношения: $AB = CD$, $BC = AD$ (т. е. фигура $ABCD$ — параллелограмм) и $AE = FD$, $EF = AD$ (т. е. фигура $AEFD$ — тоже параллелограмм). По свойству параллелограмма расстояние между точками E и F всегда равно отрезку AD , если эти точки находятся на равных расстояниях от точек A и D . Поэтому введение дополнительного звена EF при условии, что $EF = AD$, не вносит новых геометрических связей, и число степеней свободы остается равным 1, хотя по (1.2)

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

Если точность выполнения указанных геометрических соотношений окажется недостаточной, например, $AE \neq FD$, то расстояние EF уже не будет равно AD , и движение станет невозможным, т. е. число степеней свободы действительно будет равно нулю.

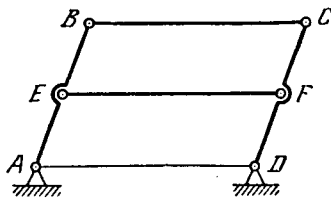


Рис. 11

*) Решетов Л. Н. Конструирование рациональных механизмов.— М.: Машиностроение, 1967.

Семейства механизмов. При переходе от общего случая пространственного механизма, для которого число степеней свободы определяется по формуле (1.1), к плоскому механизму, т. е. при переходе к формуле (1.2), иногда говорят, что на каждое звено плоского механизма общего вида наложены 3 общие связи, т. е. из 6 возможных перемещений твердого тела в пространстве остаются только 3 перемещения, допускаемые условиями плоскопараллельного движения. Тогда формула (1.2) может быть получена из формулы (1.1) вычитанием числа общих связей из коэффициентов при величинах n , p_1 и p_2 :

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_1 - (4 - 3)p_2.$$

В частном случае плоского механизма, когда все звенья образуют только поступательные пары (плоский клиновой механизм), положение каждого звена определяется только двумя координатами, так как подвижные звенья совершают поступательные движения, и, следовательно, отсутствуют углы поворота звеньев. Тогда по аналогии с формулами (1.1) и (1.2) получаем для плоского клипового механизма

$$W = 2n - p_1. \quad (1.5)$$

Формулу (1.5), как и формулу (1.2), можно получить из формулы (1.1), если считать, что на каждое звено наложены 4 общие связи:

$$W = (6 - 4)n - (5 - 4)p_1.$$

Нетрудно предположить, что, кроме механизмов с тремя и четырьмя общими связями, могут быть механизмы с одной и двумя общими связями и, следовательно, все механизмы можно подразделить на 5 семейств. Номер семейства принято считать равным числу общих связей r . Тогда все формулы для определения числа степеней свободы механизмов можно объединить в одну, которая (в других обозначениях) была предложена В. В. Добровольским в 1936 г.:

$$W = (6 - r)n - \sum_{k=1}^{5-r} (6 - r - k)p_k + q_n, \quad (1.6)$$

где q_n — число избыточных связей, не входящих в общие связи.

§ 4. Структурный синтез механизмов

Структурным синтезом механизма называется проектирование структурной схемы механизма, под которой понимается схема механизма, указывающая стойку, подвижные звенья, виды кинематических пар и их взаимное расположение. Структурная схема может быть представлена или графически с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар, или же аналитической записью, допускающей применение ЭВМ.

Для механизмов, в состав которых входят только простые незамкнутые кинематические цепи, возможные варианты их структурных схем при заданном числе степеней свободы находятся непосредственно по формуле (1.1). В этих механизмах число подвижных звеньев равно числу кинематических пар $n = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$, и формула (1.1) принимает вид

$$W = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5. \quad (1.7)$$

В табл. 4 приведены некоторые структурные схемы механизмов манипуляторов. Звенья механизма обозначены арабскими цифрами. Элементы кинематических пар, принадлежащие стойке, отмечены подштриховкой оси или треугольниками с подштриховкой.

Таблица 4

Число степеней свободы	Число подвижных звеньев	Число кинематических пар		Схема
		одноподвижные	двухподвижные	
3	3	3	—	
6	3	—	3	
6	6	6	—	

На последнем звене механизма, которое входит только в одну кинематическую пару, условно показан захват (или схват), т. е. устройство, позволяющее подобно пальцам человека захватывать перемещаемый предмет. Кинематические пары с числом степеней свободы более двух применяются здесь редко. Сферическая пара с пальцем обычно выполняется в виде карданного шарнира (см. табл. 2).

Для механизмов, в состав которых входят замкнутые кинематические цепи, вначале устанавливают варианты этих цепей, а затем из каждой кинематической цепи получают несколько различных механизмов, принимая поочередно за стойку различные звенья цепи. Например, для плоских шарнирных механизмов с одной степенью свободы по формуле (1.2) имеем:

$$1 = 3n - 2p_1.$$

Наименьшее целое число $n > 1$, при котором удовлетворяется это уравнение, равно трем ($p_1 = 4$), т. е. в этом случае механизм должен иметь четыре звена (считая и стойку), которые последовательно соединяются вращательными парами, образуя замкнутую кинематическую цепь. На рис. 2 была показана структурная схема механизма, называемого шарнирным четырехзвенником, который образуется из кинематической цепи $ABCD$, если за стойку принять звено AD . Из той же кинематической цепи можно образовать еще три механизма, принимая за стойку какое-либо другое звено (AB , или BC , или CD).

Для пространственного механизма, в котором все звенья образуют только вращательные пары с осями, расположенными как угодно в пространстве, по формуле (1.1) имеем

$$1 = 6n - 5p_1.$$

Это уравнение в целых числах удовлетворяется при $n = 6$ и $p_1 = 7$, т. е. механизм должен иметь семь звеньев (считая и стойку), которые последовательно соединяются между собой при помощи вращательных пар, образуя семизвенную кинематическую цепь. Полученный механизм называется *пространственным шарнирным семизвенником*. Его структурная схема показана на рис. 12.

Число звеньев в пространственных механизмах можно уменьшить, если кроме неподвижных пар применять пары с большей подвижностью. Пусть, например, для механизма с одной степенью

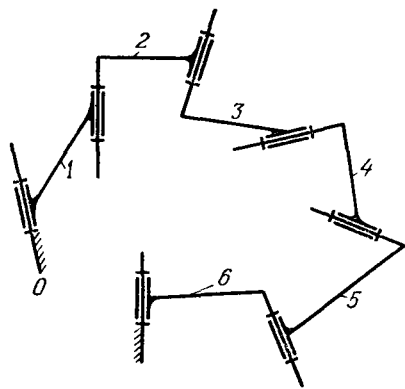


Рис. 12

свободы $n = 2$. По формуле (1.1)

$$1 = 6 \cdot 2 - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5.$$

Это уравнение в целых числах удовлетворяется при следующих сочетаниях:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2, & p_2 &= p_3 = p_4 = 0, & p_5 &= 1; \\ p_1 &= 1, & p_2 &= 1, & p_3 &= 0, & p_4 &= 1, & p_5 &= 0; \\ p_1 &= 1, & p_2 &= 0, & p_3 &= 2, & p_4 &= p_5 = 0; \\ p_1 &= 0, & p_2 &= 2, & p_3 &= 1, & p_4 &= p_5 = 0. \end{aligned}$$

Полученные сочетания определяют числа кинематических пар различной подвижности. Для получения всех возможных кинематических цепей, удовлетворяющих поставленным условиям, надо еще указать варианты, отличающиеся последовательностью расположения кинематических пар. Например, две одноподвижные пары могут быть смежными и несмежными. Кроме того, одноподвижная пара может быть вращательной, поступательной, винтовой; двухподвижная пара может быть цилиндрической, сферической с пальцем и т. д. Поэтому общее число вариантов замкнутых кинематических цепей получается достаточно большим. Затем из каждой кинематической цепи можно получить несколько различных механизмов, принимая поочередно за стойку различные звенья этой цепи.

Образование плоских и пространственных механизмов наслоением структурных групп (групп Ассура). Для структурного синтеза многозвенных механизмов с числом звеньев более четырех непосредственный перебор всех возможных вариантов по формулам (1.1) и (1.2) оказывается затруднительным. В этом случае более удобно находить структурные схемы механизмов наслоением некоторых кинематических цепей, называемых *структурными группами* или *группами Ассура* *). Принцип этого наслоения покажем на примере образования плоского шестизвенного шарнирного механизма.

В механизме с одной степенью свободы положения всех звеньев определяются заданием одной обобщенной координаты или, что то же, положением одного начального звена. На рис. 13, а показано начальное звено 1, которое входит во вращательную пару со стойкой 0. Число степеней свободы W этого звена относительно стойки равно 1 (одна обобщенная координата φ_1). Механизм в целом тоже должен иметь $W = 1$. Поэтому мы можем присоединять (наслаивать) только такие кинематические цепи, которые относи-

*) Леонид Владимирович Ассур (1878—1920) опубликовал в 1914—1918 гг. работу «Исследование плоских стержневых механизмов с точки зрения их структуры и классификации» в Трудах Петроградского политехнического института.

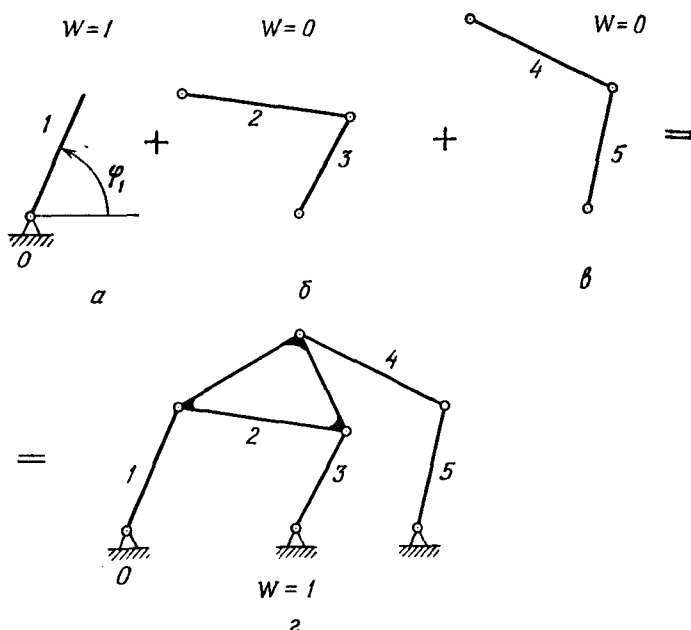


Рис. 13

тельно элементов ее внешних пар имеют $W = 0$. В нашем случае согласно формуле (1.2) это условие имеет вид

$$3n - 2p_1 = 0. \quad (1.8)$$

Простейшая кинематическая цепь, удовлетворяющая условию (1.8) при $n = 2$ и $p_1 = 3$, называется *двухпроводковой группой*. В ней одна из вращательных пар (внутренняя) образуется звеньями группы, а другие две (внешние) образуются после присоединения звеньев группы 2, 3 к какому-либо двум звеньям механизма (рис. 13, б). В нашем примере присоединение двухпроводковой группы одной внешней парой к начальному звену, а другой — к стойке не изменяет числа степеней свободы, которое остается равным 1. Далее можно присоединить к звену 2 и к стойке 0 вторую двухпроводковую группу, состоящую из звеньев 4 и 5

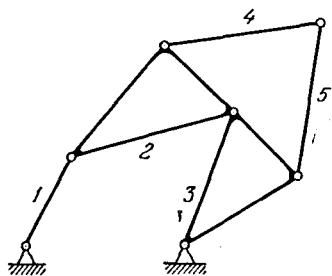
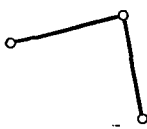
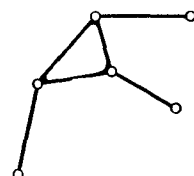
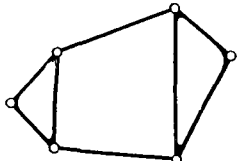


Рис. 14

(рис. 13, в). В результате получим шестизвенный шарнирный механизм с $W = 1$ (рис. 13, г). Вторую группу из звеньев 4 и 5 можно присоединить также к звеньям 2 и 3. Тогда получится другой тип шестизвенного шарнирного механизма (рис. 14).

Теперь можно дать общее определение термина «структурная группа». *Структурной группой* называется кинематическая цепь, число степеней свободы которой равно нулю относительно элементов ее внешних пар, причем группа не должна распадаться на более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию. Например, кинематические цепи, состоящие из звеньев 2, 3, 4 и 5 (см. рис. 13 и 14), распадаются на две двухповодковые группы.

Таблица 5

Число звеньев группы	Число кинематических пар группы	Схема	Класс группы
n	P_1		
2	3		2
4	6		3
4	6		4

В табл. 5 показаны некоторые плоские структурные группы, состоящие из звеньев, входящих во вращательные пары. По предложению И. И. Артоболевского*) номер класса группы равен числу кинематических пар, входящих в замкнутый контур, образованный внутренними кинематическими парами, за исключением двухповодковой группы, которая условно отнесена ко второму классу.

*) Иван Иванович Артоболевский (1905—1977), академик АН СССР, автор многих работ по структуре, синтезу и динамике механизмов.

Принцип наслоения структурных групп распространяется на все виды механизмов, составленных только из твердых тел. Для плоских механизмов с одно- и двухподвижными парами структурные группы удовлетворяют условию

$$3n = 2p_1 + p_2. \quad (1.9)$$

Структурные группы пространственных механизмов удовлетворяют аналогичному условию

$$6n = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5. \quad (1.10)$$

Как плоские, так и пространственные структурные группы используются не только при структурном синтезе, но и при анализе механизмов.

В заключение еще раз подчеркнем, что формулы (1.1) и (1.2) предназначены в основном не для определения числа степеней свободы, а для структурного синтеза механизмов без избыточных связей.

§ 5. Неголономные связи в механизмах

Связи в механизмах. Для механических систем *связями* называются ограничения, налагаемые на положения и скорости точек, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах *). Уравнения, которым в силу наложенных связей должны удовлетворять координаты точек механической системы и их скорости (первые производные от координат по времени), называются *уравнениями связи*.

В табл. 1 для кинематических пар были даны примеры *геометрических связей*, т. е. связей, уравнения которых содержат только координаты точек механической системы (и, может быть, время). Кроме геометрических связей, в механизмах могут быть *дифференциальные связи*, т. е. связи, уравнения которых содержат координаты точек и производные от этих координат по времени (и, может быть, время). При этом важно знать, может ли быть проинтегрирована система уравнений дифференциальной связи. Если да, то после интегрирования получаем уравнения, содержащие только координаты точек системы (иногда и время), и, следовательно, в этом случае дифференциальная связь приводится к геометрической. Если уравнения дифференциальной связи не интегрируются, то связь называется *неголономной*.

Условия интегрируемости дифференциальных связей. В большинстве случаев уравнение дифференциальной связи в механизме выражается линейным дифференциальным уравнением первого

*) Теоретическая механика, Терминология.— М.: Наука, 1977, вып. 90,

порядка *)

$$A_1(q_s, t)\dot{q}_1 + \dots + A_n(q_s, t)\dot{q}_n + A(q_s, t) = 0, \quad s = 1, \dots, n,$$

где q_s — обобщенные координаты системы, т. е. координаты, определяющие положения всех точек системы, A_s и A — известные функции переменных q_s и времени t .

В дифференциалах это уравнение имеет вид

$$A_1(q_s, t)dq_1 + \dots + A_n(q_s, t)dq_n + A(q_s, t)dt = 0, \quad s = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) интегрируемо, если его левая часть есть полный дифференциал от функции $F(q_s, t)$, т. е. коэффициенты $A_s(q_s, t)$ и $A(q_s, t)$ удовлетворяют условиям:

$$A_s(q_s, t) = \frac{\partial F(q_s, t)}{\partial q_s}, \quad A(q_s, t) = \frac{\partial F(q_s, t)}{\partial t}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Тогда голономная связь между координатами q_s и временем t выражается условием

$$F(q_s, t) = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Уравнение (1.11) интегрируется также в тех случаях, когда удастся подобрать интегрирующий множитель $M(q_s, t)$ так, чтобы после умножения на него левая часть уравнения (1.11) стала полным дифференциалом.

Для исследования интегрируемости системы m уравнений дифференциальных связей

$$A_{\sigma 1}(q_s, t)\dot{q}_1 + \dots + A_{\sigma n}(q_s, t)\dot{q}_n + A_{\sigma}(q_s, t) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m, \quad (1.12)$$

представляют ее в виде

$$dF_{\sigma}(q_s, t) \equiv A_{\sigma 1}(q_s, t)dq_1 + \dots + A_{\sigma n}(q_s, t)dq_n + A_{\sigma}(q_s, t)dt = 0.$$

Тогда для полной интегрируемости системы (1.12) на основании теоремы Фробениуса необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль все разности вида

$$d\delta F_{\sigma} - \delta dF_{\sigma},$$

называемые *билинейными ковариантами* **).

Пример неголономной связи в кинематической паре «колесико с острым краем — плоскость». В состав многих интегрирующих ме-

*) Точка над буквой всегда будет означать первую производную по времени, две точки — вторую производную и т. д.

**) Неймарк Ю. И., Фужаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967.

ханизмов (топориковый планиметр А. Н. Крылова, интеграф Абданк-Абаконовича и др.) входит колесико с острым краем, которое при достаточной силе нажатия «врезается» в плоскость смежного звена и перекачивается по ней без скольжения, причем плоскость, содержащая острый край и центр колесика (средняя плоскость), остается перпендикулярной плоскости xy (рис. 15). Условие качения колесика приводит к двум дифференциальным уравнениям связи:

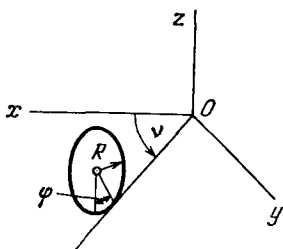


Рис. 15

$$\begin{aligned}x &= R\dot{\varphi} \cos \nu, \\y &= R\dot{\varphi} \sin \nu,\end{aligned}\quad (1.13)$$

где x, y — координаты точки контакта колесика с плоскостью xy , φ — угол поворота колесика, R — его радиус, ν — угол между осью x и проекцией колесика на плоскость xy .

Чтобы проверить, интегрируемы ли эти уравнения, представим их в виде

$$\begin{aligned}dF_1 &\equiv dx - R \cos \nu d\varphi = 0, \\dF_2 &\equiv dy - R \sin \nu d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Составим билинейные коварианты:

$$\begin{aligned}\delta dF_1 - d \delta F_1 &= -R \sin \nu d\varphi \delta \nu + R \sin \nu d\nu \delta \varphi, \\ \delta dF_2 - d \delta F_2 &= R \cos \nu d\varphi \delta \nu - R \cos \nu d\nu \delta \varphi.\end{aligned}$$

Дифференциалы $d\varphi$, $d\nu$ и вариации $\delta\varphi$, $\delta\nu$ могут принимать любые значения. Поэтому билинейные коварианты обращаются в нуль только при выполнении условий $\sin \nu = 0$, $\cos \nu = 0$, что невозможно. Следовательно, система уравнений связи (1.13) не интегрируется и выражает неголономную связь.

Пример неголономной связи во фрикционной бесступенчатой передаче. Интегрирующие механизмы с колесиками впоследствии были вытеснены механизмами, в состав которых входят фрикционные вариаторы. Для выполнения операции дифференцирования или интегрирования можно использовать, например, механизм фрикционной бесступенчатой передачи (см. рис. 7, б), в которой расстояние ρ от оси фрикционного диска 2 до точки контакта с роликом 1 может изменяться вручную или автоматически. Условие отсутствия скольжения во фрикционной паре дает уравнение дифференциальной связи

$$r\dot{\varphi}_1 - \rho\dot{\varphi}_2 = 0, \quad (1.14)$$

где φ_1 , φ_2 — углы поворота звеньев 1 и 2, r — радиус ролика 1.

Отсюда

$$\rho = r\dot{\varphi}_1/\dot{\varphi}_2,$$

т. е. если считать угловую скорость звена 2 постоянной, то при выполнении условия (1.14) значение ρ показывает величину производной угла φ_1 по времени t . При автоматическом управлении величиной ρ угловую скорость φ_2 нельзя считать постоянной, и тогда уравнение (1.14) дает дифференциальную связь между обобщенными координатами φ_1 , φ_2 и ρ .

В дифференциалах уравнение (1.14) имеет вид

$$r d\varphi_1 - \rho d\varphi_2 = 0.$$

Это уравнение при переменной величине ρ , являющейся неизвестной функцией времени, не интегрируется и, следовательно, выражает неголономную связь.

Число степеней свободы механизма с неголономными связями. Для механической системы с неголономными связями число независимых возможных перемещений, т. е. число степеней свободы W_n , равно разности между числом обобщенных координат s и числом уравнений неголономных связей l , так как каждое уравнение неголономных связей связывает между собой вариации обобщенных координат:

$$W = s - l. \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что число степеней свободы механизма как с голономными, так и с неголономными связями всегда равно числу независимых вариаций обобщенных координат. В голономных системах, т. е. в системах с геометрическими и интегрируемыми дифференциальными связями, все вариации обобщенных координат независимы и число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат. На этом основании формулу (1.15) можно представить в виде

$$W_n = W - l,$$

где W — число степеней свободы механизма, определяемое без учета неголономных связей.

Подставляя значение W из формулы (1.3), получаем

$$W_n = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 + q - l. \quad (1.16)$$

Классификация кинематических пар с неголономными связями. В тех случаях, когда неголономные связи накладывают ограничения только на вариации обобщенных координат отдельных кинематических пар, можно учесть их при определении класса соответствующей пары и находить число степеней свободы механизма непосредственно по формуле (1.3). Например, для кинематической пары «колесико с острым краем — плоскость» (см. рис. 15) число обобщенных координат равно четырем (x , y , φ , v). При скольжении колесика число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат, т. е. рассматриваемая пара является четырехпод-

вижной парой (парой второго класса). Возможным перемещениям в относительном движении звеньев пары соответствуют перемещения точки контакта вдоль осей x и y , угол поворота колесика φ и изменение угла ν . Две геометрические связи выражают невозможность перемещения вдоль оси z и условие перпендикулярности средней плоскости к плоскости фрикционных контактов.

При качении колесика без скольжения число обобщенных координат по-прежнему остается равным 4, но число степеней свободы уменьшается до 2, так как вариации обобщенных координат связаны двумя уравнениями неголономных связей:

$$\delta x = R \delta \varphi \cos \nu \quad \text{и} \quad \delta y = R \delta \varphi \sin \nu.$$

Общее число связей увеличивается до 4, и пара становится двухподвижной (парой четвертого класса). Если колесико выполнить с закругленным краем, то угол между средней плоскостью колесика и плоскостью фрикционных контактов может иметь любую величину, и, следовательно, число обобщенных координат увеличивается до 5, а число уравнений геометрических связей уменьшается до 1. Поэтому при скольжении колесика рассматриваемая пара эквивалентна пятиподвижной паре «шар — плоскость» (паре первого класса). Условие качения без скольжения дает два уравнения неголономной связи, и в этом случае пара становится трехподвижной (парой третьего класса).

Примеры определения числа степеней свободы в механизмах с неголономными связями. В механизме, схема которого показана на рис. 7, б, звено 1 образует со стойкой цилиндрическую пару, а звено 2 — вращательную. При скольжении звена 1 по плоскости звена 2 пара «1 — 2» эквивалентна паре «шар — плоскость» (паре первого класса). Поэтому по формуле (1.1) имеем

$$W = 6 \cdot 2 - 5 - 4 - 1 = 2.$$

Однако действительное число степеней свободы механизма равно 3, так как для определения положений всех звеньев механизма надо иметь 3 обобщенные координаты (углы поворота звеньев φ_1 , φ_2 и расстояние ρ). Отсюда следует, что в механизме есть одна избыточная связь (пассивная), т. е. одно из уравнений связи является следствием других. Таким уравнением можно считать уравнение, выражающее невозможность перемещения звена 1 в направлении, перпендикулярном плоскости фрикционных контактов, так как расположение осей пар «0 — 1» и «0 — 2» уже обеспечивает постоянство расстояния между осью звена 1 и точкой контакта.

Условие качения звена 1 по плоскости звена 2 дает уравнение неголономной связи (1.14). Число обобщенных координат по-прежнему равно 3, а число степеней свободы W_n по формуле (1.15) равно 2, т. е. из трех вариаций обобщенных координат только две будут независимыми.

Тот же результат получим по формуле (1.16), в которой число уравнений неголономных связей выделено отдельно:

$$W_n = 6 \cdot 2 - 5 - 4 - 1 + 1 - 1 = 2.$$

Если же подсчитывать число степеней свободы по формуле (1.3), считая пару «1—2» в отсутствие скольжения парой третьего класса, то число уравнений избыточных (пассивных) связей надо принять равным 2:

$$W = 6 \cdot 2 - 5 - 4 - 3 + 2 = 2,$$

т. е. из двух уравнений неголономной связи в паре «1—2» только одно является независимым, а другое получается как следствие особого расположения осей пар «0—1» и «0—2».

Другим примером механизма с неголономными связями может служить топориковый планиметр А. Н. Крылова (рис. 16). В этом механизме колесико с острым краем 1 перекатывается без скольжения по плоскости xu и образует с обводным рычагом 2 вращательную пару. При определении площади плоской фигуры обобщенными координатами можно считать координаты x и y точки контакта колесика с плоскостью (или координаты контура обводимой площади), угол φ и угол поворота колесика ψ .

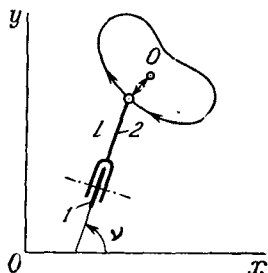


Рис. 16

В два уравнения неголономной связи (1.13) входят производные от обобщенных координат x , y , φ и угол ψ . Следовательно, число степеней свободы механизма по формуле (1.15)

$$W_n = 4 - 2 = 2,$$

т. е. при обводе контура измеряемой площади угол поворота колесика φ и угол ψ изменяются так, что выполняются соотношения:

$$dx = R d\varphi \cos \psi, \quad dy = R d\varphi \sin \psi.$$

Искомая площадь приближенно равна $S = l^2(\psi_1 - \psi_0)$, где l — расстояние между острием обводного штифта и точкой контакта колесика с плоскостью, ψ_0 , ψ_1 — значения угла ψ в начале обвода контура из некоторой точки O внутри искомой площади и в конце обвода при возвращении в ту же точку O .

При подсчете числа степеней свободы по формуле (1.16) считаем, что колесико образует с плоскостью контакта пару второго класса, а острие обводного штифта — пару первого класса:

$$W_n = 6 \cdot 2 - 5 - 2 - 1 - 2 = 2.$$

Если пару «колесико с острым краем — плоскость» с учетом двух уравнений неголономной связи считать парой четвертого класса, то по формуле (1.3) получаем

$$W = 6 \cdot 2 - 5 - 4 - 1 = 2,$$

т. е. тот же результат.

ГЛАВА 2

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

§ 6. Определение положений звеньев плоских механизмов, образованных из незамкнутых кинематических цепей

Задачи кинематического анализа механизмов. *Кинематический анализ механизмов* состоит в определении движения звеньев механизма по заданному движению начальных звеньев. Основные задачи кинематического анализа: 1) определение положений звеньев, включая и определение траекторий отдельных точек звеньев, 2) определение скоростей и ускорений. При решении этих задач считаются известными законы движения начальных звеньев и *кинематическая схема механизма*, т. е. структурная схема механизма с указанием размеров звеньев, необходимых для кинематического анализа.

Рассмотрение общих методов кинематического анализа механизмов начнем с определения положений звеньев механизмов, образованных из незамкнутых кинематических цепей. Эта задача имеет самостоятельное значение для исследования манипуляторов и, кроме того, ее решение может быть использовано для определения положений звеньев любых механизмов с замкнутыми контурами.

Графическое решение поставленной задачи не рассматриваем, так как оно выполняется и для плоских и для пространственных механизмов при помощи элементарных построений, известных из курса начертательной геометрии. Аналитическое решение задачи о положениях звеньев механизма всегда будем находить по методу преобразования координат в форме, предложенной Ю. Ф. Морошкиным *).

Система линейных уравнений для определения положений звеньев плоской незамкнутой кинематической цепи. Рассмотрим, например, схему механизма манипулятора, состоящего из четырехзвенной кинематической цепи с вращательными парами, оси которых параллельны (рис. 17). Число степеней свободы по формуле (1.7) равно

$$W = p_1 = 3.$$

*) Юрий (Георгий) Федорович Морошкин (1903—1977) предложил общий метод структурного и кинематического анализа механизмов (ДАН СССР, 1952, т. 82, № 4).

В качестве трех обобщенных координат принимаем углы φ_{10} , φ_{21} и φ_{32} *). При кинематическом анализе эти углы задаются как функции времени. Кроме того, из кинематической схемы известны длины звеньев (расстояния между осями вращательных пар) l_1 , l_2 и координаты некоторой точки E_3 на звене 3: x_{E_3} , y_{E_3} . Требуется найти траекторию точки E_3 относительно стойки.

Введем в рассмотрение точки E_2 , E_1 и E_0 , которые в данный момент времени совпадают с точкой E_3 , но принадлежат соответственно звеньям 2, 1 и 0 (стойка). На основании уравнений преобразования плоских декартовых координат при расположении их по рис. 17 получаем

$$\begin{aligned} x_{E_2} &= x_{E_3} \cos \varphi_{32} - y_{E_3} \sin \varphi_{32} + l_2, \\ y_{E_2} &= x_{E_3} \sin \varphi_{32} + y_{E_3} \cos \varphi_{32}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} x_{E_1} &= x_{E_2} \cos \varphi_{21} - y_{E_2} \sin \varphi_{21} + l_1, \\ y_{E_1} &= x_{E_2} \sin \varphi_{21} + y_{E_2} \cos \varphi_{21}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} x_{E_0} &= x_{E_1} \cos \varphi_{10} - y_{E_1} \sin \varphi_{10}, \\ y_{E_0} &= x_{E_1} \sin \varphi_{10} + y_{E_1} \cos \varphi_{10}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение системы шести линейных уравнений с шестью неизвестными дает возможность найти по точкам искомую траекторию точки E_3 , т. е. положение точки E_0 . Для решения системы линейных уравнений имеются стандартные программы вычислений на электронных цифровых вычислительных машинах. С целью установления определенных правил вычислений и сокращения записи применяют иногда матричную форму записи уравнений преобразования координат.

Сведения из теории матриц. Матрица порядка $(m \times n)$ есть система чисел (элементов), расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* порядка m . Если $n = 1$, то матрица называется *столбцовой* порядка m . Матрицу не

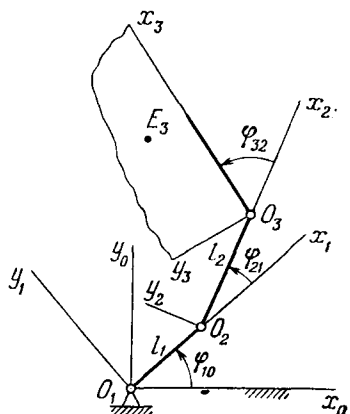


Рис. 17

*) В индексах сначала идет индекс звена, к которому относится данная величина, а затем индекс звена, по отношению к которому она определяется. Индекс 0, т. е. индекс стойки, может опускаться.

следует смешивать с определителем. Определитель порядка m есть *многочлен*, полученный из элементов квадратной матрицы порядка m по определенному правилу (например, по правилу Саррюса).

Суммой двух матриц A и B одинакового порядка ($m \times n$) называется матрица того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц. Перемножать можно только матрицы, у которых число столбцов в первой матрице совпадает с числом строк во второй. Каждый элемент матрицы произведения $C = BA$ определяется по правилу умножения строки на столбец, которое для квадратных матриц приводит к формуле

$$c_{kl} = b_{k1}a_{1l} + b_{k2}a_{2l} + \dots + b_{km}a_{ml},$$

$$k, l = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

т. е. чтобы найти элемент строки k и столбца l матрицы C , надо найти сумму произведений элементов строки k матрицы B на элементы столбца l матрицы A .

Произведение матриц не подчиняется переместительному закону, т. е.

$$BA \neq AB,$$

но сочетательный закон сохраняется:

$$CBA = C(BA).$$

Квадратные матрицы можно умножать на столбцовые матрицы того же порядка. В результате получаются столбцовые матрицы.

Запись уравнений преобразования координат точек звеньев в матричной форме. Коэффициенты уравнений (2.1), соответствующие повороту осей и переносу начала координат, дают матрицу порядка (2×3) . Чтобы иметь дело только с квадратными матрицами, которые можно умножать, добавим к каждому двум уравнениям преобразования координат третье уравнение в виде тождества

$$1 \equiv 1.$$

Тогда коэффициенты правых частей уравнений (2.1) с добавлением тождества $1 \equiv 1$ образуют квадратную матрицу третьего порядка преобразования координат звена 3 в координаты звена 2*)

$$T_{32} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} & l_2 \\ \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично коэффициенты правых частей уравнений (2.2) и (2.3) с добавлением тождества $1 \equiv 1$ дают матрицы:

$$T_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & l_1 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad T_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*) О назначении двойных индексов см. сноску на с. 51.

Левые части уравнений (2.1), (2.2) и (2.3) с добавлением тождества $1 \equiv 1$ дают столбцовые матрицы третьего порядка:

$$\mathbf{r}_{E_2} = \begin{bmatrix} x_{E_2} \\ y_{E_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{E_1} = \begin{bmatrix} x_{E_1} \\ y_{E_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{E_0} = \begin{bmatrix} x_{E_0} \\ y_{E_0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично

$$\mathbf{r}_{E_3} = \begin{bmatrix} x_{E_3} \\ y_{E_3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь уравнения (2.1), (2.2) и (2.3) с добавлением тождества $1 \equiv 1$ можно записать в виде, соответствующем умножению квадратной матрицы третьего порядка на столбцовую матрицу того же порядка:

$$\mathbf{r}_{E_2} = T_{32} \mathbf{r}_{E_3}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{r}_{E_1} = T_{21} \mathbf{r}_{E_2}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{r}_{E_0} = T_{10} \mathbf{r}_{E_1}. \quad (2.7)$$

Подстановка матричных уравнений (2.5) и (2.6) в уравнение (2.7) позволяет определить искомые координаты x_{E_0} и y_{E_0} :

$$\mathbf{r}_{E_0} = T_{10} T_{21} T_{32} \mathbf{r}_{E_3}. \quad (2.8)$$

Перемножим матрицы T_{10} и T_{21} . Применяя правило умножения строки на столбец (2.4), получим для элемента первой строки и первого столбца

$$c_{11} = \cos \varphi_{10} \cos \varphi_{21} - \sin \varphi_{10} \sin \varphi_{21} \equiv \cos \varphi_{20},$$

где $\varphi_{20} = \varphi_{21} + \varphi_{10}$.

Определяя аналогично все другие элементы матрицы T_{10} и пользуясь известными тригонометрическими формулами для суммы углов, получаем

$$T_{10} T_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{20} & -\sin \varphi_{20} & l_1 \cos \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{20} & \cos \varphi_{20} & l_1 \sin \varphi_{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножим полученную матрицу на матрицу T_{32} :

$$(T_{10} T_{21}) T_{32} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{30} & -\sin \varphi_{30} & l_2 \cos \varphi_{20} + l_1 \cos \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{30} & \cos \varphi_{30} & l_2 \sin \varphi_{20} + l_1 \sin \varphi_{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\varphi_{30} = \varphi_{32} + \varphi_{20}$.

Умножая теперь квадратную матрицу $T_{10}T_{21}T_{32}$ на столбцовую матрицу r_{E_3} и возвращаясь к обычной координатной форме, получаем

$$\begin{aligned}x_{E_0} &= x_{E_3} \cos \varphi_{30} - y_{E_3} \sin \varphi_{30} + l_2 \cos \varphi_{20} + l_1 \cos \varphi_{10}, \\y_{E_0} &= x_{E_3} \sin \varphi_{30} + y_{E_3} \cos \varphi_{30} + l_2 \sin \varphi_{20} + l_1 \sin \varphi_{10}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Разумеется, уравнения (2.9) можно было бы получить также из системы шести уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), применяя обычные алгебраические преобразования, но при этом вычисления были бы более громоздкими. Достоинство матричной формы записи состоит главным образом в применении формулы умножения матриц, позволяющей единообразно выполнять последовательные преобразования координат.

Иногда методы кинематического анализа механизмов с применением матриц называют матричными методами, что нельзя считать удачным, так как матрицы дают лишь простую форму записи необходимых вычислений, но не определяют содержание метода. В рассмотренной задаче об определении положений звеньев механизма содержание метода состоит в преобразовании координат, которое может быть выполнено без применения матриц.

Заметим также, что уравнения (2.9) для определения искомых координат проще можно получить из уравнений проекций контура $O_1O_2O_3E_3$ на неподвижные оси координат. Это упрощение, однако, возможно лишь для плоских механизмов. При кинематическом анализе пространственных механизмов, наоборот, метод преобразования координат проще метода проекций.

По уравнениям (2.9) можно найти координаты любых точек на звене 3 и, следовательно, полностью определить его положение. Аналогично находятся взаимные положения любых других звеньев механизма, причем искомые величины всегда находятся из системы линейных уравнений. Если в механизме, кроме вращательных пар, имеются поступательные, то уравнения преобразования координат упрощаются, так как для звеньев, образующих поступательные пары, нет поворота координатных осей.

§ 7. Определение положений звеньев плоских механизмов с замкнутыми контурами

Метод преобразования координат при определении положений звеньев механизмов с замкнутыми контурами. Указанный ранее общий метод кинематического анализа механизмов, предложенный Ю. Ф. Морозкиным, позволяет при определении положений звеньев механизмов с замкнутыми контурами использовать результаты анализа незамкнутых кинематических цепей. С этой целью разделяем механизм на несколько незамкнутых кинематических цепей путем размыкания одной или нескольких кинематических пар. Для

каждой незамкнутой кинематической цепи из уравнений преобразования координат находим положения элементов разомкнутой кинематической цепи (точек, линий, поверхностей). Приравнивая затем координаты, определяющие эти элементы, для каждой из двух кинематических цепей, получающихся при размыкании одной и той же кинематической пары, мы получаем систему уравнений для определения неизвестных величин, которые, как правило, оказываются уже нелинейными.

Для тех механизмов, которые имеют в своем составе несколько структурных групп, указанные уравнения составляются по этим группам. Такой прием позволяет разделить всю систему уравнений для определения положений звеньев на отдельные подсистемы. Даже в механизмах с одной структурной группой иногда полезно выделять преобразования координат, относящиеся к структурной группе, с целью унификации используемых уравнений, так как число возможных разновилчностей структурных групп всегда меньше числа механизмов, получаемых из этих групп при различных начальных звеньях.

Последовательность определения положений звеньев плоских механизмов с низшими парами. Если в механизме имеется несколько структурных групп, то кинематический анализ выполняется в последовательности присоединения этих групп. В этом случае, кроме систем координат, связанных с отдельными звеньями механизма, для каждой структурной группы должна быть определена система координат, относительно которой звенья группы образуют ферму, т. е. имеют число степеней свободы, равное нулю. Эту особенность поясним на примере анализа плоского шестизвенного рычажного механизма (рис. 18), который состоит из одного начального звена 1, шарнирно соединенного со стойкой, и двух структурных групп (звенья 2, 3 и 4, 5).

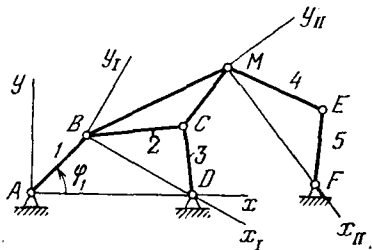


Рис. 18

Для определения положений звеньев механизма достаточно задать значение обобщенной координаты φ_1 и постоянные параметры механизма: длины звеньев l_{AB} , l_{BC} , l_{CD} , l_{BM} , l_{CM} , l_{ME} , l_{EF} и координаты точки F: x_F , y_F . Координаты точки B в неподвижной системе координат Axy находятся из соотношений: $x_B = l_{AB} \cos \varphi_1$, $y_B = l_{AB} \sin \varphi_1$. Точка D имеет координаты: $x_D = l_{AD}$, $y_D = 0$. Следовательно, для первой структурной группы, состоящей из звеньев 2 и 3, оказываются известными координаты точек B и D, т. е. центров элементов внешних пар, что дает возможность найти положение координатных осей Bx_Iy_I , связанных с первой двухповодковой группой, и координаты точек C и M как в системе x_Iy_I , так и в системе xy . Затем по известным координатам точек M и F второй двухповод-

ковой группы находятся положение координатных осей $Mx_{II}y_{II}$ и координаты точки E .

Указанная последовательность определения положений звеньев плоских механизмов справедлива для любого числа двухпроводковых групп, входящих в состав механизма. Она справедлива и для механизмов, имеющих структурные группы более высоких классов. В механизмах с несколькими степенями свободы определение положений звеньев выполняется в последовательности присоединения структурных групп к начальным звеньям и не имеет каких-либо особенностей по сравнению с механизмами, имеющими одну степень свободы.

Функция положения механизма. Функцией положения механизма называется зависимость координаты выходного звена от обобщенных координат механизма. Для механизма, схема которого показана на рис. 18, при начальном звене 1 и выходном звене 5 функцию положения механизма можно получить в явном виде $\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_1)$. Чаще, однако, функцию положения механизма удается получить только в неявном виде $\Phi(\varphi_1, \varphi_5) = 0$. В общем случае механизма с несколькими степенями свободы функция положения механизма в явном виде является функцией обобщенных координат

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_s), \quad (2.10)$$

где n — индекс выходного звена, $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ — обобщенные координаты механизма.

В неявном виде функция положения механизма выражается уравнением

$$\Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi_n) = 0. \quad (2.11)$$

Если положение выходного звена определяется m координатами, то, соответственно, для него находятся m функций положения.

Для определения функции положения не обязательно знать законы движения начальных звеньев, т. е. зависимости обобщенных координат от времени. Задание одного значения каждой из обобщенных координат вполне определяет функцию положения механизма для данного выходного звена. Другими словами, функция положения механизма есть геометрическая характеристика механизма, не зависящая от времени.

Если требуется найти закон движения выходного звена по заданным законам движения начальных звеньев, то сначала находится функция положения механизма в явном виде (2.10) или в неявном виде (2.11). После подстановки в соотношении (2.10) и (2.11) заданных зависимостей обобщенных координат от времени находится искомый закон движения выходного звена в явном виде

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_s, t), \quad (2.12)$$

или в неявном виде

$$\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi_n, t) = 0. \quad (2.13)$$

Выбор начальных звеньев при определении положений звеньев механизма. За обобщенные координаты механизма можно принимать любую совокупность независимых координат, определяющих положение всех звеньев механизма относительно стойки. Отсюда следует, что в выборе начальных звеньев, т. е. звеньев, которым приписывается одна или несколько обобщенных координат механизма, возможен некоторый произвол. При определении положений звеньев механизма не обязательно, чтобы начальные звенья совпадали с входными. В частности, удобно за начальные принимать те звенья, при которых наивысший класс структурных групп, входящих в состав механизма, оказывается минимальным. Например, в механизме, схема которого показана на рис. 18, при начальном звене 1 (или звене 3) имеются две двухпроводковые группы 2—3 и 4—5 (или 1—2 и 4—5), а при начальном звене 5 — одна трехпроводковая группа (группа третьего класса). С повышением класса группы увеличивается трудоемкость построений или вычислений, необходимых для определения положений звеньев группы, поэтому за начальные звенья целесообразно выбирать или звено 1, или звено 3.

Если звено 1 является входным звеном, а звено 5 — выходным, то при заданном законе движения звена 1 для определения закона движения выходного звена 5 сначала находится функция положения механизма $\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_1)$ или $\Phi(\varphi_1, \varphi_5) = 0$, а затем путем подстановки заданного закона движения начального звена $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ в найденную функцию положения получаем искомый закон движения звена 5: $\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_1, t)$ или $\Phi(\varphi_1, \varphi_5, t) = 0$. Так же поступаем и при входном звене 3. Если же входным звеном является звено 5, то выбирать его за начальное нецелесообразно, так как при определении функции положения механизма придется иметь дело с группой третьего класса. Для определения искомого закона движения выходного звена 1 сначала определяем функцию положения механизма, условно считая звено 5 выходным. Эта функция находится из решения задачи о положениях звеньев механизма при заданных значениях обобщенной координаты звена 1. Подстановка заданного закона движения $\varphi_5 = \varphi_5(t)$ в функцию положения, представленную в неявном виде $\Phi(\varphi_1, \varphi_5) = 0$, дает искомый закон движения в неявном виде $\Phi(\varphi_1, t) = 0$. Если же удастся получить функцию положения в явном виде $\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_1)$, то ее надо преобразовать к виду $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_5)$, и тогда подстановка заданного закона движения $\varphi_5 = \varphi_5(t)$ дает непосредственно искомый закон движения выходного звена $\varphi_1 = \varphi_1(t)$.

Определение положений звеньев группы второго класса с вращательными парами. При решении задачи об определении положений звеньев 2 и 3 группы второго класса с одними вращательными парами (рис. 19) из предыдущего анализа должны быть известны координаты центров элементов внешних пар B и D и длины звеньев l_{BC} , l_{CD} .

Положение звена плоского механизма в движении относительно стойки определяется либо координатами двух его точек, либо координатами одной точки, расстоянием ее до другой точки и углом наклона линии, соединяющей эти точки. Следовательно, для опре-

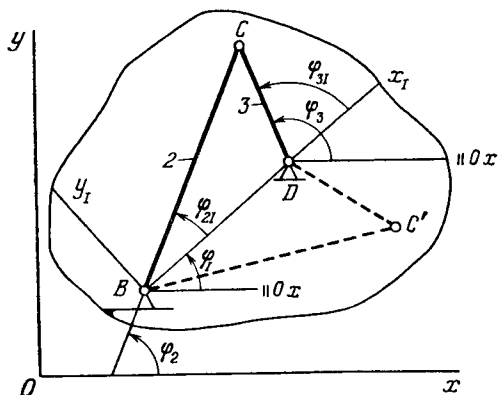


Рис. 19

деления положений звеньев 2 и 3 группы надо найти либо координаты точки C , либо углы φ_2 и φ_3 . Эти неизвестные можно вычислить двумя способами. В первом способе они находятся непосредственно по заданным значениям координат точек B и D в движении относительно стойки. Во втором способе дополнительно вводится система координат Bx_1y_1 , связанная с элементами внешних пар группы.

По первому способу для определения неизвестных

координат точки C имеем систему двух уравнений:

$$\begin{aligned}(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 &= l_{BC}^2, \\ (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 &= l_{CD}^2,\end{aligned}\quad (2.14)$$

где x_C, y_C — искомые координаты точки C ; x_B, y_B, x_D, y_D — заданные координаты точек B и D ; l_{BC}, l_{CD} — длины звеньев группы.

Система уравнений (2.14) выражает условия пересечения геометрических мест точки C в разомкнутых (незамкнутых) кинематических цепях BC и CD , т. е. пересечения окружностей с центрами в точках B и D и радиусами l_{BC} и l_{CD} . Исключение x_C (или y_C) дает квадратное уравнение. Двум возможным значениям координаты x_C (или y_C) соответствуют два положения точки C , симметричных относительно отрезка BD . Выбор варианта сборки звеньев группы BCD или $BC'D$ (показан штрихами) производится в зависимости от предшествующего ближайшего положения группы.

После определения координат точки C находим углы φ_2 и φ_3 по их тригонометрическим функциям:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_2 &= (y_C - y_B) / l_{BC}, & \cos \varphi_2 &= (x_C - x_B) / l_{BC}; \\ \sin \varphi_3 &= (y_C - y_D) / l_{CD}, & \cos \varphi_3 &= (x_C - x_D) / l_{CD}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

По второму способу сначала находится длина l_{BD} , определяющая положение точки D в системе координат Bx_1y_1 :

$$l_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2},$$

а затем — угол φ_1 , определяющий расположение координатных осей Bx_1y_1 по его тригонометрическим функциям:

$$\sin \varphi_1 = (y_D - y_B)/l_{BD}, \quad \cos \varphi_1 = (x_D - x_B)/l_{BD}.$$

Координаты точки C в системе Bx_1y_1 находятся из системы уравнений

$$x_{C1}^2 + y_{C1}^2 = l_{BC}^2, \quad (x_{C1} - l_{BD})^2 + y_{C1}^2 = l_{CD}^2.$$

Отсюда

$$x_{C1} = \frac{l_{BC}^2 + l_{BD}^2 - l_{CD}^2}{2l_{BD}}, \quad y_{C1} = \sqrt{l_{BC}^2 - x_{C1}^2}.$$

Два значения координаты y_{C1} соответствуют двум положениям точки C .

Углы φ_{21} и φ_{31} , определяющие положение звеньев в системе Bx_1y_1 , находятся по теореме косинусов из $\triangle BCD$ или же по тригонометрическим функциям:

$$\sin \varphi_{21} = y_{C1}/l_{BC}, \quad \cos \varphi_{21} = x_{C1}/l_{BC};$$

$$\sin \varphi_{31} = y_{C1}/l_{CD}, \quad \cos \varphi_{31} = (x_{C1} - l_{BD})/l_{CD}.$$

Углы φ_2 и φ_3 , определяющие положения звеньев относительно стойки, находятся по формулам

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{21}, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_{31}.$$

Координаты точки C в системе, связанной со стойкой, вычисляют по формулам преобразования координат

$$x_C = x_{C1} \cos \varphi_1 - y_{C1} \sin \varphi_1 + x_B,$$

$$y_C = x_{C1} \sin \varphi_1 + y_{C1} \cos \varphi_1 + y_B.$$

Определение положений звеньев группы второго класса с одной поступательной парой. Поступательная пара в группе второго класса может быть по отношению к звеньям группы или внешней (рис. 20, а), или внутренней (рис. 20, б). Заметим, что по свойству поступательного движения направляющую поступательной пары на схеме можно переносить параллельно самой себе. На рис. 20, а сплошной линией показано положение этой направляющей, когда она проходит через точку C и смещена относительно точки B на величину l_{BD} . Относительное движение звеньев группы не изменится, если направляющая, как показано штриховой линией, пройдет через точку B под тем же углом φ_1 к оси x при смещении относительно точки C на величину $l_{CB} = l_{BD}$.

Следовательно, оба варианта изображения группы кинематически эквивалентны. Группа, показанная на рис. 20, б, также имеет два изображения.

Для группы с внешней поступательной парой (см. рис. 20, а) из предыдущего анализа должны быть известны координаты точки B и угол $\varphi_1 = \varphi_3$. Кроме того, известны постоянные параметры

группы: l_{BC} и l_{BD} . Подлежат определению неизвестные координаты точки C и угол φ_2 . Как и в двухповодковой группе с вращательными парами, эти неизвестные могут быть найдены двумя способами.

По первому способу положения точки C находятся как точки пересечения окружности радиусом l_{BC} с центром в точке B и

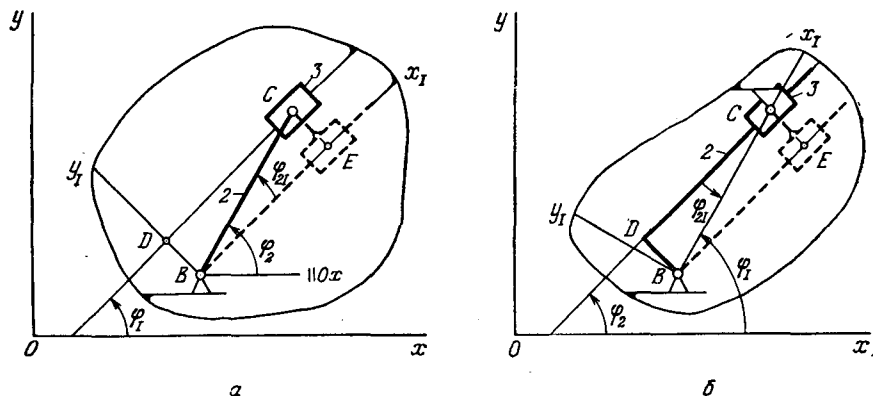


Рис. 20

прямой, проходящей под углом φ_1 к оси x на расстоянии l_{BD} от точки B , т. е. из системы уравнений

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = l_{BC}^2,$$

$$(y_C - y_B) \cos \varphi_1 = (x_C - x_B) \sin \varphi_1 + l_{BD}.$$

По второму способу вычисляется угол φ_{21} по формулам решения прямоугольного треугольника BCD и затем находятся координаты точки C в системе Bx_1y_1 :

$$x_{C1} = l_{BC} \cos \varphi_{21}, \quad y_{C1} = l_{BD}.$$

Координаты точки C относительно стойки находятся по формулам преобразования координат.

Угол φ_2 первым способом находится по тригонометрическим функциям: $\sin \varphi_2 = (y_C - y_B)/l_{BC}$, $\cos \varphi_2 = (x_C - x_B)/l_{BC}$, а вторым — из условия $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{21}$. Переменное расстояние l_{CD} в обоих способах вычисляется из прямоугольного треугольника BCD .

Для группы с внутренней поступательной парой (см. рис. 20, б) из предыдущего анализа должны быть известны координаты точек B и C . Подлежит определению угол $\varphi_2 = \varphi_3$ при заданном постоянном смещении l_{BD} . По обоим способам получим

$$\varphi_2 = \varphi_1 \pm \varphi_{21},$$

где угол φ_1 находится из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = (y_C - y_B)/(x_C - x_B),$$

а угол φ_{2I} — из прямоугольного треугольника BDC

$$\sin \varphi_{2I} = \frac{l_{BD}}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}.$$

Переменное расстояние l_{CD} вычисляется из прямоугольного треугольника BDC .

Определение положения звеньев группы второго класса с двумя поступательными парами. В этой группе вращательная пара может быть или внутренней (рис. 21, а), или внешней (рис. 21, б).

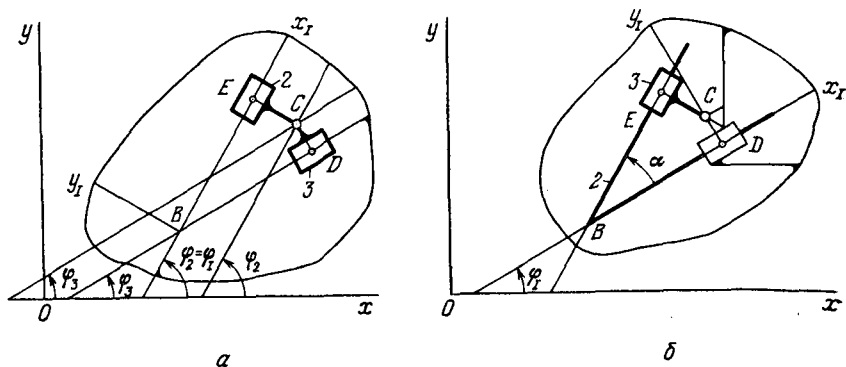


Рис. 21

В первом случае из предыдущего анализа известны координаты точки B пересечения направляющих и углы $\varphi_2 = \varphi_I, \varphi_3$. Кроме того, должны быть заданы постоянные смещения l_{CD} и l_{CE} . Неизвестные координаты точки C находятся из условий пересечения двух прямых, наклоненных к оси x под углами φ_2 и φ_3 и проходящих на расстояниях от точки B , равных соответственно l_{CE} и l_{CD} :

$$y_C - y_B = (x_C - x_B) \operatorname{tg} \varphi_2 - \frac{l_{CE}}{\cos \varphi_2},$$

$$y_C - y_B = (x_C - x_B) \operatorname{tg} \varphi_3 + \frac{l_{CD}}{\cos \varphi_3}.$$

Отсюда

$$x_C = x_B + \frac{l_{CE} \cos \varphi_3 + l_{CD} \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$y_C = y_B + \frac{l_{CE} \cos \varphi_3 + l_{CD} \cos \varphi_2}{\sin (\varphi_2 - \varphi_3)} \operatorname{tg} \varphi_2 - \frac{l_{CE}}{\cos \varphi_2}.$$

Тот же результат получается, если вычислить координаты точки C в системе Bx_Iy_I , а затем применить формулы преобразования координат.

Во втором случае (см. рис. 21, б) из предыдущего анализа известны координаты точки C и прямой Bx_1 , проходящей под углом φ_1 к оси x на расстоянии l_{CD} от точки C . Неизвестные координаты точки B находим из условия, что прямая BE , наклоненная к заданной прямой BD под углом α , касается окружности радиусом l_{CE} с центром в точке C :

$$(y_C - y_B) \cos \varphi_1 = (x_C - x_B) \sin \varphi_1 + l_{CD},$$

$$(y_C - y_B) \cos(\varphi_1 + \alpha) = (x_C - x_B) \sin(\varphi_1 + \alpha) - l_{CE}.$$

Отсюда

$$x_B = x_C - \frac{l_{CE} \cos \varphi_1 + l_{CD} \cos(\varphi_1 + \alpha)}{\sin \alpha},$$

$$y_B = y_C - \frac{l_{CE} \cos \varphi_1 + l_{CD} \cos(\varphi_1 + \alpha)}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{l_{CD}}{\cos \varphi_1}.$$

Тот же результат получается, если вычислить координаты точки B в системе Dx_1y_1 , а затем применить формулы преобразования координат.

Переменные расстояния l_{BD} и l_{BE} в обоих случаях вычисляются по известным координатам точек B и C из прямоугольных треугольников BDC и BEC .

Итак, решение задачи о положениях звеньев группы второго класса при любом сочетании вращательных и поступательных пар сводится к решению треугольников или к решению алгебраических

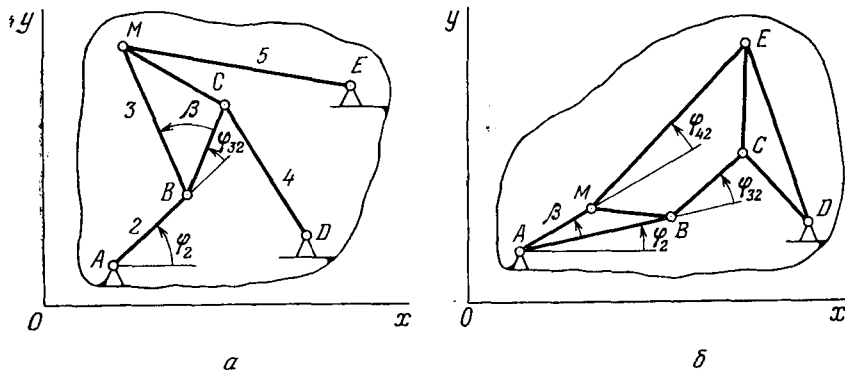


Рис. 22

уравнений не выше второй степени. Алгоритм вычислений получается несколько проще, если предварительно определять положения звеньев группы относительно системы координат, связанной с элементами ее внешних пар.

Определение положений звеньев групп третьего класса. Решение задачи о положениях звеньев групп третьего класса покажем на примере трехпроводковой группы (рис. 22, а). Разомкнув враща-

тельные пары C и M , получаем незамкнутые кинематические цепи ABC , CD и ME . Из условий совпадений положений точки C в цепях ABC и CD , а также точки M в цепях ABM и ME имеем

$$(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_{CD}^2,$$

$$(x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2 = l_{ME}^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} [x_A + l_{AB} \cos \varphi_2 + l_{BC} \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}) - x_D]^2 + \\ + [y_A + l_{AB} \sin \varphi_2 + l_{BC} \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}) - y_D]^2 = l_{CD}^2, \\ [x_A + l_{AB} \cos \varphi_2 + l_{BM} \cos(\varphi_2 + \varphi_{32} + \beta) - x_E]^2 + \\ + [y_A + l_{AB} \sin \varphi_2 + l_{BM} \sin(\varphi_2 + \varphi_{32} + \beta) - y_E]^2 = l_{ME}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из решения системы уравнений (2.16) находим углы φ_2 и φ_{32} , которые определяют положения всех звеньев группы. Число возможных вариантов сборки звеньев группы равно 6. Это утверждение основывается на анализе возможных точек пересечения траектории точки M в шарнирном четырехзвезднике $ABCD$ (шатунная кривая) и окружности радиусом l_{ME} с центром в точке E . Шатунная кривая выражается алгебраической кривой шестого порядка, но из возможных 12 точек пересечения с окружностью 6 точек являются бесконечно удаленными.

Определение положений звеньев группы четвертого класса. Для группы четвертого класса с двумя внешними парами (рис. 22, б) размыкаем вращательные пары C и E и получаем незамкнутые кинематические цепи ABC , AME , CD и ED . Из условий совпадения положений точки C в цепях ABC и CD , точки E в цепях AME и ED , а также неизменности расстояния между точками C и E имеем

$$(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_{CD}^2,$$

$$(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2 = l_{ED}^2, \quad (2.17)$$

$$(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = l_{EC}^2,$$

где

$$x_C = x_A + l_{AB} \cos \varphi_2 + l_{BC} \cos(\varphi_2 + \varphi_{32}),$$

$$y_C = y_A + l_{AB} \sin \varphi_2 + l_{BC} \sin(\varphi_2 + \varphi_{32}),$$

$$x_E = x_A + l_{AM} \cos(\varphi_2 + \beta) + l_{ME} \cos(\varphi_2 + \beta + \varphi_{42}),$$

$$y_E = y_A + l_{AM} \sin(\varphi_2 + \beta) + l_{ME} \sin(\varphi_2 + \beta + \varphi_{42}).$$

Из решения системы уравнений (2.17) находим углы φ_2 , φ_{32} и φ_{42} , которые определяют положение всех звеньев группы.

С увеличением числа звеньев в структурной группе и повышением ее класса увеличивается трудоемкость вычислений, необходимых для решения системы нелинейных уравнений, определяющих положения звеньев механизма. Однако при современной технике

вычислений на ЭВМ представляется затруднительным лишь определение начального положения звеньев механизма, так как каждая группа имеет несколько вариантов сборки. В дальнейшем же можно выбрать достаточно малый шаг изменения каждой обобщенной координаты механизма и решать систему линейных уравнений для вычисления поправок к предыдущим значениям искомых величин. Метод вычисления поправок особенно пригоден для цикловых механизмов с одной степенью свободы, т. е. механизмов, в которых все звенья возвращаются в исходные положения после определенного перемещения начального звена (обычно поворота его на угол 2π). В этом случае при возврате начального звена в исходное положение для всех остальных звеньев обнаруживаются накопленные погрешности вычислений, которые распределяются затем по отдельным позициям.

§ 8. Определение скоростей и ускорений в плоских механизмах с низшими парами аналитическими методами

Аналоги скоростей и ускорений. Аналогом скорости точки называется первая производная радиуса-вектора точки по обобщенной координате. Пусть, например, за обобщенную координату φ_1 выбран угол поворота звена I , а звено i , на котором расположена рассматриваемая точка, совершает прямолинейно-поступательное движение. Радиус-вектор этой точки можно выбрать так, что его величина окажется равной перемещению s_i . Тогда аналог скорости $\tilde{s}'_i = ds_i/d\varphi_1$ связан со скоростью $\tilde{v}_i = ds_i/dt$ соотношением

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{ds_i}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt},$$

или

$$\tilde{v}_i = \tilde{s}'_i \tilde{\omega}_1, \quad (2.18)$$

где $\tilde{\omega}_1$ — угловая скорость начального звена *).

Аналогом ускорения точки называется вторая производная радиуса-вектора точки по обобщенной координате механизма.

В рассматриваемом примере ускорение $\tilde{a}_i = d^2 s_i / dt^2$ связано с аналогом ускорения $\tilde{s}''_i = d^2 s_i / d\varphi_1^2$ соотношением, которое получается после дифференцирования (2.18)

$$\tilde{a}_i = \tilde{s}''_i \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{s}'_i \tilde{\epsilon}_1, \quad (2.19)$$

где $\tilde{\epsilon}_1$ — угловое ускорение начального звена.

*) Производные по обобщенной координате обозначены штрихами. Тильдой обозначены скорости и ускорения, а также их аналоги, если они считаются скалярными величинами.

Аналогом угловой скорости $\tilde{\varphi}_i'$ называется первая производная от угла поворота звена по обобщенной координате механизма. Угловая скорость $\tilde{\omega}_i$ звена i связана с ее аналогом соотношением

$$\tilde{\omega}_i = \varphi_i' \tilde{\omega}_1. \quad (2.20)$$

Аналогом углового ускорения φ_i'' звена i называется вторая производная угла поворота звена по обобщенной координате механизма. После дифференцирования соотношения (2.20) получаем

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varphi_i'' \tilde{\omega}_1^2 + \varphi_i' \tilde{\varepsilon}_1. \quad (2.21)$$

Аналоги скоростей и ускорений часто применяются при динамическом анализе механизмов в тех случаях, когда предварительное их определение как характеристик, не зависящих от времени, облегчает нахождение законов движения начальных звеньев.

Линейные уравнения для определения скоростей и ускорений. Для того чтобы знать распределение скоростей в звене плоского механизма, достаточно определить угловую скорость этого звена и скорость одной точки. Аналогично для распределения ускорений надо знать угловое ускорение звена и ускорение одной его точки. Искомые угловые скорости и ускорение звена находятся двукратным дифференцированием по времени зависимости, содержащей угол поворота этого звена, а скорость и ускорение точки — двукратным дифференцированием по времени радиуса-вектора точки. Однако при решении задачи о положениях звеньев не всегда удается получить аналитические выражения угла поворота звена или радиуса-вектора точки достаточно простыми для дифференцирования. В этих случаях удобнее непосредственно дифференцировать правые и левые части уравнений для определения положений звеньев, так как получаемая система уравнений для определения скоростей и ускорений оказывается всегда линейной.

Пусть, например, для группы второго класса с одними вращательными парами (см. рис. 19) известны из предыдущего анализа скорости точек B и D в виде проекций*) на оси x и y , т. е. скалярные величины: $v_B^{(x)}$, $v_B^{(y)}$ и $v_D^{(x)}$, $v_D^{(y)}$. Тогда для определения искоемых проекций скорости точки C имеем систему линейных уравнений, получаемую после дифференцирования уравнений (2.14):

$$\begin{aligned} (x_C - x_B)(v_C^{(x)} - v_B^{(x)}) + (y_C - y_B)(v_C^{(y)} - v_B^{(y)}) &= 0, \\ (x_C - x_D)(v_C^{(x)} - v_D^{(x)}) + (y_C - y_D)(v_C^{(y)} - v_D^{(y)}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

После дифференцирования системы уравнений (2.22) получаем систему линейных уравнений для определения проекций

*) Оси, на которые проектируются векторы, указываются верхними индексами в скобках.

ускорения a_c :

$$\begin{aligned} (v_C^{(x)} - v_B^{(x)})^2 + (x_C - x_B)(a_C^{(x)} - a_B^{(x)}) + \\ + (v_C^{(y)} - v_B^{(y)})^2 + (y_C - y_B)(a_C^{(y)} - a_B^{(y)}) = 0, \\ (v_C^{(x)} - v_D^{(x)})^2 + (x_C - x_D)(a_C^{(x)} - a_D^{(x)}) + \\ + (v_C^{(y)} - v_D^{(y)})^2 + (y_C - y_D)(a_C^{(y)} - a_D^{(y)}) = 0. \end{aligned}$$

Угловые скорости $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ звеньев 2 и 3 находятся дифференцированием тригонометрических функций по соотношениям (2.15):

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{v_C^{(y)} - v_B^{(y)}}{l_{BC} \cos \varphi_2}, \quad \tilde{\omega}_3 = \frac{v_C^{(y)} - v_D^{(y)}}{l_{CD} \cos \varphi_3}.$$

В рассмотренном примере использовались уравнения, в которые входили значения координат точек и углов поворота звеньев по отношению к стойке. Поэтому после дифференцирования этих уравнений непосредственно определялись искомые абсолютные скорости и ускорения. Если же использовать уравнения, определяющие положения звеньев относительно вспомогательной системы координат, связанной с элементами внешних пар, то после их дифференцирования находятся лишь относительные скорости и ускорения, и для получения искомых скоростей и ускорений надо учитывать переносное движение звеньев со вспомогательной системой. Отсюда следует, что применение вспомогательной системы координат несколько упрощает решение задачи о положениях звеньев, но затрудняет решение задачи о скоростях и ускорениях.

Для механизмов со структурными группами любых классов дифференцирование уравнений, определяющих положения звеньев, также всегда дает систему линейных уравнений. Например, для трехзвонковой группы дифференцирование уравнений (2.16) дает систему, линейную относительно угловых скоростей $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_{32}$, для группы четвертого класса дифференцирование уравнений (2.17) дает систему, линейную относительно угловых скоростей $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_{32}$ и $\tilde{\omega}_{42}$ и т. д.

§ 9. Планы скоростей механизмов с группами второго класса

В последнее время кинематический анализ механизмов, т. е. определение положений, скоростей и ускорений звеньев, выполняется, как правило, при помощи аналитических методов. Тем не менее для предварительного определения кинематических свойств механизма или для контроля аналитических вычислений иногда требуется найти скорости и ускорения точек звеньев, применяя простейшие построения, известные под названием *планов скоростей и ускорений*. Построение этих планов покажем на примере плоско-

го шестизвонного механизма с одной степенью свободы, составленного из стойки, начального звена и двух последовательно соединенных групп второго класса.

На рис. 23, а показан *план механизма*, т. е. графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее заданному значению обобщенной координаты механизма. В данном

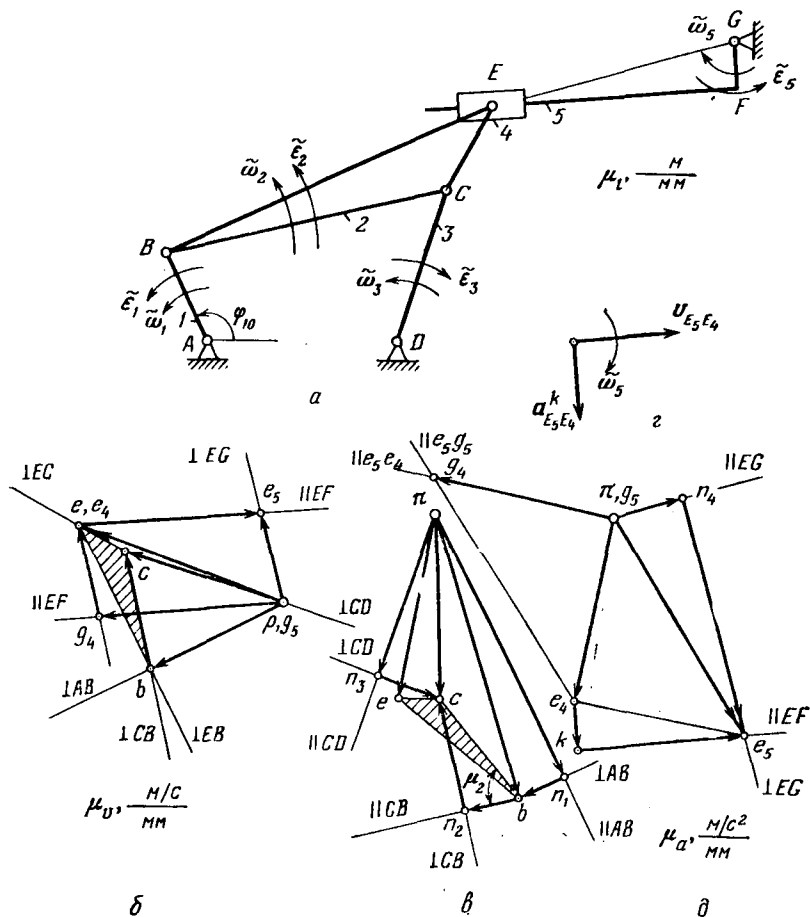


Рис. 23

примере за обобщенную координату принят угол поворота звена 1: φ_{10} . План механизма должен быть построен в определенном чертежном масштабе, например, 1:2; 1:1; 2:1 и т. д. В дальнейшем при графических методах решения задач теории механизмов придется изображать не только длины звеньев, но и некоторые другие

физические величины: скорости, ускорения, силы и т. п. Поэтому надо условиться, что понимать под масштабом построения.

Различают масштаб и масштабный коэффициент. *Масштабом физической величины* называют длину отрезка в миллиметрах, изображающую единицу измерения этой величины. *Масштабным коэффициентом физической величины* называют отношение числового значения физической величины в свойственных ей единицах к длине отрезка в миллиметрах, изображающего эту величину. Масштаб и масштабный коэффициент являются взаимно обратными величинами. Масштабные коэффициенты употребляются чаще, так как их применение аналогично использованию цены деления в приборах. В дальнейшем изложении указываются только масштабные коэффициенты, которые обозначаются буквой μ с индексом, указывающим, к какой величине они относятся.

Масштабный коэффициент длин для плана механизма есть отношение какой-либо длины в метрах к отрезку, изображающему эту длину на чертеже в миллиметрах. Например:

$$\mu_l = l_{AB}/AB.$$

В отличие от чертежного масштаба (безразмерной величины), масштабный коэффициент длин имеет размерность м/мм.

Задача об определении скоростей, которую будем решать путем построения плана скоростей, формулируется следующим образом. Дан план механизма с указанием всех размеров, его определяющих, и задана угловая скорость начального звена I . Требуется найти для каждого звена механизма его угловую скорость и скорости одной или двух его точек. Решение задачи начинаем с определения модуля скорости точки B начального звена I :

$$v_B = l_{AB}\omega_1.$$

Напомним, что в системе СИ единица угловой скорости обозначается рад/с, но размерность ее с^{-1} , так как радиан есть безразмерная величина. Если задано число оборотов начального звена в минуту, т. е. частота вращения n_1 , то используется соотношение

$$\omega_1 = \pi n_1/30.$$

Изобразим скорость v_B вектором, отложенным из некоторой точки p , называемой *полюсом плана скоростей* (рис. 23, б). Этот вектор направлен перпендикулярно AB в сторону, соответствующую направлению угловой скорости ω_1 . В конце вектора поставим точку b . Длина отрезка (pb) может быть выбрана произвольно. Масштабный коэффициент скоростей подсчитывается по формуле

$$\mu_v = v_B/(pb).$$

и имеет размерность $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}/\text{мм}$. Можно также задаваться значением μ_v и определять длину отрезка (pb) в мм из условия

$$(pb) = v_B / \mu_v.$$

Иногда принимают $(pb) = AB$. Тогда масштабный коэффициент

$$\mu_v = \frac{l_{AB}\omega_1}{AB} \equiv \mu_1\omega_1,$$

а построения, проводимые при этом значении μ_v , называют *построениями в масштабе кривошипа*.

Затем находим скорость точки C , которая является общей для звеньев 2 и 3. Воспользовавшись теоремой о сложении скоростей в переносном и относительном движениях, напишем уравнение, связывающее скорости точек B и C . Переносным движением считаем поступательное движение звена 2 со скоростью точки B , а относительным — вращательное движение звена 2 вокруг точки B . Обозначим через v_{CB} скорость точки C во вращательном движении звена 2 относительно точки B *). Тогда на основании указанной теоремы получаем **):

$$\underline{v_C} = \underline{v_B} + \underline{v_{CB}}. \quad (2.23)$$

Векторное уравнение (2.23) равносильно двум скалярным уравнениям: его можно заменить двумя уравнениями проекций векторов на координатные оси, лежащие в плоскости векторов. Следовательно, из уравнения (2.23) можно найти две неизвестные величины v_C и v_{CB} . Эти неизвестные находятся графическим построением треугольника векторов. Для этого из точки b проводим линию, перпендикулярную CB , а из полюса p — линию, перпендикулярную CD . В пересечении этих направлений находится точка c — конец вектора v_C искомой скорости точки C . Вектор скорости v_{CB} изображается отрезком (cb) , причем стрелка вектора направлена к точке c , соответствующей первой букве индекса. Скорость v_{BC} равна по модулю скорости v_{CB} и направлена в противоположную сторону. Поэтому вектор скорости v_{BC} также изображается отрезком $(cb) = (bc)$, но стрелка вектора направлена к точке b (первой букве индекса). Для того чтобы указанное правило определения направления векторов скоростей всегда соблюдалось, в уравнениях типа уравнения (2.23) индексы у векторов скоростей следует располагать в одной и той же последовательности. Например, в уравнении (2.23) — сперва индекс C , затем B и далее CB .

*) Более развернутое определение скорости v_{CB} : скорость точки C во вращательном движении звена 2 вокруг точки B , принадлежащей системе, движущейся поступательно со скоростью v_B .

**) Здесь и далее вектор, известный по модулю и направлению, подчеркнут двумя линиями, а вектор, известный только по направлению, подчеркнут одной линией, под которой указано это направление.

После того как определены скорости двух точек на звене 2, можно найти величину угловой скорости этого звена в рад/с по формуле

$$\omega_2 = v_{CB}/l_{CB},$$

где $v_{CB} = \mu_v(cb)$.

Для определения направления знака угловой скорости звена 2 переносим вектор скорости v_{CB} в точку C и рассматриваем движение точки C относительно точки B в направлении скорости v_{CB} . В данном примере это движение соответствует вращению отрезка CB против хода часовой стрелки. Следовательно, угловая скорость ω_2 направлена против хода часовой стрелки. Модуль угловой скорости звена 3 находится по формуле

$$\omega_3 = v_C/l_{CD},$$

где

$$v_C = \mu_v(pc).$$

Для определения направления угловой скорости звена 3 переносим вектор скорости v_C в точку C и устанавливаем, что вращение звена 3, а следовательно, и угловая скорость ω_3 направлены против хода часовой стрелки.

Для перехода к следующим звеньям механизма надо определить скорость точки E . Эту скорость находим из векторного уравнения, аналогичного уравнению (2.23):

$$\underline{v_E} = \underline{v_B} + \frac{\underline{v_{EB}}}{\perp EB}, \quad (2.24)$$

если вычислить модуль скорости v_{EB} из условия

$$v_{EB} = l_{EB}\omega_2.$$

Этого вычисления можно избежать, если дополнительно к уравнению (2.24) записать аналогичное уравнение

$$\underline{v_E} = \underline{v_C} + \frac{\underline{v_{EC}}}{\perp EC}. \quad (2.25)$$

Приравняв правые части уравнений (2.24) и (2.25), получим уравнение, которое можно решить простым построением:

$$\frac{\underline{v_B} + \underline{v_{EB}}}{\perp EB} = \frac{\underline{v_C} + \underline{v_{EC}}}{\perp EC}.$$

Из точки b проводим линию, перпендикулярную EB , а из точки c — линию, перпендикулярную EC . Точка пересечения этих линий есть искомая точка e конца вектора искомой скорости v_E . Нетрудно проверить, что уравнения (2.24) и (2.25) удовлетворяются. Эти построения завершают построение плана скоростей звена 2. *Планом скоростей звена плоского механизма* называют графическое построение, представляющее собой пучок, лучи которого изображают абсолютные скорости точек звена, а отрезки, соединяющие кон-

цы лучей,— относительные скорости соответствующих точек в данном положении звена. Совокупность планов скоростей звеньев механизма с одним общим полюсом и одним масштабом называется *планом скоростей механизма*.

В рассматриваемом примере пучок $pbce$ определяет скорости точек не только звена 2, но и звеньев 1 и 3, поэтому полученное построение можно назвать планом скоростей шарнирного четырехзвенника.

Обратим внимание на то, что Δbce на плане скоростей звена 2 подобен ΔBCE на плане механизма по взаимной перпендикулярности сторон. Кроме того, вершины этих треугольников расположены сходственно, т. е. буквы обоих контуров читаются в одной и той же последовательности при определенном обходе контура. В рассматриваемом примере правильное расположение треугольника bce определяется тем, что, обходя контур этого треугольника против хода часовой стрелки, получаем последовательность вершин b, c, e . В треугольнике BCE на плане механизма при обходе против хода часовой стрелки получается та же последовательность вершин. Если треугольник bce показать в другом положении, симметричном относительно отрезка bc , то сходственности расположения треугольников bce и BCE уже не будет.

Указанное свойство подобия справедливо для любого числа точек на звене механизма. Поэтому можно сформулировать следующую теорему, известную под названием *теоремы подобия* для плана скоростей звена:

Отрезки прямых линий, соединяющих точки одного и того же звена на плане механизма, и отрезки прямых линий, соединяющих концы векторов скоростей этих точек на плане скоростей, образуют подобные и сходственно расположенные фигуры.

Фигура на плане скоростей повернута относительно фигуры на плане механизма на 90° . Теорема подобия дает возможность определить скорость любой точки звена, если известны скорости двух точек этого звена.

После построения плана скоростей шарнирного четырехзвенника переходим к определению скоростей точек на звеньях второй структурной группы, состоящей из звеньев 4 и 5. Для этой группы известна из предыдущих построений скорость точки E , которая является общей для звеньев 2 и 4. Обозначим эту точку через E_4 и будем искать скорость точки E_5 на звене 5. Для двух точек, совпадающих в данном положении, но принадлежащих разным звеньям поступательной пары, можно написать уравнение, связывающее их скорости:

$$\underline{v_{E_4}} = \frac{v_{E_5}}{\Delta EG} + \frac{v_{E_4 E_5}}{\|E_4 E_5\|} \quad (2.26)$$

Это уравнение основано на том, что движение звена 4 представляется как составное из переносного движения вместе со звеном

5 и относительного движения по отношению к этому звену. Скорость относительного движения $v_{E_4E_5}$ направлена параллельно EF , так как поступательная пара, соединяющая звенья 4 и 5, допускает относительное движение только в этом направлении. Скорость точки E_5 направлена перпендикулярно к радиусу вращения.

Вместо уравнения (2.26) можно применять равносильное уравнение

$$\frac{v_{E_5}}{\Delta E_5G} = \frac{v_{E_4}}{\Delta E_4G} + \frac{v_{E_5E_4}}{\|EF\|}, \quad (2.27)$$

которое удобно тем, что неизвестный вектор стоит в левой части.

Для графического решения уравнения (2.27) проводим через точку e_4 линию, параллельную отрезку EF , а через полюс p — линию, перпендикулярную EG . Пересечение этих линий дает точку e_5 , т. е. конец вектора искомой скорости точки E_5 .

Модуль угловой скорости звена 5 находится из условия

$$\omega_5 = v_{E_5}/l_{EG},$$

где $v_{E_5} = \mu_v(pe_5)$.

Угловая скорость звена 4 равна угловой скорости звена 5, так как эти звенья образуют поступательную пару (угловая скорость относительного движения звеньев в этой паре равна нулю). Если необходимо определить скорость второй точки на звене 4, то наиболее просто находится скорость точки G_4 , совпадающей с неподвижной точкой G :

$$v_{G_4} = v_{G_5} + v_{G_4G_5}.$$

Скорость точки G_5 равна нулю, а относительные скорости любых совпадающих точек на звеньях, образующих поступательную пару, равны между собой, т. е.

$$v_{G_4G_5} = v_{E_4E_5}.$$

Следовательно,

$$v_{G_4} = v_{E_4E_5}.$$

Чтобы выполнить это условие, надо из полюса p провести линию, параллельную e_4e_5 , а из точки e_4 — линию, параллельную pe_5 . Пересечение этих линий определит точку g_4 — конец вектора искомой скорости точки G_4 .

Рассмотренный пример дает все необходимые сведения для построения планов скоростей любых плоских механизмов, в состав которых входят только двухзвенные группы. Это утверждение основано на том, что в этих механизмах для определения скоростей используются лишь два типа уравнений: уравнение (2.23) для точек, лежащих на одном звене, и уравнение (2.27) для совпадающих точек на звеньях, образующих поступательную пару.

§ 10. Планы ускорений механизмов с группами второго класса

Планом ускорений звена плоского механизма называется графическое построение, представляющее собой плоский пучок, лучи которого изображают абсолютные ускорения точек звена, а отрезки, соединяющие концы лучей, — относительные ускорения соответствующих точек в данном положении звена. Совокупность планов ускорений звеньев механизма с одним общим полюсом и одним масштабом называется *планом ускорений механизма*.

Построение планов ускорений поясним на примере исследования того же механизма, для которого строился план скоростей. Уравнения, которые используются при построении плана ускорений механизма, отличаются от уравнений для построения плана скоростей только разложением полных ускорений на отдельные составляющие.

Полное ускорение точки B складывается из двух составляющих: нормального ускорения a_B^n и касательного ускорения a_B^{τ} . Нормальное ускорение направлено по линии AB к центру A , а его модуль определяется по формуле

$$a_B^n = l_{AB}\omega_1^2.$$

Модуль касательного ускорения определяется по формуле

$$a_B^{\tau} = l_{AB}\varepsilon_1,$$

где ε_1 — модуль заданного углового ускорения звена I в рад/с² (размерность этого ускорения с⁻²).

Касательное ускорение a_B^{τ} направлено перпендикулярно AB в сторону, соответствующую направлению углового ускорения ε_1 . Полное ускорение точки B , которое обозначим через a_B , есть геометрическая сумма его составляющих:

$$a_B = a_B^{\tau} + a_B^n.$$

Приняв некоторую точку π за полюс плана ускорений (рис. 23, в), отложим вектор, изображающий нормальное ускорение точки B , в виде отрезка $(\pi n_1)^*$. Тогда масштабный коэффициент ускорений найдется из соотношения

$$\mu_a = a_B^n / (\pi n_1)$$

и имеет размерность $\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$.

Можно также задаться значением μ_a и определить отрезок (πn_1) в мм из условия

$$(\pi n_1) = a_B^n / \mu_a.$$

*) Концы векторов всех нормальных ускорений обозначены буквой n . Буква N поэтому не используется для обозначений точек.

Далее откладываем отрезок (n_1b) в мм, изображающий касательное ускорение точки B : $(n_1b) = a_B^t/\mu_a$.

Ускорение точки C находим из уравнения, аналогичного уравнению (2.23), с разделением каждого ускорения на нормальную и касательную составляющие:

$$\underline{a_C^n} + \frac{a_C^t}{d_{CD}} = \underline{a_B^n} + \underline{a_B^t} + \frac{a_{CB}^n}{d_{CB}} + \frac{a_{CB}^t}{d_{CB}}. \quad (2.28)$$

Нормальные ускорения вычисляются по формулам:

$$a_C^n = v_C^2/l_{CD}, \quad a_{CB}^n = v_{CB}^2/l_{CB}.$$

Отрезки, изображающие в мм векторы этих ускорений:

$$(\pi n_3) = a_C^n/\mu_a, \quad (bn_2) = a_{CB}^n/\mu_a.$$

Вектор a_C^n должен быть направлен по линии CD к центру D , а вектор a_{CB}^n — вдоль линии CB от точки C к точке B как центру вращения. Направления векторов касательных ускорений проводятся перпендикулярно направлениям нормальных ускорений через точки n_2 и n_3 . Пересечение этих направлений определит точку c — конец вектора искомого ускорения точки C .

Модули угловых ускорений звеньев 2 и 3 определяются по формулам

$$\varepsilon_2 = a_{CB}^t/l_{CB}, \quad \varepsilon_3 = a_C^t/l_{CD},$$

где

$$a_{CB}^t = (n_2c)\mu_a, \quad a_C^t = (n_3c)\mu_a.$$

Для определения направлений (знаков) угловых ускорений ε_2 и ε_3 переносим векторы a_{CB}^t и a_C^t в точку C и наблюдаем, в какую сторону эти векторы вращают отрезки CB и CD .

Для нахождения ускорения точки E строим $\triangle bce$, подобный $\triangle BCE$ и сходственно с ним расположенный. Теорема подобия, сформулированная ранее для плана скоростей, справедлива и для плана ускорений. Для доказательства этого положения определим угол μ_2 , который составляет отрезок (cb) плана ускорений с отрезком (CB) плана механизма. В прямоугольном треугольнике bn_2c угол μ_2 равен углу между отрезком (cb) и отрезком (n_2b) , который параллелен отрезку (CB) . Из этого треугольника получаем

$$\operatorname{tg} \mu_2 = a_{CB}^t/a_{CB}^n.$$

Модули a_{CB}^t и a_{CB}^n могут быть выражены через угловую скорость и угловое ускорение звена 2:

$$a_{CB}^t = l_{CB}\varepsilon_2, \quad a_{CB}^n = l_{CB}\omega_2^2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \mu_2 = \varepsilon_2/\omega_2^2$$

Такие же рассуждения можно провести для любых двух точек звена 2. Поэтому все одноименные отрезки на звене 2 и на плане ускорений составляют между собой один и тот же угол μ_2 .

После определения ускорения точки E на звене 2, которая совпадает с точкой E_4 на звене 4, находим ускорение точки E_5 :

$$\underline{a_{E_5}^n} + \underline{a_{E_5}^r} = \underline{a_{E_4}} + \underline{a_{E_5 E_4}^k} + \underline{a_{E_5 E_4}^r}. \quad (2.29)$$

В этом уравнении, кроме относительного ускорения $a_{E_5 E_4}^r$, имеющего направление относительного перемещения звеньев 4 и 5, появилось кориолисово ускорение, модуль которого определяется по формуле

$$a_{E_5 E_4}^k = 2\omega_5 v_{E_5 E_4}.$$

Направление кориолисова ускорения определяется поворотом относительной скорости $v_{E_5 E_4}$ на 90° по направлению переносной угловой скорости $\tilde{\omega}_5$ (рис. 23, з). Для большей ясности чертежа построим план ускорений для звеньев 4 и 5 отдельно (рис. 23, д). Вектор ускорения точки E_4 или, что то же, точки E переносим из плана ускорений шарнирного четырехзвенника. Через точку e_4 проводим линию, перпендикулярную EF , и откладываем на ней отрезок $(e_4 k)$, изображающий кориолисово ускорение

$$(e_4 k) = a_{E_5 E_4}^k / \mu_a$$

в соответствии с построением, указанным на рис. 23, з. Далее вычисляем модуль нормального ускорения точки E_5

$$a_{E_5}^n = v_{E_5}^2 / l_{EG}$$

и откладываем из полюса π параллельно EG от E к G вектор πn_4 , изображающий это ускорение. Отрезок (πn_4) находится из условия

$$(\pi n_4) = a_{E_5}^n / \mu_a.$$

Через точку n_4 проводим линию, перпендикулярную EG , а через точку k — конец вектора кориолисова ускорения — линию, параллельную EF . Точка пересечения этих линий определяет точку e_5 — конец вектора искомого ускорения точки E_5 .

Модуль углового ускорения звена 5 находим по формуле

$$\epsilon_5 = a_{E_5}^r / l_{EG},$$

где

$$a_{E_5}^r = (n_4 e_5) \mu_a.$$

Для определения направления (знака) этого ускорения переносим вектор $a_{E_5}^r$ в точку E_5 и наблюдаем, в какую сторону этот вектор вращает отрезок EG .

Если надо определить ускорение второй точки на звене 4, например, точки G_4 , то используем условие, что сумма кориолисова и относительного ускорений для любых двух совпадающих точек звеньев 4 и 5 имеет одну и ту же величину, т. е. векторы, изображаемые отрезками (e_5e_4) и (g_5g_4) , должны быть равны по модулю и иметь одинаковое направление. Если учесть также, что ускорение точки G_5 равно нулю (точка g_5 находится в полюсе плана ускорений), то точку g_4 можно найти на пересечении линии, проведенной из полюса π параллельно (e_5e_4) , с линией, проведенной из точки e_4 параллельно (e_5g_5) .

Планы ускорений любых других плоских механизмов с двухзвенными группами могут быть построены на основании уравнений типа (2.28) и (2.29).

§ 11. Применение точек Ассура при построении планов скоростей и ускорений

При построении планов скоростей и ускорений плоских механизмов, в состав которых входят структурные группы выше второго класса, используются особые точки звеньев, называемые *точками Ассура*.

Рассмотрим, например, структурную группу третьего класса, состоящую из четырех звеньев и шести вращательных пар (рис. 24, а). Звено CDE называется *базисным*, а звенья CB , DG и EF — *поводками*, поэтому иначе эта группа называется *трехповодковой*. Точки Ассура, которые находятся на пересечении направлений любых двух поводков, обозначены кружками и считаются принадлежащими базисному звену.

Для решения задачи о распределении скоростей в звеньях трехповодковой группы будем считать заданными скорости центров крайних пар: $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_G$ и $\mathbf{v}_F$. Построение плана скоростей начинаем с изображения векторов заданных скоростей (рис. 24, б). Затем определяем вектор скорости точки Ассура S по уравнениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_S &= \mathbf{v}_C + \frac{\mathbf{v}_{SC}}{\perp SC}, & \mathbf{v}_S &= \mathbf{v}_D + \frac{\mathbf{v}_{SD}}{\perp SD}, \\ \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \frac{\mathbf{v}_{CB}}{\perp CB}, & \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_G + \frac{\mathbf{v}_{DG}}{\perp DG}.\end{aligned}$$

Первые два уравнения этой системы написаны для точек, принадлежащих базисному звену, третье — для точек звена CB и четвертое — для точек звена GD . Подставляя в первые два уравнения значения скоростей $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{v}_D$ и приравнивая правые части этих уравнений, получаем

$$\underline{\mathbf{v}_B} + \frac{\mathbf{v}_{CB}}{\perp CB} + \frac{\mathbf{v}_{SC}}{\perp SC} = \underline{\mathbf{v}_G} + \frac{\mathbf{v}_{DG}}{\perp DG} + \frac{\mathbf{v}_{SD}}{\perp SD}. \quad (2.30)$$

В этом уравнении векторы $\underline{v_{CB}}$ и $\underline{v_{SC}}$ подчеркнуты одной чертой, так как их направления совпадают. Векторы $\underline{v_{DG}}$ и $\underline{v_{SD}}$ также подчеркнуты одной чертой, поэтому уравнение (2.30) допускает непосредственное графическое решение. Искомая точка s — конец вектора скорости точки Ассура — находится на пересечении линий,

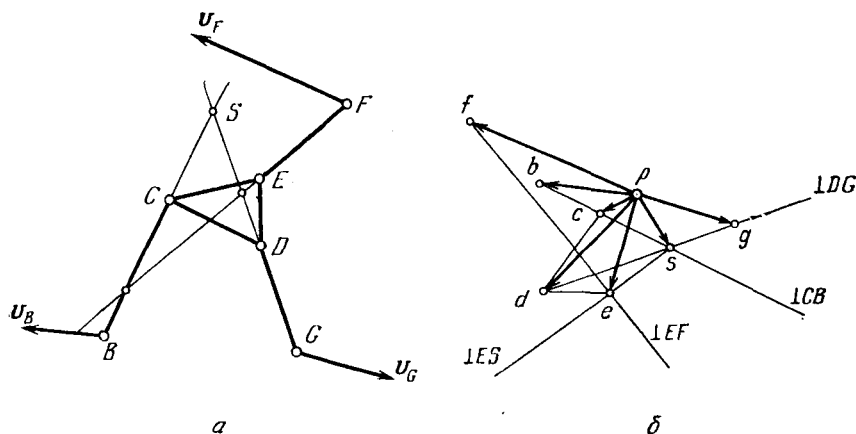


Рис. 24

проведенных перпендикулярно отрезкам CB и DG из точек b и g соответственно. После определения скорости точки S базисного звена находим скорость другой точки этого звена — точки E — из уравнений:

$$\underline{v_E} = \underline{v_S} + \frac{\underline{v_{ES}}}{\perp ES}, \quad \underline{v_E} = \underline{v_F} + \frac{\underline{v_{EF}}}{\perp EF}.$$

Искомая точка e — конец вектора скорости точки E — находится на пересечении линий, проведенных перпендикулярно отрезкам ES и EF из точек s и f соответственно.

После нахождения точек s и e строим четырехугольник $sedc$, подобный четырехугольнику $SEDC$ на плане группы и повернутый по отношению к нему на угол 90° .

Угловые скорости звеньев группы находятся по известным теперь значениям относительных вращательных скоростей.

Аналогично строится план ускорений. Для определения ускорения точки Ассура $\underline{a_s}$ по известным ускорениям точек B и G имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \underline{a_s} &= \underline{a_C} + \frac{\underline{a_{SC}^n}}{\|SC\|} + \frac{\underline{a_{SC}^\tau}}{\perp SC}, & \underline{a_s} &= \underline{a_D} + \frac{\underline{a_{SD}^n}}{\|SD\|} + \frac{\underline{a_{SD}^\tau}}{\perp SD}, \\ \underline{a_C} &= \underline{a_B} + \frac{\underline{a_{CB}^n}}{\|CB\|} + \frac{\underline{a_{CB}^\tau}}{\perp CB}, & \underline{a_D} &= \underline{a_G} + \frac{\underline{a_{DG}^n}}{\|DG\|} + \frac{\underline{a_{DG}^\tau}}{\perp DG}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение для определения ускорения точки Ассура:

$$\underline{a_S} \equiv \underline{a_B} + \frac{\underline{a_{CB}^n}}{\|CB\|} + \frac{\underline{a_{CB}^\tau}}{\perp CB} + \frac{\underline{a_{SC}^\tau}}{\|SC\|} + \frac{\underline{a_{SC}^n}}{\perp SC} = \underline{a_G} + \frac{\underline{a_{DG}^n}}{\|DG\|} + \frac{\underline{a_{DG}^\tau}}{\perp DG} + \frac{\underline{a_{SD}^\tau}}{\|SD\|} + \frac{\underline{a_{SD}^n}}{\perp SD}.$$

Ускорение точки E находим из уравнения

$$\underline{a_E} \equiv \underline{a_S} + \frac{\underline{a_{ES}^n}}{\|ES\|} + \frac{\underline{a_{ES}^\tau}}{\perp ES} = \underline{a_F} + \frac{\underline{a_{EF}^n}}{\|EF\|} + \frac{\underline{a_{EF}^\tau}}{\perp EF}.$$

Ускорения точек C и D можно найти построением четырехугольника $sedc$, подобного и сходственно расположенного с четырехугольником $SEDC$ на плане группы.

С помощью особых точек можно также решать задачи построения планов скоростей и ускорений для плоских механизмов более высоких классов *).

§ 12. Метод ложных положений при построении планов скоростей и ускорений

Кроме метода точек Ассура, при построении планов скоростей и ускорений плоских механизмов, в состав которых входят структурные группы выше второго класса, может быть применен *метод ложных положений*. Этот метод основывается на свойстве поступательного движения подобно изменяемого n -угольника: если $n - 1$ его вершин движутся по прямым, то и вершина n также движется по прямой.

Пусть, например, для четырехзвенной группы четвертого класса известны скорости и ускорения точек B и G (рис. 25, а). Тогда для построения плана скоростей (рис. 25, б) откладываем из полюса p известные векторы скоростей v_B и v_G и проводим через точку b прямые, перпендикулярные отрезкам BC и BD , а через точку g — перпендикулярные отрезкам GF и GE . Эти направления, совпадающие с направлениями относительных скоростей v_{BC} , v_{BD} , v_{GF} и v_{GE} , дают геометрические места возможных положений точек c , d , f и e плана скоростей.

Прежде чем найти истинные положения точек c , d , f и e , дважды находят их ложные положения, которые обозначены через c' , d' , e' , f' и c'' , d'' , e'' , f'' . Если начать построение этих положений из произвольной точки c' , то положения точек d' , e' и f' могут быть найдены из уравнений

$$\begin{aligned} v_D &= v_C + v_{DC}, & v_E &= v_D + v_{ED}, \\ v_F &= v_E + v_{FE}, & v_G &= v_C + v_{CG}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

*) Джолдасбеков У. А. Теория механизмов и машин.— Алма-Ата: Мектеп, 1972.

С этой целью из точки c' проводим линию, перпендикулярную отрезку CD , до пересечения с геометрическим местом точек d . Из полученной точки d' проводим линию, перпендикулярную отрезку

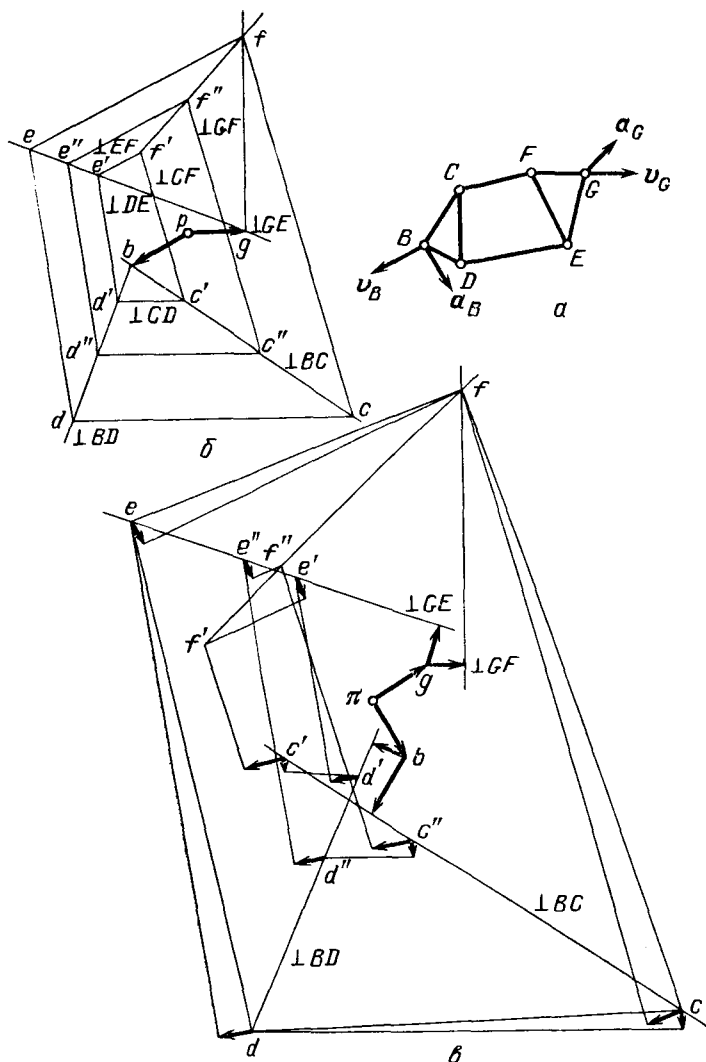


Рис. 25

DE , до пересечения с геометрическим местом точек e в точке e' . Точку f' находим на пересечении прямых, перпендикулярных отрезкам EF и CF , проведенных соответственно через точки e' и c' .

Полученная точка f' не попадает на геометрическое место точек f , так как положение точки c было выбрано произвольно. Повторяя все указанные построения для другого положения точки c , получаем точки c'' , d'' , e'' и f'' . На основании свойств движения подобно изменяемого четырехугольника $cdef$ точка f движется по прямой, проходящей через $f'f''$, и, следовательно, истинное положение точки f находится на пересечении прямой $f'f''$ с геометрическим местом точек f . Для определения истинных положений точек c , d и e проводим линии ef , ed , cd и cf , параллельные сторонам четырехугольника $cdef$.

План ускорений (рис. 25, ϵ) строим на основании уравнений

$$\begin{aligned} a_D &= a_C + a_{DC}^n + a_{DC}^{\tau}, & a_E &= a_D + a_{ED}^n + a_{ED}^{\tau}, \\ a_F &= a_E + a_{FE}^n + a_{FE}^{\tau}, & a_F &= a_C + a_{FC}^n + a_{FC}^{\tau}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Сравнение систем уравнений (2.31) и (2.32) показывает, что построение плана ускорений отличается от построения плана скоростей только тем, что линии, перпендикулярные отрезкам CD , DE , EF и CF , т. е. направления касательных составляющих относительных ускорений, проводятся лишь после того, как на плане отложены величины соответствующих нормальных ускорений.

ГЛАВА 3

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

§ 13. Матрицы кинематических пар

Уравнения преобразования координат. Преобразование координат системы x_j, y_j, z_j в координаты системы x_i, y_i, z_i выполняется по уравнениям:

$$\begin{aligned} x_i &= a_{11}x_j + a_{12}y_j + a_{13}z_j + a_i, \\ y_i &= a_{21}x_j + a_{22}y_j + a_{23}z_j + b_i, \\ z_i &= a_{31}x_j + a_{32}y_j + a_{33}z_j + c_i, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где a_i , b_i , c_i — координаты начала системы j в системе i , а коэффициенты при координатах — направляющие косинусы системы j относительно i :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\overset{\frown}{x_j, x_i}), & a_{12} &= \cos(\overset{\frown}{y_j, x_i}), & a_{13} &= \cos(\overset{\frown}{z_j, x_i}), \\ a_{21} &= \cos(\overset{\frown}{x_j, y_i}), & a_{22} &= \cos(\overset{\frown}{y_j, y_i}), & a_{23} &= \cos(\overset{\frown}{z_j, y_i}), \\ a_{31} &= \cos(\overset{\frown}{x_j, z_i}), & a_{32} &= \cos(\overset{\frown}{y_j, z_i}), & a_{33} &= \cos(\overset{\frown}{z_j, z_i}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Углы в формулах (3.2) отсчитываются против хода часовой стрелки от координатных осей системы i .

В матричной форме уравнения (3.1) с добавлением тождества $1 = 1$ имеют вид

$$\mathbf{r}_i = T_{ji} \mathbf{r}_j, \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_i \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_i \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица четвертого порядка T_{ji} выражает преобразование координат системы j в систему i . Обратное преобразование координат системы i в систему j выражается матричным уравнением

$$\mathbf{r}_j = T_{ij} \mathbf{r}_i. \quad (3.4)$$

Если при этом преобразовании сохранить обозначения направляющих косинусов по (3.2), то матрица T_{ij} имеет вид

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_j \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & b_j \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & c_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a_i, b_i, c_i — координаты начала системы i в системе j .

Если начала координат систем i и j совпадают, то матрицы T_{ji} и T_{ij} , называемые *матрицами поворота*, имеют третий порядок и могут быть получены одна из другой *транспонированием*, т. е. заменой строк матрицы ее столбцами *):

$$T_{ij} = T_{ji}^T, \quad T_{ji} = T_{ij}^T.$$

Углы Эйлера. Направляющие косинусы в уравнениях преобразования координат могут быть выражены через *углы Эйлера*. Если начало координат системы j совпадает с началом системы i , то для отсчета углов Эйлера сначала отмечается *линия узлов*, т. е. линии пересечения ON_j плоскости x_iOy_i с плоскостью x_iOz_i (рис. 26)**). Положительное направление линии узлов выбирается так, чтобы видеть кратчайший поворот от оси Oz_i к Oz_j , происходящим против хода часовой стрелки. Тогда положение координатной системы j по отношению к системе i определяется тремя углами Эйлера.

Первый угол — *угол нутации* θ_j — образован положительными направлениями осей Oz_j и Oz_i ($0 \leq \theta_j \leq \pi$).

*) Транспонирование матрицы обозначается верхним индексом «т».

**) Системы координат — правые, т. е. кратчайший поворот оси Ox к оси Oy совершается против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz .

Второй угол — *угол прецессии* ψ_n — расположен в плоскости $x_i O y_i$ между осью Ox_i и линией узлов ON_n и отсчитывается против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz_i ($0 \leq \psi_n \leq 2\pi$).

Третий угол — *угол собственного вращения* φ_n — расположен в плоскости $x_j O y_j$ между линией узлов ON_n и осью Ox_j и отсчитывается

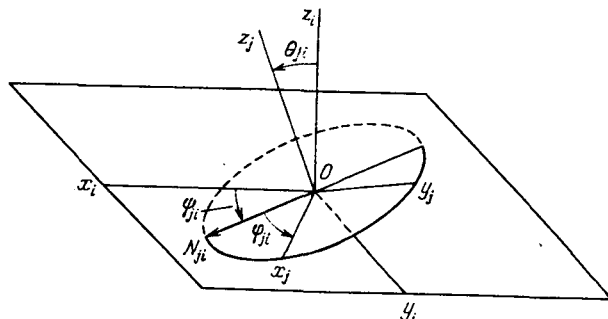


Рис. 26

ся против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Oz_j ($0 \leq \varphi_n \leq 2\pi$).

Если начало системы j не совпадает с началом системы i , то для отсчета углов Эйлера надо через O_j провести оси, параллельные осям системы i .

Введем обозначения: $\cos \theta_n = c_1$, $\cos \psi_n = c_2$, $\cos \varphi_n = c_3$, $\sin \theta_n = s_1$, $\sin \psi_n = s_2$, $\sin \varphi_n = s_3$. Тогда направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3, & a_{12} &= -c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, & a_{13} &= s_1 s_2, \\ a_{21} &= s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3, & a_{22} &= -s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3, & a_{23} &= -s_1 c_2, \\ a_{31} &= s_1 s_3, & a_{32} &= s_1 c_3, & a_{33} &= c_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При вычислении углов Эйлера по известным направляющим косинусам сначала находят угол θ_n из условия:

$$\cos \theta_n = a_{33} \text{ при } 0 \leq \theta_n \leq \pi. \quad (3.6)$$

Затем определяем углы ψ_n и φ_n по значениям их косинусов и синусов:

$$\sin \psi_n = a_{13} / \sin \theta_n, \quad \cos \psi_n = -a_{23} / \sin \theta_n, \quad (3.7)$$

$$\sin \varphi_n = a_{31} / \sin \theta_n, \quad \cos \varphi_n = -a_{32} / \sin \theta_n. \quad (3.8)$$

Матрицы кинематических пар. Матрица коэффициентов правых частей уравнений преобразования координат T_n (или T_{ij}) зависит только от вида кинематической пары и потому может быть названа *матрицей кинематической пары*. Приписывая во внимание формулы связи между направляющими косинусами и углами Эйлера

(3.5), получаем

$$T_{ji} = \begin{vmatrix} \cos \psi_{ji} \cos \varphi_{ji} - & -\cos \psi_{ji} \sin \varphi_{ji} - & \sin \theta_{ji} \sin \psi_{ji} & a_i \\ -\cos \theta_{ji} \sin \psi_{ji} \sin \varphi_{ji} & -\cos \theta_{ji} \sin \psi_{ji} \cos \varphi_{ji} & & \\ \sin \psi_{ji} \cos \varphi_{ji} + & -\sin \psi_{ji} \sin \varphi_{ji} + & -\sin \theta_{ji} \cos \psi_{ji} & b_i \\ +\cos \theta_{ji} \cos \psi_{ji} \sin \varphi_{ji} & +\cos \theta_{ji} \cos \psi_{ji} \cos \varphi_{ji} & & \\ \sin \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \sin \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} & c_i \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

Для *трехподвижной сферической пары* три угла Эйлера являются переменными величинами, а координаты a_i , b_i и c_i — постоянными параметрами. Для *двухподвижной сферической пары* (сферической пары с пальцем) только два угла Эйлера будут независимыми. Например, в качестве переменных можно принять угол прецессии ψ_{ji} и угол собственного вращения φ_{ji} , а угол нутации θ_{ji} считать равным $\pi/2$. Тогда матрица *двухподвижной сферической пары* получается из матрицы (3.9) при $\sin \theta_{ji} = 1$ и $\cos \theta_{ji} = 0$:

$$T_{ji} = \begin{vmatrix} \cos \psi_{ji} \cos \varphi_{ji} & -\cos \psi_{ji} \sin \varphi_{ji} & \sin \psi_{ji} & a_i \\ \sin \psi_{ji} \cos \varphi_{ji} & -\sin \psi_{ji} \sin \varphi_{ji} & -\cos \psi_{ji} & b_i \\ \sin \varphi_{ji} & \cos \varphi_{ji} & 0 & c_i \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Ось вальца удобно принимать совпадающей с осью $O_j z_j$, а ось прорези (ось, перпендикулярную плоскости прорези) направлять по оси $O_i z_i$ (или параллельно оси $O_i z_i$, если начала координат O_j и O_i не совпадают). Тогда угол прецессии ψ_{ji} есть угол поворота вокруг оси прорези, а угол собственного вращения φ_{ji} — угол поворота вокруг оси пальца.

Для звеньев i и j вращательной пары ось $O_j z_j$ направим по оси этой пары, кратчайшее расстояние l_i между осями $O_j z_j$ и $O_i z_i$, совместим с осью $O_i x_i$, а начало координат O_j поместим на расстоянии l_{ji} от оси $O_i x_i$ (рис. 27). Тогда угол нутации $\theta_{ji} = \text{const}$, угол прецессии $\psi_{ji} = 0$, и с учетом принятых обозначений получаем из (3.9) матрицу вращательной пары:

$$T_{ji} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 & l_i \\ \cos \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & -\sin \theta_{ji} & -l_{ji} \sin \theta_{ji} \\ \sin \theta_{ji} \sin \varphi_{ji} & \sin \theta_{ji} \cos \varphi_{ji} & \cos \theta_{ji} & l_{ji} \cos \theta_{ji} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

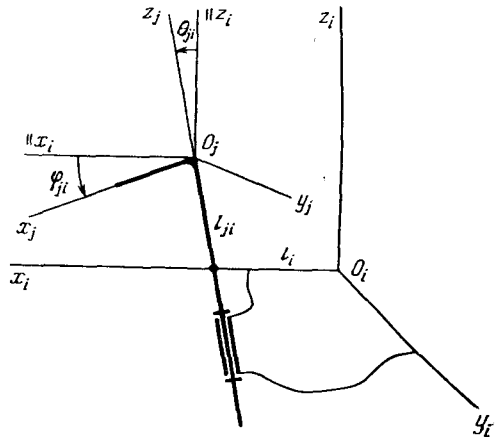


Рис. 27

Матрица поступательной пары получается из матрицы (3.11), если считать параметр $l_{ji} = s_{ji}$ переменной величиной, а угол $\varphi_{ji} = 0$. Угол θ_{ji} в этом случае есть угол между осью $O_i z_i$ и осью поступательной пары, а величина l_{ji} равна кратчайшему расстоянию между этими осями.

При тех же условиях, если вместо поступательной пары будет винтовая, то расстояние $l_{ji} = s_{ji}$ надо считать переменной величиной, связанной с углом поворота φ_{ji} соотношением

$$s_{ji} = h_{ji} \frac{\varphi_{ji}}{2\pi},$$

где h_{ji} — шаг винтовой линии.

Наконец, если звенья i и j образуют цилиндрическую пару, то в матрице (3.11) надо считать независимыми две переменные величины: $l_{ji} = s_{ji}$ и φ_{ji} .

Все указанные матрицы имеют порядок (3×4) . Если желательно иметь только квадратные матрицы, которые можно умно-

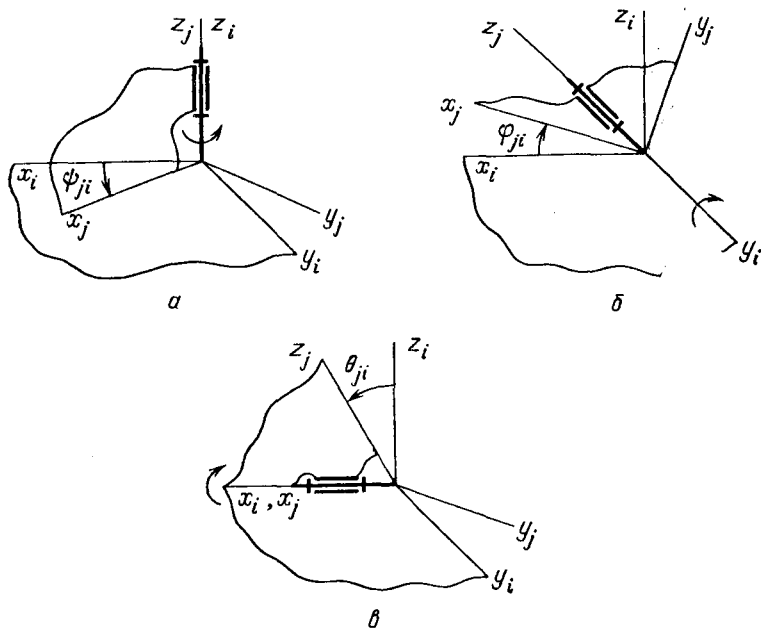


Рис. 28

жать, то к уравнениям преобразования координат (3.1) добавляется тождество $1 \equiv 1$ и, соответственно, во всех матрицах появляется четвертая строка, содержащая нули в первых столбцах и единицу в четвертом столбце.

Квадратные матрицы получаются также, если начало координат O_j совпадает с началом координат O_i ($a_i = b_i = c_i = 0$). В этом случае для вращательной пары удобно направлять ее ось по одной из трех координатных осей x_i, y_i, z_i .

При вращении звена j вокруг оси z_i (рис. 28, а) из матрицы (3.11) при $\theta_{ji} = 0$ имеем

$$T_{ji} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 \\ \sin \varphi_{ji} & \cos \varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.12)$$

где переменный угол $\varphi_{ji} = \psi_{ji}$ есть угол между осью x_i и осью x_j , направление которой выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью x_i .

При вращении звена j вокруг оси y_i (рис. 28, б) из матрицы (3.11) при $\theta_{ji} = \pi/2$ имеем

$$T_{ji} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{ji} & -\sin \varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \varphi_{ji} & \cos \varphi_{ji} & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

где переменный угол φ_{ji} определяется, как и в матрице (3.12).

При вращении звена j вокруг оси x_i (рис. 28, в) из матрицы (3.11) при $\varphi_{ji} = 0$ имеем

$$T_{ji} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{ji} & -\sin \theta_{ji} \\ 0 & \sin \theta_{ji} & \cos \theta_{ji} \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

где переменный угол θ_{ji} есть угол между осью z_i и осью z_j , направление которой выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью z_i .

§ 14. Матрицы кинематических соединений

Двухподвижное сферическое соединение. Двухподвижная сферическая пара конструктивно выполняется в виде последовательного соединения трех звеньев 0, 1 и 2 двумя вращательными парами, оси которых пересекаются под углом 90° (рис. 29). Ось вращательной пары 0—1 совпадает с осями z_0 и z_1 . Ось вращательной пары 1—2 совпадает с осью z_2 . Координатная ось x_1 (ось x_2) выбирается из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью x_0 (осью x_1). Следовательно, угол φ_{10} (угол φ_{21}) между осями x_1 и x_0 (осями x_2 и x_1) есть угол вращения звена 1 (звена 2) относительно звена 0 (звена 1).

При указанных направлениях координатных осей уравнения преобразования координат звена 2 в координаты звена 1 получаются

в соответствии с матрицей (3.13) при $j = 2, i = 1$:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \cos \varphi_{21} - y_2 \sin \varphi_{21}, \\y_1 &= -z_2, \\z_1 &= x_2 \sin \varphi_{21} + y_2 \cos \varphi_{21}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Уравнения преобразования координат звена 1 в координаты зве-

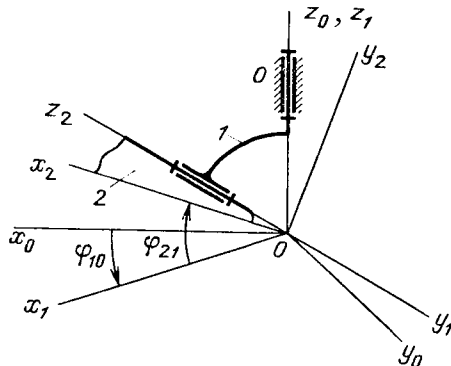


Рис. 29

на 0 получаются в соответствии с матрицей (3.12) при $j = 1, i = 0$:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_1 \cos \varphi_{10} - y_1 \sin \varphi_{10}, \\y_0 &= x_1 \sin \varphi_{10} + y_1 \cos \varphi_{10}, \\z_0 &= z_1.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Подставляя значения координат x_1, y_1, z_1 из (3.15) в (3.16), получаем

$$\begin{aligned}x_0 &= x_2 \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} - y_2 \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} + z_2 \sin \varphi_{10}, \\y_0 &= x_2 \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} - y_2 \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} - z_2 \cos \varphi_{10}, \\z_0 &= x_2 \sin \varphi_{21} + y_2 \cos \varphi_{21}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

В матричной форме системы уравнений (3.15) и (3.16) имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = T_{21}\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_0 = T_{10}\mathbf{r}_1,$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix},$$

$$T_{21} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \end{Bmatrix}, \quad T_{10} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_0 = T_{10}T_{21}\mathbf{r}_2 \equiv T_{20}\mathbf{r}_2,$$

где

$$T_{20} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} & \sin \varphi_{10} \\ \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} & -\sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} & -\cos \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Углы Эйлера, определяющие положение звена 2 относительно звена 0, находятся из соотношений (3.6) — (3.8), связывающих эти углы с элементами матрицы T_{20} :

$$\cos \theta_{20} = 0, \quad \theta_{20} = \pi/2;$$

$$\sin \psi_{20} = \sin \varphi_{10}, \quad \cos \psi_{20} = \cos \varphi_{10}, \quad \psi_{20} = \varphi_{10};$$

$$\sin \varphi_{20} = \sin \varphi_{21}, \quad \cos \varphi_{20} = \cos \varphi_{21}, \quad \varphi_{20} = \varphi_{21}.$$

Отсюда следует, что матрица двухподвижного сферического соединения (3.18) совпадает с матрицей двухподвижной сферической пары (3.10) при $\varphi_{10} = \psi_{20}$ и $\varphi_{21} = \varphi_{20}$.

Трехподвижное сферическое соединение. Трехподвижная сферическая пара (шаровой шарнир) конструктивно выполняется в виде

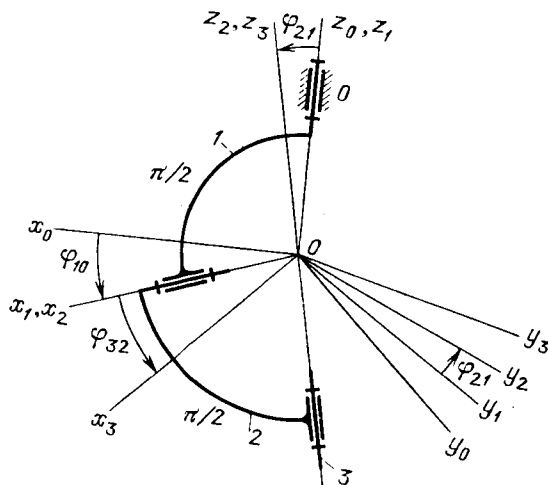


Рис. 30

последовательного соединения четырех звеньев 0, 1, 2 и 3 тремя вращательными парами, оси которых пересекаются в одной точке под углом 90° (рис. 30).

Координатные оси $x_0y_0z_0$ считаем неподвижными, причем ось z_0 совпадает с осью вращательной пары 0 — 1. Для звена 1 ось z_1 направлена по оси вращательной пары 0 — 1, т. е. совпадает с осью z_0 , ось x_1 выбрана из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью x_0 и, следовательно, переменный угол φ_{10} между

осями x_1 и x_0 есть угол вращения звена 1 относительно звена 0. Для звена 2 ось x_2 направлена по оси вращательной пары 1—2, а ось y_2 выбрана из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью y_1 и, следовательно, переменный угол φ_{21} между осями y_1 и y_2 есть угол вращения звена 2 относительно звена 1. Этот угол равен также углу между осями z_1 и z_2 по взаимной перпендикулярности сторон. Для звена 3 ось z_3 направлена по оси вращательной пары 2—3, а ось x_3 выбрана из условия, что в начальный момент времени она совпадает с осью x_2 и, следовательно, переменный угол φ_{32} между осями x_2 и x_3 есть угол вращения звена 3 относительно звена 2.

При указанных направлениях координатных осей уравнения преобразования координат звена 3 в координаты звена 2 получаются в соответствии с матрицей (3.12) при $j = 3$, $i = 2$:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_3 \cos \varphi_{32} - y_3 \sin \varphi_{32}, \\y_2 &= x_3 \sin \varphi_{32} + y_3 \cos \varphi_{32}, \\z_2 &= z_3.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Уравнения преобразования координат звена 2 в координаты звена 1 получаются в соответствии с матрицей (3.14) при $j = 2$, $i = 1$:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2, \\y_1 &= y_2 \cos \varphi_{21} - z_2 \sin \varphi_{21}, \\z_1 &= y_2 \sin \varphi_{21} + z_2 \cos \varphi_{21}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Уравнения преобразования координат звена 1 в координаты звена 0 получаются в соответствии с матрицей (3.12) при $j = 1$, $i = 0$:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_1 \cos \varphi_{10} - y_1 \sin \varphi_{10}, \\y_0 &= x_1 \sin \varphi_{10} + y_1 \cos \varphi_{10}, \\z_0 &= z_1.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Из систем уравнений (3.19), (3.20) и (3.21) после исключения переменных x_1 , y_1 , z_1 и x_2 , y_2 , z_2 получим

$$\begin{aligned}x_0 &= x_3 (\cos \varphi_{10} \cos \varphi_{32} - \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} \sin \varphi_{32}) - \\&\quad - y_3 (\cos \varphi_{10} \sin \varphi_{32} + \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} \cos \varphi_{32}) + z_3 \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10}, \\y_0 &= x_3 (\sin \varphi_{10} \cos \varphi_{32} + \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} \sin \varphi_{32}) + \\&\quad + y_3 (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} \cos \varphi_{32} - \sin \varphi_{10} \sin \varphi_{32}) - z_3 \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10}, \\z_0 &= x_3 \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{32} + y_3 \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{32} + z_3 \cos \varphi_{21}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Отсюда следует, что матрица T_{30} , т. е. матрица коэффициентов при переменных x_3 , y_3 , z_3 в системе уравнений (3.22), совпадает с матрицей трехподвижной сферической пары, получаемой из (3.9) при $j = 3$, $i = 0$ и $a_i = b_i = c_i = 0$, если угол прецессии $\psi_{30} = \varphi_{10}$, угол нутации $\theta_{30} = \varphi_{21}$ и угол собственного вращения $\varphi_{30} = \varphi_{32}$.

§ 15. Определение положений звеньев пространственной незамкнутой кинематической цепи

Манипулятор со сферической рабочей зоной. Как и для плоских кинематических цепей, задача об определении положений звеньев пространственной незамкнутой кинематической цепи по методу преобразования координат всегда может быть сведена к решению системы линейных уравнений. Рассмотрим, например, кинематическую цепь манипулятора с двумя вращательными, одной поступательной и одной сферической парами (рис 31). Оси вращательных пар пересекаются под углом 90° в точке O_1 , направляющая поступательной пары составляет с осью смежной вращательной пары угол 90° и также проходит через точку O_1 . Центр сферической пары E описывает траекторию, лежащие на концентрических сферах с центром в точке O , и потому рабочая зона манипулятора (зона возможных расположений точки E) называется сферической.

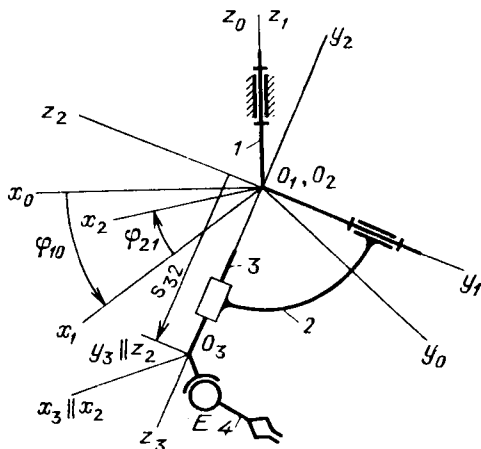


Рис. 31

Требуется определить положение точки E относительно стойки по заданным значениям углов поворота φ_{10} , φ_{21} и расстояния s_{32} , измеряемого вдоль направляющей поступательной пары от точки O_1 до точки O_3 .

Введем в рассмотрение точки E_2 , E_1 и E_0 , которые в данный момент времени совпадают с точкой E , но принадлежат соответственно звеньям 2, 1 и 0 (стойка). Уравнения преобразования координат (3.1) в матричной форме при расположении координатных осей по рис. 31 с добавлением тождества $1 \equiv 1$ имеют вид

$$\mathbf{r}_{E_2} = T_{32}\mathbf{r}_{E_3}, \quad \mathbf{r}_{E_1} = T_{21}\mathbf{r}_{E_2}, \quad \mathbf{r}_{E_0} = T_{10}\mathbf{r}_{E_1},$$

где

$$\mathbf{r}_{E_3} = \begin{bmatrix} x_{E_3} \\ y_{E_3} \\ z_{E_3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{E_2} = \begin{bmatrix} x_{E_2} \\ y_{E_2} \\ z_{E_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{E_1} = \begin{bmatrix} x_{E_1} \\ y_{E_1} \\ z_{E_1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{E_0} = \begin{bmatrix} x_{E_0} \\ y_{E_0} \\ z_{E_0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица поступательной пары T_{32} находится из (3.11) при $\varphi_H = 0$, $\theta_H = \pi/2$, $l_i = 0$, $l_H = s_{32}$:

$$T_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -s_{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы вращательных пар T_{21} и T_{10} находятся соответственно из (3.13) и (3.12) с добавлением четвертой строки 0 0 0 1:

$$T_{21} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{10} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений преобразования координат имеем

$$\mathbf{r}_{E_0} = T_{10} T_{21} T_{32} \mathbf{r}_{E_3}.$$

Применяя правило умножения строки на столбец, получаем

$$T_{21} T_{32} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} & s_{32} \sin \varphi_{21} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{21} & 0 & -\cos \varphi_{21} & -s_{32} \cos \varphi_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{10} (T_{21} T_{32}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} & \sin \varphi_{10} & \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} & s_{32} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} \\ \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} & -\cos \varphi_{10} & \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} & s_{32} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{21} & 0 & -\cos \varphi_{21} & -s_{32} \cos \varphi_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая теперь квадратную матрицу $T_{30} = T_{10} T_{21} T_{32}$ на столбцовую матрицу $\mathbf{r}_{E_3}$ и возвращаясь к обычной координатной форме, получаем

$$x_{E_0} = x_{E_3} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} + y_{E_3} \sin \varphi_{10} + (z_{E_3} + s_{32}) \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10},$$

$$y_{E_0} = x_{E_3} \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} - y_{E_3} \cos \varphi_{10} + (z_{E_3} + s_{32}) \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10},$$

$$z_{E_0} = x_{E_3} \sin \varphi_{21} - (z_{E_3} + s_{32}) \cos \varphi_{21}.$$

Элементы матрицы T_{30} дают значения направляющих косинусов системы координат звена 3 по отношению к неподвижной системе. Соответствующие им углы Эйлера находятся по соотношениям (3.6) — (3.8). Сферическая пара выполняется как трехподвижное сферическое соединение с матрицей T_{43} , элементы которой (направляющие косинусы) определяются по заданным углам поворота звеньев соединения, как указано в § 14. Направляющие косинусы системы координат звена 4 находятся, как элементы матрицы $T_{40} = T_{30} T_{43}$.

Манипулятор ангулярного типа. На рис. 32 показана схема пространственного манипулятора, состоящего из семизвеной пезамкнутой кинематической цепи с одними вращательными парами. Манипулятор называется *ангулярным*, так как все относительные движения звеньев определяются углами их поворотов. С каждым звеном свяжем правую систему координат, как показано на рис. 32,

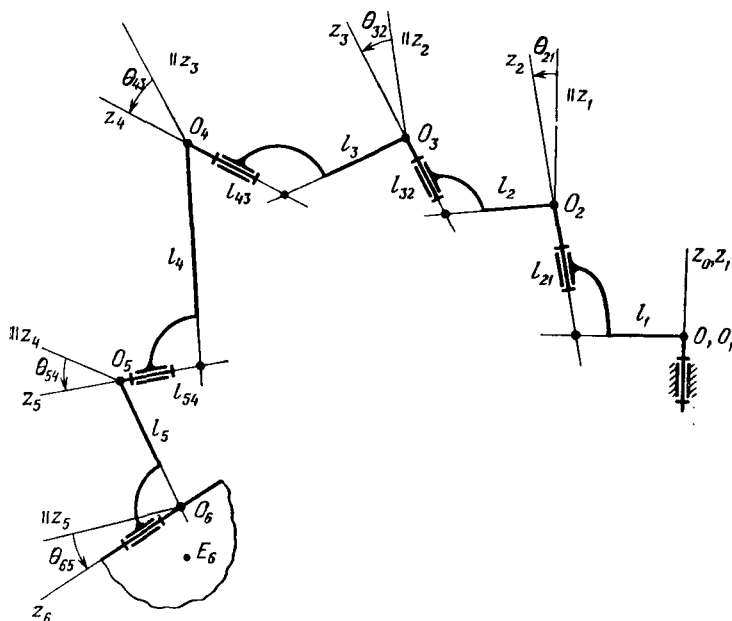


Рис. 32

т. е. оси z_j направим по осям вращательных пар, оси x_j — по кратчайшим расстояниям между осями вращательных пар, а начало координат звена O_j поместим в точке пересечения оси z_j с кратчайшим расстоянием между осями z_j и z_{j+1} . Тогда для решения задачи об определении положений звеньев должны быть заданы следующие параметры кинематической схемы: $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_{21}, l_{32}, l_{43}, l_{54}, \theta_{21}, \theta_{32}, \theta_{43}, \theta_{54}, \theta_{65}$ и обобщенные координаты $\varphi_{10}, \varphi_{21}, \varphi_{32}, \varphi_{43}, \varphi_{54}, \varphi_{65}$, за которые приняты углы между осями абсцисс. Требуется для некоторой точки $E_6(x_{E_6}, y_{E_6}, z_{E_6})$ на звене 6 найти ее координаты в системе, связанной со стойкой: $x_{E_0}, y_{E_0}, z_{E_0}$.

Уравнения преобразования координат при последовательном переходе от звена 6 к стойке в матричной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{E_5} &= T_{65} \mathbf{r}_{E_6}, & \mathbf{r}_{E_4} &= T_{54} \mathbf{r}_{E_5}, & \mathbf{r}_{E_3} &= T_{43} \mathbf{r}_{E_4}, \\ \mathbf{r}_{E_2} &= T_{32} \mathbf{r}_{E_3}, & \mathbf{r}_{E_1} &= T_{21} \mathbf{r}_{E_2}, & \mathbf{r}_{E_0} &= T_{10} \mathbf{r}_{E_1}, \end{aligned}$$

где матрицы $T_{65}, T_{54}, \dots, T_{10}$ получены из матрицы (3.11) с добавлением четвертой строки 0 0 0 1, а столбцовые матрицы составлены по формуле *)

$$\mathbf{r}_{E_i} = \|x_{E_i} y_{E_i} z_{E_i} 1\|^T, \quad i = 0, \dots, 6.$$

Решая указанную систему уравнений относительно искомой столбцовой матрицы $\mathbf{r}_{E_0}$, получаем

$$\mathbf{r}_{E_0} = T_{10} T_{21} T_{32} T_{43} T_{54} T_{65} \mathbf{r}_{E_6}.$$

Следовательно, чтобы получить $\mathbf{r}_{E_0}$, надо перемножить шесть матриц четвертого порядка и затем представить полученное матричное уравнение в обычной форме трех уравнений, выражающих зависимость координат $x_{E_0}, y_{E_0}, z_{E_0}$ от координат $x_{E_6}, y_{E_6}, z_{E_6}$. Коэффициенты при координатах $x_{E_6}, y_{E_6}, z_{E_6}$ (элементы матрицы T_{60}) дают направляющие косинусы системы координат звена 6 относительно стойки.

§ 16. Определение положений звеньев пространственных механизмов с замкнутыми контурами

Карданная передача. Как и в плоских механизмах, задача об определении положений звеньев пространственных механизмов по методу преобразования координат сводится к совместному решению уравнений, получаемых при размыкании одной или нескольких кинематических пар. Применение метода поясним сначала на примере карданной передачи, оси валов которой пересекаются в точке O под углом α (рис. 33)**). Промежуточное звено 2 образует с валами 1 и 3 вращательные пары, оси которых также пересекаются в точке O и образуют с осями валов 1 и 3 углы, равные $\pi/2$.

Для определения положений звеньев разомкнем вращательную пару, образованную звеньями 2 и 3, и получим две незамкнутые кинематические цепи: первая цепь состоит из звеньев 0 и 3, вторая — из звеньев 0, 1 и 2.

Для первой цепи координаты точки C в системе звена 3 имеют значения: $x_{C_3} = r, y_{C_3} = z_{C_3} = 0$. В неподвижной системе координаты точки C найдутся из уравнений преобразования координат. Коэффициенты в правых частях этих уравнений определяются в соответствии с матрицей вращательной пары (3.11) при $\varphi_i = \varphi_3, \theta_i = \alpha, l_i = l_i = 0$:

$$x_{C_0} = r \cos \varphi_3, \quad y_{C_0} = r \cos \alpha \sin \varphi_3,$$

$$z_{C_0} = r \sin \alpha \sin \varphi_3.$$

*) Для экономии места иногда столбцовую матрицу записывают в виде строчной матрицы, полученной транспонированием.

**) Расположение координатных осей дано во фронтальной диметрической проекции.

Для второй цепи координаты точки C в системе звена 2 имеют значения: $x_{C_2} = r$, $y_{C_2} = 0$, $z_{C_2} = 0$. В системе звена 1 координаты точки C найдутся из уравнений преобразования координат, причем коэффициенты в правых частях этих уравнений определяются по матрице вращательной пары (3.11) при $\varphi_{ji} = \varphi_{21}$, $\theta_{ji} = \pi/2$, $l_i = l_{ji} = 0$:

$$\begin{aligned} x_{C_1} &= r \cos \varphi_{21}, \\ y_{C_1} &= 0, \quad z_{C_1} = r \sin \varphi_{21}. \end{aligned}$$

Переход от координат точки C в системе звена 1 к ее координатам в неподвижной системе совершается опять по матрице (3.11) при $\varphi_{ji} = \varphi_1$, $\theta_{ji} = 0$, $l_i = l_{ji} = 0$:

$$\begin{aligned} x_{C_0} &= r \cos \varphi_{21} \cos \varphi_1, \\ y_{C_0} &= r \cos \varphi_{21} \sin \varphi_1, \\ z_{C_0} &= r \sin \varphi_{21}. \end{aligned}$$

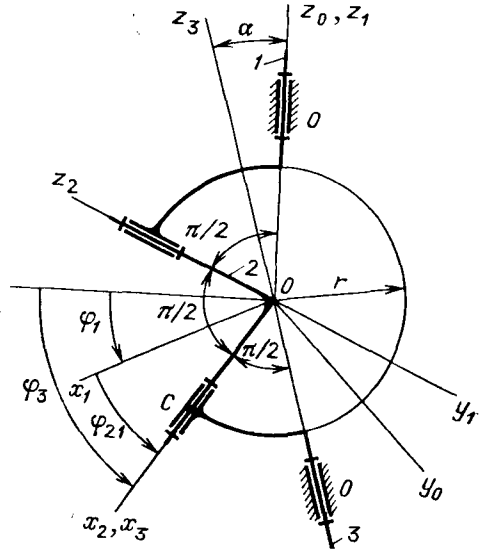


Рис. 33

Приравнявая значения координат точки C для обеих цепей и сокращая все члены на величину r , получаем

$$\begin{aligned} \cos \varphi_3 &= \cos \varphi_{21} \cos \varphi_1, \quad \cos \alpha \sin \varphi_3 = \cos \varphi_{21} \sin \varphi_1, \\ \sin \alpha \sin \varphi_3 &= \sin \varphi_{21}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{21} = \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1.$$

В матричной форме указанное решение следует из одного уравнения

$$T_{30} r_{C_3} = T_{10} T_{21} r_{C_2},$$

где

$$\begin{aligned} r_{C_3} &= \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{C_2} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_{30} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \cos \alpha \sin \varphi_3 & \cos \alpha \cos \varphi_3 & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \varphi_3 & \sin \alpha \cos \varphi_3 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \\ T_{10} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перемножая матрицы по правилу строки на столбец (2.4) и возвращаясь к обычной координатной форме, получаем указанную выше систему трех уравнений для определения положений звеньев.

Пространственный кривошипно-ползунный механизм. В качестве другого примера рассмотрим пространственный кривошипно-ползунный механизм, применяемый в указательных приборах (рис. 34).

Звено 1 (кривошип) образует со стойкой вращательную пару, по оси которой направим ось Az_0 . Звено 3 (ползун) имеет прямолинейно-поступательное движение, и центр сферической пары C ,

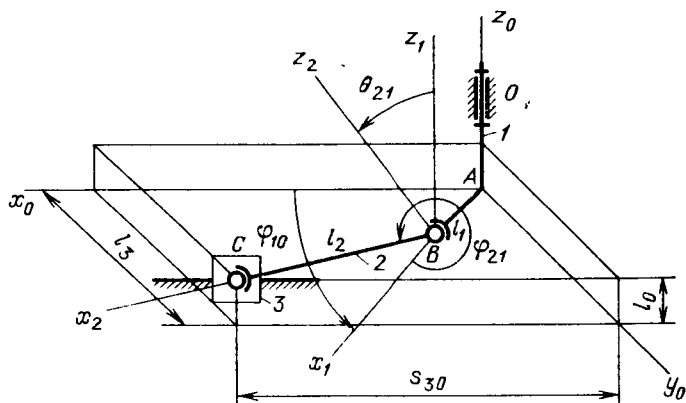


Рис. 34

которую оно образует со звеном 2 (шатун), перемещается параллельно оси Ax_0 . С кривошипом шатун 2 образует сферическую пару с пальцем. Палец принадлежит шатуну и находится в плоскости, перпендикулярной линии BC . Ось кольцевой прорези, принадлежащей кривошипу, направлена по линии AB , перпендикулярной оси вращательной пары.

Механизм имеет одну степень свободы. Требуется определить положения всех звеньев механизма при заданном значении обобщенной координаты φ_{10} и известных размерах, указанных на кинематической схеме: $l_{AB} = l_1$, $l_{BC} = l_2$, l_3 , l_0 .

Для системы координат, связанной со звеном 1, выберем начало координат в точке B , ось Bx_1 направим по линии AB , а ось Bz_1 — параллельно оси вращательной пары. Направление оси By_1 определяется из условия получения правой системы координат.

Уравнения преобразования координат для звеньев 0 и 1:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 \cos \varphi_{10} - y_1 \sin \varphi_{10} + l_1 \cos \varphi_{10}, \\ y_0 &= x_1 \sin \varphi_{10} + y_1 \cos \varphi_{10} + l_1 \sin \varphi_{10}, \\ z_0 &= z_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для звена 2 начало координат выберем в точке B , ось Bz_2 направим по оси пальца, а ось Bx_2 — по отрезку BC . Угол между осями Bz_1 и Bz_2 — угол путации θ_{21} , линия узлов совпадает с осью Bx_1 (угол прецессии $\varphi_{21} = 0$), а угол между осями Bx_1 и Bx_2 — угол собственного вращения φ_{21} .

Уравнения преобразования координат для звеньев 1 и 2 в соответствии с матрицей (3.9) при $\varphi_{11} = 0$:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \cos \varphi_{21} - y_2 \sin \varphi_{21}, \\y_1 &= x_2 \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} + y_2 \cos \theta_{21} \cos \varphi_{21} - z_2 \sin \theta_{21}, \\z_1 &= x_2 \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21} + y_2 \sin \theta_{21} \cos \varphi_{21} + z_2 \cos \theta_{21}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Разомкнем сферическую пару, образованную звеньями 2 и 3, и получим две незамкнутые кинематические цепи: первая цепь состоит из звеньев 0 и 3, вторая — из звеньев 0, 1 и 2.

Для первой цепи координаты точки C в неподвижной системе координат имеют значения:

$$x_{C_0} = s_{30}, \quad y_{C_0} = l_3, \quad z_{C_0} = l_0.$$

Для второй цепи сначала находим координаты точки C в системе звена 2:

$$x_{C_2} = l_2, \quad y_{C_2} = 0, \quad z_{C_2} = 0.$$

Подставляя эти значения в уравнения (3.24), получаем координаты точки C в системе звена 1:

$$\begin{aligned}x_{C_1} &= l_2 \cos \varphi_{21}, \quad y_{C_1} = l_2 \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21}, \\z_{C_1} &= l_2 \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21}.\end{aligned}$$

Затем находим по уравнениям (3.23) координаты точки C в неподвижной системе координат для второй цепи и приравниваем их значениям для первой цепи:

$$s_{30} = l_2 \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} - l_2 \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} + l_1 \cos \varphi_{10}, \quad (3.25)$$

$$l_3 = l_2 \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} + l_2 \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} + l_1 \sin \varphi_{10}, \quad (3.26)$$

$$l_0 = l_2 \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21}. \quad (3.27)$$

Из полученной системы трех уравнений находим три искомые величины s_{30} , θ_{21} и φ_{21} .

Исключая из уравнений (3.26) и (3.27) угол θ_{21} , получаем квадратное уравнение относительно $\cos \varphi_{21}$. Решение этого уравнения дает

$$\cos \varphi_{21} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{l_2}, \quad (3.28)$$

где

$$A = (l_3 - l_1 \sin \varphi_{10}) \sin \varphi_{10},$$

$$B = (l_3 - l_1 \sin \varphi_{10})^2 + (l_0^2 - l_2^2) \cos^2 \varphi_{10}.$$

Формула (3.28) дает два значения угла φ_{21} , которые соответствуют двум возможным положениям звеньев 2 и 3 при одном и том же положении звена 1 (две ветви функции $\varphi_{21} = \varphi_{21}(\varphi_{10})$).

После определения угла φ_{21} угол θ_{21} находится из уравнения (3.27), а перемещение ползуна s_{30} — из уравнения (3.25).

Если использовать матричную форму записи, то уравнения (3.25)—(3.27) получаются непосредственно из матричного уравнения

$$\mathbf{r}_{C_0} = T_{10} T_{21} \mathbf{r}_{C_2},$$

где

$$\mathbf{r}_{C_0} = \begin{bmatrix} s_{30} \\ l_3 \\ l_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_{10} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 & l_1 \cos \varphi_{10} \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 & l_1 \sin \varphi_{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 & 0 \\ \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} & \cos \theta_{21} \cos \varphi_{21} & -\sin \theta_{21} & 0 \\ \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21} & \sin \theta_{21} \cos \varphi_{21} & \cos \theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матричная форма записи действительно компактна. Для других комбинаций кинематических пар в пространственных механизмах общий метод кинематического анализа, предложенный Г. Ф. Морозкиным, приводит к вычислениям, которые аналогичны указанным в примере. Изменяются лишь уравнения преобразования координат в соответствии с видами кинематических пар в механизме.

§ 17. Определение скоростей и ускорений в пространственных механизмах с низшими парами

Система линейных уравнений для определения скоростей и ускорений. В отличие от задачи аналитического определения положений звеньев, которая сводится, в общем случае, к решению системы нелинейных уравнений, задача об определении скоростей и ускорений любых точек на звеньях механизма всегда может быть приведена к решению системы линейных уравнений и потому не представляет особой сложности. Составление этих уравнений поясним на примере пространственного кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 34), рассмотренного в предыдущем параграфе.

Для определения линейных и угловых скоростей дифференцируем по времени левые и правые части уравнений (3.25)—(3.27) и

получаем систему трех уравнений, линейных относительно $\dot{s}_{30}$, $\dot{\varphi}_{10}$, $\dot{\theta}_{21}$, $\dot{\varphi}_{21}$:

$$\begin{aligned}\dot{s}_{30} &= -\dot{\varphi}_{21}l_2(\sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} + \cos \theta_{21} \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10}) - \\ &\quad - \dot{\varphi}_{10}(l_2 \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{10} + l_2 \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10} + l_1 \sin \varphi_{10}) + \\ &\quad + \dot{\theta}_{21}l_2 \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10}, \\ 0 &= -\dot{\varphi}_{21}l_2(\sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} - \cos \theta_{21} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10}) + \\ &\quad + \dot{\varphi}_{10}(l_2 \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{10} - l_2 \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{10} + l_1 \cos \varphi_{10}) - \\ &\quad - \dot{\theta}_{21}l_2 \sin \theta_{21} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{10}, \\ 0 &= \dot{\varphi}_{21} \sin \theta_{21} \cos \varphi_{21} + \dot{\theta}_{21} \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21}.\end{aligned}$$

Повторное дифференцирование дает систему трех уравнений, линейных относительно $\ddot{s}_{30}$, $\ddot{\varphi}_{10}$, $\ddot{\theta}_{21}$, $\ddot{\varphi}_{21}$. Если за обобщенную координату механизма принять угол φ_{10} , то звено 1 будет начальным, и его закон движения $\varphi_{10} = \varphi_{10}(t)$ при решении задач кинематического анализа должен быть задан. В этом случае его угловая скорость $\dot{\varphi}_{10}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_{10}$ известны, и решение системы линейных уравнений для определения скоростей и ускорений дает величины $\dot{s}_{30}$, $\dot{\theta}_{21}$, $\dot{\varphi}_{21}$, $\ddot{s}_{30}$, $\ddot{\theta}_{21}$, $\ddot{\varphi}_{21}$.

Угловые скорости и ускорения звеньев пространственных механизмов. Решение системы линейных уравнений для определения скоростей и ускорений, получаемых по методу Морошкина, дает значения производных от углов Эйлера. Чтобы перейти к проекциям угловой скорости звена j в движении относительно звена i , используются известные соотношения *):

$$\begin{aligned}\omega_{ji}^{(xi)} &= \dot{\varphi}_{ji} \sin \psi_{ji} \sin \theta_{ji} + \dot{\theta} \cos \psi_{ji}, \\ \omega_{ji}^{(yi)} &= -\dot{\varphi}_{ji} \cos \psi_{ji} \sin \theta_{ji} + \dot{\theta} \sin \psi_{ji}, \\ \omega_{ji}^{(zi)} &= \dot{\psi}_{ji} + \dot{\varphi}_{ji} \cos \theta_{ji}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Угловая скорость звена j относительно стойки находится по теореме о сложении скоростей в сложном (составном) движении:

$$\omega_j = \omega_i + \omega_{ji}.\tag{3.30}$$

Если звено i является начальным, то для определения угловой скорости ω_j достаточно одного уравнения (3.30). Если же между начальным звеном и звеном j имеются промежуточные звенья, то уравнения типа (3.30) повторяются последовательно для каждой

*) Здесь и далее верхний индекс в скобках указывает оси, на которые проектируются векторы,

пары соседних звеньев, начиная от звена j и кончая начальным звеном. При использовании уравнений проекций переход от одной системы координат к другой производится по формулам, аналогичным формулам преобразования координат без переноса начала координат.

В рассматриваемом примере $\psi_{21} = 0$, и соотношения (3.29) для угловой скорости имеют вид

$$\omega_{21}^{(x_1)} = \dot{\theta}_{21}, \quad \omega_{21}^{(y_1)} = -\dot{\varphi}_{21} \sin \theta_{21}, \quad \omega_{21}^{(z_1)} = \dot{\varphi}_{21} \cos \theta_{21}.$$

Переход к проекциям угловой скорости ω_{21} на оси координат, связанные со звеном 0, производится по формулам, аналогичным формулам преобразования координат:

$$\begin{aligned} \omega_{21}^{(x_0)} &= \omega_{21}^{(x_1)} \cos \varphi_{10} - \omega_{21}^{(y_1)} \sin \varphi_{10}, \\ \omega_{21}^{(y_0)} &= \omega_{21}^{(x_1)} \sin \varphi_{10} + \omega_{21}^{(y_1)} \cos \varphi_{10}, \\ \omega_{21}^{(z_0)} &= \omega_{21}^{(z_1)}. \end{aligned}$$

По уравнению (3.30) находим проекции угловой скорости звена 2 на неподвижные оси:

$$\omega_2^{(x_0)} = \omega_{21}^{(x_0)}, \quad \omega_2^{(y_0)} = \omega_{21}^{(y_0)}, \quad \omega_2^{(z_0)} = \dot{\varphi}_{10} + \omega_{21}^{(z_0)}.$$

Подставляя в эти соотношения значения проекций относительной угловой скорости ω_{21} , получаем проекции угловой скорости звена 2, выраженные через углы Эйлера и их производные:

$$\begin{aligned} \omega_2^{(x_0)} &= \dot{\theta}_{21} \cos \varphi_{10} + \dot{\varphi}_{21} \sin \theta_{21} \sin \varphi_{10}, \\ \omega_2^{(y_0)} &= \dot{\theta}_{21} \sin \varphi_{10} - \dot{\varphi}_{21} \sin \theta_{21} \cos \varphi_{10}, \\ \omega_2^{(z_0)} &= \dot{\varphi}_{10} + \dot{\varphi}_{21} \cos \theta_{21}. \end{aligned}$$

Проекции углового ускорения ε_i на оси, связанные со звеном i , находятся дифференцированием соотношений (3.29), а уравнение для определения углового ускорения звена j относительно стойки имеет вид

$$\varepsilon_j = \varepsilon_i + \varepsilon_{ji} + \omega_i \times \omega_{ji}. \quad (3.31)$$

В проекциях на неподвижные оси уравнение (3.31) дает соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{(x_0)} &= \varepsilon_i^{(x_0)} + \varepsilon_{ji}^{(x_0)} + \omega_i^{(y_0)} \omega_{ji}^{(z_0)} - \omega_i^{(z_0)} \omega_{ji}^{(y_0)}, \\ \varepsilon_j^{(y_0)} &= \varepsilon_i^{(y_0)} + \varepsilon_{ji}^{(y_0)} + \omega_i^{(z_0)} \omega_{ji}^{(x_0)} - \omega_i^{(x_0)} \omega_{ji}^{(z_0)}, \\ \varepsilon_j^{(z_0)} &= \varepsilon_i^{(z_0)} + \varepsilon_{ji}^{(z_0)} + \omega_i^{(x_0)} \omega_{ji}^{(y_0)} - \omega_i^{(y_0)} \omega_{ji}^{(x_0)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Скорости и ускорения точек звеньев пространственных механизмов. Движение любого звена механизма можно представить как

поступательное с полюсом в произвольной точке P с координатами x_P, y_P, z_P и сферическое вокруг этой точки. Соответственно скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$ какой-либо точки звена с координатами x, y, z связаны со скоростью $\mathbf{v}_P$ и ускорением $\mathbf{a}_P$ полюса соотношениями:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}),$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловая скорость и угловое ускорение звена, а $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор, определяющий положение рассматриваемой точки относительно полюса.

В проекциях на неподвижные оси эти соотношения имеют вид

$$v^{(x_0)} = v_P^{(x_0)} + \omega^{(y_0)}(z - z_P) - \omega^{(z_0)}(y - y_P),$$

$$v^{(y_0)} = v_P^{(y_0)} + \omega^{(z_0)}(x - x_P) - \omega^{(x_0)}(z - z_P),$$

$$v^{(z_0)} = v_P^{(z_0)} + \omega^{(x_0)}(y - y_P) - \omega^{(y_0)}(x - x_P),$$

$$a^{(x_0)} = a_P^{(x_0)} + \varepsilon^{(y_0)}(z - z_P) - \varepsilon^{(z_0)}(y - y_P) + \omega^{(x_0)}v - \omega^2(x - x_P),$$

$$a^{(y_0)} = a_P^{(y_0)} + \varepsilon^{(z_0)}(x - x_P) - \varepsilon^{(x_0)}(z - z_P) + \omega^{(y_0)}v - \omega^2(y - y_P),$$

$$a^{(z_0)} = a_P^{(z_0)} + \varepsilon^{(x_0)}(y - y_P) - \varepsilon^{(y_0)}(x - x_P) + \omega^{(z_0)}v - \omega^2(z - z_P),$$

где

$$v = \omega^{(x_0)}(x - x_P) + \omega^{(y_0)}(y - y_P) + \omega^{(z_0)}(z - z_P).$$

ГЛАВА 4

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ ПАРАМИ

§ 18. Определение положений звеньев плоских механизмов с высшими парами

Определение положений звеньев плоского трехзвенного механизма с высшей парой. Рассмотрим простейший плоский механизм с высшей парой, состоящей из двух вращающихся звеньев 1 и 2, входящих в пару, образованную криволинейными профилями S_1 и S_2 (рис. 35). К этой схеме приводятся многие схемы кулачковых механизмов, а также зубчатых механизмов, если рассматривать одну взаимодействующую пару зубьев.

Задача об определении положений звеньев для рассматриваемого механизма формулируется следующим образом. Заданы профили S_1 и S_2 уравнениями $y_1 = y_1(x_1)$ и $y_2 = y_2(x_2)$ в подвижных координатных системах $O_1x_1y_1$ и $O_2x_2y_2$, связанных соответственно со звеньями 1 и 2, а также закон движения начального звена 1, т. е. зависимость его угла поворота от времени $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. Требуется найти закон движения звена 2, т. е. зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(t)$.

Поставленная задача решается обычно путем отыскания значений угла φ_2 по заданным значениям угла φ_1 , что соответствует решению по шагам системы уравнений, описывающих условия касания профилей S_1 и S_2 .

Для точки касания профилей проекции радиусов-векторов r_1 и r_2 на неподвижные оси $O_1x_1y_1$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_{B_1} \cos \varphi_1 - y_{B_1} \sin \varphi_1 &= x_{B_2} \cos \varphi_2 - y_{B_2} \sin \varphi_2 + a_w, \\ x_{B_1} \sin \varphi_1 + y_{B_1} \cos \varphi_1 &= x_{B_2} \sin \varphi_2 + y_{B_2} \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эти же соотношения можно рассматривать как уравнения преобразования координат точки B_1 звена 1 и точки B_2 звена 2 в координаты общей точки B_0 в неподвижной системе координат.

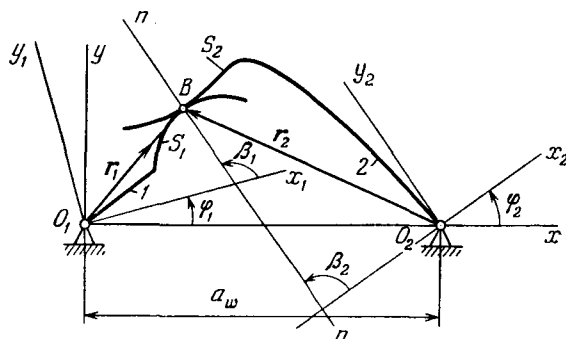


Рис. 35

Условия касания требуют совпадения нормалей к профилям S_1 и S_2 в общей точке B_0 .

Отсюда имеем

$$\varphi_1 + \beta_1 = \varphi_2 + \beta_2,$$

или

$$\varphi_1 + \operatorname{arctg} \left(-\frac{dx_1}{dy_1} \right) = \varphi_2 + \operatorname{arctg} \left(-\frac{dx_2}{dy_2} \right). \quad (4.2)$$

При заданном угле φ_1 для определения пяти неизвестных (x_{B_1} , y_{B_1} , x_{B_2} , y_{B_2} , φ_2) имеем 5 уравнений: два уравнения заданных профилей, два тригонометрических уравнения (4.1) и одно дифференциальное уравнение (4.2). Отсюда следует, что задача о положениях звеньев плоских механизмов с высшими парами значительно сложнее той же задачи для механизмов с низшими парами.

Определение положений звеньев пространственного трехзвенного механизма с высшей парой. Рассмотрим пространственный механизм с высшей парой, состоящий из двух вращающихся звеньев 1 и 2, входящих в высшую пару, элементы которой очерчены по

поверхностям S_1 и S_2 , заданным уравнениями $x_i = x_i(v_i, \xi_i)$, $y_i = y_i(v_i, \xi_i)$, $z_i = z_i(v_i, \xi_i)$ ($i = 1, 2$) в подвижных координатных системах, связанных, соответственно, со звеньями 1 и 2 (рис. 36).

Задача об определении положений звеньев рассматриваемого механизма формулируется следующим образом. Даны поверхности S_1 и S_2 и закон движения начального звена $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. Требуется найти закон движения выходного звена $\varphi_2 = \varphi_2(t)$.

Для каждой точки контакта B профилей должны выполняться условия, аналогичные соотношениям (4.1), которые можно рассматривать как уравнения преобразования координат точки B_1 звена 1 и точки B_2 звена 2 в координаты общей точки B_0 в неподвижной системе координат:

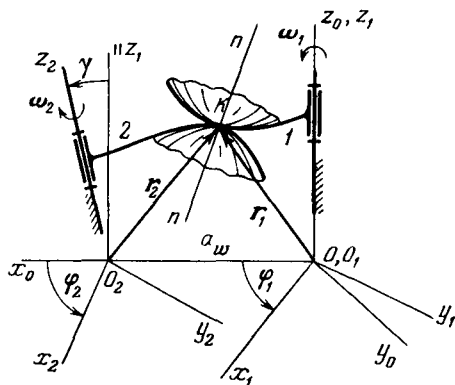


Рис. 36

$$x_{B_1} \cos \varphi_1 - y_{B_1} \sin \varphi_1 = x_{B_2} \cos \varphi_2 - y_{B_2} \sin \varphi_2 + a_w,$$

$$x_{B_1} \sin \varphi_1 + y_{B_1} \cos \varphi_1 =$$

$$= x_{B_0} \cos \gamma \sin \varphi_2 + y_{B_0} \cos \gamma \cos \varphi_2 - z_{B_0} \sin \gamma, \quad (4.3)$$

$$z_{B_1} = x_{B_2} \sin \gamma \sin \varphi_2 + y_{B_2} \sin \gamma \cos \varphi_2 + z_{B_2} \cos \gamma,$$

где γ — угол скрещивания осей вращательных пар, a_w — кратчайшее расстояние между этими осями.

Заметим, что матрица коэффициентов в правых частях этих уравнений совпадает с матрицей вращательной пары (3.11), если принять $\theta_n = \gamma$, $\varphi_n = \varphi_2$, $l_i = a_v$, $l_{ii} = 0$.

Условия касания требуют совпадения нормалей к поверхностям S_1 и S_2 в любой точке контакта, что приводит к уравнениям равенства проекций орта нормали nn в этой точке на координатные оси, связанные со звеньями 1 и 2:

$$\begin{aligned}
& (\partial y_{B_1}/\partial v_1) (\partial z_{B_1}/\partial \xi_1) - (\partial y_{B_1}/\partial \xi_1) (\partial z_{B_1}/\partial v_1) = \\
& = (\partial y_{B_2}/\partial v_2) (\partial z_{B_2}/\partial \xi_2) - (\partial y_{B_2}/\partial \xi_2) (\partial z_{B_2}/\partial v_2), \\
& (\partial z_{B_1}/\partial v_1) (\partial x_{B_1}/\partial \xi_1) - (\partial z_{B_1}/\partial \xi_1) (\partial x_{B_1}/\partial v_1) = \\
& = (\partial z_{B_2}/\partial v_2) (\partial x_{B_2}/\partial \xi_2) - (\partial z_{B_2}/\partial \xi_2) (\partial x_{B_2}/\partial v_2), \\
& (\partial x_{B_1}/\partial v_1) (\partial y_{B_1}/\partial \xi_1) - (\partial x_{B_1}/\partial \xi_1) (\partial y_{B_1}/\partial v_1) = \\
& = (\partial x_{B_2}/\partial v_2) (\partial y_{B_2}/\partial \xi_2) - (\partial x_{B_2}/\partial \xi_2) (\partial y_{B_2}/\partial v_2).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из этих трех уравнений только два являются независимыми. Следовательно, общее число уравнений для определения неизвестных ($x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1}, x_{B_2}, y_{B_2}, z_{B_2}, v_1, \xi_1, v_2, \xi_2, \varphi_2$) при заданном угле φ_1 равно 11: шесть уравнений заданных поверхностей в проекциях на оси, связанные со звеньями 1 и 2, три уравнения (4.3), и два уравнения из системы (4.4).

После исключения неизвестных координат по заданным уравнениям поверхностей S_1 и S_2 получаем систему пяти уравнений с 5 неизвестными ($v_1, \xi_1, v_2, \xi_2, \varphi_2$). При контакте поверхностей в одной точке каждому значению угла φ_1 соответствует определенное значение угла φ_2 , при линейном контакте получаем зависимость, определяющую контактную линию, т. е. линию, по которой в данный момент соприкасаются поверхности S_1 и S_2 .

§ 19. Определение скоростей и ускорений в плоских механизмах с высшими парами

Эквивалентные (заменяющие) механизмы. Скорости и ускорения в плоских механизмах с высшими парами можно найти, как и в механизмах с низшими парами, из системы линейных уравнений, получаемых путем дифференцирования уравнений для определения положений звеньев. Однако в большинстве случаев удобнее применить кинематическую замену высшей пары кинематической цепью, состоящей из звеньев, входящих только в низшие пары. Такая замена всегда возможна при определении скоростей и ускорений (но не положений) для данного момента времени, и получаемые при этом механизмы получили название *мгновенных заменяющих механизмов*.

Прежде чем переходить к построению мгновенных заменяющих механизмов, покажем, что есть механизмы с высшими парами, которые полностью эквивалентны механизмам с низшими парами. В этих механизмах оба элемента высшей пары образованы поверхностями с постоянной кривизной. Например, *эксцентриковый механизм* (рис. 37, а) эквивалентен кривошипно-ползунному механизму с кривошипом AB и шатуном BC , а *плоский поводковый механизм* (рис. 37, б) — шарнирному четырехзвеннику. На этом основании оба механизма не считаются кулачковыми. Они представляют собой только конструктивные видоизменения механизмов с низшими парами. Если же хотя бы один элемент высшей пары образован линией переменной кривизны, т. е. принадлежит кулачку, то можно получить только мгновенный заменяющий механизм с низшими парами. Например, для плоского кулачкового механизма (рис. 37, в) по аналогии с предыдущим механизмом можно построить заменяющий механизм в виде шарнирного четырехзвенника, если поместить центры шарниров B и C в центры кривизны профилей. Но длины звеньев этого механизма будут переменными и, кроме того, его кинематическая эквивалентность

исходному механизму распространяется только на скорости и ускорения первого порядка. Если один из профилей — прямая линия, то его центр кривизны удаляется в бесконечность и вместо шарнира в заменяющем механизме будет поступательная пара

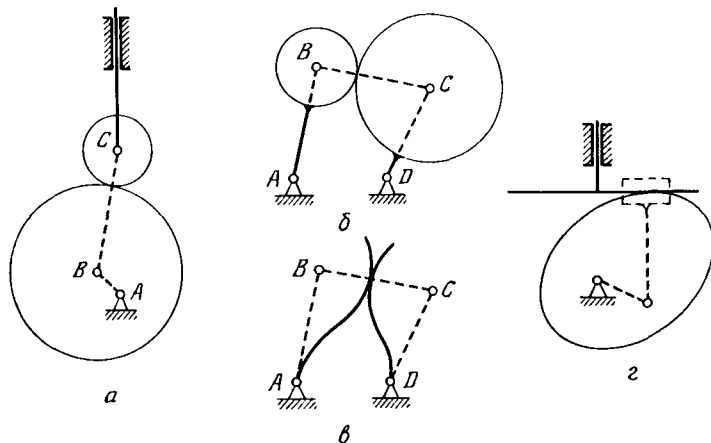


Рис. 37

(рис. 37, 2). Следовательно, если известны положения звеньев механизма с высшими парами, то скорости и ускорения точек его звеньев могут быть найдены из системы линейных уравнений путем предварительного построения мгновенного заменяющего механизма.

Определение передаточных отношений в плоских механизмах с высшими парами. В некоторых случаях при кинематическом исследовании механизма с высшей парой достаточно определить только скорости точек его звеньев. Тогда мгновенный заменяющий механизм можно не строить, а для определения скоростей использовать свойства мгновенных центров в относительном движении звеньев.

Пусть, например, звенья 1 и 2 механизма с высшей парой вращаются вокруг параллельных осей (рис. 38, а). Скорость точки касания профилей B в движении звена 2 по отношению к звену 1, т. е. скорость $v_{B_2B_1}$, направлена по общей касательной к профилям или перпендикулярно общей нормали nn . Следовательно, мгновенный центр в относительном движении звеньев 1 и 2 должен лежать на нормали nn . Кроме того, этот мгновенный центр P , называемый *полусом зацепления*, должен лежать на линии, соединяющей центры O_1 и O_2 . Это условие следует из того, что мгновенный центр вращения в относительном движении есть точка приложения вектора относительной угловой скорости ω_{21} , который находится из

векторного уравнения

$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1,$$

где ω_1 и ω_2 — векторы угловых скоростей звеньев 1 и 2, приложенные в центрах вращения O_1 и O_2 .

На основании правила сложения параллельных векторов получаем

$$\frac{l_{O_2P}}{l_{O_1P}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \equiv |u_{12}|,$$

где u_{12} — отношение угловых скоростей звеньев, называемое *передаточным отношением*, которое при параллельных осях вращения

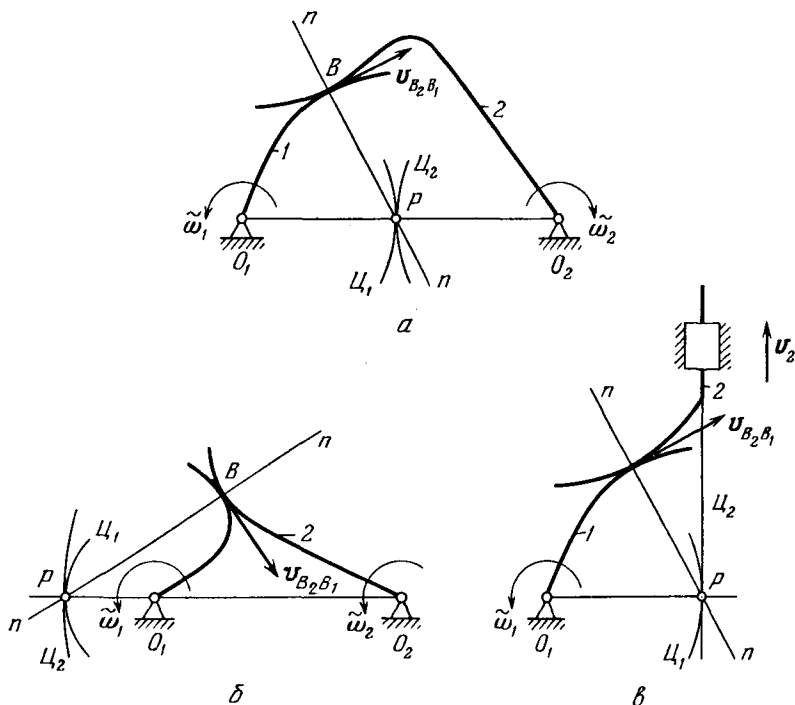


Рис. 38

звеньев считается положительным, если направления угловых скоростей одинаковые, и отрицательным, если эти направления — противоположные.

При отрицательном передаточном отношении полюс зацепления лежит внутри отрезка O_1O_2 (рис. 38, а), при положительном — вне этого отрезка (рис. 38, б). Геометрические места точек на звеньях

1 и 2, которые при их движении последовательно совпадают с полюсом зацепления, образуют центроиды Π_1 и Π_2 в относительном движении звеньев. Если передаточное отношение — постоянное, то полюс зацепления P занимает неизменное положение по отношению к стойке, и центроиды Π_1 и Π_2 представляют собой окружности с радиусами O_1P и O_2P соответственно. По свойству центроид эти окружности перекатываются без скольжения. Если же передаточное отношение является переменной величиной, то полюс зацепления перемещается по линии O_1O_2 , и центроиды Π_1 и Π_2 уже не будут окружностями.

Если звено 1 вращается вокруг неподвижной оси, а звено 2 совершает прямолинейное движение в плоскости, перпендикулярной оси вращения звена 1 (рис. 38, в), то полюс зацепления лежит на линии, проходящей через центр O_1 перпендикулярно направлению движения точек звена 2. Положение полюса находится из уравнения, связывающего скорости точки P_1 звена 1 и точки P_2 звена 2, совпадающих в данный момент с полюсом зацепления P :

$$v_{P_2} = v_{P_1} + v_{P_2P_1}.$$

Отсюда при $v_{P_2} = v_2$, $v_{P_1} = l_{O_1P}\omega_1$ и $v_{P_2P_1} = 0$ получаем

$$l_{O_1P} = v_2/\omega_1.$$

§ 20. Определение передаточных отношений в плоских фрикционных и зубчатых механизмах

Передаточные отношения фрикционных и зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения. Для плоского фрикционного механизма с цилиндрическими шкивами в отсутствие проскальзывания имеем

$$u_{12} = \pm r_2/r_1, \quad (4.5)$$

где r_1 и r_2 — радиусы шкивов (рис. 39). Это условие следует из того, что окружности шкивов являются в рассматриваемом случае центроидами в относительном движении звеньев. Знак «плюс» соответствует одинаковому направлению вращения звеньев (рис. 39, а), знак «минус» — противоположному (рис. 39, б).

В соответствии с расположением центроид механизм с положительным передаточным отношением называют *механизмом с внутренним зацеплением*, а с отрицательным — *механизмом с внешним зацеплением*.

Для зубчатого механизма, составленного из стойки и двух зубчатых колес (зубчатой передачи), формула (4.5) сохраняется, если под окружностями с радиусами r_1 и r_2 понимать центроиды в относительном движении звеньев. Эти окружности в теории зубчатых механизмов принято называть *начальными окружностями*,

Передаточное отношение зубчатого механизма можно выразить через числа зубьев z_1 и z_2 , если принять во внимание соотношения

$$2\pi r_1 = pz_1, \quad 2\pi r_2 = pz_2,$$

где p — шаг зубьев по начальной окружности, т. е. дуговое расстояние между одноименными точками зубьев (например, между

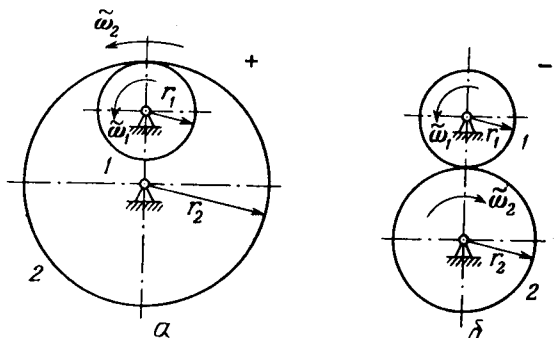


Рис. 39

точками пересечения начальной окружности с осями симметрии зубьев).

Отсюда имеем

$$u_{12} = \pm z_2/z_1, \quad (4.6)$$

где знак «плюс» — для внутреннего зацепления, знак «минус» — для внешнего.

При последовательном соединении нескольких пар зубчатых колес общее передаточное отношение равно произведению частных передаточных отношений:

$$u_{1n} = u_{12}u_{23} \dots u_{n-1}u_n. \quad (4.7)$$

Аналитические и графические методы определения передаточного отношения планетарного механизма. *Планетарным механизмом* называется механизм, составленный из зубчатых колес и вращающихся звеньев, на которых располагаются подвижные оси зубчатых колес. Звено, на котором располагаются эти оси, называется *водителем*, а колеса с подвижными осями вращения — *планетарными колесами* или *сателлитами* (отсюда и происходит название механизма). Колеса с неподвижными осями вращения называются *солнечными* или *центральными*; неподвижное колесо называется *опорным*.

Планетарные механизмы подразделяются на направляющие (воспроизведение заданной траектории) и передаточные (воспроизведение заданного передаточного отношения). Передаточные планетарные механизмы сокращенно называют *планетарными передатками*. На рис. 40, а показана схема одного из вариантов плане-

тарной передачи, образованной из центрального колеса 1 , сателлита 2 , состоящего из двух жестко связанных колес 2 и $2'$, опорного колеса 3 , водила H и стойки O^*). Для определения передаточных

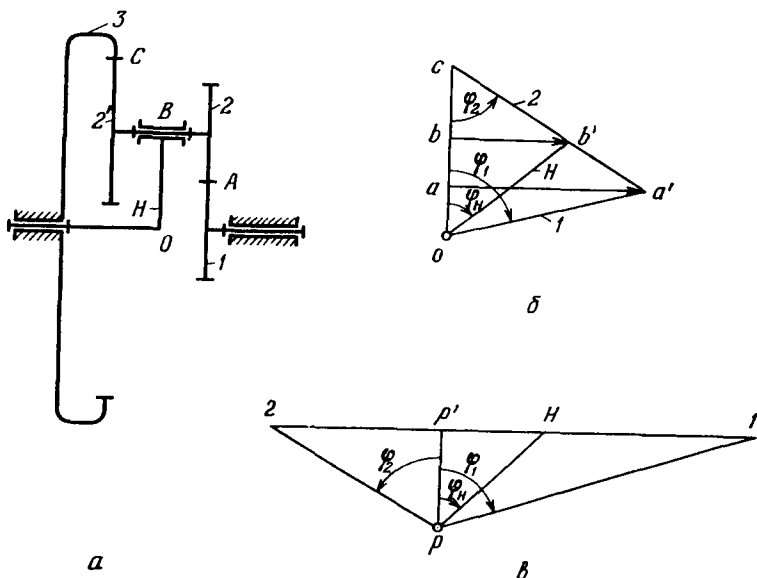


Рис. 40

отношений используем сначала графический метод Кутцбаха — Смирнова **).

Решение задачи начинается с построения плана линейных скоростей (рис. 40, б). Из точки b , лежащей на одном уровне с точкой B на схеме механизма, откладываем вектор bb' , изображающий скорость точки B водила. Соединив точку b' с точкой o , соответствующей неподвижной точке O на оси водила, получаем линию H , изображающую распределение линейных скоростей звена H . Из $\triangle obb'$ получим

$$\operatorname{tg} \varphi_H = (bb') / (ob).$$

Подставляя значения отрезков $(bb') = l_{ov} \omega_n / \mu_v$ и $(ob) = l_{ov} / \mu_l$, получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_H = \omega_n \mu_l / \mu_v, \quad (4.8)$$

*) Водило принято обозначать на схемах буквой H (от немецкого слова *Hebel* — рычаг).

**) Карл Кутцбах (Karl Kutzbach, 1875—1942), немецкий ученый, дал решение некоторых задач динамики рычажных и зубчатых механизмов.

Леонид Петрович Смирнов (1877—1954), автор учебника по теории механизмов и машин (1926 г.), независимо от Кутцбаха предложил план скоростей для зубчатого механизма.

т. е. тангенс угла, образуемого линией H с отрезком (ob) , пропорционален угловой скорости водила.

Для сателлита 2 известны скорости двух точек: точки B , общей для сателлита и водила H , и точки C , скорость которой равна нулю по условию качения начальной окружности колеса 2' по начальной окружности колеса 3. Точке C соответствует точка c на плане скоростей. Соединив точку c с точкой b' , получим линию распределения линейных скоростей сателлита 2. На этой линии лежит точка a' — конец вектора aa' , изображающего скорость точки A . Эта точка является общей для колес 1 и 2. Поэтому, соединив точку a' с точкой o , получаем линию распределения линейных скоростей точек звена 1. Тангенсы углов φ_2 и φ_1 пропорциональны соответственно величинам угловых скоростей $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_1$, причем угловая скорость $\tilde{\omega}_2$ направлена в сторону, противоположную угловой скорости $\tilde{\omega}_1$ согласно указанным направлениям отсчета этих углов:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2 &= \tilde{\omega}_2 \mu_i / \mu_v, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \tilde{\omega}_1 \mu_i / \mu_v. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для определения передаточных отношений строим план угловых скоростей (рис. 40, в). Откладываем произвольный отрезок (pp') , параллельный (oc) , и проводим через точку p линии под углами φ_1 , φ_n , φ_2 к этому отрезку до пересечения в точках 2, H и 1 с перпендикуляром к (pp') . Тогда искомые передаточные отношения с учетом формул (4.8) и (4.9) определяются через отношения отрезков на плане угловых скоростей:

$$u_{1H} = p'1/p'H, \quad u_{2H} = -p'2/p'H, \quad u_{12} = -p'1/p'2,$$

причем передаточное отношение имеет знак «плюс», если оба отрезка расположены по одну сторону от p' , и знак «минус», если — по разные стороны.

Аналитическое определение передаточных отношений может быть выполнено на основе метода обращения движения. Сообщим всем звеньям механизма угловую скорость, равную по величине и противоположную по направлению угловой скорости водила $\tilde{\omega}_H$. Тогда водило становится неподвижным и механизм из планетарного обращается в механизм, состоящий из двух последовательно соединенных пар зубчатых колес 1, 2 и 2', 3 с неподвижными осями вращения. Этот механизм назовем *обращенным*. Для него передаточное отношение от колеса 1 к колесу 3, выраженное через числа зубьев, находится, как для обычных зубчатых передач с неподвижными осями вращения колес:

$$u_{13}^{(H)} = - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}, \quad (4.10)$$

С другой стороны, то же передаточное отношение есть отношение угловых скоростей в обратном движении:

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_H}. \quad (4.11)$$

Верхние индексы в скобках указывают, какое звено принято за неподвижное (эти индексы могут отсутствовать, если за неподвижное звено принята стойка в исходном механизме).

Принимая во внимание, что $\omega_3 = 0$, пайдём из соотношения (4.11) передаточное отношение планетарной передачи

$$u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)}. \quad (4.12)$$

Эта формула справедлива для всех других планетарных передач при условии, что колесо 3 — опорное (неподвижное).

Для механизма на рис. 40, а передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$, выраженное через числа зубьев, получается после подстановки в формулу (4.12) значения $u_{13}^{(H)}$ из формулы (4.10):

$$u_{1H}^{(3)} = \frac{z_1 z_2' + z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \quad (4.13)$$

Кинематика зубчатого дифференциала. Планетарный зубчатый механизм с двумя степенями свободы называют *зубчатым дифференциальным механизмом* (сокращенно — *зубчатым дифференциалом*). В этом механизме могут быть два входа и один выход (например, счетно-решающий суммирующий механизм) или один вход и два выхода (например, автомобильный дифференциал). В первом случае зубчатый дифференциал предназначен для сложения движения входных звеньев, во втором случае — для разделения (дифференциации) движения входного звена (отсюда происходит название механизма).

На рис. 41 показан зубчатый дифференциал по схеме, аналогичной схеме однорядной планетарной передачи. Угловые скорости звеньев 1, 3 и H связаны соотношением (4.11), которое было получено по методу обращения движения:

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_H}. \quad (4.14)$$

Передаточное отношение $u_{13}^{(H)}$ в обратном механизме зависит только от чисел зубьев колес дифференциала:

$$u_{13}^{(H)} = -z_3/z_1. \quad (4.15)$$

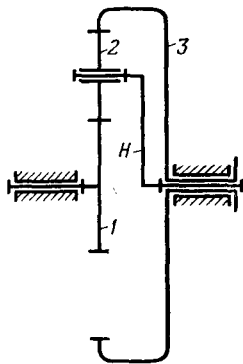


Рис. 41

Из соотношения (4.14) можно найти угловую скорость $\tilde{\omega}_3$ как функцию угловых скоростей $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_H$:

$$\tilde{\omega}_3 = u_{31}^{(H)} \tilde{\omega}_1 + (1 - u_{31}^{(H)}) \tilde{\omega}_H. \quad (4.16)$$

Коэффициент при $\tilde{\omega}_H$ в этой формуле есть передаточное отношение планетарной передачи при остановленном звене 1:

$$u_{3H}^{(1)} = 1 - u_{31}^{(H)}. \quad (4.17)$$

Поэтому формулу (4.16) можно представить также в следующем виде:

$$\tilde{\omega}_3 = u_{31}^{(H)} \tilde{\omega}_1 + u_{3H}^{(1)} \tilde{\omega}_H. \quad (4.18)$$

Эта формула справедлива для любого дифференциала и при соответствующих изменениях индексов устанавливает связь между

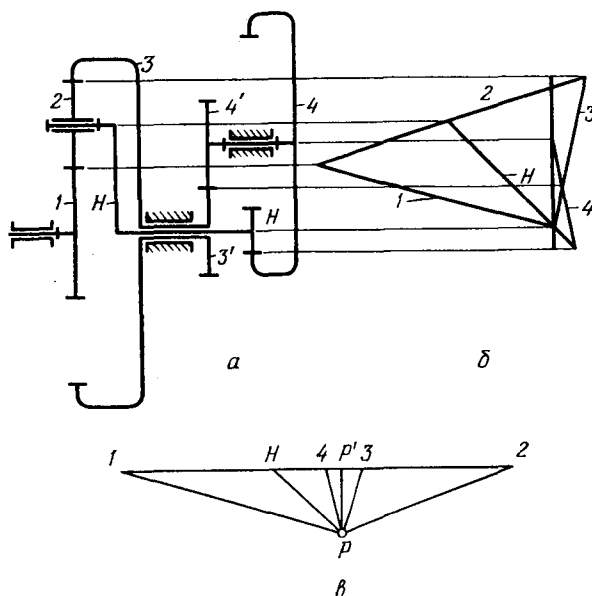


Рис. 42

угловой скоростью любого звена дифференциала и угловыми скоростями двух начальных звеньев, т. е. звеньев, углы поворота которых приняты за обобщенные координаты механизма. Коэффициент при угловой скорости каждого начального звена есть передаточное отношение, определяемое в предположении, что другое начальное звено остановлено.

Замкнутые дифференциальные механизмы. Если в зубчатом дифференциале связать дополнительной (замыкающей) передачей

два каких-либо звена, имеющих неподвижные оси вращения, то получится механизм с одной степенью свободы, который получил название *замкнутого дифференциального зубчатого механизма* (сокращенно — *замкнутого зубчатого дифференциала*).

Передаточное отношение этого механизма можно найти или графическим, или аналитическим путем. На рис. 42, а показана схема одного из простейших замкнутых дифференциалов, который образован из однорядного дифференциала путем замыкания звеньев 3 и H через зубчатую передачу, состоящую из двух пар колес с числами зубьев z_3' , z_4' и z_4 , z_H .

Графические построения для определения передаточных отношений, показанные на рис. 42, б, в, не отличаются от построений, применяемых при анализе простых планетарных механизмов, причем построения удобно начинать с линии H, а затем строить линии 4, 3, 2 и 1.

Аналитическое определение передаточных отношений основывается на уравнении (4.18). Например, для механизма, показанного на рис. 42, а, после деления всех членов этого уравнения на ω_4 получаем

$$u_{34} = u_{31}^{(H)} u_{14} + u_{3H}^{(1)} u_{H4}.$$

Отсюда

$$u_{14} = u_{13}^{(H)} (u_{34} - u_{3H}^{(1)} u_{H4}).$$

Отдельные (частные) передаточные отношения через числа зубьев выражаются следующими формулами:

$$u_{13}^{(H)} = -z_3/z_1, \quad u_{34} = -z_4'/z_3',$$

$$u_{3H}^{(1)} = (z_1 + z_3)/z_3, \quad u_{H4} = z_4/z_H.$$

Подставляя эти значения в формулу для u_{14} , получаем

$$u_{14} = -\frac{z_3}{z_1} \left[-\frac{z_4'}{z_3'} - \frac{(z_1 + z_3)z_4}{z_3 z_H} \right]$$

или

$$u_{14} = \frac{z_3 z_4'}{z_1 z_3'} + \frac{z_1 + z_3}{z_1} \frac{z_4}{z_H}.$$

§ 21. Определение скоростей и ускорений в пространственных механизмах с высшими парами

Как было показано в § 18, задача об определении положений звеньев в пространственных механизмах с высшими парами даже для простейшего трехзвенного механизма сводится к решению системы нелинейных тригонометрических и дифференциальных уравнений. Последующая задача об определении скоростей и ускорений является уже более простой, так как может быть сведена к решению линейных уравнений.

Рассмотрим, например, трехзвенный механизм, показанный на рис. 36. При решении задачи о скоростях известны положения звеньев и угловая скорость ω_1 звена 1. Требуется определить угловую скорость ω_2 звена 2.

Дифференцирование по времени уравнений (4.3) и (4.4) совместно с уравнениями заданных поверхностей дает возможность получить искомые проекции скорости точки контакта B , а затем и угловую скорость ω_2 . Однако более простой вид имеют уравнения для непосредственного определения угловой скорости ω_2 из условия, что в любой момент времени вектор относительной скорости точки контакта $v_{отн}$ в движении звена 2 относительно звена 1 (или наоборот) лежит в плоскости, касательной к поверхностям элементов высшей пары, т. е. общая нормаль nn к этим поверхностям в точке контакта перпендикулярна вектору скорости $v_{отн}$:

$$v_{отн} \cdot n = 0, \quad (4.19)$$

где n — единичный вектор (орт) общей нормали в точке контакта.

Если контакт поверхностей происходит в нескольких точках или по линии (ливейный контакт), то условие (4.19) должно выполняться во всех точках контакта.

Для точки B уравнение (4.19) в проекциях на подвижные оси, связанные со звеном 1, имеет вид

$$v_{B_1 B_2}^{(x_1)} n^{(x_1)} + v_{B_1 B_2}^{(y_1)} n^{(y_1)} + v_{B_1 B_2}^{(z_1)} n^{(z_1)} = 0.$$

Проекции угловых скоростей ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1^{(x_1)} = 0, \quad \omega_1^{(y_1)} = 0, \quad \omega_1^{(z_1)} = \omega_1,$$

$$\omega_2^{(x_1)} = -\omega_2 \sin \gamma \sin \varphi_1, \quad \omega_2^{(y_1)} = -\omega_2 \sin \gamma \cos \varphi_1,$$

$$\omega_2^{(z_1)} = \omega_2 \cos \gamma.$$

Проекции радиусов-векторов r_1 и r_2 точки B :

$$r_1^{(x_1)} = x_{B_1}, \quad r_1^{(y_1)} = y_{B_1}, \quad r_1^{(z_1)} = z_{B_1},$$

$$r_2^{(x_1)} = x_{B_1} - a_w \cos \varphi_1, \quad r_2^{(y_1)} = y_{B_1} + a_w \sin \varphi_1, \quad r_2^{(z_1)} = z_{B_1}.$$

Проекции относительной скорости $v_{B_1 B_2}$ находим как разность проекций скоростей $v_{B_1} = \omega_1 \times r_1$ и $v_{B_2} = \omega_2 \times r_2$. Используя правила нахождения проекций векторных произведений, получаем

$$v_{B_1 B_2}^{(x_1)} = -\omega_1 y_{B_1} + \omega_2 z_{B_1} \sin \gamma \cos \varphi_1 + \omega_2 (y_{B_1} + a_w \sin \varphi_1) \cos \gamma,$$

$$v_{B_1 B_2}^{(y_1)} = \omega_1 x_{B_1} - \omega_2 z_{B_1} \sin \gamma \sin \varphi_1 - \omega_2 (x_{B_1} - a_w \cos \varphi_1) \cos \gamma, \quad (4.20)$$

$$v_{B_1 B_2}^{(z_1)} = \omega_2 (y_{B_1} \sin \varphi_1 - x_{B_1} \cos \varphi_1 + a_w) \sin \gamma.$$

Проекции орта нормали определяются по заданному уравнению поверхности S_1 звена I из соотношений:

$$\begin{aligned}n^{(x_1)} &= (\partial y_{B_1} / \partial v_1) (\partial z_{B_1} / \partial \xi_1) - (\partial y_{B_1} / \partial \xi_1) (\partial z_{B_1} / \partial v_1), \\n^{(y_1)} &= (\partial z_{B_1} / \partial v_1) (\partial x_{B_1} / \partial \xi_1) - (\partial z_{B_1} / \partial \xi_1) (\partial x_{B_1} / \partial v_1), \\n^{(z_1)} &= (\partial x_{B_1} / \partial v_1) (\partial y_{B_1} / \partial \xi_1) - (\partial x_{B_1} / \partial \xi_1) (\partial y_{B_1} / \partial v_1),\end{aligned}\quad (4.21)$$

где v_1, ξ_1 — криволинейные координаты поверхности S_1 .

Подставляя в уравнение (4.19) проекции относительной скорости по (4.20) и проекции орта нормали по (4.21), получаем одно уравнение, линейное относительно неизвестной величины ω_2 .

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА 5

ТРЕНИЕ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ

§ 22. Общие сведения о силах трения

Виды трения. По объекту взаимодействия различают внешнее и внутреннее трение. *Внешнее трение* — противодействие относительному перемещению соприкасающихся тел в направлении, лежащем в плоскости их соприкосновения. *Внутреннее трение* — противодействие относительному перемещению отдельных частей одного и того же тела.

По признаку наличия или отсутствия относительного движения различают трение покоя и трение движения. *Трение покоя* (статическое трение) — внешнее трение при относительном покое соприкасающихся тел. *Трение движения* (кинетическое трение) — внешнее трение при относительном движении соприкасающихся тел.

По виду относительного движения тел различают: *трение скольжения* — внешнее трение при относительном скольжении соприкасающихся тел, *трение верчения* — внешнее трение при вращении одного тела относительно другого вокруг общей нормали к поверхностям их соприкосновения (частный случай трения скольжения), *трение качения* — внешнее трение при относительном качении соприкасающихся тел.

По физическим признакам состояния взаимодействующих тел различают: *чистое трение* (ювелирное) — внешнее трение при полном отсутствии на трущихся поверхностях каких-либо посторонних примесей; *сухое трение* (трение несмазанных поверхностей) — внешнее трение, при котором трущиеся поверхности покрыты пленками окислов и адсорбированными молекулами газов или жидкостей, а смазка отсутствует; *граничное трение* — внешнее трение, при котором между трущимися поверхностями есть тонкий (порядка 0,1 мк и менее) слой смазки, обладающий свойствами, отличными от ее обычных объемных свойств; *полужидкостное* (смешанное) *трение* — трение, при котором между трущимися поверхностями есть слой смазки с обычными объемными свойствами; *жидкостное* (гидродинамическое) *трение* — трение, при котором поверхности трущихся твердых тел полностью отделены друг от друга слоем жидкости.

Сила трения покоя. *Силой трения покоя* называется составляющая полной реакции для трущихся тел, лежащая в общей кас-

тельной плоскости к поверхностям контакта. Величина этой силы и ее направление зависят от внешних сил, приложенных к трущимся телам, но не могут превышать *предельной* (полной) *силы трения покоя*, под которой понимается сила трения покоя, по достижении которой начинается относительное движение трущихся тел.

Величина предельной силы трения покоя зависит от многих факторов, которые можно учесть только экспериментальным путем для каждого механизма в отдельности. При отсутствии экспериментальных данных пользуются обычно приближенными формулами, из которых (в хронологическом порядке) можно отметить следующие:

Формула Амонтона *) (1699 г.):

$$F_{\tau} = fF, \quad (5.1)$$

где F_{τ} — величина предельной силы трения покоя, F — величина результирующей силы нормальных давлений на поверхности трения, f — коэффициент трения.

Формула Кулона **) (1785 г.):

$$F_{\tau} = A + fF, \quad (5.2)$$

где A — сцепленность, зависящая от площади касания.

Формула Ишлинского и Крагельского ***) (1944 г.):

$$F_{\tau} = F_{\infty} - (F_{\infty} - F_0)e^{-\kappa t}, \quad (5.3)$$

где F_{∞} — величина силы трения при бесконечно большом времени контакта, F_0 — при нулевом времени контакта, t — время контакта, κ — постоянный коэффициент.

Сила трения скольжения. После достижения предельной силы трения покоя начинается скольжение трущихся поверхностей. *Силой трения скольжения* называется составляющая полной реакции для трущихся тел, лежащая в общей касательной плоскости к поверхностям контакта и направленная в сторону, противоположную их относительному смещению. Модуль силы трения скольжения определяется по формулам (5.1) и (5.2), в которых коэффициент трения скольжения имеет меньшее значение по сравнению с коэффициентом трения покоя, или же по формулам, учитывающим скорость скольжения.

*) Гильом Амонтон (Guillaume Amontons, 1663—1705), член Французской академии наук, известен работами по физике.

**) Шарль Огюстен Кулон (Charles Augustin Coulomb, 1736—1806), французский инженер и физик, член Французской академии наук.

***) Александр Юльевич Ишлинский (р. 1913) — академик АН СССР, известен работами по теории гироскопов.

Игорь Викторович Крагельский (р. 1908) — автор многих работ по теории трения и износа в машинах.

При граничном трении наиболее часто употребляется эмпирическая формула

$$f = f_0 + f_1 v + f_2 v^2 + f_3 v^3, \quad (5.4)$$

где v — модуль скорости относительного движения трущихся поверхностей, f_0 — значение коэффициента трения при $v=0$; f_1 , f_2 и f_3 — экспериментальные коэффициенты, которые могут быть и положительными, и отрицательными.

Направление силы трения скольжения противоположно направлению соответствующей относительной скорости. Например, сила трения F_{ti} , действующая на звено i со стороны звена j , направлена противоположно относительной скорости v_{ij} точки контакта на звене i по отношению к звену j .

Момент сил трения качения. В выпуклых парах возможно взаимное качение звеньев. Сопротивление качению звеньев выражают обычно моментом пары сил трения качения (M_{ti} *), модуль которого определяется по формуле

$$M_{\tau} = kF, \quad (5.5)$$

где k — коэффициент трения качения, измеряемый в см, F — модуль результирующей силы нормальных давлений на поверхность трения.

Направление момента M_{τ} противоположно направлению соответствующей относительной угловой скорости. Например, момент сил трения M_{ti} , действующий на звено i со стороны звена j , направлен противоположно угловой скорости ω_{ij} звена i по отношению к звену j .

§ 23. Жидкостное трение

Основное уравнение гидродинамической теории смазки. При жидкостном трении трущиеся поверхности должны быть полностью разделены слоем жидкости (смазки). В этом случае относительное скольжение поверхностей сопровождается только внутренним трением слоев жидкости, и модуль силы трения оказывается значительно меньше, чем при сухом или граничном трении. Для того чтобы трение было жидкостным, необходимо в слое смазки создать такое давление, при котором результирующая сил давления смазки на каждый участок трущейся поверхности уравновешивала бы все другие силы, действующие на этот участок. Необходимое давление может быть создано или подачей смазки под давлением (гидростатическое трение), или же движением смазки в клиновом зазоре (гидродинамическое трение).

Основные положения гидродинамической теории смазки рассмотрим на примере относительного движения двух пластинок,

*) Тильдой обозначены силы и моменты сил, если они считаются скалярными величинами.

между которыми помещен слой смазки (рис. 43, а). Одну из пластинок считаем неподвижной, а другая движется равномерно со скоростью v . Зазор между пластинками имеет форму клина, как это показано в утрированном виде на рис. 43, б. Ширина пластинок b значительно больше величины зазора, и поэтому, пренебрегая

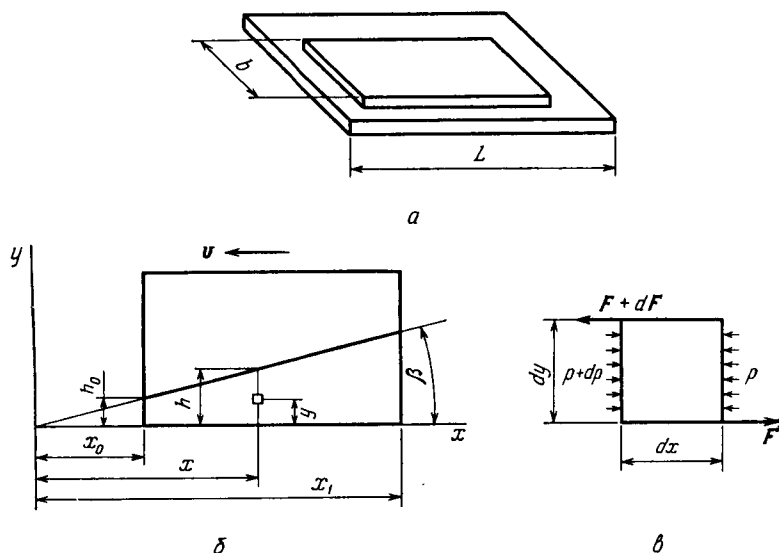


Рис. 43

вытеканием жидкости в направлении, перпендикулярном скорости v , можно считать поток жидкости плоским. Кроме того, движение жидкости считаем ламинарным. Тогда для учета сил внутреннего трения в жидкости справедлива формула Ньютона

$$F = \mu S \frac{du}{dy}, \quad (5.6)$$

где F — модуль силы сдвига (внутреннего трения), которую нужно приложить к слою жидкости площадью S для того, чтобы этот слой двигался относительно соседнего слоя со скоростью du при расстоянии между слоями dy . Коэффициент пропорциональности μ называется *динамической вязкостью* и в системе СИ имеет размерность $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$.

Из условий равновесия элементарного параллелепипеда жидкости, выделенного вблизи точки с координатами x и y (рис. 43, в), имеем

$$dF = b \, dy \, dp, \quad (5.7)$$

где p — избыточное давление жидкости в зазоре.

Если давление p считать функцией только координаты x , а скорость движения частиц u — функцией только координаты y , то из формул (5.6) и (5.7) при $S = b \, dx$ получаем

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (5.8)$$

Это уравнение можно назвать *основным уравнением гидродинамической теории смазки*, так как оно дает возможность найти давление p как функцию координаты x и затем подобрать параметры зазора и смазки так, чтобы выполнялось условие жидкостного трения.

Распределение скоростей жидкости по высоте сечения зазора. Прежде чем находить величину требуемого давления p как функции координаты x , определим из уравнения (5.8) скорость течения слоя жидкости u как функцию координаты y .

Общее решение дифференциального уравнения (5.8) при условии, что производная dp/dx не зависит от координаты y , имеет вид

$$u = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C_1 y + C_2.$$

Граничные условия получаем в предположении, что силы сцепления между частицами поверхности твердого тела и частицами прилегающего слоя жидкости больше сил сцепления между частицами жидкости: при $y = 0$ $u = 0$; при $y = h$ $u = -v$. Знак «минус» в граничном условии для скорости v указывает на то, что скорость v направлена противоположно положительному направлению оси x .

При указанных граничных условиях имеем

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) - \frac{v}{h} y, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (2y-h) - \frac{v}{h}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Направление скорости частиц жидкости u всегда совпадает с направлением скорости v при выполнении условия

$$\left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} > 0.$$

Отсюда

$$-\frac{dp}{dx} > \frac{2\mu v}{h^2}. \quad (5.10)$$

Если условие (5.10) не выполнено, то в потоке жидкости могут быть завихрения (турбулентное движение), и тогда формулы (5.8) и (5.9), строго говоря, оказываются неприменимыми.

Давление в смазочном слое. Для определения давления в смазочном слое дополнительно к уравнению (5.8) используется условие сплошности, согласно которому расход жидкости (количество

жидкости, протекающее в единицу времени) через любое поперечное сечение должен быть один и тот же:

$$Q = b \int_0^h u \, dy.$$

Подставляя значение u из формулы (5.9) и выполняя интегрирование при $b = 1$, получаем

$$Q = -\frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\mu} - \frac{vh}{2}. \quad (5.11)$$

Обозначим через h_m величину зазора h в том сечении, где давление имеет экстремум, т. е. $dp/dx = 0$. Тогда из формулы (5.11) имеем

$$Q = -\frac{vh_m}{2},$$

или

$$-\frac{vh_m}{2} = -\frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\mu} - \frac{vh}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu v \frac{h_m - h}{h^3}. \quad (5.12)$$

Если зазор имеет постоянную величину, то $h_m = h$ и $dp/dx = 0$, т. е. увеличение давления, необходимое для обеспечения жидкостного трения, может возникнуть только при $h_m \neq h$. Этому условию можно удовлетворить, выполняя, например, зазор клиновидным, как показано на рис. 43, б. В этом случае $h = x \operatorname{tg} \beta$, или $h \approx x\beta$ при малых углах β .

Из формулы (5.12) при $h = x\beta$ после интегрирования получаем

$$p = \frac{6\mu v}{\beta^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x_m}{2x^2} \right) + C.$$

При $x = x_0$ и $x = x_1$ давление должно быть равно давлению внешней среды, т. е. избыточное давление $p = 0$. Из этого условия получаем два уравнения для определения неизвестных величин C и x_m :

$$\frac{1}{x_0} - \frac{x_m}{2x_0^2} + \frac{C\beta^2}{6\mu v} = 0,$$

$$\frac{1}{x_1} - \frac{x_m}{2x_1^2} + \frac{C\beta^2}{6\mu v} = 0.$$

Отсюда

$$x_m = \frac{2x_0x_1}{x_0 + x_1}, \quad C = -\frac{6\mu v}{\beta^2(x_0 + x_1)}.$$

Следовательно, при клиновидной форме зазора давление в смазочном слое есть функция координаты x

$$p = \frac{6\mu v}{\beta^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x_0 x_1}{(x_0 + x_1)x^2} - \frac{1}{x_0 + x_1} \right). \quad (5.13)$$

Максимальное давление при $x = x_m$

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{\mu v}{\beta^2} \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 x_1 (x_1 + x_0)}.$$

Несущая способность смазочного слоя. Результирующую силу давления смазочного слоя жидкости на смазываемые поверхности называют *несущей способностью смазочного слоя* и обозначают через F_n . В соответствии с формулой (5.13)

$$F_n = b \int_x^{x_1} \frac{6\mu v}{\beta^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x_0 x_1}{(x_0 + x_1)x^2} - \frac{1}{x_0 + x_1} \right) dx.$$

После интегрирования имеем

$$F_n = b \frac{6\mu v}{\beta^2} \left(\ln \frac{x_1}{x_0} - 2 \frac{x_1 - x_0}{x_1 + x_0} \right). \quad (5.14)$$

Для обеспечения жидкостного трения надо так выбирать постоянные параметры, входящие в формулу (5.14), чтобы сила F_n была не меньше результирующей силы, действующей извне на рассматриваемое звено.

§ 24. Силы трения в кинематических парах

Трение в поступательной паре. В поступательной паре (рис. 44) модуль силы трения скольжения $F_{\tau i}$, действующей на звено i со стороны звена j , определяется обычно по формуле Амонтона (5.1)

$$F_{\tau ij} = f F_{ij}^n, \quad (5.15)$$

где f — коэффициент трения, F_{ij}^n — нормальная составляющая полной реакции F_{ij} .

Сила трения $F_{\tau ij}$, действующая на звено j со стороны звена i , равна по модулю силе трения $F_{\tau ji}$, но противоположна по направлению.

Сила $F_{\tau ij}$ направлена противоположно скорости звена i относительно звена j , т. е. скорости v_{ij} , а сила $F_{\tau ji}$ — противоположно скорости v_{ji} .

В абсолютном движении относительно стойки сила трения может быть как силой сопротивления (силой, элементарная работа которой отрицательна), так и силой движущей (силой, элементарная работа которой положительна). Например, в случае, показан-

ном на рис. 44, при $v_i > v_j$ сила трения F_{ti} есть сила сопротивления, а сила трения F_{tj} — сила движущая. Другими словами, звено i увлекает звено j , а звено j тормозит звено i . Сумма работ обеих сил трения, однако, всегда отрицательна. В рассматриваемом примере эта сумма имеет значение

$$-F_{ti}v_i + F_{tj}v_j = F_{ti}(v_j - v_i) < 0.$$

Угол φ , который полная реакция F_{ij} составляет с нормальной составляющей F_{ij}^n , называется *углом трения*. Из формулы (5.15)

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (5.16)$$

При малых значениях коэффициента трения угол трения $\varphi \approx f$.

Значение коэффициента трения в формуле (5.16) определяется по формуле (5.4), в которой значения f_0 , f_1 , f_2 и f_3 выбираются в зависимости от вида трения. При сухом и граничном трении

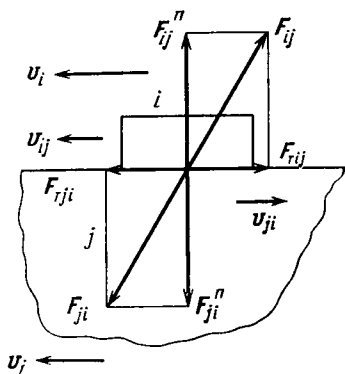


Рис. 44

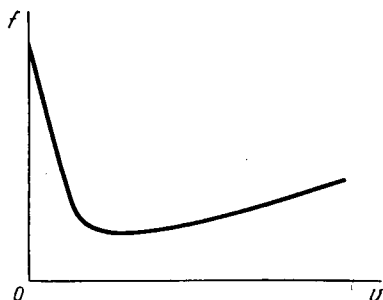


Рис. 45

в первом приближении полагают $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, т. е. считают коэффициент трения постоянной величиной.

Более точные зависимости с учетом коэффициентов f_1 , f_2 и f_3 употребляются только в тех случаях, когда имеются экспериментальные данные. Наиболее часто встречается зависимость коэффициента трения f от модуля скорости относительного скольжения v , при которой коэффициент трения с увеличением скорости сначала быстро падает, а затем медленно возрастает (рис. 45).

При жидкостном трении сила трения определяется по формуле Ньютона (5.6), в которой производная du/du , называемая *градиентом скорости*, принимается приближенно постоянной величиной, равной v/h , где v — скорость скольжения, h — величина зазора:

$$F_{\tau} = \mu S \frac{v}{h}.$$

Отсюда

$$F_{\tau} = \beta v, \quad (5.17)$$

где $\beta = \mu S/h$ — постоянный коэффициент, называемый *коэффициентом вязкого трения*.

Самоторможение в поступательной паре. При действии сил трения в поступательной паре возможен случай, когда относительное движение звена в требуемом направлении не может начаться независимо от модуля результирующей движущей силы. Этот случай называют *самоторможением*.

Пусть, например, на звено i , движущееся по неподвижной направляющей j , действует сила F_i , которая составляет со скоростью угол $\pi/2 - \alpha_i$ (рис. 46, а). При $\alpha_i > \varphi$ звено i движется ускоренно

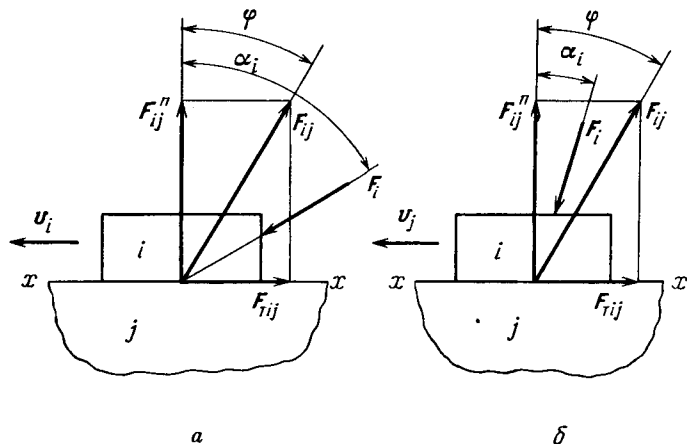


Рис. 46

в направлении, указанном вектором v_i , так как проекция силы F_i на ось xx больше силы трения $F_{\tau ij}$. При $\alpha_i < \varphi$ звено i движется замедленно, если в начальный момент времени оно двигалось со скоростью v_i (рис. 46, б). Если же начальная скорость равна нулю, то движение звена не может начаться независимо от модуля движущей силы. При $\alpha_i = \varphi$ возможно равномерное движение звена i со скоростью v_i . Однако при начальной скорости, равной нулю, движение не может начаться. Отсюда следует, что условие самоторможения выражается неравенством

$$\alpha_i \leq \varphi, \quad (5.18)$$

т. е. при самоторможении направление движущей силы проходит внутри угла трения.

Условие (5.18) справедливо и для плоскостной пары. Тогда геометрическое место возможных положений полной реакции F_{ij}

изображается конусом с углом при вершине, равным 2φ . Этот конус называется *конусом трения*.

Трение во вращательной паре. Рассмотрим вращательную пару, в которую входят звенья i и j , при условии, что между цилиндрическими элементами этой пары имеется зазор. Тогда при сухом

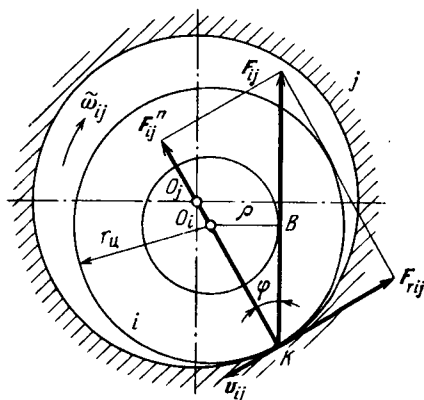


Рис. 47

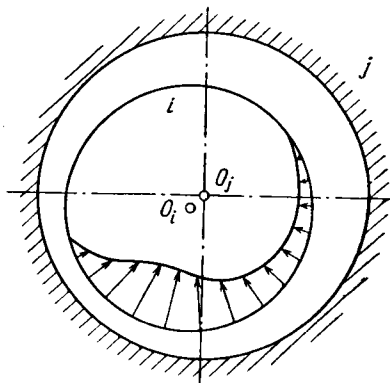


Рис. 48

или граничном трении касание элементов пары происходит по линии, совпадающей с общей образующей цилиндрических элементов пары (рис. 47). Нормальная составляющая реакции F_{ij}^n , которую считаем приложенной в точке касания K , проходит через центры O_i и O_j элементов пары. Сила трения F_{tij} направлена в сторону, противоположную направлению скорости v_{ij} точки касания K звена i . Полная реакция F_{ij} отклонена от общей нормали к цилиндрическим поверхностям в точке K на угол трения φ и при любом положении точки касания K направлена по касательной к кругу радиусом ρ с центром в точке O_i . Этот круг называется *кругом трения*. Из треугольника BO_iK находим радиус круга трения

$$\rho = r_u \sin \varphi \approx r_u f,$$

где r_u — радиус цапфы, т. е. той части звена i , на которой расположены элементы вращательной пары.

При силовом анализе шарнирных механизмов с учетом трения иногда удобнее считать полную реакцию F_{ij} проходящей через центр O_i . Тогда дополнительно надо учесть момент сил трения

$$M_{tij} = F_{tij} r_u f, \quad (5.19)$$

направленный противоположно относительной угловой скорости ω_{ij} .

Коэффициент трения в формуле (5.19) должен определяться по экспериментальным данным для вращательной пары. Если же используются данные, полученные из опытов с плоскими поверх-

постоями, то надо иметь в виду, что для трения цилиндрических поверхностей с внутренним касанием коэффициенты трения получаются больше, чем для плоских поверхностей, приблизительно на 30 %.

При жидкостном трении необходимый для создания гидродинамического давления клиновидный зазор образуется за счет эксцентричного расположения цилиндрических элементов вращательной пары. На рис. 48 показано распределение давлений в смазочном слое, полученное из опытов. Расчетные формулы для подбора параметров, обеспечивающих требуемую несущую способность, имеют в основном тот же вид, что и формулы, выведенные в предыдущем параграфе для движения плоских поверхностей.

ГЛАВА 6

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 25. Определение реакций в кинематических парах

Задачи силового анализа механизмов. *Силовой анализ механизмов* основывается на решении прямой, или первой, задачи динамики — по заданному движению определить действующие силы. Поэтому законы движения начальных звеньев при силовом анализе считаются заданными. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, обычно тоже считаются заданными и, следовательно, подлежат определению только *реакции в кинематических парах*. Но иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считают неизвестными. Тогда в силовой анализ входит определение сил, при которых выполняются принятые законы движения начальных звеньев. При решении обеих задач используется *принцип Даламбера*, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции. Уравнения равновесия в этом случае называют *уравнениями кинестатики*, чтобы отличить их от обычных уравнений статики, т. е. уравнений равновесия без учета сил инерции.

Силы инерции звеньев плоских механизмов. Обычно звенья плоских механизмов имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения. Тогда главный вектор сил инерции звена (сокращенно — сила инерции) F_a и главный момент сил инерции звена (сокращенно — момент пары сил инерции) M_a определяются по формулам

$$F_a = -ma_s, \quad (6.1)$$

$$M_a = -J_s \ddot{\epsilon}, \quad (6.2)$$

где m — масса звена, a_s — вектор ускорения центра масс, J_s — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр

масс перпендикулярно плоскости движения, $\tilde{\epsilon}$ — угловое ускорение звена.

В общем случае плоского движения силу инерции и пару сил инерции можно заменить одной силой, которая должна быть смещена параллельно силе инерции на плечо h (рис. 49, а), определяемое из условия

$$h = \frac{M_{\pi}}{F_{\pi}}, \quad (6.3)$$

причем момент силы F_{π} относительно центра масс должен иметь то же направление, что и момент пары сил инерции.

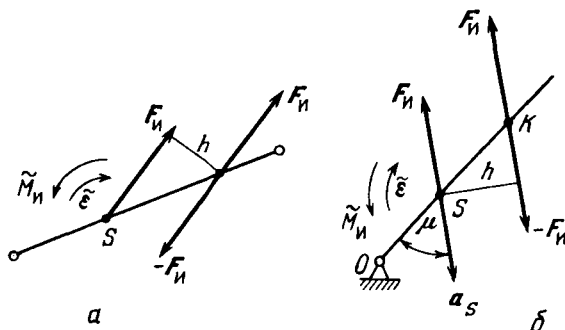


Рис. 49

При вращательном движении эта сила проходит через центр качания K (рис. 49, б). Расстояние между центром масс и центром качания находится по формуле

$$l_{SK} = \frac{J_S}{ml_{OS}}, \quad (6.4)$$

которая получается из условия (6.3) после подстановки величин F_{π} и M_{π} из формул (6.1) и (6.2) с учетом известной формулы кинематики

$$\epsilon = a_S \frac{\sin \mu}{l_{OS}}$$

и соотношения

$$h = l_{SK} \sin \mu.$$

Силы инерции звеньев пространственных механизмов. Главный вектор сил инерции звена в пространственном механизме определяется, как и в плоском механизме, по формуле

$$F_{\pi} = -ma_S.$$

Главный момент сил инерции удобно выражать через проекции на главные центральные оси инерции звена *)

$$\begin{aligned} M_{ux} &= -J_x \varepsilon_x - (J_z - J_y) \omega_y \omega_z, \\ M_{uy} &= -J_y \varepsilon_y - (J_x - J_z) \omega_z \omega_x, \\ M_{uz} &= -J_z \varepsilon_z - (J_y - J_x) \omega_x \omega_y, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции звена; $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — проекции угловой скорости и углового ускорения на главные центральные оси инерции звена (алгебраические величины).

Переход к проекциям на неподвижные оси выполняется в соответствии с формулами преобразования координат точек звеньев для данного механизма.

Условие кинетостатической определенности кинематических цепей. Число неизвестных, определяемых из какой-либо системы уравнений, должно совпадать с числом уравнений. Поэтому прежде чем решать задачу об определении реакций в кинематических парах, надо выяснить, для каких кинематических цепей соблюдаются условия равенства числа уравнений кинетостатики и числа неизвестных составляющих реакций в кинематических парах (*условие кинетостатической определенности*).

Для n звеньев, на которые действует пространственная система сил общего вида, можно составить $6n$ уравнений кинетостатики (равенство нулю сумм проекций сил на координатные оси и моментов сил относительно этих осей). Число неизвестных, подлежащих определению из этих уравнений, для каждой кинематической пары совпадает с числом связей, так как каждая связь, выражающая невозможность движения по какому-либо направлению, дает соответствующую реакцию. Невозможность движения вдоль оси дает реакцию в виде силы, а невозможность вращения вокруг оси — в виде пары сил.

Например, для пятиподвижной кинематической пары «шар — плоскость» невозможно движение по нормали к соприкасающимся поверхностям, и, следовательно, есть одна неизвестная сила реакции, направленная по этой нормали. В трехподвижной сферической паре есть три составляющие главного вектора сил реакции, а главный момент сил реакции отсутствует, так как все три вращения вокруг координатных осей в этой паре возможны. В двухподвижной цилиндрической паре — две составляющие главного вектора (отсутствует составляющая вдоль оси цилиндра) и две составляющие главного момента (отсутствует составляющая в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра) и т. д.

*) Главными центральными осями инерции тела (звена) называются три взаимно перпендикулярные оси, проведенные через центр масс в таких направлениях, что центробежные моменты инерции тела относительно этих осей равны нулю.

Следовательно, условие кинетостатической определенности пространственной кинематической цепи имеет вид

$$6n = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5, \quad (6.6)$$

где p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 — число одно-, двух-, трех-, четырех- и пяти-подвижных пар.

Это условие совпадает с условием равенства пулю числа степеней свободы, т. е. кинетостатически определенными группами являются структурные группы Ассура.

Для плоских кинематических цепей число уравнений кинетостатики равно $3n$. Число неизвестных для каждой одноподвижной пары равно двум: модуль реакции F_{ij} звена j на звено i и угол α_{ij} — для вращательной пары (рис. 50, а); модуль реакции F_{ij} и

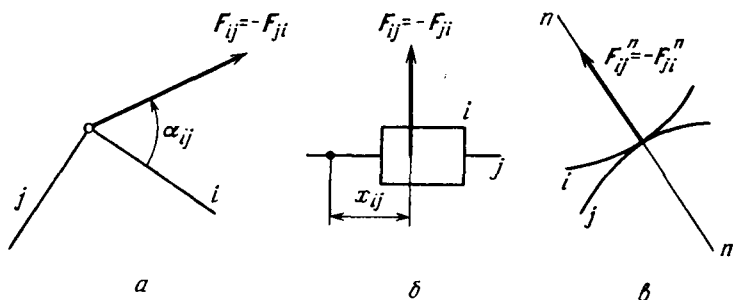


Рис. 50

координата x_{ij} для поступательной пары (рис. 50, б). Высшая двух-подвижная пара в плоском механизме дает одну неизвестную — модуль реакции F_{ij}^n , так как направление этой реакции (нормаль nn к соприкасающимся поверхностям) и точка приложения реакции известны (рис. 50, в).

Следовательно, условие кинетостатической определенности для плоской кинематической цепи имеет вид

$$3n = 2p_1 + p_2. \quad (6.7)$$

Однако это условие справедливо только для плоской системы внешних сил, действующих на звенья механизма. При пространственном расположении сил число уравнений кинетостатики и число неизвестных составляющих реакций должны удовлетворять условию (6.6), т. е. в этом случае для кинетостатической определенности плоский механизм не должен иметь избыточных связей. Наличие избыточных связей увеличивает число неизвестных составляющих реакций, и для их определения дополнительно к уравнениям кинетостатики должны быть составлены уравнения деформаций.

Планы сил для плоских механизмов. Графическое определение реакций в кинематических парах плоских механизмов с помощью планов сил применяется не только вследствие наглядности, но и потому, что внешние силы, действующие на звенья механизма, обычно известны лишь очень приблизительно, и точность простейших графических построений часто оказывается вполне достаточной.

Построение планов сил покажем на примере определения реакций в кинематических парах шарнирного четырехзвенника без учета сил трения (рис. 51). Считаем, что по заданному закону

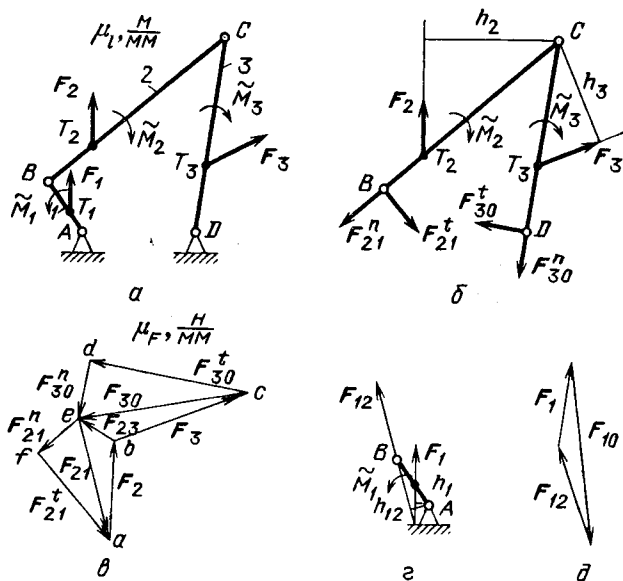


Рис. 51

движения начального звена 1 выполнен кинематический анализ и определены силы и пары сил инерции, которые, складываясь с внешними силами, дают для каждого звена одну результирующую силу F_i ($i = 1, 2, 3$) и одну пару сил с моментом $\tilde{M}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Решение задачи начнем с рассмотрения условий равновесия двухзвенной группы, образованной звеньями 2 и 3 (рис. 51, б). Подлежат определению реакции $F_{21}, F_{30}, F_{23} = -F_{32}$, т. е. три вектора или шесть скалярных величин. В данном примере система уравнений для определения неизвестных реакций разделяется на два скалярных уравнения, каждое из которых содержит одну неизвестную величину, и два векторных уравнения, решаемых независимо. Соответственно все решение состоит из трех этапов.

Первый этап — определение тангенциальных составляющих F_{21}^t и F_{30}^t . Каждую из реакций F_{21} и F_{30} раскладываем на две со-

ставляющие: нормальные составляющие F_{21}^n и F_{30}^n направлены по отрезкам BC и CD , а тангенциальные составляющие F_{21}^t и F_{30}^t перпендикулярно им. Направление этих составляющих (знак) выбираем произвольно. Составляя уравнения моментов сил относительно точки C для звена 2 и для звена 3, получаем два уравнения, линейные относительно искомым величин F_{21}^t и F_{30}^t :

$$F_{21}^t l_{BC} + \tilde{M}_2 - F_2 h_2 \mu_l = 0,$$

$$F_{30}^t l_{CD} + \tilde{M}_3 - F_3 h_3 \mu_l = 0,$$

где h_2 и h_3 — плечи сил F_2 и F_3 относительно точки C , измеряемые по чертежу, в мм. Известные моменты $\tilde{M}_2$ и $\tilde{M}_3$ должны быть поставлены в эти уравнения со своими знаками. Если после решения уравнений какая-либо составляющая получилась со знаком «плюс», то на схеме (рис. 51, б) знак ее направления выбран правильно, если же со знаком «минус» — знак направления надо изменить на противоположный.

Второй этап — определение нормальных составляющих F_{21}^n и F_{30}^n — выполняется на основании графического решения векторного уравнения суммы сил, действующих на всю группу в целом:

$$\frac{F_{21}^n}{\parallel BC} + \frac{F_{21}^t}{\parallel BC} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \frac{F_{30}^t}{\parallel CD} + \frac{F_{30}^n}{\parallel CD} = 0.$$

Сумма указанных векторов образует замкнутый векторный контур, называемый *планом сил*.

Выбрав масштабный коэффициент μ_F (Н/мм), откладываем на плане сил (рис. 51, в) векторы, изображающие силы F_2 и F_3 , модули которых равны $(ab) = F_2/\mu_F$ и $(bc) = F_3/\mu_F$. Затем откладываем тангенциальную составляющую F_{21}^t по соседству с силой F_2 и тангенциальную составляющую F_{30}^t по соседству с силой F_3 так, чтобы стрелки всех векторов соответствовали одному и тому же направлению обхода: $(fa) = F_{21}^t/\mu_F$ и $(cd) = F_{30}^t/\mu_F$. Линии действия нормальных составляющих F_{21}^n и F_{30}^n проводим из начала вектора F_{21}^t и конца вектора F_{30}^t . Точка пересечения этих линий определит отрезки (de) и (ef) , изображающие F_{30}^n и F_{21}^n . Суммы нормальных и тангенциальных составляющих дают полные реакции F_{21} и F_{30} .

Третий этап — определение реакции $F_{23} = -F_{32}$. Эта реакция находится из уравнения суммы сил, действующих на звено 2:

$$F_{21} + F_2 + F_{23} = 0.$$

Для решения этого уравнения достаточно соединить точки b и e плана сил. Стрелка вектора F_{23} направлена к точке e , вектора F_{32} — к точке b .

После рассмотрения условий равновесия двухзвенной группы переходим к определению сил, действующих на начальное звено 1.

Для этого звена можно составить одно векторное уравнение суммы сил и одно скалярное уравнение суммы моментов относительно точки A (рис. 51, z):

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{10} = 0; \quad -F_1 h_{1\mu_1} - F_{12} h_{12\mu_1} + \bar{M}_1 = 0.$$

Из первого уравнения построением плана сил (рис. 51, d) находим реакцию $\mathbf{F}_{10}$, а второе уравнение должно дать тождество, если закон движения начального звена, припаятый при определении сил инерции, соответствует заданным внешним силам.

Иногда при силовом анализе припимают, что начальное звено движется равномерно, и в этом предположении определяют силы инерции. Тогда из указанного уравнения моментов находят такое значение момента внешних сил, действующих на начальное звено, при котором его движение является равномерным. Этот момент называют *уравновешивающим* и обозначают через $\bar{M}_1$. При ведущем начальном звене уравновешивающий момент есть момент сил движущих, при ведомом —

момент сил сопротивления. В общем случае заданного неравномерного движения начального звена *уравновешивающим* моментом называется момент сил, действующих на вращающееся начальное звено, определяемый по заданному закону движения этого звена.

Для других плоских и пространственных

механизмов система уравнений для определения реакций в кинематических парах (без учета сил трения) также является линейной, и потому ее решение не представляет принципиальных трудностей.

Теорема Жуковского *). Если силу, приложенную к какой-либо точке звена плоского механизма, перенести параллельно самой себе в одноименную точку повернутого на 90° плана скоростей, то момент этой силы относительно полюса плана скоростей будет пропорционален ее мощности.

Пусть, например, сила $\mathbf{F}_i$, приложенная в точке T_i механизма, перенесена без изменения ее направления в точку t_i повернутого на 90° плана скоростей (рис. 52, a). Тогда момент силы $\mathbf{F}_i$ отно-

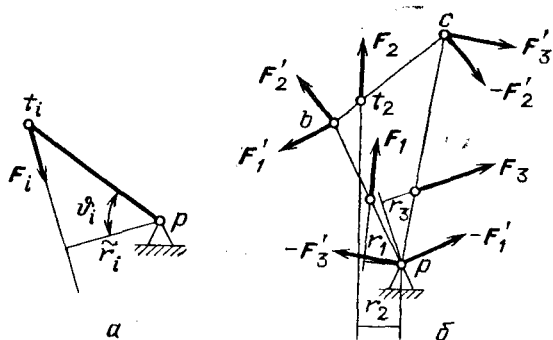


Рис. 52

*) Николай Егорович Жуковский (1847—1921), автор многих работ по теоретической и прикладной механике, теории автоматического регулирования, динамике самолетов и теории механизмов.

сительно полюса

$$M_p(\mathbf{F}_i) \equiv F_i \tilde{r}_i = F_i \frac{v_i}{\mu_v} \cos(\widehat{\mathbf{F}_i, \mathbf{v}_i}),$$

так как угол ϕ_i между отрезком (pt_i) , изображающим скорость $\mathbf{v}_i$ точки приложения силы $\mathbf{F}_i$, и плечом $\tilde{r}_i$ равен углу $\widehat{\mathbf{F}_i, \mathbf{v}_i}$ по взаимной перпендикулярности сторон.

Отсюда следует условие теоремы Жуковского

$$M_p(\mathbf{F}_i) = N_i / \mu_v, \quad (6.8)$$

где N_i — мощность силы $\mathbf{F}_i$.

Если на звено действует пара сил, то на повернутый план скоростей надо перенести каждую составляющую этой пары отдельно. Заметим также, что условие (6.8) не зависит от того, в какую сторону повернут на 90° план скоростей.

Теорема Жуковского применяется во многих задачах динамики. В частности, ее можно использовать для определения «уравновешивающего момента» (или «уравновешивающей силы»), если желают избежать последовательного определения всех реакций в кинематических парах механизма.

На рис. 52, б для рассмотренного примера силового анализа парнирного четырехзвенника показан повернутый на 90° план скоростей pbc и силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$, приложенные в точках, одноименных с точками приложения этих сил в механизме. Пары сил с моментами $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ и $\tilde{M}_3$ представлены составляющими $\mathbf{F}'_1$, $\mathbf{F}'_2$ и $\mathbf{F}'_3$, приложенными в точках A , B , C и D перпендикулярно направлениям отрезков AB , BC и CD . Модули этих составляющих найдены из условий:

$$F'_1 = \tilde{M}_1 / l_{AB}, \quad F'_2 = \tilde{M}_2 / l_{BC}, \quad F'_3 = \tilde{M}_3 / l_{CD}.$$

Каждая составляющая пары сил перенесена в одноименную точку плана скоростей без изменения ее направления, причем направление момента пары сил на плане скоростей может не совпадать с направлением момента той же пары на плане механизма.

На основании общего уравнения динамики сумма мощностей всех внешних сил, приложенных к n звеньям механизма, и сил инерции звеньев равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n N_i + \sum_{i=1}^n N_{ni} = 0. \quad (6.9)$$

По условию теоремы Жуковского это уравнение равносильно уравнению моментов относительно полюса повернутого плана скоростей

$$\sum_{i=1}^n M_p(\mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^n M_p(\mathbf{F}_{ni}) = 0. \quad (6.10)$$

В нашем примере силы инерции объединены с внешними силами, и потому уравнение (6.10) имеет вид *)

$$-F_1 r_1 + F'_1(pb) - F_2 r_2 - F'_2(bc) - F_3 r_3 - F'_3(pc) = 0.$$

Отсюда находим составляющую F'_1 и затем момент M_1 по условию

$$M_1 = F'_1 l_{AB}.$$

Если при определении сил инерции было принято равномерное движение начального звена, то момент M_1 даст значение уравновешивающего момента M_v , т. е. момента внешних сил, действующих на начальное звено. При неравномерном движении $M_1 = M_v - J_1 \ddot{\epsilon}_1$, где J_1 — момент инерции начального звена относительно оси вращения; $\ddot{\epsilon}_1$ — угловое ускорение начального звена.

§ 26. Силовой анализ с учетом трения

При силовом анализе относительные скорости в кинематических парах считаются заданными. Поэтому в уравнения кинестатики сила трения войдет с известным знаком, в отличие от искоемых реакций. Поясним эту особенность силового анализа с учетом сил трения на примере кулачкового механизма. Кулачок 1 (рис. 53) приводит в движение выходное звено 2, соприкасаясь с ним по сферической поверхности малого радиуса (практически в точке, лежащей на оси выходного звена). Трение учитываем только в направляющих поступательной пары, причем считаем, что вследствие достаточного зазора в этой паре звено 2 при его перекосе касается направляющих в двух точках B и C , отстоящих на расстоянии l^{**}).

При силовом анализе считаем заданными: угловую скорость $\tilde{\omega}_1$ и ускорение $\ddot{\epsilon}_1$ звена 1, скорость v_2 и ускорение a_2 звена 2, момент инерции J_1 звена 1 относительно оси его вращения, массу m_2 звена 2, размеры l и l_0 , коэффициент трения f , угол ϑ и внешнюю силу F_2 , действующую на звено 2. Требуется найти реакции F_{21} , F_{20}^b , F_{20}^c и F_{10} .

Уравнения кинестатического равновесия звена 2 при указанных на рисунке направлениях реакций записываем в виде уравнений проекций на оси Ax и Ay и уравнения моментов относительно точки A :

$$-F_{20}^b + F_{20}^c - F_{21} \sin \vartheta = 0, \quad (6.11)$$

$$-f(F_{20}^b + F_{20}^c) + F_{21} \cos \vartheta - F_2 - m_2 \ddot{a}_2 = 0, \quad (6.12)$$

$$F_{20}^b(l + l_0 - s_2) - F_{20}^c(l_0 - s_2) = 0. \quad (6.13)$$

*) Плечо силы на рычаге Жуковского обозначено через r_1 , чтобы не спутать с плечом h_1 той же силы на плане механизма.

**) При малых зазорах давление толкателя на стойку распределяется по закону треугольника и расчетная длина направляющей равна $l_p = 2l/3$.

Из (6.13) имеем $F_{20}^c = F_{20}^b \frac{l+l_0-s_2}{l_0-s_2}$. Подставляя значение F_{20}^c в (6.11), находим

$$F_{20}^b = F_{21} \frac{(l_0 - s_2) \sin \vartheta}{l}.$$

Наконец, из уравнения (6.12) получаем

$$F_{21} = \frac{F_2 + m_2 \tilde{a}_2}{\cos \vartheta - f \left| 1 + \frac{2(l_0 - s_2)}{l} \right| \sin \vartheta}. \quad (6.14)$$

Как видно, F_{20}^b, F_{20}^c при $F_{21} > 0$ имеют знак плюс, т. е. направления реакций были выбраны правильно. Если бы F_{20}^b (или F_{20}^c) получилась отрицательной, то следовало бы изменить направление соответствующей реакции на противоположное. При этом систему уравнений (6.11) — (6.13) пришлось бы решать запово, так как в уравнениях (6.11) и (6.13) знак перед F_{20}^b (или F_{20}^c) изменился бы, а в уравнении (6.12) остался бы прежним из-за неизменности направления сил трения.

Реакция па кулачок со стороны стойки F_{10} находится из соотношения $F_{10} = -F_{12} = F_{21}$, а уравнение моментов для звена 1 относительно точки O дает тождество

$$\tilde{M}_1 - J_1 \tilde{\varepsilon}_1 - F_{12} h_{12} = 0, \quad (6.15)$$

если закон движения начального звена, принятый при определении сил инерции, соответствует заданным внешним силам.

Самоторможение. Учитывая силы трения при силовом расчете механизма, можно выявить такие соотношения между параметрами механизма, при которых вследствие трения движение звена в требуемом направлении не может начаться независимо от величины движущей силы.

В примере кулачкового механизма самоторможение наступает при условии, что знаменатель в формуле (6.14) обращается в нуль. Тогда при любом значении силы F_2 модуль движущей силы стремится к бесконечности. Условие отсутствия самоторможения рас-

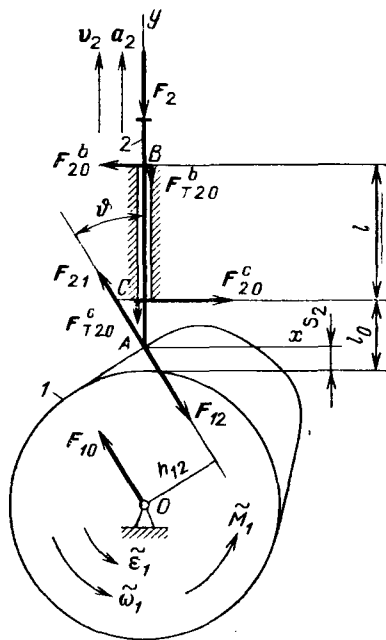


Рис. 53

смаатриваемого механизма выражается соотношением

$$\cos \vartheta > f \left[1 + \frac{2(l_0 - s_2)}{l} \right] \sin \vartheta$$

или

$$\operatorname{tg} \vartheta < \frac{l}{f[l + 2(l_0 - s_2)]}. \quad (6.16)$$

В большинстве механизмов самоторможение недопустимо, но в некоторых случаях оно используется для предотвращения самопроизвольного движения в обратном направлении (домкрат, некоторые типы подъемных механизмов и др.).

Угол давления. *Углом давления* на звено i со стороны звена j называется угол между направлением силы давления (нормальной реакции) на звено i со стороны звена j и скоростью точки приложения этой силы. Угол давления на звено i со стороны звена j обозначается через ϑ_{ij} . Часто, однако, рассматривается лишь один угол давления. Тогда индексы в обозначениях опускаются.

Например, при синтезе кулачкового механизма, показанного на рис. 53, имеет значение лишь угол давления ϑ_{21} , который обозначается через ϑ . С увеличением угла ϑ увеличиваются составляющие Γ_{20}^b и Γ_{20}^c и соответственно увеличиваются потери на трение. При больших значениях угла давления возможно даже самоторможение. Поэтому параметры механизма выбираются так, чтобы угол давления ϑ не превосходил допускаемого значения $\vartheta_{\text{доп}}$. Выбор этого значения зависит от типа механизма.

§ 27. Коэффициент полезного действия механизма

Установившееся движение. В механизмах с одной степенью свободы различают обычно три режима движения: *разбег*, *установившееся движение* и *выбег*. *Установившимся движением механизма* назовем такое движение, при котором его обобщенная скорость [(производная обобщенной координаты по времени) и кинетическая энергия являются периодическими функциями времени. Минимальный промежуток времени, в начале и конце которого повторяются значения кинетической энергии и обобщенной скорости механизма, называется *временем цикла установившегося движения*. За каждый цикл установившегося движения работа всех внешних сил, действующих на звенья механизма, равна нулю

$$\sum_{i=1}^n A_i = 0. \quad (6.17)$$

Режим движения механизма от начала движения до установившегося движения называется *разбегом*, а от установившегося движения до конца движения — *выбегом*. Режимы разбега и выбега, а также режимы перехода от установившегося движения с одной средней обобщенной скоростью к движению с другой средней ско-

ростью называются *переходными режимами*. Вследствие случайных изменений сил сопротивления в механизмах обычно не наблюдаются установившиеся движения как строго периодического движения. Однако и в этом случае можно выделить режим, при котором за некоторый промежуток времени (иногда переменный) выполняются соотношения (6.17). Такой режим называется *квазиустановившимся движением*.

Коэффициент полезного действия механизма. Под *коэффициентом полезного действия* (к. п. д.) механической системы понимают отношение полезной работы к затраченной за один и тот же промежуток времени. В применении к механизмам различают *цикловой* и *мгновенный к. п. д. механизма* в зависимости от промежутка времени, за который вычисляется к. п. д.

Цикловой к. п. д. механизма вычисляется за время цикла установившегося движения. Если под полезной работой понимать работу сил движущих A_d за вычетом работы A_t , затраченной на преодоление сил трения в кинематических парах, то цикловой к. п. д. при ведущем звене i и ведомом звене j

$$\eta = (A_d - A_t) / A_d, \quad (6.18)$$

или

$$\eta = 1 - \psi,$$

где $\psi = A_t / A_d$ — коэффициент потерь мощности.

Мгновенный к. п. д. механизма вычисляется за бесконечно малый промежуток времени, и потому вместо отношения работ берется отношение мощностей

$$\eta_{ij} = \frac{N_j}{N_i},$$

где N_j — мощность внешних сил сопротивления на ведомом звене, N_i — мощность внешних сил на ведущем звене. Указанные мощности должны определяться из условия статического равновесия механизма, т. е. без учета сил инерции.

Если ведущее звено вращается с угловой скоростью $\tilde{\omega}_i$, то $N_i = \tilde{M}_i \tilde{\omega}_i$, где $\tilde{M}_i$ — момент движущих сил, определяемый с учетом трения, а $N_j = \tilde{M}_j^0 \tilde{\omega}_i$, где $\tilde{M}_j^0$ — момент движущих сил, определяемый без учета трения. Тогда

$$\eta_{ij} = \frac{\tilde{M}_j^0}{\tilde{M}_i}. \quad (6.19)$$

Формула (6.19) удобна для вычислений, так как достаточно найти аналитическое выражение момента движущих сил $\tilde{M}_i$, а выражение момента $\tilde{M}_j^0$ получается из него приравниванием нулю коэффициентов, учитывающих трение.

При ведущем звене, движущемся прямолинейно, мгновенный к. п. д. механизма определяется через отношение сил по формуле, аналогичной формуле (6.19):

$$\eta_{ij} = \frac{\tilde{F}_i^0}{\tilde{F}_j^0}. \quad (6.20)$$

При постоянном мгновенном к. п. д. его значение совпадает с цикловым, за исключением особого случая равенства нулю работы внешних сил сопротивления, когда формулы (6.19) и (6.20) приводят к неопределенности типа «нуль, деленный на нуль». В этом случае как цикловой, так и мгновенный к. п. д. будем считать равными нулю.

Мгновенный к. п. д. равен также нулю при самоторможении. Например, для кулачкового механизма, показанного на рис. 53, момент движущих сил $\tilde{M}_1$, определяемый из условий статического равновесия, т. е. без учета сил инерции, в соответствии с (6.14) и (6.15) имеет значение

$$\tilde{M}_1 = \frac{F_2 h_{12}}{\cos \vartheta - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \sin \vartheta}.$$

Без учета сил трения, т. е. при $f=0$, момент движущих сил

$$\tilde{M}_1^0 = \frac{F_2 h_{12}}{\cos \vartheta}$$

и, следовательно, мгновенный к. п. д. механизма

$$\eta_{12} = 1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta. \quad (6.21)$$

Отсюда получаем, что самоторможение ($\eta_{12}=0$) наступает при условии

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{l}{f [l + 2(l_0 - s_2)]},$$

которое следует также из условия (6.16).

При дальнейшем увеличении угла давления или коэффициента трения мгновенный к. п. д. становится отрицательным, что соответствует перемене знака мощности внешних сил, действующих на звено i . В нашем примере при $\eta_{12} < 0$ для возможности равномерного или ускоренного движения надо, чтобы внешняя сила F_2 , действующая на звено 2, была направлена по скорости v_2 , т. е. оба звена (1 и 2) должны быть ведущими. Аналогично в самотормозящем механизме грузоподъемного устройства движение груза вниз возможно лишь при одновременном действии движущей силы, приложенной к винту, и движущей пары сил, приложенной к гайке винта.

Общий к. п. д. (цикловой или мгновенный) последовательно соединенных m механизмов равен произведению к. п. д. отдельных механизмов

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_m. \quad (6.22)$$

При вычислении к. п. д. по формуле (6.22) необходимо следить за тем, чтобы трение в каждой кинематической паре учитывалось бы только один раз.

ГЛАВА 7

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ С ГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

§ 28. Уравнения движения механизма с одной степенью свободы

Характеристики сил, действующих на звенья механизма. Как было показано в предыдущих главах, для кинематического и для силового анализа надо знать законы движения начальных звеньев, т. е. зависимости обобщенных координат от времени. Эти зависимости находятся из решения обратной, или второй задачи динамики: по заданным силам определить движение.

Силы, действующие на звенья механизма, могут быть функциями времени. Например, сила сопротивления, действующая на лопасть механизма перемещающего аппарата, изменяется во времени соответственно изменению свойств перемещаемой среды: движущая сила, действующая на входное звено гидравлической муфты, зависит от времени истечения жидкости через постоянное отверстие.

Чаще, однако, переменные силы, действующие на звенья механизма, связаны или с перемещениями, или со скоростями точек приложения этих сил. Например, сила пружины связана с ее деформацией, т. е. с перемещением точки приложения силы; сила взаимодействия проводника с током и магнитного поля в электродвигателе связана со скоростью движения проводника относительно поля и т. д.

Функциональная зависимость, связывающая величину силы и кинематические параметры (время, координаты и скорость точки приложения силы), называется *характеристикой силы*. Модуль силы в этой зависимости может быть и функцией, и аргументом. Однако для удобства расчетов будем всегда считать, что модуль силы есть функция указанных кинематических параметров. При решении задач динамического анализа механизмов характеристики сил считаются заданными.

Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (уравнение кинетической энергии). Для определения законов движения начальных звеньев по заданным силам, действующим на звенья механизма, используются уравнения, называемые *уравне-*

ниями движения механизма. Число этих уравнений в механизмах с голономными связями равно числу степеней свободы механизма.

Уравнения движения механизма могут быть представлены в различных формах. Для механизмов с одной степенью свободы одна из наиболее простых форм получается на основании теоремы об изменении кинетической энергии. В интегральной форме уравнение движения механизма имеет вид

$$\sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i0} = \sum_{k=1}^m A_k, \quad (7.1)$$

где T_{i0} , T_i — кинетическая энергия звена i соответственно в начале и в конце рассматриваемого промежутка времени, A_k — работа каждой из внешних и внутренних сил, действующих на звенья механизма, за этот промежуток времени, n — число подвижных звеньев, m — число сил.

Уравнение (7.1) можно получить также после интегрирования дифференциальных уравнений движения звеньев механизма. На этом основании (7.1) называют *уравнением движения механизма в форме интеграла энергии* *).

Приведение сил и масс в плоских механизмах. Уравнение (7.1) представляется довольно громоздким даже для плоских механизмов с небольшим числом звеньев вследствие необходимости производить суммирование по n звеньям и m силам. Для механизмов

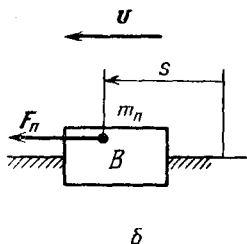
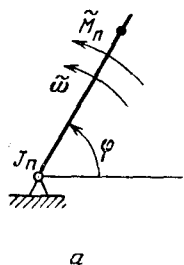


Рис. 54

с одной степенью свободы можно получить более простую форму записи этого уравнения, при которой все операции суммирования выполняются заранее. С этой целью заменим уравнение движения механизма (7.1) тождественным ему уравнением одного звена (или одной точки звена), которое движется так, что его

обобщенная координата совпадает в любой момент времени с обобщенной координатой механизма.

Пусть, например, начальное звено механизма совершает вращательное движение. Тогда уравнение движения механизма (7.1) можно заменить тождественным ему уравнением движения одного вращающегося звена, называемого *звеном приведения* (рис. 54, а).

*) Дифференциальные уравнения движения звеньев содержат вторые производные от координат по времени. После интегрирования получаются уравнения, содержащие только координаты и их первые производные. Эти уравнения называют *первыми интегралами*. Одно из них, получаемое из теоремы об изменении кинетической энергии, называют *интегралом энергии*.

Момент инерции этого звена относительно оси вращения обозначим через J_n и назовем *приведенным моментом инерции*. Примем также, что на звено приведения действует пара сил с моментом $\tilde{M}_n$, который называется *приведенным моментом сил*. Полученная расчетная схема называется *одномассной динамической моделью механизма*. Покажем, что всегда можно определить такие значения $\tilde{M}_n$ и J_n , при которых уравнение движения звена приведения окажется тождественным уравнению движения механизма и, следовательно, обобщенная координата звена приведения будет совпадать с обобщенной координатой механизма в любой момент времени.

Напишем уравнение движения звена приведения в форме интеграла энергии для некоторого конечного промежутка времени, за который обобщенная координата изменяется от φ_0 до φ , а приведенный момент инерции (в общем случае величина переменная) — от J_n до J_{n0} :

$$\frac{J_n \omega^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{M}_n d\varphi, \quad (7.2)$$

где ω — модуль угловой скорости звена приведения, которая по условию должна совпадать с угловой скоростью начального звена; ω_0 — значение ω при $\varphi = \varphi_0$.

Для того чтобы уравнения (7.1) и (7.2) были тождественными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \tilde{M}_n d\varphi = \sum_{k=1}^m A_k, \quad (7.3)$$

$$\frac{J_n \omega^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (7.4)$$

причем, если удовлетворяется уравнение (7.4), справедливое для любого момента времени, то удовлетворяется и уравнение

$$\frac{J_{n0} \omega_0^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{i0}.$$

Из (7.3) можно найти приведенный момент сил $\tilde{M}_n$, а из (7.4) — приведенный момент инерции J_n .

Приведенным моментом сил называется момент пары сил, условно приложенный к звену приведения и определяемый из равенства элементарной работы этой пары сил элементарной работе сил и пар сил, действующих на звенья механизма. Равенство элементарных работ одновременно означает равенство их мощностей:

$$\tilde{M}_n \omega = \sum_{k=1}^m N_k, \quad (7.5)$$

где N_k — мощность силы (пары сил), действующей на звено механизма.

Обозначим через v_k скорость точки приложения силы F_k , действующей на звено механизма, и через $\tilde{\omega}_k$ — угловую скорость звена механизма, на которое действует пара сил с моментом $\tilde{M}_k$. Тогда из (7.5) получаем формулу для вычисления приведенного момента сил:

$$\tilde{M}_n = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{\omega} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + \tilde{M}_k \frac{\tilde{\omega}_k}{\omega} \right]. \quad (7.6)$$

Указанная сумма может быть и положительной, и отрицательной, т. е. приведенный момент сил есть скалярная величина. Знак минус указывает, что момент $\tilde{M}_n$ направлен противоположно угловой скорости ω звена приведения. Приведенный момент сил, определяемый по формуле (7.6), можно рассматривать так же как скалярную величину, совпадающую с обобщенной силой по Лагранжу *).

Иногда отдельно приводят силы движущие и силы сопротивления, а также силы трения, силы тяжести и т. п. Формула (7.6) остается справедливой во всех случаях, надо только указывать, какие силы были выбраны за приводимые.

Из уравнения (7.4) следует, что *приведенный момент инерции* можно определить как момент инерции, которым должно обладать звено приведения относительно оси его вращения, чтобы кинетическая энергия этого звена равнялась кинетической энергии всех звеньев механизма.

При плоском движении кинетическая энергия звена

$$T_i = \frac{m_i v_{Si}^2}{2} + \frac{J_{Si} \omega_i^2}{2}, \quad (7.7)$$

где m_i — масса звена i , v_{Si} — модуль скорости центра масс звена i , ω_i — модуль угловой скорости звена i , J_{Si} — момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Подставляя это выражение в (7.4) и производя преобразования, получаем

$$J_n = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{\omega} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (7.8)$$

Если начальное звено совершает прямолинейное движение, то динамическая модель механизма представляет собой материальную

*) *Обобщенной силой по Лагранжу* называется скалярная величина, равная отношению суммы возможных работ сил, приложенных к механической системе при изменении только данной обобщенной координаты, к вариации этой координаты.

точку B с массой m_a (*приведенной массой*), которая движется под действием силы F_a , называемой *приведенной силой*, так, что обобщенная координата s этой точки совпадает с обобщенной координатой механизма в любой момент времени (рис. 54, б). Формулы для приведенной силы и приведенной массы имеют вид, аналогичный формулам (7.6) и (7.8):

$$\tilde{F}_a = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{v} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + \tilde{M}_k \frac{\tilde{\omega}_k}{v} \right]; \quad (7.9)$$

$$m_a = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v} \right)^2 + J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v} \right)^2 \right], \quad (7.10)$$

где v — модуль скорости прямолинейно движущегося начального звена.

В общем случае для построения динамической модели механизма за точку приведения, т. е. точку, в которой сосредотачивается приведенная масса, можно выбрать любую точку механизма. Поэтому *приведенной массой механизма* называют массу, которую надо сосредоточить в данной точке механизма (точке приведения), чтобы кинетическая энергия этой материальной точки равнялась кинетической энергии всех звеньев механизма. Соответственно *приведенной силой* называют силу, условно приложенную к точке приведения и определяемую из равенства элементарной работы этой силы элементарной работе сил и пар сил, действующих на звенья механизма.

Приведенная сила и приведенная масса (или приведенный момент сил и приведенный момент инерции) не зависят от скорости точки приведения (или угловой скорости звена приведения), так как в формулы для их определения входят только отношения скоростей. Например, если модуль скорости точки приведения v изменяется в k раз, то во столько же раз изменяются v_k, v_{S_i} и ω_i , а их отношения к v остаются неизменными. Отсюда следует, что определение приведенных сил и масс можно выполнить, не зная еще скорости точки приведения, т. е. до решения уравнения движения. В этом заключается основное достоинство приведения сил и масс. К этому заключению можно прийти также, обратив внимание на то, что в формулы (7.6), (7.8) — (7.10), кроме заданных постоянных величин, входят только аналоги скоростей, которые не зависят от времени.

Приведенная масса может быть переменной величиной, если отношения скоростей, входящие в формулу (7.10), являются переменными величинами, зависящими от положения звеньев. Однако точку приведения с переменной приведенной массой нельзя рассматривать как модель тела переменной массы. Изменение приведенной массы отражает лишь изменение кинетической энергии звеньев механизма с постоянными массами,

Итак, после приведения сил и масс уравнение движения механизма в форме интеграла энергии имеет вид

$$\frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} - \frac{J_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = \int_{\psi_0}^{\psi} \tilde{M}_{\Pi} d\varphi, \quad (7.11)$$

если за звено приведения выбрано вращающееся начальное звено, имеющее обобщенную координату φ . Если за звено приведения выбрано начальное звено, совершающее прямолинейное движение с обобщенной координатой s , то уравнение движения механизма имеет вид

$$\frac{m_{\Pi} v^2}{2} - \frac{m_{\Pi 0} v_0^2}{2} = \int_{s_0}^s \tilde{F}_{\Pi} ds. \quad (7.12)$$

Определение приведенных сил и моментов сил по теореме Жуковского. Мощность приведенной силы, представленной вектором $\mathbf{F}_{\Pi}$, направленным по скорости точки приведения, равна сумме мощностей сил и пар сил, приложенных к звеньям механизма. На основании теоремы Жуковского это условие равносильно равенству момента приведенной силы и суммы моментов приводимых сил относительно полюса повернутого плана скоростей:

$$M_p(\mathbf{F}_{\Pi}) = \sum_{k=1}^m M_p(\mathbf{F}_k). \quad (7.13)$$

Пусть, например, для данного положения звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 55, а) требуется определить приведен-

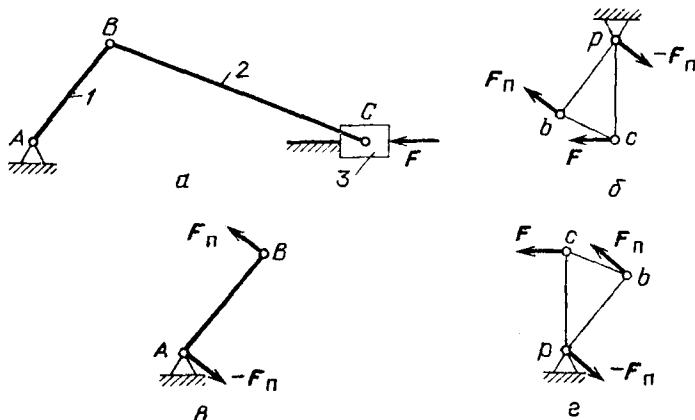


Рис. 55

ный к звену 1 момент сил $\tilde{M}_{\Pi}$ от силы $\mathbf{F}$, действующей на ползун 3. Строим повернутый на 90° план скоростей (рис. 55, б) и

переносим на него силу F в точку c . Приведенный момент сил $\bar{M}_n$ представляем в виде пары сил F_n и $-F_n$, приложенных в точках A и B и направленных перпендикулярно отрезку AB (рис. 55, в), причем знак направления силы F_n должен быть выбран так, чтобы на повернутом плане скоростей моменты силы F_n и силы F относительно полюса p были одинаковыми (условие равенства мощностей этих сил). Модуль силы F_n находится из условия (7.13)

$$F_n(pb) = F(pc)$$

и, следовательно, модуль приведенного момента сил

$$M_n = F \frac{(pc)}{(pb)} l_{AB}. \quad (7.14)$$

Знак приведенного момента сил $\bar{M}_n$ определяется по знаку момента силы F_n относительно точки A на плане механизма.

Повернутый на 90° план скоростей может быть построен в двух положениях (рис. 55, б и г). В обоих случаях сила F_n на плане механизма имеет одно и то же направление, что доказывает независимость определения силы F_n и приведенного момента сил $\bar{M}_n$ от направления угловой скорости звена I . Заметим также, что знаки моментов сил на повернутом плане скоростей и на плане механизма могут не совпадать.

Кинетическая энергия пространственного механизма. Приведение сил и масс целесообразно выполнять при динамическом анализе не только плоских, но и пространственных механизмов. Для определения приведенной массы надо знать выражение кинетической энергии звена, совершающего пространственное движение.

Свяжем со звеном i центральную систему координат $x_i y_i z_i$, т. е. систему с началом координат в центре масс S_i , и обозначим через J_{x_i} , J_{y_i} , J_{z_i} моменты инерции звена относительно координатных осей, а через $J_{x_i y_i}$, $J_{y_i z_i}$, $J_{z_i x_i}$ — центробежные моменты инерции. Кроме того, считаем известными скорость центра масс v_{S_i} и проекции мгновенной угловой скорости при сферическом движении звена относительно центра масс на указанные координатные оси: ω_{x_i} , ω_{y_i} , ω_{z_i} .

Тогда кинетическая энергия звена i будет равна сумме кинетической энергии в поступательном движении по траектории центра масс со скоростью v_{S_i} и кинетической энергии при сферическом движении вокруг центра масс:

$$T_i = \frac{1}{2} \left(m_i v_{S_i}^2 + J_{x_i} \omega_{x_i}^2 + J_{y_i} \omega_{y_i}^2 + J_{z_i} \omega_{z_i}^2 \right) - \\ - J_{x_i y_i} \omega_{x_i} \omega_{y_i} - J_{y_i z_i} \omega_{y_i} \omega_{z_i} - J_{z_i x_i} \omega_{z_i} \omega_{x_i}. \quad (7.15)$$

Координатные оси $x_i y_i z_i$ всегда могут быть выбраны так, что все центробежные моменты инерции обратятся в нуль. Координат-

ные оси, удовлетворяющие этому условию, называются *главными осями инерции*. В дальнейшем всегда считаем, что оси координат, связанные со звеньями, являются главными центральными осями инерции.

Приведение сил и масс в пространственных механизмах. Из условия равенства кинетической энергии звена приведения и кинетической энергии всех звеньев получаем с учетом формулы (7.15) приведенный момент инерции

$$J_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{\omega} \right)^2 + J_{xi} \left(\frac{\omega_{xi}}{\omega} \right)^2 + J_{yi} \left(\frac{\omega_{yi}}{\omega} \right)^2 + J_{zi} \left(\frac{\omega_{zi}}{\omega} \right)^2 \right], \quad (7.16)$$

где ω — модуль угловой скорости вращения начального звена (звена приведения).

Аналогично находим приведенную массу

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_{Si}}{v} \right)^2 + J_{xi} \left(\frac{\omega_{xi}}{v} \right)^2 + J_{yi} \left(\frac{\omega_{yi}}{v} \right)^2 + J_{zi} \left(\frac{\omega_{zi}}{v} \right)^2 \right], \quad (7.17)$$

где v — модуль скорости прямолинейно движущегося начального звена.

Приведенный момент сил находится из равенства мощности приведенной пары сил сумме мощностей сил и пар сил, приложенных к звеньям механизма:

$$\widetilde{M}_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{\omega} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + M_k \frac{\omega_k}{\omega} \cos(\widehat{M_k, \omega_k}) \right], \quad (7.18)$$

где v_k — скорость точки приложения силы F_k , ω_k — угловая скорость звена, на которое действует пара сил с моментом M_k .

Аналогично находится приведенная сила

$$F_{\Pi} = \sum_{k=1}^m \left[F_k \frac{v_k}{v} \cos(\widehat{F_k, v_k}) + M_k \frac{\omega_k}{v} \cos(\widehat{M_k, \omega_k}) \right]. \quad (7.19)$$

Дифференциальное уравнение движения механизма. Кроме уравнения движения механизма в форме интеграла энергии, в некоторых случаях удобно применять уравнение движения механизма, представленное в форме дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение можно получить из уравнения кинетической энергии в дифференциальной форме

$$dT = d\Delta.$$

При вращающемся начальном звене после приведения сил и масс получаем

$$d \left(\frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} \right) = \widetilde{M}_{\Pi} d\varphi,$$

или

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{\Pi} \omega^2}{2} \right) = \widetilde{M}_{\Pi}.$$

Отсюда

$$J_{\Pi} \ddot{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = \widetilde{M}_{\Pi}, \quad (7.20)$$

где $\ddot{\varepsilon}$ — угловое ускорение пачального звена.

Уравнение (7.20) можно получить также из уравнения Лагранжа второго рода, которое после приведения сил и масс имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \widetilde{M}_{\Pi},$$

где $T = J_{\Pi} \omega^2 / 2$.

После дифференцирования получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} &= J_{\Pi} \dot{\omega}, \quad \frac{d}{dt} (J_{\Pi} \dot{\omega}) = J_{\Pi} \ddot{\omega} + \omega^2 \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Подставляя значения производных в уравнение Лагранжа, вновь получаем уравнение (7.20).

Аналогичный вид имеет дифференциальное уравнение движения механизма при прямолинейно движущемся начальном звене

$$m_{\Pi} \ddot{s} + \frac{\dot{s}^2}{2} \frac{dm_{\Pi}}{d\varphi} = \widetilde{F}_{\Pi}, \quad (7.21)$$

где s — перемещение прямолинейно движущегося пачального звена *).

Обычно приведенный момент сил (обобщенная сила) зависит только от времени, пути и от обобщенной скорости (производной от обобщенной координаты по времени), и тогда дифференциальное уравнение движения механизма имеет второй порядок относительно обобщенной координаты. Однако в некоторых механизмах, например, в механизме с электроприводом при учете его динамической характеристики приведенный момент сил зависит от третьей производной обобщенной координаты по времени **), и тогда дифференциальное уравнение движения механизма имеет третий порядок.

*) Точка над буквой означает первую производную по времени, две точки — вторую производную и т. д.

**) См. § 62.

§ 29. Уравнения движения механизма с несколькими степенями свободы

Для механизмов с несколькими степенями свободы при голономных связях уравнения движения механизмов составляют обычно в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (7.22)$$

где T — кинетическая энергия системы, s — число обобщенных координат, которое в голономных системах совпадает с числом степеней свободы s , q_i — обобщенные координаты, Q_i — обобщенные силы.

Обобщенные силы Q_i определяются из условия равенства элементарных работ этих сил на возможных перемещениях, совпадающих с вариациями *) обобщенных координат, работе внешних сил, приложенных к звеньям механизма, на возможных перемещениях их точек приложения:

$$\sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^m (F_{jx} \delta x_j + F_{jy} \delta y_j + F_{jz} \delta z_j), \quad (7.23)$$

где F_{jx} , F_{jy} , F_{jz} — проекции внешних сил F_j на координатные оси x , y , z ; δx_j , δy_j , δz_j — проекции возможных перемещений точек приложения этих сил на оси x , y , z , равные вариациям координат этих точек.

Чаще, однако, определяют поочередно элементарную работу всех внешних сил при изменении только одной обобщенной координаты q_i и фиксированных значениях других обобщенных координат. Тогда:

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta y_j = \frac{\partial y_j}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \delta z_j = \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \delta q_i,$$

и условие (7.23) принимает вид

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right). \quad (7.24)$$

Отсюда следует обычное определение обобщенной силы по Лагранжу как скалярной величины, равной отношению суммы возможных работ сил, приложенных к механической системе, при изменении только данной обобщенной координаты, к вариации этой координаты. Для обобщенной координаты, имеющей размерность длины, соответствующая ей обобщенная сила имеет размерность

*) Для функции, зависящей от времени t и аргументов x_i , вариацией называется изменение функции при бесконечно малых изменениях аргументов x_i и фиксированном значении времени t .

силы, а для обобщенной координаты, выраженной в радианах, — размерность момента сил. Обобщенную силу, имеющую размерность момента сил, будем называть также обобщенным моментом сил. В механизмах с одной степенью свободы обобщенная сила совпадает с приведенной силой, а обобщенный момент сил — с приведенным моментом сил.

Иногда силы, зависящие только от обобщенных координат (силы упругости, силы тяжести и др.), не вводят в выражение для обобщенных сил, а учитывают их влияние через изменение потенциальной энергии системы Π . Тогда уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (7.25)$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (7.26)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Силы трения можно учесть при составлении уравнений Лагранжа только в тех случаях, когда они не зависят от реакций в кинематических парах и могут быть введены в выражения для обобщенных сил. При исследовании колебаний в механизмах часто считают, что силы трения пропорциональны обобщенным скоростям $\dot{q}_i$. Тогда их можно ввести в левую часть уравнений Лагранжа через диссипативную функцию Рэлея

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (7.27)$$

где b_{ij} — постоянные коэффициенты.

Уравнения Лагранжа с учетом диссипативной функции и потенциальной энергии имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s. \quad (7.28)$$

Обобщенную координату, которая не входит явно в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, называют *циклической*. Соответствующие им уравнения Лагранжа упрощаются и могут быть непосредственно проинтегрированы относительно циклических координат.

Составление уравнений движения однозубчатого дифференциала. Уравнения движения механизма с двумя степенями свободы, показанного на рис. 41, можно получить из уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \widetilde{M}_{\pi 1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_H} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = \widetilde{M}_{\pi H},$$

где φ_1, φ_H — углы поворота звеньев I и H , принятые за обобщенные координаты; $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_H$ — угловые скорости звеньев I и H ; $M_{п1}, M_{пH}$ — обобщенные моменты сил.

Кинетическая энергия механизма при уравновешенных звеньях имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + K J_2 \omega_2^2 + K m_2 R_H^2 \omega_H^2 + J_H \omega_H^2 + J_3 \omega_3^2),$$

где J_1, J_2, J_3, J_H — моменты инерции звеньев $1, 2, 3, H$ относительно осей, проходящих через центры масс звеньев; K — число сателлитов, m_2 — масса одного сателлита; R_H — радиус траектории центра сателлита.

Угловые скорости $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ могут быть выражены через угловые скорости $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_H$ (обобщенные скорости) по уравнению (4.18): $\tilde{\omega}_2 = u_{21}^{(H)} \tilde{\omega}_1 + u_{2H}^{(1)} \tilde{\omega}_H$, $\tilde{\omega}_3 = u_{31}^{(H)} \tilde{\omega}_1 + u_{3H}^{(1)} \tilde{\omega}_H$. Подставляя значения $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ в выражение кинетической энергии и группируя члены, получаем

$$2T = J_{11} \omega_1^2 + 2J_{1H} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_H + J_{HH} \omega_H^2,$$

где

$$J_{11} = J_1 + K J_2 [u_{21}^{(H)}]^2 + J_3 [u_{31}^{(H)}]^2,$$

$$J_{1H} = K J_2 u_{21}^{(H)} u_{2H}^{(1)} + J_3 u_{31}^{(H)} u_{3H}^{(1)},$$

$$J_{HH} = K J_2 [u_{2H}^{(1)}]^2 + K m_2 R_H^2 + J_H + J_3 [u_{3H}^{(1)}]^2.$$

Коэффициенты J_{11}, J_{1H}, J_{HH} называют *инерционными коэффициентами*. В рассматриваемом примере они не зависят от углов φ_1 и φ_H . Отсюда $\partial T / \partial \varphi_1 = 0$ и $\partial T / \partial \varphi_H = 0$.

После частного дифференцирования кинетической энергии по $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_H$ и последующего дифференцирования по времени получаем уравнения движения механизма:

$$J_{11} \tilde{\epsilon}_1 + J_{1H} \tilde{\epsilon}_H = M_{п1}, \quad J_{1H} \tilde{\epsilon}_1 + J_{HH} \tilde{\epsilon}_H = M_{пH}.$$

Обобщенный момент сил $M_{п1}$ находится из условия равенства его элементарной работы на возможном перемещении работе всех сил, приложенных к звеньям механизма, при остановленном звене H . Если внешние силы действуют только на звенья $1, 3$ и H в виде пар сил с моментами $\tilde{M}_1, \tilde{M}_3$ и $\tilde{M}_H$, то это условие, выраженное через мощности сил, имеет вид

$$\tilde{M}_{п1} \tilde{\omega}_1 = \tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1 + \tilde{M}_3 \tilde{\omega}_3^{(H)}, \text{ или } \tilde{M}_{п1} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 u_{31}^{(H)}.$$

Аналогично при остановленном звене 1 получаем

$$\tilde{M}_{пH} \tilde{\omega}_H = \tilde{M}_H \tilde{\omega}_H + \tilde{M}_3 \tilde{\omega}_3^{(1)}, \text{ или } \tilde{M}_{пH} = \tilde{M}_H + \tilde{M}_3 u_{3H}^{(1)}.$$

Система уравнений движения зубчатого дифференциала может быть также представлена в виде, разрешенном относительно

угловых ускорений $\tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\epsilon}_2$:

$$\tilde{\epsilon}_1 = \frac{\tilde{M}_{11}J_{HH} - \tilde{M}_{1H}J_{1H}}{J_{11}J_{HH} - J_{1H}^2}, \quad \tilde{\epsilon}_H = \frac{\tilde{M}_{HH}J_{11} - \tilde{M}_{H1}J_{1H}}{J_{11}J_{HH} - J_{1H}^2}.$$

Составление уравнений движения шарнирного механизма с двумя степенями свободы. В зубчатом дифференциале инерционные коэффициенты при указанных допущениях были постоянными. Теперь рассмотрим составление уравнений движения механизма с переменными инерционными коэффициентами, зависящими от положений звеньев, на примере плоского шарнирного семизвездника с двумя степенями свободы (рис. 56).

Принимая за обобщенные координаты углы поворота φ_1 и φ_2 звеньев 1 и 2, получаем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \tilde{M}_{11}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \tilde{M}_{22},$$

где $\tilde{M}_{11}$ и $\tilde{M}_{22}$ — приведенные (обобщенные) моменты сил.

Кинетическую энергию механизма T определяем в предположении, что звенья 1, 2 и 3 уравновешены, а массами и моментами инерции звеньев 4, 5 и 6 можно пренебречь:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2),$$

где J_1 , J_2 , J_3 — моменты инерции звеньев 1, 2 и 3 относительно осей вращения; ω_1 , ω_2 , ω_3 — угловые скорости звеньев 1, 2 и 3.

Угол поворота φ_3 звена 3 есть функция углов поворота φ_1 и φ_2 звеньев 1 и 2:

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_2).$$

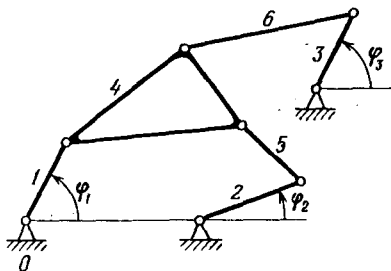


Рис. 56

Дифференцирование этого соотношения по времени дает угловую скорость ω_3 звена 3:

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2,$$

где частные производные $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_1$ и $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_2$ представляют собой передаточные отношения от звена 3 к звеньям 1 и 2.

Введем обозначения:

$$u_{31}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1}, \quad u_{32}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_2},$$

причем верхний индекс в скобках указывает, что для частной производной $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_1$ надо считать неизменным угол φ_2 , а для частной производной $\partial \varphi_3 / \partial \varphi_2$ — угол φ_1 .

Следовательно, как и в зубчатых дифференциалах, угловые скорости $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ связаны соотношением

$$\tilde{\omega}_3 = u_{31}^{(2)} \tilde{\omega}_1 + u_{32}^{(1)} \tilde{\omega}_2,$$

причем передаточное отношение $u_{31}^{(2)}$ определяется при остановленном звене 2, а $u_{32}^{(1)}$ — при остановленном звене 1, т. е. задача об определении передаточных отношений $u_{31}^{(2)}$ и $u_{32}^{(1)}$ сводится к известной задаче кинематического анализа плоских шарнирных механизмов с одной степенью свободы. Заметим только, что в отличие от зубчатых дифференциалов передаточные отношения $u_{31}^{(2)}$ и $u_{32}^{(1)}$ будут переменными величинами, зависящими от углов φ_1 и φ_2 .

После подстановки угловой скорости $\tilde{\omega}_3$ в выражение кинетической энергии получаем

$$2T = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 [u_{31}^{(2)}]^2 \omega_1^2 + J_3 [u_{32}^{(1)}]^2 \omega_2^2 + 2J_3 u_{31}^{(2)} u_{32}^{(1)} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2,$$

или

$$2T = J_{11} \omega_1^2 + J_{22} \omega_2^2 + 2J_{12} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2,$$

где

$$J_{11} = J_1 + J_3 [u_{31}^{(2)}]^2, \quad J_{22} = J_2 + J_3 [u_{32}^{(1)}]^2, \quad J_{12} = J_3 u_{31}^{(2)} u_{32}^{(1)}.$$

Дифференцирование выражения кинетической энергии по углам поворота φ_1 и φ_2 дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \omega_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} \omega_2^2 + \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2. \end{aligned}$$

Инерционные коэффициенты зависят от передаточных отношений $u_{31}^{(2)}$ и $u_{32}^{(1)}$, которые, в свою очередь, зависят от углов φ_1 и φ_2 . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} &= 2J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} = 2J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} &= J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_1} + J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} &= 2J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2}, \quad \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} = 2J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2}, \\ \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} &= J_3 u_{31}^{(2)} \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2} + J_3 u_{32}^{(1)} \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Дифференцирование выражения кинетической энергии по угловым скоростям ω_1 и $\tilde{\omega}_2$ с последующим дифференцированием по времени дает

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_1} = J_{11} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \frac{dJ_{11}}{dt} \tilde{\omega}_1 + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \frac{dJ_{12}}{dt} \tilde{\omega}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_2} = J_{22} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \frac{dJ_{22}}{dt} \tilde{\omega}_2 + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \frac{dJ_{12}}{dt} \tilde{\omega}_1.$$

Производные от инерционных коэффициентов по времени находим с учетом того, что они зависят от углов φ_1 и φ_2 :

$$\frac{dJ_{11}}{dt} = \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2,$$

$$\frac{dJ_{12}}{dt} = \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2,$$

$$\frac{dJ_{22}}{dt} = \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_2.$$

Подставляя значения производных в уравнения Лагранжа, получаем

$$J_{11} \frac{d\tilde{\omega}_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + \\ + J_{12} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \left(\frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \right) \omega_2^2 = \tilde{M}_{11},$$

$$J_{22} \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_2} \omega_2^2 + \frac{\partial J_{22}}{\partial \varphi_1} \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + \\ + J_{12} \frac{d\omega_1}{dt} + \left(\frac{\partial J_{12}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_2} \right) \omega_1^2 = \tilde{M}_{22}.$$

Производные от инерционных коэффициентов по углам φ_1 и φ_2 определяются по формулам (7.29). Частные производные, входящие в эти формулы, находятся дифференцированием функции положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2}, \quad \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}, \quad \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_2^2}.$$

Иногда предпочтительней дифференцировать функцию положения, представленную в неявном виде:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 u_{31}^{(2)} &= -\frac{\partial\Phi/\partial\varphi_1}{\partial\Phi/\partial\varphi_3}, \quad u_{32}^{(1)} = \frac{\partial\Phi/\partial\varphi_2}{\partial\Phi/\partial\varphi_3}, \\
 \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial\varphi_1} &= -\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_3} u_{31}^{(2)} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_3^2} [u_{31}^{(2)}]^2}{\partial\Phi/\partial\varphi_3}, \\
 \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial\varphi_1} &= \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial\varphi_2} = \\
 &= -\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2\partial\varphi_3} u_{31}^{(2)} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1\partial\varphi_3} u_{32}^{(1)} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_3^2} u_{31}^{(2)} u_{32}^{(1)} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_3} \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}}{\partial\Phi/\partial\varphi_3}, \\
 \frac{\partial u_{32}^{(1)}}{\partial\varphi_2} &= -\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2\partial\varphi_3} u_{32}^{(1)} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_3^2} [u_{32}^{(1)}]^2}{\partial\Phi/\partial\varphi_3}.
 \end{aligned}$$

Обобщенный (приведенный) момент сил $\tilde{M}_{n1}$ находится из условия равенства его элементарной работы на возможном перемещении работе всех сил, приложенных к звеньям механизма, при остановленном звене 2. Если внешние силы действуют только на звенья 1, 2 и 3 в виде пар сил с моментами $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ и $\tilde{M}_3$, то это условие, выраженное через мощности сил, имеет вид

$$\tilde{M}_{n1} \tilde{\omega}_1 = \tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1 + \tilde{M}_3 \tilde{\omega}_3^{(2)}, \text{ или } \tilde{M}_{n1} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 u_{31}^{(2)}.$$

Аналогично при остановленном звене 1 получаем

$$\tilde{M}_{n2} = \tilde{M}_2 + \tilde{M}_3 u_{32}^{(1)}.$$

§ 30. Уравнения движения механизма с учетом трения

Кинестатический метод составления уравнений движения механизмов с учетом трения. Общий метод составления уравнений движения механизмов с учетом трения, применимый к механизмам с любым числом степеней свободы, состоит в том, что уравнения движения механизма получаются из уравнений кинестатического равновесия начальных звеньев, если при силовом анализе с учетом трения ускорения точек звеньев считать неизвестными.

Составление этих уравнений поясним на примере кулачкового механизма (см. рис. 53), в котором условие равновесия сил, действующих на кулачок, дает уравнение (6.15). Чтобы получить уравнение движения механизма с учетом трения в поступательной паре, достаточно подставить в (6.15) значение реакции $F_{21} = -F_{12}$ из (6.14) и, кроме того, выразить ускорение $\ddot{a}_2$ через угловые скорости $\tilde{\omega}_1$ и ускорение $\tilde{\varepsilon}_1$ звена 1.

По правилам дифференцирования сложной функции (функции от функции) имеем

$$\tilde{v}_2 = \frac{ds_2}{dt} \equiv \frac{ds_2}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt},$$

где φ_1 — угол поворота кулачка (обобщенная координата механизма).

Отсюда

$$\tilde{v}_2 = s'_2 \tilde{\omega}_1, \quad (7.30)$$

где $s'_2 = ds_2/d\varphi_1$ — отношение $\tilde{v}_2/\tilde{\omega}_1$, или аналог скорости звена 2*).

Дифференцирование по времени соотношения (7.30) дает

$$\tilde{a}_2 = \frac{ds'_2}{dt} \tilde{\omega}_1 + s'_2 \tilde{\epsilon}_1, \text{ или } \tilde{a}_2 = s''_2 \omega_1^2 + s'_2 \tilde{\epsilon}_1. \quad (7.31)$$

Для определения аналога скорости s'_2 используем построение треугольника скоростей (рис. 57) по уравнению

$$\mathbf{v}_{A_2} = \mathbf{v}_{A_1} + \mathbf{v}_{A_2 A_1},$$

где $\mathbf{v}_{A_2} = \mathbf{v}_2$ — скорость точки A на звене 2, $\mathbf{v}_{A_1} \equiv \mathbf{v}_1 = l_{OA} \omega_1$ — скорость точки A на звене 1, $\mathbf{v}_{A_2 A_1}$ — относительная скорость, направленная по касательной к профилю кулачка.

Отсюда

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \vartheta, \text{ или } s'_2 = l_{OA} \operatorname{tg} \vartheta.$$

Плечо силы $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ находится из треугольника OBA :

$$h_{12} = l_{OA} \sin \vartheta, \text{ или } h_{12} = s'_2 \cos \vartheta. \quad (7.32)$$

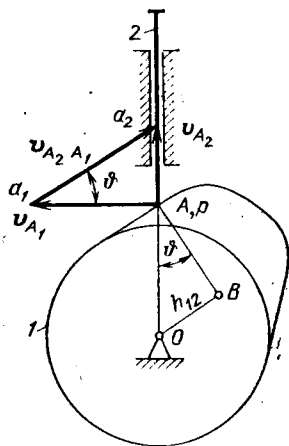


Рис. 57

Уравнение движения механизма получаем из уравнения (6.15) после подстановок $F_{12} = F_{21}$, $\tilde{a}_2$ и h_{12} по формулам (6.14), (7.31) и (7.32):

$$M_1 - J_1 \tilde{\epsilon}_1 - s'_2 \cos \vartheta \frac{F_2 + m_2 (s''_2 \omega_1^2 + s'_2 \tilde{\epsilon}_1)}{\cos \vartheta - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \sin \vartheta} = 0.$$

Это уравнение можно представить в форме, аналогичной форме

* Первая производная по обобщенной координате обозначается штрихом, вторая производная — двумя штрихами и т. д.

уравнения Лагранжа (7.20):

$$\left[J_1 + m_2 \frac{(s_2')^2}{1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta} \right] \tilde{\varepsilon}_1 + \frac{\omega_1^2}{2} \frac{2m_2 s_2' s_2''}{1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta} = \\ = M_1 - F_2 \frac{s_2'}{1 - f \left(1 + 2 \frac{l_0 - s_2}{l} \right) \operatorname{tg} \vartheta}. \quad (7.33)$$

Уравнение (7.33) может быть также получено приведением сил и масс с учетом к. п. д. механизма.

Приведение сил и масс с учетом к. п. д. Для кулачкового механизма, показанного на рис. 53, мгновенный к. п. д. при ведущем кулачке определяется по формуле (6.21). Следовательно, коэффициент при $\tilde{\varepsilon}_1$ в уравнении движения механизма (7.33) можно представить формулой

$$J_{\pi} = J_1 + m_2 \frac{(s_2')^2}{\eta_{12}}, \quad (7.34)$$

где J_{π} — приведенный момент инерции с учетом трения.

Если к. п. д. η_{12} считать постоянным, т. е. пренебречь отклонением угла давления ϑ от его среднего значения, то дифференцирование выражения (7.34) по углу поворота кулачка дает

$$\frac{dJ_{\pi}}{d\varphi_1} = \frac{2m_2 s_2' s_2''}{\eta_{12}}. \quad (7.35)$$

Правую часть уравнения (7.33) можно представить как приведенный момент сил с учетом трения

$$\tilde{M}_{\pi} = \tilde{M}_1 - F_2 \frac{s_2'}{\eta_{12}}. \quad (7.36)$$

Подставляя в левую часть уравнения (7.33) выражения (7.35) и учитывая (7.36), получаем уравнение движения механизма в форме уравнения движения Лагранжа

$$J_{\pi} \tilde{\varepsilon}_1 + \frac{\omega_1^2}{2} \frac{dJ_{\pi}}{d\varphi_1} = \tilde{M}_{\pi},$$

в котором трение учитывается через к. п. д. при определении приведенного момента инерции (7.34) и приведенного момента сил (7.36). Следует обратить внимание на то, что к. п. д. учитывается и в приведенном моменте сил, и в приведенном моменте инерции, так как силы трения в кинематических парах зависят не только от внешних сил, но и от сил инерции. Если приводимая внешняя сила (или сила инерции) является движущей силой, то соответствующий

член в выражениях приведенных сил и масс умножается на к. п. д., если силой сопротивления, то — делится. Это утверждение справедливо для тех механизмов, в которых силы трения зависят от реакций в кинематических парах. Если же трение приближается к жидкостному и сила трения в кинематической паре зависит от относительной скорости ее элементов, то при составлении уравнений движения механизма трение учитывается посредством приведенной силы трения или же введением диссипативной функции Рэлея.

ГЛАВА 8

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

§ 31. Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями

Предположим, что в механизме с s обобщенными координатами имеется l идеальных голономных связей и m неголономных связей, заданных линейными соотношениями между обобщенными скоростями (производными обобщенных координат по времени):

$$\sum_{i=1}^s A_{\sigma i} \dot{q}_i + A_{\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m. \quad (8.1)$$

Коэффициенты $A_{\sigma i}$ могут зависеть от всех q_i и от времени t .

Как было показано при рассмотрении структуры механизмов, число степеней свободы механизма с неголономными связями W меньше числа обобщенных координат

$$W = s - m. \quad (8.2)$$

Число уравнений движения механизма по-прежнему считаем равным числу степеней свободы механизма. Те обобщенные координаты, которые определяются из уравнений движения механизма, условно назовем *независимыми*. Остальные координаты, которые назовем *зависимыми*, находятся из уравнений неголономных связей.

Для составления уравнений движения механизма с неголономными связями нельзя использовать обычные уравнения Лагранжа второго рода, а следует применять их обобщение, известное под названием *уравнений Лагранжа с неопределенными множителями*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 A_{1i} + \dots + \lambda_m A_{mi}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (8.3)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — неопределенные множители, $A_{1i}, \dots, A_{mi}$ — коэффициенты неголономных связей (8.1).

Иногда уравнения (8.3) называют *уравнениями Рауса — Феррера*, в работах которых было дано указанное обобщение уравнений Лагранжа.

Общее число уравнений (8.1) и (8.3) равно $s + m$, т. е. больше числа степеней свободы на величину $2m$. Однако число неизвестных, входящих в эти уравнения, также равно $s + m$ (s обобщенных координат и m неопределенных множителей), и полученная система уравнений при небольшом числе уравнений связей m решается без особых затруднений, так как дополнительные неизвестные (неопределенные множители) входят в уравнения линейно.

Пример. В механизме фрикционной бесступенчатой передачи (см. рис. 7, б) между углами поворота звеньев φ_1 , φ_2 и координатой ρ , определяющей положение ролика, имеется дифференциальная связь, выражающая условие чистого качения звеньев 1 и 2

$$r\dot{\varphi}_1 = \rho\dot{\varphi}_2. \quad (8.4)$$

Эта связь — дифференциальная, но при $\rho = \text{const}$, т. е. при постоянном передаточном отношении

$$u_{21} \equiv \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{r}{\rho},$$

она может быть проинтегрирована.

При начальных условиях $t = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ после интегрирования получаем

$$r\varphi_1 = \rho\varphi_2,$$

т. е. геометрическую связь между координатами φ_1 и φ_2 . Отсюда следует, что при постоянном передаточном отношении u_{21} положения звеньев механизма определяются одной обобщенной координатой, например φ_1 , и число степеней свободы также равно 1.

Теперь рассмотрим случай, когда величина ρ есть заданная функция времени, что имеет место, например, при регулировании скорости ω_2 . Тогда передаточное отношение u_{21} также есть функция времени, и уравнение связи (8.4) принимает вид

$$u_{21}(t)\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0, \quad (8.5)$$

или в дифференциальной форме

$$u_{21}(t)d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.6) не может быть проинтегрировано и потому дает неголономную связь между φ_1 и φ_2 .

Положения звеньев механизма при переменной величине u_{21} определяются тремя координатами: ρ , φ_1 и φ_2 .

Однако число обобщенных координат равно двум: φ_1 и φ_2 , так как в нашем случае ρ есть заданная функция времени.

Уравнение связи (8.5) не уменьшает числа обобщенных координат, так как оно накладывает ограничения только на скорости $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ (или на бесконечно малые перемещения $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$), но не на положения звеньев (координаты φ_1 и φ_2).

Число степеней свободы механизма по формуле (8.2) равно разности между числом обобщенных координат и числом неголономных связей

$$W = 2 - 1.$$

Следовательно, должно быть одно уравнение движения механизма. Для составления этого уравнения используем уравнения Лагранжа с неопределенным множителем (8.3)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \widetilde{M}_1 + \lambda u_{21}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= \widetilde{M}_2 - \lambda,\end{aligned}$$

где $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2$ — приведенные (обобщенные) моменты сил.

В выражении кинетической энергии T достаточно учесть члены, характеризующие вращательное движение звеньев 1 и 2, считая моменты инерции этих звеньев J_1 и J_2 постоянными величинами:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2).$$

Выполняя дифференцирование и присоединяя уравнение неголономной связи, получаем систему трех уравнений для определения неизвестных φ_1, φ_2 и λ :

$$\begin{aligned}J_1 \ddot{\varphi}_1 &= \widetilde{M}_1 + \lambda u_{21}, & J_2 \ddot{\varphi}_2 &= \widetilde{M}_2 - \lambda, \\ u_{21} \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 &= 0.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Если за независимую обобщенную координату принять φ_1 , то уравнение движения механизма относительно этой координаты найдется из системы (8.7) после исключения неизвестных φ_2 и λ .

Дифференцирование третьего уравнения системы (8.7) дает соотношение

$$\dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + u_{21} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Первые два уравнения системы (8.7) принимают вид

$$\begin{aligned}J_1 \ddot{\varphi}_1 &= \widetilde{M}_1 + \lambda u_{21}, \\ J_2 (\dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + u_{21} \ddot{\varphi}_1) &= \widetilde{M}_2 - \lambda.\end{aligned}$$

Исключение неопределенного множителя λ дает уравнение движения механизма относительно обобщенной координаты φ_1 :

$$(J_1 + J_2 u_{21}^2) \ddot{\varphi}_1 + J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 = \widetilde{M}_1 + u_{21} \widetilde{M}_2.\tag{8.8}$$

Решение этого уравнения дает зависимость $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. Обобщенная координата φ_2 находится из уравнения неголономной связи

(8.4) или же из уравнения движения механизма относительно обобщенной координаты φ_2 . Из системы уравнений (8.7) получаем

$$(J_2 + J_1 u_{12}^2) \ddot{\varphi}_2 + J_1 u_{12} \dot{u}_{12} \dot{\varphi}_2 = \widetilde{M}_1 u_{12} + \widetilde{M}_2.$$

Посмотрим теперь, можно ли было применить обычное уравнение Лагранжа второго рода, принимая за обобщенную координату угол φ_1 .

Приведенный к звену 1 момент сил (обобщенная сила для координаты φ_1) находим из условия равенства элементарных работ (или мощностей) сил

$$M_{\pi 1} \dot{\varphi}_1 = M_1 \dot{\varphi}_1 + M_2 \dot{\varphi}_2.$$

Отсюда с учетом неголономной связи (8.5)

$$\widetilde{M}_{\pi 1} = M_1 + u_{21} M_2.$$

Уравнение Лагранжа второго рода относительно обобщенной координаты φ_1 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \widetilde{M}_1 + u_{21} \widetilde{M}_2.$$

Кинетическая энергия с учетом неголономной связи (8.5):

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 u_{21}^2 \dot{\varphi}_1^2).$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_1 \dot{\varphi}_1 + J_2 u_{21}^2 \dot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_1 \ddot{\varphi}_1 + 2J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + J_2 u_{21}^2 \ddot{\varphi}_1. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение Лагранжа второго рода при обобщенной координате φ_1 имеет вид

$$(J_1 + u_{21}^2 J_2) \ddot{\varphi}_1 + 2J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 = \widetilde{M}_1 + u_{21} \widetilde{M}_2. \quad (8.9)$$

Сравнивая уравнения (8.8) и (8.9), видим, что применение уравнения Лагранжа второго рода без неопределенного множителя привело к увеличению в два раза второго члена левой части уравнения, т. е. к существенной ошибке в вычислительной процедуре.

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями применимы и при нелинейных неголономных связях первого порядка, уравнения которых обычно представляются в неявном виде

$$\varphi_\sigma(q_i, \dot{q}_i, t) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m.$$

При нелинейных связях коэффициенты $A_{1i}, \dots, A_{mi}$ в уравнениях (8.3) должны быть заменены на $\partial\varphi_0/\partial q_i$. Заметим также, что уравнения Лагранжа с неопределенными множителями, как и все другие уравнения динамики неголономных систем, справедливы и для голономных систем.

§ 32. Уравнения Аппеля

Применение уравнений Лагранжа с неопределенными множителями при составлении уравнений движения механизма с неголономными связями приводит к необходимости совместного решения системы уравнений, число которых превышает число степеней свободы на удвоенное число неголономных связей. Поэтому для изучения динамики движения механических систем с неголономными связями неоднократно предлагались дифференциальные уравнения, применение которых позволяет уменьшить число совместно решаемых уравнений. Из этих уравнений рассмотрим лишь *уравнения Аппеля* *).

При составлении уравнений Аппеля уравнения неголономных связей записываются в форме, при которой производные от зависимых обобщенных координат q_α стоят в левых частях уравнений:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{i=1}^{s-m} b_{\alpha i} \dot{q}_i + b_\alpha, \quad \alpha = s-m+1, \dots, s. \quad (8.10)$$

Уравнения Аппеля составляются только для независимых обобщенных координат, число которых равно числу степеней свободы $s-m$:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{\alpha=s-m+1}^s Q_\alpha b_{\alpha i}, \quad i = 1, \dots, s-m, \quad (8.11)$$

где S — энергия ускорений, Q_i , Q_α — обобщенные силы, отнесенные соответственно к координатам q_i и q_α .

Общее число совместно решаемых уравнений Аппеля (8.11) и уравнений связей (8.10) равно $s-m+m=s$, т. е. числу обобщенных координат.

Энергия ускорений, иначе называемая *функцией Гиббса* **) (Гиббс применял уравнения (8.11) для голономных систем, в общем случае для системы N материальных частиц с массами m_ν и координатами x_ν), выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu^2. \quad (8.12)$$

*) Appell P. Sur une forme générale des equations de la dynamique.— Paris, 1899.

**) Gibbs Y. W. On the fundamental formulae of dynamics // Amer. J. Math.— 1879.— № 2.— P. 49—64.

Например, при вращательном движении звена энергия ускорений имеет вид

$$S = \frac{J\ddot{\varphi}^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^4}{2}.$$

Составление аналитического выражения энергии ускорения для общего случая движения твердого тела представляется довольно громоздким, и в этом состоит недостаток уравнений Аппеля.

Пример. Для фрикционной бесступенчатой передачи, рассмотренной в предыдущем параграфе, уравнение Аппеля (8.11), относенное к обобщенной координате φ_1 , имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}_1} = \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2 u_{21},$$

где S — энергия ускорения.

В уравнение Аппеля входит лишь частная производная от энергии ускорения по переменной величине $\ddot{\varphi}_1$. Поэтому вместо полного выражения энергии ускорения достаточно записать ту ее часть S^* , которая содержит члены, зависящие явно или неявно от ускорения $\ddot{\varphi}_1$:

$$S^* = \frac{1}{2} (J_1 \ddot{\varphi}_1^2 + J_2 \ddot{\varphi}_2^2).$$

Имея в виду, что $\partial S^* / \partial \ddot{\varphi}_1 = \partial S / \partial \ddot{\varphi}_1$, и присоединяя к уравнению Аппеля уравнение неголономной связи, получаем систему двух дифференциальных уравнений для определения обобщенных координат φ_1 и φ_2 :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (J_1 \ddot{\varphi}_1^2 + J_2 \ddot{\varphi}_2^2)}{\partial \ddot{\varphi}_1} = \widetilde{M}_1 + \widetilde{M}_2 u_{21}, \quad (8.13)$$

$$u_{21} \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Дифференцирование второго уравнения системы (8.13) дает

$$\dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 + u_{21} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Из этого уравнения находим $\ddot{\varphi}_2$ и подставляем в первое уравнение системы (8.13). Выполнив дифференцирование, получаем уравнение движения механизма относительно обобщенной координаты φ_1 :

$$(J_1 + J_2 u_{21}^2) \ddot{\varphi}_1 + J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 = \widetilde{M}_1 + u_{21} \widetilde{M}_2,$$

т. е. уравнение (8.8).

§ 33. Уравнение кинетической энергии и общее уравнение динамики

Для неголономных механизмов с одной степенью свободы можно, как и в механизмах с голономными связями, воспользоваться уравнением кинетической энергии, представленным в дифференциальной форме:

$$dT = dA, \quad (8.14)$$

где dA — элементарная работа внешних сил на возможных перемещениях.

В рассматриваемом примере фрикционной бесступенчатой передачи

$$dA = M_1 d\varphi_1 + M_2 d\varphi_2.$$

С учетом уравнения неголономной связи (8.6) имеем

$$dA = (\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 u_{21}) d\varphi_1.$$

Следовательно, уравнение кинетической энергии (8.14) принимает вид

$$\frac{dT}{d\varphi_1} = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 u_{21}. \quad (8.15)$$

Кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2),$$

или с учетом соотношения (8.5):

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 u_{21}^2 \dot{\varphi}_1^2).$$

Выполняя дифференцирование по φ_1 , имеем

$$\frac{dT}{d\varphi_1} = J_1 \dot{\varphi}_1 \frac{d\dot{\varphi}_1}{d\varphi_1} + \frac{J_2}{2} \left(u_{21}^2 2\dot{\varphi}_1 \frac{d\dot{\varphi}_1}{d\varphi_1} + \dot{\varphi}_1^2 2u_{21} \dot{u}_{21} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\dot{\varphi}_1}{d\varphi_1} = \frac{\ddot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_1},$$

получаем

$$\frac{dT}{d\varphi_1} = J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 u_{21}^2 \ddot{\varphi}_1 + J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (8.15) опять получаем уравнение движения механизма (8.8):

$$(J_1 + J_2 u_{21}^2) \ddot{\varphi}_1 + J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1 = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 u_{21}.$$

В заключение приведем еще один способ получения уравнения движения механизма (8.8) из общего уравнения динамики, которое

для рассматриваемого примера при идеальных связях можно представить в следующем виде:

$$N_{\pi} + N_{\varepsilon} = 0, \quad (8.16)$$

где N_{π} — мощность сил инерции, N_{ε} — мощность внешних сил.

Выбирая за звено приведения звено I , уравнение (8.16) можно представить также в форме приведенных моментов сил

$$M_{\pi\pi} + M_{\pi} = 0, \quad (8.17)$$

где $M_{\pi\pi}$ — приведенный момент сил инерции, M_{π} — приведенный момент внешних сил.

Из условия равенства мощностей сил инерции и приведенного момента сил инерции имеем

$$M_{\pi\pi} = -(J_1 \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_2) / \dot{\varphi}_1,$$

или

$$M_{\pi\pi} = -J_1 \ddot{\varphi}_1 - J_2 \ddot{\varphi}_2 u_{21}.$$

С учетом уравнения неголономной связи (8.5) получаем

$$\widetilde{M}_{\pi\pi} = -J_1 \ddot{\varphi}_1 - J_2 \ddot{\varphi}_1 u_{21}^2 - J_2 u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\varphi}_1. \quad (8.18)$$

Приведенный момент внешних сил, как и в предыдущих примерах, определяется соотношением

$$M_{\pi} = \widetilde{M}_1 + M_2 u_{21}. \quad (8.19)$$

Подставляя значения $M_{\pi\pi}$ и M_{π} в уравнение (8.17), опять получаем правильное уравнение движения механизма (8.8). Из этого вывода наглядно следует, что ошибка в применении уравнения Лагранжа второго рода объясняется неправильным учетом работы (мощности) сил инерции.

§ 34. Кинетостатический принцип составления уравнений движения механизмов

Уравнения кинетостатического равновесия звеньев, составляемые на основании принципа Даламбера, могут быть использованы не только при силовом анализе, но и при составлении уравнений движения механизмов с голономными и неголономными связями. С этой целью для каждой структурной группы из уравнений кинетостатики находятся реакции связи, выраженные через неизвестные ускорения звеньев. Затем составляются уравнения кинетостатического равновесия начальных звеньев, которые и дают искомые уравнения движения механизма.

Кинетостатический принцип составления уравнений движения механизма иногда называют принципом освобожденности от связей, что нельзя считать удачным, так как реакция связи не может полностью замещать действия связи.

Из условия кинетостатического равновесия (второго закона Ньютона) звеньев 1 и 2 имеем:

$$\begin{aligned} M_1 - F_{\tau}r - J_1\ddot{\varphi}_1 &= 0, \\ M_2 + F_{\tau}r - J_2\ddot{\varphi}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (8.20)$$

где F_{τ} — сила трения, действующая в плоскости контакта трущихся тел. Для звена 1 сила трения F_{τ} является силой сопротивления, а для звена 2 — движущей силой. Исключая модуль силы F_{τ} из уравнений (8.20), получаем

$$M_1r - J_1\ddot{\varphi}_1r + M_2r - J_2\ddot{\varphi}_2r = 0.$$

Это уравнение с учетом величины передаточного отношения $u_{21} = r/r$ преобразуется к виду

$$M_1 - J_1\ddot{\varphi}_1 + M_2u_{21} - J_2\ddot{\varphi}_2u_{21} = 0,$$

или

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + J_2\ddot{\varphi}_2u_{21} = M_1 + M_2u_{21}. \quad (8.21)$$

Дифференцирование уравнения неголономной связи (8.5) дает

$$\dot{u}_{21}\dot{\varphi}_1 + u_{21}\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (8.21), получаем

$$(J_1 + J_2u_{21}^2)\ddot{\varphi}_1 + J_2u_{21}\dot{u}_{21}\dot{\varphi}_1 = \tilde{M}_1 + \tilde{M}_2u_{21},$$

т. е. опять приходим к уравнению (8.8), которое было получено с применением уравнений Лагранжа с неопределенными множителями.

Кроме того, сравнение уравнений (8.7) и (8.20) показывает, что члены, содержащие неопределенные множители в уравнениях Лагранжа, могут рассматриваться как обобщенные силы реакций неголономных связей.

Кинетостатический принцип составления уравнений движения особенно удобен в тех случаях, когда необходимо учесть силы трения в кинематических парах.

ГЛАВА 9

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

§ 35. Типовые линейные уравнения движения с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение движения механизма с одной степенью свободы. Условимся в левой части линейного дифференциального уравнения движения механизма с одной степенью свободы записывать члены, содержащие обобщенную координату q и ее производ-

ные по времени $\dot{q}$ и $\ddot{q}$, а в правой части — составляющую обобщенной силы, зависящую от времени:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (9.1)$$

где a — инерционный коэффициент (приведенная масса при линейной обобщенной координате или приведенный момент инерции при угловой обобщенной координате), b — приведенный коэффициент сопротивления, c — приведенный коэффициент жесткости.

При определении приведенного коэффициента сопротивления b в общем случае учитываются не только силы трения, зависящие от относительной скорости трущихся поверхностей (трение, близкое к жидкостному), но и другие силы сопротивления, которые зависят от обобщенной скорости $\dot{q}$. При определении приведенного коэффициента жесткости c учитываются не только силы упругости, но и другие силы, линейно зависящие от обобщенной координаты q . Постоянные члены входят в выражение составляющей обобщенной силы $Q(t)$.

При исследовании колебаний в механизмах уравнение движения (9.1) обычно преобразуют к виду, в котором коэффициент при старшей производной равен единице:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \lambda^2 q = \frac{Q(t)}{a}, \quad (9.2)$$

где $\gamma = b/(2a)$ — коэффициент демпфирования, $\lambda^2 = c/a$ — коэффициент, численно равный квадрату собственной частоты механизма *).

Для классификации типовых уравнений движения, однако, удобнее иметь коэффициент, равный единице, при обобщенной координате q :

$$T_2^2 \ddot{q} + T_1 \dot{q} + q = \frac{Q(t)}{c}, \quad (9.3)$$

где постоянные коэффициенты $T_1 = b/c$ и $T_2 = \sqrt{a/c}$ имеют размерность времени и потому называются *постоянными времени*.

Безразмерное уравнение движения механизма. Для рассмотрения не отдельного, частного механизма, а группы механизмов переменные, входящие в уравнение движения, представляют в безразмерной форме. За модули измерения обобщенной координаты и обобщенной силы принимают их номинальные (средние, максимальные и т. п.) значения q_n и Q_n . Безразмерные переменные обозначим через $y = q/q_n$ и $x = Q(t)/Q_n$. Тогда уравнение (9.3) принимает вид

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx, \quad (9.4)$$

где $k = Q_n/(cq_n)$ — *передаточный коэффициент*, или *коэффициент усиления*.

*) О собственных частотах механизма см. § 38.

Изменения обобщенных координат (перемещения точек звеньев) происходят в механизмах под действием заданных сил. Поэтому переменную x (безразмерную силу) при исследовании динамики механизмов часто называют *входной величиной*, а переменную y (безразмерное перемещение) — *выходной величиной* или *откликом системы*. Иногда переменную y называют также реакцией системы на воздействие x .

Типовые линейные уравнения движения механизмов с постоянными коэффициентами. При частных значениях постоянных времени T_1 и T_2 получаем частные виды уравнения (9.4). Среди них выделим типовые уравнения, часто встречающиеся при рассмотрении динамики механизмов:

*уравнение первого порядка аperiodического типа *)*

$$T_1 \dot{y} + y = kx; \quad (9.5)$$

уравнение второго порядка аperiodического типа

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx, \quad (9.6)$$

где $T_1 \geq 2T_2$;

уравнение колебательного типа

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx, \quad (9.7)$$

где $T_1 < 2T_2$;

уравнение консервативного типа

$$T_2^2 \ddot{y} + y = kx. \quad (9.8)$$

Уравнение колебательного типа представляют также в виде

$$\ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \lambda^2 y = k_1 x, \quad (9.9)$$

где $k_1 = Q_n/(aq_n)$ и $\gamma < \lambda$.

Уравнения (9.5) и (9.6) называются уравнениями аperiodического типа потому, что при $x=0$ выходная величина y изменяется во времени монотонно, в отличие от уравнения колебательного типа (9.7), в котором y поочередно возрастает и убывает. Уравнение (9.8) — частный случай уравнения (9.7) — названо консервативным, так как в нем отсутствует член, зависящий от скорости и выражающий действие диссипативных сил.

Условие отсутствия колебаний $T_1 \geq 2T_2$ (или $\gamma \geq \lambda$) используется при проектировании механизмов, когда устранение нежелательных колебательных режимов достигается увеличением коэффициента сопротивления b . После подстановки в это условие значений T_1 и T_2 (или γ и λ) имеем

$$b^2 \geq 4ac. \quad (9.10)$$

*) В теории автоматического управления говорят не о типе уравнений, а о «динамических звеньях», движение которых описывается данным уравнением. Например, аperiodическое звено, колебательное звено и т. д.

Значение коэффициента демпфирования $\gamma_k = \sqrt{c/a}$, при превышении которого в системе *) не возникают колебания, называют *критическим коэффициентом демпфирования*. Отношение коэффициента демпфирования системы к ее критическому коэффициенту демпфирования называют *относительным демпфированием*.

§ 36. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Однородным дифференциальным уравнением называется дифференциальное уравнение без правой части. Линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \quad (9.11)$$

Общее решение этого уравнения есть сумма слагаемых, вид которых определяется значениями корней характеристического уравнения

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0. \quad (9.12)$$

Каждому вещественному корню r_i соответствует слагаемое

$$y_i = C_j e^{r_j t}. \quad (9.13)$$

Каждой паре сопряженных комплексных корней $r_k = \alpha_k \pm i\lambda_k$ соответствует слагаемое

$$y_k = e^{\alpha_k t} (C_{1k} \cos \lambda_k t + C_{2k} \sin \lambda_k t), \quad (9.14)$$

или

$$y_k = C_k e^{\alpha_k t} \sin(\lambda_k t + \theta_k), \quad (9.15)$$

где

$$C_k = \sqrt{C_{1k}^2 + C_{2k}^2}, \quad \theta_k = \arctg \frac{C_{1k}}{C_{2k}}.$$

В случае кратных корней кратности k вместо произвольных постоянных имеем полиномы $P(t)$ степени $k-1$. Например, при $n=2$ и $r_1 = r_2 = r$ получаем

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{rt}. \quad (9.16)$$

К однородному дифференциальному уравнению можно привести уравнение с постоянной величиной в правой части:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = l$$

*) Под системой понимается механизм с действующими на него силами.

путем подстановки

$$y = y_1 + \frac{l}{a_n}. \quad (9.17)$$

Имея в виду, что $\dot{y} = \dot{y}_1$, $\ddot{y} = \ddot{y}_1$ и т. д., после подстановки получаем

$$a_0 \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_1}{dt} + a_n y_1 = 0.$$

Операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, т. е. уравнения с правой частью, может быть представлено суммой

$$y = y_1 + y_2,$$

где y_1 — решение однородного уравнения, y_2 — частное решение уравнения с правой частью. В задачах динамики механизмов частное решение y_2 зависит от характеристик обобщенных сил, и отыскание его часто представляется затруднительным. Поэтому для решения линейных дифференциальных уравнений с правой частью предпочитают операторный (по другой терминологии — операционный) метод решения, основанный на применении *преобразования Лапласа*.

Идея этого метода применительно к решению системы дифференциальных уравнений с заданными функциями $x_i(t)$ и неизвестными $y_i(t)$ состоит в том, что функции $x_i(t)$ и $y_i(t)$, называемые *оригиналами*, по определенному правилу (правилу преобразования Лапласа) заменяются функциями $X_i(s)$ и $Y_i(s)$ комплексного переменного s , которые называются *изображениями* данных функций (оригиналов). В результате этой замены уравнение, дифференциальное относительно $x_i(t)$ и $y_i(t)$, превращается в алгебраическое относительно $X_i(s)$ и $Y_i(s)$. После решения алгебраических уравнений, т. е. после нахождения функций $Y_i(s)$ по известным функциям $X_i(s)$, возвращаемся к оригиналам $y_i(t)$ и получаем искомое решение.

Оригинал $f(t)$ связан с изображением $F(s)$ соотношением (преобразованием Лапласа)

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

где $s = c + bi$; c и b — постоянные.

Подставляя в это соотношение простейшие функции переменного t ($k, n, \lambda, \gamma, \omega$ — постоянные) и вычисляя интеграл $F(s)$, получаем табл. 6, по которой можно находить изображение по оригиналу и наоборот. В табл. 6, кроме изображений простейших функций, даны изображения тех функций, которые являются решениями диф-

Дифференциальных уравнений движения часто встречающихся механизмов.

При переходе от оригинала к изображению надо также учитывать свойства линейности этого перехода:

$$\begin{aligned} L[f_1(t) + f_2(t)] &= F_1(s) + F_2(s), \\ L[kf(t)] &= kF(s), \end{aligned} \quad (9.18)$$

где L — символ перехода от оригинала к изображению.

Таблица 6

Номер пункта	Оригинал ($t > 0$)	Изображение
1	k	$\frac{k}{s}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	$\sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$
4	$\cos \lambda t$	$\frac{s}{s^2 + \lambda^2}$
5	$t \sin \lambda t$	$\frac{2\lambda s}{(s^2 + \lambda^2)^2}$
6	$\sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t$	$\frac{2\lambda^3}{(s^2 + \lambda^2)^3}$
7	$\lambda t - \sin \lambda t$	$\frac{\lambda^3}{s^2(s^2 + \lambda^2)}$
8	$\cos \omega t - \cos \lambda t$	$\frac{s(\lambda^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \lambda^2)}$
9	$\lambda \sin \omega t - \omega \sin \lambda t$	$\frac{\lambda \omega (\lambda^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \lambda^2)}$
10	$e^{-\gamma t} \sin \lambda_* t$	$\frac{\lambda_*}{s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 + \lambda_*^2}$
11	$e^{-\gamma t} \cos \lambda_* t$	$\frac{s + \gamma}{s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 + \lambda_*^2}$
12	$e^{-\gamma t} \omega \sin (\lambda_* t + \theta_1) + \lambda_* \sin (\omega t - \theta_2),$ $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2\gamma \lambda_*}{\gamma^2 - \lambda_*^2 + \omega^2},$ $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2\gamma \omega}{\gamma^2 + \lambda_*^2 - \omega^2}$	$\lambda_* \omega R / [(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\gamma s + \gamma^2 + \lambda_*^2)],$ $R = [(\gamma^2 + \lambda_*^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}$

($k, n, \lambda, \gamma, \omega$ — постоянные)

При дифференцировании оригинала используются формулы:

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f_0(t), \quad (9.19)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - [sf_0(t) + \dot{f}_0(t)], \quad (9.20)$$

$$L\left[\frac{d^3}{dt^3}f(t)\right] = s^3F(s) - [s^2f_0(t) + sf_0'(t) + \ddot{f}_0(t)], \quad (9.21)$$

где $f_0(t)$, $\dot{f}_0(t)$ и $\ddot{f}_0(t)$ — значения $f(t)$, $\dot{f}(t)$ и $\ddot{f}(t)$ при $t = 0$.

§ 37. Решение однородных уравнений движения аperiодического типа

Решение однородного уравнения движения аperiодического типа первого порядка. Если в линейном уравнении движения (9.1) $c = 0$, а обобщенная сила равна постоянной величине Q_n , то безразмерное уравнение движения (9.5) является дифференциальным уравнением первого порядка относительно безразмерной обобщенной скорости:

$$T\dot{y} + y = k_2, \quad (9.22)$$

где $y = \dot{q}/\dot{q}_n$ — безразмерная обобщенная скорость при модуле измерения $\dot{q}_n$; $T = a/b$ — постоянная времени; $k_2 = Q_n/(b\dot{q}_n)$ — передаточный коэффициент.

Это уравнение приводится к однородному подстановкой $y = y_1 + k_2$, и характеристическое уравнение

$$Tr + 1 = 0$$

имеет один вещественный корень $r_1 = -1/T \equiv -b/a$. Следовательно, общее решение уравнения (9.22) имеет одно слагаемое вида (9.13). С учетом указанной подстановки получаем

$$y = Ce^{-t/T} + k_2.$$

При начальном условии ($t = 0$, $y = y_0$) имеем

$$y = (y_0 - k_2)e^{-t/T} + k_2. \quad (9.23)$$

При $t \rightarrow \infty$ выходная величина монотонно убывает (при $y_0 > k_2$) или возрастает (при $y_0 < k_2$) и асимптотически стремится к значению $y = k_2$. Отсюда происходит название уравнения (9.22) — *уравнение аperiодического типа*. Это название было распространено и на уравнение (9.5), хотя при переменной входной величине x всегда можно указать такой закон ее изменения, при котором выходная величина не будет изменяться монотонно. Другими словами, название типового линейного уравнения движения определяется графиком той составляющей, которая относится к решению однородного уравнения.

Для уравнения движения в размерной форме

$$a\ddot{q} + b\dot{q} = Q_a \quad (9.24)$$

общее решение относительно обобщенной скорости $\dot{q}$ при начальных условиях ($t=0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$) найдется из (9.23) при $y=\dot{q}$, $y_0=\dot{q}_0$, $T=a/b$, $k_2=Q_a/b$:

$$\dot{q} = \left(\dot{q}_0 - \frac{Q_a}{b} \right) e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{Q_a}{b}. \quad (9.25)$$

Пример решения уравнения движения аperiodического типа первого порядка. Пусть механизм приводится в движение от электродвигателя, для которого движущий момент $\tilde{M}_d$ линейно зависит от угловой скорости $\tilde{\omega}$: $\tilde{M}_d = M_0 - b\tilde{\omega}$, где M_0 и b — постоянные коэффициенты. Тогда при постоянном приведенном к валу электродвигателя моменте сил сопротивления M_c и постоянном приведенном моменте инерции J_n уравнение движения механизма имеет вид

$$J_n \ddot{\tilde{\omega}} = M_0 - b\tilde{\omega} - M_c.$$

Решение этого уравнения при начальной скорости $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$ найдем из (9.25), полагая $\dot{q} = \tilde{\omega}$, $\dot{q}_0 = \tilde{\omega}_0$, $Q_a = M_0 - M_c$, $a = J_n$:

$$\tilde{\omega} = \left(\tilde{\omega}_0 - \frac{M_0 - M_c}{b} \right) e^{-\frac{b}{J_n}t} + \frac{M_0 - M_c}{b}.$$

Угловая скорость $\tilde{\omega}$ асимптотически стремится к установившемуся значению $\tilde{\omega}_y = (M_0 - M_c)/b$ при $t \rightarrow \infty$. Практически этот режим не продолжается до бесконечности, так как принятая динамическая модель является лишь идеализацией действительного динамического процесса (характеристика двигателя принята статической, не учтены случайные изменения момента сил сопротивления и т. п.).

Решение однородного уравнения движения аperiodического типа второго порядка. Уравнение движения (9.6) для случая сил, не зависящих от времени, имеет вид

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k, \quad T_1 \geq 2T_2. \quad (9.26)$$

Это уравнение приводится к однородному подстановкой

$$y = y_1 + k, \quad (9.27)$$

и характеристическое уравнение

$$T_2^2 r^2 + T_1 r + 1 = 0$$

имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}.$$

Если уравнение (9.26) представить в форме уравнения (9.9) при $x=1$ и $\gamma > \lambda$:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1,$$

то формула для определения корней характеристического уравнения принимает вид

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \lambda^2}.$$

При условии $T_1 \geq 2T_2$ или $\gamma \geq \lambda$, т. е. при значительном демпфировании, могут быть два случая. В первом случае ($T_1 > 2T_2$ или $\gamma > \lambda$) оба корня характеристического уравнения действительные и неравные. Тогда общее решение уравнения (9.26) имеет два слагаемых вида (9.13).

С учетом подстановки (9.27) получаем

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + k.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий ($t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$):

$$y_0 = C_1 + C_2 + k, \quad \dot{y}_0 = C_1 r_1 + C_2 r_2.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{r_2(k - y_0) + \dot{y}_0}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = -\frac{r_1(k - y_0) + \dot{y}_0}{r_1 - r_2}.$$

Следовательно, решение уравнения движения (9.26) при $T_1 > 2T_2$ имеет вид

$$y = \frac{r_2(k - y_0) + \dot{y}_0}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1(k - y_0) + \dot{y}_0}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + k. \quad (9.28)$$

Показатели степени $r_1 t$ и $r_2 t$ — отрицательные, и поэтому при $t \rightarrow \infty$ получаем, что выходная величина y асимптотически приближается к значению $y=k$, т. е. уравнение (9.26) относится к аперидическому типу.

Во втором случае ($T_1 = 2T_2$ или $\gamma = \lambda$) характеристическое уравнение имеет два равных корня или, что то же, один двухкратный корень

$$r = \frac{-T_1}{2T_2^2} \equiv -\gamma,$$

и общее решение уравнения (9.26) имеет слагаемое вида (9.16). С учетом подстановки (9.27) получаем

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{rt} + k.$$

Произвольные постоянные находим из начальных условий ($t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$):

$$y_0 = C_1 + k, \quad \dot{y}_0 = rC_1 + C_2.$$

Отсюда

$$C_1 = y_0 - k, \quad C_2 = r(k - y_0) + \dot{y}_0.$$

Следовательно, решение уравнения (9.26) при $T_1 = 2T_2$ имеет вид

$$y = [(y_0 - k)(1 - rt) + \dot{y}_0 t] e^{rt} + k. \quad (9.29)$$

Показатель степени rt — отрицательный и поэтому при $t \rightarrow \infty$ получаем, что выходная величина y асимптотически стремится к значению $y = k$, т. е. при $T_1 = 2T_2$ уравнение (9.26) опять относится к апериодическому типу.

Для уравнения в размерной форме

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_a \quad (9.30)$$

общее решение при $b^2 > 4ac$ и начальных условиях ($t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$) найдем из (9.28), полагая $y = q$, $y_0 = q_0$, $\dot{y}_0 = \dot{q}_0$, $k = Q_a/c$:

$$q = \frac{r_2 \left(\frac{Q_a}{c} - q_0 \right) + \dot{q}_0}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1 \left(\frac{Q_a}{c} - q_0 \right) + \dot{q}_0}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + \frac{Q_a}{c}, \quad (9.34)$$

где

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Пример решения уравнения движения апериодического типа второго порядка. На рис. 58 показана схема зубчатого механизма, применяемого в указательных и регистрирующих приборах для преобразования движения ползуна 2, связанного с измерительным устройством, во вращательное движение стрелки 1. Каждому положению ползуна соответствует определенное значение измеряемой величины, которое указывается стрелкой на шкале прибора. На ползун 2 действует сила F , которая уравнивается упругой силой пружины с коэффициентом жесткости c .

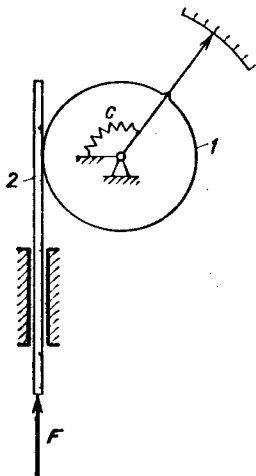


Рис. 58

Рассмотрим движение звеньев механизма при изменении измеряемой величины, т. е. при переходе ползуна 2, а следовательно, и стрелки 1, из одного положения в другое. Этот переход совершается под действием скачкообразного изменения силы F , при котором ее модуль увеличивается от начального значения F_0 до значения F_n . Приведенный к звену 1 момент от силы G увеличивается от начального значения M_0 до постоянного значения M_n . При по-

стоянном приведенном к звену 1 моменте инерции J_n уравнение движения механизма имеет вид

$$J_n \ddot{\varphi} = M_n - c\varphi - b\dot{\varphi},$$

где φ — угол поворота звена 1, отсчитываемый от положения, при

котором момент сил упругости φ равен нулю, b — коэффициент сопротивления.

Чтобы привести это уравнение к форме типовых линейных уравнений движения, делим все его члены на коэффициент при φ и получаем

$$T_2^2 \ddot{\varphi} + T_1 \dot{\varphi} + \varphi = k,$$

где

$$T_2^2 = J_{II}/c, \quad T_1 = b/c, \quad k = M_{II}/c.$$

Предположим, что $T_1 > 2T_2$, т. е. $b^2 > 4J_{II}c$. Тогда решение уравнения движения получится после подстановки исходных данных в уравнение (9.31) при $q = \varphi$ и начальных условиях ($t = 0$, $q_0 = M_0/c$, $\dot{q}_0 = 0$):

$$\varphi = \frac{M_{II} - M_0}{c(r_1 - r_2)} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}) + \frac{M_{II}}{c},$$

где

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4J_{II}c}}{2J_{II}}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4J_{II}c}}{2J_{II}}.$$

Показатели степени $r_1 t$ и $r_2 t$ — отрицательные, и поэтому при $t \rightarrow \infty$ переменная φ асимптотически стремится к значению $\varphi = M_{II}/c$, т. е. к новому положению равновесия сил.

§ 38. Решение линейных уравнений движения при свободных колебаниях

Механические колебания. Механическими колебаниями (сокращенно — колебаниями) называют движение механической системы, при котором хотя бы одна из обобщенных координат или их производных поочередно возрастает и убывает по времени. Колебания называются *периодическими*, если состояние механической системы, определяемое значениями обобщенных координат и их производных, повторяется через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени, через который повторяется состояние механической системы, называется *периодом колебаний*. Величина, обратная периоду колебаний, называется *частотой колебаний*. Если период колебаний t_k измерять в секундах, то частота колебаний $f = 1/t_k$ получается в герцах (Гц) с размерностью $1/c$. Иначе частоту колебаний можно определить как число периодов в единицу времени.

Гармонические колебания. Простейшим видом периодических колебаний являются *гармонические колебания*, при которых обобщенная координата механической системы q прямо пропорциональна синусу от аргумента, линейно зависящего от времени:

$$q = A \sin(\omega t + \theta), \quad (9.32)$$

где A — амплитуда, $\omega t + \theta$ — фаза, θ — начальная фаза.

Период гармонических колебаний равен периоду изменения синуса угла $\omega t + \theta$. Обозначив период колебаний через t_k , получаем

$$\sin(\omega t + \theta) = \sin[\omega(t + t_k) + \theta].$$

Отсюда $t_k = 2\pi/\omega$ и, следовательно, частота гармонических колебаний в герцах

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (9.33)$$

Угловая частота. При гармонических колебаниях удобнее вместо частоты в герцах, определяемой по формуле (9.33), рассматривать пропорциональную ей величину ω , называемую *угловой частотой*. Из (9.33) имеем

$$\omega = 2\pi f, \quad (9.34)$$

т. е. угловой частотой называется величина, численно равная частоте в герцах, умноженной на 2π . Иначе, угловая частота есть число периодов в 2π единиц времени. При постоянной начальной фазе θ угловая частота численно равна производной по времени от фазы $\omega t + \theta$.

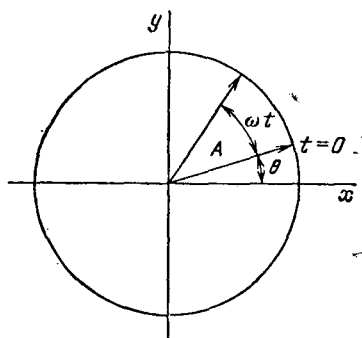


Рис. 59

Происхождение термина «угловая частота» связано с представлением гармонических колебаний в виде изменения проекции на ось y вектора длиной A , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω (рис. 59). Начальная фаза θ определяет положение вектора при $t = 0$.

Свободные колебания. Свободными колебаниями называются колебания, происходящие без переменного внешнего воздействия и поступления энергии извне. Они совершаются за счет первоначально накопленной энергии, которая определяется перемещениями и скоростями, заданными системе в некоторый момент времени. Линейное уравнение движения механизма при свободных колебаниях всегда может быть приведено к дифференциальному уравнению без правой части, т. е. к однородному уравнению.

Решение уравнения движения консервативного типа при свободных колебаниях. Простейшим уравнением движения механизма, которым описываются свободные колебания, является уравнение движения консервативного типа (9.8) при условии $x = 1$:

$$T_2^{\ddot{}} y + y = k. \quad (9.35)$$

В этом случае обобщенная сила не зависит от времени, т. е. правая часть дифференциального уравнения движения (9.1) есть постоянная величина. Кроме того, условие отсутствия в левой части уравнения движения члена, выражающего рассеяние (диссипацию),

энергии, приводит к условию постоянства полной механической энергии, т. е. суммы потенциальной и кинетической энергии. Отсюда происходит название уравнения (9.35) — *уравнение движения консервативного типа* — в соответствии с тем, что системы, в которых полная механическая энергия имеет постоянное значение, называются *консервативными*. Это название распространяется и на более общее уравнение (9.8), так как название типового уравнения движения определяется той составляющей его решения, которая относится к однородному уравнению.

Уравнение (9.35) приводится к однородному подстановкой

$$y = y_1 + k, \quad (9.36)$$

и характеристическое уравнение

$$T^2 r^2 + 1 = 0$$

имеет два сопряженных комплексных корня $r_{1,2} = \pm i/T$. Следовательно, общее решение уравнения (9.35) по формуле (9.14) при $\alpha_k = 0$, $\lambda_k = \lambda$ с учетом подстановки (9.36) имеет вид

$$y = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + k, \quad (9.37)$$

где $\lambda = 1/T$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 при начальных условиях ($t = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$) определяются из системы уравнений:

$$y_0 = C_1 + k, \quad \dot{y}_0 = C_2 \lambda.$$

Отсюда

$$C_1 = y_0 - k, \quad C_2 = \dot{y}_0 / \lambda.$$

Решение (9.37) можно представить в другой форме, если применить формулу (9.15) при $\alpha_k = 0$:

$$y = C \sin(\lambda t + \theta) + k. \quad (9.38)$$

Постоянные C и θ определяются из системы уравнений:

$$y_0 = C \sin \theta + k, \quad \dot{y}_0 = C \lambda \cos \theta.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_0 - k}{\dot{y}_0} \lambda, \quad C = \frac{y_0 - k}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\dot{y}_0}{y_0 - k} \right)^2 + \lambda^2}.$$

Следовательно, выходная величина y совершает гармонические колебания относительно значения $y = k$ с угловой частотой λ и амплитудой

$$A = \sqrt{(y_0 - k)^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\lambda^2}},$$

которая зависит только от начальных условий (y_0 , $\dot{y}_0$) и постоянных механизма (k , λ).

Для уравнения движения в размерной форме

$$a\ddot{q} + cq = Q_n \quad (9.39)$$

общее решение при начальных условиях ($t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$) получаем из (9.37), полагая $y=q$, $y_0=q_0$, $\dot{y}_0=\dot{q}_0$, $k=Q_n/c$:

$$q = \frac{Q_n}{c} + \left(q_0 - \frac{Q_n}{c}\right) \cos \lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda t, \quad (9.40)$$

где $\lambda = \sqrt{c/a}$.

Из (9.38) аналогично получаем другую форму решения уравнения (9.39)

$$q = \frac{Q_n}{c} + A \sin(\lambda t + \theta), \quad (9.41)$$

где

$$\operatorname{tg} \theta = \left(q_0 - \frac{Q_n}{c}\right) \frac{\lambda}{\dot{q}_0}, \quad A = \sqrt{\left(q_0 - \frac{Q_n}{c}\right)^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\lambda^2}}.$$

Собственные частоты. Собственной частотой механизма называется каждая из частот свободных колебаний механизма, описываемых линейными уравнениями движения. Для механизма, уравнение движения которого описывается уравнением консервативного типа, собственная частота механизма

$$\lambda = \frac{1}{T} \equiv \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad (9.42)$$

где c — коэффициент жесткости, $a = J_n$ — приведенный момент инерции при угловой обобщенной координате, $a = m_n$ — приведенная масса при линейной обобщенной координате.

Происхождение термина «собственная частота» связано с тем, что эта динамическая характеристика зависит только от собственных параметров механизма и не зависит от внешних сил и начальных условий.

Решение уравнения движения колебательного типа при свободных колебаниях. Уравнение движения колебательного типа (9.7) для случая сил, не зависящих от времени, имеет вид

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k, \quad (9.43)$$

где

$$T_1 < 2T_2.$$

Уравнение (9.43) отличается от уравнения аperiodического типа второго порядка (9.26) только соотношением между постоянными времени T_1 и T_2 . Учитывая это соотношение, получаем, что характеристическое уравнение имеет пару сопряженных комплексных корней

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\lambda_*,$$

где

$$\gamma = \frac{T_1}{2T_2^2} \equiv \frac{b}{2a}, \quad \lambda_* = \sqrt{\frac{1}{T_2^2} - \gamma^2} \equiv \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}.$$

Общее решение уравнения (9.43) по формуле (9.14) при $\alpha_k = -\gamma$ и $\lambda_k = \lambda_*$ с учетом подстановки (9.36) имеет вид

$$y = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \lambda_* t + C_2 \sin \lambda_* t) + k. \quad (9.44)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 при начальных условиях ($t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$) определяются из системы уравнений

$$y_0 = C_1 + k, \quad \dot{y}_0 = \lambda_* C_2 - \gamma C_1.$$

Отсюда

$$C_1 = y_0 - k, \quad C_2 = \frac{\gamma(y_0 - k) + \dot{y}_0}{\lambda_*}.$$

Решение (9.44) можно представить в другой форме, если применить формулу (9.15):

$$y = C e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta) + k. \quad (9.45)$$

Постоянные C и θ определяются из системы уравнений:

$$y_0 = C \sin \theta + k, \quad \dot{y}_0 = -C\gamma \sin \theta + C\lambda_* \cos \theta.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(y_0 - k) \lambda_*}{\dot{y}_0 + (y_0 - k) \gamma}, \quad C = \sqrt{(y_0 - k)^2 + \frac{[\dot{y}_0 + \gamma(y_0 - k)]^2}{\lambda_*^2 - \gamma^2}}.$$

Из решения (9.45) видно, что при $t \rightarrow \infty$ выходная величина y стремится к значению $y=k$, но в отличие от случая $T_1 \geq 2T_2$ (уравнение апериодического типа) она колеблется относительно этого значения по синусоидальному закону с уменьшающимися амплитудами

$$y - k = A \sin(\lambda_* t + \theta),$$

где $A = C e^{-\gamma t}$ — переменный коэффициент, уменьшающийся до нуля при $t \rightarrow \infty$, так как показатель степени при e отрицательный. Колебания, при которых максимальные (минимальные) значения колеблющейся величины уменьшаются с течением времени, называются *затухающими*.

Логарифмический декремент колебаний. Затухающие колебания, определяемые уравнением (9.45), отличаются от гармонических только переменной амплитудой A . Частота λ_* и начальная фаза θ во время движения остаются постоянными. Уменьшение амплитуды характеризуется *логарифмическим декрементом*, под которым понимается натуральный логарифм отношения двух последовательных максимальных (минимальных) значений колеблющейся величины при затухающих колебаниях.

Собственная частота механизма с демпфированием. Затухающие колебания, описываемые уравнением (9.45), не являются периодическими, так как амплитуда A является переменной функцией времени. Однако значения функции $\sin(\lambda_* t + \theta)$ повторяются через равные промежутки времени $t_* = 2\pi/\lambda_*$. Величину t_* можно назвать *условным периодом линейных затухающих колебаний*. Соответственно величину

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2} \quad (9.46)$$

можно назвать *угловой частотой линейных затухающих колебаний*, или *собственной частотой механизма с демпфированием*, так как она является собственной характеристикой механизма, не зависящей от начальных условий и внешних сил, действующих на механизм.

Для уравнения движения в размерной форме

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_n \quad (9.47)$$

общее решение при $b^2 < 4ac$ и начальных условиях ($t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$) получаем из (9.44), полагая $y=q$, $y_0=q_0$, $\dot{y}_0=\dot{q}_0$, $k=Q_n/c$:

$$q = \frac{Q_n}{c} + e^{-\gamma t} \left[\left(q_0 - \frac{Q_n}{c} \right) \cos \lambda_* t + \frac{\gamma \left(q_0 - \frac{Q_n}{c} \right) + \dot{q}_0}{\lambda_*} \sin \lambda_* t \right], \quad (9.48)$$

где

$$\gamma = \frac{b}{2a}, \quad \lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Решение (9.48) можно представить в другой форме, если использовать (9.45):

$$q = \frac{Q_n}{c} + A e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta), \quad (9.49)$$

где

$$A = \sqrt{\left(q_0 - \frac{Q_n}{c} \right)^2 + \frac{\left[\dot{q}_0 + \gamma \left(q_0 - \frac{Q_n}{c} \right) \right]^2}{\lambda^2 - \gamma^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{(q_0 - Q_n/c) \lambda_*}{\dot{q}_0 + (q_0 - Q_n/c) \gamma}.$$

Пример решения уравнения движения колебательного типа при свободных колебаниях. Продолжим рассмотрение динамики механизма, показанного на рис. 58. Но теперь будем считать, что постоянные времени T_1 и T_2 в безразмерном уравнении движения (9.4) удовлетворяют условию $T_1 < 2T_2$, т. е. коэффициент сопротивления $b < \sqrt{2cJ_n}$. Тогда из (9.48) при начальных условиях ($t=0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = M_0/c$, $\varphi_0 = 0$) получаем

$$\varphi = \frac{M_n}{c} - \frac{M_n - M_0}{c} e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda_* t + \frac{\gamma}{\lambda_*} \sin \lambda_* t \right),$$

где

$$\gamma = \frac{b}{2J_{II}}, \quad \lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{c}{J_{II}}}.$$

Другая форма решения получается из (9.49):

$$\varphi = \frac{M_{II}}{c} - \frac{M_{II} - M_0}{c} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_*} e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta), \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_*}{\gamma}.$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$ координата φ стремится к значению $\varphi_{II} = M_{II}/c$, соответствующему новому положению статического равновесия, но в отличие от случая $T_1 > 2T_2$ координата φ ,

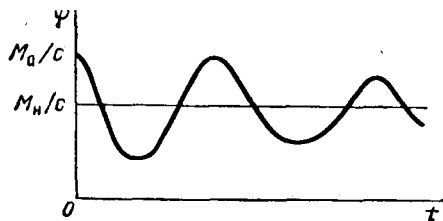


Рис. 60

достигнув значения M_{II}/c , колеблется относительно этого значения по синусоидальному закону с уменьшающимися амплитудами (рис. 60).

§ 39. Решение линейных уравнений движения при вынужденных колебаниях

Вынужденные колебания. Колебания могут возбуждаться или приложением внешних сил, переменных по времени и не зависящих от состояния системы (силовое возбуждение), или сообщением извне принудительного движения каким-либо точкам системы (кинематическое возбуждение).

Силовое возбуждение колебаний вызывается, например, переменной приведенной силой, изменяющейся во времени по синусоидальному закону (*гармоническое возбуждение*). В общем случае переменная во времени внешняя сила, не зависящая от состояния системы и поддерживающая ее колебания, называется *вынуждающей силой*.

Кинематическое возбуждение колебаний вызывается, например, движением профиля кулачка, воздействующего на упругое выходное звено, или движением стойки механизма, совершающей колебания по заданному (известному) закону.

Вынужденными колебаниями называются колебания, вызванные и поддерживаемые силовыми или кинематическими возбуждениями. Линейные уравнения движения механизма при вынужденных ко-

лебаниях выражаются неоднородными дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями с правой частью.

Решение уравнения движения консервативного типа при гармоническом возбуждении. Пусть безразмерная обобщенная сила в уравнении (9.8) равна $x = \sin \omega t$. Изображение этой функции по табл. 6 (п. 3 с заменой λ на ω)

$$X = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}.$$

Обозначая через Y изображение функции y , получаем по формулам (9.19) и (9.20) при начальных условиях ($t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$):

$$L\dot{y} = sY - y_0, \quad L\ddot{y} = s^2Y - sy_0 - \dot{y}_0.$$

Тогда уравнение (9.9) при $\gamma=0$ и $x = \sin \omega t$ после замены оригиналов их изображениями принимает вид

$$s^2Y - sy_0 - \dot{y}_0 + \lambda^2Y = k_1 \frac{\omega}{s + \omega^2}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 + \lambda^2} + k_1 \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \lambda^2)}.$$

Обратный переход к оригиналу y по табл. 6 (пп. 3, 4 и 9) даст

$$y = y_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{k_1 \omega}{\lambda(\lambda^2 - \omega^2)} \sin \lambda t + \frac{k_1}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (9.50)$$

Решение (9.50) представляет собой сумму четырех слагаемых. Первые два слагаемые описывают свободные колебания с частотой λ . При нулевых начальных условиях $y_0 = \dot{y}_0 = 0$ эти слагаемые равны нулю. Третье слагаемое описывает гармонические колебания, происходящие с собственной частотой λ , но с амплитудой, зависящей от частоты вынуждающей силы. Эти колебания сопровождают вынужденные и их называют *свободными сопровождающими колебаниями*. Четвертое слагаемое описывает вынужденные колебания с частотой ω и амплитудой

$$A = \frac{k_1}{\lambda^2 - \omega^2}. \quad (9.51)$$

При $\omega < \lambda$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой ωt вынуждающей силы, при $\omega > \lambda$ четвертое слагаемое в решении (9.50) должно иметь вид

$$\frac{k_1}{\lambda^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \pi),$$

т. е. фаза вынужденных колебаний противоположна фазе вынуждающей силы. Отсюда следует, что амплитуда вынужденных коле-

баний при любых соотношениях между ω и λ определяется выражением

$$A = \frac{k_1}{|\lambda^2 - \omega^2|}. \quad (9.52)$$

Решение уравнения колебательного типа при гармоническом возбуждении. При $\gamma \neq 0$ и $x = \sin \omega t$ уравнение (9.9) после замены оригиналов их изображениями имеет вид

$$s^2 Y - sy_0 - \dot{y}_0 + 2\gamma s Y - 2\gamma y_0 + \lambda^2 Y = k_1 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{sy_0 + \dot{y}_0 + 2\gamma y_0}{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2} + k_1 \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2)}.$$

Обратный переход к оригиналу y по табл. 6 (пп. 10, 11, 12) дает

$$y = e^{-\gamma t} \left(y_0 \cos \lambda_* t + \frac{\gamma y_0 + \dot{y}_0}{\lambda_*} \sin \lambda_* t \right) + \\ + e^{-\gamma t} \frac{k_1 \omega}{\lambda_* R} \sin(\lambda_* t + \theta_1) + \frac{k_1}{R} \sin(\omega t - \theta_2), \quad (9.53)$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad R = \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \\ \theta_1 = \arctg \frac{2\gamma \lambda_*}{\gamma^2 - \lambda_*^2 + \omega^2}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{2\gamma \omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

С течением времени свободные и сопровождающие колебания затухают и амплитуда колебаний, называемых *установившимися (стационарными)*, определяется выражением

$$A = \frac{k_1}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (9.54)$$

Метод комплексных амплитуд. Во многих механизмах внешние силы, действующие на звенья механизма, являются периодическими функциями времени, которые посредством разложения в ряды Фурье могут быть представлены в виде суммы гармоник различных частот. Для решения линейных уравнений движения при этих воздействиях (силах) используется принцип суперпозиции, согласно которому искомое решение является суммой решений, получаемых от воздействия каждой гармоники. В свою очередь каждая гармоника обобщенной силы с частотой ω представляется суммой двух членов, один из которых пропорционален $\cos \omega t$, а другой $\sin \omega t$. В примере § 39 было показано, что вынуждающая сила, пропорциональная $\sin \omega t$, после затухания свободных колебаний приводит к гармоническим колебаниям по закону $A \sin(\omega t - \theta_2)$, где θ_2 — сдвиг фаз между силой и перемещением. Аналогично при вынуждающей силе, пропорциональной $\cos \omega t$, получаем гармонические

колебания по закону $A \cos(\omega t - \theta_2)$. Оба случая можно объединить, если безразмерную вынуждающую силу считать комплексной величиной

$$x(i\omega) = \cos \omega t + i \sin \omega t,$$

или в показательной форме

$$x(i\omega) = e^{i\omega t}. \quad (9.55)$$

Безразмерную обобщенную координату также представим комплексной величиной

$$y(i\omega) = A e^{i(\omega t + \theta)}, \quad (9.56)$$

где A — амплитуда гармонических колебаний, θ — начальная фаза.

Комплексную величину (9.56) можно преобразовать к виду

$$y(i\omega) = A e^{i\theta} e^{i\omega t},$$

или

$$y(i\omega) = A(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (9.57)$$

где $A(i\omega) = A e^{i\theta}$ — комплексная амплитуда гармонических колебаний, т. е. комплексная величина, модуль которой равен амплитуде, а аргумент — начальной фазе гармонических колебаний (см. рис. 59).

Из сопоставления формул (9.55) и (9.56) следует, что угол θ равен сдвигу фаз между перемещением $y(i\omega)$ и вынуждающей силой $x(i\omega)$, так как начальная фаза в выражении для $x(i\omega)$ принята равной нулю. В общем случае начальная фаза для $x(i\omega)$ может отличаться от нуля, и тогда аналогично комплексной амплитуде гармонических колебаний вводится комплексная амплитуда вынуждающей силы. Однако принимать начальные фазы, отличные от нуля, для вынуждающих сил целесообразно только в случаях, когда на систему действует несколько сил, отличающихся по фазе.

Использование комплексных величин в показательной форме для решения линейных уравнений движения покажем на примере решения уравнения (9.9), в котором действительные величины y и x заменим на комплексные $y(i\omega)$ и $x(i\omega)$:

$$\ddot{y}(i\omega) + 2\gamma \dot{y}(i\omega) + \lambda^2 y(i\omega) = k_1 x(i\omega). \quad (9.58)$$

Частное решение уравнения (9.58) при $x(i\omega)$ по выражению (9.55) ищем в виде

$$y(i\omega) = A(i\omega) e^{i\omega t}.$$

Тогда

$$\dot{y}(i\omega) = i\omega A(i\omega) e^{i\omega t},$$

$$\ddot{y}(i\omega) = (i\omega)^2 A(i\omega) e^{i\omega t} = -\omega^2 A(i\omega) e^{i\omega t}.$$

После подстановки выражений для $x(i\omega)$, $y(i\omega)$, $\dot{y}(i\omega)$ и $\ddot{y}(i\omega)$ в уравнение (9.58) и сокращения всех членов на $e^{i\omega t}$ получаем

$$-A(i\omega) \omega^2 + 2\gamma A(i\omega) i\omega + \lambda^2 A(i\omega) = k_1. \quad (9.59)$$

Заметим, что уравнение (9.59) получается из исходного дифференциального уравнения (9.58) заменой оператора дифференцирования d/dt множителем $i\omega$ и оператора d^2/dt^2 множителем $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Кроме того, переменные $y(i\omega)$ и $x(i\omega)$ заменяются их амплитудами. В результате этих замен дифференциальное уравнение (9.58) переходит в алгебраическое относительно комплексной амплитуды $A(i\omega)$. Решая алгебраическое уравнение (9.59), получаем

$$A(i\omega) = \frac{k_1}{-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2}. \quad (9.60)$$

Для того чтобы отделить действительную часть от мнимой, умножим числитель и знаменатель соотношения (9.60) на комплексное число, сопряженное со знаменателем, т. е. на $\lambda^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega$, и получим

$$A(i\omega) = k_1 \frac{\lambda^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2},$$

или

$$A(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = k_1 \frac{\lambda^2 - \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}, \quad V(\omega) = -k_1 \frac{2\gamma\omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Модуль комплексной амплитуды дает амплитуду гармонических колебаний

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{k_1}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Начальная фаза гармонических колебаний находится из соотношения

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{-2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Следовательно, искомое решение уравнения (9.60) в комплексном виде

$$y(i\omega) = k_1 \frac{e^{i(\omega t - \theta)}}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}},$$

где

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2},$$

или

$$y(i\omega) = k_1 \frac{\cos(\omega t - \theta) + i \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (9.61)$$

Действительная часть этого решения дает решение уравнения (9.9) при $x = \cos \omega t$:

$$y = k_1 \frac{\cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \text{где } \theta = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Мнимая часть соответственно дает решение уравнения (9.9) при $x = \sin \omega t$:

$$y = k_1 \frac{\sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \text{где } \theta = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Это решение совпадает с решением (9.53) при $\theta = \theta_2$ после затухания свободных колебаний.

§ 40. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Уравнения движения многих механизмов могут быть представлены линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. К этим механизмам, в первую очередь, относятся те механизмы, для которых инерционные коэффициенты (приведенные массы и моменты инерции), входящие в выражение кинетической энергии, представлены переменными величинами. Однако переменные коэффициенты в дифференциальном уравнении движения механизма могут появиться и при постоянной приведенной массе, если на механизм действуют силы, зависящие одновременно от положения звеньев и от времени.

Линейное дифференциальное уравнение, не содержащее первой производной. Пусть, например, дифференциальное уравнение движения механизма с одной степенью свободы представлено уравнением

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = F(t), \quad (9.62)$$

где q — обобщенная координата механизма.

Это уравнение может быть приведено к дифференциальному уравнению, не содержащему первой производной, если применить подстановку

$$q = E(t)y,$$

где

$$E(t) = \exp \left[- \int_0^t n(t) dt \right] \quad (\exp u = e^u).$$

Тогда

$$\dot{q} = E(t)[\dot{y} - n(t)y],$$

$$\ddot{q} = E(t)[\ddot{y} - 2n(t)\dot{y} + n^2(t)y - \dot{n}(t)y].$$

Подставляя значения q , $\dot{q}$, $\ddot{q}$ в уравнение (9.62) и поделив обе части этого уравнения на $E(t) \neq 0$, получаем

$$\ddot{y} + p^2(t)y = f(t), \quad (9.63)$$

где

$$p^2(t) = k^2(t) - n^2(t) - \dot{n}(t), \quad f(t) = F(t) \exp \left[\int_0^t n(t) dt \right].$$

Уравнение Матье. К частным видам уравнения (9.63) относится уравнение Матье, в котором $f(t)$ есть периодическая функция, а $p^2(t)$ — гармоническая функция. Например, при исследовании динамики шарнирных механизмов с упругими звеньями уравнения движения в некоторых случаях приводятся к уравнению Матье

$$\ddot{y} + (a - 2d \cos 2t)y = f(t), \quad (9.64)$$

где a , d — постоянные величины.

Общее решение уравнения Матье может быть получено с применением специальных функций Матье или же посредством разложения в ряды Фурье.

Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса, Бриллюэна). При исследовании периодических движений в механизмах могут быть случаи, когда в уравнении движения типа (9.63) функции $p^2(t)$ и $f(t)$ медленно изменяются во времени. Тогда функцию $p(t)$ по аналогии с уравнением консервативного типа (9.8) можно рассматривать как медленно изменяющуюся собственную частоту. При этом допущении приближенное решение однородного уравнения

$$\ddot{y} + p^2(t)y = 0 \quad (9.65)$$

разыскивается в виде

$$y = p^{-0,5} \left(C_1 \cos \int p dt + C_2 \sin \int p dt \right). \quad (9.66)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -0,5p^{-1}\dot{p} \left(C_1 \cos \int p dt + C_2 \sin \int p dt \right) + \\ & + p^{0,5} \left(-C_1 \sin \int p dt + C_2 \cos \int p dt \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -0,5p^{-1}\dot{p}y - p^{0,5} \left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt \right); \\ \ddot{y} = & 0,5p^{-2}\dot{p}^2y - 0,5p^{-1}\ddot{p}y - 0,5p^{-1}\dot{p}y - \\ & - 0,5p^{-0,5}\dot{p} \left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt \right) - \\ & - p^{1,5} \left(C_1 \cos \int p dt + C_2 \sin \int p dt \right), \end{aligned}$$

или

$$\ddot{y} = 0,5p^{-2}\dot{p}^2y - 0,5p^{-1}\ddot{p}y + 0,25p^{-2}\dot{p}^2y + \\ + 0,5p^{-0,5}\dot{p}\left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt\right) - \\ - 0,5p^{-0,5}\dot{p}\left(C_1 \sin \int p dt - C_2 \cos \int p dt\right) - p^2y.$$

Следовательно,

$$\ddot{y} + (p^2 - 0,75p^{-2}\dot{p}^2 + 0,5p^{-1}\ddot{p})y = 0. \quad (9.67)$$

Сравнивая уравнения (9.65) и (9.67), видим, что выражение (9.66) может быть приближенно принято за решение уравнения (9.65), если

$$-0,75p^{-2}\dot{p}^2 + 0,5p^{-1}\ddot{p} \approx 0,$$

или

$$\left| \frac{0,5\dot{p}}{p^3} - 0,75 \left(\frac{\dot{p}}{p^2} \right)^2 \right| \ll 1. \quad (9.68)$$

Постоянные C_1 и C_2 в выражении (9.66) находятся из начальных условий ($y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$):

$$y_0 = p_0^{-0,5}C_1, \quad \dot{y}_0 = -0,5p_0^{-1}\dot{p}_0y_0 + C_2p_0^{0,5},$$

где $p_0 = p(0)$ и $\dot{p}_0 = \dot{p}(0)$.

Отсюда

$$C_1 = p_0^{0,5}y_0, \quad C_2 = \dot{y}_0p_0^{-0,5} + 0,5p_0^{-1,5}\dot{p}_0y_0,$$

и приближенное решение однородного уравнения (9.65) принимает вид

$$y = \sqrt{\frac{p_0}{p}} y_0 \cos \int_0^t p dt + \frac{1}{\sqrt{p p_0}} \left(\dot{y}_0 + \frac{0,5\dot{p}_0}{p_0} y_0 \right) \sin \int_0^t p dt. \quad (9.69)$$

Приближенное решение неоднородного уравнения (9.63) может быть представлено как сумма решения (9.69) и частного решения

$$y_* = \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{p(\tau)}} \sin \int_{\tau}^t p(\xi) d\xi d\tau, \quad (9.70)$$

где ξ — переменная интегрирования *).

*) Вульфсон И. И., Колосовский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. — Л.: Машиностроение, 1968.

ГЛАВА 10

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЗМОВ

§ 41. Передаточные функции

Кинематические передаточные функции. *Кинематической передаточной функцией нулевого порядка*, или иначе, *функцией положения* в механизмах с одной степенью свободы называется функциональная зависимость между обобщенными координатами (угловыми или линейными) выходного и входного звеньев. Первая производная функции положения по обобщенной координате механизма называется *кинематической передаточной функцией первого порядка (передаточным отношением)*, вторая производная — *кинематической передаточной функцией второго порядка* и т. д.

Кинематические передаточные функции не зависят от закона движения входного звена и являются собственными характеристиками механизма, так как при данном значении обобщенной координаты механизма они зависят только от параметров кинематической схемы. Связь между кинематическими характеристиками (скоростями и ускорениями различных порядков) и кинематическими передаточными функциями устанавливается последовательным дифференцированием функции положения по правилам дифференцирования сложных функций (функций от функций).

Пусть, например, положение входного звена определяется углом поворота φ , а выходного звена — углом поворота ψ . Тогда после дифференцирования функции положения $\psi(\varphi)$ по времени получаем

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

или в других обозначениях

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}'\dot{\varphi}, \quad (10.1)$$

т. е. угловая скорость выходного звена $\dot{\psi}$ равна произведению кинематической передаточной функции первого порядка (аналога угловой скорости или передаточного отношения) на угловую скорость входного звена.

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

или в других обозначениях

$$\ddot{\psi} = \psi''\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}'\ddot{\varphi}, \quad (10.2)$$

где $\ddot{\psi}$ — угловое ускорение выходного звена, ψ'' — кинематическая передаточная функция второго порядка (аналог углового ускорения), $\ddot{\varphi}$ — угловое ускорение входного звена.

Аналогичные соотношения между кинематическими характеристиками механизма и кинематическими передаточными функциями получаются при прямолинейно движущемся звене.

Динамическая передаточная функция. Кинематические передаточные функции определяют только кинематические свойства механизмов. Динамические свойства механизма при линейных уравнениях движения определяются динамической передаточной функцией, которая является собственной характеристикой механизма, не зависящей от начальных условий и от сил, действующих на звенья механизма.

Динамической передаточной функцией механизма $W(s)$ называется отношение изображения по Лапласу выходной величины $y(t)$ в линейном уравнении движения механизма (безразмерной обобщенной координаты) к изображению входной величины $x(t)$ в том же уравнении (безразмерной обобщенной силы) при нулевых начальных условиях.

Обозначая через $Y(s)$ и $X(s)$ изображения функций $y(t)$ и $x(t)$, получаем

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (10.3)$$

Пусть, например, линейное уравнение движения механизма представлено уравнением (9.1):

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t),$$

или в безразмерном виде (9.4)

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx,$$

где $y = q/q_n$, $x = Q(t)/Q_n$, $T_2^2 = a/c$, $T_1 = b/c$, $k = Q_n/(cq_n)$.

Подставляя в это уравнение изображения по Лапласу $\ddot{y}$, $\dot{y}$ и x с учетом (9.19) и (9.20), получаем

$$T_2^2 [s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0] + T_1 [sY(s) - y_0] + Y(s) = kX(s),$$

где y_0 , $\dot{y}_0$ — начальные значения функции y и ее первой производной по времени. Отсюда

$$Y(s) = \frac{T_2^2 (sy_0 + \dot{y}_0) + T_1 y_0 + kX(s)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

Динамическая передаточная функция, определяемая как отношение $Y(s)$ к $X(s)$, при нулевых начальных условиях ($y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$)

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \equiv \frac{Q_n/q_n}{as^2 + bs + c} \quad (10.4)$$

не зависит от закона изменения безразмерной обобщенной силы $x(t)$ и начальных условий и, следовательно, является собственной

характеристикой механизма, определяющей его динамические свойства. Другими словами, динамическая передаточная функция характеризует вид левой части дифференциального уравнения движения механизма.

Зная динамическую передаточную функцию механизма, можно при любом заданном законе изменения обобщенной силы найти изображение безразмерной обобщенной силы $X(s)$ и затем найти изображение безразмерного перемещения $Y(s)$ из условия

$$Y(s) = W(s)X(s)$$

при нулевых начальных условиях. Искомая функция $y(t)$ после этого находится непосредственно по справочным таблицам оригиналов и изображений. Если начальные условия отличаются от нулевых ($t=0$, $y=y_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$), то можно использовать замену переменных

$$z = y - \dot{y}_0 t - y_0$$

или же определять изображение $Y(s)$ с учетом начальных условий. В рассматриваемом примере

$$Y(s) = W(s) + \frac{T_2^2(s\dot{y}_0 + \ddot{y}_0) + T_1 y_0}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

Следовательно, если уравнение движения механизма представлено линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то динамическая передаточная функция полностью определяет динамические свойства механизма при любых заданных законах изменения сил. Отсюда и происходит ее название. В теории автоматического регулирования употребляется только термин «передаточная функция» без указания слова «динамическая», так как, в отличие от теории механизмов, в теории регулирования не рассматриваются кинематические передаточные функции. Иногда для сокращения текста можно опускать прилагательные «кинематическая» и «динамическая», если очевидно, о какой передаточной функции идет речь.

Если безразмерное уравнение движения механизма представлено в форме (9.9)

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1 x,$$

то, подставляя в него изображения функций $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y и x при нулевых начальных условиях, получаем

$$(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2) Y(s) = k_1 X(s).$$

Отсюда динамическая передаточная функция для рассматриваемого примера

$$W(s) = \frac{k_1}{s^2 + 2\gamma s + \lambda^2} = \frac{Q_n/q_n}{as^2 + bs + c}, \quad (10.5)$$

т. е. для безразмерных уравнений движения (9.4) и (9.9) динамическая передаточная функция имеет один и тот же вид, а ее значения являются безразмерными величинами.

Иногда динамическую передаточную функцию определяют из линейного уравнения движения (9.1) в размерном виде как отношение изображения по Лапласу обобщенной координаты $q(t)$ к изображению обобщенной силы $Q(t)$. Тогда размерная динамическая передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \equiv \frac{1}{a(s^2 + 2\gamma s + \lambda^2)}, \quad (10.6)$$

и размерность ее значений определяется размерностью отношения $q(t)/Q(t)$.

§ 42. Частотные характеристики

Частотная передаточная функция. Для оценки установившихся режимов удобно рассматривать поведение системы при гармонических воздействиях, так как динамические характеристики при этих воздействиях легко определяются экспериментальным путем. Кроме того, во многих механизмах внешние силы, действующие на звенья механизма, могут быть с достаточной точностью представлены в виде суммы гармоник различных частот.

Пусть гармоническая вынуждающая сила изменяется по закону

$$Q(t) = A_1 e^{i(\omega t + \theta_1)},$$

или

$$Q(i\omega) = A_1(i\omega) e^{i\omega t},$$

где $A_1(i\omega) = A_1 e^{i\theta_1}$ — комплексная амплитуда гармонической вынуждающей силы.

Тогда обобщенная координата q , определяемая из линейного уравнения движения, будет тоже гармонической функцией той же угловой частоты ω , но с измененной амплитудой и фазой, причем эти изменения зависят от типа уравнения движения, от постоянных параметров механизма и от угловой частоты ω :

$$q(t) = A_2 e^{i(\omega t + \theta_2)},$$

или

$$q(i\omega) = A_2(i\omega) e^{i\omega t},$$

где $A_2(i\omega) = A_2 e^{i\theta_2}$ — комплексная амплитуда гармонических колебаний.

Отношение комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы называется *частотной передаточной функцией*

$$W(i\omega) = \frac{A_2(i\omega)}{A_1(i\omega)}. \quad (10.7)$$

Например, для механизма, уравнение движения которого представлено уравнением (9.58), при $x(i\omega) = e^{i\omega t}$ комплексная амплитуда вынужденных гармонических колебаний $A_2(i\omega)$ находится из (9.60) умножением на q_n . Принимая $A_1 = Q_n$, получаем, что $k_1 q_n = A_1/a$ и, следовательно,

$$A_2(i\omega) = \frac{A_1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)}.$$

Частотная передаточная функция по условию (10.7)

$$W(i\omega) = \frac{1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)} \equiv \frac{1}{-a\omega^2 + bi\omega + c}. \quad (10.8)$$

Сравнение выражений (10.8) и (10.6) показывает, что частотная передаточная функция получается из динамической передаточной функции заменой комплексной переменной s на чисто мнимую величину $i\omega$. Другими словами, переход от динамической передаточной функции $W(s)$ к частотной передаточной функции $W(i\omega)$ соответствует переходу от преобразования Лапласа при $\sigma = 0$ к преобразованию Фурье. Это заключение справедливо и для тех случаев, когда динамическая передаточная функция и комплексные амплитуды определяются в безразмерных величинах.

Амплитудно-частотная характеристика. Частотными характеристиками называются динамические характеристики гармонических вынужденных колебаний, зависящие от частоты гармонического возбуждения. Наиболее употребительной является *амплитудно-частотная характеристика*, под которой понимается зависимость амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического возбуждения.

Например, для механизма, уравнение движения которого представлено уравнением (9.1) при $Q(t) = A_1 \sin \omega t$, амплитуда вынужденных гармонических колебаний A_2 находится из (9.54) умножением на q_n . Принимая $Q_n = A_1$, получаем, что $k_1 q_n = A_1/a$ и, следовательно, размерная амплитуда

$$A_2 = \frac{A_1}{a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (10.9)$$

Для того чтобы амплитудно-частотная характеристика была собственной характеристикой механизма, обычно изображают ее в виде зависимости $A(\omega) = A_2/A_1$. На рис. 61, а показан график $A(\omega)$ для фиксированного значения γ . При $\omega = 0$ значение амплитуды A равно статическому перемещению от единичной силы $A_{ст} = 1/c$. При $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда A стремится к нулю. Максимальное значение A достигается при $\omega = \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma^2}$, т. е. вблизи $\omega = \lambda$.

Фазо-частотная характеристика. Зависимость разности фаз между гармоническими вынужденными колебаниями и гармоническим

возбуждением от его частоты называется *фазо-частотной характеристикой*. Обычно начальная фаза гармонического возбуждения принимается равной нулю. Тогда фазо-частотная характеристика изображает зависимость начальной фазы гармонических вынужденных колебаний θ от частоты ω . На рис. 61, б показана эта характеристика для рассматриваемого примера

$$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика. Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики можно объединить в единую характеристику, которая изображается годографом вектора, модуль которого равен амплитуде вынужденных гармонических колебаний, а угол, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс против хода часовой стрелки, равен начальной фазе θ (рис. 62).

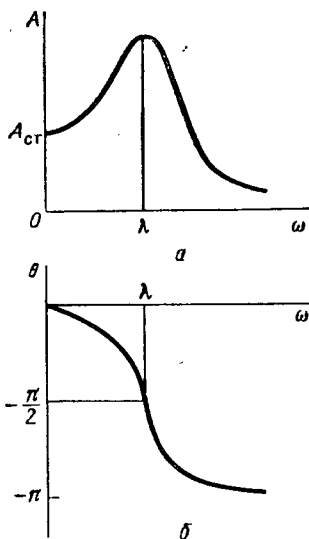


Рис. 61

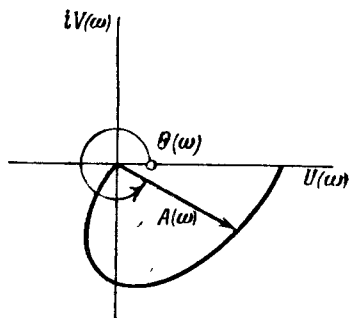


Рис. 62

Этот годограф обычно строится на комплексной плоскости, и тогда комплексная величина, модуль которой равен амплитуде, а аргумент — начальной фазе гармонических колебаний, дает комплексную амплитуду $A(i\omega)$. Соответственно *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* называется зависимость комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического возбуждения.

Действительная (вещественная) часть комплексной амплитуды $A(i\omega)$ обозначается через $U(\omega)$, а мнимая — через $iV(\omega)$:

$$A(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega).$$

Переход от частотных характеристик $A(\omega)$ и $\theta(\omega)$ к характеристикам $U(\omega)$ и $V(\omega)$ и обратно производится по соотношениям:

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \theta(\omega), \quad V(\omega) = A(\omega) \sin \theta(\omega),$$

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Для того чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика была собственной характеристикой механизма, зависящей только от типа уравнения движения механизма и его параметров, ее строят в виде годографа частотной передаточной функции, представляющей собой отношение комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы. Тогда модуль этого годографа согласно правилам деления комплексных величин равен отношению действительных амплитуд гармонических колебаний и вынуждающей силы, а угол, составляемый вектором годографа с положительным направлением оси абсцисс, равен разности фаз перемещения и силы, т. е. модуль и аргумент частотной передаточной функции дают соответственно амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики.

При построении частотных характеристик $A(\omega)$ и $\theta(\omega)$, для того чтобы охватить больший диапазон частот, откладывают на оси абсцисс частоту в логарифмическом масштабе. Соответствующие характеристики называются *логарифмическими частотными характеристиками*. При построении логарифмической амплитудно-частотной характеристики по оси ординат откладывают обычно величину $L = 20 \lg A$.

Резонансные частоты. Из графика амплитудно-частотной характеристики, показанного на рис. 61, а, видно, что амплитуда вынужденных колебаний увеличивается по мере приближения частоты гармонического возбуждения ω к собственной частоте λ . Вынужденные колебания, соответствующие одному из максимумов амплитудно-частотной характеристики, называются *резонансными колебаниями (резонансом)*. Частота, при которой наступает резонанс, называется *резонансной частотой*. Несколько максимумов амплитудно-частотной характеристики и, следовательно, несколько резонансных частот наблюдаются в механизмах с несколькими степенями свободы.

Например, для амплитудно-частотной характеристики, показанной на рис. 61, а, резонансная частота $\omega_p = \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma^2}$ и амплитуда колебаний при резонансе имеет значение

$$A_p = \frac{k_1}{2\gamma \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}}.$$

При $\gamma = 0$, т. е. в отсутствие трения, резонансная частота $\omega_p = \lambda$ и $A_p \rightarrow \infty$. К тому же результату можно прийти путем решения уравнения движения консервативного типа при условии, что

частота вынужденных колебаний равна собственной частоте механизма.

Например, для безразмерного уравнения движения механизма (9.9) при $\gamma = 0$ и $x = \sin \lambda t$ имеем

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = k_1 \sin \lambda t.$$

Заменяя оригиналы их изображениями, получаем

$$s^2 Y - sy_0 - \dot{y}_0 + \lambda^2 Y = k_1 \frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{sy_0 + \dot{y}_0}{s^2 + \lambda^2} + k_1 \frac{\lambda}{(s^2 + \lambda^2)^2}.$$

Обратный переход к оригиналам по табл. 6 (пп. 3, 4, 6) дает

$$y = y_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{y}_0}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{k_1}{2\lambda^2} (\sin \lambda t - \lambda t \cos \lambda t),$$

т. е., в отличие от решения (9.50), при $\omega \neq \lambda$ слагаемое, выражающее вынужденные колебания, представлено вековым (резонансным) членом, который по абсолютной величине неограниченно возрастает во времени, если в системе нет сопротивлений трения.

Коэффициент динамичности. *Коэффициентом динамичности* (иногда коэффициентом динамического усиления) в общем смысле слова называют отношение какой-либо величины, характеризующей динамику системы, к значению этой величины в статике. Наиболее употребительным является *коэффициент динамичности по перемещениям*. При силовом возбуждении коэффициентом динамичности по перемещениям называют отношение амплитуды гармонических вынужденных колебаний к статическому перемещению под действием силы, равной амплитуде гармонического возбуждения.

Например, при изменении обобщенной силы по синусоидальному закону $Q(t) = A_1 \sin \omega t$ амплитуда гармонических вынужденных колебаний определяется по (10.9)

$$A_2 = \frac{A_1}{a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Амплитуда гармонического возбуждения, т. е. амплитуда изменения обобщенной силы, равна A_1 . Перемещение, вызываемое действием этой силы, равно A_1/c , где c — коэффициент жесткости. Следовательно, коэффициент динамичности по перемещениям при $\lambda^2 = c/a$:

$$K_{\text{дин}} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

На рис. 63, а показаны *резонансные кривые*, выражающие зависимость коэффициента динамичности от частотного отношения, равного отношению частоты вынужденных колебаний к собственной частоте, при нескольких значениях коэффициента демпфирования γ .

При кинематическом возбуждении коэффициент динамичности по перемещениям равен отношению амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде возбуждения, если оно принято гармоническим. При других видах кинематического возбуждения предпочитают

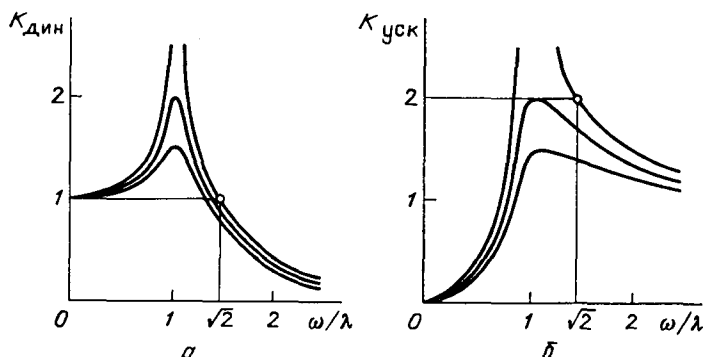


Рис. 63

определять коэффициент динамичности по ускорениям, под которым понимается отношение максимального модуля ускорения выходного звена с учетом упругости звеньев механизма к максимальному модулю ускорения этого же звена без учета упругости звеньев.

При гармоническом возбуждении максимальный модуль ускорения выходного звена определяется из (9.53) после двукратного дифференцирования:

$$\ddot{y}_{\max} = \frac{k_1 \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Без учета упругости звеньев $\ddot{y}_{\max} = k_1$. Следовательно, коэффициент динамичности по ускорениям

$$K_{\text{уск}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \equiv K_{\text{дин}} \frac{\omega^2}{\lambda^2}.$$

На рис. 63, б показаны графики зависимости коэффициента динамичности по ускорениям от частотного отношения ω/λ , соответствующие резонансным кривым, показанным на рис. 63, а. Коэффициент динамичности по перемещениям без учета сил трения ($\gamma = 0$) равен 1 при $\omega/\lambda = \sqrt{2}$ и при $\omega/\lambda \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Коэффициент динамичности по ускорениям для $\gamma = 0$ равен 2 при $\omega/\lambda = \sqrt{2}$ и при $\omega/\lambda \rightarrow \infty$ стремится к 1.

Коэффициент динамичности по ускорениям можно рассматривать так же как отношение максимальных значений силы инерции выходного звена с учетом упругости звеньев механизма и без учета упругости. Аналогично вводится коэффициент динамичности по силам как отношение максимальных значений какой-либо силы или момента сил (например, момента сил на валу выходного звена) с учетом упругости звеньев и без учета упругости.

Динамическая жесткость. *Динамической жесткостью* называется отношение амплитуды гармонической вынуждающей силы к амплитуде гармонических вынужденных колебаний. Величина, обратная динамической жесткости, называется *динамической податливостью*. Обозначая амплитуду гармонической вынуждающей силы через A_1 и определяя амплитуду вынужденных колебаний A_2 по (10.9), получаем выражение для динамической жесткости

$$D = \frac{A_1}{A_2} \equiv a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

При $\gamma = 0$ и $\omega = 0$ динамическая жесткость $D = a\lambda^2 \equiv c$ совпадает со статической жесткостью. В отличие от статической динамическая жесткость зависит от частоты вынуждающей силы и, следовательно, является частотной характеристикой механизма.

В тех случаях, когда между силой и перемещением есть сдвиг фаз, определяют *комплексную динамическую жесткость* как отношение амплитуды гармонической вынуждающей силы к комплексной амплитуде вынужденных колебаний.

Определяя комплексную амплитуду по (9.60) при $k_1 = A_1/a$, получаем

$$D(i\omega) = \frac{A_1}{A(i\omega)} \equiv a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2).$$

Модуль этой комплексной величины

$$D = a \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

совпадает с выражением для динамической жесткости.

Величина, обратная комплексной динамической жесткости, называется *комплексной динамической податливостью*. По определению комплексная динамическая податливость совпадает с частотной передаточной функцией (10.8)

$$\frac{1}{D(i\omega)} = \frac{1}{a(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)} \equiv W(i\omega).$$

§ 43. Устойчивость движений в механизмах

Условие устойчивости движений. Предположим, что под действием внешних сил звенья механизма совершают некоторое движение, которое будем называть *невозмущенным*. Значения обобщенных координат механизма, найденные решением уравнений движе-

ния для невозмущенного движения, обозначим через $y_i(t)$, где $i = 1, \dots, s$. Если в некоторый момент времени происходит внезапное изменение внешней силы или какого-либо параметра механизма, которое вызывает соответствующее изменение обобщенных скоростей или ускорений, то дальнейшее движение звеньев может рассматриваться как движение с изменяемыми начальными условиями. При этом движении, называемом *возмущенным*, обобщенные координаты механизма будут определяться теми же уравнениями, но с изменяемыми начальными условиями, а значения этих координат $y_{\text{в}}$ будут связаны с их значениями при невозмущенном (собственном) движении соотношением

$$y_{\text{в}} = y_i + y_{\text{с}}.$$

Движение механизма называется *асимптотически устойчивым*, если при $t \rightarrow \infty$ значения $y_{\text{с}}$ стремятся к нулю, и *неустойчивым*, если хотя бы одно из значений $y_{\text{с}}$ неограниченно возрастает. Если значения $y_{\text{с}}$ стремятся к некоторым конечным значениям, то движение механизма называется *нейтрально устойчивым*.

Для исследования устойчивости движения механизма предположим, что система линейных уравнений движения механизма приведена к одному дифференциальному уравнению порядка n относительно обобщенной координаты y . Тогда $y_{\text{в}} = y + y_{\text{с}}$, где $y_{\text{с}}$ есть решение соответствующего однородного дифференциального уравнения при начальных условиях, соответствующих моменту возмущения.

Как уже указывалось, общее решение однородного уравнения есть сумма слагаемых, вид которых определяется значениями корней характеристического уравнения. Если в этом решении какое-нибудь его слагаемое неограниченно возрастает по абсолютной величине, то возрастает и вся сумма в целом. Принимая во внимание значения показателей степени в слагаемых (9.13) и (9.14), получаем, что присутствия одного положительного вещественного корня r_i или одной пары сопряженных комплексных корней с положительной вещественной частью $\alpha_k > 0$ оказывается достаточным, чтобы значения $y_{\text{с}}$ неограниченно возрастали. Следовательно, для асимптотической устойчивости движения звеньев механизма необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.

Среди корней характеристического уравнения может быть корень, равный нулю, т. е. $r_i = 0$, или пара чисто мнимых корней $\pm i\lambda_k$. Если при этом вещественные части всех остальных корней отрицательные, то общее решение будет иметь постоянное слагаемое или гармоническое слагаемое с постоянной амплитудой. В этом случае механизм будет нейтрально устойчив.

Корни характеристического уравнения для исследования устойчивости движения удобно изображать в виде точек на комплексной

плоскости. Тогда условие устойчивости при линейных уравнениях движения формулируется как условие расположения всех корней характеристического уравнения слева от мнимой оси комплексной плоскости. Если хотя бы один вещественный корень или одна пара сопряженных комплексных корней находится справа от мнимой оси, то механизм неустойчив. Мнимая ось является границей устойчивости.

Полученное условие устойчивости справедливо не только для линейных, но и для линеаризованных уравнений независимо от членов выше первого порядка малости. В этих случаях говорят об устойчивости движения по первому приближению (теорема Ляпунова). Однако в случае нулевых или чисто мнимых корней линеаризованного уравнения требуется дополнительное исследование устойчивости.

Алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица. Сформулированное условие устойчивости требует нахождения корней характеристического уравнения, что становится затруднительным, если это уравнение выше третьего порядка. Поэтому неоднократно предлагались критерии устойчивости в виде определенных правил, следуя которым можно определить устойчивость движения, минуя вычисление корней.

Критерии устойчивости подразделяют на *алгебраические* и *частотные*. К алгебраическим принадлежат *критерий Рауса* (1875) и *критерий Гурвица* (1895). Оба критерия основаны на рассмотрении числовых значений коэффициентов характеристического уравнения, которое принято записывать в следующем виде:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Предварительно заметим, что уравнения движения первого и второго порядка устойчивы, если все коэффициенты характеристического уравнения больше нуля. Для уравнений более высокого порядка положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Если все коэффициенты уравнения положительны, то все его вещественные корни отрицательные, но среди комплексных корней могут быть и корни с положительной вещественной частью.

При равенстве нулю коэффициента a_n движение механизма соответствует границе устойчивости. При равенстве нулю какого-либо другого коэффициента движение механизма либо на границе устойчивости, либо неустойчиво.

Для более детального исследования соотношений между коэффициентами характеристического уравнения Раус предложил составлять таблицу, названную впоследствии его именем (табл. 7).

Первая строка таблицы содержит четные коэффициенты характеристического уравнения, вторая строка — нечетные коэффициенты. В последующих строках записывают вычисления по указанным в них формулам. Всего в таблице заполняют $n + 1$ строк.

Критерий Рауса формулируется следующим образом: для того чтобы движение было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели одинаковый знак. Обычно характеристическое уравнение приводят к виду, когда $a_0 > 0$. Тогда для устойчивости движения все остальные коэффициенты первого столбца также должны быть положительными, т. е.

$$c_{i1} > 0, \quad i = 2, 3, \dots, n+1.$$

Если один из коэффициентов первого столбца равен нулю, а остальные — положительные, то характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней (граница устойчивости).

Таблица 7

Номер строки	Вспомогательные коэффициенты	Номер столбца			
		1	2	3	...
1	—	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	...
2	—	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	...
3	$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - r_3 c_{24}$	...
...	...	...	...	...	...
i	$r_i = \frac{c_{i-2, 1}}{c_{i-1, 1}}$	$c_{i1} = c_{i-2, 2} - r_i c_{i-1, 2}$	$c_{i2} = c_{i-2, 3} - r_i c_{i-1, 3}$	$c_{i3} = c_{i-2, 4} - r_i c_{i-1, 4}$	...
...	...	...	...	...	...

Критерий Гурвица получается из критерия Рауса и для уравнений не выше пятого порядка оказывается проще. Для того чтобы применить критерий Гурвица, составляют матрицу из коэффициентов характеристического уравнения:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n.
 \end{array} \quad (10.10)$$

По диагонали таблицы от левого верхнего угла выписывают коэффициенты, начиная с a_1 до a_n . Затем каждый столбец таблицы дополняют так, чтобы вверх от диагонали индексы коэффициентов увеличивались, а вниз — уменьшались. Вместо коэффициентов с индексом меньше 0 и больше n пишут нуль.

Критерий Гурвица формулируется так: *движение устойчиво, если при $a_0 > 0$ положительны n определителей Гурвица, получаемых из (10.10), т. е.*

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Движение соответствует границе устойчивости, если $\Delta_n = 0$. Для $n = 2$ условием устойчивости является лишь положительность коэффициентов характеристического уравнения. Для $n = 3$ должны удовлетворяться следующие неравенства:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_0 a_3. \quad (10.11)$$

Для $n = 4$:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \\ a_4 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4. \quad (10.12)$$

Для $n = 5$:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_5 > 0, \\ a_1 a_2 > a_0 a_3, \quad (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_3) > (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2. \quad (10.13)$$

Частотные критерии устойчивости Найквиста и Михайлова. К частотным критериям устойчивости принадлежат критерии Найквиста (1932) и Михайлова (1938). Оба критерия используются преимущественно при исследовании систем автоматического регулирования, так как позволяют учесть влияние обратных связей на устойчивость регулирования. Однако и при исследовании устойчивости движений в механизмах они могут быть полезны, особенно в тех случаях, когда требуется установить, в каких пределах можно изменять тот или иной параметр механизма.

Критерий Михайлова, как и критерий Рауса и Гурвица, основан на рассмотрении характеристического уравнения. С этой целью на комплексной плоскости строится годограф характеристического вектора $R(i\omega)$, который получается из характеристического полинома

$$R = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n$$

путем подстановки $r = i\omega$:

$$R(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n \equiv X + iY,$$

где

$$X = a_n - \omega^2 a_{n-2} + \omega^4 a_{n-4} - \dots,$$

$$Y = \omega(a_{n-1} - \omega^2 a_{n-3} + \omega^4 a_{n-5} - \dots).$$

Кривую, которую описывает конец вектора $R(i\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до ∞ , называют *годографом*

Михайлова. Годограф начинается при $\omega = 0$ на вещественной оси в точке a_n и при $\omega = \infty$ уходит в бесконечность в квадранте, соответствующем порядку характеристического уравнения. Для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до ∞ годограф Михайлова начинался на

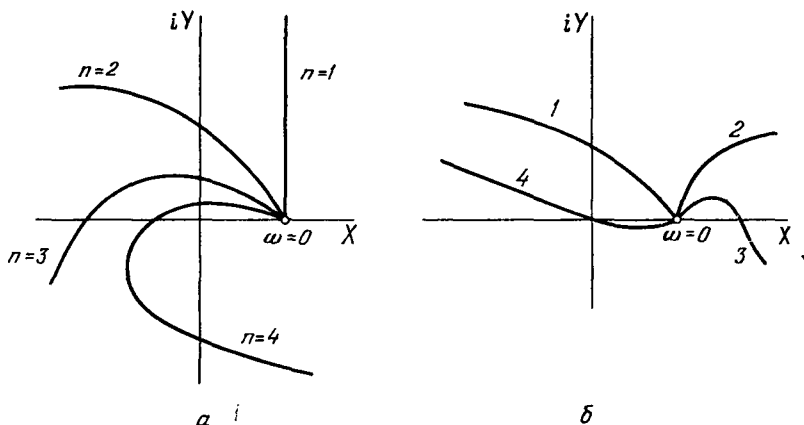


Рис. 64

положительной вещественной полуоси и обошел в положительном направлении (против хода часовой стрелки) последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль.

На рис. 64, а показаны годографы Михайлова устойчивых систем первого — четвертого порядков с равными значениями коэффициента a_n . При четном n годограф уходит в бесконечность вдоль оси X , а при нечетном n — вдоль оси Y .

На рис. 64, б показаны годографы неустойчивых систем четвертого порядка для случая, когда характеристический полином имеет один вещественный корень (кривая 1), два положительных вещественных корня (кривая 2), два комплексных сопряженных корня с положительной вещественной частью (кривая 3), два чисто мнимых корня и положительный вещественный корень (кривая 4).

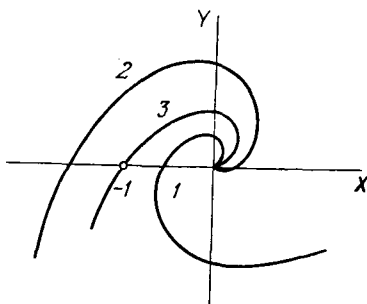


Рис. 65

При использовании критерия Найквиста устойчивость системы определяется по амплитудно-фазовой частотной характеристике, построенной в виде годографа частотной передаточной функции

$W(i\omega)$. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (годограф $W(i\omega)$) не охватывала точку с координатами $[-1, i0]$ при изменении ω от 0 до ∞ .

На рис. 65 показаны три случая: система устойчива (кривая 1), система неустойчива (кривая 2), система на границе устойчивости (кривая 3).

ГЛАВА 11

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

§ 44. Методы линеаризации при решении уравнений движения

Виды нелинейностей в механизмах. Нелинейности в уравнениях движения механизмов возникают или из-за нелинейной зависимости инерционных коэффициентов от обобщенных координат, или из-за нелинейных характеристик сил, действующих на звенья механизма. На рис. 66 показаны типовые нелинейные характеристики упругих и диссипативных сил.

В большинстве случаев зависимость между силой F и упругой деформацией x в соответствии с законом Гука для металлов принимается линейной (прямая 1 на рис. 66, а), т. е. коэффициент жесткости c считается постоянной величиной. Однако для резины коэффициент жесткости возрастает с увеличением силы F , и тогда характеристика $F(x)$ называется *жесткой* (кривая 2 на рис. 66, а). Такую же характеристику имеют упругие силы, действующие на элементы высших пар, так как при точечном или линейном контакте рабочих поверхностей контактная жесткость возрастает с ростом нагрузки. *Мягкую* характеристику (кривая 3 на рис. 66, а) часто имеют звенья, выполненные из полимеров. Кроме того, иногда для получения требуемых динамических характеристик вводят в состав механизма специальные демпфирующие устройства и конические пружины с нелинейными характеристиками типа кривых 2 и 3.

Нелинейными считаются также характеристики, которые имеют точки разрыва или излома. Например, на рис. 66, б показана нелинейная характеристика типа *зазор*. При перемещении элемента кинематической пары в пределах зазора на величину $\pm\Delta$ упругая сила F равна нулю, а затем изменяется по линейному или нелинейному закону. Характеристики сил с точками разрыва или излома называют *существенно нелинейными*, так как в этих точках нельзя определить производную функции $F(x)$ и использовать обычный прием линеаризации посредством разложения в ряд Тейлора. На этом основании характеристика силы трения при сухом или граничном трении считается нелинейной даже в случае, если

коэффициент трения скольжения имеет постоянную величину (рис. 66, в).

В некоторых случаях деформации звеньев механизма сопровождаются заметной *диссипацией* (рассеянием) энергии, связанной с учетом сил неупругого сопротивления. Тогда график $F(x)$ имеет

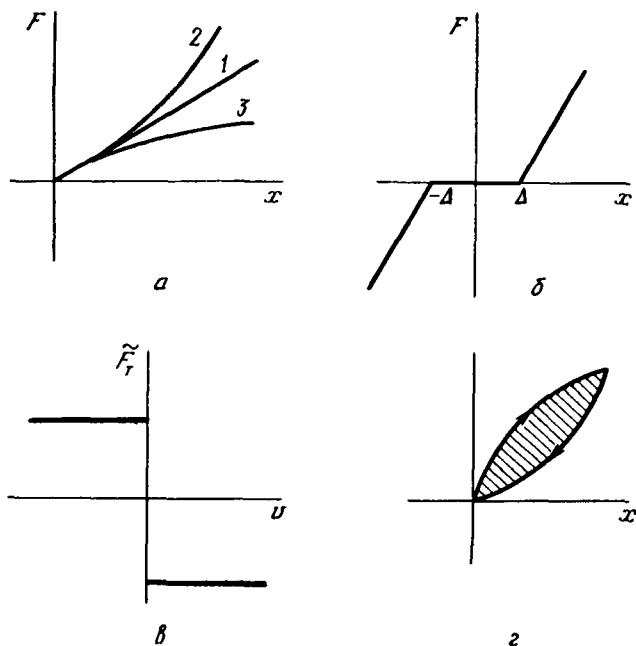


Рис. 66

две ветви, причем верхняя ветвь соответствует нагрузке, а нижняя — разгрузке (рис. 66, г). Контур, образованный этими ветвями, называется *петлей гистерезиса*. Площадь, расположенная внутри петли гистерезиса, пропорциональна работе, затраченной за один цикл на преодоление сил неупругого сопротивления. Отношение этой работы к работе, затраченной на деформацию, называется *коэффициентом рассеяния*.

Линеаризация на малых участках характеристики. При малых перемещениях x нелинейная характеристика $F(x)$ может быть линеаризована в окрестности некоторой величины $x = x_0$, находящейся внутри рассматриваемого отрезка $[a, b]$ изменения x , на основании разложения функции $F(x)$ в ряд Тейлора по степеням отклонения Δx (рис. 67, а). Ограничиваясь первыми двумя членами

этого ряда, получаем

$$F(x_0 + \Delta x) \approx F(x_0) + F'(x_0) \Delta x, \quad (11.1)$$

где $F'(x)$ — производная от $F(x)$ по x .

Геометрическое условие (11.1) означает, что на нелинейной характеристике в окрестности точки $x = x_0$ кривая $F(x)$ заменяется отрезком касательной к этой точке.

Линеаризация на больших участках характеристики. В этом случае для замены кривой $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ прямой линией следует применять методы приближения функций, которые подробно будут рассмотрены в § 93. Здесь же ограничимся изложением

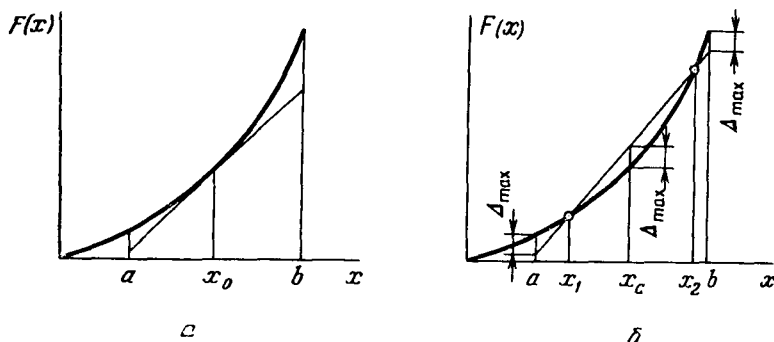


Рис. 67

двух простейших способов. По первому способу на отрезке $[a, b]$ ближе к его концам выбираются две точки с абсциссами x_1 и x_2 , и через эти точки проводится искомая прямая, заменяющая характеристику на выбранном отрезке (рис. 67, б). Этот способ соответствует линейному интерполированию кривой по двум точкам:

$$\begin{aligned} F(x_1) &= kx_1 + d, \\ F(x_2) &= kx_2 + d, \end{aligned} \quad (11.2)$$

где k — угловой коэффициент прямой, d — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

Из линейной системы (11.2) находим величины k и d , определяющие искомую линеаризацию на участке $[a, b]$:

$$F(x) = kx + d.$$

При произвольном выборе абсцисс x_1 и x_2 отклонение прямой линии от заданной кривой по концам отрезка $[a, b]$ и максимальное отклонение внутри этого отрезка в общем случае оказываются не равными между собой. Путем изменения абсцисс x_1 и x_2 можно достичь равенства указанных отклонений, и тогда на основании

теории равномерного (наилучшего) приближения функций максимальное отклонение будет минимальным (приближение по Чебышеву). Отсюда следует второй способ линеаризации, который приводит к решению системы четырех уравнений

$$\begin{aligned} F(a) &= ka + d + \Delta_{\max}, \\ F(x_c) &= kx_c + d - \Delta_{\max}, \\ F(b) &= kb + d + \Delta_{\max}, \\ F'(x_c) &= k, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где $\Delta_{\max}$ — максимальная величина отклонения прямой от заданной кривой, x_c — абсцисса точки кривой $F(x)$ внутри отрезка $[a, b]$, в которой достигается величина $\Delta_{\max}$ (рис. 67, б).

Вместо решения системы (11.3) можно с достаточной для механизма точностью воспользоваться графическим построением искомой прямой по условию равенства максимальных отклонений с последовательным чередованием знаков.

При аналитическом определении коэффициентов k и d можно применить также условия квадратического приближения, при котором минимизируется величина среднеквадратического отклонения (см. § 91).

§ 45. Метод гармонического баланса и метод Галеркина

Метод гармонического баланса. Линеаризация отдельных членов нелинейного уравнения движения механизма позволяет привести его к линейному виду, но получаемые при этом приближении решения оказываются близкими к точным только в тех пределах изменения обобщенных координат и скоростей, которые были приняты при линеаризации. Обычно эти пределы соответствуют малым колебаниям около положения равновесия, и потому методы линеаризации, рассмотренные в предыдущем параграфе, как правило, не пригодны для исследования периодических движений с достаточно широкими пределами изменения обобщенных координат и скоростей. В этих случаях удобнее методы, основанные на приближенной замене нелинейного уравнения движения механизма линейным уравнением определенного типа, решение которого предположительно является близким к искомому решению.

Рассмотрим, например, нелинейное уравнение движения второго порядка

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t), \quad (11.4)$$

где q — обобщенная координата, $F(t)$ — периодическая функция с угловой частотой ω .

Предположим, что решение уравнения (11.4) будет периодическим с угловой частотой ω . Тогда наиболее простой формой этого

решения будет решение, соответствующее гармоническому движению с угловой частотой ω :

$$q^* = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t. \quad (11.5)$$

Требуется найти коэффициенты a_0 , a_1 и b_1 , при которых решение (11.5) будет близко к точному решению уравнения (11.4). С этой целью представим функции $f(q, \dot{q})$ и $F(t)$ в виде усеченных рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(q, \dot{q}) &\approx \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t, \\ F(t) &\approx A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(q, \dot{q}) dt, & \alpha_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(q, \dot{q}) \cos \omega t dt, \\ \beta_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(q, \dot{q}) \sin \omega t dt, & A_0 &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) dt, \\ A_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \cos \omega t dt, & B_1 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение (11.4) приближенные выражения (11.6), полагая

$$\begin{aligned} q &= q^*, & \dot{q} &= -a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t, \\ \ddot{q} &= -a_1 \omega^2 \cos \omega t - b_1 \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Тогда, приравнявая коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в левой и правой частях уравнения (11.4), получаем систему уравнений для определения неизвестных a_0 , a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi, -a_1 \omega \sin \psi + b_1 \omega \cos \psi) d\psi &= A_0, \\ -a_1 \omega^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi, -a_1 \omega \sin \psi + b_1 \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi &= A_1, \\ -b_1 \omega^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi, -a_1 \omega \sin \psi + b_1 \omega \cos \psi) \sin \psi d\psi &= B_1, \end{aligned} \quad (11.8)$$

где $\psi = \omega t$.

Метод Галеркина. Приближенное решение нелинейного уравнения, получаемое по методу гармонического баланса, будет близко к точному только при условии, что форма предполагаемого решения выбрана удачно, т. е. движение близко к гармоническому. Большие возможности для выбора формы предполагаемого решения уравнения (11.4) предоставляет *метод Галеркина*, согласно которому искомое приближенное решение можно выбирать из семейства функций, зависящих от l независимых параметров:

$$q^* = q^*(t, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad (11.9)$$

причем все функции, принадлежащие этому семейству, являются периодическими с периодом T , равным периоду функции $F(t)$ в уравнении (11.4).

Для вывода условий, которым должны удовлетворять параметры $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, рассмотрим соотношение

$$\int_0^T \{ \ddot{q}(t) + f[q(t), \dot{q}(t)] - F(t) \} [q_1(t) - q(t)] dt = 0, \quad (11.10)$$

где q — точное периодическое решение уравнения (11.4) с периодом T , q_1 — произвольная непрерывная периодическая функция того же периода.

Справедливость этого соотношения следует из того, что выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю. На основании принципа Гамильтона — Остроградского можно утверждать и обратное: если условие (11.10) выполняется для любой непрерывной функции $q_1(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$|q_1(t) - q(t)| < \mu,$$

где μ — любое заданное сколь угодно малое положительное число, то q — точное периодическое решение уравнения (11.4).

Обозначим через $\gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0$ значения параметров функции (11.9), соответствующие искомому приближенному решению. Тогда бесконечно близким к этому решению функциям q_1^* должны соответствовать бесконечно близкие значения параметров, т. е.

$$q_1^*(t) = q_1(t, \gamma_1^0 + \delta\gamma_1 + \dots + \gamma_l^0 + \delta\gamma_l),$$

где $\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_l$ — вариации параметров.

Следовательно, с точностью до малых высшего порядка

$$q_1^* - q^*(t) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)}{\partial \gamma_i} \delta\gamma_i,$$

и соотношение (11.10) принимает вид

$$\int_0^T \{ \ddot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0) + f[q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0), \dot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)] - F(t) \} \times \\ \times \sum_{i=1}^l \frac{\partial q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)}{\partial \gamma_i} \delta \gamma_i dt = 0. \quad (11.11)$$

Соотношение (11.11), справедливое при любых комбинациях $\delta \gamma_i$, дает систему уравнений для определения неизвестных параметров γ_i , если последовательно считать все вариации $\delta \gamma_i$ равными нулю, кроме одной $\delta \gamma_k$:

$$\int_0^T \{ \ddot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0) + f[q^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0), \dot{q}^*(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0)] - F(t) \} \times \\ \times \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_k}(t, \gamma_1^0, \dots, \gamma_l^0) dt = 0, \quad k = 1, \dots, l. \quad (11.12)$$

Пример. Нелинейное уравнение, приближенное решение которого разыскивается, имеет вид

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t),$$

где $F(t)$ — периодическая функция с периодом T и угловой частотой $\omega = 2\pi/T$.

Предполагается, что движение будет близко к гармоническому и приближенное решение представляется функцией

$$q^* = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t,$$

т. е. искомые параметры γ_i для семейства функций (11.9) имеют значения: $\gamma_1 = a_0$, $\gamma_2 = a_1$, $\gamma_3 = b_1$. Частные производные, входящие в уравнения (11.12):

$$\frac{\partial q^*}{\partial \gamma_1} = 1, \quad \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_2} = \cos \omega t, \quad \frac{\partial q^*}{\partial \gamma_3} = \sin \omega t.$$

Следовательно, уравнения (11.12) для определения параметров a_0 , a_1 и b_1 с учетом соотношения (11.7) имеют вид

$$\int_0^{2\pi/\omega} [-\omega^2(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + f(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ - a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t) - F(t)] dt = 0, \\ \int_0^{2\pi/\omega} [-\omega^2(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + f(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ - a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t) - F(t)] \cos \omega t dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} [-\omega^2 (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + f(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \\ - a_1 \omega \sin \omega t + b_1 \omega \cos \omega t) - F(t)] \sin \omega t dt = 0.$$

Система этих уравнений совпадает с системой (11.8), если сделать замену переменной интегрирования $\psi = \omega t$ и принять во внимание значения интегралов:

$$\int_0^{2\pi} (a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi) d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi) \cos \psi d\psi = a_1 \pi, \\ \int_0^{2\pi} (a_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi) \sin \psi d\psi = b_1 \pi, \quad \int_0^{2\pi/\omega} F(t) dt = A_0 \frac{2\pi}{\omega}, \\ \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \cos \omega t dt = A_1 \frac{\pi}{\omega}, \quad \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \sin \omega t dt = B_1 \frac{\pi}{\omega}.$$

Из приведенного примера видно, что метод гармонического баланса может рассматриваться как частный случай метода Галеркина.

§ 46. Метод малого параметра

Квазилинейные уравнения движения механизмов. Метод малого параметра, или метод Пуанкаре, применяется для исследования тех уравнений движения механизма, которые содержат *малый параметр* μ и имеют периодическое решение, когда этот параметр равен нулю. Из этих уравнений наибольшее значение имеют *квазилинейные уравнения*, в которые нелинейные члены входят умноженными на малый параметр μ . Происхождение термина связано с тем, что при $\mu = 0$ уравнение движения обращается в линейное, решение которого при соблюдении определенных условий близко к решению нелинейного уравнения и может быть уточнено путем введения малых поправок. Линейное уравнение, получаемое при $\mu = 0$, называется *порождающим*.

Определение периодических решений линейных дифференциальных уравнений. Для определения периодических решений квазилинейных уравнений надо в первую очередь знать периодические решения порождающих уравнений. В задачах динамики механизмов порождающее уравнение обычно имеет вид

$$\ddot{y} + a^2 y = f(t). \quad (11.13)$$

Для существования периодического решения необходимо, чтобы $f(t)$ была периодической функцией. Без ограничения общности можно считать период функции $f(t)$ равным 2π , так как при

периоде, равном T , всегда можно перейти к новой независимой переменной $t_1 = 2\pi t/T$, при которой период становится равным 2π .

Условие периодичности решения уравнения (11.13) имеет вид

$$y(2\pi) = y(0), \quad \dot{y}(2\pi) = \dot{y}(0). \quad (11.14)$$

Из уравнений (11.14) можно найти две постоянные интегрирования в общем решении уравнения (11.13). Однако при этом приходится делать довольно громоздкие вычисления. Более простым является способ, основанный на разложении функции $f(t)$ и искомого периодического решения $y(t)$ в ряды Фурье:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt, \quad (11.15)$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt. \quad (11.16)$$

Для того чтобы определить неизвестные коэффициенты a_0, a_n, b_n по коэффициентам A_0, A_n, B_n заданной функции $F(t)$, дифференцируем ряд (11.16) почленно два раза и подставляем в уравнение (11.13):

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos nt + b_n \sin nt) + \\ + a^2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right] = f(t).$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты в левой части уравнения их значениям в разложении в ряд функции $f(t)$, получаем

$$a_0 = \frac{A_0}{a^2}, \quad a_n = \frac{A_n}{a^2 - n^2}, \quad b_n = \frac{B_n}{a^2 - n^2},$$

т. е. коэффициенты искомого периодического решения уравнения (11.13) отличаются от коэффициентов разложения в ряд функции $f(t)$ только множителем, не зависящим от t и монотонно стремящимся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Если коэффициент a мало отличается от некоторого целого числа n , то при $A_n \neq 0$ или $B_n \neq 0$ имеем резонанс, заключающийся в резком возрастании коэффициента a_n или b_n . Если же $a = n$ и хотя бы один из коэффициентов A_n или B_n не равен нулю, то периодического решения нет, так как в общем решении уравнения (11.13) появляется неперiodическое слагаемое вида $t(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Отсюда следует, что при $a = n$ периодическое решение уравнения (11.13) существует лишь в случае отсутствия в правой

части членов $a_n \cos nt + b_n \sin t$, т. е. при выполнении условий

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0, \quad (11.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0.$$

Применение метода малого параметра для квазилинейных уравнений, в которых правая часть есть явная функция времени. Пусть квазилинейное уравнение имеет вид

$$\ddot{y} + a^2 y = f(t) + \mu F(t, y, \dot{y}, \mu). \quad (11.18)$$

Периодическое решение этого уравнения ищем в виде ряда

$$y(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots + \mu^n y_n(t) + \dots \quad (11.19)$$

Функцию $F(t, y, \dot{y}, \mu)$ также представим в виде ряда по степеням $y - y_0$, $\dot{y} - \dot{y}_0$ и μ :

$$F(t, y, \dot{y}, \mu) = F(t, y_0, \dot{y}_0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{y=y_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \mu=0} (y - y_0) +$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_{y=y_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \mu=0} (\dot{y} - \dot{y}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{y=y_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \mu=0} \mu + \dots \quad (11.20)$$

Дифференцируя ряд (11.19) почленно два раза, получаем

$$\ddot{y}(t, \mu) = \ddot{y}_0(t) + \mu \ddot{y}_1(t) + \dots + \mu^n \ddot{y}_n(t) + \dots \quad (11.21)$$

Подставляя разложения (11.19), (11.20) и (11.21) в уравнение (11.18) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях уравнения, получаем систему уравнений для определения функций $y_0, y_1, \dots$

$$\ddot{y}_0 + a^2 y_0 = f(t),$$

$$\ddot{y}_1 + a^2 y_1 = F(t, y_0, \dot{y}_0, 0),$$

$$\ddot{y}_2 + a^2 y_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{y=y_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \mu=0} y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right)_{y=y_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \mu=0} \dot{y}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)_{y=y_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \mu=0} \mu + \dots \quad (11.22)$$

Система линейных уравнений (11.22) решается последовательно, начиная с первого уравнения, которое совпадает с порождающим уравнением. При решении каждого из уравнений отыскиваются только периодические решения одним из указанных ранее способов. Возможные периоды решений могут быть лишь равными или кратными периоду правой части.

Применение метода малого параметра для автономных систем. Автономной системой уравнений будем называть систему, составленную из уравнений, в которых правая часть не зависит явно от времени. Пусть, например, имеем нелинейное уравнение

$$\ddot{y} + a^2 y = \mu F(y, \dot{y}, \mu). \quad (11.23)$$

Уравнение (11.23) можно рассматривать как частный случай уравнения (11.18). Однако нахождение приближенного решения уравнения (11.23) более сложно из-за того, что в отличие от предыдущего случая нам заранее не известен период искомого решения. Если правая часть явно зависит от t , то периоды решений могут быть лишь равными или кратными периоду правой части. Если же правая часть не содержит t , то возможно существование решений любого периода, который, вообще говоря, оказывается зависящим от параметра μ .

Для отыскания искомого периода решения уравнения (11.23) преобразуем его заменой независимого переменного t на t_1 к виду

$$\frac{d^2 y}{dt_1^2} + y = \mu F_1(y, \dot{y}, \mu). \quad (11.24)$$

Примем, что решение порождающего уравнения имеет период, равный 2π . Тогда периодическое решение уравнения (11.23), если оно существует, будет иметь период $2\pi + \gamma(\mu)$. Разлагая $\gamma(\mu)$ в ряд, получаем

$$2\pi + \gamma(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots), \quad (11.25)$$

где h_n — постоянные величины, подлежащие определению.

Чтобы свести задачу об определении периодического решения автономного уравнения (11.23) к ранее рассмотренной задаче для неавтономного уравнения (11.18), перейдем к новому независимому переменному t_2 так, чтобы периодическое решение уравнения (11.24) имело период не $2\pi + \gamma(\mu)$, а постоянный период 2π . Замена переменных производится по соотношению

$$t_1 = t_2(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots). \quad (11.26)$$

Сравнение соотношений (11.25) и (11.26) показывает, что при изменении t_1 от 0 до $2\pi + \gamma(\mu)$ новое переменное t_2 изменяется от 0 до 2π .

После замены переменных уравнение (11.24) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt_2^2} + (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 y = \\ = \mu(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 \times \\ \times F_1\left(y, \frac{dy/dt_2}{1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots}, \mu\right). \end{aligned} \quad (11.27)$$

Периодическое решение этого уравнения ищем в виде

$$y(t_2, \mu) = y_0(t_2) + \mu y_1(t_2) + \dots + \mu^n y_n(t_2) + \dots, \quad (11.28)$$

где $y_n(t_2)$ — периодические функции аргумента t_2 периода 2π . Подставляя (11.28) в уравнение (11.27) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в левой и правой частях, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_0}{dt_2^2} + y_0 &= 0, \\ \frac{d^2 y_1}{dt_2^2} + y_1 &= -2h_1 y_0 + F_1(y_0, \dot{y}_0, 0), \\ &\dots \end{aligned} \quad (11.29)$$

Из первого уравнения системы (11.29) находим

$$y_0 = C \cos(t_2 - t_0).$$

Второе уравнение системы (11.29) тогда получает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt_2^2} + y_1 &= \\ &= -2h_1 C \cos(t_2 - t_0) + F[C \cos(t_2 - t_0), -C \sin(t_2 - t_0), 0]. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Для того чтобы это уравнение имело периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы в его правой части отсутствовали вековые (резонирующие) члены. Это условие приводит к соотношениям (11.17), которые для уравнения (11.30) имеют вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_1[C \cos(t_2 - t_0), -C \sin(t_2 - t_0), 0] \sin(t_2 - t_0) dt_2 &= 0, \\ -2h_1 C + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1[C \cos(t_2 - t_0), -C \sin(t_2 - t_0), 0] \cos(t_2 - t_0) dt_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Из первого уравнения системы (11.31) находим постоянную C для порождающего уравнения $y_0 = C \cos(t_2 - t_0)$, а из второго h_1 .

Искомый период периодического решения уравнения (11.23)

$$2\pi + \gamma(\mu) \approx 2\pi(1 + h_1\mu).$$

Зная C и h_1 , можно определить следующее приближение $y_1(t_2)$ из уравнения (11.30) и, если необходимо, найти приближения $y_2(t_2)$, $y_3(t_2)$ из аналогичных уравнений системы (11.29).

§ 47. Метод медленно меняющихся параметров

Для многих механизмов в рабочем режиме движения начальных звеньев могут быть близкими к стационарным, т. е. не зависящими от времени. Эти движения могут, в частности, рассматриваться как гармонические с медленно меняющимися параметрами (амплитудами, фазами и т. п.). Тогда для отыскания приближенных решений нелинейных уравнений движения и исследования их устойчивости применим *метод медленно меняющихся параметров*, или *метод Ван-дер-Поля*, основанный на усреднении медленно меняющихся параметров за каждый цикл движения.

Пусть, например, нелинейное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{y} + k^2 y = F(y, \dot{y}). \quad (11.32)$$

Как и в методе малого параметра, считаем, что функция $F(y, \dot{y})$ состоит из малых нелинейных членов. Тогда решение уравнения (11.32) естественно искать в виде

$$y = A \cos(kt - \beta), \quad (11.33)$$

по в отличие от решения порождающего уравнения величины A и β считаем функциями времени, т. е. амплитуда A и фаза β должны медленно изменяться от цикла к циклу.

Параметры A и β примем за новые неизвестные функции (вместо функции y), причем кроме уравнения, получаемого из (11.32) после подстановки в него функции y из соотношения (11.33), надо иметь для определенности еще одно соотношение, связывающее параметры A и β . В качестве такого соотношения примем

$$\dot{A} \cos(kt - \beta) + A \dot{\beta} \sin(kt - \beta) = 0. \quad (11.34)$$

Дифференцируя выражение (11.33) при переменных A и β , получаем

$$\dot{y} = \dot{A} \cos(kt - \beta) + A \dot{\beta} \sin(kt - \beta) - Ak \sin(kt - \beta).$$

С учетом соотношения (11.34) получаем

$$\dot{y} = -Ak \sin(kt - \beta). \quad (11.35)$$

Следовательно, условие (11.34) эквивалентно такому выбору A и β , при котором для $\dot{y}$ получается выражение, совпадающее с выражением $\dot{y}$ для постоянных A и β .

Дифференцирование выражения (11.35) дает

$$\ddot{y} = -\dot{A}k \sin(kt - \beta) - Ak^2 \cos(kt - \beta) + Ak \dot{\beta} \cos(kt - \beta). \quad (11.36)$$

Подставляя выражения (11.33), (11.35) и (11.36) в уравнение (11.32), получаем

$$\begin{aligned} -\dot{A}k \sin(kt - \beta) + Ak \dot{\beta} \cos(kt - \beta) = \\ = F[A \cos(kt - \beta), -Ak \sin(kt - \beta)]. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Уравнения (11.34) и (11.37) могут быть представлены в виде, разрешенном относительно производных $\dot{A}$ и $\dot{\beta}$:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{1}{k} F [A \cos (kt - \beta), -Ak \sin (kt - \beta)] \sin (kt - \beta), \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{Ak} F [A \cos (kt - \beta), -Ak \sin (kt - \beta)] \cos (kt - \beta).\end{aligned}\quad (11.38)$$

Для решения этих уравнений предполагаем, что за один период $2\pi/k$ ввиду медленности изменения величин A и β их производные по времени $\dot{A}$ и $\dot{\beta}$ можно считать постоянными и равными средним значениям:

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi, -Ak \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ \Psi(A) &= -\frac{1}{2\pi Ak} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi, -Ak \sin \psi) \cos \psi \, d\psi,\end{aligned}\quad (11.39)$$

где $\psi = kt - \beta$.

При вычислении интегралов в выражениях (11.39) амплитуда A считается постоянной. После установления вида функций $\Phi(A)$ и $\Psi(A)$ получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{A} = \Phi(A), \quad \dot{\beta} = \Psi(A). \quad (11.40)$$

§ 48. Метод точечных преобразований

Фазовая плоскость. Движение механизма с одной степенью свободы в любой момент времени определяется значениями его обобщенной координаты q и обобщенной скорости $\dot{q}$. Скалярные величины q и $\dot{q}$ можно рассматривать как декартовы координаты точки в плоской системе координат $x = q$, $y = \dot{q}$ (рис. 68). Эта точка называется *изображающей*, а плоскость xu — *фазовой плоскостью*. При движении звеньев механизма величины q и $\dot{q}$ изменяются, и соответственно меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий, описывающих возможные движения звеньев механизма, называется *фазовым портретом (фазовой диаграммой)*.

Применительно к уравнениям движения механизма не выше второго порядка уравнение фазовой траектории можно получить, если заменить уравнение движения механизма эквивалентной си-

системой двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно $x = q$ и $y = \dot{q} \equiv \dot{x}$:

$$y = \dot{x}, \quad \dot{y} = f(x, y). \quad (11.41)$$

Интегрирование этой системы дает зависимость $y = y(x)$, т. е. уравнение фазовой траектории. Заметим, что система (11.41) является автономной, т. е. не зависит от времени. При колебательных

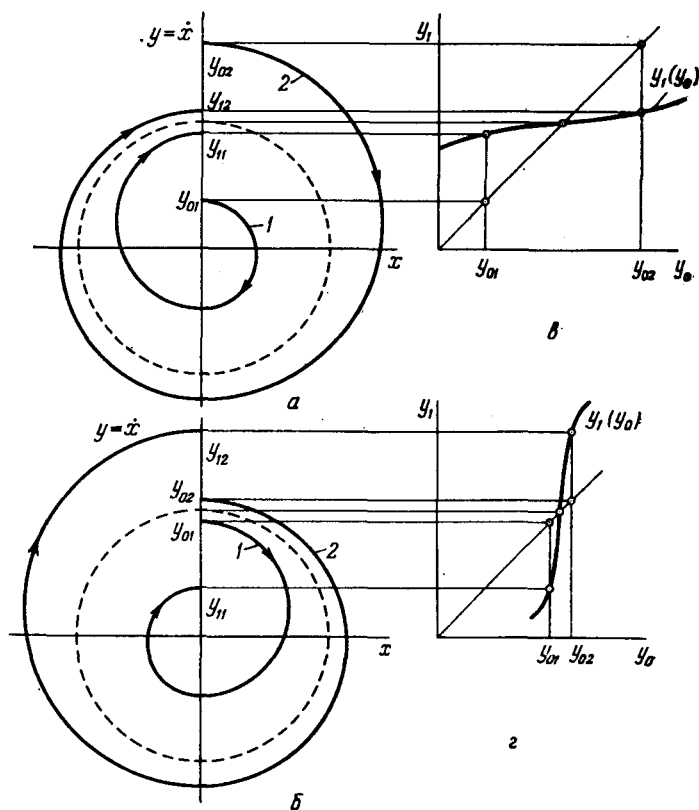


Рис. 68

движениях величины x и y не выходят за некоторые пределы, и весь фазовый портрет занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Предельный цикл. На участке переходного режима (разгона или торможения) фазовая траектория изображается незамкнутой кривой. При установившемся движении, т. е. движении с повторя-

яющимся циклом изменения обобщенной скорости $\dot{q}$ в зависимости от обобщенной координаты q , фазовая траектория изображается замкнутой кривой.

Изменения начальных условий или закона изменения сил, действующих на звенья механизма, отражаются на фазовой плоскости переходом изображающей точки на другую фазовую траекторию. Если все фазовые траектории, расположенные в окрестности изолированной замкнутой траектории, неограниченно приближаются к ней, то такая замкнутая траектория называется *устойчивым предельным циклом* (кривая, показанная штрихами на рис. 68, а). *Неустойчивым предельным циклом* называется изолированная замкнутая траектория, от которой удаляются все расположенные в ее окрестности другие фазовые траектории (кривая, показанная штрихами на рис. 68, б). Возможен также случай, когда фазовые траектории по одну сторону предельного цикла приближаются к нему, а по другую — отходят.

Диаграмма точечного отображения. Изучение поведения отдельной траектории в фазовой плоскости может быть заменено изучением последовательности точек пересечения ее с выбранной полупрямой, в качестве которой чаще всего выбирают положительную полуось y . Если изображающая точка, взятая на полуоси y , после оборота относительно начала координат снова попадает на эту полуось, то в зависимости от динамических свойств механизма она может оказаться выше или ниже первоначального положения или снова вернуться в него. Например, для траектории 1 изображающая точка из положения y_{01} переходит в положение y_{11} , для траектории 2 — из положения y_{02} в положение y_{12} и т. д. Изображающая точка, расположенная на предельном цикле, возвращается в исходное положение.

Диаграммой точечного отображения называется зависимость ординат точек пересечения фазовых траекторий с полуосью от ординат y_0 исходного положения точки (рис. 68, в). По этой диаграмме можно судить о числе предельных циклов и их устойчивости, если дополнительно провести на ней прямую $y_1 = y_0$. Число предельных циклов равно числу точек пересечения прямой $y_1 = y_0$ с кривой $y_1 = y_1(y_0)$. Точки пересечения позволяют также выделить из фазовых траекторий предельные циклы. Для устойчивых предельных циклов производная dy_1/dy_0 меньше единицы, а для неустойчивых — больше единицы (рис. 68, г).

В некоторых случаях удобнее рассматривать последовательности точек пересечения фазовых траекторий с другими прямыми. Если исходные положения изображающих точек лежат на прямой I, а положения, наблюдаемые после оборота относительно начала координат, на прямой II, то говорят о *точечном отображении прямой I в прямую II*. Диаграммы точечного отображения, показанные на рис. 68, в и г, соответствуют точечному отображению положительной полуоси y в самое себя.

Для механизмов с несколькими степенями свободы изображающая точка должна рассматриваться в фазовом пространстве обобщенных координат и скоростей. Тогда для изучения многомерных фазовых траекторий применяется общая теория точечных преобразований поверхностей.

§ 49. Численные и графоаналитические методы

Решение нелинейного уравнения движения механизма при силах, зависящих от положения звеньев. Пусть приведенный момент сил $\bar{M}_n$ задан как функция обобщенной координаты φ (угла поворота начального звена). Приведенный момент инерции J_n также есть заданная функция той же координаты φ . Тогда для определения закона движения начального звена удобно применить уравнение движения в форме интеграла энергии (7.11):

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \bar{M}_n d\varphi = \frac{1}{2} (J_n \omega^2 - J_{n0} \omega_0^2)$$

с начальными условиями ($t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$).

Из уравнения движения механизма непосредственно получаем угловую скорость начального звена как функцию обобщенной координаты φ :

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{J_n} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \bar{M}_n d\varphi + \frac{J_{n0}}{J_n} \omega_0^2}. \quad (11.42)$$

В некоторых случаях интеграл в подкоренном выражении может быть представлен в конечном виде. Тогда после интегрирования получаем функцию $\omega = \omega(\varphi)$, т. е. уравнение фазовой траектории. В других случаях применяют графическое или численное интегрирование и получают функцию $\omega = \omega(\varphi)$ или в виде графика, или в виде ряда своих последовательных значений при изменении угла φ от φ_0 до некоторого значения, определяющего конец рассматриваемого этапа движения.

Для того чтобы найти закон движения начального звена, представим известную нам теперь функцию (11.42) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{\omega}(\varphi).$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\tilde{\omega}(\varphi)}. \quad (11.43)$$

Это интегрирование также выполняется графическим или численным методом. В результате находим функцию $t = t(\varphi)$, зная которую можно найти искомую функцию

$$\varphi = \varphi(t). \quad (11.44)$$

Если требуется найти угловое ускорение начального звена, то, продифференцировав функцию $\tilde{\omega}(\varphi)$ по обобщенной координате φ , т. е. определив аналог углового ускорения $d\tilde{\omega}/d\varphi$, находим угловое ускорение

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} \tilde{\omega}. \quad (11.45)$$

Указанный путь определения функции (11.44) оказывается невозможным, если $\omega_0 = 0$. Тогда на участке от $\varphi = \varphi_0$ до $\varphi = \varphi_1$ применяется дифференциальное уравнение движения (7.20). Из этого уравнения при $\varphi = \varphi_0$ и $\omega = 0$ получаем

$$\tilde{\varepsilon}(\varphi_0) = \frac{\dot{M}_n(\varphi_0)}{J_n(\varphi_0)}.$$

При достаточно малом приращении времени Δt для вычисления ω_1 и φ_1 , т. е. следующего значения функции $\varphi(t)$, применяются формулы равноускоренного движения:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\varepsilon}(\varphi_0) \Delta t, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}(\varphi_0) (\Delta t)^2.$$

Далее можно вычислять интеграл (11.43) в пределах от φ_1 до φ или же продолжить решение дифференциального уравнения (7.20) любым численным методом.

При больших объемах вычислений можно воспользоваться усовершенствованными приемами интегрирования дифференциальных уравнений, излагаемыми в курсах вычислительной техники.

Графоаналитический метод Виттенбауэра. Характеристики сил, действующих на звенья механизма, как правило, известны лишь приближенно и часто задаются в графическом виде. Поэтому наряду с численными методами интегрирования уравнений движения механизма применяются также графические и графоаналитические методы, которые, однако, всегда могут быть переведены на аналитический язык, пригодный для вычислений на ЭВМ. Из этих методов рассмотрим только *метод Виттенбауэра*, который позволяет при силах, зависящих от положений звеньев, в наглядной форме показать, как изменяются угловая скорость начального звена и кинетическая энергия механизма при изменении приведенного момента инерции.

Рассмотрим, например, установившееся движение с периодом, равным 2π . На вращающееся начальное звено действует постоянный движущий момент сил $\dot{M}_д$. Приведенный к этому звену момент всех других внешних сил $\dot{M}_н$ есть заданная функция угла

где μ_M и μ_φ — масштабные коэффициенты моментов сил и углов поворота, равные отношениям этих моментов и углов к отрезкам, изображающим их значения на графиках; F — площадь, заключенная между осью абсцисс и графиком $M_\pi(\varphi)$, причем площадь, расположенная ниже оси абсцисс, должна вычитаться из площади, расположенной выше оси абсцисс.

Уравнение движения (7.11) для участка, где M_π — момент сил сопротивления (M_c), может быть представлено в виде

$$\Delta T = \int_0^\varphi (M_d - M_c) d\varphi, \quad (11.46)$$

где ΔT — приращение кинетической энергии по отношению к начальному положению при $\varphi = 0$.

Для того чтобы уравнение (11.46) было справедливо и для участка, где M_π — движущий момент, надо на этом участке считать $M_c = -M_\pi$.

По уравнению (11.46) строим график приращений кинетической энергии ΔT как функции угла φ (рис. 69, б). Для этого измеряем площадь F_{0i} (мм²), заключенную между графиками $M_d(\varphi)$ и $M_c(\varphi)$ в пределах от $\varphi = 0$ до текущего значения $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, \dots, 12$), считая эту площадь положительной при $M_d > M_c$ и отрицательной при $M_d < M_c$. С учетом масштабных коэффициентов получаем $\Delta T = F_{0i} \mu_M \mu_\varphi$. Построение графиков рекомендуется начинать с нахождения экстремумов ΔT , которые получаются в точках пересечения графиков $M_d(\varphi)$ и $M_c(\varphi)$, т. е. в точках a , b , c и d . Сначала подсчитываем площади F_{ea} , F_{ab} , F_{bc} , F_{cd} и F_{de} . Сумма этих площадей с учетом их знаков должна равняться нулю. Затем находим ординаты графика в точках экстремумов:

$$y_a = F_{ea} / \mu_T, \quad y_b = (F_{ea} - F_{ab}) / \mu_T,$$

$$y_c = (F_{ea} - F_{ab} + F_{bc}) / \mu_T,$$

$$y_d = (F_{ea} - F_{ab} + F_{bc} - F_{cd}) / \mu_T, \text{ или } y_d = -F_{de} / \mu_T,$$

где μ_T — масштабный коэффициент приращения кинетической энергии. После построения экстремумов можно дополнительно вычислить ординаты графика в других точках по формуле

$$y_{0i} = F_{0i} \mu_M \mu_\varphi / \mu_T.$$

Далее по (7.8) для исследуемого механизма строим график зависимости приведенного момента инерции J_π от угла φ , причем с целью упрощения последующего исключения переменной φ из графиков $J_\pi(\varphi)$ и $\Delta T(\varphi)$ располагаем координатные оси, как показано на рис. 69, в. Пересечение горизонталей, проведенных из точек графика $\Delta T(\varphi)$, с вертикалями, проведенными из точек графика $J_\pi(\varphi)$ (рис. 69, г), дает график зависимости приращения кинетической энергии ΔT от приведенного момента инерции J_π , называе-

мый *диаграммой Виттенбауэра*. По ней можно определить угловую скорость $\tilde{\omega}$ начального звена в любом положении, если известно значение $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$ при $\varphi = 0$.

Если отложить значение кинетической энергии при $\varphi = 0$ от начала координат графика $\Delta T(J_n)$ вниз по оси ординат, то полученная точка O_T определит начало координат графика $T(J_n)$. Луч, соединяющий любую точку диаграммы Виттенбауэра с началом координат O_T , образует с осью абсцисс угол ψ , тангенс которого пропорционален квадрату угловой скорости ω . Для доказательства этого положения найдем из прямоугольного треугольника $O_T n N$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{T/\mu_T}{J_n/\mu_J}$$

и, учитывая, что $T = J_n \omega^2/2$, получим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_J \omega^2}{2\mu_T}. \quad (11.47)$$

Если точка O_T располагается в пределах чертежа, то, пользуясь (11.47), можно найти искомую зависимость $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\varphi)$ и далее закон движения начального звена, как было показано ранее.

Определение момента инерции маховика при силах, зависящих от положений звеньев. Одной из кинематических характеристик установившегося движения является коэффициент неравномерности движения δ , под которым понимается отношение разности максимального и минимального значений угловой скорости начального звена к ее среднему значению за один период установившегося движения:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (11.48)$$

где

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (11.49)$$

Практикой установлены некоторые очень широкие интервалы допустимых значений коэффициента δ для различных типов машин. Например, для насосов — от 1/5 до 1/30, для двигателей внутреннего сгорания — от 1/80 до 1/150 и т. д.

Если коэффициент неравномерности движения механизма, подсчитанный по (11.48), оказался больше допускаемого, то его можно уменьшить, увеличив массу одного из вращающихся звеньев. Добавочная масса вращающегося звена, предназначенная для обеспечения заданного коэффициента неравномерности движения механизма, называется *маховой массой*. Конструктивно эта масса выполняется в виде *маховика* — сплошного диска или шкива с тяжелым ободом и спицами.

Для определения необходимого момента инерции маховика заметим, что на основании (11.48) и (11.49) значения максимальной и минимальной угловой скорости начального звена связаны со значениями δ и ω_{cp} соотношениями: $\omega_{max} - \omega_{min} = \delta \omega_{cp}$, $\omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_{cp}$. Отсюда $\omega_{max} = (1 + 0,5\delta)\omega_{cp}$, $\omega_{min} = (1 - 0,5\delta)\omega_{cp}$. Пренебрегая малой величиной $\delta^2/4$, получаем

$$\omega_{max}^2 = (1 + \delta)\omega_{cp}^2, \quad \omega_{min}^2 = (1 - \delta)\omega_{cp}^2.$$

Подставляя ω_{max}^2 и ω_{min}^2 в (11.47), находим ψ_{max} и ψ_{min} :

$$\operatorname{tg} \psi_{max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} (1 + \delta)\omega_{cp}^2, \quad \operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} (1 - \delta)\omega_{cp}^2.$$

Проводим касательные к диаграмме Виттенбауэра под углами ψ_{max} и ψ_{min} к оси J_n . Пересечение касательных определит новое положение начала координат O_m графика $T = T(J_n)$, при котором коэффициент неравномерности движения механизма и средняя угловая скорость ω_{cp} имеют заданные значения. Расстояние от нового начала координат до прежней оси ординат даст искомое значение приведенного момента инерции маховика

$$J_m = (O_m m) \mu_J. \quad (11.50)$$

Если точка O_m выходит за пределы чертежа, то находим отрезок kl , отсекаемый касательными на пересечении с прежней осью ординат, и, рассматривая $\triangle O_m mk$ и $\triangle O_m ml$, получаем

$$kl = (O_m m) (\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min}).$$

Из этого соотношения с учетом значений $\operatorname{tg} \psi_{max}$, $\operatorname{tg} \psi_{min}$ и (11.50) имеем

$$J_m = \frac{(kl) \mu_T}{\delta \omega_{cp}^2}. \quad (11.51)$$

При углах ψ_{min} и ψ_{max} , близких к 90° , касательные могут не пересекать ось ординат в пределах чертежа. Тогда отрезок kl определяется из соотношения

$$kl = (Op) \operatorname{tg} \psi_{min} - (Oq) \operatorname{tg} \psi_{max},$$

где Op и Oq — расстояния от центра O до точек p и q пересечения касательных с осью абсцисс, проведенных соответственно под углами ψ_{min} и ψ_{max} .

При постоянном приведенном моменте инерции диаграмма Виттенбауэра вырождается в отрезок прямой, параллельный оси T , экстремумы кинетической энергии и угловой скорости совпадают, а (11.51) принимает вид

$$J_m = \frac{A_{изб}}{\delta \omega_{cp}^2},$$

где $A_{изб}$ — избыточная работа, под которой понимается сумма работ сил движущих и сил сопротивления на интервале (φ_{Tmin} , φ_{Tmax}), соответствующем изменению кинетической энергии от наименьшего минимума до наибольшего максимума.

Для определения $A_{изб}$, а следовательно, и для расчета маховика в этом случае можно ограничиться построением только одного графика (рис. 69, а). Надо только правильно определить интервал (φ_{Tmin} , φ_{Tmax}). Например, если минимум кинетической энергии достигается в точках b и d , то для выбора наименьшего минимума надо найти знак суммы работ сил движущих и сил сопротивления при переходе от точки b к точке d . В нашем примере знак этой суммы отрицательный ($F_{bc} < F_{cd}$), и поэтому наименьший минимум получается в точке d . Аналогично выясняется положение наибольшего максимума, который достигается в точке a , так как $F_{ab} > F_{bc}$.

Следовательно, избыточная работа

$$A_{изб} = \mu_M \mu_\varphi (F_{da} + F_{ea}).$$

Определение момента инерции маховика при силах, зависящих от скорости. Пусть, например, на рабочем ходу модуль момента

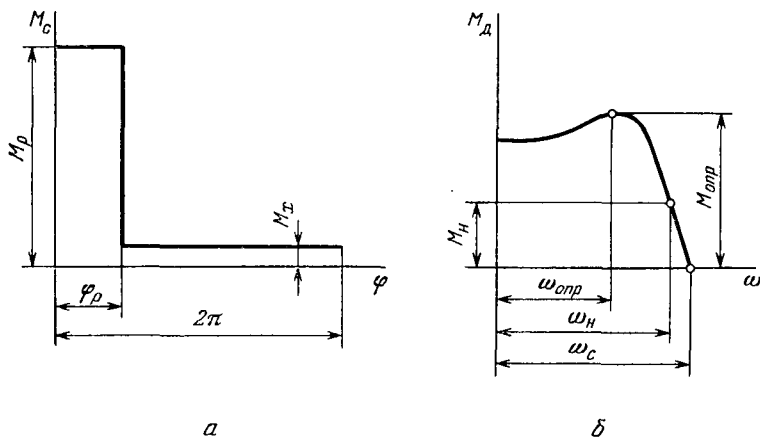


Рис. 70

сил сопротивления, приведенного к валу электродвигателя, $M_c = M_p$, а на холостом ходу $M_c = M_x$ (рис. 70, а). Характеристика электродвигателя (рис. 70, б) на линейном участке выражается функцией

$$M_d = M_n \frac{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_n},$$

где M_n , $\tilde{\omega}_n$ — номинальные момент и угловая скорость, $\tilde{\omega}_c$ — синхронная угловая скорость.

Требуется определить момент инерции маховика при заданной средней угловой скорости начального звена из условия, что максимальный момент, развиваемый двигателем, должен быть меньше опрокидывающего момента $M_{\text{опр}}$, по достижении которого ротор двигателя переходит на неустойчивую часть характеристики bb и останавливается, или, иначе, из условия $\tilde{\omega}_{\min} > \tilde{\omega}_{\text{опр}}$, где $\tilde{\omega}_{\text{опр}}$ — угловая скорость при $M_{\text{опр}}$.

Для установившегося движения при $M_d \approx M_n$ получаем

$$M_d 2\pi - M_p \varphi_p - M_x (2\pi - \varphi_p) = 0.$$

Отсюда находим M_n , а ω_n принимаем равной средней скорости. Выбрав электродвигатель, удовлетворяющий полученным значениям M_n и ω_n , находим по каталогу электродвигателей ω_c , $M_{\text{опр}}$ и $\omega_{\text{опр}}$.

Дифференциальное уравнение движения механизма (7.20) при постоянном приведенном моменте инерции звеньев механизма имеет вид

$$(J_n + J_m) \frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} \tilde{\omega} = M_n \frac{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_n} - M_c.$$

После разделения переменных и интегрирования получаем для участка рабочего хода при изменении угловой скорости от $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{\max}$ до $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{\min}$:

$$\varphi_p = (J_n + J_m) \int_{\tilde{\omega}_{\max}}^{\tilde{\omega}_{\min}} \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{A + B\tilde{\omega}},$$

где

$$A = M_n \frac{\tilde{\omega}_c}{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_n} - M_p, \quad B = -\frac{M_n}{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_n}.$$

Отсюда на основании известных формул интегрирования

$$\varphi_p = (J_n + J_m) \left(\frac{\tilde{\omega}_{\min} - \tilde{\omega}_{\max}}{B} - \frac{A}{B^2} \ln \frac{A + B\tilde{\omega}_{\min}}{A + B\tilde{\omega}_{\max}} \right). \quad (11.52)$$

Аналогично для участка холостого хода

$$2\pi - \varphi_p = (J_n + J_m) \left(\frac{\tilde{\omega}_{\max} - \tilde{\omega}_{\min}}{B} - \frac{A_1}{B^2} \ln \frac{A_1 + B\tilde{\omega}_{\max}}{A_1 + B\tilde{\omega}_{\min}} \right), \quad (11.53)$$

где

$$A_1 = M_n \frac{\tilde{\omega}_c}{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_n} - M_x.$$

Уравнения (11.52) и (11.53) содержат три неизвестные величины J_m , $\tilde{\omega}_{\max}$ и $\tilde{\omega}_{\min}$. Задаваясь значением $\tilde{\omega}_{\min} > \tilde{\omega}_{\text{опр}}$, находим

из этих уравнений момент инерции маховика J_m и максимальную угловую скорость $\tilde{\omega}_{\max}$, которая должна быть меньше синхронной ω_c .

Дельта-метод решения нелинейных уравнений движения механизма. При силах, зависящих от времени, положений и скоростей точек звеньев механизма, используется графоаналитический дельта-метод, который поясним на примере решения уравнения движения механизма, имеющего вид

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) + k^2 y = F(t). \quad (11.54)$$

Примем за независимую переменную безразмерное время $\tau = kt$ и обозначим через v производную $dy/d\tau$. Тогда

$$\dot{y} = kv, \quad \ddot{y} = k^2 \frac{dv}{d\tau} \equiv k^2 v \frac{dv}{dy},$$

и уравнение (11.54) преобразуется к виду

$$v \frac{dv}{dy} + \frac{f(y, kv)}{k^2} + y = \frac{F(t)}{k^2},$$

или

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\delta(y, v, t) - y}{v}, \quad (11.55)$$

где

$$\delta(y, v, t) = \frac{F(t) - f(y, kv)}{k^2}. \quad (11.56)$$

Функцию $\delta(y, v, t)$ для малых интервалов времени можно считать постоянной. Но если считать, что δ (отсюда название способа) — величина постоянная, то в дифференциальном уравнении (11.55) переменные разделяются: $v dv = (\delta - y) dy$, и после интегрирования получаем $v^2 = 2\delta y - y^2 + C$. Это уравнение может быть представлено как уравнение окружности

$$v^2 + (y - \delta)^2 = R^2, \quad (11.57)$$

где $R^2 = C + \delta$.

Зависимость между v и y или, что то же, между $\dot{y}/k$ и y , дает на фазовой плоскости с координатами v и y фазовую траекторию $v(y)$. Из (11.57) следует, что для малого интервала времени отрезок фазовой траектории представляет собой дугу окружности с центром в точке $y = \delta$, $v = 0$. На этом основании можно фазовую траекторию приближенно заменить ломаной, состоящей из дуг окружностей, радиусы которых определяются графически или по (11.57).

Пусть, например, построение фазовой траектории начинается из точки B_k с координатами (v_k, y_k) , которой соответствует время $t = t_k$ (рис. 71, а). По (11.56) вычисляем значение $\delta_k(y_k, v_k, t_k)$,

чем и определяется абсцисса центра окружности O_k . Радиус окружности можно вычислить по (11.57)

При малых значениях $\Delta\gamma_k$ для определения искомой точки B_{k+1} фазовой траектории можно восстановить перпендикуляр к отрезку $O_k B_k$ в точке B_k и отложить на нем отрезок $B_k B_{k+1} = R_k k \Delta t_k$. Для построения следующих точек фазовой траектории надо найти значения y_{k+1} и v_{k+1} в точке B_{k+1} . Эти значения можно получить непосредственным измерением на чертеже или же вычислить по формулам

$$y_{k+1} = y_k + v_k \Delta\gamma_k, \quad v_{k+1} = v_k + k \Delta t_k \sqrt{R_k^2 - v_k^2}.$$

После определения y_{k+1} и v_{k+1} все построения или вычисления повторяются. На рис. 71, 6 показано построение фазовой траектории по точкам B_k при $k = 1, \dots, 8$. Центры заменяющих окружностей располагаются на оси абсцисс в точках O_k . Искомое решение уравнения (11.54) находится интегрированием соотношения $\dot{y} = kv(y)$, т. е. сначала определяется функция $t = t(y)$ из условия

$$t = \int_{v_0}^y \frac{dy}{kv(y)},$$

а затем и функция $y = y(t)$.

ГЛАВА 12

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

§ 50. Вероятностные характеристики случайных величин

Случайные величины. *Случайной величиной* называется переменная величина, значения которой зависят от случая. Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Дискретная случайная величина U принимает конечное число значений u_k при $k = 1, \dots, s$ или счетное число значений u_k при $k = 1, \dots, \infty$ (*). Непрерывная случайная величина принимает любые значения в некотором интервале.

Вероятность случайной величины. Пусть проведено N измерений случайной величины U . При достаточно большом числе N значения случайной величины u_k , если ее рассматривать как дискретную ($k = 1, \dots, s$), будут повторяться. Число повторений значения u_k обозначим через v_k . Отношение числа повторений значения u_k дискретной случайной величины к общему числу ее значений N

*) Здесь и далее случайные величины обозначены прописными буквами, их реализация (выборочные значения) — соответствующими строчными буквами.

назовем *вероятностью* $P(u_k)$ значения u_k при данном числе всех значений N *):

$$P(u_k) = \frac{v_k}{N}. \quad (12.1)$$

Из формулы (12.1) следует, что вероятность есть безразмерная величина, лежащая в пределах от 0 до 1. С увеличением числа всех значений дискретной случайной величины вероятность $P(u_k)$, для каждого значения u_k стремится к своему предельному значению. Иногда только это значение и называют вероятностью, а отношение (12.1) при данном числе N называют *частотой события*, или *частотностью*.

Вероятность того, что дискретная случайная величина U может принять одно из двух значений u_1, u_2 , равна сумме вероятностей этих значений:

$$P(u_1, u_2) = P(u_1) + P(u_2). \quad (12.2)$$

Сумма вероятностей всех измеренных значений равна 1, так как сумма чисел повторений v_k равна общему числу измерений N :

$$\sum_{k=1}^s P(u_k) = 1. \quad (12.3)$$

Плотность вероятности. Дискретная случайная величина полностью определяется значениями вероятностей $P(u_k)$ при $k = 1, \dots, s$. Для непрерывной случайной величины U такой способ ее определения непригоден, так как вероятность того, что она примет заданное значение u_k , равна нулю. Это положение следует из формулы (12.1) при условии, что число возможных случаев N бесконечно. Однако вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, заключенное в пределах от u до $u + du$, уже отлична от нуля и может быть представлена в виде дифференциала, называемого *элементом вероятности распределения* непрерывной случайной величины:

$$P(u \leq U < u + du) = f(u) du, \quad (12.4)$$

где $f(u)$ — *плотность вероятности*. Размерность плотности вероятности равна единице, деленной на размерность случайной величины.

Суммирование элементов вероятности на участке от u_1 до u_2 дает вероятность того, что непрерывная случайная величина U примет какое-либо значение в интервале от u_1 до u_2 :

$$P(u_1 \leq U \leq u_2) = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du. \quad (12.5)$$

*) P — знак вероятности.

Отсюда следует, что задание плотности вероятности $f(u)$ определяет вероятность появления значений u случайной величины U , т. е. дает распределение всех наблюдаемых или измеряемых значений случайной величины U в зависимости от значений u . Другой возможный путь определения вероятностей случайной величины состоит в задании функции распределения.

Функция распределения. Функцией распределения вероятности (сокращенно — функцией распределения) случайной величины называется вероятность того, что ее значение не превышает u :

$$F(u) = P(U < u). \quad (12.6)$$

Если непрерывная случайная функция U определена на интервале $(-\infty < u < \infty)$, то функция распределения

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(u) du \quad (12.7)$$

с увеличением u может только возрастать от $F(-\infty) = 0$ до $F(\infty) = 1$. Первое условие следует непосредственно из интеграла (12.7), а второе условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \quad (12.8)$$

означает, что любое заданное значение u лежит в пределах от $-\infty$

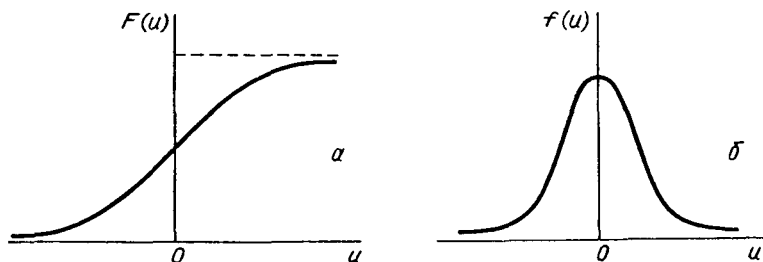


Рис. 72

до ∞ и, следовательно, вероятность его попадания в этот интервал равна 1.

Из соотношения (12.7) между плотностью вероятности $f(u)$ и функцией распределения $F(u)$ следует

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du}, \quad (12.9)$$

т. е. плотность вероятности есть производная от функции распределения по аргументу u . На рис. 72, а показан график функции распределения $F(u)$ и на рис. 72, б — соответствующий ей график плотности вероятности.

Математическое ожидание. Для оценки среднего значения случайной величины принимают средневзвешенное значение при весах, равных вероятности каждой из реализаций случайной величины. Это среднее значение называют также *средневероятностным*. Для дискретной случайной величины U с учетом того, что сумма вероятностей (весов) равна 1, средневероятностное значение m_u вычисляется по формуле

$$m_u = \sum_{k=1}^s u_k P(u_k), \quad (12.10)$$

где u_k — реализация случайной величины U , $P(u_k)$ — вероятность этой реализации.

Операцию вычисления средневероятностного значения называют вероятностным определением и обозначают угловыми скобками. Тогда формула (12.10) принимает вид

$$\langle U \rangle = \sum_{k=1}^s u_k P(u_k). \quad (12.11)$$

Иногда средневероятностное значение какой-либо величины называют *математическим ожиданием* и соответственно оператор математического ожидания обозначают через M (или E). Для непрерывной случайной величины U с плотностью вероятности $f(u)$ средневероятностное значение (математическое ожидание) получается из формулы (12.11) предельным переходом:

$$m_u = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du. \quad (12.12)$$

Дисперсия случайной величины. В качестве меры рассеяния реализаций случайной величины (*дисперсии*) принимается средневероятностное значение квадрата отклонения реализации u от математического ожидания (средневероятностного значения случайной величины).

Для дискретной случайной величины U дисперсия σ_u^2 выражается суммой

$$\sigma_u^2 = \sum_{k=1}^s (u_k - m_u)^2 P(u_k). \quad (12.13)$$

Для непрерывной случайной величины имеем

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u - m_u)^2 f(u) du. \quad (12.14)$$

Оператор вычисления дисперсии иногда обозначают через D ,

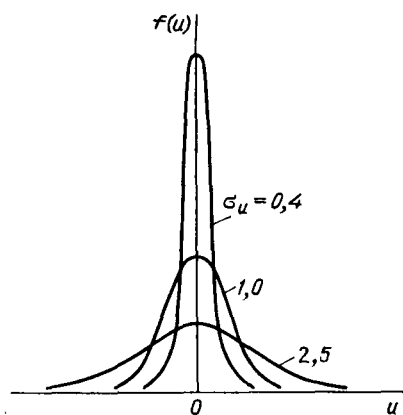


Рис. 73

Например, $\sigma_u^2 = D(u)$. Неотрицательное значение квадратного корня из дисперсии σ_u называется *стандартным* или *средним квадратическим отклонением*.

Нормальное распределение. В задачах теории механизмов и машин наиболее часто встречающимся распределением случайной величины является *нормальное распределение* (распределение по Гауссу), при котором плотность вероятности имеет вид

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-m_u)^2}{2\sigma_u^2}}. \quad (12.15)$$

На рис. 73 показаны кривые нормального распределения при $m_u = 0$ и $\sigma_u = 0,4; 1,0; 2,5$.

§ 51. Вероятностные характеристики случайных функций

Случайные функции. *Случайной функцией* $U(t)$ называется функция вещественного параметра t , значения которой являются случайными величинами. Иначе случайную функцию можно определить как совокупность случайных величин, зависящих от одного вещественного параметра t . Случайную функцию $U(t)$ времени t называют также *случайным процессом*. Для каждого момента времени $t_1, \dots, t_n$ значения случайного процесса $U(t_1)$, которые обозначим через $u_1, \dots, u_n$, можно рассматривать как реализации случайных величин $U(t_1), \dots, U(t_n)$. Тогда случайный процесс $U(t)$ представится как совокупность случайных величин $U(t_1), \dots, U(t_n)$. Эта совокупность может быть как дискретной, так и непрерывной.

Функция распределения случайного процесса. Для заданного момента времени t_1 функция распределения случайного процесса $U(t)$ называется *одномерной* и определяется так же, как и функция распределения случайной величины, т. е. как вероятность того, что значение $U(t_1)$ не превышает u_1 :

$$F(u_1, t_1) = P[U(t_1) < u_1], \quad (12.16)$$

где u_1 — любая реализация случайного процесса $U(t)$ при $t = t_1$.

Для любого момента времени t одномерная функция распределения случайного процесса $u(t)$ есть функция двух переменных u и t , удовлетворяющих условию

$$F(u, t) = P[U(t) < u]. \quad (12.17)$$

Двумерная функция распределения случайного процесса определяется для двух моментов времени t_1 и t_2 как вероятность того, что значение $U(t_1)$ не превышает u_1 , а значение $U(t_2)$ не превышает u_2 :

$$F(u_1, t_1; u_2, t_2) = P[U(t_1) < u_1; U(t_2) < u_2]. \quad (12.18)$$

Аналогично составляются n -мерные (или совместные) функции распределения случайного процесса.

Плотности вероятности случайного процесса. *Одномерная плотность вероятности* случайного процесса $U(t)$ определяется как частная производная по аргументу u одномерной функции распределения

$$f(u, t) = \frac{\partial F(u, t)}{\partial u}. \quad (12.19)$$

Для заданного момента времени t_1 имеем

$$f(u_1, t_1) du_1 = P(u_1 \leq U(t_1) < u_1 + du_1). \quad (12.20)$$

Связь между одномерными плотностью вероятности и функцией распределения по аналогии с формулой (12.7) имеет вид

$$F(u, t) = \int_{-\infty}^u f(u, t) du. \quad (12.21)$$

Предельное значение одномерной функции распределения случайного процесса при $u \rightarrow \infty$ равно 1, так как в заданных пределах изменения u и t встречается любое значение $U(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u, t) du = 1. \quad (12.22)$$

Двумерная плотность вероятности равна смешанной частной производной от двумерной функции распределения по аргументам u_1 и u_2 :

$$f(u_1, t_1; u_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(u_1, t_1; u_2, t_2)}{\partial u_1 \partial u_2}. \quad (12.23)$$

Для двух заданных моментов времени t_1 и t_2 имеем

$$f(u_1, t_1; u_2, t_2) = P[u_1 \leq U(t_1) < u_1 + du_1; u_2 \leq U(t_2) < u_2 + du_2]. \quad (12.24)$$

Двумерная функция распределения связана с двумерной плотностью вероятности соотношением

$$F(u_1, t_1; u_2, t_2) = \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} f(u_1, t_1; u_2, t_2) du_2 du_1. \quad (12.25)$$

Предельное значение двумерной функции распределения при $u \rightarrow \infty$, выраженное через двумерную плотность вероятности, также равно 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, t_1; u_2, t_2) du_1 du_2 = 1. \quad (12.26)$$

Аналогично составляются n -мерные (или совместные) плотности вероятности случайного процесса.

Математическое ожидание случайного процесса. Для вычисления среднеевероятностного значения (математического ожидания) случайного процесса $U(t)$ в момент времени t можно воспользоваться формулой (12.12)

$$m_u(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 f(u_1, t_1) du_1,$$

где $f(u_1, t_1)$ — одномерная плотность вероятности при $t = t_1$.

Математическое ожидание случайного процесса $U(t)$ при любом значении t есть функция времени t :

$$m_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u, t) du, \quad (12.27)$$

где $f(u, t)$ — одномерная плотность вероятности.

Дисперсия случайного процесса. Для вычисления дисперсии случайного процесса $U(t)$, как функции времени t , можно воспользоваться формулой, аналогичной (12.14):

$$\sigma_u^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u - m_u)^2 f(u, t) du. \quad (12.28)$$

Корреляционная функция случайного процесса. Для характеристики случайных процессов, кроме среднеевероятностного значения (математического ожидания) и квадрата отклонения от этого значения (дисперсии), надо еще знать, существует ли связь между вероятностными характеристиками случайного процесса в моменты времени t и $t + \tau$. Эта связь устанавливается *корреляционной функцией*

$$K_u(t_1, t_2) = \langle [U(t_1) - m_u(t_1)][U(t_2) - m_u(t_2)] \rangle, \quad (12.29)$$

т. е. корреляционная функция есть среднеевероятностное значение произведения отклонений случайного процесса от его среднеевероятностного значения в любые два момента времени.

Для непрерывной случайной величины корреляционная функция выражается через двумерную плотность вероятности:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u_1 - m_u(t_1)] [u_2 - m_u(t_2)] f(u_1, t_1; u_2, t_2) du_2 du_1. \quad (12.30)$$

При $t_2 = t_1$ корреляционная функция совпадает с дисперсией и формула (12.30) переходит в (12.28).

Вспомогательный случайный процесс $U^0(t) = U(t) - \langle U(t) \rangle$ называют *центрированным*. Тогда формулы (12.29) и (12.30) принимают вид

$$K_u(t_1, t_2) = \langle U^0(t_1) U^0(t_2) \rangle, \\ K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1^0(t_1) u_2^0(t_2) f(u_1^0, t_1; u_2^0, t_2) du_2^0 du_1^0.$$

§ 52. Основные виды случайных процессов

Стационарный случайный процесс. Случайный процесс называется *стационарным*, если все его вероятностные характеристики инвариантны относительно выбора пачала времени, т. е. не изменяются при сдвиге времени. Реальный случайный процесс приближенно может считаться стационарным, если его характеристики изменяются во времени достаточно медленно. В дальнейшем рассматриваются только те задачи динамики машин при случайных воздействиях, для решения которых достаточно знать математические ожидания случайных функций и корреляционные функции. Поэтому условия стационарности случайного процесса можно для этих задач принять менее строгими, а именно, случайный процесс $U(t)$ будем считать стационарным, если его математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$m_u(t) = m_u = \text{const}, \quad K_u(t_1, t_2) = K_u(t_2 - t_1) \equiv K_u(\tau).$$

При $\tau = 0$ корреляционная функция переходит в дисперсию

$$\sigma_u^2 = K_u(0) = \text{const}.$$

Отсюда следует, что $K_u \geq 0$. Кроме того, согласно определению $K_u(\tau) = K_u(-\tau)$, т. е. корреляционная функция стационарного процесса есть четная функция от τ . С увеличением τ корреляционная функция стационарного процесса уменьшается: $K_u(\tau) \leq K(0)$, так как при достаточно большом τ функции $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t + \tau)$ могут считаться независимыми и среднеевероятностное значение их произведения приближается к нулю.

Эргодический случайный процесс. Стационарный случайный процесс $U(t)$ называется *эргодическим*, если одна его реализация $u(t)$ содержит всю информацию о вероятностных свойствах процесса. Особенность этого процесса состоит в возможности замены осреднения по множеству реализаций осреднением по времени:

$$\langle U(t) \rangle = m_u = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt, \quad (12.31)$$

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [u(t) - m_u][u(t + \tau) - m_u] dt. \quad (12.32)$$

Принадлежность стационарного случайного процесса к эргодическим процессам устанавливается обычно путем обработки экспериментальных данных по нескольким реализациям.

Нормальный случайный процесс. Случайный процесс $U(t)$ называется *нормальным* или гауссовым, если его n -мерная плотность вероятности при любых значениях $t_1, \dots, t_n$ и любом n является нормальным распределением. Одномерная плотность вероятности нормального распределения по аналогии с (12.15) имеет вид

$$f(u, t) = \frac{1}{\sigma_u(t) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[u(t) - m_u(t)]^2}{2\sigma_u^2(t)}}, \quad (12.33)$$

где $m_u(t)$ — математическое ожидание, σ_u^2 — дисперсия.

Белый шум. Стационарный случайный процесс $U(t)$, который характеризуется тем, что в нем отсутствует какая-либо взаимная связь между предыдущими и последующими значениями $u(t)$, называется *абсолютно случайным процессом* или *белым шумом*. Для этого процесса корреляционная функция равна нулю при всех значениях τ , кроме $\tau = 0$, когда она стремится к бесконечности. Отсюда следует, что корреляционную функцию можно представить в виде

$$K_u(\tau) = b\delta(\tau), \quad (12.34)$$

где b — постоянный множитель, характеризующий интенсивность белого шума, $\delta(\tau)$ — дельта-функция, т. е. функция, равная нулю при всех значениях τ , кроме $\tau = 0$, при котором она обращается в бесконечность, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1.$$

§ 53. Определение вероятностных характеристик обобщенных координат механизма по заданным вероятностным характеристикам внешних сил

Задачи исследования динамики механизмов при случайных воздействиях. *Первая задача* состоит в отыскании вероятностных характеристик обобщенных координат механизма по заданным вероятностным характеристикам обобщенных (приведенных) сил. При решении этой задачи используются стохастические дифференциальные уравнения движения механизма, в которых обобщенные координаты и обобщенные силы являются случайными функциями.

Вторая задача — обратная по отношению к первой — состоит в определении вероятностных характеристик обобщенных сил по известным вероятностным характеристикам обобщенных координат, которые обычно находятся из эксперимента.

Третья задача заключается в построении уравнения движения механизма и определении его коэффициентов по известным вероятностным характеристикам обобщенных сил и обобщенных координат. Эту задачу называют *задачей идентификации*. Иногда форму уравнения движения и часть его параметров считают известными. Тогда цель идентификации состоит в отыскании остальных параметров. Такая задача ставится в технической диагностике.

Во всех трех задачах коэффициенты (параметры) уравнения движения механизма могут быть также случайными функциями.

Соотношения между вероятностными характеристиками обобщенных сил и обобщенных координат в линейных уравнениях движения. При решении первой задачи исследования движения механизма с одной степенью свободы при случайных воздействиях ограничимся рассмотрением линейного уравнения движения механизма, которое представим в безразмерной форме

$$T_2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = kx,$$

где x — безразмерная обобщенная сила, y — безразмерная обобщенная координата, T_1 , T_2 — постоянные времени, k — передаточный коэффициент.

Примем, что T_1 , T_2 и k — постоянные величины, x и y — случайные процессы $U_x(t)$ и $U_y(t)$. Тогда каждой реализации случайного процесса $U_x(t)$ соответствует реализация случайного процесса $U_y(t)$, определяемого из уравнения

$$T_2 \ddot{u}_y + T_1 \dot{u}_y + u_y = k u_x. \quad (12.35)$$

Если случайный процесс $U_x(t)$ есть стационарный процесс с математическим ожиданием m_{u_x} и корреляционной функцией $K_{u_x}(\tau)$, то случайный процесс $U_y(t)$ также будет стационарным, но с другими вероятностными характеристиками m_{u_y} и $K_{u_y}(\tau)$. Для стационарных процессов средневероятностные значения функций $\dot{u}_y$ и $\ddot{u}_y$ равны нулю, а математическое ожидание (средневероят-

постное значение u_y) m_{u_y} определяется из соотношения

$$m_{u_y} = km_{u_x}. \quad (12.36)$$

Чтобы найти соотношение, связывающее корреляционные функции $K_{u_y}(\tau)$ и $K_{u_x}(\tau)$, предварительно введем в рассмотрение другую вероятностную характеристику, называемую *спектральной плотностью* стационарного случайного процесса, которая получается из корреляционной функции *преобразованием Фурье*.

Интеграл Фурье. Для периодической функции $f(t)$ с периодом T ряд Фурье определяется выражением

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где $\omega = 2\pi/T$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt.$$

Для непериодической функции $f(t)$, удовлетворяющей условию абсолютной интегрируемости на всей числовой оси, т. е. условию сходимости интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

предельный переход от ряда Фурье при $T \rightarrow \infty$ дает выражение $f(t)$ в интегральной форме

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (12.37)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

или, после тригонометрических преобразований,

$$f(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos [\omega t - \theta(\omega)] d\omega, \quad (12.38)$$

где

$$S(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (12.39)$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (12.40)$$

На рис. 74 показано графическое изображение соотношения между формулами (12.37) и (12.38). Для фиксированного значения ω отрезок OK дает $S(\omega)$ в формуле (12.38), а проекция его на направление, образующее с осью абсцисс угол ωt , дает отрезок $OA = S(\omega, t)$, равный значению подынтегральной функции в формулах (12.37) и (12.38), что и доказывает их тождественность.

В отличие от ряда Фурье, в котором угловые частоты гармонических составляющих (гармоник) $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ образуют *дискретный спектр*, интеграл Фурье характеризуется *непрерывным спектром* ω от 0 до ∞ , причем для каждого значения t интеграл Фурье дает значение функции $f(t)$ в виде «суммы» гармоник с непрерывно изменяющейся угловой частотой ω и амплитудой $S(\omega)$.

Для четных функций $f(-t) = f(t)$ ряд Фурье содержит лишь слагаемые с коэффициентами a_n (*разложение по косинусам*); для нечетных функций $f(-t) = -f(t)$ — слагаемые с коэффициентами b_n (*разложение по синусам*). Соответственно интеграл Фурье для четных функций имеет вид

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (12.41)$$

Вследствие четности функции $f(t)$ коэффициент $a(\omega)$ достаточно вычислить в пределах от 0 до ∞ и затем удвоить:

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (12.42)$$

Комплексная форма интеграла Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right) d\omega, \quad (12.43)$$

где ω — частота, ξ — переменная интегрирования.

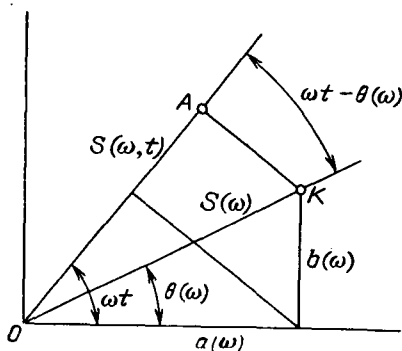


Рис. 74

Обозначим комплексную величину, стоящую в скобках, через $F(i\omega)$ и заменим переменную интегрирования ξ на t :

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (12.44)$$

Эта формула выражает преобразование действительной функции $f(t)$ в комплексную функцию $F(i\omega)$ и называется *преобразованием Фурье*. Оно может рассматриваться как частный случай преобразования Лапласа при $s = i\omega$, отличаясь лишь пределами интегрирования (от $-\infty$ до ∞).

Обратный переход от функции $F(i\omega)$ к функции $f(t)$ выполняется по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (12.45)$$

Для четной функции $f(t)$ формулы (12.44) и (12.45) принимают вид

$$F_c(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (12.46)$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (12.47)$$

В этом случае действительная функция $f(t)$ преобразуется в действительную функцию $F_c(\omega)$, которая называется *косинус-преобразованием* для данной функции $f(t)$.

Спектральная плотность. На рис. 75 для фиксированного значения $t = t_k$ показан график изменения подынтегральной функции интеграла Фурье $S(\omega, t_k)$ в зависимости от угловой частоты ω . Площадь, заключенная между этим графиком и осью абсцисс, дает согласно (12.37) значение функции $f(t)$ при $t = t_k$. Выделим из этой площади элементарную площадку шириной $\Delta\omega$ вблизи текущего значения $\omega = \omega_l$. Тогда средняя ордината графика $S(\omega, t_k)$ даст среднюю плотность распределения функции $f(t)$ по оси абсцисс на участке $\Delta\omega$ вблизи $\omega = \omega_l$. При $\Delta\omega \rightarrow 0$ получаем, что функция $S(\omega, t_k)$ дает

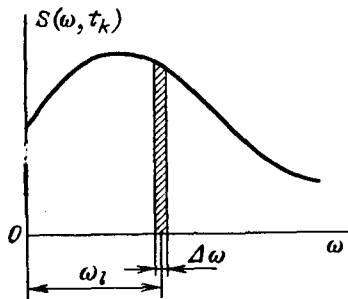


Рис. 75

плотность распределения функции $f(t)$ по частоте ω при значении $t = t_k$. Для того чтобы характеризовать плотность распределения функции $f(t)$ по частоте ω независимо от текущего значения пере-

менной t , условимся называть *спектральной плотностью* функцию $S(\omega)$, определяемую по (12.39).

Для четных функций $b(\omega) = 0$ и

$$S(\omega) \equiv a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (12.48)$$

В зависимости от физического смысла функции $f(t)$ спектральная плотность $S(\omega)$ получает соответствующее название. Например, если $f(t)$ — характеристика силы сопротивления, то $S(\omega)$ называют спектральной плотностью силы сопротивления и т. д.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса. Корреляционная функция $K_u(t)$ стационарного случайного процесса есть функция четная, и потому ее спектральная плотность определяется по (12.48).

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_u(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (12.49)$$

При $\tau = 0$ корреляционная функция дает дисперсию σ_u^2 , которая для стационарного процесса является постоянной. Поэтому спектральную плотность (12.49) называют также *спектральной плотностью дисперсии стационарного случайного процесса* (кратко — *спектральной плотностью случайного процесса*).

На основании свойств косинус-преобразования Фурье при $F_c(\omega) = \pi S(\omega)$ корреляционная функция $K_u(\tau)$ может быть выражена через ее спектральную плотность

$$K_u(\tau) = \int_0^{\infty} S_u(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (12.50)$$

Следовательно, дисперсия стационарного случайного процесса

$$\sigma_u^2 = \int_0^{\infty} S_u(\omega) d\omega. \quad (12.51)$$

Отсюда следует физический смысл спектральной плотности $S_u(\omega)$ как функции, которая описывает распределение дисперсий гармоник, составляющих случайный процесс, по частотам непрерывного спектра. Заметим также, что согласно (12.51) дисперсия стационарного случайного процесса равна площади графика $S_u(\omega)$ в пределах от 0 до ∞ .

Соотношения (12.49) и (12.50) дают возможность найти спектральную плотность дисперсии $S_u(\omega)$ по известной корреляционной функции $K_u(\tau)$ и наоборот. Пусть, например, в ограниченном диапазоне частот ($0 < \omega < \omega_0$) спектральная плотность

дисперсии равна постоянной величине S_0 , а вне указанного диапазона равна нулю (рис. 76, а). В этом случае случайный процесс принято называть *ограниченным белым шумом*. Из (12.51) следует, что площадь графика $S_u(\omega)$ равна дисперсии σ_u^2 и, следовательно, $\sigma_u^2 = S_0 \omega_0$. Корреляционная функция определяется по соотношению (12.50).

$$K_u(\tau) = \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma_u^2}{\omega_0} \cos \omega \tau d\omega \equiv \frac{\sigma_u^2}{\omega_0 \tau} \sin \omega_0 \tau,$$

или

$$K_u(\tau) = \frac{S_0}{\tau} \sin \omega_0 \tau.$$

График функции $K_u(\tau)$ показан на рис. 76, б.

Связь между спектральными плотностями дисперсий обобщенных сил и обобщенных координат для линейных уравнений движения. При гармонических вынужденных колебаниях комплексные

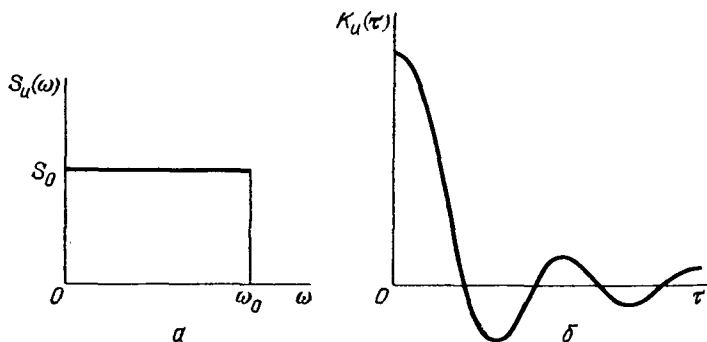


Рис. 76

амплитуды гармонической вынуждающей силы $A_1(i\omega)$ и обобщенной координаты $A_2(i\omega)$ связаны соотношением

$$A_2(i\omega) = W(i\omega) A_1(i\omega),$$

где $W(i\omega)$ — частотная передаточная функция.

Действительные амплитуды вынуждающей силы A_1 и обобщенной координаты A_2 связаны аналогичным соотношением

$$A_2 = |W(i\omega)| A_1.$$

Это соотношение сохраняется и при случайных обобщенных силах, т. е. амплитуда случайных гармонических колебаний равна амплитуде случайной вынуждающей силы, умноженной на модуль

частотной передаточной функции. Соответственно дисперсия обобщенной координаты $\sigma_{u_y}^2$ равна дисперсии обобщенной силы $\sigma_{u_x}^2$, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной функции.

$$\sigma_{u_y}^2 = |W(i\omega)|^2 \sigma_{u_x}^2.$$

По аналогичному соотношению преобразуются спектральные плотности обобщенной координаты S_{u_y} и обобщенной силы S_{u_x} :

$$S_{u_y}(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_{u_x}(\omega). \quad (12.52)$$

После определения спектральной плотности вероятности можно найти корреляционную функцию S_{u_y} по соотношению (12.50) и дисперсию $\sigma_{u_y}^2$ по (12.51).

ГЛАВА 13

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ С ГИДРОПРИВОДОМ

§ 54. Типовая схема объемного гидропривода

Среди гидравлических механизмов, т. е. механизмов, в которых преобразование движения происходит посредством твердых и жидких тел, наибольшее распространение имеет *гидравлический привод (гидропривод)*.

Приводом машин и механизмов (сокращенно — *приводом*) называется система взаимосвязанных устройств для приведения в движение одного или нескольких твердых тел, входящих в состав машины или механизма. Основные типы приводов: *электропривод*, *гидропривод* и *пневмопривод*.

В состав гидропривода входят гидронасос и гидродвигатель. *Гидронасосом* (сокращенно — *насосом*) называется устройство для преобразования механической энергии твердого тела в механическую энергию жидкости. *Гидродвигателем* называется устройство, предназначенное для преобразования механической энергии жидкости в механическую энергию твердого тела. Очень часто одно и то же устройство может выполнять как функции насоса, так и функции двигателя.

На рис. 77, а показана схема типового гидропривода, применяемого в машинах-автоматах. Гидродвигатель 1, называемый *гидроцилиндром*, выполнен в виде поршня, перемещающегося в цилиндре под действием сжатой жидкости. Насос 2 может быть любого вида.

Для изменения направления движения поршня гидроцилиндра служит распределитель 3. В положении распределителя, указанном на схеме, жидкость поступает в левую полость гидроцилиндра, и поршень идет вправо (рабочий ход). При перемещении под-

вижной части распределителя влево (на схеме для этого надо мысленно передвинуть правый квадрат распределителя на место левого, оставляя на месте подведенные к нему линии) жидкость от насоса идет в правую полость гидроцилиндра, и поршень идет влево. Перемещение подвижной части распределителя достигается путем попеременного включения двух электромагнитов 6.

Тормозное устройство 4 при рабочем ходе включено в сливную линию. Оно выполнено в виде регулируемого дросселя (рис. 77, б),

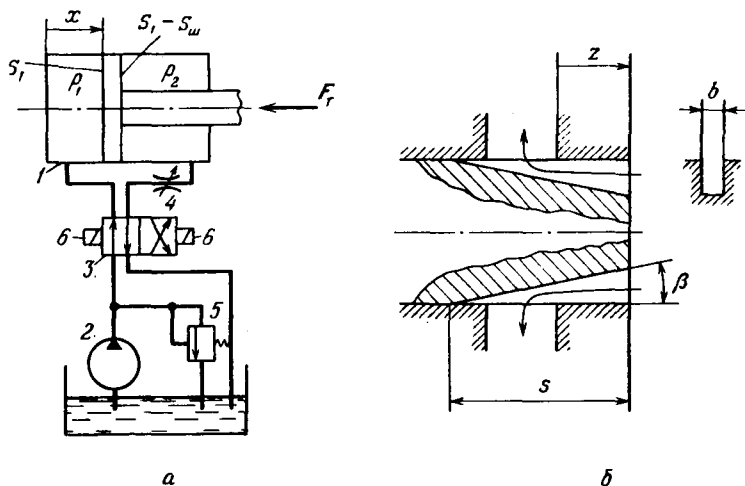


Рис. 77

т. е. устройства, в котором перемещение подвижной части вызывает уменьшение площади сечения для прохода жидкости (проходного сечения). При уменьшении площади проходного сечения увеличивается давление в сливной полости гидроцилиндра и происходит торможение. Перемещение z может быть заданной функцией времени t или перемещения поршня x . В первом случае золотник (подвижная часть) тормозного устройства имеет независимый привод (*торможение по времени*); во втором случае золотник перемещается от кулачков, связанных со штоком гидроцилиндра (*торможение по пути*).

Переливной клапан 5 служит для слива в бак части жидкости, подаваемой насосом, при уменьшении скорости поршня. Пружина клапана подобрана так, что он открывается по достижении определенного давления.

Гидродвигатель 1 в рассматриваемой схеме называется *объемным*, так как преобразование энергии жидкости в механическую энергию поршня происходит при периодическом изменении объема его рабочих полостей. Соответственно и весь гидропривод, пока-

занный на рис. 77, называется *объемным*. Этот гидропривод можно назвать также гидравлическим механизмом, предназначенным для преобразования вращательного движения вала насоса в прямолинейное движение поршня.

§ 55. Уравнение движения объемного гидропривода

Как и в механизме, состоящем только из твердых тел, уравнение движения гидравлического механизма есть дифференциальное уравнение второго порядка, из которого находится зависимость обобщенной координаты механизма от времени. Отличие состоит в том, что в него входят параметры, зависящие от давления жидкости в различных частях механизма.

Для объемного гидропривода, показанного на рис. 77, примем за обобщенную координату перемещение поршня x и введем обозначения: m — приведенная масса движущихся частей насоса, гидроцилиндра и механизма или исполнительного органа, приводимых в движение от гидропривода; F_d — приведенная движущая сила; F_c — приведенная сила сопротивления. Тогда при постоянной приведенной массе уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = F_d - F_c. \quad (13.1)$$

Обозначим через p_1 и p_2 избыточные давления в напорной и соответственно в сливной полостях гидроцилиндра, S_1 — площадь поршня, S_m — площадь штока, F_r — приведенная сила трения и технологических сопротивлений. Для рабочего хода (движение поршня вправо) приведенные силы определяются из соотношений

$$\begin{aligned} F_d &= p_1 S_1, \\ F_c &= F_r + p_2 (S_1 - S_m). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Давление p_1 зависит от давления на выходе из насоса p_n и потерь давления в напорной линии Δp_1 :

$$p_1 = p_n - \Delta p_1. \quad (13.3)$$

Давление p_2 зависит от потерь давления в сливной линии Δp_2 и потерь давления в тормозном устройстве Δp_r :

$$p_2 = \Delta p_2 + \Delta p_r. \quad (13.4)$$

Потери давления Δp_1 и Δp_2 , т. е. потери в трубопроводах и в распределителе $\mathcal{Z}$, зависят от скорости течения жидкости, которая при постоянном расходе (количестве протекающей жидкости) пропорциональна модулю скорости поршня v . На основании экспериментальных данных зависимости потерь давления Δp_1 и Δp_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= A_1 v + B_1 v^2, \\ \Delta p_2 &= A_2 v + B_2 v^2, \end{aligned} \quad (13.5)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные коэффициенты, определяемые для данного гидропривода из эксперимента или же по табличным значениям для типовых элементов гидропривода.

Потери давления в тормозном устройстве

$$\Delta p_T = B_T \frac{v^2}{f_T^2}, \quad (13.6)$$

где B_T — экспериментальный коэффициент, f_T — переменная площадь проходного сечения в тормозном устройстве*), которая при золотнике с прямоугольными канавками зависит от числа канавок n , их ширины b , длины s , угла наклона β и перемещения золотника: $f_T = nb(s - z) \sin \beta$.

С учетом соотношений (13.2) — (13.6) уравнение движения гидропривода (13.1) принимает вид

$$m\ddot{x} = (p_H - A_1 v - B_1 v^2) S_1 - F_T - \left(A_2 v + B_2 v^2 + B_T \frac{v^2}{f_T^2} \right) (S - S_{\text{ш}}). \quad (13.7)$$

Характеристика насоса принимается обычно в виде двух линейных отрезков (рис. 78), изображающих связь между давлением на выходе из насоса p_H и расходом Q , т. е. количеством жидкости, подаваемой насосом.

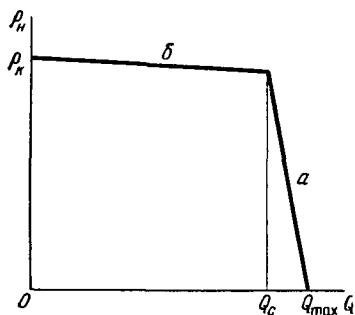


Рис. 78

При закрытом переливном клапане с увеличением давления p_H расход Q несколько уменьшается вследствие увеличения утечек, характеризуемых величиной объемного к. п. д. η_0 . Поэтому связь между p_H и Q на участке a характеристики ($Q_c < Q < Q_{\text{max}}$) выражается формулой

$$p_H = \frac{p_{\text{ном}}}{1 - \eta_0} - \frac{p_{\text{ном}}}{1 - \eta_0} \frac{Q}{Q_{\text{max}}}, \quad (13.8)$$

в которой значения номинального давления $p_{\text{ном}}$, объемного к. п. д. $\eta_0 = Q/Q_{\text{max}}$ при $p = p_{\text{ном}}$ и максимального расхода Q_{max} принимаются по данным каталогов насосов.

При открытом переливном клапане давление p_H равно давлению настройки клапана p_k за вычетом пропорционального расходу Q потерь давления в клапане, т. е. на участке b характеристики ($0 < Q < Q_c$) связь между p_H и Q выражается формулой

$$p_H = p_k - A_k Q, \quad (13.9)$$

*) Эта площадь равна площади живого сечения потока, т. е. поверхности, каждый элемент которой перпендикулярен вектору скорости частицы жидкости, расположенной у этого элемента.

где A_k — экспериментальный коэффициент для переливного клапана.

Величина расхода Q_c , соответствующая точке пересечения прямолинейных отрезков характеристики насоса, находится по формуле

$$Q = \frac{\frac{p_{\text{ном}}}{1 - \eta_0} - p_k}{\frac{p_{\text{ном}}}{(1 - \eta_0) Q_{\text{max}}} - A_k}. \quad (13.10)$$

Для рабочего хода расход на выходе из насоса Q и скорость поршня v связаны соотношением

$$Q = S_1 v. \quad (13.11)$$

Следовательно, формулы (13.8) — (13.10) с учетом соотношения (13.11) дают также зависимость между давлением насоса p_n и скоростью поршня v . Поэтому обе формулы (13.8) и (13.9) можно объединить в одну формулу, выражающую зависимость между давлением на выходе из насоса p_n и скоростью поршня v :

$$p_n = p_0 - A_v v, \quad (13.12)$$

где коэффициенты p_0 и A_v имеют различные значения в зависимости от того, открыт или закрыт переливной клапан.

При открытом переливном клапане коэффициент p_0 равен постоянному давлению настройки клапана, а коэффициент A_v имеет значение

$$A_v = A_k S_1. \quad (13.13)$$

При закрытом переливном клапане коэффициенты p_0 и A_v имеют значения:

$$p_0 = \frac{p_{\text{ном}}}{1 - \eta_0}, \quad (13.14)$$

$$A_v = \frac{p_{\text{ном}} S_1}{(1 - \eta_0) Q_{\text{max}}}. \quad (13.15)$$

Давление на выходе из насоса p_c , при котором открывается переливной клапан, и скорость поршня v_c в этот момент связаны соотношением

$$p_c = p_k - A_k S_1 v_c, \quad (13.16)$$

где

$$v_c = \frac{p_{\text{ном}} - p_k (1 - \eta_0)}{p_{\text{ном}} - A_k Q_{\text{max}} (1 - \eta_0)} \frac{Q_{\text{max}}}{S_1}. \quad (13.17)$$

Теперь уравнение движения объемного гидропривода (13.7) может быть представлено в виде дифференциального уравнения вто-

рого порядка относительно перемещения поршня

$$\ddot{x} = \frac{S_1}{m} \left[p_0 - \frac{F_T}{S_1} - Av - Bv^2 \right], \quad (13.18)$$

где

$$A = A_v + A_1 + \frac{S_1 - S_m}{S_1} A_2, \quad (13.19)$$

$$B = B_1 + \frac{S_1 - S_m}{S_1} \left(B_z + \frac{B_T}{f_T^2} \right). \quad (13.20)$$

Коэффициент A имеет всегда постоянное значение. Коэффициент B в режиме разгона и при установившемся движении также является постоянной величиной, а в режиме торможения зависит от времени t (при независимом приводе тормозного золотника) или от перемещения x (при торможении по пути). Приведенная сила F_T может быть функцией времени t , перемещения x и скорости v .

В общем случае уравнение (13.18) решается численными или графическими методами. Но в некоторых случаях возможно получение решений в конечном виде.

Пусть, например, исследуется движение при полностью открытом проходном сечении в тормозном устройстве ($B_T = 0$). Тогда коэффициент B есть величина постоянная. Кроме того, предположим, что все потери давления можно считать зависящими от второй степени скорости v (турбулентное движение), т. е. коэффициент A равен нулю. Сила сопротивления F_T имеет постоянную величину или же имеет составляющую, которая зависит от второй степени скорости v (коэффициент этой составляющей войдет в суммарный коэффициент B). Тогда уравнение движения (13.18) принимает вид

$$\ddot{x} = \frac{S_1}{m} \left(p_0 - \frac{F_T}{S_1} - Bv^2 \right). \quad (13.21)$$

Введем новую переменную

$$y = v^2. \quad (13.22)$$

После дифференцирования получаем

$$\dot{y} = 2v\dot{v}.$$

Отсюда

$$\dot{v} \equiv \ddot{x} = \frac{\dot{y}}{2v},$$

или

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{dy}{dx}. \quad (13.23)$$

Подставляя в уравнение (13.21) переменную y и учитывая соотношение (13.32), получаем линейное дифференциальное уравнение

первого порядка относительно функции $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2S_1}{m} \left(p_0 - \frac{F_T}{S_1} - By \right). \quad (13.24)$$

Другими словами, можно найти решение уравнения (13.24) на фазовой плоскости в координатах x и v^2 , т. е. найти зависимость

$$v^2 = y(x),$$

а затем получить искомый закон движения $x(t)$ интегрированием уравнения (13.22)

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{y(x)}} + C. \quad (13.25)$$

При полностью открытом проходном сечении тормозного устройства ($B = 0$) и силе сопротивления, зависящей только от скорости (в любой степени), уравнение движения (13.18) есть нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно скорости поршня v с разделяющимися переменными.

После разделения переменных получим

$$dt = \frac{m}{S_1} \frac{dv}{p_0 - \frac{F_T}{S_1} - Av - Bv^2},$$

или

$$t = \frac{m}{S_1} \int \frac{dv}{p_0 - \frac{F_T}{S_1} - Av - Bv^2} + C. \quad (13.26)$$

§ 56. Безразмерное уравнение движения объемного гидропривода

Для того чтобы полученное решение могло быть использовано не для одного гидропривода, а для семейства гидроприводов, отличающихся размерами и нагрузкой, надо представить уравнение (13.18) в безразмерном виде.

Для перехода к безразмерным переменным примем за модули измерения пути и времени путь торможения x_n и время t_n движения с постоянным ускорением, модуль которого равен a_n при изменении скорости от нуля до установившейся скорости v_y при разгоне или от v_y до нуля при торможении. Эти величины можно выразить через скорость установившегося движения v_y и через модуль ускорения a_n по формулам движения с постоянным ускорением:

$$x_n = \frac{v_y^2}{2a_n}, \quad t_n = \frac{v_y}{a_n}. \quad (13.27)$$

Обозначив безразмерное время через τ и безразмерную скорость через u , получаем

$$t = \tau t_{\Pi}, \quad v = u \frac{x_{\Pi}}{t_{\Pi}}, \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} \frac{x_{\Pi}}{t_{\Pi}^2}.$$

С учетом формул (13.27) имеем

$$v = u \frac{v_y}{2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{du}{d\tau} \frac{a_{\Pi}}{2}. \quad (13.28)$$

Теперь уравнение движения (13.18) принимает вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{2S_1}{ma_{\Pi}} \left(p_0 - \frac{F_{\tau}}{S_1} - A \frac{v_y}{2} u - B \frac{v_y^2}{4} u^2 \right). \quad (13.29)$$

Чтобы постоянные коэффициенты этого уравнения также представить в безразмерном виде, примем за модуль измерения давления

$$p_c = p_0 - \frac{F_{\tau}}{S_1} + \frac{ma_{\Pi}}{S_1}. \quad (13.30)$$

Тогда уравнение движения (13.29) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\eta} (1 - 2\eta - \kappa_1 u - \kappa_2 u^2), \quad (13.31)$$

где

$$\eta = \frac{ma_{\Pi}}{2S_1 p_c}, \quad (13.32)$$

$$\kappa_1 = A \frac{v_y^2}{2p_c}, \quad (13.33)$$

$$\kappa_2 = B \frac{v_y^2}{4p_c}. \quad (13.34)$$

Все выводы, которые в дальнейшем могут быть сделаны из рассмотрения безразмерного уравнения движения (13.31), относятся не к одному гидроприводу, а к семейству гидроприводов с одинаковыми значениями безразмерных коэффициентов η , κ_1 и κ_2 .

При исследовании движения поршня гидропривода на участке торможения необходимо выделить из общего коэффициента B по формуле (13.20) слагаемое B_{τ}/f_{τ}^2 , которое на этом участке зависит или от времени t , или от перемещения x . В этом случае коэффициент κ_2 определяется по формуле

$$\kappa_2 = \left(B_1 + \frac{S_1 - S_m}{S_1} B_2 \right) \frac{v_y^2}{4p},$$

а в скобках уравнения (13.31) появляется дополнительный член

$$\delta = \frac{(S_1 - S_m) B_T v_y^2}{S_1 f_T^2 p_c} u^2.$$

Примем за модуль измерения площади

$$f_y = \sqrt{\frac{(S_1 - S_m) B_T v_y}{S_1 p_c} \frac{1}{2}}. \quad (13.35)$$

Тогда безразмерная площадь проходного сечения в тормозном устройстве

$$\theta = f_T / f_y, \quad (13.36)$$

а дополнительный член δ принимает вид

$$\delta = \frac{f_y^2}{f_T^2} u^2,$$

или

$$\delta = u^2 / \theta^2.$$

Следовательно, уравнение движения объемного гидропривода с тормозным устройством в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\eta} \left(1 - 2\eta - \kappa_1 u - \kappa_2 u^2 - \frac{u^2}{\theta^2} \right). \quad (13.37)$$

В этой форме удобно решать уравнения движения гидропривода при торможении по времени, т. е. при $f_T = f_T(t)$. Если же торможение идет по пути, т. е. $f_T = f_T(x)$, то надо в уравнение движения ввести безразмерное перемещение

$$\xi = x/x_n, \quad (13.38)$$

используя соотношение

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau}.$$

Тогда получаем

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{u\eta} \left[1 - 2\eta - \kappa_1 u^2 - \frac{u^2}{\theta^2(\xi)} \right], \quad (13.39)$$

где $u = d\xi/d\tau$.

ГЛАВА 14

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ С ПНЕВМОПРИВОДОМ

§ 57. Уравнение расхода газа

Для решения задач динамики механизмов с пневмоприводом необходимо знать уравнения, позволяющие определять величину массового расхода газа *) в двух случаях:

*) Массовый расход газа измеряется в кг/с. До введения системы СИ применялся весовой расход газа, измеряемый в кгс/с.

1) истечение газа из емкости, где поддерживается постоянное давление p_0 , через короткий трубопровод (сопло, отверстие) в среду с давлением $p < p_0$;

2) движение газа по трубопроводу с учетом местных сопротивлений.

Заметим, что в обоих случаях определяется массовый расход газа, в отличие от задач динамики гидропривода, где принято определять объемный расход жидкости. Это различие связано с тем, что объем газа существенно зависит от давления и температуры по уравнению состояния газа

$$pv = RT, \quad (14.1)$$

где p — абсолютное давление *) газа в Н/м², v — удельный объем газа **) в м³/кг, T — абсолютная температура газа в К, R — газовая постоянная в (Н · м)/(кг · град).

Массовый расход газа G в кг/с при истечении через отверстие площадью f в м² определяется по теоретико-экспериментальной формуле

$$G = \mu f p_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{RT_0} (Y^{2/k} - Y^{(k+1)/k})}, \quad (14.2)$$

где p_0 — давление в емкости, из которой происходит истечение, p — давление среды, Y — отношение давлений p/p_0 , k — показатель адиабаты, T — абсолютная температура поступающего газа в К, μ — коэффициент расхода, значение которого всегда меньше 1 ***).

Коэффициент μ определяется обычно из эксперимента или по справочным данным и учитывает факторы, которые не были учтены при выводе формулы (14.2). Показатель адиабаты k обычно принимается равным 1,4. Для этого значения k имеются таблицы функции

$$\varphi(Y) = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{RT_0} (Y^{2/k} - Y^{(k+1)/k})}, \quad (14.3)$$

которая называется *функцией расхода*.

Зависимость (14.2) для определения расхода газа справедлива только в интервале значений Y от 1 до того значения Y_* , при котором расход G становится максимальным. Это значение $Y = Y_*$ называется *критическим*. Если принять $k = 1,4$, то $Y = 0,528$.

Функция расхода при критическом отношении давлений Y по формуле (14.3) при $k = 1,4$ имеет значение

$$\varphi(Y_*) = 0,2588.$$

*) Здесь и далее в гл. 14, в отличие от уравнения движения гидропривода, всегда подразумевается, что p — давление абсолютное, а не избыточное.

**) Во избежание недоразумений обозначение v в гл. 14 не применяется для скоростей поршня пневмоцилиндра. Эта скорость обозначается через $\dot{x}$ как производная от перемещения x по времени t .

***)) Герц Е. В., Крейн Г. В. Динамика пневматических приводов машин-автоматов. — М.: Машиностроение, 1964.

Критический расход G_* находим по формуле (14.2) при $k = 1,4$ и $\varphi(Y_*) = 0,2588$:

$$G_* = \mu f p_0 \sqrt{\frac{0,469}{RT_0}}. \quad (14.4)$$

Если отношение давлений Y меньше критического значения Y_* , то расход G не зависит от Y и величина его остается постоянной в соответствии с формулой (14.4).

На рис. 79 показан график изменения расхода G в зависимости от отношения давлений Y . Режим истечения, при котором расход имеет постоянную величину G_* , не зависящую от отношения давлений, называют *надкритическим*. Этот режим сохраняется в интервале изменения Y от 0 до $Y \approx 0,528$. При увеличении отношения Y сверх его критического значения расход G убывает, изменяясь в соответствии с формулой (14.2). Режим истечения, при котором расход G убывает с увеличением отношения давлений Y , называется *подкритическим*. Этот режим сохраняется в интервале изменения Y от Y_* до 1.

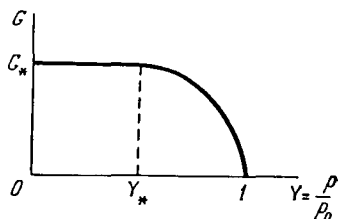


Рис. 79

Наличие в формуле (14.2) коэффициента расхода μ , который обычно определяется из экспериментальных данных и может считаться известным только с ограниченной точностью, позволяет применять вместо «точной» формулы (14.2) более простые соотношения. Например, можно использовать формулу, которая дает погрешность не более 3 %:

$$G = \mu f p_0 \sqrt{\frac{2}{RT_0} Y(1-Y)}. \quad (14.5)$$

Критическое значение отношения давлений по этой формуле получается равным $Y_* = 0,5$, и критический расход G_* , который остается постоянным в интервале от $Y = 0$ до $Y_* = 0,5$, равен

$$G_* = \mu f p_0 \sqrt{\frac{0,5}{RT_0}}. \quad (14.6)$$

Расход при движении газа по трубопроводу определяется соотношением

$$G_1 = p_1 f_\tau \sqrt{\frac{1-Y^2}{2RT(\zeta - \ln Y)}}, \quad (14.7)$$

где p_1 — давление во входном сечении трубопровода, f_τ — площадь проходного сечения трубопровода, ζ — коэффициент сопротивления.

Коэффициент сопротивления определяется опытным путем или же по формуле

$$\xi = \frac{1}{2} \lambda_T \frac{l_T}{d_T}, \quad (14.8)$$

где l_T — длина и d_T — диаметр трубопровода, λ_T — коэффициент трения воздуха в трубе, который в первом приближении можно принимать равным 0,02—0,03.

Если можно пренебречь величиной $\ln Y$ по сравнению с коэффициентом сопротивления ξ , то формула (14.7) упрощается и принимает вид

$$G = p_1 f_T \sqrt{\frac{1 - Y^2}{2RT\xi}}. \quad (14.9)$$

Расход, который может пропустить местное сопротивление (кран, распределитель и т. п.), определяется по формуле (14.2) или (14.5), причем коэффициент расхода μ находится путем эксперимента или же по справочным данным. Однако практически более

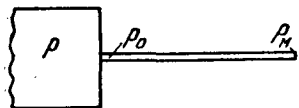


Рис. 80

удобно заменять действие каждого местного сопротивления эквивалентным участком длины трубопровода. Эквивалентная длина трубы $l_{\text{эк}}$ зависит от диаметра трубы и типа местного сопротивления. Например, для распределителя $l_{\text{эк}} = 4\text{--}5$ м при $d_T = 0,006$ м и $l_{\text{эк}} = 12\text{--}14$ м при $d_T = 0,026$ м.

После определения полной длины эквивалентного трубопровода с учетом всех местных сопротивлений можно найти расход воздуха в системе, состоящей из емкости, где поддерживается постоянное давление p_m , эквивалентного трубопровода и рабочей полости пневмоцилиндра (рис. 80). Давление p_m равно давлению в магистральной линии, по которой поступает воздух из компрессора или из промежуточной емкости, называемой *ресивером*. В конце трубопровода давление равно p_0 , а в рабочей полости пневмоцилиндра p .

Из условия неразрывности потока воздуха расход при движении по трубопроводу равен расходу при истечении в рабочую полость пневмоцилиндра. Это условие выражается равенством расходов по формулам (14.2) и (14.7) или по приближенным формулам (14.5) и (14.9). В последнем случае для подкритического режима имеем

$$G = \mu f p_0 \sqrt{\frac{2}{RT} \frac{p}{p_0} \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)} \equiv p_m f_T \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{p_0}{p_m}\right)^2}{2RT\xi}}, \quad (14.10)$$

где $T = T_0 = T_m$ — абсолютная температура воздуха, которая считается неизменной как в трубопроводе, так и в рабочей полости пневмоцилиндра, ξ — коэффициент сопротивления, определяемый по формуле (14.8) для эквивалентного трубопровода длиной $l_{\text{эк}}$.

Из уравнения (14.10) при заданных величинах p_m и p можно найти давление p_0 , решая квадратное уравнение

$$p_0^2 + \frac{4\mu^2 \zeta f^2}{f_T^2} p p_0 - \frac{4\mu^2 \zeta f^2}{f_T^2} p^2 - p_m^2 = 0, \quad (14.11)$$

а затем найти расход воздуха, соответствующий давлениям p_m и p . Однако такой способ вычисления расхода достаточно громоздок, и поэтому целесообразно воспользоваться методом приведенных коэффициентов расхода, который аналогичен методу приведения масс, сил и жесткостей.

Приведенным коэффициентом расхода μ_n называется отношение полного расхода G , определяемого, например, из уравнения (14.10), к условному расходу, вычисляемому по формуле (14.2) или (14.4) при $p_0 = p_m$, $T_0 = T_m$ и $\mu = 1$.

Для подкритического режима при $k = 1,4$ имеем

$$\mu_n = \frac{G}{f p_m \sqrt{\frac{7}{RT_m} \Phi\left(\frac{p}{p_m}\right)}}, \quad (14.12)$$

где $\Phi(p/p_m)$ — функция расхода, определяемая из таблиц.

При использовании приближенной формулы (14.5) получаем

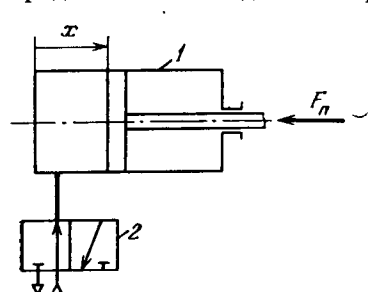
$$\mu_n = \frac{G}{f p_m \sqrt{\frac{2}{RT_m} \frac{p}{p_m} \left(1 - \frac{p}{p_m}\right)}}. \quad (14.13)$$

Однако формулы (14.12) и (14.13) использовать для вычисления μ_n трудно, так как величину G надо определять из уравнения (14.10) в зависимости от коэффициента сопротивления эквивалентного трубопровода ζ и отношения p_0/p_m . Поэтому приведенный коэффициент расхода μ_n определяют или экспериментальным путем, или по справочным графикам, составленным для различных значений коэффициента сопротивления эквивалентного трубопровода ζ и значений p_0/p_m .

§ 58. Динамика односторонних пневматических приводов

В одностороннем пневматическом приводе поршень пневмоцилиндра 1 при прямом ходе движется под действием сжатого воздуха (рис. 81). Обратный ход совершается под действием пружины или силы тяжести (при вертикальном расположении пневмоцилиндра). *Двухпозиционный трехлинейный распределитель* 2 служит для попеременного сообщения рабочей полости пневмоцилиндра с магистралью сжатого воздуха или с атмосферой. Распределитель называется трехлинейным потому, что к нему подведены три линии: от

магистральной, в атмосферу и к пневмоцилиндру. В указанной позиции распределителя рабочая полость пневмоцилиндра соединена с магистралью, во второй позиции — с атмосферой. Для того чтобы представить себе действие распределителя во второй позиции, надо



мысленно передвинуть правый квадрат на место левого, оставляя все три линии на месте.

Уравнение движения привода при переменной приведенной массе поршня m_{π} можно записать в форме уравнения Лагранжа второго рода

$$m_{\pi} \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2}{2} \frac{dm_{\pi}}{dx} = S(p - p_a), - F_{\pi}, \quad (14.14)$$

Рис. 81

где x — координата поршня, S — площадь поршня со стороны рабочей полости, p — давление в рабочей полости, p_a — атмосферное давление, F_{π} — величина приведенной к поршню силы сопротивления.

Для того чтобы можно было решать уравнения (14.14), надо установить зависимость давления p от постоянных и переменных параметров механизма. Эта зависимость получается из уравнения, которое называется уравнением теплового баланса или уравнением энергии:

$$kRT_m G_m dt = kpS \dot{x} dt + xS dp, \quad (14.15)$$

где k — показатель адиабаты, R — газовая постоянная, T_m — абсолютная температура воздуха в магистрали, G_m — расход воздуха, поступающего из магистрали.

Левая часть уравнения (14.15) дает величину энергии, поступившей в систему со сжатым воздухом. Первый член правой части уравнения (14.15) показывает изменение внутренней энергии, а второй член равен внешней работе.

Для определения закона движения поршня уравнение (14.15) обычно разрешают относительно производной давления по времени:

$$\dot{p} = \frac{k}{x} \left(\frac{G_m RT_m}{S} - p \dot{x} \right), \quad (14.16)$$

причем расход G_m определяется по формуле (14.4) для надкритического режима, т. е. в интервале изменения давления от $p = 0$ до $p = 0,528 p_m$, где p_m — давление воздуха в магистрали. В этой формуле $T_0 = T_m$, $p_0 = p_m$, f — проходное сечение трубопровода, по которому поступает воздух в рабочую полость пневмоцилиндра, а коэффициент μ принимается равным приведенному коэффициенту расхода μ_{π} :

$$G_m = \mu_{\pi} f p_m \sqrt{\frac{0,469}{RT_m}}. \quad (14.17)$$

Для подкритического режима, т. е. в интервале изменения давлений от $p = 0,528p_m$ до $p = p_m$, расход G_m определяется по формуле (14.2), которая с учетом формулы (14.3) при $k = 1,4$, $\mu = \mu_n$ и $T_0 = T_m$ имеет вид

$$G_m = \mu_n f p_m \sqrt{\frac{7}{RT_m}} \varphi\left(\frac{p}{p_m}\right), \quad (14.18)$$

где функция расхода $\varphi(p/p_m)$ находится из справочных таблиц.

Можно также использовать приближенную формулу (14.5), которая для принятых условий получает вид

$$G_m = \mu_n f p_m \sqrt{\frac{2}{RT_m} \frac{p}{p_m} \left(1 - \frac{p}{p_m}\right)}. \quad (14.19)$$

После подстановки величины расхода G_m из формулы (14.17) или (14.19) в уравнения (14.16) получается система двух нелинейных дифференциальных уравнений (14.14) и (14.16), из которой можно найти неизвестные $x = x(t)$ и $p = p(t)$. Решение этой системы находится численными методами.

Особенностью динамики пневмопривода по сравнению с гидроприводом является необходимость определения времени подготовительного периода, под которым понимается время наполнения рабочей полости цилиндра до начала движения поршня. Из условия равновесия неподвижного поршня находим давление воздуха в начале движения

$$p_d = p_a + \frac{F_n}{S}. \quad (14.20)$$

Для определения времени, в течение которого давление в рабочей полости увеличивается от начального значения $p = p_n$ до значения $p = p_d$, используется уравнение (14.15), которое при $\dot{x} = 0$ имеет вид

$$kRT_m G_m dt = x_0 S dp, \quad (14.21)$$

где x_0 — значение координаты x в начальном положении поршня. Расход G_m для надкритического режима определяется по формуле (14.17), а для подкритического — по формуле (14.18) или (14.19). Если p_d меньше $0,528p_m$, то при наполнении рабочей полости и неподвижном поршне может быть только надкритический режим.

Интегрирование уравнения (14.21) для надкритического режима при $k = 1,4$ дает

$$t_n = \frac{x_0 S}{\mu_n f \sqrt{RT_m}} \left(\frac{p_d}{p_m} - \frac{p_n}{p_m} \right). \quad (14.22)$$

Если оба значения давления p в начале и в конце наполнения больше критического, т. е. $p_n > 0,528p_m$ и $p_d > 0,528p_m$, то режим истечения будет подкритическим, и уравнение (14.21) при $k = 1,4$

после подстановки значения G_m из приближенной формулы (14.19) принимает вид

$$dt = \frac{x_0 S}{2\mu_{nf} \sqrt{RT_m}} \frac{dp}{\sqrt{p p_m - p^2}}. \quad (14.23)$$

После интегрирования получаем

$$t_n = \frac{-x_0 S}{2\mu_{nf} \sqrt{RT_m}} \left[\arcsin \left(\frac{2p_n}{p_m} - 1 \right) - \arcsin \left(\frac{2p_n}{p_m} - 1 \right) \right]. \quad (14.24)$$

Если $p_n < 0,528 p_m$, а $p_n > 0,528 p_m$, то время t_n состоит из двух слагаемых, из которых первое соответствует надкритическому режиму, а второе — подкритическому:

$$t_n = \frac{x_0 S}{\mu_{nf} \sqrt{RT_m}} \left[0,528 - \frac{p_n}{p_m} - \frac{1}{2} \arcsin 0,056 + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2p_n}{p_m} - 1 \right) \right]. \quad (14.25)$$

Прежде чем начнется обратный ход поршня, будет происходить истечение воздуха из рабочей полости, пока давление в ней p_n не станет равным давлению p_n , создаваемому пружиной или силой тяжести.

Время опоражнивания также находится интегрированием уравнения теплового баланса, которое отличается от уравнения (14.21) знаком минус перед дифференциалом количества вытекающего воздуха:

$$-kRT_n G_n dt = x_n S dp_n, \quad (14.26)$$

где T_n — температура вытекающего воздуха, x_n — значение координаты x в начале обратного хода, G_n — значение расхода по формулам, аналогичным формулам (14.17) и (14.18) или (14.19) в зависимости от режима истечения.

Для надкритического режима

$$G_n = \mu_{nv} f_v p_v \sqrt{\frac{0,459}{RT_v}}, \quad (14.27)$$

где μ_{nv} — приведенный коэффициент расхода для опоражнивания полости пневмоцилиндра, f_v — площадь проходного сечения выходного отверстия, T_v — абсолютная температура вытекающего воздуха.

Если обозначить через Z отношение атмосферного давления к давлению в полости пневмоцилиндра при ее опоражнивании

$$Z = p_a/p_v, \quad (14.28)$$

то критическое отношение давлений $Z_* = 0,528$ и, следовательно, уравнение (14.27) справедливо, если начальное значение давления $p_v = p_n$ и конечное $p_v = p_n$ больше $p_n/0,528$.

Если оба значения давления p_v меньше $p_a/0,528$, то режим истечения будет подкритическим, и расход G_v определяется по формуле

$$G_v = \mu_{пв} f_v p_v \sqrt{\frac{7}{RT_v}} \varphi \left(\frac{p_a}{p_v} \right) \quad (14.29)$$

или по приближенной формуле

$$G_v = \mu_{пв} f_v p_v \sqrt{\frac{2}{RT_v} \frac{p_a}{p_v} \left(1 - \frac{p_a}{p_v} \right)}. \quad (14.30)$$

Если p_k больше $p_a/0,528$, а p_n меньше $p_a/0,528$, то сперва будет подкритический режим (до $p_a = p_a/0,528$), а затем надкритический (от $p_a = p_a/0,528$ до $p_v = p_n$).

Заметим, что, в отличие от процесса наполнения при опоражнивании, расход воздуха G_v при надкритическом режиме оказывается переменным вследствие переменности давления p_a .

§ 59. Динамика двусторонних пневматических приводов

В двустороннем пневматическом поршневом двигателе движение поршня в прямом и обратном направлениях совершается под действием сжатого воздуха, который попеременно поступает то в одну, то в другую полость пневмоцилиндра 1 (рис. 82). Двухпозиционный четырехлинейный распределитель 2 показан в позиции, когда в левую полость цилиндра поступает сжатый воздух, а правая соединена с атмосферой (прямой ход).

Уравнение движения привода при прямом ходе

$$m_{п\pi} \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2}{2} \frac{dm_{п\pi}}{dx} = pS - p_n S_n - F_n, \quad (14.31)$$

где $m_{п\pi}$ — переменная приведенная масса привода, p — давление в рабочей полости, т. е. в полости, соединенной с магистралью сжатого воздуха, p_n — противодействие, т. е. давление в полости, соединенной с атмосферой, S — площадь поршня со стороны рабочей полости, S_n — площадь поршня со стороны противодействия, F_n — модуль приведенной силы сопротивления.

В отличие от односторонних приводов, для определения закона движения поршня $x = x(t)$ к уравнению движения (14.31) добавляются два уравнения теплового баланса (уравнения энергии). Для

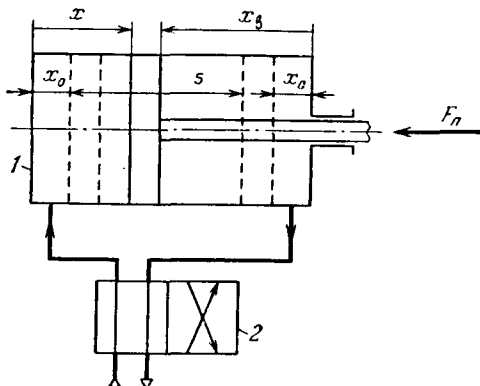


Рис. 82

полости, соединенной с магистралью сжатого воздуха, это уравнение совпадает с уравнением (14.16)

$$\dot{p} = \frac{k}{x} \left(\frac{G_m R T_m}{S} - p \dot{x} \right).$$

Для полости, соединенной с атмосферой, имеем

$$\dot{p}_b = \frac{k}{s + 2x_0 - x} \left(-\frac{G_b R T_b}{S_b} + p_b \dot{x} \right). \quad (14.32)$$

Это уравнение отличается от уравнения (14.16) знаком минус у первого члена в скобках. Кроме того, координата x_b , от которой зависит объем полости противодавления, выражена через обобщенную координату x , полный ход поршня s и начальные значения координат x и x_b , равные x_0 (см. рис. 82).

Абсолютная температура T_b воздуха, выходящего из полости противодавления, связана с абсолютной температурой T_m воздуха, поступающего из магистрали, соотношением

$$T_b = T_m \left(\frac{p_b}{p_m} \right)^{(k-1)/k}, \quad (14.33)$$

которое получается из уравнения состояния воздуха (14.1) в предположении, что процесс изменения его состояния происходит в условиях полного отсутствия теплообмена с внешней средой (адиабатический процесс).

Расход воздуха, поступающего из магистрали, находится, как и при одностороннем приводе, по формуле (14.17) для надкритического режима и по формуле (14.18) или (14.19) для подкритического режима.

Расход воздуха, выходящего из полости противодавления, определяется по формулам (14.27), (14.29) или (14.30) в зависимости от режима истечения.

После подстановки значений расходов G_m , G_b и абсолютной температуры T_b в уравнения (14.16) и (14.32) получается система трех нелинейных дифференциальных уравнений (14.31), (14.16) и (14.32), из которой можно найти неизвестные: $x = x(t)$, $p = p(t)$ и $p_b = p_b(t)$.

Решение этой системы находится численными методами.

§ 60. Безразмерные уравнения движения механизмов с пневмоприводом

Для перехода к безразмерным параметрам принимаем за модули измерения: перемещений — ход поршня s , сил — произведение давления воздуха в магистрали p_m на площадь поршня S и времени — величину отношения t_m/N , где t_m — время, необходимое для равноускоренного перемещения на величину полного хода s массы m .

под действием постоянной силы, равной $2p_m S$, т. е.

$$t_m = \sqrt{\frac{ms}{p_m S}}. \quad (14.34)$$

Величина N — безразмерная постоянная величина, характеризующая параметры привода:

$$N = \frac{\mu f}{S} \sqrt{\frac{2mkRT_m}{p_m S s (k-1)}}. \quad (14.35)$$

В соответствии с выбранными модулями измерений принимаем безразмерное перемещение

$$\xi = \frac{x - x_0}{s}, \quad (14.36)$$

безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_m} N \quad (14.37)$$

и безразмерную приведенную силу

$$\eta = \frac{F_{\Pi}}{p_m S}. \quad (14.38)$$

Тогда уравнение движения одностороннего пневматического привода при постоянной приведенной массе m принимает вид

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} N^2 = Y - Y_a - \eta, \quad (14.39)$$

где $Y = p/p_m$ и $Y_a = p_a/p_m$.

Уравнение изменения давления (14.16) принимает вид

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{k}{\xi + \xi_0} \left[\varphi(Y) - Y \frac{d\xi}{d\tau} \right], \quad (14.40)$$

где $\xi_0 = x_0/s$.

В результате решения системы уравнений (14.39) и (14.40) находятся функции $\xi = \xi(t)$ и $Y = Y(\tau)$. Для перехода от безразмерных величин к их действительным значениям имеем следующие соотношения:

$$t = \tau \frac{sS}{\mu_{\Pi} f} \sqrt{\frac{k-1}{2kRT_m}}, \quad (14.41)$$

$$\dot{x} = \frac{d\xi}{d\tau} \frac{sN}{t_m}, \quad (14.42)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \frac{sN^2}{t_m^2}. \quad (14.43)$$

Аналогично представляются в безразмерной форме уравнения для обратного хода одностороннего пневмопривода.

ГЛАВА 15

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ С ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ

§ 61. Уравнения Лагранжа — Максвелла

Механизмы с электроприводом можно рассматривать как электромеханические системы. Для исследования их динамики методически наиболее удобными являются *уравнения Лагранжа — Максвелла*, которые имеют форму уравнений Лагранжа второго рода и позволяют автоматически получать не только уравнения движения механической части системы, но и связанные с ними уравнения электрической части.

Составление этих уравнений предполагает, что состояние электромеханической системы описывается обобщенными координатами механической части, число которых в голономных системах равно числу степеней свободы механизма, и обобщенными координатами электрической части, определяющими состояние электрической части системы.

Обобщенные механические координаты обозначим через q_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, а число n равно числу степеней свободы механизма. За обобщенные механические координаты, как и в предыдущих главах, будем выбирать линейные или угловые координаты звеньев.

Обобщенные электрические координаты обозначим через κ_k , где $\kappa_k = 1, 2, \dots, m$, а число m равно числу электрических степеней свободы. За обобщенные электрические координаты будем выбирать количества электричества.

Производные по времени от обобщенных механических координат дают обобщенные скорости $\dot{q}_i$, а производные по времени от обобщенных электрических координат дают обобщенные токи $\dot{\kappa}_k$.

Уравнения Лагранжа — Максвелла для голономных систем имеют вид *)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i, & i &= 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\kappa}_k} - \frac{\partial L}{\partial \kappa_k} &= Q_k, & k &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (15.1)$$

В этих уравнениях L — функция Лагранжа — Максвелла, равная сумме «электрической» функции Лагранжа L_e и «механической» функции Лагранжа L_m :

$$L = L_e + L_m. \quad (15.2)$$

«Механическая» функция Лагранжа, как обычно, равна разности кинетической энергии T и потенциальной энергии Π :

$$L_m = T - \Pi, \quad (15.3)$$

*) Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. — М.: Гостехиздат, 1952.

а «электрическая» функция Лагранжа для механизмов с электроприводом совпадает с магнитной энергией системы

$$L_a = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{\infty} L_{rs} i_r i_s, \quad (15.4)$$

где r и s — индексы независимых электрических контуров (витков, обмоток), по которым протекают токи i_r и i_s ; L_{rs} при $r \neq s$ — взаимная индуктивность (коэффициент взаимной индукции), а при $r = s$ — индуктивность (коэффициент самоиндукции).

Обобщенная (приведенная) сила Q_i определяется, как было указано в гл. 7, т. е. как скалярная величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил.

Обобщенная «сила» Q_k определяется по аналогии с Q_i как скалярная величина, равная коэффициенту при вариации данной «электрической» обобщенной координаты в выражении работы δA электрических сил, т. е. из выражения

$$\delta A = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{r,s=1}^{\infty} (E_{r,s} - R_{r,s} i_{r,s}) \right] \delta x_k, \quad (15.5)$$

где $E_{r,s}$ — э. д. с. контура, $R_{r,s}$ — электрическое сопротивление контура.

Пример 1. Электромагнитный прибор состоит из подвижной катушки, вращающейся в постоянном магнитном поле, которое создает другая (неподвижная) катушка, образующая с подвижной катушкой последовательную электрическую цепь. На подвижную катушку действует пара сил, создаваемая упругостью пружины с коэффициентом жесткости c . Во вращательной паре — вязкое трение с коэффициентом β . За обобщенные координаты системы примем угол поворота подвижной катушки φ , отсчитываемый от положения, при котором катушки взаимно перпендикулярны, и ток i , протекающий через обмотки катушек. Тогда «механическая» функция Лагранжа примет вид

$$L_m = \frac{1}{2} (J \dot{\varphi}^2 - c \varphi^2),$$

где J — момент инерции подвижной катушки относительно оси вращения.

«Электрическая» функция Лагранжа

$$L_a = \frac{1}{2} (L_1 + L_{12} + L_{21} + L_2) i^2,$$

где индекс 1 относится к подвижной катушке, а индекс 2 — к неподвижной.

Из условий симметрии взаимная индуктивность L_{12} равна L_{21} . Обозначим их сумму (полный коэффициент взаимной индуктивности) через $2L_n$ и примем во внимание, что этот коэффициент за-

висит от взаимного расположения катушек, т. е. от угла φ . Обычно принимают

$$L_{12} = L_0 \sin \varphi.$$

Индуктивности катушек L_1 и L_2 считаем постоянными.

Следовательно, функция Лагранжа — Максвелла имеет вид

$$L = \frac{1}{2} [(L_1 + L_2 + 2L_0 \sin \varphi) \dot{i}^2 + J \dot{\varphi}^2 - c \varphi^2].$$

Обобщенная сила Q_i находится из выражения элементарной работы сил трения δA_r на возможном перемещении системы (работа сил упругости пружины учтена при составлении выражения потенциальной энергии):

$$\delta A_r = -\beta \dot{\varphi} \delta \varphi.$$

Отсюда

$$Q_i = -\beta \dot{\varphi}.$$

Обобщенная сила Q_k находится из выражения элементарной работы «электрических сил»:

$$\delta A = (E - iR) \delta k,$$

где R — суммарное сопротивление обмоток катушек, E — внешняя э. д. с.

Отсюда

$$Q_k = E - iR.$$

Уравнения Лагранжа — Максвелла:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\beta \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{i}} = E - iR.$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = L_0 \dot{i}^2 \cos \varphi - c \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{i}} = (L_1 + L_2 + 2L_0 \sin \varphi) \dot{i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{i}} = (L_1 + L_2 + 2L_0 \sin \varphi) \frac{di}{dt} + 2L_0 \dot{i} \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Теперь уравнения Лагранжа — Максвелла принимают вид

$$J \ddot{\varphi} - L_0 \dot{i}^2 \cos \varphi + c \varphi = -\beta \dot{\varphi}, \quad (15.6)$$

$$(L_1 + L_2 + 2L_0 \sin \varphi) \frac{di}{dt} + 2L_0 \dot{i} \dot{\varphi} \cos \varphi = E - iR.$$

Совместное решение этих двух уравнений дает искомые функции $\varphi = \varphi(t)$ и $i = i(t)$. Заметим, что при составлении функции

Лагранжа можно учитывать только кинетическую энергию (без потенциальной), но тогда выражение обобщенной силы Q_i должно содержать член $-сф$, т. е. момент сопротивления от сжатия пружины.

Первое уравнение системы (15.6) можно записать в следующем виде:

$$J\ddot{\varphi} = L_0 \dot{i}^2 \cos \varphi - сф - \beta \dot{\varphi}.$$

Отсюда видно, что первый член правой части дает величину движущего момента

$$\bar{M}_\pi = L_0 \dot{i}^2 \cos \varphi.$$

Пример 2. Электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением приводит в движение входное звено механизма, для которого приведенный момент инерции J_π и приведенный момент сил $\bar{M}_\pi$ — заданные функции угла поворота якоря (ротора) электродвигателя.

Обозначим индуктивности обмоток возбуждения и якоря через L_π , L_π , взаимную индуктивность через $L_{\pi\pi} = L_{\pi\pi} = L_\pi$, токи в обмотках возбуждения и якоря соответственно через i_π и i_π . Тогда функция Лагранжа — Максвелла получает вид

$$L = \frac{1}{2} (L_\pi \dot{i}_\pi^2 + L_\pi \dot{i}_\pi^2 + 2L_{\pi\pi} \dot{i}_\pi \dot{i}_\pi + J_\pi \dot{\varphi}^2).$$

Если считать ток в обмотке возбуждения постоянным, то состояние рассматриваемой электромеханической системы определяется двумя обобщенными координатами φ и i_π , которые могут быть найдены как функции времени из уравнений Лагранжа — Максвелла

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \bar{M}_\pi,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_\pi} = U - i_\pi R_\pi,$$

где U — напряжение, приложенное к обмотке якоря, R_π — сопротивление этой обмотки.

При дифференцировании функции Лагранжа — Максвелла будем считать индуктивности L_π и L_π постоянными, а взаимную индуктивность L_π зависящей от угла поворота якоря φ .

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_\pi \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_\pi \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_\pi}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{i}_\pi} = \frac{dL_\pi}{d\varphi} i_\pi \dot{i}_\pi + \dot{\varphi}^2 \frac{1}{2} \frac{dJ_\pi}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_\pi} = L_\pi \dot{i}_\pi + L_\pi \dot{i}_\pi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_\pi} = L_\pi \frac{d\dot{i}_\pi}{dt} + \frac{dL_\pi}{d\varphi} \dot{\varphi} \dot{i}_\pi.$$

Теперь уравнения Лагранжа — Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} J_{\Pi} \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\Psi}^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} - \frac{dL_{\Pi}}{d\varphi} i_{\text{в}} i_{\text{я}} &= \widetilde{M}_{\Pi}, \\ L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + \frac{dL_{\Pi}}{d\varphi} i_{\text{в}} \dot{\varphi} &= U - i_{\text{я}} R_{\text{я}}. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Совместное решение этих двух уравнений дает искомые функции $\varphi = \varphi(t)$ и $i_{\text{я}} = i_{\text{я}}(t)$.

§ 62. Характеристики электродвигателей

При исследовании динамики механизмов с электроприводом обычно используют статическую характеристику двигателя, под которой понимается зависимость угловой скорости ротора (якоря) $\tilde{\omega}$ от момента $\tilde{M}$ пары сил, приложенной к ротору:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{M}). \quad (15.8)$$

Эта характеристика называется *статической*, потому что она определяется при $\dot{\varphi} = 0$, т. е. без учета сил инерции.

В задачах теории механизмов и машин зависимость (15.8) удобнее представлять в форме характеристики движущего момента, действующего на входное звено механизма со стороны вала двигателя

$$M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega). \quad (15.9)$$

Рассмотрим, например, статическую характеристику движущего момента *электродвигателя постоянного тока с независимым (или параллельным) возбуждением*. Из первого уравнения системы (15.7) имеем

$$M_{\text{д}} = \frac{dL_{\Pi}}{d\varphi} i_{\text{в}} i_{\text{я}}.$$

Экспериментальные данные для существующих конструкций электродвигателей постоянного тока показывают, что величина производной $dL_{\Pi}/d\varphi$ может считаться приближенно постоянной. Постоянную величину $dL_{\Pi}/d\varphi$ обозначим через K . Тогда движущий момент

$$M_{\text{д}} = K i_{\text{в}} i_{\text{я}}. \quad (15.10)$$

Величина $K i_{\text{в}}$ равна магнитному потоку в воздушном зазоре между ротором и статором, если считать, что магнитный поток создается только обмоткой возбуждения. Следовательно, движущий момент $M_{\text{д}}$ равен произведению магнитного потока на ток в обмотке якоря.

Для установившегося движения производная di_n/dt равна нулю, и тогда из второго уравнения системы (15.7) имеем

$$i_n = \frac{U - Ki_n \dot{\varphi}}{R_n}, \quad (15.11)$$

где $Ki_n \dot{\varphi}$ — генераторная э. д. с., возникающая в обмотке якоря.

Обозначая угловую скорость якоря $\dot{\varphi}$ через $\tilde{\omega}$, из соотношений (15.10) и (15.11) получаем

$$M_d = M_0 - b\tilde{\omega}, \quad (15.12)$$

где

$$M_0 = UKi_n/R_n, \quad (15.13)$$

$$b = (Ki_n)^2/R_n. \quad (15.14)$$

Итак, при постоянном токе возбуждения статическая характеристика двигателя постоянного тока с независимым (или параллельным) возбуждением представляется в виде линейной зависимости между движущим моментом M_d и угловой скоростью $\tilde{\omega}$.

Несмотря на то, что эта зависимость справедлива лишь при постоянной величине силы тока в обмотке якоря, т. е. при установившемся движении, она часто употребляется при исследовании динамики механизмов с электроприводом. Чтобы оценить погрешность, допускаемую при использовании статической характеристики, сравним упрощенное решение, получаемое из уравнения движения механизма, в котором движущий момент определяется по статической характеристике, с более точным решением, получаемым из системы уравнений (15.7).

При сравнении получаемых решений приведенный момент сил будем считать приведенным моментом сил сопротивления

$$M_n = -M_c.$$

Кроме того, для простоты сравнений примем $J_n = \text{const}$. Тогда упрощенное решение можно найти из первого уравнения системы (15.7) после подстановки значения движущего момента M_d из соотношения (15.12).

$$J_n \ddot{\omega} = M_0 - b\tilde{\omega} - M_c. \quad (15.15)$$

Для более точного решения надо решать систему уравнений (15.7), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} J_n \ddot{\omega} - Ki_n i_n &= -M_c, \\ L_n \frac{di_n}{dt} + Ki_n \tilde{\omega} &= U - i_n R_n. \end{aligned} \quad (15.16)$$

Для того чтобы исключить из этих уравнений функцию $i_a = i_a(t)$, находим ее из первого уравнения:

$$i_a = \frac{J_n \ddot{\omega} - M_c}{K i_b}, \quad (15.17)$$

а производную di_a/dt — из второго уравнения. Эта производная с учетом формулы (15.17) имеет вид

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{UK i_b - R_n J_n \ddot{\omega} - R_n M_c - (K i_b)^2 \ddot{\omega}}{L_n K i_b}.$$

Подставляя сюда значения коэффициентов M_0 и b статической характеристики двигателя из формул (15.13) и (15.14), получаем после преобразований

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{M_0 - J_n \ddot{\omega} - M_c - b \omega}{L_n K i_b} R_n. \quad (15.18)$$

После дифференцирования первого уравнения (15.16) по времени имеем

$$J_n \ddot{\omega} - K i_b \frac{di_a}{dt} = -\dot{M}_c.$$

Подставляя значение di_a/dt из формулы (15.18), получаем уравнение движения механизма с приводом от электродвигателя при постоянном приведенном моменте инерции:

$$\frac{L_n}{R_n} (J_n \ddot{\omega} + \dot{M}_c) + J_n \ddot{\omega} = M_0 - b \omega - M_c. \quad (15.19)$$

Уравнение (15.19) отличается от уравнения (15.15) дополнительным членом в левой части, величина которого зависит от отношения L_n/R_n и производной по времени от функции $(J_n \ddot{\omega} + M_c)$. Этот дополнительный член называют иногда *электромагнитной силой инерции*. Заметим также, что учет электромагнитной силы инерции повышает порядок дифференциального уравнения движения механизма на единицу. Относительно угловой скорости $\dot{\omega}$ уравнение (15.15) есть уравнение первого порядка и относится к уравнениям аperiodического типа.

Уравнение (15.19) является дифференциальным уравнением второго порядка, и в зависимости от соотношений между его коэффициентами может относиться или к аperiodическому типу второго порядка, или к колебательному типу. Отсюда следует, что при решении задач динамики механизмов с электродвигателем необходимо давать оценку дополнительного члена, выражающего электромагнитную силу инерции. Если пользоваться только статической характеристикой электродвигателя, то нельзя обнаружить

колебательные режимы, которые в областях, близких к резонансу, приводят к значительному увеличению амплитуд и динамических нагрузок *).

Для электродвигателей *постоянного тока с последовательным возбуждением* ток в обмотке возбуждения равен току в обмотке якоря

$$i_a = i_n = i,$$

и уравнения Лагранжа — Максвелла принимают вид

$$J_n \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} - K_1 i^2 = \tilde{M}_n, \quad (15.20)$$

$$L \frac{di}{dt} + K_2 i \dot{\varphi} = U - iR, \quad (15.21)$$

где L — суммарная величина индуктивностей обмоток якоря и возбуждения, R — суммарное сопротивление этих обмоток, K_1 и K_2 — постоянные величины, зависящие от параметров двигателя.

Эти уравнения справедливы для ненасыщенного участка кривой намагничивания, т. е. зависимости магнитного потока Φ от тока i . На этом участке, соответствующем области малых токов, магнитный поток Φ пропорционален силе тока i :

$$\Phi = K_\Phi i,$$

и, следовательно, третий член левой части уравнения (15.20) может быть преобразован к виду

$$K_1 i^2 = K_3 K_\Phi i^2 = K_3 \Phi i,$$

где $K_3 = K_1/K_\Phi$ — постоянный коэффициент.

Аналогично второй член левой части уравнения (15.21) может быть представлен в форме

$$K_2 i \dot{\varphi} = K_4 K_\Phi i \dot{\varphi} = K_4 \Phi \dot{\varphi},$$

где K_4 — постоянный коэффициент.

При увеличении силы тока i величина магнитного потока Φ приближается к постоянному значению

$$K_\Phi i = \text{const},$$

т. е. коэффициент K_Φ , а следовательно, и коэффициент K_1 оказываются переменными. Тогда уравнения (15.20) и (15.21) переходят в уравнения (15.7), если положить в них коэффициенты $K_{1,2} = dL_n/d\varphi$ переменными, и все выводы, сделанные при рассмотрении

*) Дальнейшее уточнение полученных результатов с учетом переменной силы тока в обмотке возбуждения требует применения методов неголономной механики. См. Львович А. Ю., Поляхов Н. Н. Приложение неголономной механики к теории электромеханических систем // Вестник ЛГУ.— 1977.— № 13; Диевский В. А. Исследование электромеханических систем методами неголономной механики.— Дис. на соискание уч. ст. кандидата физ.-мат. наук, ЛГУ, 1979.

динамики электродвигателя с параллельным (или независимым) возбуждением, сохраняются при средних значениях $K_{1,2}$.

Если же рассматривать область малых токов, то из уравнения (15.20) при постоянной величине K_1 имеем

$$M_d = K_1 i^2. \quad (15.22)$$

При установившемся движении производная di/dt равна нулю, и тогда из уравнения (15.21) при $\Phi = \omega$ получаем

$$i = \frac{U}{K_2 \omega + R}.$$

Подставляя это значение i в формулу (15.22), получаем статическую характеристику электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением

$$M_d = \frac{K_1 U^2}{(K_2 \omega + R)^2}. \quad (15.23)$$

При $M_d = M_c$ получаем зависимость угловой скорости $\tilde{\omega}$ от приведенного к валу двигателя момента сопротивления:

$$\omega = \frac{U}{K_2} \sqrt{\frac{K_1}{M_c} - \frac{R}{K_2}}. \quad (15.24)$$

Отсюда следует, что при стремлении величины M_c к нулю (холостой ход) угловая скорость $\tilde{\omega}$ стремится к бесконечности («разнос» двигателя).

Наиболее распространенным типом электродвигателя переменного тока является *асинхронный двигатель*, действие которого основано на том, что трехфазная обмотка статора, получающая питание от трехфазной сети переменного тока, создает вращающийся магнитный поток Φ , который, пересекая проводники ротора (якоря), наводит в них электродвижущую силу E_a . Если цепь якоря замкнута, то по его проводникам будет протекать ток i_a , который, взаимодействуя с магнитным потоком Φ , создает вращающий момент, увлекающий якорь в направлении вращения магнитного потока. Однако этот момент действует только до тех пор, пока угловая скорость ротора не сравняется со скоростью вращения магнитного потока. Отсюда следует, что ротор в своем вращении обязательно отстает от вращения магнитного поля. Отсюда происходит название двигателя — *асинхронный*. Мерой этого отставания является безразмерная величина s , называемая *скольжением* двигателя:

$$s = \frac{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_c}, \quad (15.25)$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость ротора, $\tilde{\omega}_c$ — угловая скорость вращения магнитного потока или синхронная скорость двигателя.

Если обозначить через p число пар полюсов обмотки статора, то синхронная скорость двигателя связана с частотой питающего тока f_0 соотношением

$$\omega_c = \frac{2\pi f_0}{p}. \quad (15.26)$$

При исследовании переходных режимов в электромеханических системах с асинхронным двигателем, в отличие от систем с двигателями постоянного тока, можно пренебречь электромагнитными

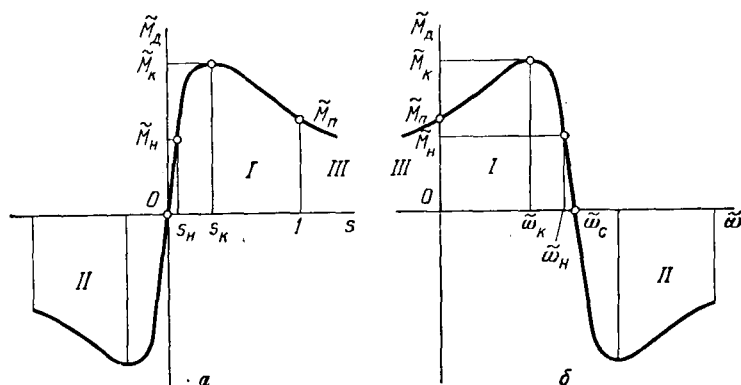


Рис. 83

переходными процессами и пользоваться всегда статической характеристикой двигателя, которую удобно представить в виде зависимости движущего момента на валу ротора $\tilde{M}_d$ от величины скольжения s (рис. 83, а). Аналитическое выражение этой характеристики обычно принимается по формуле

$$\tilde{M}_d = \frac{2\tilde{M}_K}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}}, \quad (15.27)$$

где $\tilde{M}_K$ — максимальный или критический момент двигателя (раньше его называли *опрокидывающим*), s_K — критическое скольжение, т. е. скольжение при $\tilde{M}_d = \tilde{M}_K$.

Если известна зависимость $\tilde{M}_d = \tilde{M}_d(s)$, то на основании формулы (15.25) можно всегда построить график $\tilde{M}_d = \tilde{M}_d(\tilde{\omega})$, пользуясь соотношением

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_c(1 - s). \quad (15.28)$$

На рис. 83, б показан график $\tilde{M}_d = \tilde{M}_d(\tilde{\omega})$, который обычно и используется при исследовании динамики механизмов с электроприводом.

Для асинхронных двигателей возможны три режима движения, отмеченные на характеристиках $M_d = M_d(s)$ и $M_d = M_d(\tilde{\omega})$ цифрами I, II, III.

Область I соответствует *двигательному режиму*, при котором угловая скорость $\tilde{\omega}$ и момент на валу двигателя M_d имеют одно и то же направление, причем угловая скорость меньше синхронной по модулю ($\omega < \omega_c$), а скольжение s находится в пределах от 0 до 1.

Область II соответствует *генераторному режиму*, при котором угловая скорость вала двигателя больше синхронной ($\omega > \omega_c$), а момент на валу двигателя M_d считается отрицательным, т. е. для возможности вращения вала двигателя с угловой скоростью, превышающей по модулю синхронную скорость, надо извне приложить к валу двигателя пару сил с моментом M_d . При этом режиме «двигатель» отдает энергию в сеть. Скольжение s изменяется в пределах от 0 до $-\infty$.

Область III называется областью *режима противовключения*, когда угловая скорость вращения магнитного потока меняет знак при неизменном направлении момента на валу двигателя. Скольжение s изменяется от $s = 1$ до $s = \infty$. Этот режим используется для торможения путем переключения на ходу двух фаз обмотки статора.

В каталогах асинхронных электродвигателей приводятся следующие данные:

1) синхронная угловая скорость $\tilde{\omega}_c$ или синхронная частота вращения n_c , измеряемая в оборотах в минуту;

2) номинальная угловая скорость $\tilde{\omega}_n$ или номинальная частота вращения n_n ;

3) номинальная мощность двигателя N_n , по которой можно определить номинальный момент двигателя $M_n = N_n / \omega_n$;

4) перегрузочная способность двигателя, которая характеризуется коэффициентом $\lambda = M_K / M_n$ и определяет максимальную (критическую) величину момента, развиваемого двигателем;

5) кратность пускового момента M_K / M_n .

По этим данным можно найти модуль критического момента

$$M_K = \frac{N_n}{\omega_n} \lambda \quad (15.29)$$

и номинальное скольжение

$$s_n = \frac{\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_c}. \quad (15.30)$$

Величина критического скольжения находится из соотношения (15.27) при $s = s_K$ и $M_K / M_n = \lambda$:

$$s_K = \lambda s_n \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right). \quad (15.31)$$

Теперь, зная величины $\tilde{M}_k$ и s_k , можно построить характеристику двигателя, используя соотношение (15.27).

Участок характеристики от $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_k$ до $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$ (или от $s = 0$ до $s = s_k$) называют *устойчивым*, так как при увеличении момента внешних сил, приложенных к валу двигателя, скорость его падает и вместе с тем в соответствии с характеристикой на этом участке растет движущий момент $\tilde{M}_d$, обеспечивая новое установившееся значение скорости $\tilde{\omega}$. Участок характеристики от $\tilde{\omega} = 0$ до $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_k$ (или от $s = s_k$ до $s = \infty$) называют *неустойчивым*, так как при увеличении момента внешних сил и соответствующем уменьшении скорости $\tilde{\omega}$ движущий момент также уменьшается и через некоторое время двигатель останавливается.

Точка характеристики, соответствующая номинальному режиму ($\tilde{M}_d = \tilde{M}_n$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_n$), лежит на устойчивом участке. Этот участок может с достаточной для практики точностью считаться линейным. Пренебрегая величиной s/s_k в знаменателе соотношения (15.27), получаем для этого участка

$$\tilde{M}_d = 2\tilde{M}_k s/s_k.$$

С учетом формулы (15.25) имеем

$$M_d = M_0 - b\omega, \quad (15.32)$$

где

$$M_0 = 2M_k/s_k, \quad b = 2M_k/(s_k\omega_c).$$

Следовательно, движущий момент, развиваемый на валу асинхронного двигателя, как и в случае двигателя постоянного тока с независимым (или параллельным) возбуждением, в первом приближении выражается линейной функцией угловой скорости вращения ротора. В уточненных расчетах можно учесть нелинейность по соотношению (15.27). Заметим только, что для асинхронного двигателя модуль движущего момента ограничен значением $\tilde{M}_d = M_k$.

§ 63. Динамика механизмов с двигателем ограниченной мощности

Центробежный вибратор. При рассмотрении динамики зубчатого механизма для передачи вращения к валу рабочей машины обычно считают, что угловая скорость ротора двигателя может быть принята постоянной. Это утверждение справедливо в тех случаях, когда двигатель практически имеет неограниченный запас мощности, и потому изменения сил, действующих на звенья механизма, не оказывают влияния на установившуюся скорость вращения ротора двигателя. При ограниченной мощности двигателя его характеристика должна учитываться при исследовании динамики всего

механизма. Особенно ярко это влияние может проявляться на режимах движения, близких к резонансным. Такие режимы характерны для механизмов вибраторов, т. е. устройств, предназначенных для создания направленных колебаний.

На рис. 84 показана схема одного из простейших центробежных вибраторов, который состоит из звена с массой m_2 , упругой связи с коэффициентом жесткости c и неуравновешенной массы m_1 , приводимой во вращение от двигателя с моментом инерции J_d . Колебания звена с массой m_2 в направлении оси x могут рассматриваться как колебания, вынуждаемые той составляющей силы инерции, которая направлена вдоль оси x и изменяется по гармоническому закону. Соответственно механизм центробежного вибратора называют *колебательной системой с инерционным возбуждением*.

Уравнения движения вибратора с двигателем ограниченной мощности. При составлении уравнений движения примем, что движение массы m_1 происходит в горизонтальной плоскости, а сила трения в паре «ползун — стойка» определяется выражением $F_r = \beta \dot{x}$. Кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} (m_2 \dot{x}^2 + J_d \dot{\varphi}^2 + m_1 v_A^2),$$

где

$$v_A^2 = \dot{x}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}r\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Введем обозначения: $m = m_1 + m_2$, $J = J_d + m_1 r^2$. Тогда

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - m_1 \dot{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (15.33)$$

Потенциальная энергия механизма

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2. \quad (15.34)$$

Характеристику двигателя считаем заданной в виде $M_d = M_d(\dot{\varphi})$.

Уравнения движения получаем из уравнений Лагранжа второго рода с учетом выражений (15.33) и (15.34):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - m_1 r \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_1 r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= -cx - \beta \dot{x}, \\ J\ddot{\varphi} - m_1 r \ddot{x} \sin \varphi &= \tilde{M}_d(\dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (15.35)$$

Уравнения движения (15.35) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + k^2 x &= a\ddot{\varphi} \sin \varphi + a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - h\dot{x}, \\ \ddot{\varphi} &= L(\dot{\varphi}) + b\ddot{x} \sin \varphi,\end{aligned}\quad (15.36)$$

где $k^2 = c/m$, $h = \beta/m$, $a = m_1 r/m$, $b = m_1 r/J$, $L(\dot{\varphi}) = \tilde{M}_d(\dot{\varphi})/J$.

Приведение уравнений движения к стандартной форме по методу медленно меняющихся параметров. Из уравнений (15.36) следует, что при малых значениях коэффициентов a , b и медленно изменяющейся величине $L(\dot{\varphi})$ можно приближенно считать, что перемещение x изменяется по закону, близкому к гармоническому, а ускорение $\ddot{\varphi}$ имеет малую величину. Тогда, как и в § 47, искомое решение для переменной x будем искать в форме

$$x = A \cos(\varphi + \xi), \quad (15.37)$$

где A и ξ — медленно меняющиеся параметры, связанные соотношением

$$\dot{x} = -Ak \sin(\varphi + \xi). \quad (15.38)$$

Угловую скорость вращения вала двигателя обозначим через $\tilde{\omega} = d\varphi/dt$. Новые переменные A , ξ и $\tilde{\omega}$ будут медленно изменяющимися величинами.

Производная $\dot{x}$ может быть также найдена дифференцированием соотношения (15.37)

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\varphi + \xi) - (\tilde{\omega} + \dot{\xi}) A \sin(\varphi + \xi). \quad (15.39)$$

Приравнявая правые части соотношений (15.38) и (15.39), получаем

$$\dot{A} \cos(\varphi + \xi) - \dot{\xi} A \sin(\varphi + \xi) = (\tilde{\omega} - k) A \sin(\varphi + \xi). \quad (15.40)$$

Дифференцирование выражения (15.38) дает

$$\ddot{x} = -\dot{A} k \sin(\varphi + \xi) - (\tilde{\omega} + \dot{\xi}) A k \cos(\varphi + \xi). \quad (15.41)$$

Система уравнений движения (15.36) с учетом выражений (15.37), (15.38) и (15.41) принимает вид

$$\begin{aligned}-\dot{A} k \sin(\varphi + \xi) - \dot{\xi} A k \cos(\varphi + \xi) + A k (k - \tilde{\omega}) \cos(\varphi + \xi) = \\ = a\tilde{\omega} \sin \varphi + a\omega^2 \cos \varphi + A k h \sin(\varphi + \xi),\end{aligned}\quad (15.42)$$

$$\tilde{\omega} = L(\tilde{\omega}) - b[\dot{A} k \sin(\varphi + \xi) + (\tilde{\omega} + \dot{\xi}) A k \cos(\varphi + \xi)] \sin \varphi. \quad (15.43)$$

Система уравнений (15.40), (15.42) и (15.43) для определения $\dot{A}$, $\dot{\xi}$ и $\tilde{\omega}$ может быть упрощена путем отбрасывания членов второ-

го порядка малости: $a\ddot{\omega}$, $b\dot{A}$ и $b\dot{\xi}$. Кроме того, уравнения (15.40) и (15.42) разрешим относительно $\dot{A}$ и $\dot{\xi}$. Тогда получаем систему трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\tilde{\omega}} = L(\tilde{\omega}) - Abk\tilde{\omega} \cos(\varphi + \xi) \sin \varphi,$$

$$\dot{A} = -\frac{1}{k} [a\omega^2 \cos \varphi + A kh \sin(\varphi + \xi)] \sin(\varphi + \xi),$$

$$\dot{\xi} = k - \tilde{\omega} - \frac{1}{Ak} [a\omega^2 \cos \varphi + A kh \sin(\varphi + \xi)] \cos(\varphi + \xi).$$

Эту систему можно привести к стандартной форме метода медленно меняющихся параметров, принимая за независимую переменную угол φ и используя соотношение $d\varphi = \tilde{\omega} dt$:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} = \frac{1}{\tilde{\omega}} [L(\tilde{\omega}) - Abk\tilde{\omega} \cos(\varphi + \xi) \sin \varphi],$$

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{1}{k\tilde{\omega}} [a\omega^2 \cos \varphi + A kh \sin(\varphi + \xi)] \sin(\varphi + \xi), \quad (15.44)$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{k - \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} - \frac{1}{Ak\tilde{\omega}} [a\omega^2 \cos \varphi + A kh \sin(\varphi + \xi)] \cos(\varphi + \xi).$$

Исследование стационарных режимов движения. Система уравнений (15.44) может быть подвергнута дальнейшему упрощению, если принять во внимание, что за один период изменения угла φ от 0 до 2π величины $\tilde{\omega}$, A и ξ изменяются очень мало, и их производные по углу поворота φ можно считать равными их средним значениям:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi\tilde{\omega}} \int_0^{2\pi} L(\tilde{\omega}) d\varphi - \frac{Abk}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \xi) \sin \varphi d\varphi,$$

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{a\tilde{\omega}}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin(\varphi + \xi) d\varphi - \frac{Ah}{2\pi\tilde{\omega}} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi + \xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi\tilde{\omega}} \int_0^{2\pi} (k - \tilde{\omega}) d\varphi - \frac{a\tilde{\omega}}{2\pi Ak} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(\varphi + \xi) d\varphi - \\ - \frac{h}{\tilde{\omega}} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \xi) \cos(\varphi + \xi) d\varphi. \end{aligned}$$

При выполнении операции усреднения величины $\tilde{\omega}$, A и ξ считаем постоянными. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2},$$

получаем после интегрирования

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\omega}}{d\varphi} &= \frac{1}{\tilde{\omega}} \left[L(\tilde{\omega}) + \frac{b}{2} Ak\tilde{\omega} \sin \xi \right], \\ \frac{dA}{d\varphi} &= -\frac{a\tilde{\omega}}{2k} \sin \xi - \frac{Ah}{2\tilde{\omega}}, \\ \frac{d\xi}{d\varphi} &= \frac{1}{\tilde{\omega}} \left(k - \tilde{\omega} - \frac{a\tilde{\omega}^2}{2Ak} \cos \xi \right). \end{aligned} \quad (15.45)$$

Система приближенных уравнений (15.45) может быть использована для определения переменных $\tilde{\omega}$, A и ξ в переходных режимах путем численного интегрирования. В дальнейшем ограничимся исследованием стационарных режимов движения, под которыми будем понимать режимы движения при постоянных значениях величин $\tilde{\omega}$, A и ξ , т. е. при постоянной угловой скорости двигателя и гармонических колебаниях ползуна вибратора.

Условия существования стационарных режимов:

$$d\tilde{\omega}/d\varphi = 0, \quad dA/d\varphi = 0, \quad d\xi/d\varphi = 0.$$

При этих условиях уравнения стационарных режимов движения имеют вид

$$\begin{aligned} L(\tilde{\omega}) + \frac{b}{2} Ak\tilde{\omega} \sin \xi &= 0, \\ hA + \frac{a\omega^2}{k} \sin \xi &= 0, \\ k - \tilde{\omega} - \frac{a\omega^2}{2Ak} \cos \xi &= 0. \end{aligned} \quad (15.46)$$

Отсюда находим амплитуду и фазу колебаний:

$$A = \frac{a\omega^2}{\sqrt{4k^2(k - \tilde{\omega})^2 + k^2h^2}}, \quad \operatorname{tg} \xi = \frac{h}{2(\tilde{\omega} - k)}.$$

Подставляя значения постоянных a , h и b , выраженные через параметры механизма, получаем

$$A = \frac{m_1}{m} \frac{r\omega^2}{\sqrt{4k^2(k - \tilde{\omega})^2 + k^2\beta^2/m^2}}, \quad (15.47)$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\beta}{m(\tilde{\omega} - k)}. \quad (15.48)$$

Угловую скорость вала двигателя $\tilde{\omega}$, которую приближенно можно считать угловой частотой вынужденных колебаний, находим из первого уравнения системы (15.46)

$$L(\tilde{\omega}) - \frac{bh}{2\tilde{\omega}a} A^2 k^2 = 0,$$

или

$$M_d(\tilde{\omega}) - \frac{\beta}{2\tilde{\omega}} A^2 k^2 = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения амплитуды A по формуле (15.47), получаем

$$\tilde{M}_d(\tilde{\omega}) - S(\tilde{\omega}) = 0, \quad (15.49)$$

где

$$S(\tilde{\omega}) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{m_1}{m} \right)^2 \frac{r^2 \tilde{\omega}^3}{4(k - \tilde{\omega})^2 + \beta^2/m^2}. \quad (15.50)$$

Условия прохождения через резонанс. Уравнение (15.49) может иметь один или несколько корней, определяющих значение угловой скорости двигателя в стационарном режиме. На рис. 85

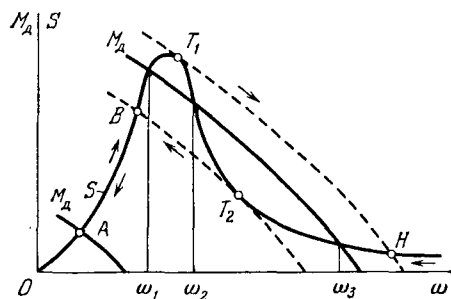


Рис. 85

изображен график величины $S(\omega)$ по формуле (15.50) для некоторой комбинации постоянных параметров механизма β , m_1 , m , k^2 и r^2 . Искомые корни уравнения (15.49) найдутся в пересечении графика $S(\omega)$ с характеристикой двигателя $M_d(\omega)$.

Для характеристики $M_d(\omega)$, показанной сплошной линией на рис. 85, получаются три точки пересечения и соответственно три корня уравнения

(15.49): ω_1 , ω_2 и ω_3 . Исследование устойчивости движения показывает, что при расположении точек пересечения на участке OT_1 или $T_2\infty$ движение устойчиво, а на участке T_1T_2 — неустойчиво*).

Регулировка частоты колебаний, создаваемых центробежным вибратором с двигателем постоянного тока, выполняется путем изменения тока в цепи возбуждения. Характеристики, получаемые при различных значениях тока, называются *регулируемыми характеристиками*. На рис. 85 штриховыми линиями показаны две характеристики, одна из которых касается кривой $S(\omega)$ в точке T_1 , а другая в точке T_2 . Исследование устойчивости движения вибра-

*) Конonenко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. — М.: Наука, 1964.

тора при регулировочных характеристиках, расположенных между указанными граничными кривыми, позволяет объяснить экспериментально наблюдаемое явление «срыва» колебаний при прохождении через резонанс.

Пусть, например, угловая скорость двигателя постепенно увеличивается, начиная от некоторого значения, соответствующего точке A пересечения кривых $M_d(\omega)$ и $S(\omega)$ на участке OT_1 . После достижения граничной регулировочной характеристики в точке T_1 колебания быстро («скачком» или «срывом») переходят на другой стационарный режим, соответствующий точке H пересечения той же граничной характеристики с кривой $S(\omega)$. При дальнейшем увеличении угловой скорости $\tilde{\omega}$ наблюдаются стационарные режимы, при которых точка пересечения кривых $M_d(\omega)$ и $S(\omega)$ удаляется вправо. Следовательно, при таком увеличении скорости двигателя выпадают все режимы стационарных движений, соответствующие участку T_1H кривой $S(\omega)$.

При уменьшении скорости двигателя, начиная, например, от режима, соответствующего точке H , стационарные устойчивые режимы будут получаться до тех пор, пока точка пересечения кривых $M_d(\omega)$ и $S(\omega)$ не попадет в точку T_2 . Тогда опять произойдет «срыв» колебаний, так как граничная регулировочная характеристика, кроме точки касания T_2 , имеет еще точку пересечения B с кривой $S(\omega)$.

При дальнейшем уменьшении скорости двигателя точка пересечения кривых $M_d(\omega)$ и $S(\omega)$ движется по кривой $S(\omega)$ влево. Следовательно, при уменьшении скорости двигателя могут выпасть все режимы стационарных движений, соответствующие участку T_2B кривой $S(\omega)$.

ГЛАВА 16

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ*)

§ 64. Уравнение движения точки переменной массы

Механизмом с переменными массами называется механизм, содержащий хотя бы одно подвижное звено с переменной геометрией масс. Изменение геометрии масс звена может происходить из-за присоединения или отделения материальных частиц тела (увеличение или уменьшение массы), а также из-за перераспределения масс (изменение положения центра масс и моментов инерции звена).

*) Изложение гл. 16 построено в основном по книгам А. П. Бессопова (Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев.— М.: Наука, 1967) и В. С. Новоселова (Аналитическая механика систем с переменными массами.— Л.: ЛГУ, 1969).

В простейших случаях движения звена с переменной массой можно пренебречь его размерами и рассматривать движение материальной точки переменной массы. Под *материальной точкой переменной массы* понимается такая переменная система частиц постоянной массы, размерами которой пренебрегаем и которую считаем сосредоточенной во все время движения в области, двигающейся поступательно с некоторой геометрической точкой системы координат, связанной с рассматриваемым звеном.

Вначале получим уравнение движения точки переменной массы для случая, когда эффект переменности массы состоит лишь в присоединении или отделении материальных частиц, т. е. когда в твердом теле, которое заменяется материальной точкой, нет относительного движения частиц.

Пусть, например, происходит присоединение частицы с массой dm , движущейся со скоростью u , к материальной точке, имеющей в данный момент времени массу m и скорость v . Тогда на основании теоремы о количестве движения имеем

$$m dv + dm(v - u) = F dt,$$

где F — главный вектор внешних сил, действующих на рассматриваемую материальную точку.

Отсюда получаем уравнение движения материальной точки переменной массы для случая присоединения частиц

$$m \frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt}(u - v). \quad (16.1)$$

При отделении частиц изменяется знак у второго члена правой части уравнения (16.1). Если же происходит одновременно и присоединение и удаление частиц, то уравнение (16.1) переходит в известное уравнение Мещерского

$$m \frac{dv}{dt} = F + \frac{dm_1}{dt}(u_1 - v) - \frac{dm_2}{dt}(u_2 - v), \quad (16.2)$$

где m_1 — масса частиц, присоединяющихся со скоростью u_1 , m_2 — масса частиц, отделяющихся со скоростью u_2 .

Уравнение Мещерского может быть также представлено в следующем виде:

$$m \frac{dv}{dt} = F + \Phi, \quad (16.3)$$

где Φ — главный вектор импульсивных сил, возникающий вследствие отделения или присоединения частиц:

$$\Phi = \frac{dm_1}{dt}(u_1 - v) - \frac{dm_2}{dt}(u_2 - v). \quad (16.4)$$

В задачах теории механизмов и машин уравнение Мещерского используется в тех случаях, когда при исследовании движений звеньев механизма учитывается только масса m прямолинейно движущегося звена (например, конвейера или транспортера), масса которого изменяется вследствие присоединения или удаления штучного или сыпучего материала.

Сравнение уравнения (16.3) с обычным уравнением движения прямолинейно движущегося звена показывает, что оно отличается только наличием импульсивной силы Φ , которая при отделении частиц направлена против относительной скорости отделяющихся частиц, а при присоединении частиц совпадает с направлением относительной скорости. В обоих случаях она может быть как силой движущей (при совпадении направлений силы Φ и скорости $\mathbf{v}$), так и силой сопротивления (при противоположных направлениях силы Φ и скорости $\mathbf{v}$).

Более общим случаем движения точки переменной массы является движение с учетом внутреннего движения частиц. Под *внутренним движением* частиц понимается их движение относительно системы координат, связанной с телом, принимаемым в данной задаче за точку. В этом случае уравнение движения точки переменной массы имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (16.5)$$

где $\mathbf{R}$ — полная реактивная сила, которая складывается из импульсивной силы Φ , связанной с отделением или присоединением масс, и реактивных сил, связанных с ускорениями частиц в их движении относительно системы координат, связанной со звеном.

Обозначим через m_v массу присоединяемой (или отделяемой) частицы, $\mathbf{a}_v^r$ — ускорение этой частицы в движении относительно системы координат, связанной со звеном, $\mathbf{a}_v^h$ — кориолисово ускорение частицы, которое при движении звена с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и при относительной скорости частицы $\mathbf{v}_v^r$ определится из условия

$$\mathbf{a}_v^h = 2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_v^r).$$

Тогда вектор реактивной силы $\mathbf{R}$ для n частиц представится в виде геометрической суммы трех векторов

$$\mathbf{R} = \Phi - \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{a}_v^r - 2 \sum_{v=1}^n (\boldsymbol{\omega} \times m_v \mathbf{v}_v^r), \quad v = 1, \dots, n. \quad (16.6)$$

Импульсивная сила Φ определится по формуле (16.4), в которой скорости $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ можно считать средними скоростями присоединяемых частиц с общей массой m_1 и отделяемых частиц с общей массой m_2 .

§ 65. Уравнение Лагранжа второго рода для систем с переменными массами

Рассмотрим систему n материальных точек с переменными массами m_v . Уравнение движения для каждой точки, входящей в систему, может быть представлено в виде уравнения (16.5), причем в правую часть этого уравнения надо дополнительно внести главный вектор всех внутренних сил F'_v и главный вектор реакций связей N_v :

$$m_v \frac{dv_v}{dt} = F_v + R_v + F'_v + N_v. \quad (16.7)$$

Расстояния между точками v будем считать неизменными, а связи между ними идеальными и голономными. Тогда сумма работ всех внутренних сил и сумма работ всех сил реакций на возможных перемещениях будут равны нулю:

$$\sum_{v=1}^n F'_v \delta r_v = 0, \quad \sum_{v=1}^n N_v \delta r_v = 0, \quad (16.8)$$

где r_v — радиус-вектор точки v в неподвижной системе координат.

Общее уравнение динамики (уравнение Даламбера — Лагранжа) для рассматриваемой системы с учетом уравнений (16.7) и (16.8) имеет вид

$$\sum_{v=1}^n \left(m_v \frac{dv_v}{dt} - F_v - R_v \right) \delta r_v = 0.$$

Если система имеет k степеней свободы и все связи голономные, то положения точек v определяются обобщенными координатами q_i , число которых равно числу степеней свободы, а возможное перемещение δr_v как функция переменных q_i найдется из соотношения

$$\delta r_v = \sum_{i=1}^k \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \delta q_i,$$

и общее уравнение динамики принимает вид

$$\sum_{v=1}^n \left(m_v \frac{dv_v}{dt} - F_v - R_v \right) \sum_{i=1}^k \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (16.9)$$

Масса каждой точки m_v может изменяться в функции обобщенных координат q_i , обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и времени t . После выполнения дифференцирования, суммирования и обычных преобразований, применяемых при выводе уравнений Лагранжа, получаем уравнения Лагранжа второго рода для систем с переменными

ми массамп

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + R_i + D_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (16.10)$$

где T — кинетическая энергия системы, Q_i — обобщенная внешняя (активная) сила, R_i — обобщенная реактивная сила, которая включает в свой состав импульсивную силу и силы, зависящие от ускорений материальных частиц, D_i — добавочная сила, учитывающая зависимость массы от времени, обобщенной скорости и обобщенной координаты.

Обобщенная внешняя сила Q_i определяется, как и в механизмах с постоянными массами, из условия равенства элементарной работы всех внешних сил работе обобщенных сил или же по соотношению

$$Q_i = \sum_{v=1}^n \left(\mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, \dots, k, \quad v = 1, \dots, n. \quad (16.11)$$

Аналогично обобщенная реактивная сила R_i с учетом формулы (16.6) определяется из соотношения

$$R_i = \sum_{v=1}^n \left[\Phi_v - m_v \mathbf{a}_v^r - 2 (\boldsymbol{\omega} \times m_v \mathbf{v}_v^2) \right] \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i}, \quad (16.12)$$

$$i = 1, \dots, k, \quad v = 1, \dots, n,$$

где Φ_v — импульсивная сила для присоединяемых или отделяемых частиц:

$$\Phi_v = \pm \frac{dm_v}{dt} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v). \quad (16.13)$$

В формуле (16.13) знак плюс относится к присоединяемым частицам, знак минус — к отделяемым, $\mathbf{u}_v$ — скорость присоединяемой (или отделяемой) частицы.

Добавочная сила D_i находится по формуле

$$D_i = \sum_{v=1}^n \left[\frac{dm_v}{dt} \left(\mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial m_v}{\partial \dot{q}_i} \frac{v_v^2}{2} \right) - \frac{\partial m_v}{\partial q_i} \frac{v_v^2}{2} \right], \quad (16.14)$$

$$i = 1, \dots, k, \quad v = 1, \dots, n.$$

Применение уравнений (16.10) при исследовании динамики механизмов с переменными массами звеньев крайне затруднительно вследствие сложности выражения (16.14) для дополнительного члена D_i . Кроме того, при вычислении кинетической энергии T надо иметь в виду, что массы звеньев и отдельных материальных частиц зависят в общем случае от времени, обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, что усложняет вычисление частных

и полных производных. Поэтому для задач теории механизмов и машин более удобным является другой вид уравнений Лагранжа второго рода, который получится на основании *принципа затвердевания*.

Согласно этому принципу при выполнении операции дифференцирования кинетической энергии принимается, что система мгновенно «затвердела» в момент времени t , и, начиная с этого момента, прекращается процесс изменения массы. При этом предположении находим полные и частные производные по обычным правилам дифференцирования, считая массы постоянными. Чтобы отличить дифференцирование «затвердевшей» системы от дифференцирования переменных масс, вводятся символы $\frac{d^*}{dt}$, $\frac{\partial^*}{\partial \dot{q}_i}$, $\frac{\partial^*}{\partial q_i}$, в которых звездочка отмечает «затвердевание» массы.

Если при нахождении полных и частных производных кинетической энергии используется принцип «затвердевания», то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^* T}{\partial q_i} = Q_i + R_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (16.15)$$

т. е. в этом случае правая часть каждого уравнения содержит лишь обобщенную внешнюю силу и обобщенную реактивную силу, а добавочная сила обращается в нуль. Для доказательства этого положения достаточно вычислить производные от кинетической энергии с учетом перемешности масс и убедиться в том, что разность между левыми частями уравнений (16.15) и (16.10) равна выражению дополнительного члена D_i :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \left(\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^* T}{\partial q_i} \right) = \\ & = \sum_{v=1}^n \left[\frac{dm_v}{dt} \left(\mathbf{v}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial m_v}{\partial \dot{q}_i} \frac{v_v^2}{2} \right) - \frac{\partial m_v}{\partial q_i} \frac{v_v^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, использование принципа «затвердевания» и применение уравнения (16.15) позволяют упростить составление уравнений движения механизма по сравнению с уравнениями (16.10) за счет исчезновения добавочного члена и упрощения вычислений полных и частных производных от кинетической энергии.

§ 66. Уравнение движения плоского механизма с переменными массами звеньев

Уравнения Лагранжа второго рода, записанные в форме уравнений (16.10) или (16.15), позволяют получать уравнения движения любых плоских и пространственных механизмов с одной и с многими степенями свободы. Для того чтобы показать применение

уравнений (16.15), рассмотрим составление уравнений движения плоского механизма с одной степенью свободы при вращающемся начальном звене. За обобщенную координату примем угол поворота начального звена φ . Приведенный (обобщенный) момент внешних сил обозначим через $\bar{M}_\pi$, а приведенный момент реактивных сил — через $\bar{M}_R$.

Тогда из уравнений (16.15) получаем

$$\frac{d^*}{dt} \frac{\partial^* T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial^* T}{\partial \varphi} = \bar{M}_\pi + \bar{M}_R. \quad (16.16)$$

Чтобы воспользоваться этим уравнением, надо получить выражение кинетической энергии звена, совершающего плоское движение, когда, вследствие изменения массы звена или ее перераспределения, центр масс перемещается относительно системы координат, связанной со звеном.

На рис. 86 показана схема звена с переменной массой, которое совершает плоское движение относительно неподвижной системы координат Oxy . Центр масс звена в данный момент времени находится в точке S . Абсолютная скорость центра масс найдется как геометрическая сумма скоростей в переносном движении вместе со звеном и относительной скорости от отношению к звену

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S_{\text{пер}}} + \mathbf{v}_{S_{\text{отн}}}, \quad (16.17)$$

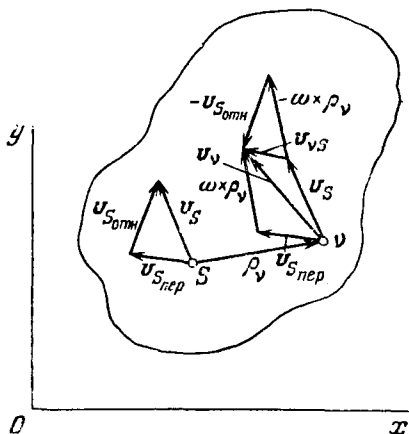


Рис. 86

где $\mathbf{v}_{S_{\text{пер}}}$ — скорость той точки звена, с которой в данный момент совпадает положение центра масс, $\mathbf{v}_{S_{\text{отн}}}$ — скорость перемещения центра масс относительно звена, зависящая от процесса изменения или перераспределения массы звена.

Абсолютная скорость любой точки звена $\mathbf{v}_v$ определится как геометрическая сумма переносной скорости в поступательном движении со скоростью центра масс $\mathbf{v}_S$ и относительной скорости по отношению к центру масс $\mathbf{v}_{vS}$:

$$\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{vS}. \quad (16.18)$$

Для того чтобы определить относительную скорость $\mathbf{v}_{vS}$, надо, применяя способ обращения движения, остановить движение центра масс в системе звена путем сообщения всем точкам звена скорости $-\mathbf{v}_{S_{\text{отн}}}$. Тогда скорость $\mathbf{v}_{vS}$ найдется как геометрическая сумма вращательной скорости точки v вокруг точки S звена, с которой сов-

падает центр масс, и скорости $-v_{S_{отн}}$:

$$v_{vS} = \omega \times \rho_v - v_{S_{отн}}, \quad (16.19)$$

где ω — угловая скорость звена, а ρ_v — радиус-вектор частицы v .

Подставляя в формулу (16.18) значение v_s из формулы (16.17) и v_{vS} из (16.19), получаем

$$v_v = v_{S_{пер}} + \omega \times \rho_v. \quad (16.20)$$

Если звено представить в виде совокупности n материальных частиц, то его кинетическая энергия может быть записана в виде

$$T = \sum_{v=1}^n \frac{m_v v_v^2}{2}.$$

Подставляя сюда значение v_v из (16.20), получаем

$$T = \sum_{v=1}^n m_v \frac{v_{S_{пер}}^2}{2} + \sum_{v=1}^n m_v (v_{S_{пер}} \cdot [\omega \times \rho_v]) + \sum_{v=1}^n m_v \frac{\omega^2 \rho_v^2}{2},$$

или

$$T = \frac{v_{S_{пер}}^2}{2} \sum_{v=1}^n m_v + \left(v_{S_{пер}} \cdot \left[\omega \times \sum_{v=1}^n m_v \rho_v \right] \right) + \frac{\omega^2}{2} \sum_{v=1}^n m_v \rho_v^2,$$

где $\sum_{v=1}^n m_v = m$ (m — масса всего звена), $\sum_{v=1}^n m_v \rho_v = 0$, так как сумма статических моментов масс материальных точек звена относительно центра масс равна нулю; $\sum_{v=1}^n m_v \rho_v^2 = J_s$, где J_s — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс.

Следовательно, кинетическая энергия звена плоского механизма с переменной массой

$$T = m \frac{v_{S_{пер}}^2}{2} + J_s \frac{\omega^2}{2}. \quad (16.21)$$

Полученная формула имеет такой же вид, как и для звена с постоянной массой. Надо только помнить, что $v_{S_{пер}}$ есть скорость точки звена, с которой в данный момент совпадает центр масс (а не абсолютная скорость центра масс $v_s = v_{S_{пер}} + v_{S_{отн}}$). Кроме того, масса m и момент инерции J_s — величины переменные.

Как и в случае механизма с постоянными массами звеньев, приведенный момент инерции J_n находится из условия равенства кинетической энергии звена приведения кинетической энергии всех подвижных звеньев механизма. Если принять, что угол поворота звена приведения совпадает с углом поворота начального звена φ , и обозначить угловую скорость этого звена $\dot{\varphi}$ через $\tilde{\omega}$, то указанное

условие для определения приведенного момента инерции имеет вид

$$\frac{J_n \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (m_j v_{S_{\text{пер}}}^2 + J_{S_j} \omega_j^2).$$

Отсюда

$$J_n = \sum_{j=1}^s \left[m_j \left(\frac{v_{S_{\text{пер}}}}{\omega} \right)^2 + J_{S_j} \left(\frac{\omega_j}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (16.22)$$

Отношения $v_{S_{\text{пер}}}/\omega$ и ω_j/ω зависят только от обобщенной координаты φ (или могут быть постоянными), а переменные m_j и J_{S_j} являются функциями тех параметров, от которых зависит изменение или перераспределение масс (время t , обобщенная координата φ , обобщенная скорость $\dot{\omega}$).

Поэтому в механизмах с переменными массами приведенный момент инерции может быть функцией времени, положения и скоростей.

Уравнение движения плоского механизма с переменными массами звеньев получается из уравнения (16.16) после подстановки значения кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} J_n \omega^2$$

с последующим нахождением частных производных:

$$\frac{\partial^* T}{\partial \omega} = J_n \tilde{\omega}, \quad \frac{\partial^* T}{\partial \varphi} = \frac{\omega^2}{2} \frac{d^* J_n}{d\varphi}.$$

При этом дифференцировании значок $*$ означает, что массы и моменты инерции звеньев должны быть приняты постоянными. Тем не менее приведенный момент инерции надо считать величиной переменной, зависящей от обобщенной координаты φ , так как в выражение приведенного момента инерции (16.22) входят отношения $v_{S_{\text{пер}}}/\omega$ и ω_j/ω , которые в общем случае зависят от угла поворота φ .

После дифференцирования по времени получаем

$$\frac{d^*}{dt} (J_n \tilde{\omega}) = J_n \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \frac{d^* J_n}{d\varphi} \omega^2.$$

Подставляя значения производных в уравнение (16.16), получаем уравнение движения плоского механизма с переменными массами звеньев

$$J_n \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^* J_n}{d\varphi} = \tilde{M}_n + \tilde{M}_R. \quad (16.23)$$

Приведенный момент внешних сил определяется, как и в механизмах с постоянными массами, т. е. из условия равенства эле-

ментарной работы приведенного момента сил сумме элементарных работ всех внешних сил:

$$\widetilde{M}_\pi = \sum_{j=1}^s \left[F_j \frac{v_j}{\omega} \cos(\widehat{F_j, v_j}) + \widetilde{M}_j \frac{\widetilde{\omega}_j}{\omega} \right], \quad (16.24)$$

где s — число подвижных звеньев; F_j , $\widetilde{M}_j$ — главный вектор и главный момент внешних сил, действующих на звено j ; v_j — скорость точки приложения главного вектора F_j ; $\widetilde{\omega}_j$ — угловая скорость звена j .

Приведенный момент реактивных сил (включая и импульсивные) также определяется по формуле (16.24), в которой F_j и $\widetilde{M}_j$ надо считать главным вектором и главным моментом всех реактивных сил, действующих на звено j и определяемых по формуле (16.6).

Уравнение движения плоского механизма с переменными массами звеньев можно записать также в форме уравнения энергии:

$$\frac{J_\pi \omega^2}{2} - \frac{J_{\pi 0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \widetilde{M}_\pi d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \widetilde{M}_R d\varphi, \quad (16.25)$$

где J_π , $J_{\pi 0}$ — приведенный момент инерции «затвердевшего» механизма в положении, определяемом углом φ , и в начальном положении при $\varphi = \varphi_0$; ω , ω_0 — угловая скорость звена приведения в этих положениях.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

ГЛАВА 17

ФРИКЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

§ 67. Колебания, вызываемые скачком силы трения

Колебания в тормозах. Замечено, что при торможении вращающегося или прямолинейно движущегося звена прижатием тормозной колодки, которая может иметь малые упругие перемещения, возникают колебания колодки относительно положения статического равновесия. В первом приближении возникновение этих колебаний можно объяснить скачком силы трения при переходе от покоя к движению.

Пусть, например, ползун массой m (рис. 87, а) лежит на шероховатой поверхности, движущейся с постоянной скоростью v_0 ; z — смещение ползуна от положения, при котором пружины не натянуты и не сжаты; c — коэффициент жесткости (суммарный для двух пружин). Наличие силы трения приводит к тому, что поверхность при движении сначала увлекает за собой ползун, и как только сила упругости пружины $F_{\text{уп}} = c \cdot z$ становится равной максимальной силе трения покоя $F_{\text{тп}}$, происходит срыв ползуна, а сила трения скачком падает до значения силы трения скольжения $F_{\text{тс}}$. Скачок силы трения $\Delta F = F_{\text{тп}} - F_{\text{тс}}$ вызывает упругие колебания ползуна, которые называют *релаксационными*, так как после срыва ползуна сила упругости пружины некоторое время продолжает расти, а затем ослабевает (релаксирует).

До срыва ползун движется равномерно со скоростью $\dot{z} = \tilde{v}_0$. После срыва его движение определяется уравнением

$$m\ddot{z} = F_{\text{тс}} - cz \quad (17.1)$$

при начальных условиях $t = 0$, $z = z_{\text{ср}}$, $\dot{z} = \tilde{v}_0$, где $z_{\text{ср}} = F_{\text{тп}}/c$ — смещение ползуна в момент срыва.

Введем безразмерное перемещение $y = z/z_{\text{ср}}$, где $z_{\text{ср}} = F_{\text{тп}}/c$ — статическое перемещение пружины под действием силы $F_{\text{тп}}$. Тогда уравнение движения (17.1) получает вид

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \lambda^2,$$

где $\lambda = \sqrt{c/m}$ — собственная частота системы.

Подстановкой $y = y_1 + 1$ это уравнение приводится к однородному, решение которого по (9.38) имеет вид

$$y = C \sin(\lambda t + 0) + 1,$$

где

$$C = \sqrt{(y_0 - 1)^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\lambda^2}}, \quad \theta = \arctg \frac{(y_0 - 1)\lambda}{\dot{y}_0}.$$

Возвращаясь к переменной z , при начальных условиях $y_0 = z_n/z_c$ и $\dot{y}_0 = v_0/z_c$ получаем

$$z = C_z \sin(\lambda t + \theta) + z_c, \quad (17.2)$$

где

$$C_z = \sqrt{(z_n - z_c)^2 + \frac{v_0^2}{\lambda^2}}, \quad \theta = \arctg \frac{(z_n - z_c)\lambda}{v_0}.$$

Отсюда скорость и ускорение ползуна

$$\dot{z} = \lambda C_z \cos(\lambda t + \theta), \quad \ddot{z} = -\lambda^2 C_z \sin(\lambda t + \theta).$$

На рис. 87, б показаны графики изменения z , $\dot{z}$ и $\ddot{z}$ в зависимости от времени t , причем график $z(t)$ дает также в другом масштабе график изменения упругой силы пружины. Штрихпунктирной

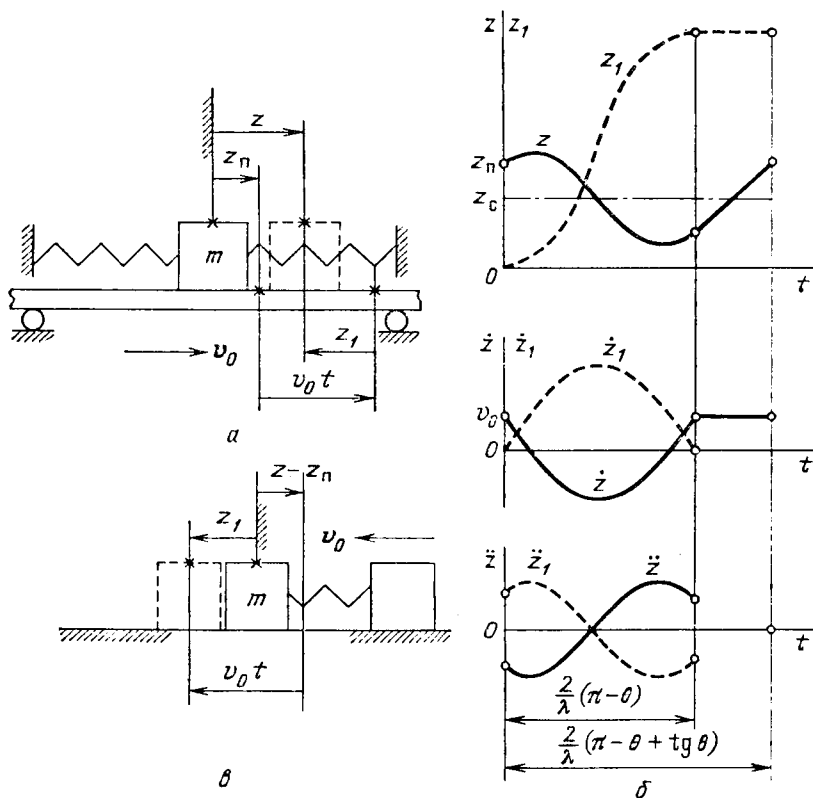


Рис. 87

линей показанно значение z в положении статического равновесия. В отличие от обычных гармонических колебаний еще до истечения времени, равного периоду колебаний с собственной частотой, скорость ползуна, достигнув значения $\tilde{v}_0$, перестает возрастать, несмотря на то, что ускорение ползуна в этот момент времени остается положительным. Скорость ползуна не может превысить скорость движущейся поверхности v_0 , так как при $\dot{z} > \tilde{v}_0$ изменяется знак относительной скорости $\dot{z} - \tilde{v}_0$ и, следовательно, изменяется направление силы трения, которая из силы движущей для ползуна превращается в силу сопротивления. В этот момент времени движущаяся со скоростью $\tilde{v}_0$ плоскость подхватывает ползун, их относительное движение прекращается и сила трения вновь становится силой трения покоя до следующего срыва ползуна.

Прерывистое движение ползуна в направляющих. Динамическая модель, показанная на рис. 87, а, путем обращения движения приводится к модели, соответствующей медленным движениям ползуна в направляющих металлорежущих станков и некоторых приборов (рис. 87, в). Предполагается, что на ползун действует только сила трения в направляющих и сила упругости пружины $F_{пр}$, которая имитирует влияние упругости звеньев. Правый конец пружины двигается с постоянной скоростью $\tilde{v}_0$, а ее левый конец получает перемещение z_1 , отсчитываемое от положения, соответствующего началу движения ползуна массой m . Коэффициент жесткости пружины обозначен через c .

Как и в предыдущем примере, считаем, что сила трения покоя $F_{тп}$ больше силы трения скольжения $F_{тс}$. Начало движения ползуна (срыв) произойдет, когда сила упругости пружины станет равной $F_{тп}$. В момент времени t сила упругости пружины, которая является движущей, имеет значение $F_{пр} = F_{тп} - c(z_1 - v_0 t)$, а сила трения $F_{тс}$ является силой сопротивления. Поэтому дифференциальное уравнение движения ползуна имеет вид

$$m\ddot{z}_1 = F_{тп} - c(z_1 - v_0 t) - F_{тс}. \quad (17.3)$$

Из условий обращения движения видно, что перемещение ползуна z_1 в модели по рис. 87, в равно относительному перемещению ползуна по плоскости в модели по рис. 87, а:

$$z_1 = v_0 t - z + z_{тп}. \quad (17.4)$$

Уравнение движения (17.3) после замены переменной z_1 на z по условию (17.4) совпадает с уравнением (17.1). Поэтому решение уравнения (17.3) находим из решения (17.2) после подстановки (17.4):

$$z_1 = v_0 t + z_{тп} - z_c - C_z \sin(\lambda t + 0), \quad (17.5)$$

где

$$C_z = \sqrt{(z_{тп} - z_c)^2 + \frac{v_0^2}{\lambda^2}}, \quad 0 = \arctg \frac{(z_{тп} - z_c) \lambda}{v_0}.$$

После дифференцирования по времени имеем

$$\dot{z}_1 = v_0 - \lambda C_z \cos(\lambda t + \theta), \quad \ddot{z}_1 = \lambda^2 C_z \sin(\lambda t + \theta).$$

Графики z_1 , $\dot{z}_1$ и $\ddot{z}_1$ показаны на рис. 87, б штриховыми линиями. Сравнение движения ползуна в двух рассмотренных случаях показывает, что участку совместного движения ползуна (колодки тормоза) и плоскости с постоянной скоростью соответствует выстой ползуна в направляющих, моменту срыва колодки — момент начала движения ползуна после выстоя и т. д.

Автоколебаниями называют пезатухающие колебания, поддерживаемые поступлением энергии от неколебательного источника, которое регулируется движением самой системы. Под регулированием поступления энергии понимается, что силы, подводимые к системе от источника энергии, меняются во времени в зависимости от самого движения системы и в отсутствие движения равны нулю.

В рассмотренном примере источником энергии неколебательного характера является движение плоскости с постоянной скоростью v_0 . Энергия, доставляемая этим источником в систему, равна работе

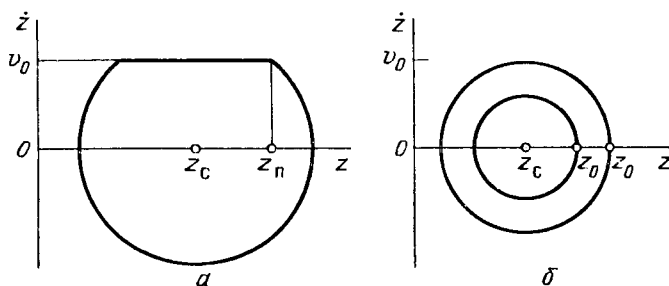


Рис. 88

сил трения. Регулирование поступления энергии в зависимости от движения системы выражается изменением силы трения, которая в отсутствие движения равна нулю, а во время движения изменяется от $F_{тн}$ до F_t (скачок силы трения). Фазовая траектория $\dot{z}(z)$ при автоколебаниях, вызываемых скачком силы трения, имеет вид замкнутой кривой, повторяющейся во времени (рис. 88, а).

Иногда к указанным признакам автоколебаний добавляют еще условие, что характеристики движения (например, амплитуды и начальные фазы при гармонических колебаниях) определяются свойствами системы и не зависят от начальных условий. В рассмотренном примере начальные условия для уравнения движения (17.1), т. е. условия $t = 0$, $z = F_{тн}/c$, $\dot{z} = \dot{v}_0$, зависят только от значений силы трения покоя $F_{тн}$, постоянной скорости движения v_0 и коэффициента жесткости c , которые являются собственными характеристиками механизма.

Свободные фрикционные колебания в отсутствие скачка силы трения. Незатухающие фрикционные колебания в механизме по рис. 87, *а* возникают также при равенстве сил трения покоя и движения $F_{\text{тп}} = F_{\text{т}}$, если вследствие толчка ползун будет выведен из положения статического равновесия $z_c = F_{\text{т}}/c$ в положение, определяемое координатой z_0 . После толчка движение ползуна описывается уравнением (17.1), а его решение отличается от решения (17.2) лишь постоянными C и θ , которые находятся из начальных условий ($t = 0$, $z = z_0$, $\dot{z} = 0$):

$$z_0 = z_c + C \sin \theta, \quad 0 = \lambda C \cos \theta.$$

Отсюда $\theta = \pi/2$, $C = z_0 - z_c$ и, следовательно,

$$z = z_c - (z_c - z_0) \cos \lambda t, \quad \dot{z} = \lambda (z_c - z_0) \sin \lambda t.$$

На рис. 88, *б* показаны фазовые траектории для двух значений z_0 , удовлетворяющих условию $\dot{z}_{\text{max}} < v_0$ или, что то же, $\lambda(z_c - z_0) < v_0$. Как и в предыдущем случае, незатухающие колебания поддерживаются за счет энергии от источника неколебательного характера, т. е. от поверхности, движущейся с постоянной скоростью $\tilde{v}_0$, но амплитуды этих колебаний и максимальные значения скорости $\dot{z}$ зависят от начальных условий. На этом основании их следует считать свободными колебаниями.

§ 68. Колебания при силах трения, зависящих от скорости скольжения

В предыдущих примерах предполагалось, что сила трения не зависит от скорости скольжения. Теперь покажем, что учет зависимости силы трения от скорости скольжения позволяет выявить

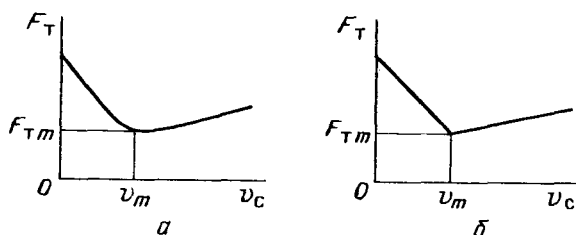


Рис. 89

такие режимы движения, которые не обнаруживаются при постоянной силе трения.

Рассмотрим, например, возможные режимы колебаний ползуна, прижатого к поверхности, движущейся с постоянной скоростью (см. рис. 87, *а*) при условии, что зависимость силы трения $F_{\text{т}}$ от скорости скольжения $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_0 - \dot{z}$ представлена экспериментальной кривой (рис. 89, *а*), на которой можно отметить значение скорости

скольжения $\tilde{v}_m$, соответствующее минимуму силы трения. Если сила трения уменьшается с увеличением скорости скольжения, то характеристику силы трения на этом участке будем называть *падающей*, если увеличивается — *возрастающей*. Для выявления особенностей режимов движения ползуна достаточно заменить реальную характеристику силы трения ее приближенным выражением, получаемым при линеаризации участков с возрастающей и убывающей силой трения (рис. 89, б).

Обозначим через $F_{\tau m}$ значение силы F_τ при скорости скольжения $\tilde{v}_m$, определяющей границу между падающей и возрастающей характеристиками. Тогда для возрастающей характеристики $F_\tau = F_{\tau m} + k_v(\tilde{v}_0 - \dot{z} - \tilde{v}_m)$, где k_v — положительный коэффициент, определяющий наклон возрастающей характеристики. Соответственно для падающей характеристики $F_\tau = F_{\tau m} + k_n(v_m - v_0 + \dot{z})$, где k_n — положительный коэффициент, определяющий наклон падающей характеристики.

Предположим, что вследствие случайного толчка ползун выведен из положения статического равновесия, определяемого координатой $z_c = F_{\tau 0}/c$, где $F_{\tau 0}$ — значение модуля силы трения при скорости скольжения, равной $\tilde{v}_0$, т. е. при $\dot{z} = 0$. Тогда ползун будет совершать колебания, характер которых зависит от соотношения между скоростями $\tilde{v}_0$ и $\tilde{v}_m$. При $v_0 > v_m$ начало движения ползуна соответствует силе трения для возрастающей характеристики и уравнение движения ползуна имеет вид

$$m\ddot{z} + k_n\dot{z} + cz = F_{\tau 0}. \quad (17.6)$$

При $v_0 < v_m$, т. е. для падающей характеристики, имеем

$$m\ddot{z} - k_n\dot{z} + cz = F_{\tau 0}. \quad (17.7)$$

Уравнения (17.6) и (17.7) отличаются знаком члена, содержащего $\dot{z}$. Если эти уравнения считать уравнениями возмущенного движения, то по знакам коэффициентов их характеристических уравнений можно судить об устойчивости движения. При возрастающей характеристике силы трения все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Этого признака достаточно для установления асимптотической устойчивости систем. Движение которых описывается уравнениями не выше второго порядка. При падающей характеристике возможно получение неустойчивых режимов, так как в характеристическом уравнении имеется отрицательный коэффициент. Такое же заключение можно сделать, решая уравнения (17.6) и (17.7). Для этого введем безразмерное перемещение $y = z/z_c$. Тогда уравнение (17.6) принимает вид

$$T_2^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = 1, \quad (17.8)$$

где

$$T_2^2 = m/c, \quad T_1 = k_n/c.$$

При $T_1 \geq 2T_2$ уравнение (17.8) относится к аperiодическому типу, а при $T_1 < 2T_2$ — к колебательному. Для обычных характеристик сил трения коэффициент k_* имеет небольшую величину и $T_1 < 2T_2$, т. е. уравнение (17.8) принадлежит к колебательному типу и может быть представлено в форме уравнения (9.9)

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1 x,$$

где $2\gamma = k_*/m$, $\lambda^2 = c/m$, $k_1 = \lambda^2$, $x = 1$.

После подстановки $y = y_1 + 1$ оно приводится к однородному, решение которого по (9.45) с учетом указанной подстановки имеет вид

$$y = Ce^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta) + 1,$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad C = \sqrt{(y_0 - 1)^2 \frac{[\dot{y}_0 + \gamma(y_0 - 1)]^2}{\lambda_*^2}},$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{(y_0 - 1)\lambda_*}{\dot{y}_0 + \gamma(y_0 - 1)}.$$

Возвращаясь к переменной z при начальных условиях $y_0 = z_0/z_c$, $\dot{y}_0 = 0$, получаем

$$z = C_z e^{-\gamma t} \sin(\lambda_* t + \theta) + z_c, \quad (17.9)$$

где

$$C_z = \frac{z_0 - z_c}{\lambda_*} \lambda, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_*}{\gamma}.$$

Из формулы (17.9) видно, что ползун совершает затухающие колебания, так как показатель степени при числе e имеет знак минус, и потому коэффициент при $\sin(\lambda_* t + \theta)$ с увеличением времени t стремится к нулю. Скорость ползуна получаем дифференцированием (17.9) по времени:

$$\dot{z} = C_z e^{-\gamma t} [\lambda_* \cos(\lambda_* t + \theta) - \gamma \sin(\lambda_* t + \theta)]. \quad (17.10)$$

Исключая время t из (17.9) и (17.10), получаем зависимость $\dot{z}(t)$, графическое изображение которой на фазовой плоскости, т. е. в координатах z и $\dot{z}$, представляется спиралью, стремящейся к точке $(z_c, 0)$ статического равновесия (рис. 90, а). Указанная спираль называется фазовой траекторией, а точка $(z_c, 0)$ есть особая точка этой траектории, называемая *устойчивым фокусом*. Штриховыми линиями показана замкнутая фазовая траектория для незатухающих колебаний при $\gamma = 0$ и начальных условиях $z = z_0$, $\dot{z} = 0$.

Другой характер движения получится при падающей характеристике силы трения. В решении уравнения (17.7) показатель степени при числе e имеет знак плюс, и потому коэффициент при $\sin(\lambda_* t + \theta)$ с увеличением времени стремится к бесконечности, т. е. амплитуды колебаний возрастают по показательному закону.

Графическое изображение зависимости $\dot{z}(z)$ на фазовой плоскости представляется спиралью (рис. 90, а), которая проходит через точку $(z_0, 0)$ и может рассматриваться выходящей из точки $(z_0, 0)$ статического равновесия при $t \rightarrow \infty$. Точка $(z_0, 0)$ в этом случае называется *неустойчивым фокусом*. Штриховой линией показана замкнутая фазовая траектория для незатухающих колебаний при $\gamma = 0$ и начальных условиях $z = z_0, \dot{z} = 0$.

Следовательно, как и было показано ранее из условий устойчивости движения, при падающей характеристике силы трения система неустойчива, и после любого сколь угодно малого возмущения происходит самовозбуждение колебаний с возрастающими амплитудами. Однако это возрастание не будет происходить неограниченно, так как одновременно увеличивается скорость $\dot{z}$ и при $\dot{z} = \dot{v}_0$ скорость скольжения становится равной нулю (перемена знака силы трения). При обратном ходе ползуна возможен также переход на участок возрастающей характеристики силы трения.

Эффект возрастания амплитуд при падающей характеристике силы трения, т. е. раскачка колебаний, показывает, что не всегда наличие трения способствует демпфированию колебаний. Иногда употребляют в этих случаях термин «сила отрицательного трения», который нельзя признать удачным. Сила трения может совпадать по направлению с вектором скорости в абсолютном движении

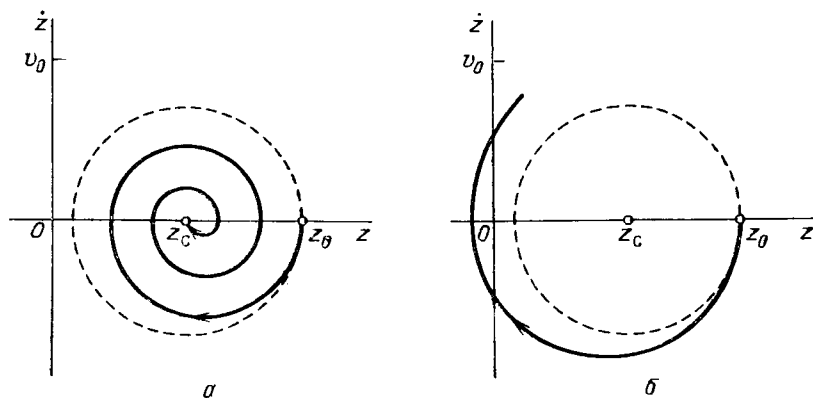


Рис. 90

и, следовательно, быть силой движущей. Но в относительном движении трущихся поверхностей она всегда (по определению) направлена против относительной скорости. Эффект возрастания амплитуд при падающей характеристике силы трения объясняется не особым направлением этой силы, а тем, что при увеличении относительной скорости сила трения уменьшается.

Итак, при фрикционных колебаниях ползуна, взаимодействующего с движущейся поверхностью, в зависимости от характеристик

сил трения можно наблюдать три режима: незатухающие колебания (включая автоколебания), затухающие колебания и колебания с возрастающими амплитудами. На фазовой плоскости этим режимам соответствуют фазовые траектории в виде замкнутой кривой, спирали, накручивающейся на особую точку, и спирали, выходящей из особой точки. Фазовую траекторию при незатухающих колебаниях можно рассматривать как граничный или предельный случай по отношению к режимам с затухающими или возрастающими амплитудами.

ГЛАВА 18

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

С УПРУГИМИ МУФТАМИ И ВАЛАМИ

§ 69. Колебания в механизмах с упругой муфтой

Характеристики сил в упругих муфтах. На рис. 91 показана одна из конструкций упругой муфты, в которой полумуфты 1 и 2 соединены упругими элементами 3, допускающими относительное

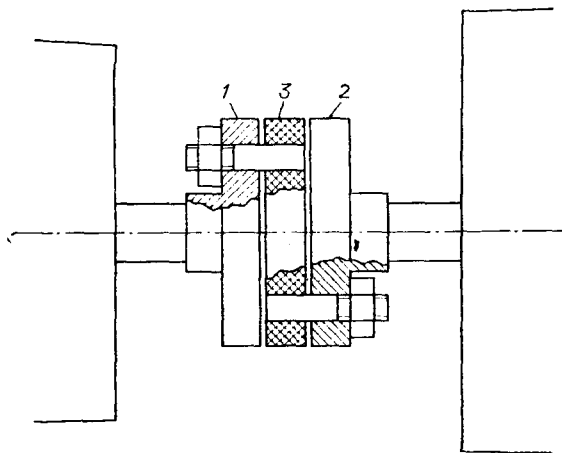


Рис. 91

угловое смещение полумуфт. В первом приближении характеристику упругих сил в муфте можно считать линейной:

$$M_{\varphi} = c\varphi, \quad (18.1)$$

где M_{φ} — момент упругих сил, c — коэффициент жесткости, φ — угловое смещение полумуфт.

При деформации упругих элементов происходит рассеяние (диссипация) энергии в муфте, которое зависит от скорости деформации

ции. Для малых угловых смещений φ момент диссипативных сил M_τ пропорционален $\dot{\varphi}$:

$$M_\tau = -b\dot{\varphi}. \quad (18.2)$$

Уравнения движения механизмов с упругой муфтой. На рис. 92 с применением условного обозначения упругой муфты показана динамическая модель механизма, в котором вал двигателя D соединен через упругую муфту с валом рабочей машины M . Углы поворота вала двигателя и вала машины обозначены соответственно через φ_d и φ_m . Приведенный к валу рабочей машины момент инерции машины $J_m = J_n$ и момент инерции подвижных частей двигателя J_d считаем постоянными. Число степеней свободы

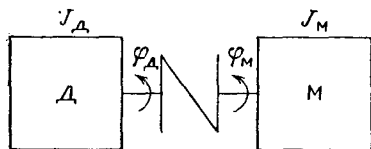


Рис. 92

механизма равно двум, так как каждое упругое звено увеличивает общее число степеней свободы на единицу.

Обозначим через M_d приведенный к валу двигателя момент сил движущих и через M_o — модуль момента сил сопротивления, приведенный к входному валу машины. Тогда уравнения движения при обобщенных координатах φ_d и φ_n имеют вид

$$J_d \ddot{\varphi}_d = M_d - c\varphi - b\dot{\varphi}, \quad (18.3)$$

$$J_n \ddot{\varphi}_n = c\varphi + b\dot{\varphi} - M_o, \quad (18.4)$$

где $\varphi = \varphi_d - \varphi_n$ — угловое смещение полумуфты.

При достаточно большой мощности двигателя закон движения его ротора $\varphi_d(t)$ может считаться не зависящим от изменения M_o и J_n . Тогда при известной зависимости $\varphi_d(t)$ уравнение (18.4) записывается в виде

$$J_n \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M_o + J_n \ddot{\varphi}_d, \quad (18.5)$$

т. е. может быть решено относительно углового смещения φ независимо от уравнения (18.3), которое в этом случае служит для определения движущего момента M_d , соответствующего принятой зависимости $\varphi_d(t)$.

Для двигателей с жесткой характеристикой, у которых угловая скорость ротора мало изменяется при изменении нагрузки, часто считают угловую скорость $\dot{\varphi}_d$ постоянной. Тогда уравнение движения механизма с линейной упругой муфтой имеет вид

$$J_n \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = M_o. \quad (18.6)$$

В этом случае движение звена с приведенным моментом инерции J_n можно рассматривать как состоящее из основного движения

с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_d$ и дополнительного движения со скоростью $\dot{\varphi}$, которая обычно имеет колебательный характер. Иногда говорят, что динамическая модель имеет одну колебательную степень свободы, так как вторая степень свободы определяет движение всех частей системы с одной и той же угловой скоростью.

Колебания в механизмах с линейной упругой муфтой. Предположим, что приведенный момент сил сопротивления изменяется по закону

$$\bar{M}_c = M_1 + H \sin \omega t, \quad (18.7)$$

где M_1 — среднее значение $\bar{M}_c$, H — амплитуда его колебаний относительно среднего значения. Для общего случая изменения приведенного момента сил выражение (18.7) можно рассматривать как приближенное выражение, получаемое при удержании первых двух членов разложения в ряд Фурье.

Подставим M_c в уравнение движения (18.6) и сделаем замену переменных

$$\varphi = y + \frac{M_1}{c}.$$

Тогда уравнение движения (18.6) преобразуется к виду уравнения колебательного типа

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = k_1 \sin \omega t,$$

где $2\gamma = b/J_n$, $\lambda^2 = c/J_n$, $k_1 = H/J_n$.

Решение этого уравнения после возврата к переменной φ получаем из (9.53) при начальных условиях $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$:

$$\varphi = \frac{M_1}{c} - \frac{M_1}{c} e^{-\gamma t} \frac{\lambda}{\lambda_*} \sin(\lambda_* t + 0) + e^{-\gamma t} A \frac{\omega}{\lambda_*} \sin(\lambda_* t + 0_1) + A \sin(\omega t - \theta_2), \quad (18.8)$$

где

$$\lambda_* = \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}, \quad 0 = \arctg \frac{\lambda_*}{\gamma}, \quad 0_1 = \arctg \frac{2\gamma\lambda_*}{\gamma^2 - \lambda_*^2 + \omega^2},$$

$$0_2 = \arctg \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}, \quad A = \frac{H}{J_n \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Следовательно, при постоянной угловой скорости двигателя φ_d угол поворота входного вала машины φ_n представляется суммой $\varphi_n = \varphi_d t - \varphi$, где угловое смещение полумуфт φ характеризуется колебаниями относительно положения $\varphi_c = M_1/c$. В режиме разгона, кроме вынужденных колебаний с частотой ω и амплитудой A , наблюдаются свободные и сопровождающие колебания с частотой λ_* , которые с течением времени затухают, так как показатель при величине e имеет отрицательное значение. В режиме установивше-

гося движения остаются только вынужденные колебания, называемые стационарными (установившимися), так как амплитуда A и угловая частота ω не зависят от времени:

$$\varphi = \frac{M_1}{c} + A \sin(\omega t - \theta_2). \quad (18.9)$$

В качестве основной динамической характеристики механизма с упругой муфтой принимают коэффициент динамичности по силам (иначе, коэффициент передачи сил), определяемый как отношение максимального значения вращающего момента на входном валу машины с учетом упругости муфты к максимальному значению того же момента без учета упругости муфты в режиме установившегося движения, т. е. при стационарных колебаниях, определяемых решением (18.9). Полагая $\dot{\varphi} = 0$, находим вращающий момент на входном валу машины

$$M_b = b\dot{\varphi} + c\varphi. \quad (18.10)$$

Дифференцирование по времени выражения (18.9) дает

$$\dot{\varphi} = A\omega \cos(\omega t - \theta_2). \quad (18.11)$$

Подставляя в формулу (18.10) угловое смещение полумуфты из (18.9) и производную $\dot{\varphi}$ из (18.11), получаем

$$M_b = M_1 + A [c \sin(\omega t - \theta_2) + \omega b \cos(\omega t - \theta_2)]. \quad (18.12)$$

Выражение (18.12) преобразуется к виду

$$M_b = M_1 + Ac \cos^{-1} \varepsilon \sin(\omega t - \theta_2 + \varepsilon), \quad (18.13)$$

если принять $\operatorname{tg} \varepsilon = 2\gamma\omega/\lambda^2$.

Максимальное значение вращающего момента M_b :

$$(M_b)_{\max} = M_1 + Ac \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}},$$

где

$$A = \frac{H}{J_{\Pi} \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Максимальное значение того же момента при жестком соединении вала двигателя с входным валом машины равно максимальному по модулю значению приведенного момента сил сопротивления

$$M_{\max} = M_1 + H.$$

Коэффициент динамичности по силам

$$K_c = \frac{M_1 + Ac \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}}{M_1 + H}.$$

При $M_1 = 0$ имеем

$$K_c = K_{дин} \sqrt{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}, \quad (18.14)$$

где $K_{дин} = A/(H/c)$ — коэффициент динамичности по перемещениям, равный отношению амплитуды вынужденных колебаний к максимальному статическому перемещению под действием переменной составляющей момента M_c .

Подставляя в формулу (18.14) значение A из (18.8), получаем

$$K_c = \sqrt{\frac{1 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)^2 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda^4}}}. \quad (18.15)$$

В отсутствие демпфирования ($\gamma = 0$) коэффициент динамичности по силам совпадает с коэффициентом динамичности по перемещениям.

На рис. 93 изображен график зависимости коэффициента динамичности по силам K_c от отношения частот ω/λ при нескольких значениях γ . Все кривые $K_c(\omega/\lambda)$ независимо от значения γ , характеризующего демпфирование, пересекаются в точке с координатами $(\sqrt{2}, 1)$. Отсюда следует, что максимальный вращающий момент на входном валу машины при упругой муфте будет меньше, чем при жесткой муфте, если выполнено условие $K_c < 1$, которое приводит к соотношению между угловой частотой вынуждающего момента ω и собственной частотой λ :

$$\frac{\omega}{\lambda} > \sqrt{2}. \quad (18.16)$$

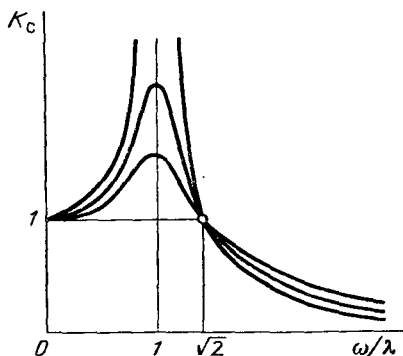


Рис. 93

Величину, обратную коэффициенту динамичности по силам, называют *коэффициентом эффективности виброзащиты* $K_{эф}$, который должен быть больше 1.

На рис. 94 показана амплитудно-частотная характеристика механизма с упругой муфтой при малом демпфировании, из которой следует, что в режимах разбега и выбега могут возникнуть резонансные колебания, если угловая скорость установившегося движения $\omega_{уст}$ больше собственной частоты λ .

Колебания в механизме с нелинейной упругой муфтой. Особенности динамики механизма с нелинейной упругой муфтой поясним

на примере исследования муфты, для которой коэффициент жесткости представлен выражением

$$c = c_0 + c_1 \varphi^2. \quad (18.17)$$

Тогда уравнение движения (18.6) при $b = 0$ и $M_c = M_1 + H \sin \omega t$ имеет вид

$$J_u \ddot{\varphi} + (c_0 + c_1 \varphi^2) \varphi = M_1 + H \sin \omega t. \quad (18.18)$$

Линеаризацию выражения (18.17) на отрезке $[-A, A]$ выполним по методу Чебышева, исходя из условия равенства предель-

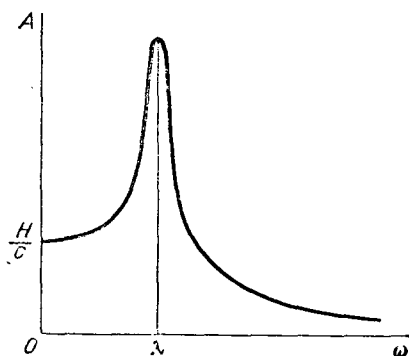


Рис. 94

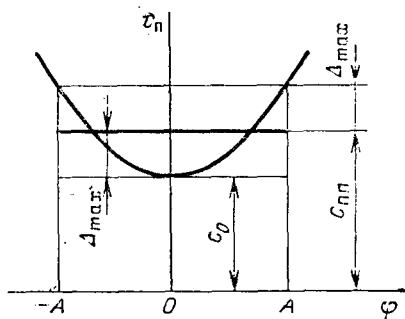


Рис. 95

ных отклонений с чередующимися знаками (рис. 95). Тогда ордината искомой прямой c_{nn} и отклонение Δ_{max} могут быть найдены из системы уравнений

$$c_{nn} = c_0 + \Delta_{max}, \quad c_{nn} + \Delta_{max} = c_0 + c_1 A^2.$$

Отсюда

$$c_{nn} = c_0 + 0,5 c_1 A^2. \quad (18.19)$$

Подстановка приближенного выражения коэффициента жесткости (18.19) в уравнение движения (18.18) дает

$$J_u \ddot{\varphi} + (c_0 + 0,5 c_1 A^2) \varphi = M_1 + H \sin \omega t. \quad (18.20)$$

После замены переменных по условию $\varphi = y + (M_1/c_{nn})$ приведем уравнение движения (18.20) к виду линейного уравнения консервативного типа

$$\ddot{y} + \lambda_u^2 y = \frac{H}{J_u} \sin \omega t, \quad (18.21)$$

где

$$\lambda_u^2 = (c_0 + 0,5 c_1 A^2) / J_u. \quad (18.22)$$

Амплитуду вынужденных колебаний, описываемых уравнением (18.21) при $\omega \neq \lambda$, получим из решения (18.8) при $\gamma = 0$:

$$A = \frac{H}{J_{11} |\lambda_{11}^2 - \omega^2|}.$$

Подстановка значения λ_{11}^2 из (18.22) при $\omega < \lambda_{11}$ приводит к алгебраическому уравнению третьей степени для определения амплитуды A :

$$A(c_0 + 0,5c_1 A^2 - \omega^2 J_{11}) = H.$$

Следовательно, если искать решение уравнения (18.21) в виде $y = A \sin \omega t$, то возможно получение трех различных амплитуд при одной и той же частоте ω . Возможность возникновения нескольких периодических режимов при одной и той же вынуждающей силе составляет характерную особенность нелинейных систем.

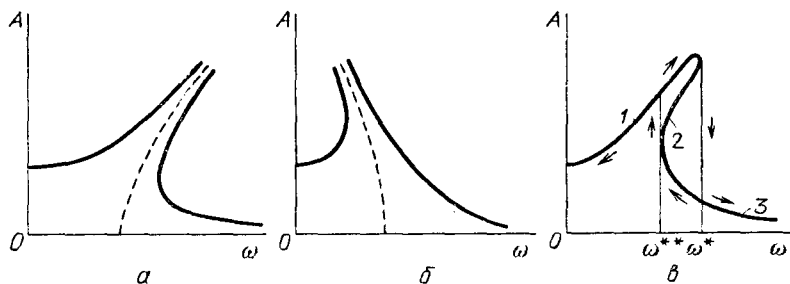


Рис. 96

На рис. 96, а показана зависимость амплитуды A от частоты ω , или амплитудно-частотная характеристика, для случая, когда коэффициент жесткости увеличивается при увеличении силы. Штриховой линией показана *скелетная кривая* — график зависимости между частотой и амплитудой свободных колебаний. Сравнение полученной амплитудно-частотной характеристики с той же характеристикой при линейном упругом звене (см. рис. 94) показывает, что нелинейность упругого звена приводит к возникновению колебаний с большой амплитудой при частотах вынуждающей силы, превышающих собственную частоту (затягивание резонанса в область высоких частот).

Если коэффициент жесткости уменьшается с увеличением силы, то скелетная кривая и амплитудно-частотная характеристика наклонены к оси A (рис. 96, б), что приводит к затягиванию резонанса в область низких частот. При учете трения в кинематических парах амплитуда колебаний при резонансе имеет конечную величину и обе ветви амплитудно-частотной характеристики смыкаются (рис. 96, в).

С наклоном амплитудно-частотной характеристики и возможностью существования нескольких режимов движения связана другая особенность нелинейных систем — *срыв амплитуды*. Представим себе, что частота ω увеличивается, начиная от некоторого значения, расположенного на ветви 1 (рис. 96, в). Частота может увеличиваться до значения $\omega = \omega^*$. При этом значении частоты происходит срыв амплитуды и переход на ветвь 3. Если частота ω уменьшается от некоторого значения, соответствующего ветви 3, то срыв амплитуды и переход на ветвь 1 происходит при значении $\omega = \omega^{**}$. Отсюда следует, что ветвь 2 соответствует неустойчивым режимам.

Кроме рассмотренных колебательных режимов с частотой, равной частоте вынуждающей силы ω , в нелинейных системах возможно возникновение режимов с частотами, кратными ω . Колебания с высшими частотами (2ω , 3ω , ...) называются *супергармоническими*, колебания с низшими частотами ($\omega/2$, $\omega/3$, ...) — *субгармоническими*, колебания с частотой ω — *основными*. Исследование супергармонических и субгармонических колебаний производится обычно с применением приближенных методов, основанных на разложении периодических функций в ряды Фурье.

§ 70. Колебания в механизмах с упругими валами

Приведение жесткости упругих звеньев механизма. *Приведенным коэффициентом жесткости* кинематической цепи называется коэффициент жесткости звена приведения, имеющего ту же потенциальную энергию, что и заменяемая кинематическая цепь. Обратная величина называется *приведенным коэффициентом податливости*.

Пусть, например, кинематическая цепь состоит из n последовательно соединенных зубчатых колес с упругими валами. Обозначим через c_i коэффициент жесткости звена i и через c_n — приведенный коэффициент жесткости. Если вращающие моменты M_i для звена i и M_n для звена приведения выражают только моменты сил упругости: $M_i = c_i \Delta\varphi_i$, $M_n = c_n \Delta\varphi_n$, где $\Delta\varphi_i$ — угол закручивания звена i , $\Delta\varphi_n$ — угол закручивания звена приведения, то условие равенства потенциальной энергии до и после приведения имеет вид

$$\frac{c_n \Delta\varphi_n^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i \Delta\varphi_i^2}{2} \quad \text{или} \quad \widetilde{M}_n \Delta\varphi_n = \sum_{i=1}^n \widetilde{M}_i \Delta\varphi_i. \quad (18.23)$$

Вращающие моменты M_n и M_i связаны с передаточным отношением

$$u_{ni} = \frac{\widetilde{\omega}_n}{\widetilde{\omega}_i} = \frac{\widetilde{M}_i}{\widetilde{M}_n}, \quad (18.24)$$

где $\widetilde{\omega}_n$, $\widetilde{\omega}_i$ — угловые скорости звена приведения и звена i .

Из (18.23) и (18.24) с учетом выражений для $\tilde{M}_i$ и $\tilde{M}_n$ получаем

$$\tilde{M}_n \frac{\tilde{M}_n}{c_n} = \sum_{i=1}^n \tilde{M}_n u_{ni} \frac{M_n u_{ni}}{c_i}.$$

Отсюда находим приведенный коэффициент податливости $e_n = 1/c_n$

$$\frac{1}{c_n} = \sum_{i=1}^n \frac{u_{ni}^2}{c_i} \quad \text{или} \quad e_n = \sum_{i=1}^n e_i u_{ni}^2. \quad (18.25)$$

Колебания в механизмах с одним линейным упругим звеном.
Линейным упругим звеном назовем звено с постоянным приведенным коэффициентом жесткости. На рис. 97, а показана динамическая модель механизма в виде двух вращающихся звеньев с приведенными моментами инерции J_d и J_n , между которыми помещено линейное упругое звено с приведенным коэффициентом жесткости

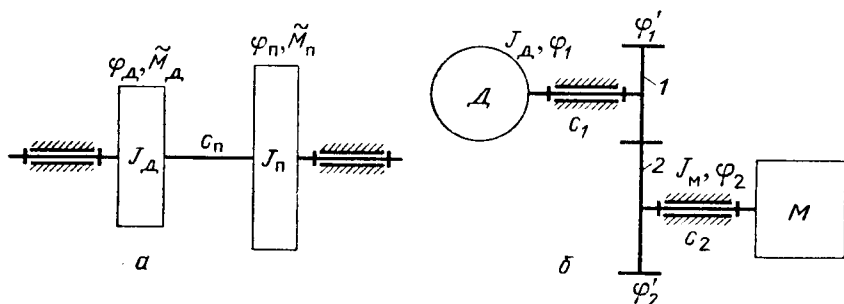


Рис. 97

c_n . За обобщенные координаты примем угол поворота левого конца упругого звена φ_d , который обычно равен углу поворота двигателя, и угол поворота правого конца упругого звена φ_n . Если считать, что к левому концу упругого звена приложен движущий момент $\tilde{M}_d$, а к правому концу — приведенный момент $\tilde{M}_n$, то при постоянных J_d и J_n уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\varphi}_d &= \tilde{M}_d - c_n (\varphi_d - \varphi_n), \\ J_n \ddot{\varphi}_n &= \tilde{M}_n + c_n (\varphi_d - \varphi_n). \end{aligned} \quad (18.26)$$

При достаточно большой мощности двигателя угловую скорость его ротора $\dot{\varphi}_d = \tilde{\omega}$ можно считать постоянной. Тогда $\varphi_d = \tilde{\omega}t$, и второе уравнение системы (18.26) может быть решено независимо от первого. Кроме того, учитывая, что угол φ_n мало отличается от угла φ_d , удобнее взять за обобщенную координату вместо φ_d раз-

ность $\varphi = \varphi_n - \varphi_d$. Второе уравнение системы (18.26) принимает вид

$$J_n \ddot{\varphi} + c_n \varphi = M_n. \quad (18.27)$$

Первое уравнение системы (18.26) служит в этом случае только для определения движущего момента M_d , при котором выполняется заданный закон равномерного движения ротора двигателя. Как и в механизме с упругой муфтой, движение звена с приведенным моментом инерции J_n можно рассматривать состоящим из основного движения с постоянной угловой скоростью ω и дополнительного движения со скоростью φ , которая обычно имеет колебательный характер.

На рис. 97, б показана схема одного из механизмов, динамическая модель которого приводится к двухмассной системе с одним линейным упругим звеном. Механизм предназначен для передачи вращения от вала двигателя D к валу машины M . Коэффициенты жесткости этих валов обозначим через c_1 и c_2 . К звену 1 со стороны двигателя приложен движущий момент $\tilde{M}_d$, а к звену 2 со стороны машины — момент сопротивления $\tilde{M}_c$. Приведенный к валу двигателя момент инерции J_d определяется с учетом всех движущихся частей двигателя, а приведенный к валу машины момент инерции J_m — с учетом движущихся частей машины. Моменты инерции зубчатых колес считаем малыми по сравнению с моментами инерции J_d и J_m .

Уравнение движения звена 1 при постоянном J_d имеет вид

$$J_d \ddot{\varphi}_d = \tilde{M}_d - c_1 (\varphi_1 - \varphi'_1), \quad (18.28)$$

где φ_1 — угол поворота левого конца вала 1, φ'_1 — угол поворота правого конца. Аналогично уравнение движения звена 2 при постоянном J_m

$$J_m \ddot{\varphi}_2 = c_2 (\varphi'_2 - \varphi_2) + \tilde{M}_c, \quad (18.29)$$

где φ'_2 — угол поворота левого конца вала 2, φ_2 — угол поворота правого конца.

Отношение моментов сил упругости для зубчатых колес равно обратному отношению угловых скоростей, т. е.

$$\frac{c_1 (\varphi_1 - \varphi'_1)}{c_2 (\varphi'_2 - \varphi_2)} = u_{21},$$

отсюда

$$\varphi'_1 = \frac{c_1 \varphi_1 + c_2 u_{21} \varphi_2}{c_1 + c_2 u_{21}^2}, \quad \varphi'_2 = \varphi'_1 u_{21}.$$

Подставляя значения углов φ_1' и φ_2' в (18.28) и (18.29), получаем систему уравнений (18.26) при соотношениях:

$$\varphi_d = \varphi_1, \quad \varphi_n = \varphi_2 u_{12}, \quad J_n = J_m u_{12}^2, \\ \widetilde{M}_n = \widetilde{M}_c u_{12}, \quad c_n = c_2 c_1 / (c_1 u_{12}^2 + c_2).$$

Из этих соотношений видно, что приведение сил и масс к звену 1 выполняется, как и в механизмах с одной степенью свободы. Приведение жесткостей выполняется по формуле (18.25).

Если силы трения в кинематических парах механизма зависят от реакций, то при составлении уравнений движения механизма с упругими валами они учитываются введением мгновенного к. п. д. в приведенный момент инерции J_n и в приведенный момент сил $\widetilde{M}_n$. Если же трение в кинематических парах приближается к жидкостному, т. е. зависит только от относительной скорости элементов пары, то его учитывают через приведенный момент сил трения $M_{тп}$.

В рассматриваемом примере

$$M_{тп} = b_1 \dot{\varphi}_1 + b_2 \dot{\varphi}_2 u_{12} \quad \text{или} \quad M_{тп} = b_n \dot{\varphi}_1, \quad (18.30)$$

где b_1 , b_2 — коэффициенты сопротивления в подшипниках валов 1 и 2, $b_n = b_1 + b_2 u_{12}^2$ — приведенный (эквивалентный) коэффициент сопротивления.

Трение в подшипниках валов 1 и 2 отнесем к правому концу вала 1. Тогда уравнения движения (18.26) принимают вид

$$J_d \ddot{\varphi}_d = \widetilde{M}_d - c_n (\varphi_d - \varphi_n), \\ J_n \ddot{\varphi}_n = \widetilde{M}_n + c_n (\varphi_d - \varphi_n) - b_n \dot{\varphi}_n. \quad (18.31)$$

При постоянной угловой скорости ротора двигателя $\dot{\varphi}_d$ и при $\varphi_n = \varphi_d + \varphi$ второе уравнение системы (18.31) преобразуется к виду

$$J_n \ddot{\varphi} + b_n \dot{\varphi} + c_n \varphi = \widetilde{M}_n - b_n \dot{\varphi}_d. \quad (18.32)$$

В безразмерной форме это уравнение приводится к уравнению колебательного типа (18.6), и следовательно, все результаты, полученные при рассмотрении колебаний в механизме с упругой муфтой, распространяются на механизм с упругими валами, если его динамика может быть исследована на основании двухмассной динамической модели (см. рис. 97, а) в предположении постоянства угловой скорости двигателя.

Колебания в механизмах с последовательно соединенными упругими звеньями. Последовательное соединение жестких звеньев (зубчатых колес, маховиков и т. п.), соединенных упругими элементами (упругими валами и муфтами), называют *цепной систе-*

мой. Общее число степеней свободы цепной системы равно сумме числа степеней свободы механизма с жесткими звеньями и числа упругих элементов. Например, число степеней свободы зубчатого механизма (см. рис. 97, б) при двух упругих валах равно 3. Для

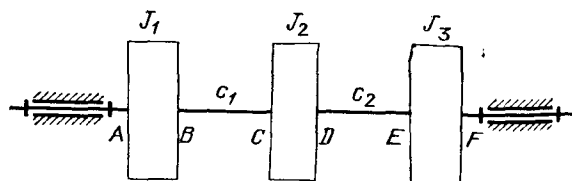


Рис. 98

анализа динамики этого механизма в первом приближении можно рассматривать двухмассную динамическую модель, которая при постоянной скорости вала двигателя имеет одну колебатель-

ную степень свободы и соответственно одну собственную частоту. Однако при анализе резонансных режимов такое рассмотрение может оказаться недопустимым, так как резонанс может наступить при других значениях собственных частот, число которых равно числу степеней свободы.

Метод определения собственных частот многомассных систем покажем на примере трехмассной динамической модели, состоящей из трех звеньев с моментами инерции J_1, J_2, J_3 , соединенными упругими элементами, имеющими коэффициенты жесткости c_1 и c_2 (рис. 98). За обобщенные координаты примем углы поворота валов в сечениях A (или B), C (или D) и E (или F): φ_1, φ_2 и φ_3 . Уравнения движения в отсутствие внешних сил и диссипации энергии имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (18.33)$$

Частное решение системы уравнений (18.33) ищем в виде $\varphi_1 = A_1 \sin(\lambda t + \theta)$, $\varphi_2 = A_2 \sin(\lambda t + \theta)$, $\varphi_3 = A_3 \sin(\lambda t + \theta)$, т. е. предполагаем, что в системе могут происходить колебания, при которых все обобщенные координаты изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой, а фазы колебаний либо совпадают, либо отличаются на π .

Подставив это решение в (18.33), получим после сокращения всех членов на $\sin(\lambda t + \theta)$ систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -J_1 \lambda^2 A_1 + c_1(A_1 - A_2) &= 0, \\ -J_2 \lambda^2 A_2 - c_1(A_1 - A_2) + c_2(A_2 - A_3) &= 0, \\ -J_3 \lambda^2 A_3 + c_2(A_3 - A_2) &= 0. \end{aligned} \quad (18.34)$$

Система уравнений (18.34), однородных относительно неизвестных амплитуд A_1, A_2 и A_3 , может иметь решение, отличное от ну-

левого, только в случае, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_1 - J_1 \lambda^2 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - J_2 \lambda^2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - J_3 \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получаем частотное уравнение, т. е. уравнение для определения собственных частот

$$-(J_1 + J_2 + J_3)\lambda^2 + (J_1 J_2 e_1 + J_1 J_3 e_2 + J_1 J_3 e_1 + J_2 J_3 e_2)\lambda^4 - J_1 J_2 J_3 e_1 e_2 \lambda^6 = 0, \quad (18.35)$$

где $e_1 = 1/c_1$, $e_2 = 1/c_2$ — коэффициенты податливости.

Нулевой корень означает возможность вращения всей системы как одного целого. Корни этого уравнения, отличные от нуля и расположенные в порядке возрастания, образуют спектр собственных частот

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Каждому корню соответствует частное решение вида $\varphi_i = A_i \sin(\lambda_i t + \theta_i)$, а общее решение представит сумму этих решений:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_{11} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_2 &= A_{21} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{22} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{23} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_3 &= A_{31} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{32} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{33} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \end{aligned} \quad (18.36)$$

где второй индекс в обозначениях амплитуд означает номера корней λ_1 , λ_2 , λ_3 , которым соответствуют амплитуды A_1 , A_2 , A_3 .

Вследствие однородности системы уравнений (18.34) относительно амплитуд A_1 , A_2 , A_3 для каждого корня λ_1 , λ_2 , λ_3 можно выразить все амплитуды через какую-либо одну из них. Например, для колебания с частотой λ_1 выразим амплитуды A_{21} и A_{31} через A_{11} . Из уравнений (18.34) при $\lambda = \lambda_1$ имеем

$$\begin{aligned} \kappa_{21} &= \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{c_1 - J_1 \lambda_1^2}{c_1}, \\ \kappa_{31} &= \frac{A_{31}}{A_{11}} = \frac{c_1 - J_1 \lambda_1^2}{c_1 (c_2 - J_3 \lambda_1^2)} c_2, \end{aligned} \quad (18.37)$$

где κ_{21} , κ_{31} — коэффициенты формы для колебаний с частотой λ_1 . Совокупность коэффициентов форм называется *собственной формой*. Число собственных форм равно числу собственных частот, т. е. числу степеней свободы. Для колебаний с частотами λ_2 и λ_3 коэффициенты форм κ_{22} , κ_{32} и κ_{23} , κ_{33} находятся по формулам (18.37) с заменой λ_1 на λ_2 и λ_3 .

Общее решение системы уравнений (18.33) с помощью коэффициентов форм записывается в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_{11} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_2 &= \kappa_{21} A_{11} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + \kappa_{22} A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + \kappa_{23} A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3), \\ \varphi_3 &= \kappa_{31} A_{11} \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + \kappa_{32} A_{12} \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + \kappa_{33} A_{13} \sin(\lambda_3 t + \theta_3).\end{aligned}\quad (18.38)$$

Уравнения (18.38) содержат 6 постоянных (A_{11} , A_{12} , A_{13} , θ_1 , θ_2 , θ_3), которые определяются из начальных условий. При произвольно заданных начальных условиях обобщенные координаты изменяются по полигармоническому закону. Специальным выбором начальных условий можно достичь того, что все обобщенные координаты будут изменяться по гармоническому закону с одной и той же частотой λ_1 (или λ_2 , или λ_3), а фазы колебаний либо совпадают, либо отличаются на π (*главные колебания*). Отношения амплитуд при главных колебаниях образуют собственную форму, соответствующую частоте колебаний.

Метод матриц переноса. Теперь рассмотрим решение задачи об определении спектра собственных частот для динамической модели, показанной на рис. 98, по методу матриц переноса.

Метод основан на том, что динамическая модель рассматривается как совокупность последовательно соединенных участков, для которых справедливы линейные зависимости между амплитудами сил и перемещений на входе и выходе из участка. При гармонических колебаниях с частотой λ эти зависимости имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_b &= s_{11}(\lambda) \varphi_a + s_{12}(\lambda) \bar{M}_a, \\ \bar{M}_b &= s_{21}(\lambda) \varphi_a + s_{22}(\lambda) \bar{M}_a,\end{aligned}\quad (18.39)$$

где φ_a , φ_b — амплитуды перемещений на входе и на выходе, $\bar{M}_a$, $\bar{M}_b$ — амплитуды сил (моментов) на входе и выходе, s_{11} , s_{12} , s_{21} , s_{22} — коэффициенты, зависящие от масс и жесткостей на входе рассматриваемого участка и от частоты λ .

Матрица, образованная коэффициентами правых частей уравнений (18.39), называется *матрицей переноса* (иногда *фундаментальной матрицей*):

$$S_{ab}(\lambda) = \begin{vmatrix} s_{11}(\lambda) & s_{12}(\lambda) \\ s_{21}(\lambda) & s_{22}(\lambda) \end{vmatrix}. \quad (18.40)$$

Для динамической модели, показанной на рис. 98, имеем 5 участков. На участках AB , CD и EF амплитуды перемещений на входе и выходе совпадают (жесткие элементы), а амплитуды моментов отличаются на величину амплитуды момента сил инерции. Например, для участка AB зависимости (18.39) имеют вид

$$\varphi_b = \varphi_a, \quad \bar{M}_b = -J_1 \lambda^2 \varphi_a + \bar{M}_a.$$

Отсюда получаем матрицу переноса для участка AB :

$$S_{AB} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_1\lambda^2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Аналогично для участков CD и EF :

$$S_{CD} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_2\lambda^2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad S_{EF} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -J_3\lambda^2 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Для участка BC зависимости (18.39) имеют вид

$$\varphi_b = \varphi_a + \frac{\tilde{M}_a}{c_1}, \quad \tilde{M}_b = \tilde{M}_a.$$

Отсюда получаем матрицы переноса

$$S_{BC} = \begin{Bmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad S_{DE} = \begin{Bmatrix} 1 & e_2 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

где $e_1 = 1/c_1$, $e_2 = 1/c_2$ — коэффициенты податливости.

Матрица переноса для всей системы находится как произведение матриц переноса отдельных участков

$$S_{AF} = S_{EF} S_{DE} S_{CD} S_{BC} S_{AB}.$$

Умножая матрицы по правилу «строка на столбец» и возвращаясь к записи соотношений типа (18.39), получаем

$$\varphi_F = [(1 - J_1 e_1 \lambda^2)(1 - J_2 e_2 \lambda^2) - J_1 e_2 \lambda^2] \varphi_A + (e_1 + e_2 - e_1 e_2 J_2 \lambda^2) M_A, \quad (18.41)$$

$$M_F = [-(J_1 + J_2 + J_3)\lambda^2 + (J_1 J_2 e_1 + J_1 J_3 e_2 + J_1 J_3 e_1 + J_2 J_3 e_2)\lambda^4 - \\ - J_1 J_2 J_3 e_1 e_2 \lambda^6] \varphi_A + [(1 - J_2 e_1 \lambda^2)(1 - J_3 e_2 \lambda^2) - J_3 e_1 \lambda^2] M_A.$$

При свободных концах системы $M_A = M_F = 0$. Тогда из первого уравнения системы (18.41) получаем соотношение между углами поворота φ_F и φ_A , а из второго — частотное уравнение, которое совпадает с уравнением (18.35). Коэффициенты формы находятся из соотношений (18.39), записанных для отдельных участков.

ГЛАВА 19

КОЛЕБАНИЯ В РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМАХ

§ 71. Колебания в шарнирном четырехзвеннике с упругими звеньями

Определение приведенного коэффициента жесткости для плоского шарнирного четырехзвенника. В механизме шарнирного четырехзвенника (рис. 99, а) считаем, что внешние силы приложены только к звеньям 1 и 3 и представлены парами сил с моментами M_1 и M_3 . Инерцией шатуна 2 пренебрегаем, и следовательно, ре-

акции, действующие на него со стороны звеньев 1 и 3, направлены по линии BC . В этом случае шатун испытывает только деформации растяжения-сжатия и его коэффициент податливости можно определить по формуле для цилиндрических стержней: $e_2 = l_2/(ES)$, где l — длина шатуна, E — модуль упругости, S — площадь поперечного сечения шатуна. Коэффициент податливости

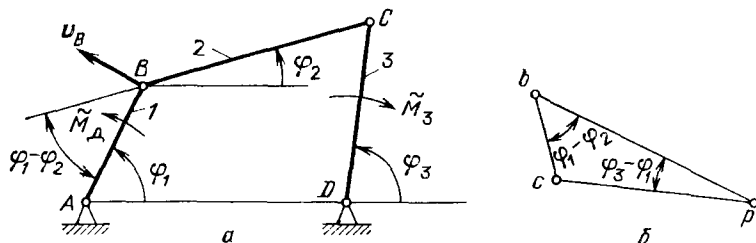


Рис. 99

вала звена 1 определяем, учитывая только деформации кручения: $e_1 = l_1/(GJ_{p1})$, где l_1 — длина участка вала звена 1, на котором определяется угол закручивания, G — модуль сдвига, J_{p1} — полярный момент инерции вала звена 1. Аналогично для вала звена 3: $e_3 = l_3/(GJ_{p3})$.

Если принять звено 1 за звено приведения, то приведенный к нему коэффициент податливости определится по формуле (18.25), которая для данного механизма имеет вид

$$e_{\Pi} = e_1 + e_2 \kappa_{12}^2 + e_3 u_{13}^2, \quad (19.1)$$

где κ_{12} — передаточное отношение, равное отношению угловой скорости звена 1 к проекции скорости v_B на линию BC , u_{13} — передаточное отношение, равное отношению угловой скорости звена 1 к угловой скорости звена 3.

Для определения передаточного отношения u_{13} строим план скоростей шарнирного четырехзвенника (рис. 99, б). Из этого плана, построенного с произвольным масштабным коэффициентом μ_v , определяем передаточное отношение u_{13} как отношение угловых скоростей ω_1 и ω_3 :

$$u_{13} = \frac{(pb) \mu_v / l_{AB}}{(pc) \mu_v / l_{CD}} = \frac{(pb) l_{CD}}{(pc) l_{AB}}.$$

Отношение $(pb)/(pc)$ можно вычислить из косоугольного треугольника pbc по теореме синусов

$$\frac{(pb)}{(pc)} = \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где углы φ_2 и φ_3 как функции угла φ_1 находятся из решения задачи об определении положений звеньев шарнирного четырехзвенника. Отсюда

$$u_{13} = \frac{l_{CD} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (19.2)$$

Передающее отношение

$$\kappa_{12} = \frac{\omega_1}{v_B \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \equiv \frac{1}{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (19.3)$$

С учетом формул (19.1)–(19.3) получаем выражение коэффициента приведенной податливости e_n как функции угла поворота φ_1

$$e_n = e_1 + \frac{e_2 + e_3 l_{CD}^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (19.4)$$

Приведенный коэффициент жесткости находится как величина, обратная приведенному коэффициенту податливости

$$c_n = \frac{l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{e_1 l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + e_2 + e_3 l_{CD}^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (19.5)$$

Уравнения движения шарнирного четырехзвенника с упругими звеньями. После определения приведенного коэффициента жесткости c_n приходим опять к двухмассной динамической модели, показанной на рис. 97, а, но приведенный коэффициент жесткости теперь уже является переменной величиной, зависящей от угла поворота φ_1 .

Дифференциальные уравнения движения для этой модели составляем в форме уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_d} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_d} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_d} &= \tilde{M}_d, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= \tilde{M}_n, \end{aligned} \quad (19.6)$$

где φ_d — угол поворота левой массы, равный углу поворота вала двигателя, φ_1 — угол поворота правой массы, равный углу поворота звена 1, $\tilde{M}_d = \tilde{M}_1$ — момент сил на валу двигателя, $\tilde{M}_n$ — приведенный к звену 1 момент сил, приложенных к звену 3. В рассматриваемом случае $\tilde{M}_n = \tilde{M}_3 u_{31}$.

При составлении аналитического выражения кинетической энергии механизма T учитываем только моменты инерции вращающихся звеньев J_1 и J_3 :

$$T = \frac{J_d \dot{\varphi}_d^2}{2} + \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_3 \dot{\varphi}_3^2}{2}, \quad \text{или} \quad T = \frac{J_d \dot{\varphi}_d^2}{2} + \frac{J_n \dot{\varphi}_1^2}{2},$$

где $J_{\Pi} = J_1 + J_3 u_{31}^2$ — приведенный к звену 1 момент инерции шарнирного четырехзвенника, J_d — момент инерции двигателя, который считаем постоянным.

Потенциальная энергия механизма Π определяется выражением

$$\Pi = \frac{c_{\Pi} (\varphi_d - \varphi_1)^2}{2}.$$

Выполняя дифференцирование в уравнениях (19.6), получаем

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\varphi}_d + c_{\Pi} (\varphi_d - \varphi_1) &= \tilde{M}_d, \\ J_{\Pi} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\varphi_1^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi_1} - c_{\Pi} (\varphi_d - \varphi_1) + \frac{(\varphi_d - \varphi_1)^2}{2} \frac{dc_{\Pi}}{d\varphi_1} &= \tilde{M}_3 u_{31}. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Система нелинейных уравнений движения с переменными коэффициентами (19.7) решается численными методами по малым участкам движения. При постоянной скорости вала двигателя $\dot{\varphi}_d$ второе уравнение системы (19.7) решается независимо от первого и определяет колебания, происходящие от упругости звеньев механизма.

§ 72. Малые колебания в рычажных механизмах приборов

Малые колебания в механизме шарнирного четырехзвенника. При постоянных u_{12} и u_{13} , т. е. при малых перемещениях звеньев, уравнения движения шарнирного четырехзвенника (19.7) принимают вид

$$\begin{aligned} J_d \ddot{\varphi}_d &= \tilde{M}_d - c_{\Pi} (\varphi_d - \varphi_1), \\ (J_1 + J_3 u_{31}^2) \ddot{\varphi}_1 &= \tilde{M}_3 u_{31} + c_{\Pi} (\varphi_d - \varphi_1). \end{aligned} \quad (19.8)$$

Пусть, например, звено 3 шарнирного четырехзвенника соединено с указателем регистрирующего прибора. Звено 1 приводится в движение от двигателя, момент инерции которого значительно превышает моменты инерции J_1 и J_3 . При переводе показателя из одного положения в другое вал двигателя останавливается в новом положении практически мгновенно, а звенья механизма и указатель совершают малые колебания относительно положения равновесия. Из уравнений (19.8) при $\dot{\varphi}_d = \text{const}$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_d$ получаем

$$(J_1 + J_3 u_{31}^2) \ddot{\varphi} + c_{\Pi} \varphi = \tilde{M}_3 u_{31} \quad (19.9)$$

или

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = 0,$$

где

$$y = \varphi - \frac{\tilde{M}_3 u_{31}}{c_{\Pi}}, \quad \lambda^2 = \frac{c_{\Pi}}{J_1 + J_3 u_{31}^2}.$$

При начальных условиях $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$ решение уравнения (19.9) согласно (9.37) имеет вид

$$\varphi = \frac{\tilde{M}_{3''31}}{c_{\Pi}} + \left(\varphi_0 - \frac{\tilde{M}_{3''31}}{c_{\Pi}} \right) \cos \lambda t,$$

т. е. указатель совершает гармонические колебания с собственной частотой λ , значение которой зависит от передаточных отношений κ_{12} и κ_{13} .

Колебания в рычажном механизме прибора при вибрирующей стойке. На рис. 100 показан кривошипно-ползунный механизм, применяемый в указательных и регистрирующих приборах для преобразования движения ползуна 3, связанного с измерительным устройством, во вращательное движение стрелки 1. Каждому положению ползуна соответствует определенное значение измеряемой величины, которое указывается на шкале прибора. Это соответствие нарушается, если стойка вибрирует. Тогда стрелка 1 совершает малые колебания относительно среднего положения, которое может не совпадать с положением, соответствующим статическому равновесию.

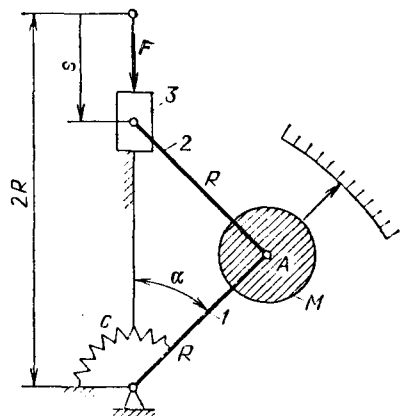


Рис. 100

Обозначим через α_0 значение угла α , определяющего положение стрелки 1 в отсутствие вибрации стойки, и через α_d среднее значение угла α при колебаниях стрелки. Разность $\alpha_d - \alpha_0$ дает динамическую погрешность в показаниях прибора. Такая же погрешность получается в случае, если к ползуну механизма, звенья которого находились в положении статического равновесия, приложить периодически изменяющуюся силу F.

Положение устойчивого статического равновесия звеньев механизма соответствует минимуму потенциальной энергии. При определении потенциальной энергии механизма Π учитываем только массу M , сосредоточенную в точке A , и упругость пружины c , помещенной между стойкой и стрелкой 1:

$$\Pi = \Pi_0 + MgR \cos \alpha + \frac{1}{2} c \alpha^2, \quad (19.10)$$

где α — обобщенная координата механизма, Π_0 — постоянное значение потенциальной энергии, определяемое началом отсчета, c — коэффициент угловой (крутильной) жесткости пружины, R — длины звеньев 1 и 2.

Двукратное дифференцирование выражения потенциальной энергии по обобщенной координате дает

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = -MgR \sin \alpha + c\alpha,$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = -MgR \cos \alpha + c.$$

При $c > MgR \cos \alpha$ положение устойчивого равновесия характеризуется корнем уравнения

$$-MgR \sin \alpha_0 + c\alpha_0 = 0. \quad (19.11)$$

При определении кинетической энергии механизма T учитываем только энергию сосредоточенной массы M :

$$T = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\alpha}^2.$$

Исследуем сначала свободные колебания механизма около положения статического равновесия, принимая за обобщенную координату отклонение

$$q_c = \alpha_0 - \alpha. \quad (19.12)$$

Тогда выражение потенциальной энергии (19.10) принимает вид

$$\Pi = \Pi_0 + MgR \cos(\alpha_0 - q_c) + \frac{1}{2} c (\alpha_0 - q_c)^2.$$

Из разложения в ряд Маклорена в окрестности значения $q_c = 0$ получаем приближенное выражение потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi'(0) q_c + \frac{1}{2} \Pi''(0) q_c^2,$$

где штрихи означают дифференцирование по q_c .

В дальнейшем полагаем $\Pi(0) = 0$, что соответствует изменению начала отсчета потенциальной энергии. Величина $\Pi'(0)$ также равна нулю по условию (19.11). Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2} (-MgR \cos \alpha_0 + c) q_c^2,$$

т. е. приведенный коэффициент жесткости c_n имеет вид

$$c_n = -MgR \cos \alpha_0 + c.$$

Уравнение движения механизма при свободных колебаниях имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_c}$$

или

$$MR^2 \ddot{q}_c = -c_n q_c.$$

Следовательно, собственная частота механизма

$$\lambda = \sqrt{\frac{-MgR \cos \alpha_0 + c}{MR^2}}$$

зависит от положения статического равновесия.

При исследовании вынужденных колебаний представим обобщенную координату в виде суммы

$$q = q_0 + q_d,$$

где q_d — дополнительное перемещение, вызываемое периодически изменяющейся силой F .

Подставляя значение q_0 из соотношения (19.12), получаем

$$q = \alpha_0 - \alpha + q_d.$$

При малых колебаниях можно заменить переменную величину $\alpha_0 + q_d$ ее средним значением

$$\alpha_d = \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha_0 + q_d) dt,$$

где T — период колебаний. Тогда $q = \alpha_d - \alpha$ и вынужденные колебания можно рассматривать как колебания относительно положения динамического равновесия, определяемого углом α_d .

Уравнение движения механизма в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = - \frac{d\Pi}{dq} + \tilde{M}_n, \quad (19.13)$$

где $\tilde{M}_n$ — приведенный к звену 1 момент от силы F .

При равенстве длин звеньев 1 и 2 перемещение ползуна связано с углом поворота α соотношением $s = 2R - 2R \cos \alpha$. Отсюда передаточное отношение $ds/d\alpha = 2R \sin \alpha$.

Приведенный момент $\tilde{M}_n$ находим из условия

$$\tilde{M}_n = \tilde{F} \frac{ds}{d\alpha} \text{ или } \tilde{M}_n = \tilde{F} 2R \sin(\alpha_d - q).$$

Приближенное значение приведенного момента $\tilde{M}_n$ получаем из разложения в степенной ряд в окрестности $q = 0$:

$$\tilde{M}_n = \tilde{F} 2R (-\sin \alpha_d + q \cos \alpha_d).$$

Приближенное значение потенциальной энергии находим также из разложения в ряд в окрестности $q = 0$ или, что то же, при $\alpha = \alpha_d$:

$$\Pi = (-MgR \sin \alpha_d + c\alpha_d)q + \frac{1}{2}(-MgR \cos \alpha_d + c)q^2.$$

Отсюда

$$\frac{d\Pi}{dq} = -MgR \sin \alpha_d + c\alpha_d + (-MgR \cos \alpha_d + c)q.$$

Подставляя выражения для T , $\bar{M}_\pi$ и $d\Pi/dq$ в уравнение (19.13), получаем уравнение малых колебаний механизма при действии вынуждающей периодической силы $\bar{F}$:

$$MR^2\ddot{q} + (c - MgR \cos \alpha_d - 2RF \cos \alpha_d)q = MgR \sin \alpha_d - c\alpha_d - 2RF \sin \alpha_d. \quad (19.14)$$

Полученное линейное уравнение с периодическим коэффициентом приводится к неоднородному уравнению Хилла. Если сила $\bar{F}$ изменяется по гармоническому закону

$$\bar{F} = F_0 \cos \omega t,$$

то уравнение (19.14) приводится к неоднородному уравнению Матье (9.64)

$$\ddot{q} + (a - 2d \cos \omega t)q = f(t), \quad (19.15)$$

где

$$a = \frac{c}{MR^2} - \frac{g \cos \alpha_d}{R}, \quad d = \frac{F_0 \cos \alpha_d}{MR},$$

$$f(t) = \frac{MgR \sin \alpha_d - c\alpha_d - 2RF_0 \sin \alpha_d \cos \omega t}{MR^2}.$$

По уравнению (19.15) можно исследовать устойчивость движения, используя свойства коэффициентов уравнения Матье. При этом исследовании достаточно предположить, что положение динамического равновесия, т. е. значение угла α_d , находится в пределах рабочего диапазона. Для определения самой величины α_d , характеризующей динамическую погрешность механизма («увод» стрелки прибора), можно использовать приближенный метод, основанный на близости величин α_0 и α_d^*).

К рассмотрению уравнения (19.15) приводится также задача о влиянии возвратно-поступательной вибрации стойки по гармоническому закону в направлении, совпадающем с направлением движения ползуна.

ГЛАВА 20

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ РЕГУЛЯТОРОВ СКОРОСТИ

§ 73. Схемы регулирования угловой скорости звена механизма

При установившемся движении угловая скорость начального звена или постоянна, или колеблется относительно среднего значения, причем эти колебания скорости являются периодическими и могут быть уменьшены путем установки маховика. Условием установившегося движения является равенство работ сил движущих и сил сопротивления (по модулю) за каждый цикл движения. Если это условие нарушается вследствие уменьшения или увеличения

*) Кобрицкий А. Е. Механизмы с упругими связями.— М.: Наука, 1964.

сил сопротивления, то скорость движения соответственно увеличивается или уменьшается. Для многих машин это изменение скорости недопустимо, и тогда возникает задача поддержания скорости на заданном уровне. С этой целью применяют регуляторы скорости, основанные на том, что при изменении скорости автоматически изменяется движущая сила, и условие установившегося движения сохраняется для любого значения силы сопротивления.

На рис. 101 показаны четыре схемы регулирования угловой скорости вала теплового двигателя с использованием центробежного маятника в виде двух тяжелых шаров 1, соединенных посредством стержней (рычагов) с валом регулятора 2 и его муфтой 3. Вал регулятора, а следовательно, и шары получают вращение от вала двигателя (обычно через зубчатую передачу). При увеличении скорости вращения шары расходятся и муфта регулятора поднимается, при уменьшении — опускается, т. е. центробежный маятник отзывается на изменение скорости вращения вала двигателя и может быть назван поэтому *чувствительным элементом системы регулирования*.

В зависимости от способа передачи движения от чувствительного элемента к *регулирующему органу* различают регуляторы прямого и непрямого действия. На рис. 101, а показан *центробежный регулятор прямого действия*, в котором перемещение муфты регулятора передается посредством рычажной системы 4 регулирующему органу в виде заслонки 5, которая изменяет площадь проходного сечения трубопровода, подводящего рабочее вещество (топливо) в двигатель. При увеличении скорости вращения вала двигателя вследствие уменьшения сил сопротивления муфта поднимается, а заслонка опускается и уменьшает проходное сечение трубопровода. С уменьшением этого сечения уменьшается количество топлива, поступающего в двигатель, и соответственно уменьшается движущий момент, т. е. восстанавливается условие равенства работ сил движущих и сил сопротивления.

На рис. 101, б показан *центробежный регулятор непрямого действия*, который применяется в случае, когда сила, передаваемая от муфты регулятора 3, недостаточна для того, чтобы плавно перемещать заслонку. Для перемещения заслонки в этом случае применяется вспомогательный двигатель (серводвигатель) в виде гидроцилиндра 6, а муфта регулятора 3 перемещает (с небольшим усилием) шток золотника 7, который служит распределителем, переключающим поток жидкости в ту или другую полость гидроцилиндра. При установившемся движении оба окна (отверстия) в корпусе золотника перекрыты, и поршень гидроцилиндра неподвижен. При увеличении скорости вращения вала двигателя муфта регулятора 3 поднимается, жидкость поступает в нижнюю полость гидроцилиндра, поршень идет вверх, а заслонка опускается, восстанавливая равновесие между силами движущими и силами сопротивления.

На рис. 101, в показан центробежный регулятор непрямого действия с жесткой обратной связью, под которой понимается рычажная система 4, соединяющая шток золотника 7 и поршень гидро-

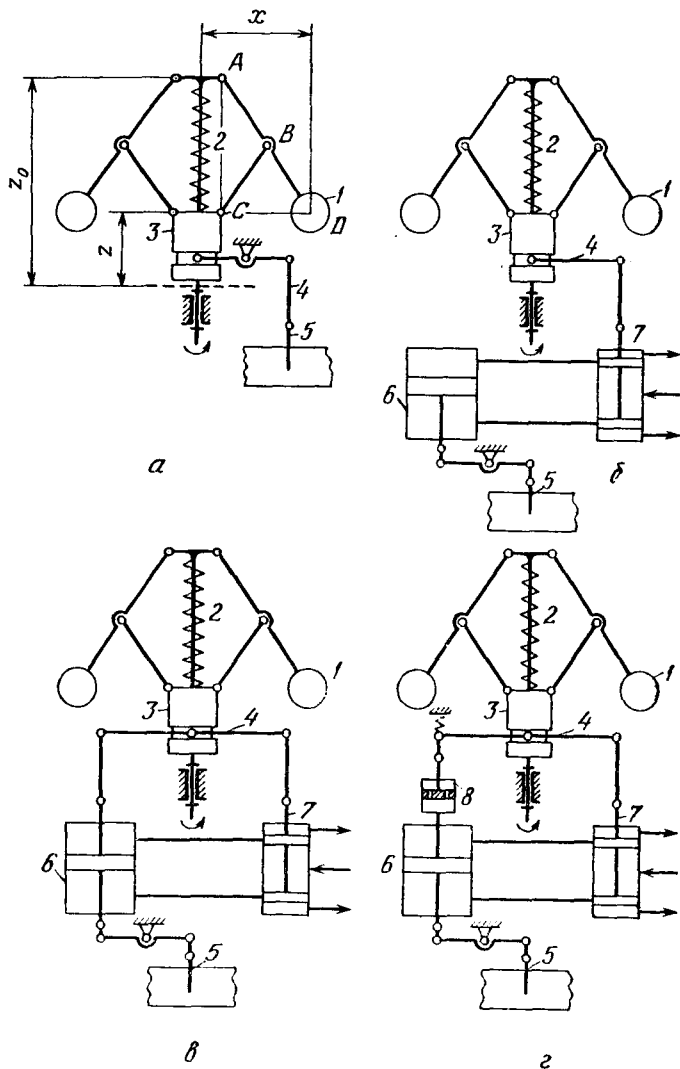


Рис. 101

цилиндра 6. Благодаря этой связи уменьшаются колебания поршня гидроцилиндра и штока золотника при переходе через среднее положение.

По окончании процесса регулирования (переходного процесса) шток золотника возвращается в среднее положение, а поршень гидроцилиндра занимает другое положение, отличающееся от того, в котором он находился в начале процесса регулирования. Соответственно и заслонка также занимает другое положение, и новая установившаяся скорость движения вала будет больше (при уменьшении нагрузки) или меньше (при увеличении нагрузки) первоначальной.

На рис. 101, а показан *центробежный регулятор непрямого действия с упругой обратной связью (изодромный регулятор)*. Применение этого регулятора обеспечивает получение после процесса регулирования той же самой угловой скорости, что и в начале процесса регулирования. С этой целью в обратную связь введен дополнительный гидроцилиндр 8 с отверстиями в поршне, через которые перетекает жидкость из одной полости в другую при движении рычага обратной связи 4. Одновременно с движением этого рычага и связанного с ним дополнительного гидроцилиндра движется и поршень серводвигателя, причем возможные колебания звеньев регулятора демпфируются силами сопротивления, возникающими при перетекании жидкости через отверстия в поршне дополнительного гидроцилиндра, который поэтому называется *демпфером* или *катарактом*.

После окончания процесса регулирования шток золотника возвращается в среднее положение, поршень серводвигателя и заслонка занимают новые положения, соответствующие условию равновесия сил движущих и сил сопротивления. При этом под действием пружины поршень демпфера возвращается в исходное положение, а вместе с ним возвращаются в то же положение рычаг обратной связи и муфта регулятора, т. е. процесс регулирования заканчивается только после того, как скорость вала двигателя примет исходное значение.

Чувствительный элемент системы регулирования угловой скорости вала машины может быть выполнен не только как центробежный маятник. К настоящему времени разработано много дру-

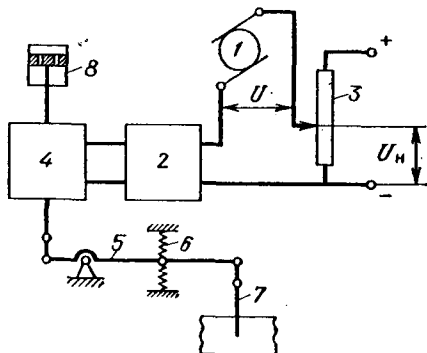


Рис. 102

гих видов чувствительных элементов. На рис. 102 показана схема регулятора непрямого действия с тахогенератором 1, т. е. электрическим генератором постоянного тока, который дает напряжение U , пропорциональное угловой скорости вала регулируемой машины. Одна клемма тахогенератора соединена с усилителем 2, а другая с щеткой потенциометра 3, находящегося под действием напряже-

ния постоянного тока электрической сети. В результате такого соединения в усилитель 2 подается разность напряжений $U - U_n$. Щетка потенциометра устанавливается так, чтобы напряжение U_n было равно U при заданном значении скорости установившегося движения. Тогда разность напряжений $U - U_n$ равна нулю, и шток электромагнита 4 остается неподвижным.

При увеличении или уменьшении угловой скорости вала регулируемой машины соответственно увеличивается или уменьшается напряжение U , на клеммах усилителя появляется напряжение $U - U_n$, и шток электромагнита 4 поднимается или опускается, воздействуя через рычажную систему 5 с пружинами 6 на заслонку 7, регулирующую подачу топлива в двигатель. Для гашения колебаний к штоку электромагнита присоединен демпфер 8.

§ 74. Колебания в механизме регулятора скорости с тахогенератором

Уравнение движения регулятора скорости с тахогенератором. Положения звеньев регулируемой машины и регулятора с тахогенератором определяются двумя независимыми обобщенными координатами, за которые примем угол поворота вала регулируемой машины φ и перемещение штока электромагнита x . Это перемещение отсчитывается от положения, соответствующего номинальной угловой скорости вала машины $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_n$, при которой напряжение на клеммах тахогенератора $U = U_n$.

Кинетическую энергию системы примем равной

$$T = \frac{1}{2} (J_n \tilde{\omega}^2 + m_n \dot{x}^2), \quad (20.1)$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость вала регулируемой машины, J_n — приведенный к этому валу момент инерции звеньев, m_n — приведенная к штоку электромагнита масса.

Приведенный момент инерции J_n определяем, считая неподвижным шток электромагнита, а приведенную массу m_n — считая неподвижным вал регулируемой машины. В дальнейшем J_n и m_n считаем постоянными. Тогда уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа имеют вид

$$J_n \ddot{\omega} = \tilde{M}_d + \tilde{M}_c, \quad m_n \ddot{x} = \tilde{F}_d + \tilde{F}_c, \quad (20.2)$$

где $\tilde{M}_d$, $\tilde{M}_c$ — приведенные к валу машины моменты сил движущих и сил сопротивления, $\tilde{F}_d$, $\tilde{F}_c$ — приведенные к штоку электромагнита сила движущая и сила сопротивления.

Приведенный движущий момент $\tilde{M}_d$ зависит от положения заслонки 7, т. е. от подачи топлива в двигатель. С достаточной для практики точностью $\tilde{M}_d$ можно считать линейно зависящим от перемещения x :

$$\tilde{M}_d = M_d - k_n x, \quad (20.3)$$

где M_n — номинальное значение движущего момента при $x=0$, k_m — постоянный коэффициент.

Приведенная движущая сила F_d зависит от напряжения $U = U_n$, поступающего на клеммы усилителя 2. Это напряжение в свою очередь зависит от разности $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_n$. В первом приближении указанные зависимости можно считать линейными, и тогда приведенная движущая сила найдется из соотношения

$$F_d = k_F(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_n). \quad (20.4)$$

Приведенная сила сопротивления F_o складывается из силы пружины $F_{np} = -cx$ (c — приведенный коэффициент жесткости пружины) и силы вязкого сопротивления в демпфере $F_r = -b\dot{x}$:

$$F_o = -cx - b\dot{x}. \quad (20.5)$$

С учетом (20.3) — (20.5) система уравнений движения (20.2) принимает вид

$$J_n \ddot{\tilde{\omega}} = M_n - k_m x - M_c, \quad (20.6)$$

$$m_n \ddot{x} = k_F(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_n) - cx - b\dot{x}. \quad (20.7)$$

Для решения этой системы уравнений относительно переменной x дифференцируем по времени обе части уравнения (20.7):

$$m_n \ddot{\ddot{x}} = k_F \ddot{\tilde{\omega}} - c\dot{x} - b\ddot{x}.$$

Подставляя сюда значение $\ddot{\tilde{\omega}}$ из (20.6), получаем

$$J_n m_n \ddot{\ddot{x}} + J_n b \ddot{\ddot{x}} + J_n c \dot{\ddot{x}} + k_F k_m x = k_F M_n - k_F M_c. \quad (20.8)$$

Статическая устойчивость регулятора скорости с тахогенератором. Исследование динамики регулятора начинается с построения его характеристики, под которой понимается графическое изображение зависимостей $F_d = F_d(x)$ и $F_o = F_o(x)$ при установившемся движении, т. е. при $\tilde{\omega} = 0$, $\dot{x} = \ddot{x} = 0$. В этом случае

$$F_d = k_F(\tilde{\omega}_y - \tilde{\omega}_n), \quad F_o = cx,$$

где $\tilde{\omega}_y$ — установившаяся угловая скорость вала машины, в общем случае отличающаяся от номинальной.

Зависимость $F_o(x)$ изображается наклонной прямой, проходящей через начало координат, а зависимость $F_d(x)$ — прямыми, параллельными оси абсцисс, причем каждая из этих прямых соответствует определенному значению $\tilde{\omega}_y$. На рис. 103 изображена одна из этих прямых для $\tilde{\omega}_y > \tilde{\omega}_n$. Точка пересечения прямых, изображающих F_d и F_o , показывает величину $x = x_y$, при которой рычажная система регулятора для данного значения $\tilde{\omega}_y$ находится

в равновесии под действием силы пружины и силы, действующей со стороны штока электромагнита.

По характеристике регулятора можно судить о его *статической устойчивости*, т. е. способности звеньев регулятора возвращаться в исходное положение равновесия, если при установившемся движении с определенной угловой скоростью ω , заслонка b и рычажная

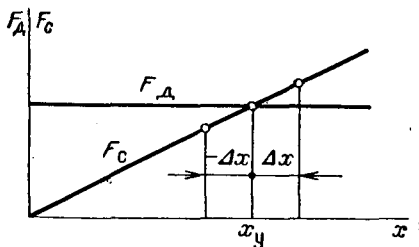


Рис. 103

система b с пружинами выведены из этого положения. Для рассматриваемого регулятора при положительном приращении $\Delta x = x - x_y$ сила пружины $F_{пр} = F_c$ оказывается больше силы, действующей со стороны штока электромагнита при неизменном значении $\omega = \omega_y$, что приводит к уменьшению x и возврату в исходное положение, когда сила пружины равна силе со стороны штока

электромагнита. При отрицательном приращении Δx сила пружины меньше силы со стороны штока электромагнита, что приводит к увеличению x и возврату в исходное положение. Следовательно, регулятор с тахогенератором, характеристика которого показана на рис. 103, статически устойчив.

Динамическая устойчивость регулятора скорости с тахогенератором. Статически устойчивый регулятор может оказаться динамически неустойчивым. Для проверки устойчивости движения воспользуемся критерием Гурвица. С этой целью приведем уравнение (20.8) к однородному путем подстановки

$$x = x_1 + \frac{M_n - M_c}{k_m}, \quad (20.9)$$

считая модуль момента сил сопротивления M_c постоянным или равным нулю (сброс нагрузки). Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0, \quad (20.10)$$

где

$$a_0 = J_n m_n, \quad a_1 = J_n b, \quad a_2 = J_n c, \quad a_3 = k_r k_m.$$

Для того чтобы система была устойчивой, кроме положительности всех коэффициентов характеристического уравнения дополнительно должно удовлетворяться условие (10.11): $a_1 a_2 > a_0 a_3$. В рассматриваемом случае коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 и a_3 положительны, а условие (10.11) приводит к неравенству

$$b J_n c - m_n k_r k_m > 0. \quad (20.11)$$

Из условия (20.11) следует, что при $b = 0$ (нет демпфера) система неустойчива. Обычно стремятся удовлетворить условию

(20.11) подбором коэффициента b (реже увеличением приведенного момента инерции или коэффициента жесткости пружины).

Колебания в механизме регулятора скорости с тахогенератором. Решение системы уравнений движения (20.6) и (20.7) начинается с решения линейного дифференциального уравнения третьего порядка (20.8). При постоянном моменте сил сопротивления $\bar{M}_0$ для решения соответствующего однородного уравнения находим сначала корни характеристического уравнения (20.10). В зависимости от значений a_0 , a_1 , a_2 и a_3 могут быть четыре случая: 1) один корень действительный и два мнимых, 2) три действительных различных корня, 3) три совпавших нулевых корня, 4) из трех действительных корней два совпали. Колебания в механизме будут только в первом случае распределения корней.

Обозначим действительный корень характеристического уравнения (20.10) через r_1 и сопряженные комплексные корни через $r_2 = \alpha + i\lambda$, $r_3 = \alpha - i\lambda$. Тогда с учетом формул (9.13), (9.14) и подстановки (20.9) получаем решение уравнения (20.8)

$$x = \frac{M_n - M_c}{k_m} + C_1 e^{r_1 t} + e^{\alpha t} (C_2 \cos \lambda t + C_3 \sin \lambda t), \quad (20.12)$$

где постоянные C_1 , C_2 и C_3 находятся из начальных условий $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\ddot{x} = \ddot{x}_0$.

Если удовлетворено условие устойчивости (20.11), то r_1 и α выражаются отрицательными числами. Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$ второй член решения (20.12) стремится к нулю, а третий член описывает затухающие колебания. Подставляя решение (20.12) в уравнение (20.6), получаем

$$\ddot{\omega} = -\frac{k_m}{J_n} \left[C_1 e^{r_1 t} + e^{\alpha t} (C_2 \cos \lambda t + C_3 \sin \lambda t) \right],$$

т. е. угловое ускорение вала машины $\ddot{\omega}$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а угловая скорость $\dot{\omega}$ — к установившемуся значению $\dot{\omega}_y$.

§ 75. Колебания в механизме центробежного регулятора

Уравнения движения центробежного регулятора. При составлении выражения кинетической энергии регулятора будем учитывать только постоянный приведенный момент инерции J_n звеньев машины, приведенный к валу двигателя, и массу шаров m . За обобщенные координаты примем угол поворота φ вала двигателя и перемещение муфты регулятора z , отсчитываемое от положения, соответствующего номинальной скорости вала двигателя $\tilde{\omega}_n$ (см. рис. 101, а).

Если рычажный механизм центробежного регулятора выполнить как симметричный равнозвездный кривошипно-ползунный механизм ($l_{AB} = l_{BC} = l_{BD}$), то точка D относительно отрезка AC дви-

жется по прямой, перпендикулярной ему и проходящей через точку C . При указанных соотношениях между длинами звеньев механизма центр шара D в вертикальном направлении перемещается, как и муфта, на величину z . Кроме того, считаем, что расстояния от точек A и C до оси регулятора малы по сравнению с длиной $l_{AD} = d$. Тогда из $\triangle ACD$ следует, что расстояние от центра шара до оси регулятора x и перемещение z связаны соотношением

$$x^2 = d^2 - (z_0 - z)^2. \quad (20.13)$$

Абсолютная скорость центра шара v_D может быть выражена через ее проекции в неподвижной системе координат

$$v_D^2 = (x\dot{\omega})^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2, \quad (20.14)$$

где $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$ — угловая скорость вала двигателя, $u = \tilde{\omega}_p / \tilde{\omega}$ — передаточное отношение, равное отношению угловой скорости вала регулятора к угловой скорости вала двигателя.

Из соотношения (20.13) имеем

$$x\dot{x} = (z_0 - z)\dot{z}.$$

Отсюда

$$\dot{x}^2 = \dot{z}^2 \frac{(z_0 - z)^2}{d^2 - (z_0 - z)^2}.$$

Следовательно, скорость v_D есть функция обобщенной координаты z и угловой скорости $\tilde{\omega}$:

$$v_D^2 = u^2 \omega^2 [d^2 - (z_0 - z)^2] + \dot{z}^2 \frac{d^2}{d^2 - (z_0 - z)^2}.$$

Кинетическая энергия системы найдется из выражения $2T = J_n \omega^2 + m v_D^2$ или

$$2T = J_n \omega^2 + m u^2 \omega^2 [d^2 - (z_0 - z)^2] + \frac{m d^2 \dot{z}^2}{d^2 - (z_0 - z)^2}. \quad (20.15)$$

Уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = \tilde{M}_n, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = \tilde{F}_n,$$

где $\tilde{M}_n$ — приведенный к валу двигателя момент внешних сил, $\tilde{F}_n$ — приведенная к муфте регулятора внешняя сила.

Выполняя дифференцирование, получаем

$$J_n \ddot{\omega} + m u^2 [d^2 - (z_0 - z)^2] \ddot{\omega} + 2 m u^2 \tilde{\omega} (z_0 - z) \dot{z} = \tilde{M}_n, \quad (20.16)$$

$$\frac{m d^2}{d^2 - (z_0 - z)^2} \ddot{z} - \dot{z}^2 \frac{m d^2 (z_0 - z)}{[d^2 - (z_0 - z)^2]^2} - m u^2 \omega^2 (z_0 - z) = \tilde{F}_n. \quad (20.17)$$

Статическая устойчивость центробежного регулятора. Для исследования статической устойчивости регулятора надо в уравнениях (20.16) и (20.17) принять $\ddot{\omega} = 0$, $\ddot{z} = 0$ и $\dot{z} = 0$. Тогда из уравнения (20.17) получаем

$$-mu^2\omega^2(z_0 - z) = F_n. \quad (20.18)$$

Уравнение (20.18) можно представить также в виде $F_n + F_{\text{и}} = 0$, где F_n — приведенная к муфте регулятора сила инерции шаров. На рис. 104 показана характеристика регулятора, т. е. зависимость $F_n(z)$. Для центробежного маятника с равными длинами звеньев эта зависимость изображается прямой линией. На том же рис. 104 показана зависимость $F_{\text{и}}(z)$ для заданного значения $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$. Точка пересечения этого графика с характеристикой $F_n(z)$ определяет положение муфты, т. е. перемещение $z = z_y$, соответствующее угловой скорости $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$.

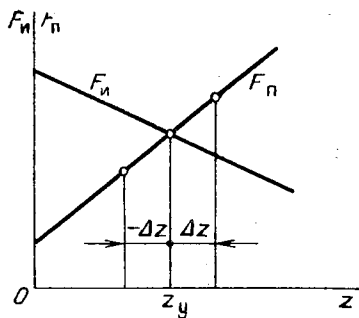


Рис. 104

По характеристике регулятора можно судить о его статической устойчивости. Пусть, например, муфта регулятора при установившемся движении $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y$ была выведена из положения равновесия и перемещение z_y получило положительное приращение Δz . Тогда приведенная сила F_n оказывается по модулю больше приведенной силы инерции $F_{\text{и}}$. Если считать, что при этом угловая скорость $\tilde{\omega}$ не изменяется, то под действием силы F_n муфта регулятора вернется в исходное положение, что следует из (20.18). При отрицательном приращении Δz муфта регулятора также возвращается в исходное положение и, следовательно, регулятор статически устойчив.

Статически устойчивый регулятор может оказаться динамически неустойчивым. Исследование устойчивости динамики системы, описываемой нелинейными уравнениями (20.16) и (20.17), представляет значительные трудности. Однако в большинстве случаев достаточно установить, является ли система динамически устойчивой при малых изменениях обобщенной координаты z и угловой скорости $\tilde{\omega}$. Тогда уравнения (20.16) и (20.17) могут быть сведены к одному линейному уравнению, для которого устойчивость движения проверяется по критерию Гурвица.

ГЛАВА 21

КОЛЕБАНИЯ В КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМАХ

§ 76. Уравнения движения кулачкового механизма с упругим толкателем

Одномассная динамическая модель кулачкового механизма с упругим толкателем. Для исследования колебаний в кулачковом механизме с упругим толкателем (выходным звеном) достаточно рассмотреть одномассную динамическую модель (рис. 105), так как жесткость кулачкового вала обычно больше жесткости толкателя. Кроме того, угловую скорость кулачка ω будем считать постоянной. При этих условиях динамика механизма определяется дифференциальным уравнением движения массы толкателя m , которая считается сосредоточенной в одной точке (верхнем конце толкателя).

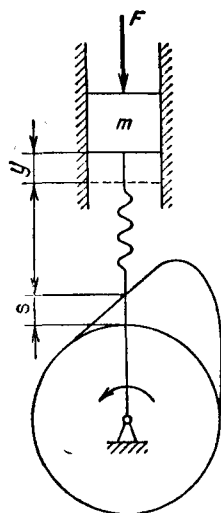


Рис. 105

Действие сил упругости толкателя представлено пружиной, помещенной между массой m и кулачком. На массу m действуют внешняя сила F и сила трения F_t , пропорциональная скорости верхнего конца толкателя. Нижний конец толкателя (пружины) движется в контакте с кулачком, т. е. перемещение нижнего конца толкателя s , отсчитываемое от наинизшего положения, определяется профилем кулачка. Перемещение верхнего конца толкателя y вследствие упругости толкателя отличается от перемещения s .

Уравнение движения кулачкового механизма с упругим прямолинейно движущимся толкателем. Для динамической модели, показанной на рис. 105, имеем

$$m\ddot{y} = c(s - y) - b\dot{y} - F, \quad (21.1)$$

где b — коэффициент сопротивления, c — коэффициент жесткости толкателя.

Из уравнения (21.1) получаем

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = cs - F. \quad (21.2)$$

Величина s , входящая в правую часть уравнения движения (21.2), полностью определяется профилем кулачка и является заданной функцией времени. Функцию $s(t)$ называют *кинематическим возбуждением*, так как от ее вида зависит характер упругих колебаний.

Перемещения s и y мало отличаются по модулю, и потому, как и при рассмотрении колебаний в механизмах с упругими валами, удобнее за обобщенную координату принять разность

$$q = y - s. \quad (21.3)$$

Тогда уравнение движения кулачкового механизма с упругим толкателем принимает вид

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\ddot{s} - b\dot{s} - F, \quad (21.4)$$

или

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \lambda^2 q = -\ddot{s} - 2\gamma\dot{s} - \frac{F}{m}, \quad (21.5)$$

где $\gamma = b/(2m)$ — коэффициент демпфирования, $\lambda = \sqrt{c/m}$ — собственная частота механизма.

При $\gamma < \lambda$ уравнение (21.5) является линейным уравнением движения колебательного типа, решение которого зависит от вида правой части, т. е. от закона изменения силы F и от производных $\dot{s}$ и $\ddot{s}$, определяемых профилем кулачка. Эти производные связаны с угловой скоростью кулачка $\dot{\omega}$ соотношениями

$$\dot{s} = \dot{\omega} \frac{ds}{d\varphi}, \quad \ddot{s} = \ddot{\omega}^2 \frac{d^2s}{d\varphi^2}, \quad (21.6)$$

где φ — угол поворота кулачка.

При сравнении характеристик упругих колебаний толкателя, получаемых при типовых законах движения нижнего конца толкателя $s(t)$, обычно принимают $F = 0$ (чисто инерционная нагрузка) и $\gamma = 0$ (отсутствие трения). Тогда уравнение движения (21.5) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\ddot{s}. \quad (21.7)$$

Уравнение движения кулачкового механизма с упругим вращающимся толкателем (коромыслом). При вращающемся толкателе обобщенная координата q определяется выражением $q = \varphi_y - \varphi$, где φ_y — угол поворота упругого толкателя, φ — угол поворота жесткого толкателя, зависящий только от профиля кулачка. Уравнение движения (21.7) в этом случае преобразуется к виду

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\ddot{\varphi},$$

где $\lambda^2 = c/J$, c — крутильная жесткость вала толкателя, J — момент инерции толкателя относительно оси вращения.

§ 77. Типовые законы движения выходного звена в кулачковых механизмах

Фазы движения выходного звена кулачкового механизма. На рис. 106 показана типичная для машин-автоматов зависимость $s(\varphi)$ между перемещением толкателя s и углом поворота кулачка φ . В соответствии с видом графика $s(\varphi)$ участок на угле φ_n называется *фазой подъема*, а на угле φ_o — *фазой опускания*. Между

ними могут быть фазы выстоя: $\varphi_{в.в}$ — *верхний выстой*, $\varphi_{н.в}$ — *нижний выстой*. При равномерном вращении кулачка график $s(\varphi)$ в другом масштабе дает график $s(t)$. В этом случае время прохождения фазы подъема обозначается через t_n , фазы опускания t_o , фазы верхнего выстоя $t_{в.в}$, фазы нижнего выстоя $t_{н.в}$.

Для многих кулачковых механизмов условия выполнения технологического процесса определяют только фазовые углы поворота кулачка. Внутри же каждой фазы подъема и опускания зависимость перемещения выходного звена от угла поворота кулачка или от времени может выбираться различной в соответствии с дополнительными условиями.

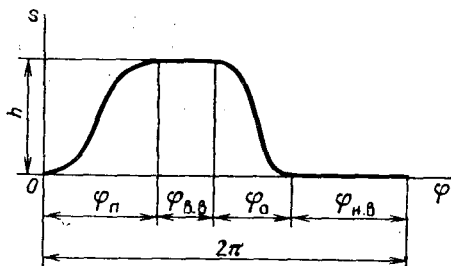


Рис. 106

Безразмерные коэффициенты типовых законов движения выходного звена в кулачковых механизмах. Законы движения выходных звеньев, удовлетворяющих одним и тем же граничным условиям, сравнивают

при помощи безразмерных коэффициентов, выражающих кинематические и динамические характеристики механизма. Пусть, например, для закона движения толкателя кулачкового механизма $s = s(t)$ заданы граничные условия: в начале фазы подъема $t = 0$ и $s = 0$, в конце фазы $t = t_n$ и $s = h$. Тогда максимальные скорость и ускорение толкателя $v_{\max}$ и $a_{\max}$ характеризуют безразмерными коэффициентами

$$\delta_{\max} = \frac{v_{\max}}{h/t_n}, \quad \xi_{\max} = \frac{a_{\max}}{h/t_n^2}.$$

В табл. 8 приведены некоторые употребительные законы движения с указанием коэффициентов $\delta_{\max}$ и $\xi_{\max}$, получаемых без учета упругости толкателя. Для кулачково-коромысловых механизмов вместо s и h должны быть углы поворота коромысла ψ и $\psi_{\max}$. Безразмерные коэффициенты имеют те же значения и характеризуют максимальные угловую скорость и угловое ускорение коромысла.

Простейшим законом движения является закон *постоянной скорости* (равномерное движение), при котором максимальная скорость толкателя имеет наименьшее значение. Но в начале и в конце движения происходят жесткие удары.

Жестких ударов можно избежать, используя закон *постоянного ускорения*, при котором толкатель сначала движется равноускоренно, а затем равнозамедленно. Однако при переходе от равноускоренного к равнозамедленному движению мгновенно изменяется

направление ускорения, а следовательно, и силы инерции (мягкий удар), что приводит к упругим колебаниям и к увеличению динамических нагрузок.

Избежать мгновенного изменения ускорения по направлению можно, применяя закон косинусоидального ускорения, при котором в начале и в конце движения, если далее следует выстой, происходит изменение ускорения только по модулю.

Наконец, можно найти законы изменения ускорения, в которых нет скачков изменения скоростей и ускорений. Например, в

Таблица 8

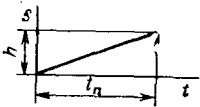
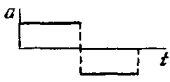
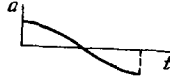
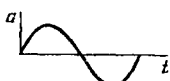
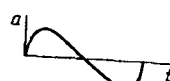
Название	График	Безразмерные коэффициенты	
		$\delta_{\max}$	$\epsilon_{\max}$
Постоянная скорость		1	∞
Постоянное ускорение		2	4
Косинусоидальное ускорение		1,57	4,93
Синусоидальное ускорение		2	6,28
Полином пятой степени		1,88	5,77

табл. 8 показан закон движения с ускорением, изменяющимся по синусоиде, и один из законов движения, в которых зависимость перемещения от времени представлена в виде степенного полинома.

§ 78. Колебания в кулачковом механизме при косинусоидальном законе изменения ускорения толкателя

Колебания при $\lambda > \omega$. При косинусоидальном законе изменения ускорения толкателя перемещение s , скорость $\dot{s}$ и ускорение $\ddot{s}$ выражаются формулами:

$$s = \frac{h}{2}(1 - \cos \omega t), \quad \dot{s} = \frac{h\omega}{2} \sin \omega t, \quad \ddot{s} = \frac{h\omega^2}{2} \cos \omega t, \quad (21.8)$$

где $\omega = \pi/t_n$.

Уравнение движения механизма (21.7) имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = -\frac{h\omega^2}{2} \cos \omega t. \quad (21.9)$$

Для решения этого уравнения по операторному методу заменяем в нем оригинал q его изображением Q . Изображение производной $\ddot{q}$ находим по формуле (9.20) при нулевых начальных условиях и $s = s_n$, а изображение функции $\cos \omega t$ берем из табл. 6 (п. 4 при $\lambda = \omega$ и $s = s_n$)*. Тогда дифференциальное уравнение (21.9) преобразуется в алгебраическое относительно изображения Q :

$$s_n^2 Q + \lambda^2 Q = -\frac{h\omega^2}{2} \frac{s_n}{s_n^2 + \omega^2}.$$

Отсюда

$$Q = -\frac{h\omega^2}{2} \frac{s_n}{(s_n^2 + \lambda^2)(s_n^2 + \omega^2)}.$$

Обратный переход к оригиналу q по табл. 6 (п. 8 при $s = s_n$) дает решение уравнения (21.9)

$$q = \frac{h\omega^2}{2(\lambda^2 - \omega^2)} (\cos \lambda t - \cos \omega t). \quad (21.10)$$

Перемещение верхнего конца толкателя с учетом его упругости $y = s + q$ находим с использованием формул (21.8) и (21.10)

$$y = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \lambda t - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \omega t \right).$$

Двукратное дифференцирование по времени дает

$$\ddot{y} = \frac{h\omega^2 n^2}{2(n^2 - 1)} (\cos \omega t - \cos n\omega t), \quad (21.11)$$

где $n = \frac{\lambda}{\omega} \equiv \frac{2t_n}{t_c}$.

*) В преобразованиях Лапласа s_n — комплексная величина.

Если n — целое четное число, то $n/2$ дает число периодов t_0 колебаний с собственной частотой λ , укладывающихся на отрезке от $t=0$ до $t=t_n$. Если n — целое нечетное число, то на отрезке от $t=0$ до $t=t_n$ укладывается $n/2$ периодов t_0 и один полупериод. На рис. 107 показаны графики ускорения толкателя без учета упругости $\ddot{s}$ и с учетом упругости $\ddot{y}$ при $n=10$.

Коэффициент динамичности при $\lambda > \omega$. При косинусоидальном изменении ускорения коэффициент динамичности по ускорениям зависит от собственной частоты механизма λ . Из формул (21.8) и (21.11) следует

$$K_{\text{уск}} = \frac{|\ddot{y}|_{\max}}{|\ddot{s}|_{\max}} \equiv \frac{n^2}{n^2 - 1} |\cos \omega t - \cos n\omega t|_{\max},$$

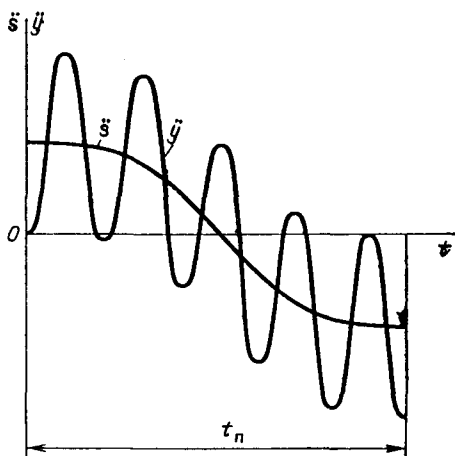


Рис. 107

где $\omega = \pi/t_n$, $n = \lambda/\omega$.

Обычно в кулачковых механизмах $n > 1$, и тогда с увеличением n , т. е. с повышением жесткости толкателя (или с увеличением времени подъема), коэффициент динамичности по ускорениям стремится к значению $K_{\text{уск}} = 2$.

ГЛАВА 22

ВИБРАЦИОННЫЕ ТРАНСПОРТЕРЫ

§ 79. Безударные вибрационные транспортеры

Колебания в машинах имеют полезное применение в тех случаях, когда колебания (по другой терминологии — вибрация) используются для выполнения технологического процесса или для его интенсификации, или для повышения качества выполняемой работы. Соответственно *вибрационной машиной* называется машина, исполнительному органу которой сообщают вибрацию для осуществления или интенсификации выполняемого процесса, или повышения качества выполняемой работы. Вибрационная машина, предназначенная для транспортирования грузов или сыпучих материалов, называется *вибрационным транспортером*.

Действие вибрационного транспортера основано на том, что рабочий орган машины в начале и в конце каждого цикла колебаний занимает одно и то же положение, а транспортируемый груз в каждом цикле продвигается вперед относительно рабочего органа. В безударных вибрационных транспортерах это продвижение происходит без удара о рабочий орган. В простейшем вибрационном транспортере груз массой m лежит на плоскости рабочего органа машины, который совершает горизонтальные колебания с размахом S (рис. 108). Груз прижат к плоскости силой тяжести mg , которая

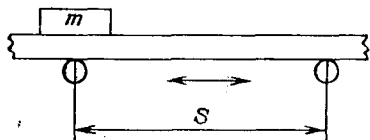


Рис. 108

вызывает силу трения, препятствующую перемещению груза относительно рабочего органа. Максимальное значение силы трения равно fmg , где f — коэффициент трения покоя. Если принять коэффициент трения движения равным коэффициенту трения покоя, то при относительном перемещении груза по плоскости сила трения сохраняет постоянное значение, равное fmg , и уравнение движения груза при его перемещении вперед (на рис. 108 слева направо) имеет вид

$$m\ddot{a}_r = -fmg,$$

где $\ddot{a}_r$ — ускорение груза.

Отсюда следует, что отрицательное ускорение груза не может превысить по модулю величины fg , и если на участке замедления (выбега) рабочий орган будет иметь модуль ускорения $a_2 > fg$, то груз в своем движении будет опережать рабочий орган.

Пусть, например, рабочий орган приводится в движение от кулачкового механизма, в котором профиль кулачка построен по закону постоянного ускорения при равных временах прямого и обратного ходов (рис. 109, а). При прямом ходе (слева направо) на участке разбега продолжительностью t_1 модуль ускорения рабочего органа $a_1 < mg$, а на участке выбега продолжительностью t_2 модуль ускорения (замедления) $a_2 > mg$, причем отношение $k = a_2/a_1$ выбирается достаточно большим ($k > 4$). При обратном ходе разбег происходит с модулем ускорения a_2 , а выбег — с модулем ускорения a_1 .

Продолжительности участков разбега и выбега могут быть выражены через коэффициент k и период колебаний T , если принять во внимание систему уравнений:

$$t_1 + t_2 = T/2, \quad a_1 t_1 - a_2 t_2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{k}{1+k} \frac{T}{2}, \\ t_2 &= \frac{1}{1+k} \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (22.1)$$

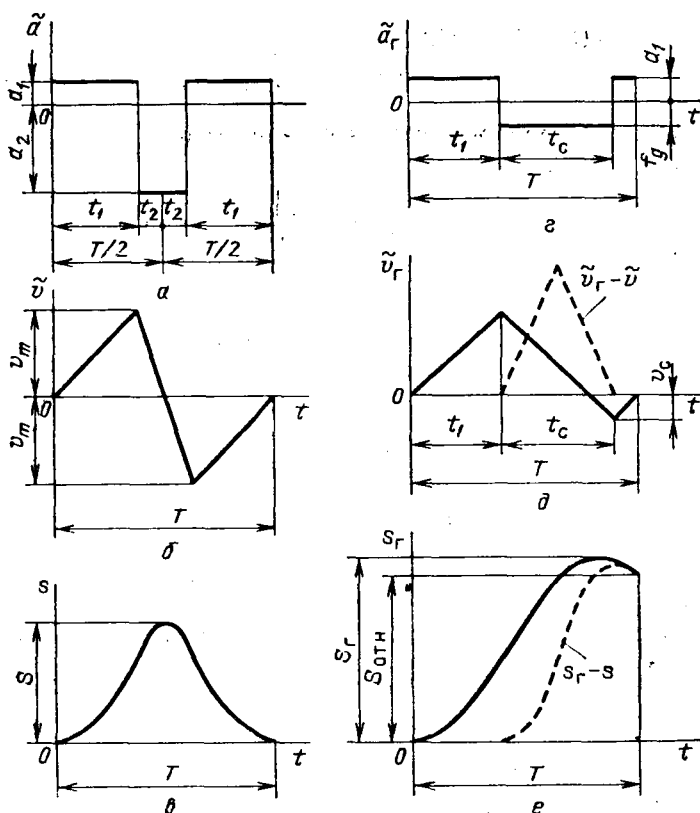


Рис. 109

Интегрирование графика ускорений дает формулы для вычисления скорости рабочего органа (рис. 109, б):

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= a_1 t && \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ \tilde{v} &= a_1 t_1 - a_2 (t - t_1) && \text{при } t_1 \leq t \leq t_1 + 2t_2, \\ \tilde{v} &= a_1 (t - 2t_1 - 2t_2) && \text{при } t_1 + 2t_2 \leq t \leq 2(t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Модуль максимальной скорости рабочего органа

$$v_m = a_1 t_1 = a_2 t_2.$$

Интегрирование графика скоростей дает формулы для вычисления перемещений рабочего органа (рис. 109, в):

$$\begin{aligned} s &= a_1 \frac{t^2}{2} && \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ s &= \frac{a_1 t_1^2}{2} + a_1 t_1 (t - t_1) - a_2 \frac{(t - t_1)^2}{2} && \text{при } t_1 \leq t \leq t_1 + 2t_2, \end{aligned}$$

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{2} - a_1 t_1 (t - t_1 - 2t_2) + a_1 \frac{(t - t_1 - 2t_2)^2}{2}$$

при $t_1 + 2t_2 \leq t \leq 2(t_1 + t_2)$.

Максимальное перемещение рабочего хода (размах) при $t = t_1 + t_2$:

$$S = a_1 t_1 \frac{t_1 + t_2}{2}, \text{ или } S = v_m T/4. \quad (22.2)$$

Отсюда

$$v_m = 4S/T.$$

Размах колебаний S можно выразить только через период колебаний T , ускорение a_1 и коэффициент $k = a_2/a_1$, если подставить в (22.2) выражения для t_1 и t_2 :

$$S = a_1 \frac{T^2}{8} \frac{k}{4+k}. \quad (22.3)$$

На участке разбега прямого хода продолжительностью t_1 груз движется вместе с рабочим органом без проскальзывания, т. е. $a_r = a_1 < fg$ (рис. 109, з). На участке выбега груз скользит относительно рабочего органа, так как модуль его отрицательного ускорения $a_r = fg$ меньше модуля отрицательного ускорения a_2 . Скольжение прекращается, когда по истечении времени t_c скорость груза сравняется по модулю со скоростью рабочего органа $v = v_r = v_0$ (рис. 109, д). Из этого условия получаем

$$-v_m + a_1(t_c - 2t_2) = v_m - fg t_c.$$

Отсюда

$$t_c = \frac{2v_m + 2a_1 t_2}{a_1 + fg} \text{ или } t_c = \frac{a_1 T}{a_1 + fg}.$$

Общая скорость груза и рабочего органа в момент времени $t = t_c$:

$$\tilde{v}_c = \tilde{v}_m - fg \frac{a_1 T}{a_1 + fg} \text{ или } \tilde{v}_c = a_1 \left(t_1 - \frac{fg T}{a_1 + fg} \right).$$

При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$v_c \rightarrow fg t_2 \text{ или } v_c \rightarrow \frac{fg T}{2(1+k)}.$$

Следовательно, с увеличением коэффициента k скорость $\tilde{v}_c$ стремится к нулю.

Скорость скольжения груза относительно рабочего органа на участке $t_1 \leq t \leq t_1 + 2t_2$ определяется из условия

$$v_r - v = v_m - fg(t - t_1) - v_m + a_2(t - t_1) \text{ или } v_r - v = (a_2 - fg)(t - t_1).$$

Аналогично для участка $t_1 + 2t_2 \leq t \leq t_1 + t_0$

$$v_r - v = v_m - fg(t - t_1) + v_m - a_1(t - t_1 - 2t_2)$$

$$\text{или } v_r - v = 2a_1(t_1 + t_2) - (a_1 + fg)(t - t_1).$$

Модуль максимальной скорости скольжения при $t = t_1 + 2t_2$

$$(v_r - v)_{\max} = 2(a_2 - fg)t_2 \quad \text{или} \quad (v_r - v)_{\max} = \frac{a_2 - fg}{1 + k} T.$$

График зависимости скорости скольжения груза от времени показан на рис. 109, *б* штриховой линией. Площадь, заключенная между этим графиком и осью абсцисс, дает перемещение груза относительно рабочего органа за время t_c :

$$S_{\text{отн}} = (v_r - v)_{\max} \frac{t_c}{2} \quad \text{или} \quad S_{\text{отн}} = \frac{a_1(a_2 - fg)}{2(a_1 + fg)(1 + k)} T^2. \quad (22.4)$$

Перемещение $S_{\text{отн}}$ несколько меньше максимального значения перемещения груза S_r вследствие обратного движения груза после обращения в нуль скорости v_r (рис. 109, *е*). При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$S_{\text{отн}} \rightarrow \frac{1}{4} fg T^2 \frac{k - 1}{k + 1}.$$

Разность $S_r - S_{\text{отн}}$ стремится к нулю при увеличении коэффициента k . На рис. 109, *е* штриховыми линиями показан график зависимости относительного перемещения $s_r - s$ от времени.

Отношение $S_{\text{отн}}/S$ с учетом (22.3) имеет вид

$$\frac{S_{\text{отн}}}{S} = \frac{(a_2 - fg)t_2}{(a_1 + fg)T} \frac{8(1 + k)}{k} \quad \text{или} \quad \frac{S_{\text{отн}}}{S} = \frac{a_2 - fg}{a_1 + fg} \frac{4}{k}.$$

При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$\frac{S_{\text{отн}}}{S} \rightarrow 2 \frac{k - 1}{k}.$$

Средняя скорость перемещения груза $v_{\text{ср}} = S_{\text{отн}}/T$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{a_1(a_2 - fg)}{2(a_1 + fg)(1 + k)} T. \quad (22.5)$$

При $a_1 \rightarrow fg$ имеем

$$v_{\text{ср}} \rightarrow \frac{1}{4} fg T \frac{k - 1}{k + 1}.$$

Отсюда следует, что средняя скорость перемещения груза при заданных $a_1 = fg$ и $k = a_2/a_1$ увеличивается с увеличением периода T . Однако при этом согласно (22.3) быстро увеличивается требуемый размах рабочего органа S . Если задаться максимально возможным размахом $S_{\max}$, то из (22.3) при $a_1 = fg$ максимальное значение периода колебаний

$$T_{\max} = 2 \sqrt{\frac{2S_{\max}}{fg} \frac{k + 1}{k}}.$$

Пусть, например, коэффициент трения $f = 0,15$, отношение модулей ускорений $k = a_1/a_2 = 8$, перемещение рабочего органа за цикл $S = 0,1$ м. Ускорение рабочего органа на участке разбега a_1 должно удовлетворять условию $a_1 < fg = 1,47$ м/с. Принимаем $a_1 = 1,2$ м/с. Тогда период колебаний рабочего органа найдется из (22.3):

$$T = \sqrt{\frac{8S}{a_1} \frac{1+k}{k}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,1 \cdot 9}{1,2 \cdot 8}} \approx 0,866 \text{ с.}$$

Относительное перемещение груза по (22.4):

$$S_{\text{отн}} = \frac{1,2(8 \cdot 1,2 - 1,47)}{2(1,2 + 1,47) \cdot 9} 0,866^2 \approx 0,152 \text{ м.}$$

Средняя скорость перемещения груза по (22.5):

$$v_{\text{ср}} = \frac{0,152}{0,866} \approx 0,176 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Частота колебаний в герцах, т. е. число ходов в секунду

$$\nu = \frac{1}{T} \approx 1,16 \text{ Гц.}$$

Для увеличения средней скорости перемещения груза при тех же значениях a_1 и k надо увеличить перемещение рабочего органа S . С этой целью обычно вместо кулачкового механизма используют кулисный механизм с ускоренным обратным ходом. Однако скорость перемещения груза остается небольшой, и для ее увеличения переходят к вибрационным транспортерам с подбрасыванием груза.

§ 80. Вибрационные транспортеры с подбрасыванием груза

Если перемещаемый материал, который условно назовем грузом, допускает подбрасывание с последующим ударом о поверхность рабочего органа, то можно получить большую скорость перемещения груза по сравнению с безударными вибрационными транспортерами. Увеличение скорости перемещения груза в вибрационном транспортере с подбрасыванием груза объясняется тем, что горизонтальное перемещение груза в этих транспортерах происходит при свободном полете груза, в отличие от безударных транспортеров, в которых груз всегда находится в контакте с рабочим органом.

На рис. 110 показана схема вибрационного транспортера, в котором рабочий орган совершает колебания, направленные под углом α к горизонтали, по гармоническому закону

$$s = A \sin \omega t,$$

где A — амплитуда, ω — угловая частота, t — время,

Вертикальная и горизонтальная составляющие движения рабочего органа определяются соотношениями

$$y = A \sin \alpha \sin \omega t, \quad x = A \cos \alpha \sin \omega t. \quad (22.6)$$

Дифференцирование по времени дает:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A\omega \sin \alpha \cos \omega t, & \ddot{y} &= -A\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t, \\ \dot{x} &= A\omega \cos \alpha \cos \omega t, & \ddot{x} &= -A\omega^2 \cos \alpha \sin \omega t. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Рассмотрим сначала вертикальное движение груза после отрыва от рабочего органа, которое происходит в момент времени t_1 , когда вертикальное ускорение $\ddot{y}$ по абсолютной величине становится равным ускорению силы тяжести g :

$$A\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t_1 = g.$$

Основным параметром вибрационного транспортера указанного типа является безразмерный коэффициент режима вибрации

$$k_B = \frac{A\omega^2 \sin \alpha}{g}. \quad (22.8)$$

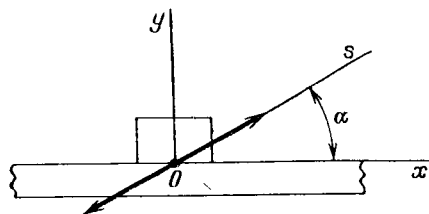


Рис. 110

Этот коэффициент показывает, во сколько раз максимум вертикальной составляющей ускорения рабочего органа $\ddot{y}_{\max}$ больше ускорения силы тяжести. Момент времени t_1 , при котором происходит отрыв груза, связан с коэффициентом режима вибрации соотношением

$$\sin \omega t_1 = 1/k_B. \quad (22.9)$$

Свободный полет груза в вертикальном направлении описывается уравнением

$$y_r = y_0 + \dot{y}_0(t - t_1) - g \frac{(t - t_1)^2}{2}, \quad (23.10)$$

где y_r — вертикальное перемещение груза, y_0 — начальное положение груза в момент отрыва от рабочего органа, $\dot{y}_0$ — начальная скорость груза в этот же момент.

Из соотношений (22.6) и (22.7) получаем

$$y_0 = A \sin \alpha \sin \omega t_1, \quad \dot{y}_0 = A\omega \sin \alpha \cos \omega t_1.$$

Подставляя значения y_0 и $\dot{y}_0$ в уравнение (23.10) и принимая во внимание (22.8) и (22.9), имеем

$$y_r = \frac{g}{\omega^2} + \frac{gk_B \cos \omega t_1}{\omega} (t - t_1) - \frac{g}{2} (t - t_1)^2,$$

Момент времени t_2 падения груза на рабочий орган находим из условия $y = y_r$:

$$A \sin \alpha \sin \omega t_2 = \frac{g}{\omega^2} + \frac{g k_n \cos \omega t_1}{\omega} (t_2 - t_1) - \frac{g}{2} (t_2 - t_1)^2. \quad (22.11)$$

Введем обозначение

$$W = \frac{\omega}{2} (t_2 - t_1). \quad [(22.12)]$$

Тогда условие (22.11) принимает вид

$$A \sin \alpha \sin (2W + \omega t_1) = \frac{g}{\omega^2} + \frac{2W g k_n}{\omega^2} \cos \omega t_1 - \frac{2gW^2}{\omega^2}$$

или

$$\sin (2W + \omega t_1) = \sin \omega t_1 + 2W \cos \omega t_1 - 2W^2 \sin \omega t_1. \quad (22.13)$$

Из квадратного уравнения (22.13) при известном значении ωt_1 находим W и затем t_2 из (22.12). В момент времени t_2 происходит удар, и если нет отскока, груз движется в контакте с рабочим органом до нового отрыва при $t = t_1 + (2\pi/\omega)$. На рис. 111 штриховой линией показан график $y_r(t)$ при $t_2 < t_1 + (2\pi/\omega)$. При $t_2 = t_1 + (2\pi/\omega)$ наблюдается режим непрерывного подбрасывания. Для этого режима $W = \pi$. Подставляя $W = \pi$ в уравнение (22.13), находим значение ωt_1^* , при котором будет режим непрерывного подбрасывания:

$$\begin{aligned} \sin \omega t_1^* &= \sin \omega t_1^* + 2\pi \cos \omega t_1^* - \\ &- 2\pi^2 \sin \omega t_1^* \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \omega t_1^* = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Безразмерный коэффициент режима вибрации при непрерывном подбрасывании

$$k_n^* = \frac{1}{\sin \omega t_1^*} \quad \text{или} \quad k_n^* = \sqrt{\pi^2 + 1} \approx 3,3.$$

В промышленных вибрационных транспортерах обычно принимают: $2 < k_n < 2,8$. Горизонтальная скорость при свободном полете сохраняется постоянной и равной горизонтальной составляющей рабочего органа в момент отрыва груза

$$\tilde{v}_r = A\omega \cos \alpha \cos \omega t_1 \quad \text{или} \quad \tilde{v}_r = A\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{k_n^2 - 1}}{k_n}. \quad (22.14)$$

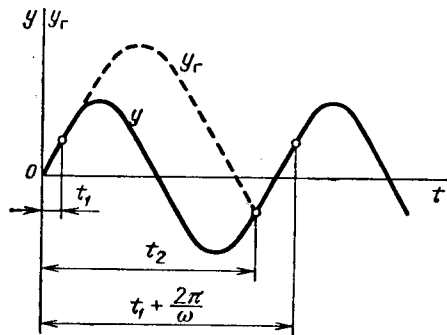


Рис. 111

После удара груз некоторое время находится в контакте с рабочим органом, т. е. горизонтальная составляющая скорости груза $\bar{v}_r = \dot{x}$ согласно соотношениям (22.7). Вследствие относительной кратковременности контакта груза с рабочим органом считают, что горизонтальную скорость груза можно принять постоянной и равной скорости $\bar{v}_r$ с поправочным коэффициентом b , зависящим от вида перемещаемого материала:

$$v = bA\omega \cos \alpha \frac{\sqrt{k_n^2 - 1}}{k_n}.$$

ГЛАВА 23

УРАВНОВЕШИВАНИЕ МАСС В МЕХАНИЗМАХ И МАШИНАХ

§ 81. Уравновешивание роторов

Статистическое уравновешивание вращающихся звеньев. При вращении звена на его опоры действуют динамические реакции, т. е. реакции, зависящие от ускорений (иначе — от сил инерции). Для полного устранения этих реакций необходимо, чтобы главный вектор F_n и главный момент сил инерции M_n были равны нулю в любой момент движения:

$$F_n = 0, \quad (23.1)$$

$$M_n = 0. \quad (23.2)$$

Иногда ограничиваются выполнением только условия (23.1), которое равносильно условию постоянства положения центра масс звена или, что то же, условию расположения центра масс на оси вращения звена. Распределение массы вращающегося звена, переводящее его центр масс на ось вращения, называется *статическим уравновешиванием вращающегося звена*.

Необходимость статического уравновешивания быстро вращающихся звеньев поясним численным примером. Пусть масса звена $m = 10$ кг (сила тяжести ≈ 100 Н), постоянная угловая скорость $\omega = 1000$ рад/с (частота вращения ≈ 9500 об/мин), смещение центра масс от оси вращения $r_s = 0,0001$ м. Тогда модуль силы инерции $F_n = mr_s\omega^2 = 10 \cdot 0,0001 \cdot 1000^2 = 1000$ Н, т. е. даже при малом смещении центра масс сила инерции превосходит силу тяжести в 10 раз. Соответственно возрастут реакции в опорах звена. Кроме того, следует учесть, что в отличие от сил тяжести силы инерции, а следовательно, и динамические реакции имеют переменные направления и могут вызвать нежелательные колебания звеньев.

За меру *статической неуравновешенности*, или *статического дисбаланса*, принимают статический момент масс звена относительно оси вращения $\Delta = mgr_s$. Эту неуравновешенность называют статической, так как ее можно обнаружить статическим испытанием.

С этой целью звено цилиндрической формы устанавливают на два горизонтальных ножа (бруска). Если центр масс расположен на оси цилиндра, то звено будет находиться в равновесии при любом положении, в противном случае оно будет двигаться, пока не займет положения устойчивого равновесия, при котором центр масс имеет наинижнее расположение.

Для статического уравнивания надо в направлении, противоположном центру масс, установить корректирующую массу m_k

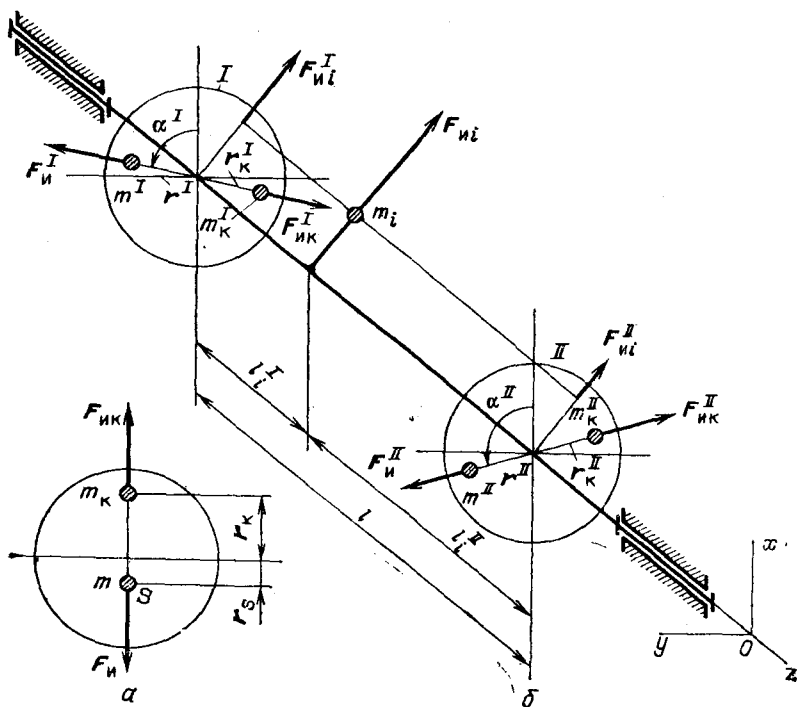


Рис. 112

на расстоянии r_k от оси вращения (рис. 112, а). Если будет выполнено условие

$$m_k r_k = -m r_s, \quad (23.3)$$

то при вращении звена сила инерции корректирующей массы окажется равной и противоположной силе инерции F_n неуравновешенного звена. Результирующая сила инерции при этом условии равна нулю. Условие (23.3) достигается обычно путем проб. Иногда установку корректирующей массы заменяют удалением (например, высверливанием) массы m_k . В этом случае центр удаляемой массы и центр масс звена располагаются по одну сторону от оси вращения.

По условию (23.3) определяют также размеры противовесов, если неуравновешенность звена может быть найдена по чертежу.

Полное уравнивание вращающегося звена. Статического уравнивания достаточно только для звеньев, имеющих малую протяженность вдоль оси вращения (шкивы, маховики и т. п.). Для звеньев другой формы (например, для валов) должны быть выполнены оба условия уравниваемости звена (23.1) и (23.2). В этом случае полностью устраняется давление на стойку от сил инерции. Распределение масс вращающегося звена, устраняющее давление от сил инерции этого звена на стойку, называется *полным уравниванием вращающегося звена*. Если звено считать абсолютно твердым телом, то при этом условии ось вращения совмещается с одной из главных осей инерции.

Покажем, что полное уравнивание можно выполнить установкой корректирующих масс в двух произвольно выбранных плоскостях I и II , называемых *плоскостями коррекции* (рис. 112, б). При равномерном вращении звена с угловой скоростью ω элементарной i -й массе m_i соответствует элементарная сила инерции

$$\mathbf{F}_{ii} = -\mathbf{r}_i \omega^2 m_i,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор элементарной массы m_i . Разложим силу $\mathbf{F}_{ii}$ на две параллельные составляющие в плоскостях коррекции I и II :

$$\mathbf{F}_{ii}^I = \mathbf{F}_{ii}^{II} l / l, \quad \mathbf{F}_{ii}^{II} = \mathbf{F}_{ii}^I l / l$$

и просуммируем эти составляющие для i масс. Тогда получим, что все элементарные силы инерции свелись к двум силам:

$$\mathbf{F}_K^I = \sum_i \mathbf{F}_{ii}^I, \quad \mathbf{F}_K^{II} = \sum_i \mathbf{F}_{ii}^{II},$$

расположенным в плоскостях коррекции под углами α^I и α^{II} к оси x . Эти силы отличаются между собой как по модулю, так и по направлению. Иногда говорят, что они образуют *неуравновешенный крест*, т. е. скрещиваются.

Силы $\mathbf{F}_K^I$ и $\mathbf{F}_K^{II}$ могут быть представлены как силы инерции масс m^I и m^{II} , находящихся на расстояниях $\mathbf{r}^I$ и $\mathbf{r}^{II}$ от оси вращения. Тогда за меру полной неуравновешенности можно принять дисбалансы:

$$\mathbf{D}^I = m^I \mathbf{r}^I, \quad \mathbf{D}^{II} = m^{II} \mathbf{r}^{II},$$

которые отличаются от центробежных сил инерции постоянным множителем, равным квадрату угловой скорости звена.

Корректирующие массы должны быть выбраны так, чтобы их силы инерции $\mathbf{F}_{K}^I$ и $\mathbf{F}_{K}^{II}$ уравнивали силы $\mathbf{F}_K^I$ и $\mathbf{F}_K^{II}$, т. е. были им равны и противоположно направлены. Значения этих масс m_K^I и m_K^{II} выбираются из условий

$$m_K^I \mathbf{r}_K^I = m^I \mathbf{r}^I, \quad m_K^{II} \mathbf{r}_K^{II} = m^{II} \mathbf{r}^{II},$$

а углы их расположения из соотношений

$$\alpha_n^I = \alpha^I + \pi, \quad \alpha_n^{II} = \alpha^{II} + \pi.$$

Установку корректирующих масс можно заменить удалением масс m_n^I и m_n^{II} . Тогда $\alpha_n^I = \alpha^I$ и $\alpha_n^{II} = \alpha^{II}$.

Для некоторых вращающихся звеньев, например, для коленчатых валов двигателей, корректирующие массы выполняют в виде противовесов, размеры которых находят расчетным путем из обычных условий равновесия сил, так как расположение неуравновешенных масс может быть найдено непосредственно по чертежу. Однако в большинстве случаев неуравновешенность вращающегося звена (ротора) может быть найдена только экспериментальным путем на специальных устройствах, называемых *балансировочными станками*.

Балансировка жестких роторов. Все конструкции балансировочных станков подразделяются на станки рамного типа, в которых опоры ротора расположены на общей подвижной раме, и станки с независимыми опорами.

На рис. 113, а показана схема балансировочного станка рамного типа, в котором ось ротора вместе с рамой может колебаться вокруг оси O под действием неуравновешенных масс. Балансируемый ротор устанавливается на раме так, чтобы одна из плоскостей коррекции (например, плоскость II) совпала с плоскостью, содержащей ось колебаний рамы O . Тогда амплитуда колебаний рамы, измеряемая обычно при резонансе, зависит только от дисбаланса в плоскости коррекции I . Вынуждающий момент $\tilde{M}$ равен моменту силы инерции F_n^I относительно оси O :

$$\tilde{M} = m^I r^I l \omega^2 \cos \tilde{\omega} t, \quad (23.4)$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость вращения ротора, l — расстояние между плоскостями коррекции.

Амплитуду вынужденных колебаний рамы A можно считать пропорциональной амплитуде вынуждающего момента

$$A = k m^I r^I l \omega^2, \quad (23.5)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Для определения дисбаланса в плоскости I проводят три испытания с измерением амплитуд вынужденных колебаний рамы. При первом испытании определяется амплитуда A , при втором испытании в плоскости коррекции I устанавливается в произвольном месте корректирующая масса с дисбалансом $m_n r_n$, что соответствует появлению дополнительной силы инерции F_{nk} . Суммарная сила инерции $F_{n1} = F_n^I + F_{nk}$ дает амплитуду A_1 . После измерения этой амплитуды корректирующую массу перемещают на 180° в той же плоскости и при том же значении r_n и проводят третье испытание,

которое дает амплитуду A_2 , соответствующую силе инерции $F_{и2} = F_{иI} - F_{ик}$. На рис. 113, б построены векторы $F_{и1} = F_{иI} + F_{ик}$ и $F_{и2} = F_{иI} - F_{ик}$. Из этого построения следует, что для уравновешивания силы инерции $F_{иI}$ надо повернуть вектор силы инерции

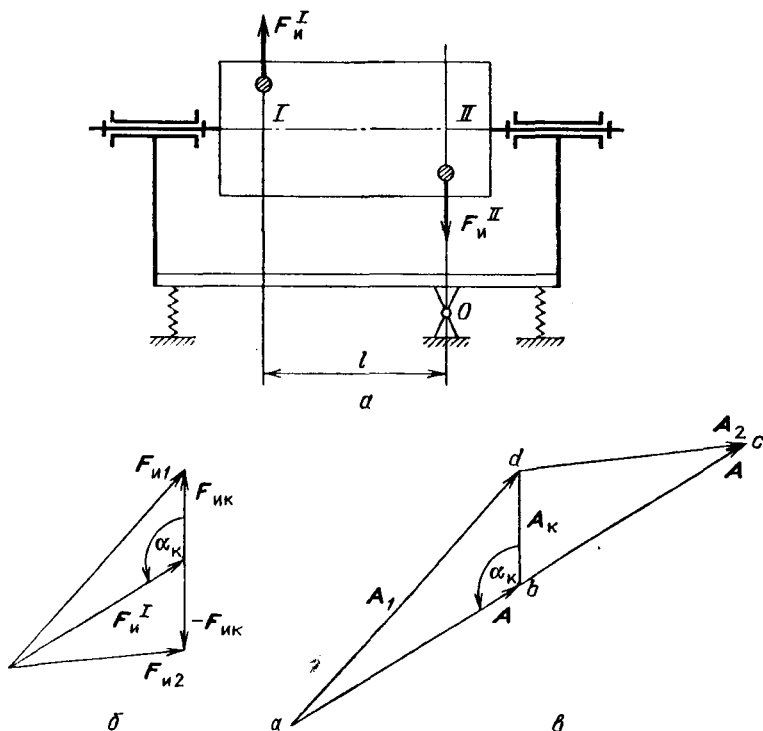


Рис. 113

корректирующей массы на угол α_k против хода часовой стрелки и, кроме того, изменить величину $m_k r_k$ так, чтобы было выполнено условие $F_{ик} = -F_{иI}$.

Учитывая, что для всех указанных сил инерции коэффициент пропорциональности между их модулями и амплитудами один и тот же, можно рассматривать построение на рис. 113, а как геометрическое суммирование амплитуд $A_1 = A + A_k$ и $A_2 = A - A_k$, где A_k — амплитуда силы инерции $F_{ик}$. Это суммирование может быть представлено двумя треугольниками abd и bcd с общей стороной bd (рис. 113, в). Отсюда следует, что для определения неизвестной амплитуды A_k достаточно отложить в произвольном направлении отрезок ac , равный удвоенной амплитуде A , найти точку d из условий $ad = A_1$ и $cd = A_2$ и соединить точку d с точкой b .

Одновременно определяется угол α_k . Для аналитического определения A_k и α_k можно воспользоваться соотношениями

$$A_k = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2 - 2A^2}{2}}, \quad \cos \alpha_k = \frac{A^2 + A_k^2 - A_1^2}{2AA_k}.$$

Следовательно, в плоскости коррекции I надо установить корректирующую массу с дисбалансом $m_k r_k A/A_k$ под углом α_k или $\pi + \alpha_k$ к первоначальному расположению корректирующей массы с дисбалансом $m_k r_k$. Выбор из двух возможных значений этого угла производится на основании пробных испытаний.

Аналогично устраняется дисбаланс в плоскости коррекции II . Необходимо только установить ротор в опорах станка так, чтобы ось качания рамы лежала в плоскости коррекции I .

Необходимость перекалывания ротора в процессе балансировки является недостатком указанной конструкции балансировочного станка. Кроме того, не всегда удастся расположить плоскости коррекции так, чтобы их можно было совместить с осью качания рамы. От этого недостатка избавлены конструкции станков, в которых исключение влияния дисбаланса одной из плоскостей коррекции или, иначе, *операция разделения плоскостей коррекции* выполняется не путем перекалывания ротора, а путем использования соотношений, связывающих амплитуды колебаний опор с дисбалансами в плоскостях коррекции.

Для вывода этих соотношений рассмотрим, например, балансировочный станок, в котором при вращении ротора его ось может

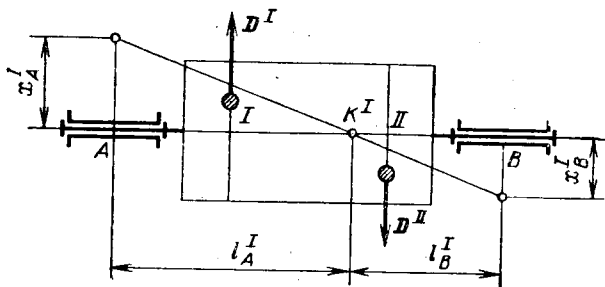


Рис. 114

поворачиваться в горизонтальной плоскости (рис. 114). Если учитывать только действие дисбаланса D^I в плоскости коррекции I , то приближенно можно считать, что колебания ротора происходят вокруг центра качания K^I и отношение амплитуд колебаний подшипников A и B , вызываемых действием дисбаланса D^I , равно постоянной величине

$$\frac{x_B^I}{x_A^I} = \frac{l_B^I}{l_A^I} = \kappa^I. \quad (23.6)$$

Аналогично, если учитывать только действие дисбаланса в плоскости коррекции II , то колебания ротора вокруг центра качания будут происходить с постоянным отношением амплитуд

$$\frac{x_A^{II}}{x_B^{II}} = \kappa^{II}. \quad (23.7)$$

Для линейных колебательных систем справедлив принцип независимости действия сил, и следовательно, перемещение каждой опоры равно сумме перемещений, вызываемых дисбалансами в плоскостях коррекции I и II (принцип суперпозиции). Эти перемещения и их амплитуды надо рассматривать как векторы вследствие того, что дисбалансы D^I и D^{II} в общем случае образуют *неуравновешенный крест*, т. е. скрещиваются. Векторные суммы амплитуд колебаний опор имеют вид

$$x_A = x_A^I + x_A^{II}, \quad x_B = x_B^I + x_B^{II}.$$

Учитывая (23.6) и (23.7) и принимая во внимание, что направления векторов x_A^I и x_B^I , а также векторов x_A^{II} и x_B^{II} противоположны, получаем

$$x_A = x_A^I - \kappa^{II} x_B^{II}, \quad x_B = -\kappa^I x_A^I + x_B^{II}.$$

Из этой системы уравнений находим составляющие амплитуд колебаний в опорах A и B , зависящие соответственно от дисбалансов в плоскостях коррекции I и II :

$$\begin{aligned} x_A^I &= (x_A + \kappa^{II} x_B) / (1 - \kappa^I \kappa^{II}), \\ x_B^{II} &= (\kappa^I x_A + x_B) / (1 - \kappa^I \kappa^{II}). \end{aligned} \quad (23.8)$$

Вектор x_A^I пропорционален силе инерции Γ_n^I и имеет то же направление. Поэтому искомая корректирующая масса в плоскости I определяется соотношением

$$m_{\kappa}^I \Gamma_n^I = k^I x_A^I,$$

где k^I — коэффициент пропорциональности для данного станка. Аналогично для корректирующей массы в плоскости коррекции II

$$m_{\kappa}^{II} \Gamma_n^{II} = k^{II} x_B^{II},$$

где k^{II} — коэффициент пропорциональности.

Автоматическая балансировка. Для автоматического выполнения операций по устранению дисбалансов в плоскостях коррекции используются балансировочные станки, не требующие перекалывания ротора в опорах, например станок, показанный на рис. 114.

Измерительное устройство этого станка состоит из генераторов опорных сигналов, цепи разделения плоскостей коррекции и индикаторов дисбаланса. *Генератор опорного сигнала* преобразует коле-

бания опор или силу давления на опоры в электрический сигнал, дающий сведения о векторе x_A или x_B . *Цепь разделения плоскостей коррекции* преобразует сигналы x_A и x_B в сигналы x_A^I и x_B^I , каждый из которых зависит только от одного дисбаланса. *Индикатор дисбаланса* по значению вектора x_A^I или x_B^I дает сведения о необходимой корректирующей массе и ее расположении.

Исполнительные органы автоматического балансировочного станка действуют по сигналам, поступающим от измерительного устройства, и служат для удаления части материала ротора сверлением или фрезерованием после его остановки или же мгновенной наплавкой материала без остановки ротора (взрыв проволочек в магнитном поле). Без остановки ротора возможно также устранение дисбаланса с помощью лазера, испаряющего часть материала.

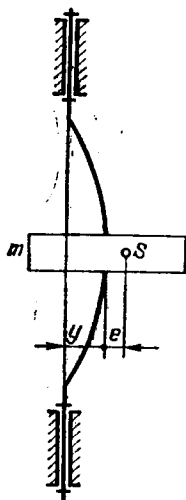


Рис. 115

Гибкие роторы. Если расстояние между опорами ротора значительно больше его диаметра, то при определении допустимых дисбалансов следует принимать во внимание деформации изгиба ротора или его вала. Для установления основных соотношений между деформациями изгиба и дисбалансом рассмотрим простейший случай вертикального вала, на котором укреплен диск массой m (рис. 115). Центр масс S смещен от оси вала на величину e . Массой вала пренебрегаем. При вращении вала с угловой скоростью ω центробежная сила инерции диска вызывает изгиб вала. Обозначим через y прогиб вала в сечении, где укреплен диск. Этот прогиб связан

с модулем силы инерции $F_{\text{и}} = m(e + y)\omega^2$ соотношением

$$y = \delta_1 m (e + y) \omega^2, \quad (23.9)$$

где δ_1 — прогиб от единичной силы в данном сечении. Отсюда

$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{1}{\delta_1 m} - \omega^2}. \quad (23.10)$$

Угловая скорость вала, при которой знаменатель выражения (23.10) обращается в нуль, а следовательно, прогиб $y \rightarrow \infty$, называется *критической угловой скоростью*

$$\omega_{\text{к}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_1 m}}. \quad (23.11)$$

Критическую угловую скорость вращения вала можно рассматривать так же, как собственную частоту системы «вал — диск», а состояние вала при $\omega = \omega_{\text{к}}$ считать резонансным. Если учесть силы сопротивления, то при критической угловой скорости прогиб y

не стремится к бесконечности, а имеет хотя и большую, но конечную величину. Из (23.10) имеем

$$y = \frac{e}{(\omega_k/\omega)^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что при $\omega < \omega_k$ (*докритический* или *дорезонансный режим*) $y > 0$, а при $\omega > \omega_k$ (*закритический* или *зарезонансный режим*) $y < 0$, т. е. в закритическом режиме прогиб y получается отрицательным или, что то же, сдвиг фаз между колебаниями вынуждающей силы и собственными колебаниями равен π . В закритическом режиме прогиб y уменьшается с увеличением угловой скорости ω и при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к смещению e . Центробежная сила инерции в закритическом режиме определяется соотношением

$$F_z = m(e - y)\omega^2,$$

т. е. дисбаланс уменьшается с увеличением угловой скорости.

Вал, работающий при угловой скорости, меньшей критической, принято называть *жестким*, а при угловой скорости, большей критической, — *гибким*. Если на валу укреплено несколько дисков, то колебательная система «вал — диски» имеет несколько степеней свободы, и тогда должно быть несколько критических (резонансных) угловых скоростей. Наименьшая из этих скоростей называется *первой резонансной*. С учетом того, что при балансировке роторов принимается во внимание упругость опор, ГОСТ 19534-70 дает следующее определение жестких и гибких роторов: «К жестким роторам относятся роторы, у которых после балансировки в двух произвольно выбранных плоскостях коррекции на частоте вращения ниже первой резонансной системы «ротор — опоры» значения остаточных дисбалансов в плоскостях опор не превзойдут допустимых значений на эксплуатационных частотах вращения. Все остальные роторы относятся к гибким».

Особенность балансировки гибкого ротора состоит в том, что плоскости коррекции не могут быть выбраны произвольно. По методическим указаниям к ГОСТ 22061-76 можно установить расчетом *оптимальные плоскости коррекции*. Корректирующие массы, установленные в оптимальных плоскостях коррекции, вызывают в теле ротора минимальные изгибающие моменты и позволяют при балансировке на частоте вращения ниже первой резонансной сохранить достигнутую уравновешенность в широком диапазоне частот вращения.

§ 82. Уравновешивание масс механизма

Условия уравновешивания масс механизма. *Уравновешенным механизмом* называется механизм, для которого главный вектор и главный момент сил давления стойки на фундамент (или опоры стойки) остаются постоянными при заданном движении начальных

звеньев. Цель уравнивания механизмов — устранение переменных воздействий на фундамент, вызывающих нежелательные колебания как самого фундамента, так и здания, в котором он находится. Транспортные машины не имеют фундамента, но они также должны быть уравновешены во избежание колебаний звеньев механизма, возникающих вследствие переменного воздействия на стойку со стороны ее опоры (дороги, грунта, пола и т. п.).

Обозначим: F_ϕ и M_ϕ — главный вектор и главный момент сил давления фундамента на стойку, F и M — главный вектор и главный момент всех других сил, внешних по отношению к механизму, F_π и M_π — главный вектор и главный момент сил инерции звеньев механизма. Тогда для механизма в целом имеем

$$F + F_\pi + F_\phi = 0, \quad M + M_\pi + M_\phi = 0.$$

Отсюда условия уравнивания механизма, т. е. условия постоянства F_ϕ и M_ϕ , принимают вид

$$F + F_\pi = \text{const}, \quad (23.12)$$

$$M + M_\pi = \text{const}. \quad (23.13)$$

Удовлетворить этим условиям путем распределения масс звеньев или путем введения дополнительных внешних сил удастся только в очень редких случаях. Обычно для обеспечения приблизительно постоянства F_ϕ и M_ϕ принимают частные условия:

$$F_\pi = 0, \quad (23.14)$$

$$M_\pi = 0, \quad (23.15)$$

которым можно удовлетворить подбором масс звеньев и установкой противовесов. Эти условия равносильны условиям (23.12) и (23.13) при постоянных F и M .

Распределение масс звеньев, устраняющее давление стойки на фундамент (или опору стойки) от сил инерции звеньев механизма, называется *уравниванием масс механизма*.

Статическое уравнивание масс плоских механизмов по методу заменяющих масс. При уравнивании масс плоских механизмов часто ограничиваются выполнением условия (23.14), при котором равен нулю только главный вектор сил инерции звеньев механизма. Это условие равносильно требованию постоянства положения центра масс звеньев механизма относительно стойки. Распределение масс звеньев механизма, переводящее его центр масс в точку, неподвижную относительно стойки, называется *статическим уравниванием масс механизма*.

Наиболее наглядное и простое решение задачи статического уравнивания масс плоских механизмов получается по методу заменяющих масс. В плоском движении системой заменяющих масс называется система сосредоточенных масс $m_1, \dots, m_n$, которая об-

ладает той же массой m , тем же расположением центра масс и тем же моментом инерции, что и заменяемое твердое тело. Свяжем со звеном систему координат Sxy , поместив ее начало в центр масс звена. Тогда для четырех заменяющих масс имеем

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= m, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 &= 0, \end{aligned} \quad (23.16)$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4 = 0;$$

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + m_3(x_3^2 + y_3^2) + m_4(x_4^2 + y_4^2) = J_S. \quad (23.17)$$

Если выполнены условия (23.16), то размещение заменяющих масс называют *статическим*; если дополнительно выполнено и условие (23.17) — *динамическим*. При статическом размещении масс главный вектор сил инерции заменяющей системы равен главному вектору сил инерции звена. При динамическом размещении равны также и главные моменты сил инерции.

Статическое уравнивание масс шарнирного четырехзвенника по методу заменяющих масс. В частных случаях число заменяющих масс может быть меньше четырех. Например, статическое размещение можно выполнить по двум точкам, лежащим на одной прямой с центром масс. При расположении центра масс между массами m_1 и m_2 из уравнений (23.16) получаем

$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1l_1 - m_2l_2 = 0.$$

Отсюда

$$m_1 = m \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad m_2 = m \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Воспользуемся этими формулами для статического уравнивания шарнирного четырехзвенника $ABCD$, у которого центры масс звеньев S_1 , S_2 и S_3 лежат на линиях, соединяющих центры шарниров (рис. 116). Массу звена 1 заменим двумя массами, сосредоточенными в точках A и B , причем для решения задачи надо определить только массу, сосредоточенную в точке B :

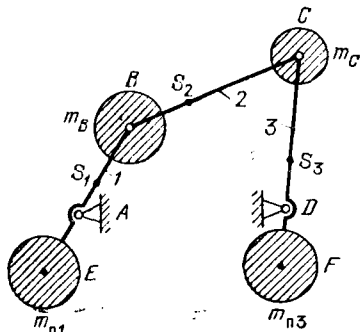


Рис. 116

$$m_{B1} = m_1 l_{AS_1} / l_{AB}.$$

Аналогично заменяем массу звена 3 массами, сосредоточенными в точках C и D , и определяем массу, сосредоточенную в точке C :

$$m_{C3} = m_3 l_{DS_3} / l_{CD}.$$

Массу m_2 звена 2 заменяем массами, сосредоточенными в точках B и C :

$$m_{B2} = m_2 l_{CS_2} / l_{BC}, \quad m_{C2} = m_2 l_{BS_2} / l_{BC}.$$

В результате замены получаем только две подвижные массы, сосредоточенные в точках B и C : $m_B = m_{B1} + m_{B2}$, $m_C = m_{C3} + m_{C2}$. Чтобы уравновесить силы инерции заменяющих масс m_B и m_C , достаточно установить на звеньях 1 и 3 противовесы с массами $m_{п1}$ и $m_{п3}$, удовлетворяющие условиям:

$$m_{п1} l_{AE} = m_B l_{AB}, \quad (23.18)$$

$$m_{п3} l_{DF} = m_C l_{CD}, \quad (23.19)$$

где l_{AE} и l_{DF} — расстояния от центров A и D до центров масс противовесов E и F .

Статическое уравнивание шарнирного четырехзвенника по методу главных векторов. Метод главных векторов основан на использовании формулы для определения положения центра масс подвижных звеньев механизма. Для механизма шарнирного четырехзвенника эта формула имеет вид

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2} + m_3 \mathbf{r}_{S3}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (23.20)$$

где m_1, m_2, m_3 — массы звеньев 1, 2, 3; $\mathbf{r}_{S1}, \mathbf{r}_{S2}, \mathbf{r}_{S3}$ — радиусы-векторы центров масс, которые можно выразить через векторы, имеющие направления отрезков, изображающих звенья механизма:

$$\mathbf{r}_{S1} = l_{AS_1}, \quad \mathbf{r}_{S2} = l_{AB} + l_{BS_2}, \quad \mathbf{r}_{S3} = l_{AB} + l_{BC} + l_{CS_3}.$$

После подстановки этих выражений в формулу (23.20) и группировки членов получаем

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3, \quad (23.21)$$

где векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ и $\mathbf{h}_3$, называемые *главными векторами звеньев*, определяются по соотношениям

$$\mathbf{h}_1 = \frac{m_1 l_{AS_1} + (m_2 + m_3) l_{AB}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{m_2 l_{BS_2} + m_3 l_{BC}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mathbf{h}_3 = \frac{m_3 l_{CS_3}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Условие неподвижности общего центра масс подвижных звеньев механизма, необходимое для статического уравнивания механизма, выполняется, если четырехугольник, образованный векторами $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ и $\mathbf{r}_S$, подобен четырехугольнику $ABCD$ (рис. 117). Из условия подобия имеем

$$\frac{h_1}{l_{AB}} = \frac{h_2}{l_{BC}} = \frac{h_3}{l_{CD}}. \quad (23.22)$$

Модули главных векторов при указанном на рис. 117 расположении противовесов определяются по соотношениям

$$h_1 = \frac{1}{m} [m_1 l_{AS_1} - m_{п1} l_{AE} + (m_2 + m_3 + m_{п3}) l_{AB}],$$

$$h_2 = \frac{1}{m} [m_2 l_{BS_2} + (m_3 + m_{п3}) l_{BC}],$$

$$h_3 = \frac{1}{m} (m_3 l_{CS_3} + m_{п3} l_{CF}),$$

где $m = m_1 + m_{п1} + m_2 + m_3 + m_{п3}$.

Подстановка h_1 и h_2 в первое из уравнений (23.22) дает условие для определения массы противовеса $m_{п1}$ и расстояния l_{AE} :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} - m_{п1} \frac{l_{AE}}{l_{AB}} + m_2 + m_3 + m_{п3} = \\ = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3 + m_{п3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$m_{п1} l_{AE} = \left(m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \frac{l_{CS_2}}{l_{EC}} \right) l_{AB}.$$

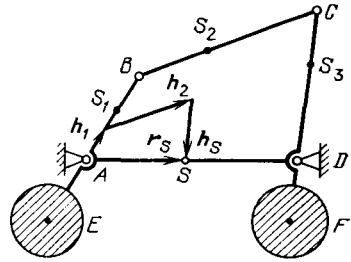


Рис. 117

Это условие совпадает с условием (23.18), полученным по методу заменяющих масс.

Подстановка h_2 и h_3 во второе уравнение (23.22) дает условие для определения массы противовеса $m_{п3}$ и расстояния l_{DF} :

$$m_2 \frac{l_{FS_2}}{l_{BC}} + m_3 + m_{п3} = m_3 \frac{l_{CS_3}}{l_{CD}} + m_{п3} \frac{l_{CF}}{l_{CD}}.$$

Отсюда

$$m_{п3} l_{DF} = \left(m_3 \frac{l_{DS_3}}{l_{CD}} + m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} \right) l_{CD}.$$

Это условие совпадает с условием (23.19), полученным по методу заменяющих масс.

Уравновешивание вертикальной составляющей суммарной силы инерции кривошипно-ползунного механизма. В некоторых случаях уравновешивание масс механизма приводит к неконструктивному расположению противовесов. Например, для статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма необходимо поставить противовесы не только на кривошип, но и на шатун. Если ограничиться одним противовесом, установленным на кривошипе (рис. 118, а), то возникает задача о приближенном статическом уравновешивании масс механизма, которую можно решить статическим размещением масс звеньев в точках В и С. Массу, сосредоточенную в точке А, как неподвижную не учитываем. В точке В

сосредоточена масса m_B , получающаяся от размещения масс кривошипа и шатуна:

$$m_B = m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \frac{l_{CS_2}}{l_{BC}}.$$

В точке C сосредоточена масса m_C , равная сумме массы ползуна и части массы шатуна:

$$m_C = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3.$$

Сила инерции массы m_B полностью уравновешивается противовесом с центром масс в точке E при выполнении условия

$$m_B l_{AB} = m_E l_{AE}.$$

Остается неуравновешенной только сила инерции от массы m_C , которая направлена вдоль движения шатуна. В некоторых случаях эта сила не оказывает вредных влияний на фундамент, и тогда частичное уравновешивание допустимо. Если же требуется уменьшить

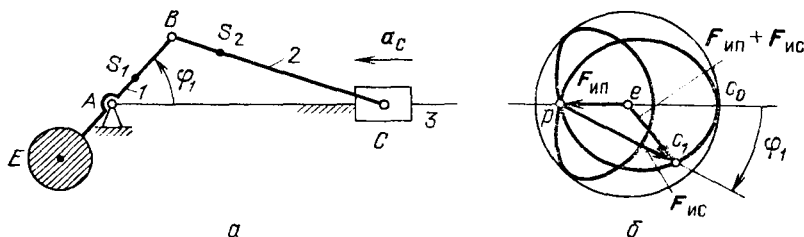


Рис. 118

воздействие силы инерции от массы m_C , то масса противовеса с центром масс в точке E кривошипа увеличивается на величину m_{n2} , определяемую из условий получения наименьшей величины неуравновешенной силы инерции.

Приближенное уравновешивание силы инерции ползуна кривошипно-ползунного механизма. Для решения поставленной задачи естественно применить наилучшее приближение функций, т. е. такое приближение, при котором максимальное отклонение приближающей функции от заданной имеет минимально возможную величину. В рассматриваемой задаче заданной функцией является сила инерции массы m_C , а приближающей — сила инерции противовеса m_{n2} . Условия наилучшего приближения будут выполнены, если отклонение от заданной функции максимальное число раз достигает своих предельных значений с последовательно чередующимися знаками.

Сначала построим годограф силы инерции $F_{ис}$ массы m_C в системе координат, связанной с кривошипом (рис. 118, б). Годограф

строим по методу обращения движения, при котором всем звеньям механизма, включая и стойку, сообщается вращение вокруг центра A с угловой скоростью, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа. В обращенном движении кривошип неподвижен, а ползун вместе с направляющими вращается вокруг центра A в сторону, противоположную направлению вращения кривошипа.

Выберем точку p за начало годографа и отложим из нее отрезок pc_0 в направлении, противоположном направлению ускорения точки C . Тогда масштабный коэффициент годографа $\mu_F = m_C a_{C_0} / (pc_0)$, где a_{C_0} — модуль ускорения точки C при $\varphi = 0$. Затем проводим из точки p луч под углом $\varphi = \varphi_1$ к направлению движения ползуна, откладывая этот угол в направлении, противоположном вращению кривошипа. На этом луче откладываем вектор силы инерции $F_{ис}$, соответствующий углу φ , и получаем точку c_1 годографа и т. д.

Вектор искомой силы инерции противовеса $F_{ип}$ с массой $m_{п2}$ изобразится постоянным по величине отрезком (ep) . Положение точки e должно быть выбрано из условий наилучшего приближения. Эти условия выполняются, если выбрать точку e в центре окружности, в которую вписан годограф, так как в этом случае оставшаяся неуравновешенность $F_{ис} + F_{ип}$, изображаемая отрезком (ec_1) , максимальное число раз (три раза) достигает своих предельных значений. Измерив отрезок (ep) , получим $F_{ип} = \mu_F(ep)$.

Отсюда

$$m_{п2} l_{AE} \omega^2 = m_C a_{C_0} \frac{(ep)}{(pc_0)}, \text{ или } m_{п2} l_{AE} = m_C \frac{a_{C_0}}{\omega^2} \frac{(ep)}{(pc_0)}.$$

Можно решить эту задачу и по методу квадратического приближения функций. Тогда точка e должна быть выбрана в центре тяжести годографа, который рассматривается как кривая, представляющая систему точек с равными массами.

ГЛАВА 24

УРАВНОВЕШИВАНИЕ СИЛ В МЕХАНИЗМАХ

§ 83. Уравновешивание сил на входном звене

Уравновешивающие кулачковые механизмы. Цель уравновешивания сил на входном звене, совершающем обычно вращательное движение, — выравнивание момента сил на валу двигателя. Это выравнивание достигается посредством аккумуляирования избыточной энергии механизма, равной разности (по модулю) работ сил движущих и сил сопротивления, с последующей отдачей накопленной энергии механизму. В качестве рабочего тела, способного аккумулялировать и отдавать энергию, применяются пружины (рис. 119, a), реже сжатый воздух, действующий на поршень пневмодцилиндра

(рис. 119, б). Накопление и отдача энергии в пружине или пневмоцилиндре должны происходить по программе, предусматривающей полное или частичное выравнивание приведенного движущего момента. В качестве программноносителя используют кулачок, который профилируется по требуемому закону изменения силы, создаваемой

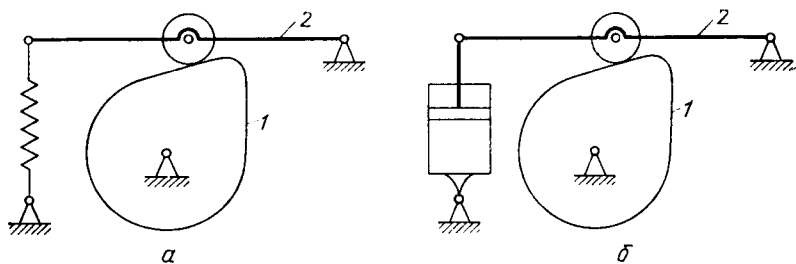


Рис. 119

пружиной или сжатым воздухом в пневмоцилиндре. Кулачок 1, жестко соединенный с входным звеном механизма (или группы механизмов), коромысло 2 с действующей на него пружиной (или пневмоцилиндром) и стойка О образуют *уравновешивающий кулачковый механизм*.

Условие уравновешивания сил при кулачке-программоносителе, установленном на входном звене. Дифференциальное уравнение движения механизма при вращающемся входном звене, жестко соединенном с валом двигателя, имеет вид

$$J_{\pi} \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{\pi}}{d\varphi} = \widetilde{M}_д - M_c, \quad (24.1)$$

где φ — угол поворота входного звена, J_{π} — приведенный к этому звену момент инерции, $\widetilde{M}_д$ — момент сил на валу двигателя, M_c — модуль приведенного момента сил сопротивления.

Уравновешивание сил рассмотрим при установившемся движении на участке от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$. Тогда момент $\widetilde{M}_д$ можно представить как сумму среднего значения $M_{ср}$ и переменного приращения ΔM :

$$\widetilde{M}_д = M_{ср} + \Delta M, \quad (24.2)$$

где

$$M_{ср} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_c d\varphi. \quad (24.3)$$

Кроме того, будем считать, что угловая скорость вала двигателя $\dot{\varphi}$ при изменении приведенного момента сил сопротивления остается постоянной (двигатель неограниченной мощности). В этом

случае уравнение движения (24.1) с учетом (24.2) принимает вид

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} = M_{\text{ср}} + \Delta\tilde{M} - M_{\text{с}}. \quad (24.4)$$

Для того чтобы момент на валу двигателя $\tilde{M}_{\text{д}}$ имел постоянное значение, равное $M_{\text{ср}}$, необходимо выполнить условие

$$\tilde{M}_{\text{н}} = \Delta\tilde{M} \text{ или } \tilde{M}_{\text{н}} = \tilde{M}_{\text{д}} - M_{\text{ср}}, \quad (24.5)$$

где $\tilde{M}_{\text{н}}$ — приведенный момент сил упругости пружинного или пневматического нагружателя (*корректирующий момент*). Другими словами, переменная составляющая момента $\Delta\tilde{M}$, необходимая для поддержания постоянства угловой скорости $\dot{\varphi}$, должна создаваться не двигателем, а действием пружинного или пневматического нагружателя.

Из (24.4) при условии (24.5) имеем

$$\tilde{M}_{\text{н}} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_{\Pi}}{d\varphi} + M_{\text{с}} - M_{\text{ср}}. \quad (24.6)$$

Определение требуемого закона изменения деформации пружины. На рис. 120 показана характеристика пружины растяжения. Сила упругости пружины $F_{\text{пр}}$ связана с деформацией x , отсчитываемой от начального положения, линейной зависимостью

$$F_{\text{пр}} = c(b + x), \quad (24.7)$$

где c — коэффициент жесткости, b — монтажная деформация, т. е. постоянная величина, численно равная отношению силы упругости пружины в начальном положении F_{min} к коэффициенту жесткости c . Максимальное значение силы пружины F_{max} при деформации x_{max} должно быть не больше предельного значения $F_{\text{пред}}$, допускаемого по условиям прочности.

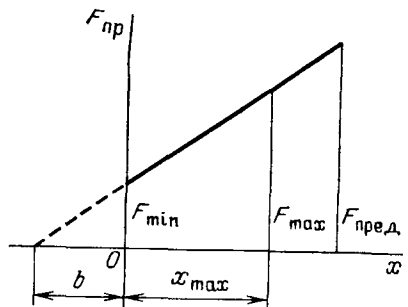


Рис. 120

Элементарная работа корректирующего момента $\tilde{M}_{\text{н}}$ равна элементарной работе силы упругости пружины

$$\tilde{M}_{\text{н}} d\varphi = F_{\text{пр}} dx, \quad (24.8)$$

где $F_{\text{пр}}$ имеет знак минус в режиме накопления потенциальной энергии пружины и знак плюс в режиме отдачи накопленной энергии.

Из соотношения (24.8) после интегрирования можно получить зависимость $x(\varphi)$, при которой выполняется заданная программа изменения корректирующего момента $\tilde{M}_{\text{н}}$. Пусть, например, при установившемся движении момент $\tilde{M}_{\text{д}}$ до введения корректирующе-

го момента $\tilde{M}_\kappa$ представлен функцией, показанной на рис. 121, а:

$$\tilde{M}_\kappa(\varphi) = M_c + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ_\Pi}{d\varphi}.$$

Корректирующий момент $\tilde{M}_\kappa = \tilde{M}_\Delta - M_c$, где M_c — среднее значение момента $\tilde{M}_\Delta$, имеет знак минус на участке $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$, что соответствует режиму накопления потенциальной энергии пружины (рис. 121, б). На участке $\varphi_m \leq \varphi \leq 2\pi$ корректирующий момент $\tilde{M}_\kappa$ положителен и происходит отдача накопленной энергии.

Интегрирование соотношения (24.8) на участке накопления потенциальной энергии приводит к равенству

$$\int_0^{\varphi} \tilde{M}_\kappa d\varphi = - \int_0^x c(b+x) dx$$

$$\text{или } A_\Pi = \frac{c}{2} (2bx + x^2),$$

где

$$A_\Pi = - \int_0^{\varphi} \tilde{M}_\kappa d\varphi. \quad (24.9)$$

Отсюда

$$x = -b + \sqrt{b^2 + \frac{2}{c} A_\Pi}. \quad (24.10)$$

Максимальное значение накопленной потенциальной энергии $A_{\max}$ получается при $x = x_{\max}$:

$$A_{\max} = \frac{c}{2} (2bx_{\max} + x_{\max}^2),$$

где

$$A_{\max} = - \int_0^{\varphi_m} \tilde{M}_\kappa d\varphi. \quad (24.11)$$

Отсюда следует условие для выбора коэффициента жесткости

$$c = \frac{2A_{\max}}{2bx_{\max} + x_{\max}^2}. \quad (24.12)$$

Подстановка условия (24.12) в (24.10) дает формулу для вычисления перемещений x конца пружины на участке накопления потенциальной энергии (рис. 121, в):

$$x = -b + \sqrt{b^2 + (2bx_{\max} + x_{\max}^2) \frac{A_\Pi}{A_{\max}}}. \quad (24.13)$$

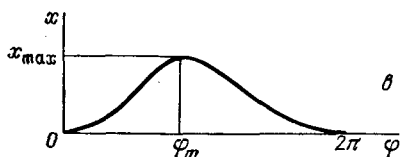
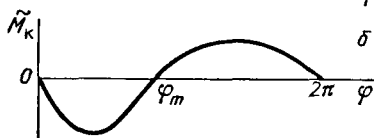
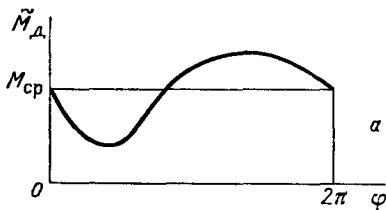


Рис. 121

Для участка отдачи потенциальной энергии имеем

$$\int_{\varphi_m}^{\varphi} \tilde{M}_k d\varphi = \int_x^{x_{\max}} c(b+x) dx \text{ или } A_0 = cbx_{\max} + \frac{cx_{\max}^2}{2} - cbx - \frac{cx^2}{2},$$

где

$$A_0 = \int_{\varphi_m}^{\varphi} \tilde{M}_k d\varphi. \quad (24.14)$$

Отсюда

$$x = -b + \sqrt{(b+x_{\max})^2 - \frac{2}{c} A_0}. \quad (24.15)$$

По условию установившегося движения максимальное значение отдаваемой потенциальной энергии равно $A_{\max}$, определяемому по (24.11), и следовательно, коэффициент жесткости c находится по (24.12). Подставляя это значение c в (24.15), получаем формулу для вычисления перемещений x конца пружины на участке отдачи потенциальной энергии

$$x = -b + \sqrt{(b+x_{\max})^2 - (2bx_{\max} + x_{\max}^2) \frac{A_0}{A_{\max}}}. \quad (24.16)$$

Если требуемый корректирующий момент M_k за время цикла установившегося движения имеет более двух экстремумов, то указанная процедура вычисления переменной x повторяется для каждой пары соседних участков накопления и отдачи потенциальной энергии, причем коэффициент жесткости c определяется по наибольшему $A_{\max}$.

Определение профиля кулачка. Для кулачково-коромыслового механизма, показанного на рис. 119, после вычисления перемещений x по формулам (24.13) и (24.16) определяются углы поворота коромысла 2 и затем профиль кулачка 1, как указано в § 106.

При выборе начального радиуса кулачка следует иметь в виду, что на участке отдачи накопленной потенциальной энергии коромысло кулачкового механизма является ведущим звеном и угол давления на кулачок увеличивается с увеличением начального радиуса. Кроме того, при $M_k = 0$ нормаль к профилю кулачка проходит через центр вращения кулачка и угол давления на кулачок равен 90° . Вблизи этого положения кулачка на участке отдачи накопленной энергии располагается нерабочая зона (зона самоторможения), в которой движение кулачка возможно только при увеличении момента на валу двигателя сверх его среднего значения $M_{ср}$.

§ 84. Уравновешивание сил на выходном звене

Уравновешивание сил на выходном звене при кулачковом разгрузателе. Цель уравновешивания сил на выходном звене, совершающем обычно возвратное движение,— выравнивание сил, действующих на выходное звено со стороны смежных звеньев. Это выравнивание уменьшает максимальные значения реакций в кинематических парах, и потому устройства для выравнивания сил, действующих на выходное звено, называют также *разгружающими устройствами*, или *разгрузателями*. Их действие основано на аккумуляции избыточной энергии механизма в пружине или пневмоцилиндре с последующей отдачей накопленной энергии механизму. На рис. 122 показана схема кулачкового разгрузателя, в котором кулачок-программоноситель 1, установленный на выходном звене, взаимодействует с пружиной 3 через коромысло 2 и

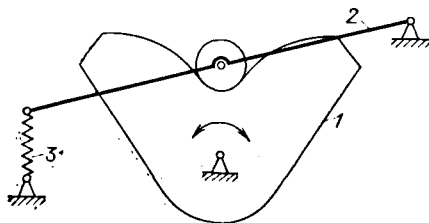


Рис. 122

создает корректирующий момент, необходимый для выравнивания сил, действующих на выходное звено. Смена знака корректирующего момента при переходе от накопления энергии к ее отдаче (или наоборот) происходит в положении, когда нормаль к профилю кулачка проходит через центр вращения кулачка. При возвратно-вращательном движении кулачка-программоносителя один и тот же профиль используется как для рабочего, так и для холостого ходов. Отсюда следует, что для полного выравнивания необходимо совпадение значений всех сил (включая и силы инерции) при одном и том же значении угла поворота выходного звена как на рабочем, так и на холостом ходу. В других случаях можно получить только приближенное выравнивание.

Пусть, например, выходное звено механизма совершает возвратно-вращательное движение. Тогда условие кинетостатического равновесия этого звена имеет вид

$$\dot{M}_д - M_c - J\ddot{\varphi} = 0, \quad (24.17)$$

где φ — угол поворота выходного звена, $\dot{M}_д$ — результирующий момент сил, действующих на выходное звено со стороны смежных звеньев (движущий момент), M_c — модуль момента внешних (по отношению к механизму) сил сопротивления, действующих на выходное звено, J — момент инерции выходного звена относительно оси вращения.

Закон изменения углового ускорения $\ddot{\varphi}$ от времени будем считать заданным. Обычно он определяется в предположении, что угловая скорость входного звена постоянна. Кроме того, считаем, что

выходное звено не имеет выстоев в крайних положениях и цикл его движения состоит из участка рабочего хода продолжительностью T_p и участка холостого хода продолжительностью T_x . Модули моментов сил сопротивления для этих участков соответственно обозначим через M_p и M_x , а средние их значения на угле поворота выходного звена $\psi_{\max}$ через $\bar{M}_p$ и $\bar{M}_x$:

$$\bar{M}_p = \frac{1}{\psi_{\max}} \int_0^{\psi_{\max}} M_p d\psi, \quad \bar{M}_x = \frac{1}{\psi_{\max}} \int_0^{\psi_{\max}} M_x d\psi.$$

Тогда момент $\bar{M}_d$ можно представить как сумму среднего значения $\bar{M}_p$ (или $\bar{M}_x$) и переменного приращения $\Delta\bar{M}_p$ (или $\Delta\bar{M}_x$), и условие кинестатического равновесия (24.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{M}_p + \Delta\bar{M}_p - M_p - J\ddot{\varphi} &= 0, \\ \bar{M}_x + \Delta\bar{M}_x - M_x - J\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (24.18)$$

Для того чтобы момент $\bar{M}_d$ имел постоянное значение $\bar{M}_p$ на участке рабочего хода (или $\bar{M}_x$ на участке холостого хода), необходимо приложить к выходному звену корректирующий момент $\Delta\bar{M}_{kp}$ (или $\Delta\bar{M}_{kx}$), равный переменной составляющей $\Delta\bar{M}_p$ (или $\Delta\bar{M}_x$). При этом условии из уравнений (24.18) получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{kp} &= J\ddot{\varphi} + M_p - \bar{M}_p, \\ \widetilde{M}_{kx} &= J\ddot{\varphi} + M_x - \bar{M}_x. \end{aligned} \quad (24.19)$$

Если $\bar{M}_{kp} \neq \bar{M}_{kx}$, то полное уравновешивание момента невозможно и возникает задача приближенного уравновешивания с применением одного из методов приближения функций. Обычно используется соотношение

$$\widetilde{M}_k = \frac{1}{2} (\widetilde{M}_{kp} + \widetilde{M}_{kx}), \quad (24.20)$$

которое при симметричных законах изменения $\widetilde{M}_{kp}$ и $\widetilde{M}_{kx}$ дает равномерное приближение.

После определения корректирующего момента $\widetilde{M}_k$ требуемые перемещения x конца пружины и вычисление координат профиля кулачка производятся в том же порядке, как и при кулачке-программонosite, установленном на входном звене.

Уравновешивание сил на вращающемся выходном звене при пружинном разгрузателе. Конструкция разгрузателя значительно упрощается, если исключить кулачок, присоединяя пружину непосредственно к выходному звену (рис. 123). При возвратно-вращательном движении выходного звена смена знака корректирующего момента при переходе от накопления энергии к ее отдаче (или наоборот) происходит в положении, когда направление силы упругости пружины проходит через центр вращения выходного звена.

В этом случае корректирующий момент $\bar{M}_k$, создаваемый силой упругости пружины $F_{пр}$, найдется по условию

$$\bar{M}_k = F_{пр} h, \quad (24.21)$$

где плечо h определяется из $\triangle OAB$:

$$h = \frac{rd \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}}.$$

Перемещение конца пружины x отсчитывается от начального положения, при котором точка B_0 располагается на линии AO и корректирующий момент равен нулю:

$$x = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi} - d + r. \quad (24.22)$$

Модуль силы упругости пружины определяется по условию $F_{пр} = c(b + x)$, где b — монтажная деформация, равная отношению силы пружины в начальном положении к коэффициенту жесткости c . Следовательно, корректирующий момент $\bar{M}_k$ по (24.21)

$$\bar{M}_k = \frac{c(b + x) rd \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}}$$

или с учетом (24.22)

$$\bar{M}_k = \frac{c(b - d + r) rd \sin \varphi}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}} + crd \sin \varphi, \quad (24.23)$$

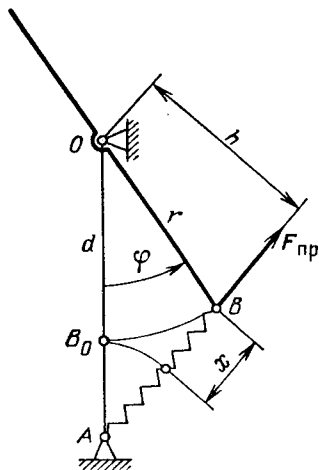


Рис. 123

т. е. корректирующий момент $\bar{M}_k$ есть нелинейная функция угла φ . Для полного уравновешивания (выравнивания) момента $\bar{M}_d$, действующего на выходное звено со стороны смежных звеньев, необходимо выполнение условий (24.19), которым в общем случае можно удовлетворить только приближенно. Обозначим через $\bar{M}_{ост}$

разность между корректирующим моментом, необходимым для полного уравновешивания по условиям (24.19), и корректирующим моментом $\bar{M}_k$ (24.23), который может быть воспроизведен пружинным разгрузателем. Тогда из условий (24.19) имеем

$$\bar{M}_{ост} = J\ddot{\varphi} + M_c - \bar{M}_c - \bar{M}_k, \quad (24.24)$$

где модуль момента сил сопротивления M_c и его среднее значение $\bar{M}_c$ равны соответственно для рабочего хода M_p , $\bar{M}_p$ и M_x , $\bar{M}_x$ — для холостого хода.

Параметры пружинного разгрузателя, входящие в (24.23), должны быть выбраны так, чтобы функция $\bar{M}_{ост}$ наименее отклонялась от нуля как на рабочем, так и на холостом ходах. Это условие

достигается применением одного из видов приближения функций (интерполирование, квадратическое приближение, наилучшее приближение).

Уравновешивание сил на прямолинейно движущемся выходном звене при пружинном разгрузателе. Для выходного звена, совершающего прямолинейное движение (рис. 124, а), корректирующая сила F_k должна изменять свой знак при переходе от участка

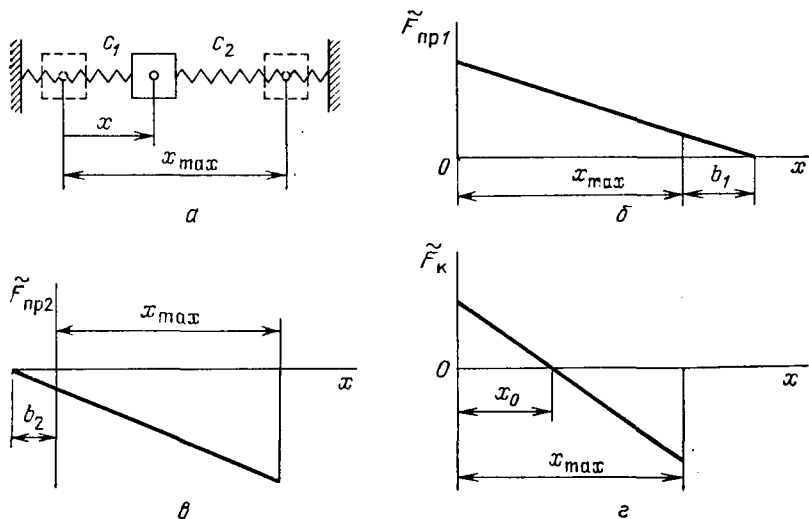


Рис. 124

разбега выходного звена к участку выбега. Это условие выполняется посредством установки двух пружин сжатия 1 и 2. Сила упругости пружины 1 (рис. 124, б) $F_{\text{пр1}} = c_1(b_1 + x_{\text{max}} - x)$. Сила упругости пружины 2 (рис. 124, в) $F_{\text{пр2}} = -c_2(b_2 + x)$. Сумма этих сил дает корректирующую силу (рис. 124, г):

$$F_k = c_1 b_1 - c_2 b_2 + c_1 x_{\text{max}} - (c_1 + c_2)x \quad \text{или} \quad F_k = (c_1 + c_2)(x_0 - x),$$

где x_0 — значение координаты x при $F_k = 0$, определяемое по условию

$$x_0 = \frac{c_1 b_1 - c_2 b_2 + c_1 x_{\text{max}}}{c_1 + c_2}.$$

Если обе пружины имеют одинаковый коэффициент жесткости $c_1 = c_2 = c$, то

$$F_k = 2c(x_0 - x), \quad (24.25)$$

где

$$x_0 = \frac{b_1 - b_2 + x_{\text{max}}}{2}.$$

Отсюда видно, что при неравных участках разбега и выбега необходимое значение x_0 достигается подбором величин монтажных деформаций пружин b_1 и b_2 .

Условие уравнивания сил на прямолинейно движущемся выходном звене аналогично условиям (24.19) запишется в виде

$$\begin{aligned} F_{кр} &= m\ddot{x} + F_p - \bar{F}_p, \\ F_{кх} &= m\ddot{x} + F_x - \bar{F}_x, \end{aligned} \quad (24.26)$$

где m — масса выходного звена, $F_{кр}$, F_p , $\bar{F}_p$ — корректирующая сила, модуль силы сопротивления и среднее значение силы сопротивления на рабочем ходу, $F_{кх}$, F_x , $\bar{F}_x$ — те же значения величин на холостом ходу.

Обозначим через $F_{ост}$ разность между корректирующей силой, необходимой для полного уравнивания по условиям (24.26), и корректирующей силой пружины (24.25), которая может быть воспроизведена пружинным разгрузателем. Тогда из условий (24.26) имеем

$$F_{ост} = m\ddot{x} + F_c - \bar{F}_c - F_k, \quad (24.27)$$

где модуль силы сопротивления F_c и ее среднее значение равны соответственно для рабочего хода F_p , $\bar{F}_p$ и F_x , $\bar{F}_x$ — для холостого хода. Параметры пружинного разгрузателя c и x_0 выбираются из условий наименьшего отклонения от нуля функции $F_{ост}$.

В заключение отметим, что уравнивающие кулачковые механизмы и разгружающие устройства позволяют уменьшить максимальные значения реакций в кинематических парах или уравновесить переменную составляющую момента на валу двигателя, но в то же время они могут быть дополнительными источниками колебаний механизма.

ГЛАВА 25

ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ

§ 85. Одноосный виброизолятор

Виброзащитные системы. Колебания в машинах могут быть полезными, когда само действие машины основано на эффекте колебаний (вибрационные транспортеры, сита, виброударные машины для забивки свай и т. в.), но чаще они являются нежелательными, так как снижают надежность машин, вызывают шум и оказывают вредное влияние на организм человека.

Характеристики колебательных систем (амплитуды, частоты, силы) могут быть уменьшены или ограничены допускаемыми пределами путем оптимального выбора параметров соответствующей динамической модели. Например, динамические нагрузки в кулачковых механизмах могут быть уменьшены за счет правильного выбора профиля кулачка. В тех случаях, когда путем оптимального выбора

параметров не удается снизить уровень колебаний, применяются дополнительные устройства для защиты от вредного действия колебаний — *виброзащитные системы*.

Различают два основных способа защиты от вибрации: *виброгашение* и *виброизоляция*. *Виброгашение* основано на присоединении к машине дополнительных колебательных систем, называемых *виброгасителями*, которые создают динамические воздействия, уменьшающие уровень колебаний в машине. *Виброизоляция* основана на разделении исходной системы на две части и в соединении этих частей посредством виброизоляторов. Одна из частей является *защищаемым объектом*, а другая — *источником возбуждения*. Во многих случаях масса одной части существенно превышает массу другой части. Тогда движение тела «большой» массы может считаться не зависящим от движения тела «малой» массы. Тело «большой» массы называют *основанием* независимо от того, является ли оно защищаемым объектом или источником возбуждения.

Одноосный виброизолятор. В простейшем случае источник возбуждения и защищаемый объект считаются твердыми телами, движущимися вдоль одной и той же оси. На рис. 125, *а* показана динамическая модель машины, установленной на фундаменте. Машина с общей массой m является источником возбуждения, а фундамент — защищаемым объектом. Масса фундамента существенно

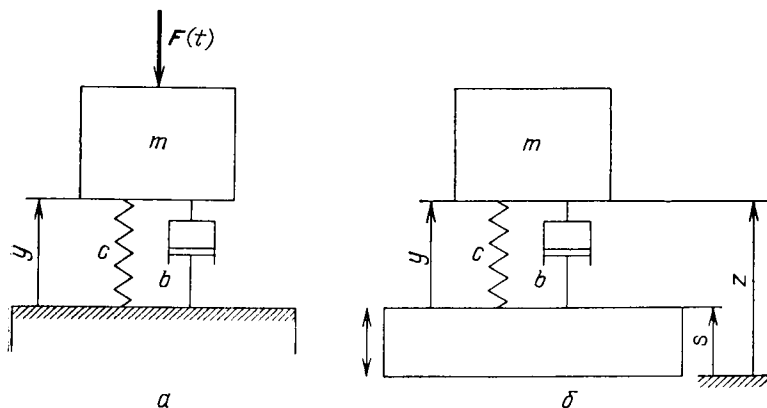


Рис. 125

больше массы машины, и потому он считается основанием. Виброизолятор, помещенный между машиной и фундаментом (основанием), имеет приведенный коэффициент жесткости c и приведенный коэффициент сопротивления b .

Приведенный коэффициент жесткости c определяется из условия равенства потенциальной энергии виброизолятора и эквивалентной пружины и в общем случае может быть нелинейной функцией

перемещения y , отсчитываемого от положения равновесия, определяемого постоянной составляющей внешней силы $F(t)$. Приведенный коэффициент сопротивления b определяется из условия равенства работ, затрачиваемых на трение в виброизоляторе и в эквивалентном демпфере, и в общем случае также может быть нелинейной функцией перемещения y и скорости $\dot{y}$.

Обобщенная (приведенная) реакция виброизолятора $\bar{Q}$ и внешняя сила $F(t)$ направлены вдоль одной и той же оси, совпадающей с направлением перемещения y , и потому виброизолятор называется *одноосным*.

Уравнение движения источника возбуждения, рассматриваемого как твердое тело, при указанных предположениях имеет вид

$$m\ddot{y} = F(t) + \bar{Q}(y, \dot{y}). \quad (25.1)$$

Назначение виброизолятора в этом случае состоит в уменьшении динамической (переменной) составляющей реакции $\bar{Q}$, передаваемой на основание (фундамент) при заданном воздействии переменной силы $F(t)$.

На рис. 125, б показан другой случай, при котором защищаемый объект представлен как твердое тело с массой m , а источником возбуждения является основание, совершающее колебания по закону $s(t)$. Задача виброизоляции здесь состоит в уменьшении динамической составляющей $\bar{Q}$, передаваемой на защищаемый объект.

Уравнение движения защищаемого объекта (механизма или машины) как твердого тела при колебаниях основания имеет вид

$$m[\ddot{y} + \ddot{s}(t)] = Q(y, \dot{y}), \text{ или } m\ddot{y} = -m\ddot{s}(t) + Q(y, \dot{y}). \quad (25.2)$$

Виброзащитные системы, показанные на рис. 125, различают по виду возбуждения колебаний. В первом случае (см. рис. 125, а) колебания вызываются переменной силой $F(t)$, и возбуждение колебаний называется *силовым*. Во втором случае (см. рис. 125, б) колебания вызываются перемещением основания по заданному закону движения, и возбуждение колебаний называется *кинематическим*. Уравнение движения (25.2) при кинематическом возбуждении совпадает с уравнением (25.1) при силовом возбуждении, если принять $F(t) = m\ddot{s}$.

Колебания одноосного линейного виброизолятора при силовом возбуждении. Уравнение движения (25.1) приводится к линейному, если принять, что приведенная реакция виброизолятора $\bar{Q}$ складывается из приведенной силы упругости, линейно зависящей от перемещения, и приведенной силы трения, линейно зависящей от скорости:

$$\bar{Q}(y, \dot{y}) = -cy - b\dot{y}. \quad (25.3)$$

Вводя обозначения $\lambda^2 = c/m$ и $2\gamma = b/m$, приводим уравнение (25.1) к виду

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{F(t)}{m}. \quad (25.4)$$

Пусть, например, внешняя сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону $F(t) = H \sin \omega t$. Тогда уравнение (25.4) имеет вид

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{H}{m} \sin \omega t, \quad (25.5)$$

совпадающий с уравнением (9.9) при $k_1 = H/m$, $x = \sin \omega t$.

Решение этого уравнения для установившихся вынужденных колебаний, т. е. после затухания собственных колебаний, согласно (9.53) получаем в виде

$$y = \frac{H}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta), \quad (25.6)$$

где θ — сдвиг фаз силы и перемещения, определяемый выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2 - \omega^2}. \quad (25.7)$$

Дифференцирование выражения (25.6) дает

$$\dot{y} = \frac{H\omega}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \theta).$$

Подставляя y и $\dot{y}$ в (25.3), получаем силу, передаваемую виброизолятором на основание:

$$\tilde{Q} = -\frac{cH}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \left[\sin(\omega t - \theta) + \frac{\omega b}{c} \cos(\omega t - \theta) \right]$$

или

$$\tilde{Q} = -K_{\text{дин}} H \left[\sin(\omega t - \theta) + \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2} \cos(\omega t - \theta) \right], \quad (25.8)$$

где $K_{\text{дин}}$ — коэффициент динамичности по перемещениям, равный отношению амплитуды вынужденных колебаний по (25.6) к максимальному перемещению H/c , вызываемому статическим действием силы

$$K_{\text{дин}} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Для определения максимального значения силы $\tilde{Q}$ преобразуем выражение (25.8), используя известное тригонометрическое соотношение

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varepsilon), \quad (25.9)$$

где $\varepsilon = \operatorname{arctg}(b/a)$.

При $a = 1$ и $b = 2\gamma\omega/\lambda^2$ имеем

$$Q = -K_{\text{дин}} H \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{\lambda^2}} \sin(\omega t - \theta + \varepsilon),$$

где $\varepsilon = \operatorname{arctg} 2\gamma\omega/\lambda^2$.

Следовательно, максимальное значение силы $\bar{Q}$ равно

$$Q_{\max} = K_{\text{дин}} H \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{\lambda^4}}.$$

Отношение наибольшей силы, передаваемой основанию при силовом возбуждении, к амплитуде гармонической вынуждающей силы называется *коэффициентом передачи силы* K_c , который совпадает с коэффициентом динамичности по силам.

В нашем примере

$$K_c = \frac{Q_{\max}}{H} \equiv K_{\text{дин}} \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{\lambda^4}}$$

или

$$K_c = \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2 v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}}, \quad (25.10)$$

где $v = \omega/\lambda$ — частотное отношение, $\beta = \gamma/\lambda$ — относительное демпфирование.

Коэффициент передачи сил характеризует качество виброзащитной системы. При жестком соединении источника возбуждения (машины) и основания (фундамента) $K_c = 1$, при $K_c < 1$ виброзащитная система эффективна, так как амплитуда силы, действующей на основание, уменьшается; при $K_c > 1$ применение виброизолятора нецелесообразно. График зависимости коэффициента передачи сил совпадает с графиком коэффициента динамичности по силам для механизмов с упругой муфтой (см. рис. 93). Из рассмотрения этого графика следует, что все кривые $K_c(\omega/\lambda)$ независимо от величины относительного демпфирования пересекаются в точке с координатами $(\sqrt{2}, 1)$. Следовательно, для того чтобы максимальная величина силы $\bar{Q}$, передаваемой на основание, была меньше амплитуды вынуждающей силы, должно быть выполнено условие

$$\omega/\lambda > 2.$$

Обычно принимают $\omega/\lambda \geq 4$. Если сила $F(t)$ представлена суммой гармонических составляющих

$$\tilde{F}(t) = \sum_{k=1}^n F_k \cos(\omega_k t + \theta_k),$$

то под ω надо понимать наименьшую из частот силы ω_k . Отсюда следует, что для улучшения виброзащитных свойств линейного виброизолятора надо уменьшать собственную частоту λ , а следовательно, и коэффициент жесткости c . Подставляя в соотношение $\omega/\lambda \geq 4$ величину $\lambda^2 = c/m$, получаем условие для определения коэффициента жесткости

$$c \leq \omega^2 m / 16.$$

Увеличение демпфирования при $(\omega/\lambda) > \sqrt{2}$ ухудшает виброзащитные свойства виброизолятора (см. рис. 93). Поэтому считается достаточным слабое демпфирование, обеспечивающее затухание собственных колебаний.

Для оценки эффективности виброизоляции, кроме коэффициента передачи сил, используют также *коэффициент эффективности вибрационной защиты*, под которым понимается отношение пикового или среднего квадратического значения величины, характеризующей колебания (перемещения, скорости, ускорения защищаемого объекта или воздействующей на него силы) до введения виброзащиты, к значению той же величины после введения виброзащиты. В рассматриваемом случае, т. е. при силовом возбуждении гармонических колебаний, коэффициент эффективности, определяемый по модулю силы, передаваемой на основание, равен отношению амплитуды вынуждающей силы к амплитуде силы, действующей на основание:

$$K_{\text{эф}} = \frac{H}{Q_{\text{max}}} \equiv \frac{1}{K_c}. \quad (25.11)$$

Колебания одноосного линейного виброизолятора при кинематическом возбуждении. Рассмотрим теперь случай, когда колеблется основание по закону

$$s = A_s \sin \omega t. \quad (25.12)$$

Если приведенную реакцию виброизолятора определить по (25.3), то уравнение движения (25.2) принимает вид

$$m\ddot{y} = -m\ddot{s} - cy - bj\dot{y},$$

где y — перемещение защищаемого объекта относительно основания.

С учетом соотношения (25.12) получаем

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = A_s \omega^2 \sin \omega t, \quad (25.13)$$

где $2\gamma = b/m$ и $\lambda^2 = c/m$.

Уравнение движения (25.13) совпадает с уравнением (25.5) при условии, что $H = mA_s \omega^2$. Используя решение (25.6) и принимая во внимание, что абсолютное перемещение защищаемого объекта есть сумма перемещения основания s и относительного перемещения y , получаем

$$z = \frac{A_s \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta) + A_s \sin \omega t.$$

При слабом демпфировании и $\lambda < \omega$ имеем

$$z = A_s \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \lambda^2} \right) \sin \omega t.$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний защищаемого объекта относительно неподвижной системы координат может быть как угодно малой в случае, если его частота собственных колебаний на виброизоляторе мала по сравнению с частотой колебаний основания.

Коэффициентом передачи при кинематическом возбуждении называют отношение максимального ускорения защищаемого объекта к максимальному ускорению основания, т. е. при кинематическом возбуждении коэффициент передачи совпадает с коэффициентом динамичности по ускорениям

$$K_c \equiv K_{\text{уск}} = \frac{\left| \ddot{z} \right|_{\max}}{\left| \ddot{s} \right|_{\max}}. \quad (25.14)$$

Для определения $\ddot{z}$ предварительно преобразуем выражение z к виду, содержащему только тригонометрические функции аргумента $\omega t - \theta$:

$$z = \frac{A_s \omega^2 \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} + A_s \cos \theta \sin(\omega t - \theta) + A_s \sin \theta \cos(\omega t - \theta). \quad (25.15)$$

Тригонометрические функции $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в соответствии с выражением для $\text{tg } \theta$ (25.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{tg } \theta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \equiv \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta}} \equiv \frac{\lambda^2 - \omega^2}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (25.15), получаем

$$z = \frac{A_s}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} [\lambda^2 \sin(\omega t - \theta) + 2\gamma\omega \cos(\omega t - \theta)]$$

или с учетом (25.9)

$$z = A \sin(\omega t - \theta + \varepsilon),$$

где

$$A = A_s \sqrt{\frac{\lambda^4 + 4\gamma^2 \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{2\gamma\omega}{\lambda^2}.$$

Следовательно, коэффициент передачи при кинематическом возбуждении

$$K_c = \frac{A\omega^2}{A_s\omega^2} \equiv \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2 v^2}{(1 - v^2)^2 + 4\beta^2 v^2}} \quad (25.16)$$

совпадает с коэффициентом передачи при силовом возбуждении. Из (25.16) следует также, что коэффициент передачи при кинемати-

ческом возбуждении можно определять так же, как отношение амплитуды перемещения защищаемого объекта к амплитуде основания.

Различают *абсолютный коэффициент передачи*, определяемый по (25.16), и *относительный коэффициент передачи*, определяемый как отношение амплитуды перемещения защищаемого объекта в движении относительно основания к амплитуде основания:

$$K_{\text{отн}} = \frac{y_{\max}}{A_s} \equiv \frac{\omega^2}{V(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \equiv \frac{v^2}{V(1 - v^2)^2 + 4\beta^2v^2}. \quad (25.17)$$

Коэффициент эффективности определяется по абсолютному коэффициенту передачи

$$K_{\text{эф}} = \frac{1}{K_c}. \quad (25.18)$$

Особенности нелинейного виброизолятора. Возникновение нелинейностей в системах виброизоляции связано, в первую очередь, с повышением уровня колебаний и увеличением размеров виброизоляторов в современных машинах. Известно, что любой реальный виброизолятор может иметь линейную упругую характеристику только на некотором участке изменения деформации. С увеличением силы, действующей на виброизолятор, увеличивается величина его хода (максимального перемещения), и рабочий участок упругой характеристики выходит за пределы линейного участка. При больших силах, действующих на виброизолятор, и необходимости ограничения его хода умышленно приходится делать упругую характеристику нелинейной.

При больших нагрузках на виброизолятор нелинейной становится и характеристика эквивалентного демпфера, выражающая зависимость силы сопротивления от скорости перемещения виброизолятора. Эта нелинейность особенно ярко проявляется при увеличении демпфирования, которое становится необходимым в тех случаях, когда не удается избежать резонанса. Уравнение движения защищаемого объекта после его линеаризации обычно имеет вид, сходный с видом уравнения (18.21). Характерной особенностью решения этого уравнения является зависимость квадрата собственной частоты от амплитуды, изображаемой скелетной кривой (см. рис. 96) и, как следствие, наклон амплитудно-частотной характеристики в области резонансных частот. На рис. 126 для одного из типов нелинейных виброизоляторов показаны

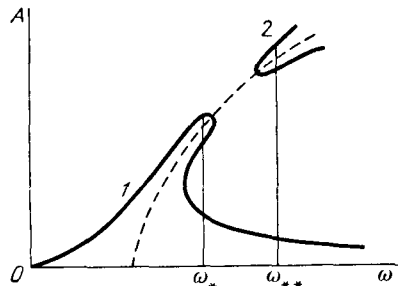


Рис. 126

скелетная кривая (штриховая линия) и амплитудно-частотная характеристика*). В отличие от характеристики, показанной на рис. 96, здесь, кроме основной ветви 1, имеется дополнительная ветвь 2. Поэтому при одной и той же частоте ω может быть несколько установившихся режимов с различными амплитудами не только из-за наклона амплитудно-частотной характеристики (частота ω_*), но также из-за дополнительной ветви (частота ω_{**}). Во избежание появления этих режимов увеличивают демпфирование.

§ 86. Виброизоляция при случайном воздействии

Определение вероятностных характеристик перемещений в одноосном виброизоляторе. Перемещения y в одноосном виброизоляторе связаны с изменением силы $F(t)$ дифференциальным уравнением, которое следует из (25.4),

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \lambda^2 y = \frac{1}{m} \tilde{F}(t). \quad (25.19)$$

При случайном воздействии сила $F(t)$ является случайной функцией времени, вероятностные характеристики которой будем считать известными. Требуется определить вероятностные характеристики перемещений, т. е. обобщенной координаты y .

Пусть, например, из опытных данных установлено, что математическое ожидание функции $F(t)$ (средневероятностное значение) может быть представлено функцией

$$F(t) = H \sin \omega t. \quad (25.20)$$

Из тех же опытных данных получено, что спектральная плотность дисперсии S_F равна постоянной величине S_0 в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и равна нулю при $\omega > \omega_0$. Соответственно дисперсия случайного воздействия $\sigma_{u_F}^2$ по (12.51) равна постоянной величине $S_0 \omega_0$ в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и равна нулю при $\omega > \omega_0$. Частота ω_0 иногда называется *частотой среза*.

Переходя к центрированной случайной функции $F^0(t)$, т. е. к функции, значения которой отсчитываются от ее средневероятностного значения (математического ожидания), получаем, что вероятностные характеристики силы $F(t)$ описываются стационарным случайным процессом с математическим ожиданием $m_{u_F} = 0$ и дисперсией $\sigma_{u_F}^2$, равной $S_0 \omega_0$ в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$ и равной нулю при $\omega > \omega_0$ (ограниченный белый шум).

Математическое ожидание центрированной случайной функции, выражающей обобщенную координату y , на основании свойств стационарного процесса $m_{u_y} = 0$, т. е. средневероятностное значение

*) Колосский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем.— М.: Наука, 1966.— С. 126.

обобщенной координаты y (математическое ожидание нецентрированной случайной функции) определяется решением уравнения (25.19) при $F(t) = H \sin \omega t$.

Согласно (25.6) имеем

$$y = \frac{H}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta). \quad (25.21)$$

Для определения дисперсии этой случайной функции предварительно найдем ее спектральную плотность S_y по (12.52):

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= |W(i\omega)|^2 S_0 \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ S_y(\omega) &= 0 \quad \text{при } \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

Для уравнения движения (25.19) частотная передаточная функция $W(i\omega)$ найдется из соотношения (10.8) при $a = m$:

$$W(i\omega) = \frac{1}{m(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \lambda^2)}$$

или

$$W(i\omega) = \frac{\lambda^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}{m[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}.$$

Модуль частотной передаточной функции

$$|W(i\omega)| = \frac{1}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

В рассматриваемом примере это выражение может быть получено так же, как отношение амплитуд обобщенной координаты y и силы $F(t)$. Следовательно, спектральная плотность перемещений

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{S_0}{m^2 [(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ S_y(\omega) &= 0 \quad \text{при } \omega > \omega_0. \end{aligned}$$

Дисперсия перемещений, т. е. изменений обобщенной координаты y , находится по (12.51)

$$\sigma_{u_y}^2 = \frac{S_0}{m^2} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{u_y}^2 = \frac{S_0}{m^2 \lambda^4} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{4\gamma^2 \omega^2}{\lambda^4}}.$$

Принимая во внимание, что $\lambda^2 = c/m$, и вводя обозначение $v = \omega/\lambda$, получаем

$$\sigma_{u_y}^2 = \frac{S_0 \lambda}{c^2} \int_0^{\omega_0/\lambda} \frac{d\omega}{(1 - v^2)^2 + \frac{4\gamma^2}{\lambda^2} v^2}. \quad (25.22)$$

На рис. 127 показан график изменения дисперсии $\sigma_{u_y}^2$ в зависимости от отношения частоты среза к собственной частоте $\nu_0 = \omega_0/\lambda$. График построен на основании табличного вычисления интеграла (25.22). Из этого графика следует, что в отличие от дисперсии силы $S_0\omega_0$, которая стремится к бесконечности при $\omega_0 \rightarrow \infty$, дисперсия перемещений стремится к конечной величине

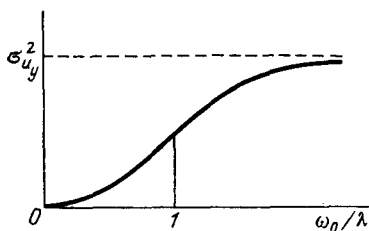


Рис. 127

$$(\sigma_{u_y}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{4} \frac{S_0 \lambda^2}{c^2 \gamma} \equiv \frac{\pi S_0}{2bc}, \quad (25.23)$$

где b — коэффициент сопротивления в уравнении (25.19).

Максимальная дисперсия перемещений, а следовательно, и среднеквадратическое отклонение от значения обобщенной координаты по (25.21) оказывается тем меньше, чем больше жесткость пружины s и коэффициент сопротивления b .

Определение вероятностных характеристик обобщенной скорости. Частотная передаточная функция для обобщенной скорости $W_v(i\omega)$ есть отношение производной по времени комплексной амплитуды гармонических колебаний к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы. В рассматриваемом примере модуль частотной передаточной функции для обобщенной скорости может быть определен как отношение амплитуды обобщенной скорости $\dot{y}$ к амплитуде обобщенной силы H . После дифференцирования по времени выражения (25.21) получаем, что амплитуда обобщенной скорости

$$A_v = \frac{H\omega}{m \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Следовательно, модуль частотной передаточной функции для обобщенной скорости

$$|W_v(i\omega)| = \omega |W(i\omega)|.$$

Спектральная плотность дисперсии обобщенной скорости

$$S_v(\omega) = |W_v(i\omega)|^2 S_F(\omega) \quad \text{или} \quad S_v(\omega) = \omega^2 S_y(\omega).$$

Дисперсия обобщенной скорости

$$\sigma_{u_v}^2 = \int_0^{\omega_0} S_v(\omega) d\omega.$$

После вычисления этого интеграла можно установить, что при $\omega \rightarrow \infty$ дисперсия обобщенной скорости остается ограниченной и

стремится к величине

$$(\sigma_{u_v}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{4} \frac{S_0 \lambda^4}{c^2 \gamma} \equiv \frac{\pi}{2} \frac{S_0}{mb}. \quad (25.24)$$

Максимальная дисперсия обобщенной скорости, в отличие от максимальной дисперсии перемещений, зависит от массы объекта m .

Определение вероятностных характеристик силы воздействия на основание. Согласно (25.3) сила, передаваемая на основание, или, что то же, приведенная реакция виброизолятора имеет вид

$$Q = -cy - b\dot{y}.$$

В рассматриваемом примере модуль частотной передаточной функции для силы Q может быть определен как отношение амплитуды силы Q к амплитуде обобщенной силы W . Это отношение совпадает с коэффициентом передачи сил при силовом возбуждении. Согласно (25.10) имеем

$$|W_Q(i\omega)| = \sqrt{\frac{\lambda^4 + 4\gamma^2 \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Следовательно, спектральная плотность дисперсии силы Q в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega_0$:

$$S_Q = |W(i\omega)|^2 S_F \equiv S_0 \frac{\lambda^4 + 4\gamma^2 \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad \text{или} \quad S_Q = c^2 S_v + b^2 S_v.$$

Отсюда дисперсия силы Q , передаваемой на основание,

$$\sigma_{u_Q}^2 = c^2 \sigma_{u_v}^2 + b^2 \sigma_{u_v}^2.$$

При $\omega_0 \rightarrow \infty$ после подстановок (25.23) и (25.24) имеем

$$(\sigma_{u_Q}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{\pi S_0}{4} \lambda \left(\frac{\lambda}{\gamma} + 4 \frac{\gamma}{\lambda} \right). \quad (25.25)$$

Из (25.25) видно, что дисперсия силы Q , передаваемой на основание, зависит от коэффициента демпфирования γ . При $\gamma \rightarrow 0$ и при $\gamma \rightarrow \infty$ дисперсия силы Q возрастает неограниченно. Минимальное значение дисперсии силы Q имеет при $\gamma = \lambda/2$. В этом случае

$$(\sigma_{u_Q}^2)_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \pi S_0 \lambda. \quad (25.26)$$

Следовательно, при случайном возбуждении типа белого шума (это возбуждение иногда называют *широкополосным*) для уменьшения дисперсии силы, передаваемой на основание, надо выполнить соотношение $\gamma = \lambda/2$ или $b = \lambda m$. Кроме того, согласно (25.26) дисперсия уменьшается с уменьшением собственной частоты λ . Отсюда следует, что эффективность виброизоляции повышается с уменьшением собственной частоты (уменьшением коэффициента жесткости c) и с увеличением коэффициента демпфирования до значения $\gamma = \lambda/2$.

§ 87. Управляемые системы виброизоляции

Электрогидравлическая виброзащитная система. Управляемыми или активными системами называют те системы виброизоляции, в которых эффективность защиты от колебаний достигается компенсацией вынуждающих сил (управление по возмущению) или перемещений (управление по отклонению). На рис. 128, а показана

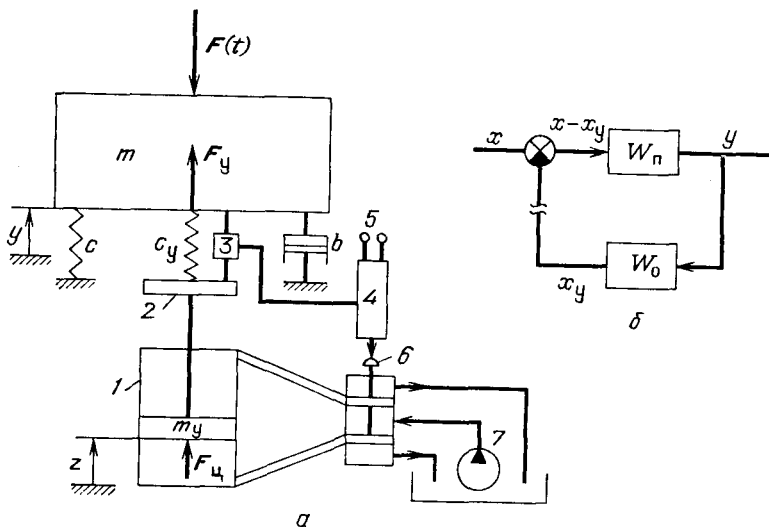


Рис. 128

схема электрогидравлической виброзащитной системы, предназначенной для уменьшения перемещений y объекта с общей массой m относительно неподвижного основания. Источником возбуждения колебаний является переменная сила $F(t)$. Между объектом и основанием помещен одноосный виброизолятор с приведенным коэффициентом жесткости c и приведенным коэффициентом сопротивления b . Управляющее воздействие F_y создается силовым гидроцилиндром 1, поршень которого действует на объект через упругую прокладку 2 с коэффициентом жесткости c_y . Движение поршня силового гидроцилиндра управляется по сигналу от датчика 3 относительных перемещений объекта и поршня. Этот сигнал подается в усилитель 4 с электрическим питанием 5. Усилитель вырабатывает сигнал, управляющий движением золотника 6, который регулирует подачу жидкости от насоса 7 в силовой гидроцилиндр. В среднем положении золотника перекрыты оба трубопровода, ведущие в силовой гидроцилиндр. При движении золотника вверх жидкость под давлением поступает в верхнюю полость силового гидроцилиндра, и его поршень идет вниз. Соответственно при дви-

жении золотника вниз — поршень идет вверх. Перемещение поршня z вызывает изменение силы упругости $F_y = c_y(y - z)$, действующей на объект со стороны упругой прокладки. При надлежащем выборе параметров виброзащитной системы сила F_y противодействует вынуждающей силе $F(t)$ и уменьшает перемещения y . Эту силу называют *управляющим воздействием*.

Неголономная связь в электрогидравлической виброзащитной системе. За обобщенные координаты системы примем перемещения y и z , отсчитываемые от положения статического равновесия. Перемещения y и z связаны уравнением обратной связи, выражающим зависимость скорости поршня $\dot{z}$ от перемещения y . Эта зависимость определяется изменением расхода жидкости Q_p , поступающей в силовой цилиндр через окна золотника:

$$Q_p = S_{\alpha} \dot{z}, \quad (25.27)$$

где S_{α} — эффективная площадь поршня.

Допустим, что профиль окон золотника таков, что расход жидкости, поступающей в силовой цилиндр, прямо пропорционален отклонению золотника от среднего положения z_3 :

$$Q_p = k_3 z_3, \quad (25.28)$$

где k_3 — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров золотника.

Кроме того, примем, что электрическая часть системы обеспечивает прямую пропорциональность перемещений золотника и относительных перемещений $\varphi = y - z$, регистрируемых датчиком $\mathcal{Z}$:

$$z_3 = k_{\varphi}(y - z), \quad (25.29)$$

где k_{φ} — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров настройки электрической части. Тогда из соотношений (25.27) — (25.29) имеем

$$\dot{z} = k(y - z), \quad (25.30)$$

где $k = k_3 k_{\varphi} / S_{\alpha}$.

Уравнение дифференциальной связи (25.30) не интегрируется, т. е. не может быть сведено к уравнению геометрической связи между y и z . Следовательно, уравнение (25.30) выражает неголономную связь.

Уравнение движения электрогидравлической виброзащитной системы. Для механической системы с неголономными связями число степеней свободы равно разности между числом обобщенных координат и числом уравнений неголономных связей. В рассматриваемой системе — две обобщенные координаты (y и z) и одно уравнение неголономной связи (25.30). Следовательно, число степеней свободы равно единице. Число уравнений движения неголономной системы принимается равным числу степеней свободы, т. е. для электрогидравлической системы должно быть одно уравнение движения,

которое можно составить или относительно обобщенной координаты y , или относительно обобщенной координаты z .

Для составления уравнений движения неголономной системы, как уже указывалось в § 31, нельзя использовать обычные уравнения Лагранжа второго рода, а следует применять их обобщение, известное под названием уравнений Лагранжа с неопределенными множителями, или же воспользоваться уравнениями кинестатики. В рассматриваемой системе уравнения кинестатики для массы m и для поршня силового гидроцилиндра имеют вид

$$F(t) - cy - c_y(y - z) - b\ddot{y} - m\ddot{y} = 0, \quad (25.31)$$

$$c_y(y - z) - F_a - m_y\ddot{z} = 0, \quad (25.32)$$

где m_y — масса поршня и жестко связанных с ним частей, F_a — сила давления жидкости на поршень.

Система уравнений (25.30) — (25.32) связывает три переменные величины: y , z и F_a . Заметим, что сила давления на поршень F_a является переменной даже при постоянном давлении жидкости на выходе из насоса, так как уравнение неголономной связи (25.30) выполняется только при соответствующем изменении перепада давления между золотником и силовым гидроцилиндром. На этом основании силу F_a можно назвать также *реакцией неголономной связи*.

Для составления уравнения движения относительно координаты y удобно применить подстановку $\varphi = y - z$. Тогда система уравнений (25.30) — (25.32) принимает вид

$$\dot{y} - \dot{\varphi} = k\varphi, \quad (25.33)$$

$$F(t) - cy - c_y\varphi - b\ddot{y} - m\ddot{y} = 0, \quad (25.34)$$

$$c_y\varphi - F_a - mk\dot{\varphi} = 0. \quad (25.35)$$

Из уравнения (25.34) имеем

$$c_y\varphi = F(t) - cy - b\ddot{y} - m\ddot{y}. \quad (25.36)$$

После дифференцирования по времени обеих частей этого уравнения получаем

$$c_y\dot{\varphi} = \dot{F}(t) - c\dot{y} - b\ddot{y} - m\ddot{y}. \quad (25.37)$$

Подставляя φ и $\dot{\varphi}$ из (25.36) и (25.37) в уравнение (25.33), получаем уравнение движения системы относительно координаты y в виде линейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$m\ddot{y} + (b + km)\ddot{y} + (c + c_y + kb)\dot{y} + cky = kF(t) + \dot{F}(t). \quad (25.38)$$

После определения переменной y из уравнения движения (25.38) находим переменную φ из уравнения (25.33) и силу давления на поршень F_a из (25.35).

Для решения уравнения (25.38) по операторному методу выполняем преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях, обозначая изображение переменной y через Y и переменной $\dot{F}(t)$ через X :

$$[ms^3 + (b + km)s^2 + (c + c_y + bk)s + ck]Y = (k + s)X.$$

Отсюда динамическая передаточная функция

$$W = \frac{k + s}{ms^3 + (b + km)s^2 + (c + c_y + bk)s + ck}, \quad (25.39)$$

или

$$W = \frac{k + s}{(ms^2 + bs + c)(k + s) + c_y s}. \quad (25.40)$$

Пусть, например, сила $\dot{F}(t)$ изменяется по закону $\dot{F} = H \sin \omega t$. Тогда по табл. 6 (п. 3 с заменой λ на ω) получаем изображение силы $\dot{F}(t)$:

$$X = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Изображение функции y находим умножением X на передаточную функцию W :

$$Y = \frac{\omega(k + s)}{(s^2 + \omega^2)[ms^3 + (b + km)s^2 + (c + c_y + bk)s + ck]}.$$

Для отыскания оригинала y по его изображению Y можно использовать подробные таблицы оригиналов и изображений, аналогичные табл. 6. Однако для оценки эффективности управляемой виброзащитной системы нет надобности иметь решение уравнения движения для каждого возможного закона изменения силы $\dot{F}(t)$. Предпочтительнее оценивать эффективность управляемой виброзащитной системы по критерию, пригодному для любого изменения силы $\dot{F}(t)$.

Коэффициент эффективности управляемой виброзащитной системы. Для линейной системы, т. е. системы, движение которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений, коэффициентом эффективности управляемой виброзащитной системы называется модуль отношения комплексной амплитуды перемещения $y^0(i\omega)$ в системе без управляющего воздействия к комплексной амплитуде перемещения $y(i\omega)$ в той же системе при управляющем воздействии

$$K_{\text{эф}} = \left| \frac{y^0(i\omega)}{y(i\omega)} \right| \quad \text{или} \quad K_{\text{эф}} = \left| \frac{W^0(i\omega)}{W(i\omega)} \right|, \quad (25.41)$$

где $W(i\omega)$ — частотная передаточная функция системы с управляющим воздействием, $W^0(i\omega)$ — частотная передаточная функция той же системы без управляющего воздействия.

Как указывалось выше, частотная передаточная функция получается из динамической передаточной функции заменой комплексной величины s на $i\omega$. Для рассматриваемой системы из (25.40) имеем

$$W(i\omega) = \frac{k + i\omega}{(-m\omega^2 + bi\omega + c)(k + i\omega) + c_y i\omega}.$$

Для системы без управляющего воздействия при $k = c_y = 0$

$$W^0(i\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + bi\omega + c}.$$

Коэффициент эффективности виброзащиты по (25.41)

$$K_{\text{эф}} = \left| 1 + \frac{c_y i\omega}{(-m\omega^2 + bi\omega + c)(k + i\omega)} \right|.$$

После умножения числителя и знаменателя второго члена на комплексное число, сопряженное знаменателю, получаем

$$K_{\text{эф}} = \left| 1 + \frac{c_y i\omega (\Delta_1 - \Delta_2 i\omega)}{\Delta_1^2 + \omega^2 \Delta_2^2} \right|,$$

где $\Delta_1 = ck - (b + km)\omega^2$, $\Delta_2 = \omega(-m\omega^2 + c + bk)$. Отделяя мнимую часть от действительной, имеем

$$K_{\text{эф}} = |1 + U + iV|,$$

где

$$U = \frac{c_y \omega^2 \Delta_2}{\Delta_1^2 + \omega^2 \Delta_2^2}, \quad V = \frac{c_y \omega \Delta_1}{\Delta_1^2 + \omega^2 \Delta_2^2}.$$

Отсюда

$$K_{\text{эф}} = 1 + \frac{c_y \omega}{\sqrt{\Delta_1^2 + \omega^2 \Delta_2^2}}. \quad (25.42)$$

Параметры виброзащитной системы (b , c , c_y , k) должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие $K_{\text{эф}} > 1$ на заданном диапазоне частоты ω .

Устойчивость движений управляемой виброзащитной системы. Характеристическое уравнение системы в соответствии с уравнением движения (25.38) имеет вид

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0,$$

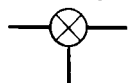
где $a_0 = m$, $a_1 = b + km$, $a_2 = c + c_y + bk$, $a_3 = ck$. Согласно критерию Гурвица для того чтобы система была устойчивой, должны удовлетворяться условия: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 > a_0 a_3$. Первые четыре неравенства удовлетворяются, так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Пятое неравенство

дает условие

$$(b + km)(c + c_y + bk) > mck.$$

Для системы без демпфирования ($b = 0$) это условие получает вид $c + c_y > c$, т. е. для устойчивости движения необходимо иметь упругую прокладку с коэффициентом жесткости c_y .

Структурная схема управляемой виброзащитной системы. Сравнение управляемых виброзащитных систем по критерию эффективности удобно выполнять по структурным схемам, составляемым в предположении, что система описывается линейными уравнениями движения и, следовательно, соотношение между выходом y и входом x для всей системы в целом и для каждой ее части определяется динамической передаточной функцией $W = Y/X$, где Y и X — изображения по Лапласу функций y и x . На структурной схеме каждое преобразование величины x в y изображается прямоугольником с обозначением соответствующей динамической передаточной функции. Суммирование входов (или выходов) обозначается знаком



. Если какая-либо величина входит со знаком минус,



то прилегающая к ней часть обозначения заливается черным



. Знаком обозначается ответвление какой-либо величины.

Структурная схема электрогидравлической виброзащитной системы (рис. 128, б) относится к простейшим схемам автоматического управления с одной обратной связью. В этой схеме входная величина x суммируется (или вычитается) с управляющим воздействием x_y и преобразуется в выходную величину посредством той части системы, которая характеризуется динамической передаточной функцией

$$W_{\Pi} = \frac{Y}{X \pm X_y}, \quad (25.43)$$

где Y , X , X_y — изображения по Лапласу величин y , x , x_y . Величина y затем преобразуется в величину управляющего воздействия x_y посредством той части системы, которая характеризуется динамической передаточной функцией

$$W_0 = \frac{X_y}{Y}. \quad (25.44)$$

Это преобразование называют *обратной связью*, так как управляющее воздействие x_y , зависящее от выходной величины y , возвращается на вход системы и суммируется (или вычитается) с величиной x . Обратная связь называется положительной, если x и x_y суммируются, и отрицательной, если x и x_y вычитаются.

Динамическая передаточная функция всей системы

$$W = \frac{Y}{X} \quad (25.45)$$

получается после подстановки в (25.45) изображения Y из (25.44) и изображения X из (25.43)

$$W = \frac{X_y/W_0}{(Y + X_y W_{II})/W_{II}} \equiv \frac{W_{II}}{1 \mp W_0 W_{II}}. \quad (25.46)$$

Знак минус относится к системам с положительной обратной связью, знак плюс — с отрицательной.

Произведение $W_0 W_{II}$ может быть представлено в виде динамической передаточной функции

$$W_p = W_0 W_{II} \equiv \frac{X_y}{X \pm X_y},$$

которая может быть получена из системы, которая разомкнута в месте, указанном на рис. 128, б волнистыми линиями, причем выходом является управляющее воздействие x_y , а входом — сумма (или разность) $x - x_y$. На этом основании функцию W_p в теории автоматического управления называют *передаточной функцией разомкнутой системы*, а функцию W — *передаточной функцией замкнутой системы*.

Для рассматриваемой электрогидравлической виброзащитной системы имеем

$$x = F(t), \quad x_y = c_y(y - z) \equiv c_y \varphi.$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (25.34), получаем

$$(ms^2 + bs + c)Y = X - X_y.$$

Отсюда

$$W_{II} = \frac{Y}{X - X_y} \equiv \frac{1}{ms^2 + bs + c}. \quad (25.47)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (25.33), имеем

$$sY = k \frac{X_y}{c_y} + s \frac{X_y}{c_y}, \quad \text{или} \quad sY = \frac{X_y}{c_y} (k + s).$$

Отсюда

$$W_0 = \frac{X_y}{Y} \equiv \frac{c_y s}{s + k}. \quad (25.48)$$

Динамическая передаточная функция по (25.46) имеет вид

$$W = \frac{1}{(ms^2 + bs + c) \left[1 + \frac{c_y s}{(s + k)(ms^2 + bs + c)} \right]}$$

или

$$W = \frac{s + k}{(s + k)(ms^2 + bs + c) + c_y s}.$$

После раскрытия скобок получаем выражение, совпадающее с (25.39).

Для системы без управляющего воздействия $W^0 = W_n$ и, следовательно, коэффициент эффективности виброзащиты с учетом (25.41) имеет вид

$$K_{\text{эф}} = \left| \frac{W_n(i\omega)}{W(i\omega)} \right| \equiv |1 + W_0(i\omega)W_n(i\omega)|.$$

После подстановки выражений для $W_n(i\omega)$ по (25.47) и $W_0(i\omega)$ по (25.48) с заменой s на $i\omega$ получаем

$$K_{\text{эф}} = \left| 1 + \frac{c_y i\omega}{(i\omega + k)(-m\omega^2 + bi\omega + c)} \right|.$$

После отделения действительной части от мнимой и определения модуля полученной комплексной величины приходим опять к выражению (25.42).

ГЛАВА 26

ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

§ 88. Пружинный динамический гаситель колебаний

Пружинный динамический гаситель без трения. Простейший виброгаситель, предназначенный для гашения колебаний массы m , вызываемых гармонической силой $F = F_0 \sin \omega t$, состоит из дополнительной массы m_r , соединенной с основной массой m посредством упругого элемента с коэффициентом жесткости c_r (рис. 129, а). Коэффициент жесткости упругого элемента, расположенного между основанием и массой m , равен c . Перемещение y массы m отсчитывается от положения статического равновесия xx ; перемещение массы m_r в относительном движении, равное $y_r - y$, где y_r — абсолютное ее перемещение, отсчитывается от положения статического равновесия $x_r x_r$.

Уравнения движения указанной двухмассной динамической модели имеют вид

$$\begin{aligned} my &= F_0 \sin \omega t - cy + c_r(y_r - y), \\ m_r y_r &= -c_r(y_r - y). \end{aligned} \quad (26.1)$$

Установившиеся вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы описываются решением

$$y = A \sin \omega t, \quad y_r = A_r \sin \omega t.$$

Подставляя это решение в систему (26.1), получаем два уравнения с двумя неизвестными амплитудами A и A_r :

$$\begin{aligned}(c + c_r - m\omega^2)A - c_r A_r &= F_0, \\ -c_r A + (c_r - m_r \omega^2)A_r &= 0.\end{aligned}\quad (26.2)$$

Отсюда

$$A = \frac{F_0}{\Delta}(c_r - m_r \omega^2), \quad A_r = \frac{F_0}{\Delta} c_r, \quad (26.3)$$

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов при A и A_r в системе уравнений (26.2):

$$\Delta = (c + c_r - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r^2.$$

При $\Delta = 0$ амплитуды A и A_r стремятся к бесконечности (резонанс), что соответствует совпадению частоты вынуждающей силы

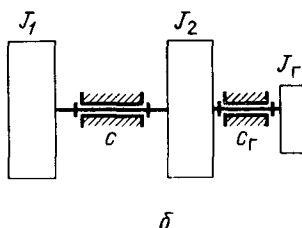
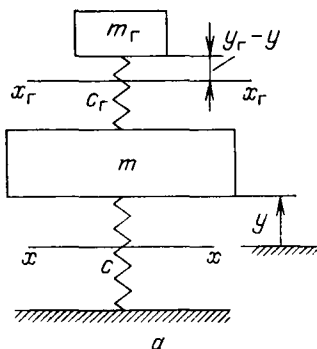


Рис. 129

ω с одной из собственных частот системы, которые находятся из частотного уравнения

$$(c + c_r - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r^2 = 0. \quad (26.4)$$

Если $\Delta \neq 0$, то из соотношений (26.3) можно найти такую частоту ω , при которой $A = 0$. Такое состояние системы называют *антирезонансом*, а соответствующую частоту ω_* *антирезонансной*. В нашем случае

$$\omega_* = \sqrt{\frac{c_r}{m_r}},$$

т. е. антирезонансная частота равна собственной частоте дополнительного осциллятора, состоящего из груза с массой m_r и упругого элемента с коэффициентом жесткости c_r .

Явление антирезонанса может быть использовано для виброгашения. Для этого достаточно подобрать массу m_r и коэффициент

жесткости c_r так, чтобы при заданной величине ω удовлетворялось равенство

$$\sqrt{\frac{c_r}{m_r}} = \omega. \quad (26.5)$$

Для гашения крутильных колебаний в двухмассной системе с приведенными моментами инерции J_1 , J_2 и приведенным коэффициентом жесткости c аналогично устанавливается дополнительный груз с моментом инерции J_r на валу с коэффициентом жесткости, равным c_r (рис. 129, б). Величины J_r и c_r подбираются по условию

$$\sqrt{\frac{c_r}{J_r}} = \omega.$$

Виброгашение по указанному принципу эффективно только для одной фиксированной частоты вращения. Уже сравнительно небольшое отступление от частоты, определяемой соотношением (26.5), может привести не к уменьшению, а к увеличению амплитуды колебаний. Кроме того, без виброгасителя была одна резонансная частота, равная $\omega = \sqrt{c/m}$, а с виброгасителем будут две резонансные частоты, получаемые из решения частотного уравнения (26.4), т. е. увеличивается вероятность возникновения резонансного режима.

§ 89. Ударные гасители колебаний

В ударных гасителях колебаний эффект виброзащиты основывается на рассеянии энергии при соударениях гасителя и защищаемого объекта. На рис. 130 показана схема виброзащитной системы с плавающим ударным гасителем колебаний, в котором гаситель в виде шара установлен свободно с зазором 2Δ внутри полости, соединенной с объектом. Уравнения движения этой системы при возбуждении колебаний силой $F(t)$ имеют вид

$$m\ddot{y} = F(t) - cy - \tilde{R}, \quad (26.6)$$

$$m_r\ddot{y}_r = \tilde{R},$$

где y — обобщенная координата объекта, y_r — обобщенная координата гасителя, c — коэффициент жесткости, $\tilde{R}$ — реакция на гаситель со стороны объекта.

Реакция $\tilde{R}$ при ударном взаимодействии гасителя и объекта выражается нелинейной функцией перемещения гасителя относительно объекта $z = y_r - y$. В первом приближении эту реакцию можно

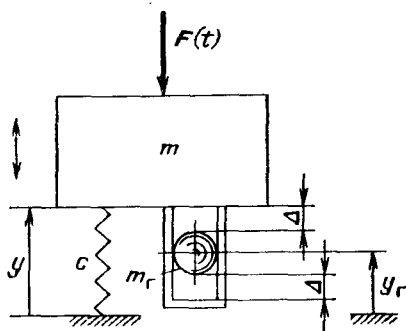


Рис. 130

считать линейно зависящей от z и $\dot{z}$:

$$\tilde{R} = c_r z + b_r \dot{z}.$$

Тогда второе уравнение системы (26.6) с учетом соотношения $\ddot{y}_r = \ddot{z} + \ddot{y}$ можно представить в виде

$$m_r \ddot{z} + b_r \dot{z} + c_r z = m_r \ddot{y}. \quad (26.7)$$

Линеаризация упругой составляющей реакции на гаситель. Гармоническая линеаризация упругой составляющей реакции на гаситель, т. е. определение коэффициента c_r , основывается на разложе-

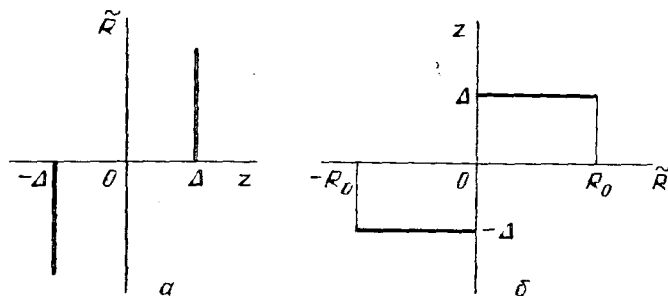


Рис. 131

ния в ряд Фурье относительного перемещения z упругой составляющей реакции $\tilde{R}$. На рис. 131, а показан график зависимости $\tilde{R}(z)$, а на рис. 131, б — график обратной зависимости $z(\tilde{R})$

$$z = \Delta \operatorname{sgn} \tilde{R}. \quad (26.8)$$

Реакция $\tilde{R}$ есть периодическая функция с периодом T , равным времени между двумя ударами о верхний (или нижний) упор. В первом приближении эту функцию можно считать гармонической с угловой частотой $\omega = 2\pi/T$:

$$\tilde{R} = R_0 \sin \omega t,$$

где R_0 — амплитуда реакции $\tilde{R}$.

Отсюда

$$z = \frac{\tilde{R}}{c_r} \equiv \frac{R_0}{c_r} \sin \omega t. \quad (26.9)$$

Усеченный ряд Фурье функции $z(\tilde{R})$ по (26.8) имеет вид

$$z = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z d\psi, \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z \cos \psi d\psi, \\ b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z \sin \psi d\psi, \quad \psi = \omega t.$$

Вычисление коэффициентов a_0 , a_1 и b_1 при $z = \Delta \operatorname{sgn} \dot{R}$ даст

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \Delta d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} -\Delta d\psi \right) = 0, \\ a_1 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \Delta \cos \psi d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} -\Delta \cos \psi d\psi \right) = 0, \\ b_1 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \Delta \sin \psi d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} -\Delta \sin \psi d\psi \right) = \frac{4\Delta}{\pi}.$$

Отсюда

$$z = \frac{4\Delta}{\pi} \sin \omega t. \quad (26.10)$$

Приравнявая значения z из (26.9) и (26.10), имеем

$$z_0 = \frac{R_0}{c_r} \equiv \frac{4\Delta}{\pi}, \quad \text{или} \quad c_r = \frac{\pi R_0}{4\Delta}. \quad (26.11)$$

Линеаризация диссипативных сил. Гармоническая линеаризация диссипативных сил, т. е. определение коэффициента b_r , основывается на равенстве потери энергии при ударе работе эквивалентной диссипативной силы $b_r z$ за время гармонического колебания по закону $z = z_0 \sin \omega t$. Потерю энергии при однократном ударе со скоростью z находим по теореме Карно:

$$E_1 = \frac{1-r^2}{2} \cdot \frac{mm_r}{m+m_r} \dot{z}^2,$$

где r — коэффициент восстановления скорости при ударе. Принимая, что удары о верхний и нижний упоры происходят при максимальной относительной скорости $\dot{z} = z_0 \omega$, получаем

$$E \equiv 2E_1 = (1-r^2) \frac{mm_r}{m+m_r} z_0^2 \omega^2. \quad (26.12)$$

Работа эквивалентной диссипативной силы $b_r \dot{z}$ за период колебаний $T = 2\pi/\omega$:

$$E_r = \int_0^{2\pi/\omega} b_r \dot{z}^2 dt.$$

При $\dot{z} = z_0 \omega \cos \omega t$ имеем

$$E_r = b_r z_0^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \, dt \equiv \pi b_r z_0^2 \omega. \quad (26.13)$$

Приравнявая значения E и E_r по (26.12) и (26.13), получаем

$$b_r = \frac{(1 - r^2) m m_r \omega}{\pi (m + m_r)}. \quad (26.14)$$

Определение амплитуд колебаний. Система уравнений движения (26.6) с учетом (26.7) имеет вид

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + c y + b_r \dot{z} + c_r z &= F(t), \\ m_r \ddot{z} + b_r \dot{z} + c_r z &= m_r y. \end{aligned}$$

Обозначая через Y, Z, X изображения функций $y, z, F(t)$, получаем при нулевых начальных условиях:

$$m s^2 Y + c Y + b_r s Z + c_r Z = X,$$

$$m_r s^2 Z + b_r s Z + c_r Z - m_r s^2 Y = 0,$$

или

$$(m s^2 + c) Y + (b_r s + c_r) Z = X,$$

$$-m_r s^2 Y + (m_r s^2 + b_r s + c_r) Z = 0.$$

Отсюда

$$Y = \frac{m_r s^2 + b_r s + c_r}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)} X,$$

$$Z = \frac{m_r s^2}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)} X.$$

Следовательно, динамические передаточные функции:

$$W = \frac{Y}{X} \equiv \frac{m_r s^2 + b_r s + c_r}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)},$$

$$W_z = \frac{Z}{X} \equiv \frac{m_r s^2}{(m_r s^2 + b_r s + c_r)(m s^2 + c) + m_r s^2 (b_r s + c_r)}.$$

При гармоническом возбуждении силой $F(t) = F_0 \sin \omega t$ комплексные амплитуды колебаний $A(i\omega)$ и $z_0(i\omega)$ можно определить через частотные передаточные функции

$$W(i\omega) = \frac{A(i\omega)}{F_0}, \quad W_z(i\omega) = \frac{z_0(i\omega)}{F_0}.$$

Имея в виду, что частотные передаточные функции получаются из динамических заменой s на $i\omega$, получаем

$$A(i\omega) = \frac{m_r(i\omega)^2 + b_r(i\omega) + c_r}{[m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r][m(i\omega)^2 + c] + m_r(i\omega)^2(b_r i\omega + c_r)},$$

$$z_0(i\omega) = \frac{m_r(i\omega)^2}{[m_r(i\omega)^2 + b_r i\omega + c_r][m(i\omega)^2 + c] + m_r(i\omega)^2(b_r i\omega + c_r)}.$$

После раскрытия скобок получаем

$$A(i\omega) = F_0 \frac{c_r - m_r \omega^2 + i b_r \omega}{\Delta_1 + i \Delta_2}, \quad z_0(i\omega) = F_0 \frac{-m_r \omega^2}{\Delta_1 + i \Delta_2},$$

где $\Delta_1 = (c - m\omega^2)(c_r - m_r \omega^2) - c_r m_r \omega^2$, $\Delta_2 = b_r \omega (c - m\omega^2 - m_r \omega^2)$.

Отделяя действительную часть от мнимой, находим

$$A(i\omega) = U + iV, \quad z_0(i\omega) = U_z + iV_z,$$

где

$$U = F_0 \frac{(c_r - m_r \omega^2) \Delta_1 + \Delta_2 b_r \omega}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V = F_0 \frac{b_r \omega \Delta_1 - \Delta_2 (c_r - m_r \omega^2)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2},$$

$$U_z = F_0 \frac{-m_r \omega^2 \Delta_1}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \quad V_z = F_0 \frac{m_r \omega^2 \Delta_2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}.$$

Отсюда амплитуды A и z_0 :

$$A = F_0 \sqrt{\frac{(c_r - m_r \omega^2)^2 + b_r^2 \omega^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}, \quad (26.15)$$

$$z_0 = F_0 \frac{m_r \omega^2}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}}. \quad (26.16)$$

Определение оптимальной настройки гасителя. Из (26.15) и (26.16) следует, что при выполнении условия

$$c_r = m_r \omega^2 \quad (26.17)$$

между амплитудами A и z_0 имеется соотношение

$$\frac{A}{z_0} = \frac{b_r}{m_r \omega}.$$

Подставляя значения z_0 из (26.9) и b_r из (26.14) с учетом (26.11), получаем

$$A = \frac{4\lambda(1-r^2)m}{\pi^2(m+m_r)},$$

т. е. при $r \rightarrow 1$ амплитуда колебаний неограниченно уменьшается.

Однако это заключение справедливо лишь при условии, что при определении эквивалентных коэффициентов жесткости c_r и сопротивления b_r можно пренебречь амплитудами гармоник с частотами выше основной ω .

Определение оптимальных параметров гасителя. Из условия (26.17) оптимальной настройки гасителя после подстановки значения c_r из (26.11) получаем

$$\frac{\pi R_0}{4\Delta} = m_r \omega^2, \text{ или } m_r \Delta = \frac{\pi R_0}{4\omega^2}. \quad (26.18)$$

Пусть, например, выпуждающая сила $F(t)$ вызвана разгоном или торможением вращающейся неуравновешенной массы m_A , установленной с эксцентриситетом e :

$$F(t) = m_A e \omega^2.$$

Тогда из первого уравнения системы (26.6) при малых y и $\ddot{y}$ можно приближенно принять

$$R_0 \approx m_A e \omega^2,$$

и соотношение (26.18) принимает вид

$$m_r \Delta = \frac{\pi}{4} m_A e,$$

т. е. масса m_r и зазор Δ одинаково влияют на настройку плавающего гасителя.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА 27

ОБЩИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ

§ 90. Синтез механизмов по методам оптимизации с применением ЭВМ

Этапы синтеза механизмов. Проектирование любого механизма начинается с проектирования его схемы. Последующие расчеты на прочность, конструктивное оформление звеньев и кинематических пар, выбор материалов и другие этапы проектирования, как правило, уже не могут существенно изменить основные свойства механизма. Проектирование схемы механизма по заданным его свойствам называется *синтезом механизма*.

Принято различать два этапа синтеза механизма. *Первый этап* — выбор структурной схемы — выполняется на основании структурного синтеза с использованием справочных данных по отдельным видам механизмов. *Второй этап* — определение постоянных параметров выбранной схемы механизма по заданным его свойствам. Этот этап обычно начинается с *кинематического синтеза*, под которым понимается *проектирование кинематической схемы механизма*, т. е. определение постоянных параметров кинематической схемы механизма по заданным его кинематическим свойствам. Если требуется учесть и динамические свойства механизма, то решается более общая задача *динамического синтеза*, под которым понимается *проектирование кинематической схемы механизма с определением параметров, характеризующих распределение масс звеньев*.

Входные и выходные параметры синтеза механизма. Для выполнения второго этапа синтеза механизма надо установить, какие постоянные параметры определяют схему механизма. К этим параметрам относятся длины звеньев, положения точек, описывающих заданные траектории или имеющие заданные значения скоростей и ускорений, массы звеньев, моменты инерции и т. п. Часть этих параметров может быть задана, а другая часть определяется в процессе синтеза. Независимые между собой постоянные параметры схемы механизма называются *параметрами синтеза механизма*. Различают *входные* и *выходные параметры синтеза*. Входные — устанавливаются заданием на синтез механизма, а выходные — определяются в процессе его синтеза.

Примеры определения числа параметров синтеза и их вида могут быть очень разнообразными. Рассмотрим только два примера.

эксплуатацией, технологией изготовления и т. п. Но из всех условий обычно можно выбрать одно *основное условие*. В первом примере это — получение заданной траектории; во втором примере — получение минимального времени перемещения звена *I* на заданную величину.

Другие примеры основных условий: получение заданного закона движения какого-либо звена при равномерном движении начального звена, обеспечение минимального давления на стойку, воспроизведение поступательного перемещения звена по криволинейной траектории и т. п.

Все остальные условия (кроме основного) называются *дополнительными*. Например, ограничение длин звеньев, минимальные или заданные габариты, минимальный вес, ограничение углов давления, наличие одного или двух кривошипов и т. п. Дополнительные условия в обоих видах синтеза (кинематическом и динамическом) могут быть как кинематическими, так и динамическими, т. е. вид синтеза определяется основным условием.

Целевые функции. Основное условие обычно выражается в виде функции, экстремум которой определяет выходные параметры синтеза. Эту функцию назовем *целевой* (по другой терминологии — *функция цели* или *критерий оптимизации*).

В первом примере (см. рис. 132) целевая функция может быть представлена в виде максимального отклонения шатунной кривой точки *M* от заданной кривой

$$\Delta_{\max} = |y_M - y|_{\max}, \quad (27.1)$$

где y_M — ордината шатунной кривой точки *M* при некотором значении абсциссы x , y — ордината заданной кривой при том же значении абсциссы x .

Выразить целевую функцию (27.1) в явном виде через параметры синтеза не удастся. Однако можно указать алгоритм ее вычисления, т. е. последовательность, в которой надо производить вычисления, чтобы получить величину $\Delta_{\max}$ для данной комбинации параметров синтеза.

Из $\triangle ABD$ находим диагональ *BD* шарнирного четырехзвенника

$$e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}$$

и угол наклона этой диагонали

$$\delta = \arcsin \left(\frac{a}{e} \sin \varphi \right). \quad (27.2)$$

Из $\triangle BCD$ находим угол θ , т. е. угол давления на коромысло *CD* со стороны шатуна *BC*, если считать, что сила, действующая на коромысло, направлена по оси шатуна:

$$\theta = \arcsin \frac{b^2 + c^2 - e^2}{2bc}, \quad (27.3)$$

и угол наклона шатуна BC к стойке

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{c}{e} \cos \vartheta\right) - \delta. \quad (27.4)$$

Из уравнений проекции контура $OABMO$ на координатные оси находим искомые координаты точки M :

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + a \cos(\varphi + \gamma) + k \cos(\alpha + \beta + \gamma), \\ y_M &= y_A + a \sin(\varphi + \gamma) + k \sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned} \quad (27.5)$$

После вычисления координат x_M и y_M шатунной кривой находим ординату y из уравнения заданной кривой, принимая $x = x_M$, и вычисляем модуль разности ординат шатунной кривой и заданной кривой:

$$\Delta = |y_M - y|.$$

Максимальное значение Δ , определяемое при различных углах φ , и есть максимальное отклонение от заданной кривой, т. е. целевая функция (27.1), являющаяся функцией искомых параметров синтеза.

Во втором примере целевая функция есть время поворота звена I на угол φ_p из начальной позиции, определяемой углом φ_0 (см. рис. 133). В этой позиции угловая скорость звена I равна нулю. В конце поворота скорость звена I может отличаться от нуля, т. е. допускается жесткий удар ползуна 3 об ограничитель *). Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии при обобщенной координате φ имеет вид

$$\int_0^{\varphi} \widetilde{M}_n d\varphi = \frac{J_n \omega^2}{2},$$

где $\widetilde{M}_n$ — момент приведенной пары сил и J_n — приведенный момент инерции.

Выполняя интегрирование, получаем

$$t_p = \int_0^{\varphi_p} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{J_n} \int_0^{\varphi} \widetilde{M}_n d\varphi}}.$$

Величина t_p , как целевая функция, есть функция выходных параметров синтеза, число которых значительно больше, чем в предыдущем примере. В параметры синтеза войдут длины звеньев (r, l, e), параметры начальных положений (φ_0, x_0), расстояния до центров

*) Чтобы уменьшить этот удар, надо выбрать конечное положение звена I близким к крайнему.

масс (l_{AS_1} , l_{BS_2}), массы звеньев (m_1 , m_2 , m_3), моменты инерции звеньев (J_{S_1} , J_{S_2}) и параметры пружины.

В обоих примерах оптимальным значением целевой функции считается минимальное ее значение. Но могут быть случаи, когда оптимальным является максимальное значение целевой функции (например, если целевая функция есть к. п. д.).

Целевая функция есть математическое выражение основного условия синтеза. Если выделить одно основное условие синтеза затруднительно, то составляют несколько целевых функций и ищут компромиссное решение, при котором все-таки отдается предпочтение одной из целевых функций.

Ограничения. Дополнительные условия синтеза при решении задач синтеза механизмов также должны быть представлены в математической форме. Эти условия выражаются обычно неравенствами, устанавливающими допустимые области существования параметров синтеза. Поэтому целевая функция вычисляется только для тех комбинаций параметров синтеза, которые удовлетворяют дополнительным условиям синтеза, т. е. ограничениям.

В первом примере выберем три ограничения.

Первое ограничение — ограничение на длины звеньев a , b , c и d . Для того чтобы в механизме не было слишком больших или слишком малых длин звеньев, выбирают четыре положительных числа, удовлетворяющих условиям:

$$l_1 < l_2 < l_3 < l_4, \quad \frac{l_4}{l_1} < m. \quad (27.6)$$

Из этой четверки чисел можно в любой комбинации выбрать длины звеньев, и во всех этих комбинациях ни одна из длин звеньев не будет превосходить другую более чем в m раз.

Второе ограничение — механизм должен быть кривошипно-коромысловым, т. е. надо выполнить условие существования кривошипа, согласно которому в кривошипно-коромысловом механизме кривошип есть наименьшее звено и, кроме того, сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше суммы двух других звеньев.

Отсюда следует, что к условиям (27.6) добавляется еще одно условие

$$l_1 + l_4 < l_2 + l_3. \quad (27.7)$$

Если выполнены условия (27.6) и (27.7), то для получения кривошипно-коромыслового механизма надо принять

$$a = l_1, \quad (27.8)$$

а остальные длины звеньев b , c и d можно выбрать в любом порядке из чисел l_2 , l_3 и l_4 .

Третье ограничение — угол давления на коромысло со стороны шатуна должен быть меньше допускаемого значения $\vartheta_{\text{доп}}$:

$$\vartheta < \vartheta_{\text{доп}}. \quad (27.9)$$

При синтезе направляющих шарнирных механизмов обычно принимают $\vartheta_{\text{доп}} = 45^\circ - 60^\circ$.

Значения угла давления при различных φ подсчитываются по формуле (27.3) после выбора длин звеньев, удовлетворяющих условиям (27.6) — (27.8). Если наибольшее значение угла давления не удовлетворяет условию (27.9), то должна быть выбрана новая комбинация a , b , c и d .

Во втором примере ограничение по углу давления на звено 1 имеет вид

$$\vartheta = \arcsin \frac{x \cos(\varphi_0 + \varphi) - e \sin(\varphi_0 + \varphi) - r}{l} < \vartheta_{\text{доп}}.$$

Ограничения на длины звеньев назначаются в виде допустимых интервалов в зависимости от конструкции звеньев, а ограничения на массы и моменты инерции получаются из этих интервалов, так как при определенной длине звена его масса или момент инерции могут быть конструктивно выполнены только в некоторых пределах. Ограничения на параметры пружины определяются условиями ее размещения.

Из приведенного примера видно, что, как правило, при динамическом синтезе ограничения более тесно связаны с конструктивными формами звеньев, чем при кинематическом синтезе.

Методы оптимизации в синтезе механизмов с применением ЭВМ. Любая задача синтеза механизмов может быть сведена к задаче отыскания таких параметров синтеза, при которых выполняются принятые ограничения, а целевая функция имеет минимальное значение. Если оптимальное значение целевой функции соответствует ее максимальному значению, то, используя обратные величины, всегда можно свести задачу отыскания максимума к задаче отыскания минимума.

При небольшом числе параметров синтеза условия минимума целевой функции могут быть получены на основании известных условий экстремума функции нескольких переменных. При большом числе параметров эта задача аналитически не решается, и приходится прибегать к нахождению искомых параметров путем перебора (иногда случайного, иногда упорядоченного) различных вариантов механизма. Возможности такого перебора практически появились только после создания ЭВМ.

Условимся называть *оптимизацией* (в синтезе механизмов) определение выходных параметров синтеза из условия минимума целевой функции при выполнении принятых ограничений *). При большом числе параметров оптимизация всегда производится с применением ЭВМ и сводится к методам поиска комбинаций параметров синтеза. Все, теперь уже многочисленные, методы оптимизации мож-

*) Эта задача известна также под названием нелинейного программирования.

по свести в три группы: случайный поиск, направленный поиск и комбинированный поиск. Практическое применение каждого из этих методов поясним на примере решения задачи синтеза шарнирного четырехзвенника по заданной траектории точки шатуна.

Случайный поиск. Метод случайного поиска, называемый также методом Монте-Карло, основан на том, что при одном и том же числе испытаний вероятность получения решения, близкого к оптимальному, при случайном поиске больше, чем при последовательном переборе через равные интервалы изменения отдельных параметров.

В рассматриваемом примере решение задачи синтеза с применением случайного поиска на ЭВМ выполняется в следующем порядке.

1. Произвольно выбираются выходные параметры синтеза из набора случайных чисел. Проверяются ограничения (27.6) — (27.9).

2. По значениям параметров синтеза, удовлетворяющих ограничениям, вычисляется целевая функция $\Delta_{\max}$ (27.1), которая идет в память ЭВМ вместе с соответствующими параметрами синтеза.

3. Выбираются другие случайные значения параметров синтеза, проверяются ограничения и вычисляется целевая функция $\Delta_{\max}$. Если новое значение $\Delta_{\max}$ меньше полученного на предыдущем этапе, то оно идет в память машины вместе с соответствующими параметрами синтеза, а прежние значения сбрасываются.

Указанные этапы повторяются до тех пор, пока $\Delta_{\max}$ не станет равной допустимому значению или же практически перестанет уменьшаться.

Метод случайного поиска достаточно прост, позволяет обозреть всю область возможных значений параметров синтеза, но требует выполнения очень большого объема вычислений. Число просчитываемых вариантов иногда достигает десятков и даже сотен тысяч.

Направленный поиск. Несмотря на то, что современные ЭВМ позволяют сравнивать десятки и сотни тысяч вариантов механизма, все же следует стремиться к уменьшению трудоемкости вычислений с целью удешевления процесса проектирования механизма. Уменьшение трудоемкости вычислений может быть достигнуто путем применения направленного поиска, т. е. такого поиска искомых параметров синтеза, при котором переход от одной комбинации параметров к другой происходит не случайно, а в направлении, соответствующем уменьшению величины целевой функции. Многочисленные методы направленного поиска отличаются между собой способами выбора направления, по которому следует переходить от одних значений параметров к другим. При решении задачи синтеза механизмов иногда достаточно применить самый простейший способ, который дает следующую последовательность вычислений.

1. Как и при случайном поиске, произвольно выбирается первая комбинация искомых параметров ($a_1, b_1, c_1, \dots$), проверяются ограничения и вычисляется целевая функция.

2. Изменяется один из параметров синтеза, например $a = a_1$, на малую величину Δa . Оставляя все другие параметры неизменными, вычисляем целевую функцию при измененном значении параметра $a_1 + \Delta a$. Если целевая функция $\Delta_{\max}$ уменьшилась, то выбранное направление изменения параметра a — правильное, и в память машины идут новые значения параметра $a_1 + \Delta a$ и целевой функции $\Delta_{\max}$. Если же $\Delta_{\max}$ увеличилось, то надо изменить знак приращения Δa на обратный, т. е. вычислить $\Delta_{\max}$ при $a_1 - \Delta a$. Тогда $\Delta_{\max}$ либо уменьшится, либо останется той же самой, если достигнут минимум по параметру a .

3. Последовательно изменяются все другие параметры. Правильное направление изменения каждого параметра определяется так же, как и в п. 2.

4. После того, как были изменены все параметры, вновь дается приращение какому-либо параметру (например, a), и эти изменения повторяются до тех пор, пока не будет достигнут минимум целевой функции $\Delta_{\max}$.

Быстрее можно достигнуть искомого минимума целевой функции, если есть возможность определять частные производные целевой функции по параметрам синтеза и по значениям этих производных находить направления, по которым функция убывает наиболее быстро (метод наискорейшего спуска и другие градиентные методы).

Штрафные функции. Проверку ограничений при направленном поиске можно совместить с вычислением целевой функции, если искать минимум функции

$$E = \Delta_{\max} + q \sum_{i=1}^n p_i,$$

где q — постоянный коэффициент, p_i — штрафные функции (штрафы), значения которых резко увеличиваются у границ допустимой области изменения параметров синтеза.

Например, ограничение по углу давления ϑ может быть выражено штрафной функцией

$$p = \frac{1}{\lg(\vartheta_{\text{доп}}/\vartheta)}.$$

При $\vartheta = \vartheta_{\text{доп}}$ штрафная функция $p \rightarrow \infty$, и поэтому штраф за приближение к границе допустимых углов давления будет «отталкивать» от этой границы выбираемое направление изменения параметров синтеза. Если шаг изменения параметров синтеза оказался настолько большим, что выбранная точка вышла из допустимой области, то штрафная функция должна изменить свой знак. В рассматриваемом примере при $\vartheta > \vartheta_{\text{доп}}$ функция p становится отрицательной. Изменение знака функции p указывает на необходимость уменьшения шага.

По мере уменьшения $\Delta_{\max}$ уменьшается и коэффициент q так, чтобы в пределах точности вычислений совпали бы минимумы функций E и $\Delta_{\max}$.

Локальный и глобальный минимумы. В общем случае целевая функция может иметь несколько минимумов, отличающихся по абсолютной величине. Наименьший минимум в теории оптимизации принято называть *глобальным минимумом*, а все остальные минимумы — *локальными*. На рис. 134, а показан график изменения величины $f = \Delta_{\max}$ как функции одного параметра a . В точке 3 находится глобальный минимум, все остальные минимумы (1, 2, 4) — локальные. Если целевая функция зависит от многих параметров,

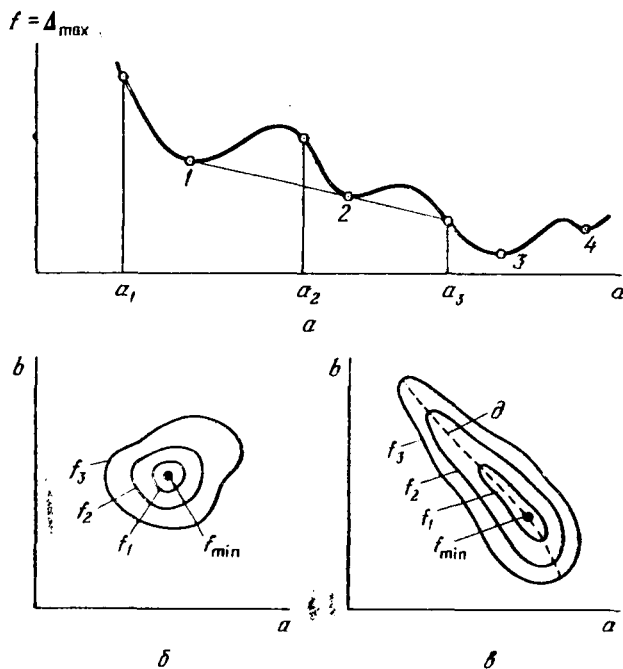


Рис. 134

то соответственно надо рассматривать минимумы многомерной поверхности. Локальный минимум такой поверхности имеет лишь «местное» значение (отсюда происходит термин — локальный минимум), и для отыскания глобального минимума надо просматривать всю многомерную область возможных комбинаций искомых параметров (отсюда происходит термин — глобальный минимум).

Комбинированный поиск. Направленный поиск обычно приводит к отысканию лишь локального минимума. Случайный поиск более

подходит к отысканию глобального минимума, так как при нем просматривается вся область изменения параметров. Однако он дает слишком большой объем вычислений, и поэтому применяют комбинированные методы, при которых случайным поиском просматривают и сравнивают значения целевой функции в отдельных частях (районах) области изменения параметров, и затем направленным поиском находят локальные минимумы для тех частей области, где ожидается получение глобального минимума. При нахождении локального минимума следует иметь в виду два возможных случая его расположения.

В первом случае он располагается на дне «воронки», как показано на рис. 134, б для функции параметров a и b с линиями уровней $f_3 > f_2 > f_1 > f_{\min}$. Во втором случае он располагается на линии дна «оврага» (рис. 134, в). Достижение дна «оврага» δ можно ошибочно принять за достижение локального минимума при малом числе направлений, по которым проверяется абсолютная величина целевой функции. Для нахождения локального минимума иногда приходится длительное время идти по линии дна «оврага». Если требуется найти глобальный минимум, то обычно предпочитают после достижения линии дна «оврага» сразу переходить к отысканию другого локального минимума.

После достижения второго локального минимума (или дна «оврага») можно указать направление, где искать следующий локальный минимум. Предположим, например, что для случая, показанного на рис. 134, а, поиск был начат из некоторой точки $a = a_1$ (случайно выбранной). Направленный поиск даст тогда локальный минимум 1. Выбирая в достаточном удалении от точки $a = a_1$ другую случайно выбранную точку $a = a_2$, можно получить второй локальный минимум 2. Третья точка $a = a_3$ выбирается на направлении линии, соединяющей локальные минимумы 1 и 2, и т. д.

Различные методы оптимизации с применением ЭВМ, рассмотренные на указанных примерах, в той же последовательности могут быть использованы для любой другой задачи синтеза механизмов. Поэтому можно утверждать, что эти методы являются общими методами синтеза механизмов, а сама проблема синтеза механизмов перестала быть проблемой отыскания методов решения отдельных задач синтеза.

§ 91. Синтез механизмов по методу приближения функций

Постановка задачи приближенного синтеза механизмов по Чебышеву. Методы оптимизации с применением ЭВМ дают практически возможность решить любую задачу синтеза механизмов. Однако эти методы довольно трудоемки и, главное, не позволяют видеть влияние отдельных параметров синтеза на качественные характеристики механизма. Другими словами, методы оптимизации дают количественное решение любой задачи синтеза механизмов, но не

дают, как правило, возможности производить качественный анализ ожидаемых решений. Такой анализ допускает метод синтеза механизмов, основанный на теории приближения функций.

Задача приближения функций состоит в том, что заданная функция $y = F(x)$ приближенно замещается другой функцией $y = P(x)$, мало от нее отличающейся (рис. 135). Функция $y = P(x)$, называемая *приближающей*, содержит m постоянных параметров: $r_1, r_2, \dots, r_m$. Например, при синтезе шарнирного четырехзвенника по заданной траектории точки шатуна $y = F(x)$ есть уравнение заданной траектории, а $y = P(x)$ — уравнение шатунной кривой, содержащей девять постоянных параметров.

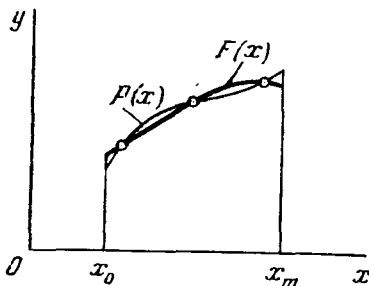


Рис. 135

Отклонение Δ приближающей функции от заданной, выражаемое, например, разностью ординат, является функцией аргумента x и параметров приближающей функции

$$\Delta = \Delta(x, r_1, r_2, \dots, r_m). \quad (27.10)$$

Параметры приближающей функции в задачах синтеза механизмов совпадают с параметрами синтеза или с их комбинациями. В отличие от методов оптимизации, теория приближения функций дает возможность найти искомые значения выходных параметров синтеза не путем поиска, а непосредственно из системы уравнений, составляемой на основании условий минимума максимальной величины отклонения (27.10).

Синтез механизмов по методу приближения функций называют также *приближенным синтезом механизмов*. Впервые этот метод был применен П. Л. Чебышевым*). Согласно Чебышеву задача приближенного синтеза механизмов может быть разделена на три этапа.

Первый этап — выбор основного условия синтеза и дополнительных ограничений. Этот этап совпадает с рассмотренным в предыдущем параграфе выбором целевой функции и ограничений. Отличие состоит лишь в том, что при оптимизации с применением ЭВМ можно вычислять значения целевой функции путем последовательных расчетов по отдельным формулам и соотношениям, включая даже решение системы уравнений. При решении же задач синтеза механизмов по методу приближения функций обязательно надо иметь аналитическое выражение отклонения от заданной функции в явном или неявном виде.

*) Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. — СПб., 1853.

Второй этап — упрощение аналитического выражения основного условия синтеза в виде отклонения от заданной функции. Этот этап является решающим для успешного применения метода приближения функций. Дело в том, что математическая теория приближения функций разработана только для сравнительно простых функций. При синтезе механизмов, как правило, основное условие и, следовательно, отклонение от заданной функции имеет сложное аналитическое выражение.

Одним из наиболее удобных способов упрощения аналитического выражения отклонения от заданной функции в задачах синтеза механизмов является использование *взвешенной разности* (*взвешенного отклонения*). Этот способ впервые был использован П. Л. Чебышевым при решении задачи синтеза механизма, направляющего по дуге окружности, и впоследствии обобщен на другие задачи синтеза механизмов *).

Взвешенной разностью называется выражение вида

$$\Delta_q = q\Delta,$$

где вес q — непрерывная функция аргумента x и параметров приближающей функции, не обращающаяся в нуль на рассматриваемом отрезке изменения аргумента x .

Если вес q незначительно отличается от постоянной величины, то условия минимума взвешенной разности почти совпадают с условиями минимума отклонения от заданной функции Δ . В то же время, выбирая различные веса, удовлетворяющие указанному условию, можно получить взвешенную разность очень простого вида и использовать ее в дальнейшем вместо отклонения Δ .

Пусть, например, отклонение от заданной функции представлено иррациональной функцией

$$\Delta = \sqrt[3]{r_1x^2 + r_2x + r_3} - r_4.$$

Эта функция мало удобна для вычисления неизвестных параметров r_1 , r_2 , r_3 и r_4 вследствие иррациональности функции.

Выберем в качестве веса функцию

$$q = \sqrt[3]{r_1x^2 + r_2x + r_3} + r_4.$$

При малой величине Δ

$$\sqrt[3]{r_1x^2 + r_2x + r_3} \approx r_4$$

и вес $q \approx 2r_4$.

Взвешенная разность при этом весе будет многочленом

$$\Delta_q = r_1x^2 + r_2x + r_3 - r_4^2.$$

*) Левитский Н. И. Синтез механизмов по Чебышеву. — М.: Изд-во АН СССР, 1946.

Вследствие того, что вес приблизительно постоянен, условия минимума взвешенной разности Δ_q и отклонения от заданной функции Δ на заданном отрезке изменения x почти совпадают. Следовательно, совпадают приближенно и значения параметров r_1, r_2, r_3 и r_4 , при которых этот минимум достигается. Эти значения параметров находятся из условий минимума взвешенной разности, так как ее аналитическое выражение в виде многочлена проще, чем выражение отклонения от заданной функции, а точность определения искомых параметров практически вполне достаточна.

Третий этап приближенного синтеза — вычисление параметров синтеза из условий минимума отклонения от заданной функции. Этот этап выполняется сравнительно просто, если получено простое аналитическое выражение для отклонения от заданной функции или для функции, заменяющей это отклонение (взвешенной разности). Способ вычисления искомых параметров зависит от вида используемого приближения функций.

Интерполирование. Простейшим видом приближения функций является интерполирование, при котором значения заданной функции $y = F(x)$ и приближающей функции $y = P(x)$ на отрезке (x_0, x_m) совпадают в k точках, называемых *узлами интерполирования* (см. рис. 135).

Искомые параметры приближающей функции определяются из системы уравнений, выражающих равенство нулю отклонения в узлах интерполирования:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= F(x_1), \\ P(x_2) &= F(x_2), \\ &\dots \dots \dots \\ P(x_k) &= F(x_k). \end{aligned} \quad (27.11)$$

Система уравнений (27.11) получается линейной, если приближающая функция $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + \dots + p_n f_n(x), \quad (27.12)$$

где $p_0, p_1, \dots, p_n$ — постоянные коэффициенты, в которые входят искомые параметры; $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ — линейно независимые*) непрерывные функции аргумента x , не содержащие неизвестных параметров.

Этот вид функции $P(x)$ называется *обобщенным полиномом*, так как из него при частных предположениях относительно функций $f_i(x)$ могут быть получены обычные полиномы (степенные многочлены), тригонометрические полиномы и т. п.

*) Функции называются линейно независимыми, если ни одна из них не является линейной комбинацией других.

Тогда коэффициенты c_{kl} и γ_k системы уравнений (27.21) должны вычисляться по формулам

$$c_{kl} = c_{lk} = \sum_{i=0}^m f_k(x_i) f_l(x_i), \quad k, l = 0, 1, \dots, n, \quad (27.23)$$

$$\gamma_k = \sum_{i=0}^m F(x_i) f_k(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (27.24)$$

Наилучшее приближение функций. Квадратическое приближение в среднем дает малое отклонение от заданной функции, но на отдельных участках отклонение может значительно отличаться от среднего значения. От этого недостатка избавлено *наилучшее приближение функций*, при котором максимальное отклонение от заданной функции имеет минимально возможную величину (отсюда название этого метода приближения — наилучшее).

Условия наилучшего приближения впервые были указаны П. Л. Чебышевым для некоторого класса приближающих функций.

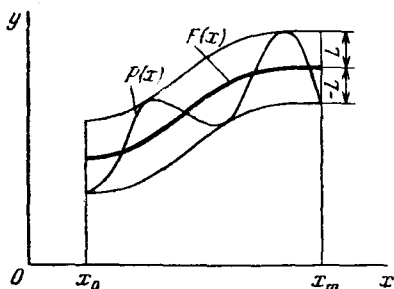


Рис. 136

Согласно этим условиям отклонение от заданной функции должно определенное число раз достигать своего предельного значения L с последовательно чередующимися знаками. Геометрически это приближение характеризуется тем, что график приближающей функции $P(x)$ оказывается заключенным между кривыми, отстоящими от графика заданной функции $F(x)$ на величину $\pm L$ (рис. 136)*). В этом случае приближение называется *равномерным*, так как отклонение от заданной

функции равномерно достигает своих предельных значений. Однако не всякое равномерное приближение оказывается наилучшим. Для того чтобы равномерное приближение было наилучшим, необходимо, чтобы число предельных отклонений было не меньше некоторого числа, зависящего от класса приближающей функции.

Например, если приближающая функция есть многочлен степени n , то число предельных отклонений должно быть равно $n + 2$.

В дальнейшем при вычислении неизвестных коэффициентов приближающей функции будем считать, что число предельных отклонений на единицу больше числа неизвестных коэффициентов.

Полученное при этом условии равномерное приближение в задаче синтеза механизмов обычно является наилучшим.

*) На рис. 136 график заданной функции имеет более простую форму по сравнению с графиком приближающей функции, что характерно для задач синтеза направляющих механизмов.

Пусть, например, приближающая функция есть обобщенный полином (27.12), содержащий $n+1$ неизвестных коэффициентов p_k . Число предельных отклонений L примем на единицу большим числа неизвестных коэффициентов. Тогда получим систему $n+2$ уравнений, выражающих условие, что в точках предельных отклонений x_l имеем

$$p_0 f_0(x_l) + p_1 f_1(x_l) + \dots + p_n f_n(x_l) - F(x_l) = \varepsilon^l L, \quad (27.25)$$

$$l = 1, \dots, n+2, \quad \varepsilon = -1,$$

и систему $n+2$ уравнений, выражающих равенство нулю производной отклонения от заданной функции по аргументу x в точках предельных отклонений:

$$p_0 f'_0(x_l) + p_1 f'_1(x_l) + \dots + p_n f'_n(x_l) - F'(x_l) = 0, \quad (27.26)$$

$$l = 1, \dots, n+2,$$

где штрихами обозначены производные по x .

Общее число уравнений (27.25) и (27.26) равно $2n+4$. Число неизвестных также равно $2n+4$ ($p_0, p_1, \dots, p_n, x_0, x_1, \dots, x_{n+2}, L$). Однако решение этой системы затруднительно, и поэтому прибегают обычно к методу последовательных приближений, заключающемуся в том, что решаем только систему $n+2$ уравнений (27.25), считая, что значения аргумента x_l в точках предельных отклонений известны.

Выбрав некоторую комбинацию предполагаемых значений точек предельного отклонения x_l и определив неизвестные коэффициенты p_k из системы уравнений (27.25), вычисляют отклонения от заданной функции. Если предельные отклонения оказались не равными $\pm L$, то надо выбрать новую комбинацию точек x_l . Выбор этих точек производят так, чтобы в одной из них достигалось наибольшее по абсолютной величине значение отклонения, а во всех остальных — значения, возможно большие по абсолютной величине. Кроме того, знаки отклонений в выбранных точках должны чередоваться. Для новых значений x_l вычисляются коэффициенты p_k , и процесс последовательных приближений повторяют до тех пор, пока не будет достигнуто равенство предельных отклонений с последовательно чередующимися знаками. Этот метод вычисления равномерного приближения называется также *методом уравнивания отклонений*.

Быстрота сходимости процесса уравнивания отклонений определяется удачным выбором системы точек x_l в первом приближении. Если отклонение от заданной функции характеризуется разностью ординат, то рекомендуется выбирать точки предельных отклонений по формуле Чебышева*)

$$x_l = \frac{x_0 + x_m}{2} + \frac{x_0 - x_m}{2} \cos \frac{l\pi}{m}, \quad l = 0, 1, \dots, m. \quad (27.27)$$

*) Эта формула получается на основании приближенной замены отклонения от заданной функции степенным многочленом.

Несколько лучший результат дает формула *), которая учитывает не только число точек предельного отклонения и длину участка приближения, но и в некоторой мере форму графика заданной функции

$$s_l = 0,5 \left(1 - \cos \frac{l\pi}{m} \right) s, \quad l=0, 1, \dots m, \quad (27.28)$$

где s_l — длина дуги графика заданной функции, измеряемая от начала участка приближения до l -й точки предельного отклонения, s — длина дуги графика заданной функции на участке приближения.

Положение точек предельного отклонения при вычислении по формулам (27.27) и (27.28) достаточно определить с точностью до двух или трех значащих цифр, так как любая формула для выбора этих точек дает лишь приближенное их расположение. Поэтому определение длины дуги s может быть выполнено графически путем замены дуги s ломаной, состоящей из хорд, мало отличающихся от стягиваемых ими дуг.

Итак, если приближающая функция представлена в виде обобщенного полинома (27.12), то при любом виде приближения можно найти искомые коэффициенты этой функции из системы линейных уравнений. В последующих параграфах метод приближения функций будет применен к синтезу плоских и пространственных механизмов, включая и синтез гидравлических механизмов.

ГЛАВА 28

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

§ 92. Синтез передаточных механизмов

Постановка задачи синтеза передаточного шарнирного четырехзвенника. *Передаточным механизмом* называется механизм для воспроизведения заданной функциональной зависимости между перемещениями звеньев, образующих кинематические пары со стойкой. Для синтеза передаточного шарнирного четырехзвенника (рис. 137, а) можно использовать как метод оптимизации, так и метод приближения функций. В данной главе ограничимся изложением метода приближения функций, так как метод оптимизации был пояснен в предыдущей главе на примере синтеза шарнирного четырехзвенника для воспроизведения заданной траектории.

Обозначим через φ входную координату, т. е. угол поворота входного звена AB , отсчитываемый от линии начала отсчета I , и через ψ — выходную координату, т. е. угол поворота выходного звена CD , отсчитываемый от начала отсчета II .

*) Левитский Н. И. К синтезу шарнирных механизмов // Труды Института машиноведения. Вып. 69.— М.: АН СССР, 1958.

Тогда заданная функция примет вид

$$\psi = \psi(\varphi). \quad (28.1)$$

Шарпирный четырехзвенник может обеспечить точное воспроизведение заданной функции (28.1) только в некоторых частных случаях. В общем же случае он воспроизводит некоторую другую функцию

$$\psi_m = \psi_m(\varphi, a, b, c, \alpha, \beta), \quad (28.2)$$

которая зависит от аргумента φ и от пяти параметров синтеза: относительных длин звеньев a, b, c (за единицу принята длина стойки),

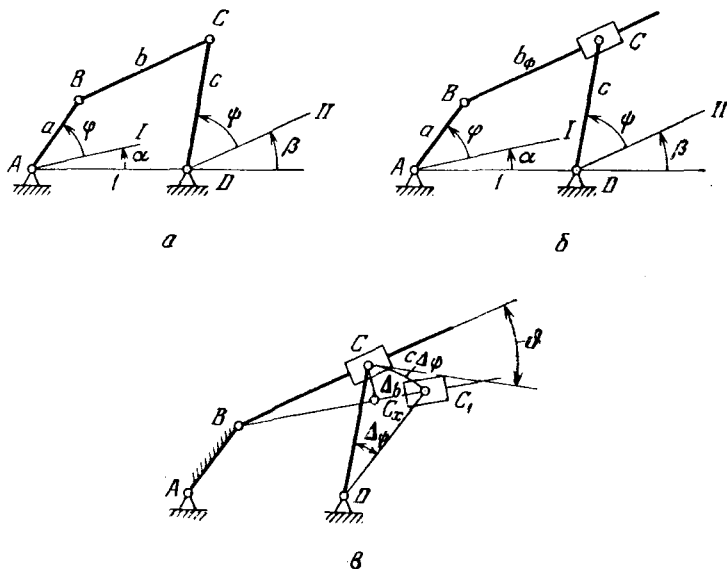


Рис. 137

и углов α и β , определяющих начала отсчетов углов φ и ψ . Относительные длины берутся потому, что при подобном изменении четырехугольника $ABCD$ углы φ и ψ не изменяются.

Для того чтобы механизм воспроизводил заданную функцию достаточно точно, следует выбрать такую комбинацию параметров синтеза, при которой функция (28.2) возможно мало отличается от заданной функции (28.1) на рассматриваемом отрезке изменения аргумента от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_m$. Условимся при этом измерять отклонение от заданной функции величиной разности

$$\Delta\psi = \psi_m - \psi, \quad (28.3)$$

где φ_m — угол поворота звена CD в механизме при некотором значении угла φ ; φ — заданное значение угла поворота звена CD при том же значении угла φ .

Аналитическое выражение разности Δ_φ можно получить, используя методы кинематического анализа, но для вычисления неизвестных параметров из условий приближения функций оно оказывается неудобным. Покажем, что можно найти более простое выражение в виде взвешенной разности

$$\Delta_q = q\Delta_\varphi, \quad (28.4)$$

которое при вычислении неизвестных параметров может заменить отклонение от заданной функции при условии, что вес q мало отличается от постоянной величины.

Для того чтобы получить аналитическое выражение взвешенной разности Δ_q , представим себе, что в шарнирный четырехзвенник введено дополнительное звено в виде ползуна, перемещающегося по оси шатуна (рис. 137, б). Полученный пятизвенный механизм имеет две степени свободы, т. е. двум звеньям этого механизма могут быть заданы независимые законы движения. Поэтому в отличие от шарнирного четырехзвенника в рассматриваемом механизме звенья AB и CD могут в каждый момент времени занимать предписанные положения под заданными углами φ и φ . Но при этом длина шатуна, т. е. расстояние между центрами шарниров B и C , будет переменной. Обозначим эту переменную (фиктивную) длину шатуна в указанном пятизвенном механизме через b_φ . Чем меньше отклонение переменной длины b_φ от постоянной величины b , тем меньше отклонение угла поворота звена CD в шарнирном четырехзвеннике от заданной величины φ . Следовательно, отклонение от заданной функции можно характеризовать разностью

$$\Delta_b = b - b_\varphi \quad (28.5)$$

или взвешенной разностью

$$\Delta_q = b^2 - b_\varphi^2, \quad (28.6)$$

полученной умножением разности Δ_b на сумму $b + b_\varphi$.

Если величина Δ_b мала, то $b + b_\varphi \approx 2b$ и

$$\Delta_q \approx 2b\Delta_b. \quad (28.7)$$

Чтобы установить связь между величинами Δ_b и Δ_φ , надо в механизме, показанном на рис. 137, б, закрепить звено AB и повернуть звено CD на угол Δ_φ (рис. 137, в). Тогда центр шарнира C переместится в точку C_1 по дуге окружности длиной $c\Delta_\varphi$, а ползун по направляющей получит перемещение $\Delta_b = c_x c_1$. При малом угле поворота Δ_φ фигура CC_1C_1 может быть принята за прямоугольный треугольник с углом ϑ при вершине C_1 . Отсюда

$$\Delta_b = c\Delta_\varphi \cos \vartheta. \quad (28.8)$$

Из соотношений (28.7) и (28.8) получаем приближенную формулу, устанавливающую связь между взвешенной разностью Δ_q и отклонением от заданной функции Δ_ψ :

$$\Delta_\psi \approx \frac{\Delta_q}{2bc \cos \psi}. \quad (28.9)$$

Угол ψ , т. е. угол давления на коромысло со стороны шатуна, вычисляется по формуле (27.3). Из формулы (28.9) видно, что пользоваться величиной Δ_q вместо отклонения Δ_ψ недопустимо при значениях угла ψ , близких к 90° . Это условие, однако, не накладывает серьезных ограничений на применение взвешенной разности для вычисления искомых параметров, так как при синтезе шарнирного четырехзвенника становится обязательным условие, чтобы угол давления был не больше $\psi_{\text{доп}}$.

Для вывода аналитического выражения взвешенной разности находим величину b_ψ^2 как расстояние между точками B и C :

$$b_\psi^2 = [a \cos(\varphi + \alpha) - 1 - c \cos(\psi + \beta)]^2 + [a \sin(\varphi + \alpha) - c \sin(\psi + \beta)]^2.$$

Подставляя найденное значение b_ψ^2 в формулу (28.6) и раскрывая скобки, получаем

$$\Delta_q = b^2 - a^2 - c^2 - 1 + 2a \cos(\varphi + \alpha) - 2c \cos(\psi + \beta) + \\ + 2ac \cos(\varphi + \alpha) \cos(\psi + \beta) + 2ac \sin(\varphi + \alpha) \sin(\psi + \beta),$$

или

$$\Delta_q = 2ac \cos(\varphi + \alpha - \psi - \beta) + 2a \cos(\varphi + \alpha) - \\ - 2c \cos(\psi + \beta) + b^2 - a^2 - c^2 - 1. \quad (28.10)$$

Полученное выражение взвешенной разности содержит пять искомых параметров синтеза a , b , c , α , β . Их надо определить так, чтобы взвешенная разность была мала на заданном интервале изменения угла φ . С этой целью представим взвешенную разность в виде разности двух функций, одна из которых не должна содержать искомых параметров синтеза:

$$\Delta_q = P(\varphi) - F(\varphi). \quad (28.11)$$

Функцию $F(\varphi)$, не содержащую параметров синтеза, можно считать заданной функцией, а функцию $P(\varphi)$ — приближающей, хотя надо помнить, что функция $F(\varphi)$ в общем случае не совпадает с заданной функцией $\psi = \psi(\varphi)$ и $P(\varphi)$ не совпадает с $\psi_* = \psi_*(\varphi)$. Существенно лишь то, что, определив параметры синтеза из условий приближения функций $F(\varphi)$ и $P(\varphi)$, мы получаем малые величины взвешенной разности, а следовательно, и отклонения Δ_ψ .

Можно также представлять взвешенную разность в виде произведения разности (28.11) на постоянный коэффициент A , зависящий

только от параметров синтеза:

$$\Delta_q = A [P(\varphi) - F(\varphi)], \quad (28.12)$$

так как условия минимума функций (28.11) и (28.12) совпадают.

Выбор функций $F(\varphi)$ и $P(\varphi)$ для одной и той же взвешенной разности зависит в первую очередь от числа вычисляемых параметров синтеза.

Вычисление трех параметров синтеза. Пусть, например, в рассматриваемой задаче синтеза передаточного шарнирного четырехзвенника требуется вычислить три параметра a , b и c . В этом случае углы α и β считаются заданными.

Выражение (28.10) можно преобразовать к виду (28.12), приняв, что приближающая функция $P(\varphi)$ есть обобщенный полином (27.12), состоящий из трех членов:

$$\Delta_q = A [p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + p_2 f_2(\varphi) - F(\varphi)], \quad (28.13)$$

где

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \cos(\varphi + \alpha - \psi - \beta), \\ f_0(\varphi) &= \cos(\varphi + \alpha), \\ f_1(\varphi) &= \cos(\psi + \beta), \\ f_2(\varphi) &= 1; \end{aligned} \quad (28.14)$$

$$\begin{aligned} A &= -2ac, \quad p_0 = -1/c, \quad p_1 = 1/a, \\ p_2 &= \frac{-b^2 + a^2 + c^2 + 1}{2ac}. \end{aligned} \quad (28.15)$$

При интерполировании коэффициенты p_0 , p_1 и p_2 вычисляются из системы трех линейных уравнений (27.13)

$$\begin{aligned} p_0 \cos(\varphi_1 + \alpha) + p_1 \cos(\psi_1 + \beta) + p_2 &= \cos(\varphi_1 + \alpha - \psi_1 - \beta), \\ p_0 \cos(\varphi_2 + \alpha) + p_1 \cos(\psi_2 + \beta) + p_2 &= \cos(\varphi_2 + \alpha - \psi_2 - \beta), \\ p_0 \cos(\varphi_3 + \alpha) + p_1 \cos(\psi_3 + \beta) + p_2 &= \cos(\varphi_3 + \alpha - \psi_3 - \beta), \end{aligned} \quad (28.16)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ — значения углов φ и ψ в узлах интерполирования.

При квадратическом приближении на отрезке $0, \varphi_m$ коэффициенты p_0, p_1 и p_2 вычисляются из системы линейных уравнений (27.21):

$$\begin{aligned} c_{00}p_0 + c_{01}p_1 + c_{02}p_2 &= \gamma_0, \\ c_{10}p_0 + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 &= \gamma_1, \\ c_{20}p_0 + c_{21}p_1 + c_{22}p_2 &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (28.17)$$

где

$$\begin{aligned} c_{kl} &= c_{lk} = \int_0^{\varphi_m} f_k(\varphi) f_l(\varphi) d\varphi, \quad k, l = 1, 2, 3, \\ \gamma_k &= \int_0^{\varphi_m} F(\varphi) f_k(\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

При равномерном приближении коэффициенты p_0, p_1, p_2 и максимальная величина взвешенной разности L вычисляются из системы линейных уравнений (27.25):

$$p_0 f_0(\varphi_l) + p_1 f_1(\varphi_l) + p_2 f_2(\varphi_l) - F(\varphi_l) = \varepsilon^l \frac{L}{A}, \quad (28.18)$$

$$\varepsilon = -1, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

Углы φ_l выбираются по формуле (27.27) с заменой x на φ :

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0,25\varphi_m, \quad \varphi_2 = 0,75\varphi_m, \quad \varphi_3 = \varphi_m.$$

При любом виде приближения функций искомые параметры синтеза определяются по формулам, которые получаются из системы уравнений (28.15):

$$c = -1/p_0, \quad a = 1/p_1, \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 + 1 - 2acp_2}.$$

Затем подсчитываются отклонения от заданной функции по приближенной формуле (28.9). При вычислении равномерного приближения, если модули предельных отклонений оказались не равными между собой, процесс уравнивания отклонений повторяется при других положениях точек предельных отклонений, как было указано в предыдущей главе. Заметим, однако, что наилучшее приближение получается только при вычислении максимального числа параметров синтеза, т. е. в рассматриваемом примере при вычислении пяти параметров. Поэтому при вычислении трех и четырех параметров обычно применяется квадратичное приближение.

Вычисление четырех параметров синтеза. Пусть, например, требуется вычислить параметры a, b, c и β . Тогда выражение взвешенной разности может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta_4 = A [p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + p_2 f_2(\varphi) + p_3 f_3(\varphi) + p_4 f_4(\varphi) - F(\varphi)], \quad (28.19)$$

где

$$A = -2ac \cos \beta, \quad p_0 = -\operatorname{tg} \beta,$$

$$p_1 = -\frac{1}{c \cos \beta}, \quad p_2 = \frac{1}{a}, \quad (28.20)$$

$$p_3 = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \beta, \quad p_4 = \frac{-b^2 + a^2 + c^2 + 1}{2ac \cos \beta};$$

$$F(\varphi) = \cos(\varphi + \alpha - \psi), \quad f_0(\varphi) = \sin(\varphi + \alpha - \psi),$$

$$f_1(\varphi) = \cos(\varphi + \alpha), \quad f_2(\varphi) = \cos \psi, \quad (28.21)$$

$$f_3(\varphi) = \sin \psi, \quad f_4(\varphi) = 1.$$

Пять коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_4$ содержат четыре неизвестных параметра. Поэтому только четыре коэффициента могут быть независимыми, а пятый должен быть их комбинацией. В рассматриваемом случае

$$p_3 = p_0 p_2. \quad (28.22)$$

Для вычисления коэффициентов p_k , при которых достигается минимум среднеквадратического значения взвешенной разности, надо составить систему уравнений (27.17), выполняя дифференцирование по коэффициентам p_0, p_1, p_2 и p_4 . Эта система уравнений оказывается громоздкой из-за дополнительной зависимости между коэффициентами (28.22). Более простой, хотя и приближенной, получается система уравнений (27.21), которая составляется в предположении, что все коэффициенты p_k независимы. При малых значениях отклонения от заданной функции получаемое решение близко к решению, соответствующему квадратическому приближению*). Из пяти уравнений системы (27.21) надо взять только четыре — соответственно числу вычисляемых параметров (например, первые четыре уравнения) и вместо коэффициента p_3 подставить его значение из соотношения (28.22).

Тогда система уравнений (27.21) принимает вид

$$\begin{aligned} c_{00}p_0 + c_{01}p_1 + c_{02}p_2 + c_{03}p_0p_2 + c_{04}p_4 &= \gamma_0, \\ c_{10}p_0 + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + c_{13}p_0p_2 + c_{14}p_4 &= \gamma_1, \\ c_{20}p_0 + c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + c_{23}p_0p_2 + c_{24}p_4 &= \gamma_2, \\ c_{30}p_0 + c_{31}p_1 + c_{32}p_2 + c_{33}p_0p_2 + c_{34}p_4 &= \gamma_3, \end{aligned} \quad (28.23)$$

где $c_{kl} = c_{lk}$ и γ_k подсчитываются по формулам (27.19) и (27.20) или (27.23) и (27.24), которые в данном случае имеют вид

$$c_{kl} = c_{lk} = \sum_{i=0}^m f_k(\varphi_i) f_l(\varphi_i), \quad \gamma_k = \sum_{i=0}^m F(\varphi_i) f_k(\varphi_i),$$

$$k = 0, \dots, 3, \quad l = 0, \dots, 4.$$

Перенесем члены, содержащие p_0p_2 , в правые части уравнений (28.23) и решим полученную систему уравнений как линейную относительно p_0, p_1, p_2 и p_4 .

Тогда получим

$$p_0 = k_1 + k_2 p_0 p_2, \quad (28.24)$$

$$p_1 = k_3 + k_4 p_0 p_2, \quad (28.25)$$

$$p_2 = k_5 + k_6 p_0 p_2, \quad (28.26)$$

$$p_4 = k_7 + k_8 p_0 p_2, \quad (28.27)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_8$ — известные коэффициенты, зависящие от c_{kl} и γ_k . Из уравнения (28.24) имеем

$$p_0 = \frac{k_1}{1 - k_2 p_2}. \quad (28.28)$$

*) Левитский Н. И., Саркисян Ю. Л. Об особенностях способа Лагранжа в синтезе механизмов // Анализ и синтез механизмов.— М.: Наука, 1970.

Подставляя это значение p_0 в уравнение (28.26), получаем квадратное уравнение для определения коэффициента p_2 :

$$k_2 p_2^2 + (k_6 k_1 - k_5 k_2 - 1) p_2 + k_5 = 0. \quad (28.29)$$

После определения коэффициента p_2 находится коэффициент p_0 из уравнения (28.28), и коэффициенты p_1 и p_4 из уравнений (28.25) и (28.27), затем — искомые параметры синтеза из соотношений (28.20):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= -p_0, \quad c = -\frac{1}{p_1 \cos \beta}, \\ a &= 1/p_2, \quad b = \sqrt{a^2 + c^2 + 1 - 2acp_4 \cos \beta}. \end{aligned} \quad (28.30)$$

Вычисления пяти параметров синтеза. При вычислении пяти параметров a , b , c , α и β взвешенную разность (28.10) можно представить в виде

$$\Delta_4 = 2[p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + \dots + p_6 f_6(\varphi)],$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= a \cos \alpha, \quad p_1 = -a \sin \alpha, \quad p_2 = -c \cos \beta, \\ p_3 &= c \sin \beta, \quad p_4 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2 - c^2 - 1), \end{aligned} \quad (28.31)$$

$$p_5 = ac(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta),$$

$$p_6 = -ac(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta);$$

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= \cos \varphi, \quad f_1(\varphi) = \sin \varphi, \quad f_2(\varphi) = \cos \psi, \\ f_3(\varphi) &= \sin \psi, \quad f_4(\varphi) = 1, \end{aligned} \quad (28.32)$$

$$f_5(\varphi) = \cos(\varphi - \psi), \quad f_6(\varphi) = \sin(\varphi - \psi).$$

Коэффициенты (28.31) связаны соотношениями

$$p_5 = -p_0 p_2 - p_1 p_3, \quad (28.33)$$

$$p_6 = -p_1 p_2 + p_0 p_3. \quad (28.34)$$

Вычисление наилучшего приближения выполним по методу уравнивания отклонений, принимая число точек предельных отклонений равным 6. Положения этих точек выбираем по формуле (27.27), которая в данном случае имеет вид

$$\varphi_l = \frac{\varphi_m}{2} - \frac{\varphi_m}{2} \cos \frac{l\pi}{5}, \quad l = 0, 1, \dots, 5.$$

Эта формула дает хороший результат для тех участков заданной функции, на которых производная по углу φ мало отличается от 0. В других случаях лучше применить формулу (27.28).

После выбора точек предельных отклонений составляем систему шести уравнений (27.25) для вычисления коэффициентов $p_0, \dots, p_4$

и предельного отклонения L :

$$p_0 f_0(\varphi_l) + p_1 f_1(\varphi_l) + \dots + p_6 f_6(\varphi_l) = \varepsilon^l \frac{L}{2}, \quad (28.35)$$

где $\varepsilon = -1$, $l = 0, 1, \dots, 5$.

Решая эту систему как линейную относительно p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 и L , получим значения этих неизвестных, выраженные через p_0 и p_1 :

$$\begin{aligned} p_2 &= k_1 p_0 + k_2 p_1, & p_3 &= k_3 p_0 + k_4 p_1, \\ p_4 &= k_5 p_0 + k_6 p_1, & p_5 &= k_7 p_0 + k_8 p_1, \\ p_6 &= k_9 p_0 + k_{10} p_1, & L &= k_{11} p_0 + k_{12} p_1. \end{aligned} \quad (28.36)$$

Введем обозначение $p_1/p_0 = \xi$. Тогда из первых двух уравнений системы (28.36) получаем

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{k_1 + k_2 \xi}{k_3 + k_4 \xi}. \quad (28.37)$$

Четвертое и пятое уравнения этой системы с учетом соотношений (28.33) и (28.34) дают равенство:

$$\frac{p_0 p_2 + p_1 p_3}{p_1 p_2 - p_0 p_3} = \frac{k_7 p_0 + k_8 p_1}{k_9 p_0 + k_{10} p_1}. \quad (28.38)$$

Разделив числитель и знаменатель левой части уравнения (28.38) на $p_0 p_2$, а правой части на p_0 , получаем после подстановки отношения p_2/p_3 из уравнения (28.37):

$$\frac{1 + \xi \frac{k_3 + k_4 \xi}{k_1 + k_2 \xi}}{\xi - \frac{k_3 + k_4 \xi}{k_1 + k_2 \xi}} = \frac{k_7 + k_8 \xi}{k_9 + k_{10} \xi}.$$

Относительно ξ данное выражение представляет собой кубическое уравнение, решив которое, получаем или одно, или три действительных значения для ξ . Затем находим коэффициенты p_2 и p_3 из системы уравнений, составленной из четвертого и пятого уравнений (28.36) после подстановки p_5 и p_6 из соотношений (28.33) и (28.34) и деления всех членов уравнений на величину p_0 :

$$\begin{aligned} -p_2 - \xi p_3 &= k_7 + k_8 \xi, \\ -\xi p_2 + p_3 &= k_9 + k_{10} \xi. \end{aligned}$$

Далее из первых двух уравнений системы (28.36) находим p_0 и p_1 и, наконец, из третьего и шестого уравнений находим коэффициент p_4 и предельное отклонение L .

После вычисления коэффициентов p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 искомые па-

параметры синтеза находятся из соотношений (28.31):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= -p_1/p_0, \quad a = -p_1/\sin \alpha, \\ \operatorname{tg} \beta &= -p_3/p_2, \quad c = p_2/\sin \beta, \\ b^2 &= 2p_4 + a^2 + c^2 + 1.\end{aligned}$$

Затем подсчитываются отклонения от заданной функции по приближенной формуле (28.9), и в случае необходимости процесс уравнивания отклонений повторяется при других положениях точек предельных отклонений, как было указано в предыдущей главе. Однако обычно такой необходимости нет.

Аналогично рассмотренной задаче синтеза шарнирного четырехзвенника решаются задачи синтеза всех других плоских четырехзвенных механизмов. Для каждого механизма можно получить аналитическое выражение взвешенной разности и далее искать неизвестные коэффициенты приближающей функции из условий приближения функций. Поскольку эти вычисления однотипны, рассматривать их не будем, а перейдем к решению задач синтеза пространственных механизмов.

Синтез пространственного передаточного четырехзвенника. В качестве примера решим задачу синтеза пространственного четырехзвенника с двумя вращательными и двумя сферическими парами при угле скрещивания осей вращения звеньев AB и CD , равном 90° (рис. 138). Ось z направлена по оси вращательной пары коромысла CD . Начало координат примем в точке D — основании перпендикуляра, опущенного из центра сферической пары C на ось z . Ось y направлена перпендикулярно плоскости вращения кривошипа AB . Требуется по заданной функции $\psi = \psi(\varphi)$, где φ и ψ — углы поворота звеньев AB и CD , найти относительные длины звеньев и размеры, определяющие расположения осей вращения звеньев: r, l, d, a, b (за единицу принята длина звена CD).

Взвешенную разность выбираем так же, как и в плоском шарнирном четырехзвеннике:

$$\Delta_q = l^2 - l_\psi^2. \quad (28.39)$$

Величина l_ψ^2 находится по значениям координат точек B и C :

$$l_\psi^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2,$$

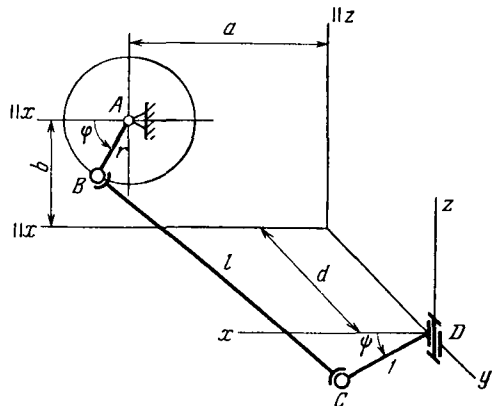


Рис. 138

где

$$\begin{aligned}x_B &= a + r \cos \varphi, \quad y_B = -d, \quad z_B = b - r \sin \varphi, \\x_C &= \cos \psi, \quad y_C = \sin \psi, \quad z_C = 0.\end{aligned}$$

Подставим значения координат точек B и C в выражение для l_Φ^2 и раскроем скобки:

$$\begin{aligned}l_\Phi^2 &= a^2 + r^2 \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + 2ar \cos \varphi - 2a \cos \psi - 2r \cos \varphi \cos \psi + \\&\quad + d^2 + \sin^2 \psi + 2d \sin \psi + b^2 + r^2 \sin^2 \varphi - 2br \sin \varphi.\end{aligned}$$

Взвешенная разность (28.39) получает вид

$$\begin{aligned}\Delta_q &= 2a \cos \psi - 2d \sin \psi - 2ar \cos \varphi + 2br \sin \varphi + \\&\quad + 2r \cos \varphi \cos \psi - a^2 - r^2 - d^2 - b^2 - 1 + l^2,\end{aligned}$$

или

$$\Delta_q = A [p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + p_2 f_2(\varphi) + p_3 f_3(\varphi) + p_4 f_4(\varphi) - F(\varphi)],$$

где

$$\begin{aligned}A &= -2a, \quad p_0 = d/a, \quad p_1 = r, \quad p_2 = -br/a, \\p_3 &= -\frac{r}{a}, \quad p_4 = \frac{a^2 + r^2 + d^2 + b^2 + 1 - l^2}{2a};\end{aligned}\tag{28.40}$$

$$\begin{aligned}F(\varphi) &= \cos \psi, \quad f_0(\varphi) = \sin \psi, \quad f_1(\varphi) = \cos \varphi, \\f_2(\varphi) &= \sin \varphi, \quad f_3(\varphi) = \cos \varphi \cos \psi, \quad f_4(\varphi) = 1.\end{aligned}\tag{28.41}$$

Неизвестные коэффициенты (28.40) при любом виде приближения определяются из системы линейных уравнений, так как взвешенная разность представляет собой обобщенный полином.

После определения коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_4$ находим искомые параметры синтеза из соотношений (28.40):

$$\begin{aligned}r &= p_1, \quad a = -r/p_3, \quad d = p_0 a, \quad b = -ap_2/r, \\l &= \sqrt{a^2 + r^2 + d^2 + b^2 + 1 - 2ap_4}.\end{aligned}$$

Как видно, задача синтеза пространственного четырехзвенника по пяти параметрам в данном случае оказалась проще, чем соответствующая задача синтеза плоского шарнирного четырехзвенника.

§ 93. Синтез механизмов по положениям звеньев

Синтез шарнирного четырехзвенника по положениям шатуна. Задача синтеза рычажных механизмов по положениям звеньев может быть решена аналитически по методу интерполирования. Чаще, однако, используются графические построения, которые позволяют быстро обозреть все варианты механизма. После выбора варианта можно уточнить параметры синтеза по формулам, которые выводятся из этих построений.

Пусть, например, требуется найти длины звеньев шарнирного четырехзвенника $ABCD$, если шатун BC связан со столом T , который должен иметь возможность занимать два положения, повернутые одно относительно другого на 180° (рис. 139). Механизм подобного типа применяется в формовочной машине *).

Выберем произвольное расположение шарниров B и C на столе T . Тогда получим два заданных положения шатуна B_1C_1 и B_2C_2 . Точки B_1 и B_2 должны лежать на окружности с центром в искомой точке A . Этот центр лежит на прямой aa , проведенной перпендикулярно отрезку B_1B_2 через его середину. Аналогично центр D лежит на прямой dd , проведенной перпендикулярно отрезку C_1C_2 через его середину. Выбирая положения центров A и D

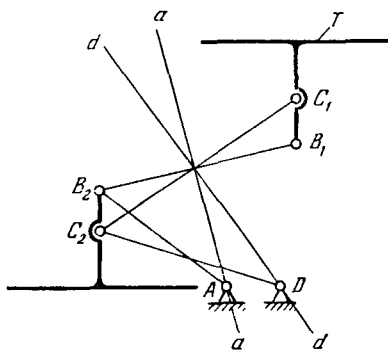


Рис. 139

в различных точках прямых aa и dd , получаем различные варианты механизма, из которых выбирается наиболее полно удовлетворяющий дополнительным условиям.

Если заданы три положения шатуна B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 , то центр вращения A звена AB находится как центр окружности, проходящей через точки B_1 , B_2 и B_3 , а центр вращения D звена CD —

как центр окружности, проходящей через точки C_1 , C_2 и C_3 . Решение этой задачи также выполняется обычно графическим путем.

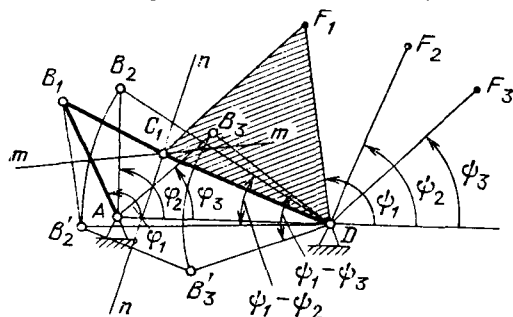


Рис. 140

Синтез шарнирного четырехзвенника по трем положениям вращающихся звеньев. Пусть, например, в механизме шарнирного четырехзвенника $ABCD$ заданы длины l_{AB} и l_{AD} , углы поворота φ_1 ,

φ_2 и φ_3 звена AB и соответствующие им углы поворота ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 звена CD , измеряемые от линии стойки до отрезков F_1D , F_2D и F_3D (рис. 140). Требуется определить длины l_{BC} , l_{CD} и постоянный угол CDF . Для определения этих величин находим положение центра шарнира C на плоскости, связанной с положением отрезка F_1D , путем обращения движения относительно звена CD . В обра-

*) Кожевников С. Н. Механизмы.— 3-е изд.— М.: Машиностроение, 1965.— С. 126.

щенном движении центр шарнира B занимает положения B_1 , B'_2 и B'_3 . Точка B'_2 находится на пересечении линии, проведенной из точки D под углом $\psi_1 - \psi_2$ к линии B_2D , с окружностью радиусом B_2D . Точка B'_3 находится на пересечении линии, проведенной из точки D под углом $\psi_1 - \psi_3$ к линии B_3D , с окружностью радиусом B_3D . Искомое положение центра шарнира C в положении механизма, определяемом углами φ_1 и ψ_1 , т. е. положение точки C_1 , находится как центр окружности, проходящей через точки B_1 , B'_2 и B'_3 . Этот центр лежит на пересечении линий mt и pn , проведенных соответственно через середины отрезков $B_1B'_2$ и $B_2B'_3$, перпендикулярно их направлениям. На рис. 140 контурными линиями показаны положения подвижных звеньев в первом положении механизма. Отсюда находятся искомые длины в масштабе построения, а также постоянный угол CDF .

Синтез шарнирного четырехзвенника по коэффициенту изменения средней скорости коромысла. При синтезе шарнирного четырехзвенника по двум соответствующим положениям вращающихся звеньев чаще всего одно из звеньев должно быть кривошипом, а другое — коромыслом, причем заданными положениями коромысла являются его крайние положения, т. е. положения, из которых оно может двигаться только в одном направлении. Покажем, как можно с помощью графических построений учесть эти дополнительные условия. Предварительно установим соотношения, определяющие механизм в крайних положениях.

На рис. 141 показан кривошипно-коромысловый шарнирный четырехзвенник $ABCD$ в двух крайних положениях коромысла. Эти положения получаются при условии, что отрезки, изображающие кривошип AB и шатун BC , располагаются на одной прямой линии. Положение $AB''C''$ называется *внешним*, а положение $AB'C'$ — *внутренним*. Коромысло CD при переходе из одного крайнего положения в другое поворачивается на один и тот же угол размаха $\psi_{\max}$, а кривошип AB — на

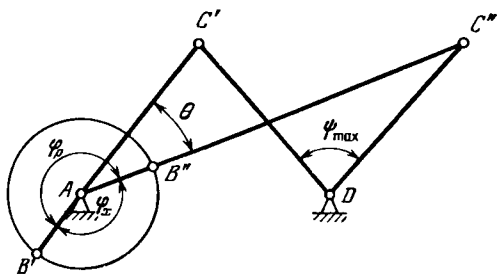


Рис. 141

разные углы φ_p (рабочий ход) и φ_x (холостой ход). Поэтому при постоянной скорости вращения кривошипа время перехода из одного крайнего положения в другое оказывается различным. Соответственно различной оказывается и средняя угловая скорость коромысла. Отношение средних скоростей выходного звена за время движения в прямом и обратном направлениях называют *коэффициентом изменения средней скорости выходного звена*.

Пусть, например, прямой ход совпадает с рабочим, а обратный — с холостым, причем продолжительность рабочего хода больше, чем холостого. Тогда коэффициент изменения средней скорости выходного звена (кормомысла) при постоянной скорости вращения кривошипа равен отношению угла φ_p к углу φ_x :

$$K = \frac{\pi + \theta}{\pi - \theta}, \quad (28.42)$$

где θ — угол между совпадающими направлениями шатуна и кривошипа при крайних положениях коромысла. При заданном значении коэффициента K угол θ находится по формуле

$$\theta = \frac{K-1}{K+1} \pi. \quad (28.43)$$

Решение задачи синтеза начинаем с построения крайних положений коромысла $C'D$ и $C''D$, считая заданными угол размаха коромысла и его длину s (рис. 142). На отрезке $C'C''$, как на хорде,

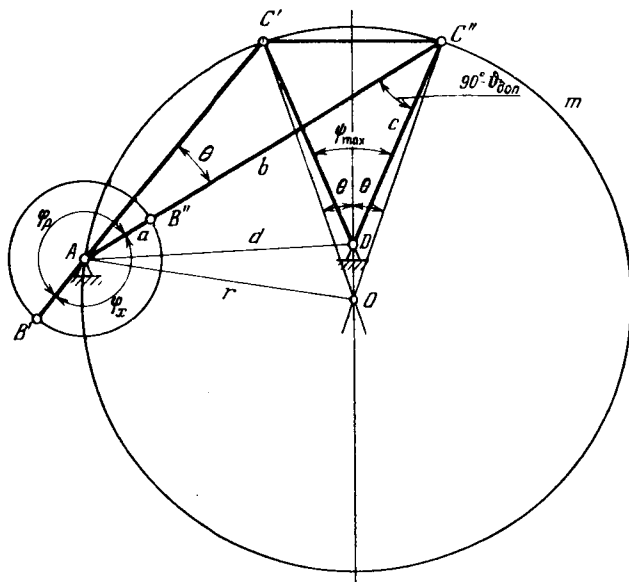


Рис. 142

строим окружность m , вмещающую вписанный угол θ , найденный по (28.2). Центр этой окружности находится на пересечении биссектрисы угла $\psi_{\max}$ с линией, проведенной через точку C' (или C''), под углом θ к указанной биссектрисе. Основное условие синтеза, т. е. получение заданного угла θ , а следовательно, и коэффициента K , будет выполнено, если центр вращения кривошипа A выбрать на окружности m .

Обозначим расстояния от центра A до точек C' и C'' соответственно через l' и l'' . Тогда длина кривошипа a и длина шатуна b определяются из соотношений $b + a = l''$ и $b - a = l'$. Отсюда получаем

$$b = 0,5(l' + l'') \text{ и } a = 0,5(l'' - l'). \quad (28.44)$$

Для получения благоприятных значений угла давления ϕ надо учесть, что экстремумы этого угла и дополнительного к нему угла

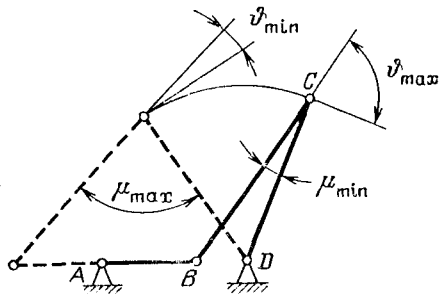


Рис. 143

передачи $\mu = 90^\circ - \phi$ достигаются в положениях, когда центр шарнира B располагается на линии стойки AD (рис. 143). В рассматриваемой задаче синтеза приближенно считают, что экстремумы угла давления (или угла передачи) получаются в крайних положениях, и выбирают центр A на пересечении окружности m с линией, проведенной под углом $\mu_{\text{доп}} = 90^\circ - \phi_{\text{доп}}$ к отрезку $C''D$ из точки C'' (при

$\psi_{\text{max}} > 0$) или к отрезку $C'D$ из точки C' (при $\psi_{\text{max}} < 0$). При таком способе выбора центра A угол давления на участке рабочего хода всегда меньше допускаемого. На участке холостого хода угол давления будет немного больше допускаемого. Однако холостой ход менее нагружен, и небольшое отступление от $\phi_{\text{доп}}$ допустимо.

Расстояния l' и l'' при таком выборе центра A находятся из равнобедренных треугольников AOC' и AOC'' :

$$l' = 2r \sin(\theta_{\text{доп}} - 0,5\psi_{\text{max}}), \quad l'' = 2r \sin(\theta_{\text{доп}} - 0,5\psi_{\text{max}} + \theta),$$

где r — радиус окружности m , определяемый из $\triangle OC'C''$ по известной длине коромысла c : $r = c \sin 0,5\psi_{\text{max}} / \sin \theta$.

Длина кривошипа a и длина шатуна b находятся из соотношений (28.44), а длина стойки d — из $\triangle ADC''$:

$$d = \sqrt{(a + b)^2 + c^2 - 2c(a + b) \sin \theta_{\text{доп}}}. \quad (28.45)$$

Аналогично решаются задачи синтеза по положениям звеньев для кривошипно-ползунного, кулисного и других типов четырехзвенных плоских механизмов. Некоторые особенности возникают лишь при решении задач синтеза пространственных рычажных механизмов.

Синтез пространственного четырехзвенника с двумя вращательными и двумя сферическими парами по коэффициенту изменения средней скорости коромысла. В механизме (см. рис. 138) считаем заданными: коэффициент изменения средней скорости коромысла K , угол размаха коромысла ψ_{max} и размер d . Кроме того, примем,

фронтальные проекции точек C'_2 и C''_2 и вмещает вписанный угол θ (28.43). Центр этой окружности находится на пересечении перпендикуляра к середине отрезка $C'_2C''_2$ с линией, проведенной из точки C'_2 (или C''_2) под углом θ к этому перпендикуляру. Центр вращения кривошипа A_2 выбираем на окружности m с учетом дополнительных условий синтеза. Выбранное положение центра A_2 определяет искомые размеры a , b и длину кривошипа r в масштабе построения $AB = (A_2C''_2 - A_2C'_2)/2$.

Далее проводим окружность радиусом AB с центром в точке A_2 и находим проекции длины шатуна на фронтальную плоскость: $B'_2C'_2$ и $B''_2C''_2$, которые при условии $C'_1C'_2 = C''_1C''_2$ равны между собой. Истинная длина шатуна определяется известным приемом начертательной геометрии. С этой целью проводим из точки C'_2 , как из центра, окружность через точку B'_2 до пересечения с осью проекций в точке E' . Расстояние $E'C'_1$ даст искомую величину BC , т. е. длину шатуна l в масштабе построения.

Углы давления в пространственных механизмах. После определения всех параметров синтеза надо проверить значения углов давления на коромысло. В рассматриваемом механизме считаем, что сила, действующая на коромысло со стороны шатуна, направлена по линии BC . Тогда угол между линией BC и вектором скорости точки C дает угол давления ϕ . Однако вследствие пространственного расположения сил необходимо учитывать две составляющие угла давления.

Касательной составляющей угла давления на коромысло ϕ^t называется угол между касательной к траектории точки приложения силы давления и проекцией этой силы на плоскость вращения коромысла. Нормальной составляющей угла давления на коромысло ϕ^n называется угол между направлением силы давления и

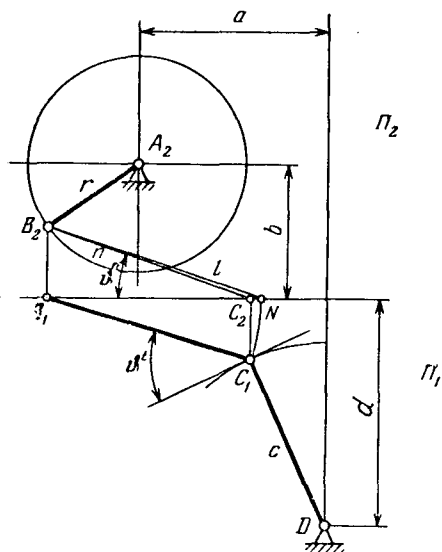


Рис. 145

плоскостью вращения коромысла. Покажем определение этих составляющих для одного положения звена AB , заданного проекциями B_2 и B_1 точки B (рис. 145). С этой целью проведем из точки B_2 , как из центра, окружность радиусом, равным длине шатуна l . Точка N пересечения этой окружности с осью проекций определит

прямоугольный треугольник B_2B_1N , в котором катет B_1N равен проекции шатуна на горизонтальную плоскость, а угол при вершине N равен нормальной составляющей угла давления ϕ^n . Проекция точки C на горизонтальную плоскость находится на пересечении траектории точки C с окружностью, проведенной через точку N из центра B_1 . Угол между проекцией шатуна B_1C_1 и касательной к траектории точки C дает касательную составляющую угла давления ϕ' .

Допускаемые значения углов давления устанавливаются отдельно для каждой составляющей. В зависимости от условий работы механизма они могут назначаться в довольно широких пределах.

Итак, синтез плоских и пространственных механизмов по положениям звеньев обычно выполняется по двум или трем положениям с учетом дополнительных условий: существование кривошипа, ограничение углов давления, конструктивное размещение отдельных звеньев и т. п. В зависимости от типа механизма и комбинации основных и дополнительных условий синтеза имеется большое количество возможных вариантов задачи синтеза по положениям звеньев. Все варианты этой задачи решаются путем несложных графических построений или применением расчетных формул, получаемых из этих построений методами аналитической геометрии. Применение методов оптимизации или приближения функций при синтезе механизмов по положениям звеньев обычно не требуется.

§ 94. Синтез направляющих механизмов

Точные направляющие механизмы. *Точным направляющим механизмом* называется механизм, в котором траектория некоторой точки звена, образующего кинематические пары только с подвижными звеньями, точно совпадает с заданной кривой на всем ее протяжении или на некотором участке при условии, что погрешности изготовления не принимаются во внимание.

В справочниках по механизмам дано описание большого количества точных направляющих механизмов *). В основном эти механизмы предназначены для воспроизведения движения по прямой линии (прямолинейно-направляющие механизмы), по дугам окружностей и по коническим сечениям (коникографы). Общие методы синтеза точных направляющих механизмов основываются на методах преобразования кривых и на некоторых геометрических свойствах траекторий точек механизмов **). Как правило, механизмы,

*) Артоболевский И. И. Механизмы в современной технике.— М.: Наука, 1970.— Т. I.

Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М. Механизмы.— М.: Машиностроение, 1965.

**) Добровольский В. В. Теория механизмов для образования плоских кривых.— М.: Изд-во АН СССР, 1953.

Артоболевский И. И. Теория механизмов для воспроизведения кривых.— М.: Изд-во АН СССР, 1959,

получаемые по этим методам, имеют большое число звеньев. Если надо уменьшить число звеньев, то обращаются к методам синтеза приближенных направляющих механизмов.

Методы синтеза приближенных направляющих механизмов. *Приближенным направляющим механизмом* называется механизм, в котором траектория некоторой точки на звене, образующем кинематические пары только с подвижными звеньями, мало отличается от заданной кривой на отдельном участке или на всем ее протяжении. Приближенные направляющие механизмы применяются обычно в тех случаях, когда они имеют меньшее число звеньев по сравнению с теоретически точными механизмами. С уменьшением числа звеньев уменьшаются погрешности изготовления, и потому приближенные направляющие механизмы часто оказываются практически более точными, чем теоретически точные. Например, если требуется получить движение по прямой линии с помощью механизма, содержащего только вращательные пары, то минимальное число звеньев точного направляющего механизма равно шести. Применяя методы приближенного синтеза направляющих механизмов, можно найти четырехзвенный механизм, в котором теоретические (поминальные) отклонения от прямой линии значительно меньше отклонений, вызываемых погрешностями изготовления. В этом случае приближенный четырехзвенный механизм является более точным, чем теоретически точный шестизвенный механизм.

Применение метода оптимизации для синтеза направляющего шарнирного четырехзвенника уже было показано (см. § 90). Для использования методов приближения функций по аналогии с решением задачи синтеза передаточного шарнирного четырехзвенника надо составить аналитическое выражение взвешенной разности $\Delta_q = c^2 - c_{\phi}^2$, где c — длина звена CD , c_{ϕ} — переменное расстояние от точки C до точки D при разомкнутом шарнире и движении точки M по заданной кривой (см. рис. 132). Искомые параметры синтеза находят затем с использованием одного из видов приближения функций.

Механизмы Чебышева. Из направляющих механизмов наибольшее практическое значение имеют механизмы, направляющие по дугам окружностей (круговые направляющие механизмы) и по отрезкам прямой линии (прямолинейно-направляющие механизмы). Задачи синтеза этих механизмов были решены Чебышевым по методу наилучшего приближения функций при частном предположении, что шатунная кривая механизма является симметричной кривой.

На рис. 146 показан один из механизмов Чебышева, предложенный им для преобразования непрерывного вращения звена AB во вращательное движение звена FE с длительной остановкой (выстоем) в крайнем положении. В механизме выполнено условие

$$BC = CD = CM = b. \quad (28.46)$$

Условие (28.46) является достаточным для того, чтобы траектория точки M была симметричной кривой. Ось симметрии проходит через точку D под углом $\Omega/2$ к стойке AD , где Ω — угол BCM . Параметры a , d и Ω выбираются из соотношений*), определяющих наилучшее приближение шатушной кривой к дуге окружности, центр которой лежит на оси симметрии. При выполнении этих соотношений шатушная кривая имеет с дугой окружности шесть общих точек, а предельное отклонение достигается семь раз с последовательно чередующимися знаками. Если выбрать длину звена EM равной радиусу окружности, к которой приближена шатушная кривая, а точку E в крайнем положении поместить в центр этой окружности, то при движении точки M по участку шатушной кривой, приближенному к дуге окружности (отмечен жирной линией), звено EF остается неподвижным, а при движении точки по другому участку — перемещается на заданный угол размаха.

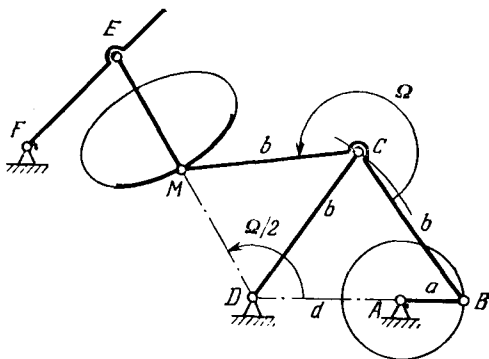


Рис. 146

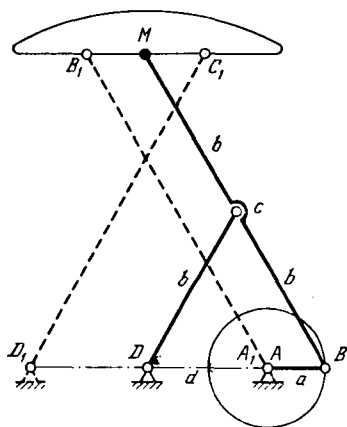


Рис. 147

Из механизма Чебышева, направляющего по дуге окружности, как частный случай получается прямолинейно-направляющий механизм. Наибольшую известность имеют те прямолинейно-направляющие механизмы Чебышева, которые имеют значение угла Ω , равное 180° (рис. 147).

Механизм определяется тремя независимыми параметрами: a , b и d . Для того чтобы траектория точки M имела наименьшее отклонение от прямой, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение

$$3d - a = 2b. \quad (28.47)$$

При этом соотношении симметричная шатушная кривая точки M имеет с прямой шесть точек пересечения, а предельное отклонение достигается семь раз с последовательно чередующимися знаками.

*) Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 687.

Длина стойки d может изменяться в пределах от $d = 3a$ до $d \approx 1,55a$. При $d = 3a$ и $b = 4a$ треугольник BDC в среднем положении механизма является равносторонним. При $d = 2,22$ отношение максимального отклонения от прямой линии к длине прямолинейного участка не превосходит 0,001, т. е. на длине $l = 100$ мм отклонение будет не более 0,1 мм. Такое отклонение нельзя обнаружить графическими построениями.

Прямолинейно-направляющий механизм Чебышева при $\Omega = 180^\circ$ в среднем положении напоминает греческую букву λ и называется поэтому *лямбдообразным*. Чебышев указал также другую модификацию этого механизма $A_1B_1C_1D_1$, показанную на рис. 147 штриховой линией. В этой модификации, называемой *перекрестной*, шатунная кривая точки M совпадает с шатунной кривой лямбдообразного механизма, а длины звеньев связа-

ны соотношениями

$$A_1B_1 = C_1D = 2b, B_1C_1 = 2a,$$

$$B_1M = a, A_1D_1 = 2d.$$

Эти соотношения могут быть получены из общей теоремы, известной под названием *теоремы Робертса* *).

Теорема Робертса. Эта теорема основана на свойствах пантографа, т. е. механизма, предназначенного для подобного преобразования кривых.

На рис. 148 показан *пантограф Сильвестра* **), состоящий из стойки и четырех подвижных звеньев, образующих параллелограмм $ABCD$. На двух сторонах этого параллелограмма расположены подобные треугольники BCE и DFC . Угол α в этих треугольниках расположен у шарниров B и D параллелограмма, а угол β — за ним против хода часовой стрелки.

Из подобия треугольников BCE и DFC имеем

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DC}{DF}.$$

Учитывая, что $DC = AB$ и $BC = AD$, получаем

$$\frac{BE}{AD} = \frac{AB}{DF}.$$

*) Самюэль Робертс (Samuel Roberts, 1827—1913), английский математик, занимался изучением свойств шатунных кривых.

**) Джеймс Сильвестр (James Sylvester, 1814—1897), английский математик, разработал теорию механизмов для преобразования кривых.

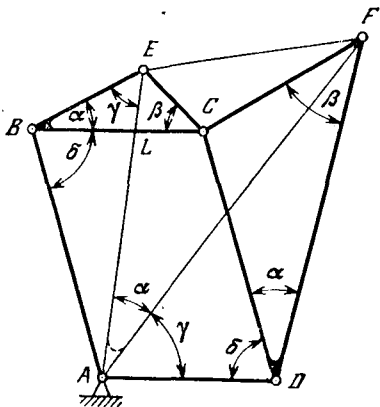


Рис. 148

Это соотношение совместно с равенством

$$\angle ABE = \angle ADF = \alpha + \delta$$

доказывает подобие треугольников ABE и ADF . Отсюда следует, что

$$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{AD} = k, \quad (28.48)$$

где k — постоянная величина, называемая *отношением подобия*.

Кроме того,

$$\angle DAE = \angle EAF + \gamma, \quad \angle CLE = \alpha + \gamma.$$

Углы DAE и CLE равны по параллельности сторон и, следовательно,

$$\angle EAF = \alpha. \quad (28.49)$$

Из соотношений (28.48) и (28.49) следует, что траектория точки F подобна траектории точки E и повернута относительно нее на постоянный угол α , а $\triangle AFE \sim \triangle BCE \sim \triangle DFC$.

Теперь рассмотрим направляющий шарнирный четырехзвенник $A_1B_1C_1D_1$, в котором точка M описывает некоторую шатунную кривую (рис. 149, а). Присоединим в точках M и A двухзвенную груп-

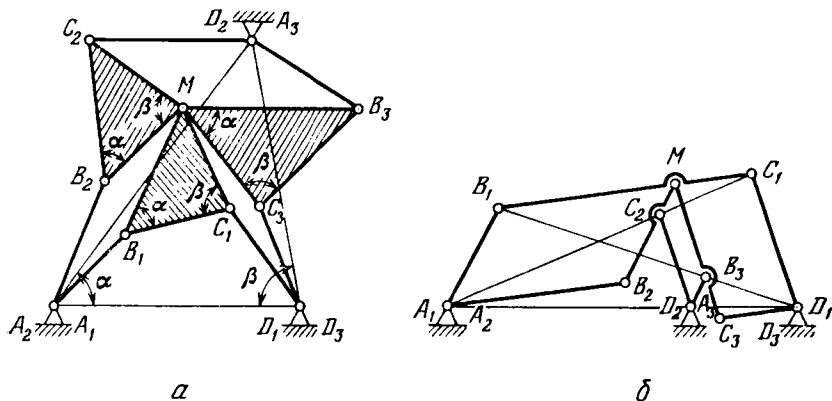


Рис. 149

пу MB_2A_2 так, чтобы образовался пантиграф Сильвестра. Тогда траектория точки C_2 будет подобна траектории точки C_1 и, следовательно, точка C_2 будет описывать дугу окружности, радиус которой равен радиусу C_1D_1 , умноженному на отношение подобия k . Центр D_2 этой окружности на основании свойств пантиграфа найдется из условия, что $\triangle A_1D_1D_2 \sim \triangle B_1C_1M$. Соединив точки C_2 и D_2 при помощи звена, входящего в две вращательные пары, мы подвижности механизма не нарушим. Отсоединив же исходный четы-

рехзвенник $A_1B_1C_1D_1$, получим преобразованный механизм $A_2B_2C_2D_2$, точка M которого описывает ту же кривую, что и в исходном механизме. Производя аналогичное построение из центра D_1 , получим третий четырехзвенный механизм $A_3B_3C_3D_3$, описывающий ту же шатунную кривую.

В частном случае, если точка M лежит на линии, соединяющей центры шарниров шатуна (рис. 149, б), то точка C_2 лежит на линии A_1C_1 , а точка D_2 — на линии A_1D_1 , точка B_3 — на линии B_1D_1 , и подобие треугольников переходит в пропорциональность отрезков.

Итак, *одна и та же шатунная кривая шарнирного четырехзвенника может быть воспроизведена в общем случае тремя различными шарнирными четырехзвенниками (теорема Робертса).*

Значение этого преобразования для практики заключается в том, что, получив каким-либо путем один из механизмов, воспроизводящих заданную кривую, можно найти два других механизма, воспроизводящих ту же самую кривую, и из них выбрать тот, который наиболее полно удовлетворяет дополнительным условиям.

Теорема Робертса распространяется и на другие типы плоских механизмов. Для получения преобразованных механизмов надо, как и в шарнирном четырехзвеннике, использовать свойства пантиграфов.

ГЛАВА 29

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ПЕРЫВЫСТОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 95. Синтез шарнирных механизмов с выстоями

Выстой называется длительная остановка выходного звена при непрерывном движении входного звена. В предыдущем параграфе был показан шарнирный механизм с выстой выходного звена в крайнем положении (см. рис. 146), который был предложен П. Л. Чебышевым. Синтез этого механизма сводится к синтезу механизма, направляющего по дуге окружности, и может быть выполнен рассмотренными ранее методами оптимизации или методом приближения функций.

Шарнирные механизмы с выстоями можно получить также последовательным соединением четырехзвенных механизмов в крайних положениях выходных звеньев. Приближенный выстой в этих механизмах получается на основании того, что в шарнирном четырехзвеннике малым углам поворота выходного звена вблизи его крайнего положения соответствуют значительно большие углы поворота входного звена. Пусть, например, при угле поворота входного звена, равном 40° , угол поворота выходного звена составляет 4° . Последовательное соединение двух четырехзвенников, обладающих этим свойством, позволяет получить на том же угле поворота

входного звена, равно 40° , колебания выходного звена на малый угол, не превышающий 1° . Синтез механизмов с остановками этого типа покажем на примере шестизвездного механизма, входящего в состав кривошипного пресса глубокой вытяжки (рис. 150). Механизм образован последовательным соединением двух четырехзвездников $ABCD$ и $DEFA$ с общей стойкой AD . На рисунке жирными линиями показано то положение механизма, при котором выходное звено CD первого четырехзвездника находится в крайнем положении C_3D ; штриховыми линиями показано положение механизма, при котором выходное звено второго четырехзвездника находится в крайнем положении F_2A . Угол поворота выходного звена между этими положениями обозначен через $\Delta\psi$, а угол между линиями C_3D и DF_2 — через δ_n .

Покажем, что малому углу поворота $\Delta\psi$ выходного звена соответствует большой угол поворота φ_{15} входного звена, если выбрать угол δ между отрезками C_3D и E_3D по условию

$$\delta = \delta_n + \Delta\delta, \quad (29.1)$$

где $\Delta\delta$ — малый угол.

Для доказательства этого утверждения заметим, что при условии (29.1) одному и тому же положению F_3A выходного звена

FA соответствуют два положения звена CDE : E_3D и E_1D или, что то же, C_3D и C_1D . В свою очередь одному и тому же положению C_1D соответствуют два положения входного звена: AB_1 и AB_5 . Угол φ_{15} между этими положениями и есть угол выстоя, так как при повороте входного звена на этот угол выходное звено FA отклоняется от своего крайнего положения не более чем на малый угол $\Delta\psi$. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти положения AB_2 и AB_4 входного звена при крайнем положении F_2A выходного звена. Из построения видно, что эти два положения лежат внутри угла выстоя.

С уменьшением угла $\Delta\delta$ уменьшается как угол $\Delta\psi$, так и угол выстоя φ_{15} . Обычно задаются требуемой продолжительностью выстоя, т. е. углом φ_{15} и, пользуясь указанным графическим построением, путем проб находят величину $\Delta\delta$, считая, что все другие параметры синтеза известны. Если получаемый при этом угол $\Delta\psi$ оказывается больше допустимого, то надо принять другие значения

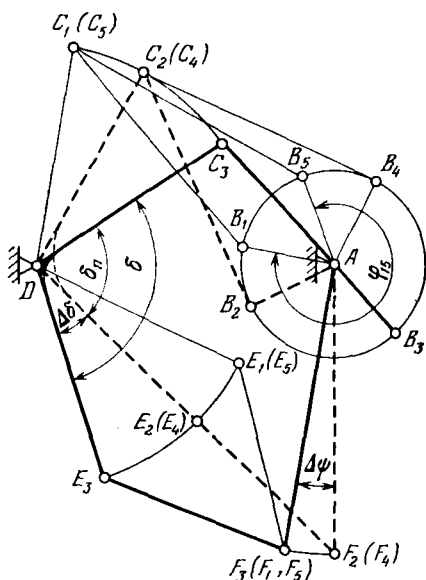


Рис. 150

одного или нескольких параметров синтеза. При малом угле $\Delta\delta$ можно находить угол выстоя φ_{15} по формулам, выведенным С. А. Черкудиновым*). Аналогично решается обратная задача — нахождение угла $\Delta\delta$ по заданному углу φ_{15} .

§ 96. Мальтийские механизмы

В машинах-автоматах иногда требуется иметь *одностороннее прерывистое движение*, т. е. движение в одном направлении с периодическими выстоями. Механизм с односторонним прерывистым движением выходного звена называют *шаговым механизмом*. Типовой график движения выходного звена в этом механизме показан на рис. 151, где φ_d — угол поворота выходного звена между двумя выстоями, t_d — время движения, t_n — время покоя, T — время

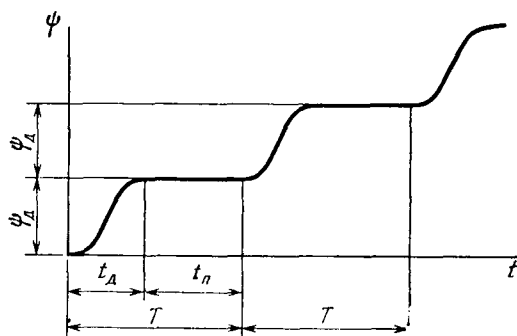


Рис. 151

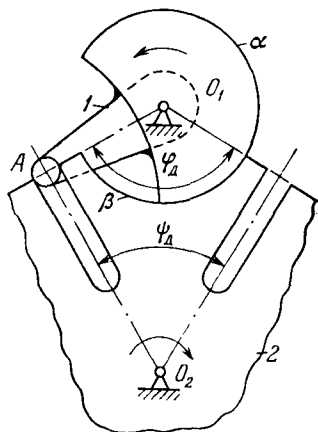


Рис. 152

цикла, по истечении которого повторяются фазы движения и покоя. Отношение времени движения к времени цикла называют *коэффициентом движения*

$$\tau_d = t_d/T. \quad (29.2)$$

Наиболее просто одностороннее прерывистое движение воспроизводится с помощью *мальтийского механизма* (рис. 152), который представляет собой одну из разновидностей кулисного механизма.

*) Сергей Александрович Черкудинов (р. 1910), автор работ по синтезу рычажных механизмов и систем управления машинами-автоматами. Формулы для расчета рассматриваемого механизма даны в книге: Артоболевский И. И., Левитский И. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 1008.

Звено 1 (кривошип) имеет одну цевку (ролик), которая входит в прорезь звена 2, называемого *крестом*, и поворачивает его на угол

$$\psi_d = 2\pi/z, \quad (29.3)$$

где z — число прорезей.

Угол поворота кривошипа за время движения креста, называемый *углом движения*, находится из прямоугольного треугольника O_1AO_2 :

$$\varphi_d = \pi - \psi_d.$$

Подставляя в это соотношение значение угла ψ_d из формулы (29.3), получаем

$$\varphi_d = \pi(z - 2)/z. \quad (29.4)$$

После поворота на угол ψ_d крест остается в покое, пока цевка кривошипа не войдет в следующий паз. Для фиксации креста в неподвижном положении служат запирающие дуги α и β . Угол поворота кривошипа за время покоя креста, называемый *углом покоя*, находится из условия

$$\varphi_n = 2\pi - \varphi_d,$$

которое с учетом формулы (29.4) приводит к соотношению

$$\varphi_n = \pi(z + 2)/z. \quad (29.5)$$

Коэффициент движения при равномерном вращении кривошипа найдется как отношение угла движения φ_d к углу полного оборота кривошипа 2π :

$$\tau_d = (z - 2)/(2z). \quad (29.6)$$

Следовательно, коэффициент движения полностью определяется числом пазов, т. е. мальтийский механизм представляет мало возможностей для воспроизведения заданного графика движения.

Из формулы (29.6) следует, что минимальное число пазов равно трем и коэффициент движения изменяется от $1/6$ до $1/2$ при числе пазов, стремящихся к бесконечности. Обычно число пазов не превосходит 24 и, следовательно, коэффициент движения не превосходит величины $\tau_d \approx 0,458$.

Чтобы получить время движения больше времени покоя, иногда применяют мальтийский механизм, в котором кривошип 1 и крест 2 вращаются в одном и том же направлении (рис. 153). В этом механизме траектория центра цевки располагается внутри окружности, описываемой наиболее удаленной точкой паза, и механизм соответственно получил название *мальтийского механизма с внутренним зацеплением* (в отличие от механизма с внешним зацеплением, показанного на рис. 152).

Для мальтийского механизма с внутренним зацеплением угол ψ_d определяется по формуле (29.3), а угол движения φ_d находится из условия $\varphi_d = \pi + \psi_d$. Отсюда $\varphi_d = \pi(z + 2)/z$ и $\varphi_n = \pi(z - 2)/z$.

Угол движения в мальтийском механизме с внутренним зацеплением больше угла покоя, и коэффициент движения определяется по формуле

$$\tau_d = (z + 2)/(2z). \quad (29.7)$$

Минимальное число прорезей по-прежнему равно трем, а коэффициент движения изменяется от 5/6 до 1/2 (практически до 0,542 при $z = 24$), уменьшаясь с увеличением числа пазов.

Увеличить коэффициент движения в мальтийском механизме можно не только путем перехода к внутреннему зацеплению, но

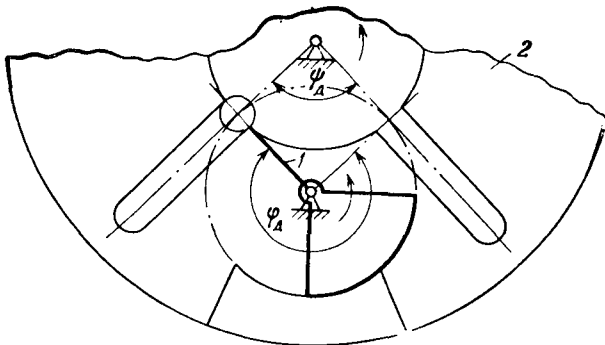


Рис. 153

и увеличением числа цевок в механизме с внешним зацеплением, причем углы ψ_d и φ_d не зависят от числа цевок m ; изменяется (уменьшается) только угол покоя, так как время цикла T соответствует теперь не полному обороту кривошипа, а углу $\varphi_n = 2\pi/m$.

По сравнению с одноцевочным механизмом коэффициент движения увеличивается в m раз:

$$\tau_d = m(z - 2)/(2z). \quad (29.8)$$

Коэффициент движения при заданном числе пазов ограничивается максимальным числом цевок, которое находится из условия, что каждая цевка должна теперь выйти из зацепления прежде, чем войдет в зацепление следующая цевка, или, что то же, угол движения должен быть меньше углового шага цевок: $\frac{\pi}{z}(z - 2) < \frac{2\pi}{m}$,

отсюда $m < \frac{2z}{z - 2}$.

Максимальное число цевок при $z = 3$ равно 5, при $z = 4$ и $z = 5$ равно 3 и при $z \geq 6$ всегда равно 2.

Если рабочий процесс происходит во время покоя креста, то время движения и, следовательно, коэффициент движения надо уменьшить с целью повышения производительности механизма. Уменьшение коэффициента движения при заданном числе пазов

достигается путем неравномерного вращения кривошипа: на участке движения креста угловая скорость кривошипа должна быть больше, а на участке покоя — меньше. Для получения требуемого неравномерного вращения кривошипа применяется обычно зубчатый механизм с переменным передаточным отношением.

Уменьшение коэффициента движения может быть получено также, если цевку установить на шатуне шарнирного четырехзвенника и подобрать форму шатунной кривой так, чтобы время движения цевки по пазу было меньше времени движения ее вне паза. Наконец, можно сделать пазы криволинейными. Тогда механизм из кулисного превращается в кулачковый. Выбором профиля паза можно получить почти любой график движения, но при этом теряется главное достоинство мальтийского механизма — простота изготовления.

§ 97. Синтез зубчато-рычажных механизмов

К недостаткам мальтийских механизмов, как механизмов одностороннего прерывистого движения, относится не только ограниченный выбор значений коэффициента движения, но и неблагоприятные динамические условия при входе цевки в паз и при выходе ее из паза. При входе цевки в паз относительная скорость ее по отношению к кресту равна нулю, если направление паза в этот момент совпадает с направлением вектора скорости центра цевки, но относительное ускорение не равно нулю. Скачок ускорения в начале движения (мягкий удар) может вызвать нежелательные колебания из-за скачкообразного изменения силы инерции. От этих недостатков в значительной мере избавлены *зубчато-рычажные* (иначе — шарнирно-зубчатые) механизмы, которые образованы из механизмов с низшими парами путем добавления двух или более зубчатых колес, причем по крайней мере одно из них движется вместе с шатуном.

На рис. 154 показан зубчато-рычажный механизм, образованный из шарнирного четырехзвенника $ABCD$. С кривошипом 1 неподвижно соединено зубчатое колесо, которое входит в зацепление с зубчатым колесом 4, свободно вращающимся на оси шарнира C . С колесом 4 неподвижно соединено колесо 4', которое передает вращение колесу 5, свободно вращающемуся на оси шарнира D .

Зубчатые колеса на схеме изображены окружностями, которые перекатываются без скольжения при движении одного колеса относительно другого. Эти окружности, называемые начальными, являются центроидами в относительном движении колес.

Длины звеньев шарнирного четырехзвенника и числа зубьев колес 1, 4, 4' и 5 могут быть подобраны так, что при равномерном вращении кривошипа 1 выходное звено 5 будет совершать одностороннее движение с приближенной остановкой заданной продолжительности (выстоем). С этой целью можно использовать метод

оптимизации или же метод приближения функций с использованием взвешенной разности.

Способ составления взвешенной разности при синтезе рассматриваемого зубчато-рычажного механизма основывается на свойствах центроид в относительном движении звеньев. Предположим, что длины звеньев шарнирного четырехзвенника и числа зубьев

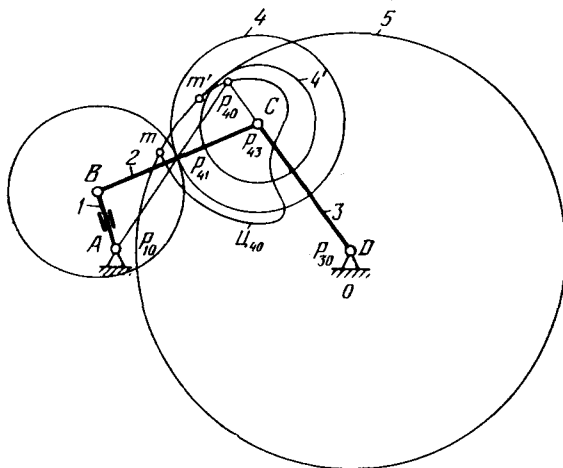


Рис. 154

колес 1 и 4 известны. Найдем положение мгновенного центра вращения P_{40} звена 4 относительно стойки O . Для этого используем известную теорему о трех мгновенных центрах вращения, согласно которой мгновенные центры вращения P_{10} , P_{41} и P_{40} должны лежать на одной прямой. Следовательно, искомый центр P_{40} должен лежать на прямой, проходящей через точку $A(P_{10})$ и точку касания начальных окружностей колес 1 и 4 , которая является центром P_{41} . С другой стороны, искомый центр P_{40} должен лежать на линии, соединяющей мгновенные центры вращения P_{30} и P_{43} , т. е. точки D и C . В пересечении указанных двух линий находится мгновенный центр вращения P_{40} .

Соединяя последовательные положения центра P_{40} , получаем неподвижную центроиду ζ_{40} . Найдем на этой центроиде участок mm' , который мало отличается от дуги окружности с центром в точке D , и примем эту окружность за начальную окружность колеса 5 . Начальная окружность колеса $4'$ с центром в точке C найдется из условия касания начальных окружностей колес 4 и 5 . При таком выборе начальной окружности колеса 5 оно остается приближенно неподвижным на участке движения кривошипа, соответствующем переходу мгновенного центра вращения P_{40} из положения m в положение m' . Действительно, если какая-нибудь точка

звена 4 (в том числе и точка касания начальных окружностей колес 4' и 5) попадает на центроиду C_{40} , то ее скорость в этот момент времени равна нулю. По условию качения без скольжения скорость точки касания, принадлежащей колесу 5, тоже оказывается равной нулю.

На основании указанного построения (А. С. Шашкин*) вывел формулы, позволяющие вычислить искомые параметры синтеза из условий приближения центроиды C_{40} к дуге окружности. Для того чтобы получить аналитическое выражение взвешенной разности, характеризующей отклонение центроиды C_{40} от окружности, рассмотрим механизм для построения этой центроиды (рис. 155).

Если в этом механизме длину кривошипа a сделать переменной путем установки дополнительного ползуна (показан на рис. 155 штриховой линией), то центр P_{40} можно перемещать по окружности. Тогда длина кривошипа будет переменной величиной a_{ϕ} и в качестве взвешенной разности Δ_q можно взять разность квадратов величин a и a_{ϕ} :

$$\Delta_q = a^2 - a_{\phi}^2.$$

Дальнейший ход вычислений искомых параметров синтеза принципиально не отличается от рассмотренных в § 92 примеров синтеза рычажных передаточных механизмов по методу приближения функций.

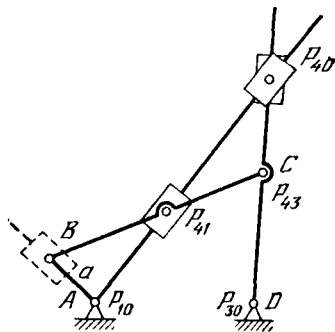


Рис. 155

ГЛАВА 30

СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

§ 98. Основы синтеза зацеплений

Основные понятия. В предыдущих главах рассматривались задачи синтеза механизмов с низшими парами. Эти пары обеспечивают передачу значительных сил, так как звенья пары обычно соприкасаются по поверхности. Но условие постоянного соприкосновения звеньев по поверхности ограничивает число возможных видов низших пар. В механизмах применяется всего шесть видов низших пар: вращательная, поступательная, винтовая, цилиндрическая, сферическая и плоскостная. Поэтому многие практически важные законы преобразования движения звеньев не могут быть получены

*) Шашкин А. С. Зубчато-рычажные механизмы.— М.: Машиностроение, 1971.

посредством механизмов, имеющих только пизшие пары. Значительно большие возможности для воспроизведения почти любого закона движения имеют механизмы с высшими парами, так как условия касания взаимодействующих поверхностей звеньев высшей пары по линиям и точкам могут быть выполнены для бесчисленного множества различных поверхностей.

Взаимодействующие поверхности звеньев высшей пары, обеспечивающие заданный закон их относительного движения, называются *сопряженными поверхностями*. При воспроизведении обратного движения можно иметь одну пару сопряженных поверхностей (например, в кулачковых механизмах). Если же требуется воспроизвести непрерывное движение в одном направлении, то надо иметь несколько последовательно взаимодействующих пар сопряженных поверхностей, которые располагаются на выступах, называемых *зубьями*.

Высшая кинематическая пара, образуемая последовательно взаимодействующими поверхностями зубьев, называется *зубчатым зацеплением* *). Термин «зацепление» (без прибавления слова «зубчатое») можно отнести и к одной паре сопряженных поверхностей. Тогда он является синонимом термина «высшая пара».

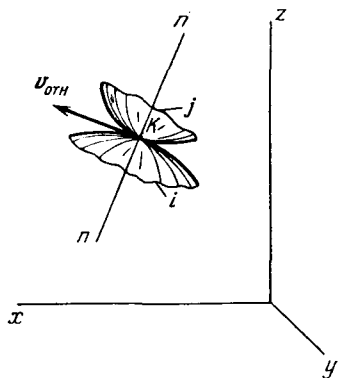


Рис. 156

Основная теорема зацепления. Синтез зацепления состоит в отыскании сопряженных поверхностей по заданному закону их относительного движения. Для решения этой задачи используется основная теорема зацепления, устанавливающая связь между геометрией сопряженных поверхностей и заданным законом их относительного движения.

Обозначим через $v_{отн}$ вектор скорости точки контакта сопряженных поверхностей (рис. 156) в движении звена i относительно звена j (или наоборот). Для данной точки K эта скорость однозначно определяется заданным законом относительного движения звеньев i и j . По отношению к сопряженным поверхностям вектор скорости относительного движения $v_{отн}$ лежит в касательной плоскости, т. е. общая нормаль к сопряженным поверхностям в точке контакта перпендикулярна направлению скорости $v_{отн}$.

Отсюда следует основная теорема зацепления: *сопряженные поверхности должны быть выбраны так, чтобы в любой точке их контакта общая нормаль к ним была перпендикулярна вектору скорости*

*) Термины по зубчатым механизмам даны по ГОСТ 10530—83 с небольшими редакционными изменениями.

рости точки контакта в заданном относительном движении поверхностей.

В аналитическом виде условие основной теоремы зацепления записывается как условие перпендикулярности векторов

$$\mathbf{v}_{отн} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (30.1)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор (орт) общей нормали в точке контакта *).

Теорема доказывается «от противного». Если условие теоремы не выполнено, т. е. общая нормаль nn к выбранным поверхностям не перпендикулярна относительной скорости $\mathbf{v}_{отн}$, то имеется составляющая этой скорости, направленная по общей нормали, и, следовательно, происходит либо отрыв одной поверхности от другой, либо вдавливание, что невозможно.

В общем случае контакт поверхностей может происходить в нескольких точках или по линии (линейный контакт). Условие основной теоремы зацепления должно быть выполнено во всех точках контакта.

Зацепление, в котором оба звена совершают плоское движение, параллельное одной и той же неподвижной плоскости, называется *плоским*. Для плоского зацепления вместо сопряженных поверхностей можно рассматривать сопряженные профили, т. е. кривые, получаемые в сечении сопряженных поверхностей плоскостью, параллельной плоскости движения. Мгновенный центр вращения в относительном движении звеньев плоского зацепления, как уже указывалось в § 19, принято называть *полюсом зацепления*. Относительная скорость точки контакта профилей перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему эту точку с полюсом зацепления. Поэтому *основная теорема плоского зацепления* принимает следующий вид:

Для того чтобы профили были сопряженными, общая нормаль к ним в точке контакта должна проходить через заданный полюс зацепления.

Пусть, например, звенья 1 и 2 плоского зацепления вращаются вокруг параллельных осей (рис. 157). Положение полюса зацепления можно найти из уравнения, связывающего векторы угловых

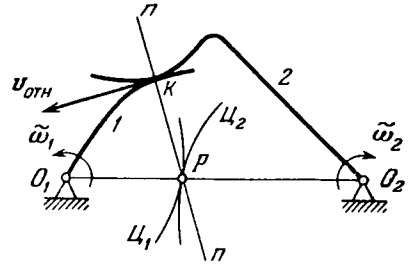


Рис. 157

*) Вместо вектора $\mathbf{v}_{отн}$ можно поставить вектор элементарного перемещения точки контакта в относительном движении, так как линии действия их совпадают. Отсюда следует, что условие основной теоремы не зависит от модуля скорости $\mathbf{v}_{отн}$.

скоростей звеньев ω_1 и ω_2 с их относительной скоростью:

$$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2. \quad (30.2)$$

Векторы ω_1 и ω_2 приложены соответственно в центрах вращения O_1 и O_2 , а вектор ω_{12} — в полюсе зацепления P . Поэтому на основании правила сложения параллельных векторов получаем

$$\frac{l_{O_1P}}{l_{O_2P}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \equiv |u_{21}|, \quad (30.3)$$

где u_{21} — отношение угловых скоростей звеньев, называемое *передаточным отношением*, которое при параллельных осях вращения звеньев считается положительным, если направления угловых скоростей — одинаковые, и отрицательным, если эти направления — противоположные. Геометрические места точек на звеньях 1 и 2, которые при движении звеньев последовательно совпадают с полюсом зацепления, образуют центроиды C_1 и C_2 в относительном движении звеньев. Если передаточное отношение — постоянное, то полюс зацепления занимает неизменное положение по отношению к стойке, и центроиды C_1 и C_2 представляют собой окружности с радиусами O_1P и O_2P соответственно. По свойству центроид эти окружности перекатываются без скольжения. Если же передаточное отношение является переменной величиной, то полюс перемещается по линии O_1O_2 и центроиды C_1 и C_2 уже не будут окружностями. При отрицательном передаточном отношении зацепление называется *внешним*, а при положительном — *внутренним* (в соответствии с расположением центроид).

Оси зацепления. Основная теорема выражает условие, которое определяет направления нормалей в точках контакта сопряженных поверхностей. Прямая линия, через которую проходят нормали во всех точках контакта сопряженных поверхностей, называется *осью зацепления*.

В механизмах для передачи вращения между параллельными осями ось зацепления совпадает с мгновенной осью вращения в относительном движении звеньев, т. е. с прямой, которая проходит через полюс зацепления параллельно осям вращения звеньев. Это утверждение следует непосредственно из основной теоремы плоского зацепления.

В механизмах для передачи вращения между пересекающимися осями ось зацепления также совпадает с мгновенной осью вращения в относительном движении звеньев, т. е. с линией касания аксоидов. *Аксиод* каждого звена представляет собой геометрическое место положений мгновенной оси вращения в системе, связанной с данным колесом. При пересекающихся осях вращения аксоиды являются конусами с общей вершиной в точке пересечения осей вращения (рис. 158).

Вектор относительной скорости точки касания K сопряженных поверхностей $v_{отн}$ лежит в касательной плоскости и определяется по условию

$$v_{отн} = \omega_{отн} \times r,$$

где $\omega_{отн}$ — относительная угловая скорость вращения звеньев 1 и 2 (ω_{12} или ω_{21}), r — радиус вращения, соединяющий точку контакта с мгновенной осью вращения L в относительном движении звеньев. Следовательно, условие основной теоремы зацепления (30.1) принимает вид

$$(n \cdot [\omega_{отн} \times r]) = 0.$$

Смешанное скалярно-векторное произведение трех векторов равно нулю только в случае, если они лежат в одной плоскости, т. е. орт нормали n должен лежать в плоскости, содержащей мгновенную ось вращения L , по которой направлен вектор $\omega_{отн}$, и радиус-вектор r .

Отсюда непосредственно следует, что нормаль к сопряженным поверхностям в любой точке контакта пересекает ось мгновенного вращения в относительном движении звеньев, т. е. эта ось является осью зацепления.

При скрещающихся осях вращения звеньев оси зацепления могут быть найдены только в некоторых частных случаях.

Известно, что относительное движение звеньев, вращающихся вокруг скрещающихся осей с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , является винтовым, т. е. может быть представлено как вращение вокруг мгновенной винтовой оси (оси мгновенного вращения-скольжения) с одновременным скольжением вдоль этой оси. Определение винта относительного движения по заданным скользящим векторам ω_1 и ω_2 имеет единственное решение, т. е. для звеньев, вращающихся вокруг скрещающихся осей, существует лишь одна мгновенная винтовая ось. Обратная задача — нахождение векторов ω_1 и ω_2 по заданному винту относительного движения — имеет бесчисленное множество решений, т. е. можно подобрать бесчисленное множество пар осей, вращение вокруг которых сводится к одному и тому же винту относительного движения. Каждая из этих пар осей называется сопряженной данному винту или *парой осей составляющих вращений*. Для одной точки контакта сопряженных поверхностей из бесчисленного множества пар осей составляющих вращений можно выбрать ту, через которую проходит общая нормаль к сопряженным поверхностям. Однако в общем случае каждой точке контакта соответствует своя пара осей составляющих вращений. Осями зацепления эти пары осей будут

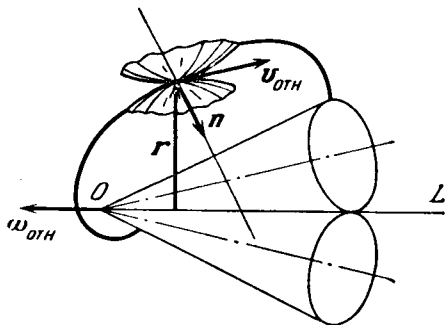


Рис. 158

лишь в том случае, если они пересекаются общей нормалью к сопряженным поверхностям в любой точке контакта. Другими словами, положения осей зацепления не зависят от положения контактной точки.

Если в механизме со скрещающимися осями вращения звеньев существует ось зацепления, то она пересекает линию кратчайшего расстояния между осями и скрещивается с осями вращения. Для теории зацеплений наибольшее значение имеет тот частный случай существования осей зацепления, когда по крайней мере одна из сопряженных поверхностей имеет форму геликоида. *Геликоидом* называется винтовая поверхность постоянного шага, образованная винтовым движением некоторой образующей кривой. В этом случае существуют две оси зацепления, уравнения которых можно получить по заданному относительному движению звеньев. Использование понятия об осях зацепления при анализе и синтезе пространственных зацеплений аналогично применению основной теоремы зацепления.

Графический метод синтеза сопряженных профилей. Основной задачей синтеза зацеплений является нахождение сопряженных

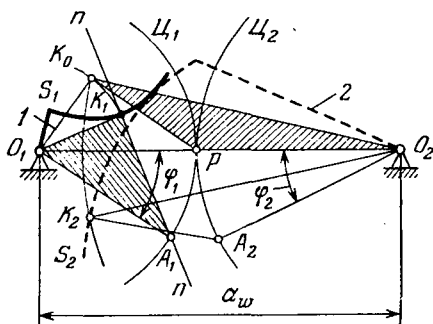


Рис. 159

поверхностей по заданному закону изменения передаточного отношения. Эта задача может решаться как графическими, так и аналитическими методами. При анализе и синтезе современных зацеплений применяются только аналитические методы. Тем не менее для уяснения сущности этих методов полезно ознакомиться с графическими построениями, с помощью которых можно для плоских зацеплений найти

сопряженные профили. В частности, графический метод синтеза сопряженных профилей, предложенный Ф. Рело*), лежит в основе аналитических методов, известных под названием *методов профильных нормалей*.

Решим следующую задачу: для внешнего зацепления дано постоянное передаточное отношение u_{21} , межосевое расстояние a_w и профиль S_1 на звене 1; найти сопряженный профиль S_2 на звене 2 (рис. 159), применяя графический метод Ф. Рело.

По методу Рело искомый профиль находится по точкам путем последовательного выполнения трех этапов.

*) Франц Рело (Franz Reuleaux, 1829—1905), немецкий ученый, один из первых разработал теорию структуры механизмов, дал решение некоторых задач кинематического синтеза механизмов,

Первый этап. Определяем положение полюса зацепления P и строим центроиды Π_1 и Π_2 . Затем выбираем на профиле S_1 произвольную точку K_1 и находим угол φ_1 , на который надо повернуть отрезок O_1K_1 , чтобы точка K_1 вошла в контакт с сопряженным профилем. Искомый угол равен углу PO_1A_1 , где A_1 — точка пересечения нормали nn с центроидой Π_1 , так как нормаль nn к профилю S в момент контакта проходит через полюс зацепления P .

Второй этап. Находим точку K_0 , в которой точка K_1 будет иметь контакт с сопряженным профилем, путем поворота заштрихованного треугольника $O_1K_1A_1$ на угол φ_1 или, что то же, путем построения треугольника O_1K_0P по трем известным сторонам: O_1P , $O_1K_0 = O_1K_1$ и $K_0P = K_1A_1$.

Третий этап. Находим точку K_2 искомого профиля S_2 на звено 2, которая придет в контакт с точкой K_1 профиля S_1 в точке K_0 . Для этого определяем точку A_2 на центроиде Π_2 из условия качения центроид: $\overline{PA_2} = \overline{PA_1}$. Затем находим искомую точку K_2 в

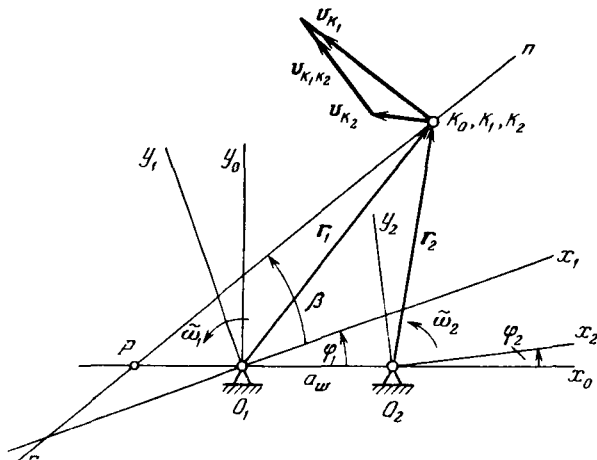


Рис. 160

пересечении дуг радиусом O_2K_0 из центра O_2 и радиусом $A_2K_2 = K_0P$ из центра A_2 , что соответствует повороту заштрихованного треугольника K_0O_2P на угол φ_2 .

Таковыми же построениями находятся другие точки искомого профиля S_2 . Одновременно получается геометрическое место точек K_0 контакта сопряженных профилей по отношению к стойке, которое называется *линией зацепления*. Если линия зацепления задана, то для нахождения сопряженных профилей, кроме передаточного отношения (постоянного или переменного), должен быть также задан закон движения точки контакта по линии зацепления.

Аналитический метод синтеза сопряженных профилей. Пусть, например, заданы (рис. 160): межосевое расстояние a_w , профиль S_1

на звене 1 в виде уравнения $y_1 = y_1(x_1)$ в системе координат, связанной с этим звеном, и положительное передаточное отношение u_{21} . Требуется найти сопряженный профиль S_2 звена 2 в системе координат, связанной с этим звеном.

Искомый профиль найдем по точкам, применяя уравнение (30.1), которое называется в этом случае *уравнением зацепления*. Вычисление координат каждой точки профиля состоит из трех этапов, аналогичных этапам графического решения.

Первый этап — определение угла φ_1 , при котором точка K_1 на звене 1 является точкой контакта.

Угол φ_1 определяем из уравнения зацепления (30.1)

$$\mathbf{v}_{K_1 K_2} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

которое в проекциях *) имеет вид

$$v_{K_1 K_2}^{(x_1)} n^{(x_1)} + v_{K_1 K_2}^{(y_1)} n^{(y_1)} = 0.$$

Задаемся значениями координат x_1 и y_1 точки K_1 и вычисляем проекции скоростей точек K_1 и K_2 на координатные оси, связанные со звеном 1, по правилам нахождения проекций векторных произведений $\omega_1 \times \mathbf{r}_1$ и $\omega_2 \times \mathbf{r}_2$:

$$\begin{aligned} v_{K_1}^{(x_1)} &= -\omega y_1, & v_{K_1}^{(y_1)} &= \omega x_1, \\ v_{K_2}^{(x_1)} &= -\omega_2 (y_1 + a_w \sin \varphi_1), & v_{K_2}^{(y_1)} &= \omega_2 (x_1 - a_w \cos \varphi_1). \end{aligned}$$

Скорость точки K_1 в движении звена 1 относительно звена 2

$$\mathbf{v}_{K_1 K_2} = \mathbf{v}_{K_1} - \mathbf{v}_{K_2}$$

или в проекциях:

$$\begin{aligned} v_{K_1 K_2}^{(x_1)} &= -\omega_1 y_1 + \omega_2 (y_1 + a_w \sin \varphi_1), \\ v_{K_1 K_2}^{(y_1)} &= \omega x_1 - \omega_2 (x_1 - a_w \cos \varphi_1). \end{aligned}$$

Проекция орта нормали:

$$n^{(x_1)} = \cos \beta, \quad n^{(y_1)} = \sin \beta,$$

где β — угол наклона нормали к оси абсцисс, определяемый из соотношения

$$\operatorname{ctg} \beta = -\frac{dy_1}{dx_1}.$$

Теперь уравнение зацепления принимает вид

$$[-\omega_1 y_1 + \omega_2 (y_1 + a_w \sin \varphi_1)] \cos \beta + [\omega_1 x_1 - \omega_2 (x_1 - a_w \cos \varphi_1)] \sin \beta = 0.$$

*) Верхними индексами в скобках указаны оси, на которые проектируются векторы.

После деления всех членов уравнения на $\omega_1 \sin \beta$ получаем

$$(y_1 - u_{21}(y_1 + a_w \sin \varphi_1)) \frac{dy_1}{dx_1} + x_1 - u_{21}(x_1 - a_w \cos \varphi_1) = 0.$$

Из этого уравнения, квадратного относительно $\sin \varphi_1$, находим искомое значение угла φ_1 .

Второй этап — вычисление координат точки контакта K_0 в неподвижной системе координат.

Искомые координаты находятся из формул преобразования координат:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y_0 &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Полученные формулы определяют точки линии зацепления.

Третий этап — вычисление координат точки K_2 искомого профиля в системе, связанной со звеном 2.

По формулам преобразования координат имеем

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 \cos \varphi_2 + y_0 \sin \varphi_2 - a_w \cos \varphi_2, \\ y_2 &= -x_0 \sin \varphi_2 + y_0 \cos \varphi_2 + a_w \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Угол φ_2 , соответствующий принятому значению угла φ_1 , при постоянном передаточном отношении определяется по условию

$$\varphi_2 = u_{21} \varphi_1,$$

при переменном — по соотношению

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} u_{21} d\varphi.$$

Выполняя все три этапа для каждой точки профиля зуба на звене 1, получаем линию зацепления и искомый профиль зуба S_2 на звене 2.

Аналитический метод синтеза сопряженных поверхностей в пространственном зацеплении. Как видно из предыдущего примера синтеза сопряженных профилей в плоском зацеплении, основным этапом этого синтеза является определение положения звена, при котором выбранная точка его профиля входит в контакт с другим профилем. При аналитическом решении на основании уравнения зацепления этот этап сводится к решению квадратного уравнения. Для пространственного зацепления полностью сохраняется вся последовательность выполнения указанных трех этапов, и решение задачи сводится к решению квадратного уравнения. Только при выполнении преобразования координат и при определении проекций на координатные оси добавляются слагаемые, содержащие координаты z_0 , z_1 и z_2 .

Дано (рис. 161): передаточное отношение u_{21} , межосевое (кратчайшее) расстояние a_w , угол скрещивания осей вращения звеньев

γ , поверхность звена 1, взаимодействующая со звеном 2. Эта поверхность в системе координат, связанной со звеном 1, задана уравнениями: $x_1 = x_1(\nu, \xi)$, $y_1 = y_1(\nu, \xi)$, $z_1 = z_1(\nu, \xi)$, где ν, ξ — криволинейные координаты поверхности. Требуется найти по точ-

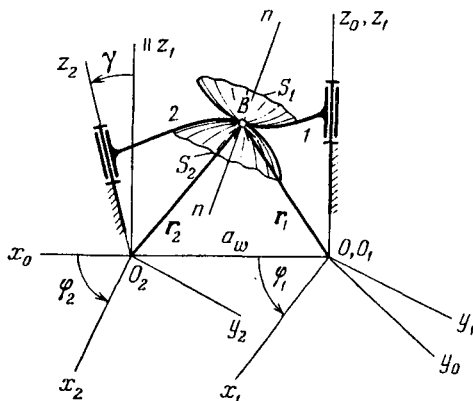


Рис. 161

кам сопряженную поверхность S_2 звена 2 в системе координат, связанной с этим звеном.

Первый этап — определение угла φ_1 , при котором точка K на звене 1 является точкой контакта.

Уравнение зацепления (30.1) в проекциях имеет вид

$$v_{K_1 K_2}^{(x_1)} n^{(x_1)} + v_{K_1 K_2}^{(y_1)} n^{(y_1)} + v_{K_1 K_2}^{(z_1)} n^{(z_1)} = 0.$$

Проекции угловых скоростей ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned} \omega_1^{(x_1)} &= 0, \quad \omega_1^{(y_1)} = 0, \quad \omega_1^{(z_1)} = \omega_1. \\ \omega_2^{(x_1)} &= -\omega_2 \sin \gamma \sin \varphi_1, \quad \omega_2^{(y_1)} = -\omega_2 \sin \gamma \cos \varphi, \\ \omega_2^{(z_1)} &= \omega_2 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Проекции радиусов-векторов r_1 и r_2 :

$$\begin{aligned} r_1^{(x_1)} &= x_1, \quad r_1^{(y_1)} = y_1, \quad r_1^{(z_1)} = z_1, \\ r_2^{(x_1)} &= x_1 - a_w \cos \varphi_1, \quad r_2^{(y_1)} = y_1 + a_w \sin \varphi_1, \quad r_2^{(z_1)} = z_1. \end{aligned}$$

Проекции относительной скорости $v_{K_1 K_2}$ находим как разность проекций скоростей $v_{K_1} = \omega_1 \times r_1$ и $v_{K_2} = \omega_2 \times r_2$. Используя правила

нахождения проекций векторных произведений, получаем

$$v_{K_1 K_2}^{(x_1)} = -\omega_1 y_1 + \omega_2 z_1 \sin \gamma \cos \varphi_1 + \omega_2 (y_1 + a_w \sin \varphi_1) \cos \gamma,$$

$$v_{K_1 K_2}^{(y_1)} = \omega_1 x_1 - \omega_2 z_1 \sin \gamma \sin \varphi_1 - \omega_2 (x_1 - a_w \cos \varphi_1) \cos \gamma,$$

$$v_{K_1 K_2}^{(z_1)} = \omega_2 (y_1 \sin \varphi_1 - x_1 \cos \varphi_1 + a_w) \sin \gamma.$$

Проекции орта нормали определяются по заданному уравнению поверхности S_1 звена I из соотношений:

$$n^{(x_1)} = \frac{\partial y_1}{\partial v} \frac{\partial z_1}{\partial \xi} - \frac{\partial y_1}{\partial \xi} \frac{\partial z_1}{\partial v},$$

$$n^{(y_1)} = \frac{\partial z_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} - \frac{\partial z_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$n^{(z_1)} = \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial y_1}{\partial v}.$$

Подставляя в уравнение зацепления найденные проекции орта нормали и относительной скорости, получаем после сокращения на ω_1 квадратное уравнение относительно $\sin \varphi_1$.

После вычисления угла φ_1 надо выяснить, является ли точка K_1 единственной точкой контакта со звеном 2 при этом значении угла φ_1 . Другими словами, нужно установить — является ли контакт в высшей паре точечным или линейным. С этой целью обратим внимание на то, что точка контакта на звене I должна одновременно принадлежать заданной поверхности S_1 и поверхности, определяемой уравнением зацепления (30.1). Пересечение двух поверхностей в общем случае даст линию. Следовательно, в общем случае контакт будет линейным. Линия, по которой в данный момент соприкасаются сопряженные поверхности, называется *контактной линией*. В рассматриваемом примере для вычисления координат всех точек контактной линии на поверхности S_1 звена I надо совместным решением (обычно приближенным) уравнения поверхности S_1 и уравнения зацепления (30.1) найти параметры v и ξ , соответствующие этим точкам. Поэтому первый этап можно назвать также этапом определения контактной линии на поверхности S_1 звена I .

Второй этап — определение координат точек контакта в неподвижной системе координат по формулам преобразования координат

$$x_0 = x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1,$$

$$y_0 = x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1,$$

$$z_0 = z_1.$$

При этом преобразовании получаем в неподвижной системе координат линию, которая называется *общей линией контакта*. Поверхность, описываемая общей линией контакта при движении этой

линии относительно неподвижного звена, называется *поверхностью зацепления*. Другими словами, поверхность зацепления есть совокупность общих линий контакта.

Третий этап — определение искоемых координат точек K_2 на профиле S_2 звена 2 по формулам преобразования координат *):

$$\begin{aligned}x_2 &= x_0 \cos \varphi_2 + y_0 \cos \gamma \sin \varphi_2 + z_0 \sin \gamma \sin \varphi_2 - a_w \cos \varphi_2, \\y_2 &= -x_0 \sin \varphi_2 + y_0 \cos \gamma \cos \varphi_2 + z_0 \sin \gamma \cos \varphi_2 + a_w \sin \varphi_2, \\z_2 &= -y_0 \sin \gamma + z_0 \cos \gamma,\end{aligned}$$

где $\varphi_2 = u_{21}\varphi_1$ при $u_{21} = \text{const}$ или $\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} u_{21} d\varphi_1$ при $u_{21} \neq \text{const}$.

Эти соотношения определяют контактную линию на поверхности звена 2. Совокупность этих контактных линий дает искомую сопряженную поверхность S_2 звена 2.

Как и в случае плоского зацепления, задачу синтеза сопряженных поверхностей в пространственном зацеплении можно решать, задаваясь контактной линией в неподвижной системе координат (общей контактной линией) и определяя затем сопряженные поверхности зубьев на звеньях 1 и 2 как совокупность контактных линий на этих поверхностях.

Итак, при помощи указанных методов всегда можно выполнить основное условие синтеза зубчатого зацепления — получение заданного передаточного отношения. Этому условию удовлетворяет бесконечно большое число вариантов, соответствующих различным поверхностям одного зуба или различным общим линиям контакта.

Из этих вариантов надо выбрать тот, который в наибольшей мере удовлетворяет дополнительным условиям синтеза. Наиболее важным дополнительным условием является простота изготовления сопряженных поверхностей.

Образование сопряженных поверхностей по Оливье **). В рассмотренных ранее методах синтеза сопряженных поверхностей в плоских и пространственных зацеплениях предполагалось, что одна из сопряженных поверхностей задана. Однако надо иметь в виду, что выбор сопряженных поверхностей во многом определяется условием их обработки. Большинство современных зацеплений создавалось на основе разработки и усовершенствования способов их обработки режущим инструментом.

Движение режущих кромок зуборезного инструмента в общем случае состоит из трех независимых движений. Первое движение —

*) Матрица коэффициентов этого преобразования получается из матрицы (3.9) заменой θ_{ji} на γ и φ_{ji} на φ_2 . Кроме того, меняются местами строки и столбцы, а свободные члены выражаются через координаты старого начала в новых координатах.

**) Теодор Оливье (Theodore Olivier, 1793—1858), французский геометр, обосновал возможность получения сопряженных огибающих поверхностей посредством движения вспомогательной поверхности.

движение резания — совершается относительно основания, на котором укреплен инструмент. Оно может быть прямолинейно-поступательным или вращательным. Поверхность, образуемая режущими кромками инструмента при движении резания, называется *производящей* (иногда — инструментальной) *поверхностью*. Второе движение — *движение огибания* (иногда — обкатки) — совершается относительно обрабатываемой заготовки. При этом движении боковая поверхность зуба получается как огибающая положений производящей поверхности (отсюда название этого вида движения). Третье движение — *движение подачи* — состоит в постепенном приближении инструмента к заготовке с целью уменьшения силы резания. В дальнейшем движение подачи не рассматривается, и считается, что инструмент входит в заготовку на полную высоту зуба.

Различают два способа образования сопряженных профилей — *способ копирования* и *способ огибания*. При способе копирования движение огибания отсутствует, и боковая поверхность зуба получается как копия производящей поверхности. Этот способ применяется редко, так как требуется большой комплект зуборезного инструмента. При способе огибания вид боковой поверхности зуба зависит не только от вида производящей поверхности, но и от движения огибания. Например, с помощью одной и той же производящей плоскости можно получить на заготовке коническую поверхность, сферу и т. п.

Теоретическое обоснование способа огибания было дано Оливье, который предложил два варианта этого способа. В первом обе сопряженные поверхности зубьев нарезаются одной производящей поверхностью, отличающейся от требуемых сопряженных поверхностей. Во втором способе производящая поверхность совпадает с одной из требуемых сопряженных поверхностей, причем относительное движение производящей поверхности и заготовки должно быть таким же, какое имеют сопряженные поверхности.

Условия сопряженности поверхностей, образуемых по первому способу Оливье. Обозначим требуемые сопряженные поверхности через S_1 и S_2 , а производящую поверхность — через Q , и представим себе, что все три поверхности в каждый момент времени находятся в непрерывном контакте и касаются по одной и той же линии, причем поверхности S_1 и S_2 совершают движения, соответствующие заданному передаточному отношению. Если это условие выполняется, то после обработки производящей поверхностью Q поверхности S_1 и S_2 получаются сопряженными и с линейным контактом.

Контактная линия может быть определена как линия пересечения поверхности зуба и поверхности, представленной уравнением зацепления. В нашем случае контактная линия производящей поверхности Q с поверхностью S_1 определяется уравнением производящей поверхности и уравнением зацепления:

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_q(v, \xi), \quad \mathbf{v}_{\text{отн}}^{(QS_1)} \cdot \mathbf{n}_q = 0, \quad (30.4)$$

где $\mathbf{r}_q$ — радиус-вектор точки на поверхности Q ; ν, ξ — криволинейные координаты поверхности Q ; $\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(QS_1)}$ — скорость точки контакта на поверхности Q (или S_1) в ее движении относительно поверхности S_1 (или Q); $\mathbf{n}_q$ — орт нормали к поверхности Q в точке контакта в системе координат, связанной с поверхностью Q .

Аналогично контактная линия поверхностей Q и S_2 определяется уравнениями

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_q(\nu, \xi), \quad \mathbf{v}_{\text{отн}}^{(QS_2)} \cdot \mathbf{n}_q = 0, \quad (30.5)$$

где $\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(QS_2)}$ — скорость точки контакта на поверхности Q (или S_2) в ее движении относительно поверхности S_2 (или Q).

Обе контактные линии будут тождественными, если выполнятся условие

$$\mathbf{v}_{\text{отн}}^{(QS_1)} \cdot \mathbf{n}_q = \mathbf{v}_{\text{отн}}^{(QS_2)} \cdot \mathbf{n}_q = 0. \quad (30.6)$$

Для передач с параллельными или пересекающимися осями уравнения (30.6) удовлетворяются, если совпадают мгновенные оси вращения при зацеплении Q с S_1 и Q с S_2 . Если контактные линии, определяемые уравнениями (30.4) и (30.5), не совпадают, но в каждый момент времени имеют общую точку, то получится точечный контакт поверхностей S_1 и S_2 .

Дальнейшее развитие способа Оливье показало возможность образования сопряженных поверхностей при помощи двух производящих поверхностей, а также производящих линий, под которыми понимаются режущие кромки инструмента. В последнем случае сопряженные поверхности образуются не огибанием, а как геометрические места производящих линий.

Последовательность синтеза зацеплений, получаемых при нарезании зубьев по методу обкатки. *Первый этап синтеза* состоит в определении производящей поверхности. На этом этапе считаются известными: профиль режущего инструмента и кинематическая схема обработки, которая должна содержать все данные для нахождения абсолютных и относительных движений режущих кромок инструмента и нарезаемого колеса. При решении задачи об определении производящей поверхности обычно используется метод преобразования координат. С этой целью выбираются системы координат S_0, S_n, S_n и S_n , связанные соответственно со стойкой, инструментом, производящей поверхностью и нарезаемым колесом. Производящая поверхность или, что то же, боковая поверхность зуба воображаемого производящего колеса есть геометрическое место режущих кромок инструмента в системе координат S_n . Для определения этой поверхности надо воспользоваться формулами преобразования координат от системы S_n к системе S_n , которые в матричной форме имеют вид

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{T}_{nn} \mathbf{r}_n,$$

где $\mathbf{r}_n$ — радиус-вектор точки на режущей кромке инструмента в системе координат, связанной с инструментом; $\mathbf{r}_n$ — радиус-вектор той же точки в системе координат, связанной с производящей поверхностью (производящим колесом); T_{np} — матрица перехода (преобразования координат) от системы S_n к системе S_p . Матрица четвертого порядка T_{np} составляется в соответствии с кинематической схемой обработки.

Второй этап синтеза состоит в определении линии контакта между производящей поверхностью и нарезаемым колесом. На этом этапе взаимодействие режущих кромок инструмента и нарезаемого колеса может рассматриваться как зацепление между зубьями производящего и нарезаемого колес, называемое *станочным зацеплением*. Отсюда следует, что после определения производящей поверхности дальнейшая последовательность синтеза совпадает с указанной ранее при синтезе по методу профильных нормалей, и контактная линия может быть найдена, например, совместным решением уравнения производящей поверхности и уравнения зацепления (30.1).

Третий этап синтеза состоит в определении поверхности зацепления как семейства контактных линий в неподвижной системе координат. На этом этапе используются формулы преобразования координат при переходе от системы S_n к системе S_0 .

Четвертый этап синтеза — определение боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса как семейства линий контакта в системе координат, связанной с нарезаемым колесом, — выполняется на основании формул преобразования координат при переходе от системы S_n к системе S_k .

Указанные четыре этапа синтеза повторяются для нахождения боковой поверхности зуба второго нарезаемого колеса, сопряженной с боковой поверхностью зуба первого колеса. Эти поверхности будут сопряженными, если выполняется условие (30.6). Для плоских и сферических зацеплений мгновенная ось вращения в относительном движении будет одной и той же при зацеплении нарезаемых колес со своим производящим колесом.

Пятно контакта поверхностей зубьев и получение локализованной зоны контакта. Касание сопряженных поверхностей будет линейчатым, если производящие поверхности полностью совпадают для обоих колес. Однако линейчатое касание сопряженных поверхностей может привести к появлению в механизме избыточных связей. Пусть, например, в трехзвенном механизме для передачи вращения между двумя в общем случае скрещающимися осями имеются две вращательные пары и одна высшая с линейчатым касанием, которая относится к четырехподвижным парам (парам второго класса). Тогда по формуле (1.4) при $W = 1$, $n = 2$, $p_1 = 2$ и $p_4 = 1$ получаем число избыточных связей

$$q = 1 - 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 1.$$

Погрешности изготовления колес и сборки механизма при наличии хотя бы одной избыточной связи приводят к нарушению линейчатого касания сопряженных поверхностей, которое в зубчатых механизмах легко может перейти в касание кромок зубьев. Кромочное касание недопустимо по условиям прочности зубьев,

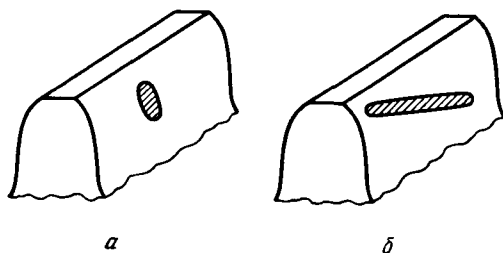


Рис. 162

и потому стремятся к тому, чтобы сопряженные поверхности имели под нагрузкой локальное касание в средней части зубьев. Теоретически касание будет точечным, а практически после сжатия зубья начинают касаться по некоторой площадке, которая в процессе зацепления перемещается,

образуя *пятно контакта* (рис. 162). Число избыточных связей становится равным нулю, так как высшую пару в этом случае надо считать пятиподвижной (парой первого класса).

Форма пятна контакта зависит от величины мгновенной площадки контакта (обычно эллиптического вида) и от направления линии перемещения точки контакта. Желательно, чтобы пятно контакта было близко к средней части зуба (рис. 162, *a*) с тем, чтобы расстояния между точкой приложения силы давления на зуб и опорами колес оставались постоянными. *Диагональное пятно контакта* (рис. 162, *b*) не только вызывает колебания величин опорных реакций, но и ухудшает условия размещения смазочного слоя.

Точечное касание при сохранении сопряженности боковых поверхностей зубьев может быть достигнуто таким выбором производящих поверхностей, при котором они остаются в процессе нарезания как бы жестко связанными между собой, касаясь по некоторой линии.

Для улучшения условий контакта иногда считают возможным отступить от требования строгого постоянства передаточного отношения за время работы одной пары зубьев, вводя *корректуры в настройку станка* для нарезания зубьев. Эти корректуры применяются также в тех случаях, когда по технологическим условиям отказываются от теоретически точных схем нарезания и получают приближенные зацепления с переменным передаточным отношением.

§ 99. Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача

Цилиндрическая зубчатая передача. Методы синтеза зацеплений, изложенные в предыдущем параграфе, применимы для любых механизмов с высшими парами. Приложение этих методов покажем вначале на примере трехзвенного зубчатого механизма, называемого

мого по ГОСТ 16530—83 *зубчатой передачей*. Зубчатая передача с параллельными осями вращения звеньев называется *цилиндрической*, так как мгновенная ось вращения в относительном движении звеньев образует на каждом из звеньев цилиндрические поверхности (аксоиды относительного движения). Профили зубьев этой передачи должны удовлетворять основной теореме плоского зацепления.

Наибольшее распространение в машинах имеют цилиндрические зубчатые передачи для воспроизведения постоянного передаточного отношения. По ГОСТ 16530—83 и согласно сборнику рекомендуемых терминов по теории механизмов и машин Комитета научно-технической терминологии АН СССР *) *передаточным отношением* называется отношение угловых скоростей звеньев. При параллельных осях вращения передаточное отношение считается положительным при одинаковом направлении угловых скоростей звеньев, при непараллельных осях вращения передаточное отношение равно отношению модулей угловых скоростей звеньев.

Кроме термина «передаточное отношение», ГОСТ 16530—83 указывает также на термин «передаточное число», под которым понимается отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни (колеса с меньшим числом зубьев). Согласно этому определению передаточное число, обозначаемое буквой u , больше единицы (или равно единице).

В дальнейшем, как и при анализе зубчатых механизмов, будем пользоваться только понятием передаточного отношения, которое при параллельных осях вращения равно

$$u_k = \tilde{\omega}_k / \tilde{\omega}_l,$$

а при пересекающихся или скрещивающихся осях равно

$$u_k = \omega_k / \omega_l.$$

Условию $u_k = \text{const}$ удовлетворяют сопряженные профили, очерченные по эвольвентам окружностей. Эвольвентное зацепление было предложено Л. Эйлером **).

Эвольвента окружности. Геометрическое место центров кривизны какой-либо кривой называется *эволютой*, а сама кривая по отношению к эволюте называется *разверткой* или *эвольвентой*. Следовательно, эвольвента окружности есть кривая, центры кривизны которой лежат на окружности. Эвольвента (для краткости в дальнейшем опускаем слово «окружности») может быть получена как траектория точки прямой, перекатывающейся без скольжения по

*) Теория механизмов и машин. Терминология. Вып. 93.— М.: Наука, 1978.— С. 14.

**) Леонард Эйлер (1707—1783), знаменитый математик и механик, член Петербургской академии наук с 1727 г., дал решение задачи о профилировании зубьев в плоском зацеплении и ряда задач динамики механизмов и трения гибких тел.

окружности. В теории зацепления окружность, эвольвентой которой является профиль зуба, называется *основной окружностью*.

На рис. 163 показано построение эвольвенты основной окружности b при перекачивании по ней прямой nn , называемой *производящей прямой*. Пусть производящая прямая показана в положении, когда она касается основной окружности в точке A , и надо построить эвольвенту, описываемую точкой M . Делим отрезок AM на равные части (например, на четыре части) и откладываем на основной окружности дуги, равные соответствующим частям отрезка AM : $\overline{43} = \overline{43}$, $\overline{32} = \overline{32}$ и т. д. (при малых центральных углах дуги можно заменять хордами). Через полученные точки деления окружности проводим к ней касательные и откладываем на них отрезки, последовательно уменьшая длину каждого отрезка на одну часть. Например, из точки 3 откладываем отрезок, содержащий три части, из точки 2 — две части и т. д. Соединяя концы отложенных отрезков, получаем эвольвенту.

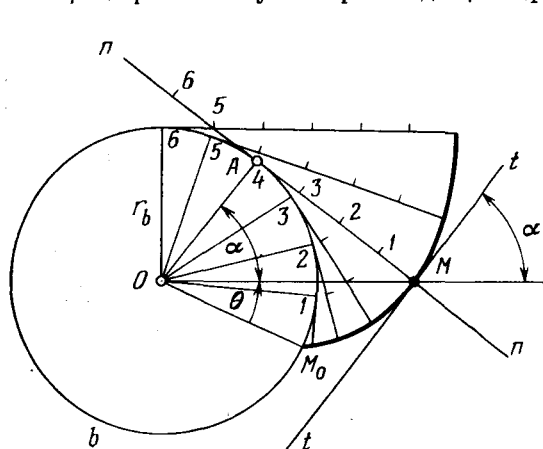


Рис. 163

Если нужно получить продолжение эвольвенты, то на производящей прямой откладываются отрезки $\overline{45} = \overline{56}$ и т. д., а на окружности — дуги $\overline{45}$, $\overline{56}$, равные по длине отрезкам $\overline{45}$, $\overline{56}$. Для получения точек эвольвенты из точки 5 проводится касательная к основной окружности и на ней откладывается отрезок, содержащий пять частей, и т. д.

Заметим также, что эвольвенту можно представить как траекторию точки M конца нити, которая в натянутом положении наматывается на барабан, диаметр которого равен диаметру основной окружности.

Уравнение эвольвенты в параметрической форме получается из условия перекачивания производящей прямой по основной окружности:

$$\overline{AM_0} = AM. \quad (30.7)$$

Обозначим через α острый угол между касательной tt к эвольвенте и радиусом-вектором эвольвенты OM . В теории эвольвентного зацепления он называется *углом профиля*. Угол, образованный на-

чальным радиусом-вектором эвольвенты OM_0 и ее текущим радиусом OM , называется *эвольвентным углом* и обозначается через θ . Кроме того, обозначим через r_b радиус основной окружности. Тогда условие (30.7) принимает вид

$$r_b(\alpha + \theta) = r_b \operatorname{tg} \alpha,$$

или

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (30.8)$$

Тригонометрическая функция $\operatorname{tg} \alpha - \alpha$ называется *инволютой* и обозначается $\operatorname{inv} \alpha$, т. е. уравнение (30.8) может быть записано в виде

$$\theta = \operatorname{inv} \alpha.$$

Радиус-вектор эвольвенты R находится из $\triangle OAM$:

$$R = r_b / \cos \alpha. \quad (30.9)$$

Уравнения (30.8) и (30.9) определяют уравнение эвольвенты в полярных координатах R и θ , выраженное через параметр α .

Эвольвента имеет две ветви (рис. 164). Положительная ветвь $\mathcal{E}^+$ ($\theta > 0$) получается при перекатывании производящей прямой против хода часовой стрелки (сплошная линия), отрицательная $\mathcal{E}^-$ ($\theta < 0$) — при перекатывании по ходу часовой стрелки (штриховая линия).

Перечислим основные свойства эвольвенты:

1) каждая ветвь эвольвенты вполне определяется радиусом основной окружности и положением начала отсчета эвольвентного угла;

2) эвольвента не имеет точек внутри основной окружности;

3) нормаль к любой точке эвольвенты направлена по касательной к основной окружности, причем из двух возможных касательных одна соответствует положительной ветви, а другая — отрицательной;

4) центр кривизны лежит в точке касания нормали с основной окружностью.

Эвольвентное зацепление. Пусть профиль зуба звена 1 (рис. 165) очерчен по эвольвенте основной окружности с радиусом r_{b1} , а профиль зуба звена 2 — по эвольвенте основной окружности с радиусом r_{b2} . Поместим центры этих окружностей в центры вращения O_1 и O_2 и приведем эвольвенты в соприкосновение в точке K . Нормаль к эвольвенте $\mathcal{E}_1$ в точке K должна быть касательной к основной окружности звена 1, а нормаль к эвольвенте $\mathcal{E}_2$ — каса-

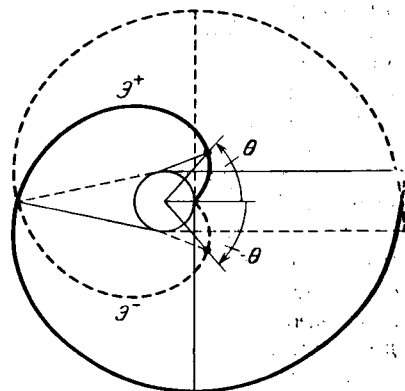


Рис. 164

тельной к основной окружности звена 2. В точке касания нормаль должна быть общей к обоим профилям, и следовательно, точка K лежит на общей касательной к основным окружностям. При вращении звеньев 1 и 2 точка касания эвольвент перемещается по отрезку AB этой касательной, так как вне отрезка AB эвольвенты

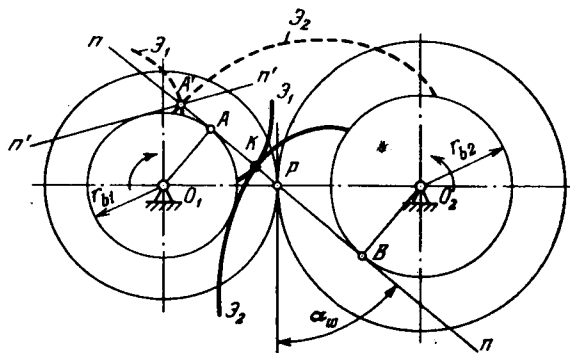


Рис. 165

не могут касаться, т. е. иметь общую нормаль. Например, для точки A' нормаль к эвольвенте $\mathcal{E}_1$ направлена по линии $n'n'$, а к эвольвенте $\mathcal{E}_2$ — по линии nn . Отсюда следует, что линия зацепления эвольвентных профилей совпадает с общей нормалью к ним и лежит на отрезке AB общей касательной к основным окружностям.

Точка пересечения общей нормали к эвольвентам с межосевой линией (P — полюс зацепления) занимает неизменное положение, и следовательно, центры в относительном движении звеньев представляют собой окружности с радиусами $r_{w1} = l_{O_1P}$ и $r_{w2} = l_{O_2P}$ соответственно. Эти окружности называются *начальными* (иногда — *поллоидными*)*). По свойству центроид начальные окружности при движении звеньев перекатываются без скольжения.

Итак, при эвольвентном зацеплении передаточное отношение, согласно основной теореме плоского зацепления, имеет постоянную величину

$$u_{21} = \pm \frac{r_{w1}}{r_{w2}},$$

причем знак плюс относится к внутреннему зацеплению, а знак минус — к внешнему.

Угол между линией зацепления и прямой, перпендикулярной межосевой линии, называется *углом зацепления* и обозначается

*) Термин «начальная окружность» в указанном смысле относится только к плоскому зацеплению. См. также § 102. Все линейные и угловые размеры, связанные с начальными окружностями, имеют нижний индекс w .

через α_w . Из треугольников O_1AP и O_2BP следует:

$$r_{b1} = r_w1 \cos \alpha_w, \quad r_{b2} = r_w2 \cos \alpha_w. \quad (30.10)$$

Следовательно, при эвольвентном зацеплении передаточное отношение может быть также выражено через отношение радиусов основных окружностей:

$$u_{21} = \pm \frac{r_{b1}}{r_{b2}}. \quad (30.11)$$

Из формулы (30.11) видно, что при эвольвентном зацеплении изменение межосевого расстояния не влияет на величину передаточного отношения вследствие неизменности радиусов основных окружностей.

При изменении межосевого расстояния изменяются лишь радиусы начальных окружностей и угол зацепления.

Основные размеры зубьев. Эвольвентные профили зубьев, как было показано, удовлетворяют основному условию синтеза зубчатого зацепления — получению заданного передаточного отношения. Выполнение дополнительных условий синтеза зависит в первую очередь от размеров зубьев. Эти размеры удобно задавать в долях какой-либо одной линейной величины, связанной с зубом. Чтобы пояснить выбор этой величины, выразим длину некоторой окружности, имеющей диаметр d , через число зубьев колеса z :

$$\pi d = pz,$$

где p — *окружной шаг*, т. е. расстояние, измеренное по дуге окружности диаметром d между двумя соответствующими точками соседних зубьев. Отсюда

$$d = \frac{p}{\pi} z, \quad \text{или} \quad d = mz, \quad (30.12)$$

где m — отношение окружного шага к числу π , называемое *модулем зуба*.

Окружной шаг p и модуль m для одного и того же зуба зависят от диаметра окружности, к которой они относятся. Условились для некоторой окружности, называемой *делительной*, выбирать модуль из ряда рациональных чисел от 0,05 до 100 (СТ СЭВ 310—76). Тогда диаметр делительной окружности по формуле (30.12) также выражается рациональным числом, что и послужило основанием для выбора модуля m в качестве величины, характеризующей размеры зуба *).

Делительную окружность можно определить как окружность, для которой модуль имеет стандартную величину, или же как ок-

*) В США стандартизован диаметральный шаг (питч), равный отношению числа зубьев к диаметру делительной окружности в дюймах.

ружность, которая является базовой для определения размеров зубьев (определение ГОСТ 16530—83). Иногда начальные и делительные окружности совпадают, но при этом надо иметь в виду их принципиальное отличие. Делительная окружность есть характеристика одного зубчатого колеса, с которым она неизменно связана, и диаметр этой окружности имеет постоянную величину. Начальные окружности дают характеристику зацепления двух зубчатых колес, и диаметры этих окружностей зависят от межосевого расстояния.

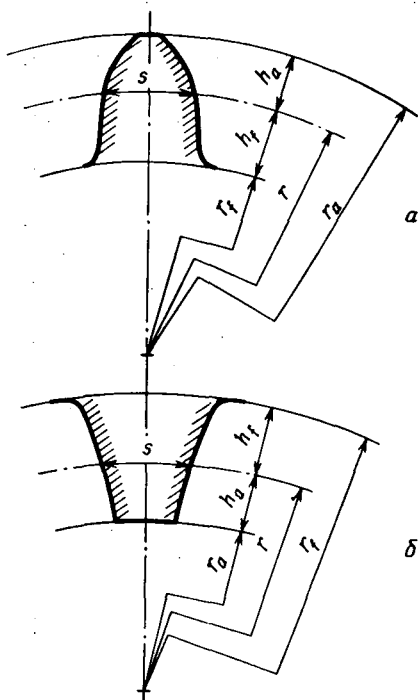


Рис. 166

Делительная окружность в торцовом сечении, т. е. в сечении, перпендикулярном оси вращения, делит зуб на две части: головку и ножку. *Делительной головкой* (сокращенно — головкой) зуба называется часть зуба, расположенная между делительной окружностью и окружностью вершин, радиус которой обозначается через r_a (рис. 166). *Делительной ножкой* (сокращенно — ножкой) зуба называется часть зуба, расположенная между делительной окружностью и окружностью впадин, радиус которой обозначается через r_f . Допускается также применение терминов «начальная головка» и «начальная ножка», если зуб делится по высоте не делительной, а начальной поверхностью.

Различают внешние (рис. 166, а) и внутренние (рис. 166, б) зубья. У внешних зубьев окруж-

ность вершин находится снаружи окружности впадин, а у внутренних — внутри окружности впадин.

Высота головки обозначается через h_a , высота ножки — через h_f , общая высота зуба — через h . Высота ножки больше высоты головки, так как между окружностью вершин одного зуба и окружностью впадин другого зуба должен быть зазор, называемый *радиальным зазором*. Каждый зуб очерчен двумя симметрично расположенными профилями. Расстояние между этими профилями, измеренное по какой-либо окружности, называется *толщиной зуба*. Толщина зуба по делительной окружности обозначается через s . Варьируя величины h_a , h_f и s , можно удовлетворить дополнительным условиям синтеза. Варьирование выполняется обычно измене-

нием взаимного расположения заготовки колеса и инструмента при обработке профиля зуба, которое характеризуется величиной, называемой *смещением*.

Кинематика изготовления сопряженных поверхностей зубьев цилиндрических эвольвентных зубчатых колес. Режущий инструмент для нарезания зубьев выполняется или как зубчатое колесо с режущими гранями на зубьях (*долбяк*), или как зубчатая рейка (*гребенка*), которую можно рассматривать как предельную форму зубчатого колеса при стремлении числа зубьев к бесконечности. Для рейки все окружности переходят в параллельные прямые, а эвольвентный профиль зуба — в прямую, образующую угол α с перпендикуляром к этим прямым (рис. 167). Кроме гребенки, к режущим инструментам реечного типа относят также червячную фрезу, которая выполняется как винт с режущими гранями на зубьях, имеющих профиль рейки в плоском сечении, содержащем ось фрезы.

Для нарезания эвольвентных зубьев наибольшее распространение имеет реечный инструмент, так как профиль зуба эвольвентной рейки представляет собой прямую линию. Долбяк применяют обычно для нарезания внутренних зубьев. На рис. 167 показан контур зубьев рейки, который называется *исходным*, так как он служит основой для определения форм и расположения режущих кромок. Профиль зуба режущего инструмента отличается от исходного профиля тем, что высота головки увеличена на c^*m , т. е. на величину радиального зазора (штриховая линия на рис. 167), так как головка зуба режущего инструмента вырезает ножку зуба в заготовке. Этот контур называется *производящим*, так как при движении режущих кромок он образует производящую поверхность. Модуль m , в долях которого определяются размеры исходного контура, выбирается из стандартного ряда модулей зубьев. Прямая CC , проходящая по середине общей высоты зуба, называется *средней прямой* (иногда — *делительной*). Стандартные параметры исходного контура имеют следующие значения: угол профиля $\alpha = 20^\circ$, коэффициент высоты головки $h_a^* = 1$, коэффициент глубины захода зубьев $h_d^* = 2$, коэффициент радиального зазора $c^* = 0,25$, радиус закругления $r_f = 0,4$. Для быстротходных цилиндрических зубчатых передач с целью уменьшения ударов при входе и выходе из зацепления с учетом их деформации применяется *фланкирование* зубьев, т. е. срез (фланк) части профиля зуба у его вершин

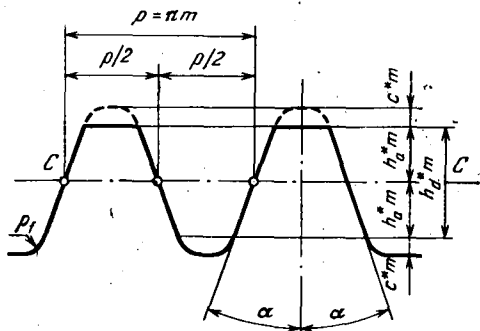


Рис. 167

ны. Тогда на производящем контуре предусматривается фланкирующий участок. В некоторых, сравнительно редких случаях возможны отступления от стандартных значений угла α и коэффициентов высоты головки h_a^* .

На рис. 168 показаны три различных варианта нарезания зубьев реечным инструментом, отличающихся расположением производящего контура и заготовки. В *первом варианте* (рис. 168, а) средняя прямая производящего контура CC касается делительной окружности заготовки. Инструменту и заготовке сообщаются такие

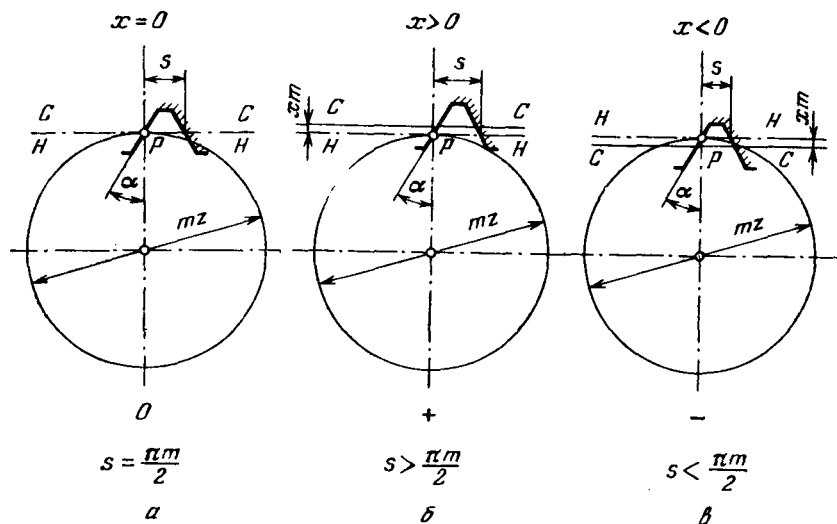


Рис. 168

движения, при которых средняя прямая катится без скольжения по делительной окружности заготовки. В зависимости от конструкции станка для нарезания зубьев требуемое относительное движение (огибание или обкатка) может быть получено или при неподвижной заготовке, или при взаимном перемещении инструмента и заготовки. Кроме движения огибания, должно быть движение резания, а иногда и подачи.

Толщина зуба по делительной окружности в первом варианте равна ширине впадины рейки по средней линии

$$s = 0,5\pi m.$$

Колесо с полученными при этом варианте нарезания размерами зуба по предложению В. А. Гавриленко*) называется *колесом с равноделенным шагом*.

*) Владимир Александрович Гавриленко (1899—1977) с исчерпывающей полнотой разработал теорию эвольвентного зацепления.

Во *втором варианте* (рис. 168, б) средняя прямая CC смещена от центра заготовки на величину xm , где x — коэффициент смещения. По делительной окружности катится без скольжения начальная прямая NN , отстоящая от средней прямой на величину смещения xm . Толщина зуба по делительной окружности оказывается теперь больше ширины впадины, что соответствует увеличению ширины впадины производящего контура по начальной прямой NN . Из рис. 167 и 168 следует:

$$s = 0,5\pi m + 2xm \operatorname{tg} \alpha. \quad (30.13)$$

Коэффициент смещения x в этом варианте считается положительным.

В *третьем варианте* (рис. 168, в) средняя прямая CC смещена к центру заготовки на величину xm , причем коэффициент смещения считается отрицательной величиной. Толщина зуба по делительной окружности этого колеса определяется также по формуле (30.13) и вследствие того, что $x < 0$, оказывается меньше, чем у колеса с равномодульным шагом.

Все зубчатые колеса, нарезаемые указанным способом при одном и том же исходном контуре и модуле m , как со смещением, так и без смещения, с любым числом зубьев имеют зубья, поверхности которых являющиеся сопряженными. Это утверждение следует из того, что мгновенная ось вращения в относительном движении производящей поверхности и обрабатываемого колеса всегда проходит через одну и ту же точку P и, следовательно, уравнения (30.6) удовлетворяются.

Заметим также, что независимо от смещения радиус основной окружности связан с радиусом делительной окружности соотношением

$$r_b = r \cos \alpha, \quad \text{или} \quad r_b = 0,5mz \cos \alpha, \quad (30.14)$$

т. е. смещение влияет только на толщину зуба по делительной окружности, а эвольвенту при том же модуле m и числе зубьев z остается неизменной.

Геометрический расчет зубчатых передач при заданных смещениях. В зависимости от смещений каждого колеса можно получить три типа передач, отличающихся расположением начальных и делительных окружностей. Эти окружности совпадают в тех передачах, у которых по делительным окружностям толщина зуба одного колеса равна ширине впадины другого. Указанному условию удовлетворяют передачи при $x_1 + x_2 = 0$, т. е. передачи, составленные из колес без смещения, и передачи, в которых отрицательное смещение одного колеса равно по абсолютной величине положительному смещению другого колеса. Межосевое расстояние в этих передачах $a = 0,5m(z_1 + z_2)$ называется *делительным межосевым расстоянием*, а угол зацепления α равен углу профиля производящего контура (рис. 169, а).

В передачах, у которых по делительным окружностям толщина зуба одного из колес больше ширины впадины другого, для зацепления без бокового зазора межосевое расстояние a_w должно быть увеличено по сравнению с делительным. Одновременно увеличивается и угол зацепления α_w , так как основные окружности не изменяются (рис. 169, б)*). Эти передачи получаются при $x_1 + x_2 > 0$.

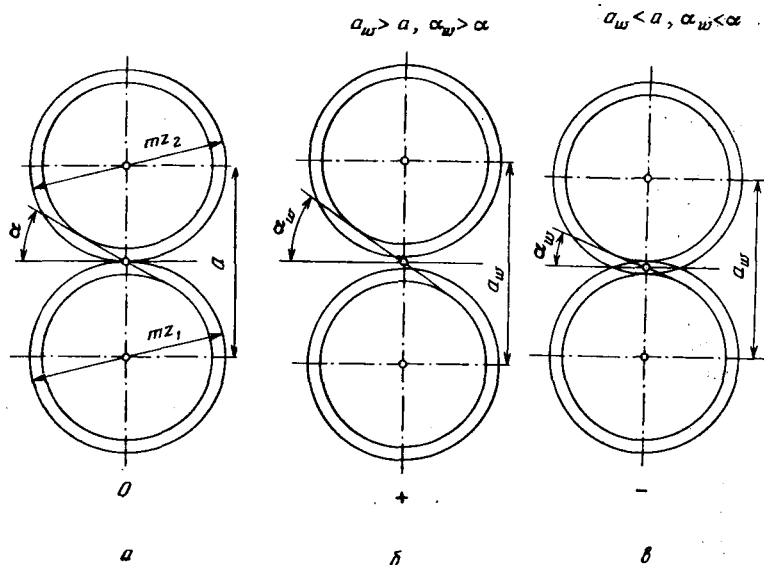


Рис. 169

Аналогично для передач, у которых по делительным окружностям толщина одного из колес меньше впадины другого, имеем: $a_w < a$ и $\alpha_w < \alpha$ (рис. 169, в). Эти передачи получаются при $x_1 + x_2 < 0$.

Для вычисления a_w и α_w определяем сначала толщину зуба по начальной окружности. Из рис. 170 с учетом уравнения эвольвенты (30.8) имеем

$$s_w = r_w \left(\frac{s}{r} + 2 \operatorname{inv} \alpha - 2 \operatorname{inv} \alpha_w \right). \quad (30.15)$$

Подставив значение толщины зуба по делительной окружности из (30.13) и учитывая, что $r = mz/2$ и $r_w = p_w z / (2\pi)$, где p_w — шаг по начальной окружности, получаем

$$s_w = \frac{p_w}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + 2x \operatorname{tg} \alpha + z(\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_w) \right]. \quad (30.16)$$

*) Все размеры, связанные с начальными окружностями, имеют нижний индекс w , а связанные с делительными — не имеют индекса.

Для начальных окружностей сумма толщин зубьев равна шагу:

$$s_{w1} + s_{w2} = p_w.$$

Отсюда с учетом формулы (30.16)

$$\text{inv } \alpha_w = \text{inv } \alpha + \frac{2(x_1 + x_2) \text{tg } \alpha}{z_1 + z_2}. \quad (30.17)$$

После вычисления $\text{inv } \alpha_w$ находим по таблице инволют угол α_w . Радиусы начальных окружностей определяем из треугольников O_1AP и O_2BP (см. рис. 165):

$$r_{w1} = r_{b1} / \cos \alpha_w, \quad r_{w2} = r_{b2} / \cos \alpha_w.$$

Подставляя значения радиусов основных окружностей из формул (30.14), получаем

$$\begin{aligned} r_{w1} &= 0,5mz_1 \cos \alpha / \cos \alpha_w, \\ r_{w2} &= 0,5mz_2 \cos \alpha / \cos \alpha_w. \end{aligned} \quad (30.18)$$

Отсюда межосевое расстояние

$$\alpha_w = 0,5m(z_1 + z_2) \cos \alpha / \cos \alpha_w. \quad (30.19)$$

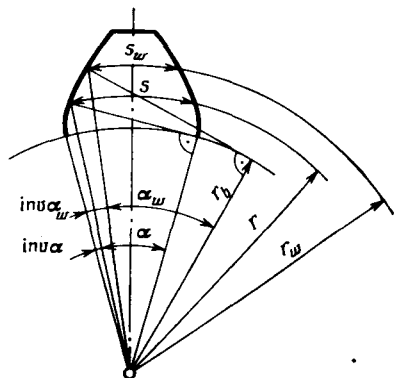


Рис. 170

Иногда формулу (30.19) записывают в следующем виде:

$$a_w = a + ym,$$

где y — коэффициент воспринимаемого смещения.

Из формулы (30.19) получаем

$$y = \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (30.20)$$

Радиусы впадин r_f получаются из условия, что делительная головка зуба режущего инструмента, равная по высоте $(h_a^* + c^*)m$, при обработке проходит внутрь делительной окружности на величину $(h_a^* + c^* - x)m$ (см. рис. 168). Отсюда

$$\begin{aligned} r_{f1} &= 0,5mz_1 - (h_a^* + c^* - x_1)m, \\ r_{f2} &= 0,5mz_2 - (h_a^* + c^* - x_2)m. \end{aligned} \quad (30.21)$$

Радиусы вершин r_a (радиусы заготовок) определяются из условия получения радиального зазора c^*m :

$$\begin{aligned} r_{a1} &= a_w - r_{f2} - c^*m, \\ r_{a2} &= a_w - r_{f1} - c^*m. \end{aligned} \quad (30.22)$$

Иногда вводят обозначение

$$\Delta y = x_1 + x_2 - y. \quad (30.23)$$

Величину Δy называют *коэффициентом уравнительного смещения*. Тогда формулы (30.22) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_{a1} &= r_1 + (h_a^* + x_1 - \Delta y) m, \\ r_{a2} &= r_2 + (h_a^* + x_2 - \Delta y) m. \end{aligned} \quad (30.24)$$

Построение картины внешнего эвольвентного зацепления. Свойства внешнего эвольвентного зацепления наиболее наглядно можно пояснить на примере построения картины зацепления, т. е. графического изображения зубьев, находящихся в зацеплении.

Пусть, например, заданы числа зубьев z_1 и z_2 , модуль m и коэффициенты смещения x_1 и x_2 . Требуется построить картину внешнего эвольвентного зацепления, считая, что угол профиля реечного инструмента $\alpha = 20^\circ$, коэффициент высоты головки $h_a^* = 1$ и коэффициент радиального зазора $c^* = 0,25$.

Инволюта угла зацепления α_w находится по формуле (30.17):

$$\text{inv } \alpha_w = \text{inv } 20^\circ + \frac{2(x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \text{tg } 20^\circ.$$

Радиусы начальных окружностей вычисляем по формулам (30.18)

$$\begin{aligned} r_{w1} &= 0,5mz_1 \cos 20^\circ / \cos \alpha_w, \\ r_{w2} &= 0,5mz_2 \cos 20^\circ / \cos \alpha_w. \end{aligned}$$

Межосевое расстояние равно сумме радиусов начальных окружностей

$$a_w = 0,5m(z_1 + z_2) \cos 20^\circ / \cos \alpha_w.$$

Построим начальные окружности с центрами в O_1 и O_2 и проведем через точку их касания, т. е. через полюс зацепления P , линию, составляющую угол α_w с перпендикуляром к межосевой линии O_1O_2 (рис. 171). По свойству эвольвентного зацепления построенная линия будет общей касательной к основным окружностям. Радиусы основных окружностей найдем, опустив на эту касательную перпендикуляры из точек O_1 и O_2 . Для контроля вычислений и построений имеем формулы (30.14)

$$r_{b1} = 0,5mz_1 \cos 20^\circ, \quad r_{b2} = 0,5mz_2 \cos 20^\circ.$$

Далее, применяя построение эвольвенты (см. рис. 163), строим эвольвентные профили зубьев, перекатывая линию mn сперва по одной основной окружности, а затем по другой. Эвольвентные профили зубьев продолжаются до окружностей вершин, радиусы кото-

рых находятся по формулам, следующим из формул (30.21) и (30.22):

$$r_{a1} = a_w - 0,5mz_2 + (1 - x_2)m,$$

$$r_{a2} = a_w - 0,5mz_1 + (1 - x_1)m.$$

Радиусы окружностей впадин:

$$r_{f1} = 0,5mz_1 - (1,25 - x_1)m,$$

$$r_{f2} = 0,5mz_2 - (1,25 - x_2)m.$$

Контроль построений: между окружностью вершин одного зуба и окружностью впадин другого зуба должен быть радиальный зазор, равный $0,25m$.

Точки a и b пересечения окружностей вершин зубьев с линией зацепления AB определяют активную линию зацепления, т. е. ту

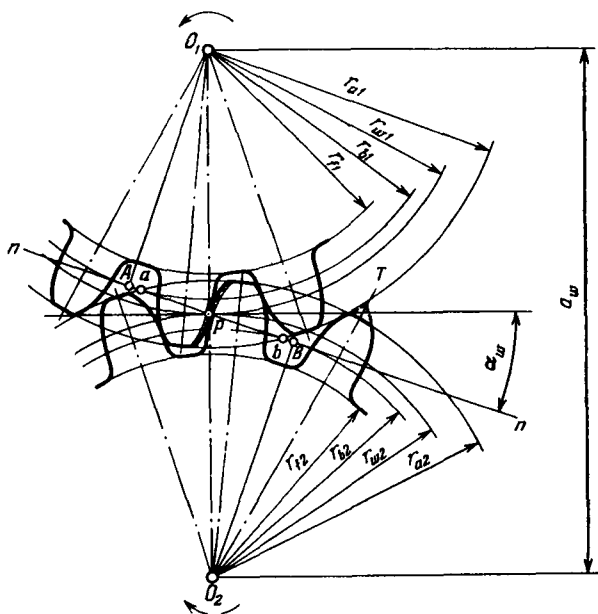


Рис. 171

часть линии зацепления, по которой при выбранных размерах зубьев перемещается точка контакта профилей зубьев.

Активный участок профиля зуба колеса 1 (отмечен двойной линией со штриховкой) располагается от вершины зуба до точки пересечения профиля с окружностью, проведенной из центра O_1 через точку a . Соответственно для колеса 2 надо провести окружность из центра O_2 через точку b . *Переходные участки* от окружности впадин до основной окружности получаются при обработке

профиля зуба как траектории точек инструмента в движении его относительно заготовки.

После построения одной пары профилей строятся симметричные профили каждого зуба с учетом, что толщина зуба по делительной окружности $s = (0,5\pi + 2x \operatorname{tg} \alpha) m$. Для определения оси симметрии зуба колеса 1 проводим делительную окружность, радиус которой равен $0,5mz_1$, и от точки пересечения профиля зуба с этой окружностью откладываем дугу $s/2$. Аналогично находим ось симметрии зуба колеса 2.

Для колес 1 и 2 угловые шаги зубьев соответственно равны

$$\tau_1 = 2\pi/z_1, \quad \tau_2 = 2\pi/z_2. \quad (30.25)$$

Контроль графических построений зубьев состоит в том, что точки касания каждой пары зубьев должны лежать на линии зацепления АВ. Впрочем, графическое построение картины зацепления имеет лишь учебно-методическое значение. Для составления рабочих и сборочных чертежей достаточно определения геометрических параметров зубчатых колес по формулам (30.17) — (30.25). В зависимости от заданных условий последовательность использования этих формул может быть иной, чем указано при построении картины зацепления.

Например, если задано межосевое расстояние a_w , числа зубьев z_1, z_2 и модуль m , то вначале вычисляют угол зацепления α_w из соотношения (30.19) и затем из формулы (30.17) находят требуемую величину суммы коэффициентов смещения $x_1 + x_2$.

Проверка дополнительных условий при синтезе эвольвентного зацепления. Из многих возможных дополнительных условий синтеза (ограничений), которые можно проверить по картине зацепления, рассмотрим три условия: отсутствие заострения зубьев, отсутствие интерференции зубьев и обеспечение непрерывности взаимодействия зубьев.

Заострение зуба получается, если точка Т (см. рис. 171) пересечения двух симметричных профилей располагается вблизи окружности вершин зубьев, и толщина зуба по этой окружности получается менее некоторой величины, например, $(0,1—0,15)m$. Для устранения заострения зуба можно уменьшить радиус окружности вершин или изменить коэффициенты смещения.

Интерференцией (наложением) *зубьев* называется явление, состоящее в том, что при рассмотрении теоретической картины зацепления часть пространства оказывается одновременно занятой двумя зубьями разных колес. Для внешнего эвольвентного зацепления условие отсутствия интерференции состоит в том, что взаимодействие зубьев должно происходить только на участке АВ, где обеспечивается касание зубьев.

Чтобы установить *условие непрерывности взаимодействия зубьев*, покажем эвольвентную часть зуба колеса 1 в начале и в конце зацепления (рис. 172). Если вращение колеса 1 происходит против

хода часовой стрелки, то зуб входит в зацепление, когда его профиль пересекает линию зацепления в точке a и выходит из зацепления в точке b . Угол поворота зубчатого колеса от положения входа зуба в зацепление до выхода его из зацепления называется *углом перекрытия колеса* φ_α . Этот угол должен быть больше углового шага с тем, чтобы вторая пара взаимодействующих зубьев успела войти в зацепление прежде, чем первая пара выйдет из зацепления.

Отношение угла перекрытия колеса к его угловому шагу называется *коэффициентом перекрытия*

$$\epsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau}. \quad (30.26)$$

Условие непрерывности взаимодействия зубьев выражается ограничением $\epsilon_\alpha > 1$.

По свойству образования эвольвенты дуга, которую проходит начальная точка эвольвенты от положения входа зуба в зацепление до выхода его из зацепления, равна длине активной линии зацепления (ab) . Следовательно, угол перекрытия для колеса 1

$$\varphi_{\alpha 1} = \frac{(ab)}{r_{b1}}.$$

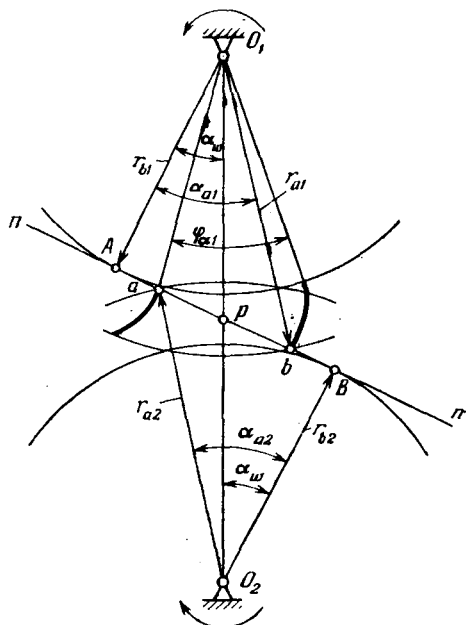


Рис. 172

Подставляя значение угла перекрытия и углового шага (30.25) в формулу (30.26), получаем

$$\epsilon_\alpha = \frac{(ab) z_1}{r_{b1} 2\pi}, \text{ или } \epsilon_\alpha = \frac{(ab)}{p_b},$$

где $p_b = \pi m \cos \alpha$ — шаг зубьев по основной окружности.

Отрезок (ab) может быть вычислен из условия

$$(ab) = (Ab) - (AP) + (Ba) - (BP).$$

Подставляя значения указанных отрезков из треугольников O_1Ab , O_1AP , O_2Ba и O_2BP , получаем

$$(ab) = r_{b1} (\lg \alpha_{a1} - \lg \alpha_w) + r_{b2} (\lg \alpha_{a2} - \lg \alpha_w),$$

где α_{a1} и α_{a2} — углы профиля зуба у вершин, определяемые из соотношений

$$\cos \alpha_{a1} = r_{b1}/r_{a1}, \quad \cos \alpha_{a2} = r_{b2}/r_{a2}.$$

Отсюда коэффициент перекрытия

$$e_\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_{ac}}{\tau_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w}{\tau_2}. \quad (30.27)$$

Особенности внутреннего зацепления. На рис. 173 показано расположение основных окружностей при внутреннем зацеплении.

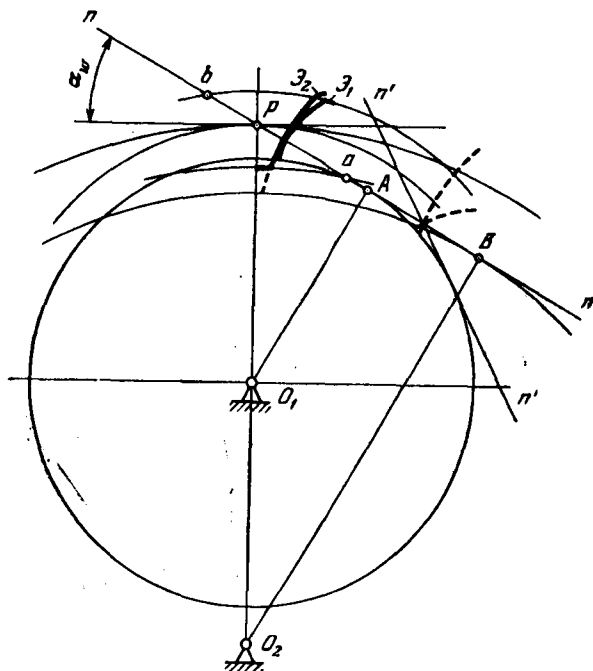


Рис. 173

Касание эвольвент $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ может быть только на продолжении линии BA левее точки A . На участке AB эвольвенты пересекаются, так как нормаль к эвольвенте $\mathcal{E}_1$ направлена по касательной $n'n'$, не совпадающей с нормалью np к эвольвенте $\mathcal{E}_2$. Интерференция зубьев на участке AB аналогична интерференции при внешнем зацеплении, т. е. головка зуба одного колеса накладывается на переходный профиль зуба другого колеса. При малой разности между числами зубьев может быть еще второй вид интерференции, когда накладываются профили зубьев у их вершин (рис. 174).

Подрезание зубьев. При малых числах зубьев обрабатываемого колеса может быть интерференция зубьев инструмента и обрабатываемого колеса. В этом случае режущие кромки инструмента срежут часть обрабатываемого зуба, на которую накладывается зуб

инструмента. Если интерференция происходит между головкой зуба инструмента и ножкой обрабатываемого зуба, то она называется *подрезанием*. Значительное подрезание ослабляет ножку зуба и потому является недопустимым, небольшое подрезание полезно для

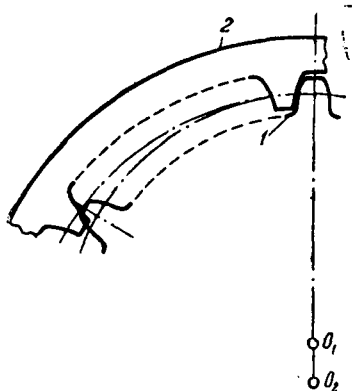


Рис. 174

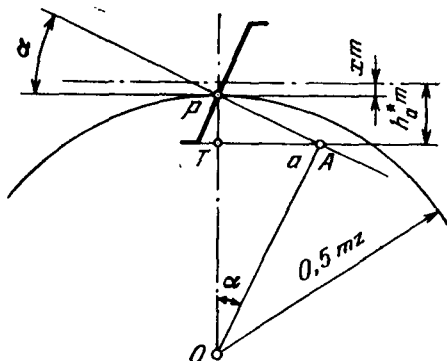


Рис. 175

улучшения условий контакта зубьев в начале (или в конце) зацепления.

При анализе внешнего зацепления было показано, что интерференция происходит тогда, когда активная линия зацепления (ab) выходит за пределы линии зацепления. При реечном зацеплении, как и при внутреннем, эта линия ограничена точкой A , и следовательно, предельный случай, когда подрезания нет, характеризуется совпадением точек a и A (рис. 175). Из треугольника ATO имеем

$$0,5mz + xm - h_a^*m = 0,5mz \cos^2 \alpha.$$

Отсюда

$$x = h_a^* - 0,5z(1 - \cos^2 \alpha). \quad (30.28)$$

При $\alpha = 20^\circ$ и $h_a^* = 1$

$$x \approx \frac{17 - z}{17}. \quad (30.29)$$

Следовательно, если число зубьев обрабатываемого колеса меньше 17, то при нарезании зубьев реечным инструментом с углом $\alpha = 20^\circ$ и $h_a^* = 1$ надо применять положительное смещение, определяя его значение по формуле (30.29). С увеличением угла профиля рейки α минимальное число зубьев колес, нарезаемых без смещения ($x = 0$), уменьшается. Так же влияет уменьшение коэффициента головки зуба рейки h_a^* .

Аналогично могут быть получены формулы, выражающие условия отсутствия подрезания зубьев долбяком, причем в этом случае

наблюдается не только подрезание ножки, но и срез вершин зубьев (см. рис. 174).

Блокирующий контур. Все дополнительные ограничения, которым надо удовлетворить при синтезе зубчатых зацеплений (отсутствие подрезания и заострения зуба, обеспечение минимального значения коэффициента перекрытия, равнопрочность зубьев, отсутствие интерференции и т. п.), в той

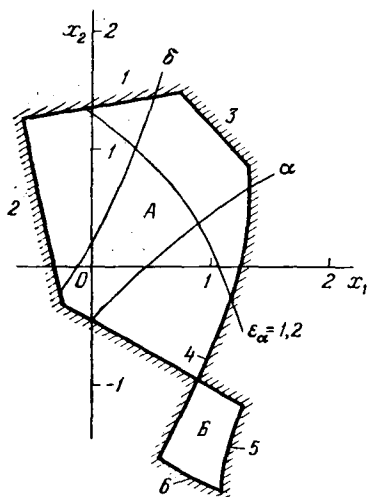


Рис. 176

или иной мере зависят от величин смещений при нарезании колес. Для выбора коэффициентов смещения x_1 и x_2 составляются справочные карты в виде графиков зависимости между x_2 и x_1 при заданной величине какого-либо качественного показателя зацепления. Каждый график рассчитывается для определенного сочетания чисел зубьев z_1 и z_2 . Совокупность графиков, построенных по граничным (предельным) значениям показателей, выделяет на плоскости коэффициентов смещений x_1 и x_2 область допустимых значений этих коэффициентов. Контур, выделяющий эту область, называется *блокирующим контуром*.

На рис. 176 показан образец блокирующего контура для чисел зубьев $z_1 = 20$ и $z_2 = 28$. Предполагается, что нарезание зубьев производится реечным инструментом со стандартным исходным контуром. Штриховка на линиях контура выделяет область недопустимых значений x_1 и x_2 .

Граничные линии блокирующего контура: 1 — граница интерференции на ножке зуба второго колеса, 2 — линия, определяющая подрезание эвольвентного профиля первого колеса, 3 — линия предельного коэффициента перекрытия, 4 — граница интерференции на ножке зуба первого колеса, 5 — граница заострения зуба на первом колесе; 6 — линия, определяющая подрезание эвольвентного профиля второго колеса.

Зона А контура — зона *полюсных передач*, т. е. таких передач, в которых касание профилей происходит по обе стороны от полюса зацепления. Зона Б контура — зона *внеполюсных передач*, в которых касание профилей происходит по одну сторону от полюса зацепления и зуб одного колеса имеет только головку, а другого — только ножку.

Внутри контура изображены линии, соответствующие определенным значениям качественных показателей зацепления: α и δ — линии, определяющие равную прочность зубьев на изгиб (α — при

ведущем колесе 1, δ — при ведущем колесе 2), $\varepsilon_a = 1, 2$ — рекомендуемое значение коэффициента перекрытия.

Косозубые колеса. По форме боковой поверхности различают прямые и косые зубья. Боковая поверхность прямого зуба в эвольвентных колесах образуется при движении эвольвенты вдоль оси колеса так, что получается эвольвентная цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси колеса, а направляющая кривая есть эвольвента. Боковая поверхность косого зуба в эвольвентных колесах образуется при винтовом движении эвольвенты так, что получается эвольвентная винтовая поверхность, которая пересекается с любым соосным цилиндром (соосным по отношению к оси вращения колеса) по винтовой линии, а в сечениях, перпендикулярных оси цилиндра, дает эвольвенту.

Боковую поверхность косого зуба эвольвентного колеса можно представить так же, как линейную поверхность, описываемую прямой mt , лежащей в плоскости Q , под углом β_b к образующей основного цилиндра, по которому эта плоскость катится без скольжения (рис. 177).

Угол β_b называется *углом наклона зубьев по основному цилиндру*. Каждая точка прямой mt в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, описывает эвольвенту $\mathcal{E}$ основной окружности с радиусом r_b . Пересечение полученной эвольвентной поверхности с основным цилиндром дает винтовую линию B_b , угол подъема которой равен $90^\circ - \beta_b$, а шаг $h = 2\pi r_b \operatorname{ctg} \beta_b$. С другими соосными цилиндрами (начальным, делительным и т. п.) эвольвентная винтовая поверхность также пересекается по винтовым линиям с тем же шагом, но с другими значениями угла подъема. Соответственно изменяется угол наклона зубьев. Например, для делительного цилиндра угол наклона зубьев β связан с углом наклона по основному цилиндру соотношением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r_b} \operatorname{tg} \beta_b. \quad (30.30)$$

Развернем делительный цилиндр на плоскость (рис. 178). Тогда винтовые линии пересечения этого цилиндра с боковой поверхностью зуба изобразятся прямыми линиями, наклоненными под уг-

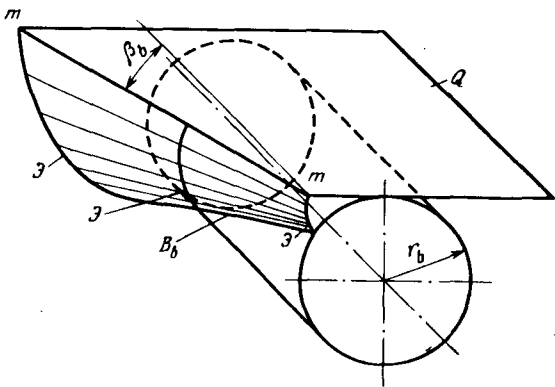


Рис. 177

лом β и находящимися на расстоянии r_i по торцу цилиндра или на расстоянии r_n по нормали к этим линиям. Расстояние r_i называют *торцовым шагом*, а расстояние r_n — *нормальным шагом*. Соответственно различают *торцовый модуль* m_t и *нормальный модуль* m_n , которые связаны между собой соотношением

$$m_t = m_n / \cos \beta. \quad (30.31)$$

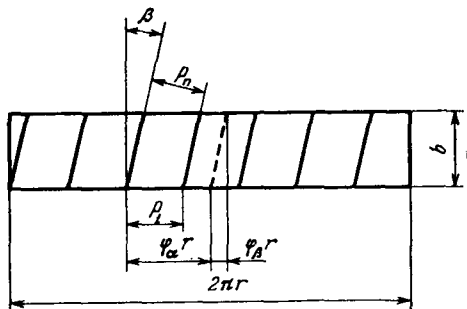


Рис. 178

Стандартное значение имеет нормальный модуль, так как при нарезании косозубых колес используется режущий инструмент, который применяется для прямозубых колес. Следует только

установить инструмент так, чтобы в плоскости, касательной к делительному цилиндру, направление резания составляло бы с образующей этого цилиндра угол β .

Геометрический расчет косозубых колес производится по торцовому сечению. При определении делительной, основной и начальной окружностей вместо модуля m следует в формулы подставить $m / \cos \beta$. Угол профиля рейки в торцовом сечении находится из соотношения $\operatorname{tg} \alpha_t = \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta$. Размеры по высоте производящего контура при установке инструмента для нарезания косозубого колеса не изменяются. Отсюда следуют соотношения: $h_a^* m = h_{ta}^* m_t$ и $c^* m = c_t^* m_t$, где h_{ta}^* и c_t^* — коэффициенты высоты головки рейки и радиального зазора по отношению к торцовому модулю. Учитывая соотношение (30.31) между стандартным модулем $m = m_n$ и торцовым m_t , получаем

$$h_{ta} = h_a^* \cos \beta \text{ и } c_t^* = c^* \cos \beta.$$

В передаче с косозубыми колесами каждый зуб входит в зацепление постепенно, т. е. не сразу всей длиной, и угол перекрытия увеличивается на добавочный угол φ_β .

Полный угол перекрытия

$$\varphi_\Gamma = \varphi_\alpha + \varphi_\beta.$$

Из рис. 178 следует

$$\varphi_\beta = \frac{2b_w \operatorname{tg} \beta}{m_t z},$$

где b_w — рабочая ширина передачи.

Соответственно коэффициент перекрытия в передаче с косозубыми колесами определяется по формуле

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \frac{b_w \operatorname{tg} \beta}{P_t},$$

где ε_α — коэффициент торцового перекрытия, вычисляемый по формуле (30.27).

§ 100. Другие виды цилиндрических зубчатых передач

Циклические кривые. *Циклическими кривыми* называются кривые, получаемые как траектории точек, связанных с окружностью, перекатываемой без скольжения по неподвижной окружности или по неподвижной прямой. Если точка, описывающая кривую, находится на перекатываемой окружности, то ее траектория называется *эпициклоидой* при внешнем качении окружности по неподвижной окружности, *гипоциклоидой* — при внутреннем качении и *циклоидой* при качении окружности по прямой. Если же эта точка находится вне или внутри перекатываемой окружности, то образуемые кривые называются *эпитрохоидами* (удлиненными или укороченными эпициклоидами) при внешнем качении или *гипотрохоидами* (удлиненными или укороченными) — при внутреннем качении. Во всех случаях качения окружности по другой окружности или прямой мгновенный центр вращения в их относительном движении совпадает с точкой касания, которую будем в дальнейшем называть *полусом зацепления*. Отсюда следует, что направление нормали к циклической кривой совпадает с прямой, соединяющей рассматриваемую точку с полюсом зацепления.

Теорема Камуса. При перекатывании по центроидам относительного движения систем 1 и 2 некоторой вспомогательной центроиды 3 точка M , связанная с ней, описывает кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$, которые являются взаимоогibaемыми кривыми в относительном движении систем 1 и 2 (рис. 179).

Доказательство теоремы основывается на том, что в точке касания P всех трех центроид совпадают мгновенные центры вращения P_{12} , P_{13} и P_{23} и, следовательно, общая нормаль к кривым $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ в их относительном движении должна проходить через точку касания центроид систем 1 и 2 (аналог основной теоремы плоского зацепления). В применении к циклическим кривым из теоремы Камуса следует, что в качестве сопряженных профилей

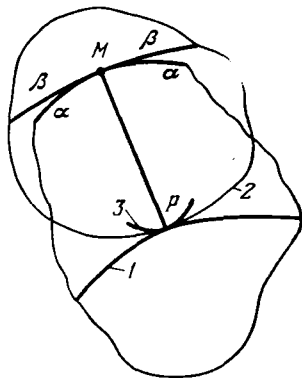


Рис. 17 9

зубьев можно выбирать траектории одной и той же вспомогательной окружности, перекатываемой по центроидам относительного движения колес.

Циклоидное зацепление. На рис. 180 изображена картина внешнего циклоидного зацепления одной пары зубьев. Кроме начальных окружностей 1 и 2 (центроид в относительном движении колес),

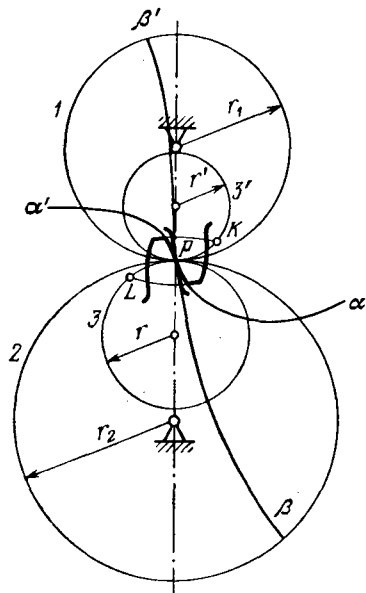


Рис. 180

радиусы которых r_1 и r_2 , показаны вспомогательные окружности 3 и 3' с радиусами r и r' . При внешнем качении вспомогательной окружности 3 по начальной окружности 1 образуется эпициклоида $P\alpha$, по которой очерчен профиль головки зуба колеса 1. Для образования профиля ножки зуба колеса 1 используется гипоциклоида $P\beta'$, получаемая при внутреннем качении вспомогательной окружности 3' по начальной окружности 1. Аналогично для образования профиля головки зуба колеса 2 используется эпициклоида $P\alpha'$, получаемая при внешнем качении вспомогательной окружности 3' по начальной окружности 2, а для образования профиля ножки — гипоциклоида $P\beta$, получаемая при внутреннем качении окружности 3 по окружности 2.

По теореме Камуса указанные профили будут сопряженными. Точка касания профилей перемещается по линии зацепления, составленной из дуг вспомогательных окружностей PK и PL . Коэффициент перекрытия

$$\epsilon_\alpha = (\overline{PK} + \overline{PL})/p_w,$$

где p_w — шаг по начальной окружности 1 (или 2).

Исходный контур при нарезании зубьев реечным инструментом составлен из двух дуг циклоид. Для нарезания двух колес надо иметь два инструмента, которые имеют один и тот же исходный контур, но отличаются между собой по очертанию зубьев как шаблон и контршаблон.

К достоинствам циклоидного зацепления по сравнению с эвольвентным относятся: а) меньший износ профилей вследствие того, что выпуклая головка касается вогнутой ножки, б) больший коэффициент перекрытия, в) большие возможности для получения колес с малым числом зубьев, которые в часовых механизмах называются *трибами*, г) меньшая скорость скольжения профилей. К недостаткам циклоидного зацепления в первую очередь относится

сложность профиля режущего инструмента и трудности, связанные с его заточкой и переточкой. Кроме того, циклоидное зацепление чувствительно к изменению межосевого расстояния. При увеличении межосевого расстояния на некотором участке профилей эпициклоида зуба будет касаться не гипоциклоиды, а эпициклоиды другого зуба, что приведет к изменению передаточного отношения. При уменьшении межосевого расстояния аналогично входят в зацепления гипоциклоиды обоих колес.

Часовое зацепление. Если в циклоидном зацеплении выбрать радиусы вспомогательных окружностей по соотношениям:

$$r = 0,5r_2 \text{ и } r'_1 = 0,5r_1,$$

то гипоциклоиды, образуемые качением вспомогательных окружностей 3 и $3'$ по начальным окружностям 2 и 1 (см. рис. 180), вырождаются в прямые линии, т. е. ножки зубьев имеют прямолинейный профиль. Полученное зацепление называют *часовым*. Оно применяется в часовой промышленности в целях уменьшения комплекта зуборезного инструмента.

Цевочное зацепление. Другой частный вид циклоидального зацепления получается, если принять радиус вспомогательной окружности $3'$ равным радиусу начальной окружности 1 (см. рис. 180), а радиус вспомогательной окружности 3 принять равным нулю. Тогда профиль зуба колеса 1 вырождается в точку, а профиль зуба колеса 2 состоит только из эпициклоид α и β (рис. 181). Эти теоретические профили заменяются на практике *эквидистантными* (равнотстоящими по профильной нормали) профилями. Профиль зуба колеса 1 принимает форму окружности, а сам зуб выполняется в виде цилиндра, называемого *цевкой* (отсюда название зацепления — цевочное). Профиль зуба колеса 2 очерчивается по эквидистантам к эпициклоиде на расстоянии, равном радиусу цевки.

Достоинством цевочного зацепления является малая величина потерь на трение, если цевки выполнять вращающимися на осях. Колесо с цевками изготавливается очень просто, но изготовить сопряженное ему зубчатое колесо с большой точностью трудно. Поэтому внешнее цевочное зацепление применяется преимущественно в громоздких тихоходных передачах, например, в башенных кранах.

Внутреннее цевочное зацепление может выполняться в двух вариантах. В первом варианте цевки располагаются на большом

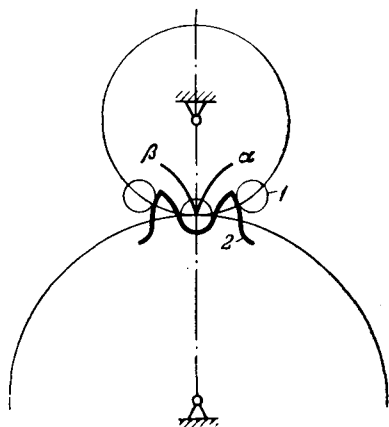


Рис. 181

колесе, а профили зубьев малого колеса очерчиваются по эквидистантным кривым к эпициклоидам. Во втором варианте цевки располагаются на малом колесе. Тогда профили зубьев большого колеса очерчиваются по эквидистантам к гипоциклоидам.

Особый вид внутреннего цевочного зацепления получается, если расположить профили зубьев на окружностях, смещенных по отношению к центроидам (*внецентроидное зацепление*). В этом случае удается получить зубчатую передачу с разностью чисел зубьев, равной единице, что дает возможность получить в планетарных передачах большое передаточное отношение.

Цилиндрическая передача Новикова *). Образование сопряженных профилей одной производящей поверхностью (способ Оливье) не является единственно возможным способом. В качестве примера образования сопряженных поверхностей по способу, отличающемуся от способа Оливье, укажем на образование сопряженных поверхностей в одной из передач, разработанных М. Л. Новиковым и его последователями.

Внешнее эвольвентное зацепление, несмотря на ряд достоинств (простота изготовления, нечувствительность к изменению межосевого расстояния и др.), имеет существенный для тяжело нагруженных передач недостаток, заключающийся

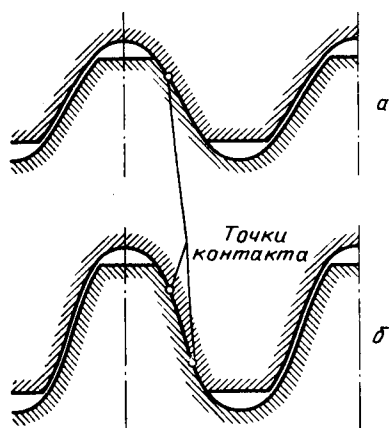


Рис. 182

в том, что зубья касаются выпуклыми поверхностями. Для уменьшения контактных напряжений надо, чтобы выпуклая поверхность одного зуба касалась вогнутой поверхности другого зуба. Такое касание имеют эвольвентные зубья при внутреннем зацеплении и зубья, профили которых очерчены по гипоциклоиде и эпициклоиде (циклоидное зацепление). Еще более благоприятный контакт получается у зубьев, профили которых по предложению М. Л. Новикова в торцовой плоскости очерчены по дугам окружностей

с почти равными радиусами (рис. 182, а). В цилиндрической передаче эти зубья делаются винтовыми, и потому полученное зацепление называют иногда *круговинтовым*. Рассматриваемое зацепление — точечное, и в каждой торцовой плоскости зубья касаются только в одной точке *К*. Непрерывность зацепления обеспечивается тем, что зубья выполнены винтовыми. Поверхности зубьев рассматриваемого зацепления должны быть образованы так, чтобы точка контакта *К* перемещалась параллельно осям вращения колес.

*) Михаил Леонтьевич Новиков (1915—1956) предложил зубчатую передачу с точечным касанием зубьев круговинтового зацепления.

Сопряженные поверхности зубьев в цилиндрической передаче Новикова могут быть образованы посредством двух жестко связанных между собою производящих поверхностей, которые касаются по некоторой линии L . Производящие поверхности образуются при движении косозубых реек, одна из которых имеет исходный контур, соответствующий выпуклому зубу, а другая — вогнутому зубу. Рейки касаются между собой по прямой линии. Они имеют одно и то же движение по отношению к каждому из нарезаемых колес, и каждой из производящих поверхностей воспроизводится поверхность зуба своего колеса. Условие сопряженности обработанных по этому способу поверхностей состоит в том, что линии контакта k_1 и k_2 производящих поверхностей с поверхностями зубьев должны касаться или пересекаться в точке, принадлежащей линии L .

Имеются также варианты передачи Новикова, в которых каждая пара зубьев имеет две линии зацепления (рис. 182, б). Все варианты могут быть использованы не только в цилиндрических, но и в пространственных передачах.

Некруглые колеса. Для воспроизведения переменного передаточного отношения при передаче вращения между параллельными осями применяют зубчатые механизмы с некруглыми колесами. Название этих колес происходит от вида центроид в относительном движении. В зависимости от вида воспроизводимой функции колеса 1 и 2 могут или совершать возвратно-вращательные движения (рис. 183, а), или же иметь непрерывное вращение (рис. 183, б). Соответственно центроиды относительного движения колес могут быть незамкнутыми или замкнутыми. Незамкнутые центроиды имеют некруглые колеса, применяемые в приборостроении для воспроизведения заданных функций. Замкнутые центроиды имеют некруглые колеса, применяемые для привода исполнительных и управляющих органов машины. В обоих случаях применяется исключительно внешнее зацепление. Функцию $u_{12}(\varphi_1)$, выражающую зависимость величины передаточного отношения от угла поворота колеса 1, считаем гладкой функцией с ограниченными и притом положительными значениями, т. е. функция $u_{12}(\varphi_1)$ должна иметь непрерывную производную, и при вращении ведущего колеса в

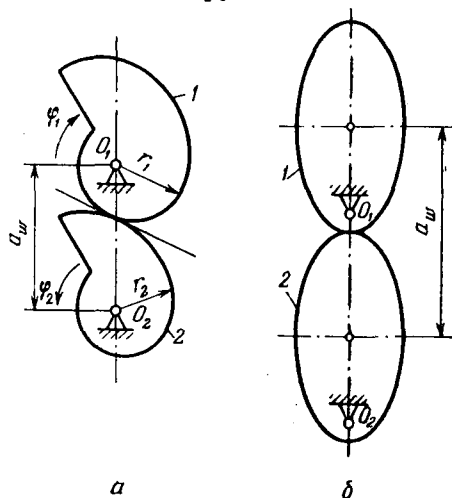


Рис. 183

одном направлении (при возрастании φ_1) не должно меняться направление вращения ведомого колеса.

При указанных условиях модули радиус-векторов центроид при заданном межосевом расстоянии должны удовлетворять соотношениям

$$a_w = r_1 + r_2, \quad u_{12}(\varphi_1) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{a_w}{1 + u_{12}(\varphi_1)}, \quad r_2 = \frac{a_w u_{12}(\varphi_1)}{1 + u_{12}(\varphi_1)}. \quad (30.32)$$

Пусть, например, механизм некруглых колес применяется как счетно-решающий, и его назначением является воспроизведение функции $y = f(x)$ в промежутке $x_2 \geq x \geq x_1$. Углы поворота колеса 1 считаем пропорциональными значениям аргумента x , а углы поворота колеса 2 — функции y . Тогда при масштабных коэффициентах k_1 и k_2 имеем

$$\varphi_1 = k_1(x - x_1), \quad \varphi_2 = k_2[f(x) - f(x_1)]. \quad (30.33)$$

Начало отсчета углов поворота ведущего колеса определяется значением $x = x_1$, и начало отсчета углов поворота ведомого — значением $f(x) = f(x_1)$.

Дифференцирование соотношений (30.33) дает

$$d\varphi_1 = k_1 dx, \quad d\varphi_2 = k_2 f'(x) dx.$$

Следовательно, передаточное отношение

$$u_{12} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \equiv \frac{k_1}{k_2 f'(x)}. \quad (30.34)$$

Подставляя это значение u_{12} в формулы (30.32), имеем

$$r_1 = a_w \frac{k_2 f'(x)}{k_1 + k_2 f'(x)}, \quad r_2 = a_w \frac{k_1}{k_1 + k_2 f'(x)}. \quad (30.35)$$

По формулам (30.33) и (30.35) производится вычисление координат центроид в относительном движении колес, по которым определяются *копиры*, используемые для нарезания колес, или производится настройка зуборезного станка. Эти копии и кинематические цепи настройки зуборезного станка должны обеспечивать требуемое относительное движение режущего инструмента и заготовки.

Если при воспроизведении заданной функции механизмом с некруглыми колесами передаточное отношение $u_{21}(\varphi_1)$ оказывается знакопеременной функцией, то к заданной функции $y = f(x)$ добавляется функция $y_1 = k_3 x$ так, чтобы производная от суммарной функции $y_2 = f(x) + k_3 x$ была бы больше нуля, т. е. $f'(x) + k_3 > 0$. При этом условии, которому можно удовлетворить выбором коэффициента k_3 , передаточное отношение $u_{12}(\varphi_1)$ по формуле (30.34)

оказывается положительным, и следовательно, функция y_2 может быть воспроизведена механизмом некруглых колес. Одновременно зубчатой передачей с круглыми колесами воспроизводится функция $y_1 = k_3 x$, и затем значения y_2 и y_1 передаются в суммирующий механизм (например, зубчатый дифференциал), на выходе из которого снимается заданная функция $y = y_2 - y_1$.

Из механизмов некруглых колес для воспроизведения непрерывного вращательного движения наибольшее распространение имеет зубчатая передача с эллиптическими колесами (см. рис. 183, б). Центроиды колес выполняются в виде одинаковых эллипсов. Оси колес совпадают с фокусами.

§ 101. Конические зубчатые передачи

Эвольвентная коническая передача. *Конической передачей* называется передача с пересекающимися осями вращения звеньев. Обозначим через δ острый угол между осями вращения звеньев

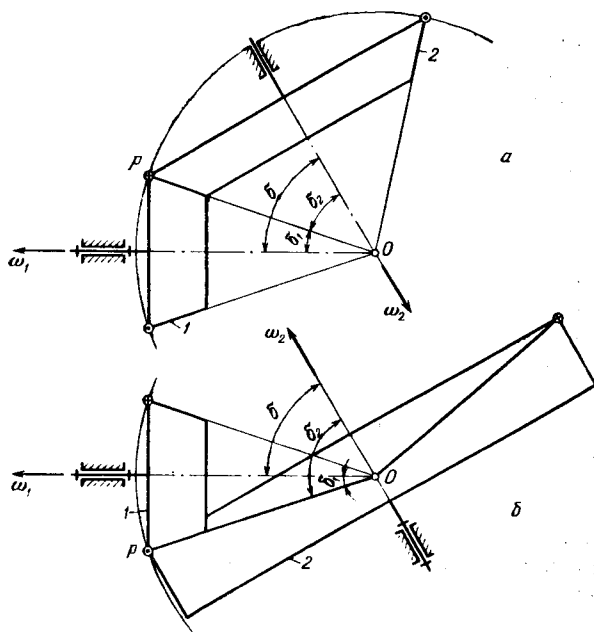


Рис. 184

1 и 2, которые пересекаются в точке O (рис. 184). В зависимости от направления вращения звеньев могут быть два случая. В первом случае (рис. 184, а) векторы угловых скоростей ω_1 и ω_2 образуют тупой угол $\pi - \delta$, во втором случае (рис. 184, б) — острый угол δ . В обоих случаях относительное движение звеньев 1 и 2 в

каждое мгновение может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси вращения OP , составляющей с осями вращения звеньев углы δ_1 и δ_2 . Положение мгновенной оси вращения находится из условия, что в относительном движении скорость любой точки на этой оси (например, точки P) равна нулю и, следовательно, абсолютные скорости точек P_1 и P_2 на звеньях 1 и 2 равны между собой:

$$v_{P_1} = v_{P_2}.$$

Отсюда

$$\omega_1 l_{OP} \sin \delta_1 = \omega_2 l_{OP} \sin \delta_2$$

и

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \quad (30.36)$$

так как передаточное отношение в пространственных механизмах есть отношение модулей угловых скоростей звеньев.

Кроме того, углы δ_1 и δ_2 связаны зависимостью

$$\delta_2 \pm \delta_1 = \delta, \quad (30.37)$$

где знак минус относится ко второму случаю.

Решая совместно уравнения (30.36) и (30.37) относительно угла δ_1 , получаем

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = (u_{12} \pm \cos \delta) / \sin \delta. \quad (30.38)$$

Передаточные отношения в зубчатой передаче можно определять также через числа зубьев z_1 и z_2 *): $u_{12} = z_2/z_1$, $u_{21} = z_1/z_2$.

При постоянном передаточном отношении u_{12} углы δ_1 и δ_2 остаются постоянными, и последовательные положения мгновенной оси вращения OP относительно звеньев 1 и 2 образуют аксоиды (геометрические места мгновенных осей вращения) в виде круговых конических поверхностей, называемых *начальными конусами* **). Касание начальных конусов может быть внешним (рис. 184, а) или внутренним (рис. 184, б). Движение звена 1 относительно звена 2 можно представить как качение начального конуса звена 1 по начальному конусу звена 2 без скольжения. В этом движении все точки звена 1 (кроме неподвижной точки O) движутся по сферическим траекториям. Например, траектория точки P располагается на сфере радиуса OP .

В конических передачах передаточное отношение не имеет знака, и для определения направления вращения звеньев изображают векторы абсолютных скоростей точек на начальных конусах (кружком с точкой векторы, направленные на зрителя, кружком с крестиком — от зрителя).

Базой для определения размеров зуба является *делительный конус*, который при нарезании зубьев без смещения режущего ин-

*) Передаточное отношение, большее или равное 1, называют *передаточным числом*.

**) О начальных поверхностях в зубчатых передачах см. § 102.

струмента совпадает с начальным конусом. Основанием делительного конуса назовем круг, который лежит в плоскости, перпендикулярной оси колеса, и проходит через точку P пересечения образующей делительного конуса с наружной (по отношению к центру сферы O) торцевой поверхностью зуба (рис. 185). Диаметр основания делительного конуса или, сокращенно, делительный диаметр выражается через стандартный модуль m :

$$d_1 = mz_1, \quad d_2 = mz_2.$$

Длина образующей делительного конуса OP называется делительным конусным расстоянием и обозначается через l :

$$l = \frac{d_1}{2 \sin \delta_1} = \frac{d_2}{2 \sin \delta_2}.$$

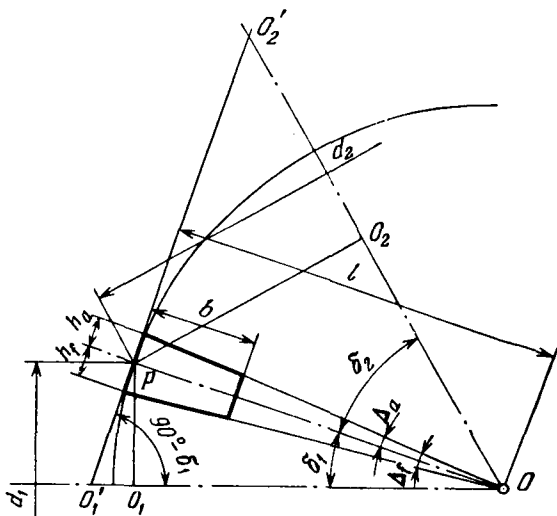


Рис. 185

Наружные торцевые поверхности выполняют обычно не по сфере радиусом l , а по конусу, дополнительному к делительному, с вершиной в точке O'_1 для колеса 1 и в точке O'_2 — для колеса 2. Высота головки h_a и высота ножки h_f измеряются по образующим дополнительного конуса и принимаются по соотношениям

$$h_a = h_a^* m, \quad h_f = (h_a^* + c^*) m.$$

Для колес, нарезанных без смещения, принимают $h_a^* = 1$ и $c^* = 0,2-0,3$.

Иногда определение высоты головки и ножки заменяют определением угла головки Δ_a и угла ножки Δ_f , что соответствует конусу вершин и конусу впадин.

Толщина зуба, измеренная по основанию делительного конуса: $s = \pi m/2$; ширина зубчатого венца $b = (0,25-0,3)l$.

Для образования боковых поверхностей зубьев можно предложить много различных поверхностей, удовлетворяющих основной теореме зацепления. Решающим условием для их выбора является технологичность процесса нарезания зубьев, т. е. получение достаточно простых конструкций станков и режущих инструментов, допускающих корректирование условий зацепления. Теоретически наиболее простыми сопряженными поверхностями, обеспечивающими постоянство передаточного отношения, являются эвольвентные

конические поверхности, которые образуют сферическое эвольвентное зацепление. Современные станки для нарезания зубьев конических колес воспроизводят это зацепление лишь приближенно,

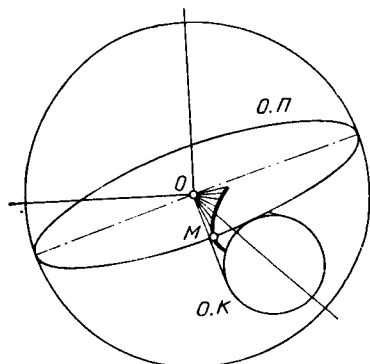


Рис. 186

и тем не менее предварительное определение основных параметров зацеплений, применяемых в конических передачах, можно сделать по картине зацепления сферических эвольвентных колес.

Эвольвентная коническая поверхность (рис. 186) образуется движением прямой OM , лежащей на образующей плоскости $(O.P)$, перекатывающейся без скольжения по основному конусу $(O.K)$. Каждая точка прямой OM описывает кривую, называемую сферической эвольвентой.

Картина сферического эвольвентного зацепления может быть построена так же, как и для плоского зацепления. Построения выполняются на сфере радиусом OP , причем прямым на плоскости

соответствуют дуги больших кругов на сфере. Для проверки дополнительных условий иногда применяют приближенный способ, известный под названием *способа Тредгольда* *). Этот способ основан на том, что вместо эвольвенты, расположенной на сфере радиусом OP , рассматривается кривая, получаемая при пересечении эвольвентной конической поверхности с дополнительным конусом, имеющим вершину в O'_1 (или в O'_2). При небольшой высоте зуба эти кривые мало отличаются одна от другой. Преимущество рассмотрения кривых, расположенных не на сфере, а на конусах, состоит в том, что конус в отличие от сферы можно развернуть на плоскость. На рис. 187 показаны развертки дополнительных конусов, у которых радиусы образующих согласно рис. 185 определяются по формулам

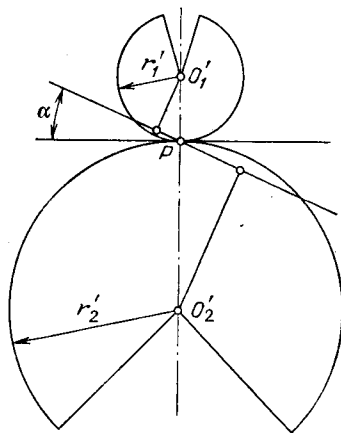


Рис. 187

$$r'_1 \equiv l_{O'_1P} = \frac{mz_1}{2 \cos \delta_1}, \quad (30.39)$$

$$r'_2 \equiv l_{O'_2P} = \frac{mz_2}{2 \cos \delta_2}. \quad (30.40)$$

*) Тредгольд (Tredhold, 1788—1829) — английский инженер.

На этих развертках, как на круговых секторах, можно построить плоское эвольвентное зацепление с углом зацепления α и по нему приближенно судить о сферическом эвольвентном зацеплении, т. е. определять коэффициент перекрытия, проверять отсутствие интерференции и т. п. Следует только учесть, что в соответствии с формулами (30.39) и (30.40) в этом плоском зацеплении числа зубьев надо считать равными:

$$\begin{aligned} z_{v1} &= z_1 / \cos \delta_1, \\ z_{v2} &= z_2 / \cos \delta_2. \end{aligned} \quad (30.41)$$

Эти числа зубьев называют *приведенными*.

Квазиэвольвентное зацепление. Продолжая аналогию между плоскими и сферическими эвольвентными зацеплениями, рассмотрим изготовление боковых поверхностей зубьев конических колес посредством одной производящей поверхности. Аналогом производящей рейки в конической передаче является плоское производящее колесо, у которого угол делительного конуса равен 90° . В станках для нарезания зубьев конических колес чаще, однако, используется не плоское, а плосковершинное производящее колесо (рис. 188, а), у которого угол конуса вершины равен 90° . Зубья производящего колеса воспроизводятся движением двух резцов (рис. 188, б), каждый из которых нарезает одну из сторон зуба конического колеса. Резцы имеют прямобочный профиль и движутся прямолинейно к центру сферы O . Кроме того, резцам (резцовой головке) и заготовке сообщается относительное движение огибания (обкатки) в соответствии с числом зубьев нарезаемого колеса и углом делительного конуса.

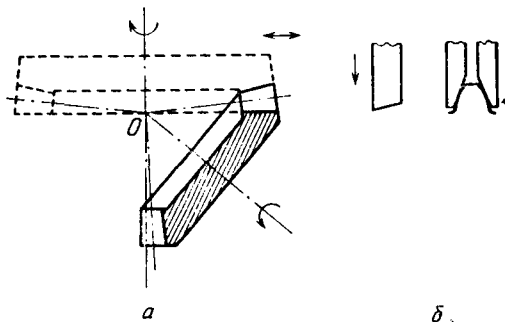


Рис. 188

При схеме обработки, показанной на рис. 188, боковые поверхности нарезаемых зубьев не получают эвольвентными, так как резцы имеют постоянный прямобочный профиль, в то время как для точного воспроизведения эвольвентных поверхностей профили резцов должны быть различными для каждого сечения нарезаемого зуба. Замена плоского производящего колеса плосковершинным вносит дополнительную погрешность в зацепление, которое, однако, остается близким к эвольвентному и потому называется *квазиэвольвентным*. Иногда его называют *октоидным* (окто — восемь), так как сечение поверхности зацепления плоскостью, перпендику-

лярной линии касания начальных конусов, дает линию зацепления в виде восьмерки.

Рассмотренная схема обработки соответствует нарезанию прямых зубьев. При нарезании косых зубьев резец движется по прямой, составляющей некоторый угол с прямой, проходящей через центр O . При нарезании криволинейных зубьев резец движется по дуге окружности, по эвольвенте или по какой-либо другой кривой.

Нарезание криволинейных зубьев конических колес. На рис. 189 представлена схема нарезания колеса 1 с круговыми зубьями посредством резцовой головки 2 ,

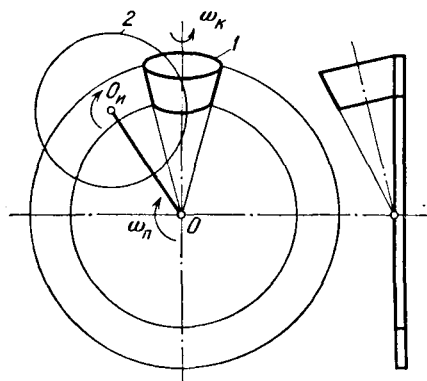


Рис. 189

на торце которой по кругу размещаются резцы. При нарезании зубьев резцовая головка вращается вокруг оси O , которая является осью вращения воображаемого производящего колеса, и, кроме того, вращается вокруг своей оси O_n (движение резания). Нарезаемое колесо 1 вращается во время нарезания зуба с угловой скоростью ω_n , связанной с угловой скоростью производящего колеса ω_k условием обкатки.

В процессе обкатки производящее колесо совершает неполный поворот. По окончании обработки одной впадины направления вращения нарезаемого колеса и производящего меняются на ускоренные обратные, а затем заготовке сообщается дополнительный поворот вокруг своей оси на угловой шаг. После этого начинается новый цикл движений, пока не будут обработаны все впадины нарезаемого колеса.

Продольные профили зубьев, получаемые в плоскости, перпендикулярной оси производящего колеса, очерчены по дугам окружностей (круговые зубья), причем для нарезания каждой стороны зуба (внешней или внутренней по отношению к центру окружности) должен быть свой профиль резца. Нарезание обеих сторон зуба производится либо раздельно (односторонний способ), либо одновременно (двусторонний способ).

Получаемое зацепление может быть исследовано в последовательности, указанной в § 98, т. е. вначале находятся уравнения производящих поверхностей, затем определяются линии контакта, поверхность зацепления и боковые поверхности зубьев.

По результатам исследования устанавливаются необходимые корректуры в настройке станка для получения требуемой формы и размеров пятна контакта, которое локализуется и по высоте, и по длине зуба. В некоторых случаях корректуры в настройке станка

учитывают влияние деформаций станка и нарезаемого колеса, а также погрешностей изготовления на величину отклонений от заданного передаточного отношения.

Все другие схемы нарезания зубчатых колес с криволинейными зубьями можно подразделить по виду продольного профиля зуба и по способу движения производящих поверхностей. Например, различают *обкатные* и *полуобкатные* способы. При обкатном способе боковые поверхности зубьев обоих колес получаются как огибающие поверхностей зубьев производящих колес при их нарезании. При полуобкатном способе боковая поверхность зуба одного из колес нарезается без обкатки, т. е. на этом колесе копируется производящая поверхность. Соответственно конические колеса подразделяются на обкатные и полуобкатные.

В последнее время получают все большее распространение колеса с эпи-гипотрохонидным продольным профилем зубьев производящего колеса, нарезаемые по способу непрерывной обкатки *). Схема нарезания зубьев при этом способе отличается от указанной на рис. 189 взаимным расположением прямолинейных резцов, резцовой головки и нарезаемого колеса, а также соотношениями между их движениями. К достоинствам способа принадлежат широкие возможности управления положением и формой пятна контакта и повышение производительности станка вследствие деления (отсутствует необходимость реверса нарезаемого колеса при переходе к обработке очередной впадины).

§ 102. Зубчатые передачи со скрещающимися осями вращения звеньев

Начальные поверхности. В рассмотренных типах цилиндрических и конических передач начальные поверхности (цилиндры или конусы) совпадали с аксоидами в относительном движении колес. Зубья колес располагались вблизи начальных поверхностей, а поверхности вершин и впадин имели ту же форму, что и начальные поверхности.

В передаче со скрещающимися осями вращения относительное движение колес для данного мгновения может быть представлено как вращение вокруг некоторой оси с одновременным скольжением вдоль нее. Эта ось называется *мгновенной осью вращения* — скольжения или *мгновенной винтовой осью*. Геометрические места мгновенной винтовой оси на каждом из колес дают *винтовые аксоиды* относительного движения. При постоянном передаточном отношении мгновенная винтовая ось ($B.O$) занимает постоянное положение в неподвижном пространстве, а винтовые аксоиды относи-

*) Гуляев К. И. Исследование зацепления копических колес с циклоидальным продольным профилем зуба, работающих с локализованной зоной контакта // Теория передач в машинах.— М.: Машиностроение, 1966.

тельного движения являются однополостными гиперboloидами вращения (рис. 190). На этом основании зубчатую передачу со скрещающимися осями вращения называют *гиперboloидной*.

По аналогии с цилиндрическими и коническими передачами можно было бы ожидать, что в гиперboloидной передаче зубья будут располагаться вблизи указанных гиперboloидов вращения, а поверхности вершин и впадин будут также гиперboloидными.

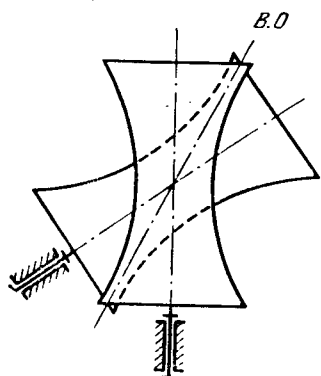


Рис. 190

Однако сравнительное исследование характеристик гиперboloидной передачи (к. п. д., габариты и т. п.) показало, что в ряде случаев лучше располагать зубья в областях, удаленных от винтовых аксоидов. В связи с этим потребовалось дать более широкое определение начальных поверхностей, определяющих области точек контакта зубьев, а также форму и расположение поверхностей вершин и впадин.

Начальные поверхности должны удовлетворять двум условиям: 1) быть взаимокасающимися поверхностями вращения, оси которых совпадают с осями вращения колес; 2) скорость каждой точки их

касания в относительном движении колес $v_{отн}$ должна быть направлена вдоль общей касательной к линиям зубьев (линиям пересечения боковых и начальных поверхностей) или же быть равной нулю. За начальные поверхности обычно выбирают или цилиндры, или конусы, а положения их точек касания или, что то же, их размеры выбирают так, чтобы относительная скорость $v_{отн}$ была расположена в общей касательной плоскости к начальным поверхностям. Заметим только, что эта плоскость в общем случае не совпадает с плоскостью, касательной к сопряженным поверхностям, т. е. вектор $v_{отн}$ располагается на линии пересечения плоскостей, касательных соответственно к начальным и сопряженным поверхностям. Отсюда следует, что общая нормаль к сопряженным поверхностям зубьев в общем случае не совпадает с общей нормалью к начальным поверхностям.

В цилиндрических зубчатых передачах начальные поверхности, удовлетворяющие указанным условиям, обязательно совпадают с цилиндрическими аксоидами. В конических зубчатых передачах начальные поверхности уже могут не совпадать с коническими аксоидами. Например, начальная поверхность одного из колес может быть цилиндрической (*Н.Ц*), а другого — конической (*Н.К*) (рис. 191). Коническая передача с аксоидами (*А.К*), составленная из этих колес, называется *смешанной конической передачей*.

Виды гиперboloидных передач. По способу образования сопряженных поверхностей зубьев различают *гиперboloидные передачи*

первого рода, в которых обе сопряженные поверхности могут быть образованы одной производящей поверхностью (первый способ Оливье), и *гиперболоидные передачи второго рода*, в которых производящая поверхность совпадает с одной из сопряженных поверхностей (второй способ Оливье). Гиперболоидная передача первого рода с коническими начальными (делительными) поверхностями называется *гипоидной зубчатой передачей* (рис. 192, а), а с цилиндрическими — *винтовой зубчатой передачей* (рис. 192, б). На рис. 192 гиперболоидные передачи показаны с углом скрещивания 90° , но этот угол, вообще говоря, может быть любым.

Боковые поверхности зубьев колес винтовой зубчатой передачи часто выполняются по эвольвентным винтовым поверхностям. Тогда эти колеса имеют форму ту же, что и косозубые колеса цилиндрической передачи. Необходимо только иметь в виду, что углы наклона зубьев β_1 и β_2 связаны с углом скрещивания осей δ соотношением $\beta_1 + \beta_2 = \delta$.

Червячная передача. Линейный контакт зубьев получается в червячной передаче (рис. 192, в), т. е. в гиперболоидной передаче второго рода, у которой начальные (делительные) поверхности отличны от конических и малое колесо (шестерня) имеет винтовые зубья. Малое колесо в червячной передаче называется *червяком*, а большое — *червячным колесом*. К гиперболоидным передачам второго рода относится также *спироидная передача*, у которой начальные (делительные) поверхности — конические и малое колесо имеет винтовые зубья. Контакт зубьев в спироидной передаче также линейный.

Зацепление в червячной передаче (*червячное зацепление*) полностью определяется принятой формой червяка и размерами его

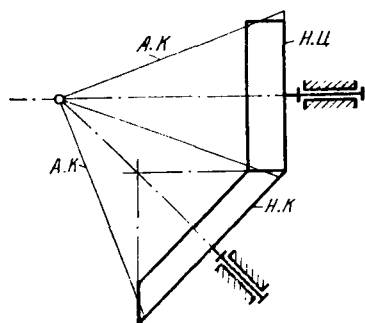


Рис. 191

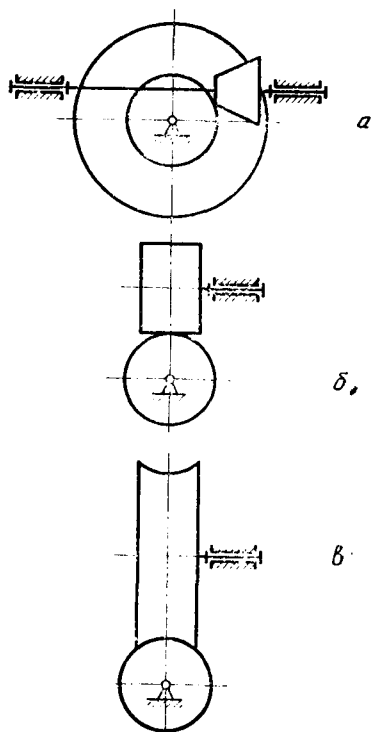


Рис. 192

зубьев. Основные виды червяков представлены на рис. 193. Червяки, как и обычные винты, могут быть подразделены по *числу заходов* (винтовых линий) на однозаходные, двухзаходные, трехзаходные и т. д. Число заходов совпадает с числом зубьев. В однозаходном червяке (рис. 193, а) шаг винтовой линии по делительной поверхности называют *ходом зуба* и обозначают через p_z .

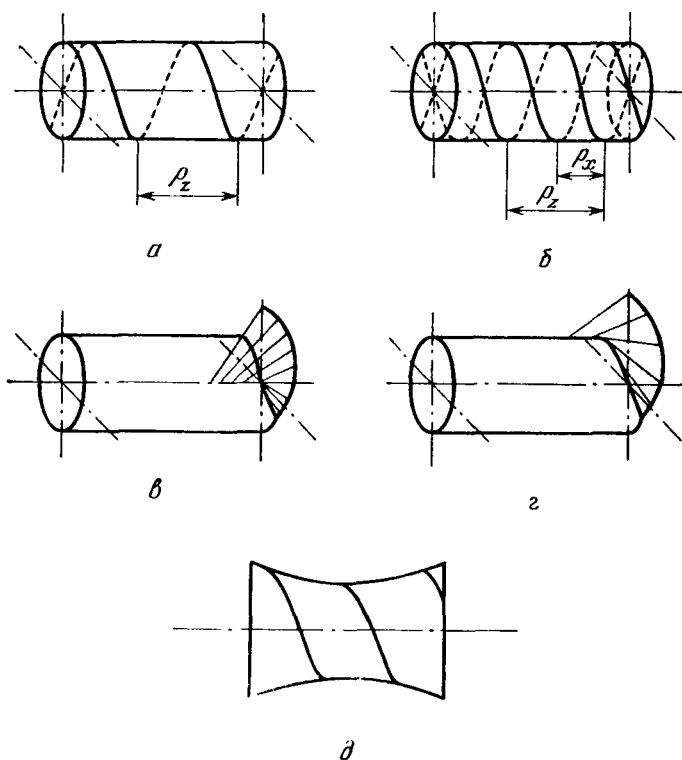


Рис. 193

В многозаходном червяке (рис. 193, б), кроме хода зуба, указывается *осевой шаг* p_x , т. е. расстояние между одноименными линиями соседних винтовых зубьев по линии пересечения осевой плоскости с делительной поверхностью. Ход и осевой шаг зуба связаны зависимостью

$$p_z = p_x z,$$

где z — число зубьев (заходов) червяка.

По форме винтовой поверхности зуба червяки могут быть подразделены на червяки с линейчатой боковой поверхностью и с нелинейчатой. Наибольшее распространение имеют два вида червяка с

линейчатой винтовой поверхностью: *архимедов червяк* и *эвольвентный червяк*. Архимедова винтовая поверхность получается, если образующая этой поверхности пересекает и винтовую линию, и ось червяка, образуя с ней постоянный угол (рис. 193, в). Сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной оси червяка, дает архимедову спираль. Если образующая прямая в любом положении остается касательной к винтовой линии, то получается эвольвентная винтовая поверхность (рис. 193, г). Сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной оси червяка, дает эвольвенту. Эвольвентный червяк соответствует винтовому эвольвентному колесу, архимедов червяк — винту (однозаходному или многозаходному) с трапецевидной нарезкой.

Наконец, по форме делительной поверхности червяки подразделяются на *цилиндрические* и *тороидные (глобоидные)*. В тороидных червяках (рис. 193, д) делительная поверхность есть тор, т. е. поверхность, образованная вращением дуги окружности. Тороидные червячные передачи имеют более благоприятные условия смазки.

Передаточное отношение червячной передачи $u_{12} = z_2/z_1$, где z_2 — число зубьев червячного колеса, z_1 — число зубьев (заходов) червяка, может достигать больших значений вследствие малого числа зубьев на червяке. Передача получается компактной, но к. п. д. сравнительно небольшой.

Для определения к. п. д. покажем направление полной реакции F_{12} , отклоненной от нормали nn на угол трения φ , а также ее составляющие: тангенциальную F_{12}^t , радиальную F_{12}^r и осевую F_{12}^a (рис. 194). Учитывая трение только в высшей паре, получаем из условий равновесия при равномерном движении звеньев и ведущем червяке:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= r_1 F_{12} \cos \alpha \sin (\beta + \varphi), \\ \bar{M}_2 &= r_2 F_{21} \cos \alpha \cos (\beta + \varphi). \end{aligned}$$

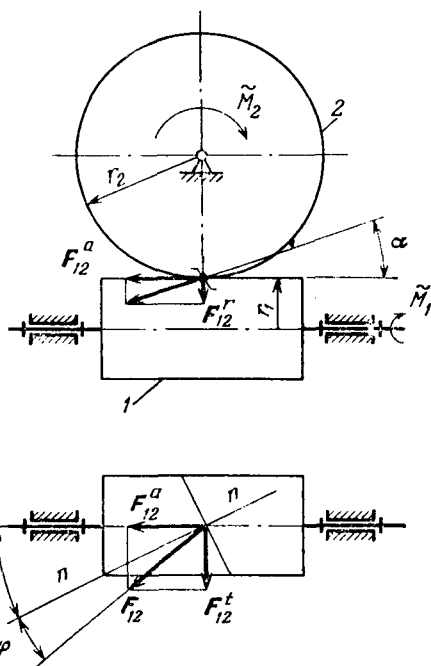


Рис. 194

Отсюда

$$\widetilde{M}_1 = \frac{r_1}{r_2} \widetilde{M}_2 \operatorname{tg}(\beta + \varphi).$$

К. п. д. червячной передачи при ведущем червяке найдется по формуле (6.19) как отношение движущего момента без учета трения M_1^0 к движущему моменту M_1 с учетом трения:

$$\eta_{12} = \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg}(\beta + \varphi).$$

Аналогично при ведущем червячном колесе получаем

$$M_1 = r_1 F_{12} \cos \alpha \sin(\beta - \varphi),$$

$$M_2 = r_2 F_{21} \cos \alpha \cos(\beta - \varphi).$$

Отсюда

$$\widetilde{M}_2 = \frac{r_2}{r_1} \widetilde{M}_1 \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta - \varphi)}.$$

К. п. д. червячной передачи при ведущем червячном колесе:

$$\eta_{21} = \operatorname{tg}(\beta - \varphi) / \operatorname{tg} \beta.$$

Условие самоторможения при ведущем червячном колесе: $\beta \leq \varphi$.

ГЛАВА 31

СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ И ФРИКЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 103. Синтез планетарных механизмов

К. п. д. планетарного механизма. Обеспечение заданного передаточного отношения есть основное условие синтеза планетарных механизмов. Из дополнительных условий одним из важнейших является получение максимального коэффициента полезного действия (к. п. д.). К. п. д. планетарного механизма можно определять двумя методами. Первый метод основан на силовом расчете с учетом трения. Второй метод основан на предположении, что при обратном движении силы, действующие на звенья механизма, не изменяются, и потому их отношения могут быть выражены через к. п. д. обращенного механизма. Вторым методом является приближенный, так как при обращении движения несколько меняются силы гидравлического сопротивления (в передачах с колесами, погруженными в масляную ванну), не учитываются центробежные силы инерции сателлитов и т. п. Однако он применяется чаще, так как при расчетах по первому методу надо иметь значения коэффициентов трения в зубчатых зацеплениях, которые, как правило, не известны. При расчетах по второму методу требуется лишь знать к. п. д. зубчатого механизма с неподвижными осями (к. п. д. обращенного механизма), экспериментальные значения которого определены с достаточной точностью.

Для определения к. п. д. планетарного механизма по второму методу примем, что все подвижные звенья уравновешены и движутся равномерно. Постоянные моменты внешних сил, действующих на звенья I , II и III , обозначим через $\bar{M}_1$, $\bar{M}_H$ и $\bar{M}_3$ (опорный момент, действующий со стороны основания или фундамента на стойку). Моменты сил движущих считаем положительными, а моменты сил сопротивления — отрицательными. Иначе момент сил считается положительным, если его направление совпадает с направлением угловой скорости.

Из условия равновесия, пренебрегая моментами сил трения в подшипниках центральных колес, имеем

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_H + \bar{M}_3 = 0. \quad (31.1)$$

Если ведущим звеном является колесо I , т. е. $\bar{M}_1 > 0$, то искомым к. п. д., равный мгновенному к. п. д. η_{IH} (первый индекс означает ведущее звено), определится из условия

$$\eta_{IH} = - \frac{\bar{M}_H \tilde{\omega}_H}{\bar{M}_1 \tilde{\omega}_1}.$$

С учетом соотношения (31.1) получаем

$$\eta_{IH} = \frac{1}{u_{IH}} \left(1 + \frac{\bar{M}_3}{\bar{M}_1} \right). \quad (31.2)$$

Отношение $\bar{M}_3/\bar{M}_1$ связано с к. п. д. обращенного механизма $\eta^{(H)}$, причем эта связь зависит от того, какое звено в обращенном движении является ведущим.

Звено I остается ведущим и в обращенном движении, если совпадают знаки $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H$. Это условие выполняется при $u_{IH} > 1$ и $u_{IH} < 0$. Тогда к. п. д. обращенного механизма

$$\eta^{(H)} = - \frac{\bar{M}_3 (-\tilde{\omega}_H)}{\bar{M}_1 (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H)}. \quad (31.3)$$

Если же в обращенном механизме ведущим звеном будет звено III (при $0 < u_{IH} < 1$), то

$$\eta^{(H)} = - \frac{\bar{M}_1 (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_H)}{\bar{M}_3 (-\tilde{\omega}_H)}. \quad (31.4)$$

Подставляя в формулу (31.2) отношение $\bar{M}_3/\bar{M}_1$, из формул (31.3) и (31.4) получаем

$$\eta_{IH} = \eta^{(H)} + \frac{1 - \eta^{(H)}}{u_{IH}} \quad \text{при } u_{IH} > 1 \text{ и } u_{IH} < 0; \quad (31.5)$$

$$\eta_{IH} = \frac{u_{IH} - 1 + \eta^{(H)}}{\eta^{(H)} u_{IH}} \quad \text{при } 0 < u_{IH} < 1. \quad (31.6)$$

При ведущем водиле к. п. д. планетарного механизма определяется по условию

$$\eta_{H1} = -\frac{\tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1}{\tilde{M}_H \tilde{\omega}_H}, \text{ или } \eta_{H1} = \frac{u_{1H}}{1 + \frac{\tilde{M}_3}{\tilde{M}_1}}.$$

Отношение $\tilde{M}_3/\tilde{M}_1$ определяется в этом случае по формуле (31.4), если звено I остается ведомым и в обратном движении, т. е. при $u_{1H} > 1$ и при $u_{1H} < 0$. В интервале $0 < u_{1H} < 1$ отношение моментов $\tilde{M}_3/\tilde{M}_1$ определяется по формуле (31.3). Следовательно,

$$\eta_{H1} = \eta^{(H)} \frac{u_{1H}}{u_{1H} - 1 + \eta^{(H)}} \text{ при } u_{1H} > 1 \text{ и } u_{1H} < 0, \quad (31.7)$$

$$\eta_{H1} = \frac{u_{1H}}{u_{1H} \eta^{(H)} + 1 - \eta^{(H)}} \text{ при } 0 < u_{1H} < 1. \quad (31.8)$$

При ведущем колесе I к. п. д. η_{1H} становится равным нулю, если передаточное отношение u_{1H} принимает значения

$$u_{1H} = 1 - \eta^{(H)} \text{ и } u_{1H} = -(1 - \eta^{(H)})/\eta^{(H)}.$$

Между указанными значениями u_{1H} к. п. д. становится отрицательным (самоторможение). Например, при $\eta^{(H)} = 0,98$ самоторможение будет при u_{1H} , находящемся в пределах от $-0,02$ до $0,02$.

При ведущем водиле самоторможения нет ($\eta_{H1} > 0$), но при $u_{1H} \rightarrow 0$ к. п. д. также стремится к нулю.

Выбор схемы планетарной передачи. Одно и то же заданное передаточное отношение можно получить, применяя различные по схеме механизмы, которые в некоторых случаях могут сильно отличаться по к. п. д., весам, габаритам и другим дополнительным условиям синтеза. В общем случае выбор схемы может быть выполнен только путем детального сравнения различных вариантов. Однако некоторые общие рекомендации по выбору схемы планетарной передачи могут быть показаны на примере четырех простейших схем (рис. 195).

По знаку передаточного отношения в обратном движении $u_{13}^{(H)}$ все указанные передачи подразделяются на передачи с положительным значением $u_{13}^{(H)}$ (рис. 195, а, б) и с отрицательным (рис. 195, в, г).

Для передач с положительным передаточным отношением

$$u_{13}^{(H)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$, выраженное через числа зубьев, находим по формуле

$$u_{1H}^{(3)} = \frac{z_1 z_2' - z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \quad (31.9)$$

Из этой формулы следует, что можно подобрать такие числа зубьев, при которых передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$ будет мало отличаться от нуля. Например, при $z_3 = 101$, $z_2 = 99$, $z_2' = z_1 = 100$

$$u_{13}^{(H)} = \frac{9999}{10\,000}, \quad u_{1H}^{(3)} = \frac{1}{10\,000}.$$

Однако механизм с указанными числами зубьев при ведущем колесе 1 практически не может быть приведен в движение вслед-

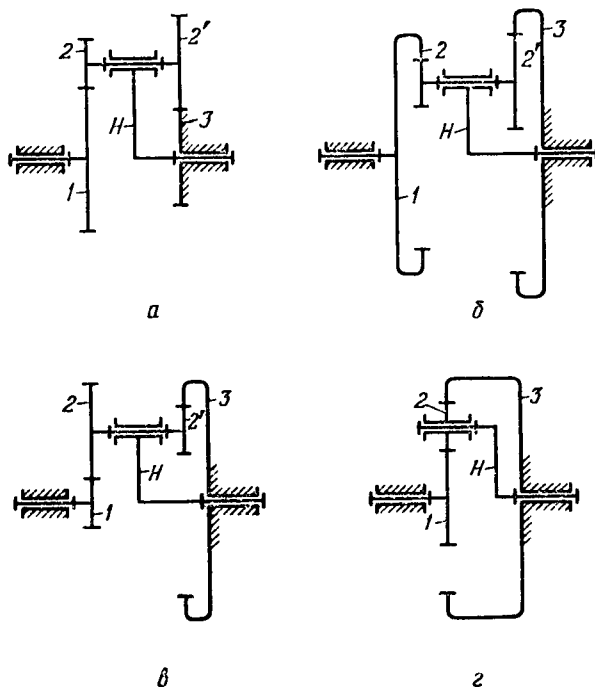


Рис. 195

ствие самоторможения, которое при $\eta^{(H)} = 0,98$, как было показано ранее, наступает уже при $u_{1H}^{(3)} = 0,02$.

При ведущем водиле движение возможно, но с очень низким к. п. д. Принимая $\eta^{(H)} = 0,98$, по формуле (31.8) получаем

$$\eta_{H1} = \frac{0,0001}{0,0001 \cdot 0,98 + 0,02} \approx 0,005.$$

Поэтому, несмотря на возможность получения очень малых (или очень больших) передаточных отношений, планетарные передачи по схемам на рис. 195, а и б применяются только в маломощных передачах. Обычно ведущим (и входным) звеном является во-

дило, а передаточное отношение u_{H1} выбирается в пределах от 30 до 100 (в редких случаях до 1500). Преимущество при этом отдается схеме на рис. 195, б, как более компактной и имеющей несколько больший к. п. д.

В передачах с отрицательным передаточным отношением (рис. 195, в, г) нельзя получить очень малые (или очень большие) передаточные отношения, так как $u_{1H}^{(3)}$ отличается от $u_{13}^{(H)}$ по модулю только на единицу:

$$\begin{aligned} u_{13}^{(H)} &= -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}, \\ u_{1H}^{(3)} &= \frac{z_1 z_2' + z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \end{aligned} \quad (31.10)$$

К. п. д. этих передач достаточно высок, а возможность установки нескольких сателлитов уменьшает нагрузки на зубья и приводит к уменьшению габаритов передачи по сравнению с обычной передачей, имеющей только неподвижные оси вращения колес. Особенно распространена однорядная передача (рис. 195, г) как более компактная в осевом направлении.

Практические диапазоны передаточных отношений в однорядной передаче определяются ограничениями на максимальные и минимальные значения числа зубьев. Кроме того, эти диапазоны зависят от того, какое звено принято за стойку.

Пусть, например, минимальное число зубьев колес 1 и 2 равно 10, а максимальное число зубьев колеса 3 равно 90. Тогда минимальное число зубьев колеса 3 равно 30, а максимальное число

Таблица 9

Передаточное отношение	от	до
$u_{H1}^{(3)} = z_1/(z_1 + z_3)$	0,1	0,44
$u_{H3}^{(1)} = z_3/(z_1 + z_3)$	0,56	0,9
$u_{3H}^{(1)} = (z_1 + z_3)/z_3$	1,11	1,78
$u_{1H}^{(3)} = (z_1 + z_3)/z_1$	2,29	10

зубьев колеса 1 равно 70. При этих числах зубьев передаточное отношение обращенного механизма

$$u_{13}^{(H)} = -z_3/z_1$$

изменяется в пределах от -9 до $-1,29$.

В табл. 9 указаны соответствующие диапазоны изменения передаточных отношений однорядной планетарной передачи. Из этой

таблицы видно, что в пределах от 0,1 до 10 не все передаточные отношения могут быть воспроизведены при помощи однорядной передачи. Например, выпадают диапазоны от 0,9 до 1,1, от 1,78 до 2,29 и др. По табл. 9 можно определить также, какое звено должно быть неподвижным, чтобы получить передаточное отношение в заданном интервале.

Выбор числа сателлитов из условий соседства и равных углов между сателлитами. После выбора схемы планетарной передачи можно перейти к определению числа зубьев. Но предварительно надо выяснить, какие ограничения накладываются на выбор числа сателлитов, так как эти ограничения связаны с числами зубьев всех колес передачи.

Первое условие, называемое *условием соседства*, устанавливает возможность размещения сателлитов в одной плоскости. Это условие выполняется, если диаметр окружности вершин зубьев сателлита меньше расстояния между осями соседних сателлитов (рис. 196):

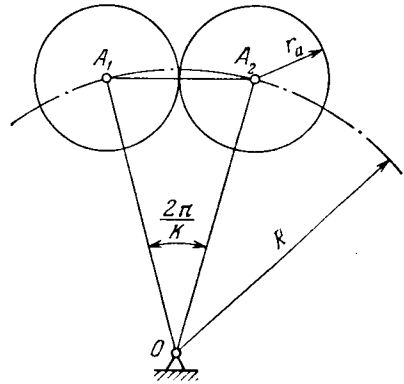


Рис. 196

$$2r_a < 2R \sin \frac{\pi}{K}, \quad (31.11)$$

где R — радиус окружности, на которой располагаются центры сателлитов, K — число сателлитов.

Например, для однорядной планетарной передачи (см. рис. 195, г) при колесах без смещения получаем

$$m(z_2 + 2) < m(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{K},$$

или

$$\sin \frac{\pi}{K} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}. \quad (31.12)$$

Второе условие называется *условием собираемости* (сборки) или *условием равных углов между сателлитами*.

Сателлиты обычно располагаются равномерно, т. е. угол между двумя соседними сателлитами принимается постоянным. В этом случае первый поставленный сателлит при сборке передачи полностью определяет взаимное расположение центральных колес, и остальные сателлиты могут быть введены в зацепление только при выполнении определенного соотношения между числами зубьев. Вывод этого соотношения покажем сперва на примере однорядной планетарной передачи (рис. 197).

Примем, что сателлит имеет четное число зубьев, и расположим ось симметрии какой-либо впадины центрального колеса I на линии OI , проходящей через ось симметрии впадины неподвижного колеса 3 . При таком расположении впадин можно поставить первый сателлит. Повернем колесо I на один угловой шаг, т. е. на

$$\varphi_1 = \tau_1 = 2\pi/z_1. \quad (31.13)$$

Тогда на линии OI вновь расположится ось симметрии впадины колеса I , и можно поставить второй сателлит. Угол между осями первого и второго сателлитов, т. е. угол между осями OI и OII , равен углу поворота водила

$$\varphi_{II}^{(3)} = \varphi_1 u_{II}^{(3)},$$

или

$$\varphi_{II}^{(3)} = \frac{2\pi}{z_1 u_{II}^{(3)}}. \quad (31.14)$$

Если считать, что сателлиты располагаются в параллельных плоскостях, то величина угла $\varphi_{II}^{(3)}$ может быть меньше величины, допускаемой из условия соседства. Тогда максимальное число сателлитов

$$K_{\max} = 2\pi/\varphi_{II}^{(3)}.$$

Подставляя в это соотношение значение угла $\varphi_{II}^{(3)}$ из формулы [(31.14)], получаем

$$K_{\max} = z_1 u_{II}^{(3)}$$

или с учетом формулы для $u_{II}^{(3)}$ (см. табл. 9),

$$K_{\max} = z_1 + z_3. \quad (31.15)$$

Если колесо I поворачивать не на один зуб, а на E_1 зубьев, то число устанавливаемых сателлитов уменьшается:

$$K = (z_1 + z_3)/E_1, \quad (31.16)$$

где число E_1 должно быть одним из множителей максимального числа сателлитов. При нечетном числе зубьев сателлита формула [(31.16)] остается справедливой. При неподвижном колесе I

$$K = (z_1 + z_3)/E_3, \quad (31.17)$$

где E_3 — число зубьев, на которое нужно повернуть колесо 3 для установки следующего сателлита. Это число зубьев также должно

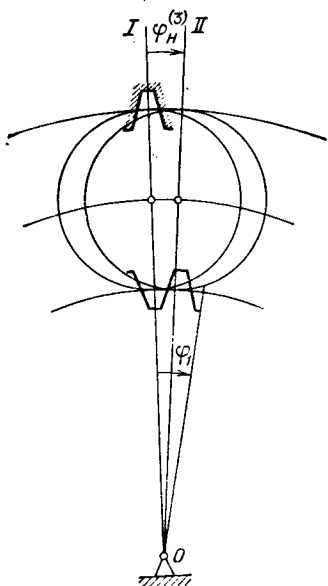


Рис. 197

быть одним из множителей максимального числа сателлитов. В обоих случаях возможные числа сателлитов совпадают.

Для передач с двойными сателлитами (см. рис. 195, $a - e$) условие собираемости можно получить аналогичным путем. Пусть, например, передача выполнена по схеме, показанной на рис. 195, e , причем на колесе 2 имеется хотя бы один зуб, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии зуба колеса 2'. Тогда, подставляя в формулу (31.14) значение $u_{1H}^{(3)}$ из формулы (31.10), получаем

$$\varphi_H^{(3)} = \frac{2\pi}{z_1 + \frac{z_2}{z_2'} z_3}. \quad (31.18)$$

В общем случае знаменатель в формуле (31.18) не является целым числом. Поэтому после того, как водило сделает полный оборот, ось симметрии впадины колеса 1 не придет на линию OI (см. рис. 197), и можно будет устанавливать сателлиты на следующих оборотах водила, пока ось устанавливаемого сателлита не совпадет с осью первого сателлита. При этом водило совершит θ оборотов, и максимальное число сателлитов, устанавливаемое при неподвижном колесе 3, будет равно

$$K_{\max}^{(3)} = 2\pi\theta/\varphi_H^{(3)},$$

или

$$K_{\max}^{(3)} = \theta \left(z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_2'} \right). \quad (31.19)$$

Из условия, что $K_{\max}^{(3)}$ — целое число, получаем, что $\theta z_2 z_3 / z_2'$ также должно быть целым числом. Отсюда наименьшее целое число оборотов водила

$$\theta = z_2' / n^{(3)}, \quad (31.20)$$

где $n^{(3)}$ — общий наибольший делитель чисел z_2' и $z_2 z_3$. Подставляя найденное значение θ в формулу (31.19), имеем

$$K_{\max}^{(3)} = (z_1 z_2' + z_2 z_3) / n^{(3)}. \quad (31.21)$$

Но сателлиты можно устанавливать и при неподвижном звене 1, вращая звено 3. Повторяя аналогичный вывод, получим

$$K_{\max}^{(1)} = (z_1 z_2' + z_2 z_3) / n^{(1)}, \quad (31.22)$$

где $n^{(1)}$ — общий наибольший делитель чисел z_2 и $z_1 z_2'$.

Максимальное число сателлитов, устанавливаемых обоими способами, получается равным

$$K_{\max} = (z_1 z_2' + z_2 z_3) / n, \quad (31.23)$$

где n — общий наибольший делитель чисел $n^{(3)}$ и $n^{(1)}$ или, что то же, общий наибольший делитель чисел z_2 и z_2^* .

Число устанавливаемых сателлитов определяется по формуле

$$K = K_{\max}/E, \quad (31.24)$$

где E — любой множитель числа $K_{\max}$.

Если число сателлитов K составлено из множителей, входящих в $K_{\max}^{(3)}$, то все сателлиты можно установить при неподвижном колесе 3, поворачивая колесо 1 на E_1 зубьев:

$$E_1 = \frac{z_1 z_2' + z_2 z_3}{n^{(3)} K}. \quad (31.25)$$

Если число сателлитов составлено из множителей, входящих в $K_{\max}^{(1)}$, то все сателлиты можно установить при неподвижном колесе 1, поворачивая колесо 3 на E_3 зубьев:

$$E_3 = \frac{z_1 z_2' + z_2 z_3}{n^{(1)} K}. \quad (31.26)$$

В общем случае можно представить число сателлитов в виде двух множителей:

$$K = K_1 K_2.$$

При неподвижном колесе 3 устанавливается K_1 сателлитов, причем число E_1 определяется по формуле (31.25) при $K = K_1$, и затем устанавливается K_2 сателлитов при неподвижном колесе 1, причем за ось OI (см. рис. 197) принимается ось каждого из установленных ранее сателлитов, и число E_3 выбирается по формуле (31.26) при $K = K_2$ **).

Разумеется, не обязательно устанавливать сателлиты, поворачивая колеса 1 и 3. Можно пронумеровать все зубья и впадины колес и, зная числа E_1 и E_3 , найти расчетным путем помера зубьев и впадин, соответствующих установке каждого сателлита при неподвижных колесах 1 и 3.

Для передач по схемам на рис. 195, а и б во всех ранее указанных формулах перед произведением $z_2 z_3$ должен стоять знак минус.

Выбор чисел зубьев в планетарных передачах. Основным условием синтеза планетарной передачи является воспроизведение заданного передаточного отношения. В зависимости от поставленных

* Формула (31.23) получается из формулы, предложенной Х. Мерритом (1942 г.). Одновременно в другом виде условие сборки было получено В. В. Добровольским (1943 г.). См. Левитская О. Н. Об условиях сборки планетарных редукторов с двойными сателлитами // Труды ин-та машиноведения, вып. 90. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.

** Указанный способ монтажа сателлитов есть некоторое видоизменение способа А. А. Никитина (Прикладная механика, 1957, т. 3, вып. 1. — Изд-во АН УССР).

условий различают точный синтез, когда требуется точно воспроизвести заданное передаточное отношение, и приближенный синтез, когда допустимы некоторые отклонения от заданного передаточного отношения.

Последовательность выполнения точного синтеза рассмотрим на примере синтеза однопредельной планетарной передачи (см. рис. 195, г). Сначала по табл. 9 устанавливаем, какое из звеньев передачи должно быть принято за неподвижное. Затем по заданному передаточному отношению передачи находим передаточное отношение обращенного механизма $u_{13}^{(H)}$. Это отношение представляем в виде несократимой дроби:

$$u_{13}^{(H)} = -p/q.$$

Тогда для определения неизвестных чисел зубьев z_1, z_2, z_3 и числа сателлитов K можно составить три уравнения и одно неравенство:

уравнение заданного передаточного отношения

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{p}{q};$$

уравнение соосности колес 1 и 3 (при колесах без смещения)

$$z_3 = z_1 + 2z_2;$$

уравнение собираемости (сборки)

$$z_1 + z_3 = KE_1,$$

где E_1 — один из множителей суммы $z_1 + z_3$.

Ограничение по условию соседства

$$\sin \frac{\pi}{K} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}.$$

Кроме того, числа зубьев должны быть в практически осуществимых пределах (обычно от 10 до 100), и все качественные показатели зубчатого зацепления (отсутствие интерференции, заострения и т. п.) обеспечиваются соответствующим выбором коэффициентов смещения.

Указанные уравнения и неравенство решаем путем подбора искомого величин. Первое уравнение удовлетворяется, если числа зубьев z_1 и z_3 выбраны из условий $z_1 = \lambda q$, $z_3 = \lambda p$, где λ — любое целое число. Каждое значение λ соответствует определенному варианту передачи.

Число зубьев сателлита для каждого варианта находится из уравнения соосности

$$z_2 = 0,5(z_3 - z_1).$$

Если число зубьев сателлита получается дробным, то выбирается ближайшее меньшее число, и соосность передачи достигается

путем определения коэффициентов смещения из условия заданного межосевого расстояния.

Далее определяется максимально возможное число сателлитов из условия соседства и проверяется условие собираемости. Все полученные варианты проверяются на выполнение дополнительных условий, связанных с качественными характеристиками зацепления (к. п. д., габариты передачи и т. п.). Однако при точном синтезе число возможных вариантов очень мало и, кроме того, в большинстве случаев не требуется точного выполнения заданного передаточного отношения. Поэтому чаще применяется приближенный синтез, при котором задается допустимое отклонение заданного передаточного отношения Δu . По этому отклонению находится допустимое отклонение $\Delta u^{(H)}$ передаточного отношения $u_{13}^{(H)}$. Далее задаемся последовательным рядом чисел зубьев z_1 и вычисляем значения числа зубьев z_3 , соответствующие предельным значениям передаточного отношения:

$$z_3 = z_1 (-u_{13}^{(H)} + \Delta u^{(H)}), \quad z_3 = z_1 (-u_{13}^{(H)} - \Delta u^{(H)}).$$

Значения числа зубьев z_3 , определяемые по этим формулам, в общем случае будут дробными. Возможными значениями числа зубьев z_3 будут только те целые числа, которые располагаются между этими значениями. После выбора чисел зубьев z_3 и z_1 дальнейший ход решения задачи такой же, как и при точном синтезе, но число возможных вариантов резко возрастает, и появляется возможность удовлетворить большому числу дополнительных условий *).

Еще большее число вариантов получается при синтезе планетарных передач по более сложным схемам. Поэтому, как правило, синтез планетарных передач в последнее время выполняется с применением ЭВМ.

Планетарные коробки передач. Зубчатые дифференциальные механизмы являются основой для образования планетарных коробок передач, под которыми понимаются механизмы, позволяющие устанавливать несколько значений передаточного отношения посредством включения управляющих элементов.

Например, на рис. 198 показана коробка передач, в которой можно устанавливать четыре значения передаточного отношения u_{1H_2} посредством различных комбинаций включения управляющих элементов: двух тормозов T_1 и T_2 и двух муфт M_1 и M_2 . Механизм образован последовательным соединением двух однорядных зубчатых дифференциалов и при выключенных элементах управления

*) Для предварительной оценки вариантов можно использовать таблицы и графики (Левитская О. И. Синтез однорядного планетарного редуктора с применением таблиц и графиков // Труды ин-та машиноведения, вып. 89.— М.: Изд-во АН СССР, 1962).

имеет три степени свободы. Соответственно он называется четырех-скоростной коробкой передач с тремя степенями свободы.

Первая передача (первое значение передаточного отношения u_{1H_2}) получается при включении тормозов T_1 и T_2 , т. е. когда механизм представляет собой последовательное соединение двух одно-рядных планетарных механизмов; *вто-рая передача* — при включении тормо-за T_1 и муфты M_2 (один одnorядный планетарный механизм с водилом H_1); *третья передача* — при включении тормоза T_2 и муфты M_1 (один одnorядный планетарный механизм с водилом H_2); *четвертая передача* — при вклю-чении муфт M_1 и M_2 (прямая пере-дача: все звенья вращаются как одно целое).

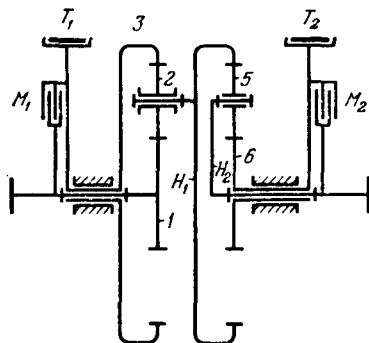


Рис. 198

Выбор чисел зубьев при синтезе коробок передач по заданным значе-ниям передаточных отношений сводит-ся к решению системы уравнений со-осности и передаточных отношений.

Например, для данной коробки передач можно составить четыре уравнения заданных передаточных отношений и два уравнения со-осности. В этих уравнениях содержатся шесть неизвестных: $z_1, z_2, z_{H_1}, z_5, z_6, z_3$.

Решение этих уравнений в целых числах и последующий выбор числа сателлитов не представляют трудностей. Значительно слож-нее выбрать схему, наиболее полно удовлетворяющую дополни-тельным условиям и в особенности условию получения максима-льно возможного к. п. д. на всех передачах. Число возможных ва-риантов схем очень велико, и поэтому для их образования исполь-зуются методы топологии, а для сравнения вариантов применяются ЭВМ.

§ 104. Синтез бесступенчатых фрикционных передач с замкнутым дифференциалом

В качестве примера синтеза фрикционных механизмов рассмот-рим синтез *бесступенчатой передачи*, т. е. передачи с регулируемым передаточным отношением (рис. 199). Механизм состоит из замкну-того дифференциала, в котором замыкающая цепь выполнена в ви-де фрикционной лобовой передачи, имеющей два фрикционных ко-леса (диска) D_4 и D_3 . Колесо D_4 может перемещаться вдоль оси вращения на призматической шпонке. При этом перемещении ко-леса D_4 изменяется величина r_3 и, следовательно, изменяется пере-даточное отношение

$$u_{43} = r_3/r_4.$$

$$(31.27)$$

Фрикционное колесо D_4 соединено с колесом 1 дифференциала через коническую передачу с передаточным отношением, равным единице, а колесо D_3 — непосредственно с колесом 3. Соединение бесступенчатой передачи с дифференциалом может иметь две цели: 1) увеличение диапазона регулирования скоростей и 2) уменьшение мощности бесступенчатой передачи по сравнению с мощностью всей передачи.

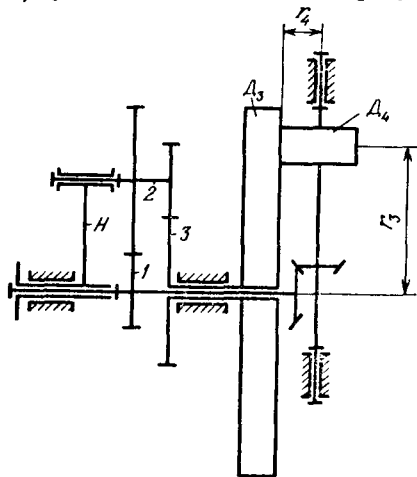


Рис. 199

Условимся называть *диапазоном регулирования* отношение модулей максимального передаточного отношения и минимального и обозначать его буквой δ с индексами соответствующего передаточного отношения.

Например, для бесступенчатой передачи, состоящей из колес D_3 и D_4 :

$$\delta_{43} = u_{43}^{\max} / u_{43}^{\min}. \quad (31.28)$$

Лобовая фрикционная передача конструктивно может иметь диапазон регулирования не более 8 (обычно 2—6). Минимальное

передаточное отношение $u_{43}^{\min}$ ограничивается условиями передачи сил (обычно $u_{43}^{\min} = 1$). Между тем часто ставится задача регулирования передаточного отношения в значительно большем диапазоне. Тогда задача синтеза может быть сформулирована следующим образом: по заданным диапазонам регулирования бесступенчатой передачи и всей передачи в целом, а также по минимальному передаточному отношению бесступенчатой передачи выбрать схему передачи и найти числа зубьев всех колес дифференциала.

Выбор схемы начинается с рассмотрения комбинаций, получающихся при различных соединениях колес бесступенчатой передачи D_4 и D_3 со звеньями дифференциала. Каждое из колес D_4 и D_3 может быть соединено с одним из трех звеньев дифференциала 1, 3 и H. Всего получается шесть комбинаций, отличающихся не только конструкцией, но и кинематическими и динамическими характеристиками. Полное сравнение всех комбинаций обычно может быть выполнено только на основании сравнительного расчета. Пусть, например, выбрана комбинация, показанная на рис. 199. Тогда заданными величинами будут: δ_{1H} , δ_{43} и $u_{43}^{\min}$. Требуется найти передаточное отношение обращенного механизма $u_{13}^{(H)}$ и по нему подобрать числа зубьев всех колес.

Установим связь между передаточными отношениями u_{1H} , u_{43} и $u_{13}^{(H)}$, используя уравнение (4.16). Для этого разделим все члены

этого уравнения на ω_1 и, кроме того, для сокращения записи обозначим искомую величину $u_{13}^{(H)}$ через x :

$$u_{31} = \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) u_{H1}.$$

Учитывая, что $u_{31} = u_{34}u_{41}$ и $u_{41} = 1$, получаем

$$u_{1H} = \frac{u_{43}(x-1)}{x-u_{43}}. \quad (31.29)$$

Диапазон регулирования всей передачи δ_{1H} получится, если в эту формулу подставить значение $u_{43}^{\max}$, а затем $u_{43}^{\min}$ и разделить $u_{1H}^{\max}$ на $u_{1H}^{\min}$:

$$\delta_{1H} = \delta_{43} \frac{x - u_{43}^{\min}}{x - u_{43}^{\max}}. \quad (31.30)$$

Назовем коэффициентом увеличения диапазонов A отношению диапазона регулирования всей передачи к диапазону регулирования бесступенчатой передачи. В нашем случае

$$A = \delta_{1H} / \delta_{43}. \quad (31.31)$$

С учетом формулы (31.30) и принимая во внимание, что $u_{43}^{\max} = \delta_{43} u_{43}^{\min}$, получаем

$$A = \frac{x - u_{43}^{\min}}{x - \delta_{43} u_{43}^{\min}}.$$

Отсюда искомая величина

$$x = \frac{u_{43}^{\min}(A\delta_{43} - 1)}{A - 1}. \quad (31.32)$$

Определив величину $x = u_{13}^{(H)}$, можно найти числа зубьев колес дифференциала и возможное число сателлитов, используя условия соосности, соседства и собираемости в том же порядке, как и при синтезе планетарной передачи.

Пусть, например, задано $u_{43}^{\min} = 2$, $\delta_{43} = 2$, $\delta_{1H} = 20$. Коэффициент увеличения диапазонов $A = 10$. Подставляя значение этого коэффициента и исходные данные в формулу (31.32), получаем

$$u_{13}^{(H)} = \frac{2(10 \cdot 2 - 1)}{10 - 1} = \frac{38}{9}.$$

Следовательно, дифференциал должен быть выполнен по схеме с положительным передаточным отношением $u_{13}^{(H)} = 38/9$. В дифференциале, показанном на рис. 199, использована схема с двумя внешними зацеплениями, но можно взять и схему с двумя внутренними зацеплениями.

Если основным условием синтеза является не увеличение диапазона регулирования, а уменьшение мощности бесступенчатой передачи по сравнению с мощностью всей передачи, то аналогичным путем можно пойти передаточное отношение $u_{13}^{(H)}$ по заданному отношению мощностей *).

ГЛАВА 32

СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 105. Определение основных размеров кулачковых механизмов

Виды кулачковых механизмов. *Кулачковым механизмом* называется механизм, в состав которого входит кулачок. Как указывалось в § 2, кулачком называется звено, которому принадлежит элемент высшей пары, выполненный в виде поверхности перемещенной кривизны. В рассмотренных ранее зубчатых механизмах каждый зуб может рассматриваться как кулачок, а весь зубчатый механизм как многократно повторенный кулачковый механизм. Выходное звено кулачковых механизмов, как правило, совершает возвратное движение. Прямолинейно движущееся выходное звено кулачкового механизма будем называть *толкателем*, а вращающееся (качающееся) — *коромыслом*. Для уменьшения трения о поверхность кулачка выходное звено часто снабжается роликом.

Постоянное соприкосновение звеньев в высшей паре обеспечивается или силовым, или геометрическим замыканием. При *силовом замыкании* (рис. 200, а) постоянное прижатие звеньев происходит под действием пружины, силы тяжести, давления жидкости и т. п. При *геометрическом замыкании* (рис. 200, б — г) возможность отрыва одного звена от другого устраняется введением дополнительной (избыточной) геометрической связи, которая не накладывает новых ограничений на относительное движение звеньев. Одним из наиболее распространенных способов геометрического замыкания является применение *пазового кулачка* (рис. 200, б). Трудности точного выполнения паза и устранения ударов ролика о паз привели к появлению *двухдисковых кулачков* (рис. 200, в), в которых выходное звено взаимодействует с двумя дисковыми кулачками, жестко соединенными между собой. Вместо двухдискового кулачка можно выполнить *диаметральный кулачок* (рис. 200, г), в котором, однако, профиль кулачка может быть выбран произвольно только на некоторой его части. Другая часть профиля получается из условия касания кулачка со второй плоскостью.

Кроме подразделения кулачковых механизмов по способу замыкания высшей пары, они различаются также по видам движения

*) Брумберг Р. М. Некоторые вопросы расчета дифференциальных и дифференциально-бесступенчатых передач // Труды семинара по теории механизмов и машин, вып. 30.— М.: Изд-во АН СССР, 1949.

входных и выходных звеньев и по виду элемента высшей пары на звене, соприкасающемся с кулачком (плоскость, цилиндрическая поверхность ролика, сферическая поверхность и т. п.). Общее число возможных сочетаний по этим признакам достаточно велико, и на рис. 200 показаны только некоторые виды плоских кулачковых механизмов.

Угол давления на ведомое звено кулачкового механизма. Основные размеры кулачкового механизма (минимальный радиус-вектор

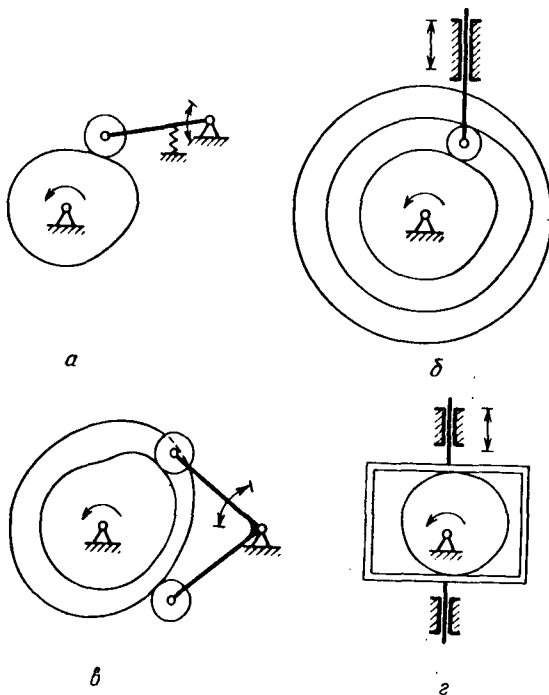


Рис. 200

кулачка, длина коромысла и т. п.) выбираются из условий выполнения заданных ограничений, из которых в первую очередь надо отметить ограничение по углу давления на ведомое звено. При геометрическом замыкании выходное звено является ведомым как на фазе подъема, так и на фазе опускания. При силовом замыкании выходное звено является ведомым только на фазе подъема, так как при опускании оно движется под действием замыкающей силы. Кулачок на этой фазе является либо ведомым, либо ведущим в зависимости от соотношений между замыкающей силой и внешними силами, действующими на кулачок.

Определим, например, угол давления на ведомый толкатель для механизма (рис. 201), в котором центр ролика B движется по прямой, смещенной относительно центра вращения кулачка на величину e . Это смещение считается положительным, если направление скорости толкателя при его подъеме составляет острый угол с направлением скорости точки контакта на кулачке. Перемещение толкателя s и угол поворота кулачка φ отсчитываются от положения

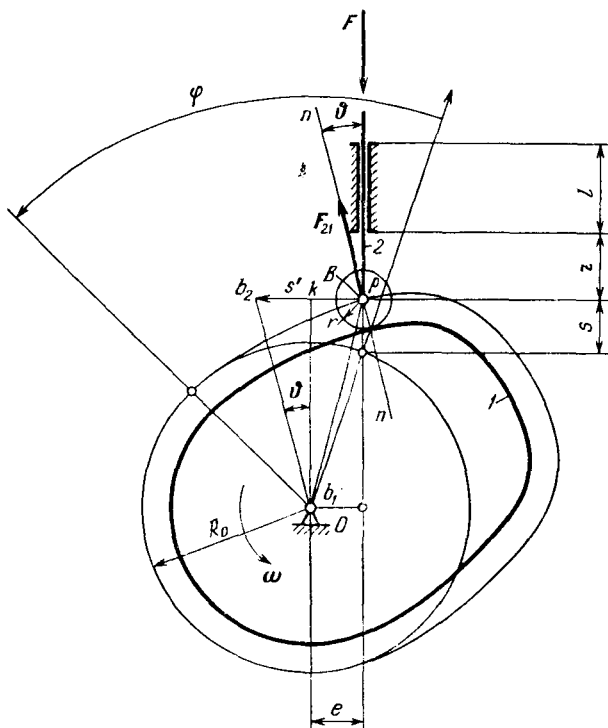


Рис. 201

начала фазы подъема, т. е. от наипрившего положения центра ролика, находящегося на расстоянии R_0 от центра O вращения кулачка. Это расстояние, называемое *начальным радиусом*, совпадает с минимальным радиусом-вектором *центрального профиля кулачка*, под которым понимается траектория центра ролика относительно кулачка.

Угол давления θ на ведомый толкатель равен углу между нормалью nn к центрному профилю (или, что то же, к профилю кулачка) и скоростью центра ролика. Его величину можно найти из

повернутого на 90° плана скоростей, построенного по уравнению

$$v_{B_2} = v_{B_1} + v_{B_2 B_1}. \quad (32.1)$$

Полус плана скоростей p совместим с центром ролика, а точку b_1 плана — с центром вращения кулачка. Тогда масштабный коэффициент плана скоростей

$$\mu_v = \mu_l \omega, \quad (32.2)$$

где μ_l — масштабный коэффициент длин, $\tilde{\omega}$ — угловая скорость кулачка.

Из точки b_1 проводим направление вектора $v_{B_2 B_1}$ (в повернутом плане скоростей параллельно нормали pn) до пересечения с проведенным из полюса p перпендикуляром к скорости толкателя v_{B_2} . Полученный отрезок (pb_2) дает модуль скорости v_{B_2} :

$$v_{B_2} = (pb_2) \mu_v. \quad (32.3)$$

Подставляя в эту формулу значение масштабного коэффициента из (32.2) и учитывая, что $v_{B_2} = s' \omega$, где $s' = ds/d\varphi$ — величина аналога скорости толкателя, получаем

$$(pb_2) = s' / \mu_l, \quad (32.4)$$

т. е. отрезок (pb_2) в масштабе схемы изображает аналог скорости толкателя.

Из треугольника $b_1 k b_2$ с учетом формулы (32.4) находим

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{s' - e}{s + \sqrt{R_0^2 - e^2}}. \quad (32.5)$$

Для кулачкового механизма с центральным толкателем, т. е. для механизма без смещения ($e = 0$), имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{s'}{s + R_0}. \quad (32.6)$$

Для кулачково-коромыслового механизма (см. рис. 200, a) угол давления можно приближенно определять по формуле (32.5), если траектория центра ролика мало отличается от прямой, проходящей на расстоянии e от центра вращения кулачка.

Выбор допускаемого угла давления. Различают два основных случая выбора допускаемого угла давления в кулачковых механизмах: 1) требуется получить малые габариты механизма, 2) требуется получить высокий к. п. д. Для получения малых габаритов надо уменьшать начальный радиус R_0 . Но при этом согласно формуле (32.5) увеличивается угол давления и возрастают реакции в кинематических парах. Это возрастание реакций можно оценить

коэффициентом возрастания усилий *)

$$\nu = F_{21}/F, \quad (32.7)$$

где F_{21} — величина реакции на ведомый толкатель со стороны кулачка или ролика, F — величина силы сопротивления, действующей на толкатель (включая и силу инерции).

В § 26 при силовом расчете кулачкового механизма была получена формула (6.14) для определения величины реакции F_{21} . С учетом этой формулы при $F = F_2 + m_2 a$ получаем

$$\nu = \frac{1}{\cos \vartheta - f \left[1 + \frac{2(l_0 - s_2)}{l} \right] \sin \vartheta}. \quad (32.8)$$

Отсюда, задаваясь предельным значением коэффициента возрастания усилий $\nu_{\max}$, получаем уравнение для определения допускаемого угла давления

$$\cos \vartheta_{\text{доп}} - f \left[1 + \frac{2(l_0 - s_2)}{l} \right] \sin \vartheta_{\text{доп}} = \frac{1}{\nu_{\max}}. \quad (32.9)$$

Например, при $\nu_{\max} = 2$, $f = 0$ и $s_2 = l_0$ получаем $\vartheta_{\text{доп}} = 60^\circ$; при $\nu_{\max} = 2$, $f = 0,3$ и $s_2 = l_0$ получаем $\vartheta_{\text{доп}} = 44^\circ$ и т. д.

Для получения достаточно высокого к. п. д. при небольших габаритах надо выбрать оптимальное значение мгновенного к. п. д. и подставить это значение в формулу (6.24) при $\vartheta = \vartheta_{\text{доп}}$:

$$\eta_{\text{опт}} = 1 - f \left[1 + \frac{2(l_0 - s_2)}{l} \right] \operatorname{tg} \vartheta_{\text{доп}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\text{доп}} = \frac{1 - \eta_{\text{опт}}}{f \left[1 + \frac{2(l_0 - s_2)}{l} \right]}. \quad (32.10)$$

Например, при $\eta_{\text{опт}} = 0,85$, $f = 0,3$ и $s_2 = l_0$ получаем $\operatorname{tg} \vartheta_{\text{доп}} = 0,5$, $\vartheta_{\text{доп}} \approx 27^\circ$.

Следовательно, в первом случае (наименьшие габариты) можно принимать довольно большие значения допускаемого угла давления, которые, однако, значительно меньше угла, соответствующего самоторможению. Во втором случае допускаемый угол давления не превосходит 30° . Это значение угла давления обычно и считается допустимым.

В кулачково-коромысловом механизме потери на трение меньше, и соответственно можно допускать большие значения угла давления. Обычно принимают $\vartheta_{\text{доп}} = 45^\circ$.

Определение основных размеров из условий ограничения угла давления. Допускаемый угол давления, как было указано выше, выбирают в широких пределах, поэтому определение основных раз-

*) Коэффициент предложен Л. И. Решетовым.

меров кулачкового механизма из условий ограничения угла давления часто выполняют посредством простейших графических построений.

При силовом замыкании угол давления кулачка на толкатель учитывают только на фазе подъема, так как при опускании толкатель движется под действием замыкающей силы. Для определения начального радиуса R_0 в кулачковом механизме с центральным толкателем дифференцируем перемещение толкателя s по углу поворота кулачка φ и строим график зависимости аналога скорости толкателя $s' = ds/d\varphi$ от перемещения s (рис. 202, а). Оси этого

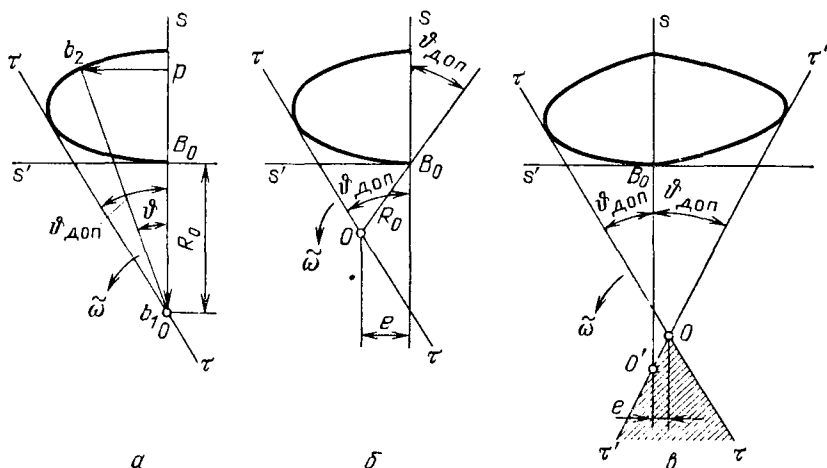


Рис. 202

графика располагаем в соответствии с повернутым планом скоростей (см. рис. 201), т. е. ось s направляем вверх, значения s' при вращении кулачка против хода часовой стрелки откладываем влево на фазе подъема. Масштабные коэффициенты по обоим осям графика должны быть равны масштабному коэффициенту длин μ_l .

Проведем касательную tt к построенному графику под углом $\vartheta_{\text{доп}}$ к оси s . Тогда расстояние OB_0 даст искомое значение R_0 в принятом масштабе длин. Доказательство этого утверждения следует из двух условий: 1) угол между осью s и прямой Ob_2 для любой точки графика $s'(s)$ равен углу давления ϑ , так как тангенс этого угла удовлетворяет формуле (32.6); 2) при указанном построении максимальное значение угла давления равно $\vartheta_{\text{доп}}$. Заметим также, что любая точка b_2 графика $s'(s)$, центр вращения кулачка O и ордината b_2p образуют треугольник, совпадающий с повернутым планом скоростей b_2pb_1 на рис. 201.

Начальный радиус R_0 можно уменьшить при том же значении $\vartheta_{\text{доп}}$, если применить смещенный толкатель. Тогда центр вращения

кулачка O находится на пересечении касательной $\tau\tau$ с линией, проведенной под углом $\vartheta_{\text{доп}}$ к оси z через точку B_0 (рис. 202, б). Положение точки O определяет смещение e и начальный радиус R_0 .

При геометрическом замыкании (например, при пазовом кулачке) выходное звено является ведомым как на фазе подъема, так и на фазе опускания. Поэтому график $s'(s)$ строится для обеих фаз, и центр вращения кулачка выбирается в заштрихованной области, определяемой пересечением касательных $\tau\tau$ и $\tau'\tau'$ (рис. 202, в).

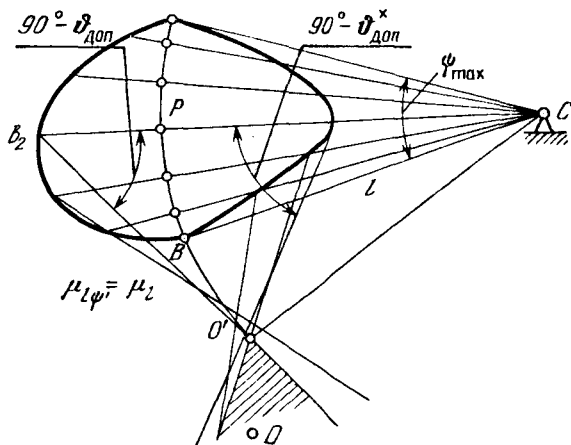


Рис. 203

Минимальное значение R_0 при смещенном толкателе получается при расположении центра вращения кулачка в точке O , а при центральном — в точке O' .

На рис. 203 показано определение положения центра вращения кулачка O для кулачково-коромыслового механизма при геометрическом замыкании.

Сначала находим аналог скорости центра ролика $ds_B/d\varphi = l\psi'$, где $\psi' = d\psi/d\varphi$ — аналог угловой скорости коромысла. Затем по зависимости $\psi(\varphi)$ в пределах заданного угла размаха ψ_{max} строим несколько положений коромысла и откладываем от точки B_0 вдоль этих положений значения $l\psi'$, принимая масштабный коэффициент для $l\psi'$ равным масштабному коэффициенту длин μ_l . Значения $l\psi'$ откладываются на фазе подъема от центра вращения C , если кулачок и коромысло вращаются в противоположных направлениях, и к центру C , если они вращаются в одну сторону.

Указанные построения дают геометрическое место точек b_2 повернутых планов скоростей. На основании свойств этих планов допускаемая зона для центра вращения кулачка O располагается

между огибающими прямых, проведенных из каждой точки b_2 под углом $\mu_{\text{доп}} = 90^\circ - \vartheta_{\text{доп}}$ к отрезку (pb_2) . Вследствие приближенности всех расчетов, связанных с допускаемым углом давления, практически эта зона располагается между прямыми, имеющими наименьшую точку пересечения O' (заштрихованная область). Выбранное в допускаемой зоне положение центра определяет искомый начальный радиус и расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла.

Определение основных размеров из условия выпуклости кулачка. Если по условиям размещения звеньев кулачкового механизма не удастся поставить ролик между кулачком и толкателем, то применяют тарельчатый толкатель, который взаимодействует с кулачком 1 по плоскости (рис. 204). С целью уменьшения износа нижнюю часть толкателя выполняют в виде круглой тарелки, которая вместе с толкателем может поворачиваться относительно его оси. Для этого кинематическую пару «толкатель — стойка» выполняют как цилиндрическую пару.

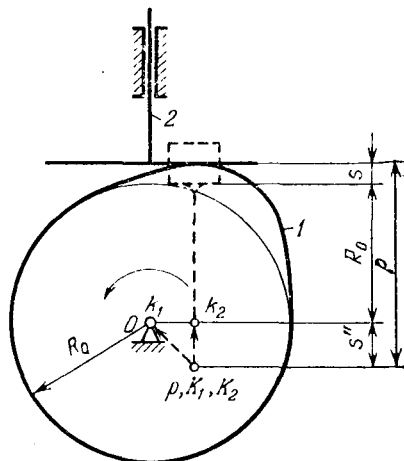


Рис. 204

В кулачковом механизме с тарельчатым толкателем кулачок должен быть выпуклым. Условие выпуклости может быть получено из плана ускорений для мгновенного заменяющего механизма с низшими парами в виде четырехзвенника, в котором звено 3 (показано штриховой линией) образует с ползуном 2 поступательную пару, а с кривошипом OK_1 — вращательную пару. Ускорение ползуна 2 в заменяющем механизме при равномерном движении кривошипа определяется по уравнению

$$a_{K_2} = a_{K_1}^n + a_{K_2K_1}^r, \quad (32.11)$$

где K_2 — точка на ползуне, совпадающая в данный момент времени с точкой K_1 на кривошипе. Это уравнение тождественно уравнению, связывающему ускорение точки K_1 на кулачке и K_2 на толкателе при условии, что точка K_1 есть центр кривизны профиля кулачка.

План ускорений строим на схеме механизма в виде треугольника pk_2k_1 , в котором полюс p совмещен с центром кривизны профиля кулачка K_1 , а точка k_1 — с центром вращения O . Масштабный коэффициент плана ускорений

$$\mu_a = \omega^2 l_{OK_1} / OK_1 \equiv \mu_1 \omega^2,$$

где $\tilde{\omega}$ — угловая скорость кулачка. Отсюда отрезок, изображающий вектор ускорения a_{K_2} :

$$(pk_2) = \frac{a_{K_2}}{\mu_i \omega^2}.$$

Принимая во внимание, что $a_{K_2} = s''\omega^2$, где $s'' = d^2s/d\varphi^2$ — аналог ускорения толкателя, получаем $pk_2 = s''/\mu_i$.

Из рис. 204 следует, что радиус кривизны профиля кулачка связан с начальным радиусом R_0 соотношением $\rho = s'' + R_0 + s$. Для выпуклого профиля $\rho > 0$ и, следовательно, начальный радиус R_0 должен удовлетворять условию

$$R_0 > -s'' - s. \quad (32.12)$$

При $R_0 = -s'' - s$ радиус кривизны $\rho = 0$, что нельзя допускать по условиям контактной прочности профиля кулачка. Поэтому задают минимально допустимое значение $\rho = \rho_{\min}$ и определяют начальный радиус из условия

$$R_0 > -s'' - s + \rho_{\min}. \quad (32.13)$$

Приближенно считают

$$R_0 = -s''_{\max}, \quad (32.14)$$

где $s''_{\max}$ — максимальный по модулю аналог отрицательного ускорения толкателя.

§ 106. Определение профиля кулачка

Определение профиля кулачка по заданному закону движения толкателя. Рассмотрим графическое построение профиля кулачка, которое может быть полезным не только для вывода формул координат профиля, но и для предварительного определения формы кулачка. При решении этой задачи считаем заданными: зависимость перемещения толкателя от угла поворота кулачка $s = s(\varphi)$, смещение e , начальный радиус R_0 и радиус ролика r (рис. 205).

Построение центрального профиля начинается с разметки траектории центра ролика B_0 . Для этого надо по заданным R_0 и e найти наимпзшее положение центра ролика B_0 и затем на участке B_0B_k длиной h отметить его положения при равных интервалах изменения угла φ . На рис. 205 показано только одно промежуточное положение точки B_k , которому соответствует точка B'_k центрального профиля. Искомая точка B'_k находится на пересечении окружности радиуса OB_k с прямой, изображающей положение толкателя в обратном движении, т. е. после поворота на угол φ в направлении, противоположном направлению вращения кулачка. Чтобы выполнить этот поворот, надо провести касательную к окружности с радиусом e в точке C_k , отстоящей от точки C_0 на угол φ .

Повторяя указанное построение для нескольких положений точки B на фазах подъема и опускания (φ_n и φ_o), получаем центр-овой профиль кулачка. На участках верхнего и нижнего выстоев ($\varphi_{н.в}$ и $\varphi_{н.п}$) центр-овой профиль очерчивается по дугам окружностей с радиусами R_0 и $\sqrt{h^2 + R_0^2 + 2h\sqrt{R_0^2 - e^2}}$. После построения центр-ового профиля находим профиль кулачка как огибающую семейства окружностей, представляющих собой последовательные положения ролика.

Полярные координаты точек центр-ового профиля вычисляются по формулам:

$$R = \sqrt{s^2 + R_0^2 + 2s\sqrt{R_0^2 - e^2}}, \quad (32.15)$$

$$\beta = \varphi \pm (\chi_0 - \chi), \quad (32.16)$$

где

$$\chi = \arcsin \frac{|e|}{R}, \quad 0 < \chi < \frac{\pi}{2},$$

$$\chi_0 = \arcsin \frac{|e|}{R_0}, \quad 0 < \chi_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Знак минус при вычислении угла β берется при положительном смещении, знак плюс — при отрицательном. Угол χ меньше угла χ_0 , и потому полярный угол β меньше угла поворота кулачка φ при положительном смещении и соответственно больше при отрицательном смещении. Если смещение $e = 0$, то углы β и φ совпадают.

При обработке профиля кулачка часто принимают радиус режущего инструмента (фрезы или шлифовального круга) равным радиусу ролика. Тогда достаточно знать координаты центр-ового профиля кулачка. Если же радиусы ролика и режущего инструмента не совпадают, то по обычным правилам вычисления координат огибающей находится траектория центра инструмента, отстоящая от центр-ового профиля на величину, равную разности радиусов ролика и инструмента.

Определение профиля кулачка по заданному закону движения коромысла. В плоском кулачково-коромысловом механизме при

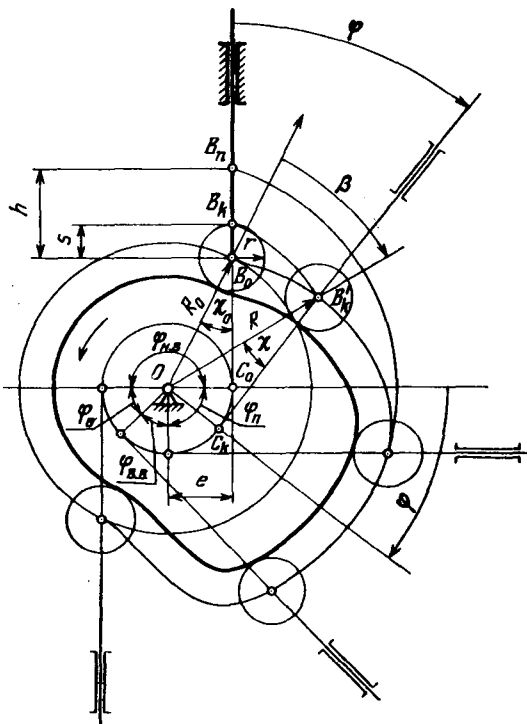


Рис. 205

определении профиля кулачка по заданной зависимости между углом поворота коромысла ψ и углом поворота кулачка φ должны быть известны: угол размаха коромысла $\psi_{\max}$, длина коромысла l , начальный радиус R_0 , расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла l_0 , радиус ролика r (рис. 206).

Для графического определения профиля кулачка по методу обращения движения строят положения коромысла, соответствующие

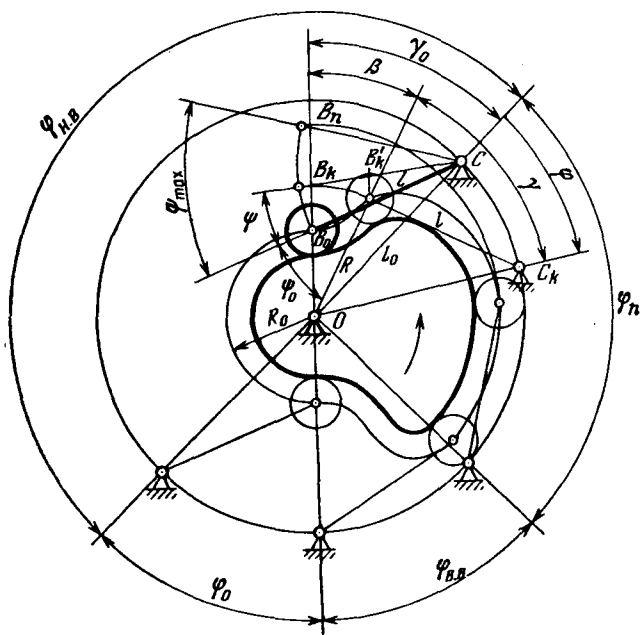


Рис. 206

выбранным приращениям угла φ , т. е. размечают траекторию точки B . Далее по заданным R_0 , l_0 и l находят центр вращения кулачка O , и на окружности радиусом OC отмечают положения центра вращения коромысла C в обратном движении путем поворота линии OC на угол φ в сторону, противоположную направлению вращения кулачка. Точка центрового профиля B'_k , соответствующая точке B_k на размеченной траектории B , находится в пересечении окружности радиусом OB_k с окружностью радиусом l с центром в точке C_k . После построения достаточного числа точек центрового профиля можно найти профиль кулачка как огибающую последовательных положений окружности ролика.

Радиус-вектор центрового профиля R находят из треугольника OB'_kC_k :

$$R = \sqrt{l_0^2 + l^2 - 2l_0l \cos(\psi + \psi_0)}, \quad (32.17)$$

где

$$\psi_0 = \arccos \frac{l_0^2 + l^2 - R_0^2}{2ll_0}.$$

Полярный угол β определяется из условия

$$\beta = \varphi \pm (\gamma_0 - \gamma), \quad (32.18)$$

где

$$\gamma_0 = \arccos \frac{R_0^2 + l_0^2 - l^2}{2R_0l_0}, \quad \gamma = \arccos \frac{R^2 + l_0^2 - l^2}{2Rl_0}.$$

В формуле (32.18) берется знак плюс, если на фазе подъема направления вращения кулачка и коромысла противоположные, и знак минус — если эти направления одинаковые.

Определение профиля кулачка в механизме с тарельчатым толкателем. На рис. 207 показано построение профиля кулачка в механизме с тарельчатым толкателем по методу обращения движения

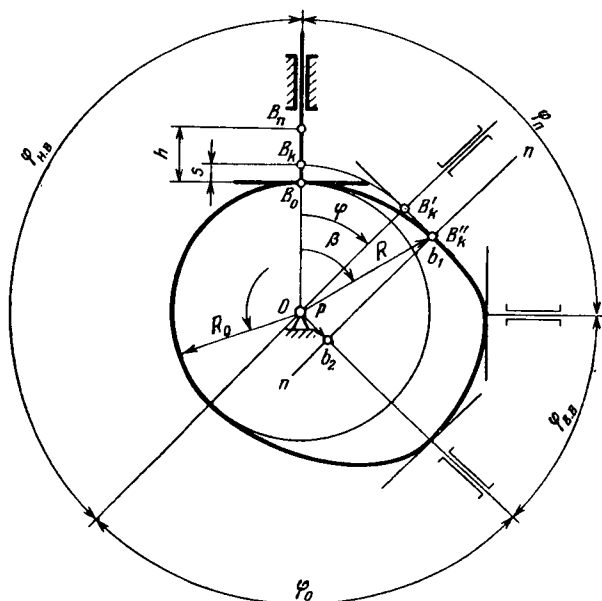


Рис. 207

при заданной функции $s = s(\varphi)$ и известном начальном радиусе R_0 . После разметки траектории точки B строят положения тарелки толкателя в обратном движении, поворачивая ось тарелки на угол φ в сторону, противоположную направлению вращения кулачка, и перемещая плоскость тарелки от центра на величину $R_0 + s$.

Профиль кулачка находят как огибающую положений плоскости тарелки в обратном движении.

Следует обратить внимание на то, что внутри фаз подъема и опускания точка B_k'' касания тарелки с кулачком смещена от оси толкателя. Проведем через эту точку нормаль nn к профилю кулачка, которая одновременно является нормалью к данному положению плоскости тарелки, и отметим точку b_2 основания перпендикуляра, опущенного на нормаль nn из центра O . Треугольник pb_1b_2 , равный треугольнику $OB_k'B_k''$, есть повернутый план скоростей по уравнению

$$\mathbf{v}_{B_2} = \mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{B_2B_1}.$$

Отрезок (pb_2) изображает в масштабе схемы аналог скорости толкателя $s' = ds/d\varphi$. Поэтому положение точки контакта B_k'' можно найти и без построения огибающей. Для этого надо из точки B_k' отложить отрезок $B_k'B_k'' = pb_2$ так, чтобы после поворота его вокруг точки B_k' на 90° в сторону вращения кулачка вектор (pb_2) соответствовал бы направлению движения толкателя. Диаметр тарелки должен быть больше удвоенной величины максимального смещения точки контакта от оси толкателя.

Полярные координаты профиля R и β находим с учетом повернутого плана скоростей:

$$R = \sqrt{(R_0 + s)^2 + (s')^2}, \quad \beta = \varphi + \arcsin \frac{s'}{R}.$$

Аналог скорости толкателя $s' = ds/d\varphi$ надо считать положительным при подъеме толкателя и отрицательным — при опускании.

Выбор радиуса ролика. От радиуса ролика r зависит радиус кривизны ρ_n профиля кулачка. На вогнутом участке профиля $\rho_n = \rho + r$, т. е. при любом радиусе ролика радиус кривизны профиля кулачка больше радиуса кривизны центрального профиля. На выпуклом участке профиля $\rho_n = \rho - r$, и для того чтобы не получилось заострения профиля ($\rho_n = 0$), должно быть выполнено условие

$$r < \rho_{\min}, \quad (32.19)$$

где $\rho_{\min}$ — минимальный радиус кривизны центрального профиля на выпуклом участке.

Выполнение условия (32.19) гарантирует отсутствие заострения, но при значениях радиуса ролика, близких к $\rho_{\min}$, получаются малые величины ρ_n и соответственно большие контактные напряжения на поверхности кулачка. Минимум контактных напряжений при одном и том же значении $\rho_{\min}$ будет при равенстве радиусов кривизны ролика и профиля:

$$r = 0,5 \rho_{\min}.$$

При больших значениях $\rho_{\min}$ уменьшают радиус ролика до конструктивно удобных размеров. При малых значениях $\rho_{\min}$ увеличивают начальный радиус R_0 .

Условие качения ролика. Чтобы отсутствовало скольжение ролика по поверхности кулачка, необходимо выполнить следующее условие:

$$F_{\text{сн}} < fF_{21}, \quad (32.20)$$

где $F_{\text{сн}}$ — модуль силы сцепления, приводящей ролик в движение; f — коэффициент трения скольжения ролика по кулачку; F_{21} — модуль нормальной реакции на ролик со стороны кулачка.

Уравнение моментов сил, действующих на ролик (включая и момент пары сил инерции), имеет вид

$$F_{\text{сн}}r - kF_{21} - f_{\text{ц}}F_{21}r_{\text{ц}} - J_{\text{р}}\tilde{\varepsilon}_{\text{р}} = 0, \quad (32.21)$$

где k — коэффициент трения качения ролика по кулачку; $r_{\text{ц}}$ — радиус цапфы ролика; $f_{\text{ц}}$ — коэффициент трения цапфы ролика в подшипнике; $J_{\text{р}}$ — момент инерции ролика относительно его оси; $\tilde{\varepsilon}_{\text{р}}$ — угловое ускорение ролика, которое считается положительным при ускоренном движении и отрицательным — при замедленном.

С учетом (32.21) условие качения ролика (32.20) принимает вид

$$\frac{k}{r} + \frac{r_{\text{ц}}}{r} f_{\text{ц}} + \frac{J_{\text{р}}\tilde{\varepsilon}_{\text{р}}}{F_{21}r} < f. \quad (32.22)$$

Для тихоходных механизмов ($\varepsilon_{\text{р}} \approx 0$) и при малых значениях коэффициента трения качения k условие качения ролика упрощается:

$$\frac{r_{\text{ц}}}{r} f_{\text{ц}} < f, \quad \text{или} \quad r > r_{\text{ц}} \frac{f_{\text{ц}}}{f}. \quad (32.23)$$

Для быстроходных механизмов наибольшее значение в условии качения (32.22) имеет слагаемое, зависящее от углового ускорения, т. е.

$$\frac{J_{\text{р}}\varepsilon_{\text{р}}}{F_{21}r} < f, \quad \text{или} \quad r > \frac{J_{\text{р}}\varepsilon_{\text{р}}}{fF_{21}}. \quad (32.24)$$

При силовом замыкании это условие может быть обеспечено подбором пружины, которая должна не только устранять возможность отрыва ролика от кулачка (сила пружины должна быть больше силы инерции при выбеге), но и создавать достаточную силу нажатия во фрикционной паре «ролик — кулачок».

Определение сопряженных поверхностей в пространственных кулачковых механизмах. Сопряженная поверхность, принадлежащая ролику (цилиндрическому, коническому и сферическому), всегда известна. Сопряженную поверхность кулачка можно найти из условий основной теоремы зацепления. Но обычно нет необходимости строить эту поверхность или вычислять координаты ее

точек, так как она обрабатывается не по точкам, а методом обкатки, при котором режущий инструмент, имеющий форму и размеры ролика, совершает относительно заготовки такое же движение, какое имеет ролик в движении относительно кулачка. Для приближенного определения характеристик кулачкового механизма (например, угла давления) иногда разворачивают сопряженную поверхность кулачка на плоскость, хотя надо помнить, что, за исключением редких частных случаев, эта поверхность не является разворачивающейся.

Выбор закона движения выходного звена с учетом его упругости. При синтезе кулачкового механизма с упругим толкателем (см. рис. 105) заданным считается закон движения верхнего конца толкателя $y = y(t)$, и следовательно, требуемые перемещения нижнего конца толкателя $s = s(t)$, по которым определяется профиль кулачка, должны удовлетворять уравнению движения (21.1). Отсюда при $b = 0$

$$s = \frac{F}{c} + y + \frac{m}{c} \ddot{y}, \quad (32.25)$$

где s — перемещение нижнего конца толкателя, определяемое профилем кулачка; y — перемещение верхнего конца толкателя, которое вследствие упругости толкателя отличается от перемещения s ; m — масса толкателя; c — коэффициент жесткости толкателя; F — модуль силы сопротивления, включая силу трения и силу предварительной затяжки пружины.

Уравнение (32.25) накладывает ограничения на выбор закона движения выходного звена кулачкового механизма при упругом толкателе, т. е. на выбор функции $y = y(t)$. Рассмотрим выбор этой функции из условия отсутствия скачков скоростей и ускорений (жестких и мягких ударов). С этой целью продифференцируем (32.25) дважды по времени, считая силу сопротивления постоянной:

$$\dot{s} = \dot{y} + \frac{m}{c} \ddot{y}, \quad (32.26)$$

$$\ddot{s} = \ddot{y} + \frac{m}{c} \dddot{y}. \quad (32.27)$$

Из (32.26) следует, что во избежание жестких ударов при упругом толкателе надо выбирать такие законы движения его верхнего конца, при которых функции $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ непрерывны и равны нулю в крайних положениях толкателя. Поставленным условиям на участке от $t = 0$ до $t = t_n$ может удовлетворить закон движения в виде многочлена (полинома) седьмой степени

$$y = (ak^4 + bk^5 + ck^6 + dk^7)h, \quad k = t/t_n, \quad (32.28)$$

если определить коэффициенты полинома из граничных условий: $y = \dot{y} = \ddot{y} = \ddot{\ddot{y}} = 0$ при $k = 0$; $y = h$, $\dot{y} = \ddot{y} = \ddot{\ddot{y}} = 0$ при $k = 1$.

Дифференцируя (32.28) по времени, получаем

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (4ak^3 + 5bk^4 + 6ck^5 + 7dk^6) h/t_n, \\ \ddot{y} &= (12ak^2 + 20bk^3 + 30ck^4 + 42dk^5) h/t_n^2, \\ \dddot{y} &= (24ak + 60bk^2 + 120ck^3 + 210dk^4) h/t_n^3.\end{aligned}$$

Граничные условия для $k=0$ удовлетворяются при любых значениях искомых коэффициентов. Граничные условия для $k=1$ дают систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 1, \\ 4a + 5b + 6c + 7d &= 0, \\ 12a + 20b + 30c + 42d &= 0, \\ 24a + 60b + 120c + 210d &= 0.\end{aligned}$$

Определив коэффициенты полинома из этой системы, получаем

$$y = (35k^4 - 84k^5 + 70k^6 - 20k^7) h.$$

Если надо избежать не только жестких, но и мягких ударов, то согласно (32.26) и (32.27) в крайних положениях толкателя должны быть равны нулю производные по времени от функции $y(t)$ до четвертого порядка включительно.

Полином, удовлетворяющий этим условиям, имеет вид

$$y = (126k^5 - 420k^6 + 540k^7 - 315k^8 + 70k^9) h.$$

Кулачок, профиль которого определен по функции $s = s(t)$ в соответствии с (32.25) при условии, что закон движения $y = y(t)$ представляет степенную функцию, называется *полидинамическим кулачком*. Название показывает, что для определения профиля используются полиномы, составленные с учетом динамики выходного звена. Заметим только, что при использовании уравнения (32.25) необязательно выбирать закон движения $y = y(t)$ в виде степенной функции. Можно использовать и другие функции, удовлетворяющие указанным граничным условиям. Во всех случаях изготовление этих кулачков требует очень высокой точности.

Все выводы, относящиеся к выбору закона движения упругого толкателя, справедливы и для упругого коромысла.

ГЛАВА 33

СИНТЕЗ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 107. Синтез тормозного устройства по Чебышеву

В гл. 13 была рассмотрена динамика типового объемного гидропривода (см. рис. 77). В схеме этого гидропривода предусмотрено тормозное устройство в виде регулируемого дросселя, т. е. устройство, в котором перемещение подвижной части z вызывает умень-

шение проходного сечения f_τ и, следовательно, увеличение потерь давления.

Уравнение движения гидропривода (13.18) при тормозном устройстве, включенном в сливную линию, имеет вид

$$\ddot{x} = \frac{S_1}{m} \left(p_0 - \frac{F_\tau}{S_1} - A v - B v^2 \right),$$

где

$$A = A_v + A_1 + \frac{S_1 - S_m}{S_1} A_2,$$

$$B = B_1 + \frac{S_1 - S_m}{S_1} \left(B_2 + \frac{B_\tau}{f_\tau^2} \right).$$

В этом уравнении были приняты обозначения: x — обобщенная координата, равная перемещению поршня; $\tilde{v} = \dot{x}$ — обобщенная скорость; S_1 — площадь поршня; S_m — площадь штока; m — приведенная к поршню масса; p_0 — давление на выходе из насоса при $v = 0$; F_τ — приведенная сила технологических сопротивлений и сил трения; A_v , A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , B_τ — постоянные коэффициенты, определяемые из эксперимента для данного гидропривода или же по табличным значениям для типовых элементов гидропривода.

Уравнение движения (13.18) можно разрешить относительно переменной площади тормозного устройства:

$$f_\tau = v \sqrt{\frac{B_\tau (S_1 - S_m)}{Z}}, \quad (33.1)$$

где

$$Z = [p_0 - (A_1 + A_v)v - B_1 v^2] S_1 - F_\tau - (A_2 v + B_2 v^2) (S_1 - S_m) - m \dot{v}.$$

Если на участке торможения считать заданным закон движения поршня $x = x(t)$ или $\tilde{v} = \tilde{v}(t)$, то, подставляя в уравнение (33.1) значения v и $\dot{v}$, можно получить закон изменения площади проходного сечения, при котором получается заданный закон движения поршня.

Обычно стремятся получить закон постоянного ускорения, так как при этом законе получается минимальная величина модуля ускорения при торможении, а следовательно, и минимальная величина динамической нагрузки в гидроприводе.

Обозначим через a_n модуль постоянного ускорения поршня при торможении и через v_n — скорость поршня при равнозамедленном движении. Тогда из уравнения (33.1) можно найти площадь проходного сечения в тормозном устройстве f_n , необходимую для получения постоянного ускорения:

$$f_n = v_n \sqrt{\frac{B_\tau (S_1 - S_m)}{Z_n}}, \quad (33.2)$$

где

$$Z_{\Pi} = [p_0 - (A_1 + A_v)v_{\Pi} - B_1v_{\Pi}^2]S_1 - F_T - (A_2v_{\Pi} + B_2v_{\Pi}^2) \times \\ \times (S_1 - S_{\Pi}) + ma_{\Pi}.$$

На основании свойств равнозамедленного движения:

$$v_{\Pi} = \sqrt{v_y^2 - 2a_{\Pi}(x - x_0)}, \quad (33.3)$$

где x_0 — координата x в начале торможения; v_y — скорость поршня в начале торможения (установившаяся скорость), определяемая из уравнения движения (13.18) при ускорении поршня $dv/dt = 0$.

Вместо модуля ускорения a_{Π} можно задавать путь x_{Π} , проходимый за время торможения. При равнозамедленном движении

$$a_{\Pi} = \frac{v_y^2}{2x_{\Pi}}. \quad (33.4)$$

Тогда

$$v_{\Pi} = v_y \sqrt{1 - \frac{x - x_0}{x_{\Pi}}}. \quad (33.5)$$

По формуле (33.2) с учетом соотношений (33.3) и (33.4) можно найти закон изменения площади проходного сечения, необходимый для торможения с постоянным отрицательным ускорением. Однако конструктивно выполнить тормозное устройство с таким изменением площади очень затруднительно. Поэтому возникает задача приближенного синтеза в постановке Чебышева: *найти такие размеры тормозного устройства простой формы, при которых отклонение получаемой площади f_T от необходимой f_{Π} было бы мало на заданном участке торможения.*

Пусть, например, подвижная часть тормозного устройства выполнена в виде цилиндрического золотника с прямоугольными канавками (см. рис. 77, 6). Площадь проходного сечения f_T при протекании жидкости через канавки зависит от числа канавок n , ширины b , длины s , угла наклона β и от перемещения золотника z :

$$f_T = nb(s - z)\sin\beta.$$

При торможении по пути перемещение z связано с перемещением поршня x зависимостью

$$z = (x - x_0)/u_{xz}, \quad (33.6)$$

где u_{xz} — передаточное отношение от поршня к золотнику, под которым понимается отношение модулей линейных скоростей поршня и золотника.

С учетом зависимости (33.6) площадь f_T для рассматриваемого золотника может быть представлена линейной функцией перемещения поршня:

$$f_T = k_0 - k_1(x - x_0),$$

где

$$k_0 = nbs \sin \beta, \quad k_1 = nb \frac{\sin \beta}{u_{xz}}.$$

Параметры синтеза n , b , s , β , u_{xz} будем находить из условий наилучшего равномерного приближения функций $f_T(x)$ и $f_H(x)$ на участке от $x = x_0$ до $x = x_0 + 0,9x_H$. Участок от $x = x_0 + 0,9x_H$ до $x = x_0 + x_H$ не принимается во внимание, так как на этом участке ускорение поршня уже мало и уменьшать его нет необходимости.

На рис. 208 показано графоаналитическое определение условий наилучшего приближения функций $f_T(x)$ и $f_H(x)$. С этой целью строим график $f_H(x)$ и проводим прямую линию $f_T(x)$ так, чтобы

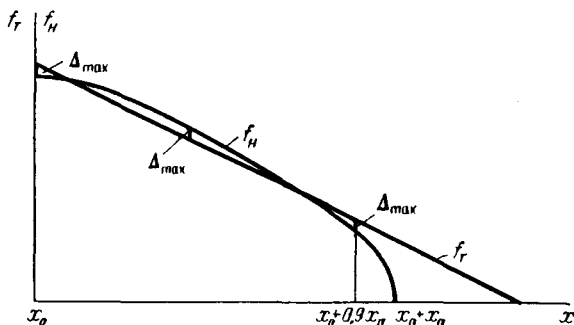


Рис. 208

отклонения $\Delta = f_T - f_H$ были бы равны по модулю на границах рассматриваемого участка и в точке максимального отклонения внутри участка $\Delta_{\max}$. Отрезок, отсекаемый прямой линией $f_T(x)$ на оси ординат, дает коэффициент k_0 , а отрезок по оси абсцисс — отношение коэффициентов k_0/k_1 . Задаваясь величиной u_{xz} , находим длину канавки

$$s = k_0 / (k_1 u_{xz}). \quad (33.7)$$

Число канавок принимаем равным от 2 до 4, а их ширину и угол β выбираем из условия

$$b \sin \beta = \frac{k_0}{ns} \quad (33.8)$$

так, чтобы максимальная глубина канавки (на торце золотника), равная $s \tan \beta$, не превышала 3 мм.

При других конструкциях золотника тормозного устройства площадь f_T может быть нелинейной функцией x или t . Тогда применяют квадратическое приближение функций f_T и f_H , вычисляя искомые параметры синтеза из условий минимума среднеквадратического отклонения.

После определения размеров золотника интегрируют уравнение движения (13.18) одним из численных методов и находят максимальную величину давления p_2 в сливной полости гидроцилиндра. Если это давление оказывается слишком большим, следует уменьшить модуль постоянного ускорения или увеличить перемещение x_n .

§ 108. Синтез тормозного устройства по методу квадратического приближения

В предыдущем параграфе задача синтеза тормозного устройства решалась на основании уравнения движения (13.18), в котором все параметры механизма выражались через размерные величины. Для составления расчетных формул и справочных карт удобнее пользоваться безразмерной формой уравнения движения с тем, чтобы все полученные соотношения относились не к одному гидроприводу, а к семейству гидроприводов с одинаковыми значениями безразмерных коэффициентов.

При торможении по времени безразмерное уравнение (13.37) имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\eta} \left(1 - 2\eta - \kappa_1 u - \kappa_2 u^2 - \frac{u^2}{\theta^2} \right),$$

где $u = vt_n/x_n$ — безразмерная скорость, $\tau = t/t_n$ — безразмерное время.

Безразмерные постоянные параметры механизма:

$$\eta = \frac{ma_n}{2S_1 p_0}, \quad \kappa_1 = A \frac{v_y}{2p_0}, \quad \kappa_2 = B \frac{v_y^2}{4p_0},$$

$$\text{где } p_c = p_0 - \frac{F_\tau}{S_1} - \frac{ma_n}{S_1}.$$

Безразмерная площадь проходного сечения в тормозном устройстве:

$$\theta_\tau = \frac{f_\tau}{f_y}, \quad \text{где } f_y = \sqrt{\frac{(S_1 - S_m) B_\tau}{S_1 p_c}} \frac{y_y}{2}.$$

При заданном законе торможения, т. е. при заданных u и $du/d\tau$, из уравнения (13.37) можно найти требуемый закон изменения площади проходного сечения в тормозном устройстве

$$\theta = \frac{u}{\sqrt{1 - 2\eta - \kappa_1 u - \kappa_2 u^2 - \eta \frac{du}{d\tau}}}. \quad (33.9)$$

В тех случаях, когда конструктивно нельзя выполнить тормозное устройство с таким изменением проходного сечения, будем искать размеры тормозного устройства простой формы, при которых отклонение полученной площади θ , от требуемой θ было бы мало

на участке торможения ($0 < \tau < 1$). Величину этого отклонения будем оценивать среднеквадратической разностью

$$\Delta_{\text{кв}} = \sqrt{\int_0^1 (\theta - \theta_\tau)^2 d\tau}. \quad (33.10)$$

Требуемая безразмерная площадь θ зависит от принятого закона торможения, а безразмерная площадь θ_τ зависит от конструкции рабочих элементов.

Во всех случаях площадь проходного сечения f_τ , а следовательно и θ_τ , изменяется с изменением координаты z , определяющей положение подвижной части тормозного устройства. Переменной z может быть функцией времени t или перемещения x .

Пусть, например, торможение происходит по времени, а подвижная часть тормозного устройства выполнена в виде цилиндрического золотника диаметром d при длине щели l . Тогда площадь проходного сечения

$$f_\tau = \pi d(l - z).$$

Перемещение золотника при постоянной его скорости v_z : $z = v_z t_n \tau$. Учитывая, что $\theta_\tau = f_\tau / f_y$, получаем

$$\theta_\tau = L_0 - L_1 \tau, \quad (33.11)$$

где

$$L_0 = \pi d l / f_y \quad \text{и} \quad L_1 = \pi d v_z t_n / f_y. \quad (33.12)$$

Интеграл I , входящий в подкоренное выражение среднеквадратической разности, принимает вид

$$I = \int_0^1 (\theta - L_0 + L_1 \tau)^2 d\tau.$$

Этот интеграл, а следовательно, и среднеквадратическая разность будут минимальными при выполнении условий

$$\frac{\partial I}{\partial L_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial L_1} = 0.$$

После дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\theta - L_0 + L_1 \tau) d\tau &= 0, \\ \int_0^1 (\theta - L_0 + L_1 \tau) \tau d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (33.13)$$

Введем обозначения:

$$\chi_0 = \int_0^1 \theta d\tau, \quad \chi_1 = \int_0^1 \theta \tau d\tau. \quad (33.14)$$

Тогда система уравнений (33.13) принимает вид

$$\chi_0 - L_0 + \frac{L_1}{2} = 0,$$

$$\chi_1 - \frac{L_0}{2} + \frac{L_1}{3} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} L_0 &= 4\chi_0 - 6\chi_1, \\ L_1 &= 6\chi_0 - 12\chi_1. \end{aligned} \quad (33.15)$$

Вид интегралов χ_0 и χ_1 зависит от заданного закона торможения. Обычно принимают закон постоянного ускорения, так как при этом законе получается минимальная величина ускорения для одного и того же пути торможения. На участке торможения от $v = v_y$ до $v = 0$ закон постоянного ускорения имеет вид

$$v = v_y - a_n t$$

или в безразмерных величинах

$$u = 2 - 2\tau.$$

Требуемый закон изменения площади θ при этом законе находится по формуле (33.9):

$$\theta = \frac{2(1-\tau)}{\sqrt{1-2\kappa_1(1-\tau)-4\kappa_2(1-\tau)^2}}.$$

Следовательно, интегралы χ_0 и χ_1 имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 2 \int_0^1 \frac{(1-\tau) d\tau}{\sqrt{1-2\kappa_1(1-\tau)-4\kappa_2(1-\tau)^2}}, \\ \chi_1 &= 2 \int_0^1 \frac{(1-\tau) \tau d\tau}{\sqrt{1-2\kappa_1(1-\tau)-4\kappa_2(1-\tau)^2}}. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов *) находим коэффициенты L_0 и L_1 по формулам (33.15). Искомые размеры рабочих элементов золотника находятся из соотношений (33.12):

$$d = \frac{L_1 f_y}{\pi v_3 t_{\Pi}}, \quad l = \frac{L_0}{L_1} v_3 t_{\Pi}.$$

Невычисляемые параметры (t_{Π} , v_y , v_3) можно выбирать в некоторых пределах и соответственно находить те значения размеров d и l , которые дают более конструктивное решение.

*) Таблицы интегралов χ_0 и χ_1 см.: Левитский Н. И., Цуханова Е. А. Расчет управляющих устройств для торможения гидроприводов.— М.: Машиностроение, 1971.— С. 222—225.

Аналогично решается задача синтеза тормозного устройства, если торможение выполняется по пути, т. е. $z = u_{ix}x$, где $u_{ix} = dz/dx$.

Рассмотренная задача синтеза гидравлических механизмов является примером, показывающим, что для этих механизмов применимы общие методы динамического анализа и синтеза, которые были ранее предложены для механизмов, составленных только из твердых тел.

Для пневматических механизмов эти методы также применимы, но дополнительно к уравнениям, описывающим движение твердого тела — например, поршня, присоединяются уравнения, связывающие параметры газа (уравнения термодинамики).

Процесс слежения можно представить себе следующим образом. Если щуп и фреза занимают одинаковые положения по отношению к копиру и заготовке, то шток занимает среднее положение, перекрывая оба трубопровода, ведущие к гидроцилиндру. При движении штока золотника из среднего положения вверх жидкость под давлением поступает в верхнюю полость гидроцилиндра, и его корпус вместе со столом 6 и фрезой 4 также перемещается вверх, так как поршень гидроцилиндра жестко соединен с ползуном 1. Движение корпуса гидроцилиндра относительно поршня и, следовательно, движение стола 6 относительно штока золотника продолжаютсЯ до тех пор, пока шток золотника не займет опять среднее положение. Если по инерции среднее положение будет пройдено, то жидкость под давлением поступит в нижнюю полость гидроцилиндра и начнется обратное движение к среднему положению.

Движение корпуса гидроцилиндра прекращается, когда шток золотника вновь займет среднее положение.

Из приведенного описания процесса слежения видно, что движение инструмента 4 всегда отстает от движения щупа 2 и, кроме того, возможно возникновение колебаний при переходе через среднее положение. Эти погрешности движения инструмента могут быть сведены к минимуму путем надлежащего выбора параметров гидроцилиндра и золотника на основании общих методов динамического синтеза механизмов. По сравнению со способом непосредственного копирования применение следящего привода имеет то достоинство, что на копир передается лишь небольшое давление пружины золотника, а усилие резания, иногда очень значительное, передается через гидроцилиндр непосредственно на стойку.

Числовое программное управление (ЧПУ). В машинах-автоматах с управлением от копиров переход на другую программу связан, как правило, с изготовлением новых копиров, что требует больших затрат времени и материальных средств. Значительно проще перенастраиваются на другую программу машины-автоматы с числовым программным управлением, при котором информация о величине требуемых перемещений исполнительных органов сообщается системе управления в виде чисел, называемых *информационными числами*. Если требуемое перемещение равно s , то информационное число (число шагов) z , должно быть ближайшим целым числом к отношению

$$z = \frac{s}{\Delta s}, \quad (34.1)$$

где Δs — единичное перемещение (шаг), выбираемое в зависимости от требуемой точности перемещений.

На рис. 210, а показана структурная схема числового программного управления перемещениями одного исполнительного органа. Основная особенность этого управления состоит в регулируемом приводе (двигателе), который должен обеспечивать перемещение исполнительного органа на требуемую величину. Наиболее часто

применяется шаговый электродвигатель, в котором при каждом включении цепи питания (импульсе) ротор поворачивается на определенный, точно фиксированный угол. Для того чтобы получить требуемое перемещение исполнительного органа, надо послать в цепь питания двигателя такое число импульсов, которое соответствует требуемому информационному числу. Эти импульсы посылаются через блок управления от программы, содержащей также команды начала и конца движения, прямого и обратного хода и другие вспомогательные команды.

Пусть, например, требуется обработать плоский кулачок на станке с числовым программным управлением (рис. 210, б). В этом

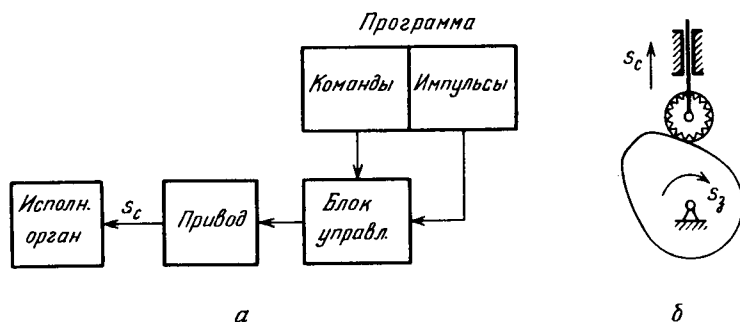


Рис. 210

случае постоянная задающая подача s_z сообщается непосредственно заготовке, а следящая подача s_c от шагового двигателя — режущему инструменту. Требуемая величина следящей подачи рассчитывается по чертежу кулачка для опорных точек, т. е. точек, соответствующих равным промежуткам времени перемещения заготовки. Для каждой полученной величины следящей подачи определяется по формуле (34.1) информационное число (число импульсов), которое фиксируется в программе. Серии импульсов, соответствующие каждой опорной точке, посылаются через равные промежутки времени шаговому двигателю и обеспечивают требуемую величину следящей подачи.

Двоичный код в системах числового программного управления. Для фиксации программы, выраженной в числах, используются различные программноносители: магнитные ленты, киноленты, перфокарты, перфоленты, панели управления с переключателями. Принцип изображения чисел на этих программноносителях поясним на примере использования перфолент, т. е. лент, на которых в определенных местах прокалываются отверстия. На рис. 211, а показана перфолента, которая имеет пять дорожек (столбцов). Места возможных проколов обозначены крестиками, проколотые отверстия — кружками. Для фиксации числа в десятичной системе счисления (десятичном коде) нужен участок перфоленты, состоящий из

10 строк. Каждая из строк соответствует одной из цифр от 0 до 9. На первой (правой) дорожке изображаются единицы, на второй — десятки, на третьей — сотни и т. д. Например, на рис. 211, а показано число 1193.

Более экономно используется перфолента при двоичном коде, т. е. при изображении чисел в двоичной системе счисления. Эта система основывается на том, что любое число можно представить как сумму чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Например, для того чтобы представить число 1193 в двоичной системе, последовательно отнимаем наибольшее число, являющееся степенью числа 2:

$$\begin{array}{r}
 1193 \\
 - 1024 = 2^{10} \\
 \hline
 169 \\
 - 128 = 2^7 \\
 \hline
 41 \\
 - 32 = 2^5 \\
 \hline
 9 \\
 - 8 = 2^3 \\
 \hline
 1 = 2^0
 \end{array}$$

Следовательно, $1193 = 2^{10} + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^0$.

Если в сумме, изображающей данное число, есть показатель степени n , то в разряде с номером $n+1$ ставится 1, если нет — ставится 0. Для числа 1193 единицы должны стоять в разрядах 11, 8, 6, 4, 1, а в остальных должны быть нули, т. е. в двоичной системе это число имеет вид: 10010101001.

На рис. 211, б показано изображение числа 1193 на перфоленте в двоичном коде. Оно заняло участок перфоленты с 12 точками, в то время как для изображения в десятичном коде потребовался бы участок с 40 точками. Иногда применяется двоично-десятичный код, при котором каждая цифра числа, представленного в десятичной системе, записывается в двоичной системе на отдельной строчке (рис. 211, в).

Для считывания числа с перфоленты применяются как контактные, так и бесконтактные способы. При контактных способах щупы или щетки западают в отверстия и замыкают соответствующие кон-

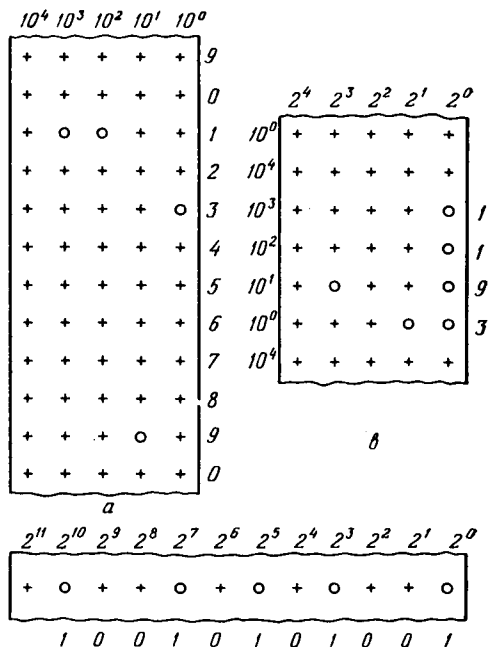


Рис. 211

такты. При бесконтактных способах используются фотосопротивления или пневматические датчики.

Самонастраивающаяся система управления. При составлении программы, по которой действует система управления машины-автомата, нельзя учесть полностью все многочисленные требования, определяющие оптимальные условия выполнения технологического процесса. Кроме того, эти условия изменяются с течением времени вследствие износа режущего инструмента, изменения свойств обрабатываемого материала и т. п. Поэтому с целью повышения производительности машины-автомата и достижения большей точности выполнения заданных условий в последнее время стали создавать системы управления, в которых программа корректируется с учетом результатов выполнения технологического процесса. Эти системы получили название *самонастраивающихся*.

Схема самонастраивающейся системы числового программного управления аналогична указанной на рис. 210 с тем отличием, что добавляется блок сравнения, в котором сигналы, характеризующие выполнение технологического процесса, сравниваются с сигналами программы, и на основании этого сравнения даются сигналы, вызывающие необходимую коррекцию программы.

Самонастраивающаяся система управления может учитывать не только текущую информацию, но и прошлый опыт. В этом случае добавляется блок оперативной памяти, в котором накапливаются сведения об управляемом технологическом процессе, и коррекция программы производится на основании обобщения опыта работы машины-автомата. Самонастраивающиеся системы с оперативной памятью называют иногда *адаптивными системами*.

§ 110. Системы управления по времени и по пути

Системы управления по времени. Управление несколькими исполнительными органами в машинах-автоматах должно обеспечивать согласованность их перемещений. Система управления машины-автомата, обеспечивающая требуемую согласованность перемещений исполнительных органов в зависимости от времени, называется *системой управления по времени*.

Программа для системы управления по времени задается в виде *циклограммы*. Циклограммой машины-автомата называется схема согласованности перемещений исполнительных органов в зависимости от времени.

На рис. 212 показана циклограмма, определяющая согласованность перемещений трех исполнительных органов, приводимых в движение от механизмов *М1*, *М2* и *М3*. Циклограмма указывает только согласованность (последовательность) перемещений исполнительных органов во времени, которая определяется началом и концом движения каждого исполнительного органа. Поэтому законы движения исполнительных органов не оговариваются, и графи-

ки их перемещений условно очерчиваются наклонными прямыми. Иногда на циклограмме вообще не показывают графики перемещений, а только записывают названия отдельных операций и этапов движения (подача заготовки, выстой и т. д.).

Циклограмма показывается в пределах одного цикла машины-автомата, т. е. промежутка времени T , по истечении которого повторяется последовательность перемещений всех исполнительных органов. На циклограмме указывают также углы поворота φ одного из

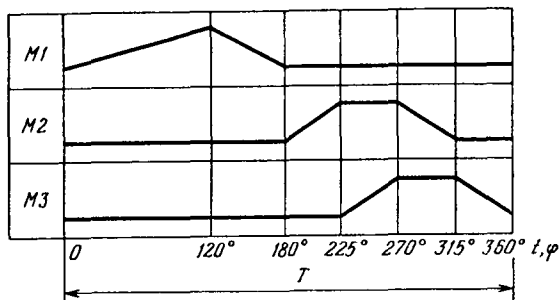


Рис. 212

равномерно вращающихся звеньев, например, кулачкового вала механизма, предназначенного для выполнения основной операции. Для циклограммы, показанной на рис. 212, цикл T соответствует одному обороту этого звена.

В качестве примера машины-автомата, механизмы которого имеют циклограмму, показанную на рис. 212, можно указать на специализированный автомат для сверления отверстий в детали. Механизм $M1$ выполняет основную операцию (сверление), причем время рабочего хода больше времени холостого хода. Механизм $M2$ разжимает крепления обработанной детали, которая затем снимается механизмом $M3$ с одновременной подачей новой детали. После ее зажима механизмом $M2$ происходит возврат механизма $M3$ в исходную позицию, и начинается новый цикл.

Кулачковый распределительный вал. Углы установки кулачков. Управление по времени наиболее просто достигается кулачковыми механизмами с одним общим валом для всех кулачков, который называется *кулачковым распределительным валом*. Для получения согласованной работы всех выходных звеньев достаточно для каждого кулачка определить *угол его установки*, т. е. угол между начальными прямыми на рассматриваемом кулачке и на кулачке, принятом за базовый. За начальную прямую на кулачке принимают положение начального радиуса-вектора профиля кулачка в момент начала подъема выходного звена.

На рис. 213 показано положение звеньев базового кулачково-коромыслового механизма в момент начала подъема коромысла. На-

чальный радиус-вектор центрального профиля базового кулачка R_0 , длина коромысла l и межосевое расстояние l_0 известны. Требуется определить угол установки кулачка с номером n , который в соответствии с циклограммой должен привести в движение взаимодействующее с ним коромысло после поворота базового кулачка на угол φ_n .

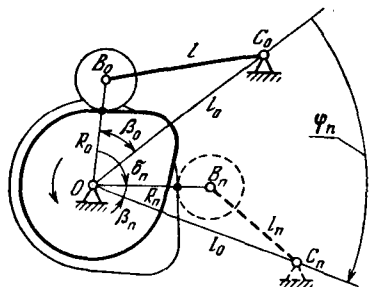


Рис. 213

Примем, что межосевое расстояние l_0 является общим для всех механизмов, но начальный радиус R_n и длина коромысла l могут быть разными. Для графического определения угла установки примем метод обращения движения, т. е. отложим от линии OC_0 заданный угол φ_n в сторону, противоположную вращению кулачка, и построим треугольник OB_nC_n по известным сто-

ронам l_0 , l_n и R_n . Угол между полученной линией OB_n и линией OB_0 даст искомый угол установки δ_n .

Аналитическое решение поставленной задачи находится из условия

$$\delta_n = \varphi_n + \beta_0 - \beta_n.$$

Углы β_0 и β_n , входящие в это условие, вычисляются из соотношений:

$$\beta_0 = \arccos \frac{l_0^2 + R_0^2 - l^2}{2l_0R_0}, \quad \beta_n = \arccos \frac{l_0^2 + R_n^2 - l_n^2}{2l_0R_n}.$$

В кулачковых механизмах с центральным толкателем углы установки кулачков всегда совпадают с углами, определяемыми по циклограмме.

Уплотнение циклограммы. По циклограмме, показанной на рис. 212, каждый исполнительный орган начинает движение только после остановки предыдущего. Однако это условие не всегда является обязательным. Пусть, например, по условиям работы машины исполнительный орган механизма $M2$ может начать движение в момент, когда исполнительный орган механизма $M1$ еще не дошел до исходной позиции и его положение характеризуется величиной s_u (рис. 214). Тогда графически перемещений исполнительных органов можно сблизить на величину t_u , которая находится графически или аналитически по заданному закону движения исполни-

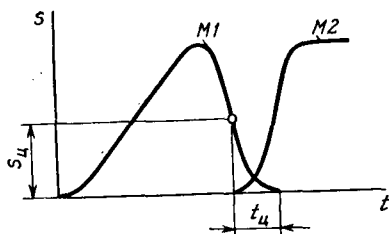
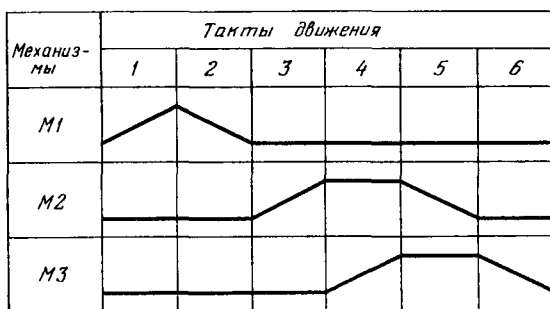


Рис. 214

тельного органа механизма *М1*. Выполняя подобные построения или вычисления для всех соседних механизмов, можно уплотнить циклограмму, т. е. уменьшить время цикла *T*.

Кулачковый командоаппарат. При управлении с помощью кулачкового распределительного вала исполнительные органы приводятся в движение непосредственно от кулачков, т. е. система управления совмещена с механизмами передачи движения к исполнительным органам. Если надо уменьшить нагрузки на кулачки, то каждый исполнительный орган получает индивидуальный электро- или гидропривод, а система управления выделяется в отдельное



а



б

Рис. 215

устройство, называемое *кулачковым командоаппаратом*. При управлении по времени кулачковый командоаппарат состоит из равномерно вращающегося вала с регулируемыми кулачками, которые через определенные промежутки времени нажимают на переключатели, вызывающие включение того или иного привода.

Система управления с записью и автоматическим воспроизведением программы. Применение равномерно движущегося программно-носителя в виде магнитной ленты позволяет записывать программу обработки изделия при ручном управлении и затем многократно

воспроизводить ее в автоматическом режиме. Принцип записи и воспроизведения аналогичен принципу, применяемому в магнитофонах.

Система управления по пути. В машинах-автоматах системой управления по пути называется система управления, обеспечивающая требуемую согласованность перемещений исполнительных органов в зависимости от их положений. Программа для системы управления по пути задается обычно в виде тактограммы (рис. 215). *Тактограммой машины-автомата* называется схема согласованности перемещений исполнительных органов в зависимости от их положений. На тактограмме весь цикл движения разделен на отдельные такты движения. *Тактом движения* называется промежуток времени, в течение которого не меняется состояние (наличие или отсутствие движения) ни одного из исполнительных органов. В отличие от циклограммы на тактограмме не указывается время такта (или угол поворота равномерно вращающегося вала). Это время для одного и того же такта может быть различным в зависимости от условий выполнения технологического процесса.

Исполнительные органы при управлении по пути могут работать последовательно (рис. 215, а) и параллельно-последовательно (рис. 215, б). При параллельно-последовательной работе есть такты движения (например, такт 3 на рис. 215, б), когда одновременно движутся несколько исполнительных органов.

ГЛАВА 35

ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МАШИН-АВТОМАТОВ

§ 111. Логические элементы машин-автоматов

При *управлении по пути* условия движения (или отсутствия движения) исполнительных органов могут быть представлены логическими высказываниями. Например, для тактограммы, показанной на рис. 215, а, можно написать условия: исполнительный орган механизма *М1* не движется, если движется исполнительный орган механизма *М2* или *М3*; исполнительный орган механизма *М1* движется, если не движутся исполнительные органы механизмов *М2* и *М3*. Следовательно, для того чтобы исполнительные органы перемещались в определенной последовательности по заданной тактограмме, надо иметь устройства для выполнения логических действий, которые могут быть описаны с применением слов НЕ, ИЛИ, И. Эти действия в машинах называют *логическими операциями*, а устройства для их выполнения — *логическими элементами* (иногда логическими операторами).

Логический элемент, состоящий только из твердых тел, называется *логическим механизмом*. В машинах-автоматах, кроме логических механизмов, имеют также распространение *электрические*

(электромагнитные) *логические элементы*, в которых логические операции выполняются с использованием электрического тока, и *пневматические* — с использованием сжатого воздуха. Совокупность логических элементов образует систему управления, которую называют *логической* (иногда — *релейной*). Связь между системой управления и исполнительными органами устанавливается посредством сигналов.

В машинах-автоматах *сигналом* называется определенное значение физической величины, которое дает информацию о положении какого-либо исполнительного органа (*входной сигнал*) или о требуемом изменении его положения (*выходной сигнал*). В большинстве машин-автоматов достаточно иметь информацию о двух положениях исполнительного органа (начало и конец движения). Соответственно каждый сигнал имеет лишь два значения. Одно из этих значений равно 0, а другое 1. В логических механизмах 0 обозначает одно из устойчивых положений звена, а 1 — другое положение. В электрических логических элементах 0 означает «нет тока», а 1 — «есть ток»; в пневматических — 0 означает «нет давления», а 1 — «есть давление».

Каждый логический элемент имеет обычно один или несколько входов, на которые поступают входные сигналы (аргументы) x_n , и только один выход, который дает выходной сигнал (функцию) f . Переменные, которые могут принимать только два значения (0 и 1), называются *двоичными* или *булевыми* (по имени английского ученого Буля), а их функции — *двоичными* или *логическими* функциями. Поэтому логическая операция, выполняемая каким-либо логическим элементом, всегда может быть представлена в алгебраической форме как двоичная функция f двоичных аргументов x_n .

Логические элементы отрицания и повторения. *Логическая операция НЕ* называется также *операцией отрицания* (иногда — *инверсией*). В алгебраической форме она может быть представлена выражением

$$f = \bar{x}, \quad (35.1)$$

которое читается: f есть не x .

При операции отрицания, если $x = 0$, то $f = 1$; если $x = 1$, то $f = 0$ (функция отрицает аргумент).

На рис. 216, а показан простейший логический механизм для операции отрицания, в котором вращающееся входное звено x может занимать одно из двух устойчивых положений: 0 или 1. Выходное звено f при $x = 0$ заперто в положении $f = 1$, а при $x = 1$ передвигается в положение $f = 0$. Фиксация звеньев в указанных положениях и возврат их в исходные положения достигается с помощью комбинаций пружин и упоров. Иногда используются и более сложные механизмы, например механизм шарнирного четырехзвенника.

Электрические логические элементы разделяются на две группы. В первой группе состояние входа (входной сигнал) характеризуется,

$$f = \bar{x}$$

f	x
1	0
0	1

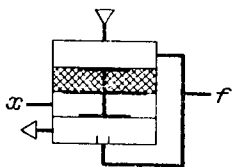
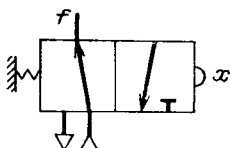
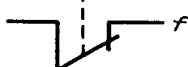
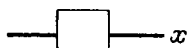
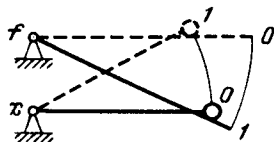


Рис. 216

Во второй группе состояния как входа, так и выхода характеризуются наличием или отсутствием тока. К первой группе принадлежит электрический выключатель с размыкающим контактом (рис. 216, б), подвижная часть которого перемещается обычно нажатием кулачка (упора). При не нажатом выключателе ($x=0$) электрическая цепь замкнута ($f=1$). Такой выключатель иногда называют также нормально замкнутым. Ко второй группе принадлежит электрическое реле*) с размыкающим контактом (рис. 216, в), подвижная часть которого перемещается якорем электромагнита.

*) Реле (от французского слова relais — подставка, «сменные лошади») — аппарат, реагирующий на изменение какого-либо параметра системы и воздействующий на исполнительное устройство. Название «релейная система управления» исходит из представления системы управления по пути как эстафеты, в которой исполнительные органы играют роль «сменных лошадей».

в другой позиции ($x=1$), надо мысленно передвинуть правый квадрат на место левого, оставляя линии связи в прежнем положении. Тогда выход будет соединен с атмосферой ($f=0$). Распределитель (выключатель) может быть использован не только как пневматический, но и как гидравлический логический элемент. Но в дальнейшем показываются только пневматические элементы, как более распространенные.

Примером логического пневматического элемента второй группы может служить *мембранное реле универсальной системы элементов промышленной пневмоавтоматики* (сокращенно УСЭППА). Это реле (рис. 216, *б*) имеет четыре разобщенные камеры, одна из которых (отмечена штриховкой) находится под давлением местного источника сжатого воздуха, которое меньше давления в напорной линии. Подвижная часть реле выполнена в виде штока, жестко соединенного с тремя мембранами, причем средняя мембрана имеет больший диаметр. Мембраны прогибаются в ту или иную сторону в зависимости от распределения давлений в камерах реле, и подвижной шток, перемещаясь, закрывает или верхний канал, или нижний.

Для выполнения операций отрицания вход, выход, напорная линия и атмосфера соединяются с реле, как указано на рис. 216, *б*. Если $x=0$ (нет давления в полости, соединенной со входом), то шток идет вниз под давлением местного источника, закрывая канал, сообщающийся с атмосферой, и на выходе появляется давление ($f=1$). Если $x=1$, т. е. в полости, соединенной с входом, есть давление, то шток идет вверх под действием этого давления, закрывая канал, соединенный с напорной линией, и выход сообщается с атмосферой ($f=0$).

Все логические элементы отрицания могут быть приспособлены для выполнения *логической операции повторения*, которая называется также *операцией ДА*. В алгебранческой форме операция повторения может быть представлена выражением

$$f = x, \quad (35.2)$$

т. е. если $x=0$, то и $f=0$; если $x=1$, то и $f=1$ (функция повторяет аргумент).

Логический механизм для операции повторения (рис. 217, *а*) тот же, что и для операции отрицания, только надо поменять местами обозначения положений выходного звена. Тогда при $x=0$ будет $f=0$ и при $x=1$ будет $f=1$.

Электрический выключатель должен иметь *замыкающий контакт* (рис. 217, *б*). Если он не нажат ($x=0$), то цепь разомкнута ($f=0$). Такой выключатель называют *нормально разомкнутым*. Электрическое реле также имеет *замыкающий контакт* (рис. 217, *в*). При отсутствии тока в обмотке электромагнита ($x=0$) цепь разомкнута ($f=0$); при наличии тока ($x=1$) цепь замыкается ($f=1$).

Пневматический выключатель (рис. 217, з) для операции повторения в непажатом состоянии ($x=0$) имеет выход, соединенный с атмосферой ($f=0$). При нажатии на подвижную часть выключа-

$$f=x$$

f	x
0	0
1	1

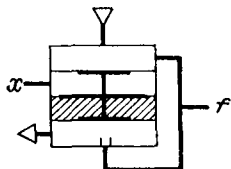
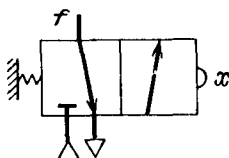
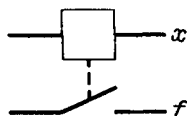
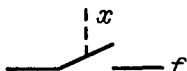
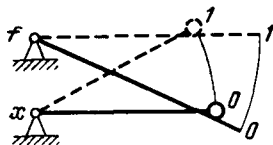


Рис. 217

теля ($x=1$) выход соединяется с напорной линией ($f=1$). В мембранном реле УСЭППА (рис. 217, д) при $x=0$ шток идет вверх под действием давления местного источника, закрывая доступ воздуха к выходу ($f=0$). При $x=1$ шток идет вниз, открывая канал, соединяющий выход с напорной линией ($f=1$).

Логические элементы сложения и умножения. Логическая операция ИЛИ называется также операцией сложения*), так как в алгебраической форме она может быть представлена выражением

$$f = x_1 + x_2. \quad (35.3)$$

В зависимости от состояния входов x_1 и x_2 могут быть четыре комбинации, показанные в таблице на рис. 218. Эти комбинации могут быть выполнены логическим механизмом с двумя входами (рис. 218, а), параллельным соединением электрических контактов (рис. 218, б) и мембранным реле УСЭППА при включении его по схеме, показанной на рис. 218, в.

Логическая операция И называется также операцией умножения**), так как в алгебраической форме она может быть представлена выражением

$$f = x_1 x_2. \quad (35.4)$$

В зависимости от состояния входов x_1 и x_2 могут быть четыре комбинации, показанные в таблице на рис. 219. Эти комбинации могут быть выполнены логическим механизмом с двумя входами (рис. 219, а), последовательным соединением электрических контактов

*) Операцию сложения называют иногда дизъюнкцией и обозначают символом $\vee$.

**) Операцию умножения называют иногда конъюнкцией и обозначают символом $\wedge$.

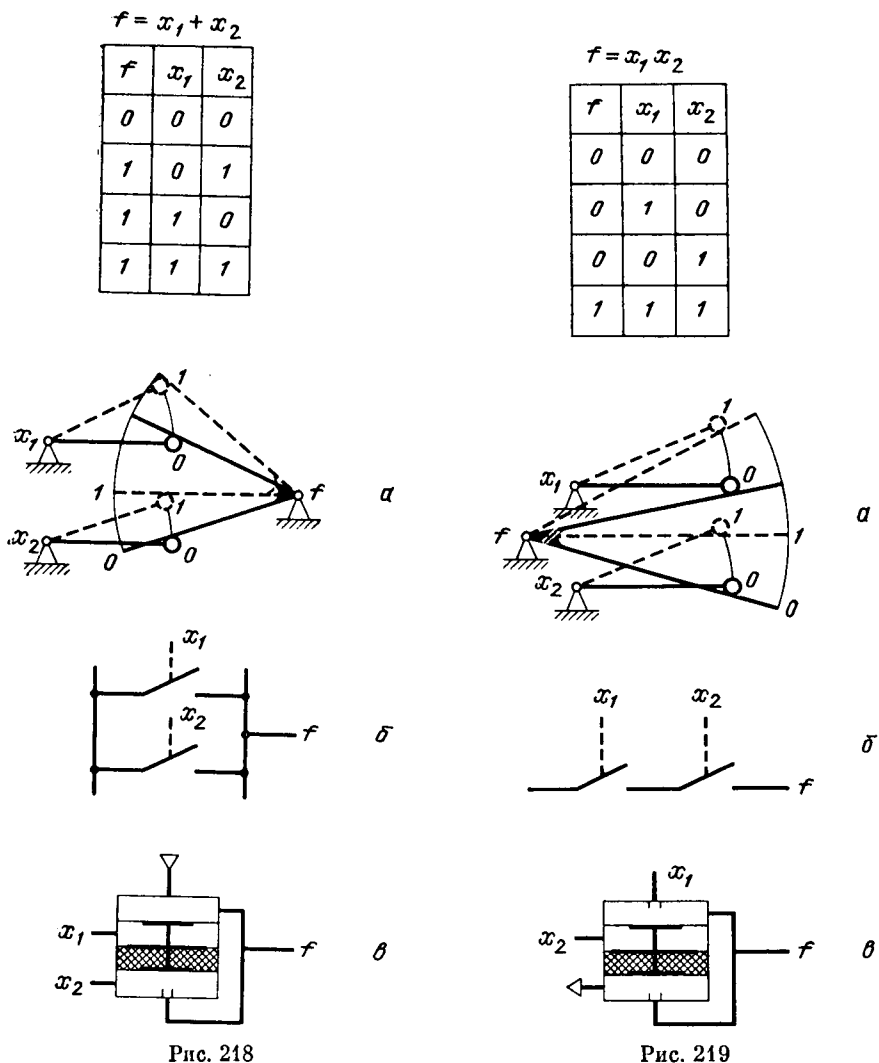


Рис. 218

Рис. 219

(рис. 219, б) и мембранным реле УСЭППА при включении его по схеме, указанной на рис. 219, в.

§ 112. Основные законы алгебры логики

Как уже указывалось, действие системы управления может быть описано логическими высказываниями. В свою очередь каждое логическое высказывание может быть представлено одной или несколькими логическими операциями, которые в алгебраической

форме выражаются двоичными функциями. Поэтому для синтеза логических систем управления надо знать основные законы *алгебры двоичных функций* или, что то же, *алгебры логики*.

Отметим те законы, которые совпадают с законами обычной алгебры.

Переместительный закон:

$$x_1 x_2 = x_2 x_1, \quad x_1 + x_2 = x_2 + x_1. \quad (35.5)$$

Сочетательный закон:

$$\begin{aligned} (x_1 x_2) x_3 &= x_1 (x_2 x_3), \\ (x_1 + x_2) + x_3 &= x_1 + (x_2 + x_3). \end{aligned} \quad (35.6)$$

Распределительный закон:

$$x_1 (x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3. \quad (35.7)$$

Кроме этих обычных законов, алгебра логики имеет свои специфические законы, из которых отметим *законы повторения*:

$$\begin{aligned} x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x &= x, \\ x + x + x + \dots + x &= x. \end{aligned} \quad (35.8)$$

Этот закон следует из того, что x может принимать только два значения (0 или 1), и повторение этих значений не дает нового значения.

Из приведенных законов алгебры логики следуют соотношения, которыми часто пользуются при преобразовании двоичных функций:

$$\begin{aligned} x + 0 &= x, & x \cdot 0 &= 0, \\ x + 1 &= 1, & x \cdot \bar{x} &= 0, \\ x \cdot 1 &= x, & x + \bar{x} &= 1. \end{aligned} \quad (35.9)$$

Табличный способ задания двоичных функций. Двоичные функции можно задавать или в алгебраической форме, или в табличной форме. Пусть, например, в алгебраической форме заданы следующие функции трех аргументов:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3, \quad f_2 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3, \quad f_3 = x_1 (x_2 + x_3), \quad f_4 = x_1 (x_2 + \bar{x}_3).$$

Табличное задание этих функций основано на том, что при трех двоичных аргументах имеется лишь 8 различных наборов их значений. В табл. 10 указаны эти наборы и приведены соответствующие значения рассматриваемых функций. Если известно алгебраическое выражение какой-либо функции, то представить ее в табличной форме не представляет особого труда. Сложнее найти алгебраическое выражение функции по ее табличной форме. В общем случае, как будет показано далее, одна и та же табличная форма функции может быть представлена различными алгебраическими выражениями.

В системах управления машин-автоматов значения аргументов представляют собой входные сигналы, а значения функций — выходные сигналы. Каждому набору входных сигналов соответствует определенное состояние системы управления. Поэтому эти наборы

Таблица 10

Аргументы (входные сигналы)	Наборы аргументов (состояния)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	1	1	0	0	1	1	0	0
x_2	1	0	1	0	1	0	1	0
x_3	1	1	1	1	0	0	0	0
Функции (выходные сигналы)	Значения функций							
f_1	1	0	0	0	0	0	0	0
f_2	0	0	0	0	0	0	1	0
f_3	1	1	0	0	1	0	0	0
f_4	1	0	0	0	1	1	0	0

называют *состояниями*, а таблицу задания выходных сигналов, как функций входных сигналов, — *таблицей состояний*.

Рабочие, запрещенные и безразличные наборы значений двоичных аргументов. Рабочим набором значений двоичных аргументов (рабочим состоянием) для данной функции f называется такой набор, при котором значение функции обязательно должно быть равно единице ($f = 1$).

В системах управления рабочее состояние есть та комбинация входных сигналов, при которой должен появиться сигнал на данном выходе. Запрещенным набором значений двоичных аргументов (запрещенным состоянием) для данной функции f называется такой набор, при котором значение функции обязательно должно быть равно нулю ($f = 0$). Все остальные наборы (состояния), кроме рабочих и запрещенных, называются *безразличными*. Появление сигналов от этих наборов не влияет на действие системы управления, т. е. в этих состояниях может быть и $f = 1$, и $f = 0$.

Другими словами, при рабочем состоянии необходимо иметь сигнал к выполнению данного действия, при запрещенном — нельзя иметь этот сигнал, а при безразличном — безразлично, имеется ли этот сигнал или нет. Пусть, например, исполнительный орган совершает подъем и опускание, причем в верхнем положении имеется выстой. Тогда для функции, выражающей сигнал к подъему, запрещенным будет то состояние, при котором должно начаться опускание, так как нельзя одновременно подавать сигналы и к подъему и к опусканию. Безразличным будет то состояние, при котором должен быть верхний выстой, так как в этом состоянии

безразлично, есть ли сигнал к подъему или его нет — исполнительный орган уже находится в верхнем положении.

Упрощение двоичных функций. Разделение всех состояний на рабочие, запрещенные и безразличные позволяет выявить возможные варианты упрощения функций, выражающих значения выходных сигналов, а следовательно, и упрощения всей системы управления.

В системах управления *упрощением двоичной функции f* называется такое преобразование, которое уменьшает количество букв в ее алгебраическом выражении при сохранении значения $f=1$ для рабочих состояний и $f=0$ для запрещенных состояний.

Рассмотрим, например, упрощение функции $f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ из табл. 10, считая запрещенными состояния 5, 6 и 8 (состояние 7 — рабочее, состояния 1, 2, 3 и 4 — безразличные). Упрощение проведем тремя способами.

Способ перебора состоит в последовательном рассмотрении всех возможных вариантов упрощения функций. В табл. 11 представлены варианты упрощения функции за счет исключения одного из

Т а б л и ц а 11

Аргументы (входные сигналы)	Состояния			
	рабочее	запрещенное		
x_1	0	1	1	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	0	0
Варианты функций (выходные сигналы)	Значения функций			
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	1	0	0	0
$x_2 \bar{x}_3$	1	1	0	0
$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	1	0	0	1
$\bar{x}_1 x_2$	1	0	0	0

аргументов и даны ее значения в рабочем и запрещенном состояниях. Из таблицы следует, что условиям упрощения функции удовлетворяет вариант

$$f = \bar{x}_1 x_2,$$

так как эта функция равна единице при рабочем состоянии и нулю при всех запрещенных состояниях. Упрощенную функцию иногда называют *равносильной* по отношению к исходной (упрощаемой). Дальнейшее упрощение с оставлением только одного аргумента невозможно, так как при любом варианте в запрещенных состояниях остается по крайней мере одна единица. Заметим, что

при достаточном навыке и небольшом числе переменных можно не составлять табл. 11, а непосредственно проверять значения упрощенных функций по таблице состояний.

Алгебраические способы основываются обычно на том, что к упрощаемой функции можно прибавлять функции, которые равны нулю в состояниях, запрещенных для упрощаемой функции*). В рабочем состоянии прибавляемая функция может быть равна или единице, или нулю. При этих условиях в запрещенных состояниях функция остается равной нулю ($0 + 0 = 0$), а в рабочем состоянии — равной единице ($1 + 0 = 1$ или $1 + 1 = 1$). Другими словами, нельзя прибавлять только *запрещенные функции*, т. е. функции, которые равны единице в состояниях, запрещенных для упрощаемой функции.

В нашем примере можно прибавить функцию $f = \bar{x}_1 x_2 x_3$, которая равна нулю во всех состояниях, запрещенных для упрощаемой функции. Прибавление этой функции к упрощаемой дает новую функцию

$$f = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \equiv \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 + x_3).$$

По соотношениям (35.9) имеем

$$\bar{x}_3 + x_3 = 1, \quad \bar{x}_1 x_2 \cdot 1 = \bar{x}_1 x_2.$$

Следовательно, новая (упрощенная) функция имеет вид

$$f = \bar{x}_1 x_2.$$

Как видно из указанного примера, для того чтобы получить упрощение, надо прибавлять к упрощаемой функции соседние с ней функции, т. е. функции, которые отличаются только одним аргументом или его инверсией. Требование соседства равносильно требованию наличия общего множителя в обеих функциях.

Для более сложных функций используются не только распределительный закон (35.7) и соотношения (35.9), но и другие законы и формулы алгебры логики. Как и при обычных алгебраических преобразованиях, применение этих законов и формул требует известных навыков. Поэтому неоднократно предлагались различные способы, позволяющие автоматизировать поиск возможных упрощений двоичных функций.

Способ относительных состояний принадлежит к группе способов, позволяющих использовать ЭВМ для поиска упрощений двоичных функций с любым числом переменных.

*) Здесь и далее предполагается, что упрощаемая функция представлена в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ). *Совершенной* называется та форма, в которой каждый член содержит все аргументы. *Нормальной* — та форма, в которой встречаются только операции умножения, сложения и отрицания, причем операция отрицания относится только к отдельным переменным. В дизъюнктивной форме сперва выполняется операция умножения, а затем сложения.

Для упрощения функций по этому способу сперва выписываются все рабочие и запрещенные состояния (табл. 12). Затем все запрещенные состояния сравниваются с рабочими, т. е. находятся *относительные состояния*. Если в какой-либо строке рабочее состояние имеет 0, то эта строка запрещенных состояний переписывается

Таблица 12

Аргументы (входные сигналы)	Состояния					
	рабочее	запрещенные			относительные	
x_1	0	1	1	0	1	1* 0
x_2	1	1	0	0	0	1* 1
x_3	0	0	0	0	0	0* 0

в относительные состояния без изменений, если имеет 1, то значения аргументов изменяются на инверсные.

Все относительные состояния различаются порядками. *Порядком состояния* называется число единиц в столбце. Если каждой единице какого-либо состояния N_i соответствует единица в той же строке состояния N_k более высокого порядка, то говорят, что состояние N_k *покрывает* состояние N_i . Состояния, которые покрывают другие, обозначаются звездочками и из дальнейшего рассмотрения исключаются. Оставшиеся относительные запрещенные состояния называются *минимальными*. Если теперь в какой-либо строке минимальных состояний остались только нули, то соответствующий аргумент может быть исключен. Исключаемый аргумент подчеркивается.

В рассматриваемом примере может быть исключен аргумент $\bar{x}_3$, т. е. упрощенная функция имеет вид

$$f = \bar{x}_1 x_2.$$

При небольшом числе переменных наименьшую трудоемкость дают алгебраические способы. Но с увеличением числа переменных алгебраические методы становятся громоздкими, и более удобным становится табличный способ относительных состояний.

§ 113. Синтез систем управления по пути

Условия реализуемости тактограммы и определение числа элементов памяти. Синтез систем управления по пути состоит в проектировании схемы соединения логических элементов, обеспечивающих выполнение заданной тактограммы. Но предварительно надо проверить ее реализуемость. *Тактограмма считается реализуемой, если наборы входных сигналов в начале каждого такта движения различны.*

Рассмотрим, например, реализуемость тактограммы системы управления тремя механизмами: $M1$, $M2$ и $M3$ (рис. 220). Входные сигналы подаются от выключателей, называемых *конечными* или

путевыми. Каждый механизм имеет два выключателя: один из них нажимается в нижнем (по тактограмме) положении исполнительного органа, другой — в верхнем. На тактограмме показаны значения сигналов x_1 , x_2 и x_3 от выключателей, нажимаемых в нижнем положении (1 — нажат, 0 — не нажат). Значения сигналов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и

Наименование		Сигналы	Такты движения						Вес сигн.
			1	2	3	4	5	6	
Механизмы	M1	x_1	1	0	1	1	1	1	$2^0 = 1$
	M2	x_2	1	1	1	0	0	1	$2^1 = 2$
	M3	x_3	1	1	1	1	0	0	$2^2 = 4$
Память		z	0	1	1	1	1	0	$2^3 = 8$
Вес без памяти			1	6	7	5	1	3	
Вес с памятью			7	14	15	13	9	3	

Рис. 220

$\bar{x}_3$ от выключателей, нажимаемых в верхнем положении, на тактограмме не показываются, так как их всегда можно определить как инверсные по отношению к сигналам x_1 , x_2 и x_3 (когда один из выключателей какого-либо механизма нажат, другой не нажат).

Из тактограммы видно, что в начале тактов 1 и 3 наборы входных сигналов совпадают ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$), т. е. тактограмма не реализуема, так как одна и та же комбинация сигналов должна вызывать различные движения механизмов: в начале первого такта приводится в движение механизм M1, а в начале третьего — механизм M2. Для того чтобы не было совпадающих наборов входных сигналов, т. е. для перевода тактограммы в реализуемую, введем дополнительный сигнал z от устройства, называемого элементом памяти П (сокращенно — памятью). Сигнал $z = 1$ соответствует включенной памяти, сигнал $z = 0$ — выключенной памяти. Включение памяти произведем в начале второго такта движения, а выключение — в начале шестого. Тогда наборы входных сигналов x_1 , x_2 , x_3 и z в начале каждого такта движения оказываются различными, т. е. тактограмма становится реализуемой.

В отсутствии совпадающих наборов входных сигналов можно убедиться также, если рассматривать их как числа, записанные в двоичной системе (читая снизу вверх). Для перевода их в десятич-

ную систему входному сигналу от механизма $M1$ приписываем вес, равный $2^0 = 1$, сигналу от механизма $M2$ — вес $2^1 = 2$, сигналу от механизма $M3$ — вес $2^2 = 4$ и от памяти — вес $2^3 = 8$. Сумма сигналов, умноженных на их веса, дает искомое число в десятичной системе, которое называется весом состояния.

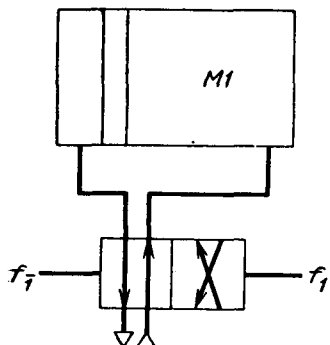


Рис. 221

Подсчет весов состояния без памяти показывает их совпадение в тактах 1 и 3. Веса состояний с памятью во всех тактах различны.

Возможны и другие варианты выбора тактов для включения и выключения памяти. В данном примере можно выключить память также в начале или пятого, или четвертого тактов. В общем случае может потребоваться не один, а несколько элементов памяти.

Указанный способ определения реализуемости тактограммы по сравнению наборов входных сигналов от всех механизмов предполагает, что устройства для пуска механизмов «вперед» и «назад» являются односторонними, т. е. при снятии

сигнала они переключаются в исходное положение под действием пружины (см. рис. 217, а). В системах управления по пути применяются также двусторонние устройства, которые не переключаются при снятии сигнала. Например, на рис. 221 показано двухстороннее пневматическое устройство, в котором перемещение поршня механизма $M1$ «вперед» происходит после поступления сигнала f_i . Обратное перемещение $M1$ «назад» происходит лишь после поступления сигнала f_i^- с противоположной стороны. В системах управления с двухсторонними устройствами реализуемость тактограммы

Т а б л и ц а 13

Сигналы	Такты движения					
	1	2	3	4	5	6
x_1	—	—	1	1	1	1
x_2	1	1	—	0	—	1
x_3	1	1	1	—	0	—
z	0	1	1	1	1	0

выясняется по сравнению наборов входных сигналов без сигналов от того механизма, который приводится в движение в данном такте.

В табл. 13 показаны наборы входных сигналов для тактограммы по рис. 220 при двухсторонних устройствах. Из этой таблицы следует, что сигнал памяти z должен быть различным для тактов 1 и 2.

Таблица включений. *Первый этап синтеза систем управления по пути* состоит в установлении функциональной связи между входными и выходными сигналами в виде таблицы состояний, в которой аргументами являются сигналы от конечных выключателей и элементов памяти, а функциями — сигналы к движению исполнительных органов и к включению и выключению памяти. Таблица состояний системы управления по пути с указанием рабочих, запрещенных и безразличных состояний для каждой функции называется *таблицей включения*, так как по ней устанавливается последовательность включения элементов системы.

При составлении таблицы включений систем управления с элементами памяти необходимо иметь в виду, что сначала изменяется комбинация сигналов от конечных выключателей, а затем включается или выключается элемент памяти. Например, для тактограммы, показанной на рис. 220, в начале второго такта движения сначала появляется набор ($x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, z = 0$), вызывающий включение памяти, а уже затем появляется набор ($x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, z = 1$), вызывающий обратный ход механизма *М1*. Отсюда следует, что число различных наборов входных сигналов (число состояний) в системах управления с памятью больше числа тактов движения. Поэтому будем различать такты движения и логические такты. *Логическим тактом* называется промежуток времени, в течение которого не меняется состояние ни одного из логических элементов, включая и элемент памяти. Логические такты и наборы входных сигналов в этих тактах (состояния) будем обозначать теми же числами, что и такты движения, с прибавлением букв *a* и *b* для тех тактов, в начале которых включается или выключается память.

В нашем примере (см. рис. 220) таблица включений (табл. 14) содержит 8 состояний (логических тактов) при шести тактах движения, так как в начале тактов движения 2 и 6 имеется по два логических такта 2*a* (включение элемента памяти), 2*b* (сигнал к обратному ходу механизма *М1*) и 6*a* (выключение элемента памяти), 6*b* (сигнал к обратному ходу механизма *М3*).

Верхняя часть таблицы включения повторяет входные сигналы, указанные ранее при определении реализуемости тактограммы. Нижняя часть таблицы содержит сигналы на включение f_1 и выключение f_2 элемента памяти, а также выходные сигналы к движению исполнительных органов механизмов *М1*, *М2* и *М3*: «вперед» (по тактограмме — вверх) и «назад». Сигналы «вперед» обозначены через f_1, f_2, f_3 , сигналы «назад» — через f_1', f_2', f_3' . Заполнение этой части таблицы состоит в написании для каждой функции единиц в рабочих состояниях, прочерков — в безразличных и нулей — в запрещенных.

Примем, что все устройства для включения и выключения памяти, а также для пуска механизмов «вперед» и «назад» являются

двухсторонними, т. е. не переключаются при снятии сигнала. Например, после включения памяти (сигнал f_z) она остается включенной до тех пор, пока не поступит сигнал $\bar{f}_z$ на выключение памяти. При этом условии в табл. 14 для каждой выходной функции будет только одно рабочее состояние, при котором эта функция

Таблица 14

Наименование	Сигналы	Состояния (логические такты)							
		1	2a	2б	3	4	5	6a	6б
<i>M1</i>	x_1	1	0	0	1	1	1	1	1
<i>M2</i>	x_2	1	1	1	1	0	0	1	1
<i>M3</i>	x_3	1	1	1	1	1	0	0	0
<i>П</i>	z	0	0	1	1	1	1	1	0
<i>П</i> включена	f_z	0	1	—	—	—	—	0	0
<i>П</i> выключена	$\bar{f}_z$	—	0	0	0	0	0	1	—
<i>M1</i> вперед	f_1	1	—	0	0	0	0	0	0
<i>M1</i> назад	$\bar{f}_1$	0	0	1	—	—	—	—	—
<i>M2</i> вперед	f_2	0	0	0	1	—	0	0	0
<i>M2</i> назад	$\bar{f}_2$	—	—	—	0	0	1	—	—
<i>M3</i> вперед	f_3	0	0	0	0	1	—	—	0
<i>M3</i> назад	$\bar{f}_3$	—	—	—	—	0	0	0	1

должна быть равна единице. После простановки единиц в рабочих состояниях делаем прочерки в безразличных состояниях, т. е. в тех состояниях, следующих за рабочими, при которых может повторяться (или не повторяться) сигнал на выполнение действия, соответствующего данной функции. Все остальные состояния являются запрещенными, и для них выходные функции должны быть равны нулю. Например, для функции f_z , выражающей сигнал на включение элемента памяти, ставим единицу в такте 2a, так как в этом такте должна включаться память. В тактах 2б, 3, 4 и 5 делаем прочерки, так как в этих тактах элемент памяти уже включен и он остается включенным как при повторении сигнала на включение ($f_z = 1$), так и в отсутствие его ($f_z = 0$). Во всех остальных тактах ставим нули, так как в этих тактах включать элемент памяти нельзя (в такте 6a память выключается и должна оставаться выключенной в тактах 6б и 1).

Составление формул включения и их упрощение. Второй этап синтеза систем управления по пути состоит в составлении формул включения, т. е. формул, показывающих, при каких входных сигналах получается выходной сигнал к включению данного устройства. Составление формул включения сводится к нахождению алгебраического вида двоичной функции по ее табличному заданию, приве-

денному в таблице состояний (включений). В формулы включения не входят входные сигналы от того механизма или элемента памяти, для которого составляется формула. Например, при составлении формул включения и выключения элемента памяти не учитывается значение сигнала z , так как сигнал на включение всегда подается при $z = 0$, а на выключение — при $z = 1$. Аналогично при составлении формул включения для механизма $M1$ не учитываются значения сигнала x_1 , для механизма $M2$ — значения сигнала x_2 и т. д.

В табл. 15 для рассматриваемого примера выписаны значения входных сигналов, которые должны учитываться при составлении каждой формулы включения, и значения этих сигналов в рабочих и запрещенных состояниях. По значениям входных сигналов в рабочих состояниях составлены формулы включения в виде логического произведения этих сигналов, причем значению 0 соответствует инверсное значение аргумента. Эти формулы названы *исходными*, так как в дальнейшем они будут упрощены. Например, сигнал для включения элемента памяти ($f_z = 1$) должен быть при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$. Поэтому исходная формула включения имеет вид $f_z = \bar{x}_1 x_2 x_3$.

Третий этап синтеза систем управления по пути — упрощение формул включения. Формула включения, составленная по значениям всех входных сигналов в рабочем состоянии, дает достаточные условия для включения данного устройства. Однако в некоторых случаях эти условия не являются необходимыми. Применение способов упрощения двоичных функций позволяет исключить из формулы те сигналы, которые не являются необходимыми. Но во всех случаях нельзя исключать *тактирующие сигналы*, т. е. сигналы, которыми данное состояние отличается от предыдущего. Например, включение элемента памяти происходит при состоянии $2a$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$). Оно отличается от предыдущего ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$) сигналом $x_1 = 0$. Следовательно, сигнал $x_1 = 0$ (или $\bar{x}_1 = 1$) является тактирующим при включении памяти. В табл. 15 тактирующие сигналы отмечены звездочками.

При небольшом числе переменных для упрощения формул включения можно применять способ перебора, так как рассмотрению подлежат лишь варианты, содержащие тактирующие сигналы. Кроме того, искомое упрощение находится обычно при рассмотрении только части вариантов, если начинать с простейших. При переборе вариантов будем руководствоваться следующим правилом: *упрощенная формула обладает теми же свойствами, что и исходная*, т. е. выражаемая ею функция равна единице в рабочем состоянии и нулю в запрещенных, если набор сигналов, входящих в упрощенную формулу при рабочем состоянии, не встречается в запрещенных состояниях.

Например, для включения элемента памяти имеется три варианта формул включения, содержащих тактирующий сигнал $\bar{x}_1 = 0$: $f_z = \bar{x}_1$, $f_z = \bar{x}_1 x_2$, $f_z = \bar{x}_1 x_3$.

Простейший вариант $f_z = \bar{x}_1$ уже удовлетворяет указанному правилу, так как сигнал $x_1 = 0$ не встречается в запрещенных состояниях. Более сложные варианты поэтому не рассматриваются, и за упрощенную функцию принимается $f_z = \bar{x}_1$.

Для выключения элемента памяти тактирующим сигналом является $x_2 = 1$. Использовать для формулы выключения только этот

Т а б л и ц а 15

Наименование	Входы	Состояния		Формулы включения	
		рабочие	запрещенные	исходные	упрощенные
Π включена	x_1 x_2 x_3	0 * 1 1	1 1 1 1 1 0	$f_z = \bar{x}_1 x_2 x_3$	$f_z = \bar{x}_1$
Π выключена	x_1 x_2 x_3	1 1 * 0	0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0	$\bar{f}_z = x_1 x_2 \bar{x}_3$	$\bar{f}_z = x_2 \bar{x}_3$
$M1$ вперед	x_2 x_3 z	1 1 * 0	1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0	$f_1 = x_2 x_3 \bar{z}$	$f_1 = x_3 \bar{z}$
$M1$ назад	x_2 x_3 z	1 1 1 *	1 1 0	$\bar{f}_1 = x_2 x_3 z$	$\bar{f}_1 = z$
$M2$ вперед	x_1 x_3 z	1 * 1 1	1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0	$f_2 = x_1 x_3 z$	$f_2 = x_1 x_3 z$
$M2$ назад	x_1 x_3 z	1 0 * 1	1 1 1	$\bar{f}_2 = x_1 \bar{x}_3 z$	$\bar{f}_2 = \bar{x}_3$
$M3$ вперед	x_1 x_2 z	1 0 * 1	1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1	$f_3 = x_1 \bar{x}_2 z$	$f_3 = \bar{x}_2$
$M3$ назад	x_1 x_2 z	1 1 0 *	1 1 0 1 1 1	$\bar{f}_3 = x_1 x_2 \bar{z}$	$\bar{f}_3 = \bar{z}$

* — тактирующие сигналы.

сигнал нельзя, так как он встречается в запрещенных состояниях. Если же взять произведение двух переменных $\bar{f}_z = x_2 \bar{x}_3$, то оно может быть принято в качестве формулы включения, так как соответ-

ствующий ей набор сигналов в рабочем состоянии ($x_2 = 1$, $x_3 = 0$) не встречается в запрещенных состояниях. Аналогично выполняется упрощение всех других формул, причем можно заметить, что чем больше запрещенных состояний, тем меньше входных сигналов удастся исключить из формулы включения, например, формула $f_2 = x_1 x_3 z$ не поддается упрощению, так как любые комбинации двух сигналов, содержащие тактирующий сигнал $x_1 = 1$, встречаются в запрещенных состояниях.

Построение схемы системы управления на пневматических элементах. Четвертый этап синтеза систем управления по пути — построение схемы системы управления на логических элементах выбранного типа — поясним на примере управления тремя пневматическими механизмами $M1$, $M2$ и $M3$, поршни которых соединены с исполнительными органами и движутся в соответствии с тактограммой, показанной на рис. 220. Каждый механизм состоит из пневмоцилиндра и четырехлинейного двухпозиционного распределителя (рис. 222). Первая линия распределителя соединена с правой полостью пневмоцилиндра, вторая — с левой полостью, третья — с источником сжатого воздуха и четвертая — с атмосферой. В указанной на рис. 222 позиции сжатый воздух поступает в правую полость пневмоцилиндра, и поршень занимает крайнее левое (по тактограмме — нижнее) положение. В другой позиции сжатый воздух поступает в левую полость пневмоцилиндра и, следовательно, перемещение подвижной части распределителя справа налево вызывает движение поршня вправо. Это перемещение происходит под действием сжатого воздуха при поступлении в распределитель пневматического сигнала, который для механизма $M1$ обозначен через f_1 ($M1$ вперед). Обратное перемещение происходит при поступлении сигнала $f_{\bar{1}}$ ($M1$ назад) с противоположной стороны.

Для механизмов $M2$ и $M3$ сигналы, вызывающие движение поршня, обозначены соответственно через f_2 ($M2$ вперед), $f_{\bar{2}}$ ($M2$ назад) и f_3 ($M3$ вперед), $f_{\bar{3}}$ ($M3$ назад). Эти сигналы, как и сигналы f_1 , $f_{\bar{1}}$, являются выходными сигналами блока управления ($Б. У$). Входными сигналами для блока управления служат сигналы от конечных выключателей, на которые нажимают штоки поршней в конечных положениях. Сигналы от левых выключателей обозначены через x_1 , x_2 , x_3 , а от правых — через $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ (когда один выключатель нажат, другой не нажат). Конечные выключатели в системах управления машин-автоматов служат логическими элементами повторения (выключатель нажат — есть сигнал, не нажат — нет сигнала). В рассматриваемой системе выключатель должен преобразовывать перемещение твердого тела в пневматический сигнал, и потому он выполняется как трехлинейный двухпозиционный распределитель (см. рис. 217, з).

В системах управления с памятью, кроме входных и выходных сигналов, должны быть еще сигналы памяти, чтобы можно было

различать совпадающие наборы входных сигналов. Для подачи этих сигналов служит элемент памяти (Π), выполненный в виде двухпозиционного четырехлинейного распределителя. Первая линия (верхняя правая) этого распределителя дает сигнал памяти z , вто-

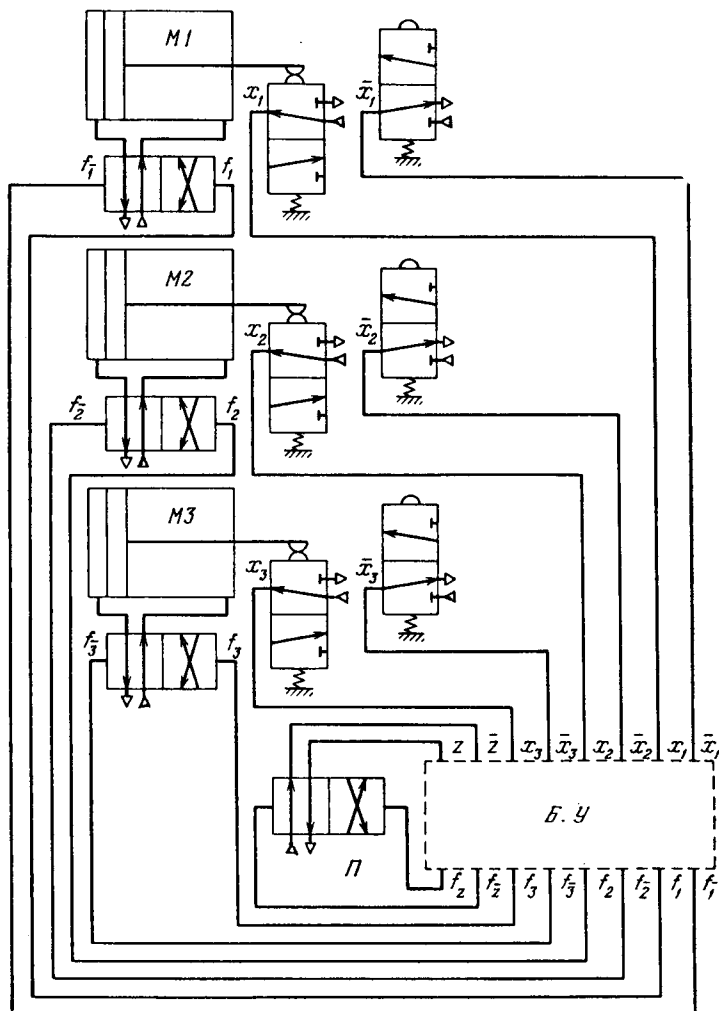


Рис. 222

рая — инверсионный сигнал $\bar{z}$, третья — соединена с атмосферой и четвертая — с источником сжатого воздуха. Позиция, при которой $z = 1$ и $\bar{z} = 0$, соответствует включенной памяти, другая позиция ($z = 0$, $\bar{z} = 1$) — выключенной памяти. Сигнал на включение (пере-

движение в позицию $z=1$) обозначается f_z , сигнал на выключение $f_{\bar{z}}$. На рис. 222 элемент памяти показан выключенным, так как поршни механизмов показаны в крайних левых положениях, что соответствует логическому такту 1, в котором память выключена. Элемент памяти называют иногда *элементом обратной связи*, так как его сигналы связаны и с выходом, и с входом блока управления.

Блок управления (Б.У) показан на рис. 222 прямоугольником, к верхней стороне которого подходят входы, а к нижней — выходы. Это изображение входов и выходов иногда называют *черным ящиком**). После изображения входов и выходов их надо соединить согласно формулам включения, используя в случае необходимости логические элементы. Рассматривая эти формулы (см. табл. 15), видим, что каждый из выходов $f_z, f_{\bar{z}}, f_3, f_{\bar{3}}, f_2, f_{\bar{2}}, f_1, f_{\bar{1}}$ имеет прямое соединение с одним входом, каждый из выходов $f_{\bar{z}}, f_1$ соединен с двумя входами через элемент умножения и выход f_2 — с тремя

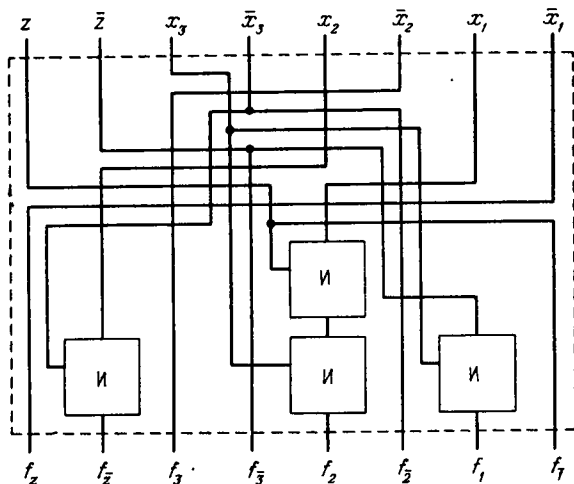


Рис. 223

входами через два элемента умножения. Следовательно, в блоке управления должно быть четыре элемента умножения, в качестве которых примем мембранное реле УСЭППА (см. рис. 219, в).

На рис. 223 показана установка логических элементов в блоке управления и соединения входов и выходов согласно формулам включения. Элементы умножения показаны в виде прямоугольника с названием операции «И» и трех линий. По верхней линии подходит сигнал первого множителя, по боковой — второго множителя,

*) В теории управления под черным ящиком понимается система любой физической природы, для которой известны, т. е. заданы или доступны наблюдению, только входы или выходы, а структура и значения параметров ее элементов неизвестны.

сигнал произведения идет по третьей линии. Против выходов f_z и $f_{\bar{z}}$ поставлено по одному элементу умножения, а против выхода f_2 — два последовательно соединенных элемента. После установки этих элементов для получения схемы блока управления остается соединить входы и выходы по формулам включения.

В заключение можно проверить по схеме действие всей системы управления. Для этого представим себе, что в систему поступил

сжатый воздух. Тогда в распределитель механизма $M1$ поступит сигнал (давление воздуха) f_1 . Подвижная часть этого распределителя передвинется влево, и поршень механизма $M1$ начнет прямой ход. В конце хода будет нажат выключатель $\bar{x}_1$, что приведет к включению элемента памяти и появлению сигнала $f_{\bar{1}}$ к обратному ходу поршня механизма $M1$ и т. д.

Построение системы управления на электрических элементах. Тактограмма, показанная на

Рис. 224

рис. 220, может относиться не только к механизмам, выполненным в виде пневмоцилиндров с распределителями, но и к другим видам механизмов. Покажем, например, построение системы управления тремя гидроцилиндрами с двусторонними распределителями, которые отличаются от ранее показанных пневмораспределителей только тем, что их подвижные части перемещаются от двух электромагнитов. В схеме управления (рис. 224) покажем только конечные выключатели и электромагнитные реле. Гидроцилиндры и распределители не показываем, так как их соединения аналогичны указанным на пневмосхеме.

Построение схемы управления начинаем с условного изображения каждого реле в виде квадрата, включенного в электрическую цепь, проходящую от одной шины к другой. Контакты реле памяти (z и $\bar{z}$) изображаются непосредственно в тех цепях, в которых они должны быть по формуле включения. Число контактов зависит от того, сколько раз в формулах включения встречаются z и $\bar{z}$. Каждому z соответствуют замыкающие контакты (операция повторения), а $\bar{z}$ — размыкающие (операция отрицания). В нашем примере замыкающие контакты изображаются в цепи реле f_1 и в цепи реле f_2 , размыкающие — в цепи реле f_1 и в цепи реле f_3 . Если

по цепи, в которую включена обмотка реле f_z , пойдет ток ($f_z = 1$), то замыкающие контакты замкнутся ($z = 1$), а размыкающие разомкнутся ($\bar{z} = 0$), что означает включение памяти. Память остается включенной и после исчезновения тока в обмотке реле f_z , так как для выключения памяти, аналогично двусторонним распределителям, необходим другой сигнал ($f_z = 1$), при котором замыкающие контакты разомкнутся ($z = 0$), а размыкающие замкнутся ($\bar{z} = 1$). Контакты реле управления распределителями включены в цепи их электромагнитов и потому на рис. 224 не показываются.

После вычерчивания условных изображений обмоток всех реле и простановки контактов реле памяти дальнейшее построение схемы управления сводится к последовательному включению в электрическую цепь каждого реле тех нормально разомкнутых выключателей $x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$, которые входят в соответствующие формулы включения. Для удобства чтения схемы одноименные выключатели располагаются на одной вертикали и соединяются штриховой линией. Кроме того, в цепь каждого реле управления распределителями дополнительно вводятся нормально замкнутые выключатели, размыкающие цепь реле, как только кончится соответствующий ход поршня.

Например, в цепь реле f_1 согласно формуле включения надо последовательно включить нормально разомкнутый выключатель x_3 и размыкающие контакты реле памяти. Кроме того, для замыкания цепи реле после прямого хода механизма $M1$ последовательно включается нормально замкнутый выключатель, механически соединенный с конечным выключателем $\bar{x}_1$. Все конечные выключатели показываются в ненажатом положении.

После построения схемы можно проверить действие системы управления. Для этого представим себе, что положения всех поршней соответствуют началу первого такта, т. е. нажаты конечные выключатели x_1, x_2 и x_3 . Память выключена ($z = 0$), и следовательно, замыкающие контакты реле памяти разомкнуты, а размыкающие — замкнуты. После включения тока (рубильником или кнопкой управления) оказывается замкнутой только цепь реле f_1 , и начинается прямой ход поршня механизма $M1$. В конце хода нажимается конечный выключатель $\bar{x}_1$, что вызывает размыкание цепи реле f_1 и включение памяти f_z , которое в свою очередь вызывает замыкание цепи реле f_1 и обратный ход поршня механизма $M1$. Аналогично прослеживается дальнейшая работа системы управления.

§ 114. Синтез избирательных систем управления машин-автоматов

Последовательностные и избирательные системы управления машин-автоматов. *Последовательностной системой управления* машины-автомата называется система управления, обеспечивающая требуемую последовательность выходных сигналов. Эта последова-

тельность может быть задана циклограммой или тактограммой. Примером последовательной системы управления может служить система управления по пути, рассмотренная в § 113. *Избирательной системой управления* называется система, выбирающая одну из возможных комбинаций выходных сигналов в зависимости от входных сигналов в данном такте. При этой системе один и тот же набор входных сигналов может повторяться подряд несколько раз, а затем длительное время не встречаться. Иногда избирательную систему называют *однотактной*, а последовательную — *много-тактной*.

Примеры избирательных систем управления. Первый пример (рис. 225, а) относится к той части контрольно-сортировочного автомата, в которой производится измерение цилиндрических изделий и

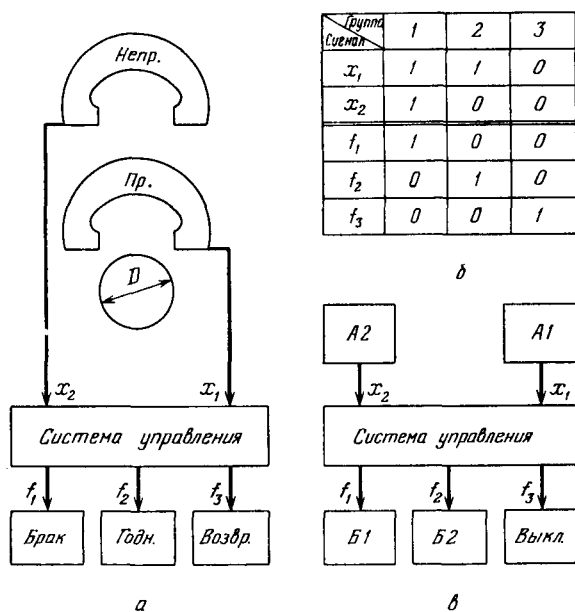


Рис. 225

сортировка их на три группы в зависимости от сигналов, получаемых от измерительных скоб: проходной «Пр» (входной сигнал x_1) и непроходной «Непр» (входной сигнал x_2). К первой группе (выходной сигнал f_1) относятся изделия, у которых при измерении обе скобы проходят диаметр D и нажимают на выключатели ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$). Эти изделия имеют диаметр D меньше допускаемого и составляют брак. Ко второй группе (выходной сигнал f_2) относятся годные изделия, у которых при измерении проходит только проходная скоба ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$). К третьей группе (выходной сигнал f_3)

относятся изделия, у которых не проходят обе скобы ($x_1 = 0, x_2 = 0$). Эти изделия возвращаются на обработку, так как у них диаметр D может быть уменьшен до требуемой величины посредством дополнительной обработки.

Указанные условия разделения всех изделий на три группы представляют собой программу действия системы управления тремя механизмами $M1, M2$ и $M3$ от двух выключателей и могут быть представлены в виде таблицы состояний (рис. 225, б). Такую же таблицу состояний имеют и некоторые другие одноконтурные избирательные системы управления. На рис. 225, в показана принципиальная схема управления механизмами подачи изделий, обрабатываемых машинами-автоматами $A1$ и $A2$, в большой бункер $B1$ и в малый $B2$. Если работают оба автомата ($x_1 = 1, x_2 = 1$), то изделия направляются посредством механизма $M1$ в бункер $B1$ (выходной сигнал f_1). Если работает только автомат $A1$ ($x_1 = 1, x_2 = 0$), то изделия направляются механизмом $M2$ в бункер $B2$ (выходной сигнал f_2). При неработающих автоматах ($x_1 = 0, x_2 = 0$) оба бункера закрываются механизмом $M3$ (выходной сигнал f_3).

Кроме рассмотренных примеров управления тремя механизмами от двух выключателей, можно привести многие другие примеры одноконтурных систем управления, применяющихся для адресования изделий по различным местам назначения, установки исполнительных органов в одно из нескольких положений и т. д.

Построение структурной схемы избирательной системы управления. Синтез избирательной системы управления состоит из четырех основных этапов, содержание которых совпадает с этапами синтеза систем управления по пути.

Первый этап — составление таблицы состояний по условиям действия системы управления. В нашем примере таблица состояний имеет один и тот же вид (см. рис. 225, б) как для системы управления контрольно-сортировочным автоматом, так и для системы управления бункерами двух автоматов.

Второй этап — составление формул включения. Для нашего примера формулу включения для каждого выходного сигнала можно получить, составляя логическое произведение входных сигналов рабочего состояния. Если какой-либо входной сигнал имеет значение 0, то в указанное произведение входит инверсное значение соответствующей переменной. Согласно этому правилу имеем

$$f_1 = x_1 x_2, \quad f_2 = x_1 \bar{x}_2, \quad f_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

Третий этап — упрощение формул включения. В нашем примере согласно таблице состояний выходной сигнал f_1 равен единице в рабочем состоянии 1 и нулю — в запрещенных состояниях 2 и 3. Такие же значения, как и f_1 , имеет в этих состояниях сигнал x_2 . Поэтому можно упростить формулу включения для сигнала f_1 , подавая только входной сигнал x_2 . Тогда $f_1 = x_2$.

Применительно к контрольно-сортировочному автомату полученный результат имеет простое физическое истолкование: для установления брака ($f_1 = 1$) необходимо и достаточно, чтобы прошла непроходная скоба ($x_2 = 1$). Формальное применение алгебраического метода с использованием формул (35.9) дает тот же результат, если к рабочему состоянию 1 прибавить состояние ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$), которое в данной системе не встречается:

$$f_1 = x_1 x_2 + \bar{x}_1 x_2 = (x_1 + \bar{x}_1) x_2 = x_2.$$

Формула для f_2 не поддается упрощению, а для f_3 имеем

$$f_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 (\bar{x}_2 + x_2) = \bar{x}_1.$$

Применительно к контрольно-сортировочному автомату этот результат также имеет простое истолкование: для возврата на обратку ($f_3 = 1$) необходимо и достаточно, чтобы не прошла проходная скоба.

Итак, после упрощения формулы включения имеют вид

$$f_1 = x_2, \quad f_2 = x_1 \bar{x}_2, \quad f_3 = \bar{x}_1.$$

Четвертый этап — построение схемы системы управления — начинаем с построения структурной схемы, которая является общей для любых типов логических элементов. Согласно таблице состояний и формулам включения в нашем примере надо иметь два элемента «ДА» (x_1 и x_2), два элемента «НЕ» ($\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$) и один элемент «И» ($x_1 \bar{x}_2$). Для построения структурной схемы вычерчиваем элементы «ДА» и «НЕ», которые дают входы в блок управления, показанный в виде прямоугольника (рис. 226, а), а затем соединяем входы и выходы согласно формулам включения, используя один элемент умножения.

Реализация структурной схемы системы управления. В избирательных системах управления для конструктивной реализации структурной схемы применяются все виды логических элементов, включая и логические механизмы, составленные из рычагов и пружин. На рис. 226, б показана реализация структурной схемы на пневматических элементах. Входные сигналы x_1 и x_2 в виде перемещений твердых тел преобразуются в пневматические сигналы посредством распределителей. Для выполнения операций «НЕ» и «ДА» можно взять двухпозиционные трехлинейные распределители, показанные на рис. 216, г и 217, г. Однако проще использовать двухпозиционный четырехлинейный распределитель (пневматический переключатель), который можно рассматривать как объединение двух логических элементов: «ДА» и «НЕ».

Для операции умножения взято мембранное реле УСЭППА, которое присоединено к переключателям в соответствии с рис. 219, в. Переключатели показаны в ненажатом состоянии ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$).

После вычерчивания схемы можно проверить действие сигналов, считая, что в каждый пневматический переключатель поступит

сжатый воздух, как только произойдет измерение изделия. Если после измерения переключатели остались ненажатыми (положение, показанное на рис. 226, б), то воздух через правый переключатель поступает на выход f_3 и приводит в движение механизм подачи в бункер возврата изделий на обработку. Если нажат только правый

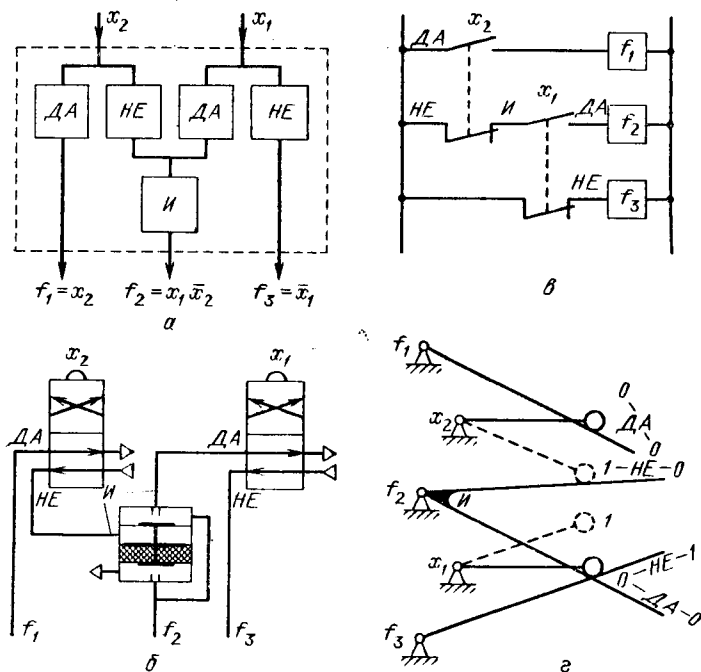


Рис. 226

переключатель, то сжатый воздух от обоих переключателей поступает в мембранное реле и на выходе f_2 появляется давление (подача в бункер годных изделий). Наконец, при обоих нажатых переключателях сжатый воздух через левый переключатель поступает на выход f_1 (подача в бункер бракованных изделий).

На рис. 226, в показана реализация той же системы управления на электрических элементах. Операция «ДА» выполняется посредством нормально разомкнутого выключателя, а операция «НЕ» — посредством нормально замкнутого. Операция «И» соответствует последовательному соединению. Механизмы подачи изделий в тот или иной бункер включаются от выходных электромагнитных реле f_1 , f_2 и f_3 . Система включается в электрическую сеть после измерения изделия. Если выключатели x_1 и x_2 остались ненажатыми, то под током окажется реле f_3 (возврат на обработку); если нажат только выключатель x_1 — то реле f_2 (годные изделия), и, наконец, при

обоих нажатых выключателях под током будет реле f_1 (бракованные изделия).

На рис. 226, *г* показан логический механизм, состоящий из двух логических элементов «ДА», совмещенных с элементами «НЕ», и одного элемента «И». Если после измерения не прошла ни одна из скоб, то входные рычаги x_1 и x_2 остаются в положениях, обозначенных цифрой 0, и только рычаг f_3 имеет положение 1, при котором изделие возвращается на обработку. Если после измерения рычаг x_1 перейдет в положение 1, то рычаг f_2 также перейдет в положение 1 (годные изделия). Если оба рычага x_1 и x_2 перейдут в положения 1, то в положении 1 будет рычаг f_1 (бракованные изделия).

Каждая конструктивная реализация имеет свои достоинства и недостатки. Например, логический механизм по сравнению с электрическими элементами более надежен, но имеет большие габариты и меньшее быстродействие. Пневматические элементы, как правило, обладают достаточным быстродействием, но требуют дополнительных устройств для подвода сжатого воздуха.

Унификация формул включения в избирательных системах управления. При построении структурной схемы избирательной системы управления надо иметь в виду, что уменьшение числа логических элементов иногда может быть достигнуто не только упрощением формул включения, но и их *унификацией*, т. е. таким преобразованием, при котором в формулах включения появляются совпадающие члены.

Пусть, например, упрощенные формулы включения имеют вид

$$f_1 = x_2x_3 + \bar{x}_3 + x_1, \quad f_2 = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_3.$$

Вторая формула может быть представлена в двух вариантах:

$$f_2 = x_2(x_1x_3 + \bar{x}_1) + x_1\bar{x}_3, \quad f_2 = x_1(x_2x_3 + \bar{x}_3) + \bar{x}_1x_2.$$

Во втором варианте выражение в скобках совпадает с суммой первых двух членов в формуле включения для f_1 . Поэтому следует предпочесть этот вариант, как позволяющий уменьшить число логических элементов за счет совпадающих членов.

ГЛАВА 36

МАНИПУЛЯТОРЫ И ПРОМЫШЛЕННЫЕ РОБОТЫ

§ 115. Виды манипуляторов и промышленных роботов

Виды манипуляторов. *Манипулятором* называется техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций руки человека. Первые конструкции манипуляторов не только по назначению, но и по внешнему виду напоминали руку человека. На рис. 227 показана схема *копирующего манипулятора*, состоящего из управляющего (У) и исполнительного (И) механизмов. Оба механизма совершенно идентичны, причем вследствие механической,

электрической, магнитной или какой-либо другой связи движения звеньев исполнительного механизма повторяют (копируют) движения звеньев управляющего механизма.

Как видно из схемы, механизм манипулятора образован из пространственной незамкнутой кинематической цепи. Звенья этой цепи по аналогии с рукой человека имеют названия: O — корпус, 1 — плечо, 2 — предплечье, 3 — кисть или захват, 4 — палец. Звено 4 при рассмотрении структуры, кинематики и динамики манипулятора объединяется со звеном 3. Поэтому считаем, что кинематическая цепь манипулятора, показанного на рис. 227, состоит из стойки (корпуса) и трех подвижных звеньев. Кинематическая пара 1—2 выполняется как вращательная, а пары 1— O и 2—3 — как сферические трехподвижные, причем они часто заменяются кинематическими соединениями, составленными из вращательных пар, оси которых пересекаются. Следовательно, рассматриваемый манипулятор имеет семь степеней свободы, так как число степеней свободы незамкнутой кинематической цепи равно сумме подвижностей кинематических пар. Захват в этом манипуляторе может занять любое положение в пространстве в пределах, определяемых конструктивными размерами звеньев.

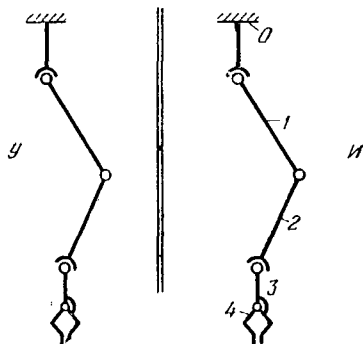


Рис. 227

В дальнейшем появились манипуляторы с большим числом звеньев и кинематических пар, а также манипуляторы, образованные из замкнутых кинематических цепей, и внешнее сходство с рукой человека стало утрачиваться, но во всех вариантах сохранилось назначение манипулятора — воспроизводить пространственные движения рук человека. Копирующие манипуляторы применяются теперь во многих областях техники для выполнения операций в условиях, исключающих возможность присутствия человека возле обрабатываемого или перемещаемого изделия (радиоактивность, вакуум, высокая температура, повышенное давление, вредное химическое производство и т. п.).

В зависимости от вида системы управления различают *манипуляторы с ручным управлением* и *манипуляторы с автоматическим управлением*.

В манипуляторах с ручным управлением оператор, воздействуя на звенья управляющего механизма, приводит в движение звенья исполнительного механизма. В простейших случаях передача движения может быть выполнена посредством механической связи, т. е. через зубчатые колеса, тросы и рычаги. Однако в этом случае предельные усилия и перемещения исполнительного механизма огра-

ничиваются возможностями оператора. От этого недостатка свободны манипуляторы с сервоприводами, т. е. с вспомогательными приводами, которые приводят в движение отдельные звенья исполнительного механизма по сигналам, вырабатываемым при движении звеньев управляющего механизма. Кроме того, в манипуляторах с сервоприводами легко выполняется дистанционное управление.

В манипуляторах с автоматическим управлением звенья исполнительного механизма получают движения от сервоприводов, работающих по заданной программе подобно станкам с программным управлением. Управляющий механизм служит в этом случае только для выработки программы работы исполнительного механизма. Все действия оператора, связанные с перемещением звеньев управляющего механизма, преобразуются посредством датчиков перемещений в электрические или механические сигналы и записываются на магнитную ленту или перфоленту. Полученная программа может многократно использоваться для управления манипулятором. Манипуляторы с автоматическим управлением могут использоваться не только для работы во вредных условиях, но и для механизации однообразных и утомительных операций при обработке и сборке изделий. В этих случаях манипуляторы с автоматическим управлением называют *промышленными роботами*.

Промышленный робот. Одной из разновидностей машин-автоматов является *промышленный робот*, т. е. переналаживаемая автоматическая машина для выполнения различных манипуляционных действий в производственном процессе. Переналадка включает в себя перепрограммирование и механическую переналадку робота, а манипуляционные действия заключаются в перемещении и ориентировании в пространстве объектов манипулирования. Свойство переналаживаемости является основным свойством робота, отличающим его от других автоматических машин, причем предполагается, что переналадка робота может быть произведена быстро, а операции, выполняемые роботом, имеют универсальный характер, т. е. могут быть использованы в различных производственных процессах при обработке и сборке изделий. Характерным свойством робота является также то, что он предназначен для выполнения манипуляционных действий, под которыми понимаются действия, выполняемые рукой человека по перемещению и ориентированию в пространстве объектов труда. Манипуляционные действия выполняются в производственных процессах, используемых в промышленности. Отсюда происходит название рассматриваемых роботов — *промышленные роботы*, и этим они отличаются от космических и подводных роботов, имеющих другие цели.

Манипулятор как техническое устройство можно считать составной частью промышленного робота. Тогда согласно ГОСТ 25686 — 85 промышленный робот определяется как автоматическая машина, стационарная или передвижная, состоящая из исполнительного устройства в виде манипулятора, имеющего несколько степеней под-

вижности*), и перепрограммируемого устройства программного управления для выполнения в производственном процессе двигательных и управляющих функций.

Исполнительное устройство промышленного робота. Промышленный робот состоит из трех основных частей: исполнительного устройства, приводов и системы управления.

Исполнительным устройством промышленного робота называется устройство, выполняющее все его двигательные функции. В состав исполнительного устройства входят один или несколько манипуляторов и устройство передвижения. Манипулятор представляет собой многозвонный пространственный механизм со многими степенями свободы, в котором рабочее звено несет рабочий инструмент или *захватное устройство (захват)*, предназначенное для захватывания и удержания объекта производства или технологической оснастки. Если захватывание и удержание производится относительным перемещением частей захватного устройства, то оно называется *схватом*. Кроме схватов могут быть также захватные устройства в виде вакуумных присосков, магнитов и т. п.

Приводы промышленных роботов. Приводы промышленных роботов предназначены для приведения в движение звеньев манипулятора и передвижения самого робота. Они могут быть трех видов: гидравлические, пневматические и электрические. Наибольшее распространение имеют гидравлические приводы и несколько меньше — пневматические. *Электромеханический привод* сейчас применяется реже других, но в будущем его роль будет возрастать с появлением специальных электродвигателей, которые не будут требовать редукторов, будут иметь малый момент инерции и повышенную нагрузочную способность. Применяются электроприводы как непрерывного, так и дискретного действия (шаговые двигатели). К достоинствам электропривода по сравнению с пневмо- и гидроприводом можно отнести отсутствие трубопроводов, легкость монтажа и наладки, простоту эксплуатации. В последнее время появились унифицированные электромеханические модули (блоки) для отдельных видов движения (подъем, поворот и т. п.). Из этих модулей можно составлять исполнительные устройства роботов при различных сочетаниях требуемых перемещений захвата. Разработка и выпуск унифицированных модулей, наряду с улучшением качества специальных электродвигателей, будут способствовать распространению электропривода в промышленных роботах.

Пневматический привод применяется обычно в промышленных роботах небольшой грузоподъемности. Основные его достоинства — простота управления, если только требуется переместить захват из одной точки пространства в другую, низкая стоимость и сравнительно большой срок службы. Выполняется пневмопривод в виде пнев-

*) В роботах и манипуляторах часто вместо термина «степень свободы» употребляют термин «степень подвижности».

моцилиндра, т. е. цилиндра с поршнем, причем цилиндр может быть длинноходовым. Для поворота звеньев используется комбинация пневмоцилиндра с реечной передачей. К недостаткам пневмоцилиндра, кроме указанного ограничения по грузоподъемности, можно отнести трудности регулирования скорости движения звеньев манипулятора.

Гидравлический привод применяется для промышленных роботов большой грузоподъемности, а также в тех случаях, когда надо иметь плавное торможение звеньев и регулирование скорости их движения. Поступательное движение выполняется гидроцилиндром, вращение — поворотным гидромотором (реже — комбинацией гидроцилиндра с реечной зубчатой передачей). Для торможения применяется обычно регулируемый дроссель, синтез которого изложен в § 107. К недостаткам гидропривода следует отнести сложность обслуживания и эксплуатации (возможны утечка масла, засорение трубопроводов и т. п.).

Приводы всех трех указанных типов могут располагаться непосредственно на подвижных звеньях манипулятора или же быть вынесенными на стойку (корпус робота). В первом случае получается более простая и жесткая конструкция, так как отсутствуют сложные передаточные механизмы с длинными кинематическими цепями. Но при этом снижается грузоподъемность манипулятора и ухудшаются его динамические характеристики. Кроме того, затрудняется работа в труднодоступных местах из-за подводящих трубопроводов, пилангов и электроприводов. Во втором случае открывается возможность использования одного приводного устройства для управления несколькими звеньями, но затрудняется проектирование, изготовление и монтаж многоступенчатого передаточного механизма с несколькими степенями свободы (например, многоступенчатого зубчатого конического дифференциала с трубчатыми валами).

Автооператор. В тех случаях, когда манипуляционные движения в производственном процессе могут выполняться по одной и той же программе (автоматизация смены инструмента, извлечение отливок, подача листовых заготовок в рабочую зону штампа и т. п.), применяют автооператоры, которые отличаются от промышленных роботов отсутствием перепрограммирования. По ГОСТ 25686 — 85 *автооператор* есть автоматическая машина, состоящая из исполнительного устройства в виде манипулятора или совокупности манипулятора и устройства передвигания и перепрограммируемого устройства управления.

§ 116. Технические показатели манипуляторов

Число степеней свободы манипуляторов. Манипулятор, как правило, предназначен для выполнения многих разнообразных движений, цель которых может изменяться не только при переходе к другому виду работ, но и при изменении внешних условий. Други-

ми словами, манипулятор есть многоцелевая система. Число степеней свободы манипулятора, как многоцелевой системы, должно выбираться в соответствии с той целью, которая требует максимальной подвижности захвата. Например, для воспроизведения пространственного движения захвата в общем случае манипулятор должен иметь шесть степеней свободы. Если же надо воспроизвести пространственную траекторию только одной точки захвата, то необходимое число степеней свободы уменьшается до трех.

В промышленных роботах три степени свободы, необходимые для перемещения центра захвата в заданную точку пространства, называются *переносными*. Для ориентации рабочего органа (захвата) необходимы еще три степени свободы, называемые *ориентирующими*. Устройство передвижения дополнительно даст до трех степеней свободы при плоском движении и до шести — при пространственном.

Маневренность манипулятора. *Маневренностью манипулятора* называется число его степеней свободы при неподвижном захвате. Маневренность дает возможность звеньям манипулятора обходить препятствия или же располагаться в более удобной позиции при одном и том же положении захвата. В маневренность не следует включать местные («лишние») степени свободы. Например, при последовательном соединении двух сферических пар образуется местная степень свободы в виде вращения одного звена вокруг прямой, соединяющей центры сферических пар. Эта степень свободы не влияет на движение других звеньев и потому не повышает маневренности манипулятора. Иногда используют маневренность манипулятора для улучшения качественных показателей решения основной задачи, т. е. избыточное число степеней свободы сверх необходимого для решения основной задачи используется для получения оптимальных значений дополнительных критериев: быстродействия, минимума затраты энергии и т. п.

Рабочее пространство и зоны обслуживания манипулятора. *Рабочим пространством манипулятора* называется пространство, в котором может находиться исполнительное устройство при функционировании манипулятора. Та часть рабочего пространства, в котором может находиться рабочий орган при функционировании манипулятора, называется *рабочей зоной*. Вид рабочей зоны определяется переносными степенями свободы и зависит от кинематических пар манипулятора и их взаимной ориентации. Наибольшее распространение имеют рабочие зоны в виде плоскости, поверхности, параллелепипеда, цилиндра и шара. Видам рабочей зоны соответствуют системы координат, в которых определяются движения захвата: прямоугольная, цилиндрическая, сферическая. Однако не все части рабочей зоны одинаково удобны для выполнения заданных движений. *Зоной обслуживания* называется часть рабочей зоны, в которой рабочий орган выполняет свои функции в соответствии с назначением манипулятора и установленными значениями их характеристик.

Угол и коэффициент сервиса. Зона обслуживания определяется не только переносными, но и ориентирующими степенями свободы. Для случая, когда зона обслуживания определяется расположением захвата по отношению к объекту манипулирования, необходимо для каждой точки рабочей зоны определить телесный угол ψ , внутри которого захват можно подвести к этой точке. Этот угол называется *углом сервиса*. Отношение $\psi/(4\pi) = \theta$ называется *коэффициентом сервиса* в данной точке. Значение этого коэффициента может меняться от 0 для точек на границе рабочего объема до 1 для точек зоны полного сервиса. Качество манипулятора в отношении возможностей выполнения различных операций оценивается средним коэффициентом сервиса θ_{cp} в рабочем пространстве V :

$$\theta_{cp} = \frac{1}{V} \int_{(V)} \theta dV,$$

где V — объем рабочего пространства.

§ 117. Кинематика и динамика манипуляторов

Прямая и обратная задачи кинематики манипулятора. *Прямая задача кинематики манипулятора* состоит в определении положений всех его звеньев по заданным значениям обобщенных координат. Решение этой задачи для манипулятора, образованного из незамкнутой кинематической цепи, сводится к решению системы линейных уравнений, как было показано в § 6 на примере плоского манипулятора и в § 15 на примере пространственных манипуляторов ангулярного типа. *Обратная задача кинематики манипулятора* состоит в определении обобщенных координат по заданному положению захвата. Эта задача в общем случае сводится к решению системы нелинейных уравнений.

Определение положений звеньев манипулятора с цилиндрической рабочей зоной. На рис. 228, а показана схема манипулятора с цилиндрической рабочей зоной, в котором три переносные степени свободы обеспечивают перемещение точки C в любую точку рабочей зоны. Три ориентирующие степени свободы захвата соответствуют его сферическому движению относительно звена 3. Это движение, однако, воспроизводится не сферической трехподвижной парой, как показано на рис. 228, а, а кинематическим соединением, в состав которого входят три вращательные пары с осями, пересекающимися в точке O_3 (рис. 228, б).

На рис. 228, а показана неподвижная система координат $x_0y_0z_0$ с началом координат в точке O и подвижные системы координат, связанные со звеньями 1, 2 и 3. Для подвижных систем координат показываются только две координатные оси и начало координат O_i . Направление третьей оси определяется из условия правой системы координат. При выбранных системах координат перенос-

ным степеням свободы соответствуют обобщенные координаты φ_{10} , z и R .

На рис. 228, б показаны подвижные системы координат звеньев 4, 5 и 6, образующих сферическое трехподвижное соединение (см. § 14). Для звена 4 ось z_4 направлена по оси вращательной пары

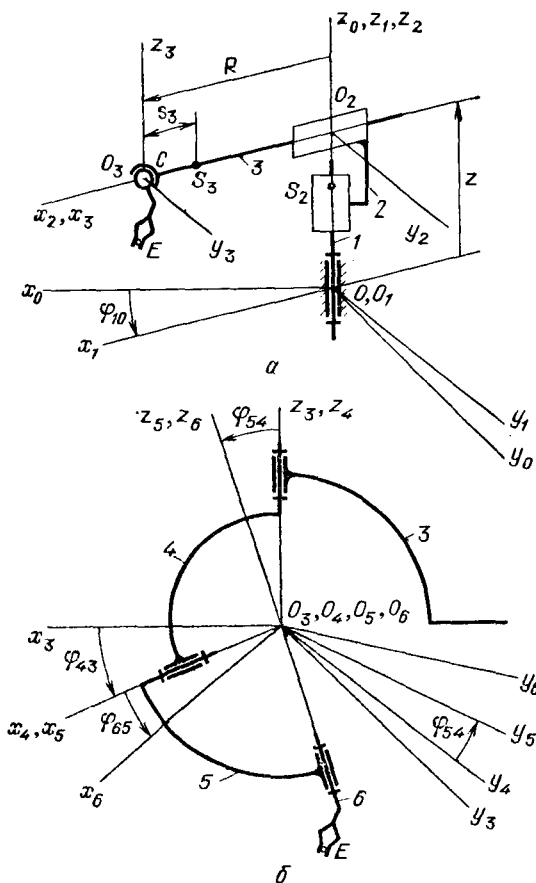


Рис. 228

3—4, которая принята совпадающей с осью z_3 , ось x_4 совпадает в начальный момент времени с осью x_3 . Для звена 5 ось z_5 направлена по оси вращательной пары 4—5, а ось y_5 совпадает в начальный момент времени с осью y_4 . Для звена 6 ось z_6 направлена по оси вращательной пары 5—6, а ось x_6 в начальный момент времени совпадает с осью x_5 .

За обобщенные координаты принимаем углы поворота φ_{54} , φ_{43} и φ_{65} , которые при выбранных направлениях осей координат явля-

ются соответственно углами Эйлера θ_{63} , ψ_{63} и φ_{63} в движении звена 6 относительно звена 3.

Введем обозначения: $\cos \varphi_{54} = c_1$, $\cos \varphi_{43} = c_2$, $\cos \varphi_{65} = c_3$, $\sin \varphi_{54} = s_1$, $\sin \varphi_{43} = s_2$, $\sin \varphi_{65} = s_3$. Тогда уравнения преобразования координат звена 6 в координаты звена 3 имеют вид

$$\begin{aligned}x_3 &= x_6(c_2c_3 - c_1s_2s_3) - y_6(c_2s_3 + c_1s_2c_3) + z_6s_1s_2, \\y_3 &= x_6(s_2c_3 + c_1c_2s_3) + y_6(-s_2s_3 + c_1c_2c_3) - z_6s_1c_2, \\z_3 &= x_6s_1s_3 + y_6s_1c_3 + z_6c_1.\end{aligned}\quad (36.1)$$

Уравнения преобразования координат для звеньев 3, 2, 1 и 0 имеют вид

$$\begin{aligned}x_2 &= x_3 + R, \quad y_2 = y_3, \quad z_2 = z_3; \\x_1 &= x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 + z;\end{aligned}\quad (36.2)$$

$$x_0 = x_1 \cos \varphi_{10} - y_1 \sin \varphi_{10}, \quad y_0 = x_1 \sin \varphi_{10} + y_1 \cos \varphi_{10}, \quad z_0 = z_1.$$

Последовательная подстановка координат x_3 , y_3 , z_3 из уравнений (36.1) в уравнения (36.2) дает:

$$\begin{aligned}x_0 &= x_6[(c_2c_3 - c_1s_2s_3)\cos \varphi_{10} - (s_2c_3 + c_1c_2s_3)\sin \varphi_{10}] - \\&\quad - y_6[(c_2s_3 + c_1s_2c_3)\cos \varphi_{10} + (-s_2s_3 + c_1c_2c_3)\sin \varphi_{10}] + \\&\quad + z_6(s_1s_2 \cos \varphi_{10} + s_1c_2 \sin \varphi_{10}) + R \cos \varphi_{10}, \\y_0 &= x_6[(c_2c_3 - c_1s_2s_3)\sin \varphi_{10} + (s_2c_3 + c_1c_2 - s_3)\cos \varphi_{10}] - \\&\quad - y_6[(c_2s_3 + c_1s_2c_3)\sin \varphi_{10} - (-s_2s_3 + c_1c_2c_3)\cos \varphi_{10}] + \\&\quad + z_6(s_1s_2 \sin \varphi_{10} - s_1c_2 \cos \varphi_{10}) + R \sin \varphi_{10}, \\z_0 &= x_6s_1s_3 + y_6s_1c_3 + z_6c_1 + z.\end{aligned}\quad (36.3)$$

Координаты x_0 , y_0 , z_0 , вычисленные по (36.3) при заданных координатах x_6 , y_6 , z_6 точки на звене 6 (например, точки E), определяют траекторию этой точки относительно стойки. Коэффициенты при координатах x_6 , y_6 , z_6 в уравнениях преобразования координат (36.3) определяют направляющие косинусы системы координат, связанной со звеном 6, относительно неподвижной системы координат. Соответствующие углы Эйлера находятся по соотношениям (3.6) — (3.8): $\theta_{60} = \varphi_{54}$, $\psi_{60} = \varphi_{43} + \varphi_{10}$, $\varphi_{60} = \varphi_{65}$.

Если учитывать только переносные степени свободы, т. е. принять $x_6 = y_6 = z_6 = 0$, то уравнения (36.3) упрощаются:

$$\begin{aligned}x_0 &= R \cos \varphi_{10}, \\y_0 &= R \sin \varphi_{10}, \\z_0 &= z,\end{aligned}$$

где x_0 , y_0 , z_0 — координаты точки O_3 в неподвижной системе координат.

Определение обобщенных координат манипулятора по заданному положению рабочего органа или захвата (обратная задача кинема-

тики). Положение рабочего органа (или захвата) в пространстве определяется положением одной точки P , называемой полюсом, и углами Эйлера по отношению к неподвижной системе координат, т. е. координатами полюса x_P, y_P, z_P и углами Эйлера $\theta_P, \psi_P, \varphi_P$. Следовательно, для управления движением рабочего органа манипулятора в общем случае должны быть заданы шесть функций времени: $x_P(t), y_P(t), z_P(t), \theta_P(t), \psi_P(t)$ и $\varphi_P(t)$. Считая эти функции заданными, надо определить законы изменения обобщенных координат во времени, по которым и производится управление движением каждого привода. Решение указанной задачи состоит из двух этапов. На первом этапе по заданным значениям x_P, y_P, z_P находятся обобщенные координаты, соответствующие переносным степеням свободы. Для этого можно использовать уравнения преобразования координат, которые для шестизвенного манипулятора в матричной форме имеют вид

$$r_{P_0} = T_{10} T_{21} T_{32} r_{P_3}, \quad (36.4)$$

где r_{P_0} — столбцовая матрица $[x_{P_0} \ y_{P_0} \ z_{P_0} \ 1]^T$, определяющая положение полюса P относительно неподвижной системы координат*), r_{P_3} — столбцовая матрица $[x_{P_3} \ y_{P_3} \ z_{P_3} \ 1]^T$, определяющая положение P на рабочем органе (или захвате); T_{10}, T_{21}, T_{32} — матрицы кинематических пар.

В отличие от прямой задачи кинематики столбцовые матрицы r_{P_0} и r_{P_3} считаются известными и матричное уравнение (36.4) дает систему трех уравнений, которые в общем случае являются нелинейными относительно искомых обобщенных координат.

На втором этапе используются зависимости между заданными углами Эйлера и обобщенными координатами, соответствующими ориентирующим степеням свободы. Например, если для получения требуемой ориентации рабочего органа используется сферическое трехподвижное соединение, то уравнения для определения трех обобщенных координат (относительных углов поворота звеньев в кинематическом соединении) имеют вид

$$\theta_P = \theta_{60}, \quad \psi_P = \psi_{60}, \quad \varphi_P = \varphi_{60}, \quad (36.5)$$

где $\theta_{60}, \psi_{60}, \varphi_{60}$ — углы Эйлера, определяемые по соотношениям (3.6) — (3.8) из матрицы T_{60} , в которую после вычисления обобщенных координат первого этапа входят в качестве неизвестных лишь обобщенные координаты, соответствующие ориентирующим степеням свободы.

Решение обратной задачи кинематики манипулятора с цилиндрической рабочей зоной. Для манипулятора, схема которого показана на рис. 228, при решении обратной задачи кинематики будем

*) Верхний индекс «т» означает транспонирование матрицы, т. е. переместить местами строк и столбцов. Введено здесь для удобства записи.

считать заданными координаты точки $C(x_{C_0}, y_{C_0}, z_{C_0})$ и углы Эйлера $(\theta_{60}, \psi_{60}, \varphi_{60})$ системы координат, связанной со звеном 6, относительно неподвижной системы координат. Требуется определить шесть обобщенных координат: $\varphi_{10}, R, z, \varphi_{43}, \varphi_{54}, \varphi_{65}$.

Из уравнений (36.3) для точки C имеем

$$x_{C_0} = R \cos \varphi_{10}, \quad y_{C_0} = R \sin \varphi_{10}, \quad z_{C_0} = z.$$

Отсюда

$$R = \sqrt{x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2}, \quad \varphi_{10} = \arctg \frac{y_{C_0}}{x_{C_0}}, \quad z = z_{C_0}. \quad (36.6)$$

Управление перемещениями R, φ_{10} и z обеспечивает перемещение точки C в заданную точку рабочей зоны с координатами x_{C_0}, y_{C_0} и z_{C_0} . Если эти координаты заданы как функции времени, то и обобщенные координаты R, φ_{10}, z по соотношениям (36.6) также выражаются функциями времени.

Для управления перемещениями $\varphi_{43}, \varphi_{54}, \varphi_{65}$, обеспечивающими заданную ориентацию рабочего органа (захвата) 6, составляем уравнения (36.5), которые для рассматриваемого манипулятора на основании решения прямой задачи кинематики имеют вид

$$\theta_P = \varphi_{54}, \quad \psi_P = \varphi_{43} + \varphi_{10}, \quad \varphi_P = \varphi_{65}.$$

Отсюда искомые обобщенные координаты

$$\varphi_{43} = \varphi_P - \arctg \frac{y_{C_0}}{x_{C_0}}, \quad \varphi_{54} = \theta_P, \quad \varphi_{65} = \varphi_P.$$

Прямая и обратная задачи динамики манипуляторов. Прямая задача динамики манипуляторов состоит в определении обобщенных координат по заданным внешним силам, действующим на звенья манипулятора. Обобщенные координаты находятся из решения уравнений движения пространственного механизма с несколькими степенями свободы, причем для составления уравнений движения применяются два метода: метод уравнений Лагранжа второго рода (§ 29) и кинетостатический метод (§ 30). Обратная задача динамики манипулятора состоит в определении сил, действующих на звенья манипулятора со стороны приводов (управляющих воздействий), по заданному движению рабочего органа или захвата. Эта задача также решается или по методу кинетостатики, или же на основании уравнений движения.

Прямая задача динамики манипулятора с цилиндрической рабочей зоной. Составление уравнений движения манипулятора в виде уравнений Лагранжа второго рода поясним на примере манипулятора с цилиндрической рабочей зоной (см. рис. 228), принимая во внимание только переносные степени свободы и считая, что центр масс захвата с грузом совпадает с точкой C .

За обобщенные координаты примем цилиндрические координаты точки C : φ_{10} , R , z . Тогда кинетическая энергия манипулятора при неподвижном основании и уравновешенном звене 1

$$T = \frac{1}{2} \{ [J_1 + J_2 + J_3 + m_3(R - s_3)^2] \dot{\varphi}_{10}^2 + m_3 \dot{R}^2 + (m_2 + m_3) \dot{z}^2 \}, \quad (36.7)$$

где J_1 — момент инерции звена 1 относительно оси z_0 ; J_2 — момент инерции звена 2 относительно той же оси; J_3 — момент инерции звена 3 (включая перемещаемый груз) относительно оси, проходящей через центр масс S_3 параллельно оси z_0 ; m_2 , m_3 — массы звеньев 2 и 3; s_3 — расстояние от точки C до центра масс звена 3.

Уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (36.8)$$

где $q_1 = \varphi_{10}$, $q_2 = z$, $q_3 = R$.

При определении обобщенных сил Q_i считаем, что поступательные приводы звеньев 2 и 3 (например, гидроцилиндры) расположены на подвижных звеньях и создают силы F_2 и F_3 , а вращательный привод звена 1 создает момент пары сил M_1 . Кроме того, учитываем силы тяжести звеньев G_2 , G_3 (включая силу тяжести груза), силы трения $F_{\tau 2}$, $F_{\tau 3}$ в парах 1—2 и 2—3 и момент сил трения во вращательной паре $M_{\tau 1}$. Силы трения $F_{\tau 2}$, $F_{\tau 3}$ и момент сил трения $M_{\tau 1}$ считаем постоянными и известными из опытных данных. Для случая движения звена 2 вверх и звена 3 от оси z_0 имеем

$$Q_1 = M_1 - M_{\tau 1}, \quad Q_2 = F_2 - F_{\tau 2} - G_2 - G_3, \quad Q_3 = F_3 - F_{\tau 3}.$$

Выполняя дифференцирование в уравнениях (36.8) и подставляя в них значения обобщенных сил, получаем уравнения движения:

$$[J_1 + J_2 + J_3 + m_3(R - s_3)^2] \ddot{\varphi}_{10} + 2m_3(R - s_3) \dot{R} \dot{\varphi}_{10} = M_1 - M_{\tau 1}; \quad (36.9)$$

$$(m_2 + m_3) \ddot{z} = F_2 - F_{\tau 2} - G_2 - G_3; \quad (36.10)$$

$$m_3 \ddot{R} - m_3(R - s_3) \dot{\varphi}_{10}^2 = F_3 - F_{\tau 3}. \quad (36.11)$$

Закон изменения координаты z находится непосредственно из решения уравнения (36.10), а для определения координат φ_{10} и R имеем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка (36.9) и (36.11), которая обычно решается численными методами на ЭВМ.

При цикловом управлении роботом часто перемещают захват сначала изменением координаты φ_{10} , а затем координаты R (или наоборот). Из уравнений движения (36.9) и (36.11) следует, что изменение координаты φ_{10} вызывает одновременно изменение координаты R . Во избежание взаимовлияния движений по координатам

Φ_{10} и R применяют фиксирующие устройства в заданных конечных положениях звеньев манипулятора.

Кинетостатический метод составления уравнений движения основан на уравнениях кинетостатики, в которых ускорения точек звеньев считаются искомыми. При составлении уравнений кинетостатического равновесия звена 3 считаем, что главный вектор реакции на звено 3 со стороны звена 2 F_{32} приложен в центре масс S_3 . Тогда уравнения кинетостатики в проекциях на оси x_3, y_3, z_3 имеют вид

$$\begin{aligned} F_3 - F_{\tau 3} - m_3 \ddot{R} + m_3 (R - s_3) \dot{\Phi}_{10}^2 &= 0, \\ -m_3 (R - s_3) \ddot{\Phi}_{10} - m_3 2 \dot{R} \dot{\Phi}_{10} + F_{32}^{y_3} &= 0, \\ -G_3 - m_3 \ddot{z} + F_{32}^{z_3} &= 0, \\ -J_3 \ddot{\Phi}_{10} + M_{32}^{z_3} &= 0, \\ M_{32}^{x_3} &= 0, \\ M_{32}^{y_3} &= 0. \end{aligned} \quad (36.12)$$

Для звена 2 при тех же предположениях уравнения кинетостатики в проекциях на оси x_2, y_2, z_2 имеют вид

$$\begin{aligned} -F_3 + F_{21}^{x_2} &= 0, \\ F_{23}^{y_2} + F_{21}^{y_2} &= 0, \\ F_2 - F_{\tau 2} - G_2 - m_2 \ddot{z} + F_{23}^{z_2} &= 0, \\ F_{23}^{z_2} (R - s_3) + M_{21}^{y_2} &= 0, \\ -J_2 \ddot{\Phi}_{10} + F_{23}^{y_2} (R - s_3) + M_{21}^{z_2} + M_{23}^{z_2} &= 0, \\ M_{21}^{x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (36.13)$$

Для звена 1 при составлении уравнений движения потребуется только одно уравнение моментов относительно оси z_1

$$M_1 - M_{\tau 1} - J_1 \ddot{\Phi}_{10} + M_{12}^{z_1} = 0. \quad (36.14)$$

Уравнение движения (36.11) получается непосредственно из первого уравнения (36.12). Уравнение движения (36.10) следует из третьего уравнения (36.13) после подстановки $F_{23}^{z_2} = -F_{32}^{z_3}$ из третьего уравнения (36.12). Наконец, уравнение движения (36.9) получается из (36.14) после подстановок $M_{12}^{z_1} = -M_{21}^{z_2}$ из пятого уравнения (36.13), $M_{23}^{z_2} = -M_{32}^{z_3}$ из четвертого уравнения (36.12) и $F_{23}^{y_2} = -F_{32}^{y_3}$ из второго уравнения (36.12).

Кинетостатический метод составления уравнений движения в последнее время применяется чаще, так как при составлении вычислительных программ для ЭВМ алгоритм вычислений хорошо согласуется с алгоритмом кинематического анализа по методу преобразования координат (методу Морошкина). Важно также, что в уравнения кинетостатики могут быть введены силы трения, зависящие от реакций в кинематических парах.

Обратная задача динамики манипулятора с цилиндрической рабочей зоной. Для манипулятора, схема которого показана на рис. 228, управляющими воздействиями, т. е. силами, действующими на звенья манипулятора со стороны приводов и обеспечивающими заданное движение рабочего органа (захвата), являются силы F_2 , F_3 поступательных приводов и момент пары сил M_1 вращательного привода. Законы изменения этих сил во времени при известных силах трения могут быть получены из уравнений движения (36.9) — (36.11):

$$\begin{aligned} M_1 &= [J_1 + J_2 + J_3 + m_3(R - s_3)^2] \ddot{\varphi}_{10} + 2m_3(R - s_3) \dot{R} \dot{\varphi}_{10} + M_{T1}, \\ F_2 &= (m_2 + m_3) \ddot{z} + F_{T2} + G_2 + G_3, \\ F_3 &= m_3 \ddot{R} - m_3(R - s_3) \dot{\varphi}_{10}^2 + F_{T3}. \end{aligned} \quad (36.15)$$

Законы изменения обобщенных координат $\varphi_{10}(t)$, $R(t)$, $z(t)$ и их производных получены из решения обратной задачи кинематики.

При силах трения, зависящих от переменных реакций в кинематических парах, управляющие воздействия M_1 , F_2 и F_3 находятся из уравнений кинетостатики аналогично задачам, решаемым при силовом расчете с учетом сил трения (§ 26).

Заметим, что определение управляющих воздействий в указанной постановке задачи как с учетом трения, так и без его учета может привести к случаю, когда для получения заданного движения рабочего органа (или захвата) в какой-то момент времени некоторые управляющие воздействия должны быть не силами движущими, а силами сопротивления. Если при решении обратной задачи динамики манипулятора требуется, чтобы все управляющие воздействия были только силами движущими, то в качестве неизвестных принимаются также дополнительные (корректирующие) массы, и задача усложняется.

§ 118. Системы управления манипуляторов

Манипуляторы с ручным управлением. Как уже указывалось, манипуляторы могут быть с ручным управлением и с автоматическим. Специфическим требованием, предъявляемым к системам ручного управления манипулятором, является возможность их «очувствования», т. е. между силами, приложенными к звеньям манипулятора, и силами, действующими на руку оператора, должно быть

определенное соответствие. Другими словами, оператор должен чувствовать те усилия, которые действуют на захват манипулятора.

При дистанционном управлении копирующим манипулятором применяются различные виды следящих систем, действие которых сходно с действием следящего привода, показанного на рис. 209, б. Отличительной особенностью является лишь свойство «ощущения», в зависимости от которого системы управления подразделяются на системы с пассивным отражением сил и системы с активным отражением сил, называемые также *обратимыми следящими системами*.

В системах с пассивным отражением сил оператор ощущает силы, действующие на исполнительный механизм, только в процессе изменения положения звена управления. При этом обратная связь, информирующая оператора о значениях сил, не влияет на работу следящего привода, т. е. не изменяет положений управляющих звеньев. Поэтому эта система называется также *односторонней*, так как управляющее воздействие поступает только от оператора.

В обратимых следящих системах обратная связь не только информирует оператора о значениях сил, действующих на исполнительный механизм, но и соответствующим образом изменяет положения управляющих звеньев. Эта система называется *двусторонней* или *обратимой*, так как ее следящий привод обеспечивает передачу движения в двух направлениях (от входа к выходу и обратно). На рис. 229 показана структурная схема обратимой следящей системы

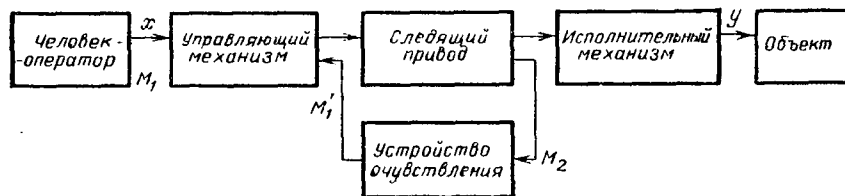


Рис. 229

манипулятора. Оператор прикладывает момент сил M_1 . Устройство «ощущения» измеряет момент M_2 на выходе привода и воздействует на управляющий механизм моментом M_1' . Этот момент влияет на положения управляющих звеньев, и потому рассогласование, т. е. разность между перемещениями на входе x и перемещениями на выходе y , зависит не только от воздействия оператора, но и от нагрузок, действующих на звенья исполнительного механизма.

Манипуляторы с автоматическим управлением. Системы автоматического управления манипуляторами строятся обычно по принципу программного управления, причем эти системы могут работать в двух режимах: режиме обучения и рабочем режиме. На рис. 230 показана структурная схема манипулятора с программным управле-

нием, который состоит из исполнительного механизма, снабженного системой сервоприводов, датчиков положений звеньев и вычислительной машины. В режиме обучения (ключ 1 замкнут, ключи 2 и 3 разомкнуты) оператор с помощью дополнительной обучающей системы проводит исполнительный механизм через требуемую последовательность рабочих положений. Информация об этой последовательности, получаемая от датчиков положений звеньев, кодируется (шифруется) и поступает в запоминающее устройство. В рабочем режиме (ключ 1 разомкнут, ключи 2 и 3 замкнуты) манипулятор работает автоматически по введенной ранее в запоминающее

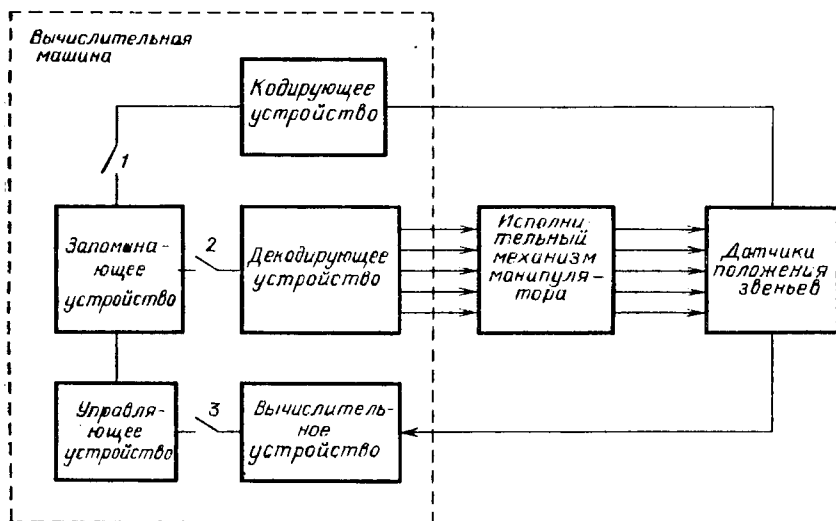


Рис. 230

устройство программе, которая декодируется (расшифровывается) и преобразуется в заданные движения звеньев исполнительного механизма. Кроме того, вычислительное устройство по сигналам от датчиков положений звеньев производит коррекцию работы манипулятора через управляющее устройство.

Системы управления промышленными роботами. Все системы управления промышленными роботами подразделяются на две группы: программное управление и адаптивное управление. *Программным управлением* называется автоматическое управление исполнительным устройством по заданной программе. *Адаптивным управлением* называется автоматическое управление, при котором в процессе управления изменяется алгоритм управления в функции состояния внешней среды и робота.

Программное управление, в свою очередь, подразделяется на два вида: контурное управление и позиционное. *Контурным управле-*

нием называется программное управление промышленным роботом, при котором движение его исполнительного устройства программируется в виде траектории в рабочем пространстве с непрерывным контролем по скорости. *Позиционным управлением* называется программное управление промышленным роботом, при котором движение его исполнительного устройства программируется по упорядоченной во времени конечной последовательности точек рабочего пространства без контроля движения между ними. Частным случаем позиционного управления является *цикловое управление*, при котором в программе фиксируются только начальные и конечные точки перемещений по каждой координате.

Цикловое управление используется на тех роботах, которые предназначены для подъемно-транспортных операций, связанных с обслуживанием металлорежущих станков, прессов, молотов и т. д. Входные сигналы подаются в блок управления от путевых (иначе — конечных) выключателей, на которые нажимают сменные упоры, установленные на подвижных звеньях манипулятора. Вместо сменных упоров могут быть использованы передвижные магниты. Одновременно для точной фиксации устанавливаются фиксирующие упоры, жестко определяющие конец перемещения по каждой координате. Для реализации циклового управления применяется релейная схема, так как все входные и выходные сигналы управления имеют только по два значения. Построение релейной схемы управления по значениям этих сигналов производится по таблице включений и ничем не отличается от построений, изложенных в § 113.

Позиционное управление по многим точкам или контурное управление, рассматриваемое как предельный случай позиционного управления при увеличении числа позиций, применяется для выполнения технологических операций типа сварки и покраски. Для реализации контурного управления необходимо уже использовать программноносители в виде перфоленты или магнитной ленты подобно тому, как они используются в станках с ЧПУ (см. § 109).

Наконец, для реализации адаптивного управления необходимо, чтобы в системе управления была специализированная ЭВМ, которая по данным измерения положений и скоростей точек подвижных звеньев или по состоянию внешней среды вычисляет поправки к программе управления.

Три поколения роботов. Промышленные роботы первого поколения имеют программное управление. Они могут быть или стационарными, или подвижными и широко применяются для выполнения основных и вспомогательных операций технологических процессов, в складских работах и т. п.

Промышленные роботы *второго поколения* — это очувствленные роботы. Очувствление, т. е. получение данных о внутреннем состоянии робота (положения и скорости звеньев) и о состоянии внешней среды, используется для адаптивного управления или же для выполнения отдельных операций, которые не могут быть реализованы

программным управлением (например, захват произвольно расположенных предметов; движение по контурам, нанесенным на внешних предметах). Роботы второго поколения допускают супервизорное управление, т. е. управление попеременно оператором и автоматической системой, действующей по указаниям оператора. Эти роботы существуют пока только в виде немногих опытных образцов.

Промышленные роботы *третьего поколения*, называемые также роботами с элементами искусственного интеллекта, имеют развитую систему чувствительных (иначе, сенсорных) устройств, включая техническое зрение, которая позволяет после обработки получаемой информации распознавать образы, давать анализ состояния внешней среды и даже принимать некоторые решения по составлению программы. Эти роботы находятся еще в стадии поисковых научно-исследовательских работ.

Уровни управления. Различают три уровня управления манипулятором, которые располагаются в иерархическом порядке.

Первый (низкий) уровень формирует управление приводами. Программа управления на этом уровне задает значения каждой обобщенной координаты манипулятора. Задачи построения системы управления первого уровня решаются обычными методами теории автоматического управления. В зависимости от требований, предъявляемых к точности выполнения заданных движений, используется или следящий привод, или привод с жесткой программой, определяемой размерами управляющего устройства. Примером такого устройства может служить регулируемый дроссель объемного гидрпривода, показанный на рис. 77.

Второй (средний или тактический) уровень формирует команды, управляющие низким уровнем, по заданным комплексным командам типа ВЗЯТЬ, ПЕРЕНЕСТИ, ОТКРЫТЬ ДВЕРЦУ и т. п. Эти команды расшифровываются вычислительной машиной и переводятся на язык низшего уровня.

Третий (высший или стратегический) уровень формирует команды тактического уровня по командам, выражающим цель производимых работ, т. е. по командам типа СОБРАТЬ УЗЕЛ, РАЗГРУЗИТЬ КОНТЕЙНЕР и т. п. Эти обобщенные команды переводятся на язык тактического уровня с учетом информации о свойствах внешней среды, рабочих объектов и манипулятора, причем возможные варианты достижения заданной цели определяются и сравниваются по критериям оптимизации. Стратегический уровень управления пока не возможен без участия человека.

Интерполяционные алгоритмы управления. *Алгоритмом* называется совокупность предписаний, определяющих содержание и последовательность операций, переводящих исходные данные в искомый результат. Соответственно *алгоритмом управления манипулятором* назовем совокупность предписаний, определяющих движение захвата для выполнения заданной цели. К интерполяционным алгоритмам управления отнесем те алгоритмы, при построении которых

используются методы интерполирования. Пусть, например, для пространственного манипулятора с тремя степенями свободы (обобщенные координаты q_1 , q_2 и q_3) надо найти алгоритм управления приводами при воспроизведении пространственной траектории некоторой точки захвата

$$F(x, y, z) = 0. \quad (36.16)$$

В соответствии с кинематической схемой манипулятора обобщенные координаты q_1 , q_2 и q_3 могут быть представлены как функции постоянных параметров схемы механизма и координат заданной траектории

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(l_1, \dots, l_m, x, y, z), \\ q_2 &= f_2(l_1, \dots, l_m, x, y, z), \\ q_3 &= f_3(l_1, \dots, l_m, x, y, z). \end{aligned} \quad (36.17)$$

Обозначим значения координат x , y , z в узлах интерполирования через x_k , y_k , z_k при $k=0, 1, \dots, n$. Тогда из условий точного воспроизведения этих координат имеем уравнения для определения обобщенных координат q_{1k} , q_{2k} и q_{3k} , соответствующих узлам интерполирования:

$$\begin{aligned} q_{1k} &= f_1(l_1, \dots, l_m, x_k, y_k, z_k), \\ q_{2k} &= f_2(l_1, \dots, l_m, x_k, y_k, z_k), \\ q_{3k} &= f_3(l_1, \dots, l_m, x_k, y_k, z_k). \end{aligned} \quad (36.18)$$

Следовательно, систему управления приводами манипулятора при одновременном их действии надо построить так, чтобы обобщенные координаты q_1 , q_2 , q_3 (например, углы поворота смежных звеньев) принимали одновременно значения q_{1k} , q_{2k} и q_{3k} . Эти значения фиксируются, как и при числовом программном управлении, на каком-либо программоносителе и затем реализуются шаговыми двигателями или двигателями с набором переключателей. Вычисления по уравнениям (36.18) могут выполняться непосредственно на ЭВМ, встроенной в систему управления манипулятором. Тогда вычисленные в режиме обучения значения q_{1k} , q_{2k} , q_{3k} идут в память машины и могут многократно использоваться при воспроизведении траектории (36.16).

Указанный алгоритм соответствует позиционному управлению. При увеличении числа узлов интерполирования позиционное управление переходит в контурное.

Применение уравнений (36.18) предполагает, что на основании решения задачи о положениях захвата получены в явном виде выражения (36.17) для обобщенных координат. Во многих случаях эти выражения оказываются достаточно сложными. Более простой алгоритм управления получается, если задавать траекторию (36.16),

в виде параметрических уравнений *):

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Положение точки C захвата, которая должна описывать заданную траекторию, определяется выражениями

$$x_c = x_c(l_1, \dots, l_m, q_1, \dots, q_r),$$

$$y_c = y_c(l_1, \dots, l_m, q_1, \dots, q_r),$$

$$z_c = z_c(l_1, \dots, l_m, q_1, \dots, q_r),$$

где r — число степеней свободы манипулятора.

Обозначим через $q_{ik} = q_{ik}(x_{ck}, y_{ck}, z_{ck}, l_1, \dots, l_m)$, $i = 1, \dots, r$; $k = 0, 1, \dots, n$, значения обобщенных координат, соответствующие положениям звеньев манипулятора в выбранных точках заданной траектории; u_k — значения параметра u в тех же точках.

Тогда, считая, что значения q_{ik} и u_k определяются в режиме обучения манипулятора, можно найти непрерывные значения обобщенных координат q_i , представляя каждую координату интерполяционным многочленом Лагранжа:

$$q_i(u) = L_0(u)q_{i0} + L_1(u)q_{i1} + \dots + L_n(u)q_{in}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (36.19)$$

где

$$L_n(u) = \frac{(u - u_0) \dots (u - u_{i-1})(u - u_{i+1}) \dots (u - u_n)}{(u_i - u_0) \dots (u_i - u_{i-1})(u_i - u_{i+1}) \dots (u_i - u_n)}.$$

Подавая непрерывно изменяющийся во времени параметр $u = u(t)$ на вход вычислительного устройства, воспроизводящего соотношения (36.19), можно обеспечить управление плавным движением захвата по заданному закону:

$$x_c = x_c[u(t)], \quad y_c = y_c[u(t)], \quad z_c = z_c[u(t)].$$

Использование этого алгоритма позволяет отказаться от представления в явном виде преобразования декартовых координат захвата в обобщенные координаты манипулятора. При этом точность воспроизведения заданной кривой между узлами интерполирования определяется степенью интерполяционного многочлена. По сравнению с контурным (непрерывным) управлением применение интерполяционных многочленов в условиях позиционного управления позволяет уменьшать необходимый объем памяти, обеспечивая одновременно необходимую точность воспроизведения заданной кривой.

Оптимизационные алгоритмы управления. Оптимизационными называются те алгоритмы управления, в которых искомые законы изменения обобщенных координат манипулятора определяются по заданным траекториям точек захвата с одновременным выполнением ограничений и получением оптимальных значений критериев каче-

*) Игнатьев М. Б., Кулаков Ф. М., Покровский А. М. Алгоритмы управления роботами-манипуляторами. — М.: Машиностроение, 1977.

ства (минимум кинетической энергии, минимум общих затрат энергии, максимальный к. п. д., минимум времени перемещения из одной позиции в другую и т. п.). Оптимизационные алгоритмы называют также *экстремальными*, так как получение оптимальных значений критериев качества сводится к решению задачи о нахождении законов изменения обобщенных координат (управляющих воздействий) по заданной цели при дополнительном условии экстремума функционала, зависящего от управляющих воздействий и постоянных параметров схемы манипулятора (длины звеньев, масс, моментов инерции и т. п.).

Использование экстремальных алгоритмов управления возможно лишь в случае, если манипулятор обладает маневренностью, т. е. имеются избыточные степени свободы. Пусть, например, требуется воспроизвести движение точки захвата по плоской кривой при помощи манипулятора, кинематическая схема которого показана на рис. 17. Манипулятор имеет три степени свободы, и за обобщенные координаты можно принять углы поворота φ_{10} , φ_{21} и φ_{32} . Для воспроизведения заданной плоской кривой достаточно иметь две степени свободы, и следовательно, две обобщенные координаты можно найти по алгоритмам позиционного или контурного управления. Третья обобщенная координата используется для того, чтобы удовлетворить условиям экстремума какого-либо функционала, выражающего критерий качества. Поставленная задача решается методами вариационного исчисления с применением ЭВМ.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ *)

I. Русские термины

	D	E	F**)	Стр.
1. Вход механизма	4	22	26	20
2. Выход механизма	1	55	71	21
3. Динамика механизмов	30	15	23	13
4. Замыкание, геометрическое	19	6	28	504
5. Замыкание, силовое	45	5	27	504
6. Зацепление, зубчатое	75	20	25	438
7. Звено механизма	38	28	59	20
8. Звено, ведомое	33	29	63	21
9. — , ведущее	69	30	64	21
10. — , входное	5	32	60	20
11. — , выходное	2	33	61	21
12. — , начальное	3	31	62	34
13. Кинематика механизмов	31	26	6	13
14. Колесо, зубчатое	77	19	68	30
15. Колесо, фрикционное	57	77	67	31
16. Координата механизма, обобщенная	41	7	9	34
17. Коромысло	64	69	34	27
18. Коэффициент полезного действия механизма	76	16	8	135
19. Кривая, шатунная	44	10	77	392
20. Кривошип	48	9	33	27
21. Кулачок	51	2	4	30
22. Кулиса	59	21	10	27
23. Масса, заменяющая	18	37	35	350
24. Маховик	65	17	78	222
25. Механизм	26	38	36	19
26. Механизм двухкривошипный	9	42	40	27
27. — , дифференциальный	8	41	47	109
28. — , заменяющий	17	44	48	511
29. — , кривошипно-коромысловый	50	40	43	27
30. — , кривошипно-ползунный	63	50	49	27
31. — , кулачковый	52	39	38	30
32. — , кулисный	49	24	39	27
33. — , мальтийский	53	45	46	27
34. — , планетарный	74	48	51	106
35. — , плоский	27	47	50	26
36. — , пространственный	56	51	44	26

*) Приложение составлено по рекомендациям Международной организации по стандартам (ИСО ТК 10 ПК-4) и Комитета научно-технической терминологии АН СССР. Запятая после какого-либо слова в термине указывает на то, что слова после запятой должны предшествовать словам, находящимся до запятой.

**) В графах D, E, F указаны соответственно порядковые номера немецких, английских и французских эквивалентов.

	D	E	F	Стр.
37. Механизм, прямолинейно-направляющий	23	53	30	425
38. —, рычажный	43	35	42	26
39. —, рычажный с выстоем	55	43	37	430
40. —, с избыточными связями	29	46	41	36
41. —, синусный	46	49	52	27
42. —, сферический	28	52	53	29
43. —, шарнирный	21	34	45	26
44. Обращение движения	73	23	31	355
45. Окружность, делительная	67	4	7	457
46. Отношение передаточное	71	68	66	31
47. Пантаграф	66	64	55	428
48. Пара, винтовая	61	57	15	24
49. —, вращательная	11	62	19	24
50. —, высшая	15	58	18	24
51. —, кинематическая	14	59	13	21
52. —, низшая	16	60	16	24
53. —, поступательная	62	61	11	24
54. —, сферическая	47	63	17	24
55. —, цилиндрическая	12	56	14	24
56. План скоростей	24	13	22	66
57. План ускорений	6	11	21	66
58. Ползуны	58	70	29	27
59. Рейка, зубчатая	78	67	20	459
60. Синтез механизмов	35	71	72	391
61. — —, динамический	36	72	74	391
62. — —, кинематический	37	73	73	391
63. — —, структурный	70	74	75	38
64. Стойка	25	18	2	20
65. Схема механизма, кинематическая	34	12	69	50
66. — —, структурная	68	14	70	38
67. Теория механизмов	32	75	76	18
68. Уравновешивание масс	54	1	1	350
69. Цепь, кинематическая	40	3	5	24
70. Червяк	60	78	32	487
71. Четырехзвенник, шарнирный	22	36	65	27
72. Число степеней свободы механизма	7	54	54	34
73. Шаг винтовой линии	20	27	58	488
74. Шаг, диаметральный	13	66	57	457
75. —, окружной	72	65	56	457
76. Шарнир, карданный	39	25	12	25
77. Шагун	42	8	3	27
78. Эллисограф	10	76	24	27

II. Немецкие термины

1. Abtrieb	2*)	12. Drehschubgelenk	55
2. Abtriebsglied	11	13. Durchmessererteilung	74
3. Anfangsglied	12	14. Elementenpaare	51
4. Antrieb	1	15. —, höhere	50
5. Antriebsglied	10	16. —, niedere	52
6. Beschleunigungsplan	57	17. Ersatzgetriebe	28
7. Beweglichkeitsgrad	72	18. Ersatzmasse	23
8. Differentialgetriebe	27	19. Formschluß	4
9. Doppelkurbel	26	20. Ganghöhe	73
10. Doppelschieber	78	21. Gelenkgetriebe	43
11. Drehgelenk	49	22. Gelenkviereck	71

*) Числа обозначают порядковый номер русского термина.

23. Geradföhrung	37
24. Geschwindigkeitsplan	56
25. Gestell	64
26. Getriebe	25
27. —, ebenes	35
28. —, sphärisches	42
29. —, übergeschlossenes	40
30. Getriebedynamik	3
31. Getriebekinetik	13
32. Getriebelehre	67
33. Getriebeglied	8
34. Getriebeschema	65
35. Getriebesynthese	60
36. —, dynamische	61
37. —, kinematische	62
38. Glied	7
39. Kardangelen	76
40. Kette, kinematische	69
41. Koordinate eines Getriebes, verallgemeinerte	16
42. Koppel	77
43. Koppelgetriebe	38
44. Koppelkurve	19
45. Kraftschluß	5
46. Kreuzschubkurbel	41
47. Kugelgelenk	54
48. Kurbel	20
49. Kurbelschleife	32
50. Kurbelschwinge	29

51. Kurven	21
52. Kurvengetriebe	31
53. Malteserkreuzgetriebe	33
54. Massenausgleich	68
55. Rastgetriebe	39
56. Raumgetriebe	36
57. Reibrad	15
58. Schieber	58
59. Schleife	22
60. Schnecke	70
61. Schraubenpaar	48
62. Schubgelenk	53
63. Schubkurbelgetriebe	30
64. Schwinge	17
65. Schwungrad	24
66. Storchschnabelgetriebe	47
67. Teilkreis	45
68. Typenschema	66
69. Treibglied	9
70. Typensynthese	63
71. Übersetzungsverhältnis	46
72. Umfangsteilung	75
73. Umkehrung	44
74. Umlaufgetriebe	34
75. Verzahnung	6
76. Wirkungsgrad	18
77. Zahnrad	14
78. Zahnstange	59

III. Английские термины

1. Balancing, mass	68
2. Cam	21
3. Chain, kinematic	69
4. Circle, pitch	45
5. Closure force	5
6. —, forme	4
7. Co-ordinate of a mechanism, generalized	16
8. Coupler	77
9. Crank	20
10. Curve, coupler	19
11. Diagram, acceleration vec- tor	57
12. —, kinematic	65
13. —, velocity vector	56
14. —, type	66
15. Dynamics of mechanisms	3
16. Efficiency	18
17. Flyer	24
18. Frame	64
19. Gear	14
20. Gearing	6
21. Guide	22
22. Input	1
23. Inversion of motion	44
24. Inversion of slider-crank me- chanism	32

25. Joint, Hooke's universal	76
26. Kinematics of mechanisms	13
27. Lead of screw	73
28. Link of mechanism	7
29. —, driven	8
30. —, driving	9
31. —, initial	12
32. —, input	10
33. —, output	11
34. Linkage of bars	43
35. Linkage with lower pairs	38
36. Linkage, four-bar	71
37. Mass, equivalent	23
38. Mechanism	25
39. —, cam	31
40. —, crank-and-rocker	29
41. —, differential	27
42. —, drag-link	26
43. —, dwell	39
44. —, equivalent	28
45. —, Geneva	33
46. —, overclosed	40
47. —, planar	35
48. —, planetary gear	34
49. —, Scotch-yoke	41
50. —, slider-crank	30
51. —, spatial	36

52. Mechanism, spherical	42
53. —, straight-line	37
54. Number of degrees of freedom	72
55. Output	2
56. Pair, cylindrical	55
57. —, helical	48
58. —, higher	50
59. —, kinematic	51
60. —, lower	52
61. —, prismatic	53
62. —, revolute	49
63. —, spherical	54
64. Pantograph	47

65. Pitch, circular	75
66. —, diametral	74
67. Rack	59
68. Ratio, velocity	46
69. Rocker	17
70. Slider	58
71. Synthesis of mechanisms	60
72. —, dynamic	61
73. —, kinematic	62
74. — type	63
75. Theory of mechanisms	67
76. Trammel, elliptic	78
77. Wheel, friction	15
78. Worm	70

IV. Французские термины

1. Balancement des masses	68
2. Base	64
3. Bielle	77
4. Came	21
5. Chaîne cinématique	69
6. Cinématique des mécanismes	13
7. Circonférence de base	45
8. Coefficient d'effectivité du mécanisme	18
9. Coordonnée généralisée du mécanisme	16
10. Coulisse	22
11. Couple à glissière	53
12. — articulé de Hook	76
13. — cinématique	51
14. — cylindrique	55
15. — helicoidal	48
16. — inférieur	52
17. — sphérique	54
18. — supérieur	50
19. — tournant	49
20. Crémaillère	59
21. Diagramme vectoriel des accélérations	57
22. — des vitesses	56
23. Dynamique des mécanismes	3
24. Ellipsographe	78
25. Engrenage	6
26. Entrée du mouvement	1
27. Fermeture dynamique	5
28. — géométrique	4
29. Glissière	58
30. Guide rectiligne	37
31. Inversion du mouvement	44
32. Limaçon	70
33. Manivelle	20
34. — oscillant	17
35. Masse équivalente	23
36. Mécanisme	25
37. — à arrêt prolongé	39
38. — à came	31
39. — à coulisse	32

40. — à deux manivelles	26
41. — à excès de joints	40
42. — à levier	38
43. — à manivelles oscillante et tournante	29
44. — à mouvement spatial	36
45. — à tiges articulées	43
46. — de la croix de Malte	33
47. — différentiel	27
48. — équivalent	28
49. — glissière — manivelle	30
50. — plan	35
51. — planétaire	34
52. — sinusoïdal	41
53. — sphérique	42
54. Nombre des degrés de liberté du mécanisme	72
55. Pantographie	47
56. Pas d'engrenage	75
57. Pas diametral	74
58. Pas du filet	73
59. Pièce	7
60. Pièce d'entrée	10
61. — de sortie	11
62. — initial	12
63. — menée	8
64. — motrice	9
65. Quadrilatère articulé	71
66. Rapport de transmission	46
67. Roue à friction	15
68. Roue d'engrenage	14
69. Schema cinématique	65
70. Schema structural	66
71. Sortie du mouvement	2
72. Synthèse des mécanismes	60
73. — cinématique	62
74. — dynamique	61
75. — structurale	63
76. Théorie des mécanismes	67
77. Trajectoire d'un point de la bielle	19
78. Volant	24

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амонтон Г. (Amontons G.) 115, 120
 Аппель П. (Appel P.) 159
 Артоболевский И. И. 43, 425, 427, 432
 Ассур Л. В. 41, 76, 127

Бессонов А. И. 279
 Брумберг Р. М. 504
 Буль Дж. (Boole G.) 537

Вульфсон И. И. 186

Гавриленко А. Г. 460
 Герц Е. В. 252
 Гиббс Дж. (Gibbs Y.) 159
 Гуляев К. И. 485

Джолдасбеков У. А. 78
 Диевский В. А. 269
 Добровольский В. В. 22, 38, 425

Есипенко Я. И. 425

Жуковский П. Е. 130, 142

Игнатов М. Б. 581
 Ишлинский А. Ю. 115

Кардан Д. (Cardano G.) 25
 Кобринский А. Е. 318
 Кожеников С. П. 419, 425
 Коловский М. Э. 186
 Кононенко В. О. 278
 Крагельский И. В. 115
 Крейнин Г. В. 252
 Крылов А. Н. 46, 49
 Кулаков Ф. М. 581
 Кулон Ш. О. (Coulomb C.) 115
 Кутцбах К. (Kutzbach K.) 107

Левитская О. И. 498, 500
 Левитский Н. И. 402, 408, 414, 427, 432
 Леонардо Да Винчи 11
 Львович А. Ю. 269

Максвелл Дж. К. (Maxwell J.) 262
 Морошкин Ю. Ф. 50, 54, 97

Неймарк Ю. И. 45
 Никитин А. А. 498
 Новиков М. И. 476
 Новоселов В. С. 280

Оливье Т. (Olivier T.) 448

Покровский А. М. 581
 Поляхов Н. Н. 269

Раскин Я. М. 425
 Рело Ф. (Reuleaux F.) 442
 Решетов Л. Н. 37, 508
 Робертс С. (Roberts S.) 428

Саркисян Ю. А. 414
 Сильвестр Дж. (Sylvester J.) 428
 Смирнов Л. И. 107

Тредгольд Т. (Tredhold T.) 482

Фуфаев Н. А. 45

Цуханова Е. Н. 525

Чебышев П. Л. 14, 401, 426, 430, 521
 Черкудинов С. А. 427, 432

Шанкин А. С. 437

Эйлер Л. (Euler L.) 453

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 292
 Автоматическая линия 19, 527
 Автооператор 566
 Аксоид звена 440
 Алгебра логики 541—546
 Алгоритм 549
 — управления манипулятором 579
 Алгоритмы управления оптимизацион-
 ные (экстремальные) 581, 582
 Амонтона формула 115, 120
 Анализа механизма 19, 50
 Аналог скорости 64
 — углового ускорения 65
 — угловой скорости 64
 — ускорения 64
 Антирезонанс 384
 Аппеля уравнения 159
 Ассур группы 127
 — точки 76

Балансировка жестких роторов 344—348
 Белый шум
 Билинейные коварианты 45, 46

Бал гибкий 349
 — жесткий 349
 Ван-дер-Поля метод 214, 215
 Вероятность случайной величины 229
 Вибратор центробежный 273—276
 Виброгашение 365
 Виброизолятор одноосный 365—371
 Виброизоляция 365
 Виттенбауэра диаграмма 221—222
 — метод 219—222
 Водило 106, 107
 Вход механизма 20
 Выбег 134
 Выход механизма 21
 Вязкость динамическая 117

Галеркина метод 207—209
 Геликоид 442
 Генератор 33
 Гиббса функция 159
 Гидродвигатель 243, 244
 Гидравсос 243

Гидропривод 33, 243, 245, 249—251, 519
 Гипоциклоида 473
 Гистерезис петли 203
 Главные центральные оси инерции тела 126, 143
 Гурвица критерий устойчивости 198—200, 324, 380

Давление в смазочном слое 118—120
 Даламбера принцип 124
 Движение асимптотически устойчивое 197
 — возмущенное 197
 — невозмущенное 196
 — нейтрально устойчивое 197
 — установившееся 216, 217
 Двоичный код 530, 531
 Декремент логарифмический 177
 Демпфер (катакт) 321
 Демпфирование относительное 166
 Динамика механизмов 13
 Динамический гаситель колебаний 383—390
 Дисбаланс статический 341
 Дисперсия 231
 — случайного процесса 234
 Дифференциал 109, 110, 147, 502, 503

Жуковского теорема 130, 131, 142

Замыкание геометрическое 504, 510
 — силовое 504
 Зацепление зубчатое 438, 440, 464, 468
 — — квазиэвольвентное 483
 — — круговинтовое 476
 — — сферическое эвольвентное 482
 — — цевочное 475
 — — циклоидальное 474
 — — часовое 475
 — — червячное 487—489
 Звено механизма 20
 — базисное 76
 — ведомое 21
 — ведущее 21
 — входное 20
 — выходное 21
 — начальное 34
 — приведения 138
 — с переменной массой 285

Изображения 167, 168
 Интеграл энергии 138, 142
 Интерференция зубьев 466
 Ишлинского — Крагельского формула 115

Жамуса теорема 473, 474
 Кинематика механизмов 13
 Колебания вынужденные 179
 — гармонические 173
 — затухающие 177
 — периодические 173
 — релаксационные 289
 — свободные 174
 — установившиеся 181
 Колеса конические 484
 — косозубые 471, 472
 — некруглые 477—479
 Колесо гибкое 32
 — зубчатое 30
 — опорное 106
 — солнечное 106
 — червячное 487

Координата циклическая 147
 Координаты обобщенные 34, 57, 155
 Коробка передач 500
 Коромысло 27, 504
 Коэффициент демпфирования 164, 166
 — жесткости кинематической цепи 304—311
 — полезного действия 135—137
 — — мгновенный 135
 — — цикловой 135
 — рассеяния 203
 — сервиса 568
 — эффективности виброзащиты 301, 369
 Кривошип 27
 Критерий оптимизации 393
 Кулачковый командоаппарат 535
 Кулачок 504—519
 Кулиса 27
 Кутцбаха — Смирнова метод 107

Лагранжа — Максвелла уравнения 262
 — — функция 264
 — уравнение второго рода 145, 146
 — уравнения с неопределенными множителями 155
 — функции 262
 Лапласа преобразование 167—169
 Линия зацепления 443
 — контактная 447
 — узлов 81
 Логические операции 536—540
 — элементы 536
 Логический такт 549

Манипулятор 39, 40, 89, 90, 562—575
 Масса приведенная механизма 141
 Математическое ожидание 231, 234
 Матриц теория 51—54
 — транспонирование 81
 Матрица переноса 310
 Матрицы поворота 81
 Матвея уравнение 318
 Машина 18, 20
 Машина-автомат 19, 527
 Машина вибрационная 333
 Маховик 222, 225
 Метод гармонического баланса 205, 206
 — комплексных амплитуд 181—184
 — ложных положений 78
 — малого параметра 209
 — медленно меняющихся параметров 214, 215
 — профильных нормалей 442
 — случайного поиска 397
 — точечных преобразований 215—218
 — уравнивания отклонений 407
 Механизм 11, 19, 20
 — гидравлический 19, 33, 519—526
 — двухкулисный 27, 28
 — зубчато-рычажный 31, 435—437
 — зубчатый 30, 437—485
 — интегрирующий 45, 46
 — коромысло-ползунный 27, 28
 — кривошипно-ползунный 27, 28, 353—355
 — кулачковый 30, 328—333, 504—519
 — — уравнивающий 356
 — кулисный 27, 28
 — логический 536, 537, 539
 — мальтийский 27, 29, 432—435
 — мгновенный заменяющий 102
 — направляющий 425—430
 — обращенный 108
 — передаточный 408—418
 — планетарный 30, 106—109, 490—501
 — плоский 26, 35, 38

Механизм пневматический 19, 34
 — пространственный 26, 38
 — кривошипно-ползуновый 94—98
 — рычажный 311—318
 — с гибкими звеньями 32
 — с избыточными связями 36—38
 — с переменными массами 279
 — двойного параллелограмма 37
 — синусный 27, 28
 — сферический 29
 — уравновешенный 349, 350
 — фрикционный 31, 501—504
 — шаговый 432
 — шарнирного четырехзвенника 27, 34, 36—40, 71, 130, 131, 409, 418
 — шарнирно-зубчатый 31
 — шарнирный 26, 27, 36, 430—432
 — эксцентриковый 102
 — эллипсографа 27, 28
 Мещерского уравнение 280
 Михайлова критерий устойчивости 200
 Модуль зуба 457
 Момент инерции приведенный 139, 140
 — сил приведенный 139
 — трения качения 116
 — уравновешивающий 130
 Монте-Карло метод 397

Найквиста критерий устойчивости 200, 201
 Начальные окружности 105
 Несущая способность смазочного слоя 120
 Новикова цилиндрическая передача 476
 Нормальное распределение 232
 Ньютона формула 117, 121

Окружность делительная 457
 — начальная 456
 — основная 454
 Оливье способ образования сопряженных поверхностей 448, 449
 Оптимизация в синтезе механизмов 396
 Оригиналы 167, 168
 Ось зацепления 440
 Отклик системы 165

Пара кинематическая 21, 22
 — винтовая 23, 84
 — вращательная 23, 84, 123
 — высшая 24
 — низшая 24
 — плоскостная 23
 — поступательная 23, 84, 120
 — сферическая 23, 35, 84, 126
 — с пальцем 23
 — цилиндр — плоскость 23
 — цилиндрическая 23, 35, 84, 126
 — шар — плоскость 23, 126
 Пары кинематические 22
 Передаточное отношение 31, 32, 105, 106, 108, 109, 187, 440, 453, 457, 489, 494
 Передача бесступенчатая 32, 501—504
 — волновая 32, 33
 — гиперболоидная 485—487
 — карданная 29, 92—94
 — коническая 479—481
 — планетарная 106, 107, 490—501
 — спиральная 487
 — цилиндрическая 453
 — червячная 487—490
 Период условный линейных затухающих колебаний 178
 План механизма 67

План сил 129
 — скоростей 70, 71
 — ускорений 73
 Плотность вероятности 229, 233
 Пневмопривод 243, 251, 255, 259
 Поверхности сопряженные 438, 442—448
 Поверхность зацепления 448
 Поводок 76
 Податливость динамическая комплексная 196
 Подвижность пары 35
 Подрезание зубьев 468, 469
 Ползуны 27
 Полное зацепления 103, 104, 439, 473
 — плана скоростей 68
 Привод 243
 — следящий 528
 Принцип затвердевания 284
 Принципы освобожденности от связей 162

Разбег 134
 Рауса критерий устойчивости 198, 199
 Рауса — Феррерса уравнения 155
 Регулятор центробежный 319—322, 325—327
 Резонанс 193
 Рейка 459
 Реле 538
 Рело метод графический 442
 Роберта теорема 428, 430
 Робот промысловый 12, 16, 564—568
 — , системы управления 577—580
 Роботов поколения 578, 579
 Роль диссипативная функция 147

Самоторможение 133
 Сателлит 30, 106, 495—498
 Связи 44
 — геометрические 44
 — голономные 35
 — дифференциальные 44
 — избыточные (пассивные) 36
 — неголономные 44, 46, 47
 Связь обратная 381
 Сигнал 537
 Сила приведенная 141
 Силы обобщенные 146
 Сильвестра пантограф 428
 Синтез механизма 391
 — динамический 391
 — кинематический 391
 — приближенный 401—403
 — структурный 38
 Синтеза условия 392, 393, 395, 396
 Система управления 527
 — логическая 537
 — по времени 532
 — по пути 536, 546—557
 — самонастраивающаяся (адаптивная) 532
 Случайная величина 228
 Случайный процесс 232, 235, 236
 Соединение кинематическое 25, 26
 Спектральная плотность 240, 241
 Среднее квадратическое отклонение 232
 Стойка 20

Таблица включения 540
 — состояний 543
 Тактограмма машины-автомата 530
 — реализуемая 546
 Теорема зацепления основная 438, 439
 Теория машин 11
 — механизмов 11
 — и машин 11, 14, 15

Толкатель 504
 Тормозное устройство 244, 519—526
 Точка изображающая 215
 — приведения 141
 Транспортёр вибрационный 333—341
 Трение 114—116

Угол давления 134
 — зацепления 456
 — перекрытия зубчатого колеса 467
 — профиля 454
 — сервиса 568
 — трения 121
 — эвольвентный 455
 Уравнение основное гидродинамической теории смазки 118
 Уравнение кинестатики 124
 Уравновешивание масс механизма 349, 350
 — статическое вращающегося звена 341—343
 Условие кинестатической определенности 126, 127
 — непрерывности взаимодействия зубьев 466, 467
 Устойчивость движения 197

Фазовая траектория 215
 Фазовый портрет 215
 Фокус 295, 296
 Формулы исключения 550
 — —, унификация 562
 Фробениуса теорема 45
 Функции двоичные 541
 — —, упрощение 544
 Функции корреляционная случайного процесса 234
 — передаточная динамическая 188, 189
 — — кинематическая 187
 — — частотная 190, 191
 — положения 56, 187
 — распределения вероятности 230
 — — случайного процесса 232
 — случайная 232
 — целевая 393
 — штрафная 398

Характеристика амплитудно-фазовая частотная 192
 — амплитудно-частотная 191

Характеристика логарифмическая частотная 193
 — силы 137
 — — жесткая 202
 — — мягкая 202
 — — существенно нелинейная 202
 — — типа зазор 202
 — фазо-частотная 191, 192
 — частотная 191
 — электродвигателя 266
 Хилла уравнение 318

Цепная система 307, 308
 Цикл предельный 216, 217
 Циклограмма 534
 Циклоида 473

Частота колебаний 173, 174
 — собственная 176, 178
 — события 229
 — угловая 174
 Чебышева механизм 426—428
 Червяк 487
 Черный ящик 555
 Число степеней свободы манипулятора 566, 567
 — — — механизма 22, 34—36
 Числовое программное управление 529, 530

Шаг диаметральный 457
 — нормальный 472
 — окружной 457
 — по начальной окружности 106
 — торцовый 472
 Шарикоподшипник 26
 Шарнир карданный 25, 26
 Шатун 27

Эвольвента 453
 — сферическая 482
 Эволюта 453
 Эйлера углы 81—83
 Электропривод 243, 262, 266
 Элемент обратной связи 555
 — памяти 547, 554
 Эллипсограф 27, 28
 Энергия кинетическая звена 140
 — — пространственного механизма 143
 Эпициклоида 473

«THEORY OF MECHANISMS AND MACHINES», 2nd edition

by N. I. LEVITSKIY

1. ABOUT THE AUTHOR

Nikolai Ivanovich Levitsky is an Honorary Science Worker, professor, Doctor of Technical Sciences, Chairman of the USSR Academy of Sciences terminology commission on the theory of mechanisms and machines and mechanical oscillations, member of the Editorial board of the magazine «Mashinovedenie» of the USSR Academy of Sciences. He has taken part in the work of International federation on the theory of machines and mechanisms (IFTOMM) and of International standards organization (ISO). He is a leading Soviet specialist in the theory of machines and mechanisms and is known as the author of publications on the synthesis of mechanisms, whose ideas found further development in many works of Soviet scientists,

2. ABSTRACT

This book gives an account of methods of research and design of modern machines and instruments meeting the requirements of the curriculum of the University course «Theory of mechanisms and machines» at departments of mechanics and mathematics.

The main parts of the book are the following: research of spatial mechanisms, oscillations in machines, design of mechanisms, including hydraulic and pneumatic mechanisms, theory of manipulators and industrial robots.

The book is intended for students of universities, teachers and post-graduate students of technical institutes, and also for designers of new mechanisms and machines.

3. CONTENTS

Part one

TYPE AND KINEMATIC ANALYSIS OF MECHANISMS

Chapter 1. Type of mechanisms

Chapter 2. Kinematic analysis of planar mechanisms with lower pairs

Chapter 3. Kinematic analysis of spatial mechanisms with lower pairs

Chapter 4. Kinematic analysis of mechanisms with higher pairs

Part two

GENERAL METHODS OF DYNAMIC ANALYSIS OF MECHANISMS

Chapter 5. Friction in kinematic pairs

Chapter 6. Power analysis of mechanisms

Chapter 7. Equations of motion mechanisms with holonomic constraints

Chapter 8. Equations of motion mechanisms with anholonomic constraints

Chapter 9. General methods of solution of linear equations of motion

Chapter 10. Dynamic characteristics of mechanisms

Chapter 11. General methods of solution of non-linear equations of motion

Chapter 12. Solution of equations of motion in the case of a random input

Chapter 13. Dynamics of mechanisms with hydraulic drive

Chapter 14. Dynamics of mechanisms with pneumatic actuator

Chapter 15. Dynamics of mechanisms with electric drive.

Chapter 16. Dynamics of mechanisms with variable masses

Part three

OSCILLATIONS IN MECHANISMS

- Chapter 17.** Friction oscillations in mechanisms
- Chapter 18.** Oscillations in mechanisms with elastic couplings and shafts
- Chapter 19.** Oscillations in linkages with lower pairs
- Chapter 20.** Oscillations in mechanisms of governor of speed
- Chapter 21.** Oscillations in cam mechanisms
- Chapter 22.** Vibrational conveyers
- Chapter 23.** Balancing of masses in mechanisms
- Chapter 24.** Balancing of forces in mechanisms
- Chapter 25.** Vibration isolation
- Chapter 26.** Dynamic dampening of oscillations

Part four

SYNTHESIS OF MECHANISMS

- Chapter 27.** General methods of synthesis of mechanisms
- Chapter 28.** Synthesis of mechanisms with lower pairs
- Chapter 29.** Synthesis of mechanisms of discontinuous action
- Chapter 30.** Synthesis of gearing
- Chapter 31.** Synthesis of gear and friction mechanisms
- Chapter 32.** Synthesis of cam mechanisms
- Chapter 33.** Synthesis of hydraulic mechanisms

Part five

THE BASIS OF THE MACHINES-AUTOMATONS

- Chapter 34.** Systems of control of machine-automatons
- Chapter 35.** Logical synthesis of systems of control of machines-automatons

The complete volume of the book — 40 quires.