

А. П. Маркеев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов механико-математических специальностей
университетов*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1990

ББК 22.21
М26
УДК 531(075.8)

Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 416 с.— ISBN 5-02-014016-3.

Книга представляет собой строгое, целостное и компактное изложение основных задач и методов теоретической механики. Она значительно отличается от существующих учебников по теоретической механике как по подбору материала, так и по способу его изложения. Основное внимание уделено рассмотрению наиболее содержательных и ценных для теории и приложений разделов динамики и методов аналитической механики; статика изучается как раздел динамики, а в разделе кинематики подробно обсуждаются общие основания кинематики системы; некоторые методические идеи являются новыми в учебной литературе.

Для студентов механико-математических факультетов университетов, а также для студентов втузов, обучающихся по специальностям «Механика» и «Прикладная математика», преподавателей механики, аспирантов.

Табл. 1. Ил. 157. Библиогр. 5 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук В. Г. Дёмин

М $\frac{1603020000-031}{053(02)-90}$ 70-89

ISBN 5-02-014016-3

© «Наука». Физматлит, 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	11
 Часть первая. КИНЕМАТИКА	
Глава I. Кинематика точки и системы	13
§ 1. Основные понятия, задачи кинематики	13
1. Пространство и время (13). 2. Материальная точка. Механическая система (14). 3. Задачи кинематики (14).	
§ 2. Кинематика точки	15
4. Векторный способ задания движения точки (15). 5. Координатный способ задания движения точки (15). 6. Естественный способ задания движения точки (16). 7. Круговое движение (19). 8. Скорость и ускорение точки в полярных координатах (19). 9. Криволинейные координаты (20).	
§ 3. Общие основания кинематики системы	23
10. Свободные и несвободные системы. Связи (23). 11. Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы (26). 12. Действительные и виртуальные перемещения. Синхронное варьирование (29). 13. Число степеней свободы (32). 14. Обобщенные координаты (32). 15. Координатное пространство (33). 16. Обобщенные скорости и ускорения (35). 17. Псевдокоординаты (36).	
§ 4. Кинематика твердого тела	38
18. Задачи кинематики твердого тела. Определение простейших перемещений (38). 19. Векторно-матричное задание движения твердого тела. Углы Эйлера (40). 20. Движение твердого тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование (42). 21. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела (43). 22. Скорость и ускорение твердого тела при поступательном движении (46). 23. О мгновенном кинематическом состоянии твердого тела (46). 24. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения (47). 25. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (49). 26. Движение вокруг неподвижной точки (50). 27. Плоское движение тела (53). 28. Кинематические инварианты. Кинематический винт (58).	
§ 5. Сложное движение точки	59
29. Основные определения (59). 30. Производная от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат (60). 31. Теорема о сложении скоростей (61). 32. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) (61).	
§ 6. Сложное движение твердого тела	63
33. Постановка задачи (63). 34. Сложение мгновенно поступательных движений (64). 35. Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей (64). 36. Кинематические уравнения Эйлера (65).	

37. Сложение мгновенных вращений вокруг параллельных осей (66).
 38. Пара вращений (67). 39. Сложение мгновенно поступательного и вращательного движений (68).

Часть вторая. ДИНАМИКА

Глава II. Основные понятия и аксиомы динамики	70
§ 1. Законы (аксиомы) Ньютона. Задачи динамики	70
40. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея (70). 41. Первый закон Ньютона (аксиома инерции). Сила (70). 42. Масса. Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики) (71). 43. Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек) (72). 44. Аксиома независимости действия сил (закон сложения сил) (72). 45. Активные силы и реакции связей (73). 46. Силы внешние и внутренние (74). 47. Задачи динамики. Равновесие. Статика (74).	
§ 2. Главный вектор и главный момент системы сил	75
48. Главный вектор системы сил (75). 49. Момент силы относительно точки и оси (75). 50. Главный момент системы сил (76).	
§ 3. Работа. Силовая функция. Идеальные связи	77
51. Работа системы сил (77). 52. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу (78). 53. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал (78). 54. Элементарная работа системы сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы (80). 55. Идеальные связи (82).	
Глава III. Дифференциальные вариационные принципы механики	85
§ 1. Принцип Даламбера — Лагранжа	85
56. Понятие о вариационных принципах механики (85). 57. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа) (85).	
§ 2. Принцип Журдена	88
58. Принцип Журдена (88).	
§ 3. Принцип Гаусса	89
59. Формулировка принципа Гаусса (принципа наименьшего принуждения) (89). 60. Физический смысл принципа Гаусса (91). 61. Экстремальное свойство реакций связей (92).	
Глава IV. Статика	93
§ 1. Статика произвольной механической системы	93
62. Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений) (93). 63. Общее уравнение статики в обобщенных координатах (96). 64. Эквивалентные системы сил (100).	
§ 2. Статика твердого тела	101
65. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела (101). 66. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (103). 67. О равнодействующей. Теорема Вариньона (105). 68. Частные случаи условий равновесия твердого тела (105). 69. Равнодействующая двух параллельных сил (110). 70. Теория пар (110). 71. Теорема Пуансо (112). 72. Статические инварианты. Динамический винт (112). 73. Частные случаи приведения системы сил (114).	
Глава V. Геометрия масс	116
§ 1. Центр масс. Момент инерции	116
74. Центр масс (116). 75. Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции (116). 76. Моменты инерции относительно параллельных осей (119).	
§ 2. Тензор и эллипсоид инерции	120
77. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку (120). 78. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции (121). 79. Свойства главных моментов инерции (123).	

Глава VI. Основные теоремы и законы динамики	125
§ 1. Основные динамические величины механической системы	125
80. Количество движения системы (125). 81. Главный момент количеств движения (кинетический момент) системы (125). 82. Кинетический момент твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки (127). 83. Кинетическая энергия системы. Теорема Кёнига (128). 84. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки (129).	
§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин системы	130
85. Общие замечания о теоремах и законах динамики (130). 86. Теорема об изменении количества движения (131). 87. Теорема об изменении кинетического момента (133). 88. Теорема об изменении кинетической энергии (138). 89. Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета (142). 90. О теоремах динамики для движения относительно центра масс (145).	
Глава VII. Динамика твердого тела	147
§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	147
91. Уравнение движения. Определение реакций (147). 92. Условия, при которых динамические реакции равны статическим (149). 93. Уравнение движения физического маятника (149). 94. Фазовая плоскость для уравнения движения маятника (150). 95. Некоторые сведения из теории эллиптических функций Якоби (153). 96. Интегрирование уравнения движения маятника (154).	
§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки	156
97. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера (156). 98. Первые интегралы (157). 99. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера (158). 100. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия (159). 101. Геометрическая интерпретация Пуансо (161). 102. Интегрирование уравнений Эйлера (162). 103. О гермологиях (167). 104. Определение ориентации твердого тела в абсолютном пространстве для движения Эйлера — Пуансо (168). 105. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки и их первые интегралы (169). 106. Основная формула гироскопии (172). 107. Об элементарной теории гироскопа (175).	
§ 3. Движение свободного твердого тела	179
108. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела (179). 109. Плоское движение тела (182).	
§ 4. Движение тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость	185
110. Общие сведения. Понятие о трении (185). 111. Волчок на абсолютно гладкой плоскости (186). 112. Влияние трения на движение волчка (189). 113. Движение однородного шара по плоскости при наличии трения (190). 114. Об уравнениях движения тяжелого тела произвольной выпуклой формы (193).	
Глава VIII. Элементы небесной механики	196
§ 1. Задача двух тел	196
115. Уравнения движения (196). 116. Интеграл площадей. Второй закон Кеплера (197). 117. Интеграл энергии в задаче двух тел (199). 118. Интеграл Лапласа (199). 119. Уравнение орбиты. Первый закон Кеплера (200). 120. Зависимость характера орбиты от величины начальной скорости. Первая и вторая космические скорости (201). 121. Третий закон Кеплера (202). 122. Время в кеплеровском движении. Уравнение Кеплера (203). 123. Кеплеровские элементы орбиты (204). 124. О задаче трех и более тел (205).	
§ 2. Движение твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле	205

125. Главный вектор сил тяготения. Гравитационный момент (205).
 126. Уравнения движения тела относительно центра масс (209).
 127. Относительное равновесие твердого тела на круговой орбите (211). 128. Плоские движения (212).

Глава IX. Динамика системы переменного состава	214
§ 1. Основные понятия и теоремы	214
129. Понятие о системе переменного состава (214). 130. Теорема об изменении количества движения (215). 131. Теорема об изменении кинетического момента (216).	
§ 2. Движение материальной точки переменного состава	217
132. Дифференциальное уравнение движения (217). 133. Движение ракеты вне поля сил (218). 134. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести (220).	
§ 3. Уравнения движения тела переменного состава	222
135. Движение вокруг неподвижной точки (222). 136. Вращение вокруг неподвижной оси (224).	
Глава X. Дифференциальные уравнения аналитической динамики	226
§ 1. Уравнения Лагранжа (второго рода)	226
137. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах (226). 138. Уравнения Лагранжа (228). 139. Анализ выражений для кинетической энергии (230). 140. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений (232). 141. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа (232). 142. Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы (233). 143. Гироскопические силы (235). 144. Диссипативные силы. Функция Рэля (236). 145. Обобщенный потенциал (238). 146. О составлении уравнений Лагранжа для описания движения в неинерциальной системе отсчета (239). 147. Естественные и неестественные системы (240).	
§ 2. Канонические уравнения Гамильтона	240
148. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона (240). 149. Уравнения Гамильтона (242). 150. Физический смысл функции Гамильтона (243). 151. Интеграл Якоби (244). 152. Уравнения Уиттекера и Якоби (245).	
§ 3. Уравнения Рауса	249
153. Функция Рауса (249). 154. Уравнения Рауса (250).	
§ 4. Уравнения движения неголономных систем	251
155. Уравнения движения с множителями связей (251). 156. Уравнения Воронца (253). 157. Уравнения Чаплыгина (255). 158. Уравнения Аппеля (260). 159. Вычисление энергии ускорений. Аналог теоремы Кенгига (263). 160. Энергия ускорений твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки (263).	
Глава XI. Интегрирование уравнений динамики	266
§ 1. Множитель Якоби	266
161. Множитель системы уравнений. Дифференциальное уравнение для множителя (266). 162. Инвариантность множителя. Последний множитель Якоби (269). 163. Приложение теории множителя к каноническим уравнениям (275).	
§ 2. Системы с циклическими координатами	276
164. Циклические координаты (276). 165. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса (277).	
§ 3. Скобки Пуассона и первые интегралы	282
166. Скобка Пуассона (282). 167. Теорема Якоби — Пуассона (283).	
§ 4. Канонические преобразования	285
168. Понятие канонического преобразования (285). 169. Критерий каноничности преобразования (287). 170. Ковариантность уравнений	

Гамильтона при канонических преобразованиях (290). 171. Канонические преобразования и процесс движения (293). 172. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема (294). 173. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция (294). 174. О других типах производящих функций (297).	
§ 5. Метод Якоби интегрирования уравнений движения	301
175. Уравнение Гамильтона — Якоби (301). 176. Уравнения Гамильтона — Якоби для систем с циклическими координатами (302). 177. Уравнение Гамильтона — Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем (303). 178. Разделение переменных (303). 179. Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновой системы в квадратурах (307).	
§ 6. Канонические преобразования в теории возмущений	310
180. Предварительные замечания (310). 181. Варияция постоянных в задачах механики (311). 182. Классическая теория возмущений (314). 183. О линейных гамильтоновых системах дифференциальных уравнений (316). 184. Преобразование Биркгофа. Приближенное интегрирование гамильтоновой системы уравнений вблизи положения равновесия (320).	
Глава XII. Интегральные вариационные принципы механики	327
§ 1. Принцип Гамильтона — Остроградского	327
185. Прямой и обратный пути голономной системы (327). 186. Принцип Гамильтона — Остроградского (330). 187. Принцип Гамильтона — Остроградского для системы в потенциальном поле сил (333). 188. Экстремальное свойство действия по Гамильтону (335).	
§ 2. Принцип Мопертюи — Лагранжа	340
189. Изоэнергетическое варьирование (340). 190. Принцип Мопертюи — Лагранжа (341). 191. Принцип Якоби и геодезические линии в координатном пространстве (344).	
Глава XIII. Малые колебания консервативной системы около положения равновесия	346
§ 1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия	346
192. Устойчивость равновесия (346). 193. Теорема Лагранжа (347). 194. Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы (349). 195. Стационарные движения консервативной системы с циклическими координатами и их устойчивость (351).	
§ 2. Малые колебания	355
196. Линеаризация уравнений движения (355). 197. Главные координаты и главные колебания (357). 198. Колебания консервативной системы под влиянием внешних периодических сил (361).	
Глава XIV. Устойчивость движения	367
§ 1. Основные понятия и определения	367
199. Уравнения возмущенного движения. Определение устойчивости (367). 200. Функции Ляпунова (368).	
§ 2. Основные теоремы прямого метода Ляпунова	370
201. Теорема Ляпунова об устойчивости движения (370). 202. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости (373). 203. Теоремы о неустойчивости (376).	
§ 3. Устойчивость по первому приближению	378
204. Постановка задачи (378). 205. Теорема об устойчивости по первому приближению (380). 206. Критерий Рауса — Гурвица (383).	
§ 4. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы	385
207. Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономной си-	

стемы (385). 208. Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие (386).	
§ 5. Об устойчивости гамильтоновых систем	391
209. Общие замечания (391). 210. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами (392). 211. О линейных системах с периодическими коэффициентами (393). 212. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами (395). 213. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами (396). 214. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр (398). 215. Нахождение областей параметрического резонанса (400). 216. Уравнение Матье (405).	
Список литературы	408
Предметный указатель	409

ПРЕДИСЛОВИЕ

С развитием науки и техники узкоспециальные знания довольно быстро устаревают. Для решения возникающих принципиально новых актуальных задач научные работники и инженеры обязательно должны обладать, помимо необходимой способности к доучиванию и переучиванию, хорошей подготовкой в области фундаментальных наук. Это требует постоянного всестороннего совершенствования вузовского образования. Наиболее перспективный путь лежит именно в повышении значимости общенаучных дисциплин в учебных планах подготовки будущих научных работников и инженеров, в совершенствовании преподавания таких фундаментальных дисциплин, как физика, математика и механика.

Как фундаментальная наука теоретическая механика была и остается не только одной из дисциплин, дающей углубленные знания о природе. Она также служит средством воспитания у будущих специалистов необходимых творческих навыков к построению математических моделей происходящих в природе и технике процессов, к выработке способностей к научным обобщениям и выводам.

Усовершенствование курса теоретической механики надо искать на следующих двух основных направлениях. Во-первых, курс должен быть строгим, логичным, целостным и компактным; он должен позволять в краткое время изложить основные понятия и методы теоретической механики. Во-вторых, в нем не следует уделять много внимания элементарным вопросам статики и кинематики; надо сконцентрировать усилия на рассмотрении наиболее содержательных и ценных для теории и приложений разделов динамики и методов аналитической механики.

Данная книга возникла в результате продолжительной преподавательской работы автора на факультете прикладной математики Московского авиационного института им. Серго Орджоникидзе. В ее основу положены лекции, читаемые будущим инженерам-математикам. Содержание книги несколько превосходит тот материал, который излагается на лекциях.

При написании книги преследовались, главным образом, дидактические цели. В качестве будущего вероятного читателя автор видит прежде всего студента, желающего получить хорошую перво-

начальную подготовку по основным задачам и методам теоретической механики. Автор надеется, что эта книга может оказаться полезной преподавателям механики, а также аспирантам и научным работникам в области прикладной математики и механики.

Данная книга существенно отличается от имеющихся учебников по теоретической механике для вузов как по подбору материала, так и по способу его изложения. Содержание книги хорошо видно из оглавления. Чтобы выявить методические отличия, достаточно, например, ознакомиться с изложением статики, важнейших разделов кинематики, вариационных принципов механики, теории канонических преобразований.

Трудно перечислить те учебники, монографии, статьи, под влиянием которых сложились методические взгляды автора. Очень важно здесь также влияние собственного опыта научной и преподавательской работы автора, научного и педагогического опыта его московских коллег и друзей. Список литературы, которая наиболее широко использовалась, дан в конце книги. Некоторые монографии, учебники и статьи упомянуты в подстрочных замечаниях.

ВВЕДЕНИЕ

Механика — это наука о движении и взаимодействии материальных тел. Под движением понимается *механическое движение*, т. е. изменение положения тел или частей тела в пространстве с течением времени. Основная, как и всякая физическая наука, на наблюдении и опыте, механика может быть разделена на наблюдательную (опытную) и теоретическую.

Наблюдательная (опытная) механика входит в различные отделы экспериментальной физики, астрономии, техники. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движением и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называют *силами*. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, которые не являются математическими следствиями каких-то изначальных истин, а представляют собой индуктивные положения, основанные на большом числе согласующихся между собой опытных фактов. Эти положения представляют собой утверждения о свойствах движения материальных объектов, верные с той или иной точностью.

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов, установленных в опытной механике, принимаемых за истины, не требующие доказательства — аксиомы. Эти аксиомы заменяют собой в теоретической механике индуктивные истины опытной механики. Теоретическая механика имеет дедуктивный характер. Опираясь на аксиомы, как на известный и проверенный практикой и экспериментом фундамент, теоретическая механика возводит свое здание при помощи строгих математических выводов.

По Ньютону теоретическая механика «есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное»¹⁾.

Теоретическая механика, как часть естествознания, использующая математические методы, имеет дело не с самими реальными

¹⁾ Из предисловия к первому изданию знаменитого сочинения И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (см.: Крылов А. Н., Собрание трудов. Т. 7.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.— С. 2).

материальными объектами, а с их моделями. Такими моделями, изучаемыми в теоретической механике, являются материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые тела, деформируемые сплошные среды. В данной книге механика сплошных сред не рассматривается.

При изучении теоретической механики методически удобно разделить ее на кинематику и динамику; из динамики часто выделяют еще статику. В кинематике движение изучается только с геометрической точки зрения; причины, обуславливающие движение, кинематика не рассматривает. Изучением движения в связи с причинами, вызывающими или изменяющими его, занимается динамика. Как часть динамики, статика изучает те условия, при которых материальные объекты могут оставаться в покое; к статике относится также разработка способов эквивалентных преобразований систем сил. Подробнее о задачах, изучаемых в кинематике, динамике и ее части — статике сказано в соответствующих главах книги.

Глава I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

§ 1. Основные понятия, задачи кинематики

1. **Пространство и время.** Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — абсолютное пространство и абсолютное время, существование которых постулируется. Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что *абсолютное пространство* представляет собой трехмерное, однородное и изотропное неподвижное евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

Абсолютное время в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. Для удобства исследования геометрического характера движения в кинематике можно взять вполне определенное твердое тело, т. е. тело, форма которого неизменна, и условиться считать его неподвижным. Движение других тел по отношению к этому телу отсчета будем в кинематике называть *абсолютным движением*. В качестве неподвижного тела отсчета обычно выбирают систему трех не лежащих в одной плоскости осей (чаще всего взаимно ортогональных), называемую *системой отсчета*, которая по определению считается *неподвижной (абсолютной) системой отсчета* или *неподвижной (абсолютной) системой координат*. В кинематике этот выбор произволен. В динамике такой произвол недопустим. За единицу измерения времени принимается секунда: $1 \text{ с} = 1/86400 \text{ сут}$,

определяемых астрономическими наблюдениями. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например 1 м, 1 см и т. п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.

Если некоторый определенный момент принять за начало отсчета времени, то всякий другой момент времени однозначно определяется соответствующим числом t , т. е. числом секунд, прошедших между начальным и рассматриваемым моментом. Это число положительно или отрицательно, смотря по тому, следует ли рассматриваемый момент времени за начальным или предшествует ему, т. е. $-\infty < t < +\infty$.

2. Материальная точка. Механическая система. Под *материальной точкой* понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы ее положение и движение можно было определить как для объекта, не имеющего размеров. Это условие будет выполнено, если при изучении движения можно пренебречь размерами частицы и ее вращением. Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку; если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

В теоретической механике материальная точка представляет собой геометрическую точку, наделенную по определению механическими свойствами; эти свойства будут рассмотрены в динамике. В кинематике же материальная точка отождествляется с геометрической точкой.

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *траекторией*. Если при $t_1 < t < t_2$ траектория — прямая линия, то движение точки прямолинейное, в противном случае криволинейное. В частности, движение точки на интервале времени $t_1 < t < t_2$ называют *круговым*, если на этом интервале траектория точки лежит на окружности.

Механической системой, или *системой материальных точек*, или, для краткости, просто *системой* мы будем называть выделенную каким-либо образом совокупность материальных точек.

3. Задачи кинематики. Задать движение точки (системы) — это значит дать способ определения положения точки (всех точек, образующих систему) в любой момент времени.

Задачи кинематики состоят в разработке способов задания движения и методов определения скорости, ускорения и других кинематических величин точек, составляющих механическую систему.

§ 2. Кинематика точки

4. Векторный способ задания движения точки. Рассмотрим движение материальной точки P относительно некоторого тела, которое считается неподвижным. Пусть O — точка, принадлежащая этому телу. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ движущейся точки P относительно O можно задать как вектор-функцию времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. С течением времени конец вектора $\mathbf{r}$ описывает траекторию точки (рис. 1). Производная от $\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1)$$

называется *скоростью точки P* . Производная от $\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2)$$

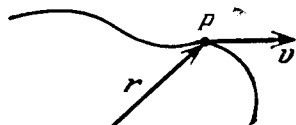


Рис. 1

называется *ускорением точки P* .

5. Координатный способ задания движения точки. Пусть $Oxyz$ — неподвижная декартова прямоугольная система координат, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты ее осей Ox, Oy, Oz . Тогда вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ может быть задана тремя скалярными функциями $x(t), y(t), z(t)$ — координатами точки P :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

При этом для скорости имеем выражение

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad (3)$$

где $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ — проекции скорости $\mathbf{v}$ на оси Ox, Oy, Oz ¹⁾. Величина скорости v и ее направление определяются равенствами

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{\dot{z}}{v}. \quad (4)$$

Аналогично для ускорения $\mathbf{w}(t)$ получаем

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}, \quad (5)$$

где $w_x = \ddot{x}$, $w_y = \ddot{y}$, $w_z = \ddot{z}$ — проекции $\mathbf{w}$ на оси Ox, Oy, Oz . И тогда

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\mathbf{w}, \mathbf{i}) = \frac{\ddot{x}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{j}) = \frac{\ddot{y}}{w}, \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = \frac{\ddot{z}}{w}. \quad (6)$$

¹⁾ Производная по t какой-либо величины, являющейся функцией аргумента t , часто обозначается точкой над соответствующим символом, обозначающим эту величину,

Пример. Задан закон движения точки P :

$$x = a \cos bt, \quad y = a \sin bt, \quad z = ct,$$

где a, b, c — постоянные. Найдем траекторию, скорость и ускорение точки.

Из первых двух равенств, возведя их в квадрат и сложив, получим

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это показывает, что точка движется по поверхности цилиндра радиуса a , ось которого совпадает с осью Oz (рис. 2).

Пусть φ — угол между проекцией OA радиуса-вектора OP на плоскость Oxy и осью Ox . Тогда

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad \varphi = bt,$$

а $z = c\varphi/b$. Следовательно, прямая OA равномерно вращается, а точка P равномерно перемещается по образующей AP . Таким образом, точка P движется по винтовой линии.

Определим скорость точки P . Имеем

$$\dot{x} = -ab \sin bt, \quad \dot{y} = ab \cos bt, \quad \dot{z} = c;$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2 b^2 + c^2}.$$

Величина скорости постоянна, но направление скорости изменяется со временем.

Найдем ускорение точки. Имеем

$$\ddot{x} = -ab^2 \cos bt, \quad \ddot{y} = -ab^2 \sin bt, \quad \ddot{z} = 0;$$

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = ab^2,$$

$$\cos(w, i) = -\cos bt, \quad \cos(w, j) = -\sin bt, \quad \cos(w, k) = 0.$$

Ускорение имеет постоянную величину и направлено по внутренней нормали цилиндра (от P к B ; отрезок PB параллелен AO).

6. Естественный способ задания движения точки. Пусть в пространстве задана кривая, по которой движется точка P . Для определения положения точки P на ее траектории возьмем произвольную точку O_1 кривой за начало отсчета дуг и зададим положительное направление отсчета (рис. 3). Каждому положению точки P поставим в соответствие свою дуговую координату σ , аналогично тому как на прямой оси каждой точке отвечает своя абсцисса. Величина σ будет положительной или отрицательной в зависимости от направления отсчета дуг; при этом длина дуги O_1P равна $|\sigma|$. Если $\sigma = \sigma(t)$ — известная функция времени, то движение точки P задано. Такой способ задания движения точки называется *естественным*. При этом мы будем предполагать, что $\sigma(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Получим выражения для скорости и ускорения точки P при естественном способе задания движения. Введем естественный трехгранник, образованный единичными векторами τ, n, b , составляю-

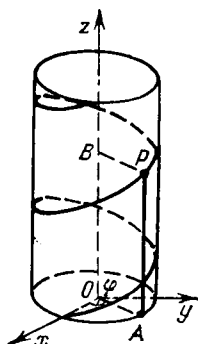


Рис. 2

щими правую тройку (рис. 4). Векторы τ и n лежат в соприкасающейся плоскости траектории в точке P и направлены соответственно по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуг и по главной нормали траектории в сторону ее вогнутости, вектор b направлен по бинормали траектории в точке P .

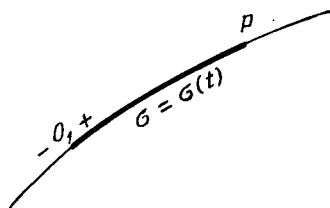


Рис. 3

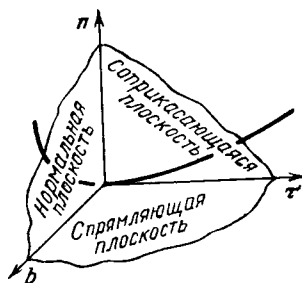


Рис. 4

Радиус-вектор r точки P относительно какой-либо фиксированной точки будет сложной функцией времени: $r(t) = r(\sigma(t))$. Из дифференциальной геометрии известно, что

$$\tau(\sigma) = \frac{dr}{d\sigma}, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{\rho} n(\sigma), \quad (7)$$

где ρ — радиус кривизны траектории в точке P . Используя определения (1) и (2) скорости и ускорения, получаем при помощи (7)

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = v_\tau \tau, \quad (8)$$

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \tau + v_\tau \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2} \tau + \frac{v_\tau^2}{\rho} n. \quad (9)$$

Здесь введено обозначение $v_\tau = \dot{\sigma}$. Величина v_τ положительна, если точка P движется в положительном направлении отсчета дуг O_1P и отрицательна в противном случае; $v = |v_\tau|$. Согласно (8) скорость всегда направлена по касательной к траектории.

Из (9) следует, что ускорение всегда лежит в соприкасающейся плоскости. Его можно записать в виде

$$w = w_\tau + w_n, \quad w_\tau = \frac{d^2\sigma}{dt^2} \tau, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} n, \quad (10)$$

где w_τ — касательное (тангенциальное) ускорение, а w_n — нормальное ускорение точки. Формулы (10) выражают теорему Гюйгенса о разложении ускорения точки на тангенциальное и нормальное. Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а нормальное — ее направления.

Величина ускорения определяется равенством

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2}.$$

Если $v = \text{const}$, то движение точки называется равномерным. Движение будет ускоренным или замедленным в зависимости от того, возрастает или убывает величина скорости. Так как $v^2 = v_\tau^2 = \dot{\sigma}^2$, то $dv^2/dt = 2\dot{\sigma}\ddot{\sigma}$. Отсюда следует, что движение будет ускоренным, если знаки величин $\dot{\sigma}$ и $\ddot{\sigma}$ одинаковы, и замедленным, если их знаки противоположны. Если на интервале времени $t_1 < t < t_2$ $\ddot{\sigma} = 0$ ($w_\tau = 0$), то на этом интервале движение равномерное. Если на каком-то интервале $w_n = 0$, а $v \neq 0$, то на этом интервале движение прямолинейное ($\rho = \infty$).

З а м е ч а н и е. Из соотношений (8) и (9), в частности, следует, что если вместо одной декартовой системы координат мы возьмем другую декартову систему координат, неподвижную относительно первой, то изменится векторное уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ движения точки P , но скорость и ускорение не изменятся.

П р и м е р. Используя теорему Гюйгенса, найдем радиус кривизны эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в произвольной его точке.

Будем рассматривать эллипс как траекторию материальной точки с законом движения

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Из равенства

$$w^2 = \frac{v^4}{\rho^2} + w_\tau^2$$

получаем такое выражение для радиуса кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{w^2 - w_\tau^2}}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \\ w &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}, \\ (w_\tau)^2 &= \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 t \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \end{aligned}$$

получаем следующее выражение для радиуса кривизны как функции t :

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

В частности, в вершинах эллипса, лежащих на оси Ox (для них $t = 0, \pi$), $\rho = b^2/a$, а в вершинах, лежащих на оси Oy (для них $t = \pi/2, 3\pi/2$), $\rho = a^2/b$.

7. Круговое движение. Пусть точка движется по окружности радиуса R . Тогда (см. рис. 5) $\sigma = R\varphi$. Из (8) и (10) следует, что

$$v = R\dot{\varphi}\tau, \quad w_\tau = R\ddot{\varphi}\tau, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}n = \dot{\varphi}^2 Rn.$$

Величины $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ называются соответственно угловой скоростью и угловым ускорением радиуса $OP = R$ (см. также п. 25). Введем обозначения $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$. Тогда для величины ускорения точки P получаем выражение

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол β между полным ускорением точки w и ее нормальным ускорением (рис. 5) находится из равенства

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

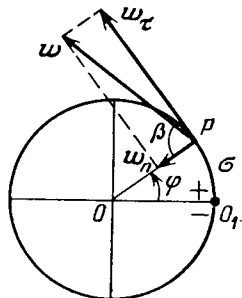


Рис. 5

При равномерном круговом движении $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$.

8. Скорость и ускорение точки в полярных координатах. Пусть движение точки происходит в заданной плоскости. Помимо декартовых координат $x(t)$, $y(t)$ движение может быть задано, например, при помощи полярных координат (рис. 6). Пусть заданы функции $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Найдём скорость и ускорение точки P .

Пусть e_r — единичный вектор, направленный вдоль радиуса-вектора r точки P относительно O в сторону возрастания величины r , а e_φ — вектор, получающийся из e_r поворотом последнего на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Единичные векторы e_r и e_φ задают направления двух взаимно перпендикулярных осей: радиальной и трансверсальной соответственно.

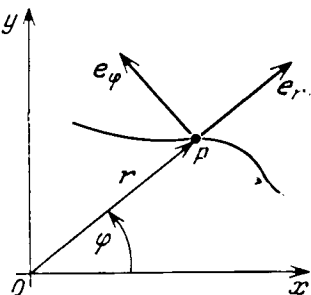


Рис. 6

В системе координат Oxy векторы e_r и e_φ можно записать в следующем виде ¹⁾:

$$e_r = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad e_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi). \quad (11)$$

Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то в системе координат Oxy имеем

$$v' = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi), \quad (12)$$

$$w' = (\ddot{x}, \ddot{y}) = ((\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \varphi,$$

$$(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \sin \varphi + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \cos \varphi). \quad (13)$$

¹⁾ Здесь, как и всюду в дальнейшем, под векторами мы понимаем векторы-столбцы. Штрихом обозначается операция транспонирования.

Проекции v_r и v_φ скорости на радиальную и трансверсальную оси называются соответственно *радиальной* и *трансверсальной скоростями*. Из (11) и (12) имеем

$$v_r = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) = \dot{r}, \quad v_\varphi = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi) = r\dot{\varphi}. \quad (14)$$

Для проекций ускорения аналогично получаем

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (15)$$

Пример. Движение точки задано в полярных координатах:

$$r = at, \quad \varphi = bt \quad (a, b = \text{const}).$$

Найдем траекторию, скорость и ускорение точки.

Исключив из данных равенств время t , получим уравнение траектории $r = a\varphi/b$. Эта кривая называется *спиралью Архимеда*; у нее величина радиуса-вектора пропорциональна величине полярного угла. Далее, имеем

$$\dot{r} = a, \quad \dot{\varphi} = b, \quad \ddot{r} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Поэтому радиальная скорость v_r постоянна и равна a , трансверсальная скорость $v_\varphi = abt$. Для величины скорости получаем $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = a \sqrt{1 + b^2 t^2}$.

Для радиального и трансверсального ускорений из (15) получаем выражения $w_r = -ab^2 t$, $w_\varphi = 2ab$. Величина ускорения определяется равенством

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = ab \sqrt{4 + b^2 t^2}.$$

9. Криволинейные координаты. В предыдущем пункте мы видели, что движение точки по плоскости не обязательно задается только декартовыми координатами; можно, например, задавать движение в полярных координатах. Вообще, всякие три числа q_1, q_2, q_3 , однозначно определяющие положение точки в пространстве, можно рассматривать как координаты этой точки. Эти числа в отличие от прямолинейных декартовых координат называют *криволинейными координатами*. Движение точки считается заданным, если ее криволинейные координаты q_i ($i = 1, 2, 3$) — известные функции времени $q_i(t)$.

Связь между декартовыми и криволинейными координатами задается равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (16)$$

где x, y, z — функции q_1, q_2, q_3 , которые считаем дважды непрерывно дифференцируемыми. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ — сложная функция времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$.

Пусть P_0 — какая-либо точка в пространстве, ее криволинейные координаты обозначим q_{10}, q_{20}, q_{30} . *Первой координатной линией*, проходящей через P_0 , назовем кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$, получающуюся из (16) при фиксированных q_2, q_3 и при изменении q_1 в некотором интервале. Аналогично определяются *вторая и третья координатные линии*. Касательную к i -й координатной линии в точке P_0 называют *i -й координатной осью*, проходящей через P_0 . Еди-

ничный вектор i -й координатной оси (рис. 7) может быть записан в виде

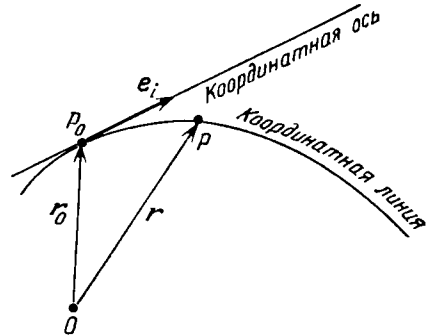
$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{k},$$

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (17)$$

Величины H_i называются *коэффициентами Ламе*. Производные в (17) вычисляются в точке P_0 .

Если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ взаимно ортогональны, то криволинейные координаты называют ортогональными. Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты. Найдем проекции v_{q_i} и w_{q_i} ($i=1, 2, 3$) скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$ точки P на оси криволинейной системы координат. Из (1), (16) и (17) получаем

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 = v_{q_1} \mathbf{e}_1 + v_{q_2} \mathbf{e}_2 + v_{q_3} \mathbf{e}_3, \quad (18)$$



где величины v_{q_i} вычисляются по формулам

$$v_{q_i} = H_i \dot{q}_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (19)$$

Рис. 7

Для нахождения величины w_{q_i} , равной скалярному произведению $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i$, заметим, что она, согласно (2) и (17), может быть представлена в виде

$$w_{q_i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \right]. \quad (20)$$

Далее,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_3} \dot{q}_3, \quad (21)$$

а из (18) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3. \quad (22)$$

Ввиду того что $\mathbf{r}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от q_1, q_2, q_3 , можно менять порядок дифференцирования по

q_k ($k = 1, 2, 3$) и q_i . Поэтому из (21) и (22) следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}. \quad (23)$$

Кроме того, из (18) вытекает равенство

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}. \quad (24)$$

Используя (23), (24), равенство (20) можно записать в виде

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dq_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \right].$$

Если теперь ввести обозначение $T = 1/2 v^2$, то выражение для w_{q_i} можно записать в следующем окончательном виде:

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (25)$$

Примеры. 1. Найдем скорость и ускорение точки в цилиндрической и сферической системах криволинейных координат. В случае цилиндрической

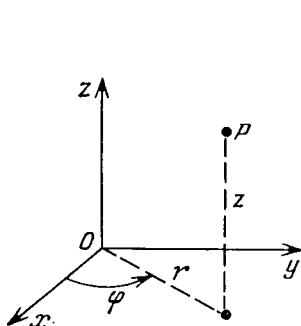


Рис. 8

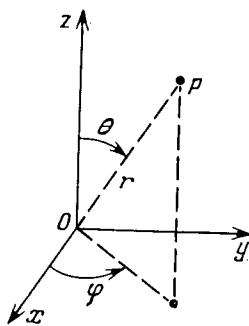


Рис. 9

системы координат (рис. 8) полагаем $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, и тогда

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z; \quad H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1;$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \quad (26)$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2); \quad (27)$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}. \quad (28)$$

В случае сферической системы координат (рис. 9) $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$ и $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$; $H_r = 1$, $H_\varphi = r \sin \theta$, $H_\theta = r$;

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}; \quad (29)$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2); \quad (30)$$

$$w_r = \ddot{r} - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - r \dot{\theta}^2, \quad w_\varphi = r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \sin \theta \dot{r} \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta}, \quad (31)$$

$$w_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2.$$

2. Пусть материальная точка движется равномерно по поверхности сферы радиуса a . Точка начинает движение на экваторе, направление ее скорости v образует с меридианами сферы постоянный угол α . Найдем уравнение траектории точки (локсодромы), а также момент времени τ , в который точка достигает полюса сферы.

Положение точки на сфере зададим при помощи координат φ , θ (рис. 9). Из формул (29) имеем

$$v_\varphi = a \sin \theta \dot{\varphi}, \quad v_\theta = a \dot{\theta}.$$

Без ограничения общности примем, что движение точки начинается на оси Ox (т. е. при $t = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$), угол θ во время движения уменьшается от $\pi/2$ до 0, а $\dot{\varphi} > 0$.

Так как направление скорости v пересекает меридиан $\varphi = \text{const}$ под углом α , то $\text{ctg } \alpha = -v_\theta / v_\varphi$, что приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -\text{ctg } \alpha \sin \theta.$$

Принтегрировав это уравнение с учетом упомянутых выше начальных условий, получим уравнение локсодромы в виде

$$\text{tg } \frac{\theta}{2} = e^{-\text{ctg } \alpha \varphi}.$$

Так как при $\theta = 0$ $\varphi = \infty$, то локсодрома делает около полюса бесчисленное множество витков. Однако общая длина дуги локсодромы конечна. Найдем ее. Имеем

$$ds = a \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} = -a d\theta \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = -\frac{a d\theta}{\cos \alpha}.$$

Так как вся дуга l локсодромы соответствует изменению θ от $\pi/2$ до 0, то $l = \frac{\pi a}{2 \cos \alpha}$. Поскольку движение точки равномерное, то время движения τ будет равно $\frac{\pi a}{2v \cos \alpha}$.

§ 3. Общие основания кинематики системы

10. Свободные и несвободные системы. Связи. Рассмотрим движение системы материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$) относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\mathbf{r}_v$ и скоростями $\mathbf{v}_v$ ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\mathbf{r}_v$ и $\mathbf{v}_v$, которые должны

выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями*. Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной*. При наличии одной или нескольких связей система называется *несвободной*.

Примеры. 1. Материальная точка может двигаться только в заданной плоскости, проходящей через начало координат. Если ось Oz декартовой системы координат направить перпендикулярно плоскости, в которой движется точка, то $z = 0$ — уравнение связи.

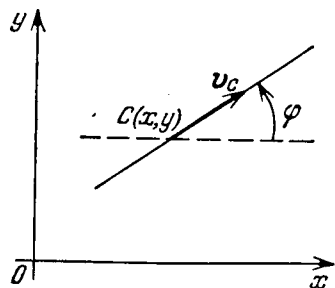


Рис. 10

2. Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$.

3. Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l . Связь задается соотношением $l^2 - (r_1 - r_2)^2 \geq 0$.

4. Материальная точка может двигаться в пространстве, оставаясь внутри или на границе первого октанта. Связь задается тремя неравенствами: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

5. Движение конька по льду. Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости. Конек будем моделировать тонким стержнем, одна из точек которого, например C на рис. 10, во все время движения имеет скорость, направленную вдоль стержня. Если ось Oz направлена вертикально, x, y, z — координаты точки C , а φ — угол, который образует стержень с осью Ox , то связи задаются двумя соотношениями: $z = 0, y = x \operatorname{tg} \varphi$.

В общем случае связь задается соотношением ¹⁾ $f(r_v, v_v, t) \geq 0$. Если в этом соотношении реализуется только знак равенства, то связь называется *удерживающей (двусторонней, неосвобождающей)*. В примерах 1, 2, 5 связи удерживающие. Если же реализуется как знак равенства, так и знак строгого неравенства, то связь называется *неудерживающей (односторонней, освобождающей)*. В примерах 3, 4 связи неудерживающие. Системы с неудерживающими связями в дальнейшем не рассматриваются.

Если уравнение связи можно записать в виде $f(r_v, t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то связь называется *геометрической (конечной, голономной)*. В примерах 1, 2 связи геометрические. Если же в уравнение связи $f(r_v, v_v, t) = 0$ входят проекции скоростей v_v , то связь называется *дифференциальной (кинематической)*. Дифференциальную связь $f(r_v, v_v, t) = 0$ называют *интегрируемой*, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Непинтегрируемую дифференциальную связь называют еще *неголономной связью*.

¹⁾ Обозначением $f(r_v, v_v, t)$ мы пользуемся для краткой записи функции $f(r_1, \dots, r_N, v_1, \dots, v_N, t)$. Функция f имеет в общем случае $6N + 1$ аргументов: $3N$ координат x_v, y_v, z_v точек P_v , $3N$ проекций их скоростей $\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v$ и время t . Функцию f предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой.

В примере 5 дифференциальная связь $\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$ неинтегрируемая. Покажем это. Предположим противное, т. е. что x, y, φ связаны соотношением $f(x, y, \varphi, t) = 0$. Пусть x, y, φ отвечают реальному движению конька. Вычислим полную производную f по времени

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Используя уравнение связи, $\dot{f}$ можно записать в виде

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \right) \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Отсюда, ввиду независимости величин $\dot{x}, \dot{\varphi}$, получаем равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Ввиду произвольности угла φ из этих равенств следует, что частные производные функции f по всем ее аргументам равны нулю, т. е. f не зависит от x, y, φ, t . Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$ неверно.

Неинтегрируемость связи в рассматриваемой задаче можно показать без вычислений, а исходя только из простых геометрических соображений. Во-первых, из уравнения связи следует, что в случае ее интегрируемости в уравнение эквивалентной геометрической связи время t явно не должно входить, а угол φ обязательно должен войти, т. е. эквивалентная геометрическая связь должна записываться в виде $f(x, y, \varphi) = 0$, где функция f не должна быть тождественно равной нулю при произвольных фиксированных значениях x, y . Во-вторых, движение конька, при котором его точка C перемещается по окружности с центром, лежащим на перпендикуляре к полозу конька в точке C , не нарушает связи $\dot{y} =$

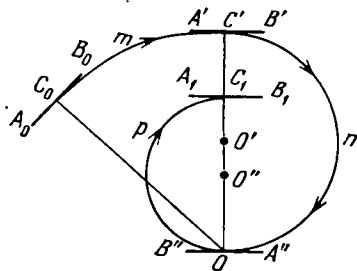


Рис. 11

$= \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$, так как при таком движении скорость точки C направлена вдоль полоза конька. Пусть в начальном положении конька $x = x_0, y = y_0, \varphi = \varphi_0$, а в конечном $x = x_1, y = y_1, \varphi = \varphi_1$. Если связь интегрируема и записывается в виде $f(x, y, \varphi) = 0$, то $f(x_0, y_0, \varphi_0) = 0$ и $f(x_1, y_1, \varphi_1) = 0$, так как уравнение связи должно выполняться в любом положении конька. На рис. 11 показана одна из многих возможных траекторий точки C при движении конька из начального положения в конечное. На этом рисунке $OC_0 \perp A_0B_0, OC' \perp A'B', OC_1 \perp A_1B_1, O''O \perp A''B'', O'C' = O'O, O''C_1 = O''O$. Перемещение конька из начального положения в конечное происходит так, что точка C конька (обозначенная на рис. 11 в разных положениях символами C_0, C', O, C_1) сначала движется по дуге C_0mC' окружности с центром O , затем по дуге $C'nO$ окружности с центром O' и, наконец, по дуге OpC_1 окружности с центром O'' . Если зафиксировать конечные координаты x_1, y_1 точки C , а конечное значение угла φ_1 изменить в некотором интервале, то в этом интервале $f(x_1, y_1, \varphi_1) \equiv 0$. Но, согласно сказанному выше, функция f не может тождественно равняться нулю при произвольных фиксированных значениях x, y . Противоречие говорит о неинтегрируемости рассматриваемой дифференциальной связи.

Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной*. Если же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной*.

В дальнейшем, при изучении движения неголономных систем, мы будем предполагать, что соответствующие им дифференциальные связи линейны относительно проекций $\dot{x}_\alpha$, $\dot{y}_\alpha$, $\dot{z}_\alpha$ скоростей точек системы. Как геометрических, так и дифференциальных связей, наложенных на систему, может быть несколько. Таким образом, в дальнейшем мы будем изучать движение свободных механических систем или несвободных систем со связями, аналитическое представление которых имеет вид

$$f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r), \quad (1)$$

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{a}_{\beta v} \cdot \mathbf{v}_v + a_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

Векторы $\mathbf{a}_{\beta v}$ и скаляры a_β — заданные функции от $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ и t . В частных случаях r и s могут быть равными нулю.

Геометрические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если t не входит в их уравнения (1). Дифференциальные связи (2) называются *стационарными* или *склерономными*, если функции $\mathbf{a}_{\beta v}$ не зависят явно от t , а функции a_β тождественно равны нулю. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

В примере 1 рассмотрена голономная склерономная, в примере 2 — голономная реономная, в примере 5 — неголономная склерономная системы.

11. Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы. Точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их совместимые со связями (допускаемые связями) координаты, скорости, ускорения и перемещения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей (1), (2).

Пусть задан какой-то момент времени $t = t^*$. Положения системы, для которых радиусы-векторы $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v^*$ точек, образующих систему, удовлетворяют уравнениям геометрических связей (1), назовем *возможными положениями* системы для данного момента времени.

Связи налагают ограничения и на скорости точек системы. Чтобы записать эти ограничения в аналитической форме, продифференцируем обе части (1) по времени, считая $\mathbf{r}_\alpha$ функциями t . Тогда получим следующие дифференциальные связи, вытекающие из геомет-

рических связей (1):

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_v} \cdot v_v + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \quad (3)$$

Совокупность векторов $v_v = v_v^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (2) и (3) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем *возможными скоростями* для этого момента времени.

Для получения аналитического выражения ограничений, налагаемых связями на ускорения точек системы, продифференцируем равенства (3) и (2) по времени. Имеем ¹⁾

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_v} \cdot w_v + \sum_{v,\mu=1}^N \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial r_v \partial r_{\mu}} v_{\mu} \cdot v_v + 2 \sum_{v=1}^N \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial t \partial r_v} v_v + \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial t^2} = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, r), \quad (4)$$

$$\sum_{v=1}^N a_{\beta v} \cdot w_v + \sum_{v,\mu=1}^N \frac{\partial a_{\beta v}}{\partial r_{\mu}} v_{\mu} \cdot v_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial a_{\beta v}}{\partial t} \cdot v_v + \sum_{v=1}^N \frac{\partial a_{\beta}}{\partial r_v} \cdot v_v +$$

$$+ \frac{\partial a_{\beta}}{\partial t} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (5)$$

Совокупность векторов $w_v = w_v^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (4) и (5) при возможных для данного момента времени положении и скоростях точек системы, назовем *возможными ускорениями* для этого момента времени.

Заметим, что величину $3N - r - s$ следует считать положительной, так как в противном случае ограничения, налагаемые связями, были бы настолько жесткими, что согласованное со связями движение точек материальной системы было бы либо вообще невозможным, либо должно было происходить по заранее заданному закону во времени. Поэтому число линейных уравнений, определяющих проекции возможных скоростей и ускорений, превосходит число этих проекций. Следовательно, для данного момента времени существует бесконечное множество возможных скоростей v_v^* и возможных ускорений w_v^* .

Пусть в данный момент времени $t = t^*$ система находится в каком-либо положении, определяемом радиусами-векторами $r_v = r_v^*$, и имеет какие-то возможные скорости v_v^* и возможные ускорения w_v^* . Возможному в момент $t^* + \Delta t$ положению системы отвечают радиусы-векторы $r_v^* + \Delta r_v$ точек системы. Величины Δr_v — *возможные перемещения* системы за время Δt из ее возможного положе-

¹⁾ При получении равенств (3)–(5) предполагается, что соответствующие производные функций f_{α} , $a_{\beta v}$ и a_{β} существуют и непрерывны.

ния, задаваемого радиусами-векторами $\mathbf{r}_v^*$ в момент $t=t^*$. Для достаточно малых Δt возможные перемещения точек системы можно¹⁾ представить в виде суммы:

$$\Delta \mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_v^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

Здесь не выписаны слагаемые, порядок которых относительно Δt выше второго. Так как множество возможных скоростей и ускорений бесконечно, то бесконечно и множество возможных перемещений.

Пренебрежем в (6) величинами выше первого порядка относительно Δt ; тогда $\Delta \mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v^* \Delta t$. Если уравнения (3) и (2), которым удовлетворяют возможные скорости $\mathbf{v}_v^*$, умножить на Δt , то получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по Δt возможные перемещения:

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \Delta \mathbf{r}_v + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r), \quad (7)$$

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{a}_{\beta v} \cdot \Delta \mathbf{r}_v + a_\beta \Delta t = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (8)$$

Функции $\mathbf{a}_{\beta v}$, a_β в (8) и частные производные в (7) вычисляются при $t=t^*$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v^*$.

Примеры. 1. Точка P движется по неподвижной поверхности (рис. 12). В этом случае возможной скоростью $\mathbf{v}^*$ будет любой вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности в точке P и проходящий через эту точку. Если пренебречь в (6) величинами выше первого порядка относительно Δt ,

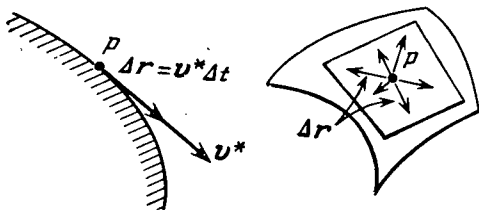


Рис. 12

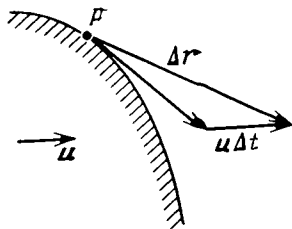


Рис. 13

то $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}^* \Delta t$. Любой вектор, построенный из точки P и лежащий в касательной плоскости, будет возможным перемещением. Если поверхность задается уравнением $f(\mathbf{r}) = 0$, то все возможные перемещения ортогональны нормали к поверхности, т. е. $\Delta \mathbf{r} \cdot \text{grad } f = 0$.

2. Точка P движется по подвижной или деформирующейся поверхности, все точки которой имеют скорости $\mathbf{u}$ ²⁾ (рис. 13). В этом случае возможная ско-

¹⁾ Для этого достаточно, чтобы функции $\mathbf{r}_v(t)$ имели непрерывные производные до третьего порядка включительно.

²⁾ Так будет, например, когда поверхность является недеформирующейся и движется поступательно со скоростью $\mathbf{u}$ (см. п. 22).

рость уже не лежит в касательной плоскости. Возможных перемещений опять бесконечное множество. Если пренебречь величинами порядка $(\Delta t)^2$ и выше, то все они получаются добавлением вектора $u \Delta t$ к каждому из возможных перемещений предыдущего примера. В этом случае уже соотношение $\Delta \mathbf{r} \cdot \text{grad } f = 0$ не выполняется при любых $\Delta \mathbf{r}$.

12. Действительные и виртуальные перемещения. Синхронное варьирование. Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении, задаваемом радиусами-векторами ее точек $\mathbf{r}_{v0}^*$, а скорости точек имеют некоторые конкретные возможные значения $\mathbf{v}_{v0}^*$. Если заданы силы, действующие на систему, то, проинтегрировав систему дифференциальных уравнений движения, можно получить значения радиусов-векторов $\mathbf{r}_v$ точек системы для моментов времени t , следующих за t^* . Если обозначить dt приращение времени $t - t^*$, то приращения радиусов-векторов точек системы можно представить в виде

$$\mathbf{r}_v(t^* + dt) - \mathbf{r}_v(t^*) = \mathbf{v}_{v0}^* dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{v0}^* (dt)^2 + \dots \quad (9)$$

где $\mathbf{w}_{v0}^*$ — ускорения точек системы при $t = t^*$; многоточием обозначены величины выше второго порядка относительно dt . Величины (9) суть *действительные (истинные) перемещения* точек системы за время dt . Действительное перемещение, естественно, является одним из возможных. Если пренебречь членами порядка $(dt)^2$ и выше, то действительное перемещение будет дифференциалом функции $\mathbf{r}_v(t)$, т. е. $\mathbf{r}_v(t^* + dt) - \mathbf{r}_v(t^*) = d\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_{v0}^* dt$. В этом случае действительные перемещения удовлетворяют уравнениям, аналогичным (7) и (8):

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot d\mathbf{r}_v + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r) \quad (10)$$

$$\sum_{v=1}^N a_{\beta v} \cdot d\mathbf{r}_v + a_\beta dt = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) получаются умножением обеих частей уравнений (3) и (2) на dt . Величины $\partial f_\alpha / \partial \mathbf{r}_v$, $\partial f_\alpha / \partial t$, $a_{\beta v}$, a_β в (10), (11) вычисляются при $t = t^*$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}^*$. В дальнейшем под действительными перемещениями точек системы за время dt будем понимать их бесконечно малые перемещения, линейные по dt ; они удовлетворяют уравнениям (10), (11).

Помимо действительных перемещений, в теоретической механике принципиальное значение имеют так называемые *виртуальные перемещения*. Пусть при $t = t^*$ система занимает некоторое свое возможное положение, определяемое радиусами-векторами ее точек $\mathbf{r}_v^*$. Виртуальным перемещением системы называется совокупность

величин $\delta \mathbf{r}_v$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r)_x \quad (12)$$

$$\sum_{v=1}^N a_{\beta v} \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s)_z \quad (13)$$

где величины $\partial f_{\alpha} / \partial \mathbf{r}_v$ и $a_{\beta v}$ вычислены при $t = t^*$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v^*$.

Остановимся на введенном понятии виртуального перемещения подробнее. Величина $\delta \mathbf{r}_v$ задается проекциями δx_v , δy_v , δz_v . Так как число неизвестных δx_v , δy_v , δz_v ($v = 1, 2, \dots, N$) превосходит число уравнений (12), (13), которым они удовлетворяют, то количество виртуальных перемещений бесконечно. Из (10), (11) и (12), (13) следует, что для склерономной системы действительное перемещение будет одним из виртуальных.

Пусть δx_v , δy_v , δz_v — бесконечно малые величины. Из (7), (8) и (12), (13) видно, что множество линейных относительно Δt возможных перемещений склерономной системы совпадает с множеством ее виртуальных перемещений. Можно сказать, что виртуальные перемещения — это возможные перемещения при «замороженных» ($t = t^* = \text{const}$) связях.

В примерах 1 и 2 п. 11 множества виртуальных перемещений одинаковы и представляют собой совокупность построенных из точки P векторов $\delta \mathbf{r}_v$, лежащих в проходящей через P касательной плоскости к поверхности, по которой движется материальная точка.

Бесконечно малые приращения δx_v , δy_v , δz_v называются *вариациями* величин x_v , y_v , z_v . Переход при фиксированном $t = t^*$ из положения системы, определяемого радиусами-векторами $\mathbf{r}_v^*$ в бесконечно близкое положение, определяемое радиусами-векторами $\mathbf{r}_v^* + \delta \mathbf{r}_v$, называется *синхронным варьированием*. При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины Δt . Согласно (6)

$$\Delta_1 \mathbf{r}_v = \mathbf{v}_{v1}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{v1}^* (\Delta t)^2 + \dots$$

$$\Delta_2 \mathbf{r}_v = \mathbf{v}_{v2}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{v2}^* (\Delta t)^2 + \dots$$

Возможные скорости $\mathbf{v}_{vi}^*$ и возможные ускорения $\mathbf{w}_{vi}^*$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют уравнениям (2) — (5). Подставим в (3) величины $t = t^*$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v^*$, $\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_{v1}^*$ и умножим обе части этого равенства на Δt , затем подставим в (3) величины $t = t^*$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v^*$, $\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_{v2}^*$ и снова умножим на Δt . Если теперь из первого результата вычесть второй, то

получим равенства

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot (\mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*) \Delta t = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \quad (14)$$

Аналогично из (2) получаются равенства

$$\sum_{v=1}^N a_{\beta v} \cdot (\mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*) \Delta t = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (15)$$

Если теперь подобную процедуру проделать с уравнениями (4) и (5) (только надо будет еще подставить $\mathbf{w}_v = \mathbf{w}_{vi}^*$ ($i = 1, 2$), а умножить на $1/2(\Delta t)^2$), то придем к равенствам

$$\sum_{v=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot (\mathbf{w}_{v1}^* - \mathbf{w}_{v2}^*) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{v, \mu=1}^N \left[\left(\frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v \partial \mathbf{r}_{\mu}} \mathbf{v}_{\mu 1}^* \right) \cdot \mathbf{v}_{v1}^* - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_v \partial \mathbf{r}_{\mu}} \mathbf{v}_{\mu 2}^* \right) \cdot \mathbf{v}_{v2}^* \right] \frac{(\Delta t)^2}{2} + 2 \sum_{v=1}^N \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial t \partial \mathbf{r}_v} \cdot (\mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*) \frac{(\Delta t)^2}{2} = 0, \quad (16)$$

$$\sum_{v=1}^N a_{\beta v} \cdot (\mathbf{w}_{v1}^* - \mathbf{w}_{v2}^*) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{v, \mu=1}^N \left[\left(\frac{\partial a_{\beta v}}{\partial \mathbf{r}_{\mu}} \mathbf{v}_{\mu 1}^* \right) \cdot \mathbf{v}_{v1}^* - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial a_{\beta v}}{\partial \mathbf{r}_{\mu}} \mathbf{v}_{\mu 2}^* \right) \cdot \mathbf{v}_{v2}^* \right] \frac{(\Delta t)^2}{2} + \sum_{v=1}^N \frac{\partial a_{\beta v}}{\partial t} \cdot (\mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \\ + \sum_{v=1}^N \frac{\partial a_{\beta}}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot (\mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*) \frac{(\Delta t)^3}{2} = 0 \quad (17)$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, r; \beta = 1, 2, \dots, s).$$

Составим теперь разность двух возможных перемещений:

$$\Delta_1 \mathbf{r}_v - \Delta_2 \mathbf{r}_v = (\mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*) \Delta t + (\mathbf{w}_{v1}^* - \mathbf{w}_{v2}^*) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \quad (18)$$

Если $\delta \mathbf{v}_v = \mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^* \neq 0$, то главная часть величины (18) линейна по Δt . Она равна $\delta \mathbf{v}_v \Delta t$ и согласно (14), (15) удовлетворяет уравнениям (12) и (13), т. е. совокупность величин

$$\delta \mathbf{r}_v = \delta \mathbf{v}_v \Delta t \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (19)$$

будет виртуальным перемещением. Синхронное варьирование (19), предполагающее $\mathbf{v}_{v1}^* \neq \mathbf{v}_{v2}^*$, называется *варьированием по Журдену*.

Если же $\mathbf{v}_{v1}^* = \mathbf{v}_{v2}^*$, но $\delta \mathbf{w}_v = \mathbf{w}_{v1}^* - \mathbf{w}_{v2}^* \neq 0$, то главная часть разности (18) равна $\delta \mathbf{w}_v \frac{(\Delta t)^2}{2}$. И, так как в (16), (17) все суммы, кроме первых, при $\mathbf{v}_{v1}^* = \mathbf{v}_{v2}^*$ обращаются в нуль, главная часть

разности (18), согласно (16), (17) и (12), (13), будет виртуальным перемещением

$$\delta \mathbf{r}_v = \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}_v (\Delta t)^2 \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (20)$$

Такое синхронное варьирование, в котором предполагается, что $\mathbf{v}_{v1}^* = \mathbf{v}_{v2}^*$, а $\mathbf{w}_{v1}^* \neq \mathbf{w}_{v2}^*$, называется *варьированием по Гауссу*.

13. Число степеней свободы. Виртуальные перемещения $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ ($v = 1, 2, \dots, N$) удовлетворяют $r + s$ уравнениям (12), (13). Число независимых виртуальных перемещений системы называется ее *числом степеней свободы*. Число степеней свободы мы будем всюду обозначать n . Ясно, что $n = 3N - r - s$.

Примеры. 1. Одна свободная точка в пространстве имеет три степени свободы.

2. Система, состоящая из двух точек, связанных стержнем, движущимся в плоскости, имеет три степени свободы.

3. Конек, движущийся по льду (пример 5 из п. 10), имеет две степени свободы.

4. Материальная точка, движущаяся по подвижной или неподвижной поверхности, имеет две степени свободы.

5. Система двух стержней, соединенных шарниром и движущихся в плоскости (ножницы), имеет четыре степени свободы.

14. Обобщенные координаты. Рассмотрим несвободную систему со связями (1), (2). Будем предполагать, что r функций f_α от $3N$ аргументов x_v, y_v, z_v ($v = 1, 2, \dots, N$) независимы (время t здесь рассматривается как параметр). В противном случае одна из связей противоречила бы остальным или была бы их следствием.

Наименьшее число параметров, необходимое для задания возможного положения системы, называется числом ее независимых *обобщенных координат*. Так как функции f_α ($\alpha = 1, \dots, r$) независимы, то число обобщенных координат, которое мы будем обозначать m , равно $3N - r$. За обобщенные координаты можно принять m из $3N$ декартовых координат x_v, y_v, z_v , относительно которых можно разрешить систему уравнений (1). Однако, как правило, такой выбор обобщенных координат практически мало пригоден. Можно ввести любые другие m независимых величин $q_1, q_2, \dots, q_m$, в своей совокупности определяющих конфигурацию системы. Они могут быть расстояниями, углами, площадями и т. п., а могут и не иметь непосредственного геометрического толкования. Требуется только, чтобы они были независимы, а декартовы координаты x_v, y_v, z_v точек системы можно было выразить через $q_1, q_2, \dots, q_m$ и t :

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_m, t) \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (21)$$

Эти функции, будучи подставленными в уравнения (1), обращают

их в тождества. Ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial q_1 & \dots & \partial x_1 / \partial q_m \\ \partial y_1 / \partial q_1 & \dots & \partial y_1 / \partial q_m \\ \partial z_1 / \partial q_1 & \dots & \partial z_1 / \partial q_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x_N / \partial q_1 & \dots & \partial x_N / \partial q_m \\ \partial y_N / \partial q_1 & \dots & \partial y_N / \partial q_m \\ \partial z_N / \partial q_1 & \dots & \partial z_N / \partial q_m \end{vmatrix} \quad (22)$$

равен m . Это следует из того, что среди $3N$ функций x_v, y_v, z_v из (21) от m аргументов $q_1, q_2, \dots, q_m$ (t — параметр) имеется m независимых, через которые могут быть выражены все остальные координаты точек системы.

Мы будем предполагать, что обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$ выбраны так, чтобы любое возможное положение системы могло быть получено из (21) при некоторых значениях величин $q_1, q_2, \dots, q_m$. Если это не удастся сделать сразу для всех возможных положений системы, то обобщенные координаты вводятся локально, т. е. для различных совокупностей возможных положений вводятся различные системы обобщенных координат.

Функции (21) будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемыми функциями всех своих аргументов. Кроме того, будем считать, что если система склерономна, то время t не входит в зависимости (21), чего всегда можно добиться соответствующим выбором обобщенных координат.

При исследовании конкретных задач механики очень часто совсем нет необходимости составлять уравнения связей (1). Из физической сущности задачи обычно ясно, как надо выбрать обобщенные координаты в таком количестве, которое необходимо и достаточно для задания возможных положений системы. Если же зависимости (21) требуются при решении задачи, то они составляются, как правило, с помощью геометрических соображений.

15. Координатное пространство. Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками m -мерного пространства $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Пространство $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ называется *координатным пространством* (или пространством конфигураций). Каждому возможному положению системы отвечает некоторая точка координатного пространства, которую будем называть *изображающей точкой*. Движению системы соответствует движение изображающей точки в координатном пространстве.

Близость точек координатного пространства определяется естественным образом через близость соответствующих положений системы. Между положениями системы и точками координатного пространства устанавливается таким путем взаимно однозначное и непрерывное соответствие.

Примеры. 1. Материальная точка движется по плоскости. Координатное пространство — сама эта плоскость.

2. Система N свободных точек в пространстве. Координатное пространство есть $3N$ -мерное евклидово пространство $(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$.

3. Маятник. Положение маятника, представляющего собой твердый стержень, подвешенный за один из концов к неподвижной точке, задается углом

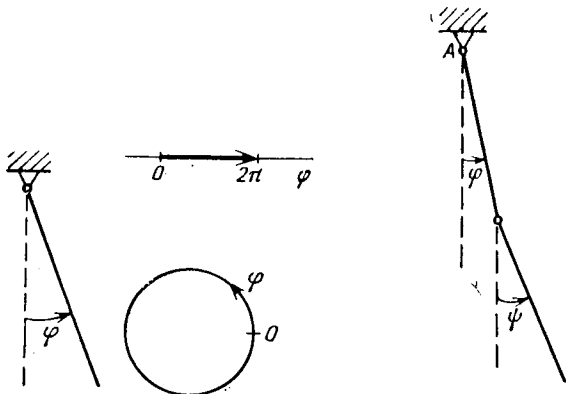


Рис. 14

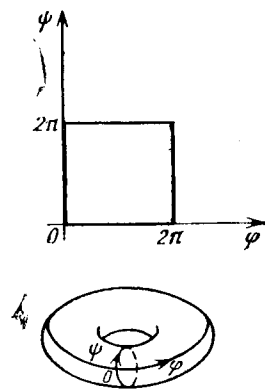


Рис. 15

φ (рис. 14), который примем за обобщенную координату. Поставим в соответствие каждому положению маятника точку на числовой оси, имеющую координату φ . Такое соответствие между положениями маятника и точками числовой оси не будет взаимно однозначным, так как разным точкам оси φ и $\varphi + 2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствует одно и то же положение маятника. Однозначности можно добиться, выделив на числовой оси полуоткрытый интервал $0 \leq \varphi < 2\pi$. Но при этом нарушается непрерывность соответствия, так как два близких положения маятника, для которых $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi - \epsilon$, не будут соответствовать близким точкам на выделенном полуинтервале. Чтобы восстановить непрерывность, нужно считать точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$

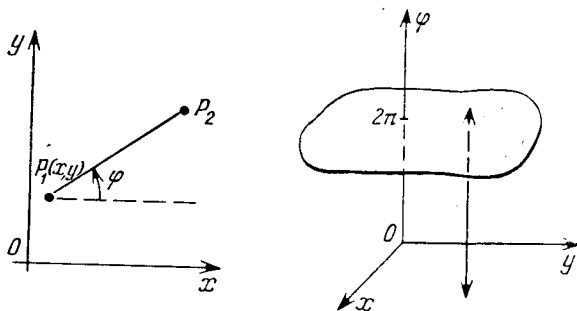


Рис. 16

тождественными. Наглядно это можно сделать, «склеив» точки $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Полученный геометрический образ — окружность и будет координатным пространством маятника.

4. *Двойной маятник*. Он состоит из двух соединенных шарниром твердых стержней, один из которых подвешен за свободный конец к неподвижной точке A (рис. 15). В остальном стержни могут свободно перемещаться в одной плоскости. За обобщенные координаты можно принять углы φ и ψ , образуемые стержнями с вертикальным направлением. Каждому положению маятника ставятся в соответствие два значения φ и ψ , определенных с точностью до чисел, кратных 2π . Поэтому если мы возьмем в плоскости φ , ψ квадрат со стороной 2π и отождествим в нем противоположные стороны, то получим координатное пространство двойного маятника. Наглядно это можно сделать, «склеив» противоположные стороны квадрата. После первой склейки получится цилиндр, а после второй — искомый геометрический образ — тор.

5. *Две связанные стержнем материальные точки, движущиеся по плоскости* (рис. 16). За обобщенные координаты можно принять декартовы координаты x , y одной из точек и угол φ , который образует стержень с осью Ox . Координатное пространство есть слой в пространстве (x, y, φ) , заключенный между плоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, противоположные точки которого отождествлены. Здесь, в отличие от примеров 3 и 4, наглядное отождествление плоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ путем склеивания получить нельзя.

16. *Обобщенные скорости и ускорения*. При движении системы ее обобщенные координаты изменяются со временем. Величины $\dot{q}_j$ и $\ddot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) называются соответственно *обобщенными скоростями* и *обобщенными ускорениями*. Скорости и ускорения точек системы в декартовой системе координат найдем, продифференцировав сложные вектор-функции времени (21):

$$\mathbf{v}_v = \dot{\mathbf{r}}_v = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (23)$$

$$\mathbf{w}_v = \ddot{\mathbf{r}}_v = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j,h=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial q_j \partial q_h} \dot{q}_j \dot{q}_h + 2 \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial t^2} \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24)$$

Справедливы следующие равенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (25)$$

Первое из этих равенств сразу следует из (23). Второе равенство легко проверить дифференцированием, если использовать (23) и возможность изменения порядка дифференцирования функции $\mathbf{r}_v$ по ее аргументам. Последнее возможно, так как $\mathbf{r}_v$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial q_k \partial t} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_v}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_k}.$$

Запишем в обобщенных скоростях уравнения (2) неголономных связей. Подставив (21) и (23) в (2), получим

$$\sum_{j=1}^m b_{\beta j}(q_1, q_2, \dots, q_m, t) \dot{q}_j + b_{\beta}(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (26)$$

Величины $b_{\beta j}$, b_{β} определяются равенствами

$$b_{\beta j} = \sum_{v=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \cdot \mathbf{a}_{\beta v} \quad (\beta = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, m),$$

$$b_{\beta} = \sum_{v=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \cdot \mathbf{a}_{\beta v} + a_{\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, s).$$

Здесь в векторах $\mathbf{a}_{\beta v}$ и скалярах a_{β} величины $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ заменены на их выражения (21).

Для голономной системы обобщенные скорости $\dot{q}_j$ независимы и совершенно произвольны. В неголономной системе обобщенные координаты, как и в голономной системе, могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости не будут независимы; они связаны соотношениями (26).

Чтобы выразить виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_v$ точек системы через вариации δq_j обобщенных координат, надо, в соответствии с п. 12, отбросить в выражении (23) $\partial \mathbf{r}_v / \partial t$ и заменить $\dot{q}_j$ на δq_j , а $\mathbf{r}_v$ на $\delta \mathbf{r}_v$. Тогда получим¹⁾

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \delta q_j \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (27)$$

Для голономной системы вариации δq_j произвольны. В неголономной же системе они связаны соотношениями, которые получаются из (26) путем отбрасывания величин b_{β} и замены $\dot{q}_j$ на δq_j :

$$\sum_{j=1}^m b_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (28)$$

Следовательно, число степеней свободы голономной системы совпадает с числом ее обобщенных координат, а число степеней свободы неголономной системы меньше числа m обобщенных координат на количество s дифференциальных неинтегрируемых связей²⁾.

17. Псевдокоординаты. В некоторых задачах динамики, особенно при изучении движения неголономных систем, бывает удобно ввести

¹⁾ Вообще, для любой функции $\varphi(q_1, q_2, \dots, q_m, t)$ имеем $\delta \varphi = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \delta q_j$.

²⁾ Конечно, предполагается, что связи (26) являются независимыми.

координаты более общего вида, которые получили название псевдокоординат. Пусть n — число степеней свободы. Рассмотрим n независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \dot{q}_j. \quad (29)$$

Коэффициенты c_{ij} — функции $q_1, q_2, \dots, q_m, t$. Величины $\dot{\pi}_i$ имеют вполне определенный смысл некоторых линейных комбинаций обобщенных скоростей, но сами символы π_i могут и не иметь смысла, т. е. правые части в равенствах (29) могут не быть полными производными по времени от каких-либо функций обобщенных координат и времени. Величины π_i также осмыслены. Это — производные по времени от правых частей равенств (29). Будем называть символы π_i *псевдокоординатами*, а величины $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ — соответственно *псевдоскоростями* и *псевдоускорениями*. Некоторые из π_i могут быть, в частности, обобщенными координатами q_i , тогда соответствующие $\dot{\pi}_i$ и $\ddot{\pi}_i$ — обобщенные скорости и обобщенные ускорения.

Величины c_{ij} будем выбирать так, чтобы определитель линейной системы из $m = n + s$ уравнений (26), (29) относительно $\dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) был отличен от нуля. Разрешив эту систему, получим

$$\dot{q}_j = \sum_{i=1}^n d_{ij} \dot{\pi}_i + g_j \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (30)$$

Псевдоскорости $\dot{\pi}_i$ могут принимать произвольные значения; если они заданы, то обобщенные скорости находятся из (30). Величины d_{ij}, g_j в (30) — функции $q_1, q_2, \dots, q_m, t$.

Введем согласованное с (29) обозначение

$$\delta \pi_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \delta q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (31)$$

Формула (31) фактически является определением величин $\delta \pi_i$. Именно, $\delta \pi_i$ — это величина, равная правой части равенства (31), в которой δq_j — вариации обобщенных координат.

Из (31) и (28) находим выражение δq_j через величины $\delta \pi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^n d_{ij} \delta \pi_i \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (32)$$

Здесь величины $\delta \pi_i$ могут принимать произвольные значения.

Найдем пукные для дальнейшего выражения для виртуальных перемещений δr , точек системы через величины $\delta \pi_i$. Подставив (32)

в (27), получим

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{vi} \delta \pi_i \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (33)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{e}_{vi} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} d_{ij} \quad (v = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, n).$$

Запишем это выражение несколько иначе. Для этого продифференцируем обе части соотношений (30) по времени и полученное выражение для $\dot{\mathbf{q}}_i$ подставим в формулу (24), которая примет вид

$$\mathbf{w}_v = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{vi} \ddot{\pi}_i + \mathbf{h}_v \quad (v = 1, 2, \dots, N),$$

где вектор-функции $\mathbf{h}_v$ не зависят от псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{e}_{vi} = \frac{\partial \mathbf{w}_v}{\partial \ddot{\pi}_i} \quad (v = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, \dots, n). \quad (34)$$

Подставив (34) в (33), получим окончательное выражение для $\delta \mathbf{r}_v$ в виде

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{w}_v}{\partial \ddot{\pi}_i} \delta \ddot{\pi}_i \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (35)$$

§ 4. Кинематика твердого тела

18. Задачи кинематики твердого тела. Определение простейших перемещений. *Абсолютно твердое тело* — это такая механическая система, у которой взаимные расстояния между точками постоянны. Очень многие объекты природы и техники моделируются в теоретической механике системами, состоящими из отдельных материальных точек и абсолютно твердых тел. Отсюда вытекает важность изучения их движения. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем для краткости называть просто *твердым телом*.

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка P_i твердого тела имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_i$, то по определению при любых i, j величины $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ij}$ постоянны во все время движения. Если помимо связей, обеспечивающих постоянство расстояний r_{ij} , на твердое тело не наложено никаких других связей, то его называют *свободным твердым телом*. Иными словами: свободным называют твердое тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений. Свободное твердое тело является голономной склерономной системой.

Свободное твердое тело (такое, в котором есть три точки P_1 , P_2 , P_3 , не лежащие на одной прямой) имеет шесть степеней свободы. В самом деле, в голономной системе число степеней свободы и число обобщенных координат совпадают. Число же обобщенных координат равно шести. Действительно, чтобы задать положение одной из точек, скажем P_1 , нужно задать три координаты; если это сделано, то положение точки P_2 можно уже будет задать двумя параметрами, так как она может двигаться только по сфере радиусом r_{12} с центром P_1 ; после того как положения P_1 и P_2 зафиксированы, у точки P_3 осталась только одна степень свободы, так как точка при движении должна оставаться на окружности с радиусом, равным расстоянию от P_3 до прямой P_1P_2 , и лежащей в плоскости, перпендикулярной P_1P_2 . Итак, число степеней свободы твердого тела равно шести, как бы ни было велико число N образующих его точек.

Из приведенных рассуждений следует, что твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы; если у тела неподвижны две точки, то оно имеет одну степень свободы. Если свободное твердое тело представляет собой бесконечно тонкий стержень (или связанные им две материальные точки), то оно имеет пять степеней свободы.

Задача кинематики твердого тела состоит в разработке способов задания его движения, а также способов, позволяющих по небольшому числу кинематических характеристик, общих для всего тела, находить кинематические характеристики каждой точки тела.

Дадим пужные в дальнейшем определения простейших перемещений твердого тела. Рассмотрим два положения твердого тела, которые назовем его *начальным* и *конечным* положениями. При переходе тела из начального положения в конечное оно совершает некоторое перемещение. Будем рассматривать это перемещение, совершенно отвлекаясь от промежуточных положений, через которые тело проходит во время движения из начального положения в конечное, и от времени, в течение которого совершается этот переход. Таким образом, рассматриваемое перемещение определяется только начальным и конечным положениями тела; если конечное положение тела совпадает с его начальным положением, то никакого перемещения нет.

Перемещение твердого тела, при котором перемещения всех его точек геометрически равны, назовем *поступательным перемещением*.

Перемещение твердого тела, при котором его конечное положение получается из начального путем поворота вокруг неподвижной прямой, называется *вращением* (вокруг этой прямой), а сама неподвижная прямая называется *осью вращения*.

Винтовым перемещением называется совокупность поступательного перемещения и вращения, в которой поступательное перемещение происходит вдоль оси вращения.

19. Векторно-матричное задание движения твердого тела. Углы Эйлера. Пусть O_aXYZ — абсолютная система координат (рис. 17), O — произвольная фиксированная точка твердого тела, которую в дальнейшем будем называть *полюсом*, $OXYZ$ — система координат,

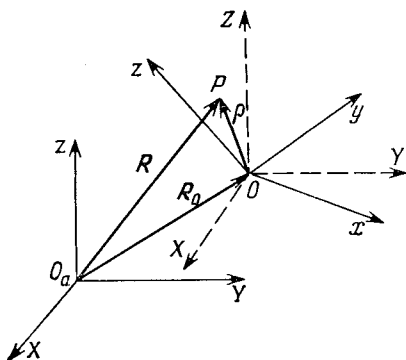


Рис. 17

получающаяся из системы координат O_aXYZ при помощи поступательного перемещения, $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом, изучением движения которого мы занимаемся. Само тело на рис. 17 не изображено. Пусть P — некоторая точка тела. Векторы R_0 , R заданы своими компонентами в системе $OXYZ$, а вектор $\rho = \overline{OP}$ — в системе $Oxyz$; очевидно, что ρ — постоянный вектор. Вектор $\overline{OP}$, заданный своими компонентами в системе $OXYZ$, обозначим r . Имеет место соотношение

$$r = A\rho, \quad (1)$$

где A — матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе $OXYZ$.

Положение точки P тела в абсолютной системе координат задается равенством

$$R = R_0 + A\rho. \quad (2)$$

При движении твердого тела в общем случае изменяется положение полюса O , а также изменяется ориентация тела в абсолютном пространстве. Поэтому R_0 и A в (2) — функции времени; будем их считать дважды непрерывно дифференцируемыми.

Матрица A , задавая переход от одного ортонормированного базиса к другому, является ортогональной, т. е. $A^{-1} = A'$. Из последнего равенства следует, что ее элементы связаны шестью независимыми соотношениями: сумма квадратов элементов каждой строки (столбца) равна единице и сумма попарных произведений соответствующих элементов столбцов (строк) равна нулю. Следовательно, из девяти элементов матрицы A независимых только три. Таким образом, матрицу A можно задать при помощи трех независимых параметров. В зависимости от конкретного выбора этих параметров матрица A будет выглядеть по-разному. Рассмотрим один из наиболее распространенных способов задания ориентации твердого тела при помощи углов Эйлера и найдем соответствующую им матрицу A .

Углы Эйлера вводятся следующим образом (рис. 18). Плоскость Oxy пересекается с плоскостью OXY по прямой ON , которая носит название *линии узлов*. Угол, составляемый линией узлов с осью

OX , обозначается буквой ψ и называется *углом прецессии*, угол между осями Oz и OZ обозначается буквой θ и называется *углом нутации*, угол между осью Ox и линией узлов обозначается буквой φ и называется *углом собственного вращения*.

Три угла ψ , θ , φ не зависят один от другого и могут быть выбраны совершенно произвольно. Если заданы три числа, являющихся значениями углов ψ , θ , φ , то тем самым однозначно определена ориентация твердого тела в абсолютном пространстве. Обычно приписывается, что $0 \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Переход от системы координат $OXYZ$ к системе $Oxyz$ осуществляется при помощи трех последовательных поворотов: на угол ψ вокруг OZ , на угол θ вокруг ON и на угол φ вокруг Oz . Все повороты производятся против часовой стрелки, если смотреть с конца соответствующих осей поворота.

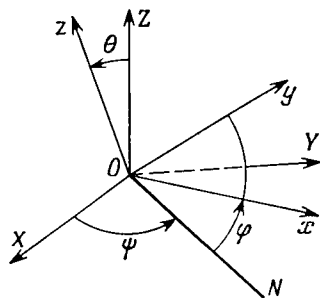


Рис. 18

При первом повороте мы переводим систему координат $OXYZ$ в промежуточную систему координат OX_1Y_1Z . Соответствующий переход задается матрицей A_1 :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй поворот осуществляет переход от OX_1Y_1Z к еще одной промежуточной системе координат OX_1Y_2z . Соответствующую матрицу перехода обозначим A_2 :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

И, наконец, третий поворот переводит систему координат OX_1Y_2z в систему координат $Oxyz$. Этому повороту соответствует матрица A_3 :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ z \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A перехода от системы координат $Oxyz$ к системе $OXYZ$ равна произведению матриц $A_1A_2A_3$; ее элементы a_{ij} выражаются через углы Эйлера по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta, & a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, & a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta, \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, & a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, & a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)_i$$

Отметим, что при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ линия узлов ON и углы φ и ψ не определены, а определена только их сумма $\varphi + \psi$. Эта особенность углов Эйлера делает их мало пригодными для исследования движений, при которых ось Oz тела может принимать направления, близкие прямой, проходящей через ось OZ . Избежать этих трудностей можно, применяя другие углы, определяющие ориентацию тела в абсолютном пространстве, или модифицируя углы Эйлера так, чтобы угол θ до оси Oz отсчитывался не от оси OZ , а, например, от OX или OY .

З а м е ч а н и е. Мы видели, что конечный поворот системы $OXYZ$, переводящий ее в систему $Oxyz$, задается матрицей A , являющейся произведением трех матриц, задающих последовательные повороты. Но, так как операция перемножения матриц не обладает свойством коммутативности, отсюда следует, что конечные повороты твердого тела некоммутативны. Это означает, что в общем случае ориентация твердого тела, получаемая им в результате двух последовательных конечных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов.

У п р а ж н е н и е. Привести конкретный пример некоммутативных поворотов твердого тела.

20. Движение твердого тела с неподвижной точкой как ортогональное преобразование. Если во все время движения у твердого тела остается неподвижной одна точка O , то говорят, что тело движется вокруг точки O , или совершает *сферическое движение*.

При движении тела вокруг неподвижной точки O в формуле (2) вектор R_0 постоянен. Пусть при $t = 0$ оси связанной с телом системы координат $Oxyz$ совпадают с соответствующими осями неподвижной системы координат $OXYZ$. Матрица A будет при этом единичной матрицей ($A = E$), и, согласно (1), (2), $R = r = \rho$, причем выписанные векторы задаются своими компонентами в одной и той же системе координат: либо $Oxyz$, либо $OXYZ$, что безразлично, так как эти системы координат при $t = 0$ совпадают. Мы будем считать, что векторы заданы в неподвижной системе $OXYZ$.

Когда тело начнет двигаться, то оно будет «переносить» с собой вектор ρ , поворачивая его вокруг точки O . Через какое-то время t вектор ρ перейдет в вектор $r = A(t)\rho$. Последняя формула определяет преобразование пространства, в котором выбрана система координат $OXYZ$. Матрица $A(t)$ ортогональна, т. е. $AA' = E$. Отсюда и из правила нахождения определителя произведения квадратных матриц следует, что $(\det A)^2 = 1$. Следовательно, $\det A$ может принимать только два значения $+1$ или -1 , но, так как $\det A$ в начальный момент равен единице, стать равным -1 при каком-либо t он не может в силу своей непрерывности по t .

Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки задает собственное ортогональное преобразование.

21. Основные теоремы о конечных перемещениях твердого тела.

Теорема Эйлера. Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.

Для доказательства заметим, что утверждение теоремы Эйлера эквивалентно тому, что у матрицы A есть собственное значение, равное $+1$. Соответствующий собственный вектор $\mathbf{r}$ задает ось вращения.

Действительно, так как $\mathbf{r} = A\mathbf{r}$, то направление этой оси остается неизменным при движении тела.

Пусть $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ — характеристический многочлен матрицы A . Чтобы показать, что $f(1) = 0$, рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} f(1) &= \det(A - E) = \det(A' - E') = \det(A^{-1} - E) = \det(A(A^{-1} - E)) = \\ &= \det(E - A) = \det(-(A - E)) = (-1)^3 \det(A - E) = -f(1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(1) = 0$, и теорема доказана.

Теперь найдем упоминаемый в теореме угол поворота вокруг оси. Для этого удобно перейти от системы $OXYZ$ к системе $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$, у которой ось $O\tilde{Z}$ направлена вдоль оси вращения. В этой системе матрица $\tilde{A}$, задающая поворот на угол α , имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Замечая, что A и $\tilde{A}$ подобны, и пользуясь тем, что у подобных матриц суммы диагональных элементов совпадают, получаем равенство, определяющее угол поворота α :

$$1 + 2 \cos \alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Теорема Шаля. Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить неединственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.

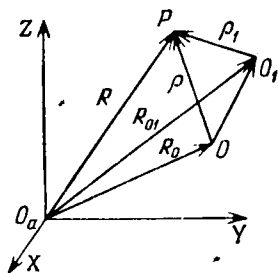


Рис. 19

Доказательство осуществляется простым геометрическим вычислением. На рис. 19 O_aXYZ — абсолютная система координат. Системы координат $OXYZ$ и $O_1X_1Y_1Z_1$ (не показанные на рис. 19) с началом в двух различных полюсах O и O_1

получаются из O_aXYZ поступательными перемещениями, определяемыми соответственно векторами R_O и R_{O_1} . Считаем, что векторы R_O и R_{O_1} заданы своими компонентами в абсолютной системе координат O_aXYZ . Положение произвольной точки P тела в абсолютной системе координат определяется вектором R . Показанные на рис. 19 векторы ρ , ρ_1 , $\overline{OO_1}$ считаем заданными их компонентами в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом. Имеем равенства

$$R = R_O + A\rho = R_O + A(\overline{OO_1} + \rho_1) = R_O + A\overline{OO_1} + A\rho_1 = R_{O_1} + A\rho_1.$$

Отсюда и следует справедливость теоремы Шаля. Действительно, перемещение твердого тела можно представить как поступательное, определяемое перемещением полюса, плюс вращение, задаваемое матрицей A . Причем из предыдущего видно, что матрица A не зависит от выбора полюса, но из доказательства теоремы Эйлера следует, что ось вращения и угол поворота определяются только элементами матрицы A . Поступательное же перемещение зависит от полюса. Из приведенного выше равенства видно, что для разных полюсов O и O_1 поступательные перемещения, задаваемые векторами R_O и R_{O_1} , связаны соотношением $R_{O_1} = R_O + A\overline{OO_1}$.

Упражнение. Показать, что результирующее перемещение твердого тела не зависит от порядка, в котором следуют одно за другим составляющие его поступательное перемещение и вращение.

Теорема Моцци. *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Для доказательства теоремы разложим перемещение твердого тела на поступательное вместе с некоторым полюсом O и на вращение вокруг полюса. Согласно теореме Шаля, направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса. Для удобства вычислений ось O_aZ абсолютной системы координат направим по оси вращения, и пусть в исходном положении тела соответствующие оси абсолютной O_aXYZ и связанной с твердым телом $Oxyz$ систем координат совпали. Если α — угол поворота, то матрица A , определяющая ориентацию тела в его конечном положении относительно абсолютной системы координат, имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема Моцци будет доказана, если в теле найдется такая прямая, точки которой после перемещения тела из начального положения в конечное переместились бы только вдоль этой прямой. Действительно, выбирая тогда полюса на этой прямой, мы представим перемещение твердого тела в виде винтового перемещения, что и будет означать справедливость теоремы Моцци.

Представим вектор R_O перемещения полюса (рис. 20) в виде суммы двух векторов $R_O = R_O^{\parallel} + R_O^{\perp}$, где в абсолютной системе координат

$$R_O = \begin{Bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{Bmatrix}, \quad R_O^{\parallel} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_O \end{Bmatrix}, \quad R_O^{\perp} = \begin{Bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Пусть P — точка тела с радиусом-вектором ρ относительно полюса O . В начальном положении тела $\rho = R_*$. В конечном положении тела вектор ρ в абсолютной системе координат перейдет в вектор $R_O + AR_*$. Рассмотрим прямую, параллельную оси OZ и проходящую через конец вектора R_* . Если при перемещении тела точки этой прямой переместились вдоль нее самой, то $R_O + AR_* = R_* + R_O^{\parallel}$. Отсюда следует, что $(A - E)R_* = -R_O^{\perp}$. Если X_*, Y_*, Z_* — компоненты вектора R_* в системе O_aXYZ , то из последнего равенства следуют два скалярных уравнения, которым должны удовлетворять X_*, Y_* :

$$(\cos \alpha - 1)X_* - \sin \alpha Y_* = X_O,$$

$$\sin \alpha X_* + (\cos \alpha - 1)Y_* = Y_O.$$

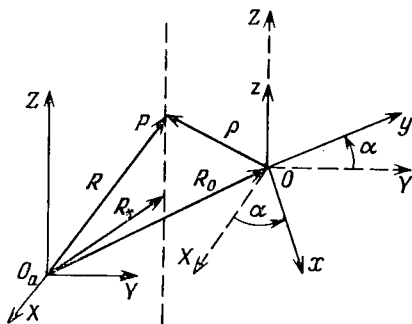


Рис. 20

Величина же Z_* может быть произвольной, так как третье скалярное уравнение удовлетворяется тождественно.

Определитель выписанной системы линейных уравнений равен $4 \sin^2(\alpha/2)$. Он отличен от нуля, если $\alpha \neq 0, 2\pi$, т. е. когда перемещение отлично от поступательного. Таким образом, мы получили в теле прямую $X = X_*, Y = Y_*$, параллельную оси вращения, точки которой смещаются при перемещении тела вдоль нее самой. Теорема доказана.

Следствие (теорема Бернулли — Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

Пример. Пусть куб движется так, что три его вершины A, B, C переходят в новые положения A_1, B_1, C_1 — также вершины куба (рис. 21). Выясним, каким простейшим движением может быть достигнут этот переход.

Так как центр куба O при указанном перемещении остался на месте, то применима теорема Эйлера. Свяжем с кубом систему координат $OXYZ$, оси которой перпендикулярны соответствующим граням куба. В результате

перемещения куба оси OX , OY и OZ перейдут соответственно в оси Ox , Oy и Oz (рис. 21). Нетрудно видеть, что матрица A , задающая перемещение (поворот) куба будет такой:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для собственного вектора $\mathbf{r}$ матрицы A , отвечающего собственному значению $\lambda = 1$, имеем $\mathbf{r}' = (1, 1, 1)$. Угол поворота определяется уравнением $2 \cos \Phi + 1 = 0$.

Таким образом, указанное перемещение куба достигается вращением вокруг диагонали DF на угол 120° .

22. Скорость и ускорение твердого тела при поступательном движении. До сих пор при изучении перемещения твердого тела мы интересовались лишь его начальным и конечным положениями, не

обращая внимания на быстроту перемещения. Теперь будем находить скорости и ускорения точек твердого тела при его движении.

Движение твердого тела в течение некоторого промежутка времени называется *поступательным*, если поступательно его перемещение между положениями, соответствующими двум произвольным моментам времени из этого промежутка. Примерами поступательных движений могут служить движение пассажирского лифта в многоэтажных жилых домах, движение ящика письменного стола при его вдвигании

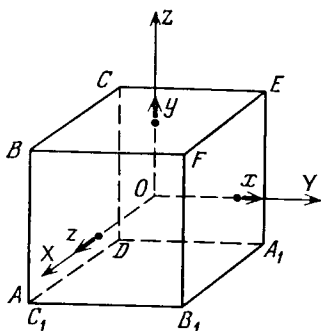


Рис. 21

и выдвигании, движение кабины «колеса обозрения» в парке. В первых двух примерах поступательное движение прямолинейное (все точки тела движутся по прямым), в третьем примере — криволинейное (точки тела движутся по криволинейным траекториям — окружностям).

Так как при поступательном перемещении любые две точки тела P_1 и P_2 за время Δt имеют геометрически равные перемещения $\Delta \mathbf{R}_1$ и $\Delta \mathbf{R}_2$, то при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости и равные ускорения. Эти одинаковые для всех точек тела скорости и ускорения называются соответственно *скоростью* и *ускорением поступательного движения* твердого тела. В дальнейшем мы увидим, что понятия скорости и ускорения твердого тела имеют смысл только для поступательного движения, так как при движении, отличном от поступательного, скорости и ускорения различных точек тела, как правило, неодинаковы.

23. О мгновенном кинематическом состоянии твердого тела. Если в данный момент времени скорости $\mathbf{v}$ всех точек твердого тела равны между собой, то говорят, что тело совершает *мгновенно по-*

ступательное движение со скоростью v . В частности, если $v = 0$, то тело находится в *мгновенном покое*.

З а м е ч а н и е. Здесь речь идет только о распределении скоростей точек тела в данный момент времени. В частности, ускорения точек тела совсем не обязаны быть одинаковыми.

Если в данный момент времени точки некоторой прямой в твердом теле имеют скорости, равные нулю, то говорят, что тело совершает *мгновенное вращение* вокруг этой прямой, а прямую называют *мгновенной осью вращения*.

З а м е ч а н и е. В приведенном определении речь идет только о распределении скоростей точек некоторой прямой в твердом теле. Мгновенная ось вращения, в частности, в разные моменты времени может занимать разные положения и в движущемся теле, и в абсолютном пространстве.

Если в данный момент тело участвует в совокупности двух мгновенных движений, поступательном вдоль некоторой оси и вращении вокруг этой оси, то говорят, что тело совершает *мгновенно винтовое движение*. В дальнейшем (в п. 28) будет показано, что самое общее мгновенное движение свободного твердого тела является мгновенно винтовым.

24. Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения. Пусть O_aXYZ — неподвижная система координат (рис. 17), O — произвольно выбранный полюс, $Oxyz$ — жестко связанная с твердым телом система координат; система координат $OXYZ$ получается из O_aXYZ поступательным перемещением, определяемым вектором R_o . Пусть P — некоторая точка тела, ρ и r — вектор $\overline{OP}$, заданный своими компонентами в системах координат $Oxyz$ и $OXYZ$ соответственно.

Т е о р е м а. *Существует единственный вектор ω , называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость v точки P тела может быть представлена в виде*

$$v = v_o + \omega \times r, \quad (4)$$

где v_o — скорость полюса O ; вектор ω от выбора полюса не зависит.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем обе части равенства (2), учитывая сначала, что вектор ρ постоянен, а затем воспользовавшись формулой (1). Получим

$$v = \dot{R}_o + \dot{A}\rho = v_o + \dot{A}A^{-1}r. \quad (5)$$

Покажем, что матрица $\dot{A}A^{-1}$ кососимметрическая. В самом деле, продифференцировав по времени тождество $AA' = E$, получим $\dot{A}A' + AA' = 0$. Отсюда $\dot{A}A^{-1} = -AA'$. Применив операцию транспонирования к обеим частям этого равенства, имеем окончательно $(\dot{A}A^{-1})' = -\dot{A}A' = -\dot{A}A^{-1}$.

Теперь введем обозначения для элементов кососимметрической матрицы $\dot{A}A^{-1}$ по формуле

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}.$$

Если составить вектор $\omega' = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ с компонентами, заданными в системе координат O_aXYZ , то результат умножения матрицы $\dot{A}A^{-1}$ на вектор r может быть представлен в виде векторного произведения $\omega \times r$. Отсюда и из (5) следует формула (4). Попутно показана справедливость равенства (называемого *формулой Эйлера*)

$$\dot{r} = \omega \times r. \quad (6)$$

Мы ввели ω , взяв предварительно в неподвижном пространстве конкретный базис, задающий систему координат O_aXYZ . Из (4) получаем, что в этой системе координат $\omega = 1/2 \operatorname{rot} v$. Единственность

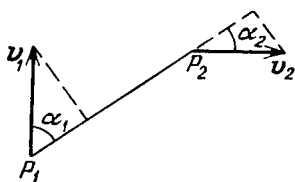


Рис. 22

ω при заданном полюсе O следует теперь из инвариантности вихря и независимости v от выбора базиса (см. замечание в п. 6). Независимость ω от выбора полюса получаем из того, что компоненты ω целиком определяются элементами матрицы A и их производными по времени, а матрица A от выбора полюса не зависит (см. п. 21). Теорема доказана.

Отметим некоторые следствия, вытекающие из формулы (4).

1. В каждый момент времени проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой. (На рис. 22 $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$. Механический смысл этого равенства весьма прост: в силу того что $P_1P_2 = \text{const}$, точка P_1 не может ни «догнать» точку P_2 , ни «отстать» от нее.) Доказательство следует из того, что согласно (4) $v_2 = v_1 + \omega \cdot \overline{P_1P_2}$. Отсюда $v_1 \cdot \overline{P_1P_2} = v_2 \cdot \overline{P_1P_2}$, или $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$.

2. Скорости трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, вполне определяют скорость любой точки тела. (Очень простое геометрическое доказательство получается, если использовать следствие 1.)

3. Если векторы скоростей трех точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент времени равны, то тело совершает мгновенно поступательное движение.

4. Если в данный момент времени скорости двух точек тела равны нулю, то тело либо находится в мгновенном покое, либо совершает мгновенное вращение вокруг прямой, проходящей через эти точки.

5. Если скорость некоторой точки тела в данный момент времени равна нулю, то тело находится либо в мгновенном покое, либо в мгновенном вращении вокруг оси, проходящей через эту точку.

6. Мгновенное движение твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: поступательное со скоростью, равной скорости произвольного полюса, и вращение вокруг оси, проходящей через этот полюс.

Чтобы найти ускорение $\mathbf{w}$ точки P , продифференцируем обе части формулы (4) по времени. Получим

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется *угловым ускорением*. Учтя (6), формулу для $\mathbf{w}$ можно записать в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (7)$$

Вектор $\mathbf{w}_{np} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ называют *вращательным ускорением*, а $\mathbf{w}_{oc} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — *осеостремительным ускорением*. Таким образом, ускорение произвольной точки твердого тела складывается из ускорения полюса, вращательного и осеостремительного ускорений. Формула (7) носит название *формулы Ривальса*.

25. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть в твердом теле неподвижны две точки O и O_1 . Прямая, проходящая

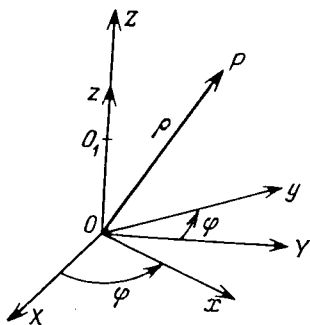


Рис. 23

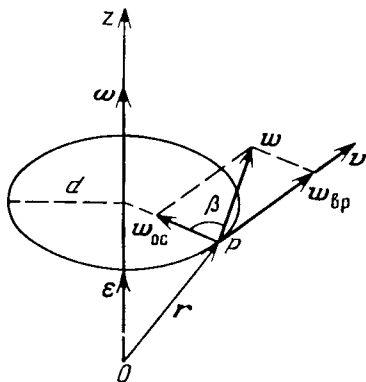


Рис. 24

через O и O_1 , будет осью вращения. Ось OZ неподвижной системы координат и ось Oz системы координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, направим по оси вращения. Ориентация тела относительно неподвижной системы координат определяется углом $\varphi(t)$ между осями OX и Ox (рис. 23). Точки тела, не принадлежащие оси вращения, движутся по окружностям с центрами на оси вращения и лежащим в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Пусть точка P тела задана в связанной системе координат радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

Тогда

$$\mathbf{r} = A\mathbf{\rho}, \quad A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \omega = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что угловая скорость ω направлена по оси вращения, причем так, что если смотреть с конца вектора ω , то вращение тела видно происходящим против часовой стрелки. Угловое ускорение ε также направлено по оси вращения, причем в ту же сторону, что и ω , если $\ddot{\varphi} > 0$, т. е. если вращение ускоренное (этот случай представлен на рис. 24), и противоположно ω , если $\ddot{\varphi} < 0$, т. е. если вращение замедленное.

Для вычисления скорости и ускорения точки P примем начало координат O за полюс. Тогда $\mathbf{v}_O = 0$ и из формулы (4) имеем $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. Вектор $\mathbf{v}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Его модуль $v = \omega d = |\dot{\varphi}|d$, где d — радиус окружности, по которой движется точка P .

Учитывая, что $\mathbf{w}_O = 0$, из формулы Ривальса (7) получим $\mathbf{w} = \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v}$. Вращательное ускорение $\mathbf{w}_{вр} = \varepsilon \times \mathbf{r}$ направлено по касательной к траектории точки P (к окружности радиуса d); его модуль $w_{вр} = \varepsilon d = |\ddot{\varphi}|d$ (рис. 24). Осестремительное ускорение $\mathbf{w}_{ос} = \omega \times \mathbf{v}$; оно лежит на перпендикуляре, проведенном к оси вращения из точки P , и направлено к оси вращения; его модуль $w_{ос} = \omega^2 d$.

Отметим, что вращательное ускорение точки P в случае вращения тела вокруг неподвижной оси является ее касательным (тангенциальным) ускорением (см. п. 6), а осестремительное ускорение является нормальным ускорением точки P . Модуль полного ускорения точки P вычисляется по формуле $w = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Угол β между направлениями осестремительного и полного ускорений вычисляется по формуле $\operatorname{tg} \beta = \varepsilon/\omega^2$.

26. Движение вокруг неподвижной точки. Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O . Тогда снова $\mathbf{v}_O = 0$, $\mathbf{w}_O = 0$ и формулы для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ те же, что и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, рассмотренном в п. 25.

Таким образом, в данный момент времени скорости точек тела таковы, какими они были бы, если бы тело вращалось с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, на которой в данный момент времени лежит вектор ω . Эта ось называется *мгновенной осью вращения*, а вектор ω — *мгновенной угловой скоростью*. Все точки

мгновенной оси вращения имеют скорости, равные нулю. Мгновенная ось вращения перемещается и в теле, и в абсолютном пространстве. В связи с этим заметим, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки (и в общем случае движения свободного твердого тела) ω не является производной некоторого угла φ , так как нет такого направления, вокруг которого поворот на угол φ совершается.

При своем движении мгновенная ось вращения описывает в теле коническую поверхность — *подвижный аксоид*, а в абсолютном пространстве коническую поверхность — *неподвижный аксоид*. Вершины этих аксоидов совпадают с неподвижной точкой O . Аксоиды касаются один другого по образующей, совпадающей с мгновенной

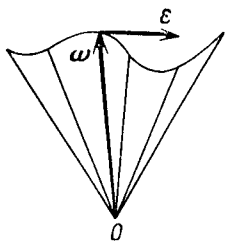


Рис. 25

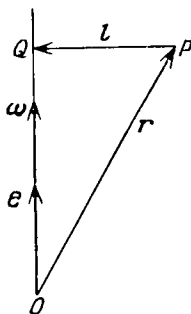


Рис. 26

осью вращения. Можно показать, что при движении тела подвижный аксоид катится по неподвижному без скольжения.

Годограф вектора ω лежит на неподвижном аксоиде. Так как $\varepsilon = \dot{\omega}$, то угловое ускорение ε направлено по касательной к годографу и вовсе не обязательно по мгновенной оси вращения (рис. 25). Положим $\omega = \omega e$, где e — единичный вектор, коллинеарный ω . Тогда $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, где вектор $\varepsilon_1 = \dot{\omega}e$ направлен по мгновенной оси вращения, а $\varepsilon_2 = \omega \dot{e}$ перпендикулярен ей. Вектор ε_1 характеризует изменение ω по модулю, а ε_2 — по направлению. Если мгновенная ось вращения вращается вокруг точки O с угловой скоростью Ω , то $\varepsilon_2 = \Omega \times \omega$.

Согласно формуле (7), ускорение w какой-либо точки P тела равно сумме вращательного и осеостремительного ускорений. При этом

$$w_{sp} = \varepsilon \times r = \varepsilon_1 \times r + \varepsilon_2 \times r. \quad (8)$$

Вычислим осеостремительное ускорение. Пусть Q — точка на мгновенной оси вращения, в которой ее пересекает опущенный на нее из точки P перпендикуляр (рис. 26). Обозначим вектор $\overline{PQ}$ буквой l .

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{oc} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = \omega^2 [\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}] = \\ &= \omega^2 (\overline{OQ} - \mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, $\mathbf{w}_{oc}$ совпадает с тем нормальным ускорением, которое имела бы точка P , если бы тело вращалось вокруг мгновенной оси вращения, как вокруг неподвижной, с угловой скоростью ω .

Следует иметь в виду, что, в отличие от случая вращения тела вокруг неподвижной оси, при вращении тела вокруг неподвижной точки $\mathbf{w}_{вр}$ и $\mathbf{w}_{oc}$ уже не обязаны быть касательной и нормальной составляющими ускорения точки P .

У п р а ж н е н и е. Показать, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента — с нормальной

в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{e}$.

П р и м е р. Диск радиуса $3a$ катится без скольжения по горизонтальной плоскости, описывая окружность радиуса $4a$ с постоянной угловой скоростью ω_1 и сохраняя свою плоскость вертикальной. Найти скорость и ускорение наивысшей точки диска P .

Будем представлять себе диск как основание конуса, движущегося вокруг неподвижной точки A (на рис. 27 показано сечение APB этого конуса, скорость центра диска направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя).

Ввиду отсутствия скольжения скорость точки B диска равна нулю. Поэтому угловая скорость ω диска направлена по AB от точки A к B . Величина угловой скорости может быть найдена из равенств

$$v_O = \omega_1 AO = \omega OC.$$

Из $\triangle AOB$ имеем

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad OC = AO \sin \alpha = \frac{12}{5} a.$$

Поэтому

$$\omega = \frac{AO}{OC} \omega_1 = \frac{5}{3} \omega_1.$$

Далее, $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}$. Скорость $\mathbf{v}_P$ перпендикулярна плоскости рисунка и направлена на читателя, $v_P = \omega AP \sin 2\alpha = 8\omega_1 a$.

Так как модуль угловой скорости постоянен, то угловое ускорение диска определяется равенством $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}$. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на читателя, $\varepsilon = \omega_1 \omega \sin(\pi/2 - \alpha) = 4\omega_1^2/3$.

Найдем теперь ускорение точки P . Имеем $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{вр} + \mathbf{w}_{oc}$, где $\mathbf{w}_{вр} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overline{AP}$, $\mathbf{w}_{oc} = \varepsilon \mathbf{l}$, $\mathbf{w}_{вр} = \varepsilon AP = 20\omega_1^2 a/3$, $\mathbf{w}_{oc} = 40\omega_1^2 a/3$. Вектор $\mathbf{w}_{вр}$ направлен перпендикулярно $\overline{AP}$, лежит в плоскости рисунка и составляет с

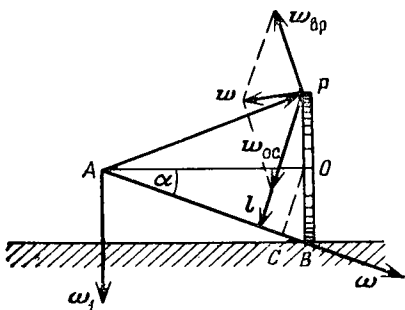


Рис. 27

вектором w_{oc} угол $\beta = \pi - 2\alpha$. Следовательно,

$$w = \sqrt{w_{вр}^2 + w_{с}^2 - 2w_{вр}w_{с}\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{97}}{3} \omega_1^2 a.$$

27. Плоское движение тела. Движение твердого тела называют *плоским*, если все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Пусть этой неподвижной плоскостью будет координатная плоскость O_aXY абсолютной системы координат. Каждая прямая, проведенная в теле перпендикулярно плоскости O_aXY , движется поступательно. Поэтому для определения движения этой прямой достаточно знать движение какой-либо одной ее точки. Движение же всего тела будет известно, если известно движение любого сечения тела плоскостью, параллельной неподвижной плоскости O_aXY . Следовательно, изучение плоского движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Плоская фигура, вынужденная двигаться, оставаясь в своей плоскости, имеет три степени свободы. За обобщенные координаты примем две координаты X_o, Y_o полюса O и угол φ , образованный осью Ox жестко связанной с фигурой системы координат с осью O_aX абсолютной системы координат (рис. 28).

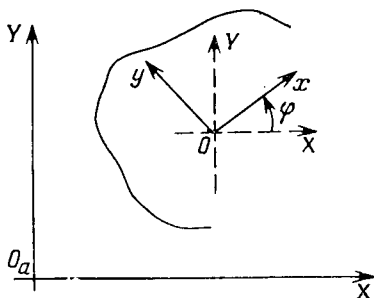


Рис. 28

Скорости и ускорения точек плоской фигуры могут быть найдены по формулам (4) и (7), справедливым для самого общего случая движения твердого тела. Остановимся только на некоторых специфических свойствах плоского движения.

Т е о р е м а. Если движение плоской фигуры в ее плоскости в данный момент времени не является мгновенно поступательным, то в этот момент времени существует единственная точка C фигуры, скорость которой равна нулю. Скорости остальных точек таковы, какими они были бы при мгновенном вращении фигуры вокруг точки C .

Доказательство. Так как движение не является мгновенно поступательным, то $\omega \neq 0$. В абсолютной системе координат векторы v_o, ω и неизвестный вектор $\overline{OC}$ запишем в виде

$$v_o = \begin{pmatrix} \dot{X}_o \\ \dot{Y}_o \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \overline{OC} = \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку скорость v_c искомой точки C равна нулю, то для наход-

дения ее координат получаем из формулы (4) векторное уравнение

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC} = 0,$$

которое эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$\dot{X}_O - \dot{\varphi} Y_C = 0, \quad \dot{Y}_O + \dot{\varphi} X_C = 0,$$

откуда получаем $X_C = -\frac{1}{\dot{\varphi}} \dot{Y}_O$, $Y_C = \frac{1}{\dot{\varphi}} \dot{X}_O$, или в векторной форме

$$\overline{OC} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O}{\omega^2}. \quad (10)$$

Если теперь принять точку C за полюс, то теорема будет полностью доказана. Точка C называется *мгновенным центром скоростей*.

Формула (10) дает геометрический способ нахождения мгновенного центра скоростей, если известны угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и скорость полюса $\mathbf{v}_O$. Смотря с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, повернем вектор $\mathbf{v}_O$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (рис. 29), затем от точки O в направлении, которое занял повернутый вектор $\mathbf{v}_O$, отложим отрезок длиной v_O/ω ; конец C этого отрезка и будет мгновенным центром скоростей.

Часто вектор $\boldsymbol{\omega}$ не задан, но известны скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ двух точек A и B плоской фигуры. При построении мгновенного центра скоростей здесь следует рассмотреть следующие возможности.

1) Если $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$, то движение мгновенно поступательное, так как из формулы $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AB}$ следует, что $\boldsymbol{\omega} = 0$ (здесь мгновенный

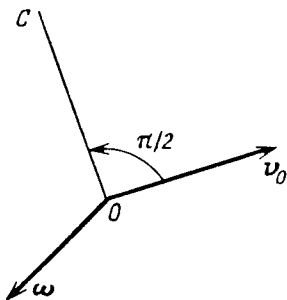


Рис. 29

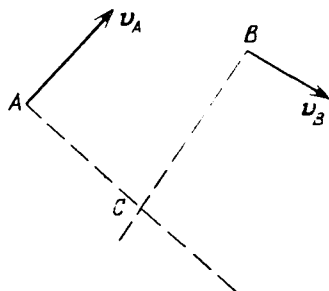


Рис. 30

центр «находится в бесконечности»; терминология оправдывается тем, что при $\dot{\varphi} \rightarrow 0$ величины X_C и Y_C неограниченно возрастают по модулю).

2) Если $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{v}_B$, но скорость одной из точек, скажем точки A , равна нулю, то A и есть мгновенный центр скоростей.

3) Если векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ неколлинеарны (рис. 30), то мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров, про-

веденных к векторам $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ в точках A и B . Это проще всего показать, опираясь на свойство проекций скоростей двух точек твердого тела на соединяющую их прямую (см. следствие 1 п. 24). Действительно, проекции $\mathbf{v}_C$ на $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ равны нулю, так как вектор $\mathbf{v}_A$ перпендикулярен $\overline{CA}$ и $\mathbf{v}_B$ перпендикулярен $\overline{CB}$. А поскольку $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ неколлинеарны, то отсюда следует, что $\mathbf{v}_C = 0$.

4) Пусть $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{v}_B$, но вектор $\mathbf{v}_A$ параллелен $\mathbf{v}_B$. Случай, когда вектор $\overline{AB}$ не перпендикулярен $\mathbf{v}_A$ (или $\mathbf{v}_B$), невозможен, так

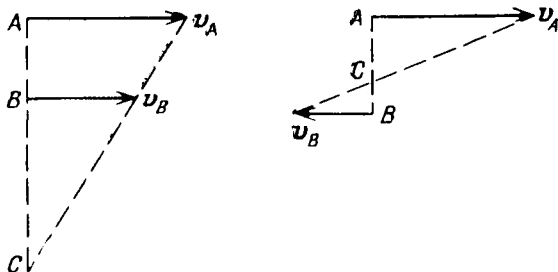


Рис. 31

как тогда проекции $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ на прямую, проходящую через точки A и B , не будут равными. Если же вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен $\mathbf{v}_A$ (и $\mathbf{v}_B$), то мгновенный центр скоростей, как нетрудно проверить, лежит на пересечении прямой, проходящей через точки A и B , и прямой, проходящей через концы векторов $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ (рис. 31).

При движении тела мгновенный центр скоростей перемещается и в теле, и в абсолютном пространстве. Геометрическое место его положений на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*, а геометрическое место положений мгновенного центра скоростей в самой движущейся плоской фигуре называется *подвижной центроидой*. Можно показать, что при движении тела подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

Теперь рассмотрим некоторые особенности, касающиеся распределения ускорений точек твердого тела при его плоском движении.

Теорема. Пусть плоская фигура движется в своей плоскости. Если в некоторый момент времени хотя бы одна из величин φ или $\dot{\varphi}$ отлична от нуля, то в этот момент времени существует единственная точка Q фигуры, ускорение которой равно нулю.

Доказательство. Пусть заданы ускорение полюса $\mathbf{w}_0$, мгновенная угловая скорость ω и мгновенное угловое ускорение ε . Требуется найти вектор $\overline{OQ}$ такой, чтобы ускорение точки Q было равно нулю. Из формулы (7) получаем векторное уравнение для $\overline{OQ}$:

$$\mathbf{w}_0 + \varepsilon \times \overline{OQ} + \omega \times (\omega \times \overline{OQ}) = 0. \quad (11)$$

Учитывая, что в абсолютной системе координат

$$\mathbf{w}_O = \begin{Bmatrix} \ddot{X}_O \\ \ddot{Y}_O \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix}, \quad \overline{OQ} = \begin{Bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ 0 \end{Bmatrix},$$

из (11) получаем систему двух линейных уравнений относительно X_Q, Y_Q :

$$\dot{\varphi}^2 X_Q + \ddot{\varphi} Y_Q = \ddot{X}_O, \quad -\ddot{\varphi} X_Q + \dot{\varphi}^2 Y_Q = \ddot{Y}_O. \quad (12)$$

Из условия теоремы следует, что определитель системы (12) $\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}^2$ отличен от нуля. Поэтому она имеет единственное решение

$$X_Q = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} (\dot{\varphi}^2 \ddot{X}_O - \ddot{\varphi} \ddot{Y}_O), \quad Y_Q = \frac{1}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} (\ddot{\varphi} \ddot{X}_O + \dot{\varphi}^2 \ddot{Y}_O).$$

Эти формулы можно представить в векторной форме:

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4} (\omega^2 \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O). \quad (13)$$

Точка Q называется *мгновенным центром ускорений*.

Из (13) следует геометрический способ нахождения мгновенного центра ускорений (рис. 32). Определим угол β равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Этот угол не зависит от выбора полюса и одинаков для всех точек тела. Чтобы получить точку Q , надо вектор $\mathbf{w}_O$ повернуть на угол β в направлении вращения фигуры, если вращение ускоренное, и в противоположном направлении, если вращение замедленное. Затем от полюса O в направлении, которое занял повернутый вектор $\mathbf{w}_O$, надо отложить отрезок OQ , длина которого вычисляется по формуле

$$OQ = \frac{w_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Конец Q этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. Рис. 32 соответствует ускоренному вращению фигуры против часовой стрелки.

Если мгновенный центр ускорений Q принять теперь за полюс, то ускорение любой точки P в данный момент времени может быть определено так же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через Q :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{вр} + \mathbf{w}_{ос}, \quad w = QP \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

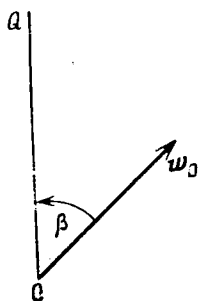


Рис. 32

Примеры. 1. Пусть диск катится по неподвижной прямой без скольжения и скорость его центра O постоянна (рис. 33). Так как при отсутствии скольжения скорость точки P диска, которой он касается неподвижной прямой, равна нулю, то мгновенный центр скоростей совпадает с точкой P . Подвижной центроидой будет обод диска, а неподвижной — прямая, по которой

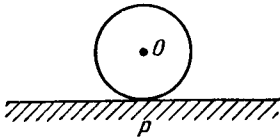


Рис. 33

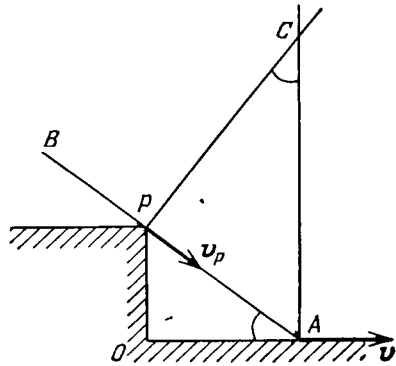


Рис. 34

он катится. Так как скорость точки O постоянна, то мгновенный центр ускорений совпадает с центром диска.

Рассмотренный пример показывает, в частности, что мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений — это, вообще говоря, разные точки.

2. Тонкий стержень AB опирается своей точкой P на прямой угол, а концом A скользит по горизонтальной направляющей с постоянной скоростью v . Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки P в зависимости от времени, если $OP = h$ и в начальный момент времени $OA = 0$ (рис. 34).

Скорость точки P направлена вдоль стержня. Мгновенный центр скорости C будет пересечением перпендикуляров, проведенных к стержню в его точках P и к горизонтальной оси в точке A . Пусть $OA = x$ ($x = vt$); тогда из $\triangle AOP$ и $\triangle APC$ имеем

$$AP = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad CP = \frac{x\sqrt{h^2 + x^2}}{h}, \quad CA = \frac{h^2 + x^2}{h}.$$

Угловая скорость стержня находится из равенства $v = \omega CA$, откуда

$$\omega = \frac{v}{CA} = \frac{vh}{h^2 + x^2} = \frac{vh}{h^2 + v^2 t^2}.$$

Вектор ω перпендикулярен плоскости рисунка и направлен к читателю. Вектор углового ускорения стержня ε также перпендикулярен плоскости рисунка, но его направление противоположно направлению ω (поскольку $\frac{d\omega}{dt} < 0$).

Модуль углового ускорения определяется равенством $\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|$, откуда

$$\varepsilon = \frac{2v^3 h t}{(h^2 + v^2 t^2)^2}.$$

Для модуля скорости точки P имеем

$$v_P = \omega CP = \frac{v^2 t}{\sqrt{h^2 + v^2 t^2}}.$$

Поскольку точка A является мгновенным центром ускорений ($v = \text{const}$), то модуль ускорения точки P вычисляется при помощи равенств

$$w_P = AP \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{v^2 h \sqrt{h^2 + 4v^2 t^2}}{(h^2 + v^2 t^2)^{3/2}}.$$

28. Кинематические инварианты. Кинематический винт. Снова вернемся к общему случаю движения твердого тела, рассмотренному в п. 24. В формуле (4) для скорости точки P тела угловая скорость ω не зависит от выбора точки P . Вектор ω называют *первым кинематическим инвариантом*. В более узком смысле мы будем называть первым кинематическим инвариантом величину $I_1 = \omega^2$. Далее, из формулы (4) следует, что для любых двух точек тела A и B скалярные произведения их скоростей v_A и v_B на вектор ω одинаковы. Поэтому проекция скорости точки на направление угловой скорости не зависит от выбора этой точки. Скалярное произведение скоростей точек тела на его угловую скорость называется *вторым кинематическим инвариантом*: $I_2 = v \cdot \omega$.

Покажем, что в самом общем случае движения твердого тела, когда $I_2 \neq 0$, скорости его точек таковы, как если бы тело совершало мгновенное винтовое движение. Для этого, согласно п. 23, надо показать существование такой прямой MN , все точки которой в данный момент времени имеют скорости, направленные вдоль этой прямой и параллельные ω .

Пусть выбран какой-либо полюс O и в данный момент известны его скорость v_O и угловая скорость тела ω . Пусть они заданы своими компонентами в системе координат $OXYZ$, получающейся из абсолютной системы координат O_aXYZ при помощи поступательного перемещения (рис. 17):

$$v_O = \begin{Bmatrix} v_{OX} \\ v_{OY} \\ v_{OZ} \end{Bmatrix}, \quad \omega = \begin{Bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Bmatrix}.$$

Если скорость точки S тела (рис. 35) отлична от нуля и параллельна вектору ω , то

$$v_O + \omega \times \overline{OS} = p\omega \quad (p \neq 0).$$

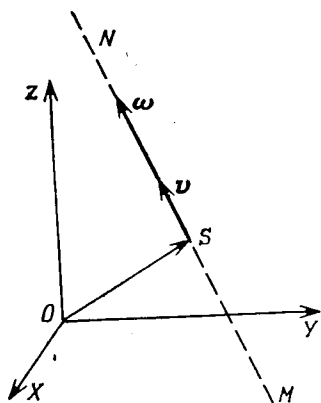


Рис. 35

Это равенство является векторным уравнением прямой MN . Если X, Y, Z — координаты любой точки прямой, то это уравнение в скалярной форме запишется в виде

$$\frac{v_{OX} + (\omega_Y Z - \omega_Z Y)}{\omega_X} = \frac{v_{OY} + (\omega_Z X - \omega_X Z)}{\omega_Y} = \frac{v_{OZ} + (\omega_X Y - \omega_Y X)}{\omega_Z} = p. \quad (14)$$

Прямая (14) называется *мгновенной винтовой осью* тела. Ясно, что все точки мгновенной винтовой оси имеют одинаковые скорости, равные проекции скорости любой точки тела на направление ω . Совокупность угловой скорости ω тела и скорости v любой точки мгновенной винтовой оси называют *кинематическим винтом*, а число p — *параметром винта*. Параметр винта выражается через кинематические инварианты по формуле

$$p = \frac{I_3}{I_1}.$$

Кинематический винт называется *правым* или *левым* в зависимости от того, положителен или отрицателен его параметр; рис. 35 соответствует правому винту.

Пример. Пусть в пространстве движется твердое тело и в некоторый момент времени оказываются известными скорости v_A, v_B, v_C трех его точек $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$; $v_A(2, 1, -3)$, $v_B(0, 3, -1)$, $v_C(-1, 2, -1)$. Найдем положение оси кинематического винта и его параметр в рассматриваемый момент времени.

Примем точку A за полюс. Тогда $v_B = v_A + \omega \times \overline{AB}$, $v_C = v_A + \omega \times \overline{AC}$. Эти векторные равенства можно записать в виде следующей совместной системы шести линейных уравнений относительно компонент $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора ω :

$$-\omega_z = -2, \quad \omega_z = 2, \quad \omega_x - \omega_y = 2; \quad \omega_y - \omega_z = -3, \quad \omega_z - \omega_x = 1, \quad \omega_x - \omega_y = 2.$$

Решив эту систему, получим

$$\omega_x = 1, \quad \omega_y = -1, \quad \omega_z = 2.$$

Для кинематических инвариантов I_1 и I_2 имеем такие значения:

$$I_1 = \omega^2 = 6, \quad I_2 = v_A \cdot \omega = -5.$$

Таким образом, в рассматриваемый момент времени тело совершает мгновенно винтовое движение, причем параметр кинематического винта равен $-5/6$. Уравнение мгновенной винтовой оси, согласно (14), имеет вид

$$\frac{2 - 2y - z}{1} = \frac{1 + 2x - z}{-1} = \frac{-3 + x + y}{2} = -\frac{5}{6}.$$

§ 5. Сложное движение точки

29. Основные определения. Иногда бывает необходимо изучить движение точки одновременно по отношению к двум системам координат. Пусть система координат $Oxyz$ движется по любому заданному закону относительно абсолютной системы координат O_aXYZ

(рис. 17). Это значит, что известны движение полюса O и матрица $A(t)$, задающая ориентацию осей Ox , Oy , Oz относительно абсолютной системы координат. Пусть в пространстве движется точка P . Ее движение по отношению к системе координат $Oxyz$ называется *относительным движением*. Движение трехгранника $Oxyz$ относительно O_aXYZ называется *переносным движением*. Движение точки относительно системы координат O_aXYZ , определяемое этими составляющими движениями, называется ее сложным или *абсолютным движением*. Задача состоит в установлении связи между основными кинематическими характеристиками движения точки в неподвижной и подвижной системах координат.

Абсолютной скоростью v_a (*абсолютным ускорением* w_a) точки называется ее скорость (ускорение) относительно абсолютной системы координат O_aXYZ . *Относительной скоростью* v_r (*относительным ускорением* w_r) точки называется ее скорость (ускорение) относительно системы координат $Oxyz$. *Переносной скоростью* v_e (*переносным ускорением* w_e) называется скорость (ускорение) той точки P' , которая неподвижна в системе координат $Oxyz$ и с которой в данный момент совпадает движущаяся точка P . Иными словами, переносная скорость (переносное ускорение) есть та скорость (ускорение), которую движущаяся точка P имела бы в данный момент, если бы она в этот момент оказалась жестко связанной с подвижной системой координат (т. е. не совершала бы относительного движения).

30. Производная от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижной системы координат. Часто приходится встречаться с необходимостью дифференцирования вектора, заданного своими компонентами в системе координат $Oxyz$, движущейся произвольным образом. Скорость изменения этого вектора в неподвижной системе координат O_aXYZ называется его абсолютной производной, а скорость изменения вектора в системе $Oxyz$ — *относительной* или *локальной производной*. Найдём связь между этими производными.

На рис. 17 $\overline{OP} = \rho$ — вектор, заданный в движущейся системе координат $Oxyz$. Тот же вектор $\overline{OP}$, заданный в неподвижной системе координат O_aXYZ , обозначим r . Так как движение системы $Oxyz$ задано, то матрица $A(t)$, определяющая ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной, известна и

$$r = A(t)\rho. \quad (1)$$

Вектор $\frac{dr}{dt}$ есть абсолютная производная вектора $\overline{OP}$, а вектор $\frac{\tilde{dr}}{dt} = A(t)\frac{d\rho}{dt}$ — его относительная производная. Обе производные заданы в системе координат O_aXYZ (следует заметить, что вектор $\frac{d\rho}{dt}$ задан в системе координат $Oxyz$).

Из (1) получаем

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{r} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}. \quad (2)$$

Но так как (см. п. 24)

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость системы координат $Oxyz$ относительно O_aXYZ , то равенство (2) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}. \quad (4)$$

Если учесть обозначение для относительной производной, то окончательно получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (5)$$

Этой формулой устанавливается связь между абсолютной и относительной производными вектора.

У п р а ж н е н и е. Показать, что если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, неподвижна относительно тела, то она неподвижна и относительно абсолютного пространства; показать, что верно также и обратное.

31. Теорема о сложении скоростей. Связь между относительной, переносной и абсолютной скоростями точки устанавливается следующей теоремой.

Т е о р е м а. *Абсолютная скорость точки равна сумме переносной и относительной скоростей.*

Для доказательства заметим, что согласно рис. 17 и формуле (1) радиус-вектор точки P в абсолютной системе координат равен $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$. Продифференцировав $\mathbf{R}$ по времени и воспользовавшись равенством (4), получим такое выражение для абсолютной скорости точки P :

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Вектор $\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ есть скорость той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка P , т. е. является переносной скоростью $\mathbf{v}_e$. Вектор же $\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}$ есть относительная скорость $\mathbf{v}_r$, заданная в абсолютной системе координат. Следовательно, равенство (6) можно переписать в виде

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \quad (7)$$

32. Теорема о сложении ускорений (теорема Корнелиса). Для получения абсолютного ускорения точки продифференцируем сначала обе части равенства (6) по времени и воспользуемся формулой (4). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a = \dot{\mathbf{v}}_a = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} = \\ = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ε — угловое ускорение подвижной системы координат $Oxyz$, а вектор $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}$ есть относительное ускорение $\mathbf{w}_r$. Перепишем равенство (8) в виде

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{w}_r + \omega \times \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}. \quad (9)$$

Вектор $\mathbf{w}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ есть ускорение той точки подвижной системы координат, в которой в данный момент находится движущаяся точка P , т. е. является переносным ускорением. Далее, согласно (3), можно написать $\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{r} = \omega \times \mathbf{A}\mathbf{r}$. Поэтому последние два слагаемых в (9) одинаковы и равны $\omega \times \mathbf{v}_r$, каждое. Следовательно, формула (9) может быть записана в виде

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c, \quad (10)$$

где $\mathbf{w}_c = 2\omega \times \mathbf{v}_r$. Вектор $\mathbf{w}_c$ называется *ускорением Кориолиса*. Формула (10) выражает *теорему о сложении ускорений*:

Теорема. Абсолютное ускорение точки равно сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.

Можно сказать, что часть абсолютного ускорения — ускорение Кориолиса — связана с изменением абсолютной скорости, обусловленным двумя причинами: 1) влиянием переносного движения на относительную скорость (при $\omega \neq 0$ вектор $\mathbf{v}_r$ поворачивается относительно абсолютной системы координат за счет вращения подвижной системы координат); 2) влиянием относительного движения на переносную скорость (при $\mathbf{v}_r \neq 0$ положение точки в подвижной системе координат изменяется и, следовательно, изменяется переносная скорость).

Упражнение. Показать, что вклад каждой из указанных причин в величину кориолисова ускорения одинаков и равен $\omega \times \mathbf{v}_r$.

Примеры. 1. В плоскости движутся поступательно два стержня AB и CD с данными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Построим скорость $\mathbf{v}$ точки P пересечения стержней.

Абсолютная скорость точки P может быть представлена как сумма переносной скорости $\mathbf{v}_1$ стержня AB и относительной скорости в движении точки P по этому стержню. С другой стороны, ее можно представить как сумму переносной скорости $\mathbf{v}_2$ стержня CD и относительной скорости точки в ее движении по этому стержню. Отсюда следует способ построения вектора абсолютной скорости точки P : через концы векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ проведем (рис. 36) прямые, параллельные направлениям стержней AB и CD ; точка P_1 пересечения этих прямых и будет концом вектора $\vec{PP}_1$, изображающего абсолютную скорость точки P .

2. Точка P движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R , вращающейся с той же самой угловой скоростью около одного из своих диаметров. Найдем абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки как функции угла φ (рис. 37).

Введем жестко связанную с вращающейся окружностью систему координат $Oxyz$, начало которой лежит в центре окружности; плоскость Oyz совпадает с плоскостью окружности, а ось Oz направлена вдоль вектора ее угловой скорости ω .

Переносная скорость точки перпендикулярна плоскости окружности: $\mathbf{v}'_e = (-\omega R \sin \varphi, 0, 0)$. Относительная скорость направлена по касательной

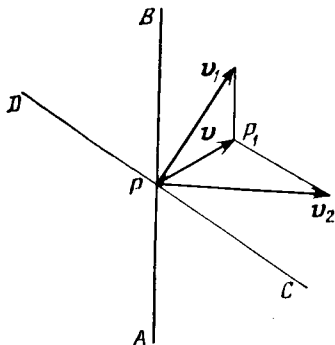


Рис. 36

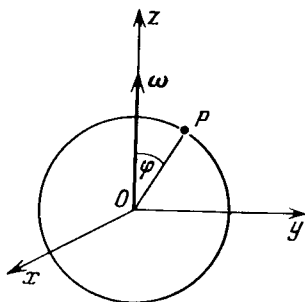


Рис. 37

к окружности: $\mathbf{v}'_r = (0, \omega R \cos \varphi, -\omega R \sin \varphi)$. Абсолютная скорость точки P определяется по формуле (7). Имеем

$$\mathbf{v}'_a = \omega R (-\sin \varphi, \cos \varphi, -\sin \varphi), \quad v_a = \omega R \sqrt{1 + \sin^2 \varphi}.$$

Переносное ускорение лежит в плоскости окружности и перпендикулярно оси вращения: $\mathbf{w}'_e = (0, -\omega^2 R \sin \varphi, 0)$. Относительное ускорение лежит в плоскости окружности и направлено к ее центру: $\mathbf{w}'_r = (0, -\omega^2 R \sin \varphi, -\omega^2 R \cos \varphi)$. Кориолисово ускорение $\mathbf{w}_e = 2\omega \times \mathbf{v}_r$ перпендикулярно плоскости окружности: $\mathbf{w}'_e = (-2\omega^2 R \cos \varphi, 0, 0)$. Абсолютное ускорение точки P определяется по формуле (10). Имеем

$$\mathbf{w}'_a = -\omega^2 R (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, \cos \varphi), \quad w_a = \omega^2 R \sqrt{4 + \cos^2 \varphi}.$$

§ 6. Сложное движение твердого тела

33. Постановка задачи. Пусть твердое тело движется относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, которая в свою очередь движется относительно неподвижной системы координат O_aXYZ . Тогда говорят, что по отношению к системе O_aXYZ тело совершает *сложное движение*, которое состоит из названных двух составляющих движений. Аналогично определяется сложное движение из произвольного числа n составляющих движений.

Задача изучения сложного движения тела состоит в нахождении зависимостей между основными кинематическими характеристиками составляющих движений и сложного движения. Мы будем рассматривать только зависимости между скоростями поступательных движений и между угловыми скоростями. Для простоты ограничимся только случаем двух составляющих движений.

34. Сложение мгновенно поступательных движений. Пусть $\mathbf{v}_1$ — скорость мгновенно поступательного движения тела относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, а $\mathbf{v}_2$ — скорость мгновенно поступательного движения системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно O_aXYZ . Возьмем произвольную точку P тела и найдем ее абсолютную скорость $\mathbf{v}_a$. По теореме о сложении скоростей (п. 31)

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \quad (1)$$

Для любой точки P тела переносной скоростью $\mathbf{v}_e$ будет скорость $\mathbf{v}_2$, а относительной скоростью $\mathbf{v}_r$ будет скорость $\mathbf{v}_1$. Поэтому любая точка P имеет скорость

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Так как все точки тела имеют в данный момент времени одинаковые скорости, то сложное движение тела является мгновенно поступательным.

Для случая n составляющих движений аналогично получим мгновенно поступательное движение со скоростью

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i.$$

35. Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей. Пусть твердое тело совершает относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ мгновенное вращение с угловой скоростью ω_1 , а система $O_1x_1y_1z_1$ вращается относительно системы O_aXYZ с мгновенной угловой скоростью ω_2 . Предположим, что оси составляющих мгновенных вращений пересекаются в точке A (рис. 38).

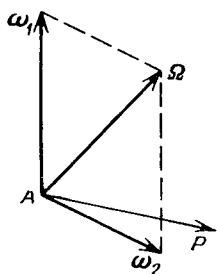


Рис. 38

Точка A имеет в данный момент времени скорость, равную нулю. Следовательно, сложное мгновенное движение представляет собой вращение вокруг оси, проходящей через точку A . Найдем его угловую скорость Ω . Возьмем произвольную точку P твердого тела. Для нахождения ее скорости надо в (1) положить $\mathbf{v}_e = \omega_2 \times \overline{AP}$, $\mathbf{v}_r =$

$= \omega_1 \times \overline{AP}$. Поэтому абсолютная скорость $\mathbf{v}_a$ точки P равна

$$\mathbf{v}_a = \omega_1 \times \overline{AP} + \omega_2 \times \overline{AP} = (\omega_1 + \omega_2) \times \overline{AP}. \quad (2)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{v}_a = \Omega \times \overline{AP}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) в силу произвольности $\overline{AP}$ следует, что

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Таким образом, в смысле распределения скоростей точек твердого

тела совокупность двух мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей эквивалентна одному мгновенному вращению с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.

Для случая n составляющих мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей аналогично можно получить одно эквивалентное вращение с угловой скоростью

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

З а м е ч а н и е. Если два составляющих вращения происходят вокруг одной и той же оси с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями, то $\omega_1 + \omega_2 = 0$ и наличие этих вращений не влияет на скорости точек тела, участвующего в сложном движении. Отсюда, в частности, следует, что ω — скользящий вектор, т. е. его начало можно перемещать в любую точку линии его действия и от этого скорости точек тела не изменятся. Действительно, пусть тело вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω . Вектор ω приложен в точке A оси вращения (рис. 39). От точки B оси отложим два вектора ω_1 и ω_2 такие, что $\omega = \omega_1 = -\omega_2$, и рассмотрим сложное вращение тела вокруг одной оси с тремя угловыми скоростями ω , ω_1 , ω_2 . Согласно сказанному выше, совокупность двух вращений с угловыми скоростями ω и ω_2 не влияет на скорости точек тела; эти вращения могут быть исключены из системы трех вращений. Таким образом, вектор ω оказался сдвинутым вдоль оси вращения на отрезок AB без изменения скоростей точек тела.

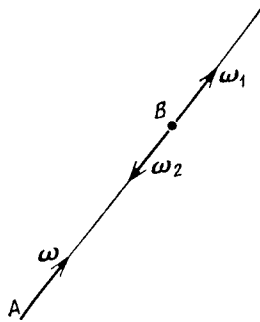


Рис. 39

36. Кинематические уравнения Эйлера. Получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, через углы Эйлера (п. 29) и их производные. Рассматриваемое тело участвует в сложном движении, состоящем из трех вращений: с угловой скоростью ψ вокруг оси OZ , с угловой скоростью θ вокруг линии узлов ON и с угловой скоростью ϕ вокруг оси Oz (рис. 40). Мгновенная угловая скорость тела ω равна сумме угловых скоростей составляющих вращений. Пусть p , q , r — проекции ω соответственно на оси Ox , Oy , Oz , жестко связанные с телом. Выражения для p , q , r через углы Эйлера и их производные легко получить из рис. 40, на котором вспомогательная прямая OM лежит в плоскости Oxy и перпендикулярна линии

узлов. Имеем

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (4) называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. Они широко применяются при исследовании движения твердого тела.

37. Сложение мгновенных вращений вокруг параллельных осей.

Пусть твердое тело совершает мгновенное вращение относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ с угловой скоростью ω_1 , а система координат $O_1x_1y_1z_1$ вращается относительно абсолютной системы координат O_aXYZ с угловой скоростью ω_2 и оси вращения параллельны. В этом случае очевидно, что в мгновенном сложном движении скорости точек тела будут такими же, как в плоском движении. Если взять какую-либо прямую в теле, параллельную мгновенным осям вращения составляющих движений, то скорости всех ее точек в данный момент времени будут одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть скорости точек тела, лежащих в какой-либо плоскости, перпендикулярной ω_1 и ω_2 .

Пусть эта плоскость пересекает плоскость, в которой лежат ω_1 и ω_2 , по прямой AB (рис. 41 и 42).

Если векторы ω_1 и ω_2 имеют одинаковые направления, то сложное движение представляет собой мгновенное вращение с модулем угловой скорости $\Omega = \omega_1 + \omega_2$; вектор Ω лежит в плоскости векторов ω_1 и ω_2 (рис. 41), параллелен им, направлен в ту же сторону и делит расстояние между ними внутренним образом на части, обратно пропорциональные ω_1 и ω_2 , т. е.

$$\omega_1 AC = \omega_2 BC. \quad (5)$$

Действительно, для скорости точки C имеем выражение

$$\mathbf{v}_C = \omega_1 \times \overline{AC} + \omega_2 \times \overline{BC}.$$

Слагаемые векторы в правой части этого выражения параллельны и противоположно направлены. Но при выполнении равенства (5) они равны по модулю. Поэтому $\mathbf{v}_C = 0$. Следовательно, и все точки оси, проходящей через точку C параллельно ω_1 и ω_2 , имеют нулевые скорости. Сложное движение представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси.

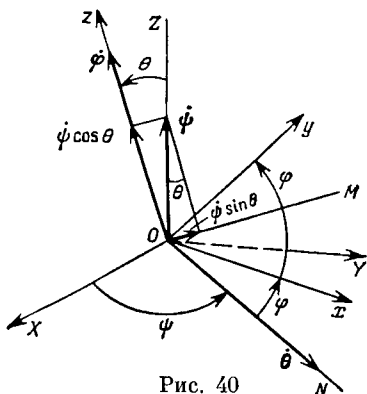


Рис. 40

Для нахождения угловой скорости Ω сложного движения достаточно рассмотреть скорость одной из точек, не лежащей на мгновенной оси вращения (скорости всех точек тела вполне определяются скоростями трех его точек, не лежащих на одной прямой;

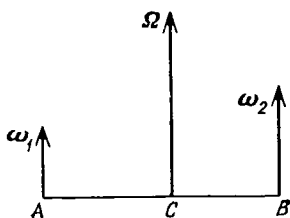


Рис. 41

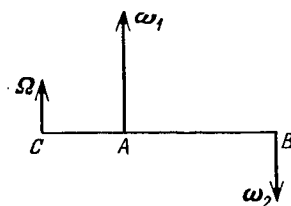


Рис. 42

см. п. 24). Рассмотрим скорость точки B . С одной стороны, $v_B = \omega_1 \times \overline{AB}$, а с другой $-v_B = \Omega \times \overline{CB}$. Из равенства

$$\Omega \times \overline{CB} = \omega_1 \times \overline{AB} \quad (6)$$

следует, что ω_1 и Ω параллельны и одинаково направлены. Для нахождения модуля вектора Ω приравниваем модули обеих частей равенства (6):

$$\Omega CB = \omega_1 AB. \quad (7)$$

Но, используя (5), можно получить, что

$$AB = AC + CB = \frac{\omega_2}{\omega_1} CB + CB = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} CB. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

Аналогично рассматривается случай противоположных направлений ω_1 и ω_2 . Примем для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$. В этом случае сложное движение представляет собой мгновенное вращение с угловой скоростью $\Omega = \omega_1 - \omega_2$; вектор Ω расположен в плоскости векторов ω_1 и ω_2 , направлен в сторону большей угловой скорости и делит расстояние между ними внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям ω_1 и ω_2 , т. е. $\omega_1 AC = \omega_2 BC$ (рис. 42).

38. Пара вращений. *Пара вращений* есть совокупность двух мгновенных вращений вокруг параллельных осей с равными по модулю, но противоположно направленными мгновенными угловыми скоростями.

Плоскость, в которой лежат векторы ω_1 и ω_2 ($\omega_1 = -\omega_2$), составляющие пару вращений, называют *плоскостью пары*, а расстояние d между осями мгновенных вращений, соответствующими ω_1 и ω_2 , называют *плечом пары* (рис. 43). Вектор $\overline{AB} \times \omega_2$ называют *моментом пары*.

Покажем, что твердое тело, участвующее в паре вращений, совершает мгновенно поступательное движение со скоростью, равной

моменту пары. Для этого рассмотрим произвольную точку P тела и вычислим ее скорость

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega_1 \times \overline{AP} + \omega_2 \times \overline{BP} = \overline{AP} \times \omega_2 - \overline{BP} \times \omega_2 = \\ &= (\overline{AP} - \overline{BP}) \times \omega_2 = \overline{AB} \times \omega_2. \end{aligned}$$

Таким образом, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью $\mathbf{v}$, равной моменту пары. Вектор $\mathbf{v}$ — свободный вектор, так как он может быть приложен в любой точке тела (все точки тела имеют одинаковую скорость $\mathbf{v}$). Скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна плоскости пары и направлена так, что наблюдатель с конца $\mathbf{v}$ «видит» векторы пары ω_1 и ω_2 указывающими на вращение плоскости пары против часовой стрелки. Если ввести обозначение $\omega = |\omega_1| = |\omega_2|$, то

$$v = \omega d. \quad (9)$$

Наоборот, всякое мгновенно поступательное движение тела может быть (бесконечным числом способов) заменено на пару вращений, плоскость которой перпендикулярна $\mathbf{v}$, а плечо пар-

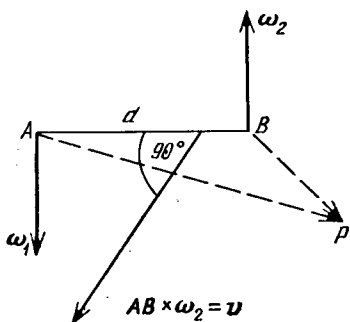


Рис. 43

ной d и модули ω_1 и ω_2 , равные ω , связаны соотношением (9). Направления ω_1 и ω_2 выбираются так, чтобы момент эквивалентной пары был направлен так же, как вектор $\mathbf{v}$.

39. Сложение мгновенно поступательного и вращательного движений. Пусть твердое тело совершает относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ мгновенное вращение с угловой скоростью ω , а система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно абсолютной системы O_aXYZ мгновенно поступательно со скоростью $\mathbf{v}$. Угол между векторами ω и $\mathbf{v}$ равен α .

Чтобы установить характер сложного мгновенного движения тела, разложим вектор $\mathbf{v}$ на две составляющие $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Первая составляющая направлена вдоль вектора ω , а вторая перпендикулярна ему (рис. 44), $v_1 = v \cos \alpha$, $v_2 = v \sin \alpha$. Согласно п. 38, мгновенно поступательное движение можно заменить парой вращений, выбрав соответствующим образом составляющие ее угловые скорости и плечо. В рассматриваемом случае заменим $\mathbf{v}_2$ парой, составленной угловыми скоростями $\omega_1 = -\omega_2 = -\omega$, расположив ω_1 и ω_2 в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}_2$, как показано на рис. 44. При этом, согласно (9), $v_2 = v \sin \alpha = AB \cdot \omega$. Мгновенные вращения вокруг одной и той же оси, проходящей через точку A с равными по модулю, но противоположно направленными угловыми скоростями-

ми ω и ω_1 , могут быть отброшены, так как они не влияют на скорости точек тела (см. п. 35). Останутся только мгновенное враще-

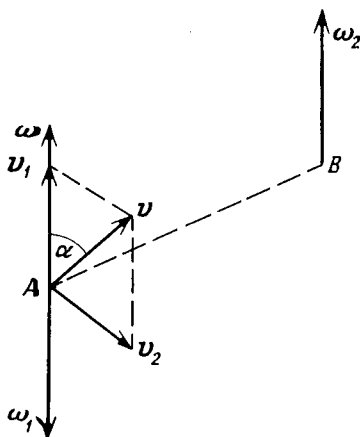


Рис. 44

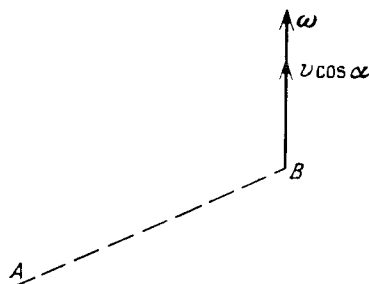


Рис. 45

ние с угловой скоростью ω_2 и мгновенно поступательное движение со скоростью v_1 , параллельной ω_2 .

Следовательно, сложное движение будет мгновенно винтовым (рис. 45). Мгновенная винтовая ось смещена параллельно угловой скорости тела на расстояние $AB = \frac{v \sin \alpha}{\omega}$. Параметр p кинематического винта равен $\frac{v \cos \alpha}{\omega}$. В частном случае, когда $\alpha = 0$ (вектор v параллелен ω), нет необходимости проводить указанные выше преобразования, так как уже исходная совокупность ω и v образует кинематический винт. Если $\alpha = \pi/2$ (вектор v перпендикулярен ω), то параметр кинематического винта равен нулю и сложное движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через точку B и смещенной параллельно ω от точки A на расстояние $AB = v/\omega$.

В заключение отметим, что, изучая мгновенное кинематическое состояние твердого тела, мы видели, что существуют четыре простейших мгновенных движения тела: покой, поступательное движение, вращение, мгновенно винтовое движение. Разнообразные движения тела в природе и технике получаются как непрерывная упорядоченная последовательность этих простейших мгновенных движений.

Глава II. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ ДИНАМИКИ

§ 1. Законы (аксиомы) Ньютона. Задачи динамики

40. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея. Динамика изучает движение механических систем в связи с причинами, вызывающими или изменяющими это движение. *Материальная точка* в теоретической механике представляет собой геометрическую точку, наделенную механическими свойствами. Эти свойства точки определяются законами (аксиомами) динамики, которые рассмотрены в этом параграфе. Попутно дано определение некоторых важнейших понятий, которыми оперирует теоретическая механика.

Основание теоретической механики составляют законы, или аксиомы, Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

Законы механического движения были сформулированы Ньютоном по отношению к абсолютному (неподвижному) пространству. Системы координат, неподвижные относительно этого пространства или движущиеся относительно него поступательно, равномерно и прямолинейно, называют *инерциальными системами отсчета*.

В теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех механических отношениях. Иными словами, все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. В этом состоит важнейший принцип механики — принцип относительности Галилея.

Все аксиомы динамики формулируются по отношению к инерциальной системе отсчета.

41. Первый закон Ньютона (аксиома инерции). Сила. Следующую аксиому динамики называют первым законом Ньютона или аксиомой инерции: *если на материальную точку не действуют силы, то она сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения*.

Остановимся подробнее на содержании этой аксиомы. Если система движется только под влиянием внутренних взаимодействий,

т. е. взаимодействий точек, входящих в систему, то она называется *замкнутой системой*. Конечно, строго говоря, замкнутых систем в смысле данного определения не существует хотя бы потому, например, что гравитационное взаимодействие между материальными точками существует, на каком бы расстоянии одна от другой ни находились эти точки. Точность, с которой можно принять ту или иную систему материальных точек за замкнутую систему, определяется условиями конкретной задачи.

Замкнутая система, состоящая из одной материальной точки, называется *изолированной материальной точкой*. Ясно, что понятие изолированной материальной точки также является идеализированным понятием.

Аксиома инерции, фактически, постулирует существование инерциальных систем отсчета. Именно: *существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированная материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно*. Эти системы отсчета и являются инерциальными.

В действительности инерциальных систем не существует, но с большой степенью точности за инерциальную систему отсчета можно принять систему координат с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды. Для большинства технических задач за инерциальную систему отсчета принимают систему координат, жестко связанную с Землей.

Механическое действие материального объекта на данную материальную точку состоит в том, что она изменяет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Не вдаваясь в физическую сущность причин, приводящих к появлению ускорения точки, мы говорим, что если точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета, то на нее действует сила. Именно в этом смысле мы говорим о существовании силы, приложенной к материальной точке. *Сила* есть причина возникновения ускорения точки; она является количественной мерой механического действия на точку, в результате которого возникает ускорение этой точки.

42. Масса. Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики). Наблюдение и опыт показывают, что материальные тела обладают «врожденным» свойством, из-за которого тело «с трудом» выводится из состояния покоя или изменяет свое движение. «Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называется *инертностью*.

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется ее *массой*. Масса представляет собой основную динамическую характеристику точки. В динамике материальная точка есть геометрическая точка, обладающая инертностью, и, следовательно, с динамической стороны характеризуется своей массой.

Масса является скалярной положительной величиной, обладающей свойством аддитивности: массы материальных точек складываются арифметически.

Масса материальной точки считается постоянной величиной, не зависящей от обстоятельств движения. Это свойство массы хорошо подтверждается опытом, если скорость точки мала по сравнению со скоростью света и если не учитывать внутриатомные процессы в веществе, образующем материальную точку. За единицу массы в Международной системе единиц принимается масса эталона, хранящегося в Париже. Единица массы называется *килограммом* (кг).

Второй закон Ньютона устанавливает связь между массой материальной точки, приложенной к ней силой и возникающим при этом ускорением точки. Если m — масса точки, а w — ее ускорение в инерциальной системе отсчета, то согласно второму закону Ньютона

$$mw = F, \quad (1)$$

где F — сила, приложенная к точке. За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе координат, равное 1 м/с^2 . Эта единица называется *ньютоном* (Н). В дальнейшем считается, что сила F может зависеть только от положений точек системы, их скоростей и времени, но не зависит от ускорений точек.

43. Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек). Следующая аксиома постулирует характер взаимодействия материальных точек. *Если одна материальная точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, приложенные к каждой из них, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

44. Аксиома независимости действия сил (закон сложения сил). Опыт показывает, что силы взаимодействия двух материальных точек не могут быть изменены возможными действиями на них других материальных точек, если положение, скорости и физическое состояние (электрическое, магнитное и т. д.) этих точек остаются неизменными. Когда точки P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) действуют на одну и ту же точку P с силами F_i , то ускорения w_i , которые они вызвали бы у нее, действуя каждая отдельно, складываются. В этом состоит аксиома независимости действия сил.

Если m — масса точки P , то согласно формуле (1) $w_i = \frac{1}{m} F_i$. Поэтому ускорение w точки P в соответствии с аксиомой независимости действия сил вычисляется по формуле

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_k = \frac{1}{m} (F_1 + F_2 + \dots + F_k),$$

откуда видно, что ускорение w точки P таково, каким оно было бы, если бы к ней было приложено не k отдельных сил, а одна сила F , равная сумме сил F_i :

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_k.$$

Это и есть *закон сложения сил*. Он является эквивалентной формулировкой аксиомы независимости действия сил. Упомянутая сила, действие которой заменяет действие всех k сил F_i , называется *равнодействующей* сил $F_1, \dots, F_k$, приложенных к точке P .

45. **Активные силы и реакции связей.** Рассмотрим движение системы N материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$) относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Пусть m_v — масса точки P_v , а r_v — ее радиус-вектор относительно начала координат. Если система свободная, то ускорения $\ddot{r}_v$ образующих ее точек определяются из второго закона Ньютона $m_v \ddot{r}_v = F_v$, где F_v — равнодействующая сил, приложенных к точке P_v . Если же система не является свободной, то на ускорение ее точек наложены вполне определенные ограничения. Эти ограничения мы рассмотрели в п. 11. Величины

$$\ddot{r}_v = \frac{1}{m_v} F_v \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (4) и (5) п. 11 для ускорений, т. е. ускорения w_v точек P_v несвободной системы будут отличаться от их ускорений $\ddot{r}_v$ в случае свободной системы. Таким образом, наличие связей приводит к возникновению у точек системы дополнительного ускорения $w_v - \ddot{r}_v$.

Но согласно второму закону Ньютона всякое ускорение точки возникает за счет действия на нее некоторых сил. В рассмотренном случае эти силы обусловлены наличием связей. Их называют *реакциями связей*. Чтобы не смешивать реакции связей с другими силами, приложенными к точкам несвободной системы, назовем эти остальные силы *активными силами*. Заметим, что здесь F_v — равнодействующая активных сил.

Активные силы можно также условно называть *заданными силами*; это те из сил, приложенных к механической системе, которые сохраняются, если связи мгновенно исчезнут. Реакции связей называют иногда *пассивными силами*; они заранее неизвестны и зависят не только от тех материальных приспособлений, которые реализуют связи, но и от активных сил и от движения системы.

Обозначив R_v равнодействующую реакций связей, приложенных к точке P_v , согласно второму закону Ньютона получим $m_v (w_v - \ddot{r}_v) = R_v$, ($v = 1, 2, \dots, N$). Отсюда и из равенств $m_v \ddot{r}_v = F_v$ следуют

уравнения движения точек системы

$$m_v w_v = F_v + R_v \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Эти уравнения показывают, что с точки зрения динамики несвободную систему можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием активных сил и реакций связей. В дальнейшем при изучении движения несвободных систем мы часто будем пользоваться этим положением.

В механике считается справедливым *принцип детерминированности Ньютона — Лапласа*. Согласно этому принципу движение системы материальных точек является вполне детерминированным: задание начальных положений r_{v0} и скоростей v_{v0} точек единственным образом определяет их дальнейшее движение, т. е. функции $r_v(t)$ ($v = 1, 2, \dots, N$).

46. Силы внешние и внутренние. Совокупность всех сил, приложенных к точкам P_v материальной системы (иногда говорят «систему сил»), можно разделить на внутренние и внешние силы. *Внутренними силами* называются силы взаимодействия между точками P_v , образующими материальную систему. Силы, возникающие благодаря воздействию на точки P_v материальной системы других материальных точек, не входящих в эту систему, называют *внешними*.

Отметим, что деления системы сил на внутренние и внешние силы и на активные силы и реакции связей не взаимосвязаны.

47. Задачи динамики. Равновесие. Статика. Рассматривая движение систем в связи с силами, приложенными к образующим их материальным точкам, динамика ставит целью решение следующих *двух основных задач*: 1) по заданным силам найти движение системы; 2) по известному движению системы найти неизвестные силы, приложенные к точкам системы.

В динамике изучается также частный случай движения — состояние равновесия механической системы. Под состоянием *равновесия* системы понимается такое ее состояние, когда скорость v_v каждой точки системы равна нулю на протяжении некоторого промежутка времени, т. е. $v_v = 0$ при $t_0 \leq t \leq t_1$; если при $t = t_0$ $v_v = 0$, то это условие эквивалентно условию $w_v = 0$ при $t_0 \leq t \leq t_1$. В частности, если t_0 равняется нулю, а t_1 — бесконечности, то материальная система в начальный момент времени находится в состоянии равновесия и остается в нем все время.

Состояние равновесия механической системы изучается в разделе динамики, называемом *статикой*. В статике решаются две задачи: 1) найти условия равновесия механической системы; 2) решить вопрос о приведении системы сил, т. е. о замене данной системы сил другой, в частности, более простой, оказывающей то же воздействие на движение механической системы, что и исходная система сил.

§ 2. Главный вектор и главный момент системы сил

48. **Главный вектор системы сил.** Обозначим $\mathbf{F}_v$ равнодействующую всех сил (активных и реакций связей), приложенных к точке P_v . Сумма

$$\mathbf{R} = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \quad (1)$$

называется *главным вектором* этой системы сил. Пусть F_{vx} , F_{vy} , F_{vz} — компоненты силы $\mathbf{F}_v$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Тогда компоненты R_x , R_y , R_z главного вектора и его направление определяются в соответствии с формулами

$$R_x = \sum_{v=1}^N F_{vx}, \quad R_y = \sum_{v=1}^N F_{vy}, \quad R_z = \sum_{v=1}^N F_{vz}; \quad (2)$$

$$\cos(\mathbf{R}, \mathbf{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\mathbf{R}, \mathbf{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = \frac{R_z}{R}, \quad (3)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты осей Ox , Oy , Oz .

Сила $\mathbf{F}_v$ является суммой равнодействующих всех внешних $\mathbf{F}_v^{(e)}$ и всех внутренних сил $\mathbf{F}_v^{(i)}$, т. е.

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v^{(e)} + \mathbf{F}_v^{(i)} \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Согласно третьему закону Ньютона силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Поэтому когда мы подставим выражения (4) в (1), то в получившейся сумме внутренние силы взаимно уничтожаются. Таким образом, главный вектор внутренних сил обратится в нуль и

$$\mathbf{R} = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^{(e)}, \quad (5)$$

т. е. главный вектор $\mathbf{R}$ системы сил равен главному вектору $\mathbf{R}^{(e)}$ внешних сил.

49. **Момент силы относительно точки и осей.** Моментом силы $\mathbf{F}$ относительно точки O называется вектор

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (6)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{F}$ относительно точки O . Из свойств векторного произведения следует, что модуль момента силы относительно точки равен произведению модуля силы на ее плечо, т. е. на расстояние от точки O до линии действия силы $\mathbf{F}$. Направлен момент по нормали к плоскости, проходящей

через точку O и линию действия силы F , в ту сторону, откуда «вращение», вызванное силой, происходило бы против часовой стрелки. *Линией действия силы F* мы называем прямую, на которой лежит вектор F .

Моментом силы F относительно оси u называется проекция на эту ось момента силы F относительно точки, взятой на этой оси. Момент силы F относительно оси u обозначается $m_u(F)$.

Пусть e — единичный вектор оси u (рис. 46). Возьмем на этой оси точки O_1 и O_2 . Тогда, согласно определению, $m_u(F) = (r_1 \times F) \cdot e$, а также $m_u(F) = (r_2 \times F) \cdot e$. Составим разность $(r_1 \times F) \cdot e - (r_2 \times F) \cdot e$. Она равна нулю, так как $(r_1 \times F) \cdot e - (r_2 \times F) \cdot e = ((r_1 - r_2) \times F) \cdot e = (\overline{O_1 O_2} \times F) \cdot e$, а векторы $\overline{O_1 O_2} \times F$ и e ортогональны. Тем самым показана независимость величины $m_u(F)$ от выбора точки на оси.

Пусть F_x, F_y, F_z и x, y, z — компоненты силы F и радиуса-вектора r точки ее приложения соответственно в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в точке O . Тогда из (6) следует, что момент силы F относительно точки O задается в этой системе координат компонентами

$$m_x(F) = yF_z - zF_y, \quad m_y(F) = zF_x - xF_z,$$

Рис. 46

$$m_z(F) = xF_y - yF_x. \quad (7)$$

Величины $m_x(F)$, $m_y(F)$ и $m_z(F)$ — моменты силы F относительно осей Ox , Oy и Oz . Из (7) сразу следует, что момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

50. Главный момент системы сил. Пусть снова F_v — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_v механической системы, а r_v — радиусы-векторы точек P_v относительно точки O . *Главным моментом M_O этой системы сил относительно точки O* называется сумма

$$M_O = \sum_{v=1}^N m_O(F_v) = \sum_{v=1}^N r_v \times F_v. \quad (8)$$

Так же, как и для главного вектора, можно показать, что главный момент внутренних сил равен нулю и $M_O = \sum_{v=1}^N m_O(F_v^{(e)})$, т. е. главный момент всех сил системы равен главному моменту $M_O^{(e)}$ ее внешних сил.

Главным моментом M_u системы сил относительно оси u называется проекция на эту ось главного момента M_O , вычисленного для какой-либо точки оси. Независимость величины M_u от выбора точки на оси доказывается так же, как и в случае одной силы в п. 49.

В декартовой системе координат $Oxyz$ главный момент M_O имеет компоненты, вычисляемые по формулам

$$M_x = \sum_{v=1}^N y_v F_{vz} - z_v F_{vy}, \quad M_y = \sum_{v=1}^N z_v F_{vx} - x_v F_{vz},$$

$$M_z = \sum_{v=1}^N x_v F_{vy} - y_v F_{vx}. \quad (9)$$

Величины M_x , M_y и M_z — главные моменты системы сил относительно осей Ox , Oy и Oz .

Направление главного момента определяется формулами

$$\cos(M_O, i) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(M_O, j) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(M_O, k) = \frac{M_z}{M_O}, \quad (10)$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

§ 3. Работа. Силовая функция. Идеальные связи

51. Работа системы сил. Пусть F_v — равнодействующая всех сил системы (внутренних и внешних), приложенных к точке P_v , а dr_v — смещение точки P_v вдоль ее траектории. *Элементарной работой* $d'A$, силы F_v на перемещении dr_v называется скалярное произведение

$$d'A_v = F_v \cdot dr_v = F_{vx} dx_v + F_{vy} dy_v + F_{vz} dz_v. \quad (1)$$

Элементарная работа $d'A$ всех сил системы получается путем суммирования выражений (1) по индексу v :

$$d'A = \sum_{v=1}^N F_v \cdot dr_v = \sum_{v=1}^N (F_{vx} dx_v + F_{vy} dy_v + F_{vz} dz_v). \quad (2)$$

Символ d' указывает на то, что правые части в (1) и (2) не обязательно являются полными дифференциалами.

В выражениях (1) и (2) для элементарной работы входит работа как внешних, так и внутренних сил. Обозначив через $d'A^{(e)}$ работу внешних сил, а через $d'A^{(i)}$ — работу внутренних сил, выражение (2) можно записать в виде

$$d'A = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}.$$

Пусть точка P_v совершает конечное перемещение из положения M_{v0} в положение M_{v1} , описывая дугу $M_{v0}M_{v1}$, и пусть F_v и dr_v могут быть выражены через один и тот же скалярный параметр t (который не обязательно должен быть временем) так, что положения M_{v0} и M_{v1} точки отвечают значениям t_0 и t_1 этого параметра. Тогда выражение (1) будет представлено в виде функции параметра t , умноженной на его дифференциал, и может быть проинтегрировано по t в пределах от t_0 до t_1 . Результат интегрирования называется

полной работой A_v силы F_v на рассматриваемом конечном перемещении вдоль пути M_0M_{v1} . Полная работа всех сил системы представляет собой сумму по v величин A_v .

52. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу. Здесь покажем, что элементарная работа системы сил, приложенных к твердому телу, определяется лишь работой внешних сил, и найдем нужное для дальнейшего выражение элементарной работы через главный вектор, главный момент внешних сил и характеристики мгновенного кинематического состояния тела.

Будем представлять себе твердое тело как механическую систему, состоящую из N ($N \geq 2$) отдельных точек P_v , взаимные расстояния между которыми не изменяются. Пусть F_v — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_v тела, которую будем записывать в виде суммы равнодействующих $F_v^{(e)} + F_v^{(i)}$ всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке P_v .

Пусть O — произвольно выбранный полюс в твердом теле. Скорость v_v точки P_v относительно неподвижной системы координат определяется по формуле (см. п. 24)

$$v_v = v_o + \omega \times r_v,$$

где v_o — скорость полюса, ω — угловая скорость тела. Поэтому смещение dr_v точки P_v вдоль ее траектории равно $(v_o + \omega \times r_v)dt$, где dt — дифференциал времени. Для элементарной работы системы сил получим выражение

$$d'A = \sum_{v=1}^N F_v \cdot (v_o + \omega \times r_v) dt = \left(\sum_{v=1}^N F_v \right) \cdot v_o dt + \sum_{v=1}^N (\omega \times r_v) \cdot F_v dt.$$

Воспользовавшись свойствами смешанного произведения, перепишем это выражение в виде

$$d'A = \left(\sum_{v=1}^N F_v \right) \cdot v_o dt + \left(\sum_{v=1}^N r_v \times F_v \right) \cdot \omega dt.$$

Заменяя F_v на сумму $F_v^{(e)}$ и $F_v^{(i)}$ и учитывая, что главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, получаем окончательно

$$d'A = R^{(e)} \cdot v_o dt + M_O^{(e)} \cdot \omega dt, \quad (3)$$

где $R^{(e)}$ и $M_O^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки O .

53. Силовое поле. Силовая функция. Потенциал. Предположим, что на материальную точку, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета, во всем пространстве или в какой-то его части действует сила, зависящая от положения точки (и, быть может, от времени), но не зависящая от скорости точки. В этом случае говорят, что в пространстве или его части задано *силовое поле*,

а также, что точка движется в силовом поле. Соответствующие понятия для системы материальных точек аналогичны.

Силы, зависящие от положения, в механике встречаются очень часто. Такова, например, сила, приложенная к точке, движущейся по горизонтальной прямой под действием пружины, к которой эта точка прикреплена. Важнейшим примером силового поля в природе является гравитационное поле: действие Солнца на планету данной массы вполне определяется в каждой точке пространства законом всемирного тяготения.

Силовое поле называется *потенциальным*, если существует скалярная функция U , зависящая только от координат x_v, y_v, z_v точек P_v материальной системы (и, быть может, от времени), такая, что

$$F_{vx} = \frac{\partial U}{\partial x_v}, \quad F_{vy} = \frac{\partial U}{\partial y_v}, \quad F_{vz} = \frac{\partial U}{\partial z_v} \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Функция U называется *силовой функцией*. Функция $\Pi = -U$ называется *потенциалом* или *потенциальной энергией*. Функция Π определена с точностью до аддитивной постоянной. Потенциальное поле называется *нестационарным* или *стационарным* в зависимости от того, зависит функция Π явно от времени или нет.

Силы F_v , удовлетворяющие равенствам (4), называются *потенциальными*.

Элементарная работа сил стационарного потенциального поля представляет собой полный дифференциал. В самом деле, из (2) и (4) получаем

$$d'A = \sum_{v=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_v} dx_v + \frac{\partial U}{\partial y_v} dy_v + \frac{\partial U}{\partial z_v} dz_v \right) = dU = -d\Pi. \quad (5)$$

Поэтому если в рассматриваемой области пространства Π является однозначной функцией от x_v, y_v, z_v ($v = 1, 2, \dots, N$), то полная работа сил потенциального поля при переходе из одного положения системы в другое не зависит от путей перехода точек из их начальных положений в конечные. В частности, если все точки системы описывают замкнутые пути, то полная работа равна нулю.

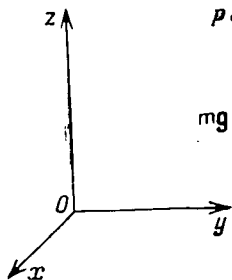


Рис. 47

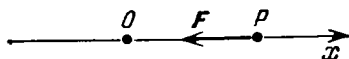


Рис. 48

Примеры. 1. Однородное поле тяжести. Пусть m — масса точки, g — ускорение свободного падения. Тогда (рис. 47)

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg; \quad \Pi = mgz.$$

2. *Силовое поле упругой пружины.* Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox (рис. 48) под действием пружины, к которой она прикреплена. Если при $x = 0$ пружина не деформирована, то при малых отклонениях точки можно считать, что со стороны пружины к ней приложена сила $F = -kx$ ($k > 0$). В этом случае $\Pi = \frac{1}{2}kx^2$.

3. *Центральное силовое поле.* Силовое поле называется *центральной*, если сила, приложенная к движущейся в нем точке, направлена вдоль прямой, проходящей через заданный центр — неподвижную точку O . Пусть при этом величина силы зависит только от расстояния от точки до центра. Так как

$F(r) = F(r) \frac{r}{r}$, где r — радиус-вектор точки P относительно центра O , то

$$d'A = F \cdot dr = F(r) \frac{r \cdot dr}{r} = \frac{1}{2} F(r) \frac{dr^2}{r} = F(r) dr = -d\Pi.$$

Поэтому

$$\dots \quad \Pi = - \int F(r) dr + \text{const.} \quad (6)$$

В качестве конкретного примера найдем потенциал для движения точки массой m_2 в ньютоновском гравитационном поле точки массой m_1 . В этом

случае $F(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, где γ — универсальная гравитационная постоянная. Если считать, что $\Pi = 0$ при $r = \infty$, то из (6) следует такое выражение для потенциала центрального ньютоновского силового поля:

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (7)$$

54. *Элементарная работа системы сил в обобщенных координатах. Обобщенные силы.* Пусть F_v — равнодействующая всех сил, приложенных к точке P_v системы ($v = 1, 2, \dots, N$), а r_v — радиус-векторы точек P_v относительно начала координат. Пусть положение системы задается ее обобщенными координатами q_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Элементарную работу $d'A$ системы сил на виртуальных перемещениях dr_v будем обозначать δA . Найдем выражение элементарной работы через обобщенные координаты и их вариации δq_j .

Радиусы-векторы точек P_v являются функциями обобщенных координат и времени, а виртуальные перемещения dr_v выражаются через вариации δq_j обобщенных координат по формуле (27) п. 16. Поэтому

$$\delta A = \sum_{v=1}^N F_v \cdot \delta r_v = \sum_{v=1}^N F_v \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial r_v}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{v=1}^N F_v \cdot \frac{\partial r_v}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$Q_j = \sum_{v=1}^N F_v \cdot \frac{\partial r_v}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (9)$$

Тогда формула (8) запишется в виде

$$\delta A = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j.$$

Величина Q_j называется *обобщенной силой*, соответствующей обобщенной координате q_j ($j = 1, 2, \dots, m$). В общем случае обобщенные силы будут функциями обобщенных координат, скоростей и времени.

В практических задачах при вычислении обобщенных сил формулами (9), как правило, не пользуются. Обычно дают системе такое виртуальное перемещение, при котором $\delta q_k = 0$ для всех k кроме $k = j$. Тогда $\delta A = \delta A_j = Q_j \delta q_j$ и

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j}.$$

Пусть силы F_v потенциальные с потенциалом $\Pi = \Pi(\mathbf{r}_v, t)$. Тогда и обобщенные силы — потенциальные, причем им соответствует потенциал, полученный из функции $\Pi(\mathbf{r}_v, t)$, если в ней величины $\mathbf{r}_v$ выразить через обобщенные координаты. В самом деле, учитывая (5), имеем

$$\delta A = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = -\delta \Pi = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Отсюда следует, что в случае потенциальных сил обобщенные силы могут быть вычислены по формулам

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Примеры. 1. *Материальная точка движется вдоль оси Ox под действием силы F_x .* В этом случае $m = 1$, обобщенная координата — абсцисса x точки, $\delta A = F_x \delta x$, $Q_x = F_x$.

2. *Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси u .* Здесь $m = 1$, за обобщенную координату примем угол φ поворота тела вокруг оси. Пусть $\mathbf{R}_O^{(e)}$ и $\mathbf{M}_O^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно полюса O , выбранного на оси вращения. Для подсчета величины δA воспользуемся формулой (3) п. 52, взяв вместо действительного перемещения виртуальное. Последнее возможно, так как твердое тело является склерономной механической системой (п. 18), а для склерономных систем действительное перемещение является одним из виртуальных (п. 12). Учитывая, что $\mathbf{v}_O = 0$, получим

$$\delta A = \mathbf{R}_O^{(e)} \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathbf{M}_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = M_u^{(e)} \delta \varphi.$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = M_u^{(e)}.$$

Здесь $M_u^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно оси u .

3. *Движение двойного маятника в вертикальной плоскости в поле тяжести* (рис. 15). Пусть стержни, образующие маятник, имеют одинаковую длину l и одинаковую массу m . Эта система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем углы φ и ψ , изображенные на рис. 15. Для вычисления потенциала Π возьмем систему координат с началом в точке A и с осью Ax , направленной вертикально вниз. Тогда, обозначая через x_1 и x_2

абсциссы центров тяжести верхнего и нижнего стержней, имеем

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2.$$

Но $x_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi$, $x_2 = l \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \psi$. Поэтому

$$\Pi = -\frac{1}{2} mgl (3 \cos \varphi + \cos \psi),$$

и для обобщенных сил получаются следующие выражения:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{3}{2} mgl \sin \varphi, \quad Q_\psi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -\frac{1}{2} mgl \sin \psi.$$

55. Идеальные связи. При движении несвободной системы на ее точки действуют реакции связей. Пусть R_v — равнодействующая реакций связей, действующих на точку P_v системы ($v = 1, 2, \dots, N$).

Связи называются *идеальными*, если работа δA реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях равна нулю, т. е.

$$\sum_{v=1}^N R_v \cdot \delta r_v = 0. \quad (10)$$

Условие идеальности связей не вытекает из их уравнений, оно вводится дополнительно. Рассмотрим несколько примеров идеальных связей.

Примеры. 1. *Материальная точка P движется по гладкой поверхности (движущейся или неподвижной).* Виртуальные перемещения δr лежат в касательной к поверхности плоскости как в случае неподвижной, так и в случае движущейся поверхности (см. п. 12). А реакция поверхности ортогональна ей (рис. 49). Поэтому $\delta A = R \cdot \delta r = 0$.

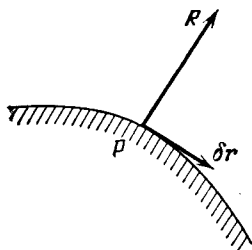


Рис. 49

2. *Свободное твердое тело.* У свободного твердого тела нет других связей, кроме тех, которые обеспечивают постоянство взаимных расстояний между точками, образующими твердое тело. Эти связи действуют на точки тела посредством сил, которые для твердого тела являются внутренними. Но, согласно п. 52, внутренние силы в случае твердого тела не совершают работу. Поэтому $\delta A = 0$.

В дополнение к п. 18 мы можем теперь сказать, что свободное твердое тело представляет собой голономную склерономную систему с идеальными связями.

3. *Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку* (рис. 50). В этом случае $\delta A = 0$, так как $\delta r = 0$ (неподвижна точка приложения реакции связи R).

4. *Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.* Здесь $\delta A = 0$ по той же причине, что и в примере 3.

5. *Два твердых тела, соединенных в точке O шарниром* (рис. 51). Здесь $R_1 = -R_2$, $\delta r_1 = \delta r_2$. Поэтому $\delta A = R_1 \cdot \delta r_1 + R_2 \cdot \delta r_2 = R_1 \cdot (\delta r_1 - \delta r_2) = 0$.

6. *Два твердых тела, соприкасающихся при движении гладкими поверхностями* (рис. 52). Относительная скорость точки соприкосновения тел лежит в общей касательной плоскости к поверхностям тел в точке их касания. В этой же плоскости лежит разность $\delta r_1 - \delta r_2$ виртуальных перемещений точек, в ко-

торых соприкасаются тела. Кроме того, как всегда, $R_1 = -R_2$, но в рассматриваемом случае реакции R_1 и R_2 перпендикулярны общей касательной плоскости. Поэтому $\delta A = R_1 \cdot \delta r_1 + R_2 \cdot \delta r_2 = R_1 \cdot (\delta r_1 - \delta r_2) = 0$.

7. Два твердых тела, соприкасающихся при движении абсолютно шероховатыми поверхностями. По определению это означает, что относительные ско-

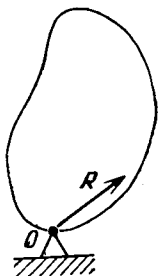


Рис. 50

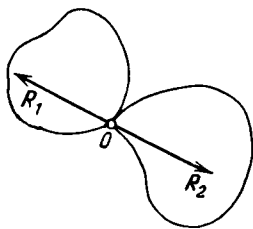


Рис. 51

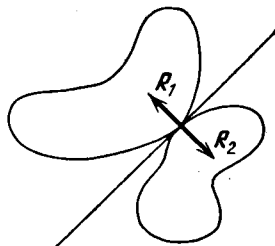


Рис. 52

рости точек, которыми соприкасаются тела, равны нулю. Следовательно, $\delta(r_1 - r_2) = 0$, и поэтому $\delta A = R_1 \cdot \delta r_1 + R_2 \cdot \delta r_2 = R_1 \cdot \delta(r_1 - r_2) = 0$.

8. Две материальные точки, соединенные натянутой идеальной нитью. Под идеальной нитью понимается не обладающая массой нерастяжимая нить, которая не оказывает сопротивления изменению ее формы. Для определенности будем считать, что нить перекинута через неподвижный гладкий стержень A (рис. 53). Так как нить невесома, то ее реакции T_1 и T_2 , приложенные к точкам P_1 и P_2 , равны по модулю, $T_1 = T_2 = T$ (натяжение нити всюду одинаково). Найдём работу реакций на виртуальных перемещениях точек. В силу того что нить нерастяжима, $\delta r_1 \cos \alpha_1 = \delta r_2 \cos \alpha_2$. Поэтому $\delta A = T_1 \cdot \delta r_1 + T_2 \cdot \delta r_2 = T_1 \delta r_1 \cos \alpha_1 - T_2 \delta r_2 \cos \alpha_2 = T(\delta r_1 \cos \alpha_1 - \delta r_2 \cos \alpha_2) = 0$.

Очень многие механизмы можно трактовать как сочетание простейших «деталей», рассмотренных в примерах 1—8. Однако в действительности не существует ни абсолютно гладких, ни абсолютно шероховатых поверхностей, не существует абсолютно твердых тел и нерастяжимых нитей. Поэтому в реальных ситуациях работа реакций связей отлична от нуля. Часто эта работа бывает малой и в допустимом приближении может считаться равной нулю. Этот факт и приводит в теоретической механике к выделению важнейшего класса связей, названных выше идеальными.

Однако очень часто связи нельзя считать идеальными. Такой случай встречается, например, когда при движении тела соприкасаются не абсолютно гладкими участками своих поверхностей и имеет место относительное скольжение. В этом случае, отнеся си-

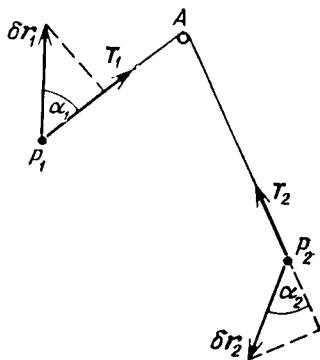


Рис. 53

лы трения к неизвестным активным силам, можно условно считать связи идеальными. Появление новых неизвестных требует тогда привлечения новых экспериментальных данных, например законов трения скольжения.

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, только идеальные связи.

Остановимся на следующем весьма важном обстоятельстве. Упомянутая в п. 47 первая задача динамики для случая несвободной системы может быть более подробно сформулирована так. Заданы активные силы F_v , приложенные к точкам P_v материальной системы, массы m_v точек, связи, возможные начальные положения r_{v0} и скорости v_{v0} точек системы. Требуется найти положения точек r_v и реакции связей R_v как функции времени. Таким образом, требуется найти $6N$ скалярных неизвестных.

Для решения этой задачи мы имеем $3N + r + s$ скалярных уравнений: $3N$ уравнений из векторных уравнений движения (2) п. 45 и $r + s$ уравнений связей (1), (2) п. 10. Так как число $6N$ больше $3N + r + s$ (на число степеней свободы системы $n = 3N - r - s$), то сформулированная задача неопределенна. Выделением класса систем с идеальными связями мы делаем задачу определенной, так как одно равенство (10) эквивалентно n уравнениям. Для их получения нужно в правой части равенства (10) выразить зависимые из виртуальных перемещений $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ через независимые и затем приравнять нулю коэффициенты при этих независимых виртуальных перемещениях. Число же последних равно числу степеней свободы, т. е. n .

Глава III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 1. Принцип Даламбера — Лагранжа

56. Понятие о вариационных принципах механики. Принципами называют, во-первых, некоторые основные начала, на которых может быть построена какая-либо теория, научная система и т. п., а во-вторых — законы, основные положения о чем-либо. Под принципами часто понимают также точку зрения, убеждения и т. д.

Принципы теоретической механики можно разделить на вариационные и невариационные. К *невариационным принципам* относятся, например, аксиомы динамики, обсуждавшиеся в § 1 предыдущей главы, а также законы механики, например закон сохранения энергии, закон всемирного тяготения и т. п.

Вариационные принципы механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые отличают истинное (действительное) движение системы от других кинематически возможных, т. е. допускаемых связями, движений. Вариационные принципы делятся на *дифференциальные* и *интегральные*. Первые дают критерий истинного движения для данного фиксированного момента времени, а вторые — на конечном интервале времени.

В этой главе рассматриваются дифференциальные вариационные принципы механики.

57. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа). Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$). Система может быть как свободной, так и несвободной. В последнем случае связи, наложенные на систему, считаются удерживающими и идеальными. Пусть F_v и R_v — равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к точке P_v . Имеют место следующие уравнения движения (п. 45):

$$m_v w_v = F_v + R_v \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где m_v — масса точки P_v , а w_v — ее ускорение в инерциальной системе отсчета.

Поскольку связи идеальны, то для любых виртуальных перемещений δr_v выполняется равенство

$$\sum_{v=1}^N R_v \cdot \delta r_v = 0. \quad (2)$$

Запишем уравнения (1) в виде

$$F_v - m_v w_v = -R_v \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на δr_v и произведем суммирование по v . Тогда с учетом условия (2) получим соотношение

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v w_v) \cdot \delta r_v = 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил F_v ($v = 1, 2, \dots, N$). Необходимость условия (3) мы только что показали. Предположим теперь, что некоторое совместимое со связями движение системы удовлетворяет условию (3). Тогда если положить $R_v = m_v w_v - F_v$ ($v = 1, 2, \dots, N$), то получим, что удовлетворяются равенство (2) и уравнения движения (1), полученные непосредственно из законов Ньютона.

Соотношение (3) характеризует движение всякой системы с идеальными удерживающими связями по отношению к активным силам F_v и соответствующим (для данного момента времени) виртуальным перемещениям. Оно получило название *общего уравнения динамики*.

Входящие в (3) произведения $m_v w_v$ масс точек системы на их ускорения, взятые с обратным знаком, называют *силами инерции*. Применяя эту терминологию, можно сказать, что общее уравнение динамики показывает, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Общее уравнение динамики получено в предположении об идеальности связей (2). Если же связи таковы, что все или часть их реакций G_v не удовлетворяют условию (2), то можно к системе активных сил добавить реакции G_v , и уравнение (3) примет вид

$$\sum_{v=1}^N (F_v + G_v - m_v w_v) \cdot \delta r_v = 0. \quad (4)$$

В общем случае силы G_v (или часть из них) неизвестны. Эта неопределенность должна компенсироваться дополнительными данными о физических свойствах и характере связей, порождающих реакции G_v .

Важным свойством общего уравнения динамики является то, что оно не содержит реакций идеальных связей.

Соотношение (3) на самом деле является не одним уравнением, а содержит в себе число уравнений, равное n , т. е. числу степеней свободы системы, которое определяется количеством независимых виртуальных перемещений $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ (см. п. 55). В каждом из этих n уравнений отсутствуют реакции связей.

Общее уравнение динамики (3) содержит в себе всю информацию о движении данной механической системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил. В последующих главах оно будет положено в основу получения всех основных дифференциальных уравнений движения механических систем, голономных и неголономных.

Общее уравнение динамики называют также *дифференциальным вариационным принципом Даламбера — Лагранжа*. Вариационным принцип называется потому, что в (3) входят вариации — виртуальные перемещения. Название дифференциального принцип носят потому, что в нем сравнивается данное положение системы с ее варьированным положением в фиксированный, хотя и произвольный момент времени (синхронное варьирование, согласно п. 12).

С этой точки зрения принцип Даламбера — Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: *истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю*.

Примеры. 1. Две материальные точки массой m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) соединены идеальной нитью, перекинутой через гладкий стержень, и движутся в поле тяжести в вертикальной плоскости (рис. 54). Найти ускорения точек.

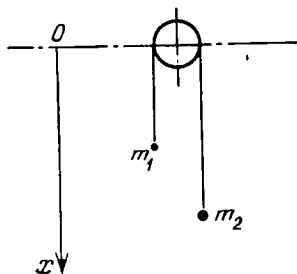


Рис. 54

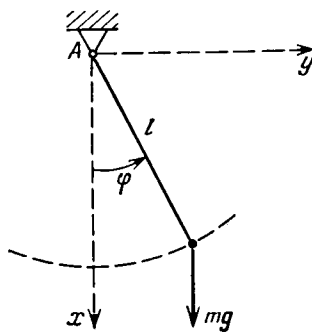


Рис. 55

Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек m_1 и m_2 соответственно. Тогда из общего уравнения динамики (3) следует, что

$$(m_1 g - m_1 \ddot{x}_1) \delta x_1 + (m_2 g - m_2 \ddot{x}_2) \delta x_2 = 0. \quad (5)$$

Но так как нить нерастяжима, то имеет место геометрическая связь $x_1 + x_2 + \pi R = \text{const}$, где R — радиус сечения стержня. Поэтому $\delta x_1 = -\delta x_2$, $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$, и уравнение (5) запишется в виде

$$[(m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)\ddot{x}_2] \delta x_2 = 0.$$

Отсюда в силу произвольности виртуального перемещения δx_2 получаем

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

2. Найдём дифференциальное уравнение движения плоского математического маятника. Маятник будем для простоты представлять в виде точечной массы m , прикрепленной при помощи невесомого стержня длиной l к точке A , вокруг которой стержень может вращаться без трения в вертикальной плоскости. Направляя оси Ax и Ay декартовой системы координат, как показано на рис. 55, получаем

$$\begin{aligned} x &= l \cos \varphi, & y &= l \sin \varphi, \\ \delta x &= -l \sin \varphi \delta \varphi, & \delta y &= l \cos \varphi \delta \varphi, \\ \ddot{x} &= -l \sin \varphi \ddot{\varphi} - l \cos \varphi \dot{\varphi}^2, & \ddot{y} &= l \cos \varphi \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \dot{\varphi}^2, \\ F_x &= mg, & F_y &= 0. \end{aligned}$$

Общее уравнение динамики

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y = 0$$

даёт равенство

$$-ml(g \sin \varphi + l\ddot{\varphi})\delta \varphi = 0,$$

откуда, ввиду произвольности вариация $\delta \varphi$, следует дифференциальное уравнение движения маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Замечание. Из общего уравнения динамики (3) видно, что оно (а следовательно, и движение системы) не изменяется, если вместо системы сил F_v взять какую-либо другую систему сил F_v^* , такую, чтобы элементарная работа обеих систем сил на любых одинаковых виртуальных перемещениях была одинакова, т. е.

$$\sum_{v=1}^N F_v \cdot \delta r_v = \sum_{v=1}^N F_v^* \cdot \delta r_v.$$

§ 2. Принцип Журдена

58. Принцип Журдена. Представляет интерес преобразовать общее уравнение динамики таким образом, чтобы прийти к формулам, в основном эквивалентным уравнению (3) п. 57, но имеющим другую структуру. Так как уравнение (3) п. 57, по существу, содержит в себе все законы движения механических систем с идеальными удерживающими связями, то эти новые формулы не будут выражением принципов, существенно новых. Однако они могут дать новую интерпретацию, обнаруживающую общие свойства движения систем и наложенных на них связей, которые не могут быть получены из уравнения (3) п. 57 непосредственно.

Рассмотрим множество кинематически возможных движений из возможного положения $\mathbf{r}_v^*$ с различными возможными скоростями $\mathbf{v}_v^*$. Будем сравнивать их одно с другим и с действительным движением из того же положения в тот же момент времени. Так мы получаем *варьирование по Журдену* (п. 12), при котором $\delta \mathbf{r}_v = \delta \mathbf{v}_v \Delta t$, где величина $\delta \mathbf{v}_v = \mathbf{v}_{v1}^* - \mathbf{v}_{v2}^*$ — разность возможных скоростей в сравниваемых движениях (эта величина не обязательно является бесконечно малой).

Подставляя это выражение для $\delta \mathbf{r}_v$ в общее уравнение динамики (3) и сокращая на Δt , получаем

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v) \cdot \delta \mathbf{v}_v = 0. \quad (1)$$

Формула (1) выражает *дифференциальный вариационный принцип Журдена*. Согласно этому принципу, среди сравниваемых кинематически возможных в данный момент времени движений (для которых $\mathbf{r}_{v1}^* = \mathbf{r}_{v2}^*$, $\delta \mathbf{v}_v \neq 0$) действительное движение выделяется тем, что для него и только для него выполнено уравнение (1).

§ 3. Принцип Гаусса

59. **Формулировка принципа Гаусса (принципа наименьшего принуждения).** Вариационные принципы Даламбера — Лагранжа и Журдена не связаны с понятием экстремальности. Гаусс предложил замечательную модификацию принципа Даламбера — Лагранжа, которая вводит в этот принцип понятие минимальности некоторого выражения. Эта модификация принципа Даламбера — Лагранжа получила название принципа Гаусса, или принципа наименьшего принуждения.

Для получения математической формулировки принципа Гаусса будем сравнивать в некоторый момент времени движения, в которых все точки системы имеют те же возможные положения $\mathbf{r}_v^*$ и скорости $\mathbf{v}_v^*$, что и в действительном движении. Возможные же ускорения точек системы в сравниваемых движениях будут отличаться (на величины, не обязательно являющиеся бесконечно малыми). Такой способ синхронного варьирования называется *варьированием по Гауссу* (п. 12).

Если для разности возможных ускорений $\mathbf{w}_{v1}^* - \mathbf{w}_{v2}^*$ в двух сравниваемых кинематически возможных движениях ввести обозначение $\delta \mathbf{w}_v$, то, согласно п. 12, $\delta \mathbf{r}_v = \frac{1}{2} \delta \mathbf{w}_v (\Delta t)^2$. Подставив это значение виртуального перемещения в общее уравнение динамики (3) п. 57 и сократив его на $\frac{1}{2} (\Delta t)^2$, получим

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v) \cdot \delta \mathbf{w}_v = 0. \quad (1)$$

Замечая, что массы точек m_v постоянны, а силы F_v не зависят от ускорения точек системы, уравнение (1) можно записать в виде

$$\delta Z = 0, \quad (2)$$

где введена величина

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(w_v - \frac{F_v}{m_v} \right)^2 \quad (3)$$

называемая *принуждением* или *мерой принуждения*.

Согласно (2) величина Z , рассматриваемая как функция возможных ускорений, стационарна при значениях ускорений точек системы, соответствующих действительному движению.

Величина Z не только стационарна, но и минимальна на действительном движении. В самом деле, пусть w_{v0} — ускорения точек системы в их действительном движении, а Z_0 — соответствующее им значение величины Z . Тогда, полагая, что в сравниваемом с действительным кинематически возможном движении величина w_v равна $w_{v0} + \delta w_{v0}$, находим, что

$$Z - Z_0 = \sum_{v=1}^N (m_v w_{v0} - F_v) \delta w_{v0} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (\delta w_{v0})^2. \quad (4)$$

Первая сумма в правой части равенства (4) обращается в нуль в силу уравнения (1), а вторая строго положительна, так как не все величины δw_{v0} ($v = 1, 2, \dots, N$) равны нулю. Поэтому величина Z на действительном движении принимает наименьшее значение в классе возможных ускорений системы.

Таким образом, мы получили принцип Гаусса или, как часто говорят, *принцип наименьшего принуждения*: среди сравниваемых кинематически возможных движений (для которых $\Gamma_{v1}^* = \Gamma_{v2}^*$, $v_{v1}^* = v_{v2}^*$, $\delta w_v \neq 0$) действительное движение выделяется тем, что для него принуждение Z минимально.

Примеры. 1. Найдем ускорение точек m_1 и m_2 из примера 1 п. 57, применяя принцип Гаусса. Имеем

$$Z = \frac{1}{2} m_1 (-w - g)^2 + \frac{1}{2} m_2 (w - g)^2, \quad \frac{\partial Z}{\partial w} = m_1 (w + g) + m_2 (w - g) = 0,$$

$$w = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

2. Применяя принцип Гаусса, найдем дифференциальное уравнение движения математического маятника (пример 2 п. 57). Функция Z имеет вид

$$Z = \frac{1}{2} m \left[\left(\ddot{x} - \frac{F_x}{m} \right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{F_y}{m} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m (l^2 \ddot{\varphi}^2 + 2gl \sin \varphi \ddot{\varphi}) + \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^4 + 2gl \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + g^2).$$

Из условия $\partial Z / \partial \ddot{\varphi} = 0$ следует уравнение (6) п. 57.

3. Материальная точка массой m под действием активной силы F движется по гладкой поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$. Найдем дифференциальные уравнения движения точки. Из уравнения связи имеем

$$\ddot{z} = \frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2. \quad (5)$$

Нужно минимизировать величину, равную

$$(m\ddot{x} - F_x)^2 + (m\ddot{y} - F_y)^2 + (m\ddot{z} - F_z)^2,$$

где производная $\ddot{z}$ задана формулой (5). Независимыми переменными являются x и y . Окончательно получаем уравнение

$$m\ddot{x} - F_x + (m\ddot{z} - F_z) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad m\ddot{y} - F_y + (m\ddot{z} - F_z) \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

где $\ddot{z}$ следует заменить на правую часть равенства (5).

60. Физический смысл принципа Гаусса. Пусть в момент времени t точки P_v несвободной механической системы имеют радиусы-векторы r_v и скорости v_v ; m_v , как всегда, обозначает массу точки P_v , а F_v — равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке P_v .

В момент времени $t + dt$ точка P_v займет положение A_v (рис. 56). При этом

$$\overline{P_v A_v} = v_v dt + \frac{1}{2} w_v (dt)^2 + \dots,$$

где многоточием обозначены члены выше второго порядка относительно dt .

Если бы в момент времени t система была освобождена от связей (без изменения F_v , m_v , r_v , v_v), то движение ее точек на интервале времени dt было бы отличным от движения точек несвободной системы. Пусть B_v — положение, которое заняла бы точка P_v в момент времени $t + dt$. Тогда

$$\overline{P_v B_v} = v_v dt + \frac{1}{2} \frac{F_v}{m_v} (dt)^2 + \dots$$

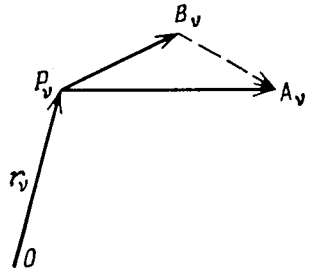


Рис. 56

Удаление $\overline{B_v A_v}$ точки при несвободном движении от ее положения при свободном движении вызвано действием связей, принуждающих точки системы отклоняться от движения, свойственного точкам свободной системы. Математически это принуждающее воздействие связей можно характеризовать длиной вектора $\overline{B_v A_v}$. С другой стороны, для того чтобы сообщить материальной точке какое-то ускорение, необходимо воздействие тем большее, чем больше (при прочих равных условиях) ее масса. Поэтому принуждающее воздействие связей на точку естественно оценивать величиной $m_v \overline{B_v A_v}^2$, а для всей системы — суммой этих величин по всем точкам P_v .

($v = 1, 2, \dots, N$). Если пренебречь членами выше четвертого порядка относительно dt , то

$$m_v \overline{B_v A_v}^2 = m_v (\overline{P_v A_v} - \overline{P_v B_v})^2 = \frac{1}{4} m_v (dt)^4 \left(w_v - \frac{F_v}{m_v} \right)^2.$$

Если просуммировать эти величины по всем точкам системы и отбросить несущественный множитель $1/2(dt)^4$, то получим принуждение для системы в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(w_v - \frac{F_v}{m_v} \right)^2.$$

Величина Z является мерой отклонения действительного движения системы от ее свободного движения. Так как, согласно принципу Гаусса, величина Z в действительном движении минимальна, то можно сказать, что несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному.

Пример. Материальная точка массой m движется под действием силы тяжести по гладкой прямой, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом α (рис. 57). Найдём ускорение точки, пользуясь тем, что ее действительное движение наименее отклоняется от свободного движения. Пусть в начальный момент точка занимает положение P и имеет скорость, равную нулю. При свободном движении точка движется по вертикали и за время t проходит расстояние $PB = 1/2 gt^2$. В действительном несвободном

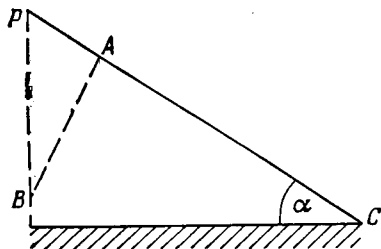


Рис. 57

ном движении по прямой PC точка движется с неизвестным ускорением w и за время t проходит расстояние $PA = 1/2 wt^2$. Поэтому

$$BA^2 = \left(\frac{gt^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{wt^2}{2} \right)^2 - 2 \frac{gt^2}{2} \frac{wt^2}{2} \sin \alpha = \frac{t^4}{4} (w^2 - 2gw \sin \alpha + g^2).$$

Минимум этой величины достигается при $w = g \sin \alpha$. Это и есть искомое ускорение.

61. Экстремальное свойство реакций связей. Физический смысл принципа Гаусса можно выразить и в других терминах. Замечая, что $m_v w_v = F_v + R_v$, мы можем переписать выражение для принуждения в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N \frac{R_v^2}{m_v}. \quad (6)$$

Условие того, что величина Z минимальна для действительного движения, приводит к экстремальному свойству реакций связей: для действительного движения реакции связей минимальны (в смысле минимума величины (6)).

Глава IV. СТАТИКА

§ 1. Статика произвольной механической системы

62. Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений). Задачи статики сформулированы в п. 47. В этом параграфе кратко рассмотрим некоторые основные вопросы статики произвольной механической системы с идеальными удерживающими связями. В следующем параграфе будут подробно изучены вопросы статики твердого тела, являющегося важнейшим для приложений частным случаем механической системы.

Рассмотрим несвободную систему материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$) со связями, задаваемыми уравнениями (1), (2) п. 10. Найдем условия, которым должны удовлетворять связи, чтобы система при $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$ могла находиться в состоянии равновесия на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$. Во-первых, конечно, положения точек, задаваемые радиусами-векторами $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$, должны быть возможными на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, т. е. на этом интервале должны выполняться тождества

$$f_\alpha(\mathbf{r}_{v0}, t) \equiv 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r). \quad (1)$$

Во-вторых, из уравнений (2) — (5) п. 10, 11, задающих ограничения на скорости и ускорения точек системы, получаем при $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$, $\mathbf{v}_v = 0$, $\mathbf{w}_v = 0$ и $t_0 \leq t \leq t_1$ тождества

$$a_\beta(\mathbf{r}_{v0}, t) \equiv 0, \quad \frac{\partial a_\beta(\mathbf{r}_{v0}, t)}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}_{v0}, t)}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 f_\alpha(\mathbf{r}_{v0}, t)}{\partial t^2} \equiv 0$$

$$(\alpha = 1, \dots, r; \beta = 1, \dots, s). \quad (2)$$

Из (1), (2) следует, что система при $t_0 \leq t \leq t_1$ может находиться в состоянии равновесия в каком-либо ее возможном положении $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$ только тогда, когда связи удовлетворяют условиям

$$f_\alpha(\mathbf{r}_{v0}, t) = 0, \quad a_\beta(\mathbf{r}_{v0}, t) = 0 \quad (3)$$

$$(t_0 \leq t \leq t_1; \alpha = 1, 2, \dots, r; \beta = 1, 2, \dots, s).$$

Пусть тождества (3) выполнены, т. е. состояние равновесия $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$ допускается связями, и пусть при $t = t_0$ имеем $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$, $\mathbf{v}_v = 0$. Будет ли система при выполнении условий (3) находиться в состоянии равновесия, зависит от приложенных к ней сил.

В основе статики механической системы лежит принцип виртуальных перемещений, или принцип Лагранжа. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы действительно было ее состоянием равновесия на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\sum_{v=1}^N F_v \cdot \delta r_v = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1). \quad (4)$$

Уравнение (4) называется *общим уравнением статики*.

Доказательство необходимости. При доказательстве необходимости условия (4) для равновесия системы воспользуемся общим уравнением динамики

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v w_v) \cdot \delta r_v = 0, \quad (5)$$

которое справедливо в любой момент времени для систем с идеальными удерживающими связями. Если при $t_0 \leq t \leq t_1$ система находится в состоянии равновесия, то $w_v = 0$ и из уравнения (5) сразу следует условие (4).

Доказательство достаточности более сложно. Мы дадим его далее в п. 158. Здесь только заметим, что это доказательство будет по существу использовать принцип полной детерминированности движения, т. е. однозначного определения движения системы по начальным положениям и скоростям образующих ее материальных точек. Следующий пример показывает, что при отсутствии полной детерминированности движения принцип виртуальных перемещений может не иметь места.

Пусть материальная точка единичной массы движется вдоль оси Ox под действием силы $F(x) = \alpha x^\beta$ ($\alpha > 0$; $0 < \beta < 1$). Уравнение движения точки имеет вид

$$\ddot{x} = \alpha x^\beta. \quad (6)$$

Положение равновесия $x = 0$ допускается связями; условие (4) выполнено при всех t , так как в положении равновесия $F = 0$. Тем не менее точка, находясь при $t = 0$ в начале координат и имея при этом нулевую скорость, может не оставаться в нем при $t > 0$. Действительно, при начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ уравнение (6) помимо решения $x = 0$ имеет еще одно решение вида

$$x(t) = at^b, \quad (7)$$

где

$$a = \left[\frac{\alpha (1 - \beta)^2}{2(1 + \beta)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad b = \frac{2}{1-\beta}.$$

Отметим еще, что, так как $b > 2$, для решения (7) $\ddot{x}(0) = 0$. Это указывает на то, что, если даже ускорение точки в положении равновесия равно нулю, все равно точка может не находиться в равновесии при $t > 0$, хотя и выполнены условия (3) и (4).

Игнорирование этого обстоятельства привело к тому, что во многих учебниках и научно-методических статьях доказательство достаточности принципа виртуальных перемещений либо неполно, либо ошибочно¹⁾.

Примеры. 1. На рис. 58 изображен механизм, состоящий из стержней, образующих три одинаковых параллелограмма. Стержни MN , RS , SL и NQ — цельные, соединенные в точках пересечения шарнирами. Положим, что точки A_0 и A_1 соединены нитью; требуется определить ее натяжение.

Мысленно перережем нить и заменим ее действие приложенной к точке A_1 силой F . Пусть шарнир A_1 сдвинется вниз и δs — его виртуальное перемещение. Ввиду цельности стержней MN , RS , SL и NQ при виртуальном перемещении диагонали всех параллелограммов удлинится на одну и ту же величину. Вследствие этого точка A_2 сместится вниз уже на $2\delta s$, а A_3 — на $3\delta s$.

Приравняв нулю сумму работ силы F и веса P на виртуальном перемещении, получим равенство

$$3P\delta s - F\delta s = 0.$$

Отсюда, ввиду того, что $\delta s \neq 0$, следует равенство

$$F = 3P.$$

2. Закон Паскаля. Закон Паскаля описывает характер распространения давления в несжимаемой жидкости: давление на поверхность жидкости, произведенное внешними для жидкости силами, передается ею равномерно во все стороны.

Чтобы проиллюстрировать закон Паскаля, рассмотрим сосуд, целиком заполненный несжимаемой жидкостью; в сосуде имеются три отверстия, закрытых подвижными поршнями 1, 2 и 3 (рис. 59). Пусть S_i — площадь i -го поршня, а δl_i — его виртуальное перемещение ($i = 1, 2, 3$).

Закрепим мысленно поршень 3, тогда будут двигаться поршни 1 и 2. Определенное движение поршня 1 вызовет определенное движение поршня 2. Объем жидкости, вдавленной первым поршнем, равен $S_1\delta l_1$; объем жидкости, вошедшей в трубку второго поршня, равен $S_2\delta l_2$. Из условия несжимаемости жидкости имеем $S_1\delta l_1 = S_2\delta l_2$.

Составим сумму работ сил P_1 и P_2 на рассмотренном виртуальном перемещении:

$$P_1\delta l_1 - P_2\delta l_2 = 0, \quad P_1\delta l_1 - P_2 \frac{S_1}{S_2} \delta l_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}.$$

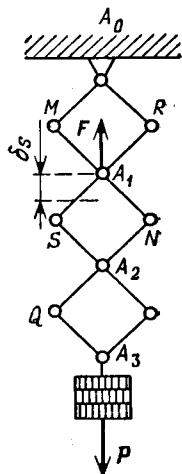


Рис. 58

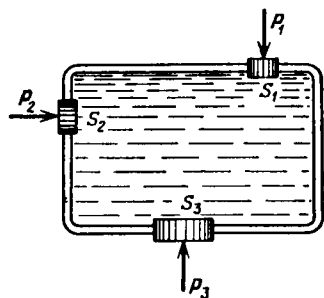


Рис. 59

¹⁾ Довольно обширную библиографию по этому вопросу см., например, в работах: Геронимус Я. Л. О принципе виртуальных перемещений // Бюллетень Ясского Политехн. ин-та. — 1963. — Т. 9(13), вып. 3—4. — С. 251—262; Блюмин Г. Д. О принципе виртуальных перемещений // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 6. — С. 22—28.

Аналогично, мысленно закрепляя поршень 2, можно получить, что

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_3}{S_3},$$

т. е. давление на жидкость передается равномерно во все стороны.

3. У стены здания положены три одинаковые трубы, как показано на рис. 60. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к оси правой трубы, чтобы удержать трубы в равновесии, если вес каждой трубы равен P ?

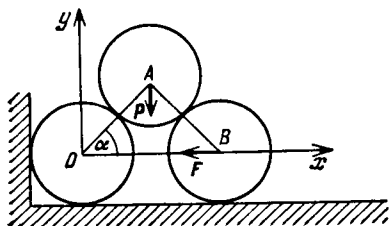


Рис. 60

Если правой нижней трубе сообщить виртуальное перемещение вдоль оси Ox , то работу совершат только две указанные на рис. 60 силы: P и F . Радиусы-векторы r_A и r_B точек их приложения в системе координат Oxy задаются равенствами (a — радиус сечения труб)

$$r'_A = (2a \cos \alpha, 2a \sin \alpha), \quad r'_B = (4a \cos \alpha, 0).$$

На указанном виртуальном перемещении угол α получает приращение $\delta\alpha$. Поэтому

$$\delta r'_A = 2a\delta\alpha (-\sin \alpha, \cos \alpha), \quad \delta r'_B = 4a\delta\alpha (-\sin \alpha, 0).$$

Приравняв нулю сумму работ сил P и F на виртуальном перемещении, получим равенство

$$P \cdot \delta r_A + F \cdot \delta r_B = 0,$$

которое с учетом того, что

$$P' = (0, -P), \quad F' = (-F, 0),$$

можно записать в виде

$$-P \cdot 2a \cos \alpha \cdot \delta\alpha + F \cdot 4a \sin \alpha \cdot \delta\alpha = 0.$$

Отсюда при $\delta\alpha \neq 0$ получаем

$$F = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha P.$$

63. Общее уравнение статики в обобщенных координатах. Пусть $q_1, q_2, \dots, q_m$ — обобщенные координаты системы, а $Q_j(q, \dot{q}, t)$ — соответствующие им обобщенные силы. Уравнение (4) в обобщенных координатах запишется в виде

$$\sum_{v=1}^N F_v \cdot \delta r_v = \sum_{j=1}^m Q_j(q, 0, t) \delta q_j = 0. \quad (8)$$

Если система голономна, то число ее обобщенных координат m совпадает с числом степеней свободы n и величины δq , в (8) независимы. Приравнявая нулю коэффициенты при δq , в уравнении (8), получаем, что в положении равновесия системы $q = q_0$ (и только в нем) обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Равенства (9) образуют систему n уравнений относительно неизвестных $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$, задающих положение равновесия системы.

Если все активные силы потенциальны, то, согласно п. 54, из (9) получаем

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

где Π — потенциальная энергия системы. Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия равновесия голономной системы (с идеальными удерживающими связями, в потенциальном поле сил) совпадают с необходимыми условиями экстремума потенциальной энергии в рассматриваемом положении равновесия системы.

В частности, если система движется в однородном поле тяжести, то условия (10) примут вид $\partial z_c / \partial q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где z_c — координата центра тяжести рассматриваемой системы в неподвижной системе координат с вертикальной осью Oz , т. е. для тяжелой системы необходимые и достаточные условия равновесия совпадают с необходимыми условиями экстремальности высоты ее центра тяжести над горизонтальной плоскостью.

Если система неголономна, то величины δq_i в (8) не будут независимы; они связаны с уравнениями (28) п. 16. Среди m величин δq_i независимыми будут только n ($n = m - s$) из них. Пусть для определенности это будут величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$. Разрешив уравнения (28) п. 16 относительно $\delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \dots, \delta q_m$, получим

$$\delta q_{n+h} = \sum_{i=1}^n \alpha_{hi} \delta q_i \quad (k = 1, 2, \dots, m - n = s), \quad (11)$$

где величины α_{hi} являются функциями коэффициентов b_{hi} , входящих в уравнения (28) п. 16. Уравнение (8) после подстановки в него выражений (11) и приведения подобных членов примет вид

$$\sum_{i=1}^n Q'_i \delta q_i = 0, \quad (12)$$

где

$$Q'_i = Q_i + \sum_{p=1}^{m-n} \alpha_{pi} Q_{n+p} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Так как величины δq_i независимы, то из (12) следует, что

$$Q'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Равенства (14) представляют собой систему n уравнений относительно m неизвестных $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{m0}$, определяющих положение равновесия системы. Так как число неизвестных превышает число уравнений, то в общем случае имеем многообразие состояний

равновесия, размерность которого не меньше числа s неголономных связей.

Отметим, что из (13) и (14) следует, что для неголономной системы в потенциальном поле сил некоторые или даже все частные производные потенциальной энергии в положении равновесия могут быть отличными от нуля.

Примеры. 1. Пусть несвободная материальная точка с неинтегрируемой связью

$$q_3 = q_1 q_2$$

движется в силовом поле с потенциалом вида

$$\Pi = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).$$

Тогда $m = 3$, $s = 1$, $n = 2$; $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = q_1$; $Q_i = -q_i$ ($i = 1, 2, 3$); $Q'_1 = -q_1$, $Q'_2 = -q_2 - q_1 q_3$. Условия равновесия (14) запишутся в виде двух уравнений с тремя неизвестными:

$$q_1 = 0, \quad q_2 + q_1 q_3 = 0.$$

Отсюда следует, что положения равновесия образуют одномерное многообразие

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = q_{30},$$

где q_{30} — произвольное число.

Если $q_{30} \neq 0$, то в положении равновесия производная $\partial \Pi / \partial q_3$ отлична от нуля.

2. Два одинаковых стержня OA и AB весом P и длиной $2a$ скреплены шарниром A . Конец O стержня OA закреплен в неподвижном шарнире, а к концу B стержня AB приложена горизонтальная сила $P/2$. Оба стержня расположены в вертикальной плоскости. Требуется найти углы α и β при равновесии системы (рис. 61).

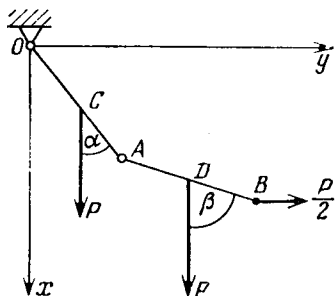


Рис. 61

Система имеет две степени свободы и является голономной. За обобщенные координаты примем углы α и β . Найдем обобщенные силы Q_α и Q_β , отвечающие этим обобщенным координатам. В плоскости стержней возьмем систему координат Oxy , ось Ox которой направим вертикально вниз. Для активных сил F_C , F_D , F_B и радиусов-векторов r_C , r_D , r_B точек их приложения имеем

$$F'_C = (P, 0), \quad F'_D = (P, 0), \quad F'_B = \left(0, \frac{P}{2}\right);$$

$$r'_C = a (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad r'_D = a (2 \cos \alpha + \cos \beta, 2 \sin \alpha + \sin \beta),$$

$$r'_B = 2a (\cos \alpha + \cos \beta, \sin \alpha + \sin \beta).$$

Вычислим элементарную работу активных сил на виртуальном перемещении системы, отвечающем вариациям $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ обобщенных координат. Так как

$$\delta r'_C = a \delta\alpha (-\sin \alpha, \cos \alpha),$$

$$\delta r'_D = a (-2 \sin \alpha \cdot \delta\alpha - \sin \beta \cdot \delta\beta, 2 \cos \alpha \cdot \delta\alpha + \cos \beta \cdot \delta\beta),$$

$$\delta r'_B = 2a (-\sin \alpha \cdot \delta\alpha - \sin \beta \cdot \delta\beta, \cos \alpha \cdot \delta\alpha + \cos \beta \cdot \delta\beta),$$

то

$$\delta A = F_C \cdot \delta r_C + F_D \cdot \delta r_D + F_B \cdot \delta r_B = Pa[(\cos \alpha - 3 \sin \alpha)\delta \alpha + (\cos \beta - \sin \beta)\delta \beta].$$

Поэтому

$$Q_\alpha = Pa(\cos \alpha - 3 \sin \alpha), \quad Q_\beta = Pa(\cos \beta - \sin \beta).$$

Из условий (9) получаем теперь, что при равновесии системы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = 1.$$

3. Тяжелое колечко надето на прут, которому придана форма кривой, определяемой уравнениями

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + z = 1,$$

где ось Oz направлена вертикально вверх. Найдем положения равновесия колечка.

Пусть виртуальное перемещение колечка задается величинами δx , δy , δz . Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

$$x\delta x + 4y\delta y + 36z\delta z = 0, \quad \delta x + 2\delta y + 6\delta z = 0.$$

Для положения равновесия элементарная работа $P\delta z$ (P — вес колечка) силы тяжести должна равняться нулю. Поэтому $\delta z = 0$, и предыдущие два уравнения запишутся в виде

$$x\delta x + 4y\delta y = 0, \quad \delta x + 2\delta y = 0,$$

или, после исключения δy ,

$$(x - 2y)\delta x = 0.$$

Это условие должно выполняться при любых δx , следовательно,

$$x = 2y.$$

Принимая во внимание уравнения кривой, по которой изогнут прут, получим два решения:

$$1) \quad x = 4, \quad y = 2, \quad z = -\frac{1}{3};$$

$$2) \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1.$$

4. Однородный стержень AD опирается концом A на вертикальную стену, а в некоторой другой точке — на ребро B (рис. 62). Длина стержня $2a$, расстояние точки B от стены b . Найти угол α при равновесии стержня.

Рассматриваемая система голономна и имеет одну степень свободы. Примем угол α за обобщенную координату. Потенциальная энергия $\Pi = -Px_C$, где x_C — абсцисса центра тяжести стержня:

$$x_C = b \operatorname{ctg} \alpha - a \cos \alpha.$$

Условие равновесия $\partial \Pi / \partial \alpha = 0$ дает уравнение для α :

$$-\frac{b}{\sin^2 \alpha} + a \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Равновесие стержня возможно только в том случае, когда $b \leq a$.

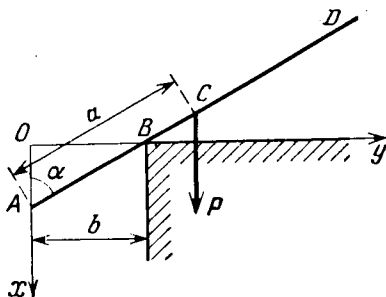


Рис. 62

64. Эквивалентные системы сил. Рассмотрим совокупность сил $(F_1, F_2, \dots, F_k)$, приложенную к некоторой механической системе. Допустим, что эта совокупность сил в данной механической системе заменена на совокупность сил $(F_1^*, F_2^*, \dots, F_l^*)$. При этом количество, точки приложения, величины и направления сил в первой и второй системах могут быть различными. Движения механической системы под действием первой и второй систем сил при одинаковых начальных положениях точек системы и одинаковых их начальных скоростях могут быть одинаковыми, а могут отличаться.

Если две системы сил могут быть заменены одна другой без изменения движения (или состояния покоя) механической системы, то такие системы сил будем называть *эквивалентными*.

В частности, если добавление или отбрасывание некоторой системы сил не изменяет движение механической системы, то говорят, что эта система сил является *уравновешенной* или *эквивалентной нулю*.

Эквивалентность систем сил обозначается символом $\sim$: если две системы $(F_1, F_2, \dots, F_k)$ и $(F_1^*, F_2^*, \dots, F_l^*)$ эквивалентны, то пишут $(F_1, F_2, \dots, F_k) \sim (F_1^*, F_2^*, \dots, F_l^*)$.

Из общего уравнения динамики следует (см. замечание в п. 57), что *две системы сил эквивалентны тогда и только тогда, когда они совершают одинаковую работу на любых (одних и тех же для обеих систем сил) виртуальных перемещениях механической системы*.

Выразим этот критерий эквивалентности через обобщенные силы. Пусть Q_j и Q_j^* ($j=1, 2, \dots, m$) — обобщенные силы, отвечающие первой и второй системам сил соответственно, а δA и δA^* — элементарные работы этих систем на виртуальных перемещениях $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$. Составим разность

$$\delta A - \delta A^* = \sum_{j=1}^m (Q_j - Q_j^*) \delta q_j. \quad (15)$$

Для голономной системы величины δq_j независимы. Поэтому, приравняв нулю левую часть формулы (15), получим, что системы сил, приложенные к голономной системе, эквивалентны тогда и только тогда, когда их обобщенные силы совпадают при каком-либо выборе обобщенных координат.

В случае неголономной системы величины δq_j зависимы. Подставив в этом случае величины (11) в (15), приведя подобные члены и приравняв результат нулю, получим, что в случае неголономной системы для эквивалентности двух систем сил необходимо и достаточно, чтобы при каком-то выборе обобщенных координат совпадали величины Q'_i и Q_i^* , вычисленные для обеих систем сил по формулам (13).

Пример. Материальная точка $P(x, y)$ движется в плоскости и имеет скорость, постоянно направленную на движущуюся точку $P_0(x_0(t), y_0(t))$.

Уравнение связи имеет вид

$$\dot{y} = \frac{y - y_0(t)}{x - x_0(t)} \dot{x}. \quad (16)$$

При непостоянных x_0, y_0 это — дифференциальная неинтегрируемая связь. Следовательно, $m = 2, s = 1, n = 1$.

Пусть к точке P приложена сила $F(y_0(t) - y, -x_0(t) + x)$. Ей отвечают такие обобщенные силы ($q_1 = x, q_2 = y$):

$$Q_1 = y_0(t) - y, \quad Q_2 = -x_0(t) + x.$$

Из уравнения связи (16) следует, что

$$\alpha_{11} = \frac{q_2 - y_0(t)}{q_1 - x_0(t)}.$$

Поэтому из формулы (13) имеем $Q'_1 = 0$.

Если вместо силы F к точке P приложена сила $F^* = kF$ ($k \neq 1$), то аналогично получим $Q'^*_1 = 0$. Поэтому силы F и F^* в рассматриваемой голономной системе эквивалентны.

Если бы связь (16) отсутствовала, то имел бы место случай голономной системы, а силы F и F^* не были бы эквивалентны.

§ 2. Статика твердого тела

65. Необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела. Пусть к твердому телу приложена система внешних сил с главным вектором $R^{(e)}$ и главным моментом $M_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса. Считая твердое тело свободным, получим необходимые и достаточные условия его равновесия. Если тело несвободно, то его можно рассматривать как свободное, мысленно отбросив связи и заменив их действие на тело реакциями (п. 45). В этом случае реакции связей, которые обычно являются неизвестными, войдут в выражения для $R^{(e)}$ и $M_O^{(e)}$.

К свободному твердому телу, как к системе с идеальными связями, применим принцип виртуальных перемещений, дающий необходимые и достаточные условия равновесия системы с идеальными удерживающими связями. Поэтому наша задача состоит только в том, чтобы выразить общее уравнение статики (4) п. 62 через главный вектор и главный момент сил, приложенных к конкретной системе — твердому телу.

Теорема. Для равновесия твердого тела при $t_0 \leq t \leq t_1$ необходимо и достаточно, чтобы в момент времени t_0 тело покоилось, а главный вектор $R^{(e)}$ и главный момент внешних сил $M_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса O при $t_0 \leq t \leq t_1$ равнялись нулю:

$$R^{(e)} = 0, \quad M_O^{(e)} = 0. \quad (1)$$

Для доказательства заметим, что, так как свободное твердое тело является склерономпой системой, его произвольное действительное перемещение за время dt является виртуальным. Поэтому, воспользовавшись формулой (3) п. 52, можно элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, на его виртуальном перемещении записать в виде

$$\delta A = \mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathbf{M}_O^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_O$ — скорость полюса, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела в момент времени t ($t_0 \leq t \leq t_1$). Так как $\mathbf{v}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$ — произвольные величины, то из общего уравнения статки $\delta A = 0$ следуют равенства (1). Теорема доказана.

Если $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_k)$ — система внешних сил, приложенных к твердому телу, а x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения силы $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) в декартовой прямоугольной системе координат с началом в полюсе O , то необходимые и достаточные условия равновесия твердого тела (1) запишутся в скалярной форме в виде следующих шести равенств:

$$\sum_{i=1}^k F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^k F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^k F_{iz} = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^k (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \quad \sum_{i=1}^k (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \quad \sum_{i=1}^k (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \quad (4)$$

В частных случаях некоторые из шести равенств (3), (4) могут удовлетворяться тождественно.

Механическая система, у которой реакции всех наложенных связей могут быть определены из условий равновесия, получаемых в статике, называется *статически определимой*, в противном случае — *статически неопределимой*. Если рассматриваемое в данном пункте твердое тело несвободно, то равенства (3), (4) будут системой уравнений относительно проекций реакций связей. Случай статически определимой механической системы имеет место лишь тогда, когда число неизвестных проекций не превосходит числа не удовлетворяющих тождественно уравнений системы (3), (4).

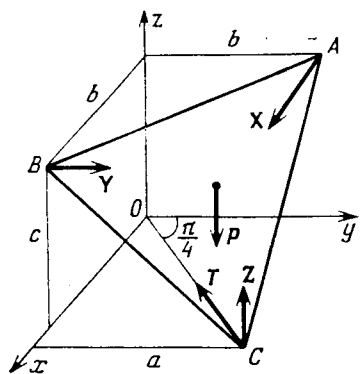


Рис. 63

натные плоскости и привязана за точку C к точке O с помощью нити CO (рис. 63). Определим натяжение T нити и реакции X, Y, Z в точках A, B, C . Даны расстояния a, b, c и угол $\angle COy = \pi/4$.

Пр и м е р. Однородная доска в форме равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) весом P опирается вершинами на три координатные оси. Определим реакции X, Y, Z в точках A, B, C .

На доску действуют пять сил: сила тяжести, натяжение нити и реакции в точках A, B, C , причем последние, ввиду отсутствия трения, перпендикулярны соответствующим координатным плоскостям.

Из геометрических соображений нетрудно получить, что центр тяжести доски имеет координаты $\frac{a+b}{3}, \frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}$.

Необходимые и достаточные условия равновесия (3), (4) запишутся в виде следующей (совместной) системы шести линейных уравнений относительно четырех неизвестных X, Y, Z, T :

$$-T \frac{\sqrt{2}}{2} + X = 0, \quad -T \frac{\sqrt{2}}{2} + Y = 0, \quad Z - P = 0,$$

$$Za - Yc - \frac{1}{3} P(a+b) = 0, \quad -Za + Xc + \frac{1}{3} P(a+b) = 0, \quad Yb - Xb = 0.$$

Решив эту систему, получим, что

$$X = Y = \frac{2a-b}{3c} P, \quad Z = P, \quad T = \frac{\sqrt{2}(2a-b)}{3c} P.$$

66. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу. Критерий эквивалентности систем сил, приложенных к произвольной механической системе с идеальными удерживающими связями, получен в п. 64. Здесь получим критерий эквивалентности для систем сил, приложенных к твердому телу.

Теорема. Для того чтобы две системы сил, приложенных к твердому телу, были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторого полюса.

Доказательство. Пусть система сил $(F_1, F_2, \dots, F_k)$ имеет главный вектор $R^{(e)}$ и главный момент $M_O^{(e)}$, а другая система сил $(F_1^*, F_2^*, \dots, F_l^*)$ — главный вектор $R^{*(e)}$ и главный момент $M_O^{*(e)}$. Используя формулу (2), составим разность элементарных работ этих систем сил на одинаковых виртуальных перемещениях тела:

$$\delta A - \delta A^* = (R^{(e)} - R^{*(e)}) \cdot v_O dt + (M_O^{(e)} - M_O^{*(e)}) \cdot \omega dt.$$

Согласно определению, для эквивалентности систем сил необходимо и достаточно, чтобы эта разность равнялась нулю. Отсюда, ввиду произвольности v_O и ω , следует, что $R^{(e)} = R^{*(e)}$ и $M_O^{(e)} = M_O^{*(e)}$. Теорема доказана.

Получим связь между главными моментами одной и той же системы сил, вычисленными относительно разных полюсов. Согласно рис. 64, имеем

$$M_{O_1} = \sum_{i=1}^k \rho_i \times F_i = \sum_{i=1}^k (\overline{O_1 O} + r_i) \times F_i = \overline{O_1 O} \times \left(\sum_{i=1}^k F_i \right) + \sum_{i=1}^k r_i \times F_i,$$

или

$$M_O = M_O + \overline{O_1 O} \times R. \quad (5)$$

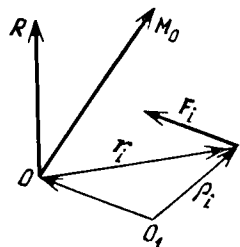


Рис. 64

Таким образом, при изменении полюса главный момент сил меняется на величину, равную моменту главного вектора (приложенного в старом полюсе) относительно нового полюса. Отсюда следует, что если у двух систем сил главные векторы одинаковы и одинаковы главные моменты относительно какого-либо полюса, то последние одинаковы и для любого полюса.

Замечание. При выполнении условий (1) система сил, приложенная к твердому телу, будет уравновешенной, или эквивалентной нулю. Это означает, что любое движение тела не изменится, если к приложенным к нему силам добавить или отбросить систему сил, удовлетворяющую равенствам (1).

Пример. По ребрам прямоугольного клина действуют силы F_1 и F_2 (рис. 65), которые требуется замещать эквивалентными им силами F_1^* и F_2^* .

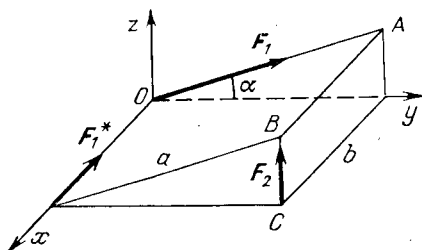


Рис. 65

Величины сил F_1 , F_2 , F_1^* пропорциональны длинам соответствующих ребер клина. Найдти силу F_2^* .

Если a и b — длины ребер OA и AB клина соответственно, а f — коэффициент пропорциональности ($f > 0$), то

$$F_1 = fa, \quad F_2 = fa \sin \alpha, \quad F_1^* = fb.$$

Введем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 65. Главный вектор и главный момент системы сил

(F_1 , F_2) в этой системе координат имеют такие компоненты:

$$R_x = 0, \quad R_y = fa \cos \alpha, \quad R_z = 2fa \sin \alpha, \\ M_x = fa^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad M_y = -fab \sin \alpha, \quad M_z = 0.$$

Пусть F_{2x}^* , F_{2y}^* , F_{2z}^* — компоненты искомой силы F_2^* , а x , y , z — координаты точки ее приложения. Главный вектор и главный момент системы сил (F_1^* , F_2^*) имеют компоненты, задаваемые равенствами

$$R_x^* = -fb + F_{2x}^*, \quad R_y^* = F_{2y}^*, \quad R_z^* = F_{2z}^*, \\ M_x^* = yF_{2z}^* - zF_{2y}^*, \quad M_y^* = zF_{2x}^* - xF_{2z}^*, \quad M_z^* = xF_{2y}^* - yF_{2x}^*.$$

Система трех уравнений, вытекающая из равенства соответствующих компонент главных векторов эквивалентных систем сил (F_1 , F_2) и (F_1^* , F_2^*), позволяет найти компоненты силы F_2^* :

$$F_{2x}^* = fb, \quad F_{2y}^* = fa \cos \alpha, \quad F_{2z}^* = 2fa \sin \alpha.$$

Эти равенства задают направление силы F_2^* и ее модуль

$$F_2^* = \sqrt{F_{2x}^{*2} + F_{2y}^{*2} + F_{2z}^{*2}} = \sqrt{F_1^2 + 3F_2^2 + F_1^{*2}}.$$

Приравняв соответствующие компоненты главных моментов обеих систем сил и произведи некоторые упрощения, придем к системе уравнений, опреде-

ляющей координаты x, y, z точки приложения силы F_2^* :

$$2y \sin \alpha - z \cos \alpha = a \sin \alpha \cos \alpha; 2ax \sin \alpha - bz = ab \sin \alpha,$$

$$ax \cos \alpha - by = 0.$$

Эти уравнения определяют не одну точку приложения силы F_2^* , а, как нетрудно проверить, целую прямую — линию действия этой силы:

$$\frac{2x - b}{b} = \frac{2y - a \cos \alpha}{a \cos \alpha} = \frac{z}{a \sin \alpha}.$$

Линия действия силы F_2^* проходит через вершину B клина и точку пересечения диагоналей его нижней грани.

67. О равнодействующей. Теорема Вариньона. Если система сил $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, приложенная к твердому телу, эквивалентна одной силе R^* , то эта сила называется *равнодействующей* данной системы сил.

Теорема. Если система сил имеет равнодействующую, то эта равнодействующая R^* равна главному вектору R , а ее момент относительно произвольного полюса O равен главному моменту M_O данной системы сил относительно этого полюса.

Доказательство следует из определения равнодействующей и критерия эквивалентности двух систем сил, приложенных к твердому телу. Вторая часть приведенной теоремы носит название *теоремы Вариньона*.

68. Частные случаи условий равновесия твердого тела. 1. Из условий (1) следует, что под действием одной, не равной нулю, силы твердое тело не может находиться в равновесии (хотя бы потому, что $R^{(e)} \neq 0$).

2. Под действием двух сил твердое тело при $t_0 \leq t \leq t_1$ находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда оно покоится в начальный момент $t = t_0$, а силы при $t_0 \leq t \leq t_1$, во-первых, равны по величине и противоположно направлены, а во-вторых, имеют общую линию действия. Первое требование вытекает из условия $R^{(e)} = 0$, второе — из условия $M_O^{(e)} = 0$.

3. Если под действием трех сил F_1, F_2, F_3 твердое тело находится в равновесии и линии действия двух сил F_1 и F_2 пересекаются, то все три силы лежат в одной плоскости и их линии действия пересекаются в одной точке. Это утверждение (которое часто называют *теоремой о трех силах*) сразу вытекает из условий (1) равновесия твердого тела. В самом деле, из условия $R^{(e)} = 0$ следует, что $F_3 = -(F_1 + F_2)$, и поэтому сила F_3 лежит в плоскости сил F_1 и F_2 . Замечая теперь, что моменты сил F_1 и F_2 относительно точки O пересечения линий их действия равны нулю, из условия $M_O^{(e)} = 0$ получаем, что линия действия силы F_3 проходит через точку O .

Пример. Однородный стержень AB длины $2l$ опирается одним концом на гладкую вертикальную стенку, а другим концом упирается в угол B . Раз-

стояние $OB = a$ (рис. 66). Требуется найти направление реакции в точке B при равновесии стержня.

Реакция в точке A ортогональна стенке, ее линия действия пересекает линию действия силы тяжести P в точке S . При равновесии третья сила — реакция в точке B — также проходит через точку S . Из $\triangle BCS$ находим

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \frac{\sqrt{4l^2 - a^2}}{a}.$$

Замечание. Очевидно, что при переносе вектора какой-либо силы системы вдоль линии его действия главный вектор системы сил и ее главный момент относительно заданного полюса остаются неизменными. Поэтому из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу, следует, что, не нарушая движения тела (и, в частности, его состояния равновесия), можно перенести точку приложения силы в произвольную точку тела, лежащую на линии действия этой силы, т. е. сила, приложенная к твердому телу, — скользящий вектор.

4. Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Теорема. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, и эта равнодействующая проходит через точку пересечения их линий действия.

Доказательство следует из предыдущего замечания и закона сложения сил (п. 44). Пусть O — точка пересечения линий действия сил системы¹⁾. Тогда $M_O^{(e)} = 0$ и условия (1) сводятся к одному векторному равенству $R^{(e)} = 0$, которое в скалярной форме запишется в виде трех равенств (3).

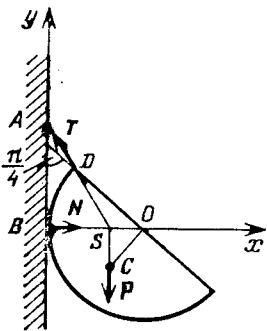


Рис. 67

Примеры. 1. Полушар весом P и радиусом r привязан за край нитью к точке A гладкой вертикальной стены и опирается на стену выпуклой поверхностью в точке B (рис. 67). Какова длина нити, если в положении равновесия плоскость лежащего в основании большого круга образует с вертикалью угол $\pi/4$? Каково натяжение нити и давление полушара на стену?

На полушар действуют три силы: сила тяжести P , давление стены N и натяжение нити T . Линии действия сил P и N пересекаются в точке S . Согласно теореме о трех силах, в по-

¹⁾ Может оказаться, что точка O не принадлежит твердому телу. Однако это не меняет наших рассуждений, так как точку O можно считать принадлежащей твердому телу, мысленно представив ее лежащей на одном из концов невесомого стержня, который вторым своим концом жестко прикреплен к телу.

ложении равновесия линия действия силы T (т. е. направление нити) также должна проходить через точку S . Таким образом, полушар находится в равновесии под действием системы сходящихся сил.

В прямоугольном треугольнике OSC $\angle SOC = \pi/4$ и, так как центр тяжести S полушара отстоит от центра O окружности большого круга на расстоянии $OC = 3r/8$, $OS = OC \cos(\pi/4) = 3\sqrt{2}r/16$.

Обозначим α угол между направлением нити и вертикалью. В $\triangle ODS$ $\angle DOS = \pi/4$, $\angle OSD = \pi/2 + \alpha$, $\angle ODS = \pi/4 - \alpha$, поэтому

$$\frac{SD}{\sin(\pi/4)} = \frac{OD}{\sin(\pi/2 + \alpha)} = \frac{OS}{\sin(\pi/4 - \alpha)},$$

или

$$\sqrt{2}SD = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{3r}{8(\cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8} \left(\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{89}}, \cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{89}} \right), \quad SD = \frac{\sqrt{178}}{16} r.$$

Из $\triangle ABS$ теперь находим длину нити

$$AD = \frac{\sqrt{89}}{10} (2 - \sqrt{2}) r.$$

Приравняв нулю сумму проекций сил P , N и T на оси системы координат Bxy , получим два уравнения, определяющих натяжение нити и давление полушара на стену:

$$T \cos \alpha = P, \quad T \sin \alpha = N,$$

откуда найдем

$$T = \frac{\sqrt{89}}{8} P, \quad N = \frac{5}{8} P.$$

2. Три стержня AO , BO и CO прикреплены к вертикальной стене шарнирами и скреплены шарниром в точке O , к которой прикреплен груз весом P . Стержни AO и BO расположены в горизонтальной плоскости и образуют со стеной углы по 60° . Третий стержень CO расположен в вертикальной плоскости, проходящей через O и середину AB , и образует со стеной угол 30° . Определить усилия в стержнях AO , BO и CO . Весом самих стержней пренебречь.

Для определения искомых величин рассмотрим равновесие точки (узла) O . На узел O действуют активная сила P и реакции S_A , S_B и S_C стержней, образующие систему сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

Условия равновесия запишем в виде равенств (3), выбрав систему координат, как показано на рис. 68. Имеем

$$\sum F_{ix} = S_A \cos 60^\circ - S_B \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -S_A \sin 60^\circ - S_B \sin 60^\circ - S_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iz} = -S_C \cos 30^\circ - P = 0,$$

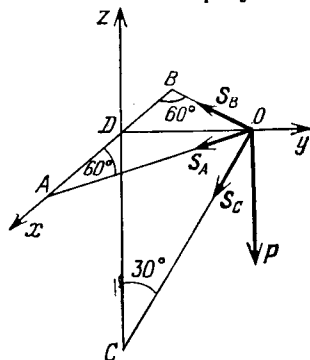


Рис. 68

Решив полученную систему уравнений, пайдем

$$S_A = S_B = \frac{1}{3} P, \quad S_C = -\frac{2\sqrt{3}}{3} P.$$

Величины S_A и S_B положительны, следовательно, реакции S_A и S_B направлены так, как показано на рис. 68 (стержни OA и OB растянуты), величина S_C отрицательна (стержень OC сжат).

5. Рассмотрим теперь равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система сил, т. е. система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Пусть этой плоскостью будет плоскость Oxy . Тогда проекции F_{ix} сил на ось Oz и координаты z_i точек их приложения ($i = 1, 2, \dots, k$) равны нулю и условия (3), (4) сводятся к трем равенствам

$$\sum_{i=1}^k F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^k F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^k (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, для равновесия свободного твердого тела при $t_0 \leq t \leq t_1$ под действием плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы в момент $t = t_0$ тело покоилось, а суммы проекций сил на две координатные оси и сумма моментов сил относительно третьей оси при $t_0 \leq t \leq t_1$ равнялись нулю.

Упражнение. Показать, что условия равновесия твердого тела под действием плоской системы сил могут быть представлены в следующих, эквивалентных условию (6), формулировках: а) суммы моментов сил относительно каждой из трех произвольных, не лежащих на одной прямой, точек равны нулю (теорема о трех моментах); б) суммы моментов сил относительно каждой из двух произвольных точек и сумма проекций сил на произвольную ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки, равны нулю.

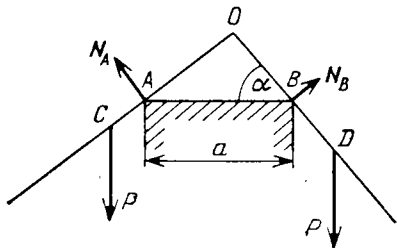


Рис. 69

Примеры. 1. Однородный стержень, изогнутый под прямым углом, имеющий оба колена одинаковой длины $2l$, опирается на края стола длины $AB = a = 2l/5$. Найти положение равновесия и давления N_A и N_B на края стола. Трением пренебречь.

Пусть положение равновесия определяется величиной α угла OBA (рис. 69). Стержень находится в равновесии под действием плоской системы четырех сил, показанных на рис. 69; реакции в точках A и B ортогональны соответствующим коленам стержня. Приравняв нулю суммы проекций сил на оси, направленные по OC и OD , получим

$$N_A = 2P \sin \alpha, \quad N_B = 2P \cos \alpha.$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил относительно точки O дает

$$\frac{2}{5} l N_A \sin \alpha + Pl \cos \alpha = \frac{2}{5} l N_B \cos \alpha + Pl \sin \alpha,$$

или

$$\frac{4}{5} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

Последнее уравнение имеет три решения. Для первого решения

$$\sin \alpha = \cos \alpha, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}, \quad N_A = N_B = \sqrt{2} P.$$

Для второго и третьего решений

$$\frac{4}{5} (\sin \alpha + \cos \alpha) = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_* = \frac{1}{2} \arcsin \frac{9}{16}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_*,$$

$$N_A = \frac{P}{2} \sqrt{\frac{16 \mp 5\sqrt{7}}{2}}, \quad N_B = \frac{P}{2} \sqrt{\frac{16 \pm 5\sqrt{7}}{2}}.$$

В последних двух равенствах верхний и нижний знаки отвечают соответственно значениям $\alpha = \alpha_2$ и $\alpha = \alpha_3$.

2. Два одинаковых однородных стержня весом P каждый соединены шарниром B и прикреплены шарнирами A и C к неподвижной опоре так, что стержень AB горизонтален, а стержень BC образует с вертикалью угол α (рис. 70). Определить реакции шарниров.

Мысленно уберем шарнир B и рассмотрим равновесие каждого из стержней в отдельности. На каждый из стержней действуют сила тяжести и реакции шарниров, которые мы представляем их компонентами в системе координат Ax, y , показанной на рис. 70. При этом, согласно третьему закону Ньютона,

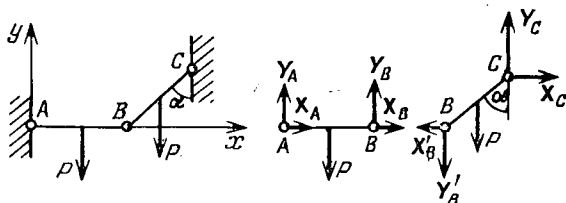


Рис. 70

реакции X'_B, Y'_B шарнира B , действующие на стержень BC , должны быть направлены противоположно реакциям X_B, Y_B , действующим на стержень AB . По величине же

$$X'_B = X_B, \quad Y'_B = Y_B.$$

Составим условия равновесия (6) для каждого из стержней. Введя обозначение $AB = BC = 2a$, найдем для стержня AB

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = X_A + X_B = 0, \quad \sum F_{iy} = Y_A + Y_B - P = 0, \\ \sum m_{Az}(F_i) = Y_B \cdot 2a - Pa = 0, \end{aligned}$$

для стержня BC

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = -X_B + X_C = 0, \quad \sum F_{iy} = -Y_B + Y_C - P = 0, \\ \sum m_{Bz}(F_i) = -Pa \sin \alpha - X_C \cdot 2a \cos \alpha + Y_C \cdot 2a \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Из полученной системы шести уравнений с шестью неизвестными найдем

$$X_A = -X_B = -X_C = -P \operatorname{tg} \alpha, \quad Y_A = Y_B = \frac{1}{2} P, \quad Y_C = \frac{3}{2} P.$$

Направление реакции X_A противоположно указанному на рисунке.

69. Равнодействующая двух параллельных сил.

Теорема. Две параллельные и одинаково направленные силы F_1 и F_2 (рис. 71), приложенные к твердому телу, имеют равнодействующую $R^* = F_1 + F_2$; эта равнодействующая лежит в плоскости сил F_1 и F_2 , и ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки P_1 и P_2 приложения сил, внутренним образом на части, обратно пропорциональные величинам F_1 и F_2 . Две параллельные, не равные по величине и противоположно направленные силы F_1 и F_2

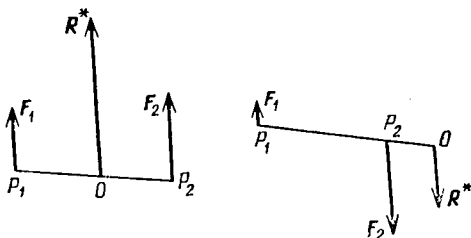


Рис. 71

имеют равнодействующую $R^* = F_1 + F_2$; она направлена в сторону большей силы, лежит в плоскости сил F_1 и F_2 , а линия ее действия делит отрезок P_1P_2 внешним образом на части, обратно пропорциональные величинам F_1 и F_2 .

Доказательство. Если положить $R^* = F_1 + F_2$ и выбрать точку O так, что $F_1 \cdot OP_1 = F_2 \cdot OP_2$, то, согласно п. 66, система двух сил F_1 и F_2 будет эквивалентна системе, состоящей из одной силы

R^* (т. е. R^* будет равнодействующей сил F_1 и F_2). Действительно, обе системы сил имеют одинаковые главные векторы $R = R^* = F_1 + F_2$ и одинаковые (равные нулю) главные моменты M_O относительно точки O .

70. Теория пар. Пусть параллельные силы F_1 и F_2 , приложенные к твердому телу, равны по модулю и противоположно направлены ($F_1 = -F_2$). Такую систему сил называют *парой сил*. Плоскость, в которой лежат силы F_1 и F_2 , называют *плоскостью*

пары, а расстояние d между линиями действия сил — *плечом пары* ($d \neq 0$).

Главный момент сил, составляющих пару, не зависит от точки, относительно которой он вычисляется. В самом деле, возьмем произвольную точку O пространства (рис. 72) и найдем главный момент сил F_1 и F_2 относительно этой точки:

$$M_O = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = -r_1 \times F_2 + r_2 \times F_2 = (r_2 - r_1) \times F_2 = d \times F_2.$$

Отсюда видно, что величина M_O не зависит от точки O .

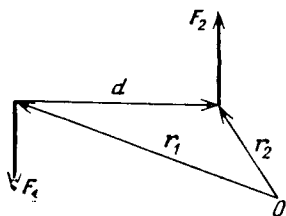


Рис. 72

Векторное произведение $M = d \times F_2$ называют *моментом пары*. Вектор M перпендикулярен плоскости пары и направлен так, что наблюдатель с конца вектора M «видит» векторы F_1 и F_2 указывающими на вращение плоскости пары против часовой стрелки. Если F — модули сил F_1 и F_2 , то $M = dF$. Момент пары — это свободный вектор, и, как будет видно из последующих теорем этого пункта, он полностью определяет действие пары на твердое тело.

Теорема. *Пара сил не имеет равнодействующей.*

Доказательство. Предположим противное, а именно предположим, что существует сила R^* такая, что $(F_1, F_2) \sim R^*$. Возьмем произвольную точку O на линии действия силы R^* . Согласно критерию эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу (п. 66), главный момент M_O системы сил (F_1, F_2) относительно точки O должен равняться моменту силы R^* относительно той же точки, т. е. должен быть равен нулю. Но момент M_O равен моменту пары и, следовательно, отличен от нуля. Противоречие доказывает теорему.

Теорема. *Пары сил с равными моментами эквивалентны.*

Эта теорема сразу следует из теоремы п. 66 об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу, так как у двух пар главные векторы равны (каждый из них равен нулю), а главные моменты (т. е. моменты пар) равны по условию.

Следствия. 1. *Пару сил, приложенную к твердому телу, можно заменить другой парой в той же плоскости, если при такой замене не изменяется величина момента пары и его направление.*

2. *Пару сил, приложенную к твердому телу, можно переносить в плоскость, параллельную плоскости пары.*

Теорема. *Совокупность нескольких пар с моментами M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) эквивалентна одной паре, момент M которой равен сумме моментов данных пар:*

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad (7)$$

Эта теорема также является следствием теоремы п. 66 об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу.

Так как для системы пар $R^{(e)} = 0$, то условия (1) равновесия твердого тела сводятся к одному векторному равенству $M = 0$, которое на основании формулы (7) запишется в виде трех скалярных равенств

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \quad (8)$$

Если все пары лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, то условия равновесия запишутся в виде одного скалярного равенства. Например, если плоскости пар перпендикулярны оси Oz , то условием равновесия будет последнее из равенств (8).

Пример. К граням многогранника приложены пары сил, моменты которых пропорциональны площадям соответствующих граней и направлены перпендикулярно соответствующим граням внутрь многогранника. Показать, что такая система сил является уравновешенной.

Пусть S — площадь какой-либо грани, а M — модуль момента соответствующей пары. Тогда $M = kS$, где k — коэффициент пропорциональности ($k > 0$), одинаковый для всех граней.

Пару, приложенную к рассматриваемой грани, можно заменить эквивалентной системой сил, действующих по каждой из сторон грани в направлении движения часовой стрелки, если смотреть со стороны внешней нормали. Модуль каждой из этих сил равен $1/2ka$, где a — длина соответствующей стороны грани.

Если такую процедуру проделать для всех пар, приложенных к граням многогранника, то вдоль каждого ребра многогранника будут действовать две равные по модулю, но противоположно направленные силы. Следовательно, приложенная к многограннику система пар сил является уравновешенной.

71. Теорема Пуансо. В предыдущих пунктах были рассмотрены задачи о приведении системы сил, приложенных к твердому телу, в частных случаях системы сходящихся сил, параллельных сил и пар. Теперь рассмотрим задачу о приведении сил в самом общем случае.

Теорема Пуансо. *Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна системе, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке O тела (центре приведения) и равной главному вектору R данной системы сил, и одной пары, момент которой равен главному моменту M_0 всех сил относительно точки O .*

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу (п. 66).

Следствие (о параллельном переносе силы). *Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна той же силе, приложенной в другой точке этого тела, и паре, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.*

Пример. В точке $A(2, 2, 2)$ к твердому телу приложена сила F с компонентами $F_x = 1$, $F_y = -2$, $F_z = 3$. Не изменяя действия силы, перенести ее в новую точку приложения $B(-1, 4, 2)$.

Момент данной силы относительно точки B $M = \overline{BA} \times F$ имеет компоненты $M_x = -6$, $M_y = -9$, $M_z = -4$.

Следовательно, в результате перенесения получится сила F и пара с моментом, модуль которого $M = \sqrt{133}$, а направляющие косинусы равны

$$-\frac{6}{\sqrt{133}}, \quad -\frac{9}{\sqrt{133}}, \quad -\frac{4}{\sqrt{133}}.$$

72. Статические инварианты. Динамический винт. Главный вектор R системы сил, являясь суммой всех сил системы, не зависит от выбора центра приведения. Вектор R называют *первым статическим инвариантом*. В более узком смысле будем называть *пер-*

вым статическим инвариантом квадрат модуля вектора R :

$$I_1 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2. \quad (9)$$

Главный момент системы сил зависит от выбора центра приведения. Зависимость между главными моментами сил, приложенных к твердому телу, относительно двух различных центров приведения определяется формулой (6). Из этой формулы следует, что скалярное произведение главного момента и главного вектора системы сил не зависит от выбора центра приведения. Это произведение называют *вторым статическим инвариантом*:

$$I_2 = M_o \cdot R. \quad (10)$$

Из существования статических инвариантов следует, что проекция M^* главного момента системы сил на направление главного вектора не зависит от выбора центра приведения.

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется *динамическим винтом* или *динамой*. По теореме Пуансо (п. 71) всякая система сил приводится к силе и паре. Возникает вопрос, нельзя ли так выбрать центр приведения, чтобы плоскость пары сил, о которой идет речь в теореме Пуансо, была перпендикулярна главному вектору, т. е. нельзя ли данную систему сил привести к динаме?

Теорема. Если второй статический инвариант отличен от нуля, то систему сил можно привести к динаме.

Для доказательства предположим, что для некоторого центра O приведения система сил приведена к силе R и паре сил с моментом M_o , равным главному моменту системы сил относительно центра O . Выберем какую-либо неподвижную декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O . Пусть R_x, R_y, R_z и M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} — соответственно проекции главного вектора и главного момента на оси этой системы координат.

Пусть O^* (рис. 73) — новый центр приведения, а x, y, z — его координаты. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно показать, что центр приведения O^* может быть выбран так, чтобы главный момент M_{O^*} был коллинеарен R :

$$M_{O^*} = pR. \quad (11)$$

Величина p отлична от нуля, так как из (10) и (11) следует, что

$$p = \frac{I_2}{I_1},$$

а величина I_2 не равна нулю по условию теоремы.

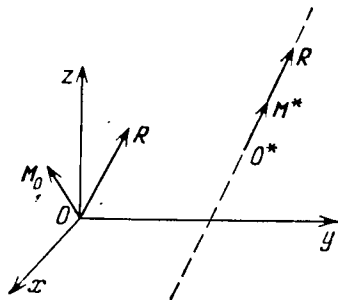


Рис. 73

Используя формулу (5), перепишем условие (11) в виде равенства

$$\mathbf{M}_O + \overline{O^*O} \times \mathbf{R} = p\mathbf{R}. \quad (12)$$

Это равенство определяет не одну точку O^* , а целую прямую, обладающую тем свойством, что для выбранного на ней центра система сил приводится к динаме. В скалярной форме уравнение (12) имеет вид

$$\frac{M_{Ox} + (zR_y - yR_z)}{R_x} = \frac{M_{Oy} + (xR_z - zR_x)}{R_y} = \frac{M_{Oz} + (yR_x - xR_y)}{R_z} = p. \quad (13)$$

Теорема доказана.

Прямая (13) называется *центральной осью* системы сил. Если $p > 0$, то динамический винт называется *правым*, если $p < 0$ — *левым*.

73. Частные случаи приведения системы сил. Пусть $I_2 = 0$, а $I_1 \neq 0$. Это возможно, либо когда $\mathbf{M}_O = 0$, либо когда $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{R}$ ортогональны. Из критерия эквивалентности системы сил, приложенных к твердому телу, следует, что в первом и во втором случаях система сил приводится к равнодействующей. Равнодействующая лежит на прямой, задаваемой уравнением (13) (при $p = 0$). В частности, если $\mathbf{M}_O = 0$, то равнодействующая проходит через данный центр приведения O .

Пусть теперь $I_2 = I_1 = 0$, а $\mathbf{M}_O \neq 0$. В этом случае система сил приводится к паре с моментом $\mathbf{M}_O$.

Наконец, если $I_2 = I_1 = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$, то система сил является уравновешенной.

В таблице представлены все возможные частные случаи приведения системы сил, приложенных к твердому телу. В последнем столбце таблицы для сравнения указаны соответствующие им аналоги в кинематике твердого тела.

$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{M}_O$	Случай приведения	Аналог в кинематике
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	динамический винт (динама)	мгновенно винтовое движение (кинематический винт)
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	равнодействующая	мгновенное вращение
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	пара сил	мгновенно поступательное движение
$= 0$	$= 0$	$= 0$	уравновешенная система сил	покой

Упражнение. Показать, что плоская система сил и система параллельных сил в пространстве не приводятся к динаме.

Пример. К твердому телу приложена система сил: $F_1 = 1$ Н, направленная по Oz , и $F_2 = 1$ Н, направленная параллельно Oy , как указано на рис. 74, где $OA = 1$ м. Привести эту систему сил к простейшему виду, а также найти наименьшую силу, которую нужно приложить к точке O , чтобы получающаяся при этом система трех сил приводилась к равнодействующей.

Для главного вектора и главного момента имеем $R' = (0, 1, 1)$, $M'_O = (0, 0, 1)$. Подсчитываем кинематические инварианты: $I_1 = R^2 = 2$, $I_2 = M_O \times R = 1$. Так как $I_2 \neq 0$, то система сил (F_1, F_2) приводится к динаме. Параметр динамы $p = I_2/I_1 = 1/2$. Для момента M динамы получаем $M' = pR' = (0, 1/2, 1/2)$.

Уравнение (13) центральной оси получает вид

$$\frac{z-y}{0} = \frac{x}{1} = \frac{1-x}{1} = \frac{1}{2},$$

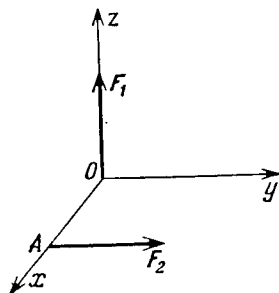


Рис. 74

или $z = y$, $x = 1/2$. Центральная ось проходит через середину отрезка OA , ортогональна оси Ox и составляет углы $\pi/4$ с осями Oy и Oz .

Если к данной системе присоединить силу F_3 , $F'_3 = (X, Y, Z)$, приложенную в начале координат, то главный момент не изменится, а для главного вектора получаем $R' = (X, Y+1, Z+1)$.

Условие существования равнодействующей $M_O \cdot R = 0$ приводит к равенству $Z+1 = 0$, откуда $Z = -1$. Поэтому $F'_3 = (X, Y, -1)$, где X, Y произвольны. Величина $F_3 = \sqrt{X^2 + Y^2 + 1}$ имеет наименьшее значение при $X = Y = 0$. Отсюда следует, что $F_3 = -F_1$.

Глава V. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

§ 1. Центр масс. Момент инерции

74. Центр масс. Рассмотрим систему материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$). Пусть m_v — масса, а $\mathbf{r}_v$ — радиус-вектор точки P_v относительно начала некоторой системы координат $Oxyz$.

Центром масс системы называется геометрическая точка C пространства, определяемая радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{r}_v}{M}, \quad (1)$$

где M — масса системы,

$$M = \sum_{v=1}^N m_v.$$

Центр масс системы называют также ее *центром инерции*.

75. Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Пусть расстояние точки P_v до некоторой оси u равно ρ_v . Тогда величина

$$J_u = \sum_{v=1}^N m_v \rho_v^2$$

называется *моментом инерции системы относительно оси u* .

Момент инерции J_u можно записать в виде $M\rho^2$; положительная величина ρ называется *радиусом инерции* системы относительно оси u .

Замечание. В конкретных задачах при нахождении центра масс и моментов инерции сплошных тел суммы в выражениях для $\mathbf{r}_C$, M , J_u переходят в интегралы.

Упражнение. *Полярным моментом инерции относительно точки O* называется величина

$$J_0 = \sum_{v=1}^N m_v r_v^2.$$

Показать, что центр масс системы можно определить как такую точку пространства, для которой полярный момент инерции наименьший. Отсюда, в част-

ности, следует, что положение центра масс в пространстве не зависит от конкретного выбора системы координат.

Примеры. 1. Вычислим моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда массой m со сторонами a , b , c относительно прямых, проходящих через центр и параллельных ребрам.

Выберем систему координат $Oxyz$ с началом в центре параллелепипеда, оси которой параллельны соответствующим ребрам (рис. 75). Разобьем параллелепипед на ряд элементарных масс dm в форме прямоугольных параллелепипедов со сторонами dx , dy , dz . Тогда

$$dm = \frac{m}{abc} dx dy dz.$$

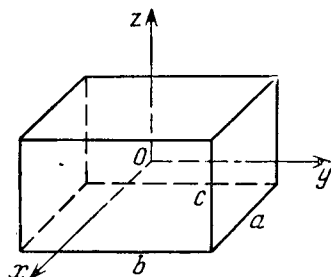


Рис. 75

Пусть x , y , z — координаты одной из таких элементарных масс.

Предварительно вычисляем интегралы:

$$\int x^2 dm = \frac{m}{abc} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx dy dz = \frac{m}{abc} \cdot c \cdot b \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} ma^2;$$

аналогично

$$\int y^2 dm = \frac{1}{12} mb^2 \quad \text{и} \quad \int z^2 dm = \frac{1}{12} mc^2.$$

Поэтому для искомых моментов инерции получаем

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2),$$

$$J_y = \int (z^2 + x^2) dm = \frac{1}{12} m (c^2 + a^2),$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Чтобы получить момент инерции тонкого однородного стержня длиной a относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, можно взять третье из этих равенств и положить в нем $b = 0$. Получим

$$J_z = ma^2/12.$$

2. Определим момент инерции относительно оси вращения однородной цилиндрической круглой трубки массой m , внутренний радиус которой равен r , а внешний R (рис. 76).

За элементарную массу dm примем массу цилиндрического слоя, образованного двумя коаксальными цилиндрами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. Имеем

$$dm = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)H} 2\pi\rho H \cdot d\rho = \frac{2m\rho d\rho}{R^2 - r^2},$$

$$J_z = \int \rho^2 dm = \frac{2m}{R^2 - r^2} \int_r^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2).$$

При $r = 0$ отсюда следует формула для момента инерции сплошного цилиндра относительно его оси:

$$J_z = mR^2/2.$$

3. Вычислим момент инерции однородного шара массой m и радиусом R относительно диаметра.

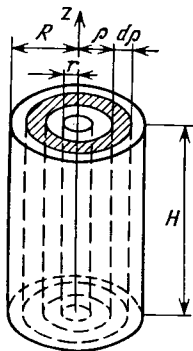


Рис. 76

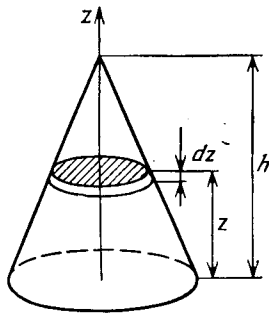


Рис. 77

Поместив начало системы координат $Oxyz$ в центре шара, из симметрии фигуры заключаем, что $J_x = J_y = J_z$. Обозначим этот одинаковый для всех диаметров момент инерции шара через J . Тогда

$$3J = J_x + J_y + J_z = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

За элементарную массу dm примем массу сферического слоя, образуемого двумя концентрическими сферами радиусов ρ и $\rho + d\rho$. Тогда

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi \rho^2 d\rho = \frac{3m}{R^3} \rho^2 d\rho.$$

Поэтому

$$J = \frac{2}{3} \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{2}{3} \cdot \frac{3m}{R^3} \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{2}{5} mR^2.$$

4. Найдём момент инерции конуса относительно его оси. Масса конуса равна m , радиус основания R .

За элементарную массу dm примем массу тонкого диска толщиной dz , плоскость которого параллельна основанию конуса и отстоит от него на расстоянии z (рис. 77). Тогда

$$dm = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \cdot \pi \left[\frac{(h-z)R}{h} \right]^2 dz = \frac{3m}{h^3} (h-z)^2 dz$$

и для искомого момента инерции получаем

$$J_z = \int \frac{1}{2} \left[\frac{(h-z)R}{h} \right]^2 dm = \frac{3mR^2}{2h^5} \int_0^h (h-z)^4 dz = \frac{3}{10} mR^2.$$

76. Моменты инерции относительно параллельных осей. Момент инерции, очевидно, зависит от выбора оси u . Найдем зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей. Сначала покажем, что если известен момент инерции J_c относительно некоторой оси, проходящей через центр масс системы, то момент инерции J_u относительно любой параллельной оси может быть найден по формуле

$$J_u = J_c + Md^2, \quad (2)$$

где d — расстояние между осями¹⁾.

Действительно, поместим начало координат в центре масс C , направив ось Cz по оси, относительно которой известен момент инерции J_c , а ось Cy так, чтобы она пересекала ось u , параллельную оси Cz (рис. 78). Тогда

$$J_u = \sum_{v=1}^N m_v [x_v^2 + (y_v - d)^2] = \sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 + y_v^2) - 2d \sum_{v=1}^N m_v y_v + \left(\sum_{v=1}^N m_v \right) d^2.$$

Первая сумма в полученном выражении есть J_c , вторая сумма обращается в нуль, так как она равна My_c , а для выбранной системы координат $y_c = 0$, третья сумма равна массе системы M . Справедливость формулы (2) доказана.

Из формулы (2) следует соотношение между моментами инерции относительно любых параллельных осей u_1 и u_2 :

$$J_{u_1} = J_{u_2} + M(d_1^2 - d_2^2),$$

где d_1 и d_2 — расстояния осей u_1 и u_2 от центра масс.

Пример. Подсчитаем момент инерции тонкого однородного стержня длиной a и массой m относительно оси z , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис. 79).

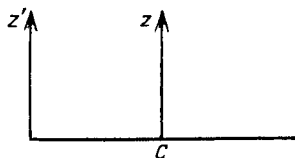


Рис. 79

Так как (см. пример 1 п. 75) $J_c = ma^2/12$, то

$$J_{z'} = J_c + m(a/2)^2 = ma^2/3.$$

¹⁾ Это утверждение называется теоремой Гюйгенса — Штейнера.

§ 2. Тензор и эллипсоид инерции

77. Моменты инерции относительно осей, проходящих через одну и ту же точку. Рассмотрим ось u , проходящую через начало системы координат $Oxyz$. Косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox , Oy , Oz , обозначим соответственно α , β , γ . Тогда (рис. 80)

$$\begin{aligned} J_u &= \sum_{v=1}^N m_v \rho_v^2 = \sum_{v=1}^N m_v [(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_v \alpha + y_v \beta + z_v \gamma)^2] = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v [(1 - \alpha^2) x_v^2 + (1 - \beta^2) y_v^2 + (1 - \gamma^2) z_v^2 - \\ &\quad - 2\alpha\beta x_v y_v - 2\alpha\gamma x_v z_v - 2\beta\gamma y_v z_v]. \end{aligned}$$

На основании тождества $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ заменяем $1 - \alpha^2$, $1 - \beta^2$, $1 - \gamma^2$ соответственно на $\beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ и приводим подобные члены в выражении, стоящем в квадратных скобках. Получаем

$$J_u = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{xz} \alpha \gamma - 2J_{yz} \beta \gamma, \quad (3)$$

где введены следующие обозначения:

$$J_x = \sum_{v=1}^N m_v (y_v^2 + z_v^2), \quad J_y = \sum_{v=1}^N m_v (z_v^2 + x_v^2), \quad J_z = \sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 + y_v^2), \quad (4)$$

$$J_{xy} = \sum_{v=1}^N m_v x_v y_v, \quad J_{xz} = \sum_{v=1}^N m_v x_v z_v, \quad J_{yz} = \sum_{v=1}^N m_v y_v z_v. \quad (5)$$

Величины (4), (5), очевидно, не зависят от выбора оси u . Величины (4) называются *осевыми моментами инерции*: J_x — это момент инерции относительно оси Ox , J_y — относительно оси Oy и J_z — относительно оси Oz . Величины (5) называются *центробежными моментами инерции*. Осовой момент инерции представляет собой меру инертности системы при ее вращении вокруг соответствующей оси. Центробежные моменты инерции можно трактовать как меру неуравновешенности масс системы: они характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей.

Для различных точек O осевые и центробежные моменты инерции различны. Они изменяются также при повороте системы координат $Oxyz$ вокруг рассматриваемой точки O . Можно показать, что при повороте величины (4), (5) из-

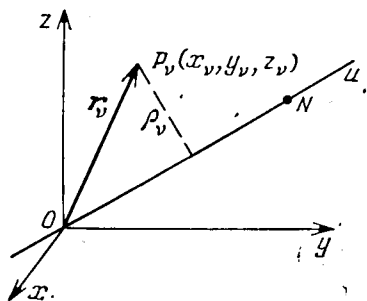


Рис. 80

меняются в соответствии с формулами, определяющими симметрический тензор второго ранга. Матрица J вида

$$J = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} \quad (6)$$

определяет тензор второго ранга, который называют *тензором инерции* системы для точки O .

78. **Эллипсоид инерции. Главные оси инерции.** Формула (3) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. На оси u отложим по обе стороны от точки O отрезки такой длины ON (рис. 80), что

$$ON = 1/\sqrt{J_u},$$

и найдем геометрическое место точек $N(x, y, z)$. Имеем

$$\alpha = \sqrt{J_u}x, \quad \beta = \sqrt{J_u}y, \quad \gamma = \sqrt{J_u}z.$$

Подставив эти значения α, β и γ в равенство (3), получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1. \quad (7)$$

Поверхность второго порядка (7) — эллипсоид. Действительно, отрезок ON имеет конечную длину, так как $J_u \geq \delta > 0$. Исключение составляет предельный случай, когда все точки P_u лежат на одной прямой (например, случай бесконечно тонкого стержня). Тогда момент инерции $J_u = 0$, и эллипсоид инерции превращается в цилиндр.

Эллипсоид (7) называется *эллипсоидом инерции* системы для точки O . При повороте системы координат $Oxyz$ уравнение эллипсоида инерции меняется. Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* системы для точки O . В системе координат $Ox_*y_*z_*$, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции, уравнение (7) имеет вид

$$Ax_*^2 + By_*^2 + Cz_*^2 = 1. \quad (8)$$

В этой системе координат центробежные моменты инерции равны нулю: $J_{x_*y_*} = J_{y_*x_*} = J_{y_*z_*} = J_{z_*y_*} = J_{x_*z_*} = J_{z_*x_*} = 0$. Величины A, B, C — моменты инерции относительно главных осей Ox_*, Oy_*, Oz_* соответственно. Они называются *главными моментами инерции* системы для точки O . Если точка O совпадает с центром масс, то оси Ox_*, Oy_*, Oz_* называются *главными центральными осями инерции*, а величины A, B, C — *главными центральными моментами инерции*.

Из аналитической геометрии известно, что для любого эллипсоида существуют главные оси. Величины A, B, C являются собственными значениями матрицы (6). Если они различны, то главные оси определяются однозначно. Если эллипсоид инерции для

точки O является эллипсоидом вращения вокруг оси Oz_* , то за его главные оси можно принять ось Oz_* и любые две ортогональные оси, лежащие в экваториальной плоскости эллипсоида. Если $A=B=C$, то все оси, проходящие через точку O , являются для нее главными.

Если эллипсоид инерции для точки O построен, то момент инерции относительно какой-либо оси u равен $1/ON^2$, где ON — отрезок, соединяющий точку O с точкой пересечения оси u с эллипсоидом. Наибольшую величину имеет момент инерции относительно наименьшей оси эллипсоида, а наименьшую — относительно наибольшей его оси.

Замечание. Пусть при каком-либо выборе системы координат $Oxyz$ не все три центробежных момента инерции равны нулю, а только два из них, например $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а $J_{xy} \neq 0$. Покажем, что ось Oz будет главной. Чтобы убедиться в этом, надо показать, что систему координат $Oxyz$ можно повернуть на такой угол α вокруг оси Oz , что в повернутой системе координат $Ox'y'z'$ уже все центробежные моменты инерции будут равны нулю. Действительно, пусть система координат $Ox'y'z'$ получается из $Oxyz$ поворотом вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz . Тогда координаты точки P_v в исходной и повернутой системах координат связаны соотношениями

$$x'_v = x_v \cos \alpha + y_v \sin \alpha, \quad y'_v = -x_v \sin \alpha + y_v \cos \alpha, \quad z'_v = z_v. \quad (9)$$

Используя равенство (9) и условие $J_{xz} = J_{yz} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} J_{x'z'} &= \sum_{v=1}^N m_v x'_v z'_v = \sum_{v=1}^N m_v (x_v \cos \alpha + y_v \sin \alpha) z_v = \\ &= \left(\sum_{v=1}^N m_v x_v z_v \right) \cos \alpha + \left(\sum_{v=1}^N m_v y_v z_v \right) \sin \alpha = J_{xz} \cos \alpha + J_{yz} \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $J_{y'z'} = 0$, т. е. центробежные моменты инерции, которые были равны нулю до поворота системы координат, остаются равными нулю при любом угле повороте вокруг оси Oz . Вычислим теперь третий центробежный момент инерции:

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= \sum_{v=1}^N m_v x'_v y'_v = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v (x_v \cos \alpha + y_v \sin \alpha) (-x_v \sin \alpha + y_v \cos \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 - y_v^2) \right) \sin 2\alpha + \left(\sum_{v=1}^N m_v x_v y_v \right) \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sum_{v=1}^N (x_v^2 - y_v^2) = J_y - J_x,$$

и приравняв $J_{x'y'}$ нулю, получаем уравнение для нахождения угла α :

$$-\frac{1}{2}(J_y - J_x) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha = 0.$$

Если $J_x = J_y$, то $\alpha = \pi/4$, если же $J_x \neq J_y$, то

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Таким образом, ось Oz , отвечающая общему индексу (в рассмотренном случае индексу z) равных нулю центробежных множеств инерции, является главной осью инерции для точки O .

У п р а ж д е н и я. 1. Показать, что если между радиусом основания R однородного прямого кругового конуса и его высотой h выполняется соотношение $R = 2h$, то эллипсоид инерции конуса для его вершины есть сфера.

2. Показать, что: а) главная ось инерции остается главной для всех своих точек тогда и только тогда, когда она является главной центральной осью инерции; б) если в системе есть ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции; в) если у системы есть плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции системы для точки, в которой эта прямая пересекает плоскость симметрии; г) для однородного тела вращения ось вращения и любые две взаимно перпендикулярные и перпендикулярные ей оси образуют систему главных осей инерции.

79. Свойства главных моментов инерции. Не всякий эллипсоид может служить эллипсоидом инерции. Действительно, если за оси Ox_* , Oy_* , Oz_* приняты главные оси инерции для точки O , то уравнение эллипсоида инерции имеет вид (8), где

$$A = \sum_{v=1}^N m_v (y_{*v}^2 + z_{*v}^2), \quad B = \sum_{v=1}^N m_v (z_{*v}^2 + x_{*v}^2),$$

$$C = \sum_{v=1}^N m_v (x_{*v}^2 + y_{*v}^2).$$

Главные моменты инерции (как, впрочем, и осевые моменты инерции (4)) удовлетворяют неравенствам треугольника

$$A + B \geq C, \quad A + C \geq B, \quad B + C \geq A. \quad (10)$$

Проверим первое из этих неравенств. Имеем

$$A + B = \sum_{v=1}^N m_v (x_{*v}^2 + y_{*v}^2 + 2z_{*v}^2) =$$

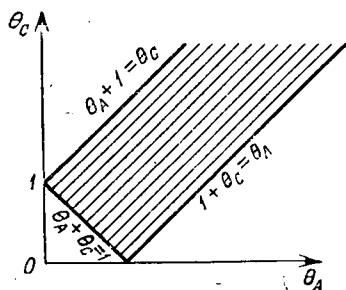
$$= \sum_{v=1}^N m_v (x_{*v}^2 + y_{*v}^2) + 2 \sum_{v=1}^N m_v z_{*v}^2 = C + 2 \sum_{v=1}^N m_v z_{*v}^2 \geq C,$$

причем знак равенства возможен только для случая, когда все точки системы лежат в плоскости Ox_*y_* , т. е. когда $z_{*v} = 0$ для всех v . Второе и третье неравенства из (10) проверяются аналогично.

Для графического представления области допустимых значений моментов инерции введем обозначения $\theta_A = A/B$, $\theta_C = C/B$. Неравенства (10) запишутся в виде

$$\theta_A + 1 \geq \theta_C, \quad \theta_A + \theta_C \geq 1, \quad 1 + \theta_C \geq \theta_A. \quad (11)$$

Область допустимых значений параметров показана на рис. 81 штриховкой. Она представляет собой бесконечную полосу, лежащую



между параллельными прямыми $\theta_A + 1 = \theta_C$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ и расположенную правее и выше прямой $\theta_A + \theta_C = 1$. Участки границы области допустимых значений параметров $\theta_A + 1 = \theta_C$, $\theta_A + \theta_C = 1$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащих соответственно в плоскостях Ox_*y_* , Ox_*z_* и Oy_*z_* . Точка (1, 0) на рис. 81, точка (0, 1) и бесконечно удаленные точки прямых $\theta_A + 1 = \theta_C$, $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащих соответственно на осях Ox_* , Ox_* и Oy_* .

Упражнение 5. Показать, что симметрическую матрицу, образованную элементами J_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$; $J_{ij} = J_{ji}$), можно рассматривать как матрицу тензора инерции реального твердого тела тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства ¹⁾

$$x_1 > 0, \quad x_1 x_2 - J_{12}^2 > 0,$$

$$x_1 x_2 x_3 - x_1 J_{23}^2 - x_2 J_{13}^2 - x_3 J_{12}^2 - 2J_{12} J_{13} J_{23} > 0,$$

где

$$x_1 = \frac{J_{22} + J_{33} - J_{11}}{2}, \quad x_2 = \frac{J_{11} + J_{33} - J_{22}}{2}, \quad x_3 = \frac{J_{11} + J_{22} - J_{33}}{2}.$$

¹⁾ См.: Пенъков В. И., Сарычев В. А. Оптимизация гравитационной системы стабилизации спутников с одностепенным подвесом на слабоэллиптической орбите.— М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, препринт № 90, 1974.

Глава VI. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

§ 1. Основные динамические величины механической системы

80. Количество движения системы. *Количеством движения механической системы называется вектор*

$$\mathbf{Q} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v. \quad (1)$$

Так как $M\mathbf{r}_C = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{r}_v$, то $M\mathbf{v}_C = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v = \mathbf{Q}$. Таким образом,

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C, \quad (2)$$

т. е. количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра масс.

81. Главный момент количества движения (кинетический момент) системы. Пусть ρ_v — радиус-вектор точки P_v системы относительно некоторой точки A , называемой *центром* (рис. 82). Моментом количества движения (кинетическим моментом) точки P_v относительно центра A называется вектор $\mathbf{K}_{vA}$, определяемый по формуле

$$\mathbf{K}_{vA} = \rho_v \times m_v \mathbf{v}_v.$$

Моментом количества движения (кинетическим моментом) точки P_v относительно оси называется проекция на эту ось момента количества движения точки относительно любого выбранного на данной оси центра. В независимости момента количества движения относительно оси от выбора центра на этой оси можно убедиться точно так же, как в п. 49 при определении момента силы относительно оси.

Главным моментом количества движения (кинетическим моментом) системы относительно центра A называется величина

$$\mathbf{K}_A = \sum_{v=1}^N \rho_v \times m_v \mathbf{v}_v. \quad (3)$$

Главным моментом количества движения (кинетическим моментом) системы относительно оси называется проекция на эту ось

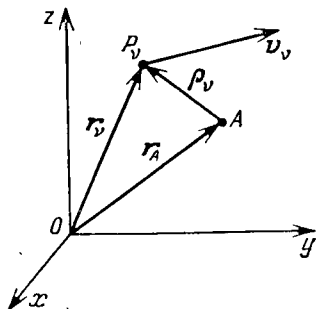


Рис. 82

главного момента количеств движения системы относительно любого выбранного на данной оси центра.

При изменении центра кинетический момент изменяется. Найдём зависимость между его значениями для двух различных центров A и B . Пусть ρ_{vA} и ρ_{vB} — радиусы-векторы точки P_v соответственно относительно центров A и B . Тогда

$$\begin{aligned} K_B &= \sum_{v=1}^N \rho_{vB} \times m_v \mathbf{v}_v = \sum_{v=1}^N (\rho_{vA} + \overline{BA}) \times m_v \mathbf{v}_v = \\ &= \sum_{v=1}^N \rho_{vA} \times m_v \mathbf{v}_v + \overline{BA} \times \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v = K_A + \overline{BA} \times Q. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_B = K_A + \overline{BA} \times Q. \quad (4)$$

Установим связь между значениями кинетического момента системы относительно какого-либо произвольного центра и относительно центра масс системы. Предварительно введём важное здесь и в дальнейшем понятие *движения системы относительно ее центра масс*. Таким движением называется движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Эта система координат называется еще *кениговой системой координат*.

Покажем, что абсолютный кинетический момент K_C системы относительно центра масс C равен относительному кинетическому моменту K_{Cr} относительно C . Действительно, пусть $\mathbf{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс, $\mathbf{v}_v$ — абсолютная скорость точки P_v системы, $\mathbf{v}_{vr}$ — скорость точки P_v в ее движении относительно центра масс. В силу того что кенигова система координат движется поступательно, переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны $\mathbf{v}_C$. Поэтому абсолютная скорость точки P_v , участвующей в сложном движении, будет определяться формулой

$$\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{vr}. \quad (5)$$

Пусть ρ_{vr} — радиус-вектор точки P_v относительно центра масс. Тогда

$$K_{Cr} = \sum_{v=1}^N \rho_{vr} \times m_v \mathbf{v}_{vr}. \quad (6)$$

Вычислим теперь абсолютный кинетический момент системы относительно точки C :

$$\begin{aligned} K_C &= \sum_{v=1}^N \rho_{vr} \times m_v \mathbf{v}_v = \sum_{v=1}^N \rho_{vr} \times m_v (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{vr}) = \\ &= \left(\sum_{v=1}^N m_v \rho_{vr} \right) \times \mathbf{v}_C + \sum_{v=1}^N \rho_{vr} \times m_v \mathbf{v}_{vr}. \quad (7) \end{aligned}$$

Так как центр масс находится в начале кенигсовой системы координат ($\rho_{Cr} = 0$), то $\sum_{v=1}^N m_v \rho_{vr} = M \rho_{Cr} = 0$ и, следовательно, из (6), (7) вытекает, что $K_c = K_{Cr}$.

Замечая, что

$$\sum_{v=1}^N m_v v_{vr} = M v_{Cr} = 0,$$

т. е. количество движения системы в ее движении относительно центра масс равно нулю, из (4) получаем, что кинетический момент системы в ее движении относительно центра масс одинаков для всех точек пространства и, согласно предыдущему, равен K_c .

Поэтому абсолютный кинетический момент системы относительно центра O равен сумме ее относительного кинетического момента (одинакового для всех точек пространства) и момента вектора Q относительно центра O в предположении, что он приложен в центре масс системы.

82. Кинетический момент твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Примем неподвижную точку O тела за начало системы координат $Oxyz$, оси которой неподвижны относительно тела. Пусть ρ_v — радиус-вектор точки P_v тела относительно начала координат, его проекции на оси Ox , Oy , Oz обозначим x_v , y_v , z_v . Проекции мгновенной угловой скорости ω тела на те же оси обозначим p , q , r .

Вычислим кинетический момент тела относительно точки O . Учитывая, что скорость v_v точки P_v равна $\omega \times \rho_v$, имеем

$$K_O = \sum_{v=1}^N \rho_v \times m_v v_v = \sum_{v=1}^N \rho_v \times m_v (\omega \times \rho_v) = \sum_{v=1}^N m_v \rho_v \times (\omega \times \rho_v).$$

Используя формулу $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ для двойного векторного произведения трех векторов a , b , c , выражение для K_O можно переписать в виде

$$\begin{aligned} K_O &= \sum_{v=1}^N m_v \rho_v^2 \omega - \sum_{v=1}^N m_v (\omega \cdot \rho_v) \rho_v = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \omega - \sum_{v=1}^N m_v (p x_v + q y_v + r z_v) \rho_v. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее выражение для проекции K_{Ox} вектора K_O на ось Ox :

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= \sum_{v=1}^N m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) p - \sum_{v=1}^N m_v (p x_v + q y_v + r z_v) x_v = \\ &= \left(\sum_{v=1}^N m_v (y_v^2 + z_v^2) \right) p - \left(\sum_{v=1}^N m_v x_v y_v \right) q - \left(\sum_{v=1}^N m_v x_v z_v \right) r. \end{aligned}$$

Аналогично можно выписать выражения для проекций K_{Oy} и K_{Oz} .

Учтя формулы (4), (5) п. 77 для осевых и центробежных моментов инерции, окончательно получим

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= J_{xp} - J_{xy}q - J_{xz}r, \\ K_{Oy} &= -J_{xy}p + J_{yy}q - J_{yz}r, \\ K_{Oz} &= -J_{xz}p - J_{yz}q + J_{zz}r. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти формулы можно записать более компактно, используя матрицу J , определяющую тензор инерции тела для точки O (см. п. 77):

$$K_O = J\omega. \quad (9)$$

В частном случае, когда оси Ox , Oy , Oz представляют собой главные оси инерции тела для точки O , матрица J диагональна; ее диагональными элементами служат главные моменты инерции тела для точки O , т. е. $J_x = A$, $J_y = B$, $J_z = C$. В этом случае

$$K_{Ox} = Ap, \quad K_{Oy} = Bq, \quad K_{Oz} = Cr. \quad (10)$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, например вокруг оси Oz , то $p = q = 0$ и согласно (8)

$$K_{Ox} = -J_{xz}r, \quad K_{Oy} = -J_{yz}r, \quad K_{Oz} = J_z r. \quad (11)$$

Из (11) видно, что при вращении тела вокруг неподвижной оси направления оси вращения и кинетического момента тела, вообще говоря, различны. Они совпадают тогда и только тогда, когда ось вращения является главной осью инерции тела.

83. Кинетическая энергия системы. Теорема Кёнига. *Кинетической энергией* системы называется величина T , определяемая по формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2. \quad (12)$$

При вычислении кинетической энергии очень часто используется следующее утверждение.

Теорема Кёнига. *Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.*

Доказательство. Согласно (5) и (12) имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (v_C + v_{vr})^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v \right) v_C^2 + \left(\sum_{v=1}^N m_v v_{vr} \right) \cdot v_C + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_{vr}^2 = \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + M v_{Cr} \cdot v_C + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_{vr}^2. \end{aligned}$$

Так как относительная скорость центра масс $v_{сг}$ равна нулю, то отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_{vr}^2. \quad (13)$$

Теорема доказана.

84. Кинетическая энергия твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат с началом в его неподвижной точке O и пусть мгновенная угловая скорость тела ω направлена вдоль оси u , косинусы углов которой с осями Ox , Oy , Oz соответственно равны α , β , γ . Тогда проекции ω на оси Ox , Oy , Oz вычисляются по формуле

$$p = \omega\alpha, \quad q = \omega\beta, \quad r = \omega\gamma. \quad (14)$$

Если d_v — расстояние от точки P_v до оси u , то $v_v = \omega d_v$ и для кинетической энергии тела имеем выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v d_v^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J_u \omega^2, \quad (15)$$

где J_u — момент инерции тела относительно оси u . Подставив в (15) выражение для J_u из формулы (3) п. 77 и воспользовавшись формулами (14), получим окончательно

$$T = \frac{1}{2} (J_x p^2 + J_y q^2 + J_z r^2) - J_{xy} pq - J_{xz} pr - J_{yz} qr. \quad (16)$$

Если оси Ox , Oy , Oz представляют собой главные оси инерции тела для точки O , то формула (16) принимает вид

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad (17)$$

где A , B , C — моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy , Oz .

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, например вокруг оси Oz , формула (16) сильно упрощается. Так как в этом случае $p = q = 0$, $|r| = \omega$, то

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (18)$$

З а м е ч а н и е. Между мгновенной угловой скоростью ω твердого тела и его кинетическим моментом относительно неподвижной точки O существует простое геометрическое соответствие. Действительно, из формул (8) и (16) следует, что

$$T = \frac{1}{2} (K_O \cdot \omega). \quad (19)$$

Так как кинетическая энергия движущегося тела положительна, то

отсюда следует, что угол между векторами $\mathbf{K}_O$ и $\boldsymbol{\omega}$ будет всегда острым. Используя (19), можно также геометрическим путем найти направление одного из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{K}_O$, когда задано направление другого.

У п р а ж н е н и е. Пусть известен эллипсоид инерции тела для неподвижной точки O и задана мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$. Найти направление и модуль кинетического момента $\mathbf{K}_O$ тела относительно точки O .

§ 2. Теоремы об изменении основных динамических величин системы

85. Общие замечания о теоремах и законах динамики. Рассмотрим движение системы материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$) в некоторой инерциальной системе координат. Пусть m_v — масса точки P_v , а $\mathbf{r}_v$ — ее радиус-вектор относительно начала координат. Если система несвободна, то ее можно рассматривать как свободную, если помимо активных сил, приложенных к точкам системы, учесть реакции связей. Если затем все силы, приложенные к системе, разбить на внешние и внутренние, то из аксиом Ньютона получим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы в виде

$$m_v \mathbf{w}_v = \mathbf{F}_v^{(e)} + \mathbf{F}_v^{(i)} \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $\mathbf{w}_v$ — ускорение точки P_v в инерциальной системе отсчета, а $\mathbf{F}_v^{(e)}$ и $\mathbf{F}_v^{(i)}$ — соответственно равнодействующие всех внешних и внутренних сил системы, приложенных к точке P_v .

Для исследования движения надо при заданных начальных условиях проинтегрировать систему уравнений (1) и найти зависимость $\mathbf{r}_v$ от времени. Это в большинстве случаев невозможно, особенно если число уравнений (1) велико.

Однако при практическом исследовании движения очень часто нет необходимости изучать систему (1), а достаточно знать изменение со временем некоторых величин, общих для всей материальной системы и являющихся функциями координат и скоростей точек системы (и, быть может, времени). Если такая функция при движении системы остается постоянной, то она называется *первым интегралом уравнений движения* (1). Использование первых интегралов позволяет упростить задачу исследования движения системы, а иногда и решить ее до конца.

Самый распространенный прием получения первых интегралов уравнений (1) основан на изучении поведения основных динамических величин системы: количества движения, кинетического момента, кинетической энергии. Изменение этих величин во времени описывается основными теоремами динамики, являющимися непосредственными следствиями уравнений (1). Утверждения, описывающие условия, при которых некоторые из основных динамиче-

ских величин остаются постоянными, называются законами сохранения.

86. Теорема об изменении количества движения. Сложив почленно уравнения (1), получим

$$\sum_{v=1}^N m_v w_v = \sum_{v=1}^N F_v^{(e)} + \sum_{v=1}^N F_v^{(i)}. \quad (2)$$

Первая сумма в правой части равенства (2) равна главному вектору $R^{(e)}$ внешних сил системы, а вторая сумма равна нулю, так как по третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны и противоположны. Принимая во внимание постоянство массы каждой из точек системы, равенство (2) можно записать в виде

$$\frac{dQ}{dt} = R^{(e)}. \quad (3)$$

Это равенство выражает теорему об изменении количества движения системы: *производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил системы.*

Эту теорему можно представить в интегральной форме. Проинтегрировав обе части равенства (3) от t_1 до t_2 , получим

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} R^{(e)} dt. \quad (4)$$

Интеграл в правой части формулы (4) называется *импульсом внешних сил* системы за время $t_2 - t_1$. Таким образом, приращение количества движения за конечное время равно импульсу внешних сил за это время.

Дифференциальной форме теоремы об изменении количества движения можно придать другую формулировку. Так как $Q = Mv_c$, где M — масса системы, а v_c — скорость центра масс, то формула (3) с учетом постоянства массы M может быть представлена в виде равенства

$$M \frac{dv_c}{dt} = R^{(e)}. \quad (5)$$

Это равенство означает, что *центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равнялась бы массе системы, под действием силы, равной главному вектору всех внешних сил системы.* Это утверждение называют теоремой о движении центра масс (центра инерции).

Если система замкнута, то $R^{(e)} = 0$ и из (3) следует закон сохранения количества движения: *при движении замкнутой системы ее количество движения Q постоянно.* На осно-

вании равенства (5) закон сохранения количества движения можно сформулировать еще так: *скорость v_c центра масс замкнутой системы постоянна*. Ясно, что эти утверждения справедливы и для системы, не являющейся замкнутой, если только $\mathbf{R}^{(e)} = 0$ во все время движения.

Проектируя вектор $\mathbf{Q}$ на оси координат, получаем из закона сохранения количества движения три первых интеграла:

$$Q_x = c_1, Q_y = c_2, Q_z = c_3,$$

или

$$\dot{x}_c = c'_1, \dot{y}_c = c'_2, \dot{z}_c = c'_3,$$

где Q_x, Q_y, Q_z и $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c$ — проекции на оси Ox, Oy, Oz соответственно количества движения и скорости центра масс системы, а c_i, c'_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные.

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь одну ось, например на ось Ox , равна нулю, то имеем один первый интеграл

$$Q_x = \text{const} \quad \text{или} \quad \dot{x}_c = \text{const}.$$

Примеры. 1. Два человека стоят на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости на расстоянии a друг от друга. Один из них бросает мяч массой m , другой подхватывает его через t секунд. С какой скоростью начнет скользить по плоскости бросивший мяч, если его масса равна M ?

Так как плоскость абсолютно гладкая, то горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил (силы тяжести и реакции плоскости) равна нулю. Следовательно, проекция количества движения системы, состоящей из мяча и человека, бросившего мяч, на плоскость будет постоянна (равна нулю, так как в начальный момент времени система покоилась).

Пусть v — скорость, с которой начнет скользить человек после бросания мяча. Замечая, что горизонтальная составляющая абсолютной скорости центра масс мяча равна a/t , получаем равенство

$$Mv - m \frac{a}{t} = 0.$$

Отсюда

$$v = \frac{ma}{Mt}.$$

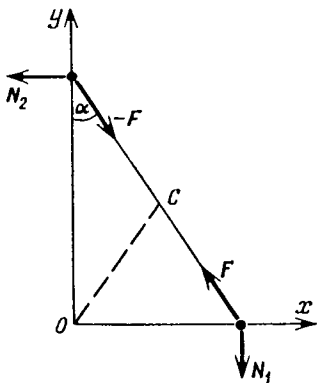


Рис. 83

2. Две притягивающиеся по некоторому закону точки одинаковой массы могут скользить без трения одна по оси Ox , а другая — по перпендикулярной ей оси Oy (рис. 83). Точки начинают движение из состояния покоя. Показать,

что при любом законе притяжения они одновременно окажутся в начале координат.

Внешними силами, действующими на рассматриваемую систему из двух материальных точек, являются реакции N_1 и N_2 осей Ox и Oy ; эти реакции ортогональны соответствующим осям. Ввиду того что каждая из точек вынуждена двигаться только вдоль своей координатной оси, имеем $N_1 = F \cos \alpha$, $N_2 =$

$= F \sin \alpha$, где F — модуль силы притяжения точек. Главный вектор $R^{(e)}$ внешних сил имеет компоненты: $-N_2$, $-N_1$, т. е. $R^{(e)}$ коллинеарен вектору $\overline{CO}$, имеющему начало в центре масс C точек, а конец в начале координат. Так как при $t = 0$ система покоилась, то, согласно теореме о движении центра масс, точка C при $t > 0$ будет двигаться вдоль неизменной прямой, проходящей через точку O и начальное положение центра масс. Поэтому материальные точки одновременно достигнут начала координат.

87. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть v_v — скорость точки P_v системы в инерциальной системе отсчета, а r_v — ее радиус-вектор относительно начала координат (рис. 82). Возьмем произвольную точку A пространства, которая может и не совпадать с какой-либо материальной точкой системы во все время движения. Точка A может быть неподвижной, а может совершать произвольное движение; обозначим v_A ее скорость в выбранной инерциальной системе отсчета. Пусть ρ_v — радиус-вектор точки P_v относительно точки A . Тогда кинетический момент системы относительно точки A вычисляется по формуле

$$K_A = \sum_{v=1}^N \rho_v \times m_v v_v. \quad (6)$$

Продифференцировав обе части равенства (6) по времени и воспользовавшись постоянством величин m_v и уравнением (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{dK_A}{dt} &= \sum_{v=1}^N \frac{d\rho_v}{dt} \times m_v v_v + \sum_{v=1}^N \rho_v \times m_v w_v = \\ &= \sum_{v=1}^N \frac{d\rho_v}{dt} \times m_v v_v + \sum_{v=1}^N \rho_v \times (F_v^{(e)} + F_v^{(i)}). \end{aligned}$$

Последняя сумма в этом равенстве равна главному моменту $M_A^{(e)}$ внешних сил относительно точки A (см. п. 50). Учитывая еще, что, согласно рис. 82, $\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{dr_v}{dt} - \frac{dr_A}{dt} = v_v - v_A$, а также что

$\sum_{v=1}^N m_v v_v = M v_C$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dK_A}{dt} &= \sum_{v=1}^N (v_v - v_A) \times m_v v_v + M_A^{(e)} = \left(\sum_{v=1}^N m_v v_v \right) \times v_A + M_A^{(e)} = \\ &= M v_C \times v_A + M_A^{(e)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dK_A}{dt} = M v_C \times v_A + M_A^{(e)}. \quad (7)$$

Если точка A неподвижна, то во все время движения системы

$\mathbf{v}_A = 0$ и уравнение (7), выражающее теорему об изменении кинетического момента относительно произвольно движущегося центра, принимает следующую часто встречающуюся форму:

$$\frac{dK_A}{dt} = M_A^{(e)}. \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой теорему об изменении кинетического момента для неподвижного центра: *производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.*

Эту теорему можно представить в интегральной форме. Проинтегрировав обе части равенства (8) от t_1 до t_2 , получим

$$\Delta K_A = K_{A2} - K_{A1} = \int_{t_1}^{t_2} M_A^{(e)} dt. \quad (9)$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *импульсом моментов внешних сил* за время $t_2 - t_1$. Таким образом, *приращение вектора кинетического момента системы относительно неподвижного центра за конечное время равно импульсу моментов внешних сил относительно этого центра за это время.*

Если система замкнута, то $M_A^{(e)} = 0$ и из равенства (8) следует закон сохранения кинетического момента: *при движении замкнутой системы ее кинетический момент относительно любого неподвижного центра постоянен:*

$$K_A = \text{const}. \quad (10)$$

Если K_{Ax} , K_{Ay} , K_{Az} — проекции вектора K_A на соответствующие оси координат, то из (10) следуют три первых интеграла:

$$K_{Ax} = c_1, \quad K_{Ay} = c_2, \quad K_{Az} = c_3,$$

где c_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные. Эти интегралы существуют не только в случае замкнутой системы, но и тогда, когда система не замкнута, но для некоторого неподвижного центра A $M_A^{(e)} = 0$ во все время движения.

Отметим еще, что если $M_A^{(e)} = 0$ во все время движения, то интеграл (10) существует не только когда центр A неподвижен, но и в более общем случае, когда во все время движения радиус-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_C$ точки A и центра масс системы C относительно начала координат связаны соотношением $\mathbf{r}_A = \alpha \mathbf{r}_C + \mathbf{a}$, где скалярная величина α и вектор $\mathbf{a}$ постоянны. Действительно, в этом случае $\mathbf{v}_A = \alpha \mathbf{v}_C$ и первое слагаемое в правой части равенства (7) тождественно равно нулю. Поэтому при $M_A^{(e)} = 0$ существует интеграл (10).

Рассмотренный выше случай неподвижного центра A получается отсюда при $\alpha = 0$. Если же $\alpha = 1$ и $a = 0$, то $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_C$ и уравнение (7) примет вид

$$\frac{dK_C}{dt} = M_C^{(e)}, \quad (11)$$

откуда следует, что теорема об изменении кинетического момента системы для неподвижного центра A и для центра масс C имеют одинаковый вид: в левой части уравнения стоит производная от кинетического момента относительно точки (A или C), а в правой — главный момент внешних сил относительно этой точки. Отметим, что абсолютный кинетический момент K_C системы относительно центра масс в левой части уравнения (11) можно заменить на равный ему (см. п. 82) кинетический момент K_C системы в ее движении относительно центра масс.

Пусть u — некоторая неизменная ось или ось неизменного направления, проходящая через центр масс системы. Для кинетического момента K_u системы относительно этой оси из (8) и (11) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{dK_u}{dt} = M_u^{(e)}, \quad (12)$$

где $M_u^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно оси u . Если он во все время движения равен нулю, то имеем первый интеграл

$$K_u = \text{const.} \quad (13)$$

Последний вывод допускает обобщение. Именно, справедливо следующее утверждение. Пусть $M_u^{(e)}$ равен нулю во все время движения. Тогда для существования первого интеграла (13) необходимо и достаточно, чтобы проекции скорости центра масс системы и скорости какой-нибудь точки A оси u на плоскость, перпендикулярную этой оси, были во все время движения параллельны. Действительно, пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси u . Умножая обе части равенства (7) скалярно на вектор $\mathbf{e}$ и учитывая его постоянство по величине и направлению, получаем

$$\frac{d(\mathbf{K}_A \cdot \mathbf{e})}{dt} = M(\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{e} + M_A^{(e)} \cdot \mathbf{e}.$$

Но $\mathbf{K}_A \cdot \mathbf{e} = K_u$, $M_A^{(e)} \cdot \mathbf{e} = M_u^{(e)}$; поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{dK_u}{dt} = M(\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{e} + M_u^{(e)}.$$

Если $M_u^{(e)} \equiv 0$, то величина K_u будет постоянной тогда и только тогда, когда $(\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{e} \equiv 0$. Если за направление оси Oz принять

направление оси u , то последнее условие эквивалентно тождеству

$$\frac{\dot{x}_A}{y_A} = \frac{\dot{x}_C}{y_C}$$

означающему параллельность проекций скоростей точек A и C на плоскость, перпендикулярную оси u , что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Вдоль образующей однородного круглого конуса массой M , ось которого неподвижна и занимает вертикальное положение, а вершина обращена вверх, просверлен тонкий канал. Конусу сообщают угловую скорость ω_0 вокруг его оси и одновременно с этим опускают в верхнее отверстие канала шарик массы m , не сообщая ему начальной скорости. Какова будет угловая скорость конуса в тот момент, когда шарик выскочит из канала?

Так как внешние силы системы конус — шарик не создают момента относительно оси конуса, то кинетический момент K_z относительно оси остается постоянным. В начальный момент времени

$$K_z = J_z \omega_0,$$

а в момент, когда шарик выскакивает из канала,

$$K_z = J_z \omega + m R^2 \omega.$$

Здесь R — радиус основания конуса, а $J_z = \frac{3}{10} M R^2$ — его момент инерции относительно оси. Из равенства

$$J_z \omega_0 = J_z \omega + m R^2 \omega$$

находим

$$\omega = \frac{3M}{3M + 10m} \omega_0.$$

2. На гладкой горизонтальной плоскости находится твердое тело, имеющее вид тонкого кругового кольца массой M и радиусом R . Вдоль по кольцу движется точка A массой m с постоянной по модулю относительной скоростью v . Определить движение этой системы по плоскости, если в начальный момент и кольцо, и точка находились в покое.

Так как горизонтальная составляющая главного вектора внешних сил равна нулю и в начальный момент времени центр масс C всей системы покоился, то и в последующем движении системы он будет оставаться в покое. Расстояния точки C будут (рис. 84): от центра O кольца

$$OC = \frac{m}{M + m} R,$$

от точки A

$$AC = \frac{M}{M + m} R.$$

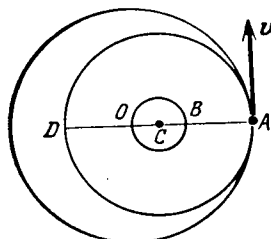


Рис. 84

Таким образом, и центр O кольца, и материальная точка A будут двигаться по concentric окружностям с центром в точке C , причем и O , и A будут всегда находиться в диаметрально противоположных по отношению к C точках своих траекторий.

Чтобы определить угловую скорость ω вращения кольца, воспользуемся тем, что, в силу равенства нулю главного момента внешних сил относительно

неподвижной вертикальной оси Cz , кинетический момент системы относительно этой оси постоянен (равен нулю, так как в начальный момент времени система покоилась). Имеем:

$$J_C \omega + m(v + \omega \cdot AC) \cdot AC = 0,$$

где J_C — момент инерции кольца относительно оси Cz . Так как момент инерции J_O кольца относительно параллельной Cz оси Oz , очевидно, равен MR^2 , то, согласно п. 76,

$$J_C = MR^2 + M \cdot OC^2.$$

Воспользовавшись еще выписанными выше выражениями для AC и OC , получим окончательно

$$\omega = -\frac{v}{R} \cdot \frac{m(M+m)}{M^2 + 3mM + 2m^2}.$$

Знак минус в полученном выражении для ω указывает на то, что вращение кольца происходит по часовой стрелке, если смотреть со стороны положительного направления оси Cz .

3. Два тонких однородных диска 1 и 2, массы и радиусы которых равны соответственно m_1, r_1 и m_2, r_2 , могут вращаться вокруг их ортогональных осей Oz_1 и Oz_2 (рис. 85). Диск 1 раскрутили до угловой скорости ω и привели затем в контакт с невращающимся диском 2, причем расстояние между точкой соприкосновения и осью диска 1 равно a . Через некоторое время (за счет трения) диски начнут вращаться без проскальзывания. Найти установившиеся угловые скорости дисков.

Для решения задачи используем интегральную форму теоремы об изменении кинетического момента. При $t = 0$ кинетические моменты K_{z_1} и K_{z_2} дисков 1 и 2 будут соответственно равны:

$$K_{z_1} = J_{z_1} \omega, \quad K_{z_2} = 0,$$

а в момент времени Δt , равный продолжительности процесса установления движения дисков,

$$K_{z_1} = J_{z_1} \omega_1, \quad K_{z_2} = J_{z_2} \omega_2.$$

Здесь ω_1 — модуль установившейся угловой скорости, а $J_{z_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2$ — момент инерции i -го диска относительно оси Oz_i ($i = 1, 2$). Приращения кинетических моментов первого и второго дисков соответственно равны $J_{z_1}(\omega_1 - \omega)$ и $J_{z_2}\omega_2$. Изменение кинетических моментов вызвано действием силы трения в точке контакта дисков в течение времени Δt . Сила трения, модуль которой F одинаков для обоих дисков, тормозит первый диск и ускоряет второй. Согласно равенству (9), имеем

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 (\omega_1 - \omega) = -a \int_0^{\Delta t} F dt, \quad \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_2 = r_2 \int_0^{\Delta t} F dt.$$

Добавив сюда еще уравнение

$$\omega_1 a = \omega_2 r_2,$$

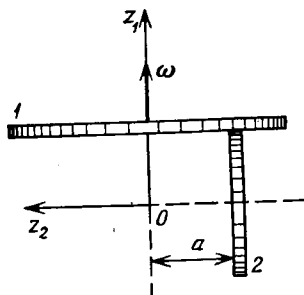


Рис. 85

выражающее условие отсутствия скольжения в установившемся режиме движения дисков, получим систему трех уравнений относительно угловых скоростей дисков ω_1 , ω_2 и модуля импульса силы трения $\int_0^{\Delta t} F dt$. Решив ее, найдем:

$$\omega_1 = \frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 + m_2 a^2} \omega, \quad \omega_2 = \frac{m_1 a r_1^2}{r_2 (m_1 r_1^2 + m_2 a^2)} \omega.$$

4. Диск массой m и радиусом a катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Центр тяжести C диска находится на расстоянии b от его геометрического центра O , момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку C , равен J_C . Пусть φ — угол между отрезком OC и вертикалью (рис. 86). Составить дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла φ со временем.

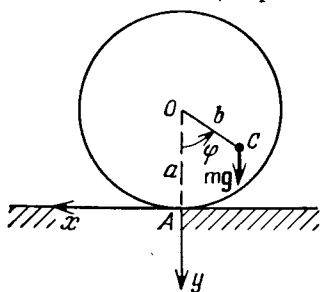


Рис. 86

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента в форме (7). За точку A примем геометрическую точку, которая принадлежит следу (прямой линии), вычерчиваемому точкой касания диска с плоскостью. В силу отсутствия скольжения для скорости точки A в системе координат $Axyz$ (оси Ax , Ay показаны на рисунке, ось Az направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читате-

ля) имеем: $\dot{\mathbf{v}}'_A = (a\dot{\varphi}, 0, 0)$. Вектор $\overline{AC}$ имеет компоненты: $-b \sin \varphi$, $-a + b \cos \varphi$, 0 ; $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$. Для угловой скорости диска ω , скорости его центра масс $\mathbf{v}_C = \omega \times \overline{AC}$ и кинетического момента $\mathbf{K}_A$ диска относительно точки A имеем:

$$\omega' = (0, 0, \dot{\varphi}), \quad \mathbf{v}'_C = ((a - b \cos \varphi) \dot{\varphi}, -b \sin \varphi \dot{\varphi}, 0),$$

$$\mathbf{K}'_A = (0, 0, (J_C + mAC^2) \dot{\varphi}).$$

Момент внешних сил относительно точки A создает только сила тяжести:

$$\mathbf{M}_A^{(e)'} = (0, 0, -mgb \sin \varphi).$$

Проектирование обеих частей векторного уравнения (7) на ось Az приводит к искомому уравнению, описывающему изменение угла φ во времени:

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)] \ddot{\varphi} + mab \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + mgb \sin \varphi = 0.$$

88. Теорема об изменении кинетической энергии. Пусть точки P_ν системы переместились так, что их радиусы-векторы $\mathbf{r}_\nu$ в инерциальной системе отсчета получили приращения $d\mathbf{r}_\nu$. Найдем, как при этом изменилась кинетическая энергия системы T . Так как

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu^2,$$

то для дифференциала кинетической энергии имеем такое вы-

ражение:

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot d\mathbf{v}_v = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v \cdot \frac{d\mathbf{v}_v}{dt} dt = \\ &= \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \mathbf{v}_v dt = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot d\mathbf{r}_v. \end{aligned}$$

Принимая во внимание дифференциальные уравнения (1), перепишем последнее равенство в виде

$$dT = \sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v^{(e)} + \mathbf{F}_v^{(i)}) \cdot d\mathbf{r}_v = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_v + \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_v = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}.$$

Таким образом,

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \quad (14)$$

Последнее равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы: *дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы.*

Подчеркнем, что, в отличие от двух рассмотренных выше основных теорем динамики, в теореме об изменении кинетической энергии речь идет о всех силах системы: как внешних, так и внутренних. Тот факт, что силы, с которыми взаимодействуют две точки системы, равны по величине и противоположно направлены, не приводит к равенству нулю работы $d'A^{(i)}$ внутренних сил системы, так как при подсчете работы важны и перемещения точек, а они у двух взаимодействующих точек не обязательно одинаковы. Как мы видели в п. 52, для твердого тела работа внутренних сил равна нулю, поэтому для него равенство (14) принимает более простой вид

$$dT = d'A^{(e)}. \quad (15)$$

Проинтегрировав обе части равенства (14) от t_1 до t_2 , получим интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} d'A^{(i)}, \quad (16)$$

т. е. *приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы за то же время.*

Пусть все силы системы (внешние и внутренние) потенциальны и их потенциал Π не зависит явно от времени. В этом случае (п. 53) элементарная работа сил системы будет полным

дифференциалом

$$d'A^{(e)} + d'A^{(i)} = -d\Pi. \quad (17)$$

Из (17) и (13) следует, что тогда $dT + d\Pi = 0$.

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется *полной механической энергией* системы. Из последнего равенства следует, что

$$E = T + \Pi = h = \text{const}, \quad (18)$$

т. е. если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна. Это — закон сохранения механической энергии. Равенство (18) называется *интегралом энергии*.

Следует иметь в виду, что для справедливости закона сохранения механической энергии требование о том, чтобы все силы системы были потенциальными, не обязательно. Достаточно потребовать, чтобы потенциальными были силы, работа которых на действительном перемещении системы отлична от нуля. Например, работа реакций стационарных идеальных связей равна нулю, и если остальные силы системы потенциальны и потенциал не зависит явно от времени, то для такой системы справедлив закон сохранения механической энергии.

Примеры. 1. Тонкий однородный стержень длиной l вращается на шарнире O в вертикальной плоскости (рис. 87). Какую скорость v нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы угол наибольшего отклонения стержня от вертикали равнялся $\pi/2$? Помимо силы тяжести и реакции шарнира на стержень действует постоянный момент $m_{\text{сопр}}$, препятствующий вращению стержня.

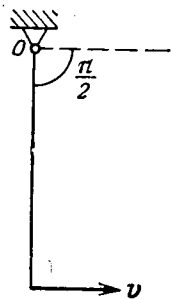


Рис. 87

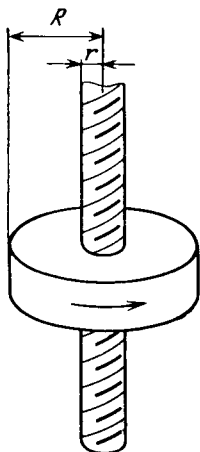


Рис. 88

Если нижний конец имеет начальную скорость v , то угловая скорость стержня в начале движения равна v/l . Пусть m — масса стержня. Тогда момент инерции стержня относительно оси вращения равен $\frac{1}{3}ml^2$, а кинетическая энергия стержня в начальный момент равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \times (v/l)^2$. При переходе стержня в горизонтальное положение сила тяжести совершит работу, равную $-mgl/2$, а силы сопротивления вращению — работу $-(\pi/2)m_{\text{сопр}}$. Принимая во внимание интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии, получим

$$\frac{1}{6}mv^2 = \frac{1}{2}mgl + \frac{\pi}{2}m_{\text{сопр}},$$

откуда

$$v = \sqrt{3(gl + \pi m_{\text{сопр}}/m)}.$$

2. На вертикально поставленный винт надета массивная гайка. Ей сообщена угловая скорость ω такого направления, что гайка начинает подниматься. На какую высоту поднимется гайка? Трение отсутствует. Шаг винта h , его радиус r , радиус гайки R (рис. 88).

Пусть v — скорость движения гайки вдоль оси винта в начале движения. Она найдется из пропорции

$$\frac{v}{h} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Примем, что гайка имеет форму цилиндра с осевым отверстием радиуса r . Если m — масса гайки, то ее момент инерции J относительно оси винта будет определяться равенством

$$J = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2).$$

Пусть высота подъема гайки H , тогда из интеграла энергии имеем

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\omega h}{2\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) \omega^2 = mgH,$$

откуда

$$H = \frac{\omega^2}{4g} \left(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{2\pi^2} \right).$$

3. Цилиндр, который может вращаться вокруг вертикальной оси AB , имеет на своей поверхности винтовую желоб; в него вложен шарик массой m , который можно считать материальной точкой. Найти относительную скорость u шарика в его движении по желобу и угловую скорость ω цилиндра при движении системы под действием силы тяжести, полагая, что масса цилиндра равна массе шарика, радиус цилиндра a и угол α наклона касательной к винтовой нарезке равен $\pi/4$. Найти также давление шарика на желоб (рис. 89).

Если шарик пройдет по вертикали расстояние z , то его потенциальная энергия уменьшится на величину mgz . Приравняв ее кинетической энергии системы, будем иметь

$$mgz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m \left[\left(a\omega - u \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 + \left(u \sin \frac{\pi}{4} \right)^2 \right],$$

или

$$2gz = \frac{3}{2} a^2 \omega^2 - \sqrt{2} a \omega u + u^2.$$

Второе уравнение для определения неизвестных ω и u получим из теоремы об изменении кинетического момента. Так как внешние силы не дают момента относительно вертикальной оси и в начальный момент вся система была неподвижна, то кинетический момент системы относительно оси AB постоянно и равен нулю:

$$\frac{1}{2} m a^2 \omega + m \left(a\omega - u \cos \frac{\pi}{4} \right) a = 0,$$

откуда

$$3a\omega - \sqrt{2}u = 0.$$

Решая совместно полученные уравнения для u и ω , находим

$$u = \sqrt{3gz}, \quad \omega = \frac{\sqrt{6gz}}{3a}.$$

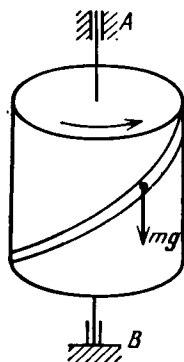


Рис. 89

Пусть N — давление шарика на желоб. Составим уравнение (14) только для одного цилиндра:

$$d\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ma^2 \omega^2\right) = N \cos \frac{\pi}{4} \cdot a d\varphi,$$

или, так как $d\varphi = \omega dt$,

$$ma d\omega = \sqrt{2}N dt.$$

Но

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{g}{6z}} u \sin \frac{\pi}{4},$$

и, следовательно,

$$N = \frac{ma}{\sqrt{2}} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{g}{6z}} \sqrt{3gz} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} mg.$$

89. Основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета. Будем теперь изучать движение механической системы в произвольно движущейся неинерциальной системе отсчета. Абсолютное ускорение w_v точки P_v системы найдем при помощи теоремы о сложении ускорений (п. 32):

$$w_v = w_{vr} + w_{ve} + w_{vc} \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (19)$$

Здесь w_{vr} и w_{ve} — относительные и переносные ускорения точки P_v , а w_{vc} — ее кориолисово ускорение; $w_{vc} = 2\omega \times v_{vr}$, где ω — угловая скорость неинерциальной системы координат относительно инерциальной, а v_{vr} — относительная скорость точки P_v . Подставив выражение (19) для абсолютного ускорения в уравнения (1), получим

$$m_v w_{vr} = F_v^{(e)} + F_v^{(i)} + j_{ve} + j_{vc} \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (20)$$

где $j_{ve} = -m_v w_{ve}$, $j_{vc} = -m_v w_{vc} = -2m_v \omega \times v_{vr}$; величине j_{ve} называют *переносной*, а j_{vc} — *кориолисовыми силами инерции*.

Таким образом, второй закон Ньютона может быть применен в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к точкам системы, добавить еще переносные и кориолисовы силы инерции.

Но полученные в п. 86—88 теоремы динамики вытекают из уравнений (1). Следовательно, все сформулированные выше теоремы динамики будут верны и в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к системе, добавить переносные и кориолисовы силы инерции для ее точек. При этом силы инерции следует формально относить к внешним силам.

Например, теорема об изменении количества движения в неинерциальной системе отсчета выглядит так:

$$\frac{dQ_r}{dt} = R^{(e)} + J_e + J_c. \quad (21)$$

где $Q_r = \sum_{v=1}^N m_v v_{vr}$, $R^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе, $J_e = \sum_{v=1}^N j_{ve}$ — главный вектор переносных сил инерции, $J_c = \sum_{v=1}^N j_{vc}$ — главный вектор кориолисовых сил инерции.

Теорема об изменении кинетического момента в неинерциальной системе отсчета записывается в виде (для неподвижного относительно неинерциальной системы центра A)

$$\frac{dK_{Ar}}{dt} = M_A^{(e)} + M_{AJ_e} + M_{AJ_c}. \quad (22)$$

Здесь $K_{Ar} = \sum_{v=1}^N \rho_v \times m_v v_{vr}$, ρ_v — радиус-вектор точки P_v относительно центра A , $M_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно точки A , M_{AJ_e} и M_{AJ_c} — главные моменты переносных и кориолисовых сил инерции относительно точки A .

Теорема об изменении кинетической энергии T_r системы, соответствующей ее движению в неинерциальной системе координат, будет такой:

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)} + d'A_{J_e}. \quad (23)$$

Здесь

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v v_{vr}^2 \quad (24)$$

$d'A^{(e)}$, $d'A^{(i)}$ — элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на относительных перемещениях $d\rho_v$ ее точек, а $d'A_{J_e}$ — элементарная работа переносных сил инерции на тех же перемещениях. В (23) отсутствует работа кориолисовых сил инерции: эта работа равна нулю, так как кориолисова сила инерции для каждой точки P_v перпендикулярна ее относительному перемещению $d\rho_v$.

Примеры. 1. При вращении сосуда, наполненного жидкостью, вокруг вертикальной оси жидкость отбрасывается к стенкам и внутри сосуда образуется воронкообразная полость, ограниченная поверхностью вращения (рис. 90). Определить форму этой поверхности.

Рассмотрим какую-нибудь частицу жидкости массой m , расположенную на ее поверхности; координаты частицы обозначим x и y (рис. 90). Задача состоит в нахождении зависимости y от x .

Во вращающейся вместе с жидкостью системе координат Oxy частица покоится. Следовательно, равнодействующая силы тяжести $P = mg$ и переносной силы инерции $J_e = m\omega^2 x$ (ω — угловая скорость вращения жидкости) ортогональна поверхности жидкости. Из рис. 90 находим, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_e}{P} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Но $\operatorname{tg} \alpha = dy/dx$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x.$$

Решив это дифференциальное уравнение (с начальным условием $y(0) = 0$), получим

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Следовательно, воронка, образующаяся при вращении сосуда, представляет собой параболоид вращения.

2. Материальная точка положена на гладкую горизонтальную плоскость Oxy , вращающуюся вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω . Точке сообщена некоторая начальная скорость, лежащая в этой плоскости. Показать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad (a)$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y + \omega(x^2 + y^2) = \text{const}. \quad (б)$$

Во вращающейся системе координат имеем

$$\omega' = (0, 0, \omega), \quad \mathbf{v}' = (\dot{x}, \dot{y}, 0),$$

$$\mathbf{w}' = (-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0).$$

Кинетическая энергия точки в ее относительном движении определяется равенством

$$T_r = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Для переносной и кориолисовой сил инерции имеем соответственно (m — масса материальной точки):

$$\mathbf{j}'_e = m\omega^2(x, y, 0), \quad \mathbf{j}'_c = 2m\omega(\dot{y}, -\dot{x}, 0).$$

Из выражения для переносной силы инерции видно, что она является потенциальной с потенциалом, определяемым по формуле

$$\Pi_r = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Внешние силы (сила тяжести и реакция плоскости) перпендикулярны плоскости Oxy , в которой происходит движение точки и, следовательно, работы не совершают. Поэтому из (23) следует, что в относительном движении справедлив интеграл энергии: $T_r + \Pi_r = \text{const}$, т. е.

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const}.$$

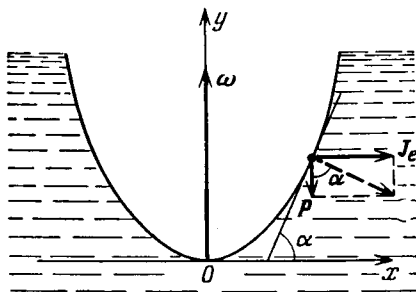


Рис. 90

Этот интеграл с точностью до множителя $m/2$ совпадает с доказываемым равенством (а).

Чтобы показать справедливость равенства (б), воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента (22), приняв за центр A точку O . Обе части векторного равенства (22) будем проектировать на ось Oz .

Моменты внешних сил относительно оси Oz равны нулю. Переносная сила инерции проходит через точку O и, следовательно, тоже не создает момента относительно Oz . Для момента M_z кориолисовой силы инерции получаем

$$M_z = -2m\omega(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Замечая, что проекция на ось Oz кинетического момента точки в ее относительном движении равна $m(x\dot{y} - \dot{x}y)$, получаем из (22)

$$m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - \dot{x}y) = -2m\omega(x\dot{x} + y\dot{y}),$$

или

$$\frac{d}{dt} (x\dot{y} - \dot{x}y) + \omega \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 0.$$

Отсюда следует справедливость равенства (б).

90. О теоремах динамики для движения относительно центра масс. В предыдущем пункте мы видели, что основные теоремы динамики в неинерциальной системе отсчета можно записать в той же форме, что и в инерциальной. Отличие заключается только в том, что в формулах, выражающих основные теоремы, появляются добавочные члены, обусловленные неинерциальностью системы отсчета.

Но существует подвижная система отсчета, являющаяся в общем случае неинерциальной, такая, что для движения в этой системе отсчета теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии выглядят точно так же, как и в инерциальной системе. Этой подвижной системой отсчета является кенигова система координат, т. е. (см. п. 81) поступательно движущаяся система координат с началом в центре масс механической системы. Для теоремы об изменении кинетического момента мы это видели в п. 87. Рассмотрим теперь теорему об изменении кинетической энергии.

Из равенств (20), (24) и из того, что переносное ускорение w_v для всех точек одинаково и равно ускорению центра масс w_c , получаем

$$\begin{aligned} dT_r &= \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_{vr} \cdot d\mathbf{v}_{vr} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_{vr} \cdot d\mathbf{p}_v = \sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v^{(e)} + \mathbf{F}_v^{(i)} + \mathbf{j}_{ve} + \mathbf{j}_{vc}) \cdot d\mathbf{p}_v = \\ &= \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^{(e)} \cdot d\mathbf{p}_v + \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^{(i)} \cdot d\mathbf{p}_v - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_{ve} \cdot d\mathbf{p}_v + \sum_{v=1}^N \mathbf{j}_{vc} \cdot d\mathbf{p}_v = \\ &= dA^{(e)} + d'A^{(i)} - \left(\sum_{v=1}^N m_v d\mathbf{p}_v \right) \cdot \mathbf{w}_c + \sum_{v=1}^N \mathbf{j}_{vc} \cdot d\mathbf{p}_v. \end{aligned}$$

Последняя сумма в этом равенстве обращается в нуль, так как кориолисова сила инерции $\mathbf{j}_{vc}$ перпендикулярна $d\mathbf{p}_v$. Сумма $\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{p}_v$ равна нулю из-за выбора начала системы координат в центре масс системы; следовательно, сумма $\sum_{v=1}^N m_v d\mathbf{p}_v$ также равна нулю. Поэтому окончательно имеем следующее выражение для дифференциала кинетической энергии движения системы относительно центра масс:

$$dT_r = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}. \quad (25)$$

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии выглядит точно так же, как и в случае инерциальной системы отсчета. Отличие заключается только в том, что элементарная работа внешних и внутренних сил системы вычисляется на перемещениях точек их приложения по отношению к центру масс.

Пример. Рассмотрим произвольную механическую систему, движущуюся в пустоте в однородном поле тяжести. Перенеся все силы системы в ее центр масс C , получим равнодействующую $\mathbf{P}$, равную общему весу системы. На основании теоремы о движении центра масс (п. 86) мы можем сказать, что точка C будет описывать некоторую параболу.

Момент внешних сил относительно осей кениговой системы координат равен нулю. Поэтому кинетический момент K_C системы относительно центра масс остается постоянным во все время движения.

Далее, так как точка приложения равнодействующей внешних сил — веса $\mathbf{P}$ системы неподвижна в кениговой системе координат (совпадает с ее началом), то работа внешних сил на относительных перемещениях системы равна нулю. Поэтому, согласно (25), кинетическая энергия T_r в относительном движении изменяется только вследствие действия внутренних сил. В частности, если рассматриваемая механическая система является твердым телом, то кинетическая энергия остается постоянной.

Глава VII. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

91. Уравнение движения. Определение реакций. Рассмотрим твердое тело, имеющее две неподвижные точки O и O_1 (рис. 91).

Пусть F и F_1 — реакции связи в точках O и O_1 , R — главный вектор активных сил, а M_0 — главный их момент относительно точки O .

Примем точку O за начало неподвижной системы координат $OXYZ$, ось OZ которой направим по оси OO_1 . С телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$; ее ось Oz направлена вдоль оси OO_1 . Тело имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ , образуемый осями Ox и Ox .

Чтобы получить уравнения, описывающие движение твердого тела, воспользуемся теоремами об изменении количества движения и момента количества движения. Обо части соответствующих этим теоремам уравнения (5) п. 86 и уравнения (8) п. 87 спроектируем на оси вращающейся системы координат $Oxyz$. Для этого воспользуемся формулой (5) п. 30, связывающей абсолютную и относительную производные вектора. Получим:

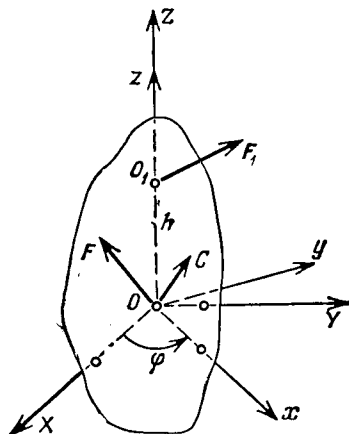


Рис. 91

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C = \mathbf{R} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_1, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O + \overline{OO_1} \times \mathbf{F}_1. \quad (2)$$

Здесь M — масса тела, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, $\mathbf{v}_C$ — скорость центра масс тела; реакция F не вошла в уравнение (2), так как ее момент относительно точки O равен нулю. Пусть в связанной с телом системе координат

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \overline{OC} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $p = 0$, $q = 0$, $r = \dot{\varphi}$, и из формул (8) п. 82 следует, что $K_x = -J_{xz}\dot{\varphi}$, $K_y = -J_{yz}\dot{\varphi}$, $K_z = J_z\dot{\varphi}$, где J_{xz} , J_{yz} — центробежные, а J_z — осевой момент инерции тела для точки O .

Принимая во внимание, что $\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OC}$ и обозначая буквой h расстояние между неподвижными точками тела O и O_1 , получим скалярную форму векторных уравнений (1) и (2) в виде

$$\begin{aligned} -My_c\ddot{\varphi} - Mx_c\dot{\varphi}^2 &= R_x + F_x + F_{1x}, \\ Mx_c\ddot{\varphi} - My_c\dot{\varphi}^2 &= R_y + F_y + F_{1y}, \\ 0 &= R_z + F_z + F_{1z}, \\ -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 &= M_x - hF_{1y}, \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 &= M_y + hF_{1x}, \\ J_z\ddot{\varphi} &= M_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее уравнение не содержит реакций и является дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Остальные пять уравнений служат для нахождения реакций. Последняя задача является неопределенной. Действительно, из третьего уравнения системы (3) видно, что нельзя отдельно найти продольные реакции F_z и F_{1z} , а можно определить лишь их сумму. Эта сумма не зависит от характера вращательного движения тела. Поперечные реакции F_x , F_{1x} , F_y , F_{1y} находятся из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3); они зависят от вращения тела.

Пример. Равнобедренный прямоугольный треугольник OO_1A вращается вокруг вертикальной оси, к которой он подвешен катетом $OO_1 = a$ (рис. 92). Какова должна быть угловая скорость вращения, чтобы боковое давление на нижнюю опору O равнялось нулю? Треугольник считать тонкой однородной пластинкой.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями (3). В рассматриваемом случае

$$x_c = 0, \quad y_c = a/3, \quad h = a,$$

$J_{xz} = 0$, а для J_{yz} получаем

$$J_{yz} = \int yz \, dm = \frac{2m}{a^2} \int_0^a z \left(\int_0^z y \, dy \right) dz = \frac{m}{a^2} \int_0^a z^3 \, dz = \frac{1}{4} ma^2.$$

Далее,

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -mg; \quad M_x = -\frac{1}{3}mga, \quad M_y = M_z = 0.$$

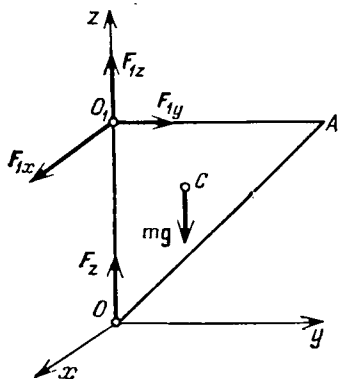


Рис. 92

Учитывая еще, что по условию задачи $F_x = F_y = 0$, получаем уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}ma\ddot{\varphi} &= F_{1x}, & -\frac{1}{3}ma\dot{\varphi}^2 &= F_{1y}, & 0 &= -mg + F_z + F_{1z}, \\ \frac{1}{4}ma^2\dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{3}mga - aF_{1y}, & -\frac{1}{4}ma^2\ddot{\varphi} &= aF_{1x}, & J_z\ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, т. е. вращение треугольника происходит с постоянной угловой скоростью.

Исключив из второго и третьего уравнений величину F_{1y} , придем к соотношению, определяющему величину угловой скорости. Окончательно найдем, что

$$\omega = 2\sqrt{g/a}.$$

92. Условия, при которых динамические реакции равны статическим. Если в первом, втором, четвертом и пятом уравнениях системы (3) положить $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, то получим систему уравнений для определения поперечных статических реакций. Если же тело вращается, то либо φ , либо $\dot{\varphi}$, либо $\ddot{\varphi}$ и другая из этих величин не будут равными нулю. Поэтому левые части упомянутых уравнений в общем случае не будут тождественно равными нулю во все время движения и, следовательно, динамические реакции отличаются от статических.

Найдем условия, при которых динамические реакции равны статическим. Приравнявая нулю левые части первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (3), получим следующие две пары равенств:

$$y_c\ddot{\varphi} + x_c\dot{\varphi}^2 = 0, \quad -y_c\dot{\varphi}^2 + x_c\ddot{\varphi} = 0. \quad (4)$$

$$J_{xz}\ddot{\varphi} - J_{yz}\dot{\varphi}^2 = 0, \quad J_{xz}\dot{\varphi}^2 + J_{yz}\ddot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) можно рассматривать как однородные системы линейных уравнений соответственно относительно x_c , y_c и J_{xz} , J_{yz} . Определители этих систем одинаковы и равны величине $\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}^2$. Если тело вращается, то эта величина не может быть тождественно равной нулю. Поэтому равенства (4) и (5) удовлетворяются только при выполнении условий

$$x_c = y_c = 0, \quad J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Таким образом, динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси равны статическим тогда и только тогда, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.

93. Уравнение движения физического маятника. Физическим маятником называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Выберем неподвижную систему координат $OXYZ$ так, чтобы

ее ось OZ совпадала с осью вращения маятника, а ось OY была направлена вертикально вниз. Связанную с маятником систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы центр масс маятника лежал на оси Oy , а оси Oz и OZ совпадали. Тогда если a — расстояние от центра тяжести до оси вращения, то $M_z = -mga \sin \varphi$, и из последнего уравнения системы (3) получим дифференциальное уравнение движения физического маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_z} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения плоского математического маятника, которое задается равенством (6) п. 57, находим, что физический маятник будет колебаться по такому же закону, что и математический маятник длиной

$$l = \frac{J_z}{ma}. \quad (7)$$

Величину l , определяемую по формуле (7), называют *приведенной длиной* физического маятника.

94. Фазовая плоскость для уравнения движения маятника. Для выяснения общих свойств движения систем с одной степенью свободы очень удобен метод фазовой плоскости. Рассмотрим его на примере анализа дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = f(x). \quad (8)$$

Будем считать, что правая часть этого уравнения удовлетворяет условию существования и единственности его решения.

Можно считать, что уравнение (8) описывает движение в системе с одной степенью свободы, в которой x играет роль обобщенной координаты, а кинетическая и потенциальная энергия определены равенствами

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2, \quad \Pi = - \int f(x) dx.$$

Полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна во все время движения, т. е. уравнение (8) имеет первый интеграл

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \Pi(x) = h = \text{const.} \quad (9)$$

Уравнение (8) эквивалентно системе двух уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x). \quad (10)$$

Плоскость с координатами x, y называется *фазовой плоскостью* уравнения (8). Точки фазовой плоскости называются *фазовыми точками*. В каждой точке плоскости, где определена функция $f(x)$, система (10) задает вектор с компонентами $\dot{x}, \dot{y}$; этот вектор называется *фазовой скоростью*. Решение системы (10) задает движение фазовой точки по фазовой плоскости, причем скорость движе-

пия фазовой точки равна фазовой скорости в том месте плоскости, где в данный момент находится точка. Кривая, которую описывает фазовая точка, называется *фазовой кривой*. В частных случаях фазовая кривая может состоять из одной точки. Такие точки называются *положениями равновесия*. Вектор фазовой скорости в положении равновесия равен нулю.

Интеграл (9) позволяет легко находить фазовые кривые. На каждой фазовой кривой значение полной механической энергии E постоянно, поэтому каждая фазовая кривая целиком принадлежит одному уровню энергии $E(x, \dot{x}) = h$.

Запишем интеграл (9) в виде

$$\dot{x}^2 = 2(h - \Pi(x)). \quad (11)$$

Совокупность фазовых кривых обладает следующими свойствами, которые полезно иметь в виду при анализе уравнения (8).

1. При данном h фазовые кривые могут располагаться только в той части фазовой плоскости, где выполняется неравенство $\Pi(x) \leq h$. Эту часть плоскости называют *областью возможности движения*. Неравенство $\Pi(x) \leq h$ следует из того, что для реальных движений правая часть формулы (11) не может быть отрицательной, так как ее левая часть есть квадрат вещественной величины.

2. Как видно из системы (10), положения равновесия лежат на оси x фазовой плоскости, причем в положении равновесия $x = x_*$, где x_* — критическая точка потенциальной энергии, т. е. такая точка, в которой $d\Pi/dx = 0$.

3. Если $x = x_*$ является точкой локального минимума функции $\Pi(x)$, то точка $(x_*, 0)$ на фазовой плоскости будет особой точкой типа центр для системы (10). Если же $x = x_*$ — точка локального максимума, то $(x_*, 0)$ — особая точка типа седло.

4. Совокупность фазовых кривых симметрична относительно оси x . Это свойство вытекает из формулы (11) ввиду четности входящих в нее величин относительно $\dot{x}$.

5. В точках оси x , отличных от положений равновесия, фазовые кривые ортогональны оси x . Это свойство сразу видно из системы (10), так как в этих точках $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = f(x) \neq 0$.

Перечисленные свойства позволяют по виду графика функции $\Pi(x)$ сразу делать выводы о характере движения, описываемого уравнением (8). На рис. 93 для примера показаны график потенциальной энергии и соответствующие фазовые кривые. Направления движения фазовой точки показаны стрелками. При $h = h_1$ есть положение равновесия типа центр. Это положение равновесия окружено замкнутыми фазовыми кривыми. При $h > h_2$ фазовые кривые разомкнуты. На уровне энергии $h = h_2$ есть положение равновесия типа седло. На уровне $h = h_2$ расположена также фазовая кривая, начинающаяся вблизи седловой точки и при $t \rightarrow \infty$ входящая в эту точку. Эта кривая отделяет область, где располо-

жены замкнутые кривые, окружающие точку типа центр, от разомкнутых фазовых кривых, соответствующих значениям h , большим h_3 . Такие кривые, которые разделяют области с различным характером поведения фазовых кривых, называют *сепаратрисами*.

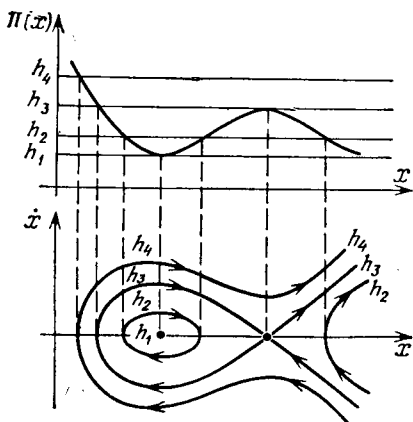


Рис. 93

Построим фазовую плоскость для дифференциального уравнения (6), описывающего движение маятника. Для кинетической и потенциальной энергии маятника имеем выражения

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mga \cos \varphi.$$

Если положить $\omega_0^2 = g/l$, $\Pi^* = -\omega_0^2 \cos \varphi$, то интеграл энергии $T + \Pi = \text{const}$ запишется в виде

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \Pi^* = h = \text{const}. \quad (12)$$

График функции $\Pi^*(\varphi)$ и фазовые кривые представлены на рис. 94. Картина фазовых кривых периодична по φ с периодом 2π . При $h < -\omega_0^2$ движение невозможно. При $h = -\omega_0^2$ маятник находится в положении равновесия, когда его центр масс занимает самое низкое из возможных положений. На фазовой плоскости $\varphi, \dot{\varphi}$ этому положению равновесия соответствуют точки, в которых

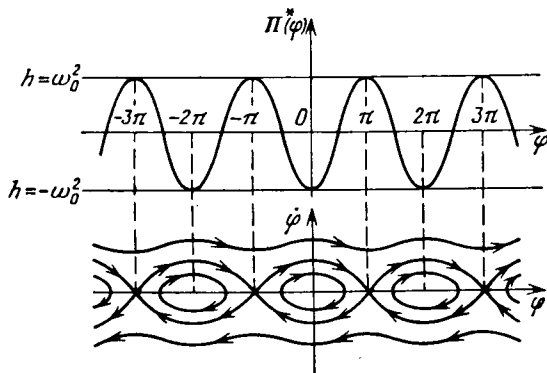


Рис. 94

$\varphi = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1; \pm 2, \dots$), а $\dot{\varphi} = 0$. Это точки типа центр. Они окружены замкнутыми фазовыми кривыми, соответствующими колебаниям маятника. Колебательным движениям маятника соответствуют значения h , удовлетворяющие неравенству $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$.

При $h = \omega_0^2$ возможны два типа движений. Один соответствует положению равновесия маятника, когда его центр масс занимает наивысшее возможное положение. Этому равновесию на фазовой плоскости соответствуют точки $\varphi = \pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\dot{\varphi} = 0$. Это точки типа седло. Для другого типа движений при $h = \omega_0^2$ центр масс маятника асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремится занять наивысшее положение. Асимптотическим движениям на фазовой плоскости соответствуют кривые, соединяющие точки типа седло. Эти кривые являются сепаратрисами.

При $h > \omega_0^2$ движение маятника будет вращательным. Для этого движения абсолютная величина угла φ монотонно возрастает. Этим движениям на фазовой плоскости соответствуют незамкнутые кривые. Сепаратрисы разделяют области колебательных и вращательных движений.

95. Некоторые сведения из теории эллиптических функций Якоби. Интеграл

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (13)$$

называется *эллиптическим интегралом первого рода*. Величина k называется *модулем эллиптического интеграла*. Обычно считается, что k удовлетворяет неравенствам $0 \leq k < 1$. Величина

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (14)$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Его можно представить в виде сходящегося ряда по степеням k :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \dots \right). \quad (15)$$

Функция, являющаяся результатом обращения эллиптического интеграла первого рода, называется *амплитудой* и обозначается так:

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (16)$$

Функции $z = \operatorname{sn}(u, k)$ (*эллиптический синус*) и $z = \operatorname{cn}(u, k)$ (*эллиптический косинус*) определяются так:

$$z = \operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u \text{ и } z = \operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \operatorname{am} u. \quad (17)$$

Так как $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ имеют период 2π по φ , то согласно (13) и (14), эллиптические синус и косинус имеют по u период, равный $4K(k)$.

Функция дельта амплитуды $z = \operatorname{dn}(u, k)$ определяется так:

$$z = \operatorname{dn}(u, k) = \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(u, k)}. \quad (18)$$

Функция дельта амплитуды имеет период $2K(k)$ по u . Функции $\varphi = \operatorname{am} u$, $z = \operatorname{sn}(u, k)$, $z = \operatorname{cn}(u, k)$, $z = \operatorname{dn}(u, k)$ аналитичны относительно k и при $k \rightarrow 0$ стремятся соответственно к функциям $\varphi = u$, $z = \sin u$, $z = \cos u$, $z = 1$.

Эллиптические функции Якоби удовлетворяют следующим легко проверяемым тождествам:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1. \quad (19)$$

Справедливы следующие формулы дифференцирования эллиптических функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u, & \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u. \end{aligned} \quad (20)$$

Графики эллиптических функций Якоби представлены на рис. 95.

96. Интегрирование уравнения движения маятника. Рассмотрим три случая в соответствии с возможными значениями константы h в интеграле (12).

1. $-\omega_0^2 < h < \omega_0^2$. В этом случае, как показано в п. 94, маятник совершает колебания. Пусть α — максимальный угол, на который отклоняется маятник от своего вертикального положения, соответствующего значению φ , равному нулю. Тогда $h = -\omega_0^2 \cos \alpha$ и интеграл (12) запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega_0^2 (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (21)$$

Положим $k = \sin(\alpha/2)$ и сделаем замену переменных

$$\sin(\varphi/2) = k \sin \psi. \quad (22)$$

Тогда интеграл энергии (21) примет следующий вид:

$$\dot{\psi}^2 = \omega_0^2 (1 - k^2 \sin^2 \psi). \quad (23)$$

Если принять, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, то отсюда получаем

$$\omega_0 t = \int_0^\psi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = F(\psi, k), \quad (24)$$

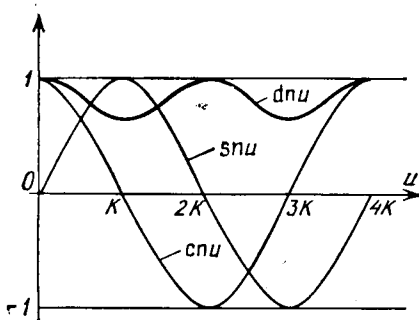


Рис. 95

т. е. $\psi = \text{am}(\omega_0 t)$. Поэтому из (17) и (22) имеем окончательно

$$\varphi = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} \omega_0 t). \quad (25)$$

Функция φ периодична по t с периодом τ , вычисляемым, согласно п. 95, по формуле

$$\tau = 4K(k)/\omega_0. \quad (26)$$

Воспользовавшись разложением (15), получим, что при небольшом значении максимального угла отклонения α маятника от вертикали имеем приближенное значение периода

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (27)$$

что совпадает с известным значением периода малых колебаний маятника. При учете двух первых членов разложения τ в ряд по α получаем более точное значение периода

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right). \quad (28)$$

Если $\alpha \rightarrow \pi$, то $k \rightarrow 1$ и период колебаний τ неограниченно возрастает.

2. $h > \omega_0^2$. В этом случае маятник находится в режиме вращения. Пусть при $t = 0$ $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Тогда $h = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_0^2 - \omega_0^2$ и интеграл (12) запишется в виде

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left(1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \quad (29)$$

где введено обозначение

$$k_1^2 = 4\omega_0^2/\dot{\varphi}_0^2. \quad (30)$$

Так как $h > \omega_0^2$, то $\dot{\varphi}_0^2 > 4\omega_0^2$ и, следовательно, $k_1^2 < 1$. Из (29) имеем

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{2} t = F\left(\frac{\varphi}{2}, k_1\right) = \int_0^{\varphi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 x}}. \quad (31)$$

Следовательно,

$$\varphi = 2 \operatorname{am}(\dot{\varphi}_0 t/2). \quad (32)$$

Если начальная угловая скорость велика, т. е. $\dot{\varphi}_0^2 \gg \omega_0^2$, то приближенно $\varphi = \dot{\varphi}_0 t$ и вращение маятника мало отличается от равномерного.

3. $h = \omega_0^2$. Этот случай соответствует асимптотическим движениям маятника. Интеграл энергии (12) в этом случае дает

соотношение

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega_0^2 \cos^2(\varphi/2). \quad (33)$$

Если при $t=0$ $\varphi=0$ и $\dot{\varphi}>0$, то отсюда после интегрирования получаем

$$\varphi = -\pi + 4 \operatorname{arctg}(e^{\omega_0 t}). \quad (34)$$

§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

97. Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Динамические уравнения Эйлера. Пусть при движении тела одна из его точек O все время остается неподвижной. Для получения уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента. Если $\mathbf{K}_O$ и $\mathbf{M}_O^{(e)}$ — кинетический момент тела и главный момент внешних сил относительно неподвижной точки O , то, согласно п. 87,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}. \quad (1)$$

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом, а p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на ее оси. Тогда компоненты вектора $\mathbf{K}_O$ выражаются через величины p, q, r и элементы тензора инерции тела для точки O — по формулам (8) п. 82.

Если абсолютную производную вектора $\mathbf{K}_O$ выразить через его локальную производную, то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_O}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^{(e)}. \quad (2)$$

Пусть M_x, M_y, M_z — проекции вектора $\mathbf{M}_O^{(e)}$ на оси Ox, Oy, Oz . Тогда векторное уравнение (2) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} J_x \dot{p} - J_{xy} \dot{q} - J_{xz} \dot{r} + (J_z - J_y)qr + J_{yz}(r^2 - q^2) + p(J_{xy}r - J_{xz}q) &= M_x, \\ -J_{xy} \dot{p} + J_y \dot{q} - J_{yz} \dot{r} + (J_x - J_z)rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + q(J_{yz}p - J_{xy}r) &= M_y, \\ -J_{xz} \dot{p} - J_{yz} \dot{q} + J_z \dot{r} + (J_y - J_x)pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + r(J_{xz}q - J_{yz}p) &= M_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции тела для точки O . В этом случае $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$, а J_x, J_y, J_z являются главными моментами инерции: $J_x = A, J_y = B, J_z = C$. Уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} A \dot{p} + (C - B)qr &= M_x, \\ B \dot{q} + (A - C)rp &= M_y, \\ C \dot{r} + (B - A)pq &= M_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) называются *динамическими уравнениями Эйлера*. Если M_x, M_y, M_z — функции p, q, r, t , то уравнения (4) образуют замкнутую систему уравнений, интегрирование которой даст зависимость величин p, q, r от времени t и начальных условий p_0, q_0, r_0 . После этого из кинематических уравнений Эйлера (см. п. 36)

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (5)$$

можно найти углы ψ, θ, φ как функции времени и начальных условий.

Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки распадается на две последовательные задачи интегрирования систем трех уравнений первого порядка. В общем же случае величины M_x, M_y, M_z являются функциями времени, углов Эйлера и их производных. Тогда уравнения (4) и (5) надо интегрировать совместно.

Наиболее простым и очень важным случаем является тот, когда момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю. Тогда говорят, что имеет место *случай Эйлера* движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот случай, очевидно, возможен, когда внешних сил нет совсем или тогда, когда внешние силы, приложенные к телу, приводятся к равнодействующей, проходящей через неподвижную точку. В случае Эйлера уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже мы рассмотрим движение тела в случае Эйлера подробно.

98. Первые интегралы. Так как в случае Эйлера главный момент внешних сил $M_O^{(e)}$ относительно точки O равен нулю, то из уравнения (1) следует, что

$$K_O = \text{const}, \quad (7)$$

т. е. кинетический момент K_O тела относительно точки O имеет неизменное направление в неподвижной системе отсчета и величина его постоянна.

Так как $A\dot{p}, B\dot{q}, C\dot{r}$ — проекции вектора K_O на главные оси инерции тела Ox, Oy, Oz , а K_O^2 — квадрат длины вектора K_O , то из (7) следует первый интеграл

$$K_O^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const}. \quad (8)$$

Из теоремы об изменении кинетической энергии можно получить, что кинетическая энергия тела также постоянна. Действительно, так как

$$dT = M_O^{(e)} \cdot \omega dt + R^{(e)} \cdot v_O dt,$$

а $v_O = 0$ и $M_O^{(e)} = 0$, то $dT = 0$. Поэтому существует первый интеграл

$$T = 1/2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const.} \quad (9)$$

Существование первых интегралов (8) и (9) можно установить и непосредственно из системы уравнений (6). Действительно, если первое уравнение системы (6) умножить на Ap , второе — на Bq , а третье — на Cr и результаты сложить, то получим $A^2 p \dot{p} + B^2 q \dot{q} + C^2 r \dot{r} = 0$, откуда следует первый интеграл (8). Если же первое, второе и третье уравнения умножить соответственно на p , q , r , то после сложения получим $Ap \dot{p} + Bq \dot{q} + Cr \dot{r} = 0$, откуда вытекает первый интеграл (9).

99. Стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера. Будем называть *стационарным вращением* такое движение твердого тела, при котором его угловая скорость ω постоянна относительно тела (а следовательно, и относительно неподвижной системы отсчета; см. п. 30). Для стационарного вращения величины p , q , r постоянны. Для их определения из системы (6) получим такие уравнения:

$$(C - B)qr = 0, \quad (A - C)rp = 0, \quad (B - A)pq = 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что стационарное вращение тела может происходить только вокруг главной оси инерции тела для точки O , причем величина угловой скорости тела может быть произвольной.

В самом деле, если $A = B = C$, то уравнения (10) удовлетворяются при любых p , q , r , т. е. вращение тела происходит вокруг оси, имеющей произвольное направление. Но при $A = B = C$ эллипсоид инерции для точки O превращается в сферу, и поэтому любая ось, проходящая через точку O , становится главной осью инерции тела.

Если два из моментов инерции равны, например $A = B$, то уравнения (10) удовлетворяются при $p = q = 0$ и любом r (вращение вокруг главной оси инерции Oz), а также при $r = 0$ и любых p и q (вращение вокруг любой оси, проходящей через точку O , лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции и, следовательно, являющейся главной осью инерции).

Если величины A , B и C различны, то уравнения (10) могут иметь только такие решения, для которых две из величин p , q , r равны нулю, а третья произвольна, т. е. снова вращение происходит вокруг главной оси инерции.

100. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера. Регулярная прецессия. Будем называть тело *динамически симметричным*, если два его главных момента инерции для точки O равны, например $A = B$. Ось Oz тогда будем называть *осью динамической симметрии*. Исследуем движение динамически симметричного тела в случае Эйлера.

Неподвижную систему координат $OXYZ$ выберем так, чтобы ее ось OZ была направлена по вектору K_0 (который в случае Эйлера постоянен). Для проекций Ap , Aq , Cr вектора K_0 на оси связанной с телом системы координат $Oxyz$, образованной главными осями инерции, получаем такие выражения (рис. 96):

$$Ap = K_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad Aq = K_0 \times \sin \theta \cos \varphi, \quad Cr = K_0 \cos \theta. \quad (11)$$

Из последнего уравнения системы (6) при $A = B$ следует, что

$$r = r_0 = \text{const}, \quad (12)$$

т. е. проекция угловой скорости тела на ось его динамической симметрии постоянна. Из (12) и третьего из равенств (11) получаем

$$\cos \theta = Cr_0/K_0 = \text{const}, \quad (13)$$

т. е. угол путации постоянен.

При $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $r = r_0 = \text{const}$ кинематические уравнения Эйлера (5) запишутся в виде

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad \dot{q} = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad \dot{r}_0 = \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \quad (14)$$

Подставив выражение для p из (14) в первое из (11), получим

$$\dot{\psi} = K_0/A = \omega_2 = \text{const}. \quad (15)$$

Величина ω_2 называется *угловой скоростью прецессии*.

Последнее из равенств (14) позволяет теперь найти величину $\dot{\varphi}$. Получаем, воспользовавшись формулами (13) и (15),

$$\dot{\varphi} = \dot{r}_0 - \dot{\psi} \cos \theta_0 = \dot{r}_0 - \frac{K_0}{A} \cos \theta_0 = \dot{r}_0 - \frac{C}{A} \dot{r}_0 = \frac{A-C}{A} \dot{r}_0 = \omega_1 = \text{const}. \quad (16)$$

Величина ω_1 называется *угловой скоростью собственного вращения*.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, состоящее из его вращения вокруг оси, неизменно связанной с телом, и движения, при котором эта ось вращается вокруг пересекающей ее оси, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, называют

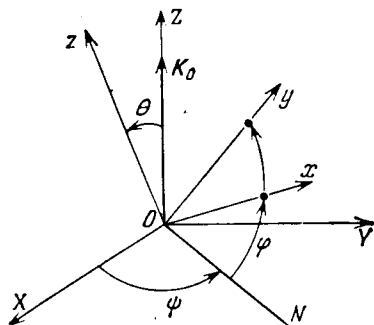


Рис. 96

прецессией. Прецессия называется *регулярной*, если вращение тела вокруг неизменно связанной с ним оси и вращение самой этой оси происходят с постоянными по модулю угловыми скоростями.

Таким образом, динамически симметричное тело в случае Эйлера совершает регулярную прецессию. В этой прецессии ось симметрии тела описывает круговой конус с осью K_0 и углом при вершине $2\theta_0$, движение оси симметрии вокруг K_0 происходит с постоянной угловой скоростью ω_2 ; одновременно тело вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси симметрии.

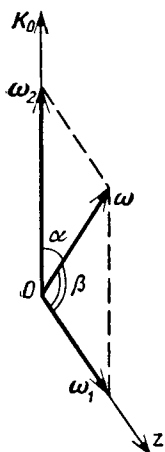


Рис. 97

Пример. Покажем, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки по инерции при условии $A = B < C$ угол между образующей и осью неподвижного аксида не может быть больше $19^\circ 28'$.

Из соотношений (13), (15) и (16) следует, что при $A < C$ постоянный угол между угловыми скоростями собственного вращения и прецессии ω_1 и ω_2 тупой (рис. 97).

Пусть α — угол между угловой скоростью тела ω и вектором ω_2 ; он равен углу между образующей и осью неподвижного аксида. Буквой β обозначим угол между векторами ω и ω_1 . Из того, что при регулярной прецессии угол пугации θ и модули угловых скоростей ω_1 и ω_2 постоянны, следует, что величины ω , α и β также постоянны.

Имеют место соотношения

$$\cos \beta = \frac{r_0}{\omega} < 0, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r_0} < 0;$$

$$\cos \theta = \frac{Cr_0}{K_0} < 0, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{C^2 r_0^2}{K_0^2}} = \frac{A \sqrt{p^2 + q^2}}{K_0},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A}{C} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r_0} < 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \beta = \gamma \operatorname{tg} \theta.$$

Здесь $\gamma = C/A$. По условию задачи $C > A$, и так как моменты инерции всегда удовлетворяют неравенству $A + B \geq C$ (см. п. 79), из которого при $A = B$ следует, что $2A \geq C$, то величина γ удовлетворяет условию $1 < \gamma \leq 2$.

Теперь несложно получить следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\theta - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \beta} = (1 - \gamma) \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \theta} = \\ &= \frac{\gamma - 1}{2 \sqrt{\gamma}} \frac{2 \sqrt{\gamma} |\operatorname{tg} \theta|}{1 + (\sqrt{\gamma} \operatorname{tg} \theta)^2} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что угол α между образующей и осью неподвижного аксида удовлетворяет неравенству $\alpha \leq \operatorname{arctg} (\sqrt{2}/4) = 19^\circ 28'$,

101. Геометрическая интерпретация Пуансо. Пуансо дал замечательную геометрическую интерпретацию движения твердого тела в случае Эйлера. Эта интерпретация очень наглядна и позволяет довольно просто выявить качественный характер движения твердого тела в случае Эйлера. Поэтому само движение тела в этом случае называют *движением Эйлера — Пуансо*.

Пусть P — точка пересечения мгновенной оси вращения с поверхностью эллипсоида инерции тела для точки O (рис. 98)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Обозначим π плоскость, касательную к эллипсоиду инерции в точке P . Ее называют *плоскостью Пуансо*. Отметим следующие свойства рассматриваемого движения.

1. Величина угловой скорости ω пропорциональна длине радиус-вектора точки P относительно O .

Действительно, так как векторы $\overline{OP}$ и ω коллинеарны, то $\overline{OP} = \lambda \omega$, и надо только показать, что λ — постоянная величина. Подставив координаты точки P : $x_P = \lambda p$, $y_P = \lambda q$, $z_P = \lambda r$ в уравнение эллипсоида инерции и воспользовавшись интегралом (9), получим

$$\lambda^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const.}$$

2. Плоскость π перпендикулярна кинетическому моменту K_O . Для доказательства достаточно заметить, что вектор N , равный градиенту функции $Ax^2 + By^2 + Cz^2$, вычисленному в точке P , направлен по нормали к плоскости π . По

$$N = \begin{vmatrix} 2Ax_P \\ 2By_P \\ 2Cz_P \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{vmatrix} = 2\lambda K_O.$$

3. Проекция OQ радиуса-вектора $\overline{OP}$ на направление кинетического момента K_O есть величина постоянная.

В самом деле, воспользовавшись формулой (19) п. 84 и интегралом (8), получим

$$OQ = \frac{K_O \cdot \overline{OP}}{K_O} = \lambda \frac{K_O \cdot \omega}{K_O} = \lambda \frac{2T}{K_O} = \frac{\sqrt{2T}}{K_O} = \text{const.}$$

Но кинетический момент K_O имеет неизменное направление и, согласно второму свойству, перпендикулярен плоскости π . Поэтому

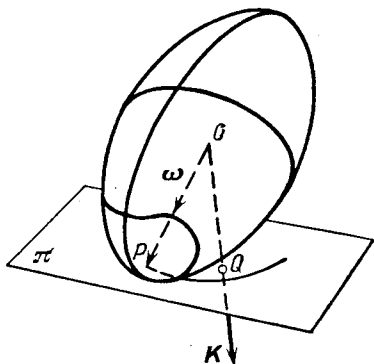


Рис. 98

плоскость π , ввиду постоянства ее расстояния от неподвижной точки O , сохраняет неизменное положение в пространстве.

Таким образом, приходим к следующей, полученной Пуансо, геометрической интерпретации движения твердого тела в случае Эйлера: *эллипсоид инерции для неподвижной точки катится без скольжения по плоскости, неподвижной в пространстве; эта плоскость перпендикулярна кинетическому моменту; угловая скорость тела пропорциональна длине радиуса-вектора точки касания, а по направлению с ним совпадает.*

Движение эллипсоида по плоскости π происходит без скольжения, так как точка P лежит на мгновенной оси вращения, и поэтому ее скорость равна нулю.

При движении тела точка P на эллипсоиде инерции вычерчивает кривую, которая называется *полодией*. Соответствующая кривая на плоскости π называется *герполодией*. Так как точка P лежит на мгновенной оси вращения, то ясно, что полодия служит направляющей подвижного аксоида, а герполодия — направляющей неподвижного аксоида для движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. п. 26).

102. Интегрирование уравнений Эйлера. В п. 99 и 100 уравнения Эйлера (6) рассматривались в частных предположениях о движении тела или его геометрии масс. Получим теперь аналитическое решение уравнений (6) в общем случае. Будем для определенности считать, что $A > B > C$.

Из первых интегралов (8) и (9) выразим величины p^2 и r^2 через q^2 , A , B , C и постоянные T , K_0 :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{A(C-A)} [(2TC - K_0^2) - B(C-B)q^2], \\ r^2 &= \frac{1}{C(C-A)} [(K_0^2 - 2TA) - B(B-A)q^2]. \end{aligned} \quad (17)$$

Определяемые отсюда значения p и r подставим во второе уравнение системы (6). Получим дифференциальное уравнение для q с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \pm \frac{1}{B\sqrt{AC}} \times \\ &\times \sqrt{[(2TC - K_0^2) - B(C-B)q^2][(K_0^2 - 2TA) - B(B-A)q^2]}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если это уравнение проинтегрировано, то функции p и r найдутся из равенств (17). При этом при извлечении квадратных корней перед радикалами возможны два знака: плюс или минус. Конкретный выбор этих знаков делается при помощи уравнений (6).

Рассмотрим три случая, соответствующих различным соотношениям между постоянными T и K_0 .

1. $2TB > K_0^2 \geq 2TC$. В этом случае величина r всегда отлич-

на от нуля и полодии заключают в себе наибольшую ось Oz эллипсоида инерции. Все полодии расположены на эллипсоиде инерции в областях, обозначенных на рис. 99 цифрами I и II. Для интегрирования уравнения (18) сделаем замену переменных

$$q = \pm \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}} \sin \lambda, \quad \tau = \sqrt{\frac{(B-C)(2TA - K_O^2)}{ABC}} t$$

и введем положительный параметр $k^2 < 1$ согласно формуле

$$k^2 = \frac{(A-B)(K_O^2 - 2TC)}{(B-C)(2TA - K_O^2)}.$$

В новых переменных уравнение (18) запишется в виде

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}. \quad (19)$$

Пусть при $t = 0$ $q = 0$. Тогда из (19), согласно п. 95, получаем $\lambda = \arcsin \tau$. Решение уравнений Эйлера (6) в рассматриваемом случае записывается через эллиптические функции Якоби в виде

$$p = \mp \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{A(A-C)}} \operatorname{cn}(\tau, k), \quad q = \pm \sqrt{\frac{K_O^2 - 2TC}{B(B-C)}} \operatorname{sn}(\tau, k), \\ r = \sqrt{\frac{2TA - K_O^2}{C(A-C)}} \operatorname{dn}(\tau, k). \quad (20)$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Решение (20) соответствует полодиям, расположенным на рис. 99 в области I. Для получения решения, соответствующего полодиям, расположенным в области II, надо в формулах (20) величину q оставить без изменения, а у p и r одновременно изменить знаки.

Направление движения по полодиям показано на рис. 99 стрелками. Если $K_O^2 = 2TC$, то полодии вырождаются в две точки, совпадающие с вершинами эллипсоида, лежащими на оси Oz . Они соответствуют стационарным вращениям твердого тела вокруг оси Oz .

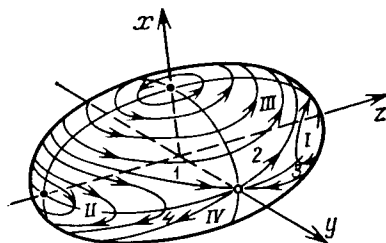


Рис. 99

2. $2TA \geq K_O^2 > 2TB$. В этом случае величина p во все время движения отлична от нуля. Полодии заключают в себе наименьшую ось эллипсоида инерции Ox и расположены на эллипсоиде инерции в областях, обозначенных на рис. 99 цифрами III и IV.

Сделаем замену переменных

$$q = \pm \sqrt{\frac{2TA - K_0^2}{B(A-B)}} \sin \lambda, \quad \tau = \sqrt{\frac{(A-B)(K_0^2 - 2TC)}{ABC}} t.$$

Тогда, если ввести параметр $k^2 < 1$ по формуле

$$k^2 = \frac{(B-C)(2TA - K_0^2)}{(A-B)(K_0^2 - 2TC)},$$

то уравнение (18) примет вид (19), и если принять, что при $t=0$ $q=0$, то решение уравнений (6), соответствующее полодиям из области III на рис. 99, будет иметь вид

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{K_0^2 - 2TC}{A(A-C)}} \operatorname{dn}(\tau, k), \quad q = \pm \sqrt{\frac{2TA - K_0^2}{B(A-B)}} \operatorname{sn}(\tau, k), \\ r &= \mp \sqrt{\frac{2TA - K_0^2}{C(A-C)}} \operatorname{cn}(\tau, k). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки. Чтобы получить решения уравнений (6), соответствующие полодиям, расположенным в области IV на рис. 99, нужно величину q оставить такой же, как и в (21), а у p и r одновременно изменить знаки.

Если $K_0^2 = 2TA$, то полодии вырождаются в точки, лежащие на оси Ox и отвечающие стационарным вращениям тела вокруг оси Ox .

Заметим, что в двух рассмотренных случаях величины p, q, r — периодические функции времени, поэтому полодии представляют собой замкнутые кривые. Отметим также, что картина расположения полодий на эллипсоиде инерции симметрична относительно его главных плоскостей. Каждому движению твердого тела соответствует одна вполне конкретная полодия. Какая именно, зависит от начальных значений величин p, q, r .

Рассмотрим еще третий случай, являющийся промежуточным между двумя рассмотренными.

3. $K_0^2 = 2TB$. Равенства (17) принимают вид

$$p^2 = \frac{(B-C)}{A(A-C)} (2T - Bq^2), \quad r^2 = \frac{(A-B)}{C(A-C)} (2T - Bq^2). \quad (22)$$

Из (22) следует, что $A(A-B)p^2 = C(B-C)r^2$. Учитывая свойство 1 движения Эйлера — Пуансо (п. 101), получаем, что в рассматриваемом случае полодии лежат в плоскостях

$$x = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}} z, \quad (23)$$

проходящих через среднюю ось эллипсоида инерции. Сечения эллипсоида инерции плоскостями (23) будут эллипсами, на которых

лежат полюдии двух типов. Во-первых, это полюдии-точки, расположенные на оси Oy и соответствующие стационарным вращениям тела вокруг средней оси эллипсоида инерции с произвольной угловой скоростью. А во-вторых, есть четыре полюдии, представляющие собой дуги эллипсов, соединяющих упомянутые полюдии-точки. Эти четыре полюдии обозначены на рис. 99 цифрами 1, 2, 3 и 4. Они являются на эллипсоиде инерции сепаратрисами, разделяющими области I, II, III, IV с отличающимся характером поведения полюдий.

Если положить

$$\tau = \sqrt{\frac{2T(A-B)(B-C)}{ABC}} t,$$

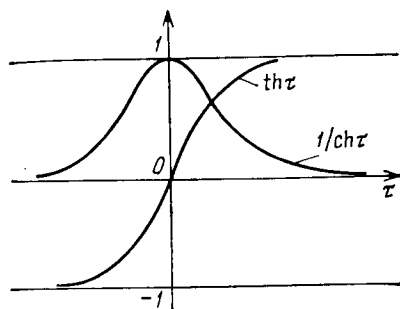


Рис. 100

уравнение (18) в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$\frac{dq}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{2TB}} (2T - Bq^2). \quad (24)$$

Пусть при $t = 0$ $q = 0$. Тогда из уравнения (24) и равенств (22) с использованием известных соотношений между гиперболическими функциями

$$\text{ch}^2 \tau - \text{sh}^2 \tau = 1, \quad \text{th} \tau = \frac{\text{sh} \tau}{\text{ch} \tau}$$

получим, что решение уравнений Эйлера (6), соответствующее полюдии 1 на рис. 99, имеет вид

$$p = \sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}} \frac{1}{\text{ch} \tau}, \quad q = \sqrt{\frac{2T}{B}} \text{th} \tau, \quad r = -\sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}} \frac{1}{\text{ch} \tau}. \quad (25)$$

Решение уравнений (6), соответствующее полюдии 3, получается из формул (25), если в них изменить знаки у величин p , r . Решения, соответствующие полюдиям 2 и 4, получаются из (25), если изменить знаки соответственно у q , r и q , p .

Поведение гиперболических функций, входящих в формулы (25), показано на рис. 100.

Пример. Одноугольная прямоугольная пластинка движется по инерции вокруг неподвижной точки, совпадающей с ее центром масс. В начальный момент времени $t = 0$ пластинка приведена во вращение с угловой скоростью ω_0 вокруг диагонали PQ (рис. 101). Обозначая α угол между диагоналями, показать, что через промежуток времени t' , равный

$$\frac{2K(\sin \alpha)}{\omega \sqrt{\cos 2\alpha}},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода, $\sin \alpha$ — модуль эллиптического интеграла, пластинка будет вращаться вокруг другой диагонали RS .

Пусть $QS = b$, $QR = c$ и $b < c$. Оси Oy и Oz системы координат $Oxyz$ перпендикулярны соответствующим сторонам пластинки, а Ox перпендикулярна ее плоскости. Эти оси являются главными центральными осями инерции пластинки. Согласно п. 75 (пример 1), имеем

$$A = J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2), \quad B = J_y = \frac{1}{12} m c^2,$$

$$C = J_z = \frac{1}{12} m b^2.$$

Если диагональ пластинки равна d , то $b = d \sin \alpha$, $c = d \cos \alpha$ и

$$A = \frac{1}{12} m d^2, \quad B = \frac{1}{12} m d^2 \cos^2 \alpha,$$

$$C = \frac{1}{12} m d^2 \sin^2 \alpha.$$

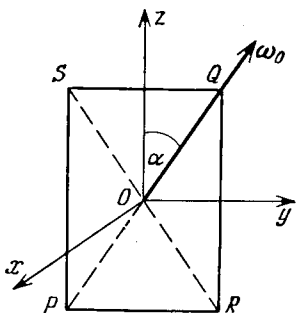


Рис. 101

При $t = 0$ $p = 0$, $q = \omega_0 \sin \alpha$, $r = \omega_0 \cos \alpha$, поэтому

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{12} m d^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot \omega_0^2,$$

$$K_O^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \frac{1}{144} m^2 d^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cdot \omega_0^2.$$

Так как при $b < c$ угол α не превосходит $\pi/4$, то, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, справедливы неравенства $A > B > C$ и $2TB > K_O^2 > 2TC$. Следовательно, мы имеем дело с первым из рассмотренных выше случаев движения Эйлера — Пуансо.

Опираясь на проведенное выше исследование этого случая, после несложных вычислений найдем:

$$p(t) = -\sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{cn}[\tau + K(k), k],$$

$$q(t) = \sin \alpha \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{sn}[\tau + K(k), k],$$

$$r(t) = \omega_0 \cdot \operatorname{dn}[\tau + K(k), k].$$

Здесь $\tau = \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \omega_0 \cdot t$, $k = \sin \alpha$.

При получении выписанного решения $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ динамических уравнений Эйлера (6) в формулах (20) взяты верхние знаки, а величина τ заменена на $\tau + K(k)$, что отвечает конкретным начальным условиям в рассматриваемой задаче о движении пластинки. Полюдия, соответствующая выписанному решению, лежит на эллипсоиде инерции в области I (рис. 99).

При $t = t'$ имеем

$$\tau = \sqrt{\cos 2\alpha} \cdot \omega_0 \cdot t' = 2K(k);$$

поскольку (рис. 95) $\operatorname{cn}[3K(k), k] = 0$, $\operatorname{sn}[3K(k), k] = -1$, $\operatorname{dn}[3K(k), k] = \sqrt{1 - k^2}$, то

$$p(t') = 0, \quad q(t') = -\omega_0 \sin \alpha, \quad r(t') = \omega_0 \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что при $t = t'$ пластинка вращается вокруг диагонали RS .

103. О герполодиях. Из рис. 98 видно, что $QP = \sqrt{OP^2 - OQ^2}$. Так как, согласно п. 101, $OP = \omega/\sqrt{2T}$, $OQ = \sqrt{2T}/K_0$, то

$$QP = \sqrt{\frac{\omega^2}{2T} - \frac{2T}{K_0^2}}. \quad (26)$$

Эта формула позволяет выявить некоторые общие свойства герполодий.

Для каждого из стационарных вращений $\omega = \text{const}$, и герполодия представляет собой точку, совпадающую с точкой Q .

Рассмотрим общий случай движения. Пусть $A > B > C$. Тогда для движений тела, которым отвечают полодии, расположенные в областях $I - IV$ на рис. 99, величина $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ имеет минимум ω_1 и максимум ω_2 . Согласно (26) величина QP также будет иметь минимум ρ_1 и максимум ρ_2 . Поэтому герполодия заключена между двумя concentрическими окружностями с центром в точке Q (рис. 102 и 103).

Отметим без доказательства, что герполодия не имеет ни точек перегиба, ни точек возврата и всегда обращена вогнутостью в сторону точки Q , в которой вектор кинетического момента K_0 пересекает плоскость Пуансо.

В противоположность полодиям (из областей $I - IV$), которые являются замкнутыми кривыми, герполодии, хотя и состоят из симметричных участков, представляют собой, вообще говоря, незамкнутые кривые. Герполодия попеременно касается окружностей $\rho_1 = \text{const}$ и $\rho_2 = \text{const}$. Моменты касания соответствуют переходу вектора ω через главные плоскости эллипсоида инерции. Дуга герполодии ab (рис. 102) соответствует четверти дуги полодии. После

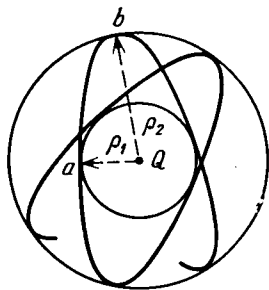


Рис. 102

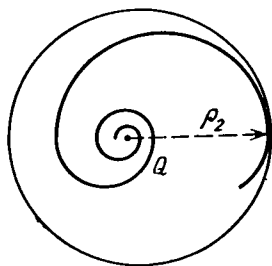


Рис. 103

того как точка P придет снова в то же положение на эллипсоиде и, следовательно, опишет полную полодию, радиус-вектор $\overline{QP}$ повернется на угол 4α , где α — угол, образованный отрезками Qa и Qb на рис. 102. Если отношение α/π — рациональное число, то герполодия будет замкнутой, в противном случае она будет не-

замкнутой. Каждой из полостей 1—4 (рис. 99), существующих в случае $K_O^2 = 2TB$, соответствует гермология, являющаяся спиралью, навивающейся на точку Q (рис. 103). Эта спираль бесконечно много раз обходит точку Q . Однако ее общая длина конечна, так как она равна длине соответствующей дуги полости.

Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то как полости, так и гермологии представляют собой окружности.

104. Определение ориентации твердого тела в абсолютном пространстве для движения Эйлера — Пуансо. После того как в п. 102 величины p , q , r были определены как функции времени, можно из кинематических уравнений Эйлера (5) найти углы θ , φ , определяющие ориентацию твердого тела относительно неподвижной системы координат $OXYZ$. Задача сильно упрощается, если, как и в п. 100, ось OZ направить вдоль неизменного кинетического момента K_O (рис. 96). При таком выборе неподвижной системы координат проекции Ap , Bq , Cr вектора K_O на оси связанной с телом системы главных осей инерции Ox , Oy , Oz вычисляются, согласно рис. 96, по формулам

$$Ap = K_O \sin \theta \sin \varphi, \quad Bq = K_O \sin \theta \cos \varphi, \quad Cr = K_O \cos \theta. \quad (27)$$

Эти соотношения позволяют сразу определить углы θ и φ как функции времени при известных функциях p , q , r :

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K_O}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}. \quad (28)$$

Для нахождения угла ψ сначала получим величину $\dot{\psi}$ из первых двух уравнений (5):

$$\dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Если затем в это выражение подставить величины $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, полученные из первых двух равенств (27), то оно запишется в виде

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{K_O \sin^2 \theta}.$$

Воспользовавшись теперь третьим из равенств (27) и формулой (8), окончательно получим

$$\dot{\psi} = K_O \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2}. \quad (29)$$

Отсюда угол ψ найдется квадратурой. Так как правая часть формулы (29) положительна, то угол ψ монотонно возрастает во всех трех возможных случаях движения, рассмотренных в п. 102, т. е. при любой возможной зависимости функций p , q , r от времени.

Если движение тела не является стационарным вращением или асимптотическим движением, то, согласно п. 102, величины p , q , r представляют собой периодические функции времени. Когда значение t увеличивается на период, то синусы и косинусы углов θ и φ принимают свои первоначальные значения. Значения же $\sin \psi$ и $\cos \psi$ через период, вообще говоря, изменяются, так как за период угол ψ увеличивается на некоторую постоянную величину. Это следует из (21). Действительно, пусть τ_* — период по времени функций p и q . Тогда из (29) имеем $\dot{\psi}(t + \tau_*) = \dot{\psi}(t)$ и, интегрируя, получим

$$\psi(t + \tau_*) = \psi(t) + c,$$

где c — постоянная интегрирования.

Если число $c/(2\pi)$ не рационально, то твердое тело никогда не возвратится к своей первоначальной ориентации в абсолютном пространстве. Если же $\frac{c}{2\pi} = \frac{m}{n}$, где m , n — целые числа ($n \neq 0$), то движение твердого тела периодическое, с периодом, равным $n\tau_*$.

105. Уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки и их первые интегралы. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Ось OZ неподвижной системы координат направим вертикально вверх. С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$, оси которой направим вдоль главных осей инерции тела для неподвижной точки O . Координаты центра тяжести G в системе координат $Oxyz$ обозначим a , b , c . Ориентацию тела относительно неподвижной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ , которые вводятся обычным образом (рис. 104).

Моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy , Oz обозначим A , B , C , а силу тяжести P .

Пусть единичный вектор $\mathbf{n}$ вертикальной оси OZ имеет в связанной с телом системе координат $Oxyz$ компоненты γ_1 , γ_2 , γ_3 . Величины γ_1 , γ_2 и γ_3 равны множителям при ψ в выражениях для p , q , и r в кинематических уравнениях Эйлера (5):

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta. \quad (30)$$

Вектор $\mathbf{n}$ постоянен в неподвижной системе координат, поэтому его абсолютная производная равна нулю: $d\mathbf{n}/dt = 0$. Учитывая связь абсолютной и локальной производных вектора (п. 30),

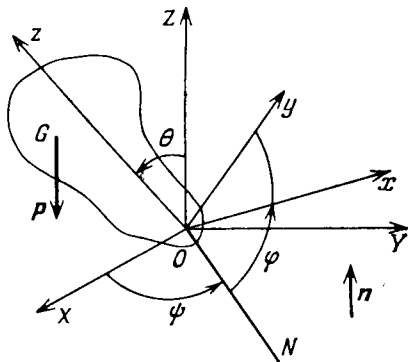


Рис. 104

последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0, \quad (31)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела. Уравнение (31) называется *уравнением Пуассона*. Обозначая, как обычно, p, q, r проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси Ox, Oy, Oz , векторное уравнение Пуассона можно записать в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2. \quad (32)$$

Внешними силами, действующими на тело, являются сила тяжести и реакция точки O . Последняя не создает момента относительно точки O , а момент $\mathbf{M}_O$ силы тяжести $\mathbf{P}$ относительно точки O равен $\overline{OG} \times \mathbf{P}$. Учитывая, что $\mathbf{P} = -P\mathbf{n}$, можно написать

$$\mathbf{M}_O = P\mathbf{n} \times \overline{OG}. \quad (33)$$

Если M_x, M_y, M_z — проекции $\mathbf{M}_O$ на оси Ox, Oy, Oz , то из (33) получим

$$M_x = P(\gamma_2c - \gamma_3b), \quad M_y = P(\gamma_3a - \gamma_1c), \quad M_z = P(\gamma_1b - \gamma_2a). \quad (34)$$

Таким образом, динамические уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= P(\gamma_2c - \gamma_3b), \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= P(\gamma_3a - \gamma_1c), \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= P(\gamma_1b - \gamma_2a). \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнения (32), (35) образуют замкнутую систему шести дифференциальных уравнений, описывающую движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Если из системы уравнений (32), (35) величины $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ найдены как функции времени, то функции $\theta(t), \varphi(t)$ находятся из (30), а для нахождения функции $\psi(t)$ нужно воспользоваться любым из кинематических уравнений Эйлера (5).

Таким образом, основная задача состоит в интегрировании системы уравнений (32), (35). Анализ этой системы и составляет главную сложность задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Укажем три первых интеграла системы (32), (35). Один из них следует из того, что модуль вектора $\mathbf{n}$ постоянен и равен единице:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (36)$$

Еще один интеграл следует из теоремы об изменении кинетического момента. В самом деле, так как внешние силы — сила тяжести и реакция точки O — не создают момента относительно вертикальной оси, то (см. п. 87) проекция кинетического момента K_0 тела на вертикаль постоянна, т. е. $K_0 \cdot n = \text{const.}$ В подвижной системе координат вектор K_0 имеет компоненты Ap , Bq , Cr , поэтому последнее равенство может быть записано в виде

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.} \quad (37)$$

Замечая далее, что работа реакции точки O равна нулю, а сила тяжести является потенциальной силой и что потенциал Π не зависит от времени, получим, что во время движения тела его полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна (см. п. 88).

Припимая, что потенциальная энергия равна нулю, когда центр тяжести тела находится в горизонтальной плоскости OXY , получим, что $\Pi = Ph$, где h — взятое со знаком расстояние от центра тяжести тела до плоскости OXY ; $h = \overline{OG} \cdot n = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$. И так как $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$, то интеграл энергии запишется в виде

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = \text{const.} \quad (38)$$

Если воспользоваться теорией множителя Якоби, то можно показать¹⁾, что для того, чтобы интегрирование системы (32), (35) можно было свести к квадратурам при любых начальных условиях, достаточно помимо выписанных трех первых интегралов (36) — (38) найти еще один независимый от них интеграл.

К настоящему времени показано, что четвертый алгебраический первый интеграл относительно p , q , r , γ_1 , γ_2 , γ_3 существует только в следующих трех случаях, а именно: в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

В случае Эйлера тело произвольно, но его центр тяжести находится в неподвижной точке O , т. е. $a = b = c = 0$. Этот случай подробно изучен в п. 98—104.

В случае Лагранжа эллипсоид инерции тела для неподвижной точки является эллипсоидом вращения, а центр тяжести находится на оси вращения, т. е., например, выполняются равенства $A = B$, $a = b = 0$. Как следует из последнего уравнения системы (35), в этом случае четвертым алгебраическим первым интегралом будет проекция угловой скорости тела на ось динамической симметрии: $r = \text{const.}$

В случае Ковалевской эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения, например вокруг оси Oz , моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 2C$, а центр тяжести те-

¹⁾ См. п. 162.

ла лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, т. е. в наших обозначениях $c = 0$.

Для эллипсоида инерции, являющегося эллипсоидом вращения, любая ось, проходящая через точку O и лежащая в экваториальной плоскости, служит главной осью инерции. Поэтому будем для простоты вычислений считать, что ось Ox проходит через центр тяжести, т. е. $b = 0$. Тогда динамические уравнения Эйлера (35) в случае Ковалевской принимают вид

$$2 \frac{dp}{dt} - qr = 0, \quad 2 \frac{dq}{dt} + rp = \alpha \gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -\alpha \gamma_2 \quad \left(\alpha = \frac{Pa}{c} \right), \quad (39)$$

и четвертый алгебраический первый интеграл, как нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, опираясь на уравнения (32), (39), имеет вид

$$(p^2 - q^2 - \alpha \gamma_1)^2 + (2pq - \alpha \gamma_2)^2 = \text{const.} \quad (40)$$

Найдепо и подробно исследовано также много случаев, когда существуют частные алгебраические интегралы, позволяющие свести интегрирование системы (32), (35) к квадратурам. Но эти интегралы существуют не для всех, а только для некоторых специфически выбранных начальных условий¹⁾.

106. Основная формула гироскопии. Твердое тело, движущееся вокруг фиксированной в нем точки, для которой эллипсоид инерции тела является эллипсоидом вращения, называют *гироскопом*. В п. 100 мы видели, что если момент внешних сил относительно неподвижной точки O равен нулю, то гироскоп совершает регулярную прецессию вокруг неизменного кинетического момента K_0 .

Но, для того чтобы гироскоп совершал регулярную прецессию, вовсе не обязательно, чтобы момент внешних сил относительно неподвижной точки был равен нулю. Рассмотрим этот вопрос подробно. Пусть $OXYZ$ — неподвижная система координат с началом в неподвижной точке O тела, а $Oxyz$ — система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки O . Пусть A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz и $A = B$. Динамические уравнения Эйлера (4) в этом случае будут такими:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= M_x, \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A)rp &= M_y, \\ C \frac{dr}{dt} &= M_z. \end{aligned} \quad (41)$$

Углы Эйлера ψ, θ, φ вводим обычным образом; кинематические уравнения Эйлера имеют вид (5).

¹⁾ См.: Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела. — Киев: Наукова думка, 1978.

Найдем условия, при выполнении которых гироскоп может совершать регулярную прецессию вокруг оси OZ с заданными постоянными значениями угла нутации ($\theta = \theta_0$), угловой скорости собственного вращения ($\varphi = \omega_1$) и угловой скорости прецессии ($\psi = \omega_2$). Иными словами, надо найти, каким должен быть момент внешних сил M_0 относительно точки O , чтобы была возможна регулярная прецессия гироскопа с заданными величинами θ_0 , ω_1 , ω_2 .

Для заданных величин θ , φ , ψ кинематические уравнения Эйлера (5) принимают вид

$$p = \omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi, \quad q = \omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad r = \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1. \quad (42)$$

Последнее из равенств (42) показывает, что r — постоянная величина. Поэтому третье из уравнений (41) дает

$$M_z = 0. \quad (43)$$

Подставив величины p , q , r из формул (42) в первое из уравнений (41), можно найти M_x . Имеем

$$M_x = A\omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)\omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi (\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1).$$

Подставив сюда вместо производной $d\varphi/dt$ ее значение ω_1 , получим

$$M_x = \omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]. \quad (44)$$

Аналогично, из формул (42) и второго из уравнений (41) получим

$$M_y = -\omega_2 \omega_1 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]. \quad (45)$$

Замечая, что в системе координат $Oxyz$ вектор ω_1 имеет компоненты 0, 0, ω_1 , а вектор ω_2 — компоненты $\omega_2 \sin \theta_0 \sin \varphi$, $\omega_2 \sin \theta_0 \cos \varphi$, $\omega_2 \cos \theta_0$, можно три формулы (43) — (45) записать в виде одного векторного равенства

$$\mathbf{M}_0 = \omega_2 \times \omega_1 \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right]. \quad (46)$$

Отсюда видно, что вектор $\mathbf{M}_0$ постоянен по модулю и параллелен линии узлов ON .

Формула (46) называется *основной формулой гироскопии*. Она позволяет по заданным моментам инерции A , C , углу нутации θ_0 и векторам угловых скоростей ω_1 , ω_2 найти момент $\mathbf{M}_0$, необходимый для осуществления регулярной прецессии.

Отметим, что, в отличие от случая Эйлера, рассмотренного в п. 100, здесь кинетический момент $\mathbf{K}_0$ не остается постоянным; он

движется в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O. \quad (47)$$

Последней формуле можно дать весьма удобную и широко распространенную интерпретацию: *скорость конца вектора K_O равна M_O (теорема Резаля).*

Пример. Центру основания однородного кругового конуса массой m , высотой h и с углом при вершине 2α , вершина O которого закреплена и который может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, сообщается горизонтальная скорость v . Найти равнодействующую (величину, направление и точку приложения) реакции плоскости и реакции в неподвижной точке, возникающих во время дальнейшего движения конуса.

Пусть (рис. 105) G — центр масс конуса, R — радиус его основания, а C и A — его моменты инерции относительно оси симметрии и оси, проходящей через вершину и перпендикулярной оси симметрии. Тогда $OG = \frac{3}{4}h$, $C = \frac{3}{10}mR^2$, $A = \frac{3}{20}m(R^2 + 4h^2)$. Но $R = O_1L = h \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $C = \frac{3}{10}mh^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, $A = \frac{3}{20}mh^2(4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Кроме того, $O_1K = h \sin \alpha$, $QG = \frac{3}{4}h \cos \alpha$.

Пусть вектор скорости центра основания конуса перпендикулярен плоскости рис. 105 и направлен на читателя. Так как движение происходит без скольжения, то мгновенная ось вращения конуса направлена вдоль его образующей OL . Величина угловой скорости найдется из равенств $v_{O_1} = v = \omega \cdot O_1K$. Получим

$$\omega = \frac{v}{h \sin \alpha}.$$

Конус совершает регулярную прецессию; угловые скорости ω_1 и ω_2 собственного вращения и прецессии направлены как показано на рисунке. Для их величин находим

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\cos \alpha} = \frac{v}{h \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\omega_2 = \omega \operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{h \cos \alpha}.$$

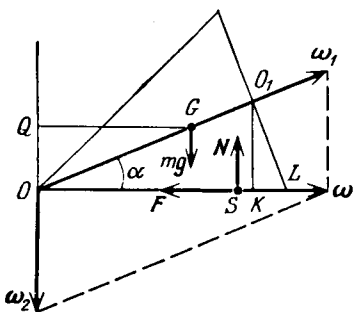
Рис. 105

Угол нутации θ (угол между ω_1 и ω_2) равен $\pi/2 + \alpha$.

Прецессия совершается под действием силы тяжести, реакции плоскости и реакции в неподвижной точке O . Момент M_O этих сил может быть вычислен по основной формуле гироскопии (46). Используя найденные выше значения величин A , C , ω_1 , ω_2 и θ , найдем модуль этого момента:

$$M_O = \omega_2 \omega_1 \cos \alpha \left[C - (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \alpha \right] = \frac{3}{20} \frac{mv^2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha} (1 + 5 \cos^2 \alpha).$$

Вектор M_O перпендикулярен плоскости рис. 105 и направлен на читателя. Отсюда, с учетом того, что сила тяжести направлена вертикально, следует, что искомая равнодействующая реакций плоскости и неподвижной точки O лежит в плоскости рисунка. Пусть равнодействующая приложена в точке S образую-



щей конуса OL . Разложим ее на вертикальную составляющую N и составляющую F , направленную по образующей.

Величины N и F найдем, применяя теорему о движении центра инерции (п. 86). Вертикальное ускорение центра тяжести равно нулю, поэтому $N = mg$; сила же F вызывает нормальное ускорение центра тяжести при его движении по окружности радиусом QG :

$$F = m \cdot \omega_2^2 \cdot QG = \frac{3}{4} \frac{mv^2}{h \cos \alpha}.$$

Далее, сумма моментов сил F , N и mg относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O , должна равняться

$$N \cdot OS - mg \cdot QG = M_o.$$

Отсюда получаем расстояние точки S от вершины конуса:

$$OS = \frac{3}{4} h \cos \alpha + \frac{3}{20} \frac{v^2 \sin \alpha}{g \cos^3 \alpha} (1 + 5 \cos^2 \alpha).$$

107. Об элементарной теории гироскопа. У гироскопов, применяемых в современной технике, угловая скорость собственного вращения обычно значительно превосходит угловую скорость прецессии, т. е. $\omega_1 \gg \omega_2$. Если в этом случае пренебречь вторым членом в квадратных скобках в формуле (46), то получим

$$M_o = C \omega_2 \times \omega_1. \quad (48)$$

Эта формула лежит в основе элементарной, или приближенной, теории гироскопа и называется *приближенной формулой гироскопии*¹⁾.

Формула (48) сразу следует из теоремы Резаля, если сделать основное допущение элементарной теории гироскопа, состоящее в том, что у быстро вращающегося гироскопа в любой момент времени мгновенная угловая скорость и кинетический момент направлены по оси динамической симметрии, причем

$$K_o = C \omega_1. \quad (49)$$

Отметим некоторые свойства быстро вращающегося гироскопа. Пусть гироскоп закреплен так, что его центр тяжести совпадает с неподвижной точкой O . Такой гироскоп называют *уравновешенным*. Пусть он вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_1 . Так как в данном случае ось симметрии является главной центральной осью инерции, то кинетический момент K_o гироскопа направлен по оси симметрии, причем $K_o = C \omega_1$. Последнее равенство является не приближенным, а точным. Если момент внешних сил относительно центра тяжести равен нулю, то вектор K_o постоянен, и ось гироскопа сохраняет свое начальное направление в неподвижной системе координат.

¹⁾ Если угол нутации θ_0 равен $\pi/2$, то формула (48) дает не приближенное, а точное значение для M_o независимо от того, выполняется неравенство $\omega_1 \gg \omega_2$ или нет.

Предположим, что к оси гироскопа приложена сила F , момент которой относительно точки O равен M (рис. 106). Согласно формуле (47) вектор K_0 (а следовательно, и ось симметрии гироскопа, так как их направления по предположению совпадают) будет отклоняться, но не в сторону действия силы, а в ту сторону, куда направлен вектор M (т. е. перпендикулярно силе). В этом состоит одно из интереснейших свойств быстро вращающегося гироскопа.

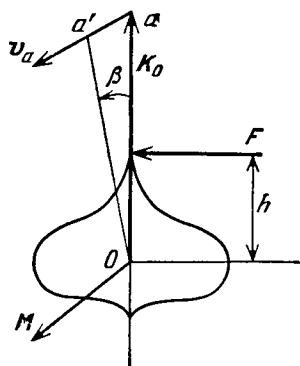


Рис. 106

Если действие силы F прекращается, то и ось гироскопа перестает отклоняться. Это тоже очень интересное свойство, так как в обычных условиях тело с прекращением действия силы продолжает свое движение по инерции.

Пусть на быстро вращающийся гироскоп в течение малого промежутка времени τ действует сила F , причем величина $F\tau$ является конечной. Если плечо этой силы относительно точки O равно h , то $M = Fh$. Конец a вектора K_0 приобретает скорость v_a , равную, согласно теореме Резаля, Fh . Точка a за время τ переместится на расстояние $aa' = v_a\tau = Fh\tau$. Учитывая, что Oa равняется $C\omega_1$, получаем, что ось гироскопа за время τ повернется на малый угол β , определяемый равенством

$$\beta = \frac{aa'}{Oa} = \frac{Fh\tau}{C\omega_1}. \quad (50)$$

Так как $Fh\tau$ — конечная величина, а $C\omega_1$ — большая, то угол β будет малым.

Отсюда следует, что при кратковременном действии сил ось гироскопа практически сохраняет свое первоначальное положение в пространстве.

При длительном воздействии сил F указанное свойство гироскопа не будет сохраняться продолжительно. Увеличением кинетического момента гироскопа $C\omega_1$ можно только увеличить промежуток времени, по истечении которого отклонение оси гироскопа от ее первоначального направления не будет превосходить определенного значения.

В технике характерным режимом работы гироскопа является работа в условиях длительно действующих постоянных или медленно меняющихся моментов, которые при наличии достаточного кинетического момента гироскопа сообщают ему весьма медленную прецессию. Это медленное изменение положения оси гироскопа является важнейшим (но не единственным) свойством гироскопа, широко используемым на практике.

Рассмотрим гироскоп, вращающийся вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω_1 . Пусть гироскоп совершает прецессию за счет того, что тело, на котором он установлен, вращается с угловой скоростью ω_2 . Необходимый для прецессии момент M_0 создается силами давления, действующими со стороны тела на гироскоп. Этот момент может быть вычислен по основной формуле гироскопии (46). По третьему закону Ньютона гироскоп давит на тело, на котором он установлен, с такими же по величине, но противоположно направленными силами. Эти силы создают момент $M_{гир}$, воздействующий на тело, вынуждающее гироскоп совершать прецессию. Этот момент называют *гироскопическим моментом*. Очевидно, что $M_{гир} = -M_0$. В рамках приближенной теории гироскопа имеем

$$M_{гир} = C\omega_1 \times \omega_2. \quad (51)$$

В заключение, опираясь на элементарную теорию гироскопа, рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа (см. п. 105). Пусть динамически симметричное твердое тело весом P имеет неподвижную точку O (рис. 107). В начальный момент оно расположено так, что ось симметрии Oz составляет угол θ с вертикалью. Пусть тело закручено вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_1 , направленной как показано на рис. 107. Момент M_0 силы тяжести P при любом направлении оси Oz горизонтален. Следовательно, вертикальная ось OZ является осью прецессии. Ось гироскопа движется по поверхности конуса с углом при вершине, равным 2θ . Направление движения указано на рис. 107 стрелками.

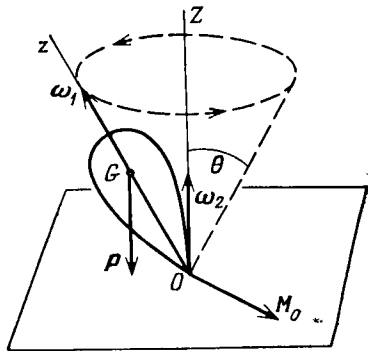


Рис. 107

Угловую скорость прецессии найдем из формулы (48). Момент M_0 имеет величину $P \cdot OG \cdot \sin \theta$. Согласно (48) эта величина должна равняться $C\omega_1\omega_2 \sin \theta$. Приравняв эти два значения для M_0 , получим

$$\omega_2 = \frac{P \cdot OG}{C\omega_1}. \quad (52)$$

Угловая скорость прецессии не зависит от угла θ .

Таким образом, быстро вращающееся тяжелое твердое тело в случае Лагранжа совершает регулярную прецессию. Полученный вывод является приближенным. Он получен в предположениях элементарной теории гироскопов. В действительности движение ги-

роскопа отличается от регулярной прецессии. В частности, угол θ не обязательно постоянен, он может изменяться в некотором интервале; колебательное движение оси симметрии гироскопа называется *нутацей*.

Примеры. 1. Гироскоп состоит из колеса радиусом $R = 0,1$ м, делающего $n = 100$ оборотов в секунду. Рама гироскопа, не изображенная на рис. 108, свободно вращается вокруг неподвижной точки O , расстояние которой OO_1 от колеса гироскопа равно $0,2$ м. Считая колесо однородным диском и пренебрегая массой рамы, определить направление и угловую скорость прецессионного движения, которое начнет совершать гироскоп, если будет предоставлен

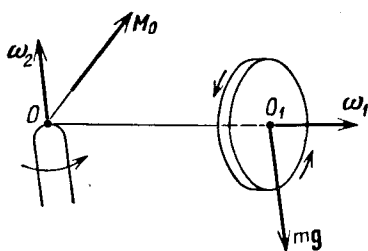


Рис. 108

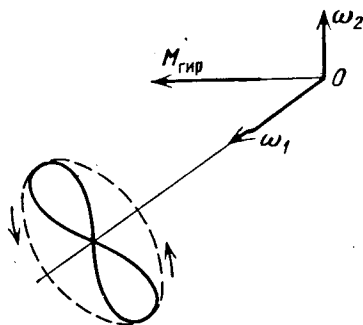


Рис. 109

самому себе при горизонтальном положении плеча OO_1 . Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Момент силы тяжести M_0 горизонтален, перпендикулярен OO_1 и направлен, как показано на рис. 108, его величина $M_0 = mg \cdot OO_1$, где m — масса колеса. Согласно формуле (46), для указанного на рисунке направления вращения колеса момент M_0 вызовет регулярную прецессию гироскопа с угловой скоростью прецессии ω_2 , направленной вертикально вверх.

Для подсчета величины угловой скорости прецессии можно воспользоваться либо основной формулой гироскопии (46), либо формулой (48) приближенной теории гироскопа (у нас $\theta = \pi/2$, и поэтому эти формулы совпадают). Получим

$$C\omega_1\omega_2 = mg \cdot OO_1.$$

Учитывая, что $C = \frac{1}{2}mR^2$, находим отсюда

$$\omega_2 = \frac{mg \cdot OO_1}{C\omega_1} = \frac{mg \cdot OO_1}{\frac{1}{2}mR^2 \cdot 2\pi n} = \frac{2}{\pi}.$$

В рамках приближенной теории гироскопа $\theta = \text{const}$ и точка O_1 будет описывать горизонтальную окружность в направлении, указанном стрелкой. При этом величина угловой скорости плеча OO_1 равна $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\text{с}}$.

2. Модель самолета, летящая со скоростью v , совершает поворот по горизонтальной окружности радиусом ρ . Момент инерции пропеллера и мотора относительно их общей оси вращения равен C . Пропеллер и мотор вращаются с угловой скоростью ω_1 . Найти момент гироскопических давлений.

Угловая скорость прецессии вертикальна и по величине равна v/ρ , угол пугации θ равен $\pi/2$. Согласно (46) находим

$$M_{\text{гир}} = C\omega_1 \times \omega_2, \quad M_{\text{гир}} = \frac{Cv\omega_1}{\rho}.$$

Гирскопический момент $M_{\text{гир}}$ горизонтален. Гирскопические же давления вертикальны и при направлении вращения пропеллера, указанном на рис. 109, гирскопические давления при повороте авиамодели влево от курса стремятся поднять ее носовую часть вверх.

§ 3. Движение свободного твердого тела

108. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. Пусть требуется найти движение свободного твердого тела относительно неподвижной системы координат O_aXYZ . Согласно теореме Шаля (п. 21), любое движение твердого тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольной точки тела (полюса), и движения тела вокруг этой точки как неподвижной. При описании движения полюс желательно выбрать так, чтобы его движение определялось наиболее просто. Из основных теорем динамики следует, что за полюс удобно взять центр масс. Действительно, согласно теореме о движении центра масс, последний движется как материальная точка, к которой приложены все внешние силы системы, а теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии для движения вокруг центра масс (см. определение этого понятия в п. 81) формулируются точно так же, как и для движения вокруг неподвижной точки.

Пусть M — масса тела, v_c — скорость центра масс, K_c — кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, т. е. (см. п. 81) относительно системы координат, которая имеет начало в центре масс тела и движется поступательно. Если $R^{(e)}$ и $M_C^{(e)}$ — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки C , то из теоремы о движении центра инерции (п. 86) и теоремы об изменении кинетического момента (п. 87) имеем два векторных дифференциальных уравнения

$$M \frac{dv_c}{dt} = R^{(e)}, \quad \frac{dK_c}{dt} = M_C^{(e)}. \quad (1)$$

Если X_c, Y_c, Z_c — координаты центра масс тела в неподвижной системе координат O_aXYZ , а R_x, R_y, R_z — проекции вектора $R^{(e)}$ на оси O_aX, O_aY, O_aZ , то первое уравнение из (1) запишется в виде следующих скалярных уравнений:

$$M \frac{d^2 X_c}{dt^2} = R_x, \quad M \frac{d^2 Y_c}{dt^2} = R_y, \quad M \frac{d^2 Z_c}{dt^2} = R_z. \quad (2)$$

Пусть $CXYZ$ — поступательно движущаяся кенигова система координат, а $Cxyz$ — система координат, жестко связанная с движущимся

щимся телом. Если p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Cx, Cy, Cz , а M_x, M_y, M_z — компоненты вектора $M_C^{(e)}$ в системе координат $Cxyz$, то второе уравнение из (1) запишется в виде уравнений (3) п. 97:

$$\begin{aligned} J_x \frac{dp}{dt} - J_{xy} \frac{dq}{dt} - J_{xz} \frac{dr}{dt} + (J_z - J_y)qr + \\ + J_{yz}(r^2 - q^2) + p(J_{xy}r - J_{xz}q) = M_x, \\ - J_{xy} \frac{dp}{dt} + J_y \frac{dq}{dt} - J_{yz} \frac{dr}{dt} + (J_x - J_z)rp + J_{xz}(p^2 - r^2) + \\ + q(J_{yz}p - J_{xy}r) = M_y, \quad (3) \\ - J_{xz} \frac{dp}{dt} - J_{yz} \frac{dq}{dt} + J_z \frac{dr}{dt} + (J_y - J_x)pq + J_{xy}(q^2 - p^2) + \\ + r(J_{xz}q - J_{yz}p) = M_z. \end{aligned}$$

Здесь $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$ — компоненты тензора инерции тела для центра масс в системе координат $Cxyz$. Если оси Cx, Cy, Cz — главные оси инерции тела для центра масс, то уравнения (3) упрощаются и принимают вид динамических уравнений Эйлера (4) п. 87.

В уравнениях (3) величины p, q, r можно заменить на их выражения, задаваемые кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Углы Эйлера, задающие взаимную ориентацию систем координат $Cxyz$ и $CXYZ$, вводятся обычным образом.

Уравнения (2)–(4) образуют систему дифференциальных уравнений, описывающую движение свободного твердого тела. В общем случае правые части уравнений (2), (3) зависят от величин $X_c, Y_c, Z_c, \psi, \theta, \varphi$, их первых производных и времени и в этом случае систему уравнений (2)–(4) надо решать совместно.

Но в простых случаях возможно раздельное интегрирование систем (2) и (3)–(4). Например, пусть свободное твердое тело движется в однородном поле тяжести. Единственной внешней силой, действующей на тело, является сила тяжести, приложенная в центре масс и направленная по вертикали вниз. Если ось O_cZ направить по вертикали вверх, то уравнения (2) примут вид

$$\frac{d^2 X_c}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y_c}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z_c}{dt^2} = -g,$$

где g — ускорение свободного падения. Отсюда следует, что при произвольных начальных условиях центр масс тела будет двигаться

ся по параболе. А так как момент M_C силы тяжести относительно центра масс равен нулю, то движение тела вокруг центра масс будет движением Эйлера — Пуансо.

Если твердое тело несвободно, то величины X_C , Y_C , Z_C , ψ , θ , ϕ и, может быть, их производные связаны некоторыми соотношениями. Уравнения движения по-прежнему имеют вид (2) — (4), но в правые части уравнений (2) и (3) войдут реакции связей.

Пример. В момент метания диска его плоскость занимает горизонтальное положение, а центр диска находится на высоте h над поверхностью Земли. Центру диска сообщена горизонтальная скорость v_0 , а сам диск закручен с угловой скоростью ω_0 , составляющей угол $\delta = \pi/4$ с его плоскостью. Векторы v_0 и ω_0 лежат в неподвижной вертикальной плоскости O_aYZ (рис. 110). Считая диск тонкой однородной пластинкой, найти его движение. Влиянием воздуха пренебречь.

В неподвижной системе координат O_aXYZ , плоскость O_aXY которой совпадает с горизонтальной поверхностью Земли, а ось O_aZ вертикальна, центр масс диска C движется по параболе

$$X_C(t) = 0, \quad Y_C(t) = v_0 t + Y_C(0), \quad Z_C(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Движение диска относительно кениговской системы координат $CXYZ$, ось которой параллельна соответствующим осям системы координат O_aXYZ , является регулярной прецессией. Оси жестко связанной с диском системы координат $Cxyz$, образованной главными центральными осями инерции диска, направим так, чтобы в момент метания диска $t = 0$ ось Cx совпадала с осью CY ,

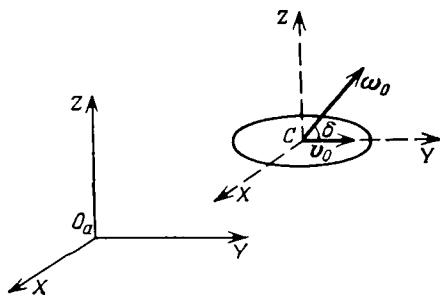


Рис. 110

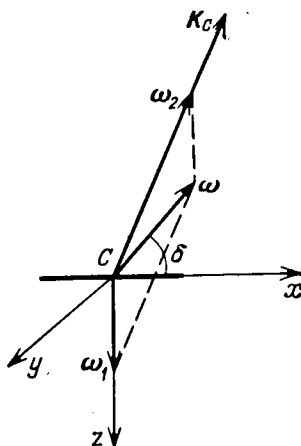


Рис. 111

ось Cy совпадала с осью CX , а направление оси Cz было бы противоположно направлению оси CZ кениговской системы координат (см. рис. 110 и 111).

Для главных центральных моментов инерции диска имеем: $J_z = 2J_x = -2J_y = \frac{1}{2}mR^2$ (m — масса диска, R — его радиус). Так как $J_z > J_x$, то угол θ между векторами ω_1 и ω_2 , согласно п. 100, тупой (рис. 111).

На рис. 111 показана ориентация вектора ω относительно диска при $t = 0$; имеем: $p = \omega_0 \cos \delta$, $q = 0$, $r = r_0 = -\omega_0 \sin \delta$. Поэтому для неизменного

модуля кинетического момента диска K_C получаем:

$$K_C = \sqrt{J_x^2 p^2 + J_y^2 q^2 + J_z^2 r^2} = J_x \omega_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}.$$

Формулы (13), (15) и (16) п. 100 дают:

$$\cos \theta = \frac{J_z r_0}{K_C} = - \frac{2 \sin \delta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}}, \quad \omega_2 = \frac{K_C}{J_x} = \omega_0 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta},$$

$$\omega_1 = \frac{J_x - J_z}{J_x} r_0 = \omega_0 \sin \delta.$$

Вектор K_C задает ось прецессии. Он имеет неизменное направление в пространстве: лежит в плоскости CYZ и составляет с горизонтальной осью CY постоянный угол, равный $\theta = \pi/2$. Для единичного вектора e , направленного вдоль K_C , получаем в системе координат $CXYZ$:

$$e' = \left(0, \frac{\cos \delta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}}, \frac{2 \sin \delta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \delta}} \right).$$

Подставив в полученные выражения заданное значение угла δ , равное $\pi/4$, получим, что в кенигсовой системе координат диск совершает регулярную прецессию:

$$\theta = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \dot{\psi} = \omega_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \omega_0, \quad \dot{\varphi} = \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_0;$$

ось прецессии определяется вектором $e' = (0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

109. Плоское движение тела. Пусть все точки тела движутся параллельно плоскости O_aXY . Получим дифференциальные уравнения, описывающие это плоское движение тела. Без ограничения общности можно считать, что центр масс тела движется в плоскости O_aXY , поэтому $Z_c \equiv 0$. Также можно считать, что оси Cx, Cy связанной с телом системы координат $Cxyz$ движутся в плоскости O_aXY , т. е. ось Cz перпендикулярна этой плоскости. Тогда, полагая $\theta \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, из кинематических уравнений Эйлера (4) имеем

$$p \equiv 0, \quad q \equiv 0, \quad r = \dot{\varphi}. \quad (5)$$

Подставив $Z_c \equiv 0$ в уравнения (2), а выражения (5) для p, q, r в уравнения (3), получим

$$M \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_{X_c}, \quad M \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_Y, \quad R_Z = 0, \quad (6)$$

$$- J_{xz} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + J_{yz} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = M_{x_c}, \quad - J_{yz} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - J_{xz} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = M_{y_c}$$

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z. \quad (7)$$

Последнее уравнение из (6) и первые два уравнения из (7) налагают ограничения на геометрию масс тела, внешние силы и час-

точно по начальные условия, при выполнении которых плоское движение тела возможно. Остальные три уравнения

$$M \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_X, \quad M \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_Y, \quad J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_Z \quad (8)$$

являются дифференциальными уравнениями плоского движения твердого тела.

Примеры. 1. Тело совершает плоское движение под действием постоянной по величине и направлению силы F . Линия действия силы лежит в

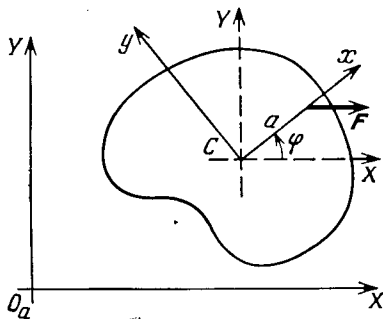


Рис. 112

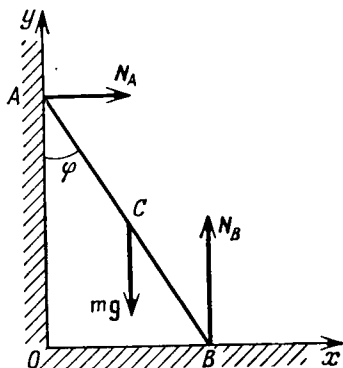


Рис. 113

плоскости, проходящей через центр масс тела и параллельной плоскости его движения (рис. 112). Определить движение тела.

Пусть m — масса тела, a — расстояние от центра масс до точки приложения силы, J — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной плоскости движения.

Напишем уравнения движения тела (8). Направление оси $O_a X$ выберем так, чтобы оно совпадало с направлением силы F (рис. 112). Тогда

$$m \ddot{X}_C = F, \quad m \ddot{Y}_C = 0, \quad J \ddot{\varphi} = -Fa \sin \varphi.$$

Из первых двух уравнений следует, что центр масс тела будет (при $\dot{Y}_C(0) \neq 0$) двигаться по параболе

$$X_C(t) = \frac{F t^2}{2m} + \dot{X}_C(0) t + X_C(0), \quad Y_C(t) = \dot{Y}_C(0) t + Y_C(0);$$

если $\dot{Y}_C(0) = 0$, то центр масс движется с постоянным ускорением F/m вдоль прямой, параллельной оси $O_a X$, и за время t пройдет путь $s = \frac{F t^2}{2m} + \dot{X}_C(0) t$.

Одновременно тело вращается относительно центра масс; это вращение описывается третьим из написанных уравнений движения тела. Сравнивая это уравнение с уравнением движения математического маятника (уравнение (6) п. 57), видим, что относительно центра масс тело движется как математический маятник длиной $l = Jg/(Fa)$.

2. Тонкий однородный стержень приставлен одним концом к гладкой вертикальной стене, а другим концом опирается на гладкий горизонтальный

пол (рис. 113). Стержень пришел в движение из состояния покоя, когда он составлял угол α с вертикалью. Вычислить начальные давления на стену и пол.

Движение стержня происходит под действием силы тяжести mg и реакций N_A и N_B стены и пола; N_A имеет горизонтальное, а N_B — вертикальное направления. Пусть a — длина стержня, а x , y — координаты его центра тяжести C в показанной на рис. 113 системе координат Oxy . Дифференциальные уравнения движения стержня имеют вид

$$m\ddot{x} = N_A, \quad m\ddot{y} = N_B - mg, \quad \frac{1}{12} ma^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2} N_A a \cos \varphi + \frac{1}{2} N_B a \sin \varphi.$$

Но

$$x = \frac{1}{2} a \sin \varphi, \quad y = \frac{1}{2} a \cos \varphi; \quad \ddot{x} = \frac{a}{2} (\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2),$$

$$\ddot{y} = -\frac{a}{2} (\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Поэтому из первых двух уравнений движения стержня имеем

$$N_A = \frac{1}{2} ma (\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), \quad N_B = mg - \frac{1}{2} ma (\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Подставив эти выражения для N_A и N_B в третье из уравнений движения стержня и учтя, что при $t = 0$ $\varphi = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$, получим, что при $t = 0$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{g}{a} \sin \alpha.$$

Следовательно, искомые начальные значения величин N_A и N_B будут такими:

$$N_A = \frac{3}{4} mg \sin \alpha \cos \alpha, \quad N_B = mg \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \right).$$

3. Неоднородный диск катится по неподвижной горизонтальной плоскости так, что скольжение отсутствует, а плоскость диска все время остается в фиксированной вертикальной плоскости (см. пример 4 п. 87). Масса диска равна m , радиус a , центр масс C находится на расстоянии b от геометрического центра, момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс, равен J_C . Используя теорию плоского движения, получим дифференциальные уравнения движения диска.

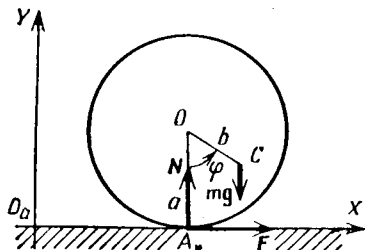


Рис. 114

Движение диска происходит под действием силы тяжести и реакции плоскости, которая приложена в точке A_* диска, в которой происходит его касание с плоскостью; разложим реакцию на две составляющие: вертикальную N и горизонтальную F (рис. 114).

Уравнения (8) в рассматриваемой задаче будут иметь вид

$$m\ddot{X}_C = F,$$

$$m\ddot{Y}_C = N - mg,$$

$$J_C \ddot{\varphi} = F(a - b \cos \varphi) - Nb \sin \varphi.$$

Из условия отсутствия скольжения (скорость точки A_* равна нулю) следует, что во все время движения должны выполняться равенства

$$\dot{X}_C = -(a - b \cos \varphi) \dot{\varphi}, \quad \dot{Y}_C = b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\ddot{X}_C = -(a - b \cos \varphi) \ddot{\varphi} - b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2, \quad \ddot{Y}_C = b \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + b \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Поэтому первые два из трех дифференциальных уравнений движения диска дают зависимость составляющих реакции плоскости от φ , $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$N = mg + mb(\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), \quad F = -m[(a - b \cos \varphi) \ddot{\varphi} + b \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2].$$

Подставив эти выражения для N и F в третье из дифференциальных уравнений движения диска, придем к уравнению, описывающему изменение угла φ во времени:

$$[J_C + m(a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi)] \ddot{\varphi} + mab \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mgb \sin \varphi = 0.$$

В примере 4 п. 87 это уравнение было получено при помощи теоремы об изменении кинетического момента.

§ 4. Движение тяжелого твердого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость

110. Общие сведения. Понятие о трении. Пусть жесткая поверхность S движется, касаясь неподвижной поверхности S_1 (рис. 115). Считаем, что поверхности S и S_1 выпуклы, а их касание происходит в одной точке O . При движении поверхности S точка O , вообще говоря, перемещается как по S , так и по S_1 . Предполагается, что в каждый момент времени через точку O можно провести единственную касательную плоскость к S и S_1 . Очевидно, что скорость v_O точки O , которой поверхность S касается S_1 , лежит в общей касательной плоскости, проходящей через O . Если $v_O = 0$, то говорят о движении без скольжения. Если же $v_O \neq 0$, то говорят о движении со скольжением, а v_O называют *скоростью скольжения*.

Примем точку O за полюс. Тогда движение поверхности S в каждый момент времени можно представить как совокупность поступательного движения со скоростью v_O и вращения с угловой скоростью ω вокруг точки O . Разложим вектор ω на две составляющие ω_v и ω_k , где вектор ω_v перпендикулярен общей касательной плоскости, а ω_k лежит в ней; ω_v называют *угловой скоростью вращения* поверхности S , а ω_k — *угловой скоростью качения*.

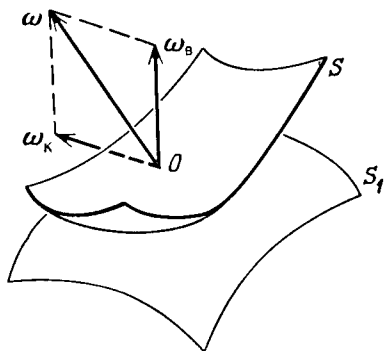


Рис. 115

Если $v_0 = 0$, то говорят, что поверхность S катится по поверхности S_1 ; если при этом $\omega_v = 0$, $\omega_k \neq 0$, то имеет место чистое качение S по S_1 , а если $\omega_k = 0$, $\omega_v \neq 0$, то поверхность S совершает верчение. Когда $v_0 \neq 0$, а $\omega_v = 0$, $\omega_k = 0$, то говорят, что S скользит по S_1 . В общем случае, когда $v_0 \neq 0$, $\omega_v \neq 0$, $\omega_k \neq 0$, поверхность S скользит, вертится и катится по S_1 .

Действие S_1 на S проявляется в следующем. 1. На поверхность S действует сила N , перпендикулярная общей касательной плоскости и направленная от S_1 к S ; эта сила называется *нормальной реакцией*; для реальных движений $N \geq 0$. 2. На S действует *сила трения* F , лежащая в общей касательной плоскости. Согласно законам трения Кулона, величина F не превосходит своего максимально возможного значения, равного kN , где k — коэффициент трения. При этом если $v_0 = 0$, то $F < kN$. Величину F в этом случае называют *силой трения покоя*. При $v_0 \neq 0$ имеет место равенство $F = kN$, а F называют *силой трения скольжения*¹⁾.

Иногда приемлема такая идеализация, что поверхности можно считать *абсолютно гладкими*. Это означает, что величина k настолько мала, что величиной силы трения в рассматриваемой задаче можно пренебречь. Если поверхность S_1 абсолютно гладкая, то ее воздействие на S сводится к нормальной реакции N .

В действительности тела соприкасаются не в одной точке, а по очень малой площадке. Тогда воздействие S на S_1 уже нельзя считать приводящимся к одной силе (являющейся геометрической суммой нормальной реакции и силы трения). Согласно теореме Пуансо (п. 74), совокупность сил, действующих на S в каждой точке площадки касания, в общем случае будет приводиться к силе и паре. Упомянутая сила снова может быть разложена на сумму нормальной реакции и силы трения, и пару удобно представить также в виде совокупности двух пар. Одна из них имеет момент, коллинеарный ω_v , а другая — коллинеарный ω_k . Первая пара является парой трения верчения, а вторая — парой трения качения. Трение верчения и трение качения обычно малы по сравнению с трением скольжения, и в прикладных задачах часто учитывается только трение скольжения.

111. Волчок на абсолютно гладкой плоскости. Пусть эллипсоид инерции твердого тела для его центра масс представляет собой эллипсоид вращения. Задача о движении волчка по плоскости состоит в исследовании движения этого тела в поле тяжести в предположении, что одна из точек тела, лежащая на оси динамической симметрии, движется по горизонтальной плоскости. Будем считать, что волчок имеет настолько острый конец, что его можно принять за острое, оканчивающееся точкой D . При движении волчка его

¹⁾ Следует иметь в виду, что трение представляет собой весьма сложное явление, поэтому законы Кулона имеют только приближенный характер.

точка D все время остается на неподвижной горизонтальной плоскости (рис. 116).

Будем считать, что плоскость является абсолютно гладкой. Тогда ее воздействие на волчок сводится к реакции N , имеющей вертикальное направление. Так как активная сила — сила тяжести — также направлена по вертикали, то на основании теоремы о движении центра инерции (п. 86) получаем, что проекция центра масс G на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности будем считать ее неподвижной; тогда центр масс движется по заданной вертикали.

Выберем неподвижную систему $OXYZ$ так, чтобы ось OZ была вертикальной и проходила через центр масс волчка, а плоскость OXY совпадала с горизонтальной плоскостью, на которую при движении опирается волчок своей точкой D (рис. 116).

Ориентация волчка относительно неподвижной системы координат задается углами Эйлера ψ , θ , φ .

Пусть m — масса волчка, l — расстояние от центра масс G до точки D , которой волчок касается плоскости, C — момент инерции волчка относительно оси динамической симметрии Gz , A и B ($A = B$) — моменты инерции волчка относительно двух любых жестко связанных с волчком взаимно перпендикулярных и перпендикулярных Gz осей Gx и Gy . Для расстояния h центра масс волчка от опорной плоскости имеем выражение: $h = l \cos \theta$.

Так как $A = B$ и внешние силы (реакция плоскости и сила тяжести) не создают момента относительно оси Gz , то из третьего уравнения системы динамических уравнений Эйлера (формулы (4) п. 97) следует, что проекция r угловой скорости ω волчка на ось его динамической симметрии является постоянной, т. е. имеет место первый интеграл

$$r = r_0 = \text{const.} \quad (1)$$

Пусть, как обычно, p и q — проекции ω на оси Gx и Gy . Так как внешние силы направлены вертикально и, следовательно, не создают момента относительно вертикальной оси OZ , то из теоремы об изменении кинетического момента (п. 87) вытекает постоянство проекции кинетического момента волчка относительно центра масс на вертикаль:

$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.},$$

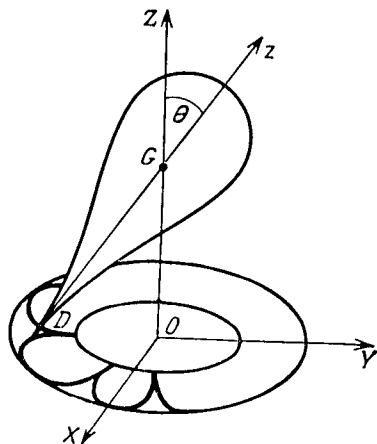


Рис. 116

где величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ вычисляются по формулам (30) п. 105. Используя кинематические уравнения Эйлера (формулы (5) п. 97) и соотношение (1), последнее равенство можно записать в виде

$$A \sin^2 \theta \dot{\psi} + Cr_0 \cos \theta = \text{const.} \quad (2)$$

Далее, поскольку связь, наложенная на волчок ($h = l \cos \theta$), стационарна и идеальна, а активные силы имеют потенциал $\Pi = mgh$, не зависящий явно от времени, то полная механическая энергия постоянна (п. 88):

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Здесь T — кинетическая энергия волчка, которая, согласно теореме Кенига (п. 83), вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2,$$

где $v_G = \dot{h}$ — скорость центра масс волчка. Используя кинематические уравнения Эйлера, соотношение (1) и равенство $\dot{h} = -l \sin \theta \dot{\theta}$, напишем интеграл энергии в виде

$$(A + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + A \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + 2mgl \cos \theta = \text{const.} \quad (3)$$

Интегралы (1) — (3) позволяют свести решение задачи о движении волчка к квадратурам. Мы не будем исследовать движение во всей полноте, а рассмотрим только один частный случай. Пусть в начальный момент волчок закручен вокруг оси симметрии и поставлен на плоскость без начальной скорости центра масс и пусть в начальный момент ось симметрии волчка наклонена к вертикали под углом θ_0 . Это означает, что при $t = 0$ выполнены равенства

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} = r_0.$$

Кроме того, как мы предположили с самого начала, проекция центра масс на плоскость OXY имеет скорость, равную нулю.

Для таких начальных данных интегралы (2) и (3) можно переписать в следующем виде:

$$A \sin^2 \theta \dot{\psi} = Cr_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad (4)$$

$$(A + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + A \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 = 2mgl (\cos \theta_0 - \cos \theta). \quad (5)$$

Из (4) находим

$$\dot{\psi} = \frac{Cr_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{A \sin^2 \theta}. \quad (6)$$

Используя (6), интеграл (5) можно записать в виде

$$A \sin^2 \theta (A + ml^2 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 = f(\theta), \quad (7)$$

где

$$f(\theta) = (\cos \theta_0 - \cos \theta) [2Amgl \sin^2 \theta - C^2 r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)]. \quad (8)$$

Левая часть равенства (7) неотрицательна. Поэтому угол θ может принимать только такие значения, для которых $f(\theta) \geq 0$. Отсюда следует, что $\theta \geq \theta_0$, так как при $\theta < \theta_0$ функция $f(\theta)$ представляет собой произведение двух сомножителей, имеющих противоположные знаки. Угол θ колеблется между θ_0 и значением θ_1 , являющимся ближайшим к θ_0 корнем уравнения $f(\theta) = 0$. Отметим, что $\theta_1 < \pi$, так как $f(\pi) = -(1 + \cos \theta_0)^2 C^2 r_0^2 < 0$. Таким образом, при движении волчка выполняются неравенства $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi$. Длина отрезка OD (рис. 116) все время удовлетворяет неравенствам

$$l \sin \theta_0 \leq OD \leq l \sin \theta_1.$$

Поэтому траектория точки D на опорной плоскости заключена между двумя концентрическими окружностями радиусов $l \sin \theta_0$ и $l \sin \theta_1$ с центром в точке O .

Из (6) следует, что когда θ принимает во время движения свое начальное значение θ_0 , то $\dot{\psi} = 0$. Отсюда вытекает, что траектория точки D имеет на внутренней окружности радиуса $l \sin \theta_0$ точки возврата (рис. 116).

Если начальная угловая скорость r_0 вращения волчка вокруг оси симметрии велика, то угол θ мало отличается от своего начального значения. Действительно, приравняв нулю квадратную скобку в выражении (8) для функции $f(\theta_1)$, получим, что с погрешностью порядка $1/r_0^3$ угол θ_1 будет вычисляться по формуле

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2Amgl \sin \theta_0}{C^2 r_0^2}.$$

Отсюда видно, что θ_1 , а следовательно, и θ сколь угодно близки к θ_0 , если величина r_0 достаточно велика.

112. Влияние трения на движение волчка. В действительности неподвижная плоскость, на которую опирается волчок, не является абсолютно гладкой, а волчок заканчивается не острием, а поверхностью вращения, более или менее заостренной, так что точка касания D волчка и плоскости не лежит на оси симметрии. По этим причинам движение волчка будет иным, нежели то движение, которое описано в п. 111.

Одним из самых интересных эффектов влияния силы трения состоит в том, что эта сила может приблизить ось симметрии волчка к вертикали. Рассмотрим этот эффект с качественной стороны, опираясь на теорему об изменении кинетического момента. Пусть волчок быстро вращается вокруг оси симметрии и без начальной скорости центра масс поставлен на плоскость так, что его ось симметрии составляет с вертикалью некоторый ненулевой острый угол θ_0 .

Кинетический момент K волчка относительно центра масс в начальный момент направлен как показано на рис. 117. Пусть D — точка ножки волчка, которой он касается опорной плоскости. Ножка теперь уже не принимается за острие. Сила трения F направлена в сторону, противоположную скорости точки D . Момент M

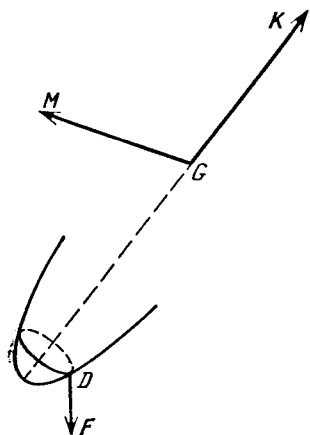


Рис. 117

силы трения относительно центра масс направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр масс G и вектор F . Вектор M можно представить в виде суммы $M_1 + M_2$, где вектор M_1 перпендикулярен K , а вектор M_2 коллинеарен вектору K , но (в ситуации, представленной на рис. 117) направлен противоположно K . По теореме об изменении кинетического момента скорость конца вектора K равна M . Отсюда следует, что вектор K , уменьшаясь по величине (из-за наличия составляющей M_2 момента силы трения), стремится занять вертикальное положение (из-за наличия составляющей M_1 момента силы трения). Таким образом, вектор K , а вместе с ним и ось симметрии волчка под влиянием трения стремятся

к вертикали. Если действие трения будет достаточно продолжительным, то ось волчка может в конце концов занять строго вертикальное положение и останется в этом положении неподвижной. В этом случае говорят, что волчок «сидит».

113. Движение однородного шара по плоскости при наличии трения. Пусть однородный шар массой m и радиусом a движется по неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Введем

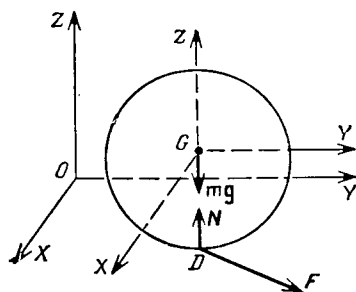


Рис. 118

две системы координат: неподвижную $OXYZ$ с вертикальной осью OZ и началом O , совпадающим с произвольной точкой опорной плоскости, и поступательно движущуюся $GXYZ$ с началом в центре масс шара G и осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат (рис. 118).

Реакцию плоскости R представим в виде суммы двух сил: $R = N + F$, где N — нормальная реакция плоскости, а F — сила трения. Если ω — угловая скорость шара, а v_G — скорость центра

масс, то скорость v_D точки D шара, которой он касается плоскости, вычисляется по формуле

$$v_D = v_G + \omega \times \overline{GD}. \quad (9)$$

Сила трения скольжения определяется соотношением

$$F = -kNu, \quad (10)$$

где k — коэффициент трения, u — единичный вектор, направленный вдоль скорости точки D : $v_D = v_D u$.

Из теоремы о движении центра инерции имеем

$$m \frac{dv_G}{dt} = mg + R. \quad (11)$$

Пусть K_G — кинетический момент шара относительно центра масс. Тогда, учитывая, что момент инерции однородного шара радиусом a и массой m относительно любого диаметра равен $\frac{2}{5} ma^2$, имеем

$$K_G = \frac{2}{5} ma^2 \omega. \quad (12)$$

Теорема об изменении кинетического момента для движения относительно центра масс дает уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{5}{2ma^2} \overline{GD} \times R. \quad (13)$$

Пусть X_G, Y_G, Z_G — координаты центра масс в системе $OXYZ$, а F_X, F_Y — проекции силы трения на оси OX и OY . Уравнения (11) в скалярной форме запишутся в виде

$$\frac{d^2 X_G}{dt^2} = \frac{1}{m} F_X, \quad \frac{d^2 Y_G}{dt^2} = \frac{1}{m} F_Y, \quad \frac{d^2 Z_G}{dt^2} = -g + \frac{1}{m} N. \quad (14)$$

Так как $Z_G = a = \text{const}$, то последнее из этих уравнений даст $N = mg$, т. е. нормальная реакция плоскости равна весу шара, причем этот вывод не зависит от того, скользит шар по плоскости ($v_D \neq 0$) или нет ($v_D = 0$).

Если $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ — проекции вектора ω на оси GX, GY, GZ , то векторное уравнение (13) дает следующие три скалярных уравнения:

$$\frac{d\omega_X}{dt} = \frac{5}{2ma} F_Y, \quad \frac{d\omega_Y}{dt} = -\frac{5}{2ma} F_X, \quad \frac{d\omega_Z}{dt} = 0. \quad (15)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что при движении шара проекция его угловой скорости на вертикаль остается постоянной. Это заключение имеет место независимо от наличия или отсутствия скольжения шара.

Пусть в начальный момент $v_D \neq 0$, т. е. имеется скольжение. Так как $N = mg$, то из (10) получаем, что при наличии скольжения шара сила трения постоянна по величине: $F = kmg$. Покажем, что она постоянна и по направлению. Для этого продифференцируем обе части равенства (9) по времени и воспользуемся уравне-

пиями (11), (13) и равенствами $R = -mg + F$, $\overline{GD} = \frac{a}{g}$ g. Получим

$$\frac{dv_D}{dt} = \frac{7}{2m} F. \quad (16)$$

Заменив здесь v_D на $v_D u$, а F — на правую часть равенства (10), получим

$$\frac{dv_D}{dt} u + v_D \frac{du}{dt} = -\frac{7}{2} kg u. \quad (17)$$

Так как u — единичный вектор, то вектор du/dt перпендикулярен u . Поэтому из (17) следует, что

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv_D}{dt} = -\frac{7}{2} kg. \quad (18)$$

Таким образом, вектор u имеет постоянное направление и, следовательно, сила трения постоянна:

$$F = -kmg u. \quad (19)$$

Величина скорости точки D , согласно (18), изменяется во времени по закону

$$v_D(t) = v_D(0) - \frac{7}{2} kgt. \quad (20)$$

Если обозначить через α постоянный угол, который составляет скорость точки D с осью OX , то из первых двух уравнений (14) получим

$$\begin{aligned} X_G(t) &= -\frac{1}{2} kg \cos \alpha \cdot t^2 + \dot{X}_G(0) t + X_G(0), \\ Y_G(t) &= -\frac{1}{2} kg \sin \alpha \cdot t^2 + \dot{Y}_G(0) t + Y_G(0). \end{aligned} \quad (21)$$

Первые два уравнения из (15) дают

$$\omega_X(t) = \omega_X(0) - \frac{5kg \sin \alpha}{2a} t, \quad \omega_Y(t) = \omega_Y(0) + \frac{5kg \cos \alpha}{2a} t. \quad (22)$$

Из (21) следует, что если в начальный момент скорость центра масс и скорость точки касания не коллинеарны, то на стадии движения со скольжением центр шара движется по параболе. Согласно (20), такое движение происходит до момента $t = t_*$, где

$$t_* = \frac{2v_D(0)}{7kg}. \quad (23)$$

При $t = t_*$ имеем $v_D = 0$; скольжение прекращается, и начинается стадия качения шара (с верчением). Так как $v_D = 0$, то из (16) следует, что на стадии качения сила трения равна нулю. Из (14) тогда получаем, что центр масс движется по прямой. Согласно (15) угловая скорость ω шара при качении постоянна по

величине и направлению. Точка D на плоскости движется по прямой, а на поверхности шара — по неизменной окружности, плоскостью которой перпендикулярна вектору ω .

При переходе в режим качения центр шара движется по касательной к параболе (21). Если эта касательная составляет тупой угол с начальной скоростью центра шара, то шар может повернуть назад: явление, хорошо известное игрокам на бильярде.

114. Об уравнениях движения тяжелого тела произвольной выпуклой формы. Пусть тело движется по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на не одной точкой своей выпуклой поверхности, не имеющей заострений и ребер. Движение происходит в поле тяжести.

Движение тела будем изучать по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке опорной горизонтальной плоскости и осью OZ , направленной вертикально вверх (рис. 119). Единичный вектор этой оси обозначим n . С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Gxyz$ с началом

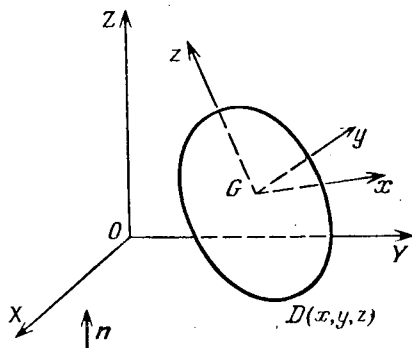


Рис. 119

в центре масс тела и осями, направленными вдоль главных центральных осей инерции. Радиус-вектор ρ точки D , которой тело касается плоскости, относительно центра масс имеет в системе координат $Gxyz$ компоненты x, y, z . Уравнение поверхности, ограничивающей тело, в системе координат $Gxyz$ запишем в виде

$$f(x, y, z) = 0, \quad (24)$$

выбрав знак функции f так, чтобы совпадающий с n единичный вектор внутренней нормали к поверхности (24) в точке D вычислялся по формуле

$$n = - \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}. \quad (25)$$

Пусть m — масса тела, g — ускорение свободного падения, v — скорость центра масс, ω — угловая скорость тела, K — его кинетический момент относительно центра масс, а R — реакция плоскости. Уравнения движения тела можно записать в виде двух векторных уравнений:

$$\dot{v} + \omega \times v = -gn + \frac{1}{m}R \quad (26)$$

и

$$K + \omega \times K = \rho \times R, \quad (27)$$

выражающих теоремы об изменении количества движения и кинетического

тического момента. В (26), (27) точкой обозначается дифференцирование по времени в подвижной системе координат $Gxyz$.

Вектор $\mathbf{n}$ постоянен относительно неподвижной системы координат $OXYZ$, поэтому он удовлетворяет уравнению Пуассона (см. п. 105)

$$\dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0. \quad (28)$$

Уравнения (26) — (28) справедливы и для движения без скольжения, и для случая движения со скольжением при наличии трения, и для абсолютно гладкой плоскости. Дополнительные к (26) — (28) уравнения, отражающие характер взаимодействия тела и плоскости, для каждого из этих случаев различны.

Пусть движение происходит без скольжения. Тогда скорость точки D касания тела и плоскости равна нулю. Это приводит к такому векторному уравнению связи:

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0. \quad (29)$$

Уравнения (26) — (29) с учетом (24), (25) представляют собой полную систему уравнений, позволяющую определить двенадцать неизвестных величин: $v_x, v_y, v_z, p, q, r, x, y, z, R_x, R_y, R_z$ — компонент векторов $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}$ в подвижной системе координат $Gxyz$.

Из теоремы об изменении кинетической энергии следует, что при отсутствии скольжения полная механическая энергия тела постоянна, т. е.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}) = \text{const}. \quad (30)$$

Пусть теперь плоскость абсолютно гладкая. Тогда реакция $\mathbf{R}$ ортогональна плоскости:

$$\mathbf{R} = N\mathbf{n}. \quad (31)$$

Уравнение связи выражает условие того, что скорость точки D тела направлена горизонтально и имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (32)$$

Пусть X_G, Y_G, Z_G — координаты центра масс в неподвижной системе $OXYZ$. Соотношение (32) может быть также представлено в форме равенства

$$\dot{Z}_G = -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \quad (33)$$

которое, как нетрудно видеть, является следствием геометрической связи $\dot{Z}_G = -(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})$.

Уравнения (26), записанные в системе координат $OXYZ$, имеют вид

$$\ddot{X}_G = 0, \quad \ddot{Y}_G = 0, \quad \ddot{Z}_G = -g + \frac{N}{m}. \quad (34)$$

Из первых двух уравнений следует, что в случае абсолютно гладкой плоскости проекция центра масс тела на опорную плоскость движется равномерно и прямолинейно. А третье уравнение с учетом соотношений (33) и (28) позволяет найти выражение для величины нормальной реакции:

$$N = mg - mn \cdot [\omega \times \rho + \omega \times \dot{\rho} + \omega \times (\omega \times \rho)]. \quad (35)$$

Уравнения (27), (28) с учетом (24), (25), (31), (35) образуют систему уравнений для нахождения шести неизвестных p, q, r, x, y, z . Когда эти величины найдены, реакция и закон движения центра масс тела по вертикали определяются из (35) и (34).

Отметим, что в случае абсолютно гладкой плоскости помимо интеграла энергии (30) и указанных выше интегралов, связанных с движением проекции центра масс на опорную плоскость, есть еще интеграл, выражающий постоянство проекции кинетического момента тела на вертикаль:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = \text{const.} \quad (36)$$

Этот интеграл следует из теоремы об изменении кинетического момента, так как внешние силы, действующие на тело (сила тяжести и реакция плоскости), направлены вертикально и не создают момента относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс тела.

Рассмотрим теперь случай движения тела со скольжением при наличии трения, подчиняющегося законам Кулона. Пусть $\mathbf{v}_D = \mathbf{v} + \omega \times \rho$ — скорость точки D шара и $\mathbf{v}_D \neq 0$. Тогда реакцию плоскости $\mathbf{R}$ можно представить в виде

$$\mathbf{R} = N\mathbf{n} + \mathbf{F}, \quad (37)$$

где $N\mathbf{n}$ — нормальная реакция плоскости, а $\mathbf{F}$ — сила трения, которая при заданном коэффициенте трения k определяется равенством

$$\mathbf{F} = -kN \frac{\mathbf{v}_D}{v_D}. \quad (38)$$

Уравнение связи, как и в случае абсолютно гладкой плоскости, записывается в виде равенства (33), а величина нормальной реакции вычисляется по формуле (35).

При исследовании движения во всех трех рассмотренных случаях следует иметь в виду, что величина нормальной реакции плоскости должна быть неотрицательной. В противном случае возможен подскок тела над плоскостью.

Глава VIII. ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Задача двух тел

115. Уравнения движения. *Небесная механика* изучает движение небесных объектов, естественных и искусственных, под действием сил гравитационного взаимодействия тел, сил сопротивлений, вызываемых наличием пылевых, газовых и других сред, сил светового давления и т. п. Важнейшей для приложений задачей небесной механики является задача двух тел, а точнее — задача двух материальных точек.

Задача двух тел состоит в следующем. В пустом пространстве движутся две материальные точки, притягивающиеся одна к другой по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения точек и их скорости. Требуется найти положения точек для любого последующего момента времени.

Эта задача является основной в проблеме движения планет Солнечной системы и искусственных спутников Земли, Луны и планет, так как в большинстве случаев силы взаимного притяжения планет, силы притяжения спутника Земли планетами, силы сопротивления космической среды, силы светового давления и т. п. малы по сравнению с силами гравитационного притяжения планеты и Солнца или спутника и Земли.

Замечательно то, что интегрирование дифференциальных уравнений движения в задаче двух тел сводится к квадратурам. Для получения уравнений движения введем инерциальную систему координат O_aXYZ ; ее начало совпадает, например, с центром масс Солнечной системы, а оси направлены на неподвижные звезды. Положения материальных точек P и O задаются их радиусами-векторами ρ и R соответственно (рис. 120). С точкой O свяжем поступательно движущуюся систему координат $Oxyz$, оси которой параллельны соответствующим осям системы O_aXYZ . Положение точки P относительно точки O задается радиусом-вектором r .

Пусть M и m — массы точек O и P соответственно, а γ — универсальная гравитационная постоянная. Со стороны точки O на точку P действует сила F , определяемая законом всемирного тяготения:

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^3} r.$$

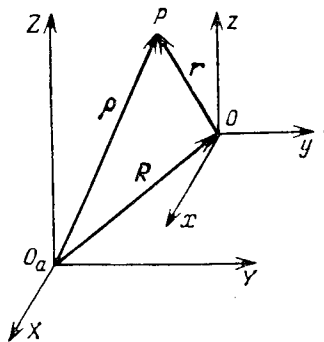


Рис. 120

Со стороны же точки P на точку O действует сила $-F$. Радиусы-векторы ρ и R удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r}, \quad \frac{d^2 R}{dt^2} = \gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

Так как $\mathbf{r} = \rho - R$, то отсюда следует, что

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r} - \gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r} = -\gamma (m + M) \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Если ввести обозначение $k = \gamma (m + M)$, то получим

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Это уравнение определяет движение точки P относительно точки O . Если в вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ найдена, то определение движения относительно системы координат O_aXYZ не представляет труда. Действительно, пусть C — центр масс точек P и O . Так как точки P и O образуют замкнутую систему, то согласно теореме о движении центра масс точка C движется равномерно и прямолинейно; ее скорость полностью определяется начальными скоростями точек O и P . Если R_c — радиус-вектор центра масс, то

$$\rho = R_c + \frac{M}{m+M} \mathbf{r}, \quad R = R_c - \frac{m}{m+M} \mathbf{r}.$$

116. Интеграл площадей. Второй закон Кеплера. Дифференциальное уравнение (1) описывает движение точки P в подвижной системе координат $Oxyz$. Это уравнение можно (а для дальнейшего очень удобно) интерпретировать как дифференциальное уравнение движения точки P относительно неподвижного притягивающего центра O под действием центральной силы, равной $-mk\mathbf{r}/r^3$.

Согласно теореме об изменении кинетического момента, момент количества движения точки P относительно точки O остается постоянным. Отсюда следует, что

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}. \quad (2)$$

Это соотношение носит название *интеграла площадей*. В нем $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость точки P относительно точки O , $\mathbf{c}$ — векторная константа и интеграл площадей.

Проекция вектора $\mathbf{c}$ на оси системы координат $Oxyz$ определяются по формулам

$$c_x = y\dot{z} - \dot{y}z, \quad c_y = z\dot{x} - \dot{z}x, \quad c_z = x\dot{y} - \dot{x}y, \quad (3)$$

в которых правые части вычисляются для любого (например, начального) момента времени.

Если $c_x = c_y = c_z = 0$, то, очевидно, движение точки P происходит по прямой, проходящей через точку O . Если же хотя бы одна

из величин (3) отлична от нуля, то вектор $\mathbf{r}$ во все время движения лежит в одной и той же фиксированной плоскости, которая перпендикулярна вектору $\mathbf{c}$. Уравнение этой плоскости имеет вид

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0. \quad (4)$$

Таким образом, орбита точки P является плоской кривой. Плоскость орбиты однозначно определяется вектором $\mathbf{c}$, или начальным положением $\mathbf{r}_0$ и скоростью $\mathbf{v}_0$ точки P относительно точки O .

Выясним геометрический смысл интеграла площадей. Введем систему координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, совместив плоскость $O\tilde{x}\tilde{y}$ с плоскостью орбиты. Тогда $c_{\tilde{x}} = c_{\tilde{y}} = 0$, $c_{\tilde{z}} = \tilde{x}\dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{x}}\tilde{y}$ ($c = \sqrt{c_{\tilde{x}}^2 + c_{\tilde{y}}^2 + c_{\tilde{z}}^2} = |c_{\tilde{z}}|$). Пусть θ — угол, который радиус-вектор $\mathbf{r}$ составляет с осью $O\tilde{x}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= r \cos \theta, & \tilde{y} &= r \sin \theta, \\ \dot{\tilde{x}} &= \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta, & \dot{\tilde{y}} &= \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta. \end{aligned}$$

Отсюда и из выражения для $c_{\tilde{z}}$ получаем полярную форму интеграла площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c_{\tilde{z}}. \quad (5)$$

Пусть теперь P и P' (рис. 121) — положения, которые занимает точка P в моменты t и $t + \Delta t$, где Δt — малая величина. Для площади криволинейного треугольника OPP' с точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $\Delta\theta$ имеем выражение

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt и устремив Δt к нулю, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (6)$$

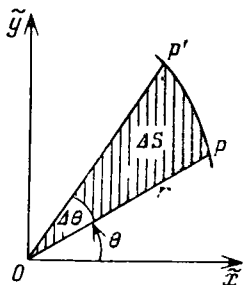


Рис. 121

Производная dS/dt в механике называется *секторной скоростью*. Из (5) и (6) для нее получаем выражение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} c_{\tilde{z}}.$$

Таким образом, секторная скорость точки P постоянна. В этом состоит геометрический смысл интеграла площадей.

Отсюда следует второй закон Кеплера: *площади, заметенные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.*

117. Интеграл энергии в задаче двух тел. Кинетическая и потенциальная энергия точки P в ее движении относительно притягивающего центра O определяются равенствами

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \quad \Pi = -\frac{mk}{r}.$$

Так как других сил, помимо потенциальных, нет и потенциал Π не зависит от времени, то полная механическая энергия $E = T + \Pi$ постоянна. Таким образом, в задаче двух тел существует интеграл энергии, который запишем в виде

$$v^2 - \frac{2k}{r} = h \quad (h = \text{const}). \quad (7)$$

Константа энергии h определяется начальным положением и скоростью точки P :

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}.$$

Из интеграла (7) следует, что при удалении точки P от точки O ее скорость убывает, а при приближении к точке O — возрастает. Если $h \geq 0$, то точка P может уйти от точки O на сколь угодно большое расстояние. Если же $h < 0$, то, как следует из (7), расстояние r между точками P и O не может превзойти величину $2k/|h|$, т. е. движение точки P происходит в ограниченной части пространства.

118. Интеграл Лапласа. Из (1) и (2) следует равенство

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^3} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}. \quad (8)$$

Но, так как

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{c} \times \mathbf{v})$$

и

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \dot{r} r^2 - r r \dot{r} = r^3 \frac{r \dot{r} - r \dot{r}}{r^2} = r^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

равенство (8) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{c} \times \mathbf{v} + k \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{f}. \quad (9)$$

Соотношение (9) называется *интегралом Лапласа*, а вектор $\mathbf{f}$ — *вектором Лапласа*. Знак минус в правой части (9) введен для удобства дальнейшего использования интеграла (9).

Из соотношения (9) сразу следует, что

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{f} = 0, \quad (10)$$

т. е. вектор Лапласа ортогонален векторной константе площадей и, следовательно, лежит в плоскости орбиты.

Модуль вектора Лапласа можно выразить через величину k и постоянные h , c интегралов энергии и площадей. В самом деле, учитывая ортогональность векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{v}$, из (9) имеем

$$f^2 = k^2 \frac{r^2}{r^2} + c^2 v^2 + \frac{2k}{r} (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}. \quad (11)$$

Используя свойства смешанного произведения векторов и равенство (2), получаем

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r} = -(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = -c^2.$$

Отсюда и из (7) следует, что соотношение (11) может быть записано в виде

$$f^2 = k^2 + hc^2. \quad (12)$$

119. Уравнение орбиты. Первый закон Кеплера. При помощи интеграла Лапласа и интеграла площадей можно получить уравнение орбиты точки P .

Из (9) сразу следует, что при $\mathbf{c} = 0$ орбита точки будет прямой линией: $\mathbf{r} = -\frac{r}{k} \mathbf{f}$. Пусть $\mathbf{c} \neq 0$. Умножим обе части интеграла Лапласа (9) скалярно на $\mathbf{r}$. Получим равенство

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) + \frac{k}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = -(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}).$$

Но, так как $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = -c^2$, это равенство можно записать в виде

$$-c^2 + kr = -fr \cos \nu, \quad (13)$$

где ν — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки P и вектором Лапласа $\mathbf{f}$ (рис. 122). Угол ν называется *истинной аномалией*.

Если ввести обозначения

$$e = \frac{f}{k}, \quad p = \frac{c^2}{k}, \quad (14)$$

то из (13) получим уравнение орбиты точки P в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (15)$$

Соотношение (15) представляет собой уравнение конического сечения, фокус которого находится в точке O . Величина p — параметр, e — эксцентриситет орбиты. Орбита точки P относительно точки O будет либо эллипсом ($e < 1$), либо параболой ($e = 1$), либо гиперболой ($e > 1$). При $e = 0$ орбита будет окружностью.

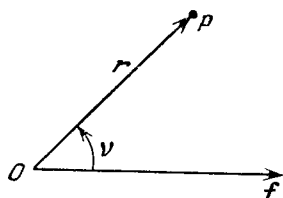


Рис. 122

Для орбит планет справедлив первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

120. Зависимость характера орбиты от величины начальной скорости. Первая и вторая космические скорости. Пусть орбита точки P не является прямолинейной, т. е. $c \neq 0$. Если задано начальное расстояние r_0 точки P от точки O , то характер орбиты точки P вполне определяется величиной ее скорости v_0 . Рассмотрим зависимость эксцентриситета орбиты от величины v_0 .

Из (12) и (14) получаем выражение для эксцентриситета

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{k^2}}.$$

По константа энергии h равна $v_0^2 - 2k/r_0$. Отсюда следует, что орбита будет эллиптической ($e < 1$), если $h < 0$. Это означает, что $v_0 < \sqrt{2k/r_0}$. Скорости, удовлетворяющие этому неравенству, называются *эллиптическими скоростями*.

Если $h = 0$, т. е. $v_0 = \sqrt{2k/r_0}$, то $e = 1$, и орбита будет параболой. Скорость $v_0 = \sqrt{2k/r_0}$ называется *параболической*. Она является наименьшей скоростью, которую надо сообщить точке P , находящейся на расстоянии r_0 от точки O , чтобы она удалилась на сколь угодно большое расстояние от точки O .

Орбита будет гиперболической ($e > 1$), если $h > 0$, т. е. $v_0 > \sqrt{2k/r_0}$. Такие скорости называются *гиперболическими*.

Первая космическая скорость v_I — это круговая скорость у поверхности Земли. Найдём ее величину. Пусть m — масса спутника, M — масса Земли, γ — универсальная гравитационная постоянная, g_0 — ускорение свободного падения у поверхности Земли. Тогда

$$\frac{mv_I^2}{r_0} = mg_0 = \gamma \frac{mM}{r_0^2}. \quad (16)$$

Так как $m \ll M$, то можно считать, что $k = \gamma(m + M) \simeq \gamma M$. Поэтому из (16) следует, что приближенно

$$v_I = \sqrt{g_0 r_0} = \sqrt{\frac{k}{r_0}}.$$

Принимая радиус Земли r_0 равным 6371 км, а величину g_0 равной $9,82 \text{ м/с}^2$, получим, что $v_I \simeq 7,91 \text{ км/с}$.

Вторая космическая скорость v_{II} — это параболическая скорость у поверхности Земли, т. е.

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2k}{r_0}} = \sqrt{2}v_I \simeq 11,2 \text{ км/с}.$$

121. Третий закон Кеплера. Пусть орбита точки P представляет собой эллипс с полуосями a и b . Из аналитической геометрии известно, что величины a и b выражаются через параметр эллипса и его эксцентриситет посредством формул

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (17)$$

Ближайшая к фокусу точка эллиптической орбиты называется *перигелием*, а наиболее удаленная от фокуса — *апогелием*. Перигелий и апогей обозначены на рис. 123 буквами π и α .

За время, равное периоду T обращения точки P по орбите, радиус-вектор $\overline{FP}$ заметет всю площадь эллипса. Учитывая, что площадь эллипса равна πab и что, согласно интегралу площадей, секторная скорость точки P постоянна и равна $c/2$, получаем равенство

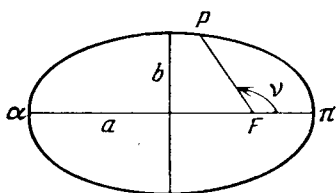


Рис. 123

$$\pi ab = \frac{1}{2} cT. \quad (18)$$

По из (14) и (17) следует, что $c = \sqrt{pk}$ и $p = b^2/a$. Поэтому из равенства (18) вытекает следующее выражение для периода обращения точки P :

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k}}. \quad (19)$$

Величина $n = 2\pi/T$ является средней угловой скоростью вращения радиуса-вектора $\overline{FP}$, в астрономии ее называют *средним движением*. Согласно (19)

$$n = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}}. \quad (20)$$

Рассмотрим две точки P_1 и P_2 массой m_1 и m_2 . Если пренебречь взаимным притяжением этих точек, то каждая из них будет двигаться вокруг точки O по коническому сечению. Пусть орбиты точек будут эллиптическими. Тогда для периодов их обращения имеем выражения

$$T_1 = \frac{2\pi a_1^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_1 + M)}}, \quad T_2 = \frac{2\pi a_2^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_2 + M)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_2 + M}{m_1 + M} \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (21)$$

При $m_1 \ll M$ и $m_2 \ll M$ это соотношение переходит в следующее

приближенное равенство:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (22)$$

Равенство (22) выражает третий закон Кеплера: *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей*.

122. Время в кеплеровском движении. Уравнение Кеплера. В предыдущих пунктах определен геометрический характер орбиты точки P . Орбита является коническим сечением и находится в плоскости, перпендикулярной векторной константе площадей $\mathbf{c}$. Положение самой орбиты в этой плоскости однозначно определяется вектором Лапласа $\mathbf{l}$, который проходит через точку O , являющуюся фокусом конического сечения, и направлен на перигецентр π .

Чтобы закончить решение задачи двух тел, осталось найти закон движения точки P по ее орбите. Будем считать, что орбита является эллиптической. Из интеграла площадей имеем $r^2 \dot{v} = c$. Отсюда, из уравнения орбиты (15) и равенств (14), (17) и (20) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{c}{r^2} = \frac{c}{p^2} (1 + e \cos v)^2 = \frac{V_k}{p^{3/2}} (1 + e \cos v)^2 = \\ &= \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + e \cos v)^2. \end{aligned}$$

Пусть τ — время прохождения точки P через перигецентр. Тогда из последнего уравнения получаем неявную зависимость $v = v(t)$:

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}} (t - \tau). \quad (23)$$

Если отсюда найдена функция $v = v(t)$, то закон движения точки по орбите известен.

Найденное решение задачи двух тел зависит от шести произвольных постоянных. За них могут быть приняты константа τ и пять из семи констант $c_x, c_y, c_z, h, f_x, f_y, f_z$, связанных двумя соотношениями (10) и (12).

Нахождение зависимости $v = v(t)$ из трансцендентного уравнения (23) представляет собой довольно трудную задачу. Введем вместо v новую переменную E , через которую v выражается очень просто, а зависимость $E = E(t)$ определяется уравнением, хотя тоже трансцендентным, но значительно более простым, нежели уравнение (23).

Связь между E и v зададим равенством

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (24)$$

Величина E называется *эксцентрисческой аномалией*. Можно показать, что она имеет следующий геометрический смысл. Через точку P проведем (рис. 124) перпендикуляр к большой полуоси орбиты до его пересечения в точке Q с окружностью, построенной на

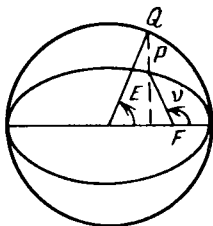


Рис. 124

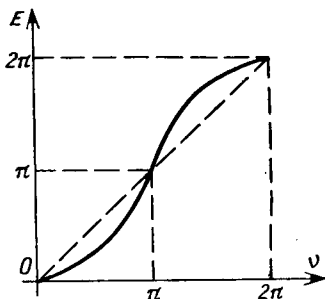


Рис. 125

большой оси как на диаметре. Угол, который составляет отрезок, соединяющий центр эллипса и точку Q , с большой полуосью орбиты, и будет эксцентрисческой аномалией E . Зависимость E от v представлена на рис. 125.

Из (24) следует, что

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE, \quad 1 + e \cos v = \frac{1-e^2}{1-e \cos E}.$$

Используя эти соотношения, получаем такое выражение для интеграла из левой части равенства (23):

$$\int_0^v \frac{dv}{(1+e \cos v)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \int_0^E (1-e \cos E) dE = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} (E - e \sin E). \quad (25)$$

Введем обозначение $n(t-\tau) = M$; величину M в астрономии называют *средней аномалией*. Тогда из (23) и (25) имеем следующее уравнение:

$$E - e \sin E = M. \quad (26)$$

Оно называется *уравнением Кеплера*.

123. Кеплеровские элементы орбиты. Решение задачи двух тел зависит от шести произвольных постоянных, определяемых начальными условиями движения. Их можно вводить по-разному и не обязательно именно так, как это было сделано в предыдущих пунктах в процессе решения задачи двух тел. Рассмотрим произвольные постоянные, которые носят название *кеплеровских элементов орбиты* и очень широко используются в небесной механике. За кеплеровские элементы принимаются следующие шесть величин, однозначно определяемых по начальным условиям: Ω , i , p , e , ω , τ .

Смысл величин p , e , τ ясен из предыдущих пунктов: p — параметр орбиты, e — ее эксцентриситет, τ — время прохождения через перигентр. Величина Ω — это угол, который составляет с осью Ox линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy (рис. 126); величина Ω называется *долготой восходящего узла*. Элемент i представляет собой угол между плоскостью орбиты и плоскостью Oxy ; величину i называют *наклоном орбиты*. Параметр ω определяет положение орбиты в ее плоскости, он называется *угловым расстоянием перигентра от узла* и равен углу между направлением из точки O на перигентр и линией пересечения плоскости орбиты с плоскостью Oxy .

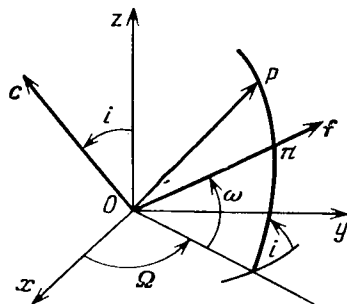


Рис. 126

124. О задаче трех и более тел. Задача n тел ($n \geq 2$) состоит в следующем. В пустоте находятся n материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения и скорости точек. Требуется найти положения всех точек как функции времени.

Эта задача не решена до сих пор. Более того, показано, что даже в случае трех тел помимо классических интегралов, существование которых следует из общих теорем об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии, дифференциальные уравнения движения не имеют других интегралов, которые выражались бы через алгебраические или через однозначные трансцендентные функции координат и скоростей точек.

Для небесной механики и космодинамики наиболее важна так называемая *ограниченная задача трех тел*. Она состоит в изучении движения точки малой массы под действием притяжения двух конечных масс в предположении, что точка малой массы не влияет на движение точек конечных масс. Тем самым в ограниченной задаче трех тел точки конечных масс движутся по орбитам, определяемым задачей двух тел, так что движение этих двух точек известно. Таким образом, анализ ограниченной задачи трех тел сводится к исследованию движения только одной точки малой массы. Конечно, эта задача значительно проще *общей* (неограниченной) задачи трех тел. Но и она не интегрируется (точнее, не проинтегрирована) в квадратурах.

§ 2. Движение твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле

125. Главный вектор сил тяготения. Гравитационный момент. В обычных, «земных» задачах механики, связанных с ее применением к устройствам, функционирующим вблизи или на поверх-

ности Земли, силы притяжения, приложенные к двум материальным точкам равных масс, считаются равными и по величине, и по направлению. Это приводит к известному положению о совпадении центра масс и центра тяжести и, как следствие, к равенству нулю главного момента сил тяготения (гравитационного момента) относительно центра масс.

В действительности силы притяжения различных точек тела Землей, как правило, не будут параллельными, так как они направлены к ее центру ¹⁾. Кроме того, разные точки тела находятся,

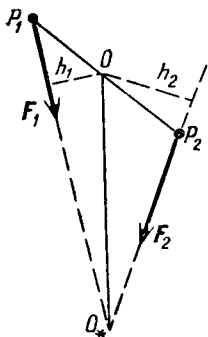


Рис. 127

вообще, на разных расстояниях от центра Земли. По этим причинам силы тяготения не обязательно должны приводиться к равнодействующей, проходящей через центр масс тела: возможен еще и гравитационный момент относительно центра масс. Появление гравитационного момента можно пояснить очень простым примером. Пусть две точки P_1 и P_2 одинаковых масс соединены жестким стержнем пренебрежимо малой массы. Пусть O — середина стержня (центр масс точек P_1 и P_2), а O_* — притягивающий центр (рис. 127). Пусть $O_*P_1 > O_*P_2$, тогда если h_1 — плечо силы F_1 , а h_2 — плечо силы F_2 относительно точки O , то

из сравнения площадей треугольников O_*P_1O и O_*P_2O получим

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{O_*P_1}{O_*P_2} > 1.$$

Отсюда и из неравенства $F_2 > F_1$, справедливого при $O_*P_1 > O_*P_2$, следует, что $F_2h_2 > F_1h_1$. Таким образом, появляется момент, стремящийся расположить стержень P_1P_2 вдоль прямой O_*O .

В обычных «земных» условиях гравитационные моменты малы по сравнению с другими воздействиями. В задачах же небесной механики они часто играют решающую роль. Например, движение Луны относительно центра масс почти полностью определяется гравитационными моментами, обусловленными притяжением Земли.

Рассмотрим задачу о движении свободного твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле. В соответствии с п. 108 для получения дифференциальных уравнений движения нужно знать главный вектор сил тяготения и их гравитационный момент относительно центра масс тела.

Пусть $OXYZ$ — система координат с началом в центре масс тела и осью OZ , направленной по прямой, соединяющей притягивающий

¹⁾ Мы предполагаем, что Земля представляет собой либо однородный, либо неоднородный шар, в каждой точке которого плотность зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Можно показать, что в этом случае гравитационное поле Земли такое же, какое создавалось бы материальной точкой, обладающей массой Земли и помещенной в ее геометрическом центре.

центр O_* и центр масс O тела (рис. 128). Ось OY направлена по бинормали к траектории центра масс в ту сторону, откуда его движение видно совершающимся против часовой стрелки, ось OX дополняет оси OY и OZ до правой прямоугольной системы координат. Систему координат $OXYZ$ обычно называют *орбитальной*.

Пусть R — радиус-вектор центра масс тела относительно притягивающего центра, а r — радиус-вектор выделенного в теле малого

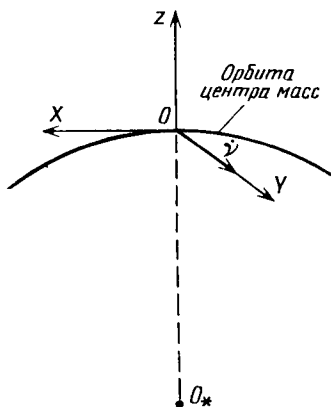


Рис. 128

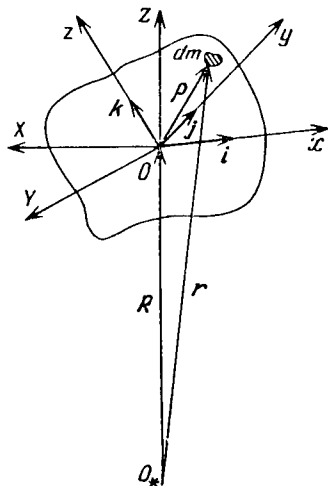


Рис. 129

элемента массой dm (рис. 129). Сила притяжения элемента dm определяется по формуле

$$dF = -\gamma \frac{M dm}{r^3} r, \quad (1)$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная, а M — масса притягивающего центра O_* . Главный вектор F сил притяжения тела получается из (1) путем интегрирования по всему объему тела. Произведем вычисления, считая линейные размеры тела много меньшими расстояния от центра масс тела до притягивающего центра. Это предположение вполне приемлемо для естественных и искусственных спутников планет.

Пусть ρ — радиус-вектор элемента dm , а X , Y , Z — его компоненты в орбитальной системе координат. Тогда

$$r = R + \rho, \quad r = R \sqrt{1 + 2 \frac{Z}{R} + \frac{\rho^2}{R^2}}. \quad (2)$$

Если пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то из (2)

получим разложение величины $1/r^3$ в ряд Тейлора в виде

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3Z}{R} \right). \quad (3)$$

Теперь надо величине r из (2) и величине $1/r^3$ из (3) подставить в формулу (1) и произвести интегрирование по всему объему тела. При этом следует учесть, что так как центр масс тела находится в начале координат, то

$$\int X dm = \int Y dm = \int Z dm = 0.$$

Произведя интегрирование, получим, что с упомянутой точностью главный вектор сил тяготения задается формулой

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{R^3} \mathbf{R},$$

где m — масса тела. Отсюда следует, что если пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то размеры тела не влияют на величину и направление главного вектора сил тяготения. Следовательно, в рассматриваемом приближении можно считать, что центр масс движется по коническому сечению. Это движение подробно изучено в предыдущем параграфе.

Найдем теперь гравитационный момент. Пусть $Oxyz$ — система координат, жестко связанная с твердым телом; ее оси направлены по главным центральным осям инерции тела (рис. 129). Ориентацию твердого тела относительно орбитальной системы координат будем определять при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ . Элементы a_{ij} матрицы перехода от системы координат $Oxyz$ к системе $OXYZ$ выражаются через углы Эйлера по формулам (3) п. 19.

На основании формулы (1) для главного момента $\mathbf{M}_O$ сил тяготения относительно центра масс получаем выражение

$$\mathbf{M}_O = \int \rho \times d\mathbf{F} = -\gamma M \int \frac{\rho \times \mathbf{r}}{r^3} dm, \quad (4)$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Вычисление интеграла (4) проведем, используя систему координат $Oxyz$. В этой системе

$$\rho = xi + yj + zk, \quad \mathbf{R} = R(a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k), \quad (5)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho = (x + Ra_{31})i + (y + Ra_{32})j + (z + Ra_{33})k, \quad (6)$$

$$\rho \times \mathbf{r} = R[(ya_{33} - za_{32})i + (za_{31} - xa_{33})j + (xa_{32} - ya_{31})k]. \quad (7)$$

Если в разложении величины $1/r^3$ в ряд Тейлора пренебречь величинами порядка $(\rho/R)^2$ и выше, то получим

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left[1 - \frac{3}{R} (xa_{31} + ya_{32} + za_{33}) \right]. \quad (8)$$

С той же точностью из (7) и (8) получаем

$$\frac{\rho \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{3}{R} (xa_{31} + ya_{32} + za_{33}) \right] [(ya_{33} - za_{32}) \mathbf{i} + (za_{31} - xa_{33}) \mathbf{j} + (xa_{32} - ya_{31}) \mathbf{k}]. \quad (9)$$

Подставим это выражение в формулу (4) и произведем интегрирование. Так как оси Ox , Oy , Oz являются главными центральными осями инерции тела, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int x \, dm &= \int y \, dm = \int z \, dm = 0, \\ \int xy \, dm &= \int xz \, dm = \int yz \, dm = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Произведя интегрирование и учтя равенства (10), получим

$$M_O = \frac{3\gamma M}{R^3} \int [(y^2 - z^2) a_{32} a_{33} \mathbf{i} + (z^2 - x^2) a_{33} a_{31} \mathbf{j} + (x^2 - y^2) a_{31} a_{32} \mathbf{k}] \, dm. \quad (11)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \int (y^2 - z^2) \, dm &= C - B, & \int (z^2 - x^2) \, dm &= A - C, \\ \int (x^2 - y^2) \, dm &= B - A, \end{aligned}$$

где A , B и C — моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz соответственно, получаем из (11) такие выражения для проекций M_x , M_y , M_z гравитационного момента на оси Ox , Oy , Oz связанной с телом системы координат:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{3\gamma M}{R^3} (C - B) a_{32} a_{33}, & M_y &= \frac{3\gamma M}{R^3} (A - C) a_{33} a_{31}, \\ M_z &= \frac{3\gamma M}{R^3} (B - A) a_{31} a_{32}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что выражения (12) являются приближенными. В них отброшены величины, порядок которых не ниже $(\rho/R)^2$.

126. Уравнения движения тела относительно центра масс. Для получения уравнений движения тела относительно центра масс используем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qp &= M_x, & B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= M_y, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= M_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Величины M_x , M_y , M_z вычисляются по формулам (12), в которых величина R имеет вид

$$R = \frac{p'}{1 + e \cos v}, \quad (14)$$

где p' и e — параметр и эксцентриситет орбиты, v — истинная аномалия, представляющая собой угол между радиусом-вектором $\mathbf{R}$ центра масс тела и линией, проходящей через притягивающий центр O_* и перигеицентр орбиты. Согласно п. 122, величина v удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{k}}{p'^{3/2}} (1 + e \cos v)^2. \quad (15)$$

Так как масса тела m много меньше массы притягивающего центра, то можно считать, что $k = \gamma M$.

Выразим проекции p, q, r абсолютной угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz через углы Эйлера, их производные и угловую скорость (15) движения центра масс по орбите. Для этого заметим, что твердое тело участвует в сложном движении: оно вращается относительно орбитальной системы координат $OXYZ$, а орбитальная система координат за счет движения центра масс по орбите вращается вокруг оси OY . Проекции угловой скорости первого из указанных вращений получаются из кинематических уравнений Эйлера, а угловая скорость второго вращения направлена по оси OY и равна $\dot{v}$. Поэтому

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{v} a_{21}, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{v} a_{22}, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} + \dot{v} a_{23}, \end{aligned} \quad (16)$$

где величины a_{ij} определены равенствами (3) п. 19.

Система семи уравнений (13), (15) и (16) с учетом равенств (12), (14) и формул (3) п. 19 является замкнутой системой дифференциальных уравнений, описывающей движение твердого тела относительно центра масс. Эти уравнения или их модификации широко используются при изучении движения искусственных спутников Земли.

Если в (13) и (16), используя (15), ввести вместо времени t новую независимую переменную — истинную аномалию v , то получим систему, состоящую из шести уравнений первого порядка. Если затем величины p, q, r из (16) подставить в (13), то придем к трем уравнениям второго порядка относительно углов Эйлера ψ, θ, φ .

Отметим еще, что если орбита центра масс эллиптическая и a — большая полуось орбиты, то согласно п. 120—122

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 + e \cos v)^2, \\ \frac{\gamma M}{R^3} &= \frac{n^2}{(1 - e^2)^3} (1 + e \cos v)^3, \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная n есть среднее движение центра масс, $n = \sqrt{\gamma M}/a^{3/2}$;

на круговой орбите ($e = 0$) n будет угловой скоростью вращения радиуса-вектора R .

127. Относительное равновесие твердого тела на круговой орбите. Если центр масс тела движется по круговой орбите, то существуют движения, отвечающие положениям относительного равновесия. Относительным равновесием тела мы называем такое его движение, когда оно покоится в орбитальной системе координат, т. е. для таких движений $\psi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Одно из таких движений определяется равенствами

$$\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \varphi = 0. \quad (18)'$$

Для этого движения оси Ox , Oy и Oz связанной с телом системы координат направлены вдоль осей OX , OY и OZ орбитальной системы координат соответственно.

Чтобы убедиться в существовании решения (18), заметим, что из уравнений (16) и формул (3) п. 19 следует, что на круговой орбите при $\psi = \theta = \varphi = 0$ имеем $a_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), $p = 0$, $r = 0$, $q = n = \text{const}$. Отсюда следует, что для решения (18) гравитационные моменты (12) обращаются в нуль и уравнения (13) тождественно удовлетворяются.

Можно показать, что существуют двадцать четыре геометрически различных положения равновесия. Они соответствуют всевозможным случаям совпадения главных центральных осей инерции спутника с осями орбитальной системы координат. С механической точки зрения (в рамках исследования задач динамики тела в гравитационном поле) существенно лишь то, какая из главных центральных осей инерции тела лежит вдоль данного направления. Очевидно, что из двадцати четырех геометрически различных положений равновесия механически различных существует только шесть: для каждого из трех положений одной из осей инерции (по радиусу-вектору центра масс, по касательной и по нормали к орбите) существует два различных положения другой оси инерции (что автоматически влечет два различных положения третьей оси инерции).

Можно также показать, что если гравитационный момент определяется согласно приближенным выражениям (12), то не существует положений относительного равновесия, для которых главные центральные оси инерции тела не совпадали бы с осями орбитальной системы координат.

Для движений, соответствующих положениям относительного равновесия, вектор абсолютной угловой скорости тела направлен по нормали к плоскости орбиты, а величина абсолютной угловой скорости тела равна величине угловой скорости n кругового движения центра масс тела, т. е. период вращения тела равен периоду движения центра масс. Отсюда следует, что тело все время обращено к притягивающему центру одной и той же своей стороной. В природе примером такого движения является движение Луны

(она «смотрит» на Землю одной стороной) и многих спутников планет, в технике — большое количество искусственных спутников Земли.

128. Плоские движения. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле допускают решения, которые отвечают плоским движениям тела. Для таких движений одна из главных центральных осей инерции тела все время перпендикулярна плоскости орбиты центра масс.

Получим дифференциальное уравнение плоских движений. Пусть для рассматриваемых движений главная ось инерции Oz тела перпендикулярна плоскости орбиты, т. е. во все время движения

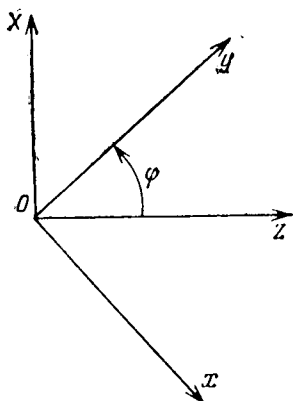


Рис. 130

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \pi. \quad (19)$$

Тогда формулы (3) п. 19 переходят в следующие:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\cos \varphi, & a_{12} &= \sin \varphi, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= 1, \\ a_{31} &= \sin \varphi, & a_{32} &= \cos \varphi, & a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для движения (19) оси инерции тела Ox и Oy лежат в плоскости орбиты. Их расположение относительно осей Ox и Oz орбитальной системы координат показано на рис. 130.

Из (12), (16) и (17) получаем, что при выполнении равенств (19) имеют место соотношения

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\nu}, \quad (21)$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = \frac{3n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (B - A) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (22)$$

Подставив (21) и (22) в систему (13), получим, что первые два ее уравнения удовлетворяются тождественно, а третье запишется в виде

$$C(\ddot{\varphi} + \ddot{\nu}) = 3 \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos \nu)^3 (B - A) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (23)$$

Это уравнение вместе с первым из соотношений (17)

$$\dot{\nu} = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \nu)^2 \quad (24)$$

образует систему двух дифференциальных уравнений, описывающих плоские движения твердого тела. Удобнее, однако, вместо двух уравнений (23), (24) рассматривать одно дифференциальное уравнение, которое получается из уравнения (23), если в нем при помощи (24) ввести вместо времени t новую независимую переменную — истинную аномалию v .

Имеем соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dv} \dot{v} = \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{d\varphi}{dv} (1 + e \cos v)^2, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \left[-\frac{d\varphi}{dv} \cdot 2e \sin v (1 + e \cos v) \dot{v} + (1 + e \cos v)^2 \frac{d^2\varphi}{dv^2} \dot{v} \right] = \\ &= \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 \left[(1 + e \cos v) \frac{d^2\varphi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\varphi}{dv} \right], \\ \ddot{v} &= \frac{d\dot{v}}{dv} \cdot \dot{v} = -\frac{2n^2 e \sin v}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos v)^3.\end{aligned}$$

Подставив $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{v}$ в уравнение (23), получим

$$\begin{aligned}C \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 \left[(1 + e \cos v) \frac{d^2\varphi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\varphi}{dv} - 2e \sin v \right] = \\ = 3 \frac{n^2}{(1-e^2)^3} (1 + e \cos v)^3 (B - A) \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение плоских движений твердого тела в центральном ньютоновском силовом поле

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2\varphi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\varphi}{dv} + 3 \frac{A-B}{C} \sin \varphi \cos \varphi = 2e \sin v. \quad (25)$$

Пусть орбита центра масс тела является круговой. Если ввести обозначение $2\varphi = \alpha$, то при $e = 0$ из (25) получим уравнение, описывающее плоские движения тела на круговой орбите в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2} + 3 \frac{A-B}{C} \sin \alpha = 0 \quad (v = nt). \quad (26)$$

Если $A > B$, то уравнение (26) будет уравнением движения физического маятника, движение которого подробно исследовано в п. 93—96. Если же $A < B$, то мы снова можем получить уравнение маятника, если вместо замены переменной $2\varphi = \alpha$ сделаем замену $2\varphi = \alpha + \pi$. Если $A = B$, то $\ddot{\varphi} = 0$, т. е. тело равномерно вращается вокруг нормали к плоскости орбиты с произвольной угловой скоростью.

Глава IX. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

§ 1. Основные понятия и теоремы

129. Понятие о системе переменного состава. До сих пор мы считали неизменными как массы m_v точек P_v , ($v = 1, 2, \dots, N$), составляющих систему, так и число N точек системы. Но в природе и технике часто бывает так, что в некоторые моменты времени какие-либо точки выходят из рассматриваемой материальной системы или входят в нее. В результате этого состав системы, т. е. совокупность точек, образующих данную систему, а значит, вообще говоря, и ее масса будут со временем изменяться.

Будем говорить, что данная механическая система является *системой переменного состава*, если либо масса системы, либо материальные точки, из которых она состоит, либо то и другое меняются со временем.

Случаи движения системы переменного состава можно встретить во многих явлениях природы. Так, например, масса Земли возрастает вследствие падения на нее метеоритов. Масса падающего метеорита уменьшается, так как частицы метеорита отрываются от него, благодаря воздействию атмосферы, или сгорают. У плавающей льдины, вследствие ее таяния, масса убывает и возрастает при замерзании льда или из-за падения снежинок на ее поверхность. Примерами систем переменного состава в технике могут служить: движущийся транспортер, на который в некоторые моменты кладут (или с которого снимают) грузы; ракеты различных систем, масса которых изменяется в процессе сгорания топлива; реактивный самолет, масса которого увеличивается за счет воздуха, засасываемого в его двигатель, и уменьшается при отбрасывании продуктов сгорающего топлива.

Почти все выводы, полученные в предыдущих главах, о движении механических систем опирались на второй закон Ньютона, устанавливающий зависимость между ускорением точки и действующей на нее силой. Однако второй закон Ньютона справедлив только для точки постоянного состава. Динамика систем переменного состава требует особого рассмотрения.

Примем следующее предположение о математической модели системы переменного состава: малы и массы отделяющихся или присоединяющихся к системе точек, и промежутки времени между двумя их последовательными присоединениями или отделениями. Это предположение дает возможность принять идеализацию, при которой масса $M_1(t)$ вышедших из системы точек и масса $M_2(t)$ вошедших в систему точек — непрерывные и дифференцируемые функции времени.

Если масса $M(t)$ системы при $t=0$ равнялась M_0 , то с течением времени она меняется по закону

$$M(t) = M_0 - M_1(t) + M_2(t),$$

где M_1 , M_2 — неубывающие неотрицательные функции времени и $M(t)$ непрерывна и дифференцируема.

Материальной точкой переменного состава мы будем называть частицу переменного состава, настолько малую, что ее положение и движение можно определить как для объекта, не имеющего размеров.

130. Теорема об изменении количества движения. Пусть некоторая совокупность материальных точек движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$. Рассмотрим замкнутую поверхность S , которая перемещается относительно $Oxyz$ и деформируется. Материальные точки при своем движении могут входить в область пространства, ограниченную поверхностью S , и могут выходить из нее.

Обозначим G систему переменного состава, образованную материальными точками, находящимися внутри поверхности S . Количество движения рассматриваемой системы обозначим Q .

Зафиксируем момент времени $t = t'$ и обозначим G^* систему постоянного состава, образованную теми и только теми материальными точками, которые в момент t' заполняли объем, ограниченный поверхностью S . Количество движения системы G^* обозначим Q^* . Так как при $t = t'$ системы G и G^* совпадают, то в этот момент

$$Q = Q^*. \quad (1)$$

В момент времени $t'' = t' + \Delta t$ количества движения систем G и G^* будут иметь соответственно значения $Q + \Delta Q$ и $Q^* + \Delta Q^*$. На рис. 131 сплошной линией показано положение поверхности S в момент t'' , а штриховой — положение поверхности, ограничивающей объем, заполненный в тот же момент t'' теми материальными точками, которые образуют систему G^* . Очевидно, что

$$Q + \Delta Q = Q^* + \Delta Q^* - \Delta Q_1 + \Delta Q_2, \quad (2)$$

где ΔQ_1 — сумма количеств движения в момент t'' тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S , а ΔQ_2 — сумма количеств движения в момент t'' точек, вошедших за время Δt в объем, ограниченный этой поверхностью. На рис. 131 эти точки заполняют соответственно объемы G_1 и G_2 .

Из (1) и (2) получаем

$$\Delta Q = \Delta Q^* - \Delta Q_1 + \Delta Q_2. \quad (3)$$

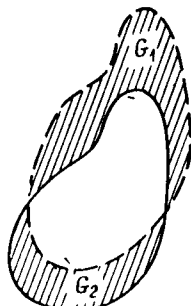


Рис. 131

Пусть $R^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе G (а следовательно, и к системе G^*) в момент времени t' . Поскольку система G^* является системой постоянного состава, то к ней применима теорема об изменении количества движения, т. е.

$$\frac{dQ^*}{dt} = R^{(e)}. \quad (4)$$

Разделив обе части равенства (3) на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим с учетом равенства (4),

$$\frac{dQ}{dt} = R^{(e)} + F_2, \quad (5)$$

где $F = F_1 + F_2$, а

$$F_1 = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_1}{\Delta t}, \quad F_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_2}{\Delta t}. \quad (6)$$

Векторные величины F_1 и F_2 имеют размерность силы. Условимся называть эти величины *реактивными силами*. Реактивная сила F_1 возникает за счет отделения материальных точек от рассматриваемой системы, а F_2 — за счет присоединения точек.

Таким образом, теорема об изменении количества движения системы переменного состава выглядит так же, как и в случае систем постоянного состава; надо только в число внешних сил системы включить еще добавочную (реактивную) силу $F = F_1 + F_2$.

131. Теорема об изменении кинетического момента. Пусть A — неподвижная точка в инерциальной системе координат $Oxyz$, $M_A^{(e)}$ — главный момент внешних сил и K_A — кинетический момент системы G относительно точки A . Совершенно аналогично п. 130 можно показать, что

$$\frac{dK_A}{dt} = M_A^{(e)} + M_A^{(F)}, \quad (7)$$

где $M_A^{(F)} = M_{A1}^{(F)} + M_{A2}^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что система G является системой переменного состава:

$$M_{A1}^{(F)} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta K_{A1}}{\Delta t}, \quad M_{A2}^{(F)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta K_{A2}}{\Delta t}. \quad (8)$$

Здесь ΔK_{A1} — сумма моментов количеств движения при $t = t''$ тех материальных точек, которые за время Δt вышли из объема, ограниченного поверхностью S , а ΔK_{A2} — аналогичная величина для точек, вошедших внутрь поверхности S .

§ 2. Движение материальной точки переменного состава

132. Дифференциальное уравнение движения. Пусть материальная точка P переменного состава движется относительно инерциальной системы отсчета $Oxyz$. Масса точки P изменяется со временем вследствие одновременного отделения и присоединения к ней малых частиц материи, размерами которых можно пренебречь.

Пусть u_1 — абсолютная скорость (скорость относительно $Oxyz$) частицы, которая отделяется от точки P в момент времени t' , а u_2 — абсолютная скорость частицы, которая присоединяется к P в этот момент. Пусть ΔM_1 и ΔM_2 — соответственно массы отделяющейся и присоединяющейся частиц. Тогда, применяя обозначения предыдущего пункта, имеем следующие равенства, справедливые с точностью до членов первого порядка малости включительно относительно Δt и ΔM_i ($i = 1, 2$):

$$\Delta Q_1 = \Delta M_1 u_1; \quad \Delta Q_2 = \Delta M_2 u_2,$$

и, следовательно, согласно формулам (6) п. 130

$$F_1 = - \frac{dM_1}{dt} u_1, \quad F_2 = \frac{dM_2}{dt} u_2. \quad (1)$$

Здесь, как и в п. 129, $M_1(t)$ и $M_2(t)$ представляют собой суммарную массу всех частиц, отделившихся от точки P и соответственно присоединившихся к ней за время t , прошедшее от момента $t=0$, когда масса точки P была равна M_0 .

Пусть v — абсолютная скорость точки P . Тогда ее количество движения вычисляется по формуле

$$Q = Mv. \quad (2)$$

Подставив (1) и (2) в уравнение (5) п. 130, получим

$$\frac{dM}{dt} v + M \frac{dv}{dt} = R - \frac{dM_1}{dt} u_1 + \frac{dM_2}{dt} u_2,$$

где R — равнодействующая сил, приложенных к точке P . Используя соотношение $M = M_0 - M_1 + M_2$, это равенство можно переписать в виде

$$- \frac{dM_1}{dt} v + \frac{dM_2}{dt} v + M \frac{dv}{dt} = R - \frac{dM_1}{dt} u_1 + \frac{dM_2}{dt} u_2.$$

Перенеся первые два слагаемых левой части в правую часть равенства, окончательно получим

$$M \frac{dv}{dt} = R - \frac{dM_1}{dt} (u_1 - v) + \frac{dM_2}{dt} (u_2 - v). \quad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением движения точки переменного состава и называется *обобщенным уравнением Мещерского*.

Отметим, что $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v} = \mathbf{u}_{1r}$ — скорость отделяющихся частиц относительно точки P . Аналогично $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v} = \mathbf{u}_{2r}$ — скорость присоединяющихся частиц относительно точки P .

Пусть имеет место только отделение частиц. Тогда $M_2 = 0$, $M_1(t) = M_0 - M_1(t)$ и $dM/dt = -dM_1/dt$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} + \frac{dM}{dt} \mathbf{u}_{1r}. \quad (4)$$

Уравнение (4) называется *уравнением Мещерского*. Из него видно, что эффект отделения частиц эквивалентен действию на точку P добавочной силы $\mathbf{F}_1 = \frac{dM}{dt} \mathbf{u}_{1r}$ (называемой *реактивной силой*). Аналогично можно рассмотреть и эффект присоединения частиц к точке P . Реактивная сила численно равна произведению величины dM/dt (называемой *секундным расходом массы*) на относительную скорость отделения (или присоединения) частиц к точке переменного состава P . В случае отделения частиц реактивная сила направлена противоположно вектору $\mathbf{u}_{1r}$ относительной скорости отделяющихся частиц, а в случае присоединения частиц реактивная сила и относительная скорость $\mathbf{u}_{2r}$ имеют одинаковые направления.

Пусть имеет место только отделение частиц от точки P переменного состава. Если абсолютная скорость $\mathbf{u}_1$ отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение Мещерского (4) примет вид

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} - \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_s$$

или

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{R},$$

т. е. если абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то производная по времени от количества движения точки P переменного состава равна равнодействующей приложенных к ней сил.

Если же относительная скорость $\mathbf{u}_1$ отделяющихся частиц равна нулю, то из (4) получаем

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R},$$

т. е. если относительная скорость отделяющихся частиц равна нулю, то уравнение движения точки P переменного состава записывается формально в том же виде, что и уравнения движения точки постоянного состава.

133. Движение ракеты вне поля сил. Пусть точка P переменного состава движется в безвоздушном пространстве вне поля сил. Движение точки моделирует, например, движение ракеты в космическом пространстве, если ракету принять за точку и пренебречь силами сопротивления космической среды, гравитационным притяжением, силами светового давления и т. п. Тогда $\mathbf{R} = 0$ и из равенств

ства (4) получаем векторное уравнение движения ракеты

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dM}{dt} \mathbf{u}_r, \quad (5)$$

где $\mathbf{u}_r$ — относительная скорость отделения продуктов сгорания топлива. Будем считать, что скорость $\mathbf{u}_r$ постоянна и имеет направление, противоположное скорости $\mathbf{v}$ ракеты. Тогда ракета будет двигаться по прямой линии, имеющей направление вектора $\mathbf{v}$. Примем эту прямую за ось Ox (рис. 132). Проектируя обе части равенства (5) на ось Ox , получаем

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} u_r, \quad (6)$$

где u_r — величина относительной скорости $\mathbf{u}_r$. Полагая, что при $t=0$ масса ракеты равна M_0 , а ее скорость равна v_0 , и интегрируя (6), получаем

$$v(t) = v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M(t)}. \quad (7)$$

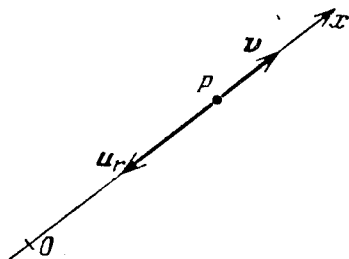


Рис. 132

Отсюда видно, что скорость ракеты в данный момент времени зависит от отношения начальной массы к текущему ее значению. Пусть M_1 — начальная масса топлива, а M_k — конечная масса ракеты после того, как израсходовано все топливо (т. е. масса корпуса ракеты, полезных грузов и оборудования). Тогда $M_0 = M_k + M_1$, и для скорости ракеты, которую она приобретет в конце процесса сгорания топлива, получаем из (7) следующее выражение, называемое *формулой Циолковского*:

$$v_k = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{M_1}{M_k} \right). \quad (8)$$

Из этой формулы следует, что предельная скорость ракеты v_k зависит только от относительного запаса топлива и относительной скорости истечения продуктов его сгорания. От закона изменения массы ракеты (режима работы двигателя) предельная скорость ракеты не зависит; если задано отношение $M_1/M_k = Z$ (называемое *числом Циолковского*), то предельная скорость будет вполне определенной независимо от того, быстро или медленно происходило сгорание топлива.

Путь, пройденный ракетой на активном участке траектории, зависит от закона сгорания топлива. Полагая, что $x=0$ при $t=0$, из (7) получаем

$$x = v_0 t + u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt. \quad (9)$$

134. Вертикальное движение ракеты в однородном поле тяжести.

Пусть ракета движется вертикально вверх в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления среды. Ракету принимаем за материальную точку. Начальная скорость ракеты равна нулю, начальная масса M_0 . Относительная скорость u_r отделения продуктов сгорания топлива постоянна и направлена вертикально вниз. Требуется найти скорость ракеты и высоту ее подъема как функции времени, считая, что закон изменения массы ракеты со временем задан.

На ракету действует внешняя сила — сила тяжести, направленная вертикально вниз. Примем прямую, по которой движется ракета, за ось Oz (рис. 133). Проскитируя обе части уравнения (4) на ось Oz , получаем

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt} u_r.$$

Интегрируя это уравнение, находим зависимость скорости ракеты от времени

$$v = u_r \ln \frac{M_0}{M(t)} - gt. \quad (10)$$

Рис. 133

Если положить, что при $t = 0$ $z = 0$, то, проинтегрировав (10), найдем, что зависимость высоты подъема ракеты от времени задается формулой

$$z = u_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M(t)} dt - \frac{gt^2}{2}. \quad (11)$$

Пусть масса ракеты изменяется по экспоненциальному закону:

$$M = M_0 e^{-\alpha t}, \quad (12)$$

где α — постоянный положительный коэффициент, характеризующий быстроту сгорания топлива. Масса M_1 отброшенных продуктов сгорания возрастает по закону

$$M_1 = M_0 (1 - e^{-\alpha t}).$$

Для величины F_1 реактивной силы, согласно первой из формул (1) п. 132, получаем выражение

$$F_1 = \alpha M_0 e^{-\alpha t} u_r = \alpha u_r M,$$

т. е. величина αu_r есть ускорение, сообщаемое ракете за счет реактивной силы.

Для закона изменения массы (12) из (10) и (11) получаем

$$v = (\alpha u_r - g)t, \quad z = \frac{1}{2} (\alpha u_r - g)t^2. \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что вертикальный подъем ракеты

возможен только при $\alpha u_r > g$. Это означает, что ускорение ракеты за счет реактивной силы должно быть больше ускорения свободного падения.

Пусть запас топлива M_T задан. Из (12) найдем время t_k сгорания топлива. Так как в конце процесса сгорания $M = M_k$, то из (12) получаем

$$M_k = M_0 e^{-\alpha t_k}.$$

Учитывая, что $M_0 = M_k + M_T$ и вводя обозначение $\beta = \ln(1 + M_T/M_k)$, получаем отсюда

$$t_k = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (14)$$

Из (13) следует, что скорость v_k ракеты в конце процесса сгорания топлива и длина z_k активного участка траектории ракеты определяются формулами

$$v_k = \beta \left(u_r - \frac{g}{\alpha} \right), \quad z_k = \frac{\alpha u_r - g}{2\alpha^2} \beta^2. \quad (15)$$

После сгорания топлива, т. е. при $t > t_k$, масса ракеты остается постоянной, и, имея при $t = t_k$ скорость v_k , она пройдет до наибольшей высоты подъема расстояние

$$s = \frac{v_k^2}{2g} = \frac{\beta^2}{2g} \left(u_r - \frac{g}{\alpha} \right)^2. \quad (16)$$

Для полной высоты подъема $h = z_k + s$ из (15) и (16) получаем выражение

$$h = \frac{\beta^2 u_r}{2} \left(\frac{u_r}{g} - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (17)$$

Отсюда следует, что при возрастании α растет и наибольшая высота подъема ракеты. Наибольшая высота $h_{\max}$ соответствует случаю $\alpha = \infty$, т. е. случаю мгновенного сгорания топлива. При этом

$$h_{\max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{2g}. \quad (18)$$

Найдем, при каком значении α длина z_k активного участка будет наибольшей. Из (15) имеем

$$\frac{\partial z_k}{\partial \alpha} = \beta^2 \frac{2g - \alpha u_r}{2\alpha^3}, \quad \frac{\partial^2 z_k}{\partial \alpha^2} = \beta^2 \frac{\alpha u_r - 3g}{\alpha^4}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что при $\alpha = 2g/u_r$, т. е. когда ускорение, сообщаемое ракете реактивной силой, вдвое больше ускорения свободного падения, величина z_k будет максимальной. Из (15) находим, что

$$z_{k\max} = \frac{\beta^2 u_r^2}{8g}.$$

При этом для высоты h подъема ракеты, согласно (17), получаем

$$h = \frac{\beta^2 u_r^2}{4g},$$

т. е. при наибольшей длине активного участка траектории ракеты полная высота ее подъема вдвое меньше наибольшей возможной высоты, задаваемой равенством (18).

§ 3. Уравнения движения тела переменного состава

135. Движение вокруг неподвижной точки. *Твердым телом переменного состава* будем называть такую механическую систему, которая образована материальными точками P_v ($v = 1, 2, \dots, N$), расстояние между которыми остается постоянным, причем хотя бы одна из точек P_v является материальной точкой переменного состава.

Если $m_v(t)$ — масса точки P_v , то

$$m_v(t) = m_v(0) - m_{v1}(t) + m_{v2}(t) \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $m_{v1}(t)$ ($m_{v2}(t)$) — суммарная масса частиц, потерянных точкой P_v за время t (соответственно присоединившихся к точке P_v). Неотрицательные неубывающие функции $m_{v1}(t)$, $m_{v2}(t)$ считаем непрерывными и дифференцируемыми.

Пусть твердое тело переменного состава имеет одну неподвижную точку O . Для получения дифференциальных уравнений движения тела воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы переменного состава. Пусть система координат $Oxyz$ жестко связана с телом, а K_O — кинетический момент тела относительно точки O . Если ω — угловая скорость тела, то из равенства (7) п. 131 получаем

$$\frac{dK_O}{dt} + \omega \times K_O = M_O^{(e)} + M_O^{(F)}, \quad (2)$$

где d/dt означает локальную (в системе $Oxyz$) производную, $M_O^{(e)}$ — главный момент внешних сил относительно точки O , $M_O^{(F)}$ — дополнительный момент, возникающий за счет того, что тело имеет переменный состав.

Найдем вектор $M_O^{(F)}$. Пусть Δm_{v1} — масса частиц, отделившихся от точки P_v , Δm_{v2} — масса частиц, присоединившихся к точке P_v за время Δt . Если u_{v1} и u_{v2} — абсолютные скорости отходящих и присоединяющихся частиц в момент времени t , то с точностью до членов первого порядка малости относительно Δm_{v1} , Δm_{v2} , Δt имеем

$$\begin{aligned} \Delta K_{O1} &= \sum_{v=1}^N \Delta m_{v1} \rho_v \times u_{v1}, \\ \Delta K_{O2} &= \sum_{v=1}^N \Delta m_{v2} \rho_v \times u_{v2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ_v — радиус-вектор материальной точки P_v относительно неподвижной точки O тела. Из (3) и формул (8) п. 131 получаем

$$\mathbf{M}_O^{(F)} = - \sum_{v=1}^N \frac{dm_{v1}}{dt} \rho_v \times \mathbf{u}_{v1} + \sum_{v=1}^N \frac{dm_{v2}}{dt} \rho_v \times \mathbf{u}_{v2}. \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{v}_v$ — скорость точки тела P_v , а $\mathbf{u}_{v1}^{(r)}$ и $\mathbf{u}_{v2}^{(r)}$ — соответственно скорости присоединяющейся и отделяющейся частиц относительно точки P_v . Тогда $\mathbf{u}_{vi} = \mathbf{v}_v + \mathbf{u}_{vi}^{(r)}$ ($i = 1, 2$), что позволяет записать равенство (4) в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^{(F)} = \sum_{v=1}^N \rho_v \times \left(- \frac{dm_{v1}}{dt} \mathbf{u}_{v1}^{(r)} + \frac{dm_{v2}}{dt} \mathbf{u}_{v2}^{(r)} \right) + \\ + \sum_{v=1}^N \rho_v \times \left(- \frac{dm_{v1}}{dt} + \frac{dm_{v2}}{dt} \right) \mathbf{v}_v. \end{aligned} \quad (5)$$

При помощи соотношения (1) это равенство приводится к виду

$$\mathbf{M}_O^{(F)} = \sum_{v=1}^N \rho_v \times \left(- \frac{dm_{v1}}{dt} \mathbf{u}_{v1}^{(r)} + \frac{dm_{v2}}{dt} \mathbf{u}_{v2}^{(r)} \right) + \sum_{v=1}^N \rho_v \times \frac{dm_v}{dt} \mathbf{v}_v. \quad (6)$$

Согласно уравнению (3) п. 132, первая сумма в (6) представляет собой главный момент $\mathbf{M}_O^{(r)}$ реактивных сил относительно точки O . Замечая, что $\mathbf{v}_v = \boldsymbol{\omega} \times \rho_v$ и проводя преобразования, совершенно аналогичные преобразованиям, проведенным в п. 82, получим, что вторая сумма в (6) равна $\frac{d\mathbf{J}}{dt} \boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{J}$ — матрица тензора инерции тела для точки O (которая является функцией времени). Таким образом, дополнительный момент $\mathbf{M}_O^{(F)}$, появляющейся за счет того, что рассматриваемое тело является системой переменного состава, может быть представлен в форме

$$\mathbf{M}_O^{(F)} = \mathbf{M}_O^{(r)} + \frac{d\mathbf{J}}{dt} \boldsymbol{\omega}. \quad (7)$$

Согласно формуле (9) п. 82, кинетический момент тела $\mathbf{K}_o$ может быть записан в виде $\mathbf{K}_o = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$. Отсюда и из равенств (2), (7) получаем

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{(e)} + \mathbf{M}_O^{(r)} + \frac{d\mathbf{J}}{dt} \boldsymbol{\omega},$$

или

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{(e)} + \mathbf{M}_O^{(r)}. \quad (8)$$

Если J_x, J_y, J_z и J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — осевые и центробежные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz , то векторное уравнение (8) запишется в виде трех скалярных

уравнений (3) п. 97, в правых частях которых появятся дополнительные слагаемые $M_x^{(r)}$, $M_y^{(r)}$, $M_z^{(r)}$, являющиеся проекциями момента реактивных сил на оси Ox , Oy , Oz . В общем случае, когда момент внешних сил зависит от ориентации тела в пространстве, при исследовании движения тела вокруг неподвижной точки к этим уравнениям надо добавить еще три кинематических уравнения Эйлера.

Если в процессе отбрасывания и присоединения частиц оси Ox , Oy , Oz остаются главными осями инерции, то скалярная форма уравнения (8) примет форму динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= M_x + M_x^{(r)}, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= M_y + M_y^{(r)}, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= M_z + M_z^{(r)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где A , B , C — моменты инерции тела (зависящие от времени) относительно осей Ox , Oy , Oz , а M_x , M_y , M_z — проекции главного момента внешних сил на эти оси.

136. Вращение вокруг неподвижной оси. Пусть Oz — неподвижная ось, вокруг которой вращается тело переменного состава. Тогда $p \equiv 0$, $q \equiv 0$, $r \equiv \omega_z(t)$. Для получения уравнения движения тела спроектируем обе части векторного уравнения (8) на ось Oz . Получим

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z + M_z^{(r)}. \quad (10)$$

Это и будет дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz . От соответствующего уравнения для тела постоянного состава оно отличается наличием в правой части дополнительного слагаемого $M_z^{(r)}$, являющегося проекцией момента реактивных сил на ось Oz , и тем, что момент инерции J_z тела относительно этой оси является переменной величиной.

Пример. Тело, имеющее форму кольца радиусом r , вращается под действием постоянного момента M вокруг неподвижной вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии. Когда тело приобрело угловую скорость ω , потребовалось затормозить его. Для таких целей на внешнем ободе кольца на противоположных концах диаметра установлены два реактивных двигателя. Относительная скорость истечения газов в двигателях направлена по касательной к ободу кольца и равна u ; секундный расход топлива равен q , начальный момент инерции тела с топливом равен J_0 . Требуется найти расход топлива, необходимый для полного торможения тела.

Согласно (10), дифференциальное уравнение, описывающее вращение тела, будет таким:

$$(J_0 - qr^2) \frac{d\omega}{dt} = M - qur. \quad (11)$$

Торможение вращения тела возможно, если величина реактивного момента достаточно велика ($qur > M$). Решив уравнение (11), получим зависимость угловой скорости тела от времени:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{qur - M}{qr^2} \ln \left(1 - \frac{qr^2}{J_0} t \right).$$

Из уравнения $\omega(\tau) = 0$ найдем время τ торможения вращения тела, а затем по формуле $m = q\tau$ вычислим необходимый расход топлива. В результате получим

$$m = \frac{J_0}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{qr^2 \omega_0}{qur - M}} \right).$$

Глава X. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. Уравнения Лагранжа (второго рода)

137. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Рассмотрим систему N материальных точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$). Если система несвободна, то наложенные на нее связи предполагаются удерживающими и идеальными. Пусть δr_v — виртуальное перемещение точки P_v , m_v — ее масса, w_v — ускорение в инерциальной системе координат, а F_v — равнодействующая всех активных сил, приложенных к точке P_v . Тогда имеет место общее уравнение динамики (п. 57)

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v w_v) \cdot \delta r_v = 0. \quad (1)$$

В том случае, когда все или некоторые из связей не идеальны, к величинам F_v следует добавить часть G_v равнодействующей реакций связей, действующих на точку P_v , которая не удовлетворяет условию идеальности. После этого изучаемую систему можно формально рассматривать как систему с идеальными связями.

Общее уравнение динамики (1) мы принимаем за исходное при получении основных дифференциальных уравнений аналитической динамики, которым посвящена данная глава. Фактически все изучаемые ниже уравнения движения материальных систем являются только различными формами записи уравнения (1), к которым оно приводится при тех или иных предположениях о характере активных сил, действующих на систему, и о наложенных на нее связях.

Пусть на систему наложено r геометрических и s кинематических неинтегрируемых связей. Пусть $q_1, q_2, \dots, q_m$ — обобщенные координаты системы. Их число m равно $3N - r$. Тогда радиусы-векторы r_v точек P_v относительно начала инерциальной системы координат записываются в виде функций аргументов $q_1, q_2, \dots, q_m, t$

$$r_v = r_v(q_1, q_2, \dots, q_m, t), \quad (2)$$

которые предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Если система склерономна, то обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$ можно выбрать так, чтобы функции r_v не зависели от t .

Из (2) получаем (см. п. 16)

$$\mathbf{v}_v = \dot{\mathbf{r}}_v = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

$$\delta \mathbf{r}_v = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \delta q_j \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Запишем общее уравнение динамики (1) в обобщенных координатах. Для элементарной работы активных сил имеем выражение

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j, \quad (5)$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j . Она в общем случае является функцией $q_l, \dot{q}_l$ и t ($l = 1, 2, \dots, m$).

Преобразуем выражение для элементарной работы сил инерции на виртуальном перемещении системы. Пользуясь формулой (4) и меняя порядок суммирования, получаем предварительно

$$\begin{aligned} - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v &= - \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\dot{\mathbf{r}}_v}{dt} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{v=1}^N m_v \frac{d\dot{\mathbf{r}}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \end{aligned} \quad (6)$$

По

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\dot{\mathbf{r}}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \right) - \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Последнее равенство при помощи формул (25) п. 16 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\dot{\mathbf{r}}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \right) - \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_v}{\partial q_j} \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (7)$$

Если использовать выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2,$$

то равенство (7) можно переписать в виде

$$\sum_{v=1}^N m_v \frac{d\dot{\mathbf{r}}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (8)$$

Подставив (8) в формулу (6), получим выражение для элементарной работы сил инерции в виде

$$-\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = -\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (9)$$

Подставим теперь выражения (5) и (9) в соотношение (1) и умножим обе части полученного равенства на -1 . В результате получим *общее уравнение динамики в обобщенных координатах*:

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (10)$$

138. Уравнения Лагранжа. Пусть система голономна. Тогда величины δq_j ($j = 1, 2, \dots, m$) независимы и число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы ($m = n$). В силу независимости величин δq_j уравнение (10) удовлетворяется тогда и только тогда, когда равны нулю коэффициенты при всех δq_j . Поэтому уравнение (10) эквивалентно следующей системе n уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Уравнения (11) называются *уравнениями Лагранжа второго рода*¹⁾. Они образуют систему n уравнений второго порядка относительно n функций $q_i(t)$. Порядок этой системы равен $2n$. Заметим, что это наименьший возможный порядок дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы, так как начальные значения величин q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) могут быть произвольными.

Для получения уравнений Лагранжа надо выразить кинетическую энергию T системы через обобщенные координаты и скорости, найти обобщенные силы и привести указанные в (11) дифференцирования функции $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ по обобщенным координатам, обобщенным скоростям и времени. Заметим, что форма уравнений Лагранжа не зависит от выбора обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_n$. При другом их выборе изменились бы только функции T и Q_i , а сама форма уравнений (11) осталась бы той же. В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа второго рода обладают свойством *ковариантности*.

¹⁾ Уравнения (11) для краткости мы часто будем называть просто уравнениями Лагранжа.

В уравнениях Лагранжа не содержатся реакции идеальных связей. Если же нужно найти реакции связей, то надо после интегрирования уравнений Лагранжа подставить функции $q_i(t)$ в выражения (2), и тогда равнодействующая R_v реакций связей, приложенных к точке P_v , найдется из соотношений

$$R_v = m\ddot{\mathbf{r}}_v - \mathbf{F}_v(\mathbf{r}_v, \dot{\mathbf{r}}_v, t).$$

Примеры. 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси u . Здесь $n = 1$. За обобщенную координату примем угол φ поворота тела вокруг оси u . Обобщенная сила Q_φ равняется главному моменту $M_u^{(e)}$ внешних сил относительно оси u (см. пример 2 п. 54). Кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{1}{2} J_u \dot{\varphi}^2,$$

где J_u — момент инерции тела относительно оси u . Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_u \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_u \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

имеет вид

$$J_u \ddot{\varphi} = M_u^{(e)}.$$

2. Уравнения движения сферического маятника. Сферический маятник представляет собой материальную точку, которая движется в однородном поле тяжести, оставаясь на сфере постоянного радиуса. Будем считать, что точка имеет массу m и закреплена на одном из концов невесомого стержня длиной l ; другой конец стержня при помощи шарнира прикреплен к неподвижной точке O так, что стержень может иметь произвольное направление в пространстве (рис. 134). Трением пренебрегаем.

Сферический маятник имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем сферические координаты φ, θ точки m . Так как расстояние точки m до начала координат постоянно и равно l , то, согласно формуле (30) п. 9, для кинетической энергии имеем выражение

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (12)$$

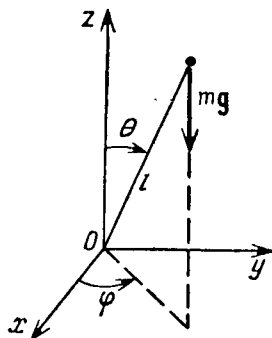


Рис. 134

Для нахождения обобщенной силы Q_φ дадим точке виртуальное перемещение по параллели. Тогда $\delta A_\varphi = 0$ и, следовательно, $Q_\varphi = 0$. Чтобы найти обобщенную силу Q_θ , дадим точке виртуальное перемещение по меридиану. Тогда $\delta A_\theta = mg \sin \theta \cdot l \delta \theta = Q_\theta \delta \theta$. Отсюда $Q_\theta = mgl \sin \theta$.

Для координат θ и φ (после деления обеих частей уравнений Лагранжа на постоянные множители) получаем также уравнения:

$$\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0. \quad (13)$$

139. Анализ выражения для кинетической энергии. Рассмотрим структуру выражения для кинетической энергии системы, записанной через обобщенные координаты и скорости. Используя формулу (3), кинетическую энергию можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^m a_j \dot{q}_j + a_0, \quad (14)$$

где введены обозначения

$$a_{jk} = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_k}, \quad a_j = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}, \quad a_0 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right)^2. \quad (15)$$

Величины a_{jk} , a_j , a_0 — функции от $q_1, q_2, \dots, q_m, t$.

Формула (14) показывает, что кинетическая энергия является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей и представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (16)$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{j=1}^m a_j \dot{q}_j, \quad T_0 = a_0.$$

В случае склерономной системы $\partial \mathbf{r}_v / \partial t = 0$ ($v = 1, 2, \dots, N$) и из (15) следует, что $a_j = 0$, $a_0 = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Поэтому

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (17)$$

т. е. кинетическая энергия склерономной системы является квадратичной формой обобщенных скоростей, причем коэффициенты a_{jk} в (17) не зависят явно от времени.

Покажем, что квадратичная форма T_2 является невырожденной. Это означает, что определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля при любых $q_1, q_2, \dots, q_m, t$:

$$\det \| a_{jk} \|_{j,k=1}^m \neq 0. \quad (18)$$

В самом деле, из того, что квадратичная форма T_2 может быть записана в виде

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2, \quad (19)$$

сразу следует, что она неотрицательна: $T_2 \geq 0$.

Докажем теперь, что она может обратиться в нуль только тогда, когда все $\dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) равны нулю. Допустим, что это не так, т. е. что T_2 может равняться нулю при некоторых значениях обобщенных скоростей $\dot{q}_1^*, \dot{q}_2^*, \dots, \dot{q}_m^*$, среди которых есть отличные от нуля. Тогда каждое выражение, заключенное в скобки в формуле (19), должно обратиться в нуль, т. е.

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial r_v}{\partial q_j} \dot{q}_j^* = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

В скалярной форме эти векторные равенства запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^m \dot{q}_j^* \frac{\partial x_v}{\partial q_j} = 0, \quad \sum_{j=1}^m \dot{q}_j^* \frac{\partial y_v}{\partial q_j} = 0, \quad \sum_{j=1}^m \dot{q}_j^* \frac{\partial z_v}{\partial q_j} = 0$$

$$(v = 1, 2, \dots, N). \quad (20)$$

Равенства (20) показывают, что столбцы матрицы (22) п. 14 линейно зависимы, т. е. ранг этой матрицы меньше m . Согласно п. 14 это невозможно, если величины $q_1, q_2, \dots, q_m$ являются обобщенными координатами.

Таким образом, квадратичная форма T_2 определенно положительна. Из критерия Сильвестра тогда следует, что определитель, составленный из ее коэффициентов, положителен. Следовательно, справедливо неравенство (18).

З а м е ч а н и е. Если при данном выборе обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_m$ для некоторых положений системы неравенство (18) не выполняется, то это означает, что при исследовании движения системы вблизи этих положений величины $q_1, q_2, \dots, q_m$ в качестве обобщенных координат малоприспособны. В окрестности таких положений системы целесообразно вводить другие обобщенные координаты.

В качестве примера рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O . Пусть A, B, C — главные моменты инерции, а p, q, r — проекции угловой скорости тела на его главные оси инерции для точки O . Кинетическая энергия тела вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (21)$$

В качестве обобщенных координат примем углы Эйлера ψ, θ, φ , вводимые обычным образом (п. 19). Найдем величину $\dot{T}$ при значении угла θ , равном 0 или π . Используя кинематические уравнения Эйлера (п. 36), получим из (21)

$$T = \frac{1}{2} [(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + C (\dot{\psi} \pm \dot{\varphi})^2], \quad (22)$$

где знаки плюс и минус отвечают значениям θ , равным 0 и π соответственно.

Определитель квадратичной формы (22) равен нулю. Следовательно, при значениях θ , близких 0 или π , вводимые обычным образом углы Эйлера неудобны для описания движения тела. Этот факт уже отмечался в п. 19.

140. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений. Используя структуру (16) выражения кинетической энергии, уравнения Лагранжа (11) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \ddot{q}_k = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

где функции g_i не зависят от обобщенных ускорений. Из предыдущего пункта следует, что определитель линейной относительно $\ddot{q}_i$ системы уравнений (23) отличен от нуля, поэтому она разрешима и имеет единственное решение

$$\ddot{q}_i = G_i(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (24)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, при некоторых ограничениях на G_i (например при существовании непрерывных частных производных у функций G_i , которое в механике всегда предполагается) система уравнений (24) имеет единственное решение при произвольных начальных данных: $q_i = q_i^0$, $\dot{q}_i = \dot{q}_i^0$ при $t = t_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, уравнения Лагранжа удовлетворяют условию детерминированности движения (см. п. 45).

141. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Пусть обобщенные силы Q_i вычисляются по формулам

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где потенциал (потенциальная энергия) Π есть функция $q_1, q_2, \dots, q_n, t$.

Уравнения Лагранжа (11) в случае потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Положим $L = T - \Pi$, тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* (лагранжианом, кинетическим потенциалом).

Используя выражение (16), функцию Лагранжа можно представить в виде многочлена второй степени относительно обобщенных скоростей

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \quad (26)$$

где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \quad (27)$$

Замечание. Для получения дифференциальных уравнений движения (25) голономной системы в потенциальном поле сил надо знать только одну функцию — функцию Лагранжа L . Уравнения Лагранжа не изменятся, если к функции L добавить полную производную по времени от произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции f от обобщенных координат и времени:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

В самом деле, из последнего равенства имеем следующие два соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{df}{dt} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}. \end{aligned}$$

Правые части этих равенств одинаковы, так как f дважды непрерывно дифференцируема, и поэтому возможно изменение порядка ее дифференцирования по q_i , q_k , t . Поэтому если в (25) вместо L подставить $L + \frac{df}{dt}$, то величины $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{df}{dt} \right)$ взаимно уничтожатся, и уравнения Лагранжа останутся неизменными.

142. Теорема об изменении полной механической энергии голономной системы. Пусть помимо потенциальных сил к системе приложены также некоторые непотенциальные силы. Часть обобщенных сил, соответствующую непотенциальным силам, обозначим через Q_i^* . Тогда

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и уравнения Лагранжа (11) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Найдем производную по времени от кинетической энергии $T(q_k, \dot{q}_k, t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (29) \end{aligned}$$

Далее воспользуемся выражением (16) и теоремой Эйлера об однородных функциях. Согласно этой теореме, для однородной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ k -й степени справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf.$$

Применяя эту теорему к функции (16), получаем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

Используя еще уравнения (28), запишем равенство (29) в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} (2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \\ + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned}$$

Так как $2T_2 + 2T_1 + 2T_0 = 2T$, то отсюда вытекает следующее выражение для производной по времени от полной механической энергии системы $E = T + \Pi$:

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (30)$$

где

$$N^* = \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i. \quad (31)$$

Величина N^* называется мощностью непотенциальных сил.

Формула (30) выражает теорему об изменении полной механической энергии голономной системы. Рассмотрим некоторые ее частные случаи.

1. Пусть система склерономна. Тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$, $\partial T / \partial t = 0$ и

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (32)$$

2. Пусть система склерономна и потенциал не зависит явно от времени. В этом случае $\partial \Pi / \partial t = 0$ и из (32) получаем

$$\frac{dE}{dt} = N^*. \quad (33)$$

3. Пусть система удовлетворяет следующим требованиям: а) она склерономна, б) все силы системы потенциальны, в) потенциал не

зависит явно от времени. Система, удовлетворяющая этим трем условиям, называется *консервативной*. Для нее

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (34)$$

т. е. полная механическая энергия консервативной системы не изменяется при движении системы; имеет место интеграл энергии

$$E = T + \Pi = h = \text{const.}$$

143. Гироскопические силы. Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность равна нулю.

Из равенства (33) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал Π не зависит явно от времени, интеграл энергии существует и при наличии гироскопических сил.

Пусть непотенциальные силы линейны относительно обобщенных скоростей

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Матрицу, составленную из коэффициентов γ_{ik} , считаем кососимметрической, т. е. $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Тогда силы Q_i^* гироскопические, а кососимметричность матрицы коэффициентов γ_{ik} является необходимым и достаточным условием гироскопичности сил Q_i^* .

В самом деле, замечая, что у кососимметрической матрицы диагональные элементы γ_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) всегда равны нулю, получаем

$$N^* = \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^n \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 0.$$

Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, обратим внимание на следующее. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v}_v &= \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial t}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_i} = Q_i$$

и что в случае склерономной системы $\partial \mathbf{r}_v / \partial t = 0$, получаем отсюда

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{v}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i.$$

Поэтому в случае склерономной системы равенство $N^* = 0$ выражает условие гироскопичности

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^* \cdot \mathbf{v}_v = 0$$

непотенциальных сил $\mathbf{F}_v^*$, приложенных к точкам материальной системы.

Примеры. 1. Покажем, что силы, приложенные к вращающемуся гироскопу и обеспечивающие его регулярную прецессию, являются гироскопическими (отсюда и происходит термин «гироскопические силы»). Пусть O — неподвижная точка гироскопа, ω_1 — его угловая скорость собственного вращения, а ω_2 — угловая скорость прецессии. Согласно п. 106, главный момент M_O сил, приложенных к гироскопу, вычисляется по формуле

$$M_O = \omega_2 \times \omega_1 \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right],$$

где C и A — моменты инерции гироскопа (относительно оси симметрии и относительно перпендикулярной ей главной оси, проходящей через неподвижную точку O гироскопа), θ_0 — постоянное значение угла нутации.

Для элементарной работы сил, приложенных к гироскопу (являющемуся склерономной системой), имеем такое выражение:

$$\delta A = M_O \cdot \omega dt = M_O \cdot \omega_1 dt + M_O \cdot \omega_2 dt = 0.$$

Таким образом, силы, обеспечивающие регулярную прецессию гироскопа, имеют мощность, равную нулю, и, следовательно, являются гироскопическими.

2. Кориолисовы силы инерции в склерономной системе являются гироскопическими. В самом деле, пусть m_v — масса точки P_v , $\mathbf{v}_v$ — ее скорость в пинерциальной системе координат, а ω — угловая скорость вращения этой системы координат относительно некоторой инерциальной системы координат. Тогда кориолисова сила инерции $\mathbf{j}_{vc}$ для точки P_v вычисляется по формуле

$$\mathbf{j}_{vc} = -2m_v(\omega \times \mathbf{v}_v).$$

Для склерономной системы действительное перемещение $d\mathbf{r}_v$ является одним из виртуальных. Поэтому для элементарной работы кориолисовых сил инерции имеем выражение

$$\delta A = \sum_{v=1}^N \mathbf{j}_{vc} \cdot d\mathbf{r}_v = \sum_{v=1}^N \mathbf{j}_{vc} \cdot \mathbf{v}_v dt = \sum_{v=1}^N \mathbf{j}_{vc} \cdot \mathbf{v}_v dt = -2 \sum_{v=1}^N m_v (\omega \times \mathbf{v}_v) \cdot \mathbf{v}_v dt.$$

Следовательно, мощность кориолисовых сил инерции равна нулю и они являются гироскопическими.

144. Диссипативные силы. Функция Рэля. Непотенциальные силы называются *диссипативными*, если их мощность отрицательна или равна нулю, $N^* \leq 0$, причем знак равенства не должен быть тождественным.

Из равенства (33) следует, что для склерономной системы, у которой потенциал Π не зависит явно от времени, при наличии диссипативных сил

$$\frac{dE}{dt} \leq 0,$$

т. е. полная механическая энергия системы убывает во время движения. Самой систему в этом случае называют *диссипативной*. Иногда говорят, что происходит рассеивание, или диссипация, энергии. Отсюда и возник термин «диссипативные силы».

Если мощность диссипативных сил N^* будет определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)¹), то диссипация называется *полной*. Если же N^* — знакопостоянная отрицательная функция²), то диссипация называется *неполной* или *частичной*.

Пусть задана положительная квадратичная форма

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (b_{ik} = b_{ki})$$

такая, что непотенциальные силы Q_i^* задаются соотношениями

$$Q_i^* = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = - \sum_{k=1}^n b_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

Тогда для склерономной системы мощность N^* непотенциальных сил равна

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^* \cdot \mathbf{v}_v = \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i = -2R \leq 0. \quad (36)$$

Функция R называется *диссипативной функцией Рэлея*. Из (33) и (36) следует, что в случае склерономной системы с потенциалом, не зависящим явно от времени,

$$\frac{dE}{dt} = -2R,$$

т. е. скорость убывания полной механической энергии системы равна удвоенной функции Рэлея.

В качестве примера рассмотрим склерономную систему, к каждой точке которой приложена сила сопротивления, пропорциональная

¹) Это означает, что при $|\dot{q}_i| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где ε — достаточно малое положительное число, $N^* \leq 0$, причем N^* обращается в нуль только тогда, когда все обобщенные скорости равны нулю.

²) То есть в окрестности $|\dot{q}_i| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при сколь угодно малом ε справедливо неравенство $N^* \leq 0$ и N^* может обращаться в нуль не только тогда, когда все $\dot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

скорости этой точки:

$$F_v = -k v_v \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (37)$$

где $k > 0$. Мощность этих сил будет равна

$$N^* = \sum_{v=1}^N F_v \cdot v_v = -2R,$$

где

$$R = \frac{1}{2} k \sum_{v=1}^N v_v^2. \quad (38)$$

145. Обобщенный потенциал. Пусть существует функция V от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени такая, что обобщенные силы Q_i определяются по формулам

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (39)$$

Тогда функция V называется *обобщенным потенциалом*.

Если положить $L = T - V$, то уравнения Лагранжа (11) запишутся в той же форме (25), какую они имели в случае обычного потенциала сил.

Из (39) следует, что

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + f_{i2}$$

где функции f_i не зависят от обобщенных ускорений. По в теоретической механике обычно рассматриваются только такие силы, которые не зависят от ускорений. Поэтому обобщенный потенциал V должен быть линейной функцией от обобщенных скоростей:

$$V = V_0 + V_1, \quad V_1 = \sum_{i=1}^n A_i \dot{q}_i \quad (40)$$

где V_0 , A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — функции обобщенных координат и времени.

Из (39) и (40) находим выражение для обобщенных сил:

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{k=1}^n A_k \dot{q}_k + V_0 \right) = \\ &= -\frac{\partial V_0}{\partial q_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (41)$$

Если $\partial A_i / \partial t = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. линейная часть V_1 обобщенного потенциала не зависит явно от времени, то обобщенные силы

складываются из потенциальных сил $-\partial V_0/\partial q_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и гироскопических сил

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (42)$$

где

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (43)$$

Если к тому же система склерономна и часть V_0 обобщенного потенциала не зависит от времени, то, согласно п. 143, при движении системы величина $T + V_0$ остается постоянной (однако $T + V \neq \text{const}$).

Отметим, что в случае существования обобщенного потенциала функция Лагранжа является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей и представима в виде $L = L_2 + L_1 + L_0$, где

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - V_0. \quad (44)$$

Квадратичная часть функции L совпадает с квадратичной частью кинетической энергии, и уравнения Лагранжа, как и в случае существования обычного потенциала Π , разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Упражнение. Показать, что сумма переносных и кориолисовых сил инерции всех точек системы всегда имеет обобщенный потенциал.

146. О составлении уравнений Лагранжа для описания движения в неинерциальной системе отсчета. При получении уравнений движения системы относительно неинерциальной системы координат можно применять различные способы. Укажем два из них.

Первый способ не связан с теорией относительного движения. Здесь задача формулируется без введения сил инерции. Кинетическая энергия абсолютного движения системы выражается через относительные обобщенные координаты и относительные скорости точек системы. Обобщенные силы вычисляются обычным способом (для заданных активных сил). В этом способе силы инерции учитываются автоматически самой процедурой выписывания уравнений Лагранжа.

Второй способ основан на теории относительного движения. Задачу формулируют, вводя переносные и кориолисовы силы инерции. Кинетическую энергию здесь надо вычислять для относительного движения, а при подсчете обобщенных сил, помимо заданных активных сил, учитываются и силы инерции.

Если в первом и втором из указанных способов за обобщенные координаты приняты одни и те же величины, то мы приходим к одним и тем же уравнениям движения. В конкретной задаче бывает ясно, какой из способов предпочтительнее. Конечно, возможны и

другие способы получения уравнений Лагранжа, описывающих движение системы относительно неинерциальной системы координат.

147. Натуральные и ненатуральные системы. Системы, в которых силы имеют обычный $\Pi(q_i, t)$ или обобщенный $V(q_i, \dot{q}_i, t)$ потенциал, называются *натуральными*. В таких системах функция Лагранжа L вводится как разность $T - \Pi$ или $T - V$ и является многочленом второй степени относительно обобщенных скоростей, причем гессиан функции Лагранжа

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|_{i,k=1}^n = \det \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|_{i,k=1}^n = \det \|a_{ik}\|_{i,k=1}^n \neq 0 \quad (45)$$

и уравнения Лагранжа разрешимы относительно обобщенных ускорений.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать более общие системы, в которых функция Лагранжа L не обязательно определяется как разность кинетической энергии и потенциала и в этом смысле является произвольной функцией $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Будем лишь требовать, чтобы гессиан этой функции относительно обобщенных скоростей не был равен нулю:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (46)$$

Такие системы будем называть *ненатуральными*. Требование (46) аналогично неравенству (45) и нужно для обеспечения разрешимости уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений.

§ 2. Канонические уравнения Гамильтона

148. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона. В уравнениях Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

описывающих движение голономной системы в потенциальном поле сил, функция L зависит от переменных $q_i, \dot{q}_i, t$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Эти переменные задают момент времени и кинематическое состояние системы, т. е. положения и скорости ее точек. Переменные $q_i, \dot{q}_i, t$ ($i = 1, 2, \dots, n$) называют *переменными Лагранжа*.

Но состояние системы можно задавать и при помощи других параметров. За такие параметры можно принять величины q_i, p_i, t ($i = 1, 2, \dots, n$), где p_i — обобщенные импульсы, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Переменные q_i, p_i, t называют *переменными Гамильтона*.

Гессиян функции L относительно переменных $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)¹⁾ отличен от нуля (см. неравенства (45), (46) п. 147). Замечая, что он равен якобиану правых частей равенств (2), на основании теоремы о неявной функции получаем, что эти равенства разрешимы относительно переменных $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Следовательно, переменные Лагранжа могут быть выражены через переменные Гамильтона и наоборот.

Гамильтон предложил записывать уравнения движения в переменных q, p, t . В этих переменных уравнения Лагранжа (1) переходят в разрешенную относительно производных систему $2n$ уравнений первого порядка, имеющую замечательно симметричную форму записи. Эти уравнения называют *уравнениями Гамильтона* (или *каноническими уравнениями*). Переменные q_i и p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называются *канонически сопряженными*.

Прежде чем получать уравнения Гамильтона, введем некоторые вспомогательные определения. Пусть дана функция $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, гессиян которой отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_n} \right\|_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (4)$$

Перейдем от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к новым переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$ по формулам

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Преобразованием Лежандра функции $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция новых переменных $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$, определяемая равенством

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i x_i - X, \quad (6)$$

в правой части которого переменные x_i выражены через новые переменные y_i при помощи уравнений (5)¹⁾.

В курсах математического анализа показывается²⁾, что преобразование Лежандра имеет обратное, причем если X при преобразовании Лежандра переходит в Y , то преобразование Лежандра от Y будет снова X .

Преобразование Лежандра функции $L(q, \dot{q}, t)$ по переменным $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) есть функция

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (7)$$

¹⁾ Эти уравнения в силу условия (4) разрешимы относительно x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

²⁾ См., например, гл. 6 книги: Фихтенгольд Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.— М.: Наука, 1966.

в которой величины $\dot{q}_i$ выражены через q_i , p_i , t при помощи уравнений (2); при этом при проведении преобразования величины q_i , t играют роль параметров. Функция H называется *функцией Гамильтона*.

149. Уравнения Гамильтона. Полный дифференциал функции Гамильтона вычисляется по формуле

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (8)$$

С другой стороны, полный дифференциал правой части равенства (7), вычисленный при условиях (2), будет таким:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (9)$$

Так как при переходе к новым переменным значение полного дифференциала не меняется, то правые части равенств (8) и (9) равны. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

также

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (11)$$

Но согласно (1) и (2), $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Поэтому из (10) получаем уравнения движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона* (или *каноническими уравнениями*).

Отметим, что попутно мы получили равенство (11), означающее, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то и функция Гамильтона также не зависит от времени, и наоборот. Аналогично, из равенств (10) следует, что если функция L не зависит от какой-либо из обобщенных координат, то и функция H от этой координаты не зависит, и наоборот.

Пример. Получим гамильтонову форму уравнений движения математического маятника, рассмотренного в примере 2 п. 57. Для кинетической и потенциальной энергии имеем выражения (см. рис. 55)

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mgl \cos \varphi.$$

Поэтому

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Из равенства

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}$$

находим

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{ml^2} p_\varphi.$$

Используя формулу (7), находим функцию Гамильтона

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2ml^2} p_\varphi^2 - mgl \cos \varphi.$$

Канонические уравнения (12) имеют вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{ml^2} p_\varphi, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

150. Физический смысл функции Гамильтона. Пусть система натуральна. Тогда $L = L_2 + L_1 + L_0$ и, согласно формулам (2) и (7),

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_2 + L_1 + L_0)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (L_2 + L_1 + L_0);$$

по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L_2, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = L_1,$$

поэтому

$$H = (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0. \quad (13)$$

Пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$. Если силы имеют обычный потенциал Π , то $L_0 = T_0 - \Pi$ и согласно (13)

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (14)$$

Если же силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + V_0$, то $L_0 = T_0 - V_0$ и

$$H = T_2 - T_0 + V_0. \quad (15)$$

Пусть система натуральна и склерономна; тогда $T_1 = 0$, $T_0 = 0$ и $T = T_2$. В том случае, когда силы имеют обычный потенциал,

$$H = T + \Pi, \quad (16)$$

т. е. для натуральной склерономной системы с обычным потенциалом сил функция Гамильтона H представляет собой полную механическую энергию. В этом и состоит физический смысл функции Гамильтона.

Отметим также, что в случае склерономной натуральной системы с обобщенным потенциалом сил

$$H = T + V_0. \quad (17)$$

151. Интеграл Якоби. Найдем полную производную функции Гамильтона по времени. Используя уравнения (12), получим тождество

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned}$$

т. е. полная производная функции Гамильтона по времени тождественно равна ее частной производной:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (18)$$

Система называется *обобщенно консервативной*, если ее функция Гамильтона не зависит явно от времени. В этом случае $\partial H / \partial t \equiv 0$ и в силу тождества (18) $dH / dt \equiv 0$, т. е. при движении системы

$$H(q_i, p_i) = h, \quad (19)$$

где h — произвольная постоянная. Функцию H называют *обобщенной полной энергией*, а равенство (19) — *обобщенным интегралом энергии*.

В случае натуральной системы с обычным потенциалом сил функция Гамильтона вычисляется по формуле (14) и, если она не зависит от времени,

$$T_2 - T_0 + \Pi = h. \quad (20)$$

Соотношение (20), где h — произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби*.

Если система консервативна, т. е. она склерономна и силы имеют потенциал, не зависящий от времени, то $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T = T_2$ и интеграл Якоби запишется в виде

$$E = T + \Pi = h. \quad (24)$$

Таким образом, консервативная система является частным случаем обобщенно консервативной и в рассматриваемом частном случае обобщенный интеграл энергии переходит в обычный.

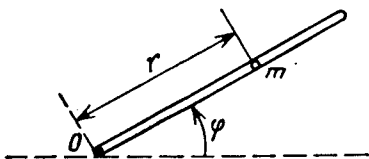


Рис. 135

Пример. Гладкая трубка вращается в горизонтальной плоскости с заданной постоянной угловой скоростью ω . Внутри трубки движется шарик массой m .

Будем считать, что шарик можно принять за материальную точку. Угол φ , который составляет ось трубки с некоторым неизменным направлением в горизонтальной плоскости, известен ($\varphi = \omega t$). Положение шарика будем задавать координатой r — расстоянием до оси вращения трубки (рис. 135).

Потенциальная энергия шарика постоянна; примем, что $\Pi = 0$. Для кинетической энергии шарика имеем выражение

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2),$$

т. е.

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2, \quad T_1 = 0, \quad T_0 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2.$$

Имеет место интеграл Якоби (20), который в рассматриваемом примере запишется в виде

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = h = \text{const.}$$

Было бы ошибкой принять за интеграл полную механическую энергию $E = T + \Pi$, так как рассматриваемая система (шарик во вращающейся трубке) не является консервативной.

152. Уравнения Уиттекера и Якоби. Пусть движение системы описывается каноническими уравнениями (12). Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h, \quad (22)$$

где h — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями, $h = H(q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0)$. В $2n$ -мерном пространстве $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ уравнение (22) задает гиперповерхность. Будем рассматривать только такие движения, которые соответствуют этой гиперповерхности. Иначе говоря, рассмотрим движение системы на фиксированном изоэнергетическом уровне $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h$.

Покажем, что движение изучаемой системы на изоэнергетическом уровне описывается системой дифференциальных уравнений, порядок которой равен $2n - 2$, причем эта система уравнений может быть записана в виде канонических уравнений. Предположим, что в некоторой области фазового пространства выполняется неравенство $\partial H / \partial p_1 \neq 0$. Тогда в этой области равенство (22) разрешимо относительно p_1 :

$$p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h). \quad (23)$$

Перепишем систему уравнений (12), отделив два уравнения, соответствующих значению i , равному единице, от остальных $(2n - 2)$ -х уравнений

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad (24)$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (25)$$

¹⁾ Это пространство называют *фазовым пространством*.

Разделив почленно уравнения (25) на первое из уравнений (24), получим

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p_j}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial q_j}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (26)$$

Подставив величину p_1 , задаваемую равенством (23), в левую часть интеграла (22) и продифференцировав полученное тождество по переменной q_i , получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (27)$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (28)$$

Преобразуя правые части уравнений (26) с использованием равенств (27) и (28), находим окончательно

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (29)$$

Уравнения (29) описывают движение системы при $H = h = \text{const}$ и называются *уравнениями Уиттекера*. Они имеют форму канонических уравнений; роль функции Гамильтона играет функция K из (23), а роль времени — координата q_1 .

Интегрирование уравнений Уиттекера (29) дает

$$q_j = q_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}), \\ p_j = p_j(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}) \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad (30)$$

где $c_1, \dots, c_{2n-2}$ — произвольные постоянные. Если эти выражения для q_j, p_j подставить в равенство (23), то получим

$$p_1 = f_1(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}). \quad (31)$$

Равенства (30), (31) задают геометрический характер движения: они определяют уравнения траекторий в фазовом пространстве (точнее, на гиперповерхности фазового пространства $H = h$). Чтобы пайти зависимость движения от времени, воспользуемся первым из двух уравнений (24). Если в его правую часть подставить величины p_1, q_j, p_j из (30) и (31), то получим

$$\frac{dq_1}{dt} = g_1(q_1, h, c_1, \dots, c_{2n-2}),$$

откуда

$$t = \int \frac{dq_1}{g_1} + c_{2n-1}. \quad (32)$$

Разрешив уравнение (32) относительно q_1 , получим

$$q_1 = q_1(t, h, c_1, \dots, c_{2n-1}). \quad (33)$$

Уравнения Уиттекера (29) имеют структуру уравнений Гамильтона. Их можно записать в виде уравнений типа Лагранжа. Пусть гессиан функции K по переменным p_j отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial p_j \partial p_l} \right\|_{j,l=2}^n \neq 0. \quad (34)$$

Пусть P — преобразование Лежандра функции K по переменным p_j ($j = 2, 3, \dots, n$). Тогда

$$P = P(q_2, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n, q_1, h) = \sum_{j=2}^n q'_j p_j - K, \quad (35)$$

где $q'_j = dq_j/dq_1$. Величины p_j в (35) выражаются через $q'_2, \dots, q'_n$ из уравнений

$$q'_j = \frac{\partial K}{\partial p_j} \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

т. е. из первых $n-1$ уравнений системы (29).

При помощи функции P уравнения (29) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n). \quad (36)$$

Это уравнения типа Лагранжа. Они называются *уравнениями Якоби*. Роль функции Лагранжа в уравнениях Якоби играет функция P , а роль времени, как и в уравнениях Уиттекера (29), — координата q_1 .

Преобразуем выражение (35) для функции P , учитывая равенства (7), (23) и соотношение $q'_1 \equiv 1$:

$$P = \sum_{j=2}^n p_j q'_j + p_1 = \sum_{i=1}^n p_i q'_i = \frac{1}{q_1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \frac{1}{q_1} (L + H). \quad (37)$$

Пусть система консервативна. Тогда $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$ и из (37) следует, что

$$P = \frac{2T}{q_1}. \quad (38)$$

Но в консервативной системе

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \dot{q}_1^2 G(q_1, \dots, q_n, q'_2, \dots, q'_n), \quad (39)$$

где

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q'_i q'_k.$$

Из интеграла энергии $T + \Pi = h$ и равенства (39) находим, что

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}}.$$

И из (38), (39) получаем окончательное выражение для функции P в случае консервативной системы:

$$P = 2\sqrt{(h - \Pi)G}. \quad (40)$$

Пример. Найдём уравнения Уиттекера и Якоби, описывающие движение точки массой m в однородном поле тяжести. Пусть ось Oz неподвижной системы координат $Oxyz$ направлена вертикально вверх. Тогда

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = mgz,$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z},$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

Считая величину $\dot{x}$ положительной, из уравнения $H = h$ получаем $p_x = -K$, где

$$K = -\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}.$$

Уравнения Уиттекера (29) будут такими:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{p_y}{\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{p_z}{\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}}, \quad \frac{dp_y}{dx} = 0, \\ \frac{dp_z}{dx} &= -\frac{m^2 g}{\sqrt{2m(h - mgz) - p_y^2 - p_z^2}}. \end{aligned}$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция P может быть вычислена по формуле (40). Получаем

$$G = \frac{1}{2} m (1 + y'^2 + z'^2).$$

Тогда

$$P = \sqrt{2m(h - mgz)(1 + y'^2 + z'^2)}$$

и уравнения Якоби (36) запишутся в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot y' \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{h - mgz}{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot z' \right) + \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{h - mgz}} = 0.$$

§ 3. Уравнения Рауса

153. Функция Рауса. Для описания состояния голономной системы в данный момент времени t Раус предложил комбинацию переменных Лагранжа и Гамильтона. *Переменными Рауса* являются величины

$$q_i, \dot{q}_i; \quad q_\alpha, p_\alpha; \quad t \quad (i = 1, 2, \dots, k; \alpha = k + 1, \dots, n),$$

где k — произвольное фиксированное число, меньшее n . Предположим, что гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = k + 1, \dots, n$) отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha, \beta = k+1}^n \neq 0. \quad (1)$$

Для натуральной системы

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha, \beta = k+1}^n = \det \left\| \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha, \beta = k+1}^n = \det \| a_{\alpha\beta} \|_{\alpha, \beta = k+1}^n. \quad (2)$$

Последний определитель в равенстве (2) отличен от нуля (положителен), так как T_2 — определительно-положительная квадратичная форма от обобщенных скоростей и к ней применим критерий Сильвестра. Следовательно, для натуральной системы неравенство (1) всегда выполнено. В случае ненатуральной системы это неравенство является дополнительным к условию (46) п. 147 ограничением на функцию L .

Обобщенные импульсы p_α определяются обычным образом при помощи равенств

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = k + 1, \dots, n). \quad (3)$$

Функцией Рауса $R(q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, p_{k+1}, \dots, p_n, t)$ называется преобразование Лежандра функции L по переменным $\dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n$, т. е.

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, \dot{q}_\alpha, t) \quad (4)$$

где $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = k+1, \dots, n$) выражены через $q_i, q_\alpha, \dot{q}_i, p_\alpha, t$ из уравнений (3).

154. Уравнения Рауса. Полный дифференциал функции Рауса вычисляется по формуле

$$dR = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt. \quad (5)$$

С другой стороны, вычислив полный дифференциал правой части равенства (4) при условии (3), получим

$$dR = - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \sum_{\alpha=k+1}^n \left(\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6)$$

Сравнение правых частей равенств (5) и (6) приводит к равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \quad (\alpha = k+1, \dots, n), \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9)$$

Но для нашей системы справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Из (7) и (10) следует, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (11)$$

а равенства (3), (8) и (10) дают:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = k+1, \dots, n). \quad (12)$$

Совокупность уравнений (11) и (12) образует систему *уравнений Рауса*. Она состоит из k уравнений (11) второго порядка, имеющих структуру уравнений Лагранжа второго рода, и $2(n-k)$ уравнений (12) первого порядка, обладающих структурой уравнений Гамильтона.

Уравнения Рауса находят широкое применение при исследовании движения систем с циклическими координатами (см. далее п. 165).

§ 4. Уравнения движения неголономных систем

155. Уравнения движения с множителями связей. Пусть на систему наложено s дифференциальных неинтегрируемых связей, заданных равенствами (2б) п. 16:

$$\sum_{j=1}^m b_{\beta j}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_j + b_{\beta}(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s). \quad (1)$$

Тогда в общем уравнении динамики (см. п. 137)

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (2)$$

величины δq_j не могут быть произвольными. Они связаны с независимыми соотношениями

$$\sum_{j=1}^m b_{\beta j} \delta q_j = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

и число степеней свободы системы равно $n = m - s$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Каждое из s равенств (3) умножим на свой неопределенный скалярный множитель λ_{β} и результаты вычтем из (2). Тогда получим

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{\beta=1}^s \lambda_{\beta} b_{\beta j} \right) \delta q_j = 0. \quad (4)$$

В силу независимости равенств (3) ранг матрицы, составленной из коэффициентов $b_{\beta j}$ ($\beta = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, m$), равен s . Следовательно, хотя бы один из ее миноров порядка s отличен от нуля. Для определенности будем считать, что

$$\det \| b_{\beta, n+k} \|_{\beta, k=1}^s \neq 0. \quad (5)$$

Тогда величины $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ можно принять за независимые, а δq_{n+k} ($k = 1, \dots, s$) однозначно выражаются через них из равенств (3).

Мы берем величины λ_{β} ($\beta = 1, 2, \dots, s$) так, чтобы коэффициенты при $\delta q_{n+1}, \dots, \delta q_m$ в выражении (4) обратились в нуль. При условии (5) это сделать можно, и притом единственным способом. При таком выборе величин λ_{β} в выражении (4) будут содержаться только независимые вариации δq_i ($i = 1, 2, \dots, n$), и, следовательно, коэффициенты при них должны равняться нулю.

Таким образом, приходим к следующим m уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^s \lambda_{\beta} b_{\beta j} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

К ним еще надо присоединить s уравнений связей (1). Тогда получим систему $m + s$ уравнений для определения величин q_j , λ_β ($j = 1, 2, \dots, m$; $\beta = 1, 2, \dots, s$). Величины λ_β называются *множителями связей*. Слагаемые $\sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta b_{\beta j}$ в уравнениях (6) представляют собой обобщенные реакции связей.

Пример. В качестве примера рассмотрим движение конька по горизонтальной поверхности льда (см. пример 5 из п. 10 и рис. 10) в предположении, что трение отсутствует. Пусть C — центр масс конька. Положение конька зададим тремя обобщенными координатами x, y, φ , смысл которых ясен из рис. 10. Неинтегрируемая связь задается уравнением

$$\dot{x} \operatorname{tg} \varphi - \dot{y} = 0. \quad (7)$$

Если m — масса конька, а J_C — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, то кинетическая энергия вычислится по формуле

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

Уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x + \lambda \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y - \lambda, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как трения нет, а потенциальная энергия Π конька постоянна, то обобщенные силы Q_x, Q_y, Q_φ равны нулю. Уравнения (9) с учетом выражения (8) запишутся в виде

$$m\ddot{x} = \lambda \operatorname{tg} \varphi, \quad m\ddot{y} = -\lambda, \quad \ddot{\varphi} = 0. \quad (10)$$

Пусть в начальный момент центр масс конька находится в начале координат и конек расположен вдоль оси Ox , т. е. при $t = 0$ имеем $x = 0, y = 0, \varphi = 0$. Пусть, далее, в начальный момент скорость центра масс равна v_0 , а угловая скорость конька ω_0 , т. е. $\dot{x} = v_0, \dot{\varphi} = \omega_0$. Из уравнения связи (7) находим тогда, что при $t = 0$ $\dot{y} = 0$. Третье уравнение системы (10) при этих начальных условиях дает

$$\varphi = \omega_0 t, \quad (11)$$

т. е. конек движется, равномерно вращаясь вокруг вертикали.

Исключив теперь величину λ из первых двух уравнений системы (10), получим

$$\ddot{x} + \operatorname{tg} \omega_0 t \ddot{y} = 0.$$

Используя уравнение связи (7), исключаем отсюда величину $\ddot{y}$. Тогда с учетом равенства (11) получим уравнение относительно x :

$$\ddot{x} + \omega_0 \operatorname{tg} \omega_0 t \dot{x} = 0. \quad (12)$$

Из (7), (11) и (12) с учетом начальных условий найдем

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad y = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (13)$$

Отсюда следует, что центр масс конька равномерно со скоростью v_0 движется по окружности радиусом v_0/ω_0 , центр которой находится на оси Oy (рис. 136).

Множитель связи λ можно найти теперь из (13) и второго из уравнений системы (10):

$$\lambda = -m\omega_0 v_0 \cos \omega_0 t. \quad (14)$$

При известной величине λ можно найти реакцию R связи. Для ее проекций R_x , R_y из (10), (11) получаем выражения

$$R_x = \lambda \operatorname{tg} \omega_0 t, \quad R_y = -\lambda.$$

Подставив в них значение λ из формулы (14), получим

$$R_x = -m\omega_0 v_0 \sin \omega_0 t, \quad R_y = m\omega_0 v_0 \cos \omega_0 t.$$

Реакция R имеет постоянную величину $m\omega_0 v_0$ и направлена к центру окружности, по которой движется центр масс конька.

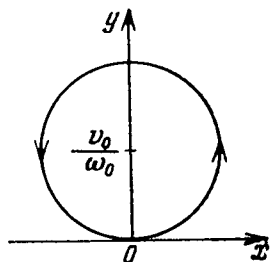


Рис. 136

156. Уравнения Воронца. Система уравнений (1), (6) помимо функций q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) содержит еще s дополнительных неизвестных — множителей связей λ_β ($\beta = 1, 2, \dots, s$). Число уравнений в системе (1), (6) равно $m + s = n + 2s$, т. е. превышает число степеней свободы на удвоенное количество неинтегрируемых связей.

Большое количество уравнений в системе (1), (6) и наличие в ней множителей связей ведет к значительным сложностям при исследовании движения. К тому же, когда целью исследования является только нахождение движения, т. е. определение зависимостей $q_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), вычисление величин λ_β , позволяющих найти реакции связей, является совершенно излишней процедурой.

Для неголономных систем со связями (1) П. В. Воронцов получил уравнения, которые по форме близки к уравнениям Лагранжа второго рода и свободны от упомянутых недостатков. Выведем эти уравнения, предполагая, что система склерономна.

В случае склерономной системы величины b_β в уравнениях связей (1) равны нулю, а коэффициенты $b_{\beta j}$ не зависят от времени. Среди m обобщенных скоростей есть n независимых; пусть это будут обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$. Тогда из (1) находим

$$\dot{q}_{n+k} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \dot{q}_i \quad (k = 1, 2, \dots, s = m - n), \quad (15)$$

где α_{ki} — функции от $q_1, q_2, \dots, q_m$.

Когда система неголономна, то величины

$$A_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^s \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu j} \right) - \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^s \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu i} \right) \quad (16)$$

не могут все одновременно быть тождественно равными нулю¹⁾. Уравнения движения, содержащие множители связей, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= Q_i - \sum_{k=1}^s \lambda_k \alpha_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} &= Q_{n+k} + \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (17)$$

Эти уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (15).

Обозначим Θ функцию, получающуюся в результате исключения при помощи равенств (15) величин $\dot{q}_{n+k}$ ($k = 1, 2, \dots, s$) из выражения для кинетической энергии T :

$$T(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) = \Theta(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

Согласно (15), справедливо равенство

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \alpha_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} + \sum_{k=1}^s \frac{d\alpha_{ki}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}}. \quad (18)$$

Заменив здесь величины $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ и $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}}$ на их выражения из уравнений (17), получим, что члены, содержащие множители связей, взаимно уничтожаются, и равенство (18) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + Q_i + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^s \frac{d\alpha_{ki}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}}. \quad (19)$$

Учитывая, что в соответствии с (15)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_l} \dot{q}_j \right) \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

¹⁾ Если бы это было не так, то для всех k имели бы место равенства $q_{n+k} = f_k(q_1, q_2, \dots, q_m)$, т. е. система не была бы неголономной. Действительно, условия $A_{ij}^{(k)} = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, s$) суть записанные

с учетом равенств (15) условия того, что величина $dq_{n+k} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} dq_i$ является полным дифференциалом.

из равенства (19) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_j \right) + Q_i + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} \frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+k}} - \\ - \sum_{\mu=1}^s \alpha_{\mu i} \left(\sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \dot{q}_j \right) \right) + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^s \frac{d\alpha_{ki}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \quad (20) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} \left(Q_{n+k} + \frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+k}} \right) + \\ + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \left[\frac{d\alpha_{ki}}{dt} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^s \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}} \alpha_{\mu i} \right) \dot{q}_j \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Замечая, что выражение, заключенное в квадратные скобки в соотношении (21), тождественно равно величине

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(k)} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, s),$$

где величины $A_{ij}^{(k)}$ определены равенствами (16), и вводя для импульсов обозначение

$$\theta_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (22)$$

получаем окончательно уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} \left(Q_{n+k} + \frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+k}} \right) + \\ + \sum_{k=1}^s \theta_k \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(k)} \dot{q}_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (23) \end{aligned}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Воронца*. Они должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (15). Полученная система уравнений движения неголономной системы не содержит множителей связей. Число уравнений равно $n + s$, т. е. совпадает с числом обобщенных координат.

157. Уравнения Чаплыгина. Пусть кинетическая энергия T , коэффициенты α_{ki} ($k = 1, 2, \dots, s$; $i = 1, 2, \dots, n$) в уравнениях связей и обобщенные силы Q_l ($l = 1, 2, \dots, m$) не зависят от обобщенных координат q_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, s$). Тогда уравнения (23) запи-

шутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^s \theta_k \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(k)} \dot{q}_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (24)$$

где

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, s). \quad (25)$$

Если в выражениях для обобщенных сил Q_l ($l = 1, 2, \dots, m$) и импульсов θ_k ($k = 1, 2, \dots, s$) при помощи уравнений связей (15) исключить обобщенные скорости $\dot{q}_{n+k}$ ($k = 1, 2, \dots, s$), то получим систему уравнений относительно q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которую можно интегрировать независимо от уравнений связей (15). Эти уравнения впервые были получены Чаплыгиным и носят его имя.

После интегрирования уравнений (24) остальные координаты $q_{n+1}, \dots, q_m$ найдутся из (15) при помощи квадратур.

Если обобщенные силы потенциальны и потенциал Π не зависит от обобщенных координат q_{n+k} , то уравнения (24) примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^s \theta_k \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(k)} \dot{q}_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (26)$$

Пример. Качение диска по неподвижной горизонтальной плоскости. Пусть однородный круговой диск катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своего края. Движение отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой

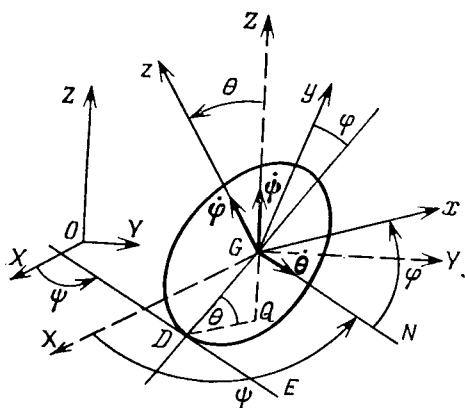


Рис. 137

точке O опорной плоскости; ось OZ направлена вертикально вверх (рис. 137). Пусть $GXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы $OXYZ$. Система координат $Gxyz$ жестко связана с диском; ее ось Gz перпендикулярна плоскости диска. За обобщенные координаты примем три угла Эйлера и две координаты x, y проекции O центра тяжести G на опорную плоскость в системе $OXYZ$. Третья координата z центра тяжести есть его расстояние до опорной плоскости. Из рис. 137 видно, что

$$z = r \sin \theta, \quad (27)$$

где r — радиус диска.

Кинетическая и потенциальная энергии диска определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (A \dot{\rho}^2 + B \dot{q}^2 + C \dot{\tau}^2), \quad \Pi = mgr \sin \theta,$$

где m — масса диска, g — ускорение свободного падения, p, q, r — проекции угловой скорости ω диска на оси Gx, Gy, Gz , являющиеся его главными центральными осями инерции, A, B, C — моменты инерции диска относительно осей Gx, Gy, Gz , причем

$$A = B = \frac{1}{4} m \rho^2, \quad C = \frac{1}{2} m \rho^2,$$

а p, q, r задаются кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (28)$$

Принимая во внимание, что, согласно (27),

$$\dot{z} = \rho \dot{\theta} \cos \theta, \quad (29)$$

выражение для кинетической энергии диска можно записать в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{8} m \rho^2 (1 + 4 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \\ &+ \frac{1}{8} m \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + \frac{1}{4} m \rho^2 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнения связей получим из условия отсутствия скольжения. Если скольжения нет, то скорость v_D точки диска, которой он касается опорной плоскости, равна нулю. Поэтому

$$v_O + \omega \times \overline{GD} = 0, \quad (31)$$

где v_O — скорость центра тяжести, $\overline{GD}$ — радиус-вектор точки D относительно G .

На рис. 137 прямая DE является касательной к диску в точке D . Она параллельна линии узлов GN . Прямая DG перпендикулярна DE , лежит в плоскости, проходящей через оси GZ и Gz , и составляет угол φ с осью Gy . В системе координат $OXYZ$

$$v'_G = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$\overline{GD}' = \rho (\cos \theta \sin \psi, -\cos \theta \cos \psi, -\sin \theta), \quad (32)$$

$$\omega' = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta, \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta, \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta).$$

Третья компонента векторной правой части равенства (31) тождественно равна нулю в силу равенства (29). Приравнивание нулю первых компонент дает уравнения связей

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho [\dot{\theta} \sin \psi \sin \theta - (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \psi], \\ \dot{y} &= -\rho [\dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \sin \psi]. \end{aligned} \quad (33)$$

Так как Π, T и уравнения связей не содержат обобщенных координат x, y , то уравнения движения диска могут быть записаны в форме уравнений Чаплыгина.

Для удобства вычислений введем временно обозначения

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \psi, \quad q_4 = x, \quad q_5 = y.$$

Тогда в обозначениях п. 156, 157 имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \rho \sin q_1 \sin q_3, & \alpha_{12} &= -\rho \cos q_3, \\ \alpha_{13} &= -\rho \cos q_1 \cos q_3, & \alpha_{21} &= -\rho \sin q_1 \cos q_3, \\ \alpha_{22} &= -\rho \sin q_3, & \alpha_{23} &= -\rho \cos q_1 \sin q_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (25) следует, что

$$A_{23}^{(1)} = -A_{32}^{(1)} = \rho \sin q_3, \quad A_{23}^{(2)} = -A_{32}^{(2)} = -\rho \cos q_3.$$

Остальные величины $A_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2$) тождественно равны нулю.

Для обобщенных импульсов θ_1, θ_2 имеем выражения

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \dot{m}x = m\rho(\sin q_1 \sin \dot{q}_3 q_1 - \cos q_3 \dot{q}_2 - \cos q_1 \cos q_3 \dot{q}_3), \\ \theta_2 &= \dot{m}y = -m\rho(\sin q_1 \cos q_3 \dot{q}_1 + \sin q_3 \dot{q}_2 + \cos q_1 \sin q_3 \dot{q}_3). \end{aligned}$$

Если теперь возвратиться к исходным обозначениям, то уравнения Чаплыгина запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} &= -mg\rho \cos \theta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} &= m\rho^2 \sin \theta \dot{\theta} \dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} &= -m\rho^2 \sin \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь Θ есть кинетическая энергия (30), в которой величины $\dot{x}, \dot{y}$ исключены при помощи уравнений связей (33):

$$\Theta = \frac{5}{8} m\rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m\rho^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + \frac{3}{4} m\rho^2 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2. \quad (35)$$

Подставив функцию Θ в (34), получим систему уравнений движения

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 + \frac{6}{5} \sin \theta \dot{\varphi} \dot{\psi} + \frac{4}{5} \frac{g}{\rho} \cos \theta &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) &= \frac{2}{3} \sin \theta \dot{\theta} \dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt} [(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta + \frac{1}{6} \sin^2 \theta \dot{\psi}] &= -\frac{2}{3} \sin \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (36)$$

Если эта система проинтегрирована, то движение центра тяжести диска найдется при помощи конечного соотношения (27) и двух квадратур из (33).

Уравнения движения (36) допускают частные решения, для которых $\theta = \theta_0 = \text{const}$. При этом

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \omega_2 = \text{const}, \quad (37)$$

а угол θ_0 удовлетворяет следующему соотношению, вытекающему из первого

уравнения системы (36):

$$\cos \theta_0 \sin \theta_0 \omega_2^2 + \frac{6}{5} \sin \theta_0 \omega_1 \omega_2 + \frac{4}{5} \frac{g}{\rho} \cos \theta_0 = 0. \quad (38)$$

Если $\theta_0 = \pi/2$, то это уравнение переходит в условие $\omega_1 \omega_2 = 0$. Отсюда следует, что существуют следующие движения диска:

$$\theta_0 = \pi/2, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 \neq 0, \quad (39)$$

$$\theta_0 = \pi/2, \quad \omega_1 \neq 0, \quad \omega_2 = 0, \quad (40)$$

$$\theta_0 = \pi/2, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0. \quad (41)$$

В движении (39) диск вращается с произвольной постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг одного из своих диаметров, который неподвижен и занимает вертикальное положение. В движении (40) диск катится по прямой, при этом плоскость диска вертикальна, а центр тяжести движется с произвольной постоянной скоростью $|\omega_1 \rho|$. Движение (41) соответствует покою диска в вертикальной плоскости.

В общем случае, когда $\theta_0 \neq \pi/2$, величины ω_1 , ω_2 , θ_0 связаны между собой соотношением (38), которое, следовательно, определяет двухпараметрическое семейство движений диска. Для этих движений из уравнений связей (33) получаем

$$x = \alpha - \rho \frac{\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1}{\omega_2} \sin \psi, \quad y = \beta + \rho \frac{\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1}{\omega_2} \cos \psi,$$

где α и β — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям, а $\psi = \omega_2 t + \psi_0$. Отсюда и из (27) следует, что центр тяжести диска движется по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей центр в точке $(\alpha, \beta, \rho \sin \theta_0)$; радиус этой окружности

$$R = \rho \left| \frac{\omega_2 \cos \theta_0 + \omega_1}{\omega_2} \right|.$$

Отсюда и из рис. 137 следует, что точка D касания во время движения диска описывает на опорной плоскости OXY окружность с центром в точке (α, β) и радиусом, равным $\rho |\omega_1/\omega_2|$.

В самом общем случае аналитическое исследование движения диска приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка и квадратурам. Чтобы показать это, заметим, что $\psi \cos \theta + \theta = r$, и, рассматривая промежуток времени, на котором $\dot{\theta} \neq 0$, перейдем во втором и третьем уравнениях системы (36) к новой независимой переменной θ . Тогда получим

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2}{3} \sin \theta \dot{\psi}, \quad \frac{d}{d\theta} \left(r \cos \theta + \frac{1}{6} \sin^2 \theta \dot{\psi} \right) = -\frac{2}{3} \sin \theta (r - \dot{\psi} \cos \theta). \quad (42)$$

Исключив из этих уравнений величину $\dot{\psi}$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta} - \frac{4}{3} r = 0,$$

которое, если положить $u = \cos^2 \theta$, принимает вид

$$u(1-u) \frac{d^2 r}{du^2} + \frac{1}{2} (1-3u) \frac{dr}{du} - \frac{1}{3} r = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой известное из теории дифференциальных уравнений гипергеометрическое уравнение Гаусса. Его интегрирование дает величину r как функцию угла θ . Из первого уравнения системы (42) и равенства $\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = r$ определяются затем $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ как функции угла θ . Таким образом, задача нахождения углов Эйлера сводится к нахождению θ как функции времени, так как $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ найдутся при известной функции $\theta(t)$ посредством квадратур. Зависимость $\theta(t)$ также получается посредством квадратур. Действительно, уравнения (34) имеют интеграл энергии

$$\Theta + \Pi = h = \text{const.} \quad (43)$$

Это следует из того (см. п. 143), что уравнения (34) можно рассматривать как уравнения движения склерономной системы под действием гироскопических сил $Q_\varphi = m\rho^2 \sin \theta \ddot{\theta} \dot{\psi}$, $Q_\psi = -m\rho^2 \sin \theta \ddot{\theta} \dot{\varphi}$ и потенциальной силы $Q_\theta = -mgr \cos \theta$ с потенциалом, не зависящим от времени.

Подставив в равенство (43) величины $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ как функции угла θ и разрешив его относительно $\dot{\theta}$, получим $\dot{\theta}$ как функцию θ . Отсюда t выразится через θ при помощи одной квадратуры, обратив которую найдем $\theta = \theta(t)$.

158. Уравнения Аппеля. Аппель предложил уравнения движения, которые не содержат множителей связей и применимы как к голономным, так и к неголономным системам с неинтегрируемыми связями вида (1). Получим эти уравнения в псевдокоординатах (см. п. 17). Пусть псевдоскорости π_i определены по формулам (29), п. 17:

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_m, t) \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (44)$$

Для получения уравнений Аппеля выразим в псевдокоординатах общее уравнение динамики

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v = 0. \quad (45)$$

Подставив в равенство

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j,$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j , вместо величин δq_j их выражения через $\delta \pi_i$ по формулам (32), п. 17, получим элементарную работу активных сил в виде

$$\delta A = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{j=1}^m Q_j \sum_{i=1}^n d_{ij} \delta \pi_i = \sum_{i=1}^n \Pi_i \delta \pi_i, \quad (46)$$

где

$$\Pi_i = \Pi_i(q_1, \dots, q_m, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n, t) = \sum_{j=1}^m d_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (47)$$

Величины Π_i называются *обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам π_i* ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для получения элементарной работы сил инерции в псевдокоординатах получим, при помощи равенств (35) п. 17, следующее выражение:

$$\begin{aligned} - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v &= - \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{w}_v}{\partial \pi_i} \delta \pi_i = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{w}_v}{\partial \pi_i} \right) \delta \pi_i. \end{aligned} \quad (48)$$

Если ввести функцию S по формуле

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v^2, \quad (49)$$

то равенство (48) можно записать так:

$$- \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \pi_i} \delta \pi_i. \quad (50)$$

Функция S называется *энергией ускорений*. В общем случае она является функцией от $q_1, \dots, q_m, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n, \ddot{\pi}_1, \dots, \ddot{\pi}_n, t$.

Из равенств (46) и (50) следует, что общее уравнение динамики (45) в псевдокоординатах имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial \pi_i} - \Pi_i \right) \delta \pi_i = 0. \quad (51)$$

Так как величины $\delta \pi_i$ могут принимать произвольные значения, то отсюда следуют уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_i} = \Pi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (52)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Аппеля*. Они должны рассматриваться совместно с s уравнениями связей (1) и n соотношениями (44), вводящими псевдоскорости.

Аналогично тому, как в п. 140 доказана разрешимость уравнений Лагранжа относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_i$, можно показать, что уравнения Аппеля (52) разрешимы относительно псевдоускорений $\ddot{\pi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Кроме того, уравнения (1) и (44), по самому выбору псевдоскоростей, разрешимы относительно $\dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) (см. уравнения (30) п. 17). Таким образом, приходим к $m + n$ уравнениям, разрешенным относительно произ-

водных неизвестных функций $q_1, \dots, q_m, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_n$. Если заданы начальные значения $q_1^0, \dots, q_m^0, \pi_1^0, \dots, \pi_n^0$, то, при не очень обременительных для механики условиях на силы, дальнейшее движение системы будет однозначно определено. Но по величинам $q_1^0, \dots, q_m^0, \dot{\pi}_1^0, \dots, \dot{\pi}_n^0$ из формул (30) п. 17 однозначно определяются совместимые со связями (1) начальные значения обобщенных скоростей $\dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_m^0$. А по величинам $q_j^0, \dot{q}_j^0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) однозначно определяются совместимые со связями начальные положения и начальные скорости точек системы в декартовой системе координат. Отсюда следует, что если заданы не противоречащие конечным и дифференциальным связям положения и скорости точек системы, то дальнейшее их движение однозначно определено.

Если в качестве величин $\dot{\pi}_i$ приняты обобщенные скорости $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то соответствующие обобщенные силы Π_i равны величинам Q'_i , вычисляемым по формулам (13) п. 63. Энергия ускорений S в этом случае будет функцией от $q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n, t$, и уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} = Q'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (53)$$

вместе с уравнениями связей (1) образуют систему уравнений, определяющих движение рассматриваемой неголономной системы. Число уравнений равно $n + s = m$, т. е., как и в случае уравнений Воронца, совпадает с числом обобщенных координат. Если система голономна, то $m = n$, $Q'_i = Q_i$ и уравнения (53) будут просто другой формой записи уравнений Лагранжа второго рода.

Для получения уравнений Аппеля нужно вычислить функцию S — энергию ускорений, определяемую по формуле (49). Это довольно громоздкая процедура. Поэтому, как правило, выписывание уравнений Аппеля является более трудоемкой процедурой по сравнению с получением уравнений Воронца и Чаплыгина, где вместо S надо вычислять кинетическую энергию T .

В качестве примера используем уравнения Аппеля для доказательства достаточности условий принципа виртуальных перемещений для равновесия системы (п. 62).

Пусть условия (3) и (4) п. 62 выполнены и при $t = t_0$ имеем $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$, $\mathbf{v}_v = 0$ ($v = 1, 2, \dots, N$). Покажем, что тогда на всем промежутке времени $t_0 \leq t \leq t_1$ система находится в состоянии равновесия, т. е. для этого промежутка времени $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$ ($v = 1, 2, \dots, N$).

Из (44), (46) и условия (4) п. 62 следует, что при $\mathbf{r}_v \equiv \mathbf{r}_{v0}$ $\Pi_i(q_{10}, \dots, q_{m0}, 0, \dots, 0, t) = 0$ для $t_0 \leq t \leq t_1$ (здесь $q_{10}, \dots, q_{m0}$ — значения обобщенных координат, отвечающие положению равновесия, задаваемому в декартовой системе координат радиусами-векто-

рами $\mathbf{r}_{v0}$ точек системы). С другой стороны, величины

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_i} = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v \cdot \frac{\partial \mathbf{w}_v}{\partial \pi_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

при $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$ также равны нулю. так как тогда $\mathbf{w}_v = 0$. Следовательно, уравнения Аппеля (52) имеют частное решение $q_j = q_{j0}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), отвечающее положению равновесия $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_{v0}$ ($v = 1, 2, \dots, N$).

Достаточность условий принципа виртуальных перемещений следует теперь из принципа детерминированности движения Ньютона — Лапласа (см. п. 45), так как согласно этому принципу, принимаемому в классической механике, движение системы однозначно определяется положениями и скоростями ее точек в начальный момент времени.

159. Вычисление энергии ускорений. Аналог теоремы Кенига. Пусть $\mathbf{w}_c$ — абсолютное ускорение центра масс, $\mathbf{w}_v$ — абсолютное ускорение точки P_v системы, а $\mathbf{w}_{vr}$ — ускорение этой точки в ее движении относительно центра масс. Тогда для всех точек системы

$$\mathbf{w}_v = \mathbf{w}_c + \mathbf{w}_{vr}. \quad (54)$$

Вычислим энергию ускорений

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_v^2. \quad (55)$$

Подставив (54) в формулу (55), получим

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v \right) \mathbf{w}_c^2 + \left(\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_{vr} \right) \cdot \mathbf{w}_c + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_{vr}^2. \quad (56)$$

Так как $\sum_{v=1}^N m_v = M$, а $\sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_{vr} = M \mathbf{w}_{Cr} = 0$, то из (56) получаем

$$S = \frac{1}{2} M \mathbf{w}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{w}_{vr}^2 \quad (57)$$

т. е. энергия ускорений системы равна сумме энергии ускорений, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и энергии ускорений в движении системы относительно центра масс.

Полученное утверждение является аналогом теоремы Кенига для кинетической энергии (см. п. 83).

160. Энергия ускорений твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки. Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой O тела. Оси Ox , Oy , Oz направлены по главным осям инерции тела

для точки O . Положение частицы m_v тела определяется ее радиусом-вектором $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}'_v = (x_v, y_v, z_v)$. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{\omega}' = (p, q, r)$, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ — его угловое ускорение. Так как абсолютная производная вектора $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с его относительной производной, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}). \quad (58)$$

Согласно п. 24 ускорение частицы m_v определяется по формуле

$$\mathbf{w}_v = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_v + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_v),$$

или

$$\mathbf{w}_v = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_v + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_v) - \mathbf{r}_v \omega^2. \quad (59)$$

Отсюда получаем выражения для проекций ускорения $\mathbf{w}_v$ на оси Ox, Oy, Oz :

$$\begin{aligned} w_{vx} &= -x_v(q^2 + r^2) + y_v(qp - \dot{r}) + z_v(pr + \dot{q}), \\ w_{vy} &= -y_v(r^2 + p^2) + z_v(rq - \dot{p}) + x_v(qp + \dot{r}), \\ w_{vz} &= -z_v(p^2 + q^2) + x_v(pr - \dot{q}) + y_v(rq + \dot{p}). \end{aligned} \quad (60)$$

Если N — число частиц, на которые мы мысленно разбили тело, то выражение для энергии ускорений имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (w_{vx}^2 + w_{vy}^2 + w_{vz}^2).$$

Подставим сюда выражения (60) и произведем некоторые преобразования с учетом того, что Ox, Oy, Oz — главные оси инерции и, следовательно,

$$J_{xy} = \sum_{v=1}^N m_v x_v y_v = 0, \quad J_{xz} = \sum_{v=1}^N m_v x_v z_v = 0, \quad J_{yz} = \sum_{v=1}^N m_v y_v z_v = 0.$$

Если еще в S отбросить несущественные для уравнений Аппеля слагаемые, не зависящие от $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$, то получим

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v x_v^2 \right) (\dot{r}^2 + 2qp\dot{r} + \dot{q}^2 - 2pr\dot{q}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v y_v^2 \right) (\dot{p}^2 + 2rq\dot{p} + \dot{r}^2 - 2qr\dot{r}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{v=1}^N m_v z_v^2 \right) (\dot{q}^2 + 2pr\dot{q} + \dot{p}^2 - 2rp\dot{p}), \end{aligned}$$

или

$$S = \frac{1}{2} (A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + (C - B)qr\dot{p} + (A - C)rp\dot{q} + (B - A)pq\dot{r}. \quad (61)$$

где A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Примеры. 1. *Вывод динамических уравнений Эйлера при помощи уравнений Аппеля.* Пусть M_x, M_y, M_z — проекции момента M_0 внешних сил относительно точки O на оси Ox, Oy, Oz . В качестве псевдоскоростей примем величины $\pi_1 = p, \pi_2 = q, \pi_3 = r$. Для элементарной работы внешних сил имеем выражение

$$\delta A = M_0 \cdot \omega dt = M_x p dt + M_y q dt + M_z r dt = M_x \delta \pi_1 + M_y \delta \pi_2 + M_z \delta \pi_3.$$

Поэтому обобщенные силы Π_i , соответствующие псевдокоординатам π_i , вычисляются по формулам

$$\Pi_1 = M_x, \quad \Pi_2 = M_y, \quad \Pi_3 = M_z. \quad (62)$$

Уравнения (52) с учетом выражений (61) и (62) непосредственно приводят к динамическим уравнениям Эйлера (см. уравнения (4) п. 97).

2. *Качение шара по плоскости.* Пусть однородный шар движется по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Движение шара отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O плоскости, ось OZ направим вертикально вверх. Пусть $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости шара на оси Ox, Oy, Oz , а p, q, r — проекции того же вектора на оси Gx, Gy, Gz жестко связанной с шаром системы координат с началом в центре шара.

Пусть x, y, z — координаты центра шара в системе $OXYZ$; $z = a$, где a — радиус шара. Условие отсутствия скольжения (равенство нулю скорости точки D шара, которой он касается плоскости) приводит к соотношениям

$$\dot{x} = \omega_y a, \quad \dot{y} = -\omega_x a. \quad (63)$$

Момент инерции шара относительно любого диаметра равен $\frac{2}{5} m a^2$, где m — масса шара. Из (57) и (61) получаем выражение для энергии ускорений:

$$S = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{5} m a^2 (\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2). \quad (64)$$

Введем псевдоскорости по формулам

$$\pi_1 = \omega_x, \quad \pi_2 = \omega_y, \quad \pi_3 = \omega_z. \quad (65)$$

Из (63) тогда получим

$$\ddot{x} = a \ddot{\pi}_2, \quad \ddot{y} = -a \ddot{\pi}_1. \quad (66)$$

Пусть ϵ — угловое ускорение шара. Тогда, замечая, что

$$\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{r}^2 = \epsilon^2 = \dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2 = \ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2 + \ddot{\pi}_3^2,$$

и пользуясь равенствами (66), получаем из (64) такое окончательное выражение для энергии ускорений:

$$S = \frac{1}{10} m a^2 [7(\ddot{\pi}_1^2 + \ddot{\pi}_2^2) + 2\ddot{\pi}_3^2].$$

Так как обобщенные силы Π_i ($i = 1, 2, 3$) равны нулю, то из уравнений Аппеля $\partial S / \partial \pi_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) следует, что $\ddot{\pi}_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), или $\omega_x = \text{const}$, $\omega_y = \text{const}$, $\omega_z = \text{const}$. Таким образом, из уравнений Аппеля сразу следует, что угловая скорость при движении остается неизменной. Другим способом этот вывод получен в п. 113.

Глава XI. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

§ 1. Множитель Якоби

161. Множитель системы уравнений. Дифференциальное уравнение для множителя. В данной главе будут получены некоторые общие утверждения, относящиеся к интегрированию уравнений динамики. Сначала рассмотрим нужные в дальнейшем вспомогательные вопросы теории дифференциальных уравнений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_k}{X_k}, \quad (1)$$

где X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — заданные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Всякая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, которая постоянна при $x_1, x_2, \dots, x_k$, удовлетворяющих системе (1), называется ее *первым интегралом*. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — первый интеграл, то дифференциал df в силу (1) тождественно равен нулю, т. е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = 0$$

в силу уравнений (1). Это означает, что необходимое и достаточное условие того, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ является первым интегралом, записывается в виде равенства

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} X_k = 0. \quad (2)$$

Обозначение $X(f)$ введено для краткости записи. Очевидно, что если $f_1, f_2, \dots, f_l$ ($l \leq k-1$) — первые интегралы, то и любая функция $F(f_1, f_2, \dots, f_l)$ тоже будет первым интегралом системы (1).

Если известны l независимых первых интегралов

$$f_1 = c_1, f_2 = c_2, \dots, f_l = c_l \quad (c_j = \text{const}; j = 1, 2, \dots, l), \quad (3)$$

то их можно использовать для понижения порядка системы (1) на l единиц. В самом деле, если $f_1, f_2, \dots, f_l$ независимы, то ранг матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{array} \right\| \quad (4)$$

равен l . Не ограничивая общности, будем тогда считать, что отличен от нуля определитель l -го порядка, составленный из первых l столбцов матрицы (4), т. е. якобиан функций $f_1, f_2, \dots, f_l$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_l$:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_l)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_l)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_l} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

При выполнении этого неравенства соотношения (3) можно разрешить относительно величин $x_1, x_2, \dots, x_l$, в результате чего эти величины выразятся через переменные $x_{l+1}, \dots, x_k$ и константы $c_1, c_2, \dots, c_l$. Подставив их в функции $X_{l+1}, \dots, X_k$ и обозначив получающиеся в результате этой подстановки функции $X_{l+1}^*, \dots, X_k^*$, где $X_j^* (j = l+1, \dots, k)$ — функции от $x_{l+1}, \dots, x_k$ и $c_1, c_2, \dots, c_l$, мы сведем систему (1) к системе уравнений

$$\frac{dx_{l+1}}{X_{l+1}^*} = \dots = \frac{dx_k}{X_k^*}$$

порядок которой на l единиц меньше порядка исходной системы (1).

Система (1) может иметь только $k-1$ независимых первых интегралов. Если они известны, то соотношения

$$f_1 = c_1, f_2 = c_2, \dots, f_{k-1} = c_{k-1} \quad (6)$$

дают общий интеграл системы дифференциальных уравнений (4). Всякий же другой интеграл f будет функцией независимых интегралов $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$. Для доказательства этого утверждения надо проверить, что якобиан функций $f, f_1, \dots, f_{k-1}$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$ равен нулю:

$$\frac{\partial(f, f_1, \dots, f_{k-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)} = 0. \quad (7)$$

Действительно, если $f, f_1, \dots, f_{k-1}$ — первые интегралы, то

$$\begin{aligned} X(f) &= X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \\ X(f_1) &= X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dots + X_h \frac{\partial f_1}{\partial x_h} = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ X(f_{h-1}) &= X_1 \frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_2} + \dots + X_h \frac{\partial f_{h-1}}{\partial x_h} = 0. \end{aligned}$$

Эта система k линейных однородных уравнений относительно $X_1, X_2, \dots, X_k$ должна иметь нетривиальное решение. Следовательно, выполняется равенство (7). Что и требовалось доказать.

Разложив якобиан, стоящий в левой части равенства (7), по элементам первой строки, представим это равенство в виде

$$\Delta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \Delta_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \quad (8)$$

где Δ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) есть алгебраическое дополнение i -го элемента первой строки якобиана.

Условие (8) означает, что f — функция первых интегралов $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$. Если f — первый интеграл, то выполнено условие (8), а если выполнено (8), то f — функция $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ и, следовательно, является первым интегралом. Поэтому равенство (8) является необходимым и достаточным условием того, что (при известных первых интегралах $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$) f есть первый интеграл. Последнее означает, что условия (2) и (8) эквивалентны. Поэтому соответствующие коэффициенты при производных $\partial f / \partial x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) в равенствах (2) и (8) пропорциональны, т. е. существует функция $M(x_1, x_2, \dots, x_k)$ такая, что

$$\Delta_i = M X_i \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (9)$$

Функция M называется *множителем Якоби* или просто *множителем* системы уравнений (1).

В равенство (9) входят интегралы $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$. Однако можно получить дифференциальное уравнение для M , которое не содержит $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$. Покажем, что множитель M удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial (M X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (M X_2)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial (M X_k)}{\partial x_k} = 0. \quad (10)$$

В самом деле, если в соответствии с (9) вместо величин $M X_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) подставить в (10) их выражения Δ_i , то после проведения содержащихся в (10) дифференцирований получим, что левая часть равенства (10) представляет собой совокупность слагаемых, каждое из которых есть произведение производной второго порядка вида $\partial^2 f_i / \partial x_i \partial x_j$ ($i \neq j$) на $k - 2$ частных производных первого порядка. Поэтому, чтобы показать справедливость равенства (10), достаточно убедиться в том, что его левая часть не содержит ни одной производной второго порядка. Возьмем, например, производную $\partial^2 f_1 / \partial x_1 \partial x_2$. Она содержится в двух слагаемых. В одном слагаемом при $\partial^2 f_1 / \partial x_1 \partial x_2$ будет коэффициент при $\partial f_1 / \partial x_2$ в Δ_1 , т. е. определитель

$$\frac{\partial (f_2, f_3, \dots, f_{k-1})}{\partial (x_3, x_4, \dots, x_k)}. \quad (11)$$

а во втором — коэффициент при $\partial f_1/\partial x_1$ в Δ_2 , т. е. определитель (11), взятый с противоположным знаком. Следовательно, сумма упомянутых слагаемых равна нулю. То же самое справедливо и для остальных слагаемых.

Любое решение уравнения (10) принято называть *множителем*.

Справедливо следующее утверждение: *частное двух множителей является первым интегралом системы (1)*.

В самом деле, пусть M_1 и M_2 — множители, т. е. решения уравнения (10). Тогда справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^k \left(M_1 \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^k \left(M_2 \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial M_2}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (13)$$

Умножив первое из этих равенств на $-M_2$, а второе на M_1 и сложив результаты, получим

$$\sum_{i=1}^k X_i \left(M_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_i} - M_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_i} \right) = M_1^2 \sum_{i=1}^k X_i \frac{\partial \left(\frac{M_2}{M_1} \right)}{\partial x_i} = M_1^2 X \left(\frac{M_2}{M_1} \right) = 0.$$

Следовательно, M_2/M_1 действительно является первым интегралом. Верно и обратное: *произведение какого-либо множителя на первый интеграл системы уравнений (1) также является множителем*. В этом легко убедиться непосредственной проверкой.

Для дальнейшего приложения теории множителя к уравнениям динамики важно заметить, что из (10) следует, что если $\sum_{i=1}^k \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$, то $M = 1$ является множителем.

162. Инвариантность множителя. Последний множитель Якоби. Сделаем в системе уравнений (1) замену переменных, введя вместо $x_1, x_2, \dots, x_k$ переменные $y_1, y_2, \dots, y_k$ по формулам

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_k) \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (14)$$

Будем считать, что якобиан

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} \quad (15)$$

отличен от нуля. Тогда замена переменных (14) является обратимой. Для получения преобразованной системы уравнений введем вспомогательную переменную t так, чтобы каждое из отношений dx_i/X_i равнялось ее дифференциалу dt . Тогда система (1) запишется так:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (16)$$

Рассматривая каждую из величин y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) как сложную функцию t : $y_i = y_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$, имеем

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial x_j} X_j = X(y_i).$$

Выраженную через $y_1, y_2, \dots, y_k$ величину $X(y_i)$ обозначим Y_i . Тогда в новых переменных система уравнений (1) будет такой:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \dots = \frac{dy_k}{Y_k}. \quad (17)$$

Отметим, что выражение $X(f)$ инвариантно в том смысле, что

$$X(f) = \sum_{j=1}^k Y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = Y(f). \quad (18)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{i=1}^k X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^k X_i \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k X_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^k Y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = Y(f). \end{aligned}$$

Равенство (18) показывает, в частности, что интеграл исходной системы уравнений (1), будучи записанным в новых переменных, является интегралом преобразованной системы (17).

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ — независимые первые интегралы системы (1) и f — произвольная функция, а M_0 — какой-либо множитель, удовлетворяющий тождеству¹⁾

$$M_0 X(f) = \frac{\partial(f, f_1, \dots, f_{k-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}. \quad (19)$$

Умножив обе части этого тождества на определитель (15), получим

$$M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} X(f) = \frac{\partial(f, f_1, \dots, f_{k-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)} \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}.$$

Если воспользоваться инвариантностью выражения $X(f)$ и правилом умножения функциональных определителей²⁾, то последнее равенство можно записать так:

$$M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} Y(f) = \frac{\partial(f, f_1, \dots, f_{k-1})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}.$$

¹⁾ См. определение множителя системы уравнений (1) при помощи равенств (2), (7) — (9).

²⁾ См. гл. 3 книги: Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1. — М.; Л.: ГТТИ, 1933.

Отсюда следует, что функция

$$M_0^* = M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} \quad (20)$$

является множителем преобразованной системы уравнений (17).

Пусть теперь M — произвольный множитель, т. е. какое-либо решение уравнения в частных производных (10), а M_0 — множитель из тождества (19). Согласно п. 160

$$M = M_0 F,$$

где F — первый интеграл системы уравнений (1) (а также и системы (17)). Умножив обе части этого равенства на определитель (15) и воспользовавшись формулой (20), получим

$$M \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} = M_0 \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} F = M_0^* F. \quad (21)$$

Но мы показали, что M_0^* — множитель для переменных $y_1, y_2, \dots, y_k$. А так как F — первый интеграл, то, согласно п. 161, функция $M_0^* F$ также является множителем.

Таким образом, мы доказали теорему об инвариантности множителя: если M — множитель для переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, то его произведение на якобиан (15) есть множитель для новых переменных $y_1, y_2, \dots, y_k$.

Свойство инвариантности является основным для практического применения теории множителя. Предположим, что известны $k-2$ независимых первых интеграла системы дифференциальных уравнений (1)

$$f_j = c_j \quad (c_j = \text{const}; j = 1, 2, \dots, k-2),$$

т. е. для получения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

Введем новые переменные $y_1, y_2, \dots, y_k$ по формулам

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = f_1, \quad \dots, \quad y_k = f_{k-2}.$$

Тогда при $i \geq 3$ $Y_i = X(y_i) = 0$ и в новых переменных система уравнений (1) станет такой:

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \frac{dy_3}{0} = \dots = \frac{dy_k}{0}, \quad (22)$$

т. е. сводится к одному уравнению

$$Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2 = 0, \quad (23)$$

в котором $y_3, \dots, y_k$ рассматриваются как постоянные.

Если бы был известен множитель M для переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, то, согласно теореме об инвариантности множителя, функция

$$M^* = M \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_k)} \quad (24)$$

была бы множителем для переменных $y_1, y_2, \dots, y_k$, т. е. удовлетворяла бы уравнению

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial (M^* Y_i)}{\partial y_i} = 0,$$

которое с учетом того, что $Y_i = 0$ при $i \geq 3$, имеет вид

$$\frac{\partial (M^* Y_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial (M^* Y_2)}{\partial y_2} = 0. \quad (25)$$

Последнее равенство означает, что функция M^* является интегрирующим множителем Эйлера для уравнения (23), т. е. выражение $M^*(Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2)$ будет полным дифференциалом. Следовательно, недостающий первый интеграл может быть записан в виде

$$\int M^*(Y_2 dy_1 - Y_1 dy_2) = \text{const.}$$

Функция M^* носит название *последнего множителя* или *последнего множителя Якоби*.

Таким образом, если для системы (1) известен какой-либо множитель, то ее интегрирование требует нахождения не $k-1$, а лишь $k-2$ независимых первых интегралов. Нахождение последнего недостающего интеграла сводится к квадратуре.

Пример. Качение неоднородного шара по плоскости¹⁾. Рассмотрим движение шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Шар считаем неоднородным, его центр масс совпадает с геометрическим центром, движение происходит без скольжения.

Движение отнесем к системе $Gxyz$, образованной главными центральными осями инерции. Пусть a — радиус, A, B, C — моменты инерции относительно осей Gx, Gy, Gz , а m — масса шара. Если $\mathbf{v}' = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость центра шара, а $\boldsymbol{\omega}' = (p, q, r)$ — угловая скорость, $\mathbf{p}' = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, то условие отсутствия скольжения (равенство нулю абсолютной скорости точки D шара, которой он касается плоскости) запишется в виде

$$\mathbf{v} = a\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (26)$$

Уравнение движения шара получим в форме уравнений Аппеля. Энергия ускорений вычисляется по формуле (см. п. 159, 160)

$$S = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} (A \dot{p}^2 + B \dot{q}^2 + C \dot{r}^2) + (C - B) q \dot{r} + (A - C) r \dot{p} + (B - A) p \dot{q}, \quad (27)$$

¹⁾ Эта задача решена С. А. Чаплыгиным в его работе «О катании шара по горизонтальной плоскости» (см.: Чаплыгин С. А. Собр. соч. Т. 1. — М.: Изд. Гостехиздат, 1948. — С. 76—101).

где $\mathbf{w}' = (w_x, w_y, w_z)$ — ускорение центра шара. Из (26) получаем

$$\mathbf{w} = a [\dot{\omega} \times \mathbf{n} + \omega \times \dot{\mathbf{n}} + \omega \times (\omega \times \mathbf{n})],$$

или

$$\begin{aligned} w_x &= a [\dot{q}\gamma_3 - \dot{r}\gamma_2 + \dot{q}\dot{\gamma}_3 - \dot{r}\dot{\gamma}_2 + p\omega_n - \gamma_1\omega^2], \\ w_y &= a [\dot{r}\gamma_1 - \dot{p}\gamma_3 + \dot{r}\dot{\gamma}_1 - \dot{p}\dot{\gamma}_3 + q\omega_n - \gamma_2\omega^2], \\ w_z &= a [\dot{p}\gamma_2 - \dot{q}\gamma_1 + \dot{p}\dot{\gamma}_2 - \dot{q}\dot{\gamma}_1 + r\omega_n - \gamma_3\omega^2]. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\omega_n = p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3$ — проекция вектора ω на вертикаль.

Принимая величины p, q, r за псевдоскорости π_1, π_2, π_3 и замечая, что обобщенные силы Π_1, Π_2, Π_3 равняются нулю, из уравнений Аппеля получаем

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= ma^2\gamma_1(p\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \\ A_2\dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= ma^2\gamma_2(p\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \\ A_3\dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= ma^2\gamma_3(p\gamma_1 + \dot{q}\gamma_2 + \dot{r}\gamma_3), \end{aligned} \quad (29)$$

где $A_1 = A + ma^2, A_2 = B + ma^2, A_3 = C + ma^2$.

Уравнения (29) совместно с уравнениями Пуассона (см. п. 114)

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \quad (30)$$

образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение пара относительно его центра масс. Если она проинтегрирована, то траектория центра масс находится из уравнений (26) при помощи квадратур. Покажем, что интегрирование системы уравнений (29), (30) сводится к квадратурам.

Уравнения (29), (30) имеют интеграл энергии

$$\frac{1}{2} (A_1 p^2 + A_2 q^2 + A_3 r^2) - \frac{1}{2} ma^2 \omega_n^2 = h = \text{const.} \quad (31)$$

Интегралами будут также величина вектора кинетического момента шара относительно точки D касания его с плоскостью

$$(A_1 p - ma^2 \gamma_1 \omega_n)^2 + (A_2 q - ma^2 \gamma_2 \omega_n)^2 + (A_3 r - ma^2 \gamma_3 \omega_n)^2 = \text{const} \quad (32)$$

и проекция этого вектора на вертикаль

$$A_1 p \gamma_1 + A_2 q \gamma_2 + A_3 r \gamma_3 - ma^2 \omega_n = \text{const.} \quad (33)$$

Кроме того, существует очевидный геометрический интеграл

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (34)$$

Интеграл (31) следует из теоремы об изменении кинетической энергии (см. п. 88; левая часть (31) есть кинетическая энергия шара; она постоянна, так как работа внешних сил, приложенных к шару, равна нулю). Существование интегралов (32) и (33) следует из теоремы об изменении кинетического момента в ее общей форме (см. формулу (7) п. 87). Действительно, момент внешних сил (силы тяжести и реакции плоскости) относительно точки касания шара и плоскости равен нулю. А так как скорость «геометрической точки», которая «вычерчивает след» шара на плоскости, очевидно, равна скорости центра масс шара, то из теоремы об изменении кинетического момента следует, что кинетический момент K_D шара относительно точки касания остается во все время движения неизменным. Но, воспользовавшись формулой

(4) п. 81, легко получить, что

$$K'_D = (A_1 p - m a^2 \gamma_1 \omega_n, A_2 q - m a^2 \gamma_2 \omega_n, A_3 r - m a^2 \gamma_3 \omega_n).$$

Отсюда и следуют интегралы (32) и (33). В существовании упомянутых интегралов можно убедиться и непосредственно, вычислив полные производные по времени от правых частей равенств (31)–(33) в силу уравнений движения (29), (30) и убедившись, что эти производные тождественно равны нулю.

Указанных четырех интегралов достаточно, чтобы интегрирование системы (29), (30) можно было свести к квадратурам. Чтобы в этом убедиться, достаточно найти множитель Якоби M . Разрешив уравнения (29) относительно производных, получим

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{A_1} [(A_2 - A_3) q r + \gamma_1 \varphi], \\ \dot{q} &= \frac{1}{A_2} [(A_3 - A_1) r p + \gamma_2 \varphi], \\ \dot{r} &= \frac{1}{A_3} [(A_1 - A_2) p q + \gamma_3 \varphi], \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{f} \left(\frac{A_2 - A_3}{A_1} \gamma_1 q r + \frac{A_3 - A_1}{A_2} \gamma_2 r p + \frac{A_1 - A_2}{A_3} \gamma_3 p q \right), \quad (36)$$

$$f = \frac{1}{m a^2} - \left(\frac{\gamma_1^2}{A_1} + \frac{\gamma_2^2}{A_2} + \frac{\gamma_3^2}{A_3} \right). \quad (37)$$

Множитель M удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial p} (M \dot{p}) + \frac{\partial}{\partial q} (M \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial r} (M \dot{r}) + \frac{\partial}{\partial \gamma_1} (M \dot{\gamma}_1) + \frac{\partial}{\partial \gamma_2} (M \dot{\gamma}_2) + \frac{\partial}{\partial \gamma_3} (M \dot{\gamma}_3) = 0,$$

где $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_3$ — правые части уравнений (35) и (30). Учитывая (30), уравнение для множителя можно преобразовать к такой форме:

$$\dot{M} + M \left(\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right) = 0. \quad (38)$$

Подставив в выражение, стоящее в скобках, правые части уравнений (35) и произведя необходимые дифференцирования, получим уравнение (38) в виде

$$\dot{M} + M \left(\frac{r \gamma_2 - q \gamma_3}{A_1} \gamma_1 + \frac{p \gamma_3 - r \gamma_1}{A_2} \gamma_2 + \frac{q \gamma_1 - p \gamma_2}{A_3} \gamma_3 \right) = 0.$$

Учитывая (30) и (37), имеем окончательно

$$2f \dot{M} - M \dot{f} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения дает такое выражение для множителя: $M = c/f$ (c — произвольная постоянная). Из теории последнего множителя Якоби следует теперь, что интегрирование систем дифференциальных уравнений (29), (30) сводится к квадратурам.

У п р а ж н е н и е. Показать, что для построения общего интеграла уравнений (32), (35) п. 105 помимо трех интегралов (36), (37) и (38) достаточно найти еще только один первый интеграл.

163. Приложение теории множителя к каноническим уравнениям. Пусть движение материальной системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (39)$$

В симметричной форме эта система уравнений запишется в виде

$$\frac{\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \dots = \frac{\frac{dq_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{\frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}}}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}} = \dots = \frac{\frac{dp_n}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}}}{-\frac{\partial H}{\partial q_n}} = \frac{dt}{1}. \quad (40)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial q_n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} \right) + \frac{\partial}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} \right) + \dots \\ \dots + \frac{\partial}{\partial p_n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) + \frac{\partial(1)}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

то для канонической системы уравнений существует множитель $M = 1$ (см. замечание в конце п. 161).

Так как для системы (39) множитель известен, то для построения ее общего интеграла достаточно знать не $2n$, а $2n-1$ первых интегралов. Построение $2n$ -го интеграла сводится к квадратуре.

Отметим еще одну возможность упрощения задачи интегрирования канонической системы уравнений. Пусть функция Гамильтона H не зависит явно от времени. Тогда, отбрасывая в уравнениях (40) последнюю дробь, содержащую dt , получим систему из $2n-1$ уравнений, которая по-прежнему имеет множитель $M = 1$. Поэтому для построения ее общего интеграла достаточно знать $2n-2$ первых интеграла. Но так как в рассматриваемом случае материальная система является обобщенно консервативной, то один интеграл нам известен заранее. Это обобщенный интеграл энергии $H = h = \text{const}$ (см. п. 151). Поэтому для построения общего интеграла достаточно знать еще $2n-3$ первых интеграла. Если, например, $n = 2$, то кроме интеграла энергии $H = h$ достаточно найти еще только один первый интеграл.

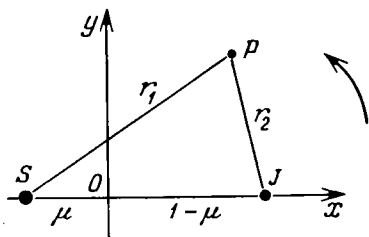


Рис. 138

Пример. Ограниченная задача трех тел (см. п. 124). Пусть точка P малой массы движется под действием притяжения двух точек S и J конечных масс, не оказывая влияния на движение последних. Будем считать, что точка J движется относительно точки S по круговой орбите, а точка P движется в плоскости этой орбиты (т. е. рассматривается так называемая *плоская круговая ограниченная задача трех тел*).

Выберем единицы измерения так, чтобы сумма масс точек S и J , неизменяемое расстояние между ними и период их обращения по орбитам равнялись единице. Пусть m — масса точки P , а $1-\mu$ и μ — массы точек S и J соответственно.

Движение точки P будем рассматривать во вращающейся системе координат Oxy с началом в центре масс точек S и J и осью Ox , направленной на точку J (рис. 138). Обозначая x, y координаты точки P и применяя теорему о сложении скоростей (п. 31), получаем для проекции абсолютной скорости точки P следующие выражения:

$$v_x = \dot{x} - y, \quad v_y = \dot{y} + x.$$

Кинетическая энергия точки P вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = T_2 + T_1 + T_0, \quad (41)$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad T_1 = m (\dot{x}y - x\dot{y}), \quad T_0 = \frac{1}{2} m (x^2 + y^2). \quad (42)$$

Потенциальная энергия точки P определяется выражением

$$\Pi = -m \frac{1-\mu}{r_1} - m \frac{\mu}{r_2}; \quad r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2. \quad (43)$$

Уравнения движения точки P могут быть записаны в форме канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона явно от времени не зависит, поэтому существует обобщенный интеграл энергии — интеграл Якоби:

$$T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const}. \quad (44)$$

Так как число степеней свободы $n = 2$, то для построения общего интеграла недостает одного первого интеграла.

§ 2. Системы с циклическими координатами

164. Циклические координаты. Крайне важным источником упрощения интегрирования дифференциальных уравнений движения является наличие циклических координат. Рассмотрим этот вопрос для голономных систем, движущихся в потенциальном поле сил. Пусть система имеет n степеней свободы, а $q_1, q_2, \dots, q_n$ — ее обобщенные координаты. Координата q_α называется *циклической*, если она не входит в функцию Лагранжа, т. е. если $\partial L / \partial q_\alpha = 0$ ¹⁾.

Теорема. Пусть q_α — циклическая координата. Тогда соответствующий ей импульс — первый интеграл: $p_\alpha = c_\alpha = \text{const}$, при этом изменение остальных координат со временем такое же, как в системе с $n-1$ степенью свободы, в которой c_α играет роль параметра.

Доказательство проще всего провести, используя гамильтонову форму уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

¹⁾ Как следует из п. 148, 153, $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}$, поэтому если координата циклическая, то она не входит также и в функции Гамильтона и Рауса; верно и обратное.

где $H = H(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{\alpha-1}, p_{\alpha}, p_{\alpha+1}, \dots, p_n, t)$. Если в (1) $i = \alpha$, то $\partial H / \partial q_{\alpha} = 0$ и $dp_{\alpha} / dt = 0$. Поэтому $p_{\alpha} = c_{\alpha} = \text{const}$. Положив в (1) $p_{\alpha} = c_{\alpha}$, придем к системе уравнений $(2n - 2)$ -го порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n; i \neq \alpha), \quad (2)$$

в которой $H = H(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{\alpha-1}, c_{\alpha}, p_{\alpha+1}, \dots, p_n, t)$.

Интегрирование уравнений (2) дает

$$q_i = q_i(t, c_{\alpha}, c_1, \dots, c_{2n-2}), \quad p_i = p_i(t, c_{\alpha}, c_1, \dots, c_{2n-2}), \quad (3)$$

где $c_1, \dots, c_{2n-2}$ — произвольные постоянные. Зависимость циклической координаты q_{α} от времени определяется одним из уравнений системы (1)

$$\frac{dq_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad (4)$$

в котором правая часть выражена через t и $2n - 1$ постоянных $c_{\alpha}, c_1, \dots, c_{2n-2}$ при помощи подстановки в H функций (3). Интегрирование уравнения (4) дает

$$q_{\alpha} = \int \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dt + c_y,$$

где c_y — $2n$ -я произвольная постоянная.

Аналогично, если не одна, а l обобщенных координат являются циклическими, то первыми интегралами будут l обобщенных импульсов и порядок системы дифференциальных уравнений (1) может быть понижен на $2l$ единиц.

165. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса. Пусть q_{α} ($\alpha = k + 1, \dots, n$) — циклические координаты. Тогда имеем $n - k$ первых интегралов

$$p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = c_{\alpha} = \text{const} \quad (\alpha = k + 1, \dots, n). \quad (5)$$

Пусть гессиан функции Лагранжа по переменным $\dot{q}_{\alpha}$ отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_{\alpha} \partial \dot{q}_{\beta}} \right\|_{\alpha, \beta = k+1}^n \neq 0. \quad (6)$$

Составим функцию Рауса (п. 153)

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^n c_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L, \quad (7)$$

где $\dot{q}_\alpha$ выражены через q_i , $\dot{q}_i$, c_α и t ($i = 1, 2, \dots, k$; $\alpha = k + 1, \dots, n$) из уравнений (5)¹⁾. Функция Рауса не содержит обобщенных скоростей, отвечающих циклическим координатам:

$$R = R(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha, t) \quad (i = 1, 2, \dots, k; \alpha = k + 1, \dots, n). \quad (8)$$

Поэтому часть системы уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (9)$$

описывает изменение нециклических координат со временем и может интегрироваться независимо от другой ее части

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad (\alpha = k + 1, \dots, n), \quad (10)$$

соответствующей циклическим координатам.

Проинтегрировав систему уравнений (9), имеющую порядок $2k$, получим

$$q_i = q_i(t, c_\alpha, c_1, c_1', \dots, c_k, c_k') \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (11)$$

где c_i, c_i' ($i = 1, 2, \dots, k$) — произвольные постоянные. Затем из первых $n - k$ уравнений системы (10) находим зависимости циклических координат от времени

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + c'_\alpha \quad (\alpha = k + 1, \dots, n), \quad (12)$$

где в функции $\partial R / \partial c_\alpha$ величины q_i заменены на их выражения (11).

Описанная в п. 164, 165 процедура понижения порядка системы дифференциальных уравнений движения является одним из наиболее эффективных и практически важных способов, применяемых при интегрировании уравнений движения. Всякая симметрия задачи, допускающая такой выбор обобщенных координат, чтобы некоторые из них q_α были циклическими, приводит к существованию первых интегралов $p_\alpha = \text{const}$ и, как мы видели, позволяет свести исследование движения к рассмотрению системы с меньшим числом обобщенных координат. Для обобщенно консервативных систем с двумя степенями свободы наличие одной циклической координаты позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам (см. п. 164).

Пример. Движение сферического маятника. Сферический маятник (см. пример 2 п. 138) имеет две степени свободы. Если за обобщенные координаты принять углы θ и φ (рис. 134), то для кинетической и потенциальной энергии будем иметь выражения

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = m g l \cos \theta.$$

¹⁾ При выполнении условия (6) уравнения (5) разрешимы относительно q_α .

Так как функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta$$

не содержит φ , то эта обобщенная координата циклическая. Ей соответствует первый интеграл

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = ml^2 \omega_0 \alpha, \quad (13)$$

где α — произвольная безразмерная постоянная; обозначение $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ введено для удобства.

Так как из (13) следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\sin^2 \theta} \alpha, \quad (14)$$

то для функции Рауса

$$R = p_{\varphi} \dot{\varphi} - L$$

получаем выражение

$$R = -\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2 \omega_0^2 \alpha^2}{\sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \quad (15)$$

Уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

отвечают системе с одной степенью свободы, которой соответствуют кинетическая и потенциальная энергия, определяемые равенствами

$$T^* = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \quad \Pi^* = mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{ml^2 \omega_0^2 \alpha^2}{\sin^2 \theta}.$$

Эта система называется *приведенной системой*, а функция Π^* — *приведенным потенциалом* или *потенциалом Рауса*.

Приведенная система имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{ml^2 \omega_0^2 \alpha^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} ml^2 \omega_0^2 \beta, \quad (16)$$

где β — безразмерная постоянная.

Введем обозначение $u = \cos \theta$. Тогда $\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta}$ и из (16) следует, что

$$\frac{1}{\omega_0^2} \dot{u}^2 = G(u), \quad (17)$$

где $G(u)$ — многочлен третьей степени,

$$G(u) = (1 - u^2)(\beta - 2u) - \alpha^2, \quad (18)$$

который можно также записать в форме

$$G(u) = 2(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad (19)$$

где u_1, u_2, u_3 — корни уравнения $G(u) = 0$.

Заметим, что $G(+\infty) = +\infty$, $G(\pm 1) = -\alpha^2 < 0$ (если $\alpha \neq 0$), $G(-\infty) = -\infty$. Так как $G(u)$ — непрерывная функция, то хотя бы один из корней, например u_3 , должен быть не меньше единицы. Но на отрезке $-1 \leq u \leq +1$ должны быть значения u , при которых функция $G(u)$ положительна или хотя бы обращается в нуль, так как в противном случае равенство (17) невозможно для действительных значений u . Величина же u обязательно должна быть действительной, так как движение маятника, безусловно, физически существует. Отсюда следует, что функция $G(u)$ имеет ровно два вещественных корня u_1, u_2 на отрезке $-1 \leq u \leq 1$ и один корень $u_3 \geq 1$. График функции $G(u)$ должен быть таким, как показано на рис. 139.

Так как для реального движения $G(u) \geq 0$, то интересующий нас интервал изменения u определяется неравенством $u_1 \leq u \leq u_2$. Ему соответствует область изменения угла θ : $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$, отвечающая реальному движению маятника.

Рассмотрим движение, отвечающее различным значениям постоянных α и β . Сразу отметим, что из условий $G(u) \geq 0$ и $-1 \leq u \leq +1$ следует, что величина β не может быть совсем произвольной, а должна удовлетворять

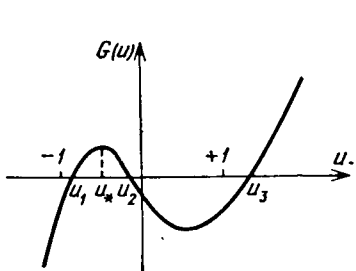


Рис. 139

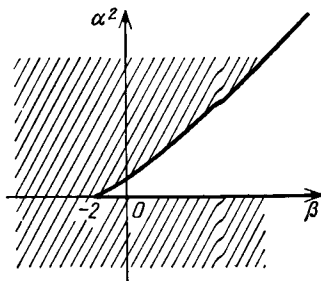


Рис. 140

неравенству $\beta \geq -2$. Если $\beta = -2$, то постоянная α может быть только равной нулю, что соответствует положению равновесия маятника, когда он занимает вертикальное положение ($u^2 = 1$, т. е. $\theta = 0$ или π).

Функция $G(u)$ имеет максимум в точке

$$u = u_* = \frac{1}{6} (\beta - \sqrt{\beta^2 + 12}), \quad (20)$$

причем

$$G(u_*) = f(\beta) - \alpha^2,$$

где

$$f(\beta) = \frac{1}{54} [(\beta^2 + 12)^{3/2} + 36\beta - \beta^3]. \quad (21)$$

Для реального движения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $G(u_*) \geq 0$, т. е. чтобы

$$0 \leq \alpha^2 \leq f(\beta). \quad (22)$$

На рис. 140 значения параметров α, β , удовлетворяющие неравенству (22), соответствуют точкам, лежащим в незаштрихованной области плоскости или на ее границе. Верхняя граница области задается уравнением $\alpha^2 = f(\beta)$; она касается оси $O\beta$ в точке $(-2, 0)$, а при $\beta \rightarrow \infty$ имеет асимптоту $\alpha^2 = \beta$.

Для классификации движений маятника рассмотрим последовательно три возможных случая.

1) $\alpha = 0$. Из (14) следует, что в этом случае $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, и мы приходим к задаче о движении математического маятника в плоскости $\varphi = \varphi_0$. Эта задача подробно изучена в п. 93—96.

2) $0 < \alpha^2 < f(\beta)$. В этом случае угол θ изменяется в промежутке $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$. На сфере радиусом l с центром в точке подвеса маятника значения $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ выделяют два круга, лежащих в параллельных плоскостях $z = z_1 = l \cos \theta_1$ и $z = z_2 = l \cos \theta_2$. Материальная точка, закрепленная на конце стержня, движется по сфере между плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$, попеременно касаясь этих плоскостей (рис. 141).

При этом среднее положение точки всегда находится ниже горизонтальной плоскости, проходящей через точку O подвеса маятника (рис. 134), т. е.

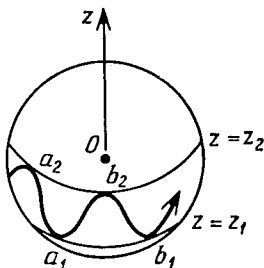


Рис. 141

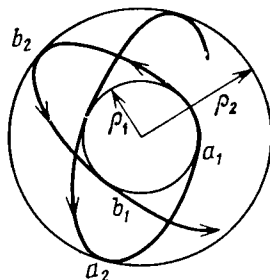


Рис. 142

$u_1 + u_2 < 0$. Чтобы убедиться в этом, приравняем коэффициенты при первой степени u в тождестве (19). Получим

$$2(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) = -2,$$

откуда

$$u_3 = -\frac{1 + u_1 u_2}{u_1 + u_2}.$$

Но так как $u_3 > 0$, а $|u_1 u_2| < 1$, то отсюда сразу следует, что $u_1 + u_2 < 0$.

Из уравнения (14) видно, что угол φ в рассматриваемом случае либо монотонно возрастает (если $\alpha > 0$), либо монотонно убывает (если $\alpha < 0$). На рис. 142 показана проекция траектории материальной точки на плоскость Oxy для движения, соответствующего рис. 141, когда обе плоскости $z = z_1$ и $z = z_2$ лежат ниже точки подвеса маятника (принято, что $\alpha > 0$). Эта проекция попеременно касается окружностей радиусов $\rho_1 = l \sin \theta_1$ и $\rho_2 = l \sin \theta_2$ и напоминает собой движение по эллипсу, большая полуось которого вращается в горизонтальной плоскости в направлении движения.

Для интегрирования уравнения (17) сделаем замену переменных

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 v. \quad (23)$$

Отсюда и из (17), (19) получаем дифференциальное уравнение для новой переменной v

$$\dot{v}^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 (u_3 - u_1) (1 - k^2 \sin^2 v), \quad (24)$$

где

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \quad (0 \leq k^2 \leq 1).$$

Если момент времени, когда $u = u_1$, принять за начальный, то из (24) получаем

$$\tau = \int_0^v \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}} = F(v, k), \quad (25)$$

где $F(v, k)$ — эллиптический интеграл первого рода (см. п. 95), а

$$\tau = \omega_0 \sqrt{\frac{u_3 - u_1}{2}} t.$$

Тогда из (23) следует, что

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2 \tau. \quad (26)$$

Так как эллиптическая функция $\operatorname{sn} \tau$ имеет период $4K(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, то $\operatorname{sn}^2 \tau$ имеет период, вдвое меньший. Поэтому $u = u_1$ для $\tau = 2nK(k)$ и $u = u_2$ для $\tau = (2n+1)K(k)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Следовательно, угол θ периодически колеблется между значениями θ_1 и θ_2 . Период κ этих колебаний вычисляется по формуле

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}K(k)}{\omega_0 \sqrt{u_3 - u_1}}. \quad (27)$$

Когда угол θ найден как функция времени, зависимость $\varphi(t)$ находится из уравнения (14) при помощи одной квадратуры.

3) $\alpha^2 = f(\beta)$. В этом случае корни u_1 и u_2 многочлена $G(u)$ совпадают, причем $u_1 = u_2 = u_*$, и мы приходим к задаче о коническом маятнике. Угол θ при движении постоянен, $\theta = \theta_* = \arccos u_* > \pi/2$. Материальная точка движется по окружности радиусом $l \sin \theta_*$ в горизонтальной плоскости $z = z_* = -l \cos \theta_* < 0$; время ее обращения по окружности равно $2\pi \sqrt{-\frac{g}{z_*}}$. Стержень, на котором закреплена точка, описывает поверхность конуса с осью симметрии Oz .

§ 3. Скобки Пуассона и первые интегралы

166. Скобка Пуассона. Пусть u и v — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$. Выражение

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \quad (1)$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v .

Отметим основные свойства скобки Пуассона. Пусть u, v, w — дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$. Тогда

- 1) $(u, v) = -(v, u)$,
- 2) $(cu, v) = c(u, v)$ ($c = \text{const}$),
- 3) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,
- 4) $\frac{\partial}{\partial t}(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$,
- 5) $((u, v), w) + ((v, w), u) + ((w, u), v) = 0$.

Первые четыре свойства непосредственно вытекают из определения (1) скобки Пуассона. Пятое свойство, называемое *тождеством Пуассона*, более громоздко для доказательства, хотя также несложно. Для сокращения выкладок можно использовать то обстоятельство, что каждое слагаемое в левой части тождества 5 есть произведение частной производной второго порядка на две частных производных первого порядка. Поэтому, чтобы показать, что левая часть тождества равна нулю, достаточно убедиться в том, что она не содержит ни одной производной второго порядка, например, от функции u (так как u, v, w входят в тождество 5 симметрично).

Вторые производные от u могут дать первое и третье слагаемые в 5. Их сумму на основании свойств 1 и 2 можно записать в виде

$$((u, v), w) + ((w, u), v) = (w, (v, u)) - (v, (w, u)).$$

Теперь уже нетрудно непосредственным вычислением проверить, что правая часть этого равенства не содержит вторых производных от функции u .

167. Теорема Якоби — Пуассона. Пусть переменные q_i, p_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Для того чтобы функция $f(q_i, p_i, t)$ была первым интегралом, необходимо и достаточно, чтобы ее полная производная по времени в силу уравнений (2) тождественно равнялась нулю: $df/dt \equiv 0$. Выразим это условие через скобку Пуассона. В силу (2) имеем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Применяя обозначение (1) для скобки Пуассона, необходимое и достаточное условие того, что f — первый интеграл, можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \quad (3)$$

Имеет место следующее замечательное утверждение.

Теорема Якоби — Пуассона. Если f_1 и f_2 — первые интегралы системы (2), то их скобка Пуассона (f_1, f_2) также будет первым интегралом этой системы.

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 — первые интегралы. Тогда, согласно (3),

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (f_1, H) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + (f_2, H) = 0, \quad (4)$$

а нужно доказать, что

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial t} + ((f_1, f_2), H) = 0. \quad (5)$$

Преобразуем левую часть этого равенства. По свойству 4 скобок Пуассона имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\right) + \left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\right).$$

Если теперь производные $\partial f_1/\partial t$ и $\partial f_2/\partial t$ заменить на их выражения из равенства (4) и затем воспользоваться свойствами 1 и 2 скобок Пуассона, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1, f_2) = -((f_1, H), f_2) - (f_1, (f_2, H)) = ((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1).$$

Подставляя это выражение в левую часть равенства (5), получаем ее в виде

$$((H, f_1), f_2) + ((f_2, H), f_1) + ((f_1, f_2), H).$$

Из свойства 5 скобок Пуассона следует, что последнее выражение тождественно равно нулю, что и доказывает справедливость теоремы Якоби — Пуассона.

Пример. Движение материальной точки под действием притяжения к заданному центру O . Пусть $Oq_1q_2q_3$ — неподвижная прямоугольная декартова система координат, а $\Pi(r)$, где $r^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, — потенциал силы притяжения. Если массу точки принять за единицу, то для функции Гамильтона имеем выражение

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \Pi(r).$$

Пусть

$$f_1 = q_2p_3 - q_3p_2, \quad f_2 = q_3p_1 - q_1p_3.$$

Проверка показывает, что $(f_1, H) = 0$ и $(f_2, H) = 0$, т. е. f_1 и f_2 — первые интегралы. Они представляют собой проекции момента количества движения материальной точки относительно центра O (этот момент постоянен, так как рассматриваемое силовое поле является центральным) на оси Oq_1 и Oq_2 . Согласно теореме Якоби — Пуассона, функция (f_1, f_2) тоже должна быть первым интегралом. Имеем

$$(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) = q_1p_2 - q_2p_1.$$

Полученный интеграл есть проекция момента количества движения на ось Oq_3 .

Может показаться, что теорема Якоби — Пуассона всегда позволяет по двум известным первым интегралам найти еще один первый интеграл, затем еще один и так далее до тех пор, пока не будет получено количество первых интегралов, необходимое для построения общего интеграла системы (2). Это далеко не так. На практике скобка Пуассона часто может быть либо константой, либо функцией известных первых интегралов.

Для того чтобы можно было надеяться получить из двух первых интегралов много или даже все первые интегралы, недостающие для построения общего интеграла, надо, чтобы хотя бы один из двух известных исходных первых интегралов был характерен для рассматриваемой частной задачи, чтобы он как можно полнее отражал физическую сущность именно данной задачи. Если за исходные первые интегралы брать интегралы, вытекающие из основных, общих для всех систем теорем динамики, то вряд ли в общем случае можно надеяться на эффективное применение теоремы Якоби — Пуассона,

§ 4. Канонические преобразования

168. Понятие канонического преобразования. Рассмотрим гамильтонову систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{J} \mathbf{H}_z'. \quad (1)$$

Здесь z — $2n$ -мерный вектор-столбец, $z' = (\mathbf{q}', \mathbf{p}')$, $\mathbf{q}' = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p}' = (p_1, \dots, p_n)$,

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$\mathbf{E}_n$ — единичная матрица n -го порядка. $H = H(z, t)$ — функция Гамильтона, $\mathbf{H}_z$ — матрица-строка размером $1 \times 2n$,

$$\mathbf{H}_z = (H_q, H_p) = (H_{q_1}, \dots, H_{q_n}, H_{p_1}, \dots, H_{p_n}).$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \quad (3)$$

Получение решений системы уравнений (1) часто оказывается очень сложным делом. Поэтому надо искать какие-то пути, упрощающие исследование движения. Например, в § 2 показано, что наличие одной циклической координаты позволяет понизить порядок системы (1) на две единицы. Это указывает на то, что удачный выбор обобщенных координат может существенно облегчить исследование движения, а иногда позволяет провести его по всей необходимой полноте. С такой ситуацией мы встретились в п. 165 при анализе движения сферического маятника.

В некоторой области фазового пространства $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ рассмотрим обратимую, дважды непрерывно дифференцируемую замену переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{P}$, содержащую время t в качестве параметра:

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

или, если ввести обозначение $\xi' = (\mathbf{Q}', \mathbf{P}')$, $\mathbf{Q}' = (Q_1, \dots, Q_n)$, $\mathbf{P}' = (P_1, \dots, P_n)$,

$$\xi = \xi(z, t). \quad (5)$$

Может случиться, что в новых переменных система уравнений (1) будет иметь более простую структуру и ее интегрирование будет проще интегрирования исходной системы. В новых переменных уравнения движения могут уже не быть гамильтоновыми. Мы, однако, будем далее рассматривать только такие преобразования (4), которые не нарушают гамильтоновой формы уравнений движения. Это будут канонические преобразования. Ниже мы дадим определение канонических преобразований, получим критерии каноничности.

сти и укажем способ нахождения функции Гамильтона, отвечающей преобразованным уравнениям.

Практический смысл канонических преобразований состоит в упрощении уравнений движения, в выборе таких новых координат в фазовом пространстве, которые более удобны для решения задачи о движении системы, нежели исходные старые координаты. Метод канонических преобразований является широко распространенным и эффективным методом исследования гамильтоновых уравнений.

Пусть M — матрица Якоби преобразования (4),

$$M = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \left\| \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Преобразование (4) называется *каноническим*, если существует такое постоянное число $c \neq 0$, что матрица Якоби (6) удовлетворяет тождеству

$$M'JM = cJ, \quad (7)$$

где матрица J определена равенством (2). Число c называется *валентностью канонического преобразования*; если $c = 1$, то преобразование называется *унивалентным*.

Замечание 1. Матрицы M , удовлетворяющие тождеству (7) при $c = 1$, называются *симплектическими*; если же в (7) $c \neq 1$, то матрица M называется *обобщенно симплектической* (с валентностью c). Так как, согласно (3), $\det J = 1$, то из равенства (7) на основании теоремы об умножении определителей получаем

$$\det M = \pm c^n,$$

т. е. обобщенно симплектические матрицы являются невырожденными.

Замечание 2. Пусть в фазовом пространстве последовательно выполнены два канонических преобразования: $\xi_1 = \xi_1(z, t)$ с валентностью c_1 и $\xi_2 = \xi_2(\xi_1, t)$ с валентностью c_2 . Тогда результирующее преобразование $\xi = \xi(z, t) \equiv \xi_2(\xi_1(z, t), t)$ тоже будет каноническим, и его валентность c равна произведению $c_1 c_2$.

В самом деле, по условию

$$M'_1 J M_1 = c_1 J, \quad M_1 = \partial \xi_1 / \partial z$$

и

$$M'_2 J M_2 = c_2 J, \quad M_2 = \partial \xi_2 / \partial \xi_1.$$

Поэтому

$$M = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial z} = M_2 M_1,$$

а следовательно,

$$M' J M = (M_2 M_1)' J (M_2 M_1) = M_1' M_2' J M_2 M_1 = M_1' c_2 J M_1 = c_2 M_1' J M_1 = c_2 c_1 J.$$

Отсюда, согласно определению (7) канонического преобразования, следует доказываемое утверждение.

Пусть, далее, задано каноническое преобразование $\xi = \xi(z, t)$ с валентностью c . Тогда обратное преобразование $z = z(\xi, t)$ также будет каноническим, а его валентность равна $1/c$.

Действительно, умножив обе части тождества (7) слева на матрицу $(M')^{-1}$, а справа — на матрицу M^{-1} , получим

$$\frac{1}{c} J = (M')^{-1} J M^{-1}. \quad (8)$$

Учитывая перестановочность операций транспонирования и взятия обратной матрицы, приходим к равенству

$$(M^{-1})' J M^{-1} = \frac{1}{c} J. \quad (9)$$

Так как матрицей Якоби обратного преобразования $z = z(\xi, t)$ является матрица M^{-1} , то отсюда следует, что это преобразование каноническое и имеет валентность $1/c$.

Отметив еще, что тождественное преобразование $Q_i = q_i$, $P_i = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), очевидно, будет каноническим, приходим к выводу, что совокупность всех канонических преобразований образует группу. Унивалентные преобразования составляют ее подгруппу.

169. Критерии каноничности преобразования. Равенство (7) позволяет легко проверить, является ли преобразование (4) каноническим или нет. Приведем еще некоторые критерии каноничности. Они эквивалентны условию (7) и могли бы быть приняты за определение каноничности преобразования (4).

Сначала введем понятие скобки Лагранжа и дадим критерий каноничности в терминах этих скобок. Пусть заданы $2n$ функций φ_j, ψ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) от двух переменных x, y и еще, может быть, от некоторых других переменных. Тогда *скобкой Лагранжа* для этих функций называется величина

$$[x, y] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Теорема. Если в качестве φ_j, ψ_j принять функции Q_j, P_j из (4), то необходимое и достаточное условие каноничности преобразования (4) запишется в виде

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \quad [q_i, p_k] = c \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$), а c — валентность канонического преобразования.

Доказательство получается при помощи непосредственной проверки. В самом деле, левая часть равенства (7) может быть записана в виде следующей блочной матрицы:

$$M'JM = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \frac{\partial P}{\partial q} - \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)' \frac{\partial Q}{\partial q} & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \frac{\partial P}{\partial p} - \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)' \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)' \frac{\partial P}{\partial q} - \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)' \frac{\partial Q}{\partial q} & \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)' \frac{\partial P}{\partial p} - \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)' \frac{\partial Q}{\partial p} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Вычисления, проведенные для левого верхнего блока этой матрицы с учетом обозначения (10), дают

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' \frac{\partial P}{\partial q} - \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)' \frac{\partial Q}{\partial q} = \left\| \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \right\|_{i,k=1}^n = \| [Q_i, q_k] \|_{i,k=1}^n.$$

Проведя аналогичные вычисления для остальных блоков матрицы (12), убеждаемся, что равенство (7) может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} \| [q_i, q_k] \|_{i,k=1}^n & \| [q_i, p_k] \|_{i,k=1}^n \\ - \| [q_i, p_k] \|_{i,k=1}^n & \| [p_i, p_k] \|_{i,k=1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & cE \\ -cE & 0 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно заметить, что равенства (11) и (13) эквивалентны.

Получим теперь критерий каноничности преобразования (4), использующий скобки Пуассона.

Теорема. Для того чтобы преобразование (4) было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы скобки Пуассона функций Q_i, P_i от переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$ удовлетворяли равенствам

$$(Q_i, Q_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (Q_i, P_k) = c\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Доказательство проводится при помощи непосредственной проверки эквивалентности равенств (14) и равенства (7), положенного в основу определения каноничности преобразования (4). Возьмем от обеих частей равенства (8) обратные матрицы и учтем, что согласно (3) $J^{-1} = -J$. Тогда придем к равенству

$$MJM' = cJ, \quad (15)$$

которое эквивалентно равенству (7). Левая часть последнего равенства может быть представлена в виде блочной матрицы

$$MJM' = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)' - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' & \frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)' - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)' \\ \frac{\partial P}{\partial q} \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)' - \frac{\partial P}{\partial p} \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)' & \frac{\partial P}{\partial q} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)' - \frac{\partial P}{\partial p} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)' \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Непосредственные вычисления показывают, что левый верхний блок этой матрицы может быть представлен в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{p}} \right)' - \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)' = \left\| \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} \right) \right\|_{i,h=1}^n = \| (Q_i, Q_h) \|_{i,h=1}^n.$$

Аналогичные вычисления для остальных блоков матрицы (16) позволяют записать равенство (15) в следующей форме:

$$\begin{vmatrix} \| (Q_i, Q_h) \|_{i,h=1}^n & \| (Q_i, P_h) \|_{i,h=1}^n \\ - \| (Q_i, P_h) \|_{i,h=1}^n & \| (P_i, P_h) \|_{i,h=1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & cE \\ -cE & 0 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что равенства (14) и (17) эквивалентны, что и доказывает теорему.

Приведенные критерии каноничности, как и само определение (7), позволяют по явно заданному преобразованию (4) решить, является оно каноническим или нет. Для дальнейшего построения теории канонических преобразований очень важен следующий критерий каноничности.

Теорема. Для каноничности преобразования (4) необходимо и достаточно, чтобы существовала отличная от нуля постоянная c такая, что выражение

$$c \sum_{h=1}^n p_h \delta q_h - \sum_{h=1}^n P_h \delta Q_h \quad (18)$$

является полным дифференциалом некоторой функции $F(q, p, t)$. При этом под полными дифференциалами δF и δQ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) понимаются дифференциалы, соответствующие изменению переменных q, p ; величина t считается параметром.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что условие того, что выражение (18) есть полный дифференциал, эквивалентно равенствам (11). Из (4) имеем

$$\delta Q_h = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Q_h}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \delta p_i \right) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Подставив эти дифференциалы в выражение (18) и изменив порядок суммирования, получим это выражение в виде

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta q_i + Y_i \delta p_i), \quad (19)$$

где приняты обозначения

$$X_i = c p_i - \sum_{l=1}^n p_l \frac{\partial Q_l}{\partial q_i}, \quad Y_i = - \sum_{l=1}^n p_l \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Условие того, что выражение (19) есть полный дифференциал, записывается в виде совокупности равенств

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \frac{\partial X_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

Непосредственное вычисление, использующее обозначения (20), показывает, что равенства (21) запишутся соответственно в виде

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \quad [q_i, p_k] = c\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Так как эти равенства совпадают с равенствами (11), то отсюда следует справедливость доказываемой теоремы.

170. Ковариантность уравнений Гамильтона при канонических преобразованиях. Если преобразование (4) является каноническим, то в новых переменных система уравнений (1) снова будет иметь гамильтонову форму. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. При каноническом преобразовании (4) любая гамильтонова система дифференциальных уравнений (1) переходит снова в гамильтонову систему (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона $\mathcal{H}(\xi, t)$)

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{J}\mathcal{H}'_{\xi}. \quad (22)$$

Действительно, из (5) и (1) имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathcal{H}'_z + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (23)$$

По

$$H'_z = \left(H_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)' = (H_{\xi} \mathbf{M})' = \mathbf{M}' H'_{\xi}.$$

Поэтому, учитывая тождество (15), равенство (23) можно записать в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{J}cH'_{\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (24)$$

Покажем, что если преобразование (4) каноническое, то

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{J}W_{\xi}, \quad (25)$$

где W — некоторая функция переменных ξ, t . В самом деле, опираясь на соотношения (3) и (6), получаем из (25) следующую цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)' = -W_{\xi} \mathbf{J}, \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)' \mathbf{J} = W_{\xi}, \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)' \mathbf{J} \mathbf{M} = W_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{z}} = W_z,$$

т. е. соотношение (25) эквивалентно равенству

$$W_z = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)' \mathbf{J} \mathbf{M}, \quad (26)$$

где W рассматривается как функция переменных q, p, t . В скалярной форме равенство (26) запишется в виде $2n$ соотношений

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Q_j}{\partial t} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial t} \right) \equiv \Phi_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\frac{\partial W}{\partial p_l} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_j}{\partial p_l} \frac{\partial Q_j}{\partial t} - \frac{\partial P_j}{\partial t} \frac{\partial Q_j}{\partial p_l} \right) \equiv \Psi_l \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

где обозначения Φ_k, Ψ_l для производных функции W введены для краткости записи. Величины Φ_k и Ψ_l являются производными по q_k и p_l от некоторой функции W в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Эти условия, как показывают непосредственные вычисления, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} [q_i, q_k] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [p_i, p_k] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [q_i, p_k] = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Так как преобразование (4) каноническое, то имеют место равенства (11), откуда вытекает справедливость равенств (27), а следовательно, и равенства (25).

Таким образом, уравнение (24) может быть записано в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = J(cH'_\xi + W'_\xi).$$

Если обозначить $\mathcal{H}$ функцию $cH + W$, то последнее уравнение примет гамильтонову форму

$$\frac{d\xi}{dt} = J\mathcal{H}'_\xi.$$

Роль новой функции Гамильтона играет функция $\mathcal{H}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые простые, но практически важные примеры канонических преобразований. Старую и новую функции Гамильтона обозначим соответственно $H(q, p, t)$ и $\mathcal{H}(Q, P, t)$.

Примеры. 1. Тождественное преобразование

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Это унитарное каноническое преобразование; при этом $\mathcal{H} = H(Q, P, t)$.

2. Преобразование

$$Q_j = p_j, \quad P_j = q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Это каноническое преобразование с валентностью $s = -1$. Оно меняет ролями обобщенные координаты и обобщенные импульсы. При этом

$$\mathcal{H} = -H(P, Q, t),$$

3. Преобразование

$$Q_j = \alpha q_j, \quad P_j = \beta p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n; \alpha = \text{const}, \beta = \text{const}, \alpha\beta \neq 0). \quad (30)$$

Это преобразование каноническое, и

$$\mathcal{H} = \alpha\beta H \left(\frac{1}{\alpha} Q, \frac{1}{\beta} P, t \right).$$

4. Преобразование

$$Q_j = \alpha p_j, \quad P_j = \beta q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n; \alpha = \text{const}, \beta = \text{const}, \alpha\beta \neq 0). \quad (31)$$

Это преобразование также каноническое, а

$$\mathcal{H} = -\alpha\beta H \left(\frac{1}{\beta} P, \frac{1}{\alpha} Q, t \right).$$

Примеры 2 и 4 показывают, что при канонических преобразованиях может исчезнуть различие между координатами и импульсами. Применение названий «импульс» и «координата» может стать чисто условным. Поэтому для пары переменных Q_i и P_i очень удобно название «канонически сопряженные переменные».

5. Перенос начала координат в фазовом пространстве

$$Q = q - f(t), \quad P = p - g(t) \quad (32)$$

представляет собой унитарное каноническое преобразование. При этом новые переменные Q, P удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = H(Q + f(t), P + g(t), t) + \frac{dg}{dt} \cdot Q - \frac{df}{dt} \cdot P, \quad (33)$$

где точкой обозначено скалярное произведение векторов.

6. Преобразование

$$q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

является унитарным каноническим преобразованием. Оно осуществляет переход от пары канонически сопряженных переменных q_j, p_j , играющих роль декартовых координат на плоскости, к паре канонически сопряженных переменных φ_j, r_j (φ_j — «координата», r_j — «импульс»), имеющих характер полярных координат.

Если старая функция Гамильтона имела вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j (q_j^2 + p_j^2), \quad (35)$$

то уравнениям для переменных φ_j, r_j соответствует функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n \lambda_j r_j. \quad (36)$$

7. Преобразование

$$Q_j = q_j - ip_j, \quad P_j = q_j + ip_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (37)$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$), осуществляет переход к комплексно сопряженным переменным. Оно является каноническим с валентностью $2i$ и

$$\mathcal{H} = 2iH\left(\frac{P+Q}{2}, \frac{P-Q}{2i}, t\right). \quad (38)$$

Если, например, старая функция Гамильтона имеет вид (35), то

$$\mathcal{H} = i \sum_{j=1}^n \lambda_j Q_j P_j. \quad (39)$$

17.1. Канонические преобразования и процесс движения. Очень важным примером канонического преобразования служит процесс движения, описываемого гамильтоновой системой дифференциальных уравнений.

Пусть для гамильтоновой системы (1) при $t=0$ $\mathbf{z}' = \mathbf{z}'_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}'_0)$. Тогда вектор-функция $\xi' = \xi'(\mathbf{z}_0, t) = (\mathbf{q}'(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t), \mathbf{p}'(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t))$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{J}H'_{\xi}. \quad (40)$$

Она задает преобразование фазового пространства $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{p}$.

Теорема. Преобразование фазового пространства, задаваемое движениями гамильтоновой системы, является унималентным каноническим преобразованием.

Для доказательства теоремы надо убедиться в том, что матрица Якоби $\mathbf{M} = \partial\xi/\partial\mathbf{z}_0$ удовлетворяет тождеству (7) при $c=1$, т. е.

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{J}. \quad (41)$$

Для этого найдем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$. Продифференцировав обе части тождества (40) по $\mathbf{z}_0$, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{z}_0} = \mathbf{J}H_{\xi\xi} \frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{z}_0},$$

или

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{J}H_{\xi\xi}\mathbf{M}. \quad (42)$$

Транспонируя обе части этого равенства и учитывая соотношения (3) и симметричность матрицы $H_{\xi\xi}$, получим

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = \mathbf{M}'H'_{\xi\xi}\mathbf{J}' = -\mathbf{M}'H_{\xi\xi}\mathbf{J}. \quad (43)$$

Учитывая (42) и (43), вычислим теперь производную по времени от матрицы $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$. Имеем

$$\frac{d(\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M})}{dt} = \frac{d\mathbf{M}'}{dt}\mathbf{J}\mathbf{M} + \mathbf{M}'\mathbf{J}\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mathbf{M}'H_{\xi\xi}\mathbf{J}\mathbf{M} + \mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{J}H_{\xi\xi}\mathbf{M}.$$

Если теперь заметить, что, согласно равенствам (3), $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}$, то это выражение можно представить в виде

$$\frac{d(\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M})}{dt} = \mathbf{M}'\mathbf{H}_{\xi\xi}\mathbf{M} - \mathbf{M}'\mathbf{H}_{\xi\xi}\mathbf{M} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$ постоянна. Но при $t=0$ она, очевидно, равна $\mathbf{J}$. Поэтому при всех t имеет место равенство (41). Теорема доказана.

172. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема. Пусть G_0 — некоторая область фазового пространства $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$. Из каждой ее точки $q_{10}, \dots, q_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}$ как из начальной «выпустим» траекторию системы уравнений (1). Пусть G_t — совокупность точек $\mathbf{q} = \mathbf{q}(q_0, p_0, t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(q_0, p_0, t)$ в момент времени t , V_0 — объем области G_0 , а V_t — объем области G_t .

Теорема Лиувилля. При движении гамильтоновой системы фазовый объем остается постоянным, т. е. $V_t = V_0$ при любом t .

Доказательство. Имеем равенства

$$V_0 = \int \dots \int_{G_0} dq_{10} \dots dq_{n0} dp_{10} \dots dp_{n0} \quad (44)$$

$$V_t = \int \dots \int_{G_t} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

В интеграле, входящем во второе из этих равенств, перейдем от переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ к переменным $q_{10}, \dots, q_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}$. Тогда, как известно из курса математического анализа,

$$V_t = \int \dots \int_{G_0} |\det M| dq_{10} \dots dq_{n0} dp_{10} \dots dp_{n0}, \quad (45)$$

где (в обозначениях предыдущего пункта) $M = \partial \xi / \partial z_0$. Матрица M удовлетворяет равенству (41). Так как $\det \mathbf{J} = 1$, то из него следует, что $\det M = \pm 1$. Но при $t=0$, очевидно, $M = \mathbf{E}_{2n}$ и $\det M = \det \mathbf{E}_{2n} = +1$. Отсюда ввиду непрерывности M получаем, что и при любых t $\det M = +1$. Поэтому из (44) и (45) следует, что $V_t = V_0$. Теорема доказана.

173. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Пусть преобразование (4) каноническое и в некоторой области фазового пространства удовлетворяет условию

$$\det \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{p}} \neq 0. \quad (46)$$

Тогда преобразование (4) называется *свободным каноническим преобразованием*.

При выполнении условия (46) из первых n равенств (4) можно выразить $\mathbf{p}$ через $\mathbf{q}$, Q и t . Тогда выражение (18) может быть

записано в виде

$$c \sum_{k=1}^n p_k \delta q_k - \sum_{k=1}^n P_k \delta Q_k = \delta F(q, p(q, Q, t), t) = \delta S(q, Q, t), \quad (47)$$

где S — функция F , в которой p заменено на $p(q, Q, t)$.

Из равенства (47) вытекают соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (48)$$

Функция S называется *производящей функцией свободного канонического преобразования* (4).

Очевидно, что верно и обратное утверждение: если заданы дважды непрерывно дифференцируемая функция $S(q, Q, t)$ и число $c \neq 0$, то при условии

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial Q_i \partial q_k} \right\|_{i,k=1}^n \neq 0 \quad [(49)]$$

формулы (48) задают свободное каноническое преобразование с валентностью c .

При условии (49) формулы (48) можно представить в виде (4). В самом деле, условие (49) означает, что первые n равенств из соотношений (48) можно разрешить относительно Q_i . Сделав это, получим $Q_i = Q_i(q, p, t)$. Подставив эти функции в левые части последних n равенств из (48), получим $P_i = P_i(q, p, t)$.

В п. 170 мы получили уравнение (24) и показали, что его можно записать в гамильтоновой форме. Осуществим эту запись, используя производящую функцию S . В (24) H представляет собой старую функцию Гамильтона, выраженную через новые переменные, а

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)' = \left(\frac{\partial Q'(q, p, t)}{\partial t}, \frac{\partial P'(q, p, t)}{\partial t} \right). \quad (50)$$

В первых n равенствах соотношений (48) величины Q заменим на их выражения $Q(q, p, t)$. В результате эти равенства станут тождествами относительно старых переменных q, p, t . Продифференцировав их по t , получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Меняя здесь порядок дифференцирования и пользуясь последними n равенствами из (48), имеем

$$-\sum_{k=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial t} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Применяя векторно-матричные обозначения, запишем эти равенства в виде

$$-\frac{\partial Q'}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathbf{q}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \quad (51)$$

Далее, последние n равенств из (48) дают

$$\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{Q} \partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right). \quad (52)$$

Из (50) и (51), (52) получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{J} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial S}{\partial t} \right)'$$

Следовательно, уравнение (24) имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{J} \left(cH + \frac{\partial S}{\partial t} \right)'_{\xi}, \quad (53)$$

и новая функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (54)$$

где H и S должны быть выражены через $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, t .

Таким образом, если заданы производящая функция $S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ и валентность c канонического преобразования, то связь старых и новых переменных определяется из равенств (48), а функция Гамильтона, отвечающая преобразованной к новым переменным $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ системе (1), вычисляется по формуле (54). Мы видим, что при преобразовании системы (1) к новым переменным нужно все вычисления проводить не с $2n$ функциями (4), а с функциями S и H . Ясно, насколько это важно при рассмотрении конкретных задач, особенно при большом числе степеней свободы n .

Можно заранее задать структуру новой функции Гамильтона $\mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ и пытаться так подобрать производящую функцию S , чтобы удовлетворялось равенство (54), которое с учетом формул (48) записывается в виде

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t} + cH \left(\mathbf{q}, \frac{1}{c} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right)', t \right) = \mathcal{H} \left(\mathbf{Q}, - \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}} \right)', t \right). \quad (55)$$

Можно, например, потребовать, чтобы какие-то (или даже все) «координаты» Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не входили в новую функцию Гамильтона. И если удастся так подобрать S , чтобы удовлетворялось уравнение (55), то среди новых переменных в рассматриваемой задаче будут циклические «координаты», что позволяет (см. п. 164) понизить порядок системы дифференциальных уравнений

движения на величину $2k$ (k — число циклических координат). А если все координаты циклические, то задача сводится к элементарным квадратурам, так как тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P, t)$, и уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = f_i(P, t), \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и, если Q_{i0}, P_{i0} — начальные значения величин Q_i, P_i , отсюда следует, что

$$Q_i = \int_0^t f_i(P_0, t) dt + Q_{i0}, \quad P_i = P_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, мы имеем вполне определенный метод упрощения уравнений движения, который приводит к новой постановке задачи интегрирования уравнений динамики (1) — поиску функции S , удовлетворяющей уравнению в частных производных (55).

Примеры. 1. Канонические преобразования примеров 1, 3, 5 п. 170 не являются свободными. В них переменные q, Q зависимы и свободно задаваться не могут.

2. Остальные канонические преобразования, рассмотренные в примерах п. 170, являются свободными, причем для преобразования (29)

$$c = -1, \quad S = -\sum_{j=1}^n q_j Q_j, \quad (56)$$

для преобразования (31)

$$c = -\alpha\beta, \quad S = -\beta \sum_{j=1}^n q_j Q_j, \quad (57)$$

для преобразования (34)

$$c = 1, \quad S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_j^2 \operatorname{ctg} \varphi_j \quad (58)$$

и для преобразования (37)

$$c = 2t, \quad S = \sum_{j=1}^n \left(q_j^2 - 2q_j Q_j + \frac{1}{2} Q_j^2 \right). \quad (59)$$

174. О других типах производящих функций. Мы видели, что не все канонические преобразования являются свободными, и поэтому не каждое каноническое преобразование можно задать при помощи производящей функции вида $S(q, Q, t)$. Однако можно перейти к иным типам производящих функций. Пусть, например, преобразование (4) таково, что

$$\det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0. \quad (60)$$

Тогда из последних n равенств (4) можно выразить $\mathbf{p}$ через $\mathbf{q}$, $\mathbf{P}$ и t и можно получить производящую функцию S_1 канонического преобразования (4), зависящую не от $\mathbf{q}$, $\mathbf{Q}$, t , как это было в случае свободного преобразования, а от переменных $\mathbf{q}$, $\mathbf{P}$, t^1). В самом деле, перенишем (18) в виде

$$c \sum_{h=1}^n p_h \delta q_h - \sum_{h=1}^n P_h \delta Q_h - \sum_{h=1}^n Q_h \delta P_h + \sum_{h=1}^n Q_h \delta P_h = \delta F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

или

$$c \sum_{h=1}^n p_h \delta q_h + \sum_{h=1}^n Q_h \delta P_h = \delta \left(F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \sum_{h=1}^n Q_h P_h \right).$$

Последнее равенство можно окончательно записать в виде

$$c \sum_{h=1}^n p_h \delta q_h + \sum_{h=1}^n Q_h \delta P_h = \delta S_1(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad (61)$$

где через S_1 обозначена функция $F + \sum_{h=1}^n Q_h P_h$, в которой величины Q_h заменены на их выражения из первых n равенств (4), а переменная $\mathbf{p}$ заменена затем на ее значение $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$, получающееся из последних n равенств (4).

Из (61) следует, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial S_1}{\partial P_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (62)$$

II в точности так же, как и для свободного канонического преобразования, можно получить выражение для функции Гамильтона преобразованной системы (1)

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (63)$$

где H и $\partial S_1 / \partial t$ должны быть записаны в новых переменных. Верно и обратное: если заданы число $c \neq 0$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция $S_1(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$, удовлетворяющая условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S_1}{\partial q_i \partial P_h} \right\|_{i,h=1}^n \neq 0, \quad (64)$$

то формулы (62) задают каноническое преобразование с валентностью, равной c . При условии (64) формулы (62) можно записать в виде равенств (4).

¹⁾ Следует иметь в виду, что если каноническое преобразование свободное, то для него производящая функция не обязательно есть функция S от $\mathbf{q}$, $\mathbf{Q}$, t . Неравенства (46) и (60) могут, например, выполняться одновременно, и тогда для свободного канонического преобразования в качестве производящей функции можно также взять функцию S_1 от $\mathbf{q}$, $\mathbf{P}$, t .

Мы рассмотрели два типа производящих функций $S(q, Q, t)$ и $S_1(q, P, t)$. Эти функции наиболее часто применяются при интегрировании (точном или приближенном) уравнений динамики. Но q и P тоже не всегда можно принять за независимые переменные. Однако¹⁾ если заданы $2n$ независимых функций Q_i, P_i от $2n$ независимых переменных q_i, p_i , то из $4n$ величин Q_i, P_i, q_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) всегда можно выбрать $2n$ независимых так, чтобы при соответствующей нумерации переменных производящая функция U зависела от величин

$$q_1, \dots, q_l, p_{l+1}, \dots, p_n, Q_1, \dots, Q_k, P_{k+1}, \dots, P_n \quad (l \geq 0, k \leq n) \quad (65)$$

и, быть может, от времени (в наборе $2n$ переменных (65) отсутствуют пары канонически сопряженных переменных q_i, p_i или Q_j, P_j). При этом каноническая замена переменных и новая функция Гамильтона определяются по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_k} = -c q_k, \quad \frac{\partial U}{\partial Q_j} = -P_j, \quad \frac{\partial U}{\partial P_h} = Q_h \quad (66)$$

$$\mathcal{H} = cH + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (i = 1, \dots, l; g = l+1, \dots, n; j = 1, \dots, k; h = k+1, \dots, n). \quad (67)$$

Примеры. 1. Тождественное преобразование (28)

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

задается производящей функцией

$$S_1 = \sum_{j=1}^n q_j P_j, \quad (68)$$

при этом $c = 1$.

2. Для преобразования (30)

$$c = \alpha\beta, \quad S_1 = \alpha \sum_{j=1}^n q_j P_j. \quad (69)$$

3. Для канонического преобразования (32), определяющего перенос начала координат в фазовом пространстве,

$$c = 1, \quad S_1 = \sum_{j=1}^n q_j P_j + \sum_{j=1}^n (g_j(t) q_j - f_j(t) P_j). \quad (70)$$

4. Пусть задана произвольная дифференцируемая обратимая замена обобщенных координат $q \rightarrow Q$, определяемая формулами

$$Q_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (71)$$

При этом преобразовании новые координаты выражаются только через старые координаты (но не импульсы). Оно является частным случаем канонических

¹⁾ См. § 29 книги: Гаптвахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике.— М.: Наука, 1966.

преобразований. Действительно, если положить $c = 1$ и

$$S_1 = \sum_{j=1}^n P_j f_j(q_1, \dots, q_n, t), \quad (72)$$

то, согласно формулам (62), новые и старые импульсы связаны соотношениями

$$P_i = \sum_{j=1}^n P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (73)$$

5. Рассмотрим важный частный случай предыдущего примера: переход к вращающейся системе координат. Пусть

$$Q = Aq, \quad (74)$$

где A — ортогональная матрица ($A' = A^{-1}$), которая не обязательно постоянна. Непосредственным вычислением нетрудно показать, что формулы (74) вместе с заменой переменных

$$P = Ap \quad (75)$$

определяют унитарное каноническое преобразование. Согласно формуле (72) этому преобразованию соответствует производящая функция

$$S_1 = P \cdot Aq. \quad (76)$$

Примечательно, что обобщенные импульсы преобразуются по тем же формулам, что и обобщенные координаты.

Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(Q, P, t)$ вычисляется по старой $H(q, p, t)$ в соответствии с равенством (63):

$$\mathcal{H}(Q, P, t) = H(A'Q, A'P, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}. \quad (77)$$

Если матрица A постоянна, то $\partial S_1 / \partial t \equiv 0$. Если же A не будет постоянной матрицей, то

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = P \cdot \frac{dA}{dt} q = P \cdot \frac{dA}{dt} A^{-1} Q. \quad (78)$$

Так как A — ортогональная матрица, то произведение $\frac{dA}{dt} A^{-1}$ (см. п. 24) — кососимметрическая матрица. Пусть

$$\frac{dA}{dt} A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если ввести вектор $\omega' = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, то

$$\frac{dA}{dt} A^{-1} Q = \omega \times Q$$

и формула (78) может быть записана в виде

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = P \cdot [\omega \times Q] = \omega \cdot [Q \times P].$$

Таким образом, окончательно получаем функцию Гамильтона, соответствующую движению во вращающейся системе координат:

$$\mathcal{H} = H(A'Q, A'P, t) + \omega \cdot [Q \times P]. \quad (79)$$

§ 5. Метод Якоби интегрирования уравнений движения

175. Уравнение Гамильтона — Якоби. Теория канонических преобразований приводит нас к методу Якоби интегрирования канонической системы уравнений движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Если эту систему подвергнуть свободному унивалентному каноническому преобразованию, определяемому уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где производящая функция S имеет в качестве аргументов величины $q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t$, то согласно п. 173 система уравнений (1) примет вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ определяется равенством

$$\mathcal{H} = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S(q_i, Q_i, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

в правой части которого величины q_i, p_i (после вычисления частной производной $\partial S/\partial t$) должны быть выражены через Q_i, P_i на основании уравнений (2).

Если функция S выбрана так, что $\mathcal{H} \equiv 0$, то уравнения (3) сразу интегрируются:

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где α_i, β_i — произвольные постоянные. Если функция S удовлетворяет условию (49) п. 173, то из (2) находится зависимость исходных переменных от времени t и $2n$ произвольных постоянных α_i, β_i :

$$q_i = q_i(t, \alpha_j, \beta_j), \quad p_i = p_i(t, \alpha_j, \beta_j). \quad (6)$$

Функция S , согласно (2) и (4), должна при этом удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0. \quad (7)$$

Это уравнение в частных производных называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. В нем S есть функция $q_1, q_2, \dots, q_n$ и t ; величины $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ рассматриваются как параметры.

Общее решение уравнения в частных производных зависит от произвольных функций. Такое решение называется *общим интегралом* этого уравнения. Однако в приложении к решению задач механики главную роль играет не общий, а полный интеграл уравнения (7). *Полным интегралом* уравнения (7) называется его решение $S(q_i, \alpha_i, t)$, зависящее от n произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и удовлетворяющее условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\|_{i,k=1}^n \neq 0. \quad (8)$$

Таким образом, мы получаем следующий способ интегрирования уравнений движения (1), основанный на рассмотрении уравнения (7) (теорема Якоби): *если $S(q_i, \alpha_i, t)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (7), содержащий n произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то решение (6) уравнений (1) находится из соотношений*

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

где β_i — произвольные постоянные.

Теорема Якоби позволяет свести интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) к нахождению полного интеграла уравнения (7) в частных производных. Вторая задача, конечно, не проще первой, а даже более сложна. Но оказывается, что метод Якоби является весьма эффективным среди существующих методов нахождения точных решений системы (1). Он также является одним из наиболее мощных методов приближенного интегрирования канонических уравнений.

Общего метода нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби (7) при произвольной функции H не существует. Остановимся только на некоторых частных способах нахождения полного интеграла.

176. Уравнение Гамильтона — Якоби для систем с циклическими координатами. Пусть координаты $q_{k+1}, \dots, q_n$ — циклические. Тогда

$$H = H(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n, t).$$

Полный интеграл уравнения (7) ищем в виде

$$S = \alpha_{k+1}q_{k+1} + \dots + \alpha_n q_n + S^*(q_1, \dots, q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \quad (10)$$

Подставив (10) в (7), получим уравнение для S^*

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_k, \frac{\partial S^*}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S^*}{\partial q_k}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n, t\right) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, нахождение полного интеграла уравнения (7) приводит к рассмотрению уравнения (11), в котором S^* зависит уже не от $(n+1)$ -й переменной, а от $(n-k+1)$ -й, т. е. число независимых переменных уменьшилось на число циклических координат.

177. Уравнение Гамильтона — Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Пусть функция Гамильтона не зависит явно от времени:

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n).$$

Тогда существует обобщенный интеграл энергии $H = h$, где h — произвольная постоянная. В уравнении (7) положим

$$S = -ht + V, \quad (12)$$

где функция V не зависит от t . Для нее получаем уравнение

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h. \quad (13)$$

Это уравнение и будет уравнением Гамильтона — Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Из (13) находим $V = V(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — произвольные постоянные, не зависящие от h . Из (12) имеем выражение для S :

$$S = -ht + V(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h). \quad (14)$$

Если функция S удовлетворяет условию (8) ($\alpha_n = h$), то (14) — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (7) и равенства (9) дают соотношения

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - \beta_n, \quad (16)$$

где $\beta_1, \dots, \beta_n$ — произвольные постоянные.

Последние $n-1$ соотношений в (15) — геометрические: они дают траектории в n -мерном координатном пространстве $q_1, \dots, q_n$. Вместе с равенством (16) эти соотношения дают и закон движения по траекториям. Первые n соотношений в (15) служат для определения импульсов p_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

178. Разделение переменных. Известны замечательные случаи, когда полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (7) может быть найден при помощи разделения переменных. Метод разделения переменных состоит в том, что решение уравнения (7) ищется в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных $q_1, \dots, q_n$ и времени (и, конечно, произвольных постоянных):

$$S = S_0(t) + S_1(q_1, t) + S_2(q_2, t) + \dots + S_n(q_n, t). \quad (17)$$

К сожалению, не существует простого критерия, позволяющего в общем случае по структуре функции Гамильтона судить о возмож-

ности разделения переменных в уравнении (7)¹⁾. Мы укажем только два простейших случая разделения переменных для консервативной или обобщенно консервативной системы.

1°. Пусть

$$H = H(f_1(q_1, p_1), \dots, f_n(q_n, p_n)), \quad (18)$$

т. е. функция Гамильтона зависит от n функций f_i , каждая из которых зависит только от одной пары «своих» канонически сопряженных переменных q_i, p_i . Будем предполагать, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (19)$$

Уравнение Гамильтона — Якоби (13) имеет вид

$$H\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \dots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right) = h. \quad (20)$$

Положим

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

При условии (19) равенства (21) можно разрешить относительно $\partial V / \partial q_i$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = g_i(q_i, \alpha_i). \quad (22)$$

Тогда

$$V = \sum_{i=1}^n \int g_i(q_i, \alpha_i) dq_i,$$

а функция

$$S = -ht + \sum_{i=1}^n \int g_i(q_i, \alpha_i) dq_i \quad (23)$$

является решением уравнения Гамильтона — Якоби (7). Величина h в (23) есть функция произвольных постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$h = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (24)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

а согласно (21) и (22)_i

$$\frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\partial f_i / \partial p_i}, \quad (25)$$

¹⁾ Исследование этого вопроса содержится в работе: Яров-Яровой М. С. Об интегрировании уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных // ИММ.— 1963.— Т. 27, вып. 6.— С. 973—987.

то условие (8), записываемое в рассматриваемом случае в виде неравенства

$$\prod_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_i} \neq 0,$$

очевидно, удовлетворяется. Следовательно, функция (23) будет полным интегралом уравнения (7).

2°. Пусть функция H выражается последовательно «функцией от функции», где каждая функция f_i зависит от предыдущей функции f_{i-1} и «своей» пары канонически сопряженных переменных q_i, p_i :

$$H = f_n(f_{n-1}, q_n, p_n), \quad f_{n-1} = f_{n-1}(f_{n-2}, q_{n-1}, p_{n-1}) \quad \text{и т. д.},$$

т. е. функция Гамильтона имеет такую структуру:

$$H = f_n \{ \dots f_3 \{ f_2 [f_1(q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3 \}, \dots, q_n, p_n \}. \quad (26)$$

Будем считать, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Для получения решения уравнения (13) положим

$$f_1(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}) = \alpha_1, \quad f_2(\alpha_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_2}) = \alpha_2, \quad \dots, \quad f_n(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}) = \alpha_n = h.$$

При условии (27) эти равенства можно разрешить относительно производных $\partial V / \partial q_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Получим

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = g_1(q_1, \alpha_1), \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = g_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = g_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Функция

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^n \int g_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i \quad (28)$$

будет решением уравнения (7). Легко проверить, что неравенство (8) при условии (27) выполнено, поэтому функция (28) будет полным интегралом уравнения (7).

Мы рассмотрели весьма частные случаи, когда специальная структура функции Гамильтона позволяет дать общий конструктивный способ построения общего интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. Следует, однако, отметить, что указанные способы разделения переменных применимы к таким важным задачам механики, как задача о гармоническом осцилляторе, задача о движении физического маятника, задача двух тел, задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа и др.

Рассмотрим некоторые примеры.

Примеры. 1. *Свободное вертикальное падение материальной точки у поверхности Земли.* Пусть ось Oq направлена вертикально вниз. Если m — масса точки, то

$$H = \frac{1}{2m} p^2 - mgq,$$

где p — импульс, соответствующий обобщенной координате q , g — ускорение свободного падения.

Если

$$\frac{1}{2m} p^2 - mgq = h = \alpha,$$

то

$$p = \sqrt{2m(\alpha + mgq)} \quad (29)$$

и полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 - mgq = 0$$

выпишется в виде

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m(\alpha + mgq)} dq.$$

В соответствии с формулами (9) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\beta.$$

Первое из этих соотношений даст равенство (29), а из второго получаем

$$-t + \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{\alpha + mgq}} = -\beta,$$

или

$$-t + \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{\alpha + mgq}}{g} = -\beta. \quad (30)$$

Произвольные постоянные α и β находятся из начальных условий. Пусть при $t = 0$ имеем $q = 0$, $\dot{q} = 0$. Тогда из (29), (30) и равенства $p = m\dot{q}$ следует, что $\alpha = \beta = 0$ и

$$q = \frac{gt^2}{2}, \quad p = mgt.$$

2. *Движение стержня, опирающегося на горизонтальную плоскость и вертикальную ось.* Пусть в однородном поле тяжести движется бесконечно тонкий однородный стержень длиной $2l$ и массой m . Нижний конец стержня перемещается по гладкой горизонтальной плоскости, а верхний его конец на рассматриваемой стадии движения опирается на гладкую вертикальную ось OZ (рис. 143). Найдём полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби в этой задаче.

Пусть q_1 — угол между проекцией стержня на плоскость OXY и осью OX , а q_2 — угол, который образует стержень с вертикалью. Со стержнем жестко свяжем систему координат $Gxyz$, оси которой направлены по его главным

центральной осью инерции, причем ось Gy лежит в плоскости, проходящей через стержень и вертикаль OZ . Для кинетической и потенциальной энергии имеем выражения

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2}mv_G^2, \quad \Pi = mgl \cos q_2,$$

где A, B, C — моменты инерции стержня относительно осей Gx, Gy, Gz , а p, q, r — проекции его угловой скорости на эти оси, v_G — скорость центра масс стержня, g — ускорение свободного падения.

Имеем $A=B=\frac{1}{3}ml^2$, а $C=0$ ввиду того, что стержень бесконечно тонкий. Далее,

$$p = \dot{q}_2, \quad q = \dot{q}_1 \sin q_2,$$

$$v_G^2 = l^2 (\sin^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2).$$

Поэтому

$$T = \frac{2}{3} ml^2 (\sin^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2).$$

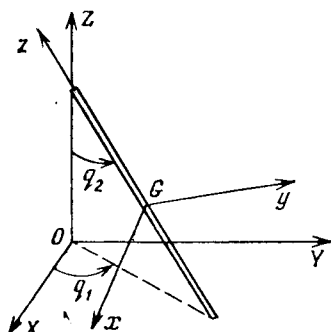


Рис. 143

При помощи функции Лагранжа $L = T - \Pi$ находим обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{4}{3} ml^2 \sin^2 q_2 \dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{4}{3} ml^2 \dot{q}_2.$$

Так как рассматриваемая система консервативна, то функция Гамильтона имеет вид $H = T + \Pi$ и для нее получаем следующее выражение:

$$H = \frac{3}{8ml^2} \left(\frac{p_1^2}{\sin^2 q_2} + p_2^2 \right) + mgl \cos q_2.$$

Положим

$$p_1 = \alpha_1, \quad \frac{3}{8ml^2} \left(\frac{\alpha_1^2}{\sin^2 q_2} + p_2^2 \right) + mgl \cos q_2 = \alpha_2.$$

Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби будет иметь вид

$$S = -\alpha_2 t + \alpha_1 q_1 + \int \sqrt{\frac{8ml^2}{3} (\alpha_2 - mgl \cos q_2) - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 q_2}} dq_2.$$

179. Теорема Лиувилля об интегрируемости гамильтоновой системы в квадратурах. В п. 163 при помощи теории множителя покажем, что для построения общего интеграла системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (31)$$

где $H = H(q_i, p_i, t)$, достаточно найти $2n - 1$ первых интегралов. Построение же $2n$ -го интеграла сводится к квадратурам. Изложенный в п. 175—178 метод Якоби интегрирования системы (31)

позволяет получить существенно более сильный результат: во многих случаях для сведения интегрирования системы (31) к квадратурам достаточно знать только n ее первых интегралов.

Говорят, что функции $u_1, u_2, \dots, u_l$ от $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t$ находятся в инволюции друг к другу или что они образуют систему в инволюции, если все скобки Пуассона (u_i, u_k) ($i, k = 1, 2, \dots, l$) тождественно равны нулю.

Теорема Лиувилля. Пусть система уравнений (31) имеет n первых интегралов

$$f_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \alpha_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (32)$$

находящихся в инволюции, т. е.

$$(f_r, f_s) = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n), \quad (33)$$

причем

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0. \quad (34)$$

Тогда интегрирование системы (31) сводится к квадратурам.

Для доказательства заметим сначала, что при условии (34) уравнения (32) можно разрешить относительно обобщенных импульсов. В результате получим

$$p_i = \varphi_i(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы имеют место равенства

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (36)$$

Заменив в равенствах (32) величины p_i на их значения φ_i из (35) и продифференцировав затем r -е из полученных тождеств по q_i , получим

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = 0.$$

Умножив обе части этого тождества на производную $\partial f_s / \partial p_i$ и произведя затем суммирование по i , придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial q_i} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n). \quad (37)$$

Аналогично, умножив на $\partial f_r / \partial p_k$ обе части тождества, получающегося в результате дифференцирования по q_k s -го из равенств (32) (при $p_i = \varphi_i$) и произведя затем суммирование по k , получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = 0.$$

Если здесь в первой сумме изменить индекс суммирования k на индекс i и поменять порядок суммирования в двойной сумме, то придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_i} \frac{\partial f_s}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n). \quad (38)$$

Вычитая почленно равенства (37) и (38) и учитывая условия (33), получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, n). \quad (39)$$

Возьмем n из этих соотношений, соответствующих какому-то фиксированному значению r , и запишем их в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial p_i} x_i = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (40)$$

где

$$x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \right).$$

Система уравнений (40) при условии (34) имеет только тривиальное решение, т. е.

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_h} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (i, r = 1, 2, \dots, n). \quad (41)$$

Взяв теперь n из этих соотношений, соответствующих фиксированному значению i , совершенно аналогично покажем, что все выражения, заключенные в круглые скобки в (41), равны нулю, т. е. справедливы равенства (36).

Теперь обозначим H^* функцию Гамильтона H из (31), в которой величины p_i заменены их значениями φ_i из (35). Покажем, что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = - \frac{\partial H^*}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (42)$$

Имеем из (31), (35) и (36)

$$- \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial H^*}{\partial q_i},$$

и справедливость равенства (42) доказана.

Равенства (36) и (42) являются необходимыми и достаточными условиями существования такой функции S от $q_1, \dots, q_n, t$ и от постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \varphi_{i\alpha} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H^*. \quad (43)$$

Из математического анализа известно, что нахождение такой функции S требует только квадратур, т. е. вычисления интегралов от известных функций.

Равенства (43) показывают, что функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби, соответствующему системе (31). Покажем, что S будет полным интегралом этого уравнения. Для этого надо проверить выполнимость неравенства (8), которое в силу первых n равенств (43) приводится к виду

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_h} \right\|_{i,h=1}^n \neq 0. \quad (44)$$

Эти неравенства представляют собой необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (35) относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Но уравнения (35) эквивалентны исходным интегралам (32), которые при получении уравнений (35) уже разрешены относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Следовательно, неравенство (44) выполнено и S — полный интеграл.

При известном полном интеграле S интегрирование уравнений (31) завершается рассмотрением соотношений (9).

Следует отметить, что далеко не каждая система (31) приводится к квадратурам. Обычно нельзя найти необходимого количества первых интегралов. И не потому, что их нахождение технически сложно, а потому, что существуют причины принципиального характера, препятствующие интегрируемости¹⁾.

§ 6. Канонические преобразования в теории возмущений

180. Предварительные замечания. Точное интегрирование дифференциальных уравнений движения реальной механической системы возможно только в очень редких случаях. Эти случаи являются скорее исключением, чем правилом. Поэтому разработано много методов, позволяющих проводить приближенное исследование систем, уравнения движения которых не могут быть решены точно, но в то же время некоторая упрощенная задача, называемая невозмущенной задачей, допускает точное решение. Совокупность

¹⁾ Подробное изложение этой проблемы можно найти в статье: Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. — 1983. — Т. 38, вып. 1. — С. 3—67.

этих методов образует теорию возмущений, которая находит самое широкое применение во всех областях науки и техники, где рассматриваются процессы, описываемые дифференциальными уравнениями.

В теории возмущений предполагается, что различие между реальной (возмущенной) системой и ее упрощенной (невозмущенной) моделью можно рассматривать как малые возмущения. Возмущения появляются, например, за счет того, что к основным силам, приложенным к точкам механической системы, добавляются некоторые другие силы, являющиеся в определенном смысле малыми по сравнению с основными силами. Например, если пренебречь влиянием Солнца и считать Землю и Луну материальными точками, то невозмущенной задачей о движении Луны вокруг Земли будет задача двух тел (материальных точек). Влияние притяжения Солнца и отличие Земли и Луны от точечных масс можно считать малыми и отнести к возмущающим воздействиям, которые можно учесть методами теории возмущений.

Бывает и так, что уравнения движения механической системы очень сложны и получить их точное решение нельзя, но можно подобрать другую систему, которая в определенном смысле почти такая же, как и исходная, но ее уравнения движения могут быть проинтегрированы точно. Различие между исходной и таким образом подобранной системой приводит к появлению малых возмущений.

В механике тщательно изучаются системы, уравнения движения которых точно интегрируются. Это связано с тем, что интегрируемые задачи часто используются в качестве невозмущенных в более сложных, но реальных и пучных задачах.

Методы теории возмущений позволяют исследовать движение механических систем, как правило, на конечном (хотя иногда и очень большом) интервале времени.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы применения канонических преобразований в теории возмущений систем, движение которых описывается дифференциальными уравнениями Гамильтона.

181. Вариация постоянных в задачах механики. Предположим, что в уравнениях движения механической системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

функция Гамильтона $H(q_i, p_i, t)$ может быть представлена в виде суммы

$$H = H_0 + H_1, \quad (2)$$

причем дифференциальные уравнения (1) с функцией $H = H_0$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

могут быть проинтегрированы в замкнутой форме. Пусть решение системы (3) записано в виде

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_{10}, \dots, q_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}, t), \\ p_i &= p_i(q_{10}, \dots, q_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где q_{i0} и p_{i0} — значения величин q_i , p_i в начальный момент $t=0$. Для интегрирования уравнений (1) сделаем в них замену переменных по формулам (4), принимая величины q_{i0} , p_{i0} за новые переменные. Так мы приходим к проблеме вариации произвольных постоянных в задачах механики, описываемых каноническими уравнениями Гамильтона (1).

Формулы (4) задают (см. п. 171) унивалентное каноническое преобразование. Это преобразование имеет обратное:

$$q_{i0} = q_{i0}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), \quad p_{i0} = p_{i0}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), \quad (5)$$

которое также является унивалентным каноническим преобразованием. Следовательно, скобки Пуассона функций (5) удовлетворяют равенствам (см. п. 169)

$$(q_{i0}, q_{k0}) = 0, \quad (p_{i0}, p_{k0}) = 0, \quad (q_{i0}, p_{k0}) = \delta_{ik}. \quad (6)$$

Кроме того, функции (5), являясь интегралами системы (3), удовлетворяют, согласно п. 167, равенствам

$$\frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + (q_{i0}, H_0) = 0, \quad \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + (p_{i0}, H_0) = 0. \quad (7)$$

Найдем производные по времени новых переменных q_{i0} , p_{i0} в силу уравнений движения (1). Дифференцируя выражения (5) и учитывая равенства (7) и (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dq_{i0}}{dt} &= \frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = \frac{\partial q_{i0}}{\partial t} + (q_{i0}, H) = \\ &= -(q_{i0}, H_0) + (q_{i0}, H) = (q_{i0}, H - H_0) = (q_{i0}, H_1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{i0}}{dt} &= \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial p_{i0}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial p_{i0}}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = \frac{\partial p_{i0}}{\partial t} + (p_{i0}, H) = \\ &= -(p_{i0}, H_0) + (p_{i0}, H) = (p_{i0}, H - H_0) = (p_{i0}, H_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть H_1^* — это функция H_1 , в которой сделана замена переменных (4). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}} \frac{\partial q_{l0}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}} \frac{\partial p_{l0}}{\partial q_k} \right), \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_k} &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}} \frac{\partial q_{l0}}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}} \frac{\partial p_{l0}}{\partial p_k} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя эти равенства и соотношения (6), имеем

$$(q_{i0}, H_1) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k} \frac{\partial H_1}{\partial p_k} - \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}} \frac{\partial q_{l0}}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}} \frac{\partial p_{l0}}{\partial p_k} \right) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_{i0}}{\partial p_k} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}} \frac{\partial q_{l0}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}} \frac{\partial p_{l0}}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}} (q_{i0}, q_{l0}) + \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}} (q_{i0}, p_{l0}) = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{i0}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично

$$(p_{i0}, H_1) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial H_1^*}{\partial q_{l0}} (p_{i0}, q_{l0}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{l0}} (p_{i0}, p_{l0}) = - \frac{\partial H_1^*}{\partial q_{i0}}. \quad (12)$$

Соотношения (11), (12) позволяют записать уравнения (8), (9) в виде

$$\frac{dq_{i0}}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial p_{i0}}, \quad \frac{dp_{i0}}{dt} = - \frac{\partial H_1^*}{\partial q_{i0}} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Таким образом, если $H_1 \equiv 0$, то величины q_{i0} , p_{i0} постоянны, а уравнения, описывающие их изменение, в системе с функцией Гамильтона $H_0 + H_1$ имеют каноническую форму, причем соответствующая функция Гамильтона H_1^* получается подстановкой в «возмущающую» функцию H_1 величин q_i , p_i , определяемых по формулам (4), отвечающим решению задачи Коши для «невозмущенной» задачи с функцией Гамильтона H_0 .

Задачу о вариации произвольных постоянных для системы (1) можно рассмотреть и иначе. Пусть решение «невозмущенной» системы (3) найдено при помощи уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0 \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t \right) = 0. \quad (14)$$

Пусть $S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ — полный интеграл этого уравнения. Сделаем в уравнениях (1) каноническую замену переменных по формулам (9) п. 175, принимая полный интеграл S за производящую функцию

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

При такой замене переменных роль новых координат играют величины $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, а роль новых импульсов — величины $\beta_1, \dots, \beta_n$. Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t)$ вычисляется по формуле (см. п. 173)

$$\mathcal{H} = H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Приимая во внимание уравнение (14), имеем отсюда $\mathcal{H} = H_1^*$, где теперь H_1^* — это функция H_1 , выраженная через переменные α_i, β_i, t согласно равенствам (15). Таким образом, новые переменные α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которые постоянны, если $H_1 \equiv 0$, в «возмущенной» системе удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Для получения решения системы (1) пужно из равенств (15) найти функции

$$q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t), \quad p_i = p_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t)$$

и подставить в них величины α_i, β_i , являющиеся решениями дифференциальных уравнений (16).

Следует отметить, что при получении уравнений (13) и (16) нигде не предполагалась малость «возмущения» H_1 . Однако изложенное выше решение задачи вариации произвольных постоянных наиболее полезно, когда величина H_1 мала по сравнению с H_0 , например, если функция H_1 имеет порядок малости ϵ и требуется найти решение системы (1) при малых значениях ϵ .

182. Классическая теория возмущений. Пусть функция Гамильтона H в системе (1) может быть представлена в виде ряда по степеням малого параметра ϵ :

$$H = H_0 + \epsilon H_1 + \dots \quad (17)$$

Будем считать, что при $\epsilon = 0$ система (1) интегрируема (т. е. мы можем получить ее общий интеграл), а канонически сопряженные переменные q_i, p_i выбраны так, что функция Гамильтона H_0 , соответствующая невозмущенной задаче, зависит только от импульсов, т. е.

$$H_0 = H_0(p_1, \dots, p_n).$$

Переменные q_i, p_i в таком случае называют переменными действие — угол (p_i — действие, q_i — угол). Если для системы (1) при $\epsilon = 0$ найдены n интегралов в инволюции, то каноническое преобразование, вводящее переменные действие — угол, может быть получено при помощи квадратур. В частности, так будет в том случае, когда невозмущенная система (1) интегрируется методом Якоби, например, при помощи разделения переменных. Возмущение $H - H_0$, записанное в переменных действие — угол, будет 2π -периодическим по угловым переменным $q_1, \dots, q_n$ ¹⁾.

¹⁾ О переменных действие — угол см.: Борн М. Лекции по атомной механике. Т. 1.— Харьков: ОНТИ, 1943, а также: Голдстейн Г. Классическая механика.— М.: Наука, 1975.

Невозмущенная система (1)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \omega_i(p_1, \dots, p_n), \quad \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (18)$$

сразу интегрируется:

$$p_i = p_{i0} = \text{const}, \quad q_i = \omega_i(p_{10}, \dots, p_{n0})t + q_{i0}. \quad (19)$$

Для приближенного исследования движения при малых, по от-
личных от нуля значениях ε в механике разработан специальный
аппарат теории возмущений, основанный на применении канониче-
ских преобразований. Для простоты ограничимся здесь случаем
консервативной или обобщенно консервативной системы с одной
степеню свободы ($n=1$)¹). Функция Гамильтона (17) имеет вид

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(q, p) + \dots, \quad (20)$$

где H_1 можно представить в виде ряда Фурье

$$H_1 = \bar{H}_1(p) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(p) \cos kq + b_k(p) \sin kq). \quad (21)$$

Здесь $\bar{H}_1(p)$ — среднее значение функции H_1 :

$$\bar{H}_1(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(q, p) dq.$$

Будем искать каноническое преобразование $q, p \rightarrow q^*, p^*$, приводя-
щее функцию Гамильтона (20) к виду

$$\mathcal{H} = H_0^*(p^*) + \varepsilon^2 H_2^*(q^*, p^*) + \dots \quad (22)$$

Искомое преобразование близко к тождественному и задается фор-
мулами (см. п. 174).

$$q^* = \frac{\partial S_1}{\partial p^*}, \quad p = \frac{\partial S_1}{\partial q}, \quad (23)$$

где

$$S_1(q, p^*) = qp^* + \varepsilon S_1^{(1)}(q, p^*). \quad (24)$$

Неизвестную пока функцию $S_1^{(1)}$ подберем так, чтобы в новых
переменных функция Гамильтона имела вид (22).

Подставив (24) в (23), получим соотношения

$$q^* = q + \varepsilon \frac{\partial S_1^{(1)}(q, p^*)}{\partial p^*}, \quad p = p^* + \varepsilon \frac{\partial S_1^{(1)}(q, p^*)}{\partial q}.$$

¹) Следует, однако, иметь в виду, что при $n \geq 2$ в теории возмущений
возникают принципиальные трудности, которых нет в случае одной степени
свободы. См.: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости
движения в классической и небесной механике // УМН.— 1963.— Т. 18,
вып. 6.— С. 91—192.

Отсюда с точностью до членов порядка ε включительно находим замену переменных $q, p \rightarrow q^*, p^*$ в явной форме:

$$q = q^* - \varepsilon \frac{\partial S_1^{(1)}(q^*, p^*)}{\partial p^*}, \quad p = p^* + \varepsilon \frac{\partial S_1^{(1)}(q^*, p^*)}{\partial q^*}. \quad (25)$$

Так как валентность преобразования равна единице, а функция S_1 не зависит явно от t , то, согласно формуле (63) п. 174, новая функция Гамильтона $\mathcal{H}$ получается из старой функции H , если в последней величины q, p заменить их выражениями через новые переменные. Подставив q, p из (25) в функцию (20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & H_0(p^*) + \varepsilon \bar{H}_1(p^*) + \\ & + \varepsilon \left[\omega(p^*) \frac{\partial S_1^{(1)}(q^*, p^*)}{\partial q^*} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(p^*) \cos kq^* + b_k(p^*) \sin kq^* \right] + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\omega(p) = \frac{\partial H_0(p)}{\partial p}. \quad (27)$$

Чтобы $\mathcal{H}$ имела вид (22), нужно в функции (26) уничтожить зависимые от q^* члены порядка ε . Для этого надо положить

$$S_1^{(1)}(q^*, p^*) = \frac{1}{\omega(p^*)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(p^*) \cos kq^* - a_k(p^*) \sin kq^*}{k}. \quad (28)$$

При таком выборе функции $S_1^{(1)}$ выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле (26), тождественно равно нулю и новая функция Гамильтона будет иметь вид (22), причем

$$H_0^*(p^*) = H_0(p^*) + \varepsilon \bar{H}_1(p^*). \quad (29)$$

Если теперь в функции (22) отбросить члены выше первого порядка малости по ε , то соответствующая система уравнений

$$\frac{dq^*}{dt} = \frac{\partial H_0^*(p^*)}{\partial p^*}, \quad \frac{dp^*}{dt} = 0$$

сразу же интегрируется. Подставив ее решение в формулы преобразования (25), получим приближенное решение возмущенной системы исходных переменных q, p .

Мы рассмотрели теорию возмущений в первом приближении по ε . Аналогично можно рассмотреть и более высокие приближения.

183. О линейных гамильтоновых системах дифференциальных уравнений. Пусть в системе (1) функция Гамильтона не зависит от времени и система допускает решение, для которого величины q_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) постоянны. Это решение отвечает положению равновесия механической системы, имеющей уравнения движения (1). Так как перенос начала координат является каноническим

преобразованием (см. пример 5 п. 170), то, не ограничивая общности, можно считать, что это положение равновесия отвечает началу координат в фазовом пространстве $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$.

В следующем пункте мы покажем, как, используя канонические преобразования, можно получить приближенное описание движения рассматриваемой системы вблизи ее положения равновесия. Для этого предварительно рассмотрим некоторые вопросы, связанные с линейными дифференциальными уравнениями Гамильтона с постоянными коэффициентами.

Линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{J}\Pi x, \quad x' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \quad (30)$$

где x_k, x_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, n$) — канонически сопряженные переменные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы). Как и в п. 168, здесь принято обозначение

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & 0 \end{vmatrix} \quad (\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}, \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}, \det \mathbf{J} = 1).$$

В системе (30) Π — вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Будем предполагать ее постоянной.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{J}\Pi - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = 0. \quad (31)$$

Т е о р е м а. *Характеристический многочлен $p(\lambda)$ — четная функция λ .*

Доказательство вытекает из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{J}\Pi - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{J}\Pi - \lambda\mathbf{E}_{2n})' = \det(\Pi'\mathbf{J}' - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \\ &= \det(-\Pi\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{J}^2\Pi\mathbf{J} + \lambda\mathbf{J}\mathbf{E}_{2n}\mathbf{J}) = \det \mathbf{J}(\mathbf{J}\Pi + \lambda\mathbf{E}_{2n})\mathbf{J} = \\ &= \det \mathbf{J} \cdot \det(\mathbf{J}\Pi + \lambda\mathbf{E}_{2n})\det \mathbf{J} = \det(\mathbf{J}\Pi + \lambda\mathbf{E}_{2n}) = p(-\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (31) содержит только четные степени λ . Поэтому если у него есть корень $\lambda = a$, то обязательно будет и корень $\lambda = -a$. Будем рассматривать только тот случай, когда уравнение (31) имеет только простые чисто мнимые корни. Обозначим их $\lambda_k = i\sigma_k$, $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ (i — мнимая единица; $k = 1, 2, \dots, n$). Назовем *нормальной формой* системы уравнений (30) такую систему канонических дифференциальных уравнений, которой соответствует функция Гамильтона¹⁾

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2). \quad (32)$$

¹⁾ Функция Гамильтона (32) отвечает механической системе, образованной n не связанными один с другим гармоническими осцилляторами; их частоты равны $|\sigma_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Найдем вещественное линейное упывалентное канопическое преобразование $x_j \rightarrow y_j$ ($j = 1, 2, \dots, 2n$), приводящее систему (30) к ее нормальной форме:

$$\frac{dy}{dt} = JH^*y, \quad y' = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n})_t \quad (33)$$

где, в соответствии с (32), H^* — вещественная диагональная матрица, элементы которой определены равенствами $h_{kk}^* = h_{n+k, n+k}^* = \sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Пусть

$$x = Ay \quad (34)$$

— искомое преобразование. Из (30), (33) и (34) следует, что постоянная матрица A должна удовлетворять матричному уравнению

$$AJH^* = JHA. \quad (35)$$

Ввиду каноничности преобразования (34) матрица A должна быть симплектической, т. е. она должна удовлетворять также и такому матричному уравнению:

$$A'JA = J. \quad (36)$$

Чтобы пайти нормализующее преобразование (34), надо из бесчисленного множества решений уравнения (35) выбрать хотя бы одно вещественное, удовлетворяющее уравнению (36).

Решение уравнения (35) будем искать в виде $A = BC$, где

$$C = \begin{vmatrix} iE_n & E_n \\ -iE_n & E_n \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Тогда из (35) получаем уравнение для матрицы B :

$$BD = JHB, \quad (38)$$

где D — диагональная форма матрицы JH . Для ее диагональных элементов имеют место равенства $d_{kk} = -d_{n+k, n+k} = i\sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, матрица B приводит матрицу JH к диагональной форме. Она строится следующим образом¹⁾. Ее столбцами служат собственные векторы матрицы JH . Именно, пусть k -й столбец матрицы B есть собственный вектор e_k , соответствующий собственному числу $\lambda_k = i\sigma_k$, а $(n+k)$ -й столбец есть собственный вектор e_{n+k} , соответствующий собственному числу $\lambda_{n+k} = -i\sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Собственные векторы определяются с точностью до множителя. Примем этот множитель вещественным и одинаковым для векторов e_k и e_{n+k} . Кроме того, соответствующие компоненты этих векторов выберем комплексно сопряженными. Такой выбор собственных векторов обеспечивает вещественность матрицы A . Произвольные множители собственных векторов определяются из условия их нор-

¹⁾ См., например: Г а п т м а х е р Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967,

мировки, которое получим из условия (36) каноничности преобразования (34).

Подставив $A = BC$ в уравнение (36), получим

$$C'B'JB = J. \quad (39)$$

Обозначим матрицу $B'JB$ через F ; ее элемент f_{ml} равен скалярному произведению векторов e_m и Je_l :

$$f_{ml} = (e_m \cdot Je_l).$$

Так как для любых двух векторов a и b справедливо равенство $(a \cdot Jb) = -(Ja \cdot b)$, то матрица F кососимметрическая. Покажем еще, что $f_{ml} = 0$, если $|m - l| \neq n$. Для этого рассмотрим очевидное равенство

$$(e_m \cdot J^2 He_l) = (e_m \cdot J J^2 e_l).$$

Преобразуя его левую и правую части, имеем последовательно

$$\begin{aligned} (e_m \cdot J^2 He_l) &= (J' H' e_m \cdot Je_l), \\ (e_m \cdot J J He_l) &= -(J He_m \cdot Je_l), \\ (e_m \cdot J \lambda_l e_l) &= -(\lambda_m e_m \cdot Je_l). \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(\lambda_m + \lambda_l) f_{ml} = 0. \quad (40)$$

Так как согласно упорядочению собственных чисел, введенному при построении матрицы B , $\lambda_m + \lambda_l = 0$ только в случае $|m - l| = n$, то из равенства (40) следует, что $f_{ml} = 0$, если $|m - l| \neq n$.

Таким образом, матрица $B'JB$ имеет такую структуру:

$$B'JB = \begin{Bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{Bmatrix}, \quad (41)$$

где G — диагональная матрица порядка n с элементами $g_{kk} = (e_k \cdot Je_{n+k})$. Ни один из элементов g_{kk} не равняется нулю, так как в противном случае определитель матрицы (41) равнялся бы нулю, а

$$\det B'JB = \det B' \det J \det B = (\det B)^2 \neq 0,$$

так как матрица B составлена из собственных векторов, соответствующих различным собственным числам матрицы JH .

Пусть r_k и s_k — действительная и мнимая части собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_k . Тогда, учитывая комплексную сопряженность соответствующих компонент векторов e_k и e_{n+k} , получим для элементов матрицы G выражения

$$g_{kk} = -2i(r_k \cdot Js_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (42)$$

Из равенств (37), (39) и (41) следует такое условие, обеспечивающее симплектичность матрицы A :

$$4(r_k \cdot Js_k) = 1. \quad (43)$$

Это равенство является, с одной стороны, условием нормировки собственного вектора e_k , а с другой — условием выбора знака σ_k в функции Гамильтона (32), который до сих пор был не определен. Действительно, приравняв в обеих частях уравнения $JHe_k = i\sigma_k e_k$ ($e_k = r_k + is_k$) действительную и мнимую части, получим систему уравнений для r_k и s_k

$$JHr_k = -\sigma_k s_k, \quad JHs_k = \sigma_k r_k.$$

При одновременном изменении знаков σ_k и компонент вектора r_k эта система уравнений не изменяется. Знак же скалярного произведения $(r_k \cdot Js_k)$ изменяется на противоположный. Поэтому равенству (43) можно всегда удовлетворить выбором знака σ_k в функции Гамильтона (32) и соответствующей нормировкой собственного вектора e_k .

Пронзведя некоторые вычисления, получим, что k -м столбцом искомой матрицы A будет вектор $-2s_k$, а $(n+k)$ -м — вектор $2r_k$.

184. Преобразование Биркгофа. Приближенное интегрирование гамильтоновой системы уравнений вблизи положения равновесия. Пусть начало координат фазового пространства отвечает положению равновесия консервативной или обобщенно консервативной системы с n степенями свободы. Предположим, что функция Гамильтона является аналитической в некоторой окрестности начала координат и ее разложение в ряд начинается с квадратичных членов:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (44)$$

где H_m — однородный многочлен (форма) степени m относительно координат и импульсов. Аддитивная постоянная (равная значению функции Гамильтона в положении равновесия) не влияет на уравнения движения и в разложении (44) отброшена.

Пусть характеристическое уравнение, соответствующее линеаризованной системе уравнений движения, задаваемой функцией Гамильтона H_2 , имеет только простые чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда, как показано в предыдущем пункте, подходящим выбором канонически сопряженных переменных функцию H_2 можно представить в виде правой части равенства (32). Если еще сделать каноническую замену переменных¹⁾

$$q_k = y_k - iy_{n+k}, \quad p_k = y_k + iy_{n+k} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (45)$$

то квадратичная часть ряда (44) будет иметь вид

$$H_2 = i \sum_{k=1}^n \sigma_k q_k p_k. \quad (46)$$

Движение линеаризованной системы представляет собой суперпозицию колебаний n гармонических осцилляторов с частотами

¹⁾ Сравните с примером 7 п. 170.

$|\sigma_k|$ ($k=1, 2, \dots, n$). Если в разложении (44) формы H_m при $m \geq 3$ не равны тождественно нулю, то уравнения движения нелинейны. Чтобы исследовать движение в этом случае, упростим функцию Гамильтона (44) при помощи канонической замены переменных, носящей название *преобразования Биркгофа*.

Сделаем каноническую замену переменных $q_k, p_k \rightarrow q'_k, p'_k$, задаваемую формулами

$$q'_k = q_k + \frac{\partial S_3}{\partial p'_k}, \quad p_k = p'_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (47)$$

где форму третьей степени $S_3(q_k, p'_k)$ попытаемся подобрать так, чтобы в новых переменных функция Гамильтона не содержала членов третьей степени относительно q'_k, p'_k ($k=1, 2, \dots, n$).

Функция $H_3(q_k, p_k)$ в (44) может быть записана в виде

$$H_3 = \sum_{\nu_1 + \dots + \mu_n = 3} h_{\nu_1, \dots, \mu_n} q_1^{\nu_1} \dots q_n^{\nu_n} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n}, \quad (48)$$

где коэффициенты $h_{\nu_1, \dots, \mu_n}$ постоянны. Величины $\nu_1, \dots, \mu_n$ — целые неотрицательные числа. Функцию S_3 ищем в виде, аналогичном (48):

$$S_3 = \sum_{\nu_1 + \dots + \mu_n = 3} s_{\nu_1, \dots, \mu_n} q_1^{\nu_1} \dots q_n^{\nu_n} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n}, \quad (49)$$

где постоянные коэффициенты $s_{\nu_1, \dots, \mu_n}$ подлежат выбору из условия обращения в нуль членов третьей степени в новой функции Гамильтона.

Из (47) следует, что старые переменные q_k, p_k являются аналитическими функциями в окрестности начала координат $q'_k = 0, p'_k = 0$ и представляются рядами

$$q_k = q'_k - \frac{\partial S_3(q'_k, p'_k)}{\partial p'_k} + \dots, \quad p_k = p'_k + \frac{\partial S_3(q'_k, p'_k)}{\partial q_k} + \dots, \quad (50)$$

где обозначенные многоточием члены имеют степени выше второй относительно q'_k, p'_k ($k=1, 2, \dots, n$). Подставив эти выражения в функцию (44), получим новую функцию Гамильтона в виде

$$H' = i \sum_{k=1}^n \sigma_k q'_k p'_k + i \sum_{k=1}^n \sigma_k \left(q'_k \frac{\partial S_3}{\partial q'_k} - p'_k \frac{\partial S_3}{\partial p'_k} \right) + H_3(q'_k, p'_k) + \dots$$

где многоточием обозначены члены выше третьей степени относительно q'_k, p'_k .

Таким образом, квадратичная часть функции Гамильтона сохранила свою форму, а члены третьей степени H'_3 приняли вид

$$H'_3 = i \sum_{k=1}^n \sigma_k \left(q_k' \frac{\partial S_3}{\partial q_k'} - p_k' \frac{\partial S_3}{\partial p_k'} \right) + H_3(q_k', p_k').$$

Положим $H'_3 \equiv 0$. Принимая во внимание формулы (48), (49) и приравнявая в этом тождестве нулю коэффициент при $q_1^{v_1} \dots q_n^{v_n} \times p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n}$, получим уравнения для нахождения $s_{v_1, \dots, \mu_n}$:

$$[\sigma_1(v_1 - \mu_1) + \dots + \sigma_n(v_n - \mu_n)] s_{v_1, \dots, \mu_n} = i h_{v_1, \dots, \mu_n}. \quad (51)$$

Справедливо соотношение

$$|v_1 - \mu_1| + \dots + |v_n - \mu_n| \leq v_1 + \mu_1 + \dots + v_n + \mu_n = 3.$$

Отсюда и из (51) следует, что если величины $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ таковы, что для целых чисел $k_1, \dots, k_n$, удовлетворяющих условию $0 < |k_1| + \dots + |k_n| \leq 3$, выполняется неравенство ¹⁾

$$k_1 \sigma_1 + \dots + k_n \sigma_n \neq 0, \quad (52)$$

то, выбрав величины $s_{v_1, \dots, \mu_n}$ согласно формулам

$$s_{v_1, \dots, \mu_n} = \frac{i h_{v_1, \dots, \mu_n}}{\sigma_1(v_1 - \mu_1) + \dots + \sigma_n(v_n - \mu_n)},$$

получим новую функцию Гамильтона H' такой, что в ней будут отсутствовать члены третьей степени по q_k', p_k' .

Можно было бы попытаться аналогичным образом при помощи еще одного канонического преобразования $q_k', p_k' \rightarrow q_k'', p_k''$ уничтожить члены четвертой степени H''_4 в функции Гамильтона H'' . Это, однако, не удастся сделать, и в новой функции Гамильтона останутся некоторые члены четвертой степени, имеющие вполне определенную структуру.

Если в системе нет резонанса до четвертого порядка включительно, т. е. неравенство (52) удовлетворяется при $0 < |k_1| + \dots + |k_n| \leq 4$, то в функции Гамильтона H'' можно уничтожить все члены четвертой степени, кроме тех, которые содержат q_k'' и p_k'' в одинаковых степенях. Действительно, уравнение (51) неразрешимо, если $v_k = \mu_k$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда в H''_4 останется совокупность одночленов вида

$$\sum_{v_1+v_2+\dots+v_n=2} h_{v_1, \dots, v_n, v_1, \dots, v_n} (q_1'' p_1'')^{v_1} \dots (q_n'' p_n'')^{v_n}.$$

¹⁾ В таких случаях говорят, что в системе нет резонансов до третьего порядка включительно.

И, вообще, методом математической индукции нетрудно показать, что если в системе нет резонансов до порядка l включительно, т. е.

$$k_1\sigma_1 + \dots + k_n\sigma_n \neq 0 \quad (0 < |k_1| + \dots + |k_n| \leq l),$$

то существует каноническое преобразование $q_k = q_k^* + \dots$, $p_k = p_k^* + \dots$, задаваемое сходящимися в окрестности начала координат степенными рядами, такое, что функция Гамильтона (44), выраженная через q_k^* , p_k^* , имеет вид

$$H^* = \bar{H} + \hat{H}(q_k^*, p_k^*), \quad (53)$$

где $\bar{H}$ — многочлен степени не большей $l/2$ от n произведений $q_1^* p_1^*, \dots, q_n^* p_n^*$, а $\hat{H}$ — сходящийся ряд по степеням q_k^*, p_k^* , начинающийся с членов, степень которых не меньше $l+1$. В этом случае говорят, что функция Гамильтона приведена к нормальной форме Биркгофа с точностью до членов степени l включительно.

Представление функции Гамильтона в виде (53) можно эффективно использовать для приближенного интегрирования канонических дифференциальных уравнений движения. Для этого пренебрежем в (53) членами $\hat{H}$, которые имеют более высокую степень относительно q_k^*, p_k^* , нежели функция $\bar{H}$. Тогда $H^* = \bar{H}$. Замечательно, что система канонических уравнений с функцией Гамильтона $H^* = \bar{H}(q_1^* p_1^*, \dots, q_n^* p_n^*)$ сразу интегрируется. Действительно, положим $\tau_k = q_k^* p_k^*$. Тогда уравнения с функцией Гамильтона $\bar{H}$ запишутся в виде

$$\frac{dq_k^*}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tau_k} q_k^*, \quad \frac{dp_k^*}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \tau_k} p_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (54)$$

Отсюда следует, что $d\tau_k/dt = 0$, т. е. $\tau_k = c_k = \text{const}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Подставив эти значения τ_k в уравнения (54), получим

$$\frac{dq_k^*}{dt} = \Lambda_k q_k^*, \quad \frac{dp_k^*}{dt} = -\Lambda_k p_k^* \quad (55)$$

где Λ_k есть значение производной $\partial \bar{H} / \partial \tau_k$ при $\tau_k = c_k$. Из (55) следует, что

$$q_k^*(t) = q_k^*(0) e^{\Lambda_k t}, \quad p_k^*(t) = p_k^*(0) e^{-\Lambda_k t} \quad (56)$$

$$(q_k^*(0) p_k^*(0) = c_k; k = 1, 2, \dots, n).$$

Приближенное решение исходных уравнений получится из формул (56) при помощи формул указанного выше канонического преобразования Биркгофа, выражающих старые переменные через новые. Несложно проверить, что в рассматриваемом случае чисто мнимых корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений движения величины Λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) также

будут чисто мнимыми, $\Lambda_k = i\Omega_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), и, следовательно, старые переменные будут рядами синусов и косинусов аргументов, кратных $\Omega_k t$.

Если в системе вообще нет резонансов, то преобразование Биркгофа можно применить для нормализации функции Гамильтона до сколь угодно высокой степени ($l \rightarrow \infty$). Нормализованная во всех степенях функция Гамильтона зависит только от переменных $(q_k^* p_k^*)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда преобразованная система уравнений движения может быть проинтегрирована, причем для этого не надо пренебрегать в ее правых частях никакими членами. Казалось бы, что это должно означать локальную (в окрестности положений равновесия) интегрируемость уравнений движения. Однако это не так. Дело в том, что преобразование Биркгофа, нормализующее функцию Гамильтона во всех степенях, будет, как правило, расходящимся¹⁾.

В последние десятилетия разработаны новые способы применения канонических преобразований в теории возмущений, например метод Депри — Хори. С алгоритмической точки зрения он выгодно отличается от изложенных классических методов. На пример, его применение не требует одной из самых громоздких процедур — обращения рядов, а формулы метода задаются рекуррентно, и необходимые преобразования могут быть достаточно просто реализованы на вычислительной машине²⁾.

Пример. Колебания математического маятника. Функция Гамильтона может быть (см. пример в п. 149) записана в виде

$$H = \frac{1}{2ml^2} p_\varphi^2 - mgl \cos \varphi.$$

Для удобства введем безразмерные переменные φ' , p_φ' , t' по формулам

$$\varphi' = \varphi, \quad p_\varphi' = \frac{p_\varphi}{ml \sqrt{gl}}, \quad t' = \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (57)$$

Замена φ , $p_\varphi \rightarrow \varphi'$, p_φ' — каноническое преобразование с валентностью $c = \frac{1}{ml \sqrt{gl}}$ (см. пример 3 в п. 170). Учитывая еще, что введение вместо времени t новой независимой переменной t' приводит к делению функции Гамильтона на $\sqrt{g/l}$, получим, что уравнениям движения в безразмерных переменных (57) отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} p_{\varphi'}^2 - \cos \varphi'. \quad (58)$$

¹⁾ Изложение современного состояния задачи нормализации систем дифференциальных уравнений и подробную библиографию см. в исследовании: Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды Московского математического общества.— 1971.— Т. 25.— С. 419—262; 1972.— Т. 26.— С. 199—239.

²⁾ См., например: Д ж а к а л ь я Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем.— М.: Наука, 1979.

Рассмотрим движение маятника в окрестности его положения равновесия $\varphi = 0$. В этом случае φ' и p'_φ — малые величины. Разлагая функцию (58) в ряд по степеням φ' , p'_φ и отбрасывая несущественный для уравнений движения постоянный член, получаем

$$H = \frac{1}{2} (p'^2_\varphi + \varphi'^2) - \frac{1}{24} \varphi'^4 + \dots, \quad (59)$$

где многоточием обозначены члены выше четвертого порядка относительно φ' , p'_φ . Если в разложении (59) пренебречь всеми неквадратичными членами, то уравнения движения станут линейными. В этом линейном приближении движение маятника представляет собой гармонические колебания. Чтобы выявить влияние нелинейностей в уравнениях движения, учтем в разложении (59) член $-(1/24)\varphi'^4$ и для приближенного исследования нелинейных колебаний используем преобразование Биркгофа.

Сделаем замену переменных (каноническую, с валентностью $c = 2i$)

$$q = \varphi' - ip'_\varphi, \quad p = \varphi' + ip'_\varphi, \quad (60)$$

получим

$$H = H_2 + H_4 + \dots,$$

где

$$H_2 = iqp, \quad H_4 = -\frac{i}{192} (q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4).$$

Песложные вычисления показывают, что преобразование Биркгофа $q, p \rightarrow q^*, p^*$, задаваемое производящей функцией $qp^* + S_4(q, p^*)$, где

$$S_4 = \frac{1}{768} q^4 + \frac{1}{96} q^3 p^* - \frac{1}{96} qp^*{}^3 - \frac{1}{768} p^*{}^4,$$

приводит функцию Гамильтона к виду

$$H^* = i(q^*p^*) - \frac{i}{32} (q^*p^*)^2, \quad (61)$$

причем переменные q, p выражаются через q^*, p^* по формулам

$$q = q^* - \frac{1}{192} (2q^*{}^3 - 6q^*p^*{}^2 - p^*{}^3), \quad p = p^* + \frac{1}{192} (q^*{}^3 + 6q^*{}^2p^* - 2p^*{}^3). \quad (62)$$

В формулах (61), (62) отброшены члены, степень которых выше степени оставшихся членов.

Канонические уравнения с функцией Гамильтона (61) интегрируются. Если q_0^*, p_0^* — начальные значения величин q^*, p^* , то

$$q^* = q_0^* e^{i\Omega t'}, \quad p^* = p_0^* e^{-i\Omega t'}, \quad (63)$$

где введено обозначение

$$\Omega = 1 - \frac{1}{16} (q_0^* p_0^*). \quad (64)$$

Приближенное решение задачи о нелинейных колебаниях маятника получается теперь из формул (57), (60), (62), выражающих исходные величины φ, p_φ через новые переменные, в которых записано решение (63).

Пусть момент $t=0$ соответствует максимальному углу отклонения α маятника от вертикали. Тогда из формул (57), (60) и (62) следует, что

с точностью до квадратов величины α включительно

$$\Omega = 1 - \frac{1}{16} \alpha^2.$$

С той же точностью для периода τ нелинейных колебаний маятника получаем выражение

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right),$$

которое совпадает с выражением, полученным в п. 96 (формула (28)) при помощи разложения в ряд точного значения периода колебаний маятника, записанного через полный эллиптический интеграл первого рода.

Глава XII. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 1. Принцип Гамильтона — Остроградского

185. Прямой и окольный пути голономной системы. В гл. III мы изучали дифференциальные вариационные принципы механики, которые дают критерий, позволяющий выделить истинное (действительное) движение механической системы среди других кинематически возможных ее движений для данного момента времени. В этой главе будут рассмотрены некоторые интегральные вариационные принципы. В отличие от дифференциальных принципов, интегральные вариационные принципы механики дают критерий истинного движения системы не для одного момента времени, а для некоторого конечного промежутка $t_0 \leq t \leq t_1$. Они характеризуют движение системы в целом, на всем этом промежутке времени.

Как и в гл. III, будем предполагать, что рассматриваемая механическая система или свободна, или подчинена идеальным удерживающим связям, но ограничимся только голономными системами¹⁾. Пусть a_v и b_v — возможные положения точки P_v системы ($v = 1, 2, \dots, N$) в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно. Положение системы в момент $t = t_0$ назовем ее *начальным*, а в момент $t = t_1$ — *конечным положением*. Предположим, что в момент $t = t_0$ можно так выбрать скорости точек системы, что при $t = t_1$ точки P_v займут их конечные положения. Совокупность траекторий, которые будут описаны точками системы при их перемещении из начальных положений a_v в их конечные положения b_v , образуют *истинный (действительный) путь системы*. Его также называют *прямым путем системы*.

На прямом пути точка P_v системы описывает кривую γ_v , соединяющую точки a_v и b_v . Совокупность соединяющих точки a_v и b_v кривых γ_v , бесконечно близких к соответствующим кривым γ_v и таких, что движение точки P_v по кривой γ_v ($v = 1, 2, \dots, N$) может происходить без нарушения связей, называют *окольным путем системы*. На рис. 144 сплошная линия соответствует прямому пути, а штриховые — окольным. Всюду в дальнейшем будем считать, что движение всех точек P_v по окольным путям начинается одновременно

¹⁾ Вопрос о применимости интегральных вариационных принципов механики к неголономным системам имеет длительную и непростую историю. Библиографию по этому вопросу и основные результаты см. в статье: Румянцев В. В. Об интегральных принципах для неголономных систем // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 1.— С. 3—12.

по при $t = t_0$ и оканчивается при $t = t_1$, т. е. движение системы по окольному пути начинается и оканчивается в те же моменты времени, что и движение по прямому пути.

Для голономной системы прямые и окольные пути удобно представлять в расширенном координатном пространстве, где координатами являются обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ и время t .



Рис. 144

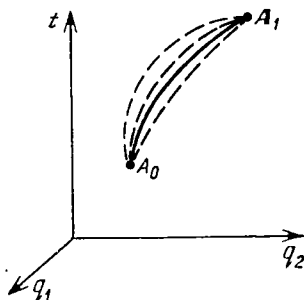


Рис. 145

Пусть точка A_0 этого пространства отвечает начальному положению системы, а A_1 — ее конечному положению. Движениям системы из ее начального положения в конечное будут отвечать кривые, соединяющие точки A_0 и A_1 . На рис. 145 (для $n=2$) сплошной линией показан прямой путь системы, а штриховыми линиями — окольные пути. В расширенном координатном пространстве за окольный путь может быть принята любая бесконечно близкая к прямому пути кривая, соединяющая точки A_0 и A_1 ; любая такая кривая представляет собой кинематически возможный путь, так как обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ всегда выбираются именно так, что геометрические связи, наложенные на систему, удовлетворяются тождественно (п. 14), а других связей у голономной системы нет.

Отметим, что задача о построении прямого пути, соединяющего начальную и конечную точки A_0 и A_1 , не является простой. Она приводит к рассмотрению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений порядка $2n$, описывающей движение изучаемой механической системы. Если точка A_0 соответствует значениям обобщенных координат $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$, а точка A_1 — значениям $q_1^1, q_2^1, \dots, q_n^1$, то решение $q_i(t)$ дифференциальных уравнений движения должно удовлетворять крайевым условиям

$$q_i(t_0) = q_i^0, \quad q_i(t_1) = q_i^1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Краевая задача может иметь единственное решение, а может не иметь ни одного решения; она может иметь несколько или даже бесконечное множество решений.

Если точки A_0 и A_1 достаточно близки, то решение упомянутой задачи либо единственно, либо она имеет только конечное число решений. Для наших целей второй случай сводится к первому в том смысле, что среди конечного числа прямых путей можно взять какой-то один и рассмотреть его окрестность, достаточно малую, чтобы она не содержала точек других прямых путей, отвечающих значениям t из интервала $t_0 < t < t_1$. Окольные пути затем следует проводить именно в этой малой окрестности выбранного прямого пути.

При достаточном удалении точки A_1 от точки A_0 может оказаться, что краевая задача имеет решения, соответствующие бесконечно близким прямым путям, проходимым механической системой за одно и то же время $t_1 - t_0$. В этом случае точки A_0 и A_1 расширенного координатного пространства называют *сопряженными кинетическими фокусами*.

Рассмотрим, например, одномерный гармонический осциллятор, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + q = 0.$$

Через точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$ расширенного координатного пространства q, t проходят бесконечно близкие один к другому прямые пути, задаваемые равенством

$$q = c \sin t,$$

где c — произвольная постоянная. Точки $(0, 0)$ и $(0, \pi)$ — сопряженные кинетические фокусы. Напротив, через точки $(0, 0)$ и (q^1, t_1) при $q^1 > 0, t_1 < \pi$ можно провести только один прямой путь.

Мы будем рассматривать не вполне произвольные окольные пути, а те из них, которые получаются из прямого пути при помощи синхронного варьирования. Пусть g_v — положение, которое занимает в момент времени t точка P_v системы при ее движении по прямому пути γ_v , соединяющему начальное и конечное положения a_v и b_v этой точки (рис. 146). В момент времени t данной точке P_v произвольное виртуальное перемещение δr_v из ее положения g_v . Тогда точка P_v займет положение g'_v . Если эту процедуру проделывать для всех положений g_v точки P_v на кривой γ_v при $t_0 < t < t_1$ и через получающиеся при варьировании точки g_v провести кривую, соединяющую положения a_v и b_v , то эта кривая и будет окольным путем. Соответствующие одна другой точки g_v и g'_v на прямом и окольном путях проходятся в один и те же моменты времени. В декартовых координатах положение точки P_v на прямом пути задается радиус-

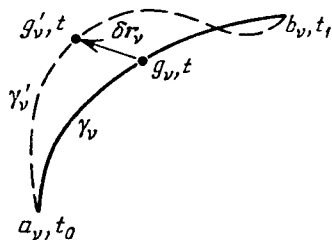


Рис. 146

сом-вектором $\mathbf{r}_v(t)$, а на окольном — радиусом-вектором $\mathbf{r}_v(t) + \delta\mathbf{r}_v(t)$, где вектор-функции $\delta\mathbf{r}_v(t)$ удовлетворяют условию $\delta\mathbf{r}_v(t_0) = 0$, $\delta\mathbf{r}_v(t_1) = 0$ ($v = 1, 2, \dots, N$). Кроме того, будем предполагать, что $\delta\mathbf{r}_v(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Нам потребуется сравнить между собой не только прямой и окольный пути, но и скорости $\dot{\mathbf{r}}_v$ точек P_v на прямом пути с соответствующими их скоростями $\dot{\mathbf{r}}_v + \delta\dot{\mathbf{r}}_v$ на окольном пути для одного и того же момента времени. Покажем, что операции синхронного варьирования и дифференцирования по времени перестановочны, т. е.

$$\delta\dot{\mathbf{r}}_v = \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r}_v \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

В самом деле, по определению скорости, на окольном пути имеем

$$\dot{\mathbf{r}}_v + \delta\dot{\mathbf{r}}_v = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_v + \delta\mathbf{r}_v) = \dot{\mathbf{r}}_v + \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r}_v \quad (v = 1, 2, \dots, N),$$

откуда и следует равенство (1).

Аналогично, если в расширенном координатном пространстве прямой путь задается уравнениями

$$q_i = q_i(t), \quad q_i(t_0) = q_i^0, \quad q_i(t_1) = q_i^1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

то окольные пути получаются из прямого при помощи виртуальных перемещений $\delta q_i(t)$ и задаются уравнениями

$$q_i = q_i(t) + \delta q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где

$$\delta q_i(t_0) = 0, \quad \delta q_i(t_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Величины $\delta q_i(t)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями t . Они удовлетворяют равенствам, аналогичным (1),

$$\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

186. Принцип Гамильтона — Остроградского. Итак, рассмотрим прямой путь голономной системы и совокупность околных путей, получающихся из прямого пути при помощи синхронного варьирования и совпадающих с ним в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 .

Пусть m_v — масса точки P_v , а $\mathbf{F}_v$ — равнодействующая всех активных сил, приложенных к этой точке. Интегрирование общего уравнения динамики

$$\sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v) \cdot \delta\mathbf{r}_v = 0 \quad (6)$$

дает равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v dt - \sum_{v=1}^N m_v \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v dt = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим разность между значениями кинетической энергии системы в момент времени t на окольном и прямом путях

$$\frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v (\dot{\mathbf{r}}_v + \delta \dot{\mathbf{r}}_v)^2 - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v^2.$$

С точностью до величин первого порядка малости включительно относительно $|\delta \mathbf{r}_v|$ для этой разности получаем выражение

$$\delta T = \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_v.$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \sum_{v=1}^N m_v \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_v dt. \quad (8)$$

Используя равенство (1) и производя интегрирование по частям, преобразуем это соотношение к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \sum_{v=1}^N m_v \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{r}}_v \cdot d\delta \mathbf{r}_v = \sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_{v=1}^N m_v \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v dt.$$

Но так как $\delta \mathbf{r}_v(t_0) = \delta \mathbf{r}_v(t_1) = 0$, то окончательно имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \sum_{v=1}^N m_v \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v dt. \quad (9)$$

Это соотношение позволяет переписать равенство (7) в следующем окончательном виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \right) dt = 0. \quad (10)$$

Равенство (10) является математическим выражением принципа Гамильтона — Остроградского, который заключается в том, что интеграл (10) равен нулю, если величины $\delta \mathbf{r}_v(t)$ соответствуют синхронному варьированию прямого пути и $\delta \mathbf{r}_v(t_0) = \delta \mathbf{r}_v(t_1) = 0$.

Таким образом, на прямом пути голономной системы интеграл (10) равен нулю. Покажем, что, наоборот, если на каком-то кинематически возможном пути интеграл (10) равен нулю, то этот

путь — прямой. Для этого достаточно убедиться в том, что из принципа Гамильтона — Остроградского (10) вытекают уравнения Лагранжа второго рода.

Замечая, что

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i,$$

где Q_i — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i , и что

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right),$$

перепишем равенство (10) в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i \right] dt = 0. \quad (11)$$

Используя соотношения (5), интегрируя по частям и учитывая, что $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt.$$

Поэтому равенство (11) переходит в следующее:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i dt = 0. \quad (12)$$

Величины δq_i ($i = 1, 2, \dots, n$) независимы и произвольны. Используя это, покажем, что каждое из выражений в круглых скобках в формуле (12) равно нулю. Для этого положим, что $\delta q_1 = \dots = \delta q_{k-1} = \delta q_{k+1} = \dots = \delta q_n = 0$, а $\delta q_k \neq 0$. Тогда равенство (12) сводится к равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k dt = 0. \quad (13)$$

Пусть ¹⁾ выражение в круглых скобках в формуле (13) не равно нулю при $t = t_*$ из интервала $t_0 < t < t_1$. Тогда в силу непре-

¹⁾ Проводимое далее доказательство обращения в нуль выражения в круглых скобках формулы (13) является стандартным. Оно лежит в основе доказательства так называемой *основной леммы вариационного исчисления* (см. лемму 1 в § 3 учебника: Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961).

рынности существует окрестность $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$, лежащая в интервале $t_0 < t < t_1$, в которой круглая скобка из (13) сохраняет знак. Произвольную функцию $\delta q_k(t)$ выберем так, чтобы она вне окрестности $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$ была равна нулю, а в самой этой окрестности сохраняла знак. Тогда равенство (13) переписывается в виде

$$\int_{t_*-\varepsilon}^{t_*+\varepsilon} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k dt = 0.$$

Но так как при упомянутом выборе функции $\delta q_k(t)$ подынтегральное выражение сохраняет знак в окрестности $-\varepsilon + t_* < t < t_* + \varepsilon$, то последнее равенство невозможно. Отсюда следует, что при всех t из интервала $t_0 < t < t_1$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k.$$

Проведенные рассуждения справедливы для любого k ($k = 1, 2, \dots, n$). Поэтому из принципа Гамильтона — Остроградского следуют Уравнения Лагранжа второго рода. Следовательно, этот принцип может быть положен в основу динамики голономных систем.

187. Принцип Гамильтона — Остроградского для систем в потенциальном поле сил. В потенциальном поле сил

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v = -\delta \Pi, \quad (14)$$

где $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n, t)$ — потенциальная энергия системы. Тогда формула (10) дает

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi) dt = 0.$$

Так как функция Лагранжа имеет вид $L = T - \Pi$, то отсюда следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (16)$$

Этот интеграл называется *действием по Гамильтону*. Так как L — функция $q_i, \dot{q}_i, t$, то для вычисления величины S нужно задать

функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в промежутке $t_0 \leq t \leq t_1$, т. е. действие S является функционалом, зависящим от движения системы.

Используя обозначение (16) и учитывая неизменность t_0 и t_1 при переходе от прямого пути к околному и от околного пути к другому околному, перепишем равенство (15) в виде

$$\delta S = 0. \quad (17)$$

Это равенство выражает принцип Гамильтона — Остроградского для голономной системы в случае существования потенциала сил: *среди всех (сравнимых) путей прямой путь выделяется тем, что для него действие по Гамильтону имеет стационарное значение (т. е. первая вариация δS на прямом пути равна нулю).*

Будет ли действие принимать экстремальное значение на прямом пути, т. е. будет ли значение интеграла (16), вычисленное на прямом пути, наименьшим или наибольшим по сравнению с его значениями на околных путях? Ответ на этот вопрос будет получен в следующем пункте, а сейчас рассмотрим пример, показывающий, что в некоторых случаях действие по Гамильтону на прямом пути имеет меньшее значение, нежели на околном.

Пример. Движение материальной точки в однородном поле тяжести¹⁾. Пусть материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Пусть движение происходит в плоскости Oxz . Траекторией точки будет парабола

$$z = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2, \quad x = v_0 \cos \alpha t. \quad (18)$$

В момент времени

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (19)$$

где g — ускорение свободного падения, материальная точка пересечет ось Ox в точке B (рис. 147), причем пройденное ею расстояние вдоль оси Ox

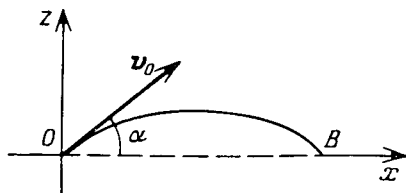


Рис. 147

$$OB = \frac{2v_0^3 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (20)$$

Таким образом, в рассматриваемом примере на прямом пути точка описывает в плоскости Oxz параболу за время t_1 .

Это движение будем сравнивать с прямолинейным равномерным движением точки из положения O в положение B . Окольный путь будет отрезком OB оси Ox . Так как в принципе Гамильтона — Остроградского время движения из начального положения системы в ее конечное положение для прямого и околного путей должно быть одинаковым, то в рассматриваемом равномерном прямолинейном движении скорость v должна быть равна $v_0 \cos \alpha$.

¹⁾ См.: Слудский Ф. А. Заметка о начале наименьшего действия // Вариационные принципы механики/Под ред. Л. С. Полака.— М.: Физматгиз, 1959.— С. 388—391.

Для обоих движений

$$\Pi = mgz. \quad (21)$$

Для параболического движения

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{1}{2} m (v_0^2 - 4v_0 \sin \alpha g t + 2g^2 t^2),$$

для прямолинейного движения

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \alpha.$$

Для параболического движения

$$S = \int_0^{t_1} L dt = \frac{m v_0^3 \sin \alpha}{g} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \right), \quad (22)$$

а для движения по прямой

$$S = \frac{m v_0^3 \sin \alpha}{g} (1 - \sin^2 \alpha). \quad (23)$$

При любом α (в том числе и при достаточно малых α , когда прямой и окольные пути могут быть сколь угодно близкими) величина (22) меньше величины (23), т. е. действие по Гамильтону на прямом пути меньше, чем на окольном.

188. Экстремальное свойство действия по Гамильтону. Рассмотрим окрестность начального положения системы, достаточно малую, чтобы в ней отсутствовали сопряженные кинетические фокусы. Тогда можно считать (п. 185), что за заданное время $t_1 - t_0$ система может перейти из своего начального положения в конечное положение, расположенное в выбранной окрестности, только по одному прямому пути. Покажем, что в этом случае действие по Гамильтону на прямом пути будет наименьшим по сравнению с его значениями на окольных путях системы.

Для доказательства воспользуемся геометрическим методом Жуковского¹⁾. Траектории точек P_v ($v = 1, 2, \dots, N$) системы будем рассматривать в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть a_v — начальное положение точки P_v , а f_v и c_v — ее положения на каких-либо двух различных кинематически возможных путях, по которым система за одно и то же время $t - t_0$ переходит из начального положения в положение, отвечающее моменту времени t (рис. 148). При этом $t_0 < t < t_1$, а промежуток времени $t - t_0$, вообще говоря, мал, чтобы за время $t - t_0$ система не могла выйти из выбранной малой окрестности ее начального положения.

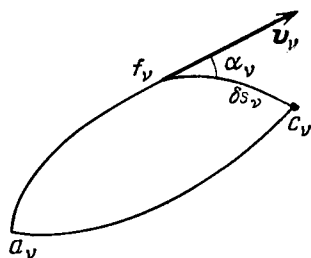


Рис. 148

¹⁾ См.: Жуковский Н. Е. О начале наименьшего действия // Собр. соч. Т. 1.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— С. 51—57.

Пусть $[af]$ и $[ac]$ — действия по Гамильтону на этих путях системы, т. е.

$$[af] = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt, \quad [ac] = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt, \quad (24)$$

причем первый и второй интегралы вычисляются на путях, по которым точки P_v переходят из положений a_v в положения f_v и c_v соответственно. Для разности $[ac] - [af]$ с точностью до величин первого порядка включительно относительно $|\delta \mathbf{r}_v|$ и $|\delta \dot{\mathbf{r}}_v|$ имеем выражение

$$[ac] - [af] = \int_{t_0}^t \sum_{v=1}^N \left(m_v \mathbf{v}_v \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_v - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_v} \cdot \delta \mathbf{r}_v \right) dt,$$

где $\mathbf{v}_v$ и $\partial \Pi / \partial \mathbf{r}_v$ вычисляются на пути $a_v f_v$. Учитывая, что $\mathbf{F}_v = -\partial \Pi / \partial \mathbf{r}_v$, интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\delta \mathbf{r}_v(t_0) = 0$, имеем

$$[ac] - [af] = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{v}_v(t) \cdot \delta \mathbf{r}_v(t) + \int_{t_0}^t \sum_{v=1}^N (\mathbf{F}_v - m_v \mathbf{w}_v) \cdot \delta \mathbf{r}_v dt.$$

Учитывая общее уравнение динамики (6), это соотношение можно переписать окончательно в таком виде:

$$[ac] - [af] = \sum_{v=1}^N m_v v_v \cos \alpha_v \delta s_v. \quad (25)$$

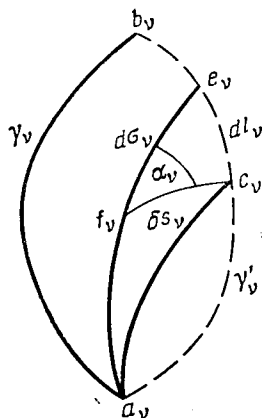


Рис. 149

Здесь $\mathbf{v}_v$ — скорость точки P_v в момент времени t , когда она занимает положение f_v , α_v — угол между $\mathbf{v}_v$ и $\delta \mathbf{r}_v$, а δs_v — длина дуги $f_v c_v$.

Пусть b_v — положение точки P_v в конечный момент времени t_1 движения системы, а γ_v и γ'_v — кривые, по которым перемещается точка P_v при движении системы соответственно по прямому и любому из окружающих путей (рис. 149). Сравним действие по Гамильтону на прямом и окольном путях. Для этого возьмем на пути γ'_v точку c_v , отвечающую моменту времени t , где $t_0 < t < t_1$, а также бесконечно близкую ей точку e_v , отвечающую моменту $t + dt$. Проведем траектории $a_v c_v$ для

некоторого вспомогательного действительного движения точек P_v , при котором они за время $t - t_0$ приходят из начальных положений a_v в их положения c_v , расположенные на кривой γ'_v , отвечающей окольному пути. Аналогично, пусть кривые $a_v e_v$ будут траектория-

ми еще одного вспомогательного движения, при котором точки P_v за время $t + dt - t_0$ приходят из положений a_v в положения e_v на кривой γ'_v . И вообще проведем траектории таких вспомогательных действительных движений для всех положений точек P_v на кривой γ'_v ($v = 1, 2, \dots, N$).

Пусть f_v — положение, которое занимает точка P_v в момент времени t при ее движении по вспомогательной действительной траектории $a_v e_v$. Таким образом, дуги $a_v f_v$ и $a_v c_v$ двух вспомогательных действительных траекторий и дуга $a_v c_v$, являющаяся частью кривой γ'_v , отвечающей околному пути, проходятся точкой P_v за одно и то же время $t - t_0$. Поэтому дуга $f_v e_v$ на вспомогательной траектории и дуга $c_v e_v$ кривой γ'_v проходятся также за одинаковое время, причем это время равно dt .

Обозначим длины дуг $f_v e_v$ и $c_v e_v$ соответственно $d\sigma_v$ и dl_v . Из бесконечно малого треугольника $c_v f_v e_v$ (рис. 149) получим

$$dl_v^2 = d\sigma_v^2 + \delta s_v^2 - 2d\sigma_v \delta s_v \cos \alpha_v.$$

Умножим обе части этого равенства на m_v и просуммируем по всем точкам системы. Замечая затем, что по предположению в рассматриваемой малой окрестности начального положения системы кинетических фокусов нет и, следовательно, среди величин δs_v ($v = 1, 2, \dots, N$) хотя бы одна отлична от нуля, получаем неравенство

$$\sum_{v=1}^N m_v dl_v^2 > \sum_{v=1}^N m_v d\sigma_v^2 - 2 \sum_{v=1}^N m_v d\sigma_v \cos \alpha_v \delta s_v. \quad (26)$$

Если T' — кинетическая энергия системы при ее движении по околному пути, а T — кинетическая энергия системы при движении ее точек P_v по дугам $f_v e_v$, отвечающим вспомогательному действительному движению, то

$$\sum_{v=1}^N m_v dl_v^2 = 2T' dt^2, \quad \sum_{v=1}^N m_v d\sigma_v^2 = 2T dt^2. \quad (27)$$

Так как $d\sigma_v/dt = v_v$, то, используя формулы (27), неравенство [(26)] можно написать в виде

$$T' dt > T dt - \sum_{v=1}^N m_v v_v \cos \alpha_v \delta s_v. \quad (28)$$

Вычтем из обеих частей величину Πdt и воспользуемся равенством (25). Получим

$$(T' - \Pi) dt > (T - \Pi) dt + [af] - [ac]. \quad (29)$$

Так как

$$(T - \Pi) dt = [fe], \quad [fe] + [af] - [ac] = [ae] - [ac],$$

то правая часть неравенства (29) равна дифференциалу dS действия по Гамильтону при переходе от одной действительной

траектории к другой, когда время движения увеличивается на dt . Поэтому

$$(T' - T)dt > dS. \quad (30)$$

Интегрируя это неравенство от $t = t_0$ до $t = t_1$ и вводя обозначения $S_{пр}$ и $S_{ок}$ для действия по Гамильтону на прямом и окольном путях системы, получим

$$S_{ок} > S_{пр}. \quad (31)$$

Таким образом, показано, что если начальное и конечное положения системы достаточно близки, то действие по Гамильтону на прямом пути имеет минимальное значение по сравнению с его значениями на окольных путях, проходимых за то же время¹⁾.

Пусть точки A_0 и A_1 расширенного координатного пространства отвечают начальному и конечному положениям системы (рис. 145).

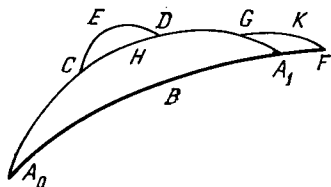


Рис. 150

Если точки A_0 и A_1 достаточно близки, то действие S на прямом пути имеет минимум. Выясним, насколько близкими должны быть точки A_0 и A_1 , чтобы на прямом пути действие оставалось минимальным²⁾. На прямом пути A_0A_1 первая вариация δS действия по Гамильтону всегда равна нулю. Если точка A_1 близка к точке A_0 , то в силу минимальности действия вторая вариация $\delta^2 S$ на прямом пути положительна³⁾. Будем удалять точку A_1

от точки A_0 . Пусть t_1^* — то значение t_1 , при котором вариация $\delta^2 S$, вычисленная на окольном пути A_0HA_1 , в первый раз обращается в нуль (рис. 150). Следовательно, действия по Гамильтону на путях A_0HA_1 и A_0BA_1 равны с точностью до членов второго порядка включительно относительно величин $|\delta q_i|$, $|\delta \dot{q}_i|$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$S_{A_0HA_1} = S_{A_0BA_1}. \quad (32)$$

Покажем, что на самом деле A_0HA_1 — прямой путь, т. е. A_0 и A_1 — сопряженные кинетические фокусы. Предположим, что это не так, т. е. что путь A_0HA_1 не является прямым. Тогда возьмем на нем точки C и D и соединим их прямым путем CED . По доказанному выше для достаточно близких точек C и D

$$S_{CED} < S_{CHD}. \quad (33)$$

¹⁾ По этой причине принцип Гамильтона — Остроградского часто называют принципом наименьшего действия.

²⁾ См. шестую лекцию в книге: Якоби К. Лекции по динамике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936, а также гл. 12 книги: Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1960.

³⁾ Мы не рассматриваем те исключительные случаи, когда вопрос об экстремальности S решается с привлечением вариаций более высокого порядка.

Отсюда и из (32) следует, что

$$S_{A_0CEDA_1} < S_{A_0CHDA_1} = S_{A_0BA_1}. \quad (34)$$

Это неравенство противоречит предположению о том, что A_1 есть первое положение на прямом пути A_0BA_1 , при котором вторая вариация $\delta^2 S$ обращается в нуль при надлежащем выборе окольного пути, проходящего через A_0 и A_1 .

Проведенное рассуждение показывает, что если конечная точка A_1 лежит перед кинетическим фокусом, сопряженным с начальной точкой A_0 , то действие по Гамильтону на прямом пути A_0A_1 имеет минимум.

Пусть теперь A_1 — сопряженный кинетический фокус для точки A_0 , а конечная точка прямого пути F лежит за точкой A_1 (рис. 150). Здесь уже действие на прямом пути A_0BA_1F не будет минимальным. Для доказательства укажем такой окольный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на пути A_0BA_1F . Для этого на ранее построенном прямом пути A_0A_1 возьмем точку G , настолько близкую к F , чтобы действие на соединяющем эти точки прямом пути GKF было минимальным. Тогда

$$S_{GKF} < S_{GA_1} + S_{A_1F}. \quad (35)$$

Отсюда и из (32) получаем

$$\begin{aligned} S_{A_0HGKF} &= S_{A_0HG} + S_{GKF} < S_{A_0HG} + S_{GA_1} + S_{A_1F} = S_{A_0HA_1} + S_{A_1F} = \\ &= S_{A_0BA_1} + S_{A_1F} = S_{A_0BA_1F}, \end{aligned}$$

т. е. действие на построенном окольном пути меньше, чем на прямом. Поэтому действие на прямом пути не имеет минимума. Оно не может иметь и максимума, так как на малых участках прямого пути A_0BA_1F действие минимально. Таким образом, если фокус, сопряженный с начальной точкой, лежит перед конечной точкой прямого пути, то действие по Гамильтону не имеет на прямом пути ни минимума, ни максимума.

Пример. Движение материальной точки по инерции на сфере. Пусть точка движется, оставаясь все время на неподвижной сфере и никакие активные силы на точку не действуют. Если m — масса точки, а R — радиус сферы, то в сферических координатах (рис. 134)

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = 0.$$

На прямом пути выполняются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}$$

(φ — циклическая координата). Так как $L = T - \Pi = T$, то отсюда следует, что

$$0 = \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}_0. \quad (36)$$

Без ограничения общности можно считать, что на прямом пути вектор $\mathbf{v}$ начальной скорости точки направлен по меридиану ($\varphi = \text{const}$), т. е. $\dot{\varphi}_0 = 0$. Тогда из (36) следует, что во все время движения

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\theta} = \text{const}$$

и, следовательно, $v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 = \text{const}$. Это означает, что прямой путь представляет собой дугу большого круга, по которой точка движется с постоянной скоростью $v = v_{\text{пр}}$. При этом

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

и

$$S_{\text{пр}} = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{m v_{\text{пр}}^2}{2} (t_1 - t_0) = \frac{m l_{\text{пр}}^2}{2 (t_1 - t_0)}, \quad (37)$$

где $l_{\text{пр}}$ — длина дуги, пройденной точкой на прямом пути за время $t_1 - t_0$.

Кинетическим фокусом, сопряженным с произвольной начальной точкой A , является диаметрально противоположная точка A^* на сфере, так как два больших круга, проходящих через A , пересекаются только в A^* .

Пусть скорость движения по околному пути, соединяющему две точки A и B , постоянна и равна $v_{\text{ок}}$. Тогда

$$S_{\text{ок}} = \frac{m l_{\text{ок}}^2}{2 (t_1 - t_0)}. \quad (38)$$

Из (37), (38) и рассмотренного выше экстремального свойства действия по Гамильтону следует, что проходящая через A и B дуга большого круга является кратчайшей среди кривых, соединяющих A и B , если точка A^* не лежит на этой дуге, т. е. если дуга меньше половины окружности большого круга.

Упражнение. В примере п. 185 построить околный путь, на котором действие по Гамильтону меньше, чем на прямом пути.

§ 2. Принцип Мопертюна — Лагранжа

189. Изоэнергетическое варьирование. Рассмотрим голономную консервативную или обобщенно консервативную систему. Ее функция Гамильтона не зависит от времени, и существует обобщенный интеграл энергии

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h. \quad (1)$$

Движение системы будем представлять в n -мерном координатном пространстве $q_1, \dots, q_n$ ¹⁾. Пусть A_0 и A_1 — точки этого пространства, задаваемые соответственно координатами q_i^0 и q_i^1 ($i = 1, 2, \dots, n$). Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ система занимает положение, отвечающее точке A_0 , и обобщенные ско-

¹⁾ A не в расширенном $(n+1)$ -мерном координатном пространстве, как это было при изучении принципа Гамильтона — Остроградского в предыдущем параграфе.

рости $\dot{q}_i$ (а следовательно, и обобщенные импульсы p_i) могут быть выбраны так, что при $t = t_1$ система займет положение, отвечающее точке A_1 . Проходящую через точки A_0 и A_1 кривую

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

вдоль которой удовлетворяются дифференциальные уравнения движения, назовем *прямым путем системы* (см. рис. 151, где $n = 3$). На прямом пути функции Гамильтона постоянна и равна h , где величина h определяется начальными условиями.

Наряду с прямым путем рассмотрим другие кинематически возможные пути, бесконечно близкие к прямому. Эти пути будем называть *окольными путями*, если они: 1) проходят через одни и те же начальные и конечные положения A_0 и A_1 ; 2) вдоль каждого окольного пути функции Гамильтона постоянна и равна величине h , отвечающей прямому пути.

При таком изоэнергетическом варьировании время $t_1 - t_0$ перехода системы из начального положения в конечное не обязательно одинаково для прямого и окольных путей. Пусть, например, материальная точка массой m движется в отсутствие сил в плоскости Oxy . За движение по прямому пути примем прямолинейное движение вдоль оси Ox . В начальный момент времени $t = 0$ точка находится в начале координат O . Тогда на прямом пути $x = \sqrt{\frac{2h}{m}} t$.

Из интеграла энергии $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = h$ следует, что на окольном пути выполняется неравенство $\dot{x} \leq \sqrt{\frac{2h}{m}}$. Следовательно, по окольному пути невозможно прийти за одинаковое время t_1 в то же положение, что и на прямом пути, если постоянная h одинакова для прямого и окольного путей.

Рассматриваемый в этом параграфе принцип Мопертюн — Лагранжа дает критерий, позволяющий выделять прямой путь среди всех окольных, удовлетворяющих упомянутым выше свойствам 1 и 2.

190. Принцип Мопертюн — Лагранжа. При заданной константе энергии h уравнения движения консервативной или обобщенно консервативной системы могут быть записаны в форме уравнений Якоби (см. уравнения (36) п. 152). Эти уравнения имеют форму уравнений Лагранжа второго рода, где в качестве функции Лагранжа L выступает функция Якоби P , а роль независимой переменной играет обобщенная координата q_1 . По аналогии с действием S по

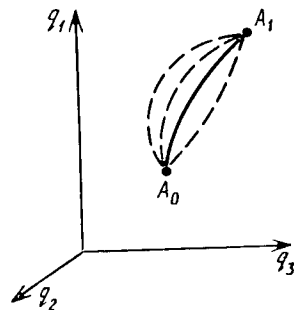


Рис. 151

Гамильтону введем ¹⁾ действие по Лагранжу:

$$W = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P dq_1. \quad (3)$$

В предыдущем параграфе показано, что уравнения Лагранжа второго рода эквивалентны принципу Гамильтона — Остроградского, выражающемуся в стационарности действия по Гамильтону на прямом пути системы (см. равенство (17) п. 187). Аналогично, уравнения Якоби эквивалентны условию стационарности действия по Лагранжу

$$\delta W = 0. \quad (4)$$

Равенство (4) выражает принцип Мопертюи — Лагранжа, заключающийся в том, что *среди всех кинематически возможных путей, удовлетворяющих условиям, описанным в предыдущем пункте, прямой путь выделяется тем, что для него действие по Лагранжу имеет стационарное значение.*

Вопрос об экстремальных свойствах действия по Лагранжу решается точно так же, как и для принципа Гамильтона — Остроградского при помощи рассмотрения сопряженных кинетических фокусов.

Отметим, что в интеграле (3) полностью исключено время и принцип (4) содержит только геометрические элементы. В такой форме принцип Мопертюи — Лагранжа впервые был представлен Якоби. Поэтому приведенную выше формулировку принципа Мопертюи — Лагранжа часто называют *принципом наименьшего действия Якоби.*

Пусть система консервативна. Тогда функция Якоби P вычисляется по формуле (38) п. 152 и действие по Лагранжу может быть преобразовано к виду

$$W = \int_{q_1^0}^{q_1^1} \frac{2T}{q_1} dq_1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt. \quad (5)$$

При применении принципа Мопертюи — Лагранжа в форме (4), (5) следует помнить, что в (5) время t_1 не фиксируется, а может изменяться при переходе от прямого пути к околному и от одного околного пути к другому околному. Кроме того, полная энергия $T + \Pi$ одна и та же на всех сравниваемых путях.

¹⁾ См. § 20 книги: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966.

Выражение (5) для действия по Лагранжу можно записать иначе:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{v=1}^N m_v v_v^2 dt = \sum_{v=1}^N \int_{s_v^0}^{s_v^1} m_v v_v ds_v \quad (6)$$

т. е. для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ количеств движения точек системы на соответствующих их перемещениях.

Примеры. 1. Движение материальной точки по инерции на гладкой поверхности¹⁾. Пусть материальная точка массой m движется по гладкой неподвижной поверхности под влиянием начального толчка в отсутствие поля сил ($\Pi = 0$). Тогда $v = v_0 = \text{const}$ и из (6) получаем, что

$$W = mv_0 l,$$

где l — пройденный точкой путь. Из принципа Якоби следует, что $\delta l = 0$, т. е. движение точки на поверхности происходит по геодезической кривой²⁾.

Если начальная и конечная точки A_0 и A_1 близки одна к другой, то действие W минимально и геодезическая является кратчайшей кривой, лежащей на поверхности и соединяющей точки A_0 и A_1 .

Вопрос о минимальности действия решается в каждом конкретном случае при помощи привлечения кинетических фокусов. Если точка движется по развертывающейся поверхности (т. е. по поверхности, которую после изгибания можно наложить на плоскость), например по конусу или цилиндру, то действие W на прямом пути обязательно будет минимальным, так как на плоскости прямые, проходящие через одну и ту же точку, никогда вновь не пересекаются (и, следовательно, кинетические фокусы отсутствуют).

2. Движение материальной точки в однородном поле тяжести³⁾. Эта задача была рассмотрена в п. 187 для иллюстрации принципа Гамильтона — Остроградского. Здесь мы ее применяем для иллюстрации принципа Мопертюи — Лагранжа, что поможет яснее представить разницу между этими принципами.

Прямой путь представляет собой параболу, задаваемую уравнением (18) п. 187. За окольный путь опять примем отрезок OB , лежащий на оси Ox (рис. 147). Угол α считаем малым, так что прямой и окольный пути близки один к другому. Для обоих движений $\Pi = mgz$.

Так как полная механическая энергия $T + \Pi$ должна быть одинаковой для прямого и окольного путей, то начальные скорости точки для обоих движений одинаковы и равны v_0 . Но если на прямом пути время t_1 движения точки определяется равенством (19) п. 187, то для окольного пути оно будет иным и вычисляется по формуле

$$t_1 = \frac{OB}{v_0} = \frac{2v_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (7)$$

Для параболического движения

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha g t + g^2 t^2),$$

¹⁾ См. упомянутую на с. 338 книгу К. Якоби «Лекции по динамике».

²⁾ Геодезическая кривая характеризуется тем, что ее длина имеет стационарное значение по сравнению с длинами других кривых, имеющих с геодезической одни и те же концы.

³⁾ См. упомянутую на с. 338 работу Ф. В. Слудского «Заметка о начале наименьшего действия».

а для прямолинейного движения

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Действие по Лагранжу для движения по параболе

$$W = 2 \int_0^1 T dt = \frac{2mv_0^3 \sin \alpha}{g} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \right), \quad (8)$$

а для движения по прямой

$$\begin{aligned} W &= \frac{2mv_0^3 \sin \alpha}{g} \cos \alpha = \frac{2mv_0^3 \sin \alpha}{g} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2mv_0^3 \sin \alpha}{g} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \sin^4 \alpha - \dots \right), \quad (9) \end{aligned}$$

где многоточием обозначены члены выше четвертого порядка относительно $\sin \alpha$.

При достаточно малых значениях α величина (8) меньше величины (9), т. е. действие по Лагранжу на прямом пути меньше, чем на окольном.

191. Принцип Якоби и геодезические линии в координатном пространстве. Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы. Ее кинетическая энергия — определенно положительная квадратичная форма обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (10)$$

Пусть P и P' — две близкие точки координатного пространства $q_1, \dots, q_n$, задаваемые наборами координат $q_1, \dots, q_n$ и $q_1 + dq_1, \dots, q_n + dq_n$. Введем в координатном пространстве метрику, определив квадрат расстояния ds^2 между точками P и P' при помощи удвоенной кинетической энергии

$$ds^2 = 2T dt^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, \dots, q_n) dq_i dq_k. \quad (11)$$

Отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (12)$$

т. е. в метрике (11) кинетическая энергия системы равна кинетической энергии изображающей точки в координатном пространстве¹⁾, если считать, что изображающая точка обладает массой, равной единице.

¹⁾ которое теперь является n -мерным римановым пространством с линейным элементом ds , определенным по формуле (11).

Пусть система движется по инерции, т. е. $\Pi = 0$. Из интеграла энергии $T + \Pi = h = \text{const}$ и формулы (12) тогда следует, что

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \quad (13)$$

т. е. в метрике (11) движению консервативной системы по инерции отвечает равномерное движение изображающей точки в координатном пространстве, причем скорость ее движения равна $\sqrt{2h}$.

Для этого движения действие по Лагранжу

$$W = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt = 2h(t_1 - t_0) = \sqrt{2h}l, \quad (14)$$

где $l = \sqrt{2h}(t_1 - t_0)$ — длина кривой, пройденной изображающей точкой за время $t_1 - t_0$. Из принципа Якоби следует, что $\delta l = 0$, т. е. задача о нахождении траектории свелась к задаче дифференциальной геометрии о нахождении геодезической линии в координатном пространстве с метрикой (11).

Пусть теперь движение системы происходит в потенциальном поле ($\Pi \neq 0$). Тогда функция Якоби P может быть вычислена по формуле (40) п. 152. Поэтому

$$W = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P dq_1 = 2 \int_{q_1^0}^{q_1^1} \sqrt{(h - \Pi)G} dq_1 = \sqrt{2} \int_{q_i^0}^{q_i^1} \sqrt{(h - \Pi) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k}. \quad (15)$$

Область возможности движения в координатном пространстве определяется неравенством $\Pi \leq h$, которое получается из интеграла энергии $T + \Pi = h$ и определенной положительности кинетической энергии. При $\Pi \leq h$ вместо метрики (11) введем в координатном пространстве другую метрику, определив квадрат расстояния $d\sigma^2$ между двумя близкими точками P и P' по формуле

$$d\sigma^2 = (h - \Pi) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k. \quad (16)$$

На границе области возможности движения метрика (16) имеет особенность: чем ближе кривая к границе, тем меньше ее длина; в частности, длина любой кривой, лежащей на самой границе, равна нулю. Если $\Pi < h$, то метрика (16) не имеет особенностей. Из (15) получаем

$$W = \sqrt{2}\sigma,$$

где σ — длина дуги, пройденной изображающей точкой в координатном пространстве с метрикой (16). И нахождение траекторий снова свелось к нахождению геодезических линий в координатном пространстве (теперь в метрике (16)).

Глава XIII. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

192. Устойчивость равновесия. Рассмотрим голономную консервативную систему, положение которой задается обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$ (n — число степеней свободы). Как показано в п. 63, некоторое положение системы тогда и только тогда является ее положением равновесия, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где Π — потенциальная энергия системы, которая в случае консервативной системы явно от времени не зависит. Без ограничения общности будем считать, что в положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю.

Если систему вывести из положения равновесия, сообщив ее точкам какие-то малые начальные отклонения от положений равновесия и малые начальные скорости, то в последующем движении точки системы либо все время остаются вблизи положений равновесия, либо удаляются от этих положений. В первом случае положение равновесия будет устойчивым, а во втором — неустойчивым.

Дадим строгое определение устойчивого положения равновесия. Положение равновесия $q_1 = q_2 = \dots = 0$ называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|q_i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

при условии, что в начальный момент $t = t_0$

$$|q_i(t_0)| < \delta, \quad |\dot{q}_i(t_0)| < \delta. \quad (3)$$

Это определение удобно геометрически интерпретировать в $2n$ -мерном пространстве состояний $q_i, \dot{q}_i$. На рис. 152 для случая $n = 1$ изображены две окрестности, задаваемые неравенствами (2) и (3). В случае устойчивости любое движение, начинающееся в момент $t = t_0$ внутри квадрата со стороной 2δ , будет происходить все время внутри квадрата со стороной 2ε .

Устойчивость положения равновесия можно исследовать, зная потенциальную энергию системы.

193. Теорема Лагранжа. Достаточные условия устойчивости положения равновесия консервативной системы дает теорема Лагранжа.

Теорема. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Доказательство. Как уже отмечалось, без ограничения общности можно считать, что в положении равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$. В силу того что потенциальная энергия $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной, примем, что $\Pi(0, \dots, 0) = 0$. Так как в положении равновесия функция Π имеет строгий локальный минимум, то существует такое число $\eta > 0$, что в окрестности

$$|q_i| < \eta \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

выполняется строгое неравенство

$$\Pi(q_1, \dots, q_n) > \Pi(0, \dots, 0) = 0, \quad (5)$$

если хотя бы одна из величин q_i не равна нулю.

Будем предполагать также, что за обобщенные координаты $q_1, \dots, q_n$ приняты такие независимые параметры, определяющие положение системы, что определитель (18) п. 139 (при $m = n$) отличен от нуля для всех q_i из окрестности (4), если η — достаточно малая величина. Тогда кинетическая энергия

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,h=1}^n a_{ih}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_h \quad (6)$$

является определенно положительной функцией обобщенных скоростей, и, следовательно, полная механическая энергия системы

$$E = T + \Pi \quad (7)$$

при выполнении неравенства (4) строго положительна, если только не все величины $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) равны нулю. А так как при $q_i = \dot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) имеем $E = 0$, то функция E в начале координат $2n$ -мерного пространства состояний $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) имеет строгий локальный минимум, равный нулю.

Пусть ε — любое число, удовлетворяющее ограничениям $0 < \varepsilon < \eta$. Рассмотрим окрестность, задаваемую неравенствами (2). Граница этой окрестности является замкнутым множеством точек, и непрерывная функция E достигает на ней своей точной нижней грани α . Так как, кроме того, на границе окрестности (2) все

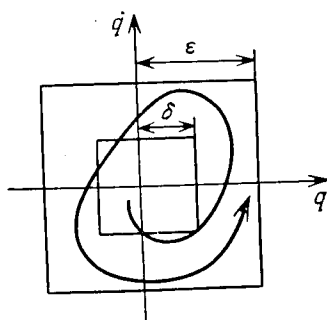


Рис. 152

значения E положительны, то на ней

$$E \geq a > 0.$$

В силу того что в начале координат $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывная функция E имеет строгий локальный минимум, равный нулю, можно найти такое δ ($0 < \delta \leq \varepsilon$), что в окрестности

$$|q_i| < \delta, \quad |\dot{q}_i| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

будет выполняться неравенство

$$E < a. \quad (9)$$

Пусть теперь функции $q_i = q_i(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения системы. Если начальные данные удовлетворяют неравенствам (3), то во все время движения выполняются неравенства (2). Действительно, при условии (3) начальная полная энергия $E_0 < a$, а так как при движении консервативной системы ее полная энергия постоянна, то при всех $t \geq t_0$ имеем $E < a$. Поэтому точка $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, изображающая движение системы в пространстве q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), не может достигнуть границы окрестности (2), на которой $E \geq a$, а поэтому всегда остается внутри этой окрестности. Теорема доказана.

Отметим, что приведенные выше доказательства следуют соображениям, содержащимся в первом строгом и полном доказательстве теоремы Лагранжа, предложенном Дирихле. Эти соображения послужили одним из основных источников для решения общей задачи об устойчивости движения¹⁾.

З а м е ч а н и е. Предположим, что изучаемая механическая система неконсервативна, но получается из консервативной добавлением гироскопических или диссипативных сил или тех и других вместе. Пусть им отвечают обобщенные силы $Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)$. Тогда мощность непотенциальных сил

$$N^* = \sum_{i=1}^n Q_i^*(q_j, \dot{q}_j) \dot{q}_i \leq 0. \quad (10)$$

Покажем, что обобщенные силы Q_i^* , удовлетворяющие условию (10), обращаются в нуль, когда все обобщенные скорости равны нулю. Действительно, пусть при каких-либо значениях q_{i0} ($i = 1, 2, \dots, n$) обобщенных координат хотя бы одна из обобщенных сил Q_h^* не равна нулю, т. е. $Q_h^*(q_{i0}, 0) \neq 0$. Но тогда в силу непрерывности существовала бы окрестность точки $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_i = 0$, в которой функция $Q_h^*(q_j, \dot{q}_j)$ не была бы равной нулю и, следовательно, ее значения имели бы один и тот же знак. Но ввиду независимости величин q_i и $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) их значения в ука-

¹⁾ Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.— С. 7—263.

занной окрестности можно выбрать так, что

$$\sum_{i=1}^n Q_i^* (q_j, \dot{q}_j) \dot{q}_i > 0,$$

а это противоречит условию (10). Из сказанного, в частности, следует, что при наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.

Так как интеграл энергии $E = T + \Pi = \text{const}$ существует и при гироскопических силах (в отсутствие диссипативных сил; см. п. 142), то приведенное выше доказательство теоремы Лагранжа остается без изменений и при наличии гироскопических сил. Если же существуют диссипативные силы (или диссипативные и гироскопические силы одновременно), то, согласно п. 142,

$$\frac{dE}{dt} = N^* \leq 0,$$

т. е. при движении системы ее полная энергия E не превосходит своего начального значения E_0 . Но если $E_0 < a$, то во все время движения $E < a$ и опять при всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства (2).

Таким образом, при добавлении к консервативной системе гироскопических и диссипативных сил теорема Лагранжа остается справедливой.

194. Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы. Теорема Лагранжа дает достаточные условия устойчивости положения равновесия. Вопрос о том, будет ли неустойчивым положение равновесия консервативной системы, если в этом положении потенциальная энергия не имеет минимума, является очень сложным, и до сих пор на него не получено исчерпывающего ответа¹⁾. Первые строгие результаты в решении этого вопроса получены Ляпуновым. Дадим без доказательства две его теоремы²⁾. Функцию $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ предполагаем аналитической в окрестности положения равновесия.

Теорема 1. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это известно уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

¹⁾ Обзор полученных результатов содержится в монографии: Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем.— М.: ВИНТИ, 1983.— (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика: Т. 6).

²⁾ Доказательство можно найти в работе: Ляпунов А. М. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // Собр. соч. Т. 2.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956.— С. 391—400.

Теорема 2. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и это узнается по членам наименее высокого порядка, которые действительно присутствуют в разложении этой функции в ряд в окрестности положения равновесия, то это положение равновесия неустойчиво¹⁾.

Пример. Устойчивость равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Пусть тело ограничено произвольной выпуклой поверхностью σ и общая нормаль (вертикаль) к горизонтальной плоскости и к поверхности σ в некоторой ее точке D^* содержит центр тяжести тела G . Тогда тело на плоскости может находиться в состоянии равновесия, причем в точке D^* поверхность тела соприкасается с плоскостью.

Обозначим $Gxuz$ жестко связанную с телом систему координат, ось Gz которой содержит отрезок прямой D^*G , а оси Gx и Gy направлены параллельно линиям кривизны поверхности тела в точке D^* . Тогда уравнение поверхности тела в окрестности точки D^* запишется в виде

$$f \equiv -h - z + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} \right) + \dots = 0. \quad (11)$$

Здесь x, y, z — координаты точки D поверхности σ , которой тело касается плоскости при малом его отклонении от положения равновесия (рис. 119), h — расстояние центра тяжести тела от опорной горизонтальной плоскости в положении равновесия ($x = y = 0, z = -h$), r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке D^* ; так как поверхность σ выпуклая и целиком находится выше опорной плоскости, то величины r_1, r_2 положительны. Многоточие в уравнении (11) обозначает совокупность членов, порядок которых относительно x, y выше порядка членов, выписанных явно.

Потенциальная энергия тела вычисляется по формуле

$$\Pi = mgl, \quad (12)$$

где $l = -(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{GD})$ — расстояние от центра тяжести до касательной плоскости к поверхности тела, а $\mathbf{n}$ — единичная внутренняя нормаль в точке D . Из уравнения (11) и формулы (25) п. 114 имеем следующие выражения для компонент вектора $\mathbf{n}$:

$$\gamma_1 = -\frac{x}{r_1} + \dots, \quad \gamma_2 = -\frac{y}{r_2} + \dots, \quad \gamma_3 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) + \dots \quad (13)$$

Учитывая, что $\overrightarrow{GD}' = (x, y, z)$ и пренебрегая в выражении для Π несущественной аддитивной постоянной mgh , имеем из (11)–(13)

$$\Pi = \frac{1}{2} mg \left(\frac{r_1 - h}{r_1^2} x^2 + \frac{r_2 - h}{r_2^2} y^2 \right) + \dots \quad (14)$$

Отсюда и из теоремы Лагранжа следует, что если центр тяжести тела находится ниже обоих главных центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, то положение равновесия устойчиво. Если же центр тяжести лежит выше хотя бы одного из главных центров кривизны, то согласно теоремам 1 и 2 Ляпунова, имеет место неустойчивость.

¹⁾ Для применимости теоремы 2 в конкретных задачах необходимо, чтобы разложение функции Π начиналось с однородной функции (формы) $\Pi_k(q_1, \dots, q_n)$ четной степени k , а функция Π_k должна быть отрицательной в некоторой окрестности положения равновесия (исключая само это положение).

195. Стационарные движения консервативной системы с циклическими координатами и их устойчивость. Пусть в голономной системе с n степенями свободы обобщенные координаты q_α ($\alpha = k+1, \dots, n$) являются циклическими. Остальные обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, k$) называются (при наличии циклических координат) *позиционными*. Потенциальная энергия Π и коэффициенты a_{ij} кинетической энергии

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

будут функциями только от позиционных координат.

Согласно п. 164 существуют первые интегралы, отвечающие циклическим координатам:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T_2}{\partial q_\alpha} = c_\alpha = \text{const} \quad (\alpha = k+1, \dots, n), \quad (15)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

Считая, что гессиан (6) п. 165 отличен от нуля, составим функцию Рауса

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^n c_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \quad (16)$$

и выразим ее через позиционные координаты q_i , их производные $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) и постоянные c_α ($\alpha = k+1, \dots, n$). Введем обозначение

$$R^* = -R + \Pi. \quad (17)$$

Тогда уравнения Рауса запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R^*}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (18)$$

Функция R^* может быть представлена в виде суммы

$$R^* = R_2^* + R_1^* + R_0^*, \quad (19)$$

где R_2^* — квадратичная форма производных позиционных координат¹⁾,

$$R_2^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(q_1, \dots, q_k) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (20)$$

¹⁾ Можно показать, что R_2^* — определенно положительная квадратичная форма относительно $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). См., например: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966, гл. 7, а также: Меркин Д. Р. Гироскопические системы. — М.: Наука, 1974, гл. 1.

Функция R_1^* линейна относительно $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$)¹⁾:

$$R_1^* = \sum_{i=1}^k a_i^* (q_1, \dots, q_k, c_\alpha) \dot{q}_i \quad (\alpha = k+1, \dots, n), \quad (21)$$

R_0^* зависит только от позиционных координат и величин c_α .

Используя представление (19), запишем уравнения Рауса (18) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_2^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_2^*}{\partial q_i} = - \frac{\partial (\Pi - R_0^*)}{\partial q_i} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_1^*}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (22)$$

Из равенства (21) следует, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R_1^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R_1^*}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}^* \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (23)$$

где

$$\gamma_{ij}^* = \frac{\partial a_i^*}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j^*}{\partial q_i}, \quad \gamma_{ij}^* = -\gamma_{ji}^* \quad (i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (24)$$

т. е. выражение во второй круглой скобке правой части (22) приводит к появлению гироскопических сил, линейных относительно позиционных скоростей.

Итак, уравнения (22) можно рассматривать как дифференциальные уравнения движения некоторой приведенной системы с k степенями свободы, кинетическая энергия которой равна R_2^* , а обобщенные силы состоят из гироскопических сил и потенциальных сил, производных от потенциала $\Pi^* = \Pi - R_0^*$. Потенциал Π^* приведенной системы называют *приведенным потенциалом* (*приведенной потенциальной энергией*) или *потенциалом Рауса*. Если исходная система является гироскопически несвязанной, то в приведенной системе гироскопические силы отсутствуют.

Стационарными движениями исходной консервативной системы с циклическими координатами называются такие ее движения, при которых позиционные координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и циклические скорости $\dot{q}_\alpha$ ($\alpha = k+1, \dots, n$) постоянны. Из (15) и (22) следует, что стационарные движения существуют в том и только в том случае, когда отвечающие им значения позиционных коор-

¹⁾ Если выражение кинетической энергии не содержит произведений позиционных скоростей $\dot{q}_i$ на циклические скорости $\dot{q}_\alpha$, т. е. если $a_{i\alpha} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$; $\alpha = k+1, \dots, n$), то функция R_1^* тождественно равна нулю. В этом случае рассматриваемая система называется *гироскопически несвязанной*.

динат удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (25)$$

т. е. стационарные движения исходной системы соответствуют положениям равновесия приведенной системы.

Пусть для каких-либо значений постоянных $c_\alpha = c_{\alpha 0}$ система уравнений (25) имеет решение $q_i = q_{i0} = \text{const}$. Тогда в стационарном движении $q_i = q_{i0}$, $\dot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$), $c_\alpha = c_{\alpha 0}$ ($\alpha = k+1, \dots, n$). Допустим, что в начальный момент времени $t = t_0$ величины q_i , $\dot{q}_i$ мало отличаются от их значений, отвечающих стационарному движению. Будут ли тогда величины $q_i - q_{i0}$, $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) оставаться малыми для всех $t \geq t_0$? Иными словами, будет ли рассматриваемое стационарное движение устойчиво по отношению к переменным q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$)? Ответ на этот вопрос можно получить, используя теорему Лагранжа.

Так как наличие гироскопических сил не нарушает закона сохранения полной энергии, то для приведенной системы существует интеграл $E^* = R_2^* + \Pi^*$. Если теперь в п. 193 заменить E на E^* и повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы Лагранжа, то придем к следующей теореме Рауса об устойчивости стационарных движений голономной консервативной системы с циклическими координатами.

Теорема. Если в стационарном движении потенциальная энергия Π^* ($q_1, \dots, q_k, c_{\alpha 0}$) приведенной системы имеет строгий локальный минимум, то это движение устойчиво по отношению к переменным q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Замечание. Применяя теорему Лагранжа, мы фиксировали постоянные c_α , оставляя их такими же, как и в самом стационарном движении. Ляпунову принадлежит существенное дополнение к теореме Рауса, которое допускает малое изменение постоянных c_α . Именно, если Π^* имеет минимум как при $c_\alpha = c_{\alpha 0}$, так и при значениях $c_\alpha = c_{\alpha 0} + \mu_\alpha$ ($|\mu_\alpha| \ll 1$, $\alpha = k+1, \dots, n$), причем позиционные координаты $q_{i0}(c_\alpha)$ в точке минимума Π^* непрерывны как функции c_α , то стационарное движение устойчиво по отношению к возмущениям величин q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$)¹⁾.

Пример. Устойчивость вращения диска вокруг вертикали. Пусть круговой однородный диск радиусом ρ и массой m движется в однородном поле тяжести по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, касаясь ее одной точкой своего края. Как отмечалось в п. 114, при движении твердого тела по абсолютно гладкой плоскости проекция его центра масс на плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности можно считать ее неподвижной; тогда центр масс тела будет двигаться по заданной вертикали. Ориентацию диска относительно неподвижной системы координат зададим при помощи углов Эйлера (рис. 137). Кинетическая и потенциальная энергии

¹⁾ Подробности см. в упомянутой на с. 349 монографии А. Б. Караццяна и В. В. Румянцева.

диска определяются формулами (см. п. 157)

$$T = \frac{1}{8} m\rho^2 (1 + 4 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m\rho^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + \frac{1}{4} m\rho^2 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2,$$

$$\Pi = mgr \sin \theta.$$

Переменные ψ и φ будут циклическими координатами. Им соответствуют первые интегралы ($L = T - \Pi$):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{4} m\rho^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} + \frac{1}{2} m\rho^2 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = c_\psi = \text{const}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m\rho^2 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = c_\varphi = \text{const}. \quad (27)$$

Приведенная система имеет одну степень свободы, а функция (19) имеет вид

$$R^* = \frac{1}{8} m\rho^2 (1 + 4 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 - 2 \frac{(c_\psi - c_\varphi \cos \theta)^2}{m\rho^2 \sin^2 \theta} - \frac{c_\varphi^2}{m\rho^2}.$$

Если отбросить последнее слагаемое, несущественное для уравнений движения, то для потенциальной энергии приведенной системы имеем выражение

$$\Pi^* = mgr \sin \theta + 2 \frac{(c_\psi - c_\varphi \cos \theta)^2}{m\rho^2 \sin^2 \theta}. \quad (28)$$

Существует такое движение, при котором один из диаметров диска расположен вертикально, а сам диск вращается вокруг этого диаметра с произвольной по величине постоянной угловой скоростью. Для этого движения

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega = \text{const}, \quad (29)$$

причем

$$c_\psi = \frac{1}{4} m\rho^2 \omega, \quad c_\varphi = 0. \quad (30)$$

Подставляя в функцию Π^* значения постоянных c_ψ и c_φ из (30), полагая $\theta = \frac{\pi}{2} + q$ и разлагая Π^* в ряд по степеням q , получаем (несущественную постоянную в функции Π^* отбрасываем)

$$\Pi^* = \frac{1}{8} (m\rho^2 \omega^2 - 4mgr) q^2 + \frac{1}{24} (2m\rho^2 \omega^2 + mgr) q^4 + \dots \quad (31)$$

При выполнении неравенства

$$|\omega| \geq 2 \sqrt{\frac{g}{\rho}} \quad (32)$$

функция Π^* имеет строгий локальный минимум в точке $q = 0$. Поэтому, согласно теореме Рауса, при условии (32) стационарное движение диска (29) устойчиво. Если же неравенство (32) не выполняется, то функция Π^* в точке $q = 0$ не имеет минимума, и это узнается по членам второго порядка в разложении (31). Следовательно, согласно теореме Ляпунова (см. п. 194), при невыполнении неравенства (32) имеет место неустойчивость¹⁾.

¹⁾ Впрочем, для доказательства неустойчивости при невыполнении неравенства (32) применима и теорема 2 Ляпунова из п. 194, так как при этом функция Π^* в точке $q = 0$ имеет максимум, и это узнается по членам низшего (в нашем случае — второго) порядка в разложении (31).

§ 2. Малые колебания

196. **Линеаризация уравнений движения.** Пусть консервативная система имеет положение равновесия, в котором все обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равны нулю. Предполагая потенциальную энергию системы $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ аналитической функции в окрестности положения равновесия, разложим ее в ряд Тейлора

$$\Pi = \Pi(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + \dots \quad (1)$$

где индексом 0 отмечены значения производных функции Π в положении равновесия, т. е. при $q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Без ограничения общности можно считать, что $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$. Первая сумма в разложении (1) равна нулю, так как в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, если ввести обозначения

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0,$$

то разложение потенциальной энергии в ряд будет начинаться с квадратичной формы, имеющей постоянные коэффициенты:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k + \dots \quad (2)$$

Здесь многоточие обозначает совокупность членов, порядок которых относительно величин q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) больше второго. Будем предполагать, что квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k \quad (3)$$

является определенно-положительной. Тогда точка $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ и, следовательно, согласно теореме Лагранжа, положение равновесия устойчиво.

В силу устойчивости положения равновесия величины $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) будут малыми во все время движения, если достаточно малы их начальные значения. Используя малость величин $q_i, \dot{q}_i$, можно упростить дифференциальные уравнения движения системы вблизи ее положения равновесия. Для этого можно заменить полные уравнения движения приближенными, сохраняя в них

только линейные члены относительно q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и отбрасывая все нелинейные члены. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

Будем считать, что функции $a_{ik}(q_1, \dots, q_n)$ аналитические в окрестности положения равновесия, и запишем их в виде рядов

$$a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n) = a_{ik} + \dots$$

Здесь многоточие обозначает совокупность членов первого и более высоких порядков относительно q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), $a_{ik} = a_{ik}(0, 0, \dots, 0)$ — постоянные коэффициенты. Функция T запишется в виде ряда

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \dots, \quad (4)$$

где многоточие обозначает члены не ниже третьего порядка относительно q_i , $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Будем считать, что выбор обобщенных координат сделан так, что в положении равновесия определитель (18) п. 139 (при $m = n$) отличен от нуля. Тогда квадратичная форма

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (5)$$

будет определенно-положительной относительно $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Уравнения движения запишем в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Рассматривая эти уравнения при малых значениях величин q_i , $\dot{q}_i$, заменим в функции Лагранжа $L = T - \Pi$ величины T и Π их разложениями (4) и (2). Тогда получим уравнения движения в виде

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) + \dots = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где многоточием обозначена совокупность членов второго и более высоких порядков. Если их отбросить, то придем к линейной системе с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Эти линейные уравнения получаются из уравнений (6), если считать, что в функции Лагранжа величины T и Π заменены их приближенными выражениями (5) и (3). Теория малых колебаний консервативной системы вблизи устойчивого положения равновесия опирается на такую линеаризацию и рассматривает приближенные выражения (5) и (3) для T и Π как точные.

Когда говорят «малые колебания», то обычно имеют в виду движения, описываемые системой дифференциальных уравнений, полученной в результате линеаризации полных (нелинейных) уравнений движения. В случае движений в окрестности положения равновесия консервативной системы линеаризация сводится, как мы видим, к получению T и Π в виде квадратичных форм (5) и (3).

Для упрощения записи уравнения (8) удобно представить в векторно-матричной форме. Пусть

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}), \quad \Pi = \frac{1}{2} (\mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}), \quad (9)$$

и уравнения (8) запишутся в виде

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = 0. \quad (10)$$

197. Главные координаты и главные колебания. Выясним структуру решений уравнений (8) (или (10)), описывающих малые колебания в окрестности положения равновесия. Для этого рассмотрим пару квадратичных форм

$$(\mathbf{A} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q_i q_k, \quad (\mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k. \quad (11)$$

Обе эти формы определенно-положительны. Из линейной алгебры известно¹⁾, что если даже одна из форм (11) была бы определенно-положительной (за такую форму мы будем принимать первую из квадратичных форм (11)), то существует вещественная неособенная замена переменных

$$\mathbf{q} = \mathbf{U} \boldsymbol{\theta} \quad (\det \mathbf{U} \neq 0, \boldsymbol{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)), \quad (12)$$

приводящая к сумме квадратов сразу обе квадратичные формы (11):

$$(\mathbf{A} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \theta_j^2, \quad (\mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2. \quad (13)$$

¹⁾ См., например, гл. VI книги: Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975.

При этом величины λ_j с точностью до порядка следования однозначно определяются первоначальными квадратичными формами и не зависят от выбора замены переменных (12). В нашем случае все λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) положительны в силу того, что Π определено-положительна.

Отметим, что если в окрестности точки $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ координатного пространства $q_1, q_2, \dots, q_n$ ввести евклидову структуру при помощи удвоенной кинетической энергии $2T$, т. е. принять за скалярное произведение векторов u и v величину $(Au \cdot v)$, то преобразование (12) можно выбрать ортогональным в смысле этой евклидовой структуры. Это означает, что, если u_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — j -й столбец матрицы U , т. е. замена переменных (12) имеет вид

$$q = \sum_{j=1}^n \theta_j u_{j\lambda} \quad (14)$$

то выполняется условие нормировки

$$(Au_i \cdot u_j) = \delta_{ij}, \quad (15)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$).

Так как обобщенные скорости $\dot{q}_i$ и $\dot{\theta}_j$ связаны теми же соотношениями, что и обобщенные координаты q_i и θ_j :

$$\dot{q} = U\dot{\theta},$$

то в первой из формул (13) можно величины q_i заменить на $\dot{q}_i$, а величины θ_j на $\dot{\theta}_j$. В новых переменных кинетическая и потенциальная энергия имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^2. \quad (16)$$

Обобщенные координаты θ_j называются *главными* или *нормальными координатами*. В главных координатах уравнения движения (8) запишутся в виде n не связанных одно с другим уравнений второго порядка

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Так как все λ_j положительны, то каждое из этих уравнений описывает колебания гармонического осциллятора:

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Здесь $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ — частоты колебаний, c_j , α_j — произвольные постоянные.

Из (14) и (18) получаем общее решение уравнений (8) (или (10)).

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \quad (19)$$

Эта формула охватывает все решения системы (8). Пусть среди постоянных c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) отлична от нуля только одна постоянная c_k . Тогда из (19) получаем

$$\mathbf{q}_k = c_k \mathbf{u}_k \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (20)$$

Это решение описывает колебание системы, которое называют *k-м главным* или *нормальным колебанием*. Вектор $\mathbf{u}_k$ называют *амплитудным вектором k-го главного колебания*. В *k-м* главном колебании все обобщенные координаты совершают гармонические колебания с одной и той же частотой ω_k , отношение амплитуд колебаний отдельных обобщенных координат определяется отношением соответствующих компонент амплитудных векторов.

При практическом нахождении решения (19) можно поступать следующим образом. Ищем решение системы (10) в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} \sin(\omega t + \alpha).$$

Подставив это выражение для $\mathbf{q}$ в уравнение (10) и сократив затем на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим уравнение для амплитудного вектора $\mathbf{u}$

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) \mathbf{u} = 0 \quad (\lambda = \omega^2). \quad (21)$$

Чтобы это уравнение имело нетривиальное решение относительно компонент амплитудного вектора $\mathbf{u}$, надо потребовать, чтобы величина λ удовлетворяла уравнению

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) = 0. \quad (22)$$

Это уравнение называется *уравнением частот* или *вековым уравнением*. Из предыдущего изложения теории главных колебаний следует, что оно имеет только положительные решения; каждому корню λ_j этого уравнения соответствует амплитудный вектор $\mathbf{u}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), причем если какой-либо корень λ_k уравнения (22) будет кратным, то всегда можно найти ровно столько соответствующих ему линейно независимых амплитудных векторов, какова его кратность. Амплитудные векторы из уравнения (21) находятся с точностью до произвольного постоянного множителя. Их нормировка (если она требуется) производится в соответствии с условием (15).

Пример. *Малые колебания двойного маятника.* Рассмотрим двойной маятник, движущийся в вертикальной плоскости в поле тяжести (рис. 15). Потенциальная энергия маятника найдена в примере 3 п. 54:

$$\Pi = -\frac{1}{2} mgl (3 \cos \varphi + \cos \psi).$$

С другой стороны, сложив кинетические энергии двух стержней, образующих маятник, получим

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \left[\frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 \right].$$

Существует положение равновесия маятника, когда оба стержня занимают вертикальное положение, а $\varphi = \psi = 0$. В этом положении потенциальная энергия маятника минимальна и равновесие устойчиво. Исследуем малые колебания маятника вблизи этого положения равновесия.

Если отбросить несущественное постоянное слагаемое $-2mgl$ в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия $\varphi = \psi = 0$ и сохранить только члены второго порядка малости, то получим

$$\Pi = \frac{1}{2} mgl \left(\frac{3}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right).$$

Аналогично, учитывая только члены второго порядка малости в разложении кинетической энергии в ряд, имеем

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{4}{3} \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi} \dot{\psi} + \frac{1}{3} \dot{\psi}^2 \right).$$

Если ввести обозначение $\mathbf{q}' = (\varphi, \psi)$, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ в выражениях (9) будут такими:

$$\mathbf{A} = ml^2 \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = mgl \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Уравнение частот (22) может быть записано в виде

$$7\lambda^2 + 42\left(\frac{g}{l}\right)\lambda - 27\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0.$$

Оно имеет корни

$$\lambda_1 = 3\left(1 + \frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \frac{g}{l}, \quad \lambda_2 = 3\left(1 - \frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \frac{g}{l}. \quad (23)$$

Частоты ω_j главных колебаний вычисляются по формулам $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ ($j = 1, 2$).

Из уравнения (21) и условий нормировки (15) получаем следующие выражения для амплитудных векторов $\mathbf{u}_j$, отвечающих частотам ω_j ($j = 1, 2$):

$$\mathbf{u}_1 = \kappa \begin{vmatrix} -1 - \sqrt{7} \\ 5 + \sqrt{7} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \kappa \begin{vmatrix} -1 + \sqrt{7} \\ 5 - \sqrt{7} \end{vmatrix} \left(\kappa = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{3}{7m}} \right). \quad (24)$$

Таким образом, общее решение уравнений малых колебаний двойного маятника будет таким:

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \psi \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} -1 - \sqrt{7} \\ 5 + \sqrt{7} \end{vmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + c_2 \begin{vmatrix} -1 + \sqrt{7} \\ 5 - \sqrt{7} \end{vmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (25)$$

где c_j, α_j ($j = 1, 2$) — произвольные постоянные.

Первое и второе главные колебания отвечают значениям постоянных $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ и $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ соответственно. Отношения k_j ($j = 1, 2$) амплитуд колебаний углов φ и ψ в первом и втором главных колебаниях и направ-

ления отклонений стержней от вертикали характеризуются величинами

$$k_1 = -\frac{1 + \sqrt{7}}{5 + \sqrt{7}} = \frac{1 - 2\sqrt{7}}{9} \approx -0,48, \quad k_2 = -\frac{1 - \sqrt{7}}{5 - \sqrt{7}} = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{9} \approx 0,70,$$

которые называются коэффициентами форм главных колебаний. При первом главном колебании (с большей частотой ω_1) стержни в любой момент времени будут отклонены от вертикали в разные стороны (рис. 153, а), а при втором главном колебании (с меньшей частотой ω_2) — в одну и ту же сторону (рис. 153, б).

198. Колебания консервативной системы под влиянием внешних периодических сил. Пусть к точкам консервативной системы приложены внешние силы, которым отвечают обобщенные силы $Q_i = Q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Влияние этих сил на колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия удобно исследовать, если воспользоваться главными координатами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, введенными в предыдущем пункте. Силам $Q_i(t)$ в координатах q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) отвечают обобщенные силы $\Theta_i(t)$ в главных координатах θ_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Для нахождения величин $\Theta_j(t)$ приравняем для элементарной работы сил в координатах q_i и θ_j :

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^n \Theta_j \delta \theta_j \quad (26)$$

по согласию замене переменных (12)

$$q_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \theta_j, \quad \delta q_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \delta \theta_j.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \sum_{j=1}^n u_{ij} \delta \theta_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{ij} Q_i \right) \delta \theta_j. \quad (27)$$

Из равенств (26) и (27) следует, что

$$\Theta_j(t) = \sum_{i=1}^n u_{ij} Q_i(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

В нормальных координатах малые колебания консервативной системы с учетом внешних сил будут описываться уравнениями

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Пусть внешние силы $Q_i(t)$ — периодические функции времени с периодом $2\pi/\Omega$ и такие, что обобщенные силы (28) представимы в

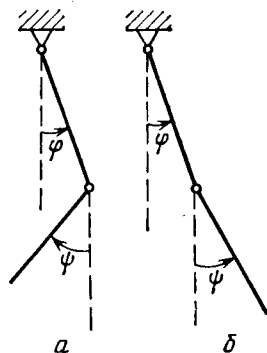


Рис. 153

виде рядов Фурье

$$\Theta_j = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (30)$$

Здесь b_{jk} , α_{jk} ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots$) — постоянные величины.

Общее решение уравнений (29) (при $k\Omega \neq \omega_j$) имеет вид

$$\theta_j = c_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^*(t), \quad (31)$$

где c_j , α_j — произвольные постоянные, а через $\theta_j^*(t)$ обозначены слабые

$$\theta_j^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{jk}}{\omega_j^2 - k^2 \Omega^2} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (32)$$

которые появились в общем решении из-за наличия внешних периодических сил.

Из (14) и (31) получаем

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \sum_{j=1}^n \theta_j^*(t) \mathbf{u}_j. \quad (33)$$

Первая сумма в (33) представляет свободные колебания, а вторая — вынужденные колебания системы, возникающие из-за влияния внешних периодических сил.

Если же при каком-либо значении числа k окажется, что $k\Omega = \omega$, для некоторого j , то при $b_{jk} \neq 0$ решение в форме (31), (32) непригодно, так как в сумме (32) будет слагаемое с нулевым знаменателем. Говорят, что в этом случае имеет место резонанс в вынужденных колебаниях системы.

Каким будет решение уравнения (29) при резонансе? Для примера рассмотрим одно уравнение вида

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = a \sin \omega t. \quad (34)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = c \sin(\omega t + \alpha) + \theta^*(t), \quad (35)$$

где c , α — произвольные постоянные, а

$$\theta^*(t) = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (36)$$

Функция $\theta^*(t)$ является неограниченной. Колебания, описываемые уравнением (34), уже не будут малыми. А потому для описания движения вблизи положения равновесия уравнения (34) должны быть заменены другими уравнениями, учитывающими отброшенные при линеаризации нелинейные члены в полных уравнениях движения. Так в данном конкретном примере мы приходим к необходимости теории нелинейных колебаний.

Пример. Плоские колебания твердого тела на эллиптической орбите. Дифференциальное уравнение, описывающее плоские движения твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле, имеет вид (см. п. 128)

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \varphi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\varphi}{dv} + 3 \frac{A-B}{C} \sin \varphi \cos \varphi = 2e \sin v, \quad (37)$$

где A и B — моменты инерции тела относительно его главных центральных осей инерции Ox и Oy , которые для плоских движений все время расположены в плоскости орбиты, C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости орбиты; φ — угол между осью Oy и осью OZ , направленной вдоль радиуса-вектора центра масс тела относительно притягивающего центра, e — эксцентриситет орбиты ($0 \leq e < 1$).

На круговой орбите существует положение равновесия твердого тела в орбитальной системе координат, отвечающее решению $\varphi = 0$ уравнения (37) при $e = 0$. При условии $A > B$ положение равновесия устойчиво. Предполагая это условие выполненным, рассмотрим малые плоские колебания твердого тела вблизи положения $\varphi = 0$, вызываемые эллиптичностью орбиты. Эксцентриситет орбиты считаем малой величиной.

Линеаризуя уравнение (37), получим

$$(1 + e \cos v) \frac{d^2 \varphi}{dv^2} - 2e \sin v \frac{d\varphi}{dv} + \omega_0^2 \varphi = 2e \sin v. \quad (38)$$

Здесь введено обозначение $\omega_0^2 = 3 \frac{A-B}{C}$. Так как моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника $A - B \leq C$ и по предположению $A > B$, то

$$0 < \omega_0^2 \leq 3. \quad (39)$$

Вынужденные колебания спутника, описываемые дифференциальным уравнением (38), ищем в виде ряда по степеням e

$$\varphi^* = e\varphi_1 + e^2\varphi_2 + \dots \quad (40)$$

Подставив это разложение в уравнение (38) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях e в его обеих частях, получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения для функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Для функции φ_1 имеем уравнение

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dv^2} + \omega_0^2 \varphi_1 = 2 \sin v. \quad (41)$$

Из (40), (41) находим решение, описывающее вынужденные колебания тела, в виде

$$\varphi^* = \frac{2e}{\omega_0^2 - 1} \sin v + \dots \quad (42)$$

Эти колебания вызваны неравномерностью движения центра масс тела по эллиптической орбите. В динамике спутников они носят название *эксцентриситетных колебаний*.

Утверждение о существовании эксцентриситетных колебаний (42) мы делаем здесь без обоснования. Можно, однако, строго показать¹⁾, что при $\omega_0 \neq 1$

¹⁾ См.: Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. — М.: ВИНТИ, 1978. — (Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства»; Т. 11).

нелинейное уравнение (37) действительно имеет решение, аподитическое по ε при достаточно малых ε и переходящее при $\varepsilon = 0$ в положение равновесия $\varphi = 0$, причем разложение этого решения в ряд начинается с члена первой степени по ε , явно выписанного в формуле (42).

При $\omega_0 = 1$ имеет место резонанс в вынужденных колебаниях. Решение (42), полученное при помощи линейризации, не имеет смысла при резонансе, и для исследования движения тела вблизи положения $\varphi = 0$ надо использовать нелинейное уравнение движения (37). Будем считать, что ω_0 мало отличается от единицы:

$$\omega_0 = 1 + \mu \quad (0 \leq |\mu| \ll 1). \quad (43)$$

В уравнении (37) сделаем ¹⁾ замену переменных $\varphi = \varepsilon \xi$, где $\varepsilon = \varepsilon^{1/3}$. Подставив это значение φ в уравнение (37) и представив обе его части в виде рядов по степеням ε , получим (после деления обеих частей на ε) такое уравнение:

$$\frac{d^2 \xi}{dv^2} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon^2 \left(\frac{2}{3} \omega_0^2 \xi^3 + 2 \sin v \right) + \dots, \quad (44)$$

где многоточие обозначает члены выше второго порядка малости относительно ε .

Для приближенного исследования этого уравнения будем применять теорию возмущений (см. § 6 гл. XI). Положим

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} q, \quad \frac{d\xi}{dv} = \sqrt{\omega_0} p. \quad (45)$$

Тогда уравнение (44) может быть записано в эквивалентной форме в виде канонических уравнений с функцией Гамильтона (q — координата, p — импульс)

$$H = \frac{1}{2} \omega_0 (q^2 + p^2) - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{6} q^4 + \frac{2 \sin v}{\sqrt{\omega_0}} q \right) + \dots \quad (46)$$

Введем новые канонически сопряженные переменные Q, P при помощи унитарного канонического преобразования (см. пример 6 п. 170)

$$q = \sqrt{2P} \sin Q, \quad p = \sqrt{2P} \cos Q. \quad (47)$$

Тогда

$$H = \omega_0 P - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{12} P^2 (3 - 4 \cos 2Q + \cos 4Q) + \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}} [\cos(Q-v) - \cos(Q+v)] \right\} + \dots \quad (48)$$

Для упрощения уравнений движения введем переменные Q^*, P^* при помощи близкого к тождественному унитарного канонического преобразования $Q, P \rightarrow Q^*, P^*$, задаваемого при помощи производящей функции

$$QP^* + \varepsilon^2 S_2(Q, P^*, v) + \dots$$

Новая функция Гамильтона H^* определяется по формуле (см. п. 174)

$$H^* = H + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial v} + \dots,$$

¹⁾ Мы не даем здесь обоснования исследования колебаний при резонансе и в случае, близком к резонансному. О строгом обосновании излагаемой процедуры см. статью: Маркеев А. П., Чеховская Т. Н. О резонансных периодических решениях гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // ИММ.— 1982.— Т. 46, вып. 1.— С. 27—33.

в правой части которой старые переменные Q, P должны быть заменены на их выражения через новые переменные Q^*, P^* , получаемые из равенств

$$Q^* = Q + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial P^*} + \dots, \quad P = P^* + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial Q} + \dots \quad (49)$$

Вычисления показывают, что если функцию S_2 взять в виде

$$S_2 = -\sqrt{\frac{2P^*}{\omega_0}} \frac{1}{\omega_0 + 1} \sin(Q + \nu) - \frac{1}{48\omega_0} P^{*2} (8 \sin 2Q - \sin 4Q),$$

то

$$H^* = \omega_0 P^* - \varepsilon^2 \left[\frac{1}{4} P^{*2} + \sqrt{\frac{2P^*}{\omega_0}} \cos(Q^* - \nu) \right] + \dots \quad (50)$$

Сделаем еще одну каноническую замену $Q^*, P^* \rightarrow \Psi, R$ по формулам

$$Q^* = \Psi + \nu, \quad P^* = R. \quad (51)$$

Тогда, учитывая равенство (43) и пренебрегая членами выше второго порядка малости относительно ε и μ , получаем приближенное выражение для новой функции Гамильтона в виде

$$\mathcal{H} = \mu R - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} R^2 + \sqrt{2R} \cos \Psi \right). \quad (52)$$

Соответствующая приближенная система дифференциальных уравнений второго порядка, описывающая плоское движение твердого тела при резонансе или в случае, близком к резонансному, имеет вид

$$\frac{d\Psi}{d\nu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = \mu - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} R + \frac{1}{\sqrt{2R}} \cos \Psi \right), \quad \frac{dR}{d\nu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi} = -\varepsilon^2 \sqrt{2R} \sin \Psi. \quad (53)$$

Эта система уравнений имеет первый интеграл $\mathcal{H} = h = \text{const}$ и, следовательно, интегрируется в квадратурах.

Если $\omega_0 = 1$ (т. е. $\mu = 0$), то при описании движения тела в рамках ли-ценаризованных уравнений движения мы получаем, что отклонение тела от его равновесного положения $\varphi = 0$ неограниченно возрастает со временем, так как уравнение (41) имеет частное решение вида (36) (при $\omega = \omega_0, a = 2$). При нелинейной трактовке задачи о движении твердого тела при резонансе ситуация иная. В самом деле, пусть в начальный момент $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$. Тогда (с погрешностью, порядок которой не ниже чем ε^3) и $R = 0$ при $t = 0$. Следовательно, в интеграле $\mathcal{H} = h$ постоянная h равна нулю и во все время движения

$$\frac{1}{4} R^2 + \sqrt{2R} \cos \Psi = 0.$$

Учитывая, что $|\cos \Psi| \leq 1$, получаем отсюда, что $R \leq R_{\max} = 2^{5/3}$. Если учесть цепочку замен переменных, при помощи которых исходное уравнение движения (37) приведено к приближенной системе (53), то получим, что отклонение угла φ от его равновесного значения $\varphi = 0$ не превосходит величины $\sqrt{2R_{\max}} e^{1/3} = 2\sqrt[3]{2e}$.

Решения $R = R_0 = \text{const}, \Psi = \Psi_0 = \text{const}$ системы (53) отвечают 2π -периодическим колебаниям спутника в исходных переменных. Из (53) следует, что Ψ_0 может равняться только 0 или π , а величина R_0 может быть найдена

из уравнения третьей степени

$$u^3 + 3cu^2 + 2b = 0 \quad (u = \sqrt[3]{2R_0} \cos \Psi_0). \quad (54)$$

Здесь

$$c = -\frac{4\mu}{3e^2} = -\frac{4\mu}{3e^{2/3}}, \quad b = 2.$$

Уравнение (54) имеет один или три вещественных корня в зависимости от того, положителен или отрицателен дискриминант $D = b^2 + c^3$ этого уравнения¹⁾. Отсюда следует, что при выполнении неравенства

$$e > \frac{4\sqrt[4]{3}}{9} \mu^{3/2} \quad (55)$$

существует одно, а при обратном знаке в неравенстве (55) — три периодических движения твердого тела, переходящих при $e = 0$ в его равновесное положение $\varphi = 0$ в орбитальной системе координат²⁾.

Отметим, что при точном резонансе, когда $\mu = 0$, существует только одно 2π-периодическое колебание тела и, согласно (54), амплитуда этого колебания равна $\sqrt[3]{4e}$.

¹⁾ См. гл. 9 книги: Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1975.

²⁾ Условие (55) иным путем получено в гл. 2 монографии: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.

Глава XIV. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Основные понятия и определения

199. Уравнения возмущенного движения. Определение устойчивости. Пусть уравнения движения механической системы представлены в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_m, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

правые части которых удовлетворяют условиям существования и единственности решения.

Рассмотрим движение механической системы, которому отвечает некоторое частное решение системы (1)

$$y_i^* = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

при начальных условиях

$$y_{i0} = f_i(t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3)^1$$

Нас интересует вопрос о движении системы при отклонении начальных условий y_{i0} от значений (3). Решением этого вопроса занимается теория устойчивости движения, элементы которой излагаются в этой главе.

Движение системы, описываемое функциями (2), будем называть *невозмущенным движением*. Все другие движения механической системы, возможные для нее при тех же силах, что и рассматриваемое движение, описываемое формулами (2), будем называть *возмущенными движениями*. Разности

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

значений y_i для возмущенного и невозмущенного движений называются *возмущениями*.

Если в уравнениях (1) сделать замену переменных по формулам (4), то получим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5)$$

которые называются *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*. Очевидно, что

$$X_i = Y_i(x_1 + f_1(t), x_2 + f_2(t), \dots, x_m + f_m(t), t) - \\ - Y_i(f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t), t).$$

Уравнения (5) имеют частное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), отвечающее невозмущенному движению (2). Если функции X_i явно не зависят от t , то невозмущенное движение будем называть *установившимся*, в противном случае — *неустановившимся*.

Примем следующее определение Ляпунова. Невозмущенное движение называется *устойчивым* по отношению к переменным y_i ($i = 1, 2, \dots, m$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени t_0 выполняются неравенства

$$|x_i(t_0)| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (6)$$

при всех $t > t_0$ выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Дадим еще определение асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова. Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к переменным y_i ($i = 1, 2, \dots, m$), если оно устойчиво и число δ можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам (6), будут выполняться условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (8)$$

200. Функции Ляпунова. Наиболее эффективным методом исследования устойчивости движения является *прямой метод Ляпунова*. Этот метод не предполагает нахождения тех или иных решений уравнений возмущенного движения, а связан с отысканием некоторых функций V переменных $x_1, x_2, \dots, x_m, t$ и изучением свойств самих этих функций и их производных. Функции V будем в дальнейшем называть *функциями Ляпунова*. В основе прямого метода Ляпунова лежат соображения, использованные Дирихле в его доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы (см. п. 193).

Для простоты будем изучать только установившиеся движения. Функции $X_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в уравнениях возмущенного движения (5) считаем непрерывными в области

$$|x_i| < H \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (9)$$

где H — некоторая постоянная, и такими, что уравнения (5) при начальных значениях x_{i0} из области (9) допускают единственное решение.

В области $|x_i| < h$ ($i = 1, 2, \dots, m$), где h — достаточно малое положительное число, будем рассматривать функции $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, предполагая их непрерывно дифференцируемыми, однозначными и обращающимися в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

Производной dV/dt функции V в силу уравнений возмущенного движения (5) называется выражение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i. \quad (10)$$

Следовательно, dV/dt будет также функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, которая непрерывна в области $|x_i| < h$ и обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

Кроме того, функции V могут обладать более специальными свойствами. Введем некоторые определения.

Функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ назовем *определенно-положительной* в области $|x_i| < h$, если всюду в этой области, кроме начала координат (где функция V равна нулю), выполняется неравенство $V > 0$. Если же выполняется неравенство $V < 0$, то функция V называется *определенно-отрицательной*. В том и другом случае функция V называется *знакоопределенной*.

Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать значения только одного знака ($V \geq 0$ или $V \leq 0$), но может обращаться в нуль не только в начале координат, то она называется *знакопостоянной* (*положительной* или *отрицательной*).

Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной* в этой области.

Например, при $m=2$ функция $V = x_1^2 - x_2^2$ знакопеременна, а функция $V = x_1^2 + x_2^2$ определено-положительна; функция же $V = x_1^2$ знакопостоянна, так как она обращается в нуль на оси Ox_2 , а вне этой оси положительна.

Как узнать, будет функция V знакоопределенной или нет? Если V представляет собой квадратичную форму, то знакоопределенность ее можно установить при помощи известного критерия Сильвестра. Если V — форма четной степени, то она, очевидно, будет знакопеременной функцией. В приложениях V часто бывает аналитической функцией в области $|x_i| < h$, если h — достаточно малая величина. В таких случаях при решении вопроса о знакоопределенности функции бывает полезно следующее легко доказываемое утверждение¹⁾: если величина h достаточно мала, то в области $|x_i| < h$ знакоопределенность и знакопеременность формы сохраняются при добавлении к ней любой совокупности членов более высокого порядка.

При достаточно малых значениях $|c|$ поверхность $V(x_1, x_2, \dots, x_m) = c$, где V — знакоопределенная функция, является замкнутой поверхностью, содержащей внутри себя начало координат. Для доказательства примем для определенности, что V определено-по-

¹⁾ См., например, § 7 книги: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.

ложительна, и обозначим a точную нижнюю грань функции V на границе области $|x_i| < h$. Так как функция V определено-положительна, то $a > 0$. Итак, на границе области $|x_i| < h$ $V \geq a$. Рассмотрим теперь значения функции V на непрерывной кривой, соединяющей

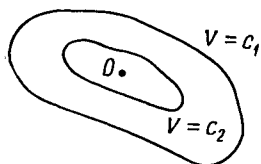


Рис. 154

начала координат с какой-либо точкой, лежащей на границе области $|x_i| < h$. В начале этой кривой $V=0$, а в конце кривой значения функции не меньше чем a . В силу непрерывности функции V в некоторой точке рассматриваемой кривой V обязательно принимает значение c , если только $c < a$, что и будем предполагать. Это означает, что выбранная кривая пересекает поверхность $V=c$. Так как рассматриваемая кривая может быть произвольной, то отсюда следует, что поверхность $V=c$ замкнута и окружает начало координат.

Если V — определено-положительная функция и $c_1 > c_2$, то поверхность $V=c_2$ находится внутри поверхности $V=c_1$, причем, в силу однозначности функции V , эти поверхности не имеют общих точек (рис. 154). Если $c \rightarrow 0$, то семейство замкнутых поверхностей $V=c$ стягивается в точку, совпадающую с началом координат.

Отметим, что если V будет знакопостоянной или знакопеременной функцией, то поверхности $V=c$ при достаточно малых c разомкнуты.

§ 2. Основные теоремы прямого метода Ляпунова

201. Теорема Ляпунова об устойчивости движения. В этом параграфе рассмотрены теоремы, составляющие основу прямого метода Ляпунова в теории устойчивости движения. Будем изучать только установившиеся движения. Сначала рассмотрим теорему Ляпунова об устойчивости.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V , производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V , или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. Пусть, например, V определено-положительна. Тогда в окрестности

$$|x_i| < h \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

где h — достаточно малая величина, точка $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ будет точкой строгого локального минимума функции V . Так как $\dot{V} \leq 0$, то на траекториях уравнений возмущенного движения в области (1) V будет невозрастающей функцией. Дальнейшее доказательство сводится к почти дословному повторению рассуждений, проведенных в п. 193 при доказательстве теоремы Лагранжа.

Теорема Ляпунова дает достаточные условия устойчивости движения. Применение этой теоремы требует знания функции V , обладающей вполне определенными свойствами. Общих методов построения таких функций нет. Однако во многих практически важных случаях функцию V можно построить, если известны первые интегралы уравнений возмущенного движения. Например, при доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы в качестве функции V годилась полная механическая энергия системы E .

Пусть $U_1, U_2, \dots, U_k$ — первые интегралы уравнений возмущенного движения. Без ограничения общности можно считать, что функции $U_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) обращаются в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Пусть ни одна из функций U_j не является знакоопределенной. Будем искать¹⁾ функцию Ляпунова в виде связки первых интегралов U_j ($j = 1, 2, \dots, k$):

$$V = \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_k U_k + \mu_1 U_1^2 + \dots + \mu_k U_k^2,$$

где λ_j, μ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — неопределенные постоянные. Ясно, что V будет первым интегралом уравнений возмущенного движения. Если постоянные λ_j, μ_j удастся выбрать так, чтобы функция V была определенно-положительной, то она будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости движения. При этом в тех случаях, когда первые интегралы U_j ($j = 1, 2, \dots, k$) могут быть найдены из каких-либо общих соображений (например, при помощи основных теорем динамики), отпадает необходимость составления самих уравнений возмущенного движения, что существенно упрощает исследование.

Примеры. 1. Устойчивость стационарных вращений твердого тела в случае Эйлера. Как показано в п. 99, при стационарных вращениях твердого тела в случае Эйлера вращение происходит с постоянной по величине угловой скоростью вокруг любой из главных осей инерции тела для неподвижной точки. Изучим устойчивость движения, в котором

$$p = \omega = \text{const}, \quad q = 0, \quad r = 0. \quad (2)$$

Движение (2) соответствует вращению вокруг оси, отвечающей моменту инерции A . Как показано в п. 98, динамические уравнения Эйлера имеют два первых интеграла

$$U_1 = 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \quad U_2 = K_0^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2. \quad (3)$$

Введем возмущения x, y, z по формулам

$$p = \omega + x, \quad q = y, \quad r = z. \quad (4)$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь первые интегралы

$$U_1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A\omega x, \quad U_2 = A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 + 2A^2 \omega x. \quad (5)$$

¹⁾ См.: Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. По вопросу о методе интегральных связей Четаева см. также работу: Пожаряцкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. — 1958. — Т. 22, вып. 2. — С. 145—154.

Последние выражения получены путем подстановки p, q, r из (4) в интегралы (3) и отбрасыванием несущественных постоянных в получившихся выражениях для U_1 и U_2 .

Функцию V возьмем в виде

$$V = U_1^2 + U_2^2. \quad (6)$$

Ясно, что значения функции V неотрицательны при любых x, y, z . Покажем, что если A — наименьший или наибольший из моментов инерции, то функция V определено-положительна. Для этого достаточно показать, что при малых x, y, z система уравнений

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0 \quad (7)$$

имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Из системы (7) следует, что

$$AU_1 - U_2 \equiv B(A - B)y^2 + C(A - C)z^2 = 0.$$

Если A — наименьший или наибольший из моментов инерции, то последнее равенство возможно только когда $y = z = 0$. Из (7) тогда следует, что $x = 0$ или $x = -2\omega$ и при достаточно малых x, y, z система (7) имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Следовательно, стационарные вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси наименьшего или наибольшего из моментов инерции устойчивы в смысле Ляпунова по отношению к возмущениям величин p, q, r . Этот факт хорошо иллюстрируется картиной расположения полюсов на эллипсоиде инерции (см. рис. 99): вблизи осей Ox и Oz эллипсоида инерции, отвечающих наибольшему и наименьшему моментам инерции, полюсы являются замкнутыми кривыми, охватывающими соответствующие оси. Напротив, вблизи оси Oy , отвечающей среднему по величине моменту инерции, полюсы не охватывают этой оси и при малом возмущении стационарного вращения вокруг оси Oy вектор угловой скорости с течением времени покидает окрестность этой оси. Ниже в п. 203 мы строго докажем неустойчивость стационарного вращения вокруг оси среднего по величине момента инерции тела.

2. *Устойчивость вращения тяжелого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа*¹⁾. Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается системой дифференциальных уравнений (32), (35) п. 105. В случае Лагранжа $A = B$, $a = b = 0$ и уравнения движения имеют четыре первых интеграла

$$\begin{aligned} U_1 &= A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2Pc\gamma_3 = \text{const}, \\ U_2 &= A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = \text{const}, \\ U_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ U_4 &= r = \text{const}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения движения имеют частное решение

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0 = \text{const}, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad (9)$$

которому отвечает вращение твердого тела вокруг вертикально расположенной оси Oz с постоянной угловой скоростью r_0 . Рассмотрим устойчивость такого движения тела по отношению к возмущениям величин $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Положим

$$p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = r_0 + x_3, \quad \gamma_1 = x_4, \quad \gamma_2 = x_5, \quad \gamma_3 = 1 + x_6.$$

¹⁾ См.: Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // ПММ.— 1954.— Т. 18, вып. 1.— С. 123—124.

Отсюда и из (8) получаем, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} U_1 &= A(x_1^2 + x_2^2) + C(x_3^2 + 2r_0 x_3) + 2Pc x_6 = \text{const}, \\ U_2 &= A(x_1 x_4 + x_2 x_5) + C(x_3 x_6 + x_3 + r_0 x_6) = \text{const}, \\ U_3 &= x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_6 = \text{const}, \\ U_4 &= x_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для получения условий устойчивости ищем функцию Ляпунова V в виде квадратичной связи первых интегралов (10) (λ — неопределенная вещественная постоянная)

$$V = U_1 + 2\lambda U_2 - (Pc + Cr_0\lambda)U_3 + \frac{C(C-A)}{A}U_4^2 - 2(r_0 + \lambda)CU_4.$$

Функцию V можно представить в виде суммы трех квадратичных форм:

$$V = f(x_1, x_4) + f(x_2, x_5) + f\left(\frac{C}{A}x_3, x_6\right), \quad (11)$$

где

$$f(x, y) = Ax^2 + 2\lambda Axy - (Pc + Cr_0\lambda)y^2. \quad (12)$$

Из критерия Сильвестра получаем, что квадратичная форма (12) определительно-положительна при выполнении неравенства

$$A\lambda^2 + Cr_0\lambda + Pc < 0, \quad (13)$$

которое для вещественных λ может удовлетворяться только тогда, когда

$$C^2 r_0^2 > 4APc. \quad (14)$$

При условии (14) постоянную λ можно подобрать так, чтобы удовлетворялось неравенство (13). Тогда квадратичные формы в выражении (11) будут определительно-положительными, каждая относительно «своих» переменных, а функция V будет определительно-положительна относительно всех переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Таким образом, согласно теореме Ляпунова, условие (14) будет достаточным для устойчивости движения (9) по отношению к возмущениям величин $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Условие (14) называют *условием Маиевского — Четаева*. Отметим, что если $c < 0$ («висящее» твердое тело; центр масс расположен ниже точки подвеса), то условие (14) всегда выполнено, а если $c > 0$, то для выполнения условия (14) требуется, чтобы угловая скорость вращения тела вокруг вертикали превосходила величину, равную $\frac{\sqrt{4APc}}{C}$.

202. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Ляпунов получил следующую теорему, дающую достаточные условия асимптотической устойчивости движения.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V , то несозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Прежде чем доказывать эту теорему, обратим внимание на дополнительное, по сравнению с теоремой предыдущего пункта, условие, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущен-

ного движения. Это условие состоит в том, что производная $\dot{V}$ должна быть знакоопределенной функцией противоположного с V знака.

В предыдущем же пункте функция $\dot{V}$ была лишь знакопостоянной.

Переходя к доказательству, заметим сначала, что если условия сформулированной теоремы выполнены, то выполнены и условия теоремы Ляпунова из предыдущего пункта, а, значит, невозмущенное движение устойчиво. Согласно определению асимптотической устойчивости, нам надо только доказать, что всякое возмущенное движение, для которого начальные возмущения достаточно малы, асимптотически приближается к невозмущенному, т. е. что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0. \quad (15)$$

Без ограничения общности будем считать, что функция V определенно-положительна; тогда в области (1) $V \geq 0$, а $V \leq 0$, причем знаки равенства возможны только при $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Рассмотрим какое-либо возмущенное движение, которому отвечают настолько малые начальные значения $x_{i0} = x_i(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), что поверхность $V = V_0$, где $V_0 = V(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$, лежит в области

$$|x_i| < \varepsilon, \quad (16)$$

где $\varepsilon < h$. Такой выбор величины x_{i0} всегда возможен ввиду непрерывности функции V . Покажем, что тогда возмущенные движения $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) удовлетворяют условиям (15), т. е. возмущенное движение асимптотически устойчиво.

Действительно, при $\varepsilon < h$ в области (16) функция $V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ остается отрицательной, не обращаясь в нуль ни при каких значениях t . Это следует из того, что, в силу единственности решения уравнений возмущенного движения при заданных начальных условиях, функции $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) не могут все одновременно обратиться в нуль при каком-либо значении $t = t_*$; в противном случае было бы два разных решения с нулевыми значениями при $t = t_*$: рассматриваемое и тривиальное

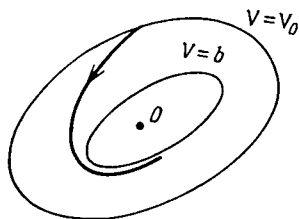


Рис. 155

$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$. Так как $\dot{V} < 0$, то функция $V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ монотонно убывает, оставаясь положительной. Но так как функция V ограниченная, то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) = b \geq 0.$$

В m -мерном пространстве $x_1, x_2, \dots, x_m$ траектория уравнений возмущенного движения стремится к поверхности $V = b$, оставаясь вне ее (рис. 155).

Покажем, что $b = 0$, т. е. поверхность $V = b$ вырождается в точку $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ и, следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Предположим обратное, т. е. что $b \neq 0$. Пусть $-d$ — точная верхняя грань функции $\dot{V}$ в замкнутой области, границами которой являются поверхности $V = b$ и $V = V_0$, т. е. в этой области

$$\dot{V} \leq -d. \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) = V_0 + \int_{t_0}^t \dot{V} dt \leq V_0 - d(t - t_0), \quad (18)$$

но это невозможно, так как при выполнении неравенства (18) определено-положительная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ для достаточно больших t должна была стать отрицательной. Противоречие доказывает теорему.

Пример. Асимптотическая устойчивость равновесия твердого тела, имеющего неподвижную точку в среде с сопротивлением. Пусть тело вращается вокруг неподвижной точки O в среде, создающей момент сопротивления

$$M_0 = -f(\omega) \cdot \omega, \quad (19)$$

где $f(\omega) > 0$. Если существуют другие силы, приложенные к твердому телу, то их главный момент относительно точки O считаем равным нулю. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= -f(\omega) p, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= -f(\omega) q, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= -f(\omega) r. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (20) имеют частное решение $p = q = r = 0$, отвечающее покою тела. Рассмотрим устойчивость этого частного движения тела по отношению к переменным p, q, r .

Так как в невозмущенном движении $p = q = r = 0$, то уравнения (20) будут дифференциальными уравнениями возмущенного движения. В качестве функции Ляпунова возьмем кинетическую энергию тела

$$V = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (21)$$

Для производной функции V получаем выражение

$$\dot{V} = -f(\omega) (p^2 + q^2 + r^2). \quad (22)$$

Так как V — определено-положительная, а $\dot{V}$ — определено-отрицательная функции, то, согласно теореме Ляпунова, равновесие твердого тела в среде, создающей момент сопротивления (9), асимптотически устойчиво по отношению к переменным p, q, r .

203. Теоремы о неустойчивости. В этом пункте рассмотрены три теоремы о неустойчивости движения, полученные Ляпуновым и Четаевым. Исторически сначала были получены две теоремы Ляпунова. Эти теоремы были обобщены Четаевым, получившим теорему, которая нашла широкое применение при решении задачи об устойчивости в конкретных задачах механики, а также в теоретических исследованиях вопросов устойчивости. Мы сначала изложим теорему Четаева и затем выведем из нее обе теоремы Ляпунова о неустойчивости движения.

Переходя к изложению теорем, заметим, что для обнаружения неустойчивости невозмущенного движения достаточно установить существование хотя бы одной траектории уравнений возмущенного движения, отвечающей сколь угодно малым значениям начальных возмущений и покидающей в некоторый момент времени окрестность начала координат, определяемую неравенствами (1), в которых h — некоторая заданная величина.

Введем определение. Областью $V > 0$ назовем какую-либо область окрестности (1), в которой $V(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0$. Поверхность $V = 0$ назовем границей области $V > 0$.

Теорема 1 (теорема Четаева о неустойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности (1) существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

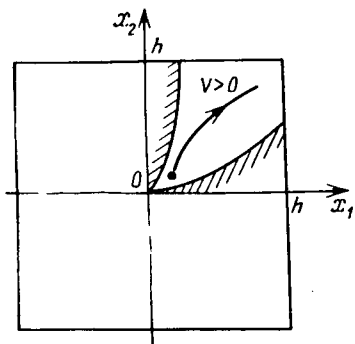


Рис. 156

Доказательство. Зададимся окрестностью (1) начала координат. Выберем начальную точку $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$ какой-либо траектории уравнений возмущенного движения в области $V > 0$. Так как граница области $V > 0$ проходит через точку $x_1 = x_2 = \dots$

$\dots = x_m = 0$, то начальную точку можно взять сколь угодно близко к началу координат (см. рис. 156, где $m = 2$).

Так как по условию теоремы в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ положительна, то вдоль выбранной траектории функция V монотонно возрастает. Следовательно, при $t > t_0$ будем иметь

$$V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) > V_0 > 0,$$

где $V_0 = V(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$. Поэтому траектория, начавшаяся в точке $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$, не может выйти из области $V > 0$ через ее границу $V = 0$. Покажем, что с течением времени траектория вый-

дет из окрестности (1). Предположим обратное, т. е. что траектория при всех t остается внутри окрестности (1). Но тогда она должна находиться в области $V > 0$. Но это невозможно. Действительно, функция V , как непрерывная и не зависящая явно от t , будет в области (1) при достаточно малых h ограничена, т. е.

$$V \leq L, \quad (23)$$

где L — некоторое положительное число. В области G , являющейся пересечением областей $V > 0$ и $V > V_0$, функция $\dot{V}$ положительна и тоже ограничена. Пусть l — точная нижняя грань функции $\dot{V}$ в этой области. Тогда при всех $t > t_0$

$$\dot{V} \geq l > 0. \quad (24)$$

Отсюда следует, что

$$V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \geq V_0 + l(t - t_0),$$

т. е. с течением времени функция V неограниченно возрастает, а это противоречит неравенству (23). Противоречие доказывает теорему.

Функцию V , удовлетворяющую теореме Четаева о неустойчивости, называют *функцией Четаева*.

*Пример. Неустойчивость стационарного вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси среднего по величине момента инерции*¹⁾. Рассмотрим устойчивость вращения (2) твердого тела в случае Эйлера, предполагая, что ось вращения (2) твердого тела в случае Эйлера, предполагая, что ось вращения отвечает среднему по величине главному моменту инерции тела для неподвижной точки O . Для определенности будем считать, что $C > A > B$ и $\omega > 0$.

Введя возмущения x, y, z по формулам (4), из динамических уравнений Эйлера получим дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде

$$\dot{x} = \frac{B-C}{A} yz, \quad \dot{y} = \frac{C-A}{B} (\omega + x)z, \quad \dot{z} = \frac{A-B}{C} (\omega + x)y. \quad (25)$$

Производная функции $V = yz$ в силу уравнений (25) будет такой:

$$\dot{V} = (\omega + x) \left(\frac{C-A}{B} z^2 + \frac{A-B}{C} y^2 \right). \quad (26)$$

Если $\omega + x > 0$, то в области $V > 0$, определяемой неравенствами $y > 0, z > 0$, производная $\dot{V}$ положительна. На основании теоремы Четаева отсюда следует вывод о неустойчивости вращения тела вокруг оси, отвечающей среднему по величине моменту инерции.

Теперь получим теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Теорема 2 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, а сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с $\dot{V}$ знака, то невозмущенное движение неустойчиво.*

¹⁾ См. книгу Н. Г. Четаева, упомянутую в ссылке на с. 371.

Для доказательства достаточно заметить, что при условиях теоремы 2 выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Действительно, пусть функция $\dot{V}$ определено-положительна. Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной функцией, противоположного с V знака, существует область $V > 0$, расположенная сколь угодно близко к началу координат, и в этой области $\dot{V} > 0$.

Теорема 3 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что ее производная в силу этих уравнений в области (1) может быть представлена в виде*

$$\dot{V} = \kappa V + W, \quad (27)$$

где κ — положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль, или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Как и в предыдущем случае, для доказательства теоремы 3 достаточно проверить, что при выполнении ее условий выполняются также и условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Если W тождественно равна нулю, то из (27) сразу следует, что функция $\dot{V}$ положительна в области $V > 0$, которая обязательно существует в сколь угодно малой окрестности начала координат (при необходимости, когда, например, функция V определено-отрицательна, надо вместо V взять функцию $-V$). Следовательно, если $W \equiv 0$, то условия теоремы Четаева выполнены.

Пусть теперь W не равна тождественно нулю и для определенности будем ее считать знакопостоянной (положительной). Тогда, в силу того, что V не является знакопостоянной, противоположного с W знака, в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$. Но из (27) при $W \geq 0$ следует, что во всей окрестности (1)

$$\dot{V} \geq \kappa V.$$

Следовательно, в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ положительна. Поэтому и в этом случае условия теоремы Четаева выполнены.

§ 3. Устойчивость по первому приближению

204. Постановка задачи. Будем рассматривать устойчивость установившихся движений. Дифференциальные уравнения возмущенного движения запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X(x), \quad (1)$$

где x — вектор-столбец, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$; A — постоянная квадратная матрица m -го порядка; X — вектор-функция от $x_1, x_2, \dots, x_m$, $X' = (X_1, X_2, \dots, X_m)$; функции X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) будем считать аналитическими в окрестности начала координат $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$, причем их разложения в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка малости относительно $x_1, x_2, \dots, x_m$.

В приложениях вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется при помощи уравнений первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2)$$

которые получаются из полных уравнений возмущенного движения (1), если в последних отбросить нелинейные относительно $x_1, x_2, \dots, x_m$ члены.

Рассмотрим уравнения (2) подробнее. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — корни характеристического уравнения¹⁾

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (3)$$

а h_j — собственный вектор матрицы A , отвечающий корню λ_j .

Если матрица A приводится к диагональной форме, то существуют m линейно независимых собственных векторов и общее решение системы (1) имеет вид²⁾

$$x = \sum_{j=1}^m c_j h_j e^{\lambda_j t} \quad (4)$$

где c_j — произвольные постоянные.

Если же матрица A к диагональной форме не приводится, то общее решение системы (2) будет записываться в виде

$$x = \sum_{j=1}^m c_j k_j e^{\lambda_j t}, \quad (5)$$

где компоненты векторов k_j являются многочленами относительно t . Например, общее решение системы

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Если бы уравнения возмущенного движения были линейными, то по их общему решению, (4) или (5), вопрос об устойчивости невозмущенного движения решался бы очень просто; в частности, не-

¹⁾ Среди величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ могут быть и равные.

²⁾ См., например, гл. 2 учебника: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1970.

обходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости была бы отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения; при наличии же хотя бы одного корня с положительной вещественной частью движение было бы неустойчивым.

Но, как правило, уравнения возмущенного движения нелинейны. Поэтому возникает задача об определении условий, при которых выводы об устойчивости, полученные из анализа уравнений первого приближения (2), справедливы и для полных уравнений возмущенного движения (1) при любых нелинейных членах $X_1, X_2, \dots, X_m$. Эта задача была полностью решена Ляпуновым.

205. Теорема об устойчивости по первому приближению. Один из основных результатов, полученных Ляпуновым при решении задачи об устойчивости по первому приближению, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Если все корни характеристического уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в (1). Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в (1).

Доказательство. Если в уравнениях (1) сделать замену переменных по формуле

$$x = Cy \quad (\det C \neq 0), \quad (6)$$

то они станут такими:

$$\frac{dy}{dt} = By + Y(y), \quad (7)$$

где $B = C^{-1}AC$, а $Y(y) = C^{-1}X(Cy)$. Матрицу C (которая, вообще говоря, комплексная) выберем так, чтобы матрица B была нормальной жордановой формой матрицы A , т. е. чтобы матрица B состояла из одной или нескольких жордановых клеток, расположенных по ее главной диагонали, а все элементы, не входящие в жордановы клетки, равнялись бы нулю¹⁾:

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_m \end{pmatrix}, \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

¹⁾ См. гл. 6 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.

На основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости получаем отсюда вывод об асимптотической устойчивости невозмущенного движения, если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.

б) Пусть теперь $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, ..., $r_k > 0$, $r_{k+1} \leq 0$, ..., $r_m \leq 0$. Для доказательства неустойчивости невозмущенного движения воспользуемся второй теоремой Ляпунова о неустойчивости. Пусть

$$V = - \sum_{j=1}^k z_j \bar{z}_j + \sum_{j=k+1}^m z_j \bar{z}_j. \quad (11)$$

Ее производную в силу уравнений (8)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -2 \sum_{j=1}^k r_j z_j \bar{z}_j + 2 \sum_{j=k+1}^m r_j z_j \bar{z}_j + \mu G - \\ & - \sum_{j=1}^k (\bar{z}_j Z_j + z_j \bar{Z}_j) + \sum_{j=k+1}^m (\bar{z}_j Z_j + z_j \bar{Z}_j) \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\dot{V} = \kappa V + W, \quad (12)$$

где κ — пока неопределенное положительное число, а

$$\begin{aligned} W = & \sum_{j=1}^k (\kappa - 2r_j) z_j \bar{z}_j + \sum_{j=k+1}^m (2r_j - \kappa) z_j \bar{z}_j + \mu G - \\ & - \sum_{j=1}^k (\bar{z}_j Z_j + z_j \bar{Z}_j) + \sum_{j=k+1}^m (\bar{z}_j Z_j + z_j \bar{Z}_j). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь G — квадратичная форма, появляющаяся в выражении для $\dot{V}$ тогда, когда не все коэффициенты a_j в системе (8) равны нулю.

Выберем число κ так, чтобы для $j = 1, 2, \dots, k$ выполнялись неравенства $0 < \kappa < 2r_j$. Тогда при достаточно малых μ функция W будет определено-отрицательной. Но функция V , очевидно, знакопеременная и, следовательно, не является знакопостоянной, противоположного с W знака. На основании второй теоремы Ляпунова о неустойчивости получаем отсюда вывод о том, что при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения с положительной вещественной частью невозмущенное движение неустойчиво. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Ляпунов также показал¹⁾, что если у характеристического уравнения (3) нет ни одного корня с положительной вещественной частью, но есть корни, у которых вещественная часть равна нулю, то можно так подобрать нелинейные члены в уравнении возмущенного движения (1), чтобы имела место устойчивость или неустойчивость, по желанию.

¹⁾ Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2, — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 267—271.

Все случаи, которые могут представиться при решении задачи об устойчивости, можно разбить на не критические и критические. В не критических случаях вопрос об устойчивости решается рассмотрением уравнений первого приближения (2). В критических случаях уравнений первого приближения недостаточно: для решения задачи об устойчивости обязательно требуется привлечение целых членов в уравнениях возмущенного движения (1). Из доказанной выше теоремы следует, что критическими будут те и только те случаи, когда характеристическое уравнение (2) не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с вещественными частями, равными нулю.

206. Критерий Рауса — Гурвица. Для практического использования теоремы об устойчивости по первому приближению важно определить знаки вещественных частей характеристического уравнения. В частности, желательно иметь критерий, позволяющий по коэффициентам характеристического уравнения определить, будут ли все его корни иметь отрицательные вещественные части или нет.

Запишем характеристическое уравнение (3) в виде

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0. \quad (14)$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ этого уравнения — вещественные числа. Не ограничивая общности, будем в дальнейшем считать, что старший коэффициент a_0 положителен.

Получим сначала одно очень простое необходимое условие отрицательности вещественных частей всех корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ уравнения (14): для того чтобы при $a_0 > 0$ все корни уравнения (14) имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все его коэффициенты были положительными. Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из формул Виета:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m), \\ \frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_{m-1}\lambda_m, \\ &\vdots \\ \frac{a_m}{a_0} &= (-1)^m \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m. \end{aligned} \quad (15)$$

По положительность всех коэффициентов уравнения (14) не является достаточным условием того, что его корни имеют отрицательные вещественные части. Необходимо и достаточное условие дается критерием Рауса — Гурвица. Сформулируем соответствующую теорему, не приводя ее доказательства¹⁾.

¹⁾ Доказательство см., например, в гл. 16 книги: Гаптвахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.

$2n$ -мерного пространства состояний $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Из условия теоремы следует, что

$$\dot{V} = N^*(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^n Q_i^*(q_j, \dot{q}_j) \dot{q}_i \leq 0, \quad (1)$$

где Q_i^* — непотенциальная обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), и знак равенства достигается только при $\dot{q}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Из знакоопределенности функции V и неравенства (1) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости получаем, что положение равновесия устойчиво. Для доказательства асимптотической устойчивости теперь достаточно убедиться в том, что если начальная точка траектории взята достаточно близко к началу координат $q_i = 0$, $\dot{q}_i = 0$, то при $t \rightarrow \infty$ имеем $q_i \rightarrow 0$, $\dot{q}_i \rightarrow 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть движение происходит в столь малой окрестности начала координат, что последние не содержит других положений равновесия, кроме $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, а мощность N^* непотенциальных сил является определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей. Выбор такой окрестности всегда возможен в силу изолированности и устойчивости положения равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$.

Приращение ΔV на любом конечном интервале времени Δt отрицательно, так как $N^* = 0$ только при $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_n = 0$, и в выбранной окрестности вне начала координат эти равенства не могут иметь места в течение конечного времени Δt , так как начало координат является изолированным положением равновесия. Действительно, если бы на интервале Δt выполнялись равенства $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, но не все $\dot{q}_i$ были бы равны нулю, то, как показано в п. 193, все гироскопические и диссипативные силы $Q_i^*(q_j, \dot{q}_j)$ были бы равны нулю и из уравнений Лагранжа второго рода (28) п. 141 следовало бы, что $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) вне начала координат, т. е. изучаемое положение равновесия не было бы изолированным. Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат функция V монотонно убывает. С возрастанием t она стремится к некоторому неотрицательному пределу b . Аналогично п. 202 можно показать, что случай $b \neq 0$ невозможен и, следовательно, $V \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Но так как V — знакоопределенная функция величин $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то отсюда следует, что $q_i \rightarrow 0$, $\dot{q}_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

208. Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие. Пусть положение равновесия консервативной системы неустойчиво. Нельзя ли добавлением диссипативных сил стабилизировать его, т. е. нельзя ли так подобрать диссипативные

силы, чтобы неустойчивое при наличии одних потенциальных сил положение равновесия стало устойчивым или даже, может быть, асимптотически устойчивым? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Введем некоторые вспомогательные понятия. Как и в задаче о малых колебаниях, будем считать, что кинетическая энергия консервативной системы в окрестности положения равновесия является определенно-положительной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (2)$$

где a_{ik} — постоянные коэффициенты. Пусть, далее, потенциальная энергия в окрестности положения равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ разлагается в ряд по степеням $q_1, q_2, \dots, q_n$ и квадратичная часть этого ряда не равна тождественно нулю. Тогда считаем, что

$$П = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k, \quad (3)$$

где c_{ik} — постоянные величины. Квадратичные формы (2) и (3) можно одновременно привести к сумме квадратов при помощи вещественной линейной замены переменных $q \rightarrow \theta$ (см., например, п. 197, где рассматривались главные координаты и главные колебания консервативной системы в окрестности положения равновесия). В новых переменных

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2, \quad П = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^2. \quad (4)$$

Величины λ_i Пуанкаре предложил называть *коэффициентами устойчивости*. Если, как в п. 197, функция (3) определенно-положительна, то все величины λ_i положительны и положение равновесия устойчиво. Если же хотя бы одна из величин λ_i отрицательна, то положение равновесия неустойчиво¹⁾. Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется *степенью неустойчивости*. В дальнейшем важна будет не сама степень неустойчивости, а ее четность или нечетность. Пусть C — матрица квадратичной формы (3). Тогда $\det C = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$. Отсюда следует, что если $\det C > 0$, то степень неустойчивости четная (или равняется нулю), а если $\det C < 0$, то степень неустойчивости нечетная.

¹⁾ И не только в первом приближении, а для полных нелинейных уравнений возмущенного движения. Это следует из теоремы об устойчивости по первому приближению, так как при наличии отрицательных коэффициентов λ_i среди корней характеристического уравнения есть и положительные корни. Заметим, что это является также доказательством сформулированной (но не доказанной) в п. 194 первой теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы.

Теорема 1. *Если среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным, то изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.*

Доказательство. Пусть $V = -E = -T - \Pi$. Тогда

$$\dot{V} = -N^* \geq 0, \quad (5)$$

где N^* — мощность диссипативных сил, являющаяся по условию теоремы определенно-отрицательной функцией обобщенных скоростей.

Приращение ΔV на любом конечном интервале времени Δt положительно; это показывается совершенно аналогично тому, как показана отрицательность ΔV в теореме предыдущего пункта. Далее, так как среди величин λ_i есть хотя бы одна отрицательная, то в любой сколь угодно малой окрестности начала координат $2n$ -мерного пространства состояний $q_i, \dot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) существует область $V > 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным в п. 203 при доказательстве теоремы Четаева о неустойчивости.

Итак, диссипативными силами с полной диссипацией стабилизации добиться невозможно. А нельзя ли стабилизировать положение равновесия при помощи гироскопических сил? Частичный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме. Будем рассматривать гироскопические силы, линейные относительно обобщенных скоростей.

Теорема 2. *Если степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна, то стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна, если же степень неустойчивости четна, то гироскопическая стабилизация возможна.*

Для доказательства невозможности гироскопической стабилизации при нечетной степени неустойчивости достаточно рассмотреть линеаризованную систему уравнений возмущенного движения и показать, что ее характеристическое уравнение и при наличии гироскопических сил имеет хотя бы один положительный корень.

В переменных θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \dot{\theta}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ — постоянные величины. Характеристическое уравнение системы (6) будет таким:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda_1 & -\gamma_{12}\lambda & \cdots & -\gamma_{1n}\lambda \\ \gamma_{12}\lambda & \lambda^2 + \lambda_2 & \cdots & -\gamma_{2n}\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{1n}\lambda & \gamma_{2n}\lambda & \cdots & \lambda^2 + \lambda_n \end{vmatrix} = 0.$$

При $\lambda \rightarrow +\infty$ имеем $\Delta(\lambda) \rightarrow +\infty$. Но $\Delta(0) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ и в силу нечетности степени неустойчивости $\Delta(0) < 0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет хотя бы один положительный корень и, согласно теореме п. 205 об устойчивости по первому приближению, положение равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ неустойчиво независимо от нелинейных членов в уравнениях возмущенного движения, т. е. если степень неустойчивости нечетна, то стабилизация гироскопическими силами невозможна.

Чтобы показать возможность гироскопической стабилизации в случае четной степени неустойчивости, рассмотрим простой пример. Пусть движение системы с двумя степенями свободы описывается такими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1 - \gamma \dot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + \lambda_2 q_2 + \gamma \dot{q}_1 = 0, \quad (7)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ — постоянные величины, $\lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$). Последние слагаемые в уравнениях (7) представляют собой гироскопические силы; если они равны нулю, то положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ неустойчиво, а степень неустойчивости равна двум. Покажем, что гироскопические силы, т. е. величину γ в (7), можно подобрать так, что положение равновесия станет устойчивым.

Характеристическое уравнение линейной системы (7) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda_1 & -\gamma\lambda \\ \gamma\lambda & \lambda^2 + \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma^2)\lambda^2 + \lambda_1\lambda_2 = 0. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенства

$$|\gamma| > \sqrt{-\lambda_1} + \sqrt{-\lambda_2} \quad (9)$$

корни уравнения (8) чисто мнимые и различны, и, следовательно, при условии (9) положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ устойчиво.

Теорема 3. *Если изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости, то оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Из рассмотренных в этом параграфе теорем следует, что: 1) добавление диссипативных сил не нарушает устойчивости или неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы; 2) добавление же гироскопических сил, не нарушая устойчивости положения равновесия, в некоторых случаях (при четной степени неустойчивости) может стабилизировать неустойчивое положение равновесия; 3) однако если неустойчивое положение равновесия стабилизировано гироскопическими силами, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией положение равновесия снова будет неустойчивым.

Устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, называют *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, — *временной*.

Пример. Устойчивость поступательного движения твердого тела на круговой орбите. Пусть твердое тело обладает динамической симметрией ($A = B$), а его центр масс движется по круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле. Согласно п. 126 уравнения движения тела относительно центра масс могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A) qr &= 3n^2 (C - A) a_{32} a_{33}, \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) rp &= -3n^2 (C - A) a_{33} a_{31}, \\ \frac{dr}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi + n a_{21}, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi + n a_{22}, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} + n a_{23}. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнениях (10) и (11) n — среднее движение центра масс тела по орбите, а величины a_{ij} выражаются через углы Эйлера ψ, θ, φ по формулам (3) п. 19.

Из третьего уравнения системы (10) следует, что имеет место интеграл

$$r = r_0 = \text{const.}$$

Уравнения движения имеют частное решение

$$\theta = \pi/2, \quad \psi = \pi. \quad (12)$$

Для этого частного решения

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \varphi = -n + r_0. \quad (13)$$

Будем считать, что постоянная r_0 равна нулю; тогда частное решение (12) отвечает поступательному движению твердого тела в абсолютном пространстве (в орбитальной же системе координат тело вращается вокруг оси динамической симметрии с угловой скоростью $\dot{\varphi} = -n$).

Рассмотрим устойчивость этого движения тела по отношению к переменным ψ, θ, φ . Пусть

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad \dot{\theta} = \dot{q}_1, \quad \dot{\psi} = \dot{q}_2.$$

Произведя линеаризацию первых двух уравнений системы (10) и разрешив их относительно старших производных, получим

$$\ddot{q}_1 = (4 - 3\alpha) q_1 + 2q_2', \quad \ddot{q}_2 = q_2 - 2q_1'. \quad (14)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной $v = nt$ и введено обозначение $\alpha = C/A$. Так как моменты инерции удовлетворяют неравенству треугольника $A + B \geq C$, то $0 \leq \alpha \leq 2$.

Первые слагаемые в правых частях уравнений (14) являются потенциальными силами, порождаемыми потенциалом

$$\Pi = -\frac{1}{2}(4-3\alpha)q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \quad (15)$$

а последние слагаемые представляют собой гироскопические силы.

Если бы гироскопические силы отсутствовали, то положение равновесия $q_1 = q_2 = 0$ (оно отвечает невозмущенному движению (12)) было бы неустойчивым, причем при $\alpha < 4/3$ степень неустойчивости четная, а при $4/3 < \alpha \leq 2$ нечетная. Поэтому из теоремы 2 следует, что при $4/3 < \alpha \leq 2$ гироскопическая стабилизация невозможна, и, следовательно, в этом случае движение (12) неустойчиво по Ляпунову.

Из той же теоремы 2 следует, что при $\alpha < 4/3$ гироскопическая стабилизация в принципе возможна. Чтобы узнать, осуществляется ли она в рассматриваемой задаче, при заданных конкретных гироскопических силах, рассмотрим характеристическое уравнение системы (14)

$$\lambda^4 + (3\alpha - 1)\lambda^2 + (4 - 3\alpha) = 0. \quad (16)$$

При выполнении системы неравенств

$$3\alpha - 1 > 0, \quad 4 - 3\alpha > 0, \quad (3\alpha - 1)^2 - 4(4 - 3\alpha) > 0 \quad (17)$$

корни уравнения (16) будут чисто мнимыми и, следовательно, движение (12) будет устойчиво в линейном приближении по отношению к переменным $\psi, \theta, \varphi, \theta$. Если же хотя бы одно из неравенств (17) имеет противоположный смысл, то у уравнения (16) будут корни с положительными вещественными частями и движение (12) неустойчиво по Ляпунову.

Система неравенств (17), как нетрудно проверить, приводится к виду

$$1 < \alpha < \frac{4}{3}. \quad (18)$$

Следовательно, в нашей конкретной задаче в случае четной степени неустойчивости при выполнении условия (18) гироскопическая стабилизация осуществляется, а при $\alpha < 1$ — нет.

Таким образом, показано, что поступательное движение твердого тела на круговой орбите при $\alpha < 1$ и $\alpha > 4/3$ неустойчиво по Ляпунову, а при $1 < \alpha < 4/3$ оно устойчиво в линейном приближении. Более детальное исследование позволяет показать, что на самом деле при выполнении условия (18) движение будет устойчиво по Ляпунову не только в линейном приближении, но и в рамках полных нелинейных уравнений возмущенного движения¹⁾.

§ 5. Об устойчивости гамильтоновых систем

209. Общие замечания. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения записываются в виде системы уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Считаем, что функция Гамильтона аналитична в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и представима в виде ряда

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (2)$$

¹⁾ См.: Маркеев А. П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космические исследования.— 1967.— Т. 5, № 3.— С. 365—375.

где H_m — формы степени m относительно q_j, p_j ($j = 1, 2, \dots, n$), коэффициенты которых постоянны или 2π -периодичны по t . К рассмотрению системы (1) приводят многие задачи об устойчивости движения в потенциальном поле сил.

Решение задачи об устойчивости невозмущенного движения (ему отвечает решение $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) системы (1)) зависит от свойств функции Гамильтона. Очень просто вопрос об устойчивости решается в том случае, когда время t не содержится в уравнениях (1), а функция H является знакоопределенной в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). В этом случае функция H будет интегралом системы (1) и невозмущенное движение устойчиво. Этот вывод непосредственно следует из теоремы Ляпунова об устойчивости; для применения этой теоремы в качестве функции Ляпунова V можно принять функцию H .

Если же функция H не является знакоопределенной или зависит от времени, то задача об устойчивости становится весьма сложной. Для системы (1) справедлива теорема Пуанкаре о сохранении фазового объема, поэтому невозмущенное движение не может быть асимптотически устойчивым; в системах, описываемых дифференциальными уравнениями Гамильтона, возможна либо устойчивость, либо неустойчивость. Следовательно, если линеаризованные уравнения не дают строгого решения вопроса об устойчивости (как, например, в случае установившихся движений при наличии у характеристического уравнения хотя бы одного корня с положительной вещественной частью), то возникает необходимость рассмотрения нелинейных членов в уравнениях (1), т. е. мы имеем критический случай теории устойчивости.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы теории устойчивости движения в системах, описываемых гамильтоновыми дифференциальными уравнениями. При этом ограничимся случаем, когда уравнения возмущенного движения (1) линейны¹⁾. Часто вместо термина «устойчивость невозмущенного движения» мы будем применять термин «устойчивость системы (1)» или просто «устойчивость гамильтоновой системы».

210. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами. Запишем линейную гамильтонову систему дифференциальных уравнений в матричной форме (см. гл. 183)

$$\frac{dx}{dt} = JHx, \quad x' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}), \quad (3)$$

где x_k, x_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, n$) — канонически сопряженные перемен-

¹⁾ Теория устойчивости нелинейных гамильтоновых систем изложена в работах: Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 6.— С. 91—192; Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973; Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.— М.: Наука, 1978.

ные (x_k — координаты, x_{n+k} — импульсы). Квадратная матрица J порядка $2n$ имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{vmatrix} \quad (J' = J^{-1} = -J, J^2 = -E_{2n}, \det J = 1). \quad (4)$$

В системе (3) H — вещественная симметрическая матрица порядка $2n$. Она либо постоянна, либо является непрерывной 2π -периодической по t .

Пусть матрица H в системе (3) постоянна. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\rho(\lambda) = \det(JH - \lambda E_{2n}) = 0. \quad (5)$$

Как показано в п. 183, многочлен $\rho(\lambda)$ — четная функция λ . Поэтому если уравнение (5) имеет корень $\lambda = a$ с отличной от нуля вещественной частью, то система (3) неустойчива, так как либо сам этот корень, либо противоположный ему по знаку корень $\lambda = -a$ имеет положительную вещественную часть. Согласно теореме об устойчивости по первому приближению (п. 205), в этом случае неустойчива и полная нелинейная система уравнений возмущенного движения (1).

Таким образом, для устойчивости системы (3) необходимо, чтобы корни ее характеристического уравнения (5) были чисто мнимыми. Это условие будет и достаточным, если дополнительно потребовать, чтобы матрица JH приводилась к диагональной форме.

211. О линейных системах с периодическими коэффициентами. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x' = (x_1, \dots, x_m), \quad (6)$$

где $A(t)$ — непрерывная, 2π -периодическая по t вещественная матрица. Структура решений системы (6) описывается следующей теоремой Флоке.

Теорема. Для системы (6) фундаментальная матрица решений $X(t)$, нормированная условием $X(0) = E_m$, представима в виде

$$X(t) = Y(t)e^{Bt}, \quad (7)$$

где B — постоянная матрица, а $Y(t)$ — непрерывно дифференцируемая, 2π -периодическая по t матрица.

Для доказательства заметим прежде всего, что так как $X(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнений (6), то в силу 2π -периодичности матрицы $A(t)$ фундаментальной будет также матрица $X(t + 2\pi)$. А это означает, что справедливо равенство

$$X(t + 2\pi) = X(t)C, \quad (8)$$

где C — постоянная матрица. Положив в равенстве (8) $t = 0$, получим, что $C = X(2\pi)$. Таким образом,

$$X(t + 2\pi) = X(t)X(2\pi). \quad (9)$$

Так как $X(t)$ — фундаментальная матрица решений, то $\det X(2\pi) \neq 0$, и, следовательно, для матрицы $X(2\pi)$, как и для всякой невырожденной матрицы, существует логарифм¹⁾, и поэтому она представима в виде

$$X(2\pi) = e^{2\pi B}. \quad (10)$$

Теперь положим

$$Y(t) = X(t) e^{-Bt}. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(t + 2\pi) &= X(t + 2\pi) e^{-2\pi B - Bt} = X(t) X(2\pi) e^{-2\pi B} e^{-Bt} = \\ &= X(t) e^{-Bt} = Y(t). \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $Y(t)$ 2π -периодична, а из (11) следует, что она непрерывно дифференцируема. Из (11) следует также, что фундаментальная матрица решений $X(t)$ представима в виде (7). Теорема Флоке доказана.

Для дальнейшего введем некоторые определения. Собственные числа λ_j матрицы B называются *характеристическими показателями* системы (6). Собственные числа ρ_j матрицы $X(2\pi)$ называются *мультипликаторами* системы (6). Из формулы (10) следует, что

$$\rho_j = e^{2\pi \lambda_j}, \quad (12)$$

или

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi} (\ln |\rho_j| + i \arg \rho_j + i 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (13)$$

Характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi)$, т. е. уравнение

$$\det(X(2\pi) - \rho E_m) = 0, \quad (14)$$

называется *характеристическим уравнением* системы (6). Отметим без доказательства²⁾ два утверждения о характеристическом уравнении (14): 1) характеристическое уравнение не зависит от выбора фундаментальной матрицы решений; 2) характеристическое уравнение не изменится, если систему (6) подвергнуть невырожденному линейному преобразованию с 2π -периодической матрицей.

Система (6) называется *приводимой*, если существует замена переменных

$$x = L(t)y \quad (15)$$

такая, что система (6) преобразуется в систему с постоянными коэффициентами, а 2π -периодическая матрица $L(t)$ — непрерывно дифференцируемая, ограниченная при всех t , и такими же свойствами обладает обратная матрица $L^{-1}(t)$. Имеет место следующая теорема Ляпунова.

¹⁾ См. гл. 8 книги: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

²⁾ Доказательство можно найти, например, в гл. 5 книги: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.

Теорема. *Линейная система (6) с непрерывной периодической матрицей $A(t)$ приводима.*

Для доказательства теоремы примем за матрицу $L(t)$ преобразования (15) матрицу $Y(t)$, определенную равенством (11). Она непрерывно дифференцируема и ограничена при всех t вместе со своей обратной. Остается только показать, что преобразованная система будет системой с постоянными коэффициентами. В этом легко убедиться, подставив

$$x = X(t)e^{-Bt}y \quad (16)$$

в систему (6). Произведя выкладки, получим

$$\frac{dy}{dt} = By. \quad (17)$$

Из формулы (17) видно, что характеристические показатели суть корни характеристического уравнения преобразованной системы.

Исно, что задачи об устойчивости систем (6) и (17) эквивалентны. Поэтому система (6) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы принадлежат замкнутому единичному кругу $|\rho| \leq 1$, причем в случае существования кратных мультипликаторов, лежащих на окружности $|\rho| = 1$, матрица $X(2\pi)$ приводится к диагональной форме.

212. Устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Пусть в системе (3) матрица Π является непрерывной 2π -периодической по t , вещественной симметрической матрицей. Задача об устойчивости линейных гамильтоновых систем обладает рядом специфических особенностей по сравнению с задачей об устойчивости общих линейных систем, рассмотренных в предыдущем пункте. Эти особенности вытекают из теоремы Ляпунова — Пуанкаре о характеристическом уравнении гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами.

Прежде чем сформулировать теорему, введем определение. Уравнение

$$f(z) \equiv a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (18)$$

называется *возвратным*, если коэффициенты его, равноотстоящие от крайних членов, равны между собой, т. е. если в (18) $a_k = a_{m-k}$. Для возвратного уравнения имеет место тождество

$$f(z) \equiv z^m f\left(\frac{1}{z}\right) \quad (z \neq 0). \quad (19)$$

И наоборот, если имеет место тождество (19), то уравнение (18) возвратное. Из тождества (19) следует, что возвратное уравнение нечетной степени обязательно имеет своим корнем число $z = -1$.

Если m — четное число, то при помощи подстановки

$$w = z + \frac{1}{z}$$

возвратное уравнение сводится к уравнению степени $m/2$ относительно w .

Имеют место следующие легко проверяемые свойства корней возвратного уравнения: если у него есть корень $z = 1$, то кратность этого корня четная; если есть корень $z = -1$, то его кратность четная при четном m и нечетная при нечетном m ; если уравнение имеет корень $z_k \neq \pm 1$, то оно имеет и взаимно обратный корень $z_l = 1/z_k$ той же кратности.

Теорема (Ляпунова — Пуанкаре). *Характеристическое уравнение (14) линейной гамильтоновой системы (3) с 2π -периодической по t матрицей $H(t)$ возвратное.*

Доказательство. Так как преобразование фазового пространства, задаваемое движениями гамильтоновой системы, является унитарным каноническим преобразованием, то (см. п. 171) матрица $X(t)$ фундаментальных решений системы (3) является симплектической, т. е. при всех t справедливо равенство

$$X'JX = J. \quad (20)$$

Так как $X(0) = E_{2n}$, то из (20) следует, что при всех t , в том числе и при $t = 2\pi$, $\det X = 1$.

Рассмотрим следующую цепочку тождеств:

$$\begin{aligned} f(\rho) &\equiv \det(X(2\pi) - \rho E_{2n}) = \det X(2\pi) \cdot \det(E_{2n} - \rho X^{-1}(2\pi)) \equiv \\ &\equiv \det(E_{2n} - \rho J^{-1}X'(2\pi)J) = \det J^{-1} \det(E_{2n} - \rho X'(2\pi)) \det J \equiv \\ &\equiv \det(E_{2n} - \rho X(2\pi))' \equiv \det(E_{2n} - \rho X(2\pi)) \equiv \rho^{2n} \det\left(X(2\pi) - \frac{1}{\rho} E_{2n}\right) \equiv \\ &\equiv \rho^{2n} f\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что характеристическое уравнение (14) возвратное, и теорема Ляпунова — Пуанкаре доказана.

Укажем важнейшие следствия этой теоремы.

1. *Линейная гамильтонова система (3) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ , расположенные на единичной окружности $|\rho| = 1$ и матрица $X(2\pi)$ приводится к диагональной форме.*

2. *Мультипликаторы ρ и $1/\rho$ имеют одинаковую кратность.*

3. *Если характеристическое уравнение (14) имеет корень $\rho = 1$ или $\rho = -1$, то эти корни имеют четную кратность.*

213. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Снова рассмотрим систему (3), предполагая матрицу $H(t)$ вещественной и непрерывной 2π -периодической по t . Согласно теореме Ляпунова, система

(3) приводима. Но матрица $L(t)$ замены переменных (15), приводящей систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, определяется неоднозначно. Опишем алгоритм построения такой матрицы $L(t)$, чтобы соответствующее ей преобразование (15) было вещественным, каноническим, 2π -периодическим по t и приводило бы систему (3) к нормальной форме. Будем предполагать, что характеристические показатели λ_k системы (3) чисто мнимые ($\lambda_k = i\sigma_k$, где i — мнимая единица, σ_k — вещественные числа). Мультипликаторы $\rho_k = \exp(i2\pi\sigma_k)$, $\rho_{n+k} = \exp(-i2\pi\sigma_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) считаем различными. Как и в п. 183 в случае линейной гамильтоновой системы с постоянными коэффициентами, нормальной формой 2π -периодической по t системы (3) мы называем такую линейную систему, которой отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2). \quad (21)$$

Ограничимся только описанием алгоритмической части процедуры построения матрицы $L(t)$ ¹⁾. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (3), нормированная условием $X(0) = E_{2n}$, а r_k и s_k — действительная и мнимая части собственного вектора матрицы $X(2\pi)$, соответствующего мультипликатору ρ_k . Векторы r_k и s_k удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} (X(2\pi) - \cos 2\pi\sigma_k E_{2n}) r_k + \sin 2\pi\sigma_k s_k &= 0, \\ -\sin 2\pi\sigma_k r_k + (X(2\pi) - \cos 2\pi\sigma_k E_{2n}) s_k &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из этой системы векторы r_k и s_k определяются с точностью до постоянного множителя. Нормируем их так, чтобы выполнялось равенство

$$4(r_k \cdot Js_k) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

Такая нормировка всегда возможна. При проведении нормировки в случае необходимости (как и в п. 183) следует соответствующим образом выбирать знаки величин σ_k в функции Гамильтона (21) нормализованной системы.

После нормировки векторов r_k и s_k образуем постоянную квадратную матрицу P порядка $2n$. Ее k -м столбцом возьмем вектор $-2s_k$, а $(n+k)$ -м — вектор $2r_k$.

Образуем, далее, квадратную матрицу $Q(t)$ порядка $2n$. Она имеет такую структуру:

$$Q(t) = \begin{vmatrix} D_1(t) & -D_2(t) \\ D_2(t) & D_1(t) \end{vmatrix}, \quad (24)$$

¹⁾ Более подробное изложение можно найти в статье: Маркеев А. П. О нормализации гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // ПММ.— 1972.— Т. 36, вып. 5.— С. 805—810.

где $D_1(t)$ и $D_2(t)$ — диагональные матрицы вида

$$D_1(t) = \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \cos \sigma_n t \end{vmatrix}, \quad D_2(t) = \begin{vmatrix} \sin \sigma_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \sin \sigma_n t \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Матрица $L(t)$ искомого нормализующего преобразования (15) записывается в виде произведения трех матриц

$$L(t) = X(t)PQ(t). \quad (26)$$

Фактическое построение матрицы (26) возможно, как правило, только на вычислительной машине.

214. Задача о параметрическом резонансе. Линейные гамильтоновы системы, содержащие малый параметр. В приложениях матрица $H(t)$ системы (3) обычно зависит от одного или нескольких параметров. Задача о параметрическом резонансе для системы (3) состоит в определении тех значений параметров, при которых ее характеристическое уравнение (14) имеет корни (мультипликаторы) с модулями, большими единицы. Иными словами, эта задача состоит в нахождении тех значений параметров, при которых система (3) неустойчива. Ограничимся рассмотрением того частного случая, когда функция Гамильтона H , соответствующая системе (3), представляется в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра ε :

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \dots, \quad (27)$$

где $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ... — квадратичные формы переменных $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, причем коэффициенты формы $H^{(0)}$ постоянны, а коэффициенты форм $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ... — непрерывные вещественные функции t с общим периодом 2π . Кроме того, коэффициенты форм $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, ... зависят от одного или нескольких параметров.

Рассмотрим зависимость мультипликаторов системы (3) (а следовательно, и ее характеристических показателей) от малого параметра ε . Так как правые части системы (3) аналитичны по ε , то и фундаментальная матрица решений $X(t; \varepsilon)$ также аналитична по ε . Отсюда следует, что коэффициенты характеристического уравнения (14) — аналитические функции ε . Но мультипликаторы (и характеристические показатели) не обязательно аналитичны. Они будут обязательно аналитическими, если характеристическое уравнение при $\varepsilon = 0$ имеет только простые корни. Если же при $\varepsilon = 0$ уравнение (14) имеет кратные корни, то аналитичность его корней относительно ε при $\varepsilon \neq 0$ может не иметь места. Отметим, однако, что независимо от наличия при $\varepsilon = 0$ кратных корней корни уравнения (14) при $\varepsilon \neq 0$, во всяком случае, непрерывны по ε ¹⁾.

¹⁾ См. по этому поводу монографию: Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956.

При $\varepsilon = 0$ система уравнений (3) имеет постоянные коэффициенты. Как установлено в п. 210, при наличии хотя бы одного корня характеристического уравнения (5) с отличной от нуля вещественной частью система (3) неустойчива. В этом случае уравнение (14) при $\varepsilon = 0$ имеет хотя бы один корень, модуль которого больше единицы. Ввиду непрерывности мультипликаторов относительно ε характеристическое уравнение (14) при достаточно малых ε также имеет корень, модуль которого превосходит единицу, и, следовательно, система (3) при достаточно малых ε неустойчива. Как видим, в этом случае задача о параметрическом резонансе проста и неинтересна.

Пусть теперь при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение (5) системы (3) имеет только чисто мнимые корни $\pm i\sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда уравнение (14) при $\varepsilon = 0$ имеет только такие корни (мультипликаторы), модули которых равны единице. Изучим поведение мультипликаторов при малых ε , отличных от нуля.

Сначала рассмотрим случай, когда при $\varepsilon = 0$ нет кратных мультипликаторов, т. е. когда, согласно (12), выполняются неравенства

$$\sigma_k \pm \sigma_l \neq N \quad (k, l = 1, 2, \dots, n; N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (28)$$

В силу непрерывности мультипликаторов они останутся некратыми и при достаточно малых ε , отличных от нуля. Кроме того, при достаточно малых ε мультипликаторы не могут иметь модулей, больших единицы. Этот важный вывод является простым следствием теоремы Ляпунова — Пуанкаре о характеристическом уравнении (14) системы (3) (п. 212). Согласно этой теореме мультипликаторы расположены симметрично относительно единичной окружности. При малых ε мультипликаторы не могут сойти с окружности, не нарушив указанной симметрии.

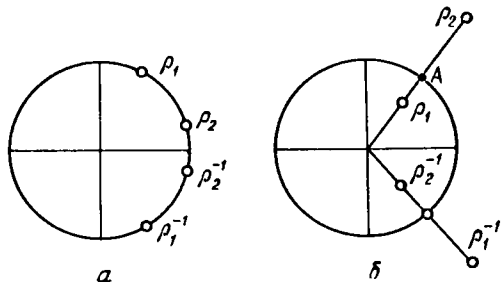


Рис. 157

Действительно, рассмотрим для наглядности случай $n = 2$. Характеристическое уравнение (14) будет уравнением четвертого порядка. Пусть ρ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — его корни при $\varepsilon = 0$. Будем изображать их на комплексной плоскости ρ (рис. 157, а). Пусть при малых ε один из корней, например ρ_1 , сошел с окружности и стал по модулю больше единицы. Из-за вещественности коэффициентов уравнения (14) комплексно сопряженный корень ρ_1^{-1} с необходимостью сместился бы в точку, симметричную относительно вещественной оси. А так как число всех корней равно четырем и смещения корней ρ_2, ρ_2^{-1} при малых ε малы, то у сместившегося корня ρ_1

не оказалось бы обратного по величине, что противоречит теореме Ляпунова — Пуанкаре.

Таким образом, если при $\varepsilon = 0$ кратные мультипликаторы отсутствуют или, что то же, выполняются условия (28), то система (3) при достаточно малых значениях ε устойчива.

Если же при $\varepsilon = 0$ существуют кратные мультипликаторы, расположенные в некоторой точке A единичной окружности, то при $\varepsilon \neq 0$ они могут, вообще говоря, сойти с окружности. При этом они могут расположиться как изображено на рис. 157, б, и симметрия мультипликаторов относительно единичной окружности не будет нарушена. Но смещение мультипликаторов с единичной окружности происходит не всегда, и, следовательно, в случае кратных мультипликаторов система не обязательно неустойчива при $\varepsilon \neq 0$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что характеристические показатели $i\sigma_k$ при $\varepsilon = 0$ таковы, что все величины σ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) различны. Тогда, согласно п. 183, при $\varepsilon = 0$ систему (3) при помощи линейной вещественной канонической замены переменных можно привести к нормальной форме. В новых переменных функция $H^{(0)}$ приведет к форме (21) и функция Гамильтона (27) запишется в виде

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k (y_k^2 + y_{n+k}^2) + \varepsilon H^{(1)} + \varepsilon^2 H^{(2)} + \dots, \quad (29)$$

где $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$ — квадратичные формы от новых переменных $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ с непрерывными 2π -периодическими по t коэффициентами. Задачи о параметрическом резонансе в старых и новых переменных эквивалентны. Но теперь существенно, что величины σ_k в (29) имеют вполне определенные знаки, полученные в процессе нормализации системы (3) при $\varepsilon = 0$.

Сформулируем без доказательства¹⁾ следующее утверждение.

Теорема. Для достаточно малых ε линейная система с функцией Гамильтона (29) устойчива тогда и только тогда, когда величины σ_k не связаны соотношениями

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1, 2, \dots, n; N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (30)$$

Иными словами, знак минус в соотношениях (28) можно опустить, а при выполнении хотя бы одного из равенств (30) всегда можно так подобрать функции $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$ в (29), что система будет неустойчива.

215. Нахождение областей параметрического резонанса. Пусть величины σ_k в функции Гамильтона (29) зависят от некоторого па-

¹⁾ Доказательство можно найти в статье: J. Moser. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian system // Comm. Pure Appl. Math.—1958.—V. 11, № 1.—Р. 81—114 и в монографии: Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.

параметра α . И пусть при $\alpha = \alpha_0$ выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\sigma_k + \sigma_l = N \quad (k, l = 1, 2, \dots, n; N = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (31)$$

Когда равенство (31) выполняется при $k = l$, т. е. когда

$$2\sigma_k = N, \quad (32)$$

то говорят, что имеет место *простой* резонанс. Параметрический резонанс, для которого в (31) $k \neq l$, называется *комбинационным*. Покажем, что при условии (31) для сколь угодно малых значений ε может существовать область неустойчивости, и найдем ее границы с точностью до первой степени ε включительно. Будем предполагать, что $n = 2$ и что при $\varepsilon = 0$ выполняется одно из резонансных соотношений (31).

Пусть в (29) квадратичная форма $H^{(1)}$ записана в виде

$$H^{(1)} = \sum_{v=2} h_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}(t) y_1^{v_1} y_2^{v_2} y_3^{\mu_1} y_4^{\mu_2} \quad (v = v_1 + v_2 + \mu_1 + \mu_2). \quad (33)$$

Будем считать, что функции $h_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}(t)$ в их представлении в виде рядов Фурье не содержат нулевых гармоник; в противном случае часть $H^{(1)}$, не зависящую от t , мы включили бы в $H^{(0)}$. Найдем область изменения параметра α вблизи резонансного значения α_0 , для которой линейная система дифференциальных уравнений, соответствующая функции Гамильтона (29), неустойчива. Предполагаем, что при $\alpha = \alpha_0$ выполнено неравенство

$$\frac{d(\sigma_k + \sigma_l)}{d\alpha} \neq 0.$$

Будем применять методы теории возмущений, рассмотренные в § 6 гл. XI. Нахождение областей неустойчивости основано на нескольких следующих одно за другим канонических преобразованиях, приводящих функцию Гамильтона (29) к некоторой простейшей форме, отражающей резонансный характер задачи и позволяющей весьма просто построить искомые области неустойчивости.

Сначала введем комплексно сопряженные канонические переменные q_k, p_k ($k = 1, 2$) по формулам

$$\begin{aligned} q_1 &= y_3 + iy_1, & q_2 &= y_4 + iy_2, \\ p_1 &= y_3 - iy_1, & p_2 &= y_4 - iy_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Новая функция Гамильтона равна $2iH$. Разлагая $\sigma_k(\alpha)$ в ряд в окрестности точки α_0 , получаем

$$\begin{aligned} 2iH &= i\sigma_1(\alpha_0) q_1 p_1 + i\sigma_2(\alpha_0) q_2 p_2 + \\ &+ i(\alpha - \alpha_0) \left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha} q_1 p_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha} q_2 p_2 \right) + \varepsilon \sum_{v=2} a_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь многоточием обозначены члены не ниже второго порядка малости относительно ε и $\alpha - \alpha_0$. Комплекснозначные коэффициенты $a_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}$ линейным образом выражаются через $h_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}$.

Сделаем замену переменных $q_k, p_k \rightarrow q'_k, p'_k$ ($k = 1, 2$) согласно формулам

$$q'_k = \frac{\partial S}{\partial p'_k}, \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2), \quad (36)$$

где производящая функция S имеет вид

$$S = q_1 p'_1 + q_2 p'_2 + \varepsilon W = q_1 p'_1 + q_2 p'_2 + \varepsilon \sum_{v=2} w_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}. \quad (37)$$

Функции $w_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}$ подберем 2π -периодическими по t и такими, чтобы в новой функции Гамильтона

$$H' = 2iH + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (38)$$

члены порядка ε приняли по возможности наиболее простой вид.

Из (36) и (37) получаем явный вид преобразования $q_k, p_k \rightarrow q'_k, p'_k$ с точностью до членов порядка ε включительно:

$$q_k = q'_k - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial p'_k}, \quad p_k = p'_k + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2), \quad (39)$$

где в функции W переменные q_k заменены на q'_k . Из (35) и (37) — (39) получаем выражение для коэффициента при первой степени ε в H'

$$\sum_{v=2} a'_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}(t) q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \equiv DW + \sum_{v=2} a_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}(t) q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}, \quad (40)$$

где

$$DW = i \sum_{k=1}^2 \sigma_k \left(q'_k \frac{\partial W}{\partial q'_k} - p'_k \frac{\partial W}{\partial p'_k} \right).$$

Приравняв в тождестве (40) коэффициенты при $q_1^{v_1} q_2^{v_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}$, получим дифференциальное уравнение для $w_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}$:

$$\frac{dw_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}}{dt} + i[\sigma_1(v_1 - \mu_1) + \sigma_2(v_2 - \mu_2)] w_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} = a'_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} - a_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2}. \quad (41)$$

Если ввести обозначение

$$b = \sigma_1(v_1 - \mu_1) + \sigma_2(v_2 - \mu_2) \quad (42)$$

и для простоты записи у функций, входящих в уравнение (41), не

писать индексы, то его общее решение может быть записано в виде

$$w(t) = w(0) e^{-ibt} + e^{-ibt} \int_0^t e^{ibx} (a' - a) dx. \quad (43)$$

Из (43) видно, что если число b не целое, то при любой функции $a'(t)$ решение $w(t)$ уравнения (41) 2π -периодическое при условии

$$w(0) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi b}} \int_0^{2\pi} e^{ibt} (a - a') dt.$$

Таким образом, если число b не целое, то в (40) можно положить $a'(t) \equiv 0$.

Если же число b целое, то при $a'(t) \equiv 0$ периодического решения уравнения (41), вообще говоря, не существует. Для существования периодического решения следует функцию $a'(t)$ выбрать вполне определенным образом, именно надо положить, что

$$a'(t) = ce^{-ibt},$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ibt} a(t) dt, \quad (44)$$

и периодическое решение уравнения (41) будет иметь вид

$$w(t) = w(0) e^{-ibt} + e^{-ibt} \int_0^t (c - a(x) e^{ibx}) dx$$

при произвольном значении $w(0)$.

Пусть при $\alpha = \alpha_0$ имеет место комбинационный резонанс

$$\sigma_1(\alpha_0) + \sigma_2(\alpha_0) = N.$$

Согласно изложенному выше, полученная после преобразования (36) функция Гамильтона (38) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} H' = & i\sigma_1(\alpha_0) q'_1 p'_1 + i\sigma_2(\alpha_0) q'_2 p'_2 + i(\alpha - \alpha_0) \left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} q'_1 p'_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} q'_2 p'_2 \right) + \\ & + \varepsilon (c_{1100} e^{-iNt} q'_1 q'_2 + c_{0011} e^{iNt} p'_1 p'_2) + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь введем вещественные переменные φ_k, r_k по формулам

$$q'_k = \sqrt{2r_k} e^{i\varphi_k}, \quad p'_k = \sqrt{2r_k} e^{-i\varphi_k} \quad (k = 1, 2). \quad (46)$$

Замена переменных $q'_k, p'_k \rightarrow \varphi_k, r_k$ (φ_k — координаты, r_k — импульсы), задаваемая этими формулами, является каноническим преобразованием с валентностью $1/(2i)$. В переменных φ_k, r_k функция

Гамильтона примет вид

$$H^* = \sigma_1(\alpha_0)r_1 + \sigma_2(\alpha_0)r_2 + (\alpha - \alpha_0) \left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} r_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} r_2 \right) + \\ + \varepsilon \sqrt{r_1 r_2} [\beta \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - Nt) + \gamma \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - Nt)] + \dots \quad (47)$$

Постоянные величины β , γ , содержащиеся в (47), выражаются через коэффициенты Фурье, отвечающие N -й гармонике некоторой линейной комбинации функций $h_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}(t)$, входящих в функцию Гамильтона (29). Вычисления, проведенные согласно каноническим преобразованиям (34), (39) и (46), дают следующие выражения для величин β , γ :

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(h_{0011} - h_{1100}) \cos Nt + (h_{1001} + h_{0110}) \sin Nt] dt, \\ \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(h_{1001} + h_{0110}) \cos Nt - (h_{0011} - h_{1100}) \sin Nt] dt. \quad (48)$$

Сделаем еще одно каноническое преобразование $\varphi_k, r_k \rightarrow \Psi_k, R_k$:

$$\varphi_1 = \sigma_1(\alpha_0)t + \Psi_1, \quad \varphi_2 = \sigma_2(\alpha_0)t + \Psi_2 + \theta, \\ r_1 = R_1, \quad r_2 = R_2, \quad (49)$$

где

$$\sin \theta = -\frac{\beta}{\delta}, \quad \cos \theta = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Изменение переменных Ψ_k, R_k со временем будет описываться дифференциальными уравнениями, задаваемыми функцией Гамильтона

$$\tilde{H} = (\alpha - \alpha_0) \left(\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0} R_1 + \frac{d\sigma_2}{d\alpha_0} R_2 \right) + \varepsilon \delta \sqrt{R_1 R_2} \sin(\Psi_1 + \Psi_2) + \dots \quad (50)$$

Из соответствующей канонической системы дифференциальных уравнений с точностью до членов первого порядка относительно ε и $\alpha - \alpha_0$ включительно имеем

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = -\varepsilon \delta \sqrt{R_1 R_2} \cos(\Psi_1 + \Psi_2), \\ \frac{d(\Psi_1 + \Psi_2)}{dt} = (\alpha - \alpha_0) \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{d\alpha_0} + \frac{1}{2} \varepsilon \delta \frac{R_1 + R_2}{\sqrt{R_1 R_2}} \sin(\Psi_1 + \Psi_2). \quad (51)$$

Ясно, что в первом приближении по ε и $\alpha - \alpha_0$ задача об устойчивости по отношению к переменным y_j ($j = 1, 2, 3, 4$) в исходной системе с функцией Гамильтона (29) эквивалентна задаче об устойчивости по отношению к переменным R_1, R_2 в системе (51). Пока-

жем, что в первом приближении по ε область параметрического резонанса (область неустойчивости) задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} + \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + \frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{d\alpha_0}\right|} \quad (52)$$

и что при невыполнении этих неравенств имеет место устойчивость.

Действительно, второе утверждение следует из того, что функция $V = (R_1 - R_2)^2 + P^2$ является интегралом системы (51), который, как нетрудно видеть, будет знакоопределенным по переменным R_1 и R_2 , если неравенства (52) не выполняются. Следовательно, согласно теореме Ляпунова об устойчивости, система (51) устойчива по отношению к переменным R_1, R_2 . Утверждение о неустойчивости следует из существования при выполнении неравенств (52) неограниченно растущего со временем частного решения системы (51):

$$R_1(t) = R_2(t) = R_2(0) e^{\varepsilon\delta\sqrt{1-d^2}t}, \quad \Psi_1 + \Psi_2 = \pi + \arcsin d \\ \left(d = \frac{\alpha - \alpha_0}{\varepsilon\delta} \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{d\alpha_0}\right).$$

Случай простого параметрического резонанса, например $2\sigma_1 = N$, рассматривается аналогично. Область неустойчивости задается неравенствами

$$-\frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d\sigma_1}{d\alpha_0}\right|} + \alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + \frac{\varepsilon\delta}{\left|\frac{d\sigma_2}{d\alpha_0}\right|}, \quad (53)$$

где $\delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, а

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(h_{0020} - h_{2000}) \cos Nt + h_{1010} \sin Nt] dt, \\ \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h_{1010} \cos Nt - (h_{0020} - h_{2000}) \sin Nt] dt. \quad (54)$$

216. Уравнение Матье. Уравнением Матье называют дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0, \quad (55)$$

где α и β — постоянные величины. Это уравнение часто встречается в различных задачах механики, например в теории движения Луны,

в задаче трех тел, в теории колебаний упругих систем и т. п. Поэтому уравнение Матье изучено очень подробно¹⁾).

Мы рассмотрим уравнение Матье для случая, когда оно мало отличается от дифференциального уравнения гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t)x = 0 \quad (0 \leq \varepsilon \ll 1). \quad (56)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение описывает колебания с собственной частотой ω . Согласно предыдущему пункту, при $\varepsilon \neq 0$ в плоскости параметров ω , ε могут возникать области неустойчивости, причем для малых значений ε области неустойчивости исходят из тех точек оси $\varepsilon = 0$, которые отвечают целым или полуцелым значениям частоты собственных колебаний:

$$2\omega = N \quad (N = 1, 2, 3, \dots). \quad (57)$$

Например, если качели в процессе их раскачивания моделировать маятником с периодически изменяющейся длиной, то интенсивное раскачивание качелей (т. е. неустойчивость их вертикального положения равновесия) возникает, когда удвоенная частота собственных колебаний маятника кратна частоте изменения его длины. На практике обычно наблюдается случай, когда в формуле (57) $N = 1$, т. е. когда частота изменения длины маятника вдвое больше частоты его собственных колебаний.

Используя общие формулы для областей параметрического резонанса, полученные в предыдущем пункте, найдем в первом приближении по ε области неустойчивости, отвечающие резонансу

$$2\omega = 1. \quad (58)$$

Если ввести импульс p_x , отвечающий координате x , по формуле $p_x = \dot{x}$, то уравнение (56) будет эквивалентно канонической системе двух уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega^2 x^2) + \frac{1}{2}\varepsilon \cos tx^2. \quad (59)$$

Введем новые переменные q и p при помощи канонического преобразования

$$p_x = \sqrt{\omega} p, \quad x = \frac{1}{\sqrt{\omega}} q. \quad (60)$$

Новая функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2\omega} \cos tq^2. \quad (61)$$

¹⁾ См., например: Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах.— М.: ИЛ, 1953; Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.— М.: Наука, 1967.

Из формул (53), (54), в которых $N = 1$, а

$$h_{2000} = \frac{1}{2\omega} \cos t, \quad h_{0020} = h_{1010} = 0,$$

получаем область неустойчивости в первом приближении по ε :

$$-\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2} < \omega < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (62)$$

Пример. Устойчивость эксцентриситетных колебаний твердого тела на эллиптической орбите. В п. 198 найдены плоские периодические колебания твердого тела, вызванные эллиптичностью орбиты его центра масс. В обозначениях п. 128, 198 эти колебания имеют вид

$$\varphi^* = \frac{2\varepsilon}{\omega_0^2 - 1} \sin v + \dots \quad (\omega_0 \neq 1), \quad (63)$$

где многоточием обозначены члены выше первого порядка относительно эксцентриситета орбиты ε .

Для исследования устойчивости движения (63) введем возмущение x по формуле

$$\varphi = \varphi^* + \frac{x}{1 + \varepsilon \cos v}. \quad (64)$$

Подставив это значение φ в уравнение (37) п. 198 и произведя его линеаризацию относительно x , получим, что с точностью до первой степени ε линейное уравнение возмущенного движения будет иметь вид уравнения Матье

$$\frac{d^2 x}{dv^2} + [\omega_0^2 + \varepsilon(1 - \omega_0^2) \cos v] x = 0. \quad (65)$$

При значении ω_0 , близком $1/2$, возникает область неустойчивости. В соответствии с формулой (62) она задается неравенствами ¹⁾

$$-\frac{3}{8}\varepsilon + \frac{1}{2} < \omega_0 < \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon. \quad (66)$$

¹⁾ Совершенно из других соображений область неустойчивости (66) получена в гл. 2 книги: Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А п п е л ь П. Теоретическая механика: В 2-х т.— М.: Физматгиз, 1960.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: В 2-х ч. М.: Наука, 1972.
3. Валле Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике.— М.: ИЛ, т. 1, 1948; т. 2, 1949.
4. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике.— М.: Наука, 1966.
5. Сусл ов Г. К. Теоретическая механика.— М.: Гостехиздат, 1946.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома взаимодействия 72
— динамики основная 72
— инерции 70, 71
— независимости действия сил 72,
73

Аксонд неподвижный 51
— подвижный 51

Амплитуда 153

Аномалия истинная 200

— средняя 204

— эксцентрическая 204

Апоцентр 202

Валентность канонического преобра-
зования 286

Вариация 30

Варьирование изоэнергетическое 341

— по Гауссу 32, 89

— по Журдену 31, 89

— синхронное 30

Вектор амплитудный главного ко-
лебания 359

— главный 75

— — сил тяготения 208

— Лапласа 199

Верчение 185, 186

Винт динамический 113

— — левый 114

— — правый 114

— кинематический 59

— — левый 59

— — правый 59

Возмущение 367

Вращение 39

— мгновенное 47

— стационарное 159

Время абсолютное 13

Герполодия 162

Гироскоп 172

— уравновешенный 175

Движение абсолютное 13, 60

— возмущенное 367

— замедленное 18

— криволинейное 14

— круговое 14

— мгновенно выптовое 47

— — поступательное 46, 47

— механическое 11

— невозмущенное 367

— — неустановившееся 368

— — установившееся 368

— — устойчивое 368

— — — асимптотически 368

— относительно центра масс 126

— относительное 60

— переносное 60

— плоское 53

— поступательное 46

— прямолинейное 14

— равномерное 18

— сложное 60, 63

— среднее 202

— стационарное 352

— сферическое 42

— ускоренное 18

— Эйлера — Пуансо 161, 162

Действие по Гамильтону 333

— по Лагранжу 342

Дельта амплитуды 154

Дипама 113

Динамика 12

Диссипация неполная 237

— полная 237

Длина приведенная физического ма-
ятника 150

Долгота восходящего узла 205

Задача двух тел 196

— динамики основная вторая 74

— — — первая 74

— трех тел общая 205

— — — ограниченная 205, 275

- Момент силы относительно точки 75
- Мощность непотенциальных сил 234
- Мультипликатор 394
- Наклонение орбиты 205
- Пить, идеальная 83
- Путация 178
- Пьютон 72
- Область возможности движения 151
- Определитель Гурвица 384
- Ось винтовая мгновенная 59
 - вращения 39
 - — мгновенная 47, 50
 - динамической симметрии 159
 - инерции глазная 121
 - — — центральная 121
 - координатная 20
 - центральная 114
- Пара вращений 67
 - сил 110
- Параметр винта 59
- Переменные Гамильтона 240
 - действие — угол 314
 - канонически сопряженные 241
 - Лагранжа 240
 - Рауса 249
- Перемещение винтовое 39
 - виртуальное 29, 30
 - возможное 27
 - действительное 29
 - поступательное 39
- Перицентр 202
- Плечо пары вращений 67
 - — сил 110
- Плоскость пары вращений 67
 - — сил 110
 - Пуансо 161
 - фазовая 150
- Поверхность абсолютно гладкая 186
- Показатель характеристический 394
- Покой мгновенный 47
- Поле силовое 78
 - — потенциальное 79
 - — — нестационарное 79
 - — — стационарное 79
 - — центральное 79
- Полодия 162
- Положение возможное 26
 - конечное 327
 - начальное 327
- Положение равновесия 151, 346
 - — неустойчивое 346
 - — устойчивое 347
- Полнос 40
- Потенциал 79
 - кинетический 232
 - обобщенный 238
 - приведенный 279, 352
 - Рауса 279, 352
- Преобразование Биркгофа 321
 - каноническое 286, 288, 289
 - — свободное 294
 - — унивалентное 286
 - Лежандра 241
- Прецессия 159, 160
 - регулярная 160
- Принуждение 90
- Принцип вариационный 85
 - — дифференциальный 85
 - — интегральный 85
 - виртуальных перемещений 93, 94
- Гамильтона — Остроградского 331, 334
 - Гаусса 90
 - Даламбера — Лагранжа 86, 87
 - детерминированности Ньютона — Лапласа 74
 - Журдена 89
 - Лагранжа 93, 94
 - Мопертюи — Лагранжа 342
 - наименьшего действия 338
 - — — Якоби 342
 - — — принуждения 90
 - невариационный 85
 - относительности Галилея 70
- Прозводная абсолютная 60
 - локальная 60
 - относительная 60
- Пространство абсолютное 13
 - конфигураций 33
 - координатное 33
 - фазовое 249
- Псевдокоордината 37
- Псевдоскорость 37
- Псевдоускорение 37
- Путь действительный 327
 - истинный 327
 - околный 327, 341
 - прямой 327, 341
- Работа полная 77
 - элементарная 77
- Равновесие 74, 346
 - тела на орбите относительно 211
- Равнодействующая 73, 105
- Радиус инерции 116

Расстояние угловое перицентра от узла 205
 Расход массы секундный 218
 Реакция связи 73
 — нормальная 186
 Резонанс 362
 — параметрический комбинационный 401
 — — простой 401

Связь 23

— геометрическая 24
 — голономная 24
 — двусторонняя 24
 — дифференциальная 24
 — идеальная 82
 — интегрируемая 24
 — кинематическая 24
 — конечная 24
 — неголономная 24
 — неосвобождающая 24
 — неудерживающая 24
 — односторонняя 24
 — освобождающая 24
 — склерономная 26
 — стационарная 26
 — удерживающая 24

Сепаратриса 152

Сила 11, 71

— активная 73
 — внешняя 74
 — внутренняя 74
 — гироскопическая 235
 — диссипативная 236
 — заданная 73
 — инерции 86
 — — кориолисова 142
 — — переносная 142
 — обобщенная 81
 — —, соответствующая псевдокоординатам 261
 — пассивная 73
 — потенциальная 79
 — реактивная 216, 218
 — трения 186
 — — покоя 186
 — — скольжения 186

Силы сходящиеся 106

Синус эллиптический 153

Система гироскопически несвязанная 352

— голономная 26
 — диссипативная 237
 — замкнутая 71
 — консервативная 234, 235

Система координат абсолютная 13

— — кеплигова 126
 — — неподвижная 13
 — — орбитальная 207
 — материальных точек 14
 — механическая 14
 — натуральная 240
 — неголономная 26
 — ненатуральная 240
 — несвободная 24
 — обобщенно консервативная 244
 — отсчета 13
 — — абсолютная 13
 — — инерциальная 70
 — — неподвижная 13
 — переменного состава 214
 — приведенная 279
 — приводимая 394
 — реономная 26
 — свободная 24
 — сил 74
 — — статически неопределимая 102
 — — — определимая 102
 — — сходящихся 106
 — — уравновешенная 100
 — — эквивалентная нулю 100
 — склерономная 26

Системы сил эквивалентные 100

Скобка Лагранжа 287

— Пуассона 282

Скольжение 185

Скорость 15

— абсолютная 60
 — вращения 185
 — возможная 27
 — гиперболическая 201
 — качения 185
 — космическая вторая 201
 — — первая 201
 — обобщенная 35
 — относительная 60
 — параболическая 201
 — перепосная 60
 — поступательного движения 46
 — пресцессии 159
 — радиальная 20
 — секторная 198
 — скольжения 185
 — собственного вращения 159
 — трансверсальная 20
 — угловая 19, 47
 — — мгновенная 50
 — фазовая 150
 — эллиптическая 201
 Спираль Архимеда 20
 Статика 12, 74
 Степени свободы системы 32
 Степень неустойчивости 387

- Тело абсолютно твердое 38
 — твердое 38
 — — переменного состава 222
 — — свободное 38
 — — динамически симметричное 159
 Тензор инерции 121
 Теорема Бернулли — Шаля 45
 — Вариньона 105
 — Гюйгенса 17
 — Гюйгенса — Штейнера 119
 — Кёнига 128
 — Кориолиса 62
 — Лагранжа 347
 — Лиувилля 294, 308
 — Ляпунова о неустойчивости вто-
 рая 378
 — — — — первая 377
 — — о приводимости 395
 — — об устойчивости 370
 — — — асимптотической 373
 — — — по первому приближе-
 нию 380
 — Ляпунова — Пуанкаре 396
 — Мощи 44
 — о движении центра масс 131
 — о сложении ускорений 62
 — о трех моментах 108
 — — силах 105
 — об изменении кинетического мо-
 мента 133, 134
 — — — — в неинерциальной си-
 стеме отсчета 143
 — — — кинетической энергии 139
 — — — — в неинерциальной си-
 стеме отсчета 143
 — — — количества движения 131
 — — — — в неинерциальной си-
 стеме отсчета 143
 — — — полной механической энер-
 гии голономной системы 234
 — об инвариантности множителя
 271
 — Пуансо 112
 — Рауса 253
 — Резаля 174
 — Флоке 393
 — Четаева о неустойчивости 376
 — Шаля 43
 — Эйлера 43
 — — об однородных функциях 234
 — Якоби 302
 — Якоби — Пуассона 283
 Теоремы Ляпунова о неустойчиво-
 сти 349, 350, 377, 378
 — Томсона — Тэта — Четаева 385,
 388, 389
 Теория возмущений 310, 311
 — гироскопа элементарная 175
 Тождество Пуассона 283
 Точка изображающая 33
 — материальная 14, 70
 — — изолированная 71
 — — переменного состава 215
 — фазовая 150
 Траектория точки 14
 Трение 186
 Угол путации 41
 — прецессии 41
 — собственного вращения 41
 Углы Эйлера 40
 Уравнение вековое 359
 — возвратное 395
 — Гамильтона — Якоби 301
 — — для консервативных и обоб-
 щенно консервативных систем
 303
 — — для систем с циклическими ко-
 ординатами 302
 — динамики общее 86
 — — — в обобщенных координатах
 228
 — Кеплера 204
 — Матье 405
 — Мещерского 218
 — — обобщенное 217
 — Пуассона 170
 — статики общее 94
 — характеристическое 394
 — частот 359
 Уравнения Анпеля 261
 — Воронца 255
 — возмущенного движения 367
 — Гамильтона 241, 242
 — канонические 241, 242
 — Лагранжа второго рода 228
 — Рауса 250
 — Уиттекера 246
 — Чаплыгина 256
 — Эйлера динамические 157
 — — кинематические 66
 — Якоби 247
 Ускорение 15, 49
 — абсолютное 60
 — возможное 27
 — вращательное 49
 — касательное 17
 — Кориолиса 62
 — нормальное 17
 — обобщенное 35
 — осесремительное 49
 — относительное 60
 — переносное 60
 — поступательного движения 46

- Ускорение тангенциальное 17
— угловое 19, 49
Условие Маиевского — Четаева 373
Устойчивость 368
— асимптотическая 368
— вековая 390
— временная 390
- Фокусы кинетические сопряженные 329
Форма нормальная уравнений Гамильтона 317
Формула гироскопии основная 173
— — приближенная 175
— Ривальса 49
— Циолковского 219
— Эйлера 48
Функция Гамильтона 242, 290, 298
— диссипативная Рэлея 237
— знакоопределенная 369
— знакопеременная 369
— знакостоянная 369
— Лагранжа 232
— Ляпунова 368
— определенно-отрицательная 369
— определенно-положительная 369
— производящая свободного канонического преобразования 295
- Функция Рауса 249
— силовая 79
- Центр 125
— инерции 116
— конечного вращения 45
— масс 116
— скоростей мгновенный 54
— ускорений мгновенный 56
Центроида неподвижная 55
— подвижная 55
- Число степеней свободы системы 32
— Циолковского 219
- Эквивалентность системы сил 100, 103
Элементы орбиты кеплеровские 204
Эллипсоид инерции 121
Энергия кинетическая 128
— полная 140
— — обобщенная 244
— потенциальная 79
— — приведенная 352
— ускорений 261, 263

Учебное издание

МАРКЕЕВ Анатолий Павлович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*

Редактор *А. Г. Мордвинцев*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *О. М. Березина, М. П. Дронова*

ИБ № 32631

**Сдано в набор 15.09.88. Подписано к печати 26.02.90. Формат 60×90/16.
Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная новая. Печать вы-
сокая. Усл. печ. л. 26. Усл. кр.-отт. 26. Уч.-изд. л. 27,77. Тираж 32 000 экз.
Заказ № 412. Цена 1 р. 20 к.**

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»

630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Имеются в продаже и высылаются наложенным платежом,
без задатка следующие книги:

Бишоп Р. Колебания: Пер. с англ.— 3-е изд., испр.—
1986.— 45 к.

Бутепп Н. В., Лупц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс
теоретической механики, т. 2. Динамика.— 3-е изд., испр.—
1985.— 1 р. 30 к.

Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и ко-
лебания упругих систем.— 1987— (Пробл. науки и техн. про-
гресса)— 1 р. 60 к.

*Заказы на перечисленные выше книги направляйте по ад-
ресу: 191186 Ленинград, Невский проспект, 28, магазин № 1
Ленкниги «Дом книги».*